

Table des matières

REMERCIEMENTS	i
CADRE DE LA THÈSE	iii
1 LES ONDES RADIO DANS LES ENVIRONNEMENTS PLANÉTAIRES	1
1.1 Les plasmas spatiaux	1
1.1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?	1
1.1.2 Où trouve-t-on des plasmas dans le système solaire ?	2
1.2 Les émissions radio naturelles dans le système solaire	9
1.2.1 Sursauts radio solaires	9
1.2.2 Émissions aurorales planétaires	10
1.2.3 Éclairs d'orages	12
1.3 De l'émission à la détection ?	12
I Propagation et Polarisation des ondes radio dans les plasmas froids homogènes	17
2 PROPAGATION D'ONDES DANS LES PLASMAS FROIDS HOMOGENES	19
2.1 Cadre général	20
2.1.1 Différents modèles de plasma	20
2.1.2 Échelles caractéristiques des plasmas	22
2.1.3 Propagation des ondes radio dans les plasmas astrophysiques	24
2.2 Description d'un plasma froid, homogène et illimité	26
2.2.1 Description « conducteur » du plasma	27
2.2.2 Description « diélectrique » du plasma	27
2.2.3 Equivalence des deux approches	28
2.2.4 Equation du mouvement des particules dans un plasma froid	30
2.2.5 Limite isotrope d'un plasma non magnétisé	32
2.3 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et non magnétisé	34
2.3.1 Relation de dispersion	34
2.3.2 Indice de réfraction	35
2.3.3 Courbes de dispersion	36
2.3.4 Vitesse de phase - vitesse de groupe	36
2.4 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et magnétisé	40
2.4.1 Relation de dispersion	40
2.4.2 Indice de réfraction en propagation oblique	41
2.4.3 Coupures et résonances	42
2.4.4 Ondes principales	45
2.4.5 Courbes de dispersion en propagation oblique	50

2.4.6	Surfaces d'indice de réfraction	55
3	POLARISATION DES ONDES RADIO DANS LES PLASMAS FROIDS HOMOGENES	59
3.1	Détermination de la polarisation des ondes radio dans les plasmas froids, homogènes et magnétisés	60
3.1.1	Polarisation dans un plasma non magnétisé	60
3.1.2	Polarisation dans un plasma magnétisé	62
3.1.3	Polarisation au voisinage d'une coupure et d'une résonance	69
3.2	Polarisation des ondes principales	70
3.2.1	Propagation parallèle $\theta = 0$	70
3.2.2	Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$	72
3.3	Paramètres de Stokes	75
3.3.1	Ellipse de polarisation	75
3.3.2	Expressions des paramètres de Stokes	76
3.3.3	Paramètres de Stokes et rapports de polarisation	77
4	GONIOPOLARIMÉTRIE DES DONNÉES RADIO ET MAGNÉTIQUES LORS DE LA TRAVERSÉE DES SOURCES DU SKR PAR LA SONDE CASSINI	81
4.1	Principe des études goniopolarimétriques	82
4.1.1	Antennes dipolaires	82
4.1.2	Principe de la goniopolarimétrie	83
4.2	Goniopolarimétrie et mesure magnétiques	85
4.2.1	Principes des mesures magnétiques	85
4.2.2	Détermination des paramètres de Stokes dans le repère lié au plan de polarisation	86
4.2.3	Application aux données de traversées des sources du SKR par Cassini	88
4.2.4	Détermination de la direction de propagation	92
4.3	Conclusion	96
II	Propagation des ondes radio dans les plasmas froids inhomogènes	97
5	TRACÉ DE RAYONS DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS FAIBLEMENT INHOMOGÈNES	99
5.1	Introduction	100
5.1.1	Propagation en milieu faiblement inhomogène	100
5.1.2	Notion de rayon lumineux	102
5.1.3	Tracé de rayons	105
5.2	Théorie du tracé de rayon dans les plasmas non magnétisés	106
5.2.1	De l'équation eikonale à l'équation des rayons	106
5.2.2	Equations du tracé de rayon	107
5.3	Théorie du tracé de rayons dans les plasmas magnétisés	107
5.3.1	De nombreuses méthodes	107

5.3.2	Les équations d'Haselgrove	110
5.3.3	Equations hamiltoniennes du tracé de rayon	111
5.3.4	Expression du système hamiltonien dans un magnéto-plasma froid	118
5.3.5	Instabilités et changements de variables	122
5.4	Limite isotrope du tracé de rayon en plasma magnétisé	123
5.5	Conclusion	124
6	ARTEMIS-P : CODE DE TRACÉ DE RAYONS DANS LES ENVIRONNEMENTS PLANÉTAIRES	127
6.1	Structure du code ARTEMIS-P	128
6.1.1	Structure du programme principal	128
6.1.2	Entrées décrites par l'utilisateur	129
6.1.3	Résolution des équations d'Haselgrove	131
6.1.4	Conditions de sortie	136
6.1.5	Paramètres calculés le long du rayon	136
6.2	Module Polarisation	137
6.2.1	Faible couplage de modes	137
6.2.2	Couplage de modes	137
6.2.3	Polarisation quasi-perpendiculaire du mode \oplus	138
6.3	Tests et illustrations du code ARTEMIS-P	139
6.3.1	Lois de Descartes en plasma non magnétisé	139
6.3.2	Propagation à travers l'ionosphère terrestre	142
6.4	Tests et illustrations du module Polarisation	153
6.4.1	Propagation parallèle	153
6.4.2	Propagation perpendiculaire	155
6.4.3	Propagation oblique	157
6.5	Conclusion	159
III	Applications	161
7	PROPAGATION « AU-DELÀ DE L'HORIZON » DES ÉCLAIRS D'ORAGE DE SATURNE	163
7.1	Les éclairs d'orage dans l'atmosphère de Saturne	163
7.2	Observations des signatures radio	164
7.3	Propagation au-delà de l'horizon	169
7.3.1	Hypothèse	169
7.3.2	Code de tracé de rayons	169
7.3.3	Modèle d'ionosphère de Saturne	170
7.3.4	Simulation des détections radio par la sonde Cassini	171
7.4	Résultats des simulations et discussion	173
7.4.1	Simulation de l'épisode E62	173
7.4.2	Conditions d'apparition des SED « au-delà de l'horizon »	175
7.5	Étude statistique des effets « au-delà de l'horizon »	176

7.5.1	Effet « au-delà de l'horizon » avant l'épisode	177
7.5.2	Effet « au-delà de l'horizon » après l'épisode	178
7.5.3	Ilots de SED « au-delà de l'horizon »	180
7.6	Conclusion	182
8	PROPAGATION DU RAYONNEMENT KILOMÉTRIQUE TERRESTRE À TRAVERS LES CAVITÉS AURORALES	201
8.1	Introduction	201
8.2	Mécanismes d'émission des ondes radio dans les régions aurorales . . .	203
8.2.1	Description du plasma dans les régions aurorales	203
8.2.2	Instabilité Maser Cyclotron	205
8.2.3	Application aux distributions des vitesses des électrons dans les sources aurorales	206
8.3	Modélisation du milieu de propagation	208
8.3.1	Modélisation de la distribution des vitesses des électrons	210
8.3.2	Modélisation de la cavité aurorale	210
8.3.3	Modélisation de la source du rayonnement	211
8.4	Simulations	212
8.4.1	Scénario de base	212
8.4.2	Influence de l'échelle des gradients	213
8.4.3	Influence de la taille de la cavité	215
8.4.4	Influence de la fréquence de l'onde	217
8.4.5	Influence de la densité et de l'énergie thermique des électrons . . .	217
8.4.6	Influence de l'énergie des électrons au pic de la distribution	221
8.5	Conclusion	224
	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	227
	Annexes	231
A	Publications et Communications	233
A.1	Publications en préparation	233
A.2	Actes de conférences (sans comité de lecture)	233
A.3	Communications en congrès et réunions	233
B	Propagation of the radio waves in and out of the auroral cavities	235
C	ARTEMIS-P : un code de tracé de rayons en milieu anisotrope et applications en radio astronomie	251
D	Explanation for the detection of Saturn's radio lightning « Over The Horizon » via ray-tracing in the kronian ionosphere	257
E	Diagramme Clemmow-Mullaly-Allis	277

F	Calcul des paramètres de Stokes	281
F.1	Détermination de l'expression de l'ellipse de polarisation	281
F.2	Détermination des amplitudes des composantes du champ électrique . . .	282
F.3	Expressions des paramètres de Stokes	283
F.4	Cas d'une onde partiellement polarisée	283
G	Signe du pas d'intégration dt_4 des équation d'Haselgrove en fonction du mode de propagation	285
H	Paramètres des simulations pour l'étude de la propagation de l'AKR dans les cavités aurorales terrestres	287
H.1	Scénario de base	287
H.2	Influence de l'échelle des gradients	287
H.3	Influence de la taille de la cavité	288
H.4	Influence de la fréquence de l'onde	288
H.5	Influence de la densité et de l'énergie thermique des électrons	289
H.6	Influence de l'énergie des électrons au pic de la distribution	290
	Bibliographie	291

Table des figures

1.1	Densités et températures de plasmas naturels et artificiels	3
1.2	Couplage entre les champs électromagnétiques et la mécanique des particules chargées d'un plasma	3
1.3	Vue des lignes de champ magnétique interplanétaires dans le plan de l'écliptique	4
1.4	Allure des profils en densité d'électrons des ionosphères terrestre et kromienne	5
1.5	Schéma de la structure d'une magnétosphère	6
1.6	Représentation de la magnétosphère jovienne vue de la Terre dans le ciel nocturne	7
1.7	Spectre composite des émissions radio joviennes, des émissions aurorales des autres planètes, des éclairs d'orage sur Saturne et Neptune et des sursauts solaires de type III	13
2.1	Évolution de la fréquence plasma du vent solaire en fonction de la distance au Soleil	25
2.2	Structure d'une onde plane dans un plasma froid magnétisé	29
2.3	Relation de dispersion pour un plasma isotrope	37
2.4	Vitesse de phase et vitesse de groupe en fonction de la pulsation de l'onde, pour un plasma froid isotrope.	38
2.5	Courbes de dispersion en propagation parallèle	46
2.6	Courbes de dispersion en propagation perpendiculaire	48
2.7	Courbes de dispersion dans le plan (n, f) pour un plasma anisotrope	51
2.8	Diagramme de Brillouin dans le plan (ω, k) pour un plasma anisotrope	52
2.9	Surface d'indice de réfraction du mode \ominus pour $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$	56
2.10	Topologie des surfaces d'indice de réfraction et de vitesse de phase. a) Ellipsoïde, b) Roue, c) Haltère.	57
3.1	Polarisation en milieu isotrope	62
3.2	Repère lié au champ magnétique externe \mathbf{B}_0	64
3.3	Repère (x', y', z') lié au vecteur d'onde \mathbf{k}	65
3.4	Polarisation d'une onde électromagnétique se propageant dans un plasma magnétisé.	68
3.5	Polarisation des modes propres en propagation parallèle dans un plasma froid magnétisé.	71
3.6	Polarisation des modes propres en propagation perpendiculaire dans un plasma froid magnétisé.	74
3.7	Ellipse de polarisation dans le plan (O, x, y)	76
4.1	Diagramme de réception d'un dipôle court	83

4.2	Diagrammes de réception de deux dipôles courts perpendiculaires	83
4.3	Définition du repère naturel de polarisation ($\mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_y'' = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z''$) des ondes en propagation oblique dans un plasma froid magnétisé.	87
4.4	Valeurs théoriques de q_{\oplus} et q_{\ominus} pour différentes valeurs de X et Y	90
4.5	Mesures des paramètres U et Q dans le repère lié au satellite et dans le repère lié au plan de polarisation.	91
4.6	Valeur du paramètre q , du taux de polarisation linéaire $l = \sqrt{u^2 + q^2}$, de l'inclinaison ($\eta = 0.5 \arctan(u/q)$) et de l'aplatissement de l'ellipse de polarisation ($\epsilon = 0.5 \arcsin v $) en fonction de l'écart entre la fréquence de l'onde et la fréquence cyclotron locale.	93
4.7	Schéma de l'ellipse de polarisation des modes RX et LO pour f proche de f_c	94
5.1	Vecteur d'onde et rayon en milieu isotrope	103
5.2	Structure géométrique de l'onde électromagnétique en milieu isotrope . .	103
5.3	Vecteur d'onde et rayon en milieu anisotrope	104
5.4	Structure géométrique de l'onde électromagnétique en milieu anisotrope .	104
5.5	Variation de l'angle α entre le vecteur d'onde et le rayon en fonction de l'angle θ entre le vecteur d'onde et le champ magnétique dans le cas $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$	104
5.6	Construction de Poeverlein d'un rayon en incidence oblique sur un plasma stratifié verticalement	109
5.7	Définition du vecteur vitesse radiale en milieu anisotrope	112
6.1	Structure du code ARTEMIS-P	128
6.2	Variation de l'erreur relative des lois de Descartes pour la réfraction en fonction du pas d'intégration minimum.	141
6.3	Test de la loi de Descartes pour la réfraction	141
6.4	Test de la loi de Descartes pour la réflexion	142
6.5	Profil en densité d'électrons de l'ionosphère terrestre.	144
6.6	Fréquence plasma à l'altitude de réflexion en fonction de la fréquence verticale équivalente de chaque rayon.	146
6.7	Réflexions sous l'ionosphère non magnétisée de rayons à 6.5 MHz	147
6.8	Construction de Poeverlein des rayons se propageant sous une ionosphère magnétisée	149
6.9	Réflexions sous l'ionosphère magnétisée des rayons à 6.5 MHz en mode \oplus .	150
6.10	Réflexions sous l'ionosphère magnétisée des rayons à 6.5 MHz en mode \ominus .	151
6.11	Fréquence de coupure du mode R à l'altitude de réflexion en fonction de l'angle d'incidence du rayon sur l'ionosphère.	152
6.12	Déviations latérales des rayons Ordinaire et eXtraordinaire en incidence verticale sous l'ionosphère terrestre.	152
6.13	Illustration de l'effet Faraday	156
6.14	Angle γ en fonction de l'angle θ en propagation quasi-perpendiculaire du mode \oplus	157
6.15	Vecteur champ électrique des modes R, L, Z et \ominus en propagation oblique .	160

7.1	Spectre dynamique des trois épisodes orageux entre le 23 et le 24 janvier 2006, enregistré par l'instrument RPWS de la sonde Cassini	165
7.2	Images des systèmes orageux responsables des SED pris par l'instrument Imaging Science Subsystem de la sonde Cassini	166
7.22	Épisodes observés et simulations présentant des « îlots » de SED détectés avant l'extension avant l'horizon.	181
7.24	Schéma explicatif de la formation des « îlots » de SED détectés en amont des extensions avant l'horizon.	181
7.3	Spectre dynamique de l'épisode E62 et schéma des positions relatives de l'orage et de Cassini	183
7.4	Schéma décrivant le piégeage temporaire des ondes radio sous une ionosphère variant avec le temps local	184
7.5	Profil en temps local du pic de densité d'électrons de l'ionosphère de Saturne à 35°S	185
7.6	Modèle du pic de densité d'électrons de l'ionosphère de Saturne à 35°S en fonction de temps local	186
7.7	Variation de la densité maximum d'électrons en fonction de la latitude	187
7.8	Trajectoires à deux dimensions de quatre rayons émis tangentiellement à la surface par une source située à 20 :00 TL aux fréquences 2 MHz, 4 MHz, 6 MHz et 8 MHz	188
7.9	Critère géométrique de détection d'un rayon par Cassini.	188
7.10	Visibilités observées et simulées de l'épisode E62	189
7.11	Observations et simulations associées des épisodes E1, F009, H66 et H356	190
7.12	Conditions ionosphériques d'apparition de SED « au-delà de l'horizon »	191
7.13	Morphologies d'épisodes présentant des extensions « au-delà de l'horizon »	192
7.14	Variabilité du nombre de SED détectés sur quatre épisodes consécutifs entre le 02 et 04 février 2008	193
7.15	Profils du pic de densité d'électrons à 35°S en fonction du temps local pour les modèles Fischer et STIM	194
7.16	Distribution du nombre d'épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode supérieure à 10 SED en fonction du temps local et de la latitude de Cassini	195
7.17	Distribution normalisée des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode en fonction du temps local de la source pris au début de l'épisode, pour différentes sélections	196
7.18	Distribution des épisodes ayant plus de 10 SED de fréquence inférieure à 7.5 MHz détectés avant l'horizon et tels que la sonde soit située dans l'hémisphère sud en fonction de la différence de densité électronique entre la position de l'orage au début de l'épisode et l'horizon, pour les modèles de Fischer et STIM	197
7.19	Distribution du nombre d'épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode supérieure à 10 SED, en fonction du temps local et de la latitude de Cassini	198

7.20	Distribution normalisée des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode en fonction du temps local de la source pris à la fin de l'épisode, pour différentes sélections	199
8.1	Mesures par le satellite FAST de l'énergie et de la densité des électrons dans une région source de l'AKR	203
8.2	Mesures par le satellite FAST de la distribution des vitesses des électrons dans une région source de l'AKR	206
8.3	Fréquence d'émission par Instabilité Maser Cyclotron en fonction de l'angle d'émission	209
8.4	Tracé de rayon dans une cavité large et angle de sortie en fonction de l'angle d'émission	214
8.5	Influence de la raideur des gradients aux bords de la cavité	216
8.6	Influence de la taille de la cavité	218
8.7	Influence de la fréquence de l'onde sur le diagramme de rayonnement pour une cavité de 100 km de diamètre	219
8.8	Influence de la fréquence de l'onde sur le diagramme de rayonnement pour une cavité de 300 km de diamètre	220
8.9	Influence de l'énergie thermique des électrons et de la densité à l'intérieur de la cavité	221
E.1	Diagramme CMA à haute fréquence	278
E.2	Surfaces de vitesse de phase pour les huit zones du diagramme CMA	279
F.1	Ellipse de polarisation dans le plan (O, x, y)	282
G.1	Signe de la quantité $a + b$ dans le plan (X, Y^2) pour les deux branches de la relation d'Appleton-Hartree, pour différentes valeurs de θ	286

Liste des tableaux

1.1	Paramètres caractéristiques des magnétosphères planétaires du système solaire	6
2.1	Ordres de grandeur pour certains plasmas naturels et artificiels de la densité d'électrons (ρ_e), la température électronique (T_e) et le champ magnétique externe (B_0), ainsi que des échelles caractéristiques	25
3.1	Cas particuliers d'états de polarisation et paramètres de Stokes associés	79
4.1	Récapitulatif des instruments radio et magnétique des sondes Ulysse, Cassini, STEREO et Juno	86
6.1	Paramètres d'initialisation des rayons pour les lois de Descartes en réfraction	140
6.2	Paramètres d'initialisation des rayons pour les lois de Descartes en réflexion	141
6.3	Paramètres d'initialisation des rayons pour la propagation sous l'ionosphère terrestre non magnétisée	145
6.4	Paramètres d'initialisation des rayons pour la propagation sous l'ionosphère terrestre magnétisée	148
6.5	Paramètres d'initialisation des rayons en mode R	153
6.6	Paramètres d'initialisation des rayons en mode L	154
6.7	Paramètres d'initialisation des rayons en mode Z	155
6.8	Paramètres d'initialisation des rayons en mode X	156
6.9	Paramètres d'initialisation des rayons en propagation oblique	157
7.1	Longitudes des orages en fonction du temps	167
7.2	Position de Cassini et localisation de l'orage durant l'épisode E62	168
7.3	Paramètres d'initialisation des rayons	171
8.1	Indice de réfraction proche de la source pour les fréquences 300 kHz, 500 kHz et 700 kHz.	217
8.2	Fréquence de coupure du mode X en plasma chaud et fréquence d'émission des ondes pour différentes valeurs de l'énergie des électrons accélérés	223

LES ONDES RADIO DANS LES ENVIRONNEMENTS PLANÉTAIRES

Sommaire

1.1 Les plasmas spatiaux	1
1.1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?	1
1.1.2 Où trouve-t-on des plasmas dans le système solaire ?	2
1.1.2.1 Le vent solaire	2
1.1.2.2 Les ionosphères planétaires	5
1.1.2.3 Les magnétosphères planétaires	5
1.2 Les émissions radio naturelles dans le système solaire	9
1.2.1 Sursauts radio solaires	9
1.2.2 Émissions aurorales planétaires	10
1.2.3 Éclairs d'orages	12
1.3 De l'émission à la détection ?	12

1.1 Les plasmas spatiaux

1.1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?

Un plasma est un gaz ionisé constitué de charges positives et négatives en proportions équivalentes. Les plasmas sont des milieux très conducteurs et l'égalité entre les densités de charge positives et négatives assure leur quasi-neutralité. Irving Langmuir est le premier à introduire le terme de « plasma » en 1928 [Langmuir 1928] pour qualifier le gaz quasi-neutre résultant d'une décharge électrique dans des tubes à vapeur de mercure. Faisant suite dans l'échelle des températures aux 3 états solide, liquide et gaz, les plasmas sont souvent qualifiés de « 4^{ème} état de la matière » malgré l'absence de transition de phase entre les gaz et les plasmas¹. Cet état est généralement produit par un gaz neutre chauffé à plusieurs milliers de degrés ou soumis à de forts champs électriques. Lors des collisions entre particules, les électrons des couches externes sont arrachés aux atomes : le gaz s'ionise.

L'état de plasma, naturel ou artificiel, regroupe des milieux très disparates : les échelles

1. Tout changement d'état se déroule à température constante pour une pression donnée et est caractérisé par une quantité d'énergie spécifique appelée *chaleur latente*. Lorsque la température augmente, la transition gaz-plasma se fait graduellement et ne comporte aucune transition de phase.

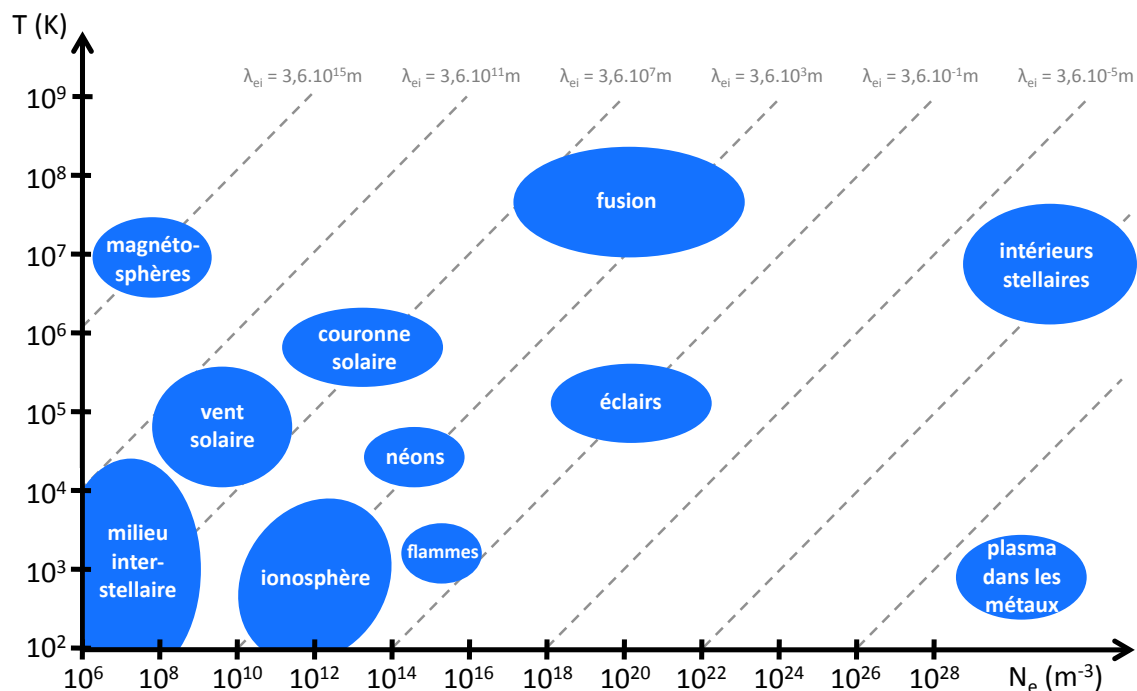


FIGURE 1.1 – Densités et températures de plasmas naturels et artificiels. Les lignes grises correspondent à l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des électrons (voir §2.1.2). D'après [Quémada 1968].

de densités et de températures rencontrées varient de plusieurs ordres de grandeur ou dizaines d'ordre de grandeurs (figure 1.1).

Comportements physiques des plasmas

Dans un gaz neutre, les principales interactions entre particules régissant la dynamique du fluide sont les collisions entre particules neutres, qui sont des interactions à courte portée. Dans un plasma, du fait de la charge des particules, les interactions électromagnétiques apparaissent. Ces interactions coulombiennes à longue portée induisent un comportement collectif des particules du plasma : chacune sera sensible au champ électromagnétique moyen créé par l'ensemble des autres particules chargées. La dynamique des particules dépend donc des champs électromagnétiques moyens et réciproquement. La figure 1.2 illustre ce couplage entre champs électromagnétiques et mécanique. Dans un gaz neutre, la partie électromagnétique et la partie mécanique sont donc découplées : la première décrira la propagation des perturbations électromagnétiques à travers le gaz neutre, et la deuxième décrira la propagation des perturbations liées aux mouvements des particules. La propagation de n'importe quelle information au sein d'un plasma entraîne des perturbations mécaniques et électromagnétiques : ce couplage permet l'existence d'une grande variété de modes de propagation.

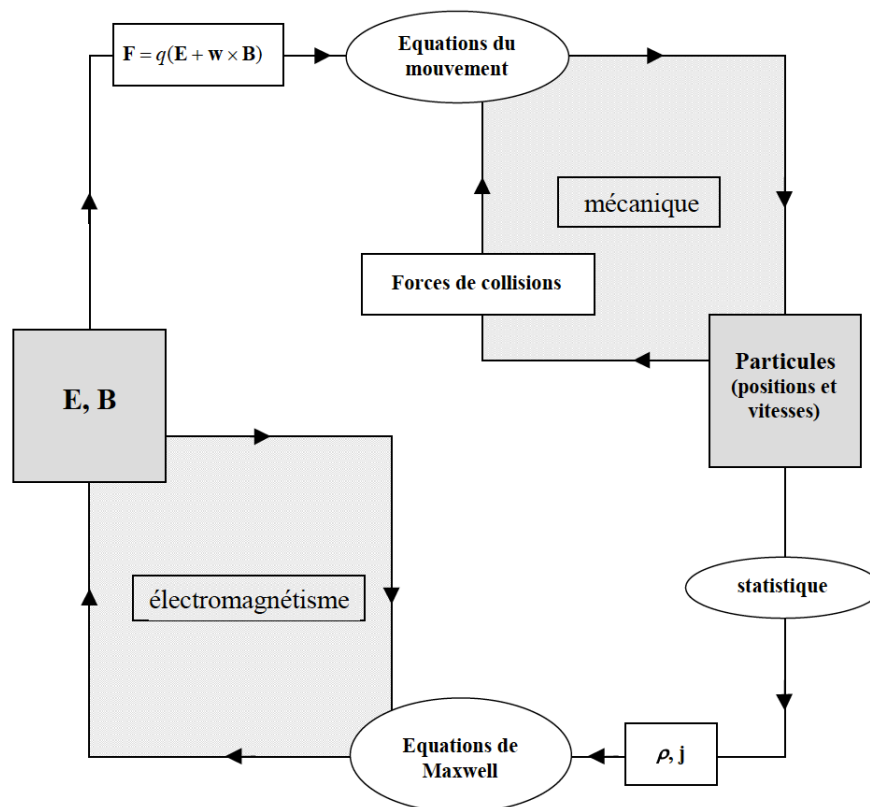


FIGURE 1.2 – Couplage entre les champs électromagnétiques et la mécanique des particules chargées d'un plasma. D'après [Rézeau 2007].

1.1.2 Où trouve-t-on des plasmas dans le système solaire ?

Il existe peu de sources naturelles de plasma à la surface de la Terre. Le développement de la radio astronomie et de la recherche spatiale a cependant permis de découvrir que les plasmas sont très présents dans le système solaire. On estime désormais que 95% de l'Univers est constitué de matière à l'état de plasma.

1.1.2.1 Le vent solaire

La source principale de plasma dans le système solaire est le Soleil lui-même. La haute atmosphère du Soleil, appelée la *couronne*, est située à 2000 km d'altitude au dessus de la photosphère². C'est un milieu ténu ($N_e \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$) comparativement aux couches plus internes du Soleil et la température peut y atteindre plusieurs millions de Kelvin. Les hautes températures régnant dans la couronne solaire confèrent aux électrons du plasma coronal une vitesse supérieure à la vitesse de libération de l'attraction solaire, ce qui leur permet de s'échapper vers le milieu interplanétaire. L'équilibre entre les densités d'électrons et d'ions dans le plasma coronal est alors rompu : celui-ci se charge positivement, entraînant l'apparition d'un champ électrique dirigé vers le milieu interplanétaire. Les ions du plasma coronal sont alors accélérés dans la direction du champ électrique induit, ce qui leur permet à leur tour de s'échapper dans le milieu interplanétaire et de former ainsi le **vent solaire**.

Le vent solaire, soufflé en permanence par le Soleil³ à des vitesses supersoniques allant de 400 km.s^{-1} à 800 km.s^{-1} , crée donc une « bulle » de plasma coronal (essentiellement composée d'électrons, de protons, et d'ions He^{2+} dits « particules α »), appelée *héliosphère*. L'*héliopause*, frontière de l'héliosphère, sépare le milieu sous l'influence du vent solaire du milieu interstellaire et se situe entre 100 et 200 Unités Astronomiques (UA⁴), bien au-delà des limites de la ceinture de Kuiper. Toutes les planètes du système solaire sont donc contenues dans l'héliosphère et baignent dans le vent solaire, dont les caractéristiques physiques varient avec la distance au Soleil. La conservation du flux de masse éjectée par le Soleil, en expansion à une vitesse quasi-constante, entraîne une variation de la densité d'électrons inversement proportionnelle au carré de la distance au Soleil. Les mesures montrent que la densité d'électrons du vent solaire au voisinage de l'orbite terrestre est de l'ordre de 7 électrons par cm^3 .

Les observations ont également mis en évidence l'existence d'un champ magnétique interplanétaire, dont les lignes de champ forment une spirale d'Archimède centrée sur le Soleil (figure 1.3). L'échappement du plasma coronal se produit dans une région de la couronne où les forces magnétiques ne sont plus suffisantes pour l'entraîner dans la

2. La photosphère est la région du Soleil à partir de laquelle l'opacité devient suffisamment faible pour permettre aux photons de s'échapper des régions internes. Par convention, la base de la photosphère définit la surface du Soleil, séparant les régions internes, inaccessibles aux mesures directes, des régions externes. La « surface » du Soleil est définie par l'altitude à partir de laquelle les photons de 500 nm de longueur d'onde peuvent se propager librement.

3. Le Soleil perd ainsi à peu près un milliard de tonnes de matière par seconde, représentant une fraction infime de la masse totale du Soleil $M_{\odot} \sim 10^{30} \text{ kg}$.

4. 1 UA = 149 597 871 km.

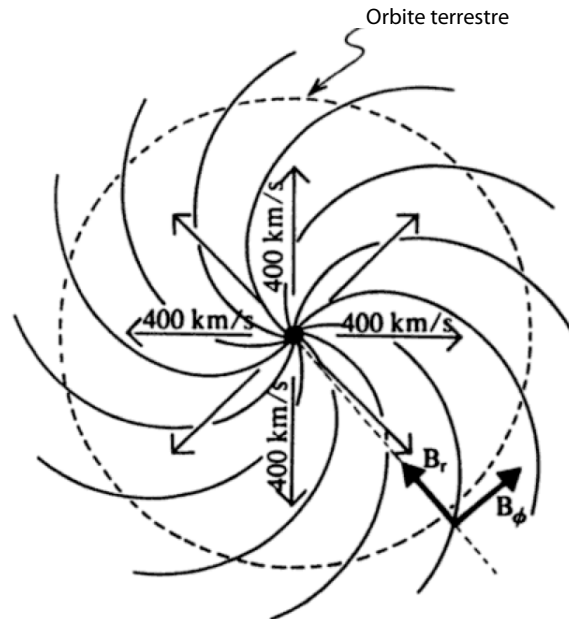


FIGURE 1.3 – Vue des lignes de champ magnétique interplanétaire dans le plan de l'écliptique. L'échappement radial du plasma coronal (à une vitesse de $400 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$), associé à la rotation solaire, enroule ces lignes de champ magnétique comme une spirale d'Archimède. Cette configuration entraîne l'égalité des composantes radiale et azimutale du champ magnétique interplanétaire au voisinage de l'orbite terrestre. D'après [Encrenaz 2003]

rotation solaire : les lignes de champ magnétique sont gelées dans le plasma coronal et contraintes à le suivre dans son échappement radial. Les pieds des lignes de champ restent cependant solidaires de la photosphère en rotation. Cela conduit à cet enroulement en spirale des lignes de champ magnétique solaire à travers le milieu interplanétaire. L'intensité du champ magnétique interplanétaire, au voisinage de l'orbite terrestre, est de l'ordre de quelques nT.

En plus du vent solaire, le milieu interplanétaire contient des poussières, des rayons cosmiques⁵ et du gaz neutre d'origine interstellaire. L'existence de conditions physiques variées à travers l'héliosphère font du vent solaire un excellent laboratoire naturel de physique des plasmas.

1.1.2.2 Les ionosphères planétaires

L'ionosphère est la partie supérieure d'une atmosphère planétaire dont le gaz neutre a été ionisé par les radiations solaires de faibles longueurs d'onde (UV- Extrême UV) et par les impacts de particules énergétiques provenant de la galaxie (rayons cosmiques) ou du Soleil. Une fois arrachés aux atomes neutres, les électrons produits par ces mécanismes d'ionisation peuvent être à nouveau « capturés » par les ions par des mécanismes de recombinaison. Le profil de densité d'électrons de l'ionosphère résulte donc de l'équi-

5. Populations de noyaux atomiques très énergétiques produits dans les atmosphères stellaires et accélérés lors de leur trajet à travers la galaxie, ou directement par le Soleil lors des éruptions de matière.

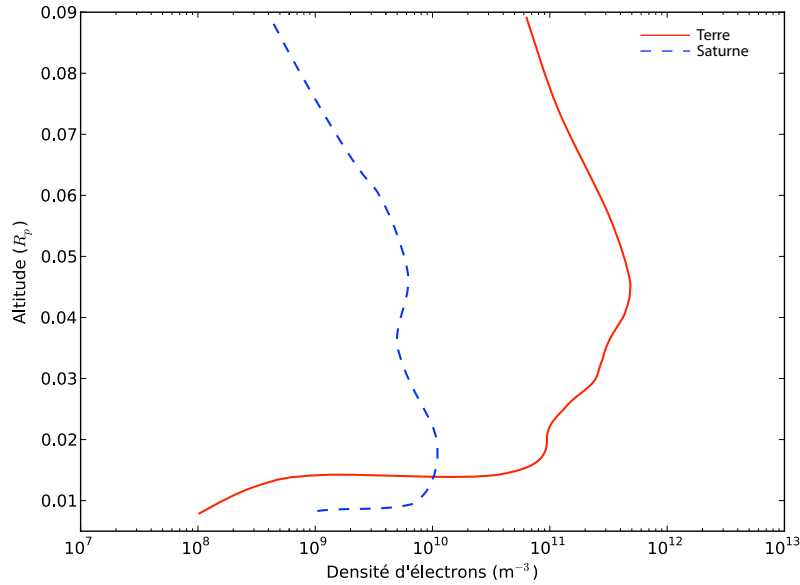


FIGURE 1.4 – Allure des profils en densité d'électrons des ionosphères terrestre et kronienne en fonction de l'altitude exprimée en rayons planétaires. D'après [Strobel 2000] pour l'ionosphère terrestre et [Nagy 2009] pour l'ionosphère de Saturne aux moyennes latitudes.

libre entre le taux d'ionisation et le taux de recombinaison.

L'ionosphère terrestre est située au-dessus de 70 km d'altitude et la densité d'électrons maximale $N_e \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ se situe vers 300 km d'altitude (figure 1.4). L'énergie caractéristique des électrons ionosphériques est de l'ordre de 0,1 à 1 eV. L'ionosphère est donc une couche de plasma froid dans la haute atmosphère terrestre. Elle joue le rôle de filtre passe haut pour les ondes radio : les ondes ayant une fréquence inférieure à la fréquence plasma du pic de densité électronique ($f_p \text{ [kHz]} \approx 9\sqrt{N_e \text{ [cm}^{-3}]} = 9 \text{ MHz}$) seront réfléchies par les couches ionosphériques.

1.1.2.3 Les magnétosphères planétaires

Tous les objets du système solaire sont autant d'obstacles à la propagation du vent solaire dans l'héliosphère. Ce vent arrive sur ces objets à des vitesses largement supérieures à la vitesse du son dans le plasma. Il se crée alors un choc en amont de l'obstacle, à travers lequel le plasma passe brutalement d'une vitesse supersonique à une vitesse subsonique. Pour les objets ne possédant pas de champ magnétique propre, le vent solaire bute directement sur le corps central ou sa haute atmosphère qui est alors entraînée dans son sillage. Dans le cas des planètes possédant un champ magnétique intrinsèque (Mercure, Terre, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune), c'est ce dernier qui constitue l'obstacle au vent solaire. Une cavité magnétique se creuse alors dans l'écoulement du plasma interplanétaire, abritant la planète et son atmosphère : c'est la *magnétosphère*. À l'intérieur de ce cocon protecteur, la dynamique des particules chargées est dominée par le champ magnétique planétaire. Il est isolé du milieu interplanétaire par la *magnétopause*, région limite où la pression magnétique du champ interne s'équilibre avec la pression dyna-

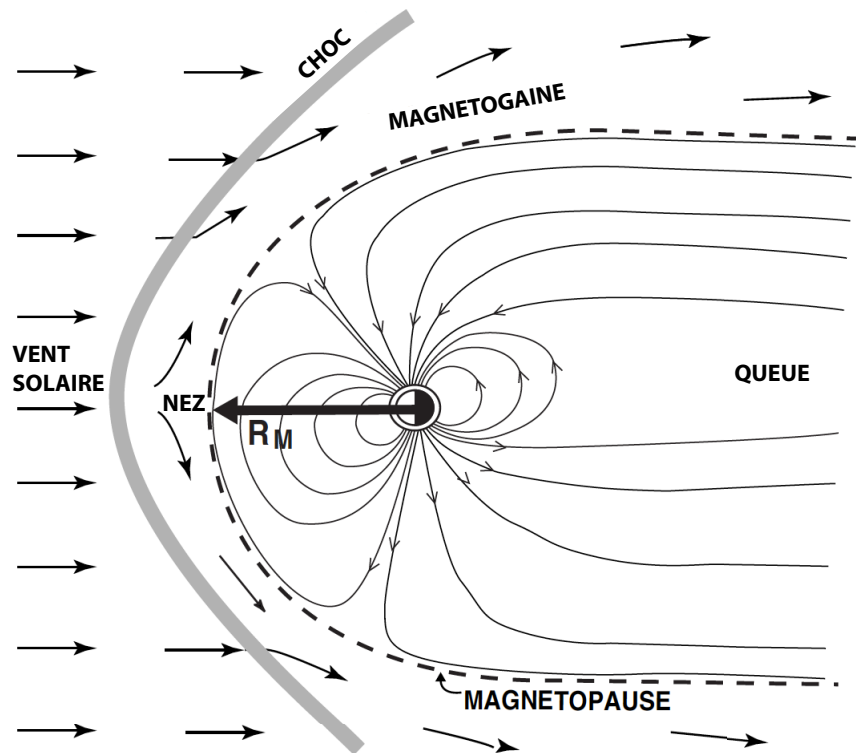


FIGURE 1.5 – Schéma de la structure d'une magnétosphère. Le vent solaire supersonique en amont de la magnétosphère devient subsonique en franchissant le choc et est comprimé et dévié dans la magnétogaine. La magnétopause, située à une distance R_M de la planète, est la limite entre la magnétosphère et le milieu interplanétaire. Le champ magnétique planétaire, dipolaire en première approximation proche de la planète, est comprimé à l'avant de la magnétosphère et étiré à l'arrière, dans la queue de la magnétosphère. D'après [Bagenal 2000].

mique du vent solaire. Entre le choc et la magnétopause se trouve la *magnétogaine* au sein de laquelle le flot du vent solaire est comprimé, ralenti et dévié. La forme de la magnétosphère est modelée par le vent solaire qui la comprime côté jour (on parle de « nez » de la magnétosphère) et l'étire côté nuit, formant ainsi la « queue » de la magnétosphère (figure 1.5). La taille de la magnétosphère dépend aussi bien de l'intensité du champ magnétique planétaire que de la densité du vent solaire à l'orbite de la planète. Les champs magnétiques équatoriaux à la surface de Saturne et de la Terre sont d'intensités comparables, mais la densité du vent solaire est beaucoup faible au niveau de l'orbite de Saturne : la magnétosphère kronienne est donc proportionnellement deux fois plus étendue que celle de la Terre (table 1.1). La forte intensité du champ magnétique de Jupiter et son éloignement du Soleil font de la magnétosphère jovienne la plus étendue du système solaire. La figure 1.6 représente schématiquement la taille de la magnétosphère de Jupiter dans le ciel nocturne si elle était visible.

Sources de plasma dans les magnétosphères Bien que séparées du milieu interplanétaire par la magnétopause, les magnétosphères ne sont pas vides de plasma. Il existe

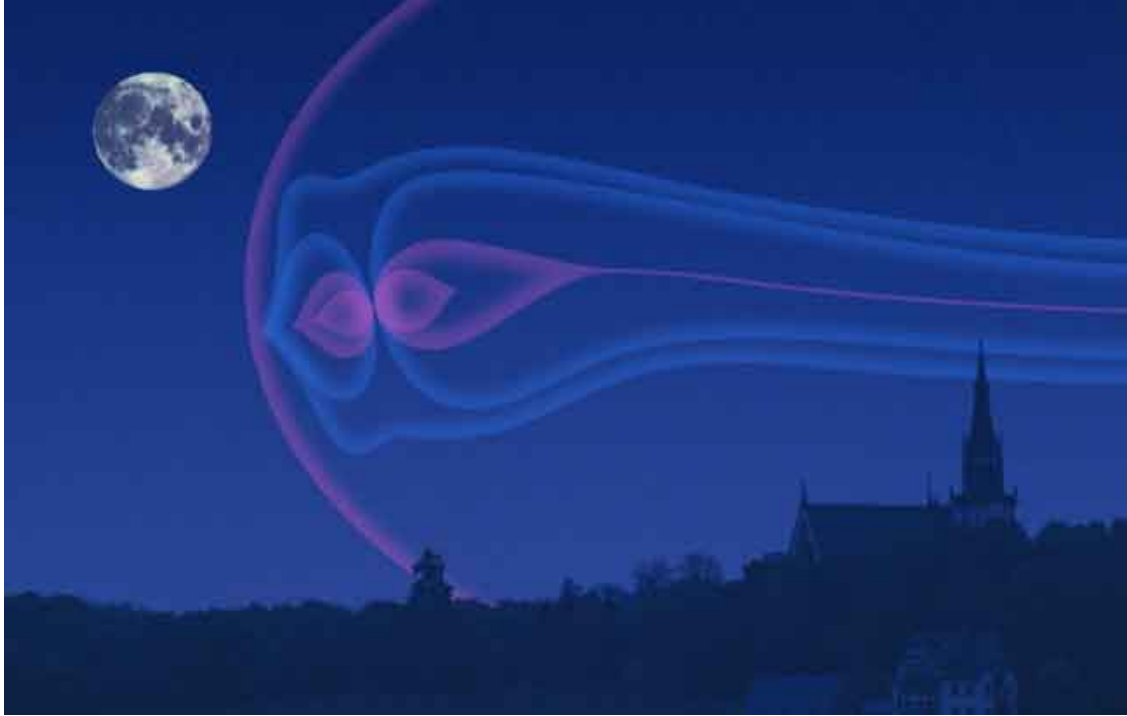


FIGURE 1.6 – Représentation de la magnétosphère jovienne vue de la Terre dans le ciel nocturne. Crédits : http://www.nap.edu/jhp/oneuniverse/linked_energy_148-149.html

		Mercure	Terre	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Distance au Soleil	UA	0,4	1	5,2	9,5	19	30
Rayon planétaire équatorial R_p	km	2 439	6 378	71 492	60 268	25 559	24 764
	R_T	0,382	1	11,21	9,45	4,0	3,88
Moment dipolaire	G.km ³	5.10 ⁷	8.10 ¹⁰	1,6.10 ¹⁵	4,6.10 ¹³	4,1.10 ¹²	2,1.10 ¹²
Champ équatorial	G	0,003	0,31	4,3	0,21	0,23	0,14
Inclinaison [B_p, Ω]	°	+14°	+11,7°	-9,6°	0°	-58,6°	-46,9°
Rayon type de la magnétopause (R_M)	km	3,7.10 ³	6,4.10 ⁴	4,3.10 ⁶	1,2.10 ⁶	4,7.10 ⁵	5,7.10 ⁵
	R_p	1,5	10	60	20	18	23
Sources de plasma	*	VS	VS, A	S, A, VS	S, A, VS		S, A, VS

TABLE 1.1 – Paramètres caractéristiques des magnétosphères planétaires du système solaire. * : VS : Vent Solaire, A : Atmosphère, S : Satellites ou anneaux. D'après [Bagenal 2000] et [Encrenaz 2003]

différentes sources possibles de plasma magnétosphérique :

Le vent solaire. Dans le cadre de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale⁶, la cavité magnétosphérique est totalement imperméable aux particules du vent solaire s'écoulant autour de la magnétopause. Dans la réalité, de nombreuses observations contredisent cette hypothèse : par exemple, l'activité des aurores terrestres⁷ semble fortement corrélée aux variations des paramètres du vent solaire (vitesse, pression dynamique ...). Le modèle de « magnétosphère ouverte » de Dungey [Dungey 1961] permet de rendre compte qualitativement de ces observations. Ce modèle prédit que les lignes de champs magnétiques planétaires à haute latitude sont ouvertes et peuvent se reconnecter aux lignes de champs interplanétaires à travers la magnétopause. Cette connexion entre champ magnétique planétaire et interplanétaire permet à environ 1% du flux de matière du vent solaire de pénétrer dans la magnétosphère.

Les atmosphères planétaires. Les ionosphères sont des couches de plasma froid dans les hautes atmosphères planétaires. Les particules suffisamment énergétiques peuvent s'échapper de l'attraction gravitationnelle de la planète et venir alimenter le plasma magnétosphérique. La composition du plasma ionosphérique reflète la composition de l'atmosphère planétaire : le plasma ionosphérique terrestre sera essentiellement composé d'ions O^+ tandis que celui des planètes géantes gazeuses sera constitué majoritairement d'ions H^+ .

Les satellites et les anneaux. Les anneaux ainsi que les satellites actifs ou inertes sont des sources importantes de plasma. L'érosion de la surface ou de l'atmosphère des satellites, ainsi que les phénomènes de volcanisme ou de geysers, injectent des particules de gaz neutres dans la magnétosphère. Ces particules sont alors ionisées par photodissociation ou par collisions avec les particules énergétiques du plasma magnétosphérique. Ainsi, le volcanisme d'Io injecte dans la magnétosphère Jupiter environ 10^{28} ions/s (essentiellement S^+ et O^+) et autant d'électrons. Le criblage de la surface glacée d'Europe produit environ 10^{27} ions/s. Dans la magnétosphère de Saturne, le cryovolcanisme d'Encelade, l'érosion de Titan et les anneaux sont les principales sources de plasma interne.

La nature des sources du plasma interne de la magnétosphère peut être déduite de sa composition ionique. La table 1.1 indique l'origine du plasma interne pour chaque magnétosphère du système solaire.

Distribution du plasma L'intérieur des cavités magnétosphériques est fortement inhomogène sur différentes échelles. En effet, le plasma magnétosphérique n'est pas statique : il est constamment alimenté par les différentes sources, détruit par différentes interactions (plasma-neutres, phénomènes de recombinaison ...) et transporté à travers la magnétosphère par des processus de diffusion et de circulation à grande échelle.

6. c'est-à-dire lorsqu'on néglige la résistivité du plasma

7. Les aurores boréales et australes résultent de la précipitation d'électrons énergétiques à haute latitude dans l'atmosphère terrestre.

La matière à l'état de plasma est omniprésente dans le système solaire. La nature chargée des particules de plasma impose un fort couplage entre champs électromagnétiques et dynamique des particules. Les conditions variées de densité, de température et la présence de différentes sources de champs magnétiques (solaire, interplanétaire et planétaire) font des plasmas spatiaux des milieux complexes pouvant influencer sur la propagation des ondes électromagnétiques à travers le système solaire.

1.2 Les émissions radio naturelles dans le système solaire

La radioastronomie est née dans la première moitié du XX^{ème} siècle, en marge des développements techniques des moyens de télécommunication. L'existence des ondes radio, prédite par James Maxwell à la fin des années 1870, est mise en évidence expérimentalement par Heinrich Hertz en 1888. Mais à la fin du XIX^{ème} siècle, les détecteurs ne sont pas assez sensibles pour capter les émissions naturelles des corps célestes ou de la Galaxie. Dès lors, la partie basse fréquence du spectre électromagnétique est uniquement exploitée pour les télécommunications longues distances. C'est ainsi qu'en 1901, Marconi établit la première liaison radio transatlantique entre Terre-Neuve et les Cornouailles. Ce n'est qu'en 1931 que Jansky identifie la première émission radio naturelle d'origine extraterrestre. Ingénieur pour les laboratoires Bell Telephone, Karl Jansky est chargé d'étudier les sources possibles de perturbations du service radiotéléphonique transatlantique en ondes courtes ($\lambda \sim 10$ m). Deux sources de parasites naturels sont alors identifiées : les éclairs d'orages proches et lointains, ainsi qu'une source radio intense que Jansky localise proche du centre galactique, dans la constellation du Sagittaire. Cette découverte marque la naissance de la radioastronomie. Les premières observations des émissions radio solaires et planétaires furent également fortuites : en 1942, J.S. Hey, radariste mobilisé pour la Royal Navy identifie les premières émissions radio associées aux éruptions solaires qui brouillèrent les écrans RADAR pendant trois jours ; en 1955, Burke et Franklin détectent les émissions radio de Jupiter en cherchant à étalonner un réseau d'antennes par la nébuleuse du Crabe [Burke 1955].

Cette thèse s'intéresse à la propagation des ondes radio très basses fréquences allant de quelques kHz à quelques dizaines de MHz. Les principales émissions naturelles dans le système solaire correspondant à cette gamme de fréquences sont les sursauts radio solaires, les émissions aurorales planétaires ainsi que les éclairs d'orages. La compréhension des travaux détaillés dans cette thèse ne nécessite pas la connaissance des différents mécanismes d'émission. Nous en rappellerons cependant les grandes lignes, afin de saisir les motivations qui ont mené à ce travail.

Les émissions radio observées dans le système solaire, en dehors des composantes thermiques du Soleil et des atmosphères planétaires, sont tellement intenses qu'elles ne peuvent avoir une origine thermique : les températures nécessaires pour obtenir de telles émissions ne sont jamais atteintes dans les environnements planétaires. Ces émissions radio non thermiques sont principalement produites par des interactions résonantes entre des ondes de plasma ou électromagnétiques et des distributions instables d'électrons

énergétiques (de quelques keV à quelques MeV).

1.2.1 Sursauts radio solaires

Les sursauts radio solaires sont la signature radio des éruptions solaires qui, en libérant des énergies colossales ($\sim 10^{25}$ J), chauffent le plasma coronal et accélèrent les particules chargées à haute énergie. Ces émissions radio sont très intenses, pouvant dépasser de plusieurs ordres de grandeurs le niveau d'émission radio du Soleil calme en quelques secondes. Les sursauts radio basse fréquence ($f < 3$ GHz) sont produits par conversion non linéaire de l'énergie des électrons vers des ondes de plasma et au-delà, vers des ondes électromagnétiques à la fréquence plasma locale ($f = f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e}}$ où N_e est la densité d'électrons locale, e et m_e la charge et la masse de l'électron et ϵ_0 la permittivité du vide) et/ou à ses harmoniques ($f = 2f_p$).

Il existe plusieurs types de sursauts radio, classés en fonction de leur morphologie observée sur spectre dynamique (un spectre dynamique représente l'intensité du signal détecté en fonction du temps et de la fréquence). Les sursauts de *type II* résultent de la relaxation de distributions d'électrons accélérés par une onde de choc. Ces sursauts sont la signature radio des *éjections coronales de masse* qui expulsent une bulle de plasma coronal supersonique à travers l'héliosphère. Les sursauts solaires de *type III* (figure 1.7), par des mécanismes probablement similaires aux types II, résultent de la relaxation de distributions d'électrons accélérés le long des lignes de champ magnétiques ouvertes vers le milieu interplanétaire.

1.2.2 Émissions aurorales planétaires

Les planètes fortement magnétisées du système solaire (la Terre et les quatre planètes géantes) sont le siège d'émissions radio très intenses sur une large gamme de fréquences allant du kHz à quelques MHz. Ces émissions sont induites par les précipitations d'électrons énergétiques le long des lignes de champ magnétiques aux hautes latitudes, dans des régions peu denses en plasma et fortement magnétisées. Une partie de ces électrons accélérés pénètrent dans la haute atmosphère et produisent les émissions aurorales observées de l'infra-rouge (IR) jusqu'à l'ultra-violet (UV) et aux rayons X. La part d'électrons accélérés qui n'est pas perdue par collision dans l'atmosphère génère les émissions radio aurorales. Pour la Terre, Saturne, Uranus et Neptune, la gamme de fréquence de ces émissions radio aurorales est inférieure au MHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde kilométriques. Ces émissions sont dénommées « xKR », où « x » fait référence au nom de la planète⁸ et « KR » pour *Kilometric Radiation*. Dans le cas de Jupiter, les émissions radio peuvent atteindre la dizaine de MHz, correspondant à des longueurs d'onde allant du kilomètre au décamètre. La présence du satellite Io et de son tore de plasma dans la magnétosphère jovienne rend le spectre des émissions radio de Jupiter beaucoup plus riche que celui des autres planètes (figure 1.7).

8. Dans le cas de la Terre, ces émissions sont souvent dénommées *Auroral Kilometric Radiation* par les géophysiciens et *Terrestrial Kilometric Radiation* par les astronomes.

Les caractéristiques de ces émissions communes à toutes les émissions radio aurorales (*intensité élevée des émissions, mode de propagation « eXtraordinaire »⁹, polarisation circulaire droite*¹⁰, *localisation des radio sources proches des pôles magnétiques, fréquence d'émission voisine de la fréquence cyclotron locale* $f_c = eB/2\pi m_e \dots$ [Zarka 2004]) supposent un mécanisme d'émission non thermique (la température de brillance des sources est supérieure à 10^{18} K). Le mécanisme d'émission aujourd'hui largement reconnu est l'*Instabilité Maser Cyclotron* (IMC) [Wu 1979], [Wu 1985]. Cette instabilité résulte de l'interaction résonante entre les électrons énergétiques précipitant ou remontant par effet miroir¹¹ le long des lignes de champ magnétique aux hautes latitudes et une onde électromagnétique polarisée circulairement droite proche de la fréquence de coupure caractéristique du plasma¹². Cette résonance se produit quand, dans le référentiel d'un électron énergétique, ce dernier tourne autour du champ magnétique ambiant à la même fréquence que le champ électrique de l'onde :

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = \frac{\omega_{ce}}{\Gamma} \quad (1.1)$$

avec

ω	la pulsation de l'onde,
k_{\parallel}	la composante du vecteur d'onde parallèle au champ magnétique,
v_{\parallel}	la composante du vecteur vitesse de l'électron parallèle au champ magnétique,
$\omega_{ce} = \frac{eB_0}{m_e}$	la pulsation cyclotron de l'électron autour d'une ligne de champ magnétique,
Γ	le facteur de Lorentz des électrons énergétiques

Le terme de gauche correspond à la pulsation apparente de l'onde dans le référentiel de l'électron dérivant à une vitesse v_{\parallel} le long d'une ligne de champ magnétique \mathbf{B}_0 , et le terme de droite correspond à la pulsation cyclotron électronique $\omega_{ce} = eB_0/m_e$ en prenant compte des corrections relativistes ($\Gamma = [1 - (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)/c^2]^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz). Lorsque cette condition est remplie, un transfert d'énergie entre les électrons et l'onde est possible. L'amplification ou l'atténuation de l'onde dépend de la distribution de vitesses des électrons $f(v_{\perp}, v_{\parallel})$ dans la source, qui doit contenir une réserve d'énergie libre pour que l'onde puisse être amplifiée. Le taux de croissance de l'onde¹³ lors de cette

9. Voir chapitre 2.

10. Cela signifie que le vecteur champ électrique de l'onde tourne dans le sens direct par rapport au champ magnétique externe au cours de la propagation.

11. Lorsque des particules chargées spiralant autour des lignes de champ magnétique atteignent une région où le champ magnétique est plus intense, i.e. où il y a un resserrement des lignes de champ magnétique (on peut parler de goulot magnétique), la vitesse des particules parallèle à la direction du champ magnétique décroît et peut aller jusqu'à s'annuler, la particule subissant alors une réflexion et repartant dans la direction opposée. On parle d'*effet miroir*.

12. fréquence de coupure du mode X : $f_X = \sqrt{(f_c/2)^2 + f_p^2} + f_c/2 \approx f_c$ dans les sources. Voir chapitre 2, paragraphe 2.4.3.

13. Le taux de croissance de l'onde est défini comme l'inverse du temps au bout duquel l'amplitude initiale de l'onde est multiplié par un facteur e .

interaction est donné par [Wu 1985] :

$$\gamma \propto \iint v_{\perp}^2 \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \delta \left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\omega_{ce}}{\Gamma} \right) dv_{\parallel} dv_{\perp} \quad (1.2)$$

Une amplification de l'onde ($\gamma > 0$) requiert une inversion de population en vitesse perpendiculaire au champ magnétique ambiant $\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} > 0$ dans le domaine où la condition de gyrorésonance est vérifiée¹⁴. Les distributions d'électrons instables pour le maser cyclotron sont couramment observées dans les magnétosphères et notamment dans les sources de l'AKR par les satellites Viking (voir par exemple [Louarn 1990]) et Fast Auroral SnapshoT (FAST) (voir par exemple [Delory 1998]). La morphologie de ces distributions prédit une émission par IMC préférentiellement dans les directions quasi-perpendiculaires au champ magnétique local.

1.2.3 Éclairs d'orages

Les éclairs d'orages sont des phénomènes atmosphériques disruptifs observés sur presque toutes les planètes du système solaire (excepté Mercure et Vénus, cette dernière source n'étant pas confirmée). Un éclair est une décharge électrostatique entre deux régions éloignées possédant des charges opposées. Cette décharge peut se produire entre deux régions d'un nuage : les régions hautes étant généralement chargées positivement, tandis que les régions basses sont chargées négativement ; ou bien entre le sol, chargé négativement et le nuage. Quand la différence de potentiel devient supérieure aux limites diélectriques de l'air (qui dépendent des conditions météorologiques et de la composition de l'atmosphère) il se produit une décharge de foudre conduisant à un rééquilibrage des charges électrostatiques. La décharge se produit en deux temps. Tout d'abord, un courant de faible intensité crée un canal ionisé entre les deux régions ; puis les charges accumulées se déversent dans le canal ionisé. Un éclair est constitué de plusieurs décharges de foudre consécutives.

Ces décharges de courant produisent des émissions électromagnétiques variées telles que des émissions optiques dues à l'échauffement du canal ionisé et des émissions radio sporadiques à très large bande (de quelques kHz à quelques 10 MHz) dues au courant dans le canal ionisé qui joue le rôle d'une antenne émettrice. La partie basse fréquence du spectre (inférieure à quelques 10 kHz) est détectée sur Terre [Helliwell 1965], sur Jupiter [Gurnett 1990], et sur Neptune [Gurnett 1979]. Cette partie du spectre se propage sur un mode particulier du plasma appelé mode « siffleur¹⁵ » (*whistler* en anglais) le long des lignes de champs magnétiques et ne peut se propager en dehors du plasma. La partie haute fréquence du spectre, qui peut se propager dans tout l'espace, a été observée sur Terre [Herman 1973], sur Saturne [Kaiser 1983] [Zarka 1985a] et sur Uranus [Zarka 1986] (figure 1.7).

14. Lorsque $\delta \left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\omega_{ce}}{\Gamma} \right) = 1$.

15. Voir chapitre 2.

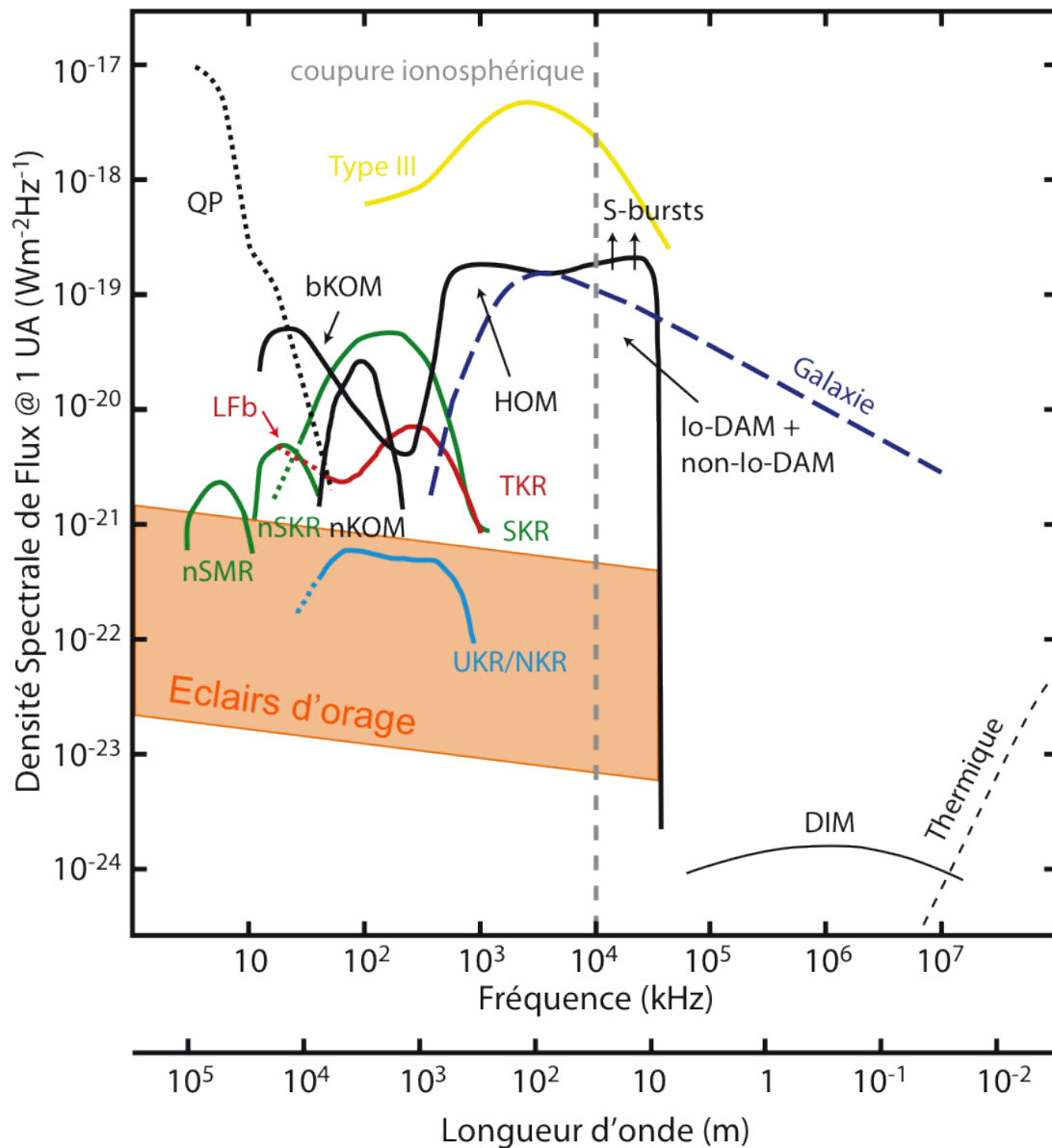


FIGURE 1.7 – Spectre composite des émissions radio joviennes (noir) et des émissions aurorales des autres planètes (vert = Saturne, rouge = Terre, bleu = Neptune et Uranus), des éclairs d'orage sur Saturne et Uranus et des sursauts solaires de type III. Le spectre d'émission de Jupiter est très riche : « bKOM » (broadband kilometer) correspond aux émissions aurorales kilométriques large bande, que l'on différencie des émissions kilométriques à bande étroite « nKOM » (narrowband kilometer) provenant du tore de plasma de Io, « HOM » l'émission aurorale hectométrique, « Io-DAM » l'émission décimétrique contrôlée par Io et « non-Io-DAM » l'émission aurorale décimétrique non contrôlée par Io ; « DIM » est l'émission décimétrique de Jupiter (provenant des ceintures de radiation), « QP » correspond aux sursauts quasi-périodiques joviens, « NTC » au continuum non-thermique des frontières magnétosphériques de Jupiter, « thermique » correspond au rayonnement thermique du disque planétaire de Jupiter. « nSKR » (narrowband SKR) correspond à la composante à bande étroite du SKR, « nSMR » au narrowband Saturn Myriametric Radiation. La zone orange correspond à l'intensité des éclairs d'orages détectés sur Saturne et Uranus. Les éclairs terrestres peuvent être plus faibles de plusieurs ordres de grandeur. « LFb » correspond aux sursauts basses fréquences terrestres. En tirets bleus foncés, le rayonnement radio galactique (émission synchrotron des électrons dans le champ magnétique de la Galaxie). La ligne verticale à la fréquence 10 MHz représente la coupure ionosphérique terrestre : les émissions de fréquences supérieures peuvent être détectées depuis le sol. D'après [Zarka 2000] et [Cecconi 2010].

1.3 De l'émission à la détection ?

Les émissions radio naturelles très basse fréquence émises dans le système solaire sont la signature des processus d'accélération d'électrons dans les plasmas environnant les planètes (vent solaire, plasma magnétosphérique ...). L'observation de ces ondes radio, depuis le sol ou depuis l'espace, permet d'obtenir un diagnostic à distance de ces mécanismes, ainsi que des conditions régnant dans les plasmas sources.

Cependant, avant qu'une onde radio émise par une source n'atteigne un instrument, celle-ci se propage dans le milieu situé entre la région émettrice et le détecteur. Comme nous venons de le présenter, ces milieux de propagation ne sont pas vides mais emplis de plasma, dont les densités varient sur différentes échelles (milieu inhomogène) et pour lesquels l'influence des champs magnétiques planétaires ou solaire est important (milieu anisotrope). Une onde électromagnétique se propageant dans ces milieux peut donc être réfractée, réfléchi, diffractée, diffusée ... La compréhension des effets de propagation dans les plasmas spatiaux est fondamentale pour remonter des observations radio aux propriétés des régions sources.

Ma thèse s'est déroulée au pôle « Plasmas » du Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique (LESIA). L'équipe du pôle « Plasmas » a acquis une grande expertise dans le traitement et l'analyse des données radio, obtenues aussi bien avec les instruments sol : station de radioastronomie de Nançay (radio télescope décimétrique, réseau décamétrique, station LOFAR, projet de super-station LOFAR ...), collaboration avec l'institut de radioastronomie de l'académie nationale des sciences d'Ukraine (instrument UTR-2) ...; que spatiaux : Cassini, STEREO, Cluster, projet Solar Orbiter et JUICE ... Elle dispose également d'outils puissants pour l'analyse de ces données radio telles que la goniopolarimétrie, permettant d'obtenir la direction d'arrivée et la polarisation d'une onde radio sur un détecteur à partir de mesures de corrélations, ou le code SERPE (Simulation d'Emissions Radio Planétaires et Exoplanétaires), modélisant la manière dont les ondes sont émises dans les sources. Pour que ces deux outils soient complémentaires (modèle d'émission à la source et caractérisation de l'onde observée à distance), la prise en compte de la propagation entre la source et le détecteur est nécessaire. En effet, la seule connaissance de la direction d'arrivée ne permet pas de remonter à la position des sources du rayonnement, sauf sous l'hypothèse de propagation des ondes en ligne droite entre la source et le détecteur. Cette hypothèse est d'autant moins légitime que les fréquences observées sont basses.

Cette thèse a été motivée par le besoin de s'affranchir de cette hypothèse de propagation en ligne droite entre les sources et les détecteurs. Pour cela, une analyse physique des phénomènes de propagation dans les plasmas froids magnétisés homogènes et inhomogènes fut nécessaire. Afin de prendre en compte la diversité des milieux de propagation dans le système solaire, nous avons décidé de développer un outil générique de tracé de rayons : ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetics in Magnetospheres, Ionospheres and Solar wind - including Polarization). La description du milieu de propagation et des caractéristiques des ondes sont des paramètres d'entrée,

laissés au libre choix de l'utilisateur. Ce code inclut également un calcul de l'état de polarisation des ondes le long de la trajectoire des rayons. Par la suite, deux études ont été menées grâce à ARTEMIS-P : l'étude de la propagation « au delà de l'horizon » de la signature radio des éclairs d'orage de Saturne et l'étude de la propagation des ondes radio émises dans les cavités aurorales terrestres.

Ce manuscrit s'articule en trois parties :

Propagation et Polarisation des ondes radio dans les plasmas froids homogènes

Cette partie regroupe les chapitres introductifs utiles à la compréhension des phénomènes de propagation et de polarisation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids homogènes isotropes et anisotropes. Ces études nous ont permis d'affiner le traitement goniopolarimétrique de données de Cassini lors des traversées des sources du SKR (17 octobre 2008) [Lamy 2011].

Chapitre 2 Analyse physique de la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids homogènes (magnétisés ou non).

Chapitre 3 Analyse physique de la polarisation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids homogènes (magnétisés ou non).

Chapitre 4 Application aux analyses goniopolarimétriques des données radio et magnétiques lors des traversées des sources du SKR par la sonde Cassini.

Propagation des ondes radio dans les plasmas froids inhomogènes Cette partie traite de la théorie du tracé de rayons dans les plasmas inhomogènes et décrit le code développé durant ma thèse.

Chapitre 5 Analyse physique de la théorie du tracé de rayons.

Chapitre 6 Description du code de tracé de rayons dans les plasmas magnétisés ARTEMIS-P.

Applications Cette partie regroupe les deux études menées durant ma thèse impliquant l'utilisation du code ARTEMIS-P.

Chapitre 7 Étude de la propagation « au delà de l'horizon » de la signature radio des éclairs d'orage de Saturne.

Chapitre 8 Étude de la propagation du rayonnement kilométrique terrestre émis dans les cavités aurorales.

Remarque :

Certaines démonstrations mathématiques sont indiquées en paragraphes grisés avec une barre verticale en marge et peuvent être ignorées en première lecture.

Première partie

**Propagation et Polarisation des
ondes radio dans les plasmas froids
homogènes**

PROPAGATION D'ONDES DANS LES PLASMAS FROIDS HOMOGÈNES

Sommaire

2.1 Cadre général	20
2.1.1 Différents modèles de plasma	20
2.1.1.1 Les modèles fluides	20
2.1.1.2 Les modèles cinétiques	21
2.1.2 Échelles caractéristiques des plasmas	22
2.1.2.1 Échelles temporelles	22
2.1.2.2 Échelles spatiales	23
2.1.2.3 Les échelles liées aux collisions	24
2.1.3 Propagation des ondes radio dans les plasmas astrophysiques	24
2.2 Description d'un plasma froid, homogène et illimité	26
2.2.1 Description « conducteur » du plasma	27
2.2.2 Description « diélectrique » du plasma	27
2.2.3 Equivalence des deux approches	28
2.2.4 Equation du mouvement des particules dans un plasma froid	30
2.2.5 Limite isotrope d'un plasma non magnétisé	32
2.3 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et non magnétisé	34
2.3.1 Relation de dispersion	34
2.3.2 Indice de réfraction	35
2.3.2.1 Onde longitudinale	35
2.3.2.2 Ondes transversales	35
2.3.3 Courbes de dispersion	36
2.3.4 Vitesse de phase - vitesse de groupe	36
2.4 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et magnétisé	40
2.4.1 Relation de dispersion	40
2.4.2 Indice de réfraction en propagation oblique	41
2.4.3 Coupures et résonances	42
2.4.3.1 Coupures	42
2.4.3.2 Résonances	43
2.4.4 Ondes principales	45
2.4.4.1 Propagation parallèle $\theta = 0$	45
2.4.4.2 Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$	47
2.4.5 Courbes de dispersion en propagation oblique	50

2.4.5.1	Dénomination des modes	50
2.4.6	Surfaces d'indice de réfraction	55
2.4.6.1	Propriétés des surfaces d'indice de réfraction	55
2.4.6.2	Vitesse de phase, vitesse de groupe	56
2.4.6.3	Topologie des surfaces d'indice de réfraction	56

Les planètes du système solaire sont environnées de plasma présentant des caractéristiques variées (densité d'électron, température, fréquence de collision ...). Du fait du couplage entre les champs électromagnétiques et le mouvement des particules chargées, la réponse du plasma à la présence d'une perturbation électromagnétique contraint les caractéristiques des ondes électromagnétiques susceptibles de s'y propager.

Ce chapitre est consacré à la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids non collisionnels, homogènes et illimités. La relation dispersion, traduisant la réponse du plasma à la présence d'une perturbation électromagnétique, est obtenue à partir des équations de Maxwell. De là sont définies les notions de mode de propagation et de fréquence de coupure et de résonance, indispensables à la compréhension des phénomènes de propagation des ondes radio dans les environnements planétaires.

Ce chapitre est fondé sur les ouvrages suivant : [Quémada 1968], [Budden 1985], [Stix 1992], [Cerisier 2003] et [Gurnett 2005].

2.1 Cadre général

2.1.1 Différents modèles de plasma

Il existe différents modèles pour décrire la réponse d'un plasma aux champs électriques et magnétiques externes : les modèles fluides et les modèles cinétiques.

2.1.1.1 Les modèles fluides

Les modèles fluides considèrent que chaque composante du plasma (ions, électrons ...) est caractérisée par des grandeurs macroscopiques telles que la densité, la vitesse d'ensemble et la pression partielle, et doit être traitée séparément. Ces modèles traduisent les comportements collectifs des espèces.

Il existe deux types de modèles fluides, qui se différencient par la prise en compte ou non de l'agitation thermique des porteurs de charges : les modèles plasma « chaud » et plasma « froid ».

Le modèle plasma froid Le modèle plasma froid considère que les particules chargées du plasma n'ont pas de vitesse thermique. Sans perturbation extérieure, ces particules sont donc au repos. En présence d'un champ électrique extérieur, elles vont osciller autour de leur position d'équilibre.

Le modèle plasma froid est fondé l'équation fluide de conservation de la quantité de mouvement dans laquelle on néglige la force de pression :

$$\rho_s m_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \rho_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - \sum_i \rho_s m_s \nu_{is} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i) + \text{autres forces appliquées} \quad (2.1)$$

où

ρ_s	la densité en nombre de l'espèce s
m_s	la masse de l'espèce s
q_s	la charge de l'espèce s
\mathbf{v}_s	la vitesse d'ensemble de l'espèce s
ν_{is}	la fréquence de collision de l'espèce s avec l'espèce i
$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt}$	la dérivée convective de la vitesse d'ensemble de l'espèce
\mathbf{E}, \mathbf{B}	les champs électrique et magnétique

Le modèle plasma froid permet d'obtenir une bonne description des différentes ondes électromagnétiques pouvant se propager dans les plasmas réels.

Le modèle plasma chaud Le modèle plasma chaud considère que même en l'absence d'une perturbation extérieure, les particules sont animées d'un mouvement dû à leur agitation thermique. Ce modèle prend en compte la pression partielle des différentes espèces du plasma. L'équation de conservation de la quantité de mouvement fait donc intervenir le gradient de pression partielle de l'espèce s , $-\nabla P_s$:

$$\rho_s m_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \rho_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - \nabla P_s + \dots - \sum_i \rho_s m_s \nu_{is} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i) \quad (2.2)$$

Ces modèles nécessitent une condition de fermeture précisant les variations de la pression lorsque les paramètres du plasma fluctuent dans le temps.

Le modèle plasma chaud permet de décrire les ondes longitudinales électrostatiques (telles que les ondes de Langmuir) et leur couplage avec les modes électromagnétiques.

2.1.1.2 Les modèles cinétiques

Les modèles fluides ne prennent pas en compte les aspects microscopiques des plasmas. Les modèles cinétiques sont quant à eux fondés sur la forme et l'évolution de la fonction de distribution des vitesses donnée par l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (2.3)$$

où $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est la distribution des vitesses des particules. Cette équation traduit la conservation des particules dans l'espace des phases (\mathbf{r}, \mathbf{v}) .

Le modèle cinétique permet l'étude des instabilités microscopiques et du problème des particules résonantes capables d'interagir fortement avec le champ électrique de l'onde (effet Landau et cyclotron).

2.1.2 Échelles caractéristiques des plasmas

Dans un plasma, il existe plusieurs échelles caractéristiques, spatiales et temporelles, liées au caractère chargé des particules et des interactions. Le comportement du milieu pourra être modélisé différemment si les échelles des phénomènes étudiés sont inférieurs ou supérieurs à ces échelles caractéristiques.

2.1.2.1 Échelles temporelles

Ces échelles sont définies à partir des fréquences caractéristiques des plasmas.

La fréquence plasma est la fréquence propre d'oscillation spontanée d'une espèce chargée. Considérons un plasma constitué d'ions lourds (donc au repos) et d'électrons mobiles constituant un fluide chargé de densité ρ_e . Les collisions et l'agitation thermique sont négligées, ainsi que les sources externes de champs électromagnétiques. Une perturbation de densité spatiale $\delta\rho_e$ se traduit par l'apparition d'un champ électrique \mathbf{E} : les forces électrostatiques s'appliquant aux charges déplacées imposent un mouvement d'oscillation de ces charges autour de leur position d'équilibre à la fréquence plasma électronique :

$$f_{pe} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2 \rho_e}{\epsilon_0 m_e}} \quad (2.4)$$

avec

$e \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	la charge des électrons
ρ_e	la densité en nombre d'électrons
$m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	la masse de l'électron
$\epsilon_0 \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$	la permittivité du vide

La fréquence plasma électronique est une fréquence de coupure des ondes radio : aucune perturbation radio de fréquence inférieure à la fréquence plasma électronique ne peut se propager¹. La figure 2.1 représente la fréquence plasma du vent solaire en fonction de la distance au Soleil ($f_p \propto 1/R$). La zone hachurée en rouge est une région interdite pour les ondes radio de fréquence inférieure à la fréquence plasma locale du vent solaire : une onde électromagnétique émise au voisinage d'Uranus à une fréquence de 5 kHz ne pourra atteindre l'orbite terrestre.

La fréquence plasma ionique est l'équivalent de la fréquence plasma électronique pour les ions. Le grand rapport de masse entre les ions et les électrons implique que la fréquence plasma ionique est inférieure à la fréquence plasma électronique².

La fréquence cyclotron est la fréquence de rotation d'une particule chargée autour des lignes de champ magnétique.

$$f_c = \frac{|q_s| B_0}{2\pi m_s} \quad (2.5)$$

1. voir figure 2.7

2. Pour les protons, le rapport de masse $m_p/m_e \sim 2000$ impose un rapport de fréquence plasma protonique et électronique de l'ordre de 1/40.

avec

- q_s la charge de l'espèce s
- m_s la masse de l'espèce s
- B_0 l'intensité du champ magnétique (en Tesla)

Du fait du rapport de masse entre les ions et les électrons, la fréquence cyclotron ionique est inférieure à la fréquence cyclotron électronique³.

2.1.2.2 Échelles spatiales

La longueur de Debye est la taille caractéristique d'une région non neutre du plasma. Toute particule chargée attire les particules de charges opposées via les forces électrostatiques. Statistiquement, toute charge s'entoure d'un surplus de charge opposées, formant autour d'elle un *nuage de Debye*, écrantant la charge centrale. La longueur de Debye est la taille caractéristique de ce nuage : au delà de cette distance le champ électrostatique individuel de la charge centrale n'est plus ressenti par les particules voisines. La longueur de Debye traduit l'équilibre entre les forces électrostatiques, qui imposent la neutralité même aux petites échelles, et l'agitation thermique, qui tend à produire une non neutralité :

$$\lambda_D = \frac{V_{ths}}{\omega_{ps}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_s}{q_s^2 \rho_s}}$$

avec

- V_{ths} la vitesse thermique des particules de l'espèce s
- ω_{ps} la pulsation plasma de l'espèce s
- $k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann
- T_s la température de l'espèce s
- ρ_s la densité de l'espèce s

La condition de quasi-neutralité du plasma ne sera respectée que si la dimension du système est supérieure à la longueur de Debye⁴.

Le rayon de Larmor est le rayon de giration d'une particule chargée autour des lignes de champ magnétique. Pour l'ensemble des charges de l'espèce s , c'est l'échelle qui traduit l'équilibre entre l'agitation thermique et la force de Lorentz due au champ magnétique externe.

$$\lambda_{\text{Larmor}} = \frac{V_{ths}}{\omega_{cs}} = \frac{\sqrt{m_s k_B T_s}}{|q_s| B_0} \quad (2.6)$$

Aux échelles inférieures à λ_{Larmor} , l'agitation thermique l'emporte sur la force de Lorentz et inversement aux échelles supérieures à λ_{Larmor} .

3. Pour les protons, le rapport entre les fréquences cyclotrons protonique et électronique est de l'ordre de 1/2000.

4. Le nombre d'électrons dans la sphère de Debye centrée sur un ion est $N_D = 4/3\pi\rho_e\lambda_D^3$. Pour que l'écrantage soit efficace, il faut qu'il y est un grand nombre d'électrons dans la sphère de Debye, soit $N_D \gg 1$

2.1.2.3 Les échelles liées aux collisions

Comme dans tout gaz, la dynamique des plasmas peut être fortement influencée par les mécanismes de collisions entre particules. Le caractère chargé des particules d'un plasma fait que les collisions ne peuvent plus être modélisées par des interactions à courtes portées du type *boules de billards*, comme dans les gaz neutres. On entendra par collision dans un plasma, tout mécanisme d'interaction, de contact ou à distance, qui modifie la trajectoire initiale des particules. Dans un plasma faiblement ionisé, les collisions dominantes sont les collisions ions-neutres et électrons-neutres (interaction de courte portée). Dans le cas d'un plasma fortement ionisé, les collisions dominantes sont les collisions électrons-ions (interaction coulombienne de longue portée).

Différentes échelles liées aux collisions peuvent être définies, parmi lesquelles :

Le libre parcours moyen est la distance au bout de laquelle la trajectoire d'une particule chargée a été significativement déviée sous l'action des interactions binaires avec les autres particules. Dans le cas d'interactions électrons-neutres ou ions-neutres, le libre parcours moyen correspond à la distance parcourue par la charge pendant un intervalle de temps dt , divisé par le nombre de collisions. Dans le cas d'un plasma fortement ionisé, le libre parcours moyen d'une particule chargée peut-être estimé par :

$$\lambda_{ei} \approx \frac{1}{\lambda_L^2 \rho_e} = \frac{16\pi^2 \epsilon_0^2 k_B^2 T^2}{Z^2 e^4 \rho_e} \quad (2.7)$$

où λ_L est la longueur de Landau. C'est la distance pour laquelle l'énergie potentielle coulombienne entre l'ion (de charge $+Ze$) et l'électron (de charge $-e$) est égale à l'énergie cinétique moyenne des électrons.

La fréquence de collisions est l'inverse du temps mis par une particule pour parcourir une distance égale au libre parcours moyen.

La présence d'un champ magnétique externe modifie le comportement du plasma, en raison de la modification qu'il impose aux trajectoires des particules chargées. Si la fréquence de collision est supérieure à la fréquence cyclotron électronique, un électron sera dévié de sa trajectoire par une collision avant d'avoir fait un tour complet autour d'une ligne de champ magnétique. Dans ce cas, le plasma est dit *collisionnel*. Si la fréquence cyclotron est supérieure à la fréquence de collision alors le plasma est dit *magnétisé* : la dynamique du plasma est dominée par l'action du champ magnétique.

2.1.3 Propagation des ondes radio dans les plasmas astrophysiques

Cette thèse traite de la propagation des ondes radio dans les plasmas spatiaux. La table 2.1 regroupe les ordres de grandeurs des paramètres et des échelles caractéristiques de quelques plasmas naturels et artificiels. On constate que le libre parcours moyen dans le vent solaire, la magnétosphère et l'ionosphère est de l'ordre de la dizaine de kilomètres à la centaine d'unités astronomiques. De même, les rapports

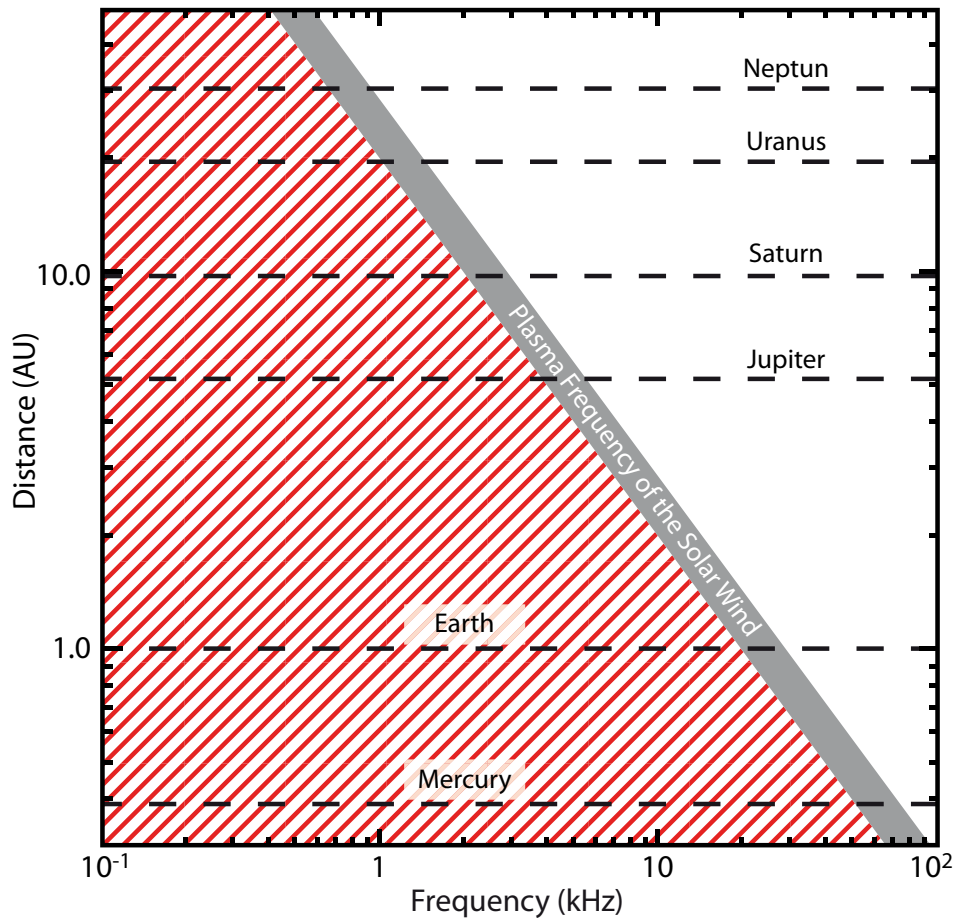


FIGURE 2.1 – Évolution de la fréquence plasma du vent solaire en fonction de la distance au Soleil. Les distances orbitales des planètes du système solaire sont également indiquées. Seules les perturbations électromagnétiques de fréquence supérieure à la fréquence plasma du vent solaire peuvent se propager (zone non hachurée en rouge). D'après [Zarka 2000] et [Cecconi 2010].

Plasma	ρ_e (m^{-3})	T_e (keV)	B_0 (T)	λ_{ei}^* (m)	λ_D (m)	f_{pe}	f_{ce}	$\frac{f_{ce}}{\nu_{coll}}$
Interstellaire	10^6	10^{-5}	10^{-9}	5.10^7	7.10^{-1}	9 kHz	30 Hz	10^4
Vent solaire [†]	10^7	10^{-2}	10^{-8}	5.10^{12}	7	28 kHz	300 Hz	10^9
Magnétosphère [‡]	10^7	1	10^{-6}	5.10^{14}	70	28 kHz	30 kHz	10^{14}
Ionosphère	10^{12}	10^{-4}	10^{-5}	5.10^3	2.10^{-3}	9 MHz	300 kHz	10^4
Couronne solaire	10^{12}	10^{-1}	10^{-3}	5.10^9	7.10^{-2}	9 MHz	30 MHz	10^{10}
Décharge d'arc	10^{20}	10^{-3}	10^{-1}	5.10^{-3}	7.10^{-7}	90 GHz	3 GHz	10
Tokamak	10^{20}	10	10	5.10^5	7.10^{-5}	90 GHz	300 GHz	10^9

TABLE 2.1 – Ordres de grandeur pour certains plasmas naturels et artificiels de la densité d'électrons (ρ_e), la température électronique (T_e) et le champ magnétique externe (B_0), ainsi que des échelles caractéristiques suivantes : libre parcours moyen des électrons λ_{ei} , longueur de Debye λ_D , fréquence plasma électronique f_{pe} , fréquence cyclotron électronique f_{ce} , rapport de la fréquence cyclotron électronique sur la fréquence de collisions. * : libre parcours moyen d'un électron dans un gaz de protons. † : valeurs typiques à 1 UA. ‡ : valeurs typiques dans la magnétosphère terrestre. D'après [Kivelson 1995] et [Savoini 2005].

des fréquences cyclotron et de collisions sont largement supérieurs à 1. Ces milieux seront considérés par la suite comme non collisionnels. De plus, les gammes de densité et de température rencontrées permettent de considérer le modèle **plasma froid sans collision** comme une bonne approximation des plasmas spatiaux.

Les plasmas étant constitués de plusieurs types de particules chargées (électrons, protons, ions ...), la réponse de chaque espèce à la présence d'une onde électromagnétique devrait être traitée séparément. Or, les ions étant beaucoup plus massifs que les électrons (de l'ordre de 2000 à 60000 fois plus massifs), les fréquences caractéristiques des mouvements des ions sont bien inférieures aux fréquences caractéristiques du mouvement des électrons. L'étude de la propagation des ondes radio dans les plasmas spatiaux concerne des gammes de fréquences allant du kHz au GHz : ces fréquences sont bien supérieures aux fréquences caractérisant le mouvement des ions. Ces derniers seront donc insensibles aux champs électriques et magnétiques extérieurs appliqués et constitueront un fond continu et immobile dont le rôle est d'assurer la neutralité moyenne du milieu. Ainsi les électrons seront la seule espèce responsable de la réponse du plasma à la présence des ondes électromagnétiques.

Pour résumer :

On considérera la propagation d'ondes radio dans le modèle plasma froid, magnétisé et sans collision. La gamme de fréquences des ondes radio étant supérieure aux fréquences caractéristiques des ions, on négligera l'effet de leur présence sur la propagation.

Nous allons donc dans un premier temps nous intéresser à la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids, homogènes, magnétisés et illimités.

2.2 Description d'un plasma froid, homogène et illimité

La théorie de Maxwell permet de caractériser la réponse linéaire à une perturbation du plasma. Si ce dernier est homogène, stationnaire et que l'amplitude de la perturbation est faible, la réponse pourra s'écrire comme la superposition d'ondes planes. Ainsi, pour dégager les caractéristiques de la propagation des ondes électromagnétiques, nous allons nous intéresser à la réponse d'un plasma froid, magnétisé et homogène à la présence d'une onde électromagnétique plane de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} , pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.9)$$

avec E_ω et B_ω les amplitudes des champs électrique et magnétique de l'onde.

2.2.1 Description « conducteur » du plasma

La présence d'une onde électromagnétique dans un plasma induit un mouvement de charges qui affecte directement sa propagation. Ce mouvement de charges se traduit par une séparation entre les électrons et les ions du plasma, dont la vitesse relative est alors responsable de l'apparition d'un courant. Le traitement de la propagation des ondes dans les plasmas peut donc se faire à l'aide des équations de Maxwell « microscopiques » prenant en compte la densité de charge ρ du plasma et la densité de courant \mathbf{J} créée par le déplacement des charges.

Equations de Maxwell « microscopiques »

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \quad (2.13)$$

Vecteur densité de courant Le vecteur densité de courant est défini par :

$$\mathbf{J} = \sum_s \rho_s q_s \mathbf{v}_s \quad (2.14)$$

où s désigne l'espèce du porteur de charge (ion ou électron), ρ_s est la densité de l'espèce, q_s sa charge et \mathbf{v}_s sa vitesse d'ensemble. Le courant étant engendré par la présence du champ électrique, le vecteur densité de courant doit être une fonction de \mathbf{E} . On posera :

$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.15)$$

où $\bar{\sigma}$ est le tenseur conductivité du plasma.

2.2.2 Description « diélectrique » du plasma

Un diélectrique est un matériau ne contenant pas de charge libre susceptible de se déplacer de façon macroscopique. Cependant, sous l'action d'un champ électrique, il peut y avoir séparation entre le noyau et le nuage électronique des atomes le constituant, créant ainsi une densité de dipôles électrostatiques susceptible d'interagir avec le champ électrique. On dit que le milieu est « polarisé ».

De façon analogue, on peut considérer la séparation entre les ions et les électrons d'un plasma sous l'effet d'une onde électromagnétique comme une polarisation du plasma. La description de la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peut donc également se faire à l'aide des équations de Maxwell « macroscopiques » en l'absence de charge et de courant, mais avec la contribution de la polarisation du milieu.

Equations de Maxwell « macroscopiques »

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.19)$$

où \mathbf{D} est le vecteur déplacement et \mathbf{H} le vecteur champ magnétique.

Vecteur champ magnétique Le vecteur champ magnétique dans le plasma est défini par :

$$\mathbf{B} = \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (2.20)$$

où $\bar{\mu}$ est le tenseur perméabilité, caractérisant les propriétés magnétiques du milieu, et \mathbf{B} le vecteur induction magnétique. Seuls les milieux ferromagnétiques possèdent une perméabilité grande devant μ_0 . On pourra donc considérer que pour un plasma froid magnétisé, $\bar{\mu} = \mu_0 \bar{\mathbf{1}}$, où $\bar{\mathbf{1}}$ est le tenseur identité, et donc que :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.21)$$

Vecteur déplacement Le vecteur déplacement est défini par :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.22)$$

où \mathbf{P} est le vecteur polarisation. Le phénomène de polarisation étant engendré par la présence du champ électrique de l'onde, le vecteur polarisation doit être une fonction de \mathbf{E} . On posera :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi} \cdot \mathbf{E} \quad (2.23)$$

Remarque :

Dans le cas d'une onde plane, la structure des équations de Maxwell montre que le vecteur d'onde \mathbf{k} , le vecteur déplacement \mathbf{D} et le vecteur induction magnétique de l'onde \mathbf{B} forment un trièdre rectangle direct, tandis que le champ électrique \mathbf{E} est dans le plan (\mathbf{k}, \mathbf{D}) . Il existe donc une composante longitudinale du champ électrique E_{\parallel} , liée à la présence des charges de polarisation.

Le plan (\mathbf{B}, \mathbf{D}) est appelé le *plan d'onde*, le plan (\mathbf{B}, \mathbf{E}) est appelé le *plan de vibration*.

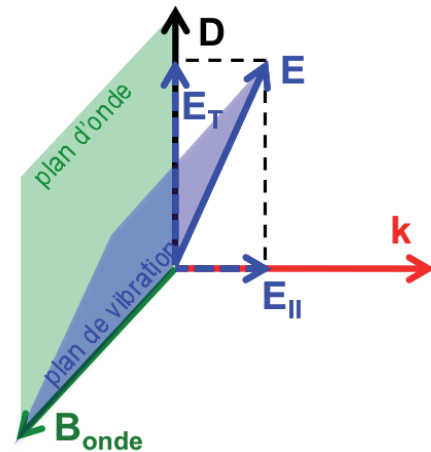


FIGURE 2.2 – Structure d'une onde plane dans un plasma froid magnétisé

D'après l'équation de Poisson :

$$\mathbf{k} \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho$$

Comme il existe des charges liées (charges de polarisation) alors $E_{\parallel} \neq 0$.

où $\bar{\chi}$ est le tenseur susceptibilité diélectrique, traduisant l'effet du champ électrique sur le plasma. En remplaçant dans l'équation (2.22), on obtient :

$$\mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \bar{\kappa} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\chi}) \cdot \mathbf{E} \quad (2.24)$$

où $\bar{\varepsilon}$ est le tenseur permittivité diélectrique⁵ du plasma et $\bar{\kappa} = \bar{\varepsilon}/\varepsilon_0$ le tenseur permittivité diélectrique relatif.

2.2.3 Equivalence des deux approches

Un plasma soumis à un champ électrique extérieur voit ses particules chargées se déplacer. Tant que les collisions sont importantes, on observe un courant fini, comme dans un conducteur. Si les collisions deviennent négligeables, certains électrons peuvent se découpler du reste des particules et gagner de plus en plus d'énergie (« run away », [Quémada 1968]). Dans ce cas, l'approche diélectrique n'est plus satisfaisante, et une description microscopique est nécessaire.

Cependant, dans le cas où le champ électrique est alternatif, les particules oscillent autour de leur position d'équilibre et créent des dipôles électriques instantanés, analogues aux charges de polarisation d'un diélectrique. Dans ce cas, les descriptions microscopique et diélectrique sont équivalentes (tant que la longueur d'onde de l'onde reste très

5. Appelé aussi simplement tenseur permittivité ou tenseur diélectrique.

inférieure à la longueur de Debye $\lambda \ll \lambda_D$). En particulier, les deux membres de droite des équations de Maxwell-Ampère (2.13) et (2.19) doivent être égaux :

$$\mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{E} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.25)$$

En considérant une onde plane à la pulsation ω décrite par l'équation (2.8), on obtient la relation entre le tenseur permittivité relative $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}$ et le tenseur de conductivité $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$.

$$\boxed{\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}} = \overline{\overline{\mathbf{1}}} - \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}}{i\omega\varepsilon_0}} \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) est une identité valable pour tout champ électrique \mathbf{E} . Le tenseur permittivité relative est une grandeur caractéristique du plasma, traduisant la réponse du milieu à la présence d'une onde électromagnétique quelconque. Pour un plasma donné, la connaissance de $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}$ est donc nécessaire à l'étude de la propagation des ondes dans ce plasma.

2.2.4 Equation du mouvement des particules dans un plasma froid

La détermination du tenseur permittivité relative permet de déterminer la réponse du plasma à une perturbation due à la propagation d'une onde électromagnétique. D'après la relation (2.26), $\overline{\overline{\boldsymbol{\kappa}}}$ est une fonction du tenseur conductivité $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$, reliant la densité de courant \mathbf{J} au champ électrique perturbateur \mathbf{E} . Afin de déterminer la réponse du plasma à la présence d'une onde électromagnétique, il est donc nécessaire de déterminer l'équation du mouvement des porteurs de charges du plasma soumis aux champs électrique et magnétique de l'onde.

On considère un plasma froid, homogène et magnétisé. L'approximation plasma froid permet de négliger l'agitation thermique des porteurs de charges. En l'absence d'une onde électromagnétique, le plasma est donc décrit par sa densité de porteur de charge ρ_{s0} et le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 , la vitesse d'ensemble des particules chargées \mathbf{v}_s étant nulle dans le cas plasma froid. De plus, les porteurs de charges étant au repos en l'absence d'onde électromagnétique, le champ électrique est supposé nul.

La présence de l'onde électromagnétique est modélisée par une petite perturbation des caractéristiques du milieu.

$$\rho_s = \rho_{s0} + \rho_{s1} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s1} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (2.30)$$

Les quantités ρ_{s1} , \mathbf{v}_{s1} , \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 sont d'ordre 1 par rapport aux quantités non perturbées. La neutralité de la charge du milieu non perturbé implique que $\sum_s q_s \rho_{s0} = 0$. L'équation du mouvement au premier ordre pour une particule de masse m_s , de charge q_s soumise aux champs électrique et magnétique est donnée par :

$$m_s \frac{\partial \mathbf{v}_{s1}}{\partial t} = q_s [\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{s1} \times \mathbf{B}_0] \quad (2.31)$$

le terme en $\mathbf{v}_{s1} \times \mathbf{B}_1$ étant un terme du second ordre.

En supposant que la perturbation est une onde plane de pulsation ω décrite par l'équation (2.8), la partie temporelle des quantités perturbées est également de la forme $e^{-i\omega t}$. On peut considérer sans perte de généralité que le champ magnétique est orienté selon un axe \mathbf{e}_z , définissant un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. En projetant l'équation du mouvement sur ces axes, on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -\omega_{cs} & 0 \\ \omega_{cs} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sx} \\ v_{sy} \\ v_{sz} \end{pmatrix} = \frac{q_s}{m_s} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où $\omega_{cs} = q_s B_0 / m_s$ est la pulsation cyclotron des particules.

En inversant le système précédent, on obtient l'expression de la vitesse des particules chargées en fonction du champ électrique de l'onde :

$$\begin{pmatrix} v_{sx} \\ v_{sy} \\ v_{sz} \end{pmatrix} = \frac{q_s}{m_s(\omega_{cs}^2 - \omega^2)} \begin{pmatrix} -i\omega & \omega_{cs} & 0 \\ -\omega_{cs} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(\omega_{cs}^2 - \omega^2)}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

La densité de courant \mathbf{J} est liée à la vitesse des porteurs de charge par la relation (2.14), soit

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \sum_s \frac{\rho_{s0} q_s^2}{m_s(\omega_{cs}^2 - \omega^2)} \begin{pmatrix} -i\omega & \omega_{cs} & 0 \\ -\omega_{cs} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(\omega_{cs}^2 - \omega^2)}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

On obtient ainsi le tenseur conductivité du plasma :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sum_s \frac{\rho_{s0} q_s^2}{m_s(\omega_{cs}^2 - \omega^2)} \begin{pmatrix} -i\omega & \omega_{cs} & 0 \\ -\omega_{cs} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(\omega_{cs}^2 - \omega^2)}{\omega} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Par la relation (2.26), l'expression du tenseur permittivité relative est alors :

$$\boxed{\bar{\bar{\kappa}} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}} \quad (2.36)$$

avec les notations [Stix 1992]

$$\boxed{S = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, \quad D = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \omega_{cs}}{\omega(\omega^2 - \omega_{cs}^2)} \quad \text{et} \quad P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}} \quad (2.37)$$

avec

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{\rho_{s0} q_s^2}{\epsilon_0 m_s}} \quad \text{la pulsation plasma du porteur de charge } s$$

$$\omega_{cs} = \frac{q_s B_0}{m_s} \quad \text{la pulsation cyclotron du porteur de charge } s$$

Dans le cas d'un plasma où le mouvement des ions est négligé, on posera :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_{e0} e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (2.38)$$

$$\omega_c = \left| \frac{e B_0}{m_e} \right| \quad (2.39)$$

Si la densité d'électron ρ_e est exprimé en cm^{-3} et le champ magnétique en Gauss, on peut écrire :

$$f_p [kHz] = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 9 \sqrt{\rho_{e0} [cm^{-3}]}$$

$$f_c [Hz] = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 2,8 \cdot 10^6 B_0 [G]$$

Afin de simplifier les écritures, on posera $X = (\omega_p/\omega)^2$ et $Y = \omega_c/\omega$ (Y étant négatif⁶),

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}, \quad D = \frac{XY}{1 - Y^2} \quad \text{et} \quad P = 1 - X \quad (2.40)$$

Le tenseur permittivité relative $\bar{\bar{\kappa}}$ donné par l'équation (2.36) permet de décrire la réponse d'un plasma froid, homogène, magnétisé et illimité à une perturbation due à la propagation d'une onde électromagnétique.

Remarque :

La présence de termes non diagonaux et des termes diagonaux non tous identiques dans le tenseur permittivité relative implique que le milieu est « anisotrope », c'est-à-dire que ses caractéristiques dépendent de la direction de propagation.

2.2.5 Limite isotrope d'un plasma non magnétisé

Dans le cas d'un plasma froid, homogène, illimité et *non magnétisé*, le tenseur permittivité relative s'écrit :

$$\bar{\bar{\kappa}} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = P \bar{\bar{\mathbf{1}}} \quad (2.41)$$

En effet, en l'absence de champ magnétique externe ($B_0 = 0$), la pulsation cyclotron est nulle et les quantités S et D deviennent respectivement $S = P$ et $D = 0$.

6. Y étant du signe de la charge des particules considérées, Y est négatif pour un plasma dont on ne considère que le mouvement des électrons.

Le tenseur permittivité relative ne possédant que des termes diagonaux, le milieu est isotrope (les caractéristiques du milieu sont invariantes en fonction de la direction de propagation).

Pour résumer :

Dans un plasma froid, homogène et magnétisé, le tenseur permittivité relative :

$$\bar{\bar{\kappa}} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}, \quad D = \frac{XY}{1 - Y^2} \quad \text{et} \quad P = 1 - X$$

$$X = (\omega_p/\omega)^2 \quad \text{et} \quad Y = \omega_c/\omega$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_{e0}e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$$

Dans un plasma froid, homogène et non magnétisé, le tenseur permittivité relative :

$$\bar{\bar{\kappa}} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

2.3 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et non magnétisé

Afin d'introduire les notions fondamentales de propagation dans les plasmas, nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas des plasmas *non magnétisés*, donc isotropes.

2.3.1 Relation de dispersion

Soit une onde plane de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} décrite par les équations (2.8) et (2.9) se propageant dans un plasma froid, homogène, illimité et *non magnétisé*.

Vecteur indice de réfraction L'indice de réfraction n d'un milieu est défini comme le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide c et la vitesse de phase v_ϕ d'une onde se propageant dans le milieu. Dans le cas d'une onde plane, la vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation du front d'onde le long du vecteur d'onde \mathbf{k} , soit $v_\phi = \omega/k$. Par définition, on considèrera le *vecteur indice de réfraction* \mathbf{n} comme un vecteur de direction \mathbf{k} et de norme n :

$$\mathbf{n} = \frac{n}{k}\mathbf{k} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k} \quad (2.42)$$

Relation de dispersion La réponse du plasma à la propagation d'une onde électromagnétique dépend à la fois des caractéristiques du plasma (densité d'électron, champ magnétique extérieur ...) et des caractéristiques de l'onde (pulsation, vecteur d'onde, amplitude). Pour pouvoir exister et éventuellement se propager dans le plasma, les caractéristiques de l'onde doivent satisfaire la *relation de dispersion* les reliant aux caractéristiques du plasma. La relation de dispersion s'obtient à l'aide des équations de Maxwell dans le plasma.

Dans un plasma décrit par le tenseur permittivité $\bar{\bar{\kappa}}$, les équations de Maxwell-Faraday (2.18) et Maxwell-Ampère (2.19) peuvent se réécrire :

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad \text{et} \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\bar{\bar{\kappa}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.43)$$

avec $c = \sqrt{1/\epsilon_0\mu_0}$, la vitesse de la lumière dans le vide.

En éliminant \mathbf{B} de l'équation (2.43), on obtient :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\bar{\bar{\kappa}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

En remplaçant le vecteur d'onde \mathbf{k} par le vecteur indice de réfraction \mathbf{n} , on obtient :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \bar{\bar{\kappa}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que le vecteur d'onde est selon l'axe \mathbf{e}_z , soit $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, l'équation (2.45) se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} P - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & P - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

Les solutions non triviales de ce système (c'est-à-dire telles que $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$) correspondent à un déterminant non nul de la matrice des coefficients :

$$\begin{vmatrix} P - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & P - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

Soit

$$\boxed{\text{Relation de dispersion : } P(P - n^2)^2 = 0} \quad (2.48)$$

Les caractéristiques de l'onde susceptibles d'exister, voire de se propager dans le plasma doivent satisfaire cette relation de dispersion.

2.3.2 Indice de réfraction

Les solutions de la relation de dispersion (2.48) sont :

$$P = 0 \quad (2.49)$$

$$n^2 = P \quad (2.50)$$

Ainsi, pour qu'une onde électromagnétique puisse exister dans le plasma, il faut que ses caractéristiques (pulsation, vitesse de phase ...) remplissent une des conditions ci-dessus.

2.3.2.1 Onde longitudinale

La solution telle que $P = 0$ correspond à une onde longitudinale ($\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$) de pulsation $\omega = \omega_p$. Sa pulsation étant indépendante du vecteur d'onde, cette oscillation *ne se propage pas*. On parle d'**oscillation de plasma électronique**.

2.3.2.2 Ondes transversales

La solution telle que $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$ amène à la relation entre le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde suivante :

$$c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (2.51)$$

Le vecteur d'onde k n'est réel que si $\omega > \omega_p$, l'onde peut se propager. Dans le cas $\omega < \omega_p$ l'indice du milieu devient imaginaire et la propagation n'est plus possible (onde évanescente).

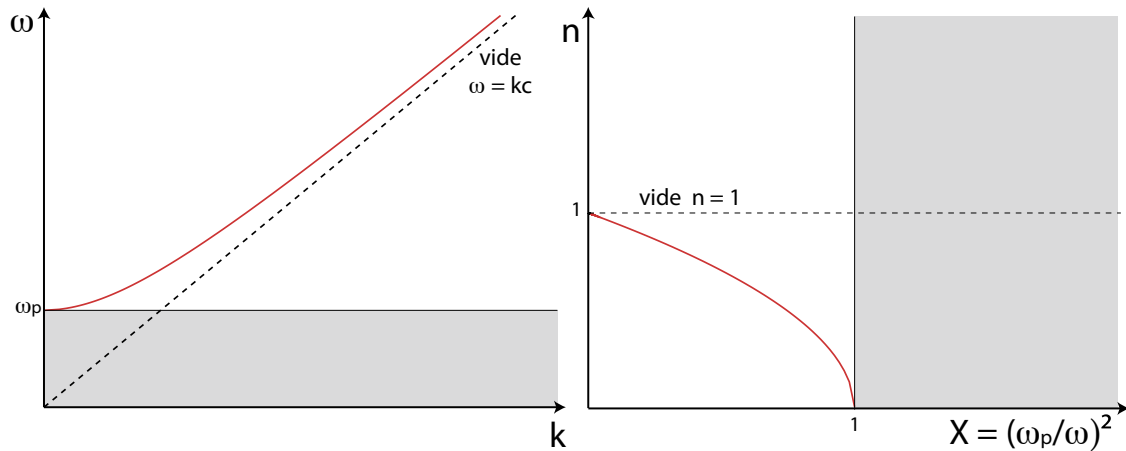


FIGURE 2.3 – Relation de dispersion pour un plasma isotrope. Panneau de gauche : Diagramme de Brillouin (ω, k) pour un plasma isotrope. La relation de dispersion dans le vide est représentée par la courbe en pointillé. La zone grisée $(\omega < \omega_p)$ correspond à une zone de non propagation (onde évanescente). Panneau de droite : Diagramme $(n, X = (\omega_p/\omega)^2)$ pour un plasma isotrope. La droite $n = 1$ correspond à l'indice de réfraction du vide. La zone grisée $(\omega < \omega_p)$ correspond à une zone de non propagation (onde évanescente).

2.3.3 Courbes de dispersion

Les représentations graphiques de la relation de dispersion peuvent se faire à l'aide du couple de variables (ω, k) (diagramme de Brillouin) ou $(n, X = (\omega_p/\omega)^2)$.

La figure 2.3 (panneau de gauche) représente le diagramme de Brillouin pour un plasma froid, homogène et non magnétisé. À haute fréquence, la relation de dispersion dans un plasma rejoint la courbe de dispersion du vide ($\omega = kc$), l'onde tend vers une onde de lumière. Cela signifie que l'onde peut se propager dans le vide. À basse fréquence, la relation de dispersion impose une pulsation de l'onde proche de la pulsation plasma (ω_p). Lorsque $\omega < \omega_p$, il n'existe pas de vecteur d'onde satisfaisant la relation de dispersion. Aucune onde électromagnétique ne peut se propager dans le plasma (zone grisée). La pulsation plasma est une pulsation de coupure.

La figure 2.3 (panneau de droite) représente le diagramme (n, X) pour un plasma froid, homogène et non magnétisé. L'indice de réfraction n'est défini que pour $X < 1$ ($\omega > \omega_p$). Lorsque X tend vers 0 ($\omega \gg \omega_p$), l'indice de réfraction tend vers l'indice de réfraction du vide ($n = 1$), tandis que lorsque X tend vers 1, l'indice de réfraction tend vers 0. La pulsation plasma ω_p est bien une pulsation de coupure. De plus, on constate que l'indice de réfraction est toujours inférieur à l'indice de réfraction du vide (propagation supraluminique, $v_\phi > c$).

2.3.4 Vitesse de phase - vitesse de groupe

Vitesse de phase La vitesse de phase est la vitesse de propagation du front d'onde. Considérons une onde monochromatique en milieu isotrope, s'exprimant :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

On définit la surface d'onde (ou front d'onde) comme le lieu des points de l'espace d'égal ψ : $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{constante}$. Lorsque le temps varie, la surface d'onde se propage le long de \mathbf{k} .

Si le vecteur d'onde \mathbf{k} est réel, le front d'onde se propage donc à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (2.52)$$

Dans le cas d'un plasma froid isotrope, la relation de dispersion de l'onde transversale impose $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$, donc la vitesse de phase s'exprime :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - X}} \quad (2.53)$$

L'onde se propageant à une pulsation supérieure à la pulsation plasma, la vitesse de phase est toujours supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide (onde supraluminique). Lorsque la pulsation devient grande devant la pulsation plasma, la vitesse de phase tend vers c .

Vitesse de groupe La vitesse de groupe est la vitesse de propagation d'une perturbation spatialement localisée (« paquet d'ondes »).

Par définition, la vitesse de groupe s'exprime :

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad (2.54)$$

Dans le cas général, cette vitesse diffère en module (milieu dispersif) et en direction (milieu anisotrope) de la vitesse de phase.

Dans le cas d'un plasma froid isotrope, la relation de dispersion ne dépendant que du module du vecteur d'onde : la vitesse de groupe, la vitesse de phase et le vecteur d'onde ont la même direction. Le module de la vitesse de groupe est alors imposé par la relation de dispersion :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}} = c \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} = c \sqrt{1 - X} \quad (2.55)$$

L'onde se propageant à une pulsation supérieure à la pulsation plasma, la vitesse de groupe est toujours inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Lorsque la pulsation devient grande devant la pulsation plasma, la vitesse de groupe tend vers c . Lorsque la pulsation tend vers la pulsation plasma, la vitesse de groupe devient nulle, l'onde ne se propage plus.

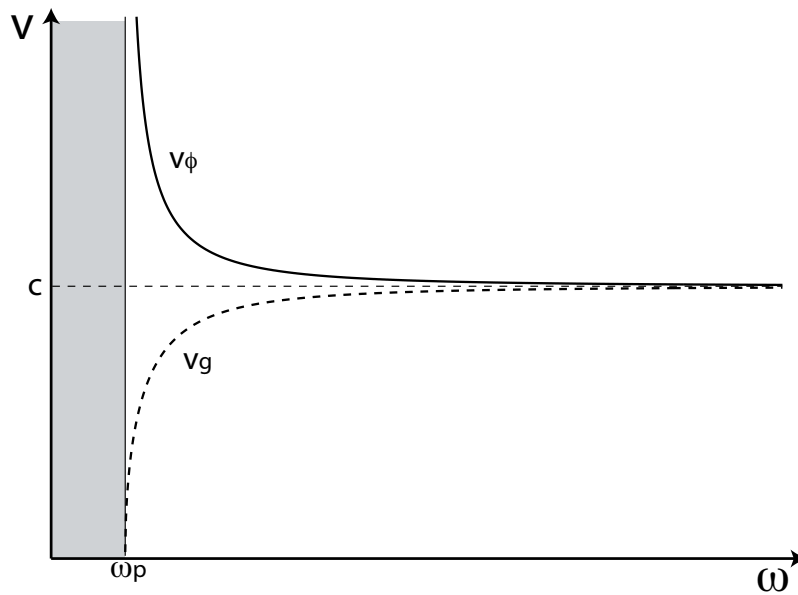


FIGURE 2.4 – Vitesse de phase et vitesse de groupe en fonction de la pulsation de l'onde, pour un plasma froid isotrope.

Pour résumer :

La relation de dispersion d'un plasma froid, homogène, illimité et non magnétisé :

$$P(n^2 - P)^2 = 0$$

où $P = 1 - X$ avec $X = (\omega_p/\omega)^2$, définit trois solutions correspondant à des ondes électromagnétiques :

- une onde longitudinale à $\omega = \omega_p$ ne se propageant pas (oscillation de plasma) ;
- deux ondes transverses à $\omega = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}$ se propageant avec :
 - un indice de réfraction $n = \sqrt{1 - X}$
 - une vitesse de phase $v_\phi = c/\sqrt{1 - X}$
 - une vitesse de groupe $v_g = c\sqrt{1 - X}$.

2.4 Ondes dans un plasma froid, homogène, illimité et magnétisé

Dans les environnements planétaires, et notamment dans les magnétosphères, le rôle du champ magnétique ambiant est prépondérant dans la dynamique des particules chargées. Afin de décrire la propagation des ondes radio dans les environnements planétaires, il est donc essentiel de connaître l'effet d'un champ magnétique externe sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisé.

Comme indiqué dans le paragraphe 2.2.4, le tenseur permittivité d'un plasma magnétisé est anisotrope (présence de termes non-diagonaux), contrairement au tenseur permittivité d'un plasma non magnétisé. La direction du champ magnétique externe devient une direction privilégiée du plasma. Nous montrerons dans cette partie que la présence d'un champ magnétique externe entraîne l'existence de plusieurs modes de propagation dont les relations de dispersion dépendent de l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique externe.

2.4.1 Relation de dispersion

Soit le repère $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, tel que le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 soit selon \mathbf{e}_z . On peut supposer sans perte de généralité que le vecteur d'onde \mathbf{k} est dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, et forme un angle θ avec \mathbf{B}_0 .

Dans ce repère, le vecteur indice de réfraction s'écrit :

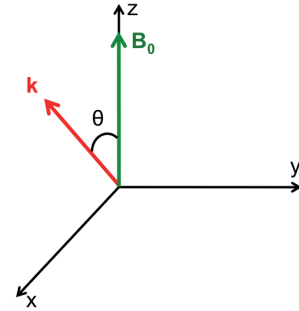
$$\mathbf{n} = (n \sin \theta, 0, n \cos \theta)$$

L'équation (2.45) se met alors sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

Les ondes électromagnétiques susceptibles de se propager dans le plasma sont donc celles dont les caractéristiques (amplitudes, vecteurs d'onde et pulsations) sont solutions de l'équation (2.56). Pour que cette équation possède des solutions non triviales (c'est-à-dire autres que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$), le déterminant de la matrice M doit être nul.

$$\det M = \begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (2.57)$$



En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient la *relation de dispersion* :

$$(P - n^2 \sin^2 \theta) [(S - n^2)(S - n^2 \cos^2 \theta) - D^2] - (n^2 \sin \theta \cos \theta)^2 (S - n^2) = 0 \quad (2.58)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme d'une équation bicarrée :

<p>Relation de dispersion : $An^4 + Bn^2 + C = 0$</p> $A = P \cos^2 \theta + S \sin^2 \theta$ $B = (D^2 - S^2) \sin^2 \theta - PS(1 + \cos^2 \theta)$ $C = P(S^2 - D^2)$	(2.59)
--	--------

Les solutions de l'équation de dispersion (2.59) donnent une relation entre l'indice de réfraction n , la pulsation de l'onde ω et l'angle θ entre son vecteur d'onde et le champ magnétique externe. Ainsi, la propagation d'une onde de pulsation ω dans la direction θ sera caractérisée par un indice $n(\omega, \theta)$ fixé par la relation de dispersion. L'étude des solutions de la relation de dispersion permet donc de caractériser les ondes susceptibles de se propager dans le plasma.

2.4.2 Indice de réfraction en propagation oblique

Les solutions générales de l'équation de dispersion (2.59) sont données par :

$$n^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 1 - \frac{2(A + B + C)}{(2A + B) \pm \sqrt{B^2 - 4AC}} \quad (2.60)$$

Une algèbre fastidieuse mais sans difficulté de principe permet d'écrire cette relation sous la forme dite d'Appleton-Hartree [Appleton 1932] :

$n^2 = 1 - \frac{2X(1 - X)}{2(1 - X) - Y^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4(1 - X)^2 Y^2 \cos^2 \theta}}$	(2.61)
--	--------

avec

$$X = (\omega_p / \omega)^2$$

$$Y = \omega_c / \omega$$

θ l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique externe.

Propriétés générales des solutions

- L'indice de réfraction est une fonction de l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique externe θ et de la pulsation de l'onde ω .

- La quantité $Y^4 \sin^4 \theta + 4(1 - X)^2 Y^2 \cos^2 \theta$ est toujours positive. Cela implique que n^2 est réel et donc que l'indice de réfraction est, soit réel (onde progressive se propageant), soit imaginaire pur (onde évanescence). Un indice de réfraction complexe signifierait qu'une partie de l'énergie de l'onde est absorbée par le plasma. Or, dans un plasma froid non collisionnel, il n'existe pas de mécanisme capable de convertir l'énergie de l'onde en énergie thermique des électrons.
- La présence du signe \pm au dénominateur implique qu'il existe plusieurs branches de solutions à la relation de dispersion. La présence du champ magnétique ambiant a rendu le milieu biréfringent. Chaque branche est un mode de propagation possible des ondes électromagnétiques dans le plasma. On désignera⁷ par « mode \oplus », la branche correspondant au signe $+$ et par « mode \ominus », la branche correspondant au signe $-$.
- L'indice de réfraction est indépendant du sens de propagation de l'onde (invariant pour $\theta' = \pi - \theta$). Il existe donc quatre solutions de la relation de dispersion : deux pour le mode \ominus ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} > 0$ onde « montante » et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} < 0$ onde « descendante ») et deux pour le mode \oplus ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} > 0$ onde « montante » et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} < 0$ onde « descendante »).

L'étude de la fonction indice de réfraction permet de déterminer les caractéristiques des modes de propagation dans un plasma magnétisé. On peut ainsi définir les fréquences de coupures et de résonances des différents modes de propagation.

2.4.3 Coupures et résonances

Lorsque l'indice de réfraction tend vers 1, l'onde se propage à travers le plasma avec les mêmes caractéristiques que si elle se propageait dans le vide. Lorsque l'indice de réfraction devient très différent de 1, les particularités de la propagation des ondes dans les plasmas sont mises en évidence.

Pour certaines fréquences caractéristiques du plasma, l'indice de réfraction peut tendre vers 0 ou vers l'infini. On parle alors de phénomènes de coupure ($n \rightarrow 0$) ou de résonance ($n \rightarrow \infty$).

2.4.3.1 Coupures

Une coupure est définie par un indice de réfraction tendant vers zéro. En revenant aux équations de Maxwell, on a :

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\perp = i\omega \mathbf{B}_\perp \quad \text{et} \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_\perp = \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}_\perp + \mu_0 \mathbf{J}_\perp \quad (2.62)$$

7. La dénomination usuelle du mode « Ordinaire » pour la branche \oplus et du mode « extraordinaire » pour la branche \ominus introduit une confusion avec la dénomination des ondes principales en propagation perpendiculaire (voir §2.4.4.2). On choisira la dénomination \oplus et \ominus pour parler des deux branches de solution de la relation de dispersion.

où \mathbf{E}_\perp et $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp$ sont les composantes normales à \mathbf{k} des champs électrique et magnétique de l'onde.

Pour une coupure ($n \propto k \rightarrow 0$), le champ magnétique de l'onde tend vers 0 ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp = \mathbf{0}$), il n'y a donc pas de flux d'énergie : l'onde ne se propage plus. En milieu inhomogène, à l'approche d'une coupure, l'onde est réfléchie.

D'après la relation de dispersion (2.59), la condition $n = 0$ correspond à $C = 0$, soit :

$$P = 0 \quad \text{pour} \quad \theta \neq 0 \quad (2.63)$$

$$\text{ou} \quad S \pm D = 0 \quad (2.64)$$

Les pulsations de coupure sont :

1. **La pulsation plasma** pour $\theta \neq 0$: $P = 0$ ($\omega = \omega_p$). L'absence de propagation traduit le fait que les charges du milieu s'opposent à la pénétration du champ. En effet, d'après l'équation du mouvement des particules (2.31), le champ électrique de l'onde et le courant de polarisation sont en opposition de phase. Lorsque $\omega = \omega_p$, le champ et le courant de polarisation se compensent.

2. **Les pulsations ω_R et ω_L** : $S \pm D = 0$ correspondant à $\omega_{R,L} = \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \omega_p^2} \pm \frac{\omega_c}{2}$.

L'indice de réfraction n_R correspond au mode que l'on nommera « droit » (Right) et l'indice de réfraction n_L correspond au mode que l'on nommera « gauche » (Left), la dénomination des modes étant justifié par leur état de polarisation circulaire. Ces notions sont abordées dans le chapitre 3.

Expressions de $\omega_{R,L}$:

$$S + D = 1 - \frac{X}{1-Y^2} + \frac{XY}{1-Y^2} = \frac{1-Y^2-X(1-Y)}{1-Y^2} = 0 \text{ soit } X = 1 + Y$$

$$S - D = 1 - \frac{X}{1-Y^2} - \frac{XY}{1-Y^2} = \frac{1-Y^2-X(1+Y)}{1-Y^2} = 0 \text{ soit } X = 1 - Y$$

Que l'on peut résumer en $Y^2 = (X - 1)^2$ ou $X - 1 = \pm Y$

$$\text{Soit } \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 = \pm \frac{\omega_c}{\omega}, \text{ d'où } \omega^2 \pm \omega_c \omega - \omega_p^2 = 0$$

$$\text{Dont les solutions sont : } \omega_{R,L} = \pm \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \omega_p^2}$$

2.4.3.2 Résonances

Une résonance est définie par un indice de réfraction tendant vers l'infini. D'après les équations de Maxwell écrites précédemment, le champ électrique de l'onde devient longitudinal ($\mathbf{E}_\perp = 0$) et \mathbf{J}_\perp est infini (sauf si $\mathbf{B}_\perp = \mathbf{0}$). En milieu inhomogène à l'approche d'une résonance, l'onde est soit réfléchie, soit absorbée.

8. Dans le cas où $\theta = 0$, la relation de dispersion s'écrit : $Pn^4 - 2PSn^2 + P(S^2 - D^2) = 0$. P étant en facteur de tous les termes, la condition $P = 0$ n'entraîne pas nécessairement $n = 0$.

D'après la relation de dispersion (2.59), la condition de résonance correspond à $A = 0$:

$$\tan^2 \theta_r = -\frac{P}{S} \quad (2.65)$$

La résonance dépend donc de l'angle θ .

1. En propagation parallèle $\theta_r = 0$:

Les pulsations de résonance sont :

- **La pulsation plasma** : $P = 0$ ($\omega = \omega_p$). Cette solution est dégénérée car dans le cas où $\theta = 0$ et $P = 0$, les coefficients A , B , et C sont tous nuls. La pulsation plasma peut donc être interprétée à la fois comme une pulsation de résonance et comme une pulsation de coupure.
- **La pulsation gyromagnétique** : $S \rightarrow -\infty$ donc $\omega = \omega_c$. On parle de *résonance gyromagnétique*. En effet, une onde électromagnétique se propageant à la fréquence cyclotron f_c voit son champ électrique transverse tourner à la même fréquence que les électrons du plasma autour du champ magnétique. Si de plus le champ électrique de l'onde tourne dans le même sens que les électrons du plasma autour du champ magnétique, elle interagira fortement avec eux.

2. En propagation perpendiculaire $\theta_r = \frac{\pi}{2}$:

Il n'existe qu'une seule pulsation de résonance :

- **La pulsation hybride supérieure (« upper hybrid » notée UH)** : $S = 0$ correspondant à $\omega_{UH}^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$.
- La solution $P \rightarrow \infty$ correspond à $\omega \rightarrow 0$.

Expression de la pulsation de résonance hybride supérieure :

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2} = 0 \text{ soit } 1 - X - Y^2 = 0$$

Pour résumer :

- **Fréquences de coupure** ($n \rightarrow 0$) :
 - coupure plasma ($\theta \neq 0$) : f_p
 - coupures R et L : $f_{R,L} = \sqrt{\left(\frac{f_c}{2}\right)^2 + f_p^2} \pm \frac{f_c}{2}$
- **Fréquences de résonance** ($n \rightarrow \infty$) : dépendantes de θ par $\tan^2 \theta_r = -\frac{P}{S}$
 - Propagation parallèle : résonance gyromagnétique : f_c
 - Propagation perpendiculaire : résonance hybride supérieure : $f_{UH} = \sqrt{f_c^2 + f_p^2}$

2.4.4 Ondes principales

On appelle *ondes principales* les solutions de l'équation de dispersion dans les cas d'une propagation parallèle et d'une propagation perpendiculaire au champ magnétique externe. L'étude de la relation de dispersion des ondes principales permet de dégager les propriétés générales de la propagation des ondes en milieu anisotrope. Ces propriétés se retrouveront en propagation oblique.

2.4.4.1 Propagation parallèle $\theta = 0$

Relation de dispersion La relation de dispersion (2.59) en propagation parallèle devient :

$$P [(S - n^2)^2 - D^2] = 0 \quad (2.66)$$

qui admet trois solutions, une solution ne se propageant pas et deux solutions correspondant à deux modes de propagation :

- **L'oscillation plasma** : $P = 0$ ($\omega = \omega_p$).
 Cette solution correspond aux ondes pour lesquelles seul $E_z \neq 0$. Le champ électrique de l'onde est donc parallèle à \mathbf{k} : ce sont des ondes longitudinales, ou oscillation plasma, définies au paragraphe 2.3.2.1. Ces ondes polarisées longitudinalement (donc selon \mathbf{B}_0) ne se propagent pas. L'absence d'influence du champ magnétique provient du fait que le champ électrique de l'onde et le champ magnétique externe sont alignés. Dans ce cas, le vecteur densité de courant créé par la présence du champ électrique de l'onde est lui aussi aligné avec le champ magnétique externe. La force magnétique s'appliquant sur les porteurs de charge, $\mathbf{F} = \mathbf{J}/\rho \times \mathbf{B}_0$, est donc nulle. Le champ magnétique externe n'a pas d'influence sur l'oscillation plasma.

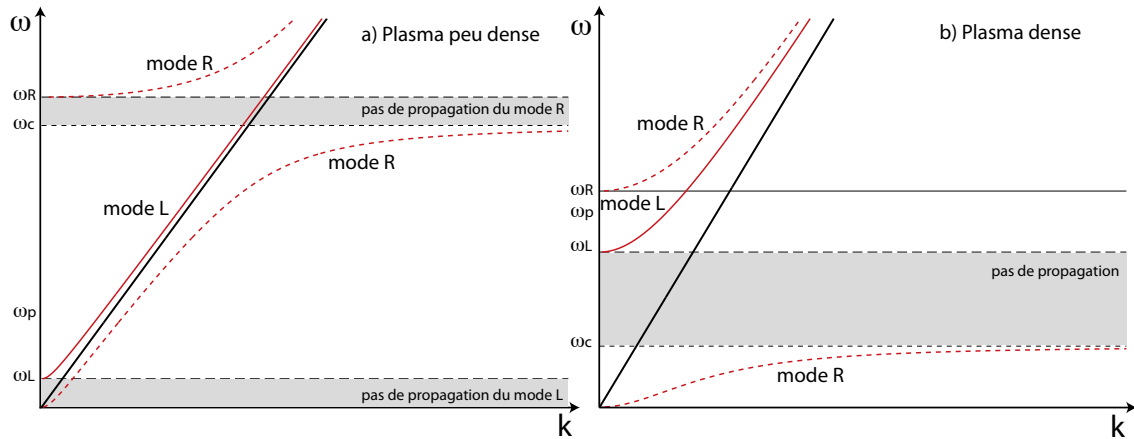


FIGURE 2.5 – Courbes de dispersion en propagation parallèle pour un plasma peu dense (a) soit $\omega_p < \omega_c$ et pour un plasma dense (b) où $\omega_p > \omega_c$. Les courbes en tirets rouges représente le mode R, les courbes en traits pleins rouges représentent le mode L. La droite épaisse noire représente la relation de dispersion du vide $\omega = kc$. Les droites en tirets larges correspondent à la fréquence de coupure du mode R ($\omega_R = 2\pi f_R$) et du mode L ($\omega_L = 2\pi f_L$) et la droite en tirets fins correspond à la fréquence de résonance gyromagnétique $\omega_c = 2\pi f_c$.

— **Modes droit (R) et gauche (L) :** $n^2 = S \pm D$.

Cette solution correspond aux indices de réfraction que l'on notera respectivement :

$$n_R^2 = 1 - \frac{X}{1+Y} \quad \text{et} \quad n_L^2 = 1 - \frac{X}{1-Y} \quad (2.67)$$

Expression des indices n_R et n_L :

$$S \pm D = 1 - \frac{X}{1-Y^2} \pm \frac{XY}{1-Y^2} = 1 - X \frac{1 \mp Y}{(1+Y)(1-Y)} = 1 - \frac{X}{1 \pm Y}$$

Courbes de dispersion La figure 2.5 représente les courbes de dispersion en propagation parallèle pour un plasma peu dense (a), soit $\omega_p < \omega_c$, et pour un plasma dense (b) $\omega_p > \omega_c$. La relation de dispersion du mode R est représentée par les courbes en tirets rouges, celle du mode L est représentée par la courbe en trait plein rouge. La relation de dispersion du vide $\omega = kc$ est donnée par la courbe noire épaisse.

Mode L : Le mode L (supraluminique $v_\phi > c$) présente une fréquence de coupure basse f_L . À haute fréquence la relation de dispersion tend vers une onde de lumière ($\omega = kc$), ce qui indique que l'onde peut se propager dans le vide⁹.

Mode R : Le mode R présente deux branches de dispersion.

La branche haute fréquence du mode R présente une fréquence de coupure basse

9. Plus précisément, toute onde dont la courbe de dispersion tend vers celle d'une onde de lumière, peut se propager dans un milieu où le champ magnétique et la densité électronique sont faibles par rapport aux conditions dans la source de l'émission.

f_R . Ce mode supraluminique tend vers une onde de lumière à haute fréquence et peut donc se propager dans le vide.

La deuxième présente une fréquence de résonance haute f_c pour laquelle l'onde ne se propage plus. Ce mode subluminaire ($v_\phi < c$) ne présentant pas d'asymptote vers une onde de lumière, il ne peut pas se propager en dehors du plasma.

On montera dans le chapitre 3 que le champ électrique du mode R tourne dans le même sens que les électrons autour de \mathbf{B}_0 , tandis que celui mode L tourne en sens inverse. La fréquence cyclotron est donc une fréquence de résonance du mode R.

Les positions relatives des pulsations de coupures et de résonances font apparaître des zones du diagramme dans lesquelles un ou plusieurs modes ne peuvent pas se propager.

2.4.4.2 Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$

Relation de dispersion La relation de dispersion (2.59) en propagation perpendiculaire devient :

$$(P - n^2) [(S - n^2)S - D^2] = 0 \quad (2.68)$$

qui admet deux solutions, correspondant à deux modes de propagation :

— **Le mode Ordinaire** : $n^2 = P$

$$n_O^2 = 1 - X \quad (2.69)$$

Cette solution correspond à l'indice de réfraction du milieu isotrope. On appelle ce mode le mode « Ordinaire », car il ne dépend pas de la présence du champ magnétique extérieur.

— **Le mode extraordinaire** : $n^2 = \frac{S^2 - D^2}{S}$

$$n_X^2 = 1 - \frac{X(1 - X)}{1 - X - Y^2} \quad (2.70)$$

Courbe de dispersion La figure 2.6 représente les courbes de dispersion en propagation perpendiculaire pour un plasma peu dense (a), soit $\omega_p < \omega_c$, et pour un plasma dense (b) où $\omega_p > \omega_c$. La relation de dispersion du mode O est représentée par la courbe en tirets rouges, celle du mode X par les courbes en traits pleins rouges. La relation de dispersion du vide $\omega = kc$ est donnée par la courbe noire épaisse.

Mode O : Le mode O supraluminique présente une fréquence de coupure basse f_p . À haute fréquence la relation de dispersion tend vers une onde de lumière ($\omega = kc$), ce qui indique que l'onde peut se propager dans le vide.

Mode X : Le mode X présente deux branches de dispersion.

La branche haute fréquence du mode X présente une fréquence de coupure basse f_R . Ce mode supraluminique tend vers une onde de lumière à haute fréquence et peut donc se propager dans le vide.

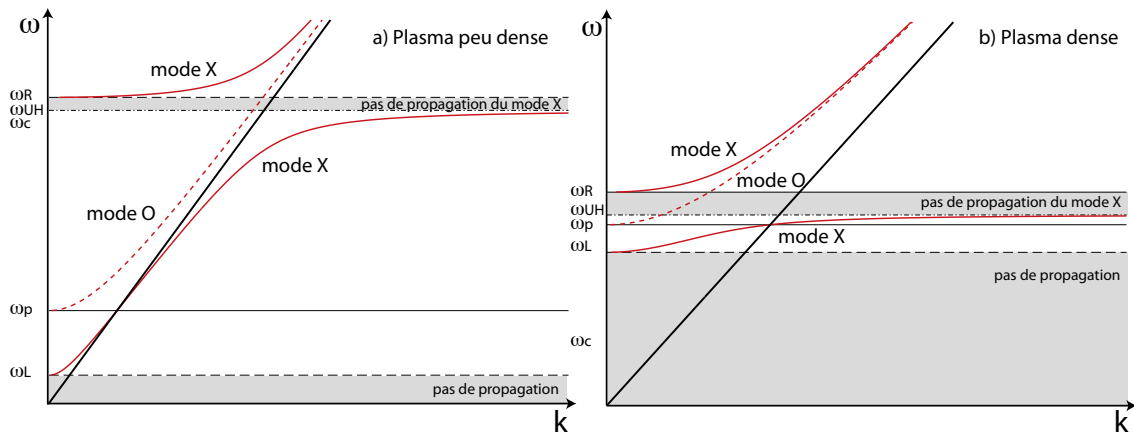


FIGURE 2.6 – Courbes de dispersion en propagation perpendiculaire pour un plasma peu dense (a) soit $\omega_p < \omega_c$ et pour un plasma dense (b) $\omega_p > \omega_c$. Les courbes en tirets rouges représente le mode O, les courbes en traits pleins rouges représentent le mode X. La droite épaisse noire représente la relation de dispersion du vide $\omega = kc$. Les droites en tirets larges correspondent à la fréquence de coupure du mode R ($\omega_R = 2\pi f_R$) et du mode L ($\omega_L = 2\pi f_L$), la droite en tirets-points correspond à la fréquence hybride supérieure ($\omega_{UH} = 2\pi f_{UH}$), la droite en tirets fins correspond à la fréquence de résonance gyromagnétique ($\omega_c = 2\pi f_c$), la droite pleine à fréquence plasma ($\omega_p = 2\pi f_p$).

La deuxième présente une fréquence de coupure basse f_L et une fréquence de résonance haute f_{UH} . Ce mode est supraluminique pour les fréquences inférieures à f_p et subluminiq pour les fréquences supérieures à f_p . Ce mode ne présentant pas d'asymptote vers une onde de lumière, il ne peut pas se propager en dehors du plasma.

On constate qu'aucune propagation n'est possible pour des fréquences inférieures à f_L , et que le mode X ne peut se propager entre f_{UH} et f_R .

Pour résumer :**Modes existants en propagation parallèle $\theta = 0$ (figure 2.5) :**

- l'oscillation de plasma à $f = f_p$
- le mode droit :

$$n_R^2 = 1 - \frac{X}{1 + Y}$$

- fréquence de coupure f_R
- fréquence de résonance f_c
- le mode gauche :

$$n_L^2 = 1 - \frac{X}{1 - Y}$$

- fréquence de coupure f_L

Modes existants en propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$ (figure 2.6) :

- le mode Ordinaire :

$$n_O^2 = 1 - X$$

- fréquence de coupure f_p
- le mode eXtraordinaire :

$$n_X^2 = 1 - \frac{X(1 - X)}{1 - X - Y^2}$$

- fréquences de coupure f_R et f_L
- fréquence de résonance f_{UH}

2.4.5 Courbes de dispersion en propagation oblique

Le diagramme (n, f) et le diagramme de Brillouin en propagation oblique sont représentés respectivement aux figures 2.7 et 2.8. Dans les deux cas, les courbes jaunes et rouges correspondent à la branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree et les courbes vertes et bleus correspondent à la branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree. Les relations de dispersions des ondes principales sont représentées en traits noirs épais (pleins pour la propagation parallèle, tirets pour la propagation perpendiculaire). Les relations de dispersion des ondes principales délimitent des zones des diagrammes à l'intérieur desquelles les modes obliques (traits pleins fins) sont susceptibles de se propager. Ces modes obliques dans les différentes zones vont prendre les dénominations des modes des ondes principales les encadrant (LO, RX, LX ...).

2.4.5.1 Dénomination des modes

Propagation parallèle $\theta = 0$ En propagation parallèle, la dénomination des branches de la relation d'Appleton-Hartree à partir des modes droit et gauche dépend de la valeur

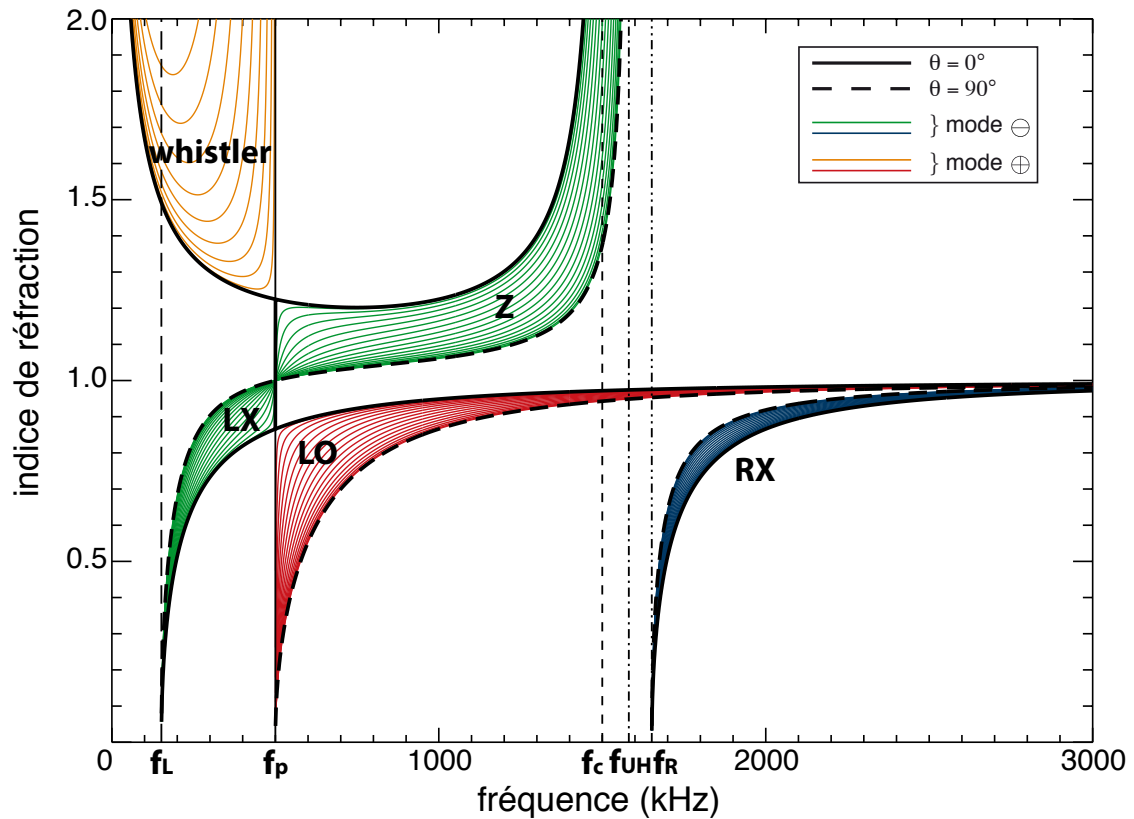


FIGURE 2.7 – Courbes de dispersion dans le plan (n, f) . Les domaines rouges et jaunes correspondent à la branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, les domaines vert et bleu correspondent à la branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree. Les courbes de dispersion en propagation parallèle sont représentées en traits pleins noirs épais, celles en propagation perpendiculaire en tirets noirs épais. Les courbes de dispersion en propagation oblique pour différents θ sont représentées en traits fins de couleur. Les fréquences de coupures et de résonances sont représentées respectivement en traits pleins fins pour la coupure plasma, traits tirets larges fins pour la coupure du mode L, trait tirets double pointillés pour la coupure du mode R, traits tirets fins pour la résonance cyclotron et traits tirets pointillés fins pour la résonance hybride supérieure. Voir le texte pour la dénomination des modes.

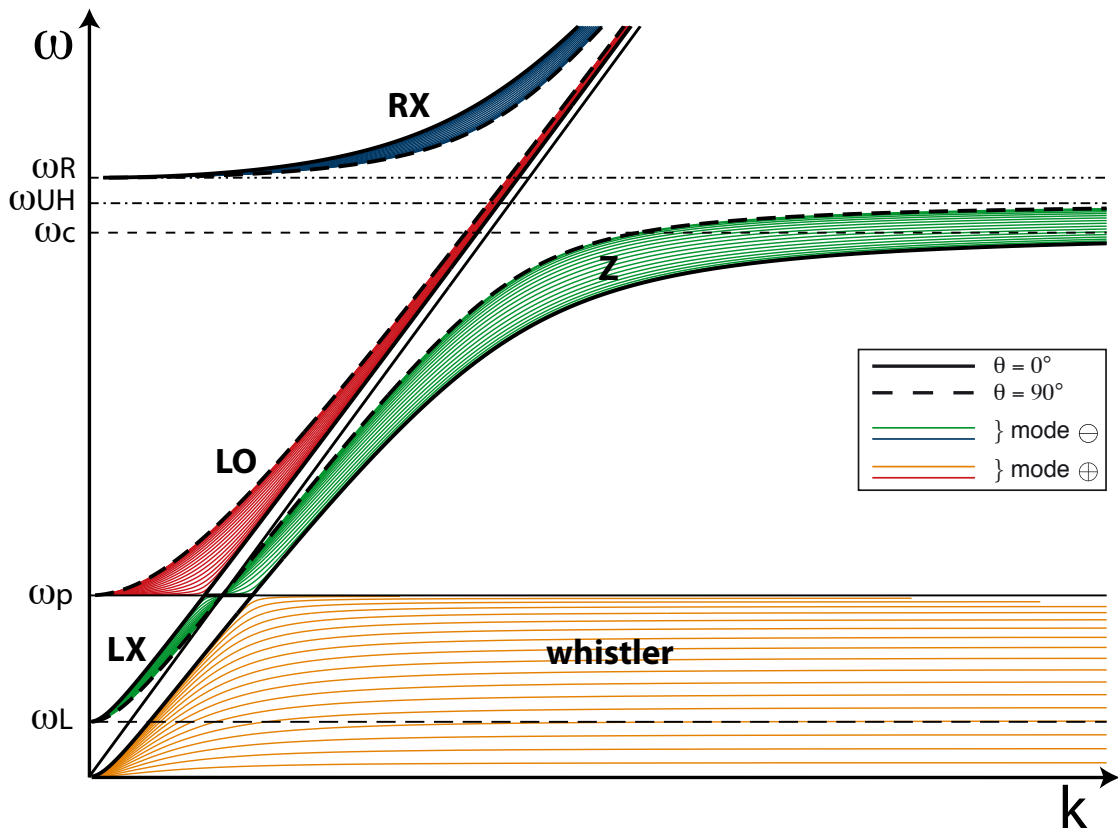


FIGURE 2.8 – Diagramme de Brillouin dans le plan (ω, k) . Les domaines rouges et jaunes correspondent à la branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, les domaines vert et bleu correspondent à la branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree. Les courbes de dispersion en propagation parallèle sont représentées en traits pleins noirs épais, celles en propagation perpendiculaire en tirets noirs épais. Les courbes de dispersion en propagation oblique pour différents θ sont représentées en traits fins de couleur. Les fréquences de coupures et de résonances sont représentées respectivement en traits pleins fins pour la coupure plasma, traits tirets larges fins pour la coupure du mode L, trait tirets double pointillés pour la coupure du mode R, traits tirets fins pour la résonance cyclotron et traits tirets pointillés fins pour la résonance hybride supérieure. Voir le texte pour la dénomination des modes.

de la fréquence :

$$f > f_p \quad (X < 1) \quad \rightarrow \quad n_{\oplus} = n_L \quad \text{et} \quad n_{\ominus} = n_R \quad (2.71)$$

$$f < f_p \quad (X > 1) \quad \rightarrow \quad n_{\oplus} = n_R \quad \text{et} \quad n_{\ominus} = n_L \quad (2.72)$$

Les courbes de dispersion tracées à partir de la relation d'Appleton-Hartree en propagation parallèle présentent donc une discontinuité en $\omega = \omega_p$.

Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$ En propagation perpendiculaire, la branche \oplus correspond au mode Ordinaire, la branche \ominus au mode extraordinaire, quelle que soit la fréquence.

Propagation oblique

Branche \oplus : La branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree délimite deux domaines distincts des plans (ω, k) et (n, ω) .

- Le premier (domaine jaune, de fréquence inférieure à f_p) est appelé mode « Whistler » car responsable d'émissions « sifflantes » dans l'ionosphère terrestre. Ce mode subluminaire, présente une fréquence de résonance haute à la fréquence plasma f_p . Ce mode ne peut pas se propager en dehors du plasma (pas d'asymptote vers une onde de lumière).
- Le deuxième (domaine rouge, de fréquence supérieure à f_p) est appelé mode « LO » car délimité par les modes L en propagation parallèle et O en propagation perpendiculaire. Ce mode supraluminaire présente une fréquence de coupure basse à la fréquence plasma f_p et tend vers une onde de lumière à haute fréquence. Ce mode est donc capable de se propager dans le vide.

Branche \ominus : La branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree délimite trois domaines distincts des plans (ω, k) et (n, ω) .

- Le premier (domaine vert, de fréquence inférieure à f_p) est encadré par le mode L en propagation parallèle, par le mode X en propagation perpendiculaire. Ce mode supraluminaire est appelé le mode « LX » . Il présente une fréquence de coupure basse à la fréquence de coupure du mode L, f_L et une fréquence de résonance haute à la fréquence plasma f_p . Ce mode ne peut pas se propager en dehors du plasma.
- Le deuxième (domaine vert, de fréquence supérieure à f_p) est délimité par le mode R en propagation parallèle et par le mode X en propagation perpendiculaire. Ce mode subluminaire est appelé le mode « RX » ou mode « Z » . Il présente une fréquence de coupure basse à la fréquence plasma f_p et une fréquence de résonance haute à la fréquence hybride supérieure f_{UH} . Plus précisément, la fréquence de résonance est comprise entre la fréquence cyclotron (résonance gyromagnétique du mode R) et la fréquence hybride supérieure (résonance du mode X), et dépend de l'angle θ par la relation (2.65). Ce mode ne peut pas se propager en dehors du plasma.

- Le troisième (domaine bleu de fréquence supérieure à f_R) est délimité par le mode R en propagation parallèle et le mode X en propagation perpendiculaire. Ce mode supraluminique présente une fréquence de coupure basse à la fréquence de coupure du mode R et tend vers une onde de lumière aux hautes fréquences. Ce mode peut donc se propager dans le vide.

Pour résumer :

Les modes pouvant se propager en dehors du plasma :

- mode **LO**, branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, $f > f_p$.
- mode **RX**, branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree, $f > f_R^a$.

Les modes ne pouvant pas se propager en dehors du plasma :

- mode **whistler**, branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, $f < f_p$.
- mode **LX**, branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree, $f_L < f < f_p$.
- mode **Z**, branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree, $f_p < f < f_{UH}$.

a. En radioastronomie, la fréquence de coupure du mode R est souvent appelée fréquence de coupure du mode X, f_X

Dénomination des modes en propagation parallèle :

En posant $\theta = 0$ dans la relation d'Appleton-Hartree (2.61), on obtient :

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{(1-X) \pm |(1-X)Y|}$$

Le signe au dénominateur va donc dépendre de la valeur de X.

$X < 1$ alors $|(1-X)| = (1-X)$. On obtient donc :

$$n_{\oplus}^2 = 1 - \frac{X}{1+|Y|} = 1 - \frac{X}{1-Y} = n_L^2 \quad n_{\ominus}^2 = 1 - \frac{X}{1-|Y|} = 1 - \frac{X}{1+Y} = n_R^2$$

$X > 1$ alors $|(1-X)| = -(1-X)$. On obtient donc :

$$n_{\oplus}^2 = 1 - \frac{X}{1-|Y|} = 1 - \frac{X}{1+Y} = n_R^2 \quad n_{\ominus}^2 = 1 - \frac{X}{1+|Y|} = 1 - \frac{X}{1-Y} = n_L^2$$

Dénomination des modes en propagation perpendiculaire :

En posant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la relation d'Appleton-Hartree (2.61), on obtient :

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{2(1-X) - Y^2 \pm Y^2}$$

On obtient donc directement :

$$\begin{aligned} n_{\oplus}^2 &= 1 - X = n_{\circ}^2 \\ n_{\ominus}^2 &= 1 - \frac{X(1 - X)}{1 - X - Y^2} = n_X^2 \end{aligned}$$

2.4.6 Surfaces d'indice de réfraction

Par analogie avec la propagation des ondes lumineuses dans les cristaux anisotropes, on peut définir la surface d'indice de réfraction comme la surface décrite par l'extrémité du vecteur indice de réfraction dans un plasma donné, la direction du champ magnétique jouant le rôle de l'axe optique des cristaux uniaxes. L'étude des surfaces d'indice de réfraction permet de déterminer des caractéristiques qualitatives des modes se propageant dans un milieu donné et est à l'origine d'une technique de tracé de rayon permettant de calculer la trajectoire des ondes lumineuses à travers un milieu stratifié (méthode de Poverlein [Poverlein 1948], voir chapitre 5).

2.4.6.1 Propriétés des surfaces d'indice de réfraction

En coordonnées cartésiennes où le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 est dirigé selon \mathbf{e}_z , les coordonnées du vecteur indice de réfraction \mathbf{n} s'écrivent :

$$n_x = n \sin \theta \cos \phi, \quad n_y = n \sin \theta \sin \phi, \quad n_z = n \cos \theta \quad (2.73)$$

où θ est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{B}_0 et ϕ est l'angle azimutal.

L'espace d'indice de réfraction est défini par les axes $\{n_x, n_y, n_z\}$, parallèles aux axes $\{x, y, z\}$ de l'espace géométrique. En tout point P de coordonnées (x, y, z) , l'extrémité du vecteur d'indice de réfraction \mathbf{n} décrit une surface appelée *surface d'indice de réfraction*.

On liste ici quelques propriétés des surfaces d'indice de réfraction :

1. Dans un magnetoplasma froid, il existe deux surfaces d'indice de réfraction : une pour le mode \oplus de la relation d'Appleton-Hartree et une pour le mode \ominus .
2. Dans un magnetoplasma froid, n ne dépend pas de ϕ (d'après la relation d'Appleton-Hartree (2.61), l'indice de réfraction ne dépend que de θ et ω), la surface d'indice de réfraction est une surface de révolution autour du vecteur champ magnétique externe. Elle correspond simplement à la courbe polaire $n(\theta)$ pour une fréquence donnée.
3. Dans le vide, l'indice de réfraction est une constante ($n = 1$). La surface d'indice de réfraction est donc une sphère de rayon 1.
4. Dans un plasma isotrope, l'indice de réfraction ne dépend pas de θ , la surface d'indice de réfraction donc est une sphère de rayon n .

2.4.6.2 Vitesse de phase, vitesse de groupe

Vitesse de phase La vitesse de phase est la vitesse de propagation du front d'onde. Elle est définie comme le rapport de la vitesse de la lumière sur l'indice de réfraction.

$$v_\phi = \frac{c}{n}$$

On peut donc définir une surface de vitesses de phase comme l'inverse de la surface d'indice de réfraction (en unité de c). Les surfaces de vitesses de phase possèdent les mêmes propriétés que les surfaces d'indice de réfraction, notamment la symétrie de révolution autour de l'axe du champ magnétique externe.

Vitesse de groupe La vitesse de groupe est définie comme la vitesse de propagation d'une perturbation localement spatialisée.

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \omega}{\partial n}$$

Le vecteur vitesse de groupe est donc normal à la surface d'indice de réfraction. On en déduit géométriquement que **les vecteurs champ magnétique, vecteur d'onde et vitesse de groupe sont coplanaires** (figure 2.9).

2.4.6.3 Topologie des surfaces d'indice de réfraction

La topologie des surfaces d'indice de réfraction est définie par la présence ou non d'une résonance dans une direction donnée ($n(\theta_r) \rightarrow \infty$) et par le nombre de modes existants en propagation parallèle et perpendiculaire.

Il existe trois topologies de surface, dont la dénomination fait référence à la forme de la surface de vitesse de phase.

- la topologie **ellipsoïde**, pas de résonance, autant de modes en propagation parallèle et perpendiculaire (figure 2.10a).
- la topologie **roue**, un mode de plus en propagation perpendiculaire qu'en propagation parallèle (figure 2.10b), propagation pour $\theta < \theta_r$.
- la topologie **haltère**, un mode de plus en propagation parallèle qu'en propagation perpendiculaire (figure 2.10c), propagation pour $\theta_r < \theta < \pi/2$.

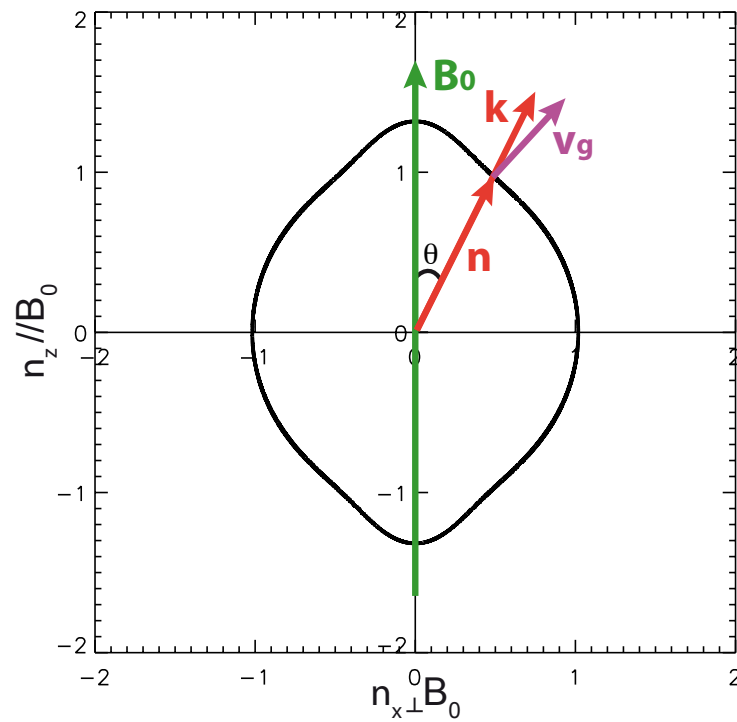
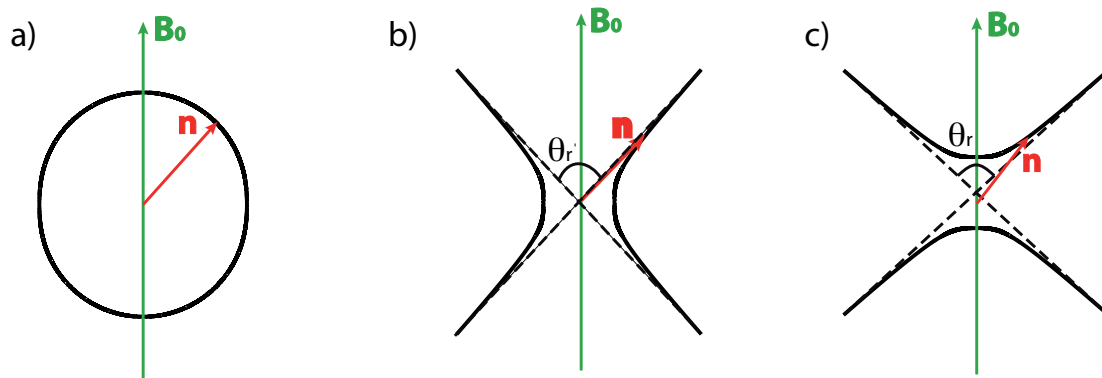


FIGURE 2.9 – Surface d'indice de réfraction de la branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree dans le plan (n_x, n_z) , pour $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$, le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 étant selon l'axe \mathbf{e}_z . Le vecteur indice de réfraction et le vecteur d'onde sont colinéaires. Pour un angle θ donné, le vecteur vitesse de groupe est normal à la surface d'indice de réfraction. Les vecteur champ magnétique externe \mathbf{B}_0 , vitesse de groupe \mathbf{v}_g et vecteur d'onde \mathbf{k} sont coplanaires.

Surfaces d'indice de réfraction



Surfaces de vitesse de phase

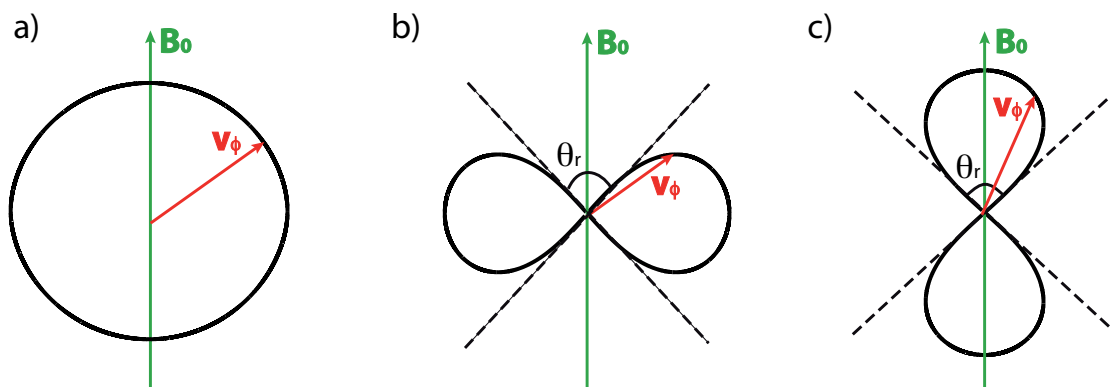


FIGURE 2.10 – Topologie des surfaces d'indice de réfraction et de vitesse de phase. a) Ellipsoïde, b) Roue, c) Haltère.

POLARISATION DES ONDES RADIO DANS LES PLASMAS FROIDS HOMOGÈNES

Sommaire

3.1 Détermination de la polarisation des ondes radio dans les plasmas froids, homogènes et magnétisés	60
3.1.1 Polarisation dans un plasma non magnétisé	60
3.1.1.1 Ondes longitudinales	61
3.1.1.2 Ondes transverses	61
3.1.2 Polarisation dans un plasma magnétisé	62
3.1.2.1 Algèbre linéaire : Résolution d'un système d'équations homogène	63
3.1.2.2 Application au calcul de la polarisation en propagation oblique	64
3.1.2.3 Rapports de polarisation dans le repère lié au champ magnétique externe	64
3.1.2.4 Rapports de polarisation dans le repère lié au vecteur d'onde	65
3.1.2.5 Expression du champ électrique de l'onde	65
3.1.2.6 Expression du champ électrique dans le plan de polarisation	67
3.1.3 Polarisation au voisinage d'une coupure et d'une résonance	69
3.1.3.1 Coupure	69
3.1.3.2 Résonance	69
3.2 Polarisation des ondes principales	70
3.2.1 Propagation parallèle $\theta = 0$	70
3.2.1.1 Polarisation du mode longitudinal	70
3.2.1.2 Polarisation des modes transverses	70
3.2.2 Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$	72
3.2.2.1 Polarisation du mode « Ordinaire »	72
3.2.2.2 Polarisation du mode « eXtraordinaire »	73
3.3 Paramètres de Stokes	75
3.3.1 Ellipse de polarisation	75
3.3.2 Expressions des paramètres de Stokes	76
3.3.3 Paramètres de Stokes et rapports de polarisation	77

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le caractère chargé des particules du plasma contraint la fréquence et la direction du vecteur d'onde des ondes susceptibles de s'y propager (relation de dispersion). La direction du champ électrique de l'onde est elle aussi contrainte par les paramètres du plasma.

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique de la polarisation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids non collisionnels, homogènes et illimités. L'état de polarisation dans le cas général est obtenu à partir de l'équation vectorielle de la relation de dispersion et décrit à partir de l'expression du champ électrique de l'onde ainsi que des paramètres de Stokes.

3.1 Détermination de la polarisation des ondes radio dans les plasmas froids, homogènes et magnétisés

La polarisation d'une onde radio décrit l'évolution de la direction et de l'amplitude du champ électrique \mathbf{E} de l'onde au cours de sa propagation. Pour déterminer l'état de polarisation d'une onde, il faut donc déterminer les composantes de \mathbf{E} dans un repère bien choisi. Nous avons montré dans le chapitre 2 que l'étude de la propagation d'une onde plane électromagnétique dans un plasma froid, homogène et magnétisé, conduit, à partir des équations de Maxwell, à la relation suivante entre le champ électrique de l'onde et les paramètres du plasma :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \bar{\bar{\kappa}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$ est le vecteur indice de réfraction, colinéaire au vecteur d'onde \mathbf{k} et ω est la pulsation de l'onde, c la vitesse de la lumière dans le vide, \mathbf{E} le vecteur champ électrique de l'onde et $\bar{\bar{\kappa}}$ le tenseur permittivité relative du plasma.

Déterminer la polarisation de l'onde revient donc à résoudre cette équation. Si la relation de dispersion correspond à la valeur propre nulle du système (3.1), l'état de polarisation correspond au vecteur propre associé à cette valeur propre nulle.

Afin de dégager les caractéristiques de la polarisation des ondes dans les plasmas, nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'état de polarisation des ondes dans les plasmas non magnétisés (donc isotropes), puis nous déterminerons de manière générale l'état de polarisation des ondes dans les plasmas magnétisés anisotropes.

3.1.1 Polarisation dans un plasma non magnétisé

En milieu isotrope (sans champ magnétique), le tenseur permittivité est diagonal $\bar{\bar{\kappa}} = P\bar{\bar{\mathbf{1}}}$ (chapitre 2) avec

$$P = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

où ω_p est la pulsation plasma des électrons.

On peut supposer sans perte de généralité que le vecteur indice de réfraction \mathbf{n} est selon l'axe \mathbf{e}_z , soit $\mathbf{n} = (0, 0, n)$. Le système (3.1) devient donc :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & P - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

avec $n^2 = c^2 k^2 / \omega^2$.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ce système d'équations linéaires homogène admet des solutions non-triviales si et seulement si $\det(M)=0$, soit :

$$P(P - n^2)^2 = 0$$

Nous avons montré qu'il existe alors trois solutions caractérisées par un état de polarisation propre :

- une solution simple telle que $P = 0$ et $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$
- une solution double telle que $n^2 = P$ et $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$

3.1.1.1 Ondes longitudinales

La solution $P = 0$ correspond aux ondes pour lesquelles seule la composante E_z colinéaire au vecteur d'onde est non nulle.

Cette solution correspond à l'**oscillation de plasma électronique**, déjà rencontré au chapitre 2. Ces ondes de pulsation $\omega = \omega_p$ sont donc **polarisées rectilignement** selon \mathbf{k} .

Détermination de la polarisation :

$P = 0$ implique $-n^2 E_x = 0$, $-n^2 E_y = 0$ et $0 \times E_z = 0$.

Comme n^2 est non nul, $E_x = E_y = 0$, or comme l'onde existe, cela implique que $E_z \neq 0$.

3.1.1.2 Ondes transverses

Les solutions $n^2 = P$ correspondent aux ondes pour lesquelles seul $E_x \neq 0$ et/ou $E_y \neq 0$. Les vecteurs propres du système (3.2) sont donc des **ondes transverses polarisées rectilignement** selon Ox ou Oy . L'état de polarisation général d'une onde se propageant dans un plasma isotrope est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres. On rappelle que la relation de dispersion en milieu isotrope n'autorise que la propagation des ondes de pulsation supérieure à la pulsation plasma (chapitre 2). Ainsi, de manière générale, en milieu isotrope, pour une onde de pulsation $\omega > \omega_p$ la polarisation est transverse et elliptique.

Détermination de la polarisation :

$n^2 = P$ implique $0 \times E_x = 0$, $0 \times E_y = 0$ et $PE_z = 0$.

Comme P est non nul, $E_z = 0$ et $E_x \neq 0$ et/ou $E_y \neq 0$.

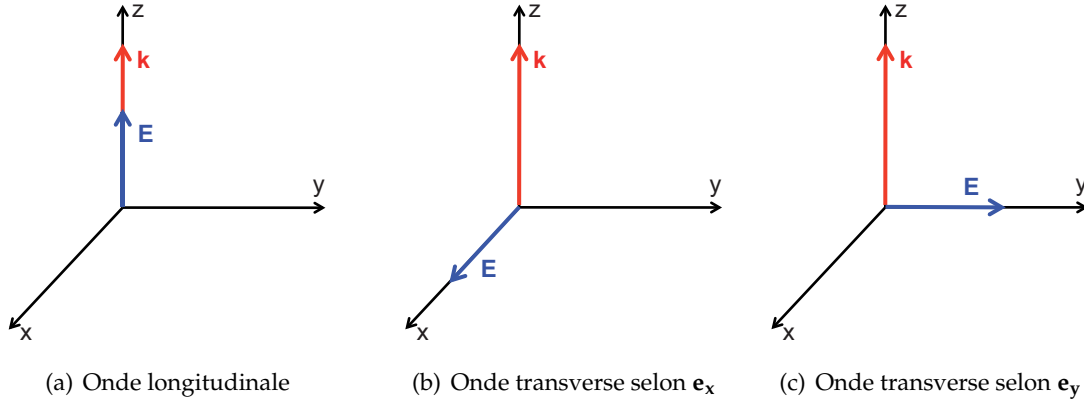


FIGURE 3.1 – Polarisation en milieu isotrope

3.1.2 Polarisation dans un plasma magnétisé

En présence de champ magnétique, les polarisations ne sont plus aussi simples.

Nous avons vu au chapitre 2 que pour un plasma baignant dans un champ magnétique externe \mathbf{B}_0 , l'équation (3.1) peut se mettre sous une forme matricielle simple. En choisissant le repère où $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{k} \in (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ faisant un angle θ avec le champ magnétique, l'équation (3.1) se met sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}, \quad D = \frac{XY}{1 - Y^2} \quad \text{et} \quad P = 1 - X$$

avec

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\omega_c}{\omega}$$

Ce système est un système d'équations linéaires homogène. Il possède des solutions non-triviales (c'est-à-dire autres que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$) si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients est nul : $\det(M) = 0$.

Cette relation nous a permis au chapitre 2 de déterminer la relation de dispersion. Ici

nous cherchons à trouver les solutions $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ de ce système.

Le déterminant de la matrice M devant être nul, cette matrice n'est pas inversible : le système n'est pas un système de Cramer et ne peut être résolu comme tel. Si le système précédent admet une solution non nulle, alors il en existe une infinité (système dégénéré) : en effet s'il existe (E_x, E_y, E_z) solution de (3.3) alors $\lambda \mathbf{E} = (\lambda E_x, \lambda E_y, \lambda E_z)$ est aussi solution de ce système linéaire homogène. La résolution d'un tel système ne peut se faire qu'à un facteur multiplicatif près.

3.1.2.1 Algèbre linéaire : Résolution d'un système d'équations homogène

Soit un système d'équations linéaires homogène $(S) : A\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

On supposera que la matrice A est une matrice carrée (n équations pour n inconnues). Ce système possède des solutions non-triviales (autre que $\mathbf{X} = \mathbf{0}$) si et seulement si son déterminant est nul. La matrice A n'est alors pas inversible. Le fait que le déterminant de la matrice A soit nul est équivalent à dire que son rang est inférieur au nombre n d'équations.

Supposons maintenant que le rang de la matrice A est $r = n - 1$. Cela signifie qu'il existe au moins une matrice carrée extraite de A de dimension $r \times r$ inversible (déterminant non nul). Par exemple, la matrice que l'on obtient en supprimant la première ligne et la dernière colonne de la matrice A .

Cofacteur d'un élément d'une matrice

Soit une matrice $A = (a_{ij})$, on appelle cofacteur de l'élément a_{ij} la quantité définie par :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

où M_{ij} est le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne (ce déterminant est un *mineur* de la matrice A).

Formule du développement du déterminant de A selon sa $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$$

Soient $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{1n}$, les cofacteurs des éléments de la première ligne de A . Ces cofacteurs ne sont pas tous nuls puisque la matrice est de rang $n - 1$.

D'après la formule du développement du déterminant de A par rapport à sa première ligne, on a :

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \dots + a_{1n}\Delta_{1n} = \det(A) = 0$$

On peut aussi montrer par construction que l'on a :

$$\begin{cases} a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + \dots + a_{2n}\Delta_{1n} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\Delta_{11} + a_{n2}\Delta_{12} + \dots + a_{nn}\Delta_{1n} = 0 \end{cases}$$

D'après les équations précédentes, l'ensemble des cofacteurs des éléments de la première ligne de la matrice A ($\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{1n}$) est donc solution du système (S).

3.1.2.2 Application au calcul de la polarisation en propagation oblique

Comme il a été dit précédemment, déterminer la polarisation d'une onde électromagnétique consiste à résoudre le système (3.3) : $M\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

La matrice M est ici une matrice 3×3 , de déterminant nul. Son rang est égal à la dimension du plus grand mineur de M non nul.

Détermination du rang de M Si l'on élimine la première ligne et la dernière colonne de la matrice M , le déterminant de la matrice résultante n'est pas nécessairement nul :

$$\begin{vmatrix} iD & S - n^2 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Il existe donc une matrice de dimension 2×2 extraite de M de déterminant non nul. La matrice M est donc de rang 2.

Solutions du système D'après le paragraphe 3.1.2.1, les solutions du système (3.3) sont proportionnelles aux cofacteurs des éléments de la première ligne de M :

$$\begin{aligned} E_x &= \lambda \Delta_{11} = \lambda(S - n^2)(P - n^2 \sin^2 \theta) \\ E_y &= \lambda \Delta_{12} = \lambda(-iD)(P - n^2 \sin^2 \theta) \\ E_z &= \lambda \Delta_{13} = \lambda(n^2 - S)n^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.2.3 Rapports de polarisation dans le repère lié au champ magnétique externe

D'après les solutions (3.4), dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{k} \in (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ faisant un angle θ avec le champ magnétique, on obtient :

$$\boxed{\frac{E_x}{(n^2 - S)(n^2 \sin^2 \theta - P)} = \frac{E_y}{iD(n^2 \sin^2 \theta - P)} = \frac{E_z}{(n^2 - S)n^2 \sin \theta \cos \theta}} \quad (3.5)$$

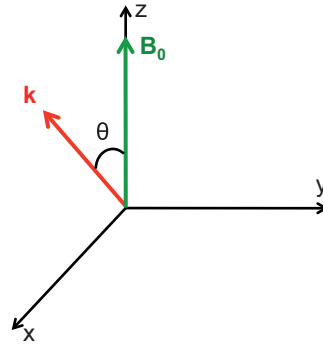


FIGURE 3.2 – Repère lié au champ magnétique externe \mathbf{B}_0

Les rapports de polarisation correspondent aux rapports des composantes du champ électrique dans le repère choisi. Ainsi, on a :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{iD}{(n^2 - S)} \quad (3.6a)$$

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{n^2 \sin \theta \cos \theta}{(n^2 \sin^2 \theta - P)} \quad (3.6b)$$

$$\frac{E_z}{E_y} = -\frac{i(n^2 - S)n^2 \sin \theta \cos \theta}{D(n^2 \sin^2 \theta - P)} \quad (3.6c)$$

3.1.2.4 Rapports de polarisation dans le repère lié au vecteur d'onde

Dans la pratique, il est souvent utile d'exprimer les rapports de polarisation dans le repère lié au vecteur d'onde.

Soit le repère (O, x', y', z') tel que $\mathbf{k} = k\mathbf{e}'_z$ et $\mathbf{B}_0 \in (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_z)$. Ce repère est obtenu par une simple rotation du repère précédent d'un angle θ autour de l'axe $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}'_y$.

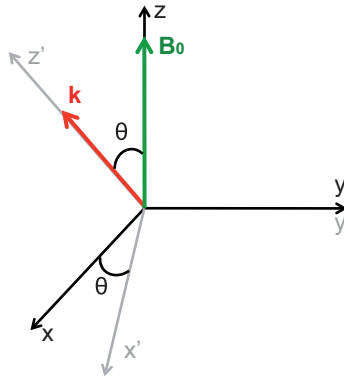


FIGURE 3.3 – Repère (x', y', z') lié au vecteur d'onde \mathbf{k}

Les rapports de polarisation dans ce repère sont donnés par :

$$\frac{E_{y'}}{E_{x'}} = -\frac{iD(n^2 \sin^2 \theta - P)}{(n^2 - S)P \cos \theta} \quad (3.7a)$$

$$\frac{E_{z'}}{E_{x'}} = -\frac{(n^2 - P) \sin \theta}{P \cos \theta} \quad (3.7b)$$

$$\frac{E_{z'}}{E_{y'}} = -\frac{i(n^2 - S)(n^2 - P) \sin \theta}{D(n^2 \sin^2 \theta - P)} \quad (3.7c)$$

La connaissance des rapports de polarisation nous permet de remonter à l'expression du champ électrique de l'onde.

Expression du champ électrique dans le repère lié au vecteur d'onde :

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E_x \cos \theta - E_z \sin \theta \\ E_{y'} &= E_y \\ E_{z'} &= E_x \sin \theta + E_z \cos \theta \end{aligned}$$

3.1.2.5 Expression du champ électrique de l'onde

Soit \mathbf{E} le champ électrique d'une onde progressive de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} . Dans le repère lié au champ magnétique externe \mathbf{B}_0 , le champ \mathbf{E} complexe s'exprime :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}_x e^{-i(\phi + \phi_0^x)} \\ \widetilde{E}_y e^{-i(\phi + \phi_0^y)} \\ \widetilde{E}_z e^{-i(\phi + \phi_0^z)} \end{pmatrix}$$

où $(E_x, E_y, E_z) \in \mathbb{C}^3$, $(\widetilde{E}_x, \widetilde{E}_y, \widetilde{E}_z) \in \mathbb{R}^3$.

La phase ϕ de l'onde est donnée par $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ et $(\phi_0^x, \phi_0^y, \phi_0^z)$ sont les phases à l'origine des composantes du vecteur \mathbf{E} .

Les rapports de polarisation permettent donc de remonter au déphasage entre les différentes composantes du champ électrique :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\widetilde{E}_y}{\widetilde{E}_x} e^{i\delta_1} \quad \text{et} \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{\widetilde{E}_z}{\widetilde{E}_x} e^{i\delta_2}$$

où $\delta_1 = \phi_0^x - \phi_0^y$ est le déphasage entre les composantes selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y et $\delta_2 = \phi_0^x - \phi_0^z$ est le déphasage entre les composantes selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z .

Les rapports de polarisation donnés par les équations (3.7a) à (3.7c) permettent de déterminer les déphasages δ_1 et δ_2 :

— $E_y/E_x \in i\mathbb{R}$, donc $\delta_1 = \pi/2$. On posera alors

$$\rho = \frac{\widetilde{E}_y}{\widetilde{E}_x} = \Im m \left(\frac{E_y}{E_x} \right)$$

— $E_z/E_x \in \mathbb{R}$, donc $\delta_2 = 0$. On posera alors

$$\tau = \frac{\widetilde{E}_z}{\widetilde{E}_x} = \Re e \left(\frac{E_z}{E_x} \right)$$

La quantité physique exploitable n'est pas le champ électrique tel qu'il est défini ci-dessus, mais uniquement sa partie réelle. On peut ainsi remonter à l'expression du champ électrique physique (en posant $\phi_0^x = 0$) :

$$\boxed{\Re e(\mathbf{E}) = \widetilde{E}_x \begin{array}{l} \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ \tau \cos \phi \end{array}} \quad (3.8)$$

Propriétés du champ électrique

- Dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, les composantes du champ électrique oscillent en quadrature, la projection du vecteur champ électrique dans ce plan décrit donc une ellipse centrée sur O d'axes principaux \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y et de valeurs de demi-axes $\rho \widetilde{E}_x$ et \widetilde{E}_x (figure 3.4(a)). Lorsque $\rho = 1$, la projection de la polarisation dans ce plan est circulaire. Le sens de rotation de \mathbf{E} dépend du signe de ρ ; sens trigonométrique si $\rho > 0$, sens horaire si $\rho < 0$.
- Dans le plan $(O, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, les composantes du champ électrique oscillent en quadrature de phase, la projection du vecteur champ électrique dans ce plan décrit donc une ellipse centrée sur O d'axes principaux \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z et de valeurs de demi-axes $\rho \widetilde{E}_x$ et $\tau \widetilde{E}_x$ (figure 3.4(b)). Lorsque $\rho = \tau$, la projection de la polarisation dans ce plan est circulaire. Le sens de rotation de \mathbf{E} dépend du signe relatif de ρ et τ ; sens trigonométrique si $\rho\tau > 0$, sens horaire si $\rho\tau < 0$.
- Dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ les composantes du champ électrique oscillent en phase, la projection du vecteur champ électrique dans ce plan décrit donc un segment de longueur $\sqrt{1 + \tau^2} \widetilde{E}_x$ et d'inclinaison γ par rapport à l'axe \mathbf{e}_x tel que $\gamma = \arctan(-\tau)$. La projection de la polarisation est donc toujours rectiligne dans ce plan (figure 3.4(c)).

Remarque :

Dans le repère lié au vecteur d'onde tel que $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}'_z$ et $\mathbf{B}_0 \in (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_z)$, le champ électrique

s'exprime :

$$\Re(\mathbf{E}) = \widetilde{E}_{x'} \begin{vmatrix} \cos \phi \\ \rho' \sin \phi \\ \tau' \cos \phi \end{vmatrix} = \widetilde{E}_x \begin{vmatrix} (\cos \theta - \tau \sin \theta) \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ (\sin \theta + \tau \cos \theta) \cos \phi \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

où $\rho' = \Im m \left(\frac{E_{y'}}{E_{x'}} \right)$ et $\tau' = \Re e \left(\frac{E_{z'}}{E_{x'}} \right)$ sont donnés par les équations (3.7).

3.1.2.6 Expression du champ électrique dans le plan de polarisation

Nous avons montré que la polarisation est une ellipse dont le plan est perpendiculaire au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ et forme un angle $\gamma = \arctan(-\tau)$ avec l'axe (O, x) .

Les composantes du champ électrique dans le repère lié au plan de polarisation $(O, \mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_y'' = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z'')$ sont alors données par :

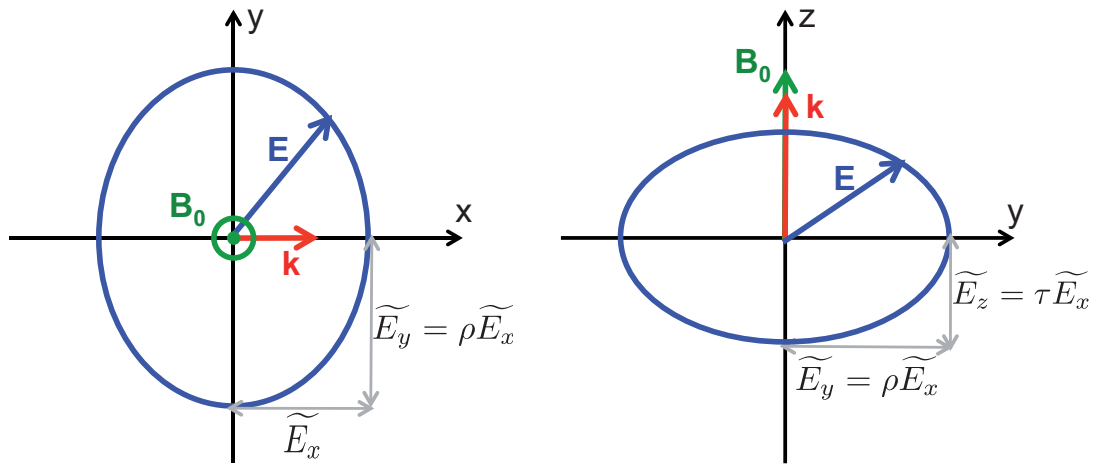
$$\Re(\mathbf{E}) = \widetilde{E}_x \begin{vmatrix} \sqrt{1 + \tau^2} \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Remarques :

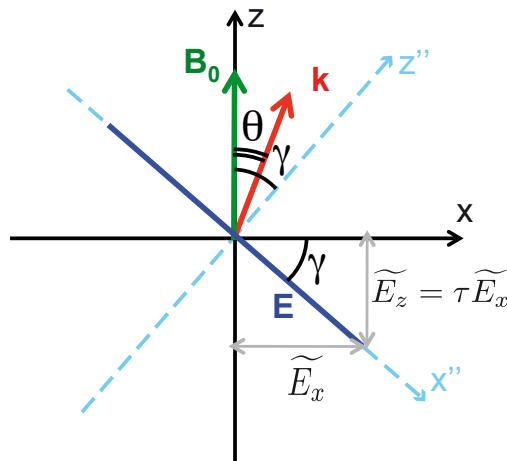
- La composante du champ électrique selon \mathbf{e}_z'' est bien nulle.
- La projection de l'ellipse de polarisation dans le plan $(\mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_z'')$ est un segment de longueur $2\sqrt{1 + \tau^2}\widetilde{E}_x$ selon \mathbf{e}_x'' .
- La projection de l'ellipse de polarisation dans le plan $(\mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_y'')$ est une ellipse de demi-axes $\rho\widetilde{E}_x$ et $\sqrt{1 + \tau^2}\widetilde{E}_x$.
- La projection de l'ellipse de polarisation dans le plan $(\mathbf{e}_y'', \mathbf{e}_z'')$ est un segment de longueur $2\rho\widetilde{E}_x$ selon \mathbf{e}_y'' .
- Le sens de rotation du champ électrique autour de \mathbf{B}_0 dépend uniquement du signe de ρ (car $\sqrt{1 + \tau^2} > 0$) : lorsque $\rho > 0$ le champ électrique tourne dans le sens direct par rapport à \mathbf{B}_0 et lorsque $\rho < 0$ le champ électrique tourne dans le sens horaire par rapport à \mathbf{B}_0 .
- Le sens de rotation de \mathbf{E} autour de \mathbf{B}_0 est indépendant du sens de propagation : le signe de ρ est déterminé par le signe de $n^2 - S$, or l'indice de réfraction est invariant par changement de θ en $\theta' = \pi - \theta$ (la relation d'Appleton-Hartree faisant intervenir uniquement des cosinus et des sinus en puissances paires).

Pour résumer :

Dans un plasma froid homogène et magnétisé, l'état de polarisation est toujours une ellipse contenue dans un plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$. Les axes principaux des ellipses sont selon $\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k} = \mathbf{e}_y$ et selon un axe contenu dans le plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$ faisant un angle $\gamma = \arctan(-\tau)$ par rapport à Ox (figure 3.4).



(a) Projection de la polarisation elliptique dans le plan (x, y) (b) Projection de la polarisation elliptique dans le plan (y, z)



(c) Projection de la polarisation rectiligne dans le plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0) = (x, z)$

FIGURE 3.4 – Polarisation d'une onde électromagnétique se propageant dans un plasma magnétisé.

Détermination des composantes du champ électrique dans le plan de polarisation $(\mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_y'')$:
 Le repère lié au plan de polarisation correspond à une rotation d'un angle $-\gamma$ autour de l'axe \mathbf{e}_y du repère lié à \mathbf{B}_0

$$\begin{aligned}
 E_x'' &= E_x \cos(-\gamma) - E_z \sin(-\gamma) = E_x \cos \gamma + E_z \sin \gamma \\
 E_y'' &= E_y \\
 E_z'' &= E_x \sin(-\gamma) + E_z \cos(-\gamma) = -E_x \sin \gamma + E_z \cos \gamma
 \end{aligned}$$

$$\sin \gamma = \sin(\arctan(\tau)) = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}$$

$$\cos \gamma = \cos(\arctan(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}$$

$$E''_x = \frac{E_x}{\sqrt{1 + \tau^2}} + \frac{E_z \tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \widetilde{E}_x \sqrt{1 + \tau^2} \cos \phi$$

$$E''_y = \widetilde{E}_x \rho \cos \phi$$

$$E''_z = -\frac{E_x \tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} + \frac{E_z}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{\widetilde{E}_x \cos \phi}{\sqrt{1 + \tau^2}} (-\tau + \tau) = 0$$

3.1.3 Polarisation au voisinage d'une coupure et d'une résonance

3.1.3.1 Coupure

Nous avons vu au chapitre 2 qu'au voisinage d'une coupure, l'indice de réfraction tend vers zéro ($n \rightarrow 0$). Il existe trois fréquences de coupure : la fréquence plasma et les fréquences de coupure des modes R et L.

La fréquence plasma ($f = f_p$) est une fréquence de coupure pour tous les modes obliques sauf les modes droit et gauche ($\theta = 0$). Les rapports de polarisation au voisinage de la fréquence de coupure plasma deviennent :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{D}{n^2 - S} \rightarrow -\frac{D}{S} = -\frac{1}{Y} \\ \tau &= \frac{n^2 \sin \theta \cos \theta}{n^2 \sin^2 \theta - P} \rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\theta = \pi/2$ (coupure plasma du mode O), la polarisation est elliptique dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . Dans le cas où $\theta \in]0, \pi/2[$, la polarisation est elliptique dans un plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$.

Les fréquences de coupure des mode R et L ($f = f_{R,L}$) sont des fréquences de coupures pour tous les modes \ominus obliques. Les rapports de polarisation au voisinage de la fréquence de coupure des modes R et L deviennent :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{D}{n^2 - S} \rightarrow -\frac{D}{S} = \pm 1 \\ \tau &= \frac{n^2 \sin \theta \cos \theta}{n^2 \sin^2 \theta - P} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La polarisation au voisinage des fréquences de coupure f_R et f_L est circulaire dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 .

3.1.3.2 Résonance

Nous avons vu au chapitre 2 qu'au voisinage d'une résonance, l'indice de réfraction divergeait ($n \rightarrow \infty$). Les fréquences de résonances dépendent de l'angle de propagation θ

par la relation (2.65). En propagation oblique, au voisinage d'une résonance, les rapports de polarisation deviennent :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{D}{n^2 - S} \rightarrow 0 \\ \tau &= \frac{n^2 \sin \theta_r \cos \theta_r}{n^2 \sin^2 \theta_r - P} \rightarrow \frac{\cos \theta_r}{\sin \theta_r} = \cot \theta_r\end{aligned}$$

où θ_r est l'angle de résonance défini au chapitre 2, paragraphe 2.4.3.2.

La polarisation en propagation oblique au voisinage d'une résonance est donc longitudinale selon \mathbf{k} d'après l'équation .

3.2 Polarisation des ondes principales

3.2.1 Propagation parallèle $\theta = 0$

L'étude de la relation de dispersion en propagation parallèle a montré qu'il existait trois modes de propagation :

- un mode longitudinale tel que $P = 0$ ($X = 1$),
- deux modes transverses tels que $n_{R,L}^2 = 1 - \frac{X}{1 \pm Y}$.

3.2.1.1 Polarisation du mode longitudinal

D'après l'équation (3.3), la solution $P = 0$ en propagation parallèle correspond aux ondes pour lesquelles seule la composante longitudinale est non nulle ($E_z \neq 0$). Comme décrit au chapitre 2, ces ondes ne se propagent pas et leurs caractéristiques sont insensibles à la présence du champ magnétique externe.

Détermination de la polarisation :

Dans l'équation (3.3) avec $\theta = 0$, $P = 0$ implique :

$$\begin{aligned}(S - n^2)E_x - iDE_y = 0 &\Rightarrow E_x = (S - n^2)E_y/iD \Rightarrow E_x = 0 \\ iDE_x + (S - n^2)E_y = 0 &\Rightarrow i((S - n^2)^2/D - D)E_y = 0 \Rightarrow E_y = 0 \\ 0 \times E_z = 0 &\Rightarrow E_z \neq 0\end{aligned}$$

3.2.1.2 Polarisation des modes transverses

Les rapports de polarisation des modes droit R et gauche L sont donnés par :

$$\begin{aligned}\rho_{R,L} &= \pm 1 \\ \tau_{R,L} &= 0\end{aligned}$$

- $\tau = 0$ implique que ces modes correspondent à des ondes transverses ($E_z = 0$), polarisées dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 .
- $\rho = \pm 1$ implique ces modes sont polarisées circulairement dans ce plan, le sens de rotation dépendant du signe de ρ .

Ainsi les modes « droit » et « gauche » sont caractérisés par une polarisation circulaire dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 , dont le sens de parcours est défini par le signe du rapport de polarisation ρ :

- sens direct (droit¹ en convention IRE²) pour le mode « droit » (R) (figure 3.5(b)).
- sens horaire (gauche en convention IRE) pour le mode « gauche » (L) (figure 3.5(c)).

On constate que pour une onde qui se propage dans la direction de \mathbf{B}_0 , le champ électrique du mode « droit » tourne dans le sens de rotation des électrons autour du champ magnétique \mathbf{B}_0 , tandis que le champ magnétique de l'onde gauche tourne dans le sens inverse. Ainsi, lorsque la pulsation de l'onde « droite » ω est égale à la pulsation gyro-magnétique $|\omega_c|$, les électrons sont soumis, dans leur référentiel, à un champ électrique constant. Dans cette situation, bien que l'on sorte du domaine de linéarité, on peut dire qualitativement que les grandes accélérations subies par les électrons vont se traduire par un important transfert d'énergie de l'onde vers les particules et donc à une absorption de l'onde par le plasma. La fréquence gyromagnétique f_c est bien une fréquence de résonance du mode « droit » .

Expression de ρ et τ :

$$\tau_{R,L} = -\frac{n_{R,L}^2}{P} \sin \theta = 0 \quad \text{car } P \neq 0$$

$$\rho_{R,L} = \frac{D}{n_{R,L}^2 - S} \quad \text{avec } n_{R,L}^2 - S = \pm D$$

Norme du vecteur \mathbf{E} :

$$\sqrt{\Re e(E_x)^2 + \Re e(E_y)^2} = \sqrt{\tilde{E}_x^2 \cos^2 \phi + \tilde{E}_x^2 \sin^2 \phi} = \tilde{E}_x$$

Direction du vecteur \mathbf{E} :

$$\arctan \left(\frac{\Re e(E_y)}{\Re e(E_x)} \right) = \arctan \left(\frac{\pm \sin \phi}{\cos \phi} \right) = \pm \phi$$

1. Il existe plusieurs dénominations de la polarisation par rapport au sens de rotation du champ électrique définies par différentes conventions (extrait de [Kraus 1966]) :

Polarisation	Opticiens [Born 1975]	Définition IRE (1942)	Type d'antenne hélicoïdale
Sens direct (\mathbf{k} vers l'observateur $\odot \ominus$)	Gauche	Droit	Main-droite (Right-Handed)
Sens horaire (\mathbf{k} vers l'observateur $\ominus \odot$)	Droit	Gauche	Main-gauche (Left-Handed)

2. International Radio-Electric

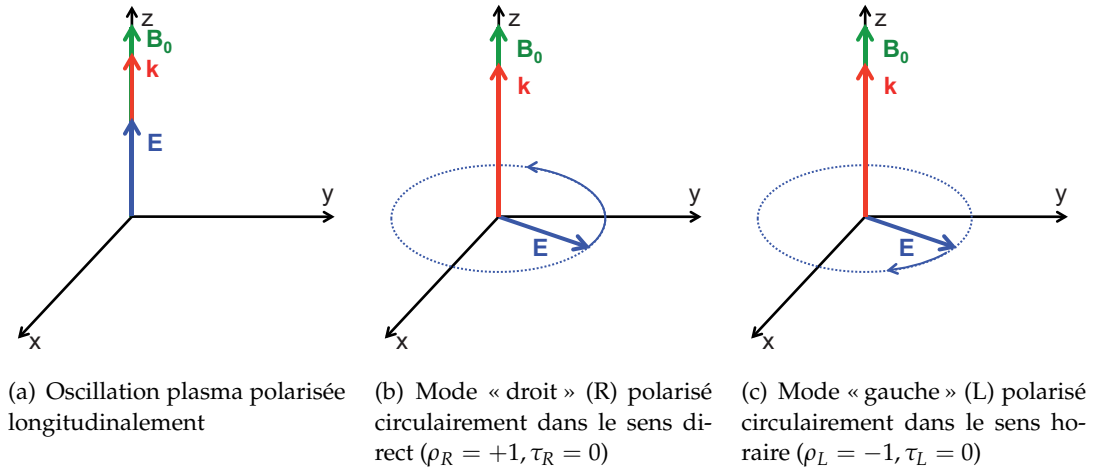


FIGURE 3.5 – Polarisation des modes propres en propagation parallèle dans un plasma froid magnétisé.

3.2.2 Propagation perpendiculaire $\theta = \frac{\pi}{2}$

L'étude de la relation de dispersion en propagation perpendiculaire a montré qu'il existait deux modes de propagation :

- le mode « Ordinaire » : $n_O^2 = 1 - X$
- le mode « eXtraordinaire » : $n_X^2 = 1 - \frac{X(1 - X)}{1 - X - Y^2}$

3.2.2.1 Polarisation du mode « Ordinaire »

Les rapports de polarisation du mode « Ordinaire » sont donnés par :

$$\rho_O = \frac{1}{Y} \quad , \quad \tau_O \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \Im m \left(\frac{\tilde{E}_z}{\tilde{E}_y} \right) \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Ces trois relations imposent que seule la composante du champ électrique E_z est non nulle. Il s'agit donc d'une onde transverse, polarisée rectilignement le long de \mathbf{B}_0 , telle que $n_O^2 = 1 - X$. Comme dans le chapitre 2, l'absence d'effet du champ magnétique se comprend par le fait que champ électrique de l'onde et champ magnétique ambiant sont parallèles et donc que les forces en $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ sont nulles.

Expressions de ρ , τ et $\Im m \left(\frac{\widetilde{E}_z}{\widetilde{E}_y} \right)$:

$$\begin{aligned} \tau_O &= \tan \theta \rightarrow \infty \\ \rho_O &= \frac{D}{P-S} = \frac{1}{Y} \quad \text{avec } Y \neq 0 \\ \Im m \left(\frac{\widetilde{E}_z}{\widetilde{E}_y} \right) &= -\frac{(P-S) \sin \theta \cos \theta}{D(\sin^2 \theta - 1)} = -Y \tan \theta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

3.2.2.2 Polarisation du mode « eXtraordinaire »

Les rapports de polarisation du mode « eXtraordinaire » sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_X &= -\frac{S}{D} \\ \tau_X &= 0 \end{aligned}}$$

Le mode « eXtraordinaire » correspond donc à une polarisation elliptique dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, d'axes principaux \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , de demi-axes \widetilde{E}_x et $S\widetilde{E}_x/D$, dont le sens de parcours dépend du signe de ρ :

- $\rho > 0$ lorsque $f > f_{UH}$, le mode « eXtraordinaire » libre voit l'extrémité du vecteur champ électrique tourner dans le sens direct par rapport au champ magnétique externe.
- $\rho < 0$ lorsque $f < f_{UH}$, le mode « eXtraordinaire » piégé (mode Z et mode X de la branche LX) voit l'extrémité du vecteur champ électrique tourner dans le sens horaire par rapport au champ magnétique externe.

Remarque :

En propagation oblique, les modes radio RX et LO voient leurs champs électriques tourner dans des sens opposés par rapport à \mathbf{B}_0 , indépendamment du sens de propagation :

- le champ électrique du mode RX tourne dans le sens direct autour de \mathbf{B}_0 ,
- le champ électrique du mode LO tourne dans le sens horaire autour de \mathbf{B}_0 ,

Expression de ρ et τ :

$$\begin{aligned} \tau_X &= \frac{n_X^2}{n_X^2 - P} \cos \theta = 0 \quad \text{car } n_X^2 \neq P \\ \rho_X &= \frac{D}{n_X^2 - S} = -\frac{S}{D} \end{aligned}$$

Signe de ρ :

$$\rho = -\frac{S}{D} = -\frac{1 - X - Y^2}{XY}$$

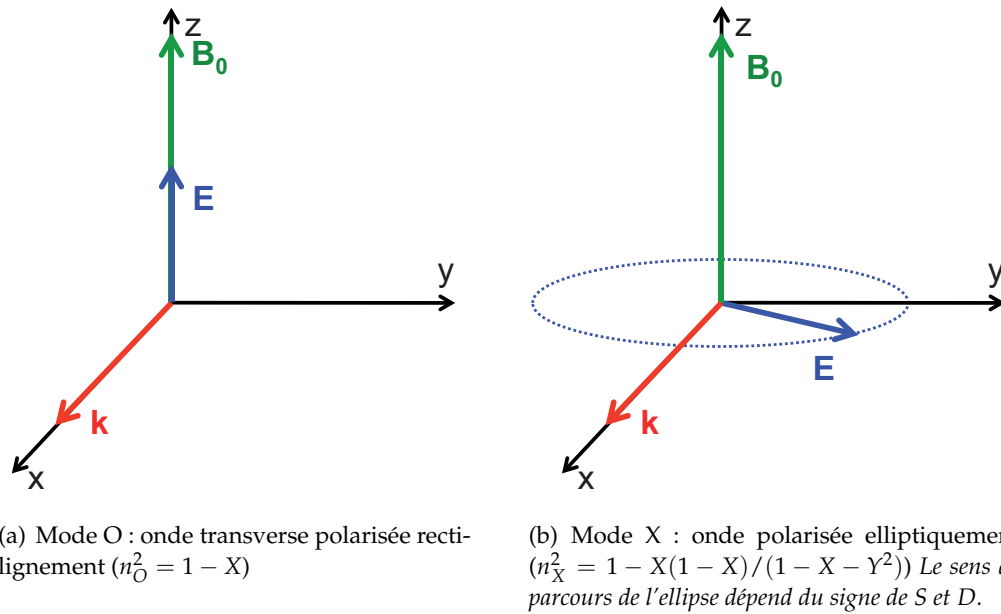


FIGURE 3.6 – Polarisation des modes propres en propagation perpendiculaire dans un plasma froid magnétisé.

Or $Y < 0$ donc ρ est du signe de

$$1 - X - Y^2 = \frac{f^2 - (f_p^2 + f_c^2)}{f^2} = \frac{f^2 - f_{UH}^2}{f^2}$$

Direction de E :

$$\Re(E_x)^2 + \Re(E_y)^2 = \widetilde{E}_x^2 \cos^2 \phi + \frac{S^2}{D^2} \widetilde{E}_x^2 \sin^2 \phi$$

Soit :

$$\frac{\Re(E_x)^2}{\widetilde{E}_x^2} + \frac{D^2}{S^2 \widetilde{E}_x^2} \Re(E_y)^2 = 1$$

ce qui est bien l'équation d'une ellipse de demi-axes \widetilde{E}_x et $S\widetilde{E}_x/D$.

Pour résumer :

Les rapports de polarisation $\rho = \Im m \left(\frac{E_y}{E_x} \right)$ et $\tau = \Re e \left(\frac{E_z}{E_x} \right)$ sont définis dans le repère tel que $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{k} \in (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$.

θ	Mode	ρ	τ	Direction	Polarisation	Sens / \mathbf{B}_0	Fig.
0	plasma			longitudinale	rectiligne		3.5(a)
	droit R	1	0	transverse	circulaire	direct	3.5(b)
	gauche L	-1	0	transverse	circulaire	horaire	3.5(c)
$\frac{\pi}{2}$	ordinaire O	$\frac{1}{Y}$	∞	transverse, $\parallel \mathbf{B}_0$	rectiligne		3.6(a)
	extraord. X	$-\frac{S}{D}$	0	plan $(\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0)$	elliptique	direct X horaire Z	3.6(b)
θ	\ominus ou \oplus	$\rho > 0$ $\rho < 0$	τ	plan $\perp (\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$	elliptique	direct (RX) horaire (LO)	3.4

3.3 Paramètres de Stokes

Nous venons de voir que l'état de polarisation d'une onde est défini par le rapport des amplitudes et le déphasage des composantes de son vecteur champ électrique. Si cette description est synthétique, elle n'est pas facilement manipulable. C'est pourquoi nous introduisons les quatre paramètres de Stokes S , Q , U et V qui rendent compte du flux et de l'état de polarisation d'une onde radio. Ils ont l'importante propriété de pouvoir être déterminés à partir de mesures d'intensité. Ils furent introduits par Georges G. Stokes en 1852 pour décrire la polarisation partielle des ondes électromagnétiques à partir de l'intensité, du degré de polarisation et des paramètres de l'ellipse de polarisation. On utilisera les expressions des paramètres de Stokes développées dans [Kraus 1966]. L'auteur se place dans le cas particulier d'une onde transverse se propageant selon \mathbf{k} et dont l'ellipse de polarisation est contenue dans un plan perpendiculaire à \mathbf{k} . Ces définitions restent cependant valables dans le cas d'une polarisation non transverse en prenant la précaution d'exprimer le champ électrique de l'onde dans le plan de polarisation (O, e''_x, e''_y) défini au paragraphe 3.1.2.6.

3.3.1 Ellipse de polarisation

On considère une onde radio de pulsation ω se propageant selon \mathbf{k} . Dans le plan de polarisation de l'onde les composantes du champ électrique sont données par E_x et E_y , déphasées d'une quantité δ . On notera qu'ici les axes Ox et Oy ne sont pas nécessaire-

ment confondus avec les axes principaux de l'ellipse de polarisation.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \\ E_x &= E_1 \sin(\omega t) \\ E_y &= E_2 \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

Les expressions de E_x et E_y correspondent à des ondes polarisées linéairement selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , dont la somme vectorielle produit une polarisation elliptique (annexe F) :

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \delta + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \sin^2 \delta \quad (3.12)$$

Si les paramètres du milieu ne varient pas au cours de la propagation, le déphasage et les amplitudes E_1 et E_2 resteront constants. Le vecteur champ électrique décrira donc cette ellipse tout au long de la propagation.

On note (Ox'') , l'axe principal de l'ellipse (passant par les deux foyers de l'ellipse) et (Oy'') , son axe secondaire (perpendiculaire à l'axe principal et passant par le centre de l'ellipse). L'orientation de l'ellipse dans le plan (O, x, y) est défini par l'angle η angle entre les axes (Ox) et (Ox'') , tandis que son aplatissement est défini par l'angle ϵ (angle entre la diagonale du rectangle circonscrit à l'ellipse dans le plan (O, x'', y'') et l'axe (Ox'')).

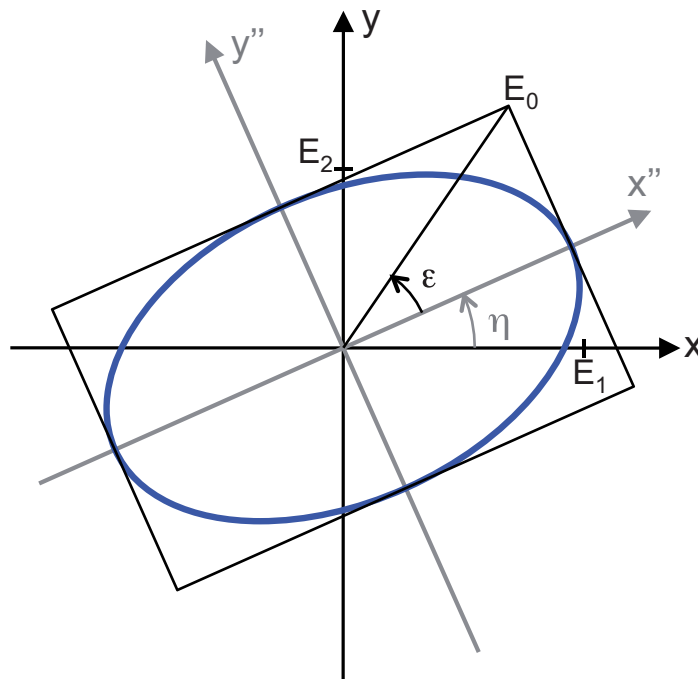


FIGURE 3.7 – Ellipse de polarisation dans le plan (O, x, y) . L'axe x'' correspond à l'axe principale de l'ellipse (grand axe) et l'axe y'' à l'axe secondaire (petit axe).

Expression de l'ellipse de polarisation :

Les composantes E_x et E_y sont bien liées par une équation de type ellipse :

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1$$

avec $a = 1/E_1^2 \sin^2 \delta$, $b = 2 \cos \delta / E_1 E_2 \sin^2 \delta$ et $c = 1/E_2^2 \sin^2 \delta$.

3.3.2 Expressions des paramètres de Stokes

Les paramètres de Stokes S , Q , U et V décrivent la densité de flux totale de l'onde ainsi que sa répartition sur les composantes polarisées linéairement et circulairement.

- S correspond au module du vecteur de Poynting de l'onde (en $W.m^{-2}$ pour une onde monochromatique ou en $W.m^{-2}.Hz^{-1}$ pour un signal large bande), donc à la densité de flux totale des composantes polarisées et non polarisées de l'onde,
- Q correspond à la différence de densité de flux entre les composantes polarisées linéairement selon e_x et e_y ,
- U correspond à la différence de densité de flux entre les composantes polarisées linéairement selon les axes à $\pm 45^\circ$ de e_y ,
- V correspond à la différence de densité de flux entre les composantes polarisées circulairement droite et gauche.

Remarques :

- Une polarisation elliptique est la combinaison d'une polarisation circulaire et d'une polarisation linéaire.
- Le taux de polarisation linéaire est défini par $|L| = \sqrt{U^2 + Q^2}$.
- les paramètres U et Q dépendent du repère choisi pour décrire l'état de polarisation de l'onde. Le flux S , le taux de polarisation circulaire V et le taux de polarisation linéaire $|L|$ sont conservés par rotation du repère de polarisation autour de la normale au plan de polarisation (voir [Cecconi 2004]).

Expression des paramètres de Stokes en fonction des paramètres de l'ellipse de polarisation, pour une onde totalement polarisée

Les paramètres de Stokes normalisés tels que $s = 1$, $q = Q/S$, $u = U/S$ et $v = V/S$ sont donnés par (voir annexe F) :

$$S = E_0^2 / \sqrt{2} Z \tag{3.13}$$

$$q = \cos 2\epsilon \cos 2\eta \tag{3.14}$$

$$u = \cos 2\epsilon \sin 2\eta \tag{3.15}$$

$$v = \sin 2\epsilon \tag{3.16}$$

où Z est l'impédance intrinsèque du milieu $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ (en $\Omega.m^{-1}$), avec $\mu = \mu_r\mu_0$ la perméabilité du milieu de propagation et $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ la permittivité du milieu de propagation, et μ_r et ε_r les perméabilité et permittivité relatives du plasma.

Remarques :

- $q^2 + u^2 + v^2 = 1$, l'onde étant totalement polarisée, la densité d'énergie totale se répartit sur les différents états de polarisations.
- S , v et $\sqrt{u^2 + q^2} = \cos 2\varepsilon$ sont invariants par rotation autour de la normale au plan de polarisation (indépendants de η).

La table 3.1 regroupe les paramètres de la description en ellipse de polarisation et les paramètres de Stokes associés pour les polarisations rectilignes selon O_y , O_x et à $\pm 45^\circ$ de O_x , circulaire gauche (LH) et droite (RH) et elliptique.

3.3.3 Paramètres de Stokes et rapports de polarisation

Dans la description de l'état de polarisation transverse de [Kraus 1966], l'ellipse de polarisation est définie par deux paramètres : ε et η , respectivement l'angle entre la diagonale du rectangle circonscrit à l'ellipse et l'axe \mathbf{e}_x et l'angle entre l'axe principal de l'ellipse et l'axe \mathbf{e}_x (figure 3.7).

Dans la description de l'état de polarisation dans le plan de polarisation défini au paragraphe 3.1.2.6, on notera $E_{x''}$ et $E_{y''}$, les projections du vecteur champ électrique sur les axes principaux $\mathbf{e}_{x''}$ et $\mathbf{e}_{y''}$ de l'ellipse. Dans ce repère, les paramètres η et ε s'expriment :

$$\eta = 0^\circ \text{ ou } 90^\circ$$

$$\tan \varepsilon = \frac{E_{y''}}{E_{x''}} = \rho'' < 1$$

Les paramètres de Stokes normalisés peuvent ainsi s'exprimer à partir du rapport de polarisation ρ'' :

$$q = \pm \frac{1 - \rho''^2}{1 + \rho''^2} \quad (3.17)$$

$$u = 0 \quad (3.18)$$

$$v = \frac{2\rho''}{1 + \rho''^2} \quad (3.19)$$

Remarques :

- La condition $\rho'' > 1$ est redondante avec le fait que l'angle η peut être égal à 0° ou 90° . Lorsque $\eta = 0^\circ$ et $\rho'' > 1$ le grand axe de l'ellipse est selon la composante $\mathbf{e}_{y''}$ et lorsque $\rho'' < 1$ le grand axe de l'ellipse est selon l'axe $\mathbf{e}_{x''}$, tandis que lorsque

$\eta = 90^\circ$ et $\rho'' > 1$ le grand axe de l'ellipse est selon la composante \mathbf{e}_x'' et lorsque $\rho'' < 1$ le grand axe de l'ellipse est selon l'axe \mathbf{e}_y'' . Par la suite on ne considèrera que la solution telle que $\rho'' < 1$.

- Le rapport de polarisation ρ'' s'expriment en fonction des rapports de polarisation ρ et τ calculés dans le repère lié au champ magnétique externe : $\rho'' = \rho / \sqrt{1 + \tau^2}$. Les paramètres de Stokes dans le plan de polarisation s'expriment alors :

$$q = \frac{1 + \tau^2 - \rho^2}{1 + \tau^2 + \rho^2} \quad u = 0 \quad v = \frac{2\rho\sqrt{1 + \tau^2}}{1 + \tau^2 + \rho^2} \quad (3.20)$$

Expression des paramètres de Stokes dans le repère naturel de l'ellipse :

$$\sin(2\epsilon) = \frac{2 \tan \epsilon}{1 + \tan^2 \epsilon} \quad \text{et} \quad \cos(2\epsilon) = \frac{1 - \tan^2 \epsilon}{1 + \tan^2 \epsilon}$$

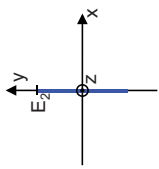
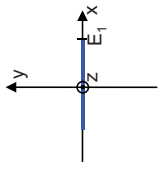
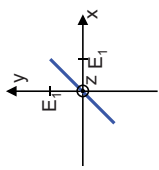
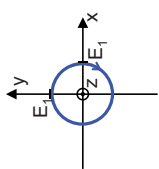
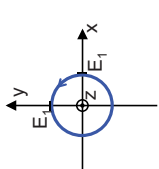
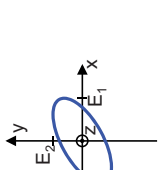
rectiligne Oy	rectiligne Ox	rectiligne $\pm 45^\circ$	circulaire LH	circulaire RH	elliptique
$E_1 = 0$	$E_2 \neq 0$	$E_1 \neq 0$	$E_1 = E_2$	$E_1 = E_2$	$E_1 \neq E_2$
δ	δ	$\delta = 0$	$\delta = -90^\circ$	$\delta = +90^\circ$	$\delta \in \mathbb{R}$
$E_y = E_2 \sin(\omega t + \delta)$	$E_x = E_1 \sin(\omega t + \delta)$	$(E_x - E_y)^2 = 0$	$E_x^2 + E_y^2 = E_1^2$	$E_x^2 + E_y^2 = -E_1^2$	equation (3.12)
					
$\epsilon = 0^\circ$	$\eta = 90^\circ$	$\epsilon = 0^\circ$	$\epsilon = -45^\circ$	$\epsilon = +45^\circ$	ϵ
$\eta = 0^\circ$	$\eta = 0^\circ$	$\eta = \pm 45^\circ$	$\eta = 0^\circ$	$\eta = 0^\circ$	η
$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ u \\ v \end{pmatrix}$

TABLE 3.1 – Cas particuliers d'états de polarisation et paramètres de Stokes associés

GONIOPOLARIMÉTRIE DES DONNÉES RADIO ET MAGNÉTIQUES LORS DE LA TRAVERSÉE DES SOURCES DU SKR PAR LA SONDE CASSINI

Sommaire

4.1 Principe des études goniopolarimétriques	82
4.1.1 Antennes dipolaires	82
4.1.2 Principe de la goniopolarimétrie	83
4.2 Goniopolarimétrie et mesure magnétiques	85
4.2.1 Principes des mesures magnétiques	85
4.2.2 Détermination des paramètres de Stokes dans le repère lié au plan de polarisation	86
4.2.3 Application aux données de traversées des sources du SKR par Cassini	88
4.2.4 Détermination de la direction de propagation	92
4.3 Conclusion	96

La goniopolarimétrie (appelée aussi « Direction Finding ») est une méthode d'analyse des données fournies par un récepteur radio afin de retrouver les caractéristiques physiques de l'onde détectée. Les techniques classiques de goniopolarimétrie permettent notamment d'estimer la direction de la normale au plan de polarisation des ondes électromagnétiques sur les antennes dipolaires d'une sonde spatiale. Loin des fréquences de coupure, la polarisation des ondes est généralement transverse ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) et la direction d'arrivée de l'onde sur les antennes peut donc être confondue avec la direction de la normale au plan de polarisation. La connaissance de cette direction permet alors de remonter à la position des sources. Mais proche des sources, la polarisation n'est plus nécessairement transverse : direction d'arrivée des ondes et normale au plan de polarisation ne peuvent plus être confondus.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, l'état de polarisation d'une onde électromagnétique, lorsqu'elle est déterminée par les caractéristiques du milieu de propagation, dépend de l'orientation du champ magnétique ambiant et du vecteur d'onde.

Dans ce chapitre, nous montrerons comment la connaissance de la direction et de l'intensité du champ magnétique peut apporter des informations utiles sur l'état de polarisation des ondes électromagnétiques et permettre de remonter à leur direction de propagation. Nous appliquerons ces principes à l'étude des données radio et magnétiques de la sonde Cassini lors de la traversée des sources du rayonnement kilométrique de Saturne du 17 octobre 2008 ([Lamy 2010], [Lamy 2011]).

4.1 Principe des études goniopolarimétriques

4.1.1 Antennes dipolaires

Pour des raisons d'encombrement et de masse, les antennes des récepteurs radio des sondes spatiales sont des dipôles ou des monopoles, souples et tendus par la force centrifuge dans le cas des satellites tournants (Ulysse, WIND, ...), rigides dans le cas des satellites stabilisés trois axes (Voyager, Galileo, Cassini, STEREO, Juno, ...), dont les longueurs peuvent varier de quelques mètres à une centaine de mètres.

Comme pour tout conducteur électrique, une onde électromagnétique incidente sur une antenne dipolaire induit une tension aux bornes des deux brins du dipôle¹. La tension induite V dépendra de l'intensité du champ électrique, de la longueur de l'antenne et de la direction d'arrivée de l'onde sur l'antenne. Dans le cas d'un dipôle court, lorsque la longueur du dipôle est inférieure à la longueur d'onde ($h < \lambda/10$), la tension induite s'exprime simplement :

$$V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}} \quad (4.1)$$

avec

- \mathbf{h}_{eff} la hauteur effective de l'antenne
- \mathbf{E} le vecteur champ électrique de l'onde incidente

Le diagramme de réception d'une antenne décrit son gain en fonction de la direction. Il est défini comme la fraction de puissance normalisée de l'onde incidente que l'antenne peut collecter dans une direction donnée.

Si l'on suppose une onde électromagnétique plane, dans le cas d'un dipôle court, le diagramme de réception de l'antenne est de la forme :

$$P_{\text{dip}}(\theta, \phi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (4.2)$$

avec

- θ la direction d'arrivée de l'onde sur l'antenne (figure 4.1)
- ϕ l'azimut de la source

Le diagramme de réception ne dépend pas de l'azimut de la source, il est donc constitué d'un lobe à symétrie cylindrique présentant un zéro dans la direction de l'antenne. Le

1. Dans le cas d'un monopôle, le corps de la sonde joue le rôle de plan conducteur qui rend équivalent le système {monopôle+satellite} au système {dipôle} isolé. La description dipolaire des antennes est donc valable dans les deux cas.

gain de l'antenne est maximal pour une onde arrivant perpendiculairement au dipôle, et nul pour une onde arrivant dans la direction du dipôle (voir figure 4.1).

L'angle solide de réception caractérise la résolution angulaire de l'antenne et est donnée par l'intégrale de son diagramme de réception sur tout l'espace. Dans le cas d'un dipôle court, l'angle solide de réception est donné par :

$$\Omega_{dip} = \iint_{4\pi} \frac{P_{dip}(\theta, \phi)}{P_{dip,max}} d\Omega = \frac{8\pi}{3} \quad (4.3)$$

L'angle solide de réception d'un dipôle court représente donc les 2/3 de l'espace. Cette faible résolution angulaire ne permet pas de remonter directement à la direction d'arrivée des ondes radio. Pour compenser cet inconvénient, des méthodes d'analyses ont été mises en place pour remonter à la direction d'arrivée et aux caractéristiques des ondes électromagnétiques incidentes sur les antennes dipolaires des sondes spatiales : la goniopolarimétrie.

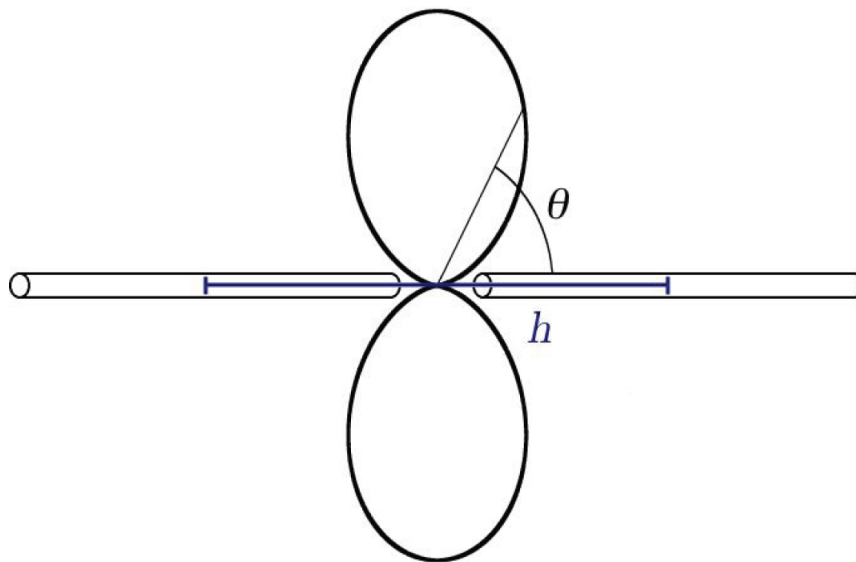


FIGURE 4.1 – Diagramme de réception d'un dipôle court. Le gain du dipôle varie en $\sin^2 \theta$ avec θ l'angle d'arrivée de l'onde. La longueur du dipôle h est la distance entre les centres des deux brins composant le dipôle. D'après [Cecconi 2004]

4.1.2 Principe de la goniopolarimétrie

Le principe de la goniopolarimétrie est de comparer les puissances et les phases mesurées sur plusieurs antennes, par un récepteur radio, pour reconstruire la direction d'arrivée et les paramètres de polarisation de l'onde. En effet, si l'on considère deux dipôles perpendiculaires dont les diagrammes de rayonnements sont également perpendiculaires, le rapport des puissances mesurées sur chacune des antennes permet de retrouver la direction d'arrivée de l'onde (figure 4.2)

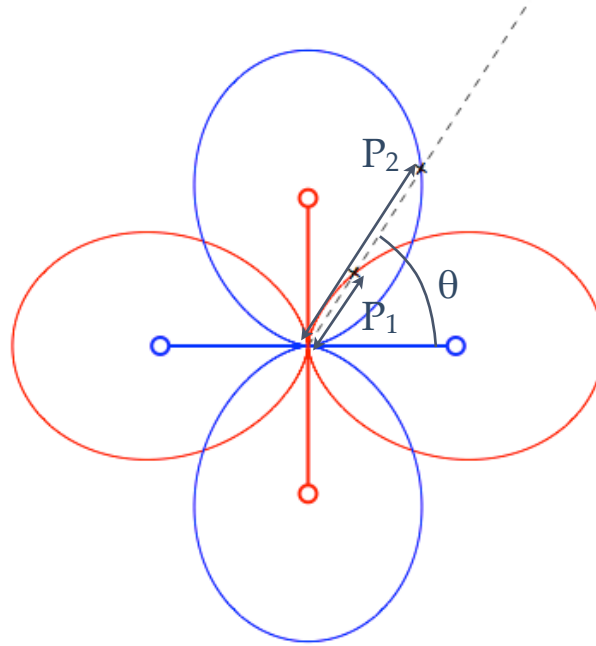


FIGURE 4.2 – Diagrammes de réception de deux dipôles courts perpendiculaires. La direction d'arrivée de l'onde est représentée par des pointillées. Elle intersecte chacun des diagrammes de réception en un point correspondant à un gain différent P_1 ou P_2 . Le rapport des gains de chaque antenne permet alors de remonter à la direction d'arrivée de l'onde. D'après [Cecconi 2013].

Mesures radio Sur un satellite stabilisé trois axes, un récepteur radio goniopolarimétrique fournit les corrélations des tensions induites aux bornes des antennes auxquelles il est connecté. La mesure s'exprime :

$$W_{ij} = \langle V_i V_j^* \rangle \quad (4.4)$$

avec

- V_i la tension induite aux borne de l'antenne i
- V_j^* le complexe conjugué de la tension induite aux bornes de l'antenne j
- $\langle \rangle$ la moyenne temporelle sur $\Delta t \gg 1/f$

Lorsque la mesure se fait sur une seule antenne, on parle d'auto-corrélation, lorsqu'elle se fait sur deux antennes, on parle d'inter-corrélation.

- auto-corrélation : $W_{ii} = \langle V_i V_i^* \rangle = A_{ii}$. Les auto-corrélations sont des grandeurs réelles. Elles correspondent à la puissance reçue par le dipôle, à un facteur $2Z$ près où Z est l'impédance intrinsèque du milieu.
- inter-corrélation : $W_{ij} = \langle V_i V_j^* \rangle = C_{ij}^r + iC_{ij}^i$. Les inter-corrélations sont des grandeurs complexes.

Paramètres de l'onde Les paramètres physiques de l'onde auxquels sont sensibles les antennes dipolaires sont relatifs au champ électrique de l'onde, et donc à sa polarisation.

Les paramètres de l'onde seront décrits par ses paramètres de Stokes (S, Q, U, V), caractérisant le flux de l'onde et l'ellipticité de sa polarisation, et par la direction de la normale au plan de polarisation (θ_w, ϕ_w). On associera le repère ($\mathbf{X}_w, \mathbf{Y}_w, \mathbf{Z}_w$) au champ électrique de l'onde : le vecteur \mathbf{Z}_w sera dans la direction de la normale au plan de polarisation, le champ électrique s'écrivant dans ce repère $\mathbf{E} = E_x \mathbf{X}_w + E_y \mathbf{Y}_w$.

Paramètres des antennes Chaque antenne sera représentée par son vecteur dipolaire \mathbf{h}_i caractérisé par sa longueur h_i et par la direction électrique de l'antenne (θ_i, ϕ_i).

Expression des mesures Les mesures des auto et des inter-corrélations peuvent s'écrire en fonction des paramètres de l'onde et des paramètres des antennes ([Cecconi 2004], Annexe H) :

$$\begin{aligned}
 W_{ij} = \frac{Sh_i h_j}{2} [& (1 + Q)(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{X}_w)(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{X}_w) \\
 & + (U - iV)(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{X}_w)(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{Y}_w) \\
 & + (U + iV)(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{Y}_w)(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{X}_w) \\
 & + (1 - Q)(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{Y}_w)(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{Y}_w)]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dans le cas idéal où l'on dispose de 3 antennes dipolaires parfaitement connues ($\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$) et d'un récepteur possédant 3 voies d'analyse permettant d'enregistrer instantanément les trois auto-corrélations et les trois inter-corrélations, on obtient alors 9 mesures : 3 auto-corrélations (A_{11}, A_{22}, A_{33}) et 3 inter-corrélations comportant 2 mesures chacune (C_{12}^r, C_{12}^i), (C_{13}^r, C_{13}^i) et (C_{23}^r, C_{23}^i). De ces 9 mesures, on peut alors extraire les 6 paramètres de l'onde ($S, Q, U, V, \theta_w, \phi_w$).

Méthodes d'inversion Les méthodes d'inversion appliquées aux données de la sonde Cassini sont décrites dans la thèse de Baptiste Cecconi [Cecconi 2004]. Elles permettent d'obtenir, dans un premier temps, la direction de la normale au plan de polarisation $\mathbf{Z}_w = (\theta_w, \phi_w)$, confondue dans les termes avec la direction du vecteur d'onde, puis les paramètres de Stokes (S, Q, U, V), dans deux repères introduits pour simplifier les calculs :

- le repère des antennes : repère tel que l'une des antennes est alignée avec l'axe \mathbf{e}_z et tel que les deux autres antennes aient des azimuts supplémentaires ($\phi_i = \pi - \phi_j$)
- le repère de l'onde : repère tel que l'axe \mathbf{Z}_w soit selon la normale au plan de polarisation et tel que \mathbf{Y}_w soit dans le plan contenant \mathbf{Z}_w et un axe de l'objet observé approprié à l'étude goniopolarimétrique (par exemple l'axe de rotation ou l'axe magnétique de la planète observée), l'axe \mathbf{X}_w venant compléter le repère direct orthogonal.

L'azimut ϕ_w et la colatitute θ_w de la normale au plan de polarisation sont calculés dans le repère des antennes. L'utilisation de ce repère permet de simplifier l'équation (4.5), la direction de la normale au plan de polarisation pouvant par la suite être exprimée dans n'importe quel repère.

Une fois la direction de Z_w déterminée, les paramètres de Stokes peuvent être extraits des mesures. Les paramètres S et V , dont les valeurs sont indépendantes du repère choisi, sont calculés dans le repère des antennes. Les paramètres Q et U , dont les valeurs dépendent de l'orientation du repère, sont calculés dans le repère de l'onde.

Le traitement goniopolarimétrique des données de la sonde Cassini ne prend donc pas en compte les axes naturels de l'ellipse de polarisation dans le choix de l'orientation des axes X_w et Y_w du repère de l'onde. De plus, la direction de la normale au plan de polarisation ne peut pas, en toute rigueur, être confondue avec la direction du vecteur d'onde, la polarisation n'étant pas nécessairement transverse. Ces ambiguïtés peuvent être levées à l'aide de mesures simultanées du champ magnétique ambiant.

4.2 Goniopolarimétrie et mesure magnétiques

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, l'état de polarisation d'une onde électromagnétique, lorsqu'elle est déterminée par les caractéristiques du milieu de propagation, dépend de l'orientation du champ magnétique ambiant et du vecteur d'onde. De nombreuses sondes spatiales possédant l'équipement nécessaire à la mise en place des techniques de goniopolarimétrie disposent également d'instruments de mesures du champ magnétique ambiant. La connaissance de la direction et de l'intensité du champ magnétique peut alors apporter des informations utiles sur l'état de polarisation des ondes électromagnétiques et permettre de remonter à leur direction de propagation.

4.2.1 Principes des mesures magnétiques

Deux sortes d'instruments destinés aux mesures de champ magnétique peuvent équiper les sondes spatiales : les sondes à saturation (*fluxgate* en anglais) et les magnétomètres à hélium.

Les magnétomètres à hélium fonctionnent sur la mesure de l'effet Zeeman sur des raies de l'hélium. De l'hélium métastable est confiné dans une cellule d'absorption. La présence d'un champ magnétique ambiant sépare les raies d'absorption de l'hélium et polarise la lumière absorbée selon l'orientation du champ magnétique.

Les sondes à saturation sont fondées sur les propriétés de saturation des matériaux ferromagnétiques. Deux bobinages entourent un barreau ferromagnétique de grande perméabilité : un bobinage exciteur, parcouru par un signal sinusoïdal de fréquence f_{ex} et d'amplitude suffisante pour que le champ magnétique induit sature le matériau ferromagnétique ; un bobinage de mesure dont le signal de sortie est proportionnel à la dérivée temporelle du champ magnétique exciteur. Si le signal exciteur est symétrique, le signal de sortie ne présente pas d'harmoniques paires. La présence d'un champ magnétique externe aligné avec le barreau va faire apparaître des harmoniques paires dans le signal de sortie, dont l'amplitude sera proportionnelle à l'intensité de ce champ magnétique externe. Les instruments installés sur les sondes spatiales sont généralement constitués de trois

Sondes	Ulysse	Cassini	STEREO	Juno
Radio	URAP	RPWS	SWAVES	WAVES
	2 antennes	3 antennes	3 antennes	1 antenne
Magnétique	VHM/FGM	MAG	IMPACT-MAG	MAG
	VHM/FGM	S/VHM/FGM	FGM	VHM/FGM

TABLE 4.1 – Récapitulatif des instruments radio et magnétique des sondes Ulysse, Cassini, STEREO et Juno. L'abréviation S/VHM signifie Scalar/Vector Helium Magnetometer et l'abréviation FGM signifie FluxGate Magnetometer.

sondes à saturation mutuellement orthogonales permettant de mesurer les trois composantes du champ magnétique ambiant.

4.2.2 Détermination des paramètres de Stokes dans le repère lié au plan de polarisation

Les techniques classiques de goniopolarimétrie permettent d'estimer la direction de la normale au plan de polarisation des ondes électromagnétiques sur les antennes dipolaires d'une sonde spatiale. La connaissance de la direction du champ magnétique ambiant permet de déterminer le plan de polarisation ainsi que l'orientation des axes principaux de l'ellipse de polarisation. En effet, nous avons montré au paragraphe 3.1.2.5 que lorsque la polarisation d'une onde électromagnétique dans un plasma magnétisé est entièrement déterminée par les conditions du plasma local, celle-ci est elliptique dans un plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$, les axes principaux de l'ellipse correspondant aux axes définis par $\mathbf{e}_y'' \parallel (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0)$ et $\mathbf{e}_x'' \in (\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$ tel que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e}_x'' < 0$, le plan de polarisation faisant un angle γ avec la direction du champ magnétique²(figure 4.3).

On peut ainsi redéfinir le repère de l'onde $(\mathbf{X}_w, \mathbf{Y}_w, \mathbf{Z}_w)$ à l'aide du repère naturel du plan de polarisation de l'onde $(\mathbf{e}_x'', \mathbf{e}_y'', \mathbf{e}_z'')$ défini au paragraphe 3.1.2.6 figure 3.4, tel que $\mathbf{Z}_w = \mathbf{e}_z''$ soit toujours dans la direction de la normale au plan de polarisation et tel que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Z}_w > 0$ (on impose $\gamma \leq \pi/2$, figure 4.3) et $\mathbf{X}_w = \mathbf{e}_x''$ et $\mathbf{Y}_w = \mathbf{e}_y''$. Cette modification du repère de l'onde utilisé précédemment consiste en une simple rotation des vecteurs \mathbf{X}_w et \mathbf{Y}_w autour de \mathbf{Z}_w de manière à placer le vecteur \mathbf{X}_w dans le plan $(\mathbf{Z}_w, \mathbf{B}_0)$, tel que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{X}_w < 0$. Le plan $(\mathbf{Z}_w, \mathbf{B}_0)$ est déterminé conjointement à l'aide des mesures magnétiques donnant accès à la direction de \mathbf{B}_0 et des premières étapes de l'inversion goniopolarimétrique déterminant la direction de \mathbf{Z}_w dans le repère des antennes.

Dans le repère $(\mathbf{X}_w, \mathbf{Y}_w, \mathbf{Z}_w)$ ainsi modifié, les paramètres de Stokes théoriques sont

2. Les angles γ et θ sont orientés positivement par rapport à \mathbf{B}_0 .

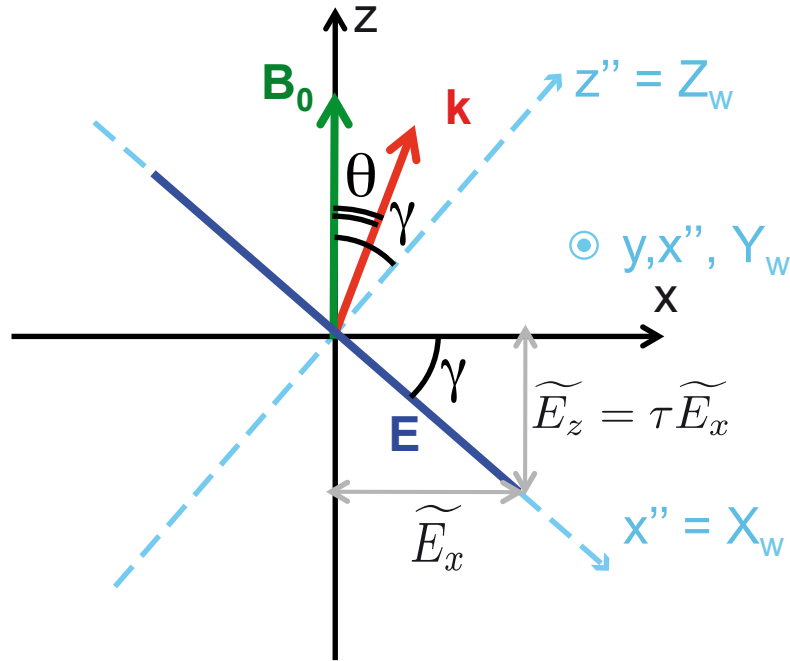


FIGURE 4.3 – Définition du repère naturel de polarisation ($\mathbf{e}''_x, \mathbf{e}''_y = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}''_z$) des ondes en propagation oblique dans un plasma froid magnétisé.

donnés par les relations (3.17,3.18,3.19), où $\rho_w = E_{y_w} / E_{x'_w}$.

$$q = \frac{1 - \rho_w^2}{1 + \rho_w^2}$$

$$u = 0$$

$$v = \frac{2\rho_w}{1 + \rho_w^2}$$

4.2.3 Application aux données de traversées des sources du SKR par Cassini

Le 17 octobre 2008, la sonde Cassini, en orbite autour de Saturne, a traversée une région source du rayonnement kilométrique de Saturne (SKR). Ce rayonnement est la contrepartie radio des aurores polaires observées sur Saturne et présente des caractéristiques similaires au rayonnement kilométrique terrestre : une émission préférentielle sur le mode X à une fréquence proche de la fréquence cyclotron. A cette occasion, l'instrument Radio and Plasma Wave Science a détecté des sources locales et distantes, tandis que les instruments MAG (magnétomètre) et Cassini Plasma Spectrometer ont effectué des mesures in-situ des conditions du plasma dans les régions sources. Une étude approfondie de l'état de polarisation du SKR dans cette région a été menée dans l'article [Lamy 2011]. Nous cherchons ici à illustrer l'apport de l'utilisation conjointe des mesures radio et magnétiques sur la détermination des caractéristiques de l'ellipse de polarisation du SKR proche des sources du rayonnement.

Les paramètres de Stokes sont obtenues par inversion goniopolarimétrique dans le repère $(\mathbf{X}_w, \mathbf{Y}_w, \mathbf{Z}_w)$ orienté par le champ magnétique ambiant, tel que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Z}_w > 0$ et $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{X}_w < 0$ (figure 4.3). Cette inversion fournit deux solutions $(Q_0, U_0, V_0$ et $\gamma_0)$ et $(Q_1, U_1, V_1$ et $\gamma_1)$ tels que $Q_0 = Q_1, U_0 \geq 0$ et $U_0 = -U_1, V_0 \geq 0$ et $V_0 = -V_1$ et $\gamma_0 = \pi - \gamma_1$. Le paramètre γ correspond à l'angle entre la direction du champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 et la normale au plan de polarisation \mathbf{Z}_w . Par construction du repère $(\mathbf{X}_w, \mathbf{Y}_w, \mathbf{Z}_w)$, les solutions retenues correspondent à celles telles que $\gamma < \pi/2$.

Détermination du mode de propagation

Lorsque la sonde est située loin des sources du rayonnement kilométrique, la polarisation des ondes radio est généralement transverse et les angles γ et θ sont confondus. Dans cette situation, sans les données magnétiques, la solution habituellement retenue est celle dont la direction d'arrivée correspond à la direction la plus voisine de celle du centre de Saturne. Le mode de propagation est en suite déterminé à partir du signe³ de V : le mode X correspond à $V_{\text{MESURÉ}} < 0$ pour une source située dans l'hémisphère nord et $V_{\text{MESURÉ}} > 0$ pour une source située dans l'hémisphère sud, et inversement pour le mode O. Lorsque la sonde est située dans les sources du rayonnement, la direction du centre de la planète n'est plus une référence pour la direction d'arrivée des ondes radio. Cette sélection conjointe sur le signe de V et sur la direction d'arrivée n'est plus possible. Nous avons donc cherché un autre critère discriminant à l'aide du paramètre Q , seul invariant des deux solutions. La figure 4.4 représente les valeurs théoriques de q_{\oplus} (courbe pleine) et q_{\ominus} (courbe pointillée) en fonction de θ pour différentes valeurs de $X = f_p^2/f^2$ et $Y = f_c/f$. Ces valeurs théoriques sont calculées à partir de la relation d'Appleton-Hartree (2.61), des expressions des rapports de polarisation ρ et τ (équations (3.6a) et (3.6b)) et de l'expression de q dans le repère naturel de polarisation en fonction de ces rapports de polarisation (équation (3.20)). Les trois résultats sur fond rouge correspondent aux valeurs de X et Y telles que $X + Y = 1$, soit $f = f_X$. Les résultats situés à gauche ($f > f_X$) correspondent aux modes de propagation LO et RX, les résultats situés à droite correspondent aux modes de propagation LO et Z. On constate que le signe du paramètre q des modes LO et RX sont toujours opposés, quel que soit θ . Les sources du rayonnement kilométrique sont des régions fortement magnétisées et de faible densité ($f_p^2/f_c^2 \sim 10^{-2}$) et les ondes sont émises proche de la fréquence cyclotron : la situation dans les sources correspond donc au résultat sur fond vert.

Nous avons vu au paragraphe 3.1.2.6 que le sens de rotation du champ électrique (donné par le signe de ρ) est défini par rapport à la direction du champ magnétique local et que le signe de v est donné par le signe de ρ (paragraphe 3.3.3). On a donc : $v < 0$ pour une rotation dans le sens horaire autour de \mathbf{B}_0 , $v > 0$ pour une rotation dans le sens direct autour de \mathbf{B}_0 . Les signes conjoints de q et de v dans ce repère doivent donc nous

3. Le mode de propagation est défini par un sens de rotation du champ électrique autour de la direction du champ magnétique. Le signe seul de V ne permet pas de discriminer les modes de propagation : pour un même mode se propageant dans deux sens opposés, les signes de V mesurés dans le repère lié au vecteur d'onde sont également opposés.

permettre de discriminer le mode de propagation. On posera :

$$\text{mode RX : } V > 0 \text{ et } Q < 0$$

$$\text{mode LO : } V < 0 \text{ et } Q > 0$$

Paramètres de Stokes dans le repère orienté par le champ magnétique local

La figure 4.5(a) représente les valeurs de $q = Q/d$ et $u = U/d$ calculées dans le repère de l'onde lié au satellite, pour les données dont le taux de polarisation $d = \sqrt{U^2 + Q^2 + V^2}/S$ est supérieur à 0.85 [Lamy 2011]. Les modes de propagation sont déterminés par la direction de propagation et le signe de V : les losanges correspondent au mode RX, les croix au mode LO, les points correspondent aux mesures qui ne répondent à aucun des critères de détermination. Ce repère n'étant pas le repère naturel de la polarisation, la discrimination du mode en fonction du signe de q n'est pas valable ici. La figure 4.5(b) représente les valeurs de q et u calculées dans le repère de l'onde orienté par le champ magnétique local. La détermination des modes se fait à l'aide du signe de v et du signe de q : les losanges correspondent au mode RX, les croix au mode LO, les points correspondent aux mesures qui ne répondent à aucun des critères énoncés ci-dessus. Les mesures de u et q dans le repère lié au champ magnétique sont moins dispersées que les mesures dans le repère lié au satellite. Le paramètre u représente la différence de densité de flux entre les composantes polarisées linéairement selon les axes à $\pm 45^\circ$ des axes du repère choisi. Lorsque celui-ci correspond au repère naturel de l'ellipse de polarisation, le paramètre u devient nul (voir chapitre 3). Pour le repère lié au satellite, les valeurs de u sont réparties sur une large gamme entre $u = -1$ et $u = +1$, tandis que pour le repère orienté par le champ magnétique local, les valeurs de u sont regroupées dans une gamme étroite autour de $u = 0$. Les axes X_w et Y_w du repère orienté par le champ magnétique local sont bien plus proches des axes naturels de l'ellipse de polarisation que les axes du repère lié au satellite. L'étude des paramètres de Stokes dans ce repère va donc permettre de déterminer l'orientation de l'ellipse de polarisation par rapport au champ magnétique local.

Caractéristiques de l'ellipse de polarisation

La figure 4.6(a) montre les valeurs de q mesurées lors de la traversée des sources par Cassini en fonction de l'écart entre la fréquence de l'onde et la fréquence cyclotron locale $\Delta f = (f - f_c)/f_c$. Le mécanisme d'instabilité maser cyclotron (IMC), générant le SKR (voir chapitre 1 et 8), prédit une émission préférentielle sur le mode RX à une fréquence proche de la fréquence cyclotron locale. Les mécanismes d'émissions du mode LO (IMC [Treumann 2000] ou conversion de mode [Louarn 1996a]) conduisent à des intensités beaucoup plus faibles que le mode RX. Les intensités moyennes mesurées valent respectivement $2,6 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ pour les points correspondant au mode LO et $1,1 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ pour les points correspondant au mode RX. Le rapport des flux entre le mode LO et le mode RX est donc de l'ordre de 2%, ce qui est en accord avec les intensités relatives prédites par les mécanismes d'émission.

Lorsque la fréquence de l'onde est largement supérieure à la fréquence cyclotron locale,

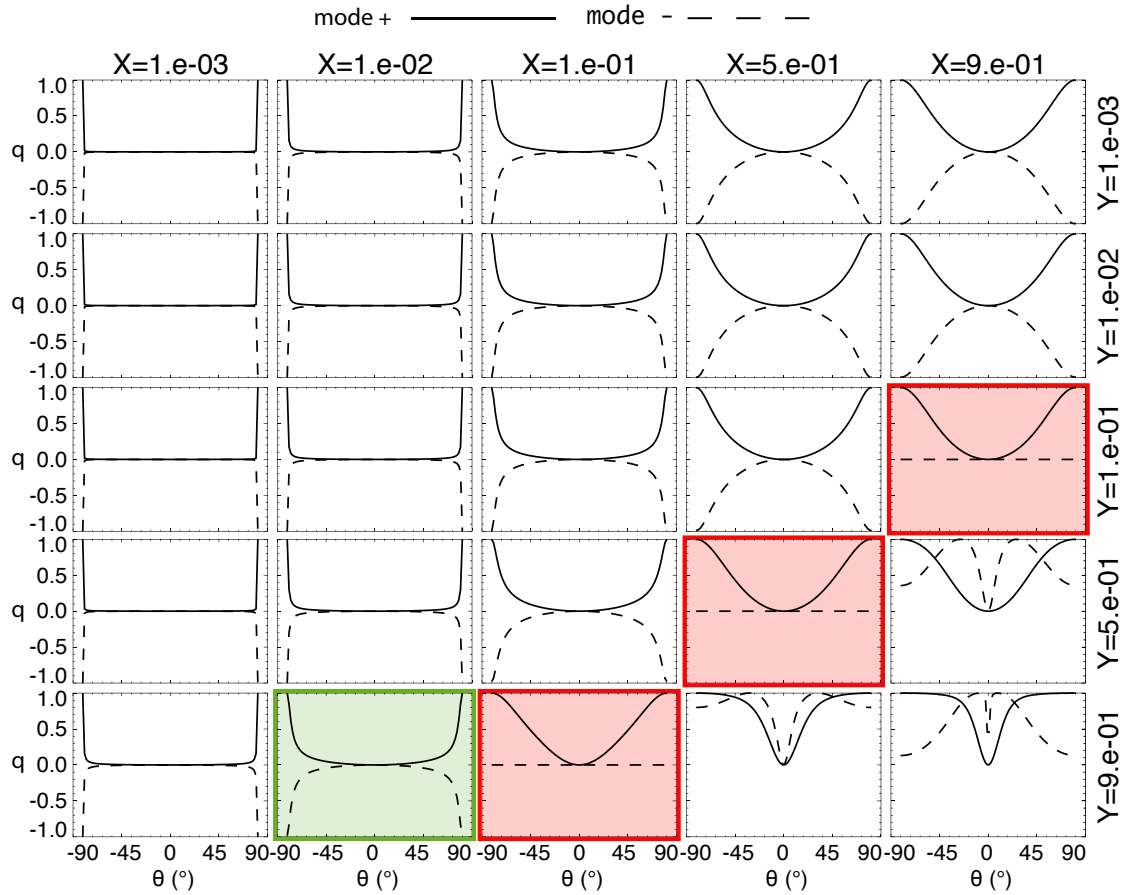
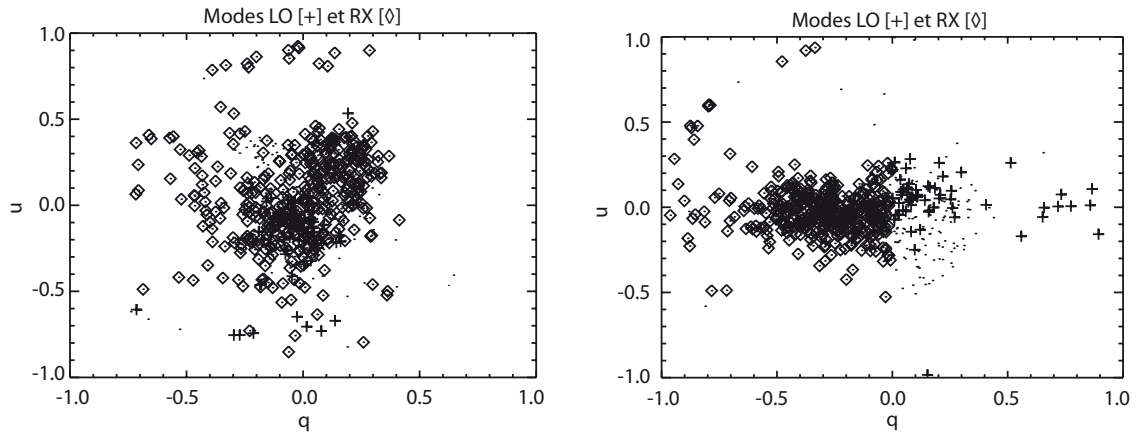


FIGURE 4.4 – Valeurs théoriques de q_O (courbe pleine) et q_X (courbe pointillée) en fonction de θ pour différentes valeurs de $X = f_p^2 / f^2$ et $Y = f_c / f$. Les trois résultats sur fond rouge correspondent aux valeurs de X et Y telles que $X + Y = 1$, soit $f = f_X$. Les résultats situés à gauche ($f > f_X$) correspondent aux modes de propagation LO et RX, les résultats situés à droite correspondent aux modes de propagation LO et Z. Les signes du paramètre Q des modes LO et RX sont toujours opposés. Les sources du rayonnement kilométrique sont des régions fortement magnétisées et de faible densité ($f_p^2 / f_c^2 \sim 10^{-2}$) et les ondes sont émises proche de la fréquence cyclotron : la situation dans les sources correspond donc au résultat sur fond vert.



(a) Dans le repère du satellite. Les modes sont déterminés à partir du signe V et de la direction de propagation.

(b) Dans le repère (X_w, Y_w, Z_w) orienté par le champ magnétique local. Les modes sont déterminés à partir du signe de q .

FIGURE 4.5 – Mesures des paramètres U et Q dans le repère lié au satellite et dans le repère lié au plan de polarisation.

q tend vers 0 quelque soit le mode. Cependant l'information seule sur q ne nous permet pas de conclure sur l'ellipticité de la polarisation loin des sources. Le taux de polarisation linéaire $l = \sqrt{u^2 + q^2}$ (figure 4.6(b)) tend également vers 0 lorsque $\Delta f \gg 0$: loin des sources, la polarisation mesurée est bien circulaire. Proche de la fréquence cyclotron ($\Delta f \sim 0$) le taux de polarisation linéaire tend vers 1 et le paramètre q tend vers -1 pour le mode RX et vers +1 pour le mode LO : la polarisation devient elliptique et l'axe principal est selon X_w ou Y_w .

Les paramètres d'inclinaison ($\eta = 1/2 \arctan(u/q)$) et d'aplatissement ($\epsilon = 1/2 \arcsin |v|$) de l'ellipse de polarisation permettent de déterminer l'axe principal et l'axe secondaire. La figure 4.6(c) montre les valeurs de η mesurées en fonction de Δf . Lorsque $\Delta f \sim 0$, l'inclinaison moyenne de l'ellipse de polarisation est proche de 0° pour le mode LO et de $\pm 90^\circ$ pour le mode RX. Ces valeurs particulières signifient que les axes X_w et Y_w , orientés par les mesures du champ magnétique local sont bien les axes naturels (principal et secondaire) de l'ellipse de polarisation.

La figure 4.6(d) montre les valeurs de ϵ mesurées en fonction de Δf . Lorsque Δf tend vers 0, les valeurs de ϵ tendent vers une valeur minimale de l'ordre de 10° pour les deux modes de propagation. Une valeur faible d'aplatissement est le signe d'une ellipse de polarisation très allongée dans la direction de l'axe principal. Les mesures combinées de η et ϵ indiquent que pour les ondes de fréquence proche de la fréquence cyclotron, l'axe principal de l'ellipse de polarisation du mode RX est selon Y_w (axe perpendiculaire au plan (Z_w, B_0)), alors que l'axe principal de l'ellipse de polarisation du mode LO est selon X_w (axe dans le plan (Z_w, B_0)). Ce comportement est en accord avec la polarisation des modes perpendiculaires X et O. En effet, le mode X est polarisé elliptiquement dans le plan perpendiculaire à B_0 (voir figure 3.6(b)), les vecteurs Z_w et B_0 étant colinéaires, tandis que le mode O est polarisé linéairement le long de B_0 (voir figure 3.6(a)). L'orientation

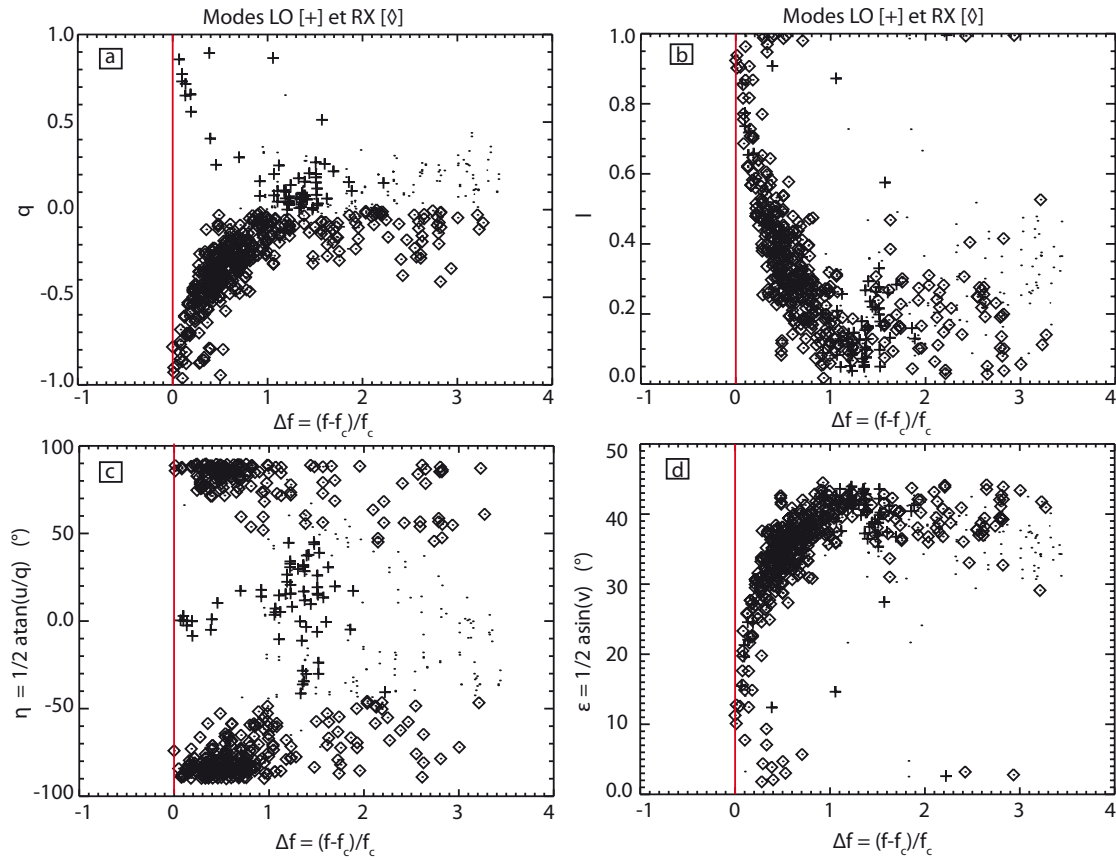


FIGURE 4.6 – Valeur du paramètre q , du taux de polarisation linéaire $l = \sqrt{u^2 + q^2}$, de l'inclinaison ($\eta = 0.5 \arctan(u/q)$) et de l'aplatissement de l'ellipse de polarisation ($\epsilon = 0.5 \arcsin |v|$) en fonction de l'écart entre la fréquence de l'onde et la fréquence cyclotron locale.

des ellipses de polarisation proches de la fréquence cyclotron est donc compatible avec une émission quasi perpendiculaire par rapport au champ magnétique local ($\theta \sim \pi/2$).

4.2.4 Détermination de la direction de propagation

Comme nous l'avons montré au paragraphe 3.1.2.5, dans le cas général de propagation dans un plasma froid magnétisé, la polarisation de l'onde n'est pas nécessairement transverse, la normale au plan de polarisation pouvant ne pas être colinéaire au vecteur d'onde (figure 4.3). Les méthodes de goniopolarimétrie sont fondées sur l'effet du champ électrique des ondes sur les antennes dipolaires des sondes spatiales. La direction \mathbf{Z}_w déterminée par ces méthodes correspond donc à la normale au plan de polarisation. Les méthodes de goniopolarimétrie mises en place jusqu'à présent faisaient l'hypothèse d'une polarisation transverse et confondaient la direction de la normale au plan de polarisation avec la direction du vecteur d'onde. Cette direction connue apportait alors des contraintes sur la position de la source des émissions radio.

Cependant, la polarisation n'étant pas nécessairement transverse, cette direction n'est

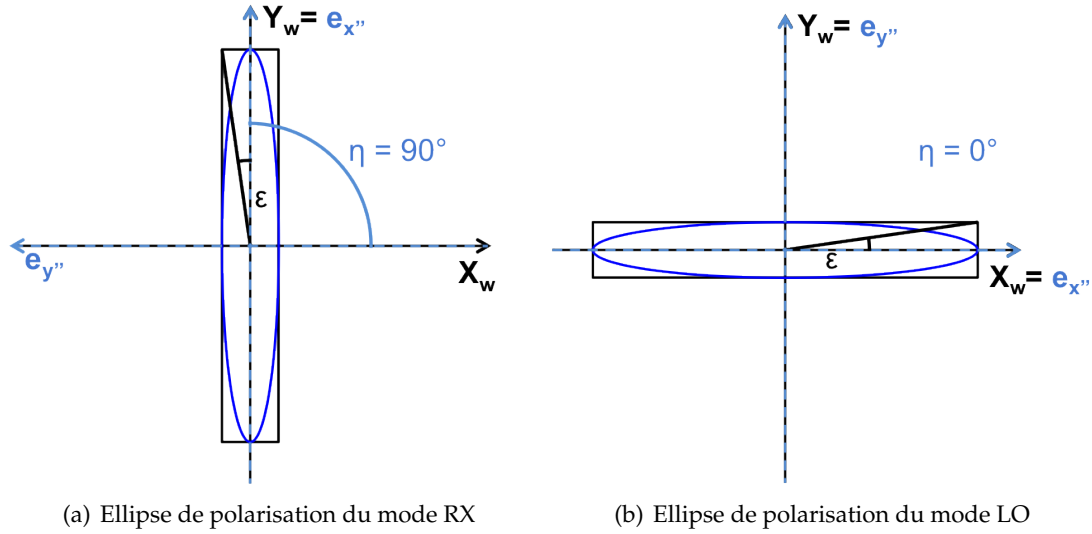


FIGURE 4.7 – Schéma de l'ellipse de polarisation des modes RX et LO pour f proche de f_c . ϵ est l'aplatissement de l'ellipse et η son inclinaison. L'axe X_w est dans le plan (Z_w, B_0) où Z_w est la normale au plan de polarisation.

pas automatiquement celle du vecteur d'onde. Confondre les deux peut alors entraîner des erreurs sur la détermination de la position des sources.

Polarisation transverse La polarisation est effectivement transverse lorsque le vecteur d'onde est normal au plan de polarisation, c'est-à-dire lorsque la projection du champ électrique sur le vecteur d'onde est nulle. Pour déterminer les conditions dans lesquels une onde est transverse, considérons les rapports de polarisation dans le repère lié au vecteur d'onde (e'_x, e'_y, e'_z) tel que k soit selon e'_z et B_0 soit dans le plan $(e'_x e'_z)$ (figure 3.3 et chapitre 3) :

$$\rho' = -\frac{D(n^2 \sin^2 \theta - P)}{(n^2 - S)P \cos \theta}$$

$$\tau' = -\frac{(n^2 - P) \sin \theta}{P \cos \theta}$$

$$\Re \left(\frac{E_{z'}}{E_{y'}} \right) = -\frac{(n^2 - S)(n^2 - P) \sin \theta}{D(n^2 \sin^2 \theta - P)}$$

La polarisation est purement transverse lorsque la composante $E_{z'}$ du champ électrique est nulle, donc lorsque les rapports τ' et $\Re (E_{z'} / E_{y'})$ sont nuls. Cette condition correspond à $\theta = 0$ ou $n^2 = P = 1 - X$.

La première condition correspond aux modes parallèles transverses droite (R) et gauche (L). La deuxième condition correspond à tous les modes obliques dont l'indice de réfraction vaut $\sqrt{1 - X}$, ce qui correspond notamment au mode « O » en propagation perpendiculaire.

Lorsque θ est non nul, ou lorsque l'indice de réfraction est différent de $\sqrt{1-X}$, la polarisation n'est pas transverse. La direction de la normale au plan de polarisation et le vecteur d'onde ne peuvent donc pas être confondus.

On peut remarquer que la condition $n^2 = 1 - X$ est valable pour les modes \oplus et \ominus lorsque la fréquence de l'onde est grande devant les fréquences de coupures plasma et du mode R (figure 2.7). Loin des sources et dans les milieux de faible densité électronique, la polarisation pourra être supposée transverse et la direction d'arrivée de l'onde sur les antennes confondues avec la direction \mathbf{Z}_w . Ce ne sera plus cas lorsque les mesures seront faites proches des coupures ou des résonances. Il faut alors trouver un autre moyen de déterminer la vraie direction du vecteur d'onde à partir des mesures.

Détermination de la direction du vecteur d'onde Dans un plasma froid magnétisé et homogène, les directions relatives du champ électrique de l'onde, du vecteur d'onde et du champ magnétique externe sont liées par les équations de la théorie magnéto-ionique présentée dans le chapitre 3.

Les paramètres du plasma fixant l'état de polarisation sont la densité d'électron (f_p), l'intensité du champ magnétique ambiant (f_c), ainsi que sa direction, à travers l'angle θ entre \mathbf{B}_0 et le vecteur d'onde \mathbf{k} .

L'état de polarisation d'une onde de fréquence f est alors entièrement déterminé par les paramètres ρ'' (rapport de polarisation dans le plan de polarisation) et γ (l'angle entre le plan de polarisation et l'axe Ox). Ces paramètres sont des fonctions de f_p , f_c , f et θ :

$$\rho'' = \frac{D(n^2 \sin^2 \theta - P)}{(n^2 - S) \sqrt{(n^2 \sin^2 \theta - P)^2 + n^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}} \quad (4.6)$$

$$\gamma = \arctan \left(\frac{n^2 \sin \theta \cos \theta}{n^2 \sin^2 \theta - P} \right) \quad (4.7)$$

Les mesures magnétiques permettent d'avoir accès à l'intensité et à la direction du champ magnétique ambiant. La goniopolarimétrie permet d'obtenir le rapport de polarisation ρ'' , à partir du calcul de q . D'après l'équation (3.17) :

$$\rho''^2 = \frac{1 - q}{1 + q}$$

La combinaison de la goniopolarimétrie et des mesures magnétiques permet de remonter à l'inclinaison du plan de polarisation γ .

Les paramètres $Y = f_c/f$, ρ'' et γ peuvent donc être obtenus à l'aide de différentes mesures, tandis que les paramètres $X = f_p/f$ et θ ne peuvent pas être mesurés directement⁴.

Les deux équations (4.6) et (4.7) forment un système d'équations couplées en X et θ . En inversant ce système il doit alors être possible de déterminer ces paramètres. Ce travail d'inversion est actuellement en cours.

4. Les mesures de faible densité électronique se déduisent généralement des mesures de fréquence plasma et sont affectées d'une erreur très importante.

4.3 Conclusion

Lorsque l'état de polarisation d'une onde est entièrement déterminé par les paramètres locaux du plasma, les axes principaux de l'ellipse de polarisation sont liés à la direction du champ magnétique ambiant. Les techniques de goniopolarimétrie permettent de remonter à la direction de la normale au plan de polarisation qui n'est pas nécessairement confondue avec la direction de propagation, lorsque les ondes ne sont pas transverses. En utilisant conjointement les mesures magnétiques et les mesures radio fournies par la sonde Cassini, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir les paramètres de Stokes caractérisant l'état de polarisation de l'onde dans le repère naturel de l'ellipse de polarisation (lié à la direction du champ magnétique ambiant et aux axes principaux de l'ellipse).

Cela nous a permis de montrer que lors de la traversée des sources du SKR par la sonde Cassini, les paramètres de Stokes, mesurés dans le repère naturel de l'ellipse de polarisation, indiquent une polarisation fortement elliptique, dont l'orientation par rapport au champ magnétique ambiant est compatible avec une émission quasi-perpendiculaire au champ magnétique, comme prédit par le mécanisme d'Instabilité Maser Cyclotron (voir chapitre 8) : pour le mode O, l'axe principal de l'ellipse de polarisation est selon \mathbf{B}_0 , tandis que pour le mode X, l'axe principal de l'ellipse de polarisation est perpendiculaire à \mathbf{B}_0 .

Les mesures magnétiques nous donnent également accès à l'inclinaison du plan de polarisation de l'onde par rapport au champ magnétique local. D'après la théorie de la polarisation dans les plasmas magnétisés décrite au chapitre 3, il doit donc être possible, à partir des mesures magnétiques et du traitement goniopolarimétrique des données radio de remonter à la vraie direction de propagation des ondes radio. Ce travail est actuellement en cours.

Deuxième partie

**Propagation des ondes radio dans les
plasmas froids inhomogènes**

TRACÉ DE RAYONS DANS LES PLASMAS MAGNÉTISÉS FAIBLEMENT INHOMOGÈNES

Sommaire

5.1 Introduction	100
5.1.1 Propagation en milieu faiblement inhomogène	100
5.1.2 Notion de rayon lumineux	102
5.1.3 Tracé de rayons	105
5.2 Théorie du tracé de rayon dans les plasmas non magnétisés	106
5.2.1 De l'équation eikonale à l'équation des rayons	106
5.2.2 Equations du tracé de rayon	107
5.3 Théorie du tracé de rayons dans les plasmas magnétisés	107
5.3.1 De nombreuses méthodes	107
5.3.2 Les équations d'Haselgrove	110
5.3.3 Equations hamiltoniennes du tracé de rayon	111
5.3.3.1 Le principe de Fermat	111
5.3.3.2 Equations différentielles dérivées du principe variationnel	112
5.3.3.3 Surface d'indice de réfraction et surface de rayon	113
5.3.3.4 Propriétés des surfaces réciproques	114
5.3.3.5 Système hamiltonien	117
5.3.4 Expression du système hamiltonien dans un magnéto-plasma froid	118
5.3.5 Instabilités et changements de variables	122
5.4 Limite isotrope du tracé de rayon en plasma magnétisé	123
5.5 Conclusion	124

Au cours de cette thèse, nous avons cherché à développer un outil de prise en compte des effets de propagation à travers les plasmas spatiaux pour l'étude des phénomènes radio planétaires. Les environnements planétaires étant magnétisés (et donc anisotropes) et inhomogènes, les ondes radio peuvent subir, entre les sources et les détecteurs, des phénomènes de réfraction, réflexion, diffusion, diffraction, interférences, couplage de modes ... Ces phénomènes électromagnétiques se produisent à des échelles différentes devant la longueur d'onde, aux grandes échelles pour la réflexion et la réfraction, aux petites échelles pour la diffusion, la diffraction et les interférences.

Un traitement ondulatoire complet, cherchant des solutions exactes des équations de Maxwell, permettrait de prendre en compte dans un seul outil tous ces phénomènes physiques.

Cependant, au cours de cette thèse, nous nous intéressons principalement aux déviations au cours de la propagation de l'énergie des ondes électromagnétiques entre la source et l'observateur. De plus, nous disposons de modèles moyens de champ magnétique et de densité d'électrons dans les environnements planétaires, non résolus à l'échelle des longueurs d'onde radio. Enfin, un traitement ondulatoire complet sur des échelles planétaires nécessite une très grande puissance de calcul. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers le développement d'un outil de type « tracé de rayons » permettant le calcul de la trajectoire de l'énergie électromagnétique à travers un milieu donné dans l'approximation de l'optique géométrique. Les méthodes de tracé de rayons permettent de traiter les phénomènes de réfraction et de réflexion aux grandes échelles devant la longueur d'onde.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie du tracé de rayons dans les milieux faiblement inhomogènes. Dans une partie d'introduction, nous justifierons que dans l'approximation de l'optique géométrique, la théorie magnéto-ionique d'Appleton-Hartree décrite dans les chapitres 2 et 3 peut s'appliquer aux milieux inhomogènes lentement variables ; puis nous introduirons la notion de rayon lumineux. Nous décrirons ensuite deux systèmes d'équations des rayons, l'un en milieu isotrope, l'autre en milieu anisotrope. Ce dernier est à la base du code de tracé de rayons ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetics in Magnetosphere Ionosphere and Solar wind including Polarization) développé durant cette thèse. Pour finir, nous montrerons que les équations des rayons en milieu isotrope sont une limite des équations en milieu anisotrope quand l'intensité du champ magnétique extérieur tend vers zéro.

5.1 Introduction

5.1.1 Propagation en milieu faiblement inhomogène

Comme nous l'avons décrit au chapitre 1, les environnements planétaires sont structurés à plusieurs échelles. En plus des champs magnétiques planétaires (dipolaires, multipolaires, en interaction avec le vent solaire . . .), il existe plusieurs échelles de variations spatiales de la densité d'électrons :

- de l'ordre de la dizaine à la centaine de kilomètres pour les sous-densités dans les cavités aurorales terrestres, ([Ergun 2000], [Louarn 1996a], [Louarn 1996b]),
- de l'ordre du millier de kilomètres pour les profils en altitude des ionosphères (profil de Chapman . . .),([Nagy 2009], [Strobel 2000]),
- de l'ordre des rayons planétaires pour les variations dans les magnétosphères internes (disques de plasma [Achilleos 2010], tore de Io [Schneider 1995] . . .)
- de l'ordre de l'unité astronomique pour la décroissance de la densité du vent solaire avec la distance au Soleil.

Ces milieux ne peuvent donc pas être considérés comme des milieux de propagation homogènes, à l'instar des plasmas décrits aux chapitres précédents. Or, la théorie magnéto-ionique développée par Appleton [Appleton 1932] n'est valable qu'en milieu homogène. L'étude de la propagation des ondes radio dans ces environnements appelle à se demander s'il existe un équivalent des ondes caractéristiques décrites au chapitre 2 dans les milieux non homogènes.

Dans le cadre d'un *milieu lentement variable* (dont les paramètres varient sur des échelles grandes devant la longueur d'onde), [Booker 1936] démontre, par un développement en perturbation de la relation de dispersion, que les ondes caractéristiques en un point d'un milieu inhomogène sont équivalentes aux ondes caractéristiques d'un milieu homogène possédant les mêmes paramètres de plasma.

Le champ électrique de l'onde se propageant dans un tel milieu peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{r})} \quad (5.1)$$

où

- \mathcal{E} la « fonction eikonale » ([Sommerfeld 1954], [Budden 1985])
- \mathbf{r} les coordonnées spatiales

Les surfaces d'ondes sont définies par $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \text{constante}$, la fonction eikonale décrit donc le front d'onde. En milieu homogène, pour une onde plane progressive, la fonction eikonale est donnée par $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0$, où ω est la pulsation de l'onde et ϕ_0 sa phase à l'origine.

Approximation de l'optique géométrique L'approximation de l'optique géométrique consiste à considérer que les variations relatives des amplitudes des champs électrique et magnétique de l'onde sont faibles à l'échelle de la longueur d'onde. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas des milieux lentement variables.

Dans cette approximation, l'amplitude $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ est une fonction lentement variable de la position \mathbf{r} . On peut alors montrer (voir [Born 1975], [Budden 1985] chap.14) que le vecteur indice de réfraction $\mathbf{n} = n \frac{\mathbf{k}}{k}$ et la fonction eikonale sont liés par la relation suivante, appelée *équation eikonale* :

$$\mathbf{n} = \text{grad}\mathcal{E} \quad (5.2)$$

Cette équation décrit le fait que le vecteur indice de réfraction (et donc le vecteur d'onde) est toujours normal aux fronts d'onde.

De manière générale, les champs électromagnétiques au voisinage d'un point de l'espace sont des combinaisons linéaires de ces ondes caractéristiques, chacune étant solution des équations de Maxwell.

La gamme de fréquences des ondes électromagnétiques concernée par les phénomènes radio planétaires s'étend de la dizaine de kHz à la centaine de MHz. Ces fréquences correspondent à une gamme de longueurs d'onde allant du mètre à la dizaine de kilomètres. Les échelles de variations spatiales de la densité d'électrons dans

les environnements planétaires sont donc bien supérieures aux échelles de longueur d'onde considérées. Il est alors possible de traiter les phénomènes de propagation d'ondes radio à travers ces milieux dans l'approximation de l'optique géométrique.

Pour résumer :

Lorsque les paramètres du milieu varient peu à l'échelle de la longueur d'onde, on peut, en première approximation, le considérer comme homogène à cette échelle. Ainsi, on pourra lui appliquer localement les résultats obtenus aux chapitres précédents.

Remarques :

- Au voisinage d'une coupure ou d'une résonance, l'indice de réfraction varie rapidement avec la position, et ces approximations ne sont plus valables et l'étude de la propagation nécessite un traitement ondulatoire exact.
- Ce problème est l'analogue de la résolution de l'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel non uniforme. En mécanique quantique, une solution approchée de ce problème est donnée par l'approximation Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), équivalente de l'approximation de l'optique géométrique pour les ondes électromagnétiques¹.

5.1.2 Notion de rayon lumineux

Par la suite, nous nous intéresserons à la propagation de l'énergie des ondes électromagnétiques sur des distances grandes devant la longueur d'onde. D'après les approximations de l'optique géométrique, cette propagation se fait le long de trajectoire particulières appelées *rayons*.

Dans un milieu inhomogène (mais assimilé localement à un milieu homogène), la vitesse de groupe de l'onde électromagnétique représente la vitesse de propagation de l'énergie. Cette dernière suit donc une trajectoire tangente en tout point au vecteur vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$. En plasma froid², seule l'onde électromagnétique transporte de l'énergie. Le vecteur vitesse de groupe est donc colinéaire au vecteur de Poynting moyenné dans le temps :

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

1. Pour l'application de la méthode WKB en optique, voir [Budden 1985] chapitres 7, 10 et 14
 2. En plasma chaud, le vecteur vitesse de groupe est colinéaire à la somme du vecteur de Poynting moyen et du vecteur flux d'énergie mécanique transporté par les particules. [Quémada 1968]

où

- \mathbf{E} le champ électrique complexe de l'onde
- \mathbf{H}^* le champ magnétique complexe conjugué de l'onde
- $\langle \rangle$ la moyenne temporelle

Un rayon représente donc la trajectoire de l'énergie électromagnétique de l'onde et est tangent en tout point au vecteur vitesse de groupe.

Structure de l'onde Nous avons vu dans le chapitre 2, section 2.4.6, que le vecteur vitesse de groupe est normal à la surface d'indice de réfraction en un point donné de l'espace. À partir de cette propriété, nous pouvons remonter aux caractéristiques géométriques de l'onde (position relative du vecteur vitesse de groupe, du vecteur d'onde et des champs de l'onde) dans les cas isotrope et anisotrope.

Cas isotrope Dans un plasma non magnétisé, la surface d'indice de réfraction est une sphère de rayon n (figure 5.1). Le vecteur d'onde et le vecteur vitesse de groupe sont donc colinéaires. Le rayon est tangent en tout point au vecteur d'onde, il est donc perpendiculaire aux fronts d'onde. La vitesse de phase et la vitesse de groupe ont la même direction.

D'après l'équation de Maxwell-Thomson ($\text{div} \mathbf{B} = 0$), le vecteur d'onde et le champ magnétique de l'onde sont toujours orthogonaux. D'après le chapitre 3, lorsque la fréquence de l'onde est supérieure à la fréquence plasma locale, le champ électrique de l'onde est transverse, donc orthogonal au vecteur d'onde (figure 5.2)

Cas anisotrope Dans un plasma magnétisé, la surface d'indice de réfraction est une surface de révolution autour de la direction du champ magnétique externe, mais n'est plus nécessairement à symétrie sphérique (figure 5.3). Le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 , le vecteur d'onde et le vecteur vitesse de groupe sont **coplanaires**, mais ces deux derniers ne sont **plus colinéaires** et forment un angle α défini par :

$$\tan \alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta} \quad (5.3)$$

D'après la formule de l'indice de réfraction d'Appleton-Hartree (2.61), l'angle α sera donné par [Budden 1985] :

$$\tan \alpha = \pm \frac{1}{2} Y \sin \theta \cos \theta (n^2 - 1) \left[\frac{1}{4} Y^2 \sin^4 \theta + (1 - X)^2 \cos^2 \theta \right]^{-1/2} \quad (5.4)$$

Où le signe + (resp. -) correspond au mode \oplus (resp. \ominus) de la relation d'Appleton-Hartree (2.61). Le facteur $(n^2 - 1)$ dans l'expression de l'angle α implique que ce dernier sera non nul si l'indice de réfraction est significativement différent de 1. Cette situation se présente essentiellement proche des coupures et des résonances. La figure 5.5 montre la variation de l'angle α en fonction de l'angle θ dans

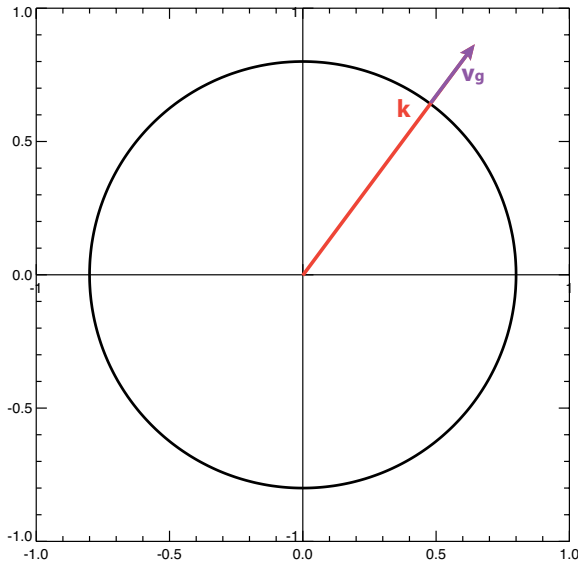


FIGURE 5.1 – Surface d'indice de réfraction en milieu isotrope dans le cas où $n = 0,8$. Le vecteur d'onde \mathbf{k} et le vecteur vitesse de groupe \mathbf{v}_g (direction du rayon) sont colinéaires.

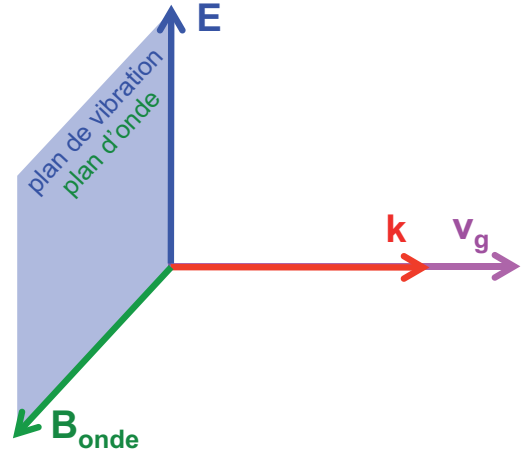


FIGURE 5.2 – Structure géométrique de l'onde électromagnétique en milieu isotrope. Le rayon est tangent au vecteur vitesse de groupe \mathbf{v}_g .

le cas où $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$. L'angle α maximum est de $29,4^\circ$ et est atteint lorsque le vecteur d'onde est quasi-parallèle au vecteur champ magnétique extérieur ($\theta \sim 12,6^\circ$ et $\theta \sim 166^\circ$), ce qui correspond à la partie de la surface d'indice de réfraction qui s'éloigne le plus de la sphère isotrope (figure 5.3).

D'après l'équation (5.4) et la figure 5.5, on constate qu'en propagation parallèle ($\theta = 0^\circ$) et perpendiculaire ($\theta = 180^\circ$), le vecteur d'onde et le vecteur vitesse de groupe sont colinéaires. En propagation oblique, le rayon n'est plus tangent au vecteur d'onde, l'énergie électromagnétique ne se propage plus perpendiculairement aux fronts d'onde.

L'équation de Maxwell-Thomson reste valable en milieu anisotrope, le vecteur d'onde est donc toujours orthogonal au vecteur champ magnétique de l'onde. D'après le chapitre 3, le champ électrique de l'onde peut avoir une composante longitudinale. Le vecteur d'onde et le champ magnétique ne forment un trièdre direct ni avec le champ électrique de l'onde, ni avec le rayon (figure 5.4).

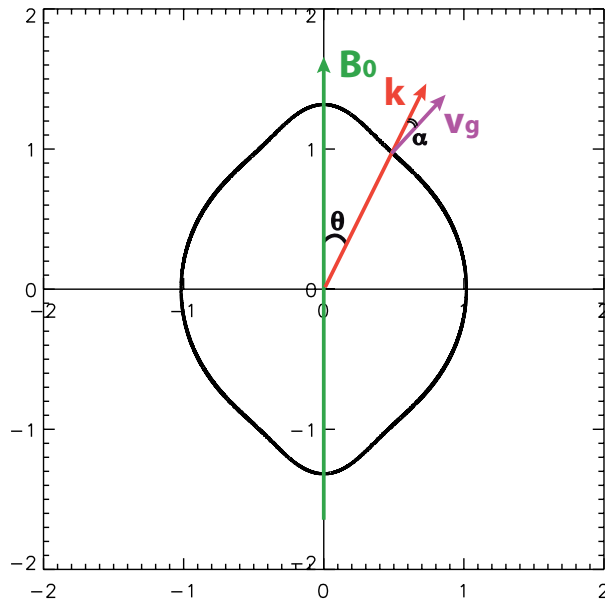


FIGURE 5.3 – Surface d'indice de réfraction en milieu anisotrope avec $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$. Le vecteur d'onde \mathbf{k} et le vecteur vitesse de groupe \mathbf{v}_g (direction du rayon) forment un angle α . Le champ magnétique externe, le vecteur d'onde et le rayon sont coplanaires.

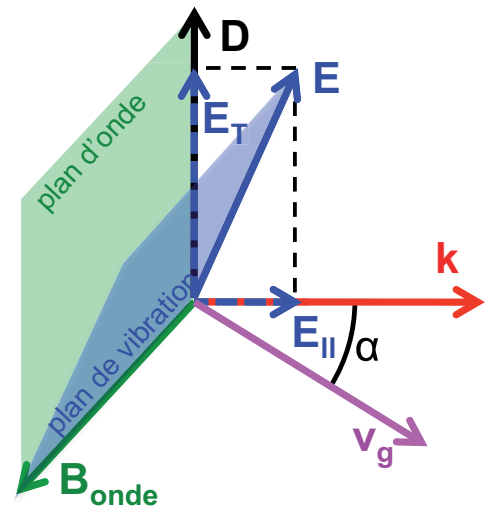


FIGURE 5.4 – Structure géométrique de l'onde électromagnétique en milieu anisotrope. Le rayon est tangent au vecteur vitesse de groupe \mathbf{v}_g .

Pour résumer :

En **plasma non-magnétisé**, le rayon est tangent en tout point au vecteur d'onde qui forme un trièdre direct avec le champ magnétique et le champ électrique de l'onde.

En **plasma magnétisé**, le champ magnétique externe, le vecteur d'onde et le rayon sont coplanaires ; le vecteur d'onde et le rayon ne sont plus nécessairement colinéaires mais forment un angle α , donné par

$$\tan \alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta}$$

Le rayon n'est donc plus orthogonal aux fronts d'onde. Le champ magnétique de l'onde est toujours orthogonal au vecteur d'onde, mais son champ électrique peut avoir une composante longitudinale.

Remarque :

Le vecteur de Poynting instantané $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ est orthogonal en tout point au plan de vibration de l'onde, ce qui n'est pas nécessairement le cas du vecteur vitesse de groupe.

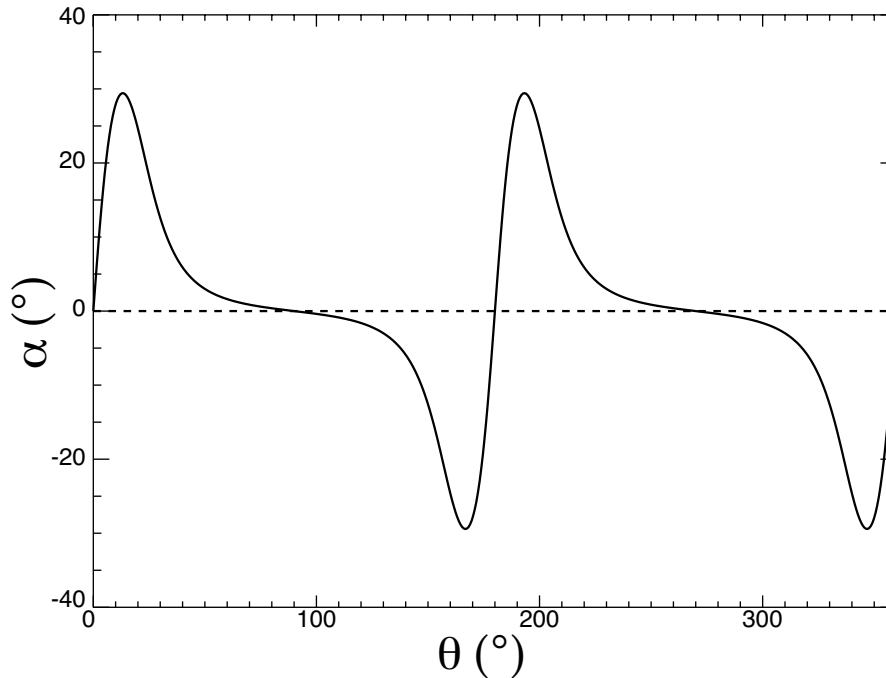


FIGURE 5.5 – Variation de l'angle α entre le vecteur d'onde et le rayon en fonction de l'angle θ entre le vecteur d'onde et le champ magnétique dans le cas $X = 0.81$ et $Y^2 = 4.41$.

5.1.3 Tracé de rayons

L'approximation de l'optique géométrique peut s'appliquer dans les milieux inhomogènes lentement variables, c'est-à-dire lorsque les échelles de variations spatiales des grandeurs caractéristiques du milieu sont grandes devant la longueur d'onde. Dans ce cas, nous pouvons supposer que l'énergie électromagnétique se propage le long de « rayons », tangents en tout point au vecteur vitesse de groupe, colinéaire en plasma froid au vecteur de Poynting moyen.

Les phénomènes de réfraction et réflexion subis par les ondes radio peuvent alors être étudiés à l'aide de techniques de « tracé de rayons », qui permettent de calculer numériquement le trajet de l'énergie d'une onde électromagnétique à travers un milieu donné, lentement variable. Elles sont, pour la plupart, fondées sur la propriété d'orthogonalité des rayons et de la surface d'indice de réfraction et peuvent être analytiques (résolution d'un système d'équations différentielles) ou graphiques (construction de la normale à la surface d'indice de réfraction en chaque point).

L'étude de la propagation des ondes radio dans l'ionosphère terrestre, initiée dans les années 1930 a permis le développement considérable des techniques de tracé de rayons.

Dans la suite de ce chapitre nous allons décrire deux techniques de tracé de rayons, l'une en plasma non magnétisé (isotrope) et l'autre en plasma magnétisé (anisotrope).

5.2 Théorie du tracé de rayon dans les plasmas non magnétisés

Une technique simple de tracé de rayons dans les milieux isotropes a été développée dans l'article [Sharma 1982]. Dans cet article, le code de tracé de rayons est appliqué à une étude d'aberration de lentilles dans le domaine visible du spectre électromagnétique. Cependant, la forme générale des équations des rayons nous permet de les transposer dans le domaine des ondes radio dans les plasmas non-magnétisés. Ce code fut appliqué à l'étude de la directivité des sursauts radio interplanétaires [Thejappa 2007], à l'étude de la diffusion des ondes radio solaires aux basses fréquences [Thejappa 2008] et à l'étude de la directivité des sursauts radio solaires de type III aux fréquences inférieures à 10 MHz [Bonnin 2008].

5.2.1 De l'équation eikonale à l'équation des rayons

Le code de tracé de rayon développé dans [Sharma 1982] est fondé sur l'équation des rayons (5.5), elle même dérivée de l'équation eikonale (5.2).

En milieu isotrope, le rayon est tangent en tout point au vecteur d'onde. Si $\mathbf{r}(s)$ désigne la position d'un point P le long d'un rayon lumineux, et s l'abscisse curviligne, on peut définir un vecteur unitaire \mathbf{u} colinéaire au vecteur d'onde, tel que :

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}$$

Le vecteur indice de réfraction peut alors s'écrire $\mathbf{n} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ et l'équation eikonale (5.2) :

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{grad}\mathcal{E}$$

En s'affranchissant du terme contenant la fonction eikonale, on obtient l'équation des rayons :

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{dn}{d\mathbf{r}}} \quad (5.5)$$

En dérivant l'équation eikonale par rapport à s , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d\mathbf{grad}\mathcal{E}}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{grad}\mathcal{E}}{d\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{d(\mathbf{grad}\mathcal{E})^2}{d\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{dn^2}{d\mathbf{r}} = \frac{dn}{d\mathbf{r}} \end{aligned}$$

5.2.2 Equations du tracé de rayon

Le chemin des rayons est obtenu en résolvant l'équation des rayons (5.5). Pour mettre cette équation sous une forme plus simple pour une intégration numérique, on introduit une variable³ τ telle que :

$$\tau = \int \frac{ds}{n}, \quad d\tau = \frac{ds}{n}$$

Le vecteur indice de réfraction s'écrit : $\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ et l'équation des rayons (5.5) devient :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = n \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{d\mathbf{r}}$$

Le système d'équations à résoudre se met donc sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{d\mathbf{r}} = D(\mathbf{r}) \end{cases}} \quad (5.6)$$

Cette forme simple d'équations différentielles couplées peut se résoudre numériquement par une méthode pas à pas de type Runge-Kutta (voir par exemple, l'algorithme décrit dans [Sharma 1982]). Pour cela, il suffit de connaître les conditions initiales de position et de direction du vecteur d'onde ($\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0$), ainsi que la description du milieu de propagation (densité d'électrons en fonction de la position) permettant de calculer la quantité $D(\mathbf{r})$.

5.3 Théorie du tracé de rayons dans les plasmas magnétisés

En présence de champ magnétique, le milieu de propagation devient anisotrope. La théorie des rayons, comme l'étude des ondes caractéristiques, se complique considérablement, les rayons n'étant plus tangents aux vecteurs d'onde.

5.3.1 De nombreuses méthodes

Il existe de nombreuses techniques de tracé de rayons dans de tels milieux, pouvant être classées en deux catégories, selon que le milieu est considéré comme stratifié ou non.

Milieu stratifié Le milieu est ici supposé stratifié, c'est-à-dire composé d'une superposition de couches plan-parallèles de même indice de réfraction, variant avec l'altitude. L'indice de réfraction à l'intérieur d'une couche est donc supposé constant et peut être anisotrope. Les paramètres de l'onde sont également constants à l'intérieur d'une couche. Afin de rester dans le cadre de l'optique géométrique, l'épaisseur des couches

3. L'interprétation physique de cette variable d'intégration n'est pas nécessaire. Elle doit simplement représenter une quantité augmentant le long du rayon.

doit être supérieure ou égale à la longueur d'onde. Le modèle stratifié du milieu permet d'utiliser les lois de Descartes pour la réfraction, stipulant que la quantité $n(z) \sin \phi$ reste constante le long de la propagation (z étant l'altitude comptée selon \mathbf{e}_z , parallèle au gradient d'indice ∇n et ϕ l'angle entre le vecteur d'onde et ∇n).

Nous décrivons brièvement ici deux méthodes de tracé de rayons dans les milieux stratifiés : la méthode de la quartique de Booker et la méthode de Poverlein.

Méthode de Booker (1938) La méthode dite de la « quartique de Booker » est une méthode analytique de tracé de rayons, exposée dans [Booker 1938]. Elle suppose un milieu stratifié selon un axe $\mathbf{e}_z \parallel \nabla n$, un champ magnétique externe \mathbf{B}_0 de direction quelconque, et une onde électromagnétique dont le vecteur d'onde forme un angle ϕ avec l'axe \mathbf{e}_z . On suppose que l'onde arrive du vide sur le milieu en faisant un angle ϕ_0 avec la verticale. D'après les lois de Descartes pour la réfraction, on a $n(z, \theta) \sin \phi = \sin \phi_0$ à travers tout le milieu et l'on peut définir la quantité q par :

$$q = n(z, \theta) \cos \phi$$

À partir de la théorie magnéto-ionique décrite au chapitre 2, on peut montrer que la quantité q est solution d'une équation caractéristique du quatrième ordre⁴ :

$$F(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 = 0$$

les coefficients a_i étant des fonctions de X, Y, θ et ϕ .

Les rayons, qui sont les courbes selon laquelle la phase de l'onde reste constante, sont alors définis par l'équation (dans un milieu à deux dimensions (x, z)) :

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{\partial q}{\partial S} \Big|_{S_0}$$

où $S = n(z, \theta) \sin \phi$ et $S_0 = \sin \phi_0$.

Méthode de Poverlein (1948) La méthode dite de « Poverlein » est une méthode graphique de tracé de rayons, exposée dans [Poverlein 1948].

Elle suppose également un milieu stratifié selon un axe $\mathbf{e}_z \parallel \nabla n$, un champ magnétique externe \mathbf{B}_0 de direction quelconque et une onde électromagnétique dont le vecteur d'onde forme un angle ϕ avec l'axe \mathbf{e}_z . Pour construire le trajet d'un rayon, il suffit de tracer la surface d'indice de réfraction à plusieurs altitudes. La direction du rayon à une altitude fixe est alors donnée par la normale à la surface au point d'intersection entre celle-ci et l'axe vertical situé à une distance $S = n(z, \theta) \sin \phi$. La quantité S reste constante le long du rayon d'après la relation de Descartes. La surface d'indice de réfraction étant une surface de révolution autour de la direction de \mathbf{B}_0 , il existe toujours deux points d'intersection et donc deux directions possibles pour le rayon, une montante ($\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z > 0$) et une descendante ($\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z < 0$). On sélectionnera toujours la solution dont la direction est

4. Pour plus de détails voir [Budden 1985] chap. 6, [Quémada 1968] p.213 et [Booker 1938].

cohérente avec la direction du vecteur d'onde dans la couche antérieure. À l'altitude où l'onde est réfléchie, ces deux solutions sont confondues et horizontales. La figure 5.6 illustre le trajet d'un rayon en incidence oblique sur un plasma stratifié verticalement.

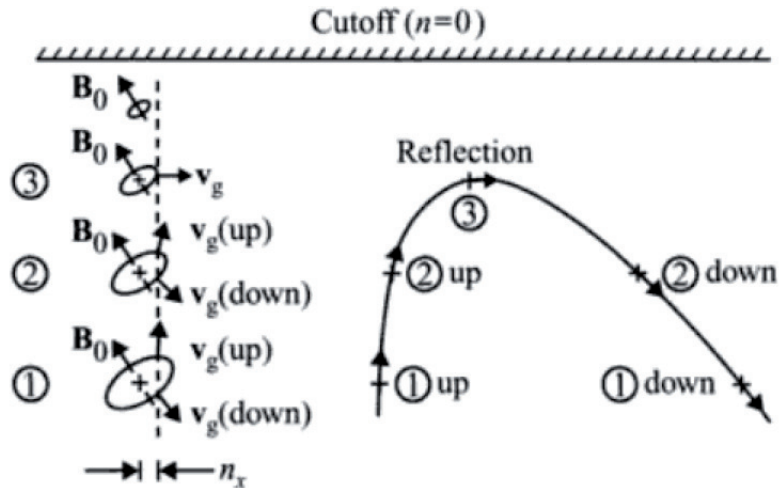


FIGURE 5.6 – Construction de Poeverlein d'un rayon en incidence oblique sur un plasma stratifié verticalement. Sur le schéma, $n_x = S = n(z, \theta) \sin \phi$ (d'après [Gurnett 2005])

Ces techniques supposent que le milieu peut être décrit par un empilement plan parallèle de couches de même indice de réfraction. Une telle description peut être valable pour l'étude de la propagation quasi-verticale des ondes radio dans l'ionosphère, mais devient limitée lorsque l'on veut prendre en compte les variations de densité d'électron avec les coordonnées horizontales (temps local et latitude). De même, la structure des magnétosphères planétaires, contrôlée par le champ magnétique en interaction avec le vent solaire, ne peut être modélisée par une stratification plan-parallèle de l'indice de réfraction.

Milieu continu En milieu continu, les paramètres du plasma varient continûment le long du rayon. Dans ce cas, la majorité des techniques de tracé de rayons sont fondées sur le principe de Fermat. Certaines sont fondées sur une résolution directe de ce principe (voir par exemple [Coleman 2011]), d'autres sur la résolution d'un système hamiltonien d'équations différentielles. La méthode la plus répandue est la méthode d'Haselgrove que nous détaillerons dans les paragraphes suivants.

Nous allons montrer ici que les équations du tracé de rayons peuvent se mettre sous une forme hamiltonienne⁵.

Equations canoniques hamiltoniennes Dans un milieu homogène, la vitesse de

5. voir [Stix 1992]

groupe représente la vitesse de propagation de l'énergie. Elle est définie par :

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial D/\partial\mathbf{k}}{\partial D/\partial\omega} \quad (5.7)$$

où D est la relation de dispersion, définie par $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$.

Dans un milieu inhomogène, mais assimilé localement à un milieu homogène, la vitesse de groupe représente la direction d'un rayon. La relation de dispersion est dans ce cas une fonction lentement variable de l'espace $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r})$ (approximation de l'optique géométrique).

Pour déterminer la trajectoire d'un rayon, il est nécessaire de connaître sa direction ($d\mathbf{r}/dt$) et la réfraction subie par le vecteur d'onde ($d\mathbf{k}/dt$).

Comme la relation de dispersion est caractérisée par $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = 0$, on a :

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial\omega} \delta\omega + \frac{\partial D}{\partial\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k} + \frac{\partial D}{\partial\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (5.8)$$

Si le milieu de propagation est stationnaire, la fréquence est inchangée ($\delta\omega = 0$), on obtient donc :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial D/\partial\mathbf{r}}{\partial D/\partial\omega} \quad (5.9)$$

En introduisant un paramètre τ' défini par :

$$\frac{dt}{d\tau'} = \frac{\partial D}{\partial\omega} \quad (5.10)$$

on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau'} = -\frac{\partial D}{\partial\mathbf{k}} \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau'} = \frac{\partial D}{\partial\mathbf{r}} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Ces équations ont la même forme que les équations de Hamilton décrivant le mouvement d'un point matériel dans un potentiel, dont l'hamiltonien correspond à la relation de dispersion⁶.

Afin de pouvoir étudier la propagation des ondes radio dans la diversité de milieux que présentent les environnements planétaires, nous avons choisi de développer un outil de tracé de rayons en milieu continu. Le principe du code de tracé de rayons ARTEMIS-P est fondé sur la résolution d'un système d'équations hamiltonien décrit par Haselgrove dans les années 1950-1960.

6. On remarquera que dans le cas d'un milieu isotrope, l'indice de réfraction ne dépendant que de la position \mathbf{r} , on posant $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = c^2\mathbf{k}^2 - n(\mathbf{r})^2\omega^2 = 0$, on retrouve les équations du tracé de rayons (5.5).

5.3.2 Les équations d’Haselgrove

Entre 1955 et 1963, Jenifer Haselgrove, alors étudiante à l’Université de Cambridge, développa une méthode hamiltonienne de tracé de rayons dans l’ionosphère terrestre. Dans le contexte du début de l’ère informatique (le premier ordinateur du Royaume-Uni, EDSAC, fut construit à Cambridge en 1949), celles qui seront connus par la suite comme les *équations d’Haselgrove* furent la première formulation adaptée à une résolution numérique des équations de propagation des ondes radio dans les milieux anisotropes. De plus, leur forme générale en font encore aujourd’hui une des techniques de tracé de rayons les plus utilisées, et sont à la base de nombreux codes traitant de sujets aussi variés que la transmission sol-satellite à travers l’ionosphère terrestre [Gillies 2007], l’étude de la propagation des ondes ELF/VLF (« extremely low frequency/very low frequency ») à travers la magnétosphère terrestre [Platino 2004] ou l’étude de la position des sources radio hectométrique de Jupiter [Ladreiter 1990].

Les trois articles fondateurs de la théorie du tracé de rayons d’Haselgrove sont :

- [Haselgrove 1955], démontrant la forme hamiltonienne des équations des rayons à partir du principe de Fermat.
- [Haselgrove 1960], développant les équations en coordonnées cartésiennes.
- [Haselgrove 1963], généralisant ces équations pour les adapter au cas isotrope.

Nous allons passer en revue les fondements de la méthode d’Haselgrove pour arriver à la forme intégrable numériquement décrite dans l’article [Haselgrove 1963], qui sera à la base du code ARTEMIS-P développé durant cette thèse.

5.3.3 Equations hamiltoniennes du tracé de rayon

Le but de l’article [Haselgrove 1955] est d’obtenir un jeu fermé d’équations différentielles du premier ordre, faciles à intégrer numériquement, de la forme :

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où x est une variable indépendante et $\frac{dy_i}{dx}$ dépend de tous les variables y_i .

5.3.3.1 Le principe de Fermat

Le **principe de Fermat** est le point de départ pour trouver ce jeu d’équations :

Si t est le temps que met un élément caractéristique de l’onde lumineuse (front d’onde, etc...) pour se rendre d’un point A à un point B , alors le chemin effectivement suivi par un rayon lumineux est celui qui rend t extremum⁷.

Soit t le temps que met un front d’onde pour aller d’un point A à un point B , ds l’abscisse curviligne le long du rayon et v la vitesse de propagation de ce front d’onde le long du

7. Le temps de parcours est généralement minimum mais peut parfois être maximum (miroir concave)

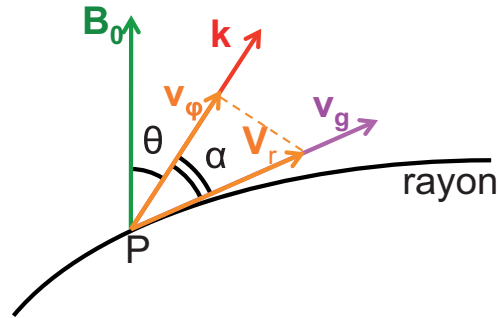


FIGURE 5.7 – Définition du vecteur vitesse radiale en milieu anisotrope

rayon :

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

Le principe de Fermat se traduit mathématiquement par : $\delta t = 0$

Cas isotrope Dans le cas isotrope et en considérant une onde plane, la vitesse de propagation du front d'onde (vitesse de phase) est : $v_\phi = c/n$, et est dans la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} (le vecteur et le rayon étant colinéaires).

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds = \frac{L_{AB}}{c}$$

où L_{AB} est le chemin optique (la longueur du trajet que parcourrait la lumière dans le vide pendant le temps qu'elle met à parcourir le trajet dans le milieu considéré).

Le principe de Fermat se traduit alors mathématiquement par :

$$\delta t = \delta \frac{1}{c} \int_A^B n ds = 0 \quad \text{soit} \quad \delta L_{AB} = 0$$

Cas anisotrope Dans le cas anisotrope, le rayon et le vecteur d'onde ne sont plus colinéaires, mais forment un angle α . La vitesse de propagation du front d'onde le long du vecteur d'onde est toujours donnée par $\mathbf{v}_\phi = c\mathbf{k}/kn$.

On appelle \mathbf{V}_r la vitesse « radiale », c'est-à-dire la vitesse du front d'onde le long du rayon (\mathbf{V}_r est selon la direction du rayon). Le vecteur vitesse de phase \mathbf{v}_ϕ est alors la projection de \mathbf{V}_r sur \mathbf{k} , soit :

$$V_r = \frac{v_\phi}{\cos \alpha} = \frac{c}{n \cos \alpha}$$

On appelle *indice de réfraction du rayon* la quantité $m = n \cos \alpha$ (n étant l'indice de réfraction de l'onde, ou de la phase, donnée par la relation Appleton-Hartree (2.61)). On a alors :

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n \cos \alpha ds$$

Le principe de Fermat s'exprime alors sous la forme :

$$\boxed{\delta \int_A^B m ds = 0} \quad (5.12)$$

5.3.3.2 Equations différentielles dérivées du principe variationnel

D'après le principe variationnel, s'il existe une quantité \mathcal{L} variant entre les points fixes A et B , de telle sorte que :

$$\delta \int_A^B \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (5.13)$$

alors \mathcal{L} doit vérifier les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.14)$$

Ici, on cherche à calculer le trajet du rayon. Soit P un point du rayon de coordonnées spatiales \mathbf{x} . D'après le principe de Fermat :

$$\delta \int_A^B m(x_i, \dot{x}_i, s) ds = 0$$

Avec $q_i = x_i$ et $\dot{q}_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}$, et d'après les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial m}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial m}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (5.15)$$

On peut ainsi obtenir des expressions pour la courbure du rayon, c'est-à-dire le taux de variation de la direction du rayon le long du rayon, en fonction de l'indice de réfraction du rayon m et de ses dérivées par rapport à la position (\mathbf{x}) et à la direction ($\dot{\mathbf{x}}$). Or, l'indice de réfraction du rayon m ne peut être calculé sans connaître la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} . Il faut donc transformer les équations de la courbure pour faire apparaître des équations donnant le taux de variation du vecteur d'onde \mathbf{k} le long du rayon, également en fonction de m et de ses dérivées.

Pour transformer les équations, on utilise une propriété géométrique : **la réciprocity des surfaces d'indice de réfraction et des surfaces de rayon.**

5.3.3.3 Surface d'indice de réfraction et surface de rayon

Surface d'indice de réfraction Les surfaces d'indice de réfraction ont déjà été introduites au chapitre 2, §2.4.6. On en rappelle ici les éléments importants :

- En un point P du rayon, la surface d'indice de réfraction est la surface décrite par l'extrémité du vecteur indice de réfraction $\mathbf{n} = nk/k$.

- C'est une surface de révolution autour de la direction du champ magnétique externe.
- Pour un angle θ donné, le vecteur vitesse radiale (colinéaire au vecteur vitesse de groupe) est normal à la surface d'indice de réfraction.

Surface de rayon De la même manière que l'on a défini les surfaces d'indice de réfraction, on peut définir une surface associée au vecteur vitesse radiale \mathbf{V}_r .

De manière générale, en coordonnées cartésiennes où le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 est dirigé selon \mathbf{e}_z , les coordonnées du vecteur vitesse radiale s'écrivent :

$$V_{rx} = V_r \sin \beta \cos \phi, V_{ry} = V_r \sin \beta \sin \phi, V_{rz} = V_r \cos \beta \quad (5.16)$$

où $\beta = \theta + \alpha$ est l'angle entre le rayon et \mathbf{B}_0 et ϕ l'angle azimutal.

La phase d'un point se déplaçant le long du rayon à la vitesse \mathbf{V}_r reste constante.

Si on considère l'espace défini par les axes $\{V_{rx}, V_{ry}, V_{rz}\}$, parallèles aux axes $\{x, y, z\}$ de l'espace géométrique, la surface décrite par le vecteur \mathbf{V}_r , appelée *surface de rayon*, définit donc la forme du front d'onde.

On liste ici quelques propriétés :

1. V_r est indépendant de ϕ , toutes les surfaces de rayons sont des surfaces de révolution autour de la direction du champ magnétique externe \mathbf{B}_0 .
2. Dans le vide, toutes les surfaces de rayons sont des sphères de rayon c .
3. Pour un plasma isotrope toutes les surfaces de rayons sont des sphères de rayon c/n .
4. La normale au front d'onde est selon \mathbf{k} , donc la normale à la surface de rayon est selon \mathbf{k} .

Surfaces réciproques Les surfaces de rayons et les surfaces d'indices de réfraction sont dites *réciproques par rapport à la sphère de rayon c* . Cela signifie qu'à chaque point \mathbf{V}_r de la surface de rayon, il existe un point \mathbf{n} correspondant sur la surface d'indice de réfraction tel que les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{V}_r soient liés par la relation :

$$\boxed{\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n} = V_{rx}n_x + V_{ry}n_y + V_{rz}n_z = V_r n \cos \alpha = c} \quad (5.17)$$

La normale à la surface de rayon en un point \mathbf{V}_r est parallèle au vecteur \mathbf{n} correspondant et la normale à la surface d'indice de réfraction en un point \mathbf{n} est parallèle au vecteur \mathbf{V}_r correspondant.

5.3.3.4 Propriétés des surfaces réciproques

Nous allons maintenant expliciter les propriétés algébriques des surfaces réciproques, afin d'éclairer le paragraphe 4.1 de [Haselgrove 1955].

Les vecteurs réciproques dans [Haselgrove 1955] sont notés $\dot{\mathbf{x}}$ et \mathbf{u} et sont définis ainsi : Soit P un point situé sur un rayon lumineux, de coordonnées (x, y, z) . On définit le

vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ par $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{d\tau}$, avec τ une fonction quelconque de la position le long du rayon. Le vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ est donc parallèle au rayon ($\dot{\mathbf{x}}$ colinéaire au vecteur \mathbf{V}_r défini précédemment).

Le vecteur \mathbf{u} est quant à lui colinéaire au vecteur d'onde \mathbf{k} .

Au point P sur le rayon sont donc associés deux vecteurs, $\dot{\mathbf{x}}$ (dans la direction du rayon) et \mathbf{u} (dans la direction du vecteur d'onde).

Si on considère l'espace défini par $\{P, \dot{x}_x, \dot{x}_y, \dot{x}_z\}$, on peut définir la fonction F telle que :

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{\mathbf{x}} \mapsto m\dot{\mathbf{x}}$$

où $\dot{\mathbf{x}}$ est la norme de $\dot{\mathbf{x}}$ et m est l'indice de réfraction du rayon (cf. §5.3.3.1).

De même si l'on considère l'espace défini par $\{P, u_x, u_y, u_z\}$, on peut définir la fonction G telle que :

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \mapsto \frac{u}{n}$$

où u est la norme de \mathbf{u} et n est l'indice de réfraction de l'onde.

On admettra que **les deux surfaces définies par $F = 1$ et $G = 1$ sont des surfaces réciproques**. Cela signifie que si $\dot{\mathbf{x}}$ est un point de l'espace $\{P, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ appartenant à la surface $F = 1$ et \mathbf{u} est un point de l'espace $\{P, u_x, u_y, u_z\}$ appartenant à la surface $G = 1$, alors on a :

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = \dot{x}u_x + \dot{y}u_y + \dot{z}u_z = 1 \quad (5.18)$$

On rappelle qu'on cherche ici à trouver un lien entre la courbure du rayon et le vecteur d'onde, afin de trouver un système d'équations couplées. On cherche donc un lien entre F , \dot{x}_i , G et u_i .

Pour un point fixe P sur le rayon, l'indice de réfraction de l'onde n et l'indice de réfraction du rayon m , ne dépendent pas de la norme de \mathbf{u} , ni de la norme de $\dot{\mathbf{x}}$ mais seulement de leurs directions (n est fonction de θ , m est fonction de θ et α). Les fonctions F et G sont donc des fonctions homogènes de degré 1 par rapport à $\dot{\mathbf{x}}$ et \mathbf{u} respectivement.

Rappel d'algèbre linéaire :

Soient V et W deux espaces vectoriels, f une fonction de plusieurs variables (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$f : V \rightarrow W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(\mathbf{x})$$

On dit que la fonction f est homogène de degré α si :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V : f(k\mathbf{x}) = k^\alpha f(\mathbf{x})$$

De plus, si f est homogène de degré α et différentiable en tout point \mathbf{x} de V , alors l'identité d'Euler est vérifiée :

$$\alpha f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Les fonction F et G étant des fonctions homogènes de degré 1, d'après l'identité d'Euler :

$$F = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

$$G = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial G}{\partial u_i}$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 1$$

$$\frac{1}{G} \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = 1$$

Par identification à l'équation (5.18), on obtient les relations :

$$u_i = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (5.19)$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u_i} \quad (5.20)$$

De plus, F étant homogène de degré 1 par rapport aux \dot{x}_i alors $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ ne dépend pas de \dot{x}_i .

Donc, d'après l'équation (5.19), u_i est homogène de degré -1 par rapport à \dot{x}_i .

Or G est homogène de degré 1 par rapport à u_i donc G est homogène de degré -1 par rapport à \dot{x}_i . On en déduit alors que :

$$F(\dot{\mathbf{x}})G(\mathbf{u}) = 1 \quad (5.21)$$

Interprétation Considérons maintenant que la variable τ n'est plus une variable quelconque de la position, mais représente le temps. Dans ce cas, la quantité $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ représente la vitesse de déplacement du point P le long du rayon, et correspond donc à la vitesse radiale $V_r = 1/m$, exprimée en unité de c . La surface définie par $F = 1$

représente donc la surface de rayon définie au paragraphe précédent.

Si l'on considère la fonction G dont la surface $G = 1$ est réciproque de la surface $F = 1$, alors, d'après la relation (5.21) $G(\mathbf{u}) = 1$, donc $u = n$. La surface $G = 1$ représente la surface d'indice de réfraction.

Ainsi les vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ et \mathbf{u} définis par Haselgrove dans [Haselgrove 1955] sont définis tels que :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \frac{\mathbf{V}_r}{V_r} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{u} = n \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (5.23)$$

On constate que le vecteur \mathbf{x} correspond bien au vecteur position le long du rayon et que le vecteur \mathbf{u} défini dans cet article correspond au vecteur indice de réfraction \mathbf{n} déjà introduit au chapitre 2.

5.3.3.5 Système hamiltonien

Comme indiqué au paragraphe 5.3.3.2, le but de ce paragraphe est d'exprimer la courbure du rayon et du vecteur d'onde le long du rayon.

En exprimant l'abscisse curviligne à l'aide du vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ par $ds = \dot{x} dt$, on peut réécrire l'expression mathématique du principe de Fermat sous la forme :

$$\delta \int m \dot{x} dt = \delta \int F(\dot{x}_i, x_i, t) dt = 0$$

La fonction F , définie au paragraphe précédent, dépendant explicitement de \dot{x}_i et implicitement de x_i à travers m (l'indice du rayon dépend de la position \mathbf{x}), l'équation d'Euler-Lagrange nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

Pour obtenir une information sur la courbure du vecteur d'onde, nous cherchons donc une équation faisant intervenir la fonction G définie au paragraphe précédent. D'après les propriétés des surfaces réciproques décrites précédemment, on peut réécrire la fonction F et ses dérivées à l'aide de la fonction G :

$$F = \frac{1}{G} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{G} u_i$$

En remplaçant dans l'équation (5.24), on obtient l'équation différentielle en G suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{G} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i}{G} \right) = 0$$

Or, tels que sont définis le vecteur \mathbf{u} et la fonction G , on sait que pour tout vecteur \mathbf{u} , $G = u/n = 1$. Cependant, si les dérivées totales de G sont nulles ($G(\mathbf{u})$ étant une constante),

ces dérivées partielles par rapport aux x_i ne le sont pas. L'équation (5.3.3.5) se réduit donc à :

$$-\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{du_i}{dt} \quad (5.25)$$

Cette équation nous donne l'évolution du vecteur d'onde le long du rayon.

En développant les dérivées de l'équation différentielle en G , on obtient :

$$-\frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{u_i}{G^2} \frac{dG}{dt} - \frac{1}{G} \frac{du_i}{dt} = 0$$

Or $G = 1$, donc $1/G^2 = 1$ et $1/G = 1$. De plus les dérivées totales de G sont nulles, donc $\frac{dG}{dt} = 0$.

Enfin, pour déterminer la courbure du rayon, l'équation (5.20) nous donne :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u_i} \quad (5.26)$$

Le système complet d'équations différentielles permettant de décrire la courbure du rayon et du vecteur d'onde tout au long de la propagation se met donc sous une forme hamiltonienne, où la fonction G joue le rôle de l'hamiltonien :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u_i} \quad (5.27a)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (5.27b)$$

Afin de mettre ce système d'équations sous une forme facilement intégrable numériquement, il faut donc expliciter l'expression des dérivées partielles de la fonction G .

5.3.4 Expression du système hamiltonien dans un magnéto-plasma froid

L'article [Haselgrove 1960] part du système d'équations hamiltonien décrit ci-dessus, et l'explicite dans le cas d'un plasma froid magnétisé en coordonnées cartésiennes.

Les équations hamiltoniennes de Haselgrove (5.27) font intervenir les dérivées partielles de la fonction $G = \frac{u}{n}$, où u est la norme du vecteur \mathbf{u} de direction \mathbf{k} et de norme égale à l'indice de réfraction de l'onde n . Bien que le rapport $\frac{u}{n}$ soit toujours égal à 1, les dérivées partielles de la fonction G ne sont pas nécessairement nulles.

La première étape consiste à expliciter les dérivées partielles de la fonction G en donnant une expression de l'indice de réfraction n .

Dérivées partielles de G D'après le chapitre 2, l'indice de réfraction est solution de l'équation de dispersion donnée par l'équation bicarrée (2.59), équivalente aux équations (7) et (8) de [Haselgrove 1960]⁸.

$$A_{60}n^4 + 2B_{60}n^2 + C_{60} = 0 \quad (5.28)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{60} &= 1 - X - Y^2 + X(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 / u^2 \\ 2B_{60} &= -2(1 - X)(1 - X - Y^2) + XY^2 - X(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 / u^2 \\ C_{60} &= (1 - X)[(1 - X)^2 - Y^2] \end{aligned}$$

où $X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ et $\mathbf{Y} = \frac{e\mathbf{B}_0}{m_e\omega}$, et $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u} = Yu \cos \theta$.

La fonction G étant une fonction homogène de degré -1 de l'indice de réfraction n , on peut obtenir une équation bicarrée en G en multipliant l'équation (5.28) par u^4/n^4 :

$$aG^4 + 2bG^2 + c = 0 \quad (5.29)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= C_{60} = (1 - X)[(1 - X)^2 - Y^2] \\ 2b &= 2B_{60}u^2 = -2(1 - X)(1 - X - Y^2)u^2 + XY^2u^2 - X(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 \\ c &= A_{60}u^4 = (1 - X - Y^2)u^4 + X(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2u^2 \end{aligned}$$

En différentiant l'équation (5.29) par rapport à x_i et u_i , on peut réécrire les dérivées partielles de G :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i} &= -\frac{1}{4(a+b)} \frac{\partial(a+2b+c)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial G}{\partial u_i} &= -\frac{1}{4(a+b)} \frac{\partial(a+2b+c)}{\partial u_i} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\left(\frac{\partial a}{\partial y}G^4 + 2\frac{\partial b}{\partial y}G^2 + \frac{\partial c}{\partial y}\right) \frac{1}{4G(aG^2 + b)}$$

En posant $G=1$, on obtient les équations précédentes.

Le facteur $1/4(a+b)$ étant commun aux deux dérivées, on peut définir une nouvelle variable d'intégration dt^* tel de $dt^* = dt/4(a+b)$. On peut également remplacer la fonction G dans les équations hamiltoniennes par la fonction Q définie par :

$$Q = a + 2b + c \quad (5.30)$$

8. On notera que $A_{60} = A(1 - Y^2)$, $2B_{60} = B(1 - Y^2)$ et $C_{60} = C(1 - Y^2)$

Le système d'équation hamiltonien (5.27) devient alors :

$$\frac{dx_i}{dt_1} = -\frac{\partial Q}{\partial u_i} \quad (5.31a)$$

$$\frac{du_i}{dt_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad (5.31b)$$

On peut remarquer que d'après l'équation (5.29), $Q = 0$, mais ses dérivées partielles ne sont pas nulles.

Dérivées partielles de Q Continuons à expliciter le système (5.31), en calculant les dérivées partielles de Q . L'expression complète de Q est donnée par l'équation (5.30) :

$$Q = (1 - X - Y^2)(u^2 - 1)^2 + X[(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - X) - Y^2](u^2 - 1) + X^2(1 - X) \quad (5.32)$$

En dérivant l'équation (5.32) par rapport à u_i , X et \mathbf{Y} ne dépendant que des paramètres du plasma et de la pulsation de l'onde, on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i} = 2u_i[2(1 - X - Y^2)(u^2 - 1) + X[(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - X) - Y^2]] + 2X(u^2 - 1)(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})Y_i \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2 - 1}{\partial u_i} &= 2u_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial (u^2 - 1)^2}{\partial u_i} = 4(u^2 - 1)u_i \\ \frac{\partial \mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_j Y_j u_j \right) = \sum_j \left(Y_j \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) = Y_i \end{aligned}$$

La fonction Q dépend de x_i à travers X et \mathbf{Y} . La dérivée de l'équation (5.32) par rapport à x_i est donc donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial Q}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \quad (5.34)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial X} &= -(u^2 - 1)^2 + [(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - 2X) - Y^2] (u^2 - 1) + 2X(1 - X) - X^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial Y_j} &= -2 [(u^2 - 1)^2 + X(u^2 - 1)] Y_j + 2X(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})(u^2 - 1)u_j \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial x_i} = 2 \sum_j Y_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i} = \sum_j u_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}$$

On peut constater dans les équations (5.33) et (5.34) que les dérivées partielles de la fonction Q s'annulent lorsque $X = 0$, c'est-à-dire dans un milieu assimilé au vide. En effet, dans ce cas, l'indice de réfraction n vaut 1 et la quantité $u^2 - 1$ s'annule. Sous cette forme, les équations sont donc impossibles à résoudre pour une propagation dans le vide. Pour pallier cela, on introduit la quantité q définie par $q = \frac{u^2 - 1}{X}$ qui est finie et non nulle lorsque X vaut 0. Ainsi, en divisant les équations (5.33) et (5.34) par X , on obtient :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial u_i} = 2u_i [2(1 - X - Y^2)q + X[(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - X) - Y^2]] + 2(u^2 - 1)(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})Y_i \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x_i} + \frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_i} \quad (5.36)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial X} &= [-(u^2 - 1) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - 2X) - Y^2] q + 2 - 3X \\ \frac{1}{X} \frac{\partial Q}{\partial Y_j} &= -2(u^2 - 1)(q + 1)Y_j + 2(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})(u^2 - 1)u_j \end{aligned}$$

Ainsi, en posant une nouvelle variable d'intégration $dt_1 = Xdt$, on peut réécrire les équations hamiltoniennes sous la forme :

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt_2} = J_{60}u_i - K_{60}Y_i} \quad (5.37a)$$

$$\boxed{\frac{du_i}{dt_2} = L_{60} \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_j (K_{60}u_j + M_{60}Y_j) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}} \quad (5.37b)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{60} &= -2[2(1 - X - Y^2)(q + 1) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + Y^2] \\ K_{60} &= 2(u^2 - 1)(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}) \\ L_{60} &= [-(u^2 - 1) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + 2(1 - 2X) - Y^2] q + 2 - 3X \\ M_{60} &= -2(u^2 - 1)(q + 1) \end{aligned}$$

Ces équations correspondent aux équations (17) à (22) de l'article [Haselgrove 1960]

Détermination de q En ayant une description du milieu de propagation (en connaissant les valeurs de X et \mathbf{Y}), le calcul des quantités J_{60} , K_{60} , L_{60} et M_{60} est simple, sauf pour la quantité $q = \frac{u^2 - 1}{X}$. En multipliant l'équation (5.32) par $1/X$, q devient solution de l'équation suivante :

$$\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0 \quad (5.38)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - X - Y^2 \\ 2\beta &= 2(1 - X) - Y^2 + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 \\ \gamma &= 1 - X \end{aligned}$$

On a alors la solution pour q :

$$q = \frac{-\beta \pm (\beta^2 - \alpha\gamma)^{1/2}}{\alpha} \quad (5.39)$$

Le signe + (resp. -) correspondant au mode \oplus (resp. \ominus) de la relation d'Appleton-Hartree (2.61).

Conclusion Cette forme des équations hamiltoniennes présente encore deux problèmes majeurs :

- Les équations (5.37a) et (5.37b) font intervenir à la fois la quantité $u^2 - 1$ et la quantité q , ce qui peut mener à des instabilités numériques.
- Ces équations ne sont pas adaptées au cas où le champ magnétique est nul. En effet dans ce cas $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, et $q = -1$ d'après (5.39), ce qui entraîne $J_{60} = K_{60} = L_{60} = M_{60} = 0$.

Ces deux problèmes sont traités dans l'article [Haselgrove 1963].

5.3.5 Instabilités et changements de variables

Elimination des termes en $(u^2 - 1)$ Les termes J_{60} , K_{60} , L_{60} et M_{60} sont modifiés dans l'article [Haselgrove 1963].

- les termes en $(u^2 - 1)$ sont remplacés par qX
- le terme L_{60} est simplifié en lui retranchant la quantité $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0$
- les signes des termes J_{60} , K_{60} , L_{60} et M_{60} sont changés.

On obtient :

$$\frac{dx_i}{dt_3} = J_{63}u_i - K_{63}Y_i \quad (5.40a)$$

$$\frac{du_i}{dt_3} = L_{63} \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_j (K_{63}u_j + M_{63}Y_j) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \quad (5.40b)$$

avec $dt_3 = -dt_2$ et :

$$\begin{aligned} J_{63} &= -J_{60} &= -2[2(1 - X - Y^2)(q + 1) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u})^2 + Y^2] \\ K_{63} &= -K_{60} &= 2qX(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}) \\ L_{63} &= -(L_{60} \underbrace{-\alpha q^2 - \beta q - \gamma}_{=0}) &= -(1 - Y^2)(q + 1)^2 + 2(1 - X - Y^2)(q + 1) + Y^2 \\ M_{63} &= -M_{60} &= -2qX(q + 1) \end{aligned}$$

Adaptation du système hamiltonien au cas isotrope Ce système d'équations n'est toujours pas adapté au cas sans champ magnétique. En effet, lorsque $B_0 = 0$, alors $Y = 0$ et $q + 1 = 0$ ce qui entraîne $J_{63} = K_{63} = L_{63} = M_{63} = 0$.

Pour intégrer le traitement du cas sans champ magnétique extérieur, on introduit la

quantité p telle que $q + 1 = pY$ et le vecteur \mathbf{v} dans la direction du champ magnétique, on a donc $\mathbf{Y} = Y\mathbf{v}$. En remplaçant q par $pY - 1$ dans l'équation (5.38), p est alors solution de l'équation :

$$\alpha^* p^2 + 2\beta^* p + \gamma^* = 0 \quad (5.41)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 1 - X - Y^2 \\ 2\beta^* &= Y(1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2) \\ \gamma^* &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 \end{aligned}$$

La quantité p se met donc sous la forme :

$$p = \frac{-\beta^* \pm (\beta^{*2} - \alpha^* \gamma^*)^{1/2}}{\alpha^*} \quad (5.42)$$

Le signe + (resp. -) correspondant au mode \oplus (resp. \ominus) de la relation d'Appleton-Hartree (2.61).

De plus, les termes J_{63} , K_{63} , L_{63} et M_{63} sont divisés par la quantité Y . On obtient ainsi l'expression finale des équations d'Haselgrove.

Expression finale des équations d'Haselgrove

$$\frac{dx_i}{dt_4} = J_{63}^* u_i - K_{63}^* Y_i \quad (5.43a)$$

$$\frac{du_i}{dt_4} = L_{63}^* \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_j (K_{63}^* u_j + M_{63}^* Y_j) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \quad (5.43b)$$

Avec \mathbf{x} , le vecteur position le long du rayon, $\mathbf{u} = \mathbf{n} = \frac{n}{k} \mathbf{k}$, $dt_4 = -\frac{XY}{4(a+b)} dt$ et :

$$J_{63}^* = 2[2(1 - X - Y^2)p + Y(1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2)] \quad (5.44a)$$

$$K_{63}^* = -2(pY - 1)X(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \quad (5.44b)$$

$$L_{63}^* = (1 - Y^2)Yp^2 - 2(1 - X - Y^2)p - Y \quad (5.44c)$$

$$M_{63}^* = 2pX(pY - 1) \quad (5.44d)$$

Les équations d'Haselgrove introduites dans [Haselgrove 1955], [Haselgrove 1960] et [Haselgrove 1963] sont des équations différentielles couplées, liant la variation de position \mathbf{x} d'un point de phase constante et la variation du vecteur d'onde \mathbf{u} associé le long d'un rayon.

Ces équations dépendent des quantités X , décrivant la densité d'électron du plasma, Y décrivant l'intensité du champ magnétique et $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$ donnant la direction du vecteur d'onde par rapport au champ magnétique externe.

La construction d'un rayon nécessite donc de connaître :

- un modèle de densité électronique décrivant la variation spatiale de la densité d'électrons,
- un modèle de champ magnétique décrivant son intensité et sa direction,
- la fréquence de l'onde et son mode de propagation (mode \oplus ou \ominus de la relation d'Appleton-Hartree (2.61)),
- une position de départ \mathbf{x}_0 et un vecteur d'onde initial \mathbf{u}_0 .

La résolution pas à pas de ce système d'équations par un algorithme de type Runge-Kutta permet ainsi de construire le rayon à travers le milieu considéré.

5.4 Limite isotrope du tracé de rayon en plasma magnétisé

Nous venons de décrire deux systèmes d'équations de tracé de rayons, en milieu isotrope ([Sharma 1982]) et en milieu anisotrope ([Haselgrove 1963]). Nous allons maintenant montrer que le système d'équations en milieu isotrope est bien une limite lorsque Y tend vers 0 du système d'équation d'Haselgrove (5.43).

Dans le cas d'un plasma non magnétisé, la norme du vecteur \mathbf{Y} est nulle, tandis que son vecteur directeur \mathbf{v} n'est plus défini. En choisissant pour \mathbf{v} un vecteur unitaire quelconque n'ayant pas une direction toujours perpendiculaire à \mathbf{u} , les coefficients de l'équation caractéristique de p deviennent :

$$\begin{aligned}\alpha^* &= 1 - X \\ 2\beta^* &= 0 \\ \gamma^* &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2\end{aligned}$$

La quantité p se met donc sous la forme $p = \pm \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - X}}$.

En considérant que le mode de propagation dans le vide correspond au mode « Ordinaire », donc au mode \oplus de la relation d'Appleton-Hartree (2.61), les coefficients du systèmes d'équations deviennent :

$$\begin{aligned}J_{63}^* &= 4(1 - X)p = +4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\sqrt{1 - X} \\ K_{63}^* &= 2X(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \\ L_{63}^* &= -2(1 - X)p = -2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\sqrt{1 - X} \\ M_{63}^* &= -2X \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - X}}\end{aligned}$$

Le système d'équations se met donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt_4} &= +4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\sqrt{1 - X}u_i \\ \frac{du_i}{dt_4} &= -2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\sqrt{1 - X}\frac{\partial X}{\partial x_i}\end{aligned}$$

L'indice de réfraction d'un plasma isotrope étant donné par $n^2 = 1 - X$, la quantité $\frac{\partial X}{\partial x_i}$

se réécrit : $\frac{\partial X}{\partial x_i} = -\frac{\partial n^2}{\partial x_i}$.

En posant $dt' = \frac{dt_4}{4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\sqrt{1-X}}$, on obtient un système d'équations équivalent au système d'équations en milieu isotrope (5.6) :

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt'} &= u_i \\ \frac{du_i}{dt'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial x_i}\end{aligned}$$

5.5 Conclusion

Les phénomènes de propagation tels que la réfraction et la réflexion peuvent être traités à l'aide de techniques de tracé de rayons, à condition que le milieu soit *lentement variable* (i.e. que les échelles caractéristiques des variations des paramètres décrivant le milieu soient grandes devant la longueur d'onde considérée). On parle d'approximation de l'optique géométrique. Dans ce cadre, la relation de dispersion mise en place au chapitre 2 reste valable dans les milieux inhomogènes. Les rayons représentent les trajectoires de l'énergie électromagnétique des ondes et sont tangents en tout point aux vecteurs vitesse de groupe. Dans les plasmas non magnétisés (isotropes), le vecteur d'onde et le rayon sont toujours colinéaires, ce qui n'est plus nécessairement le cas dans les plasmas magnétisés (anisotropes). La trajectoire des rayons, qui est déterminée par la variation de direction du rayon et du vecteur d'onde au cours de la propagation, peut être estimée par des techniques graphiques ou analytiques.

Dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser une résolution analytique des équations d'Haselgrove, reliant la position le long du rayon et la direction du vecteur d'onde. Ces équations hamiltoniennes sont dérivées du principe de Fermat et explicitées en plasma froid pour éviter les instabilités numériques, aussi bien en plasma anisotrope qu'isotrope. Ces équations différentielles couplées peuvent être résolues à l'aide d'intégrateurs numériques assez simples fondés sur les méthodes de Runge-Kutta ou de prédicteur-correcteur. Ces techniques de résolution nécessitent une description du milieu de propagation (modèle de densité d'électrons, d'intensité et de direction du champ magnétique ambiant) et des caractéristiques de l'onde (fréquence, direction initiale du vecteur d'onde, position de la source et mode de propagation), fournies par l'utilisateur. La forme générale du système d'équations d'Haselgrove, indépendante du milieu de propagation, nous a permis de construire un outil de tracé de rayons pouvant s'adapter à de nombreuses situations astrophysiques : le code ARTEMIS-P, décrit au chapitre suivant.

ARTEMIS-P : CODE DE TRACÉ DE RAYONS DANS LES ENVIRONNEMENTS PLANÉTAIRES

Sommaire

6.1	Structure du code ARTEMIS-P	128
6.1.1	Structure du programme principal	128
6.1.2	Entrées décrites par l'utilisateur	129
6.1.2.1	Initialisation des paramètres du rayon	129
6.1.2.2	Description du milieu de propagation	130
6.1.3	Résolution des équations d'Haselgrove	131
6.1.3.1	Intégrateur	132
6.1.3.2	Pas d'intégration	133
6.1.3.3	Calcul des dérivées	135
6.1.4	Conditions de sortie	136
6.1.5	Paramètres calculés le long du rayon	136
6.2	Module Polarisation	137
6.2.1	Faible couplage de modes	137
6.2.2	Couplage de modes	137
6.2.3	Polarisation quasi-perpendiculaire du mode \oplus	138
6.3	Tests et illustrations du code ARTEMIS-P	139
6.3.1	Lois de Descartes en plasma non magnétisé	139
6.3.1.1	Lois de Descartes pour la réfraction	140
6.3.1.2	Lois de Descartes pour la réflexion	140
6.3.2	Propagation à travers l'ionosphère terrestre	142
6.3.2.1	Ionosphère non magnétisée	145
6.3.2.2	Ionosphère magnétisée	148
6.4	Tests et illustrations du module Polarisation	153
6.4.1	Propagation parallèle	153
6.4.2	Propagation perpendiculaire	155
6.4.3	Propagation oblique	157
6.5	Conclusion	159

Le code **ARTEMIS-P** (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetics in Magnetospheres, Ionospheres and Solar wind - including Polarisation) développé durant cette thèse est un code de tracé de rayon à trois dimensions en plasma froid, fondé sur les équations d'Haselgrove décrites dans le chapitre 5.

La forme générale des équations d'Haselgrove nous a permis de mettre en place un code indépendant de la description du milieu, laissée au libre choix de l'utilisateur. Cela fait d'ARTEMIS-P un outil générique de tracé de rayons applicable à de nombreuses situations de propagation d'ondes électromagnétiques dans les plasmas froids. Ce code calcule également plusieurs paramètres de l'onde tout au long de la propagation, notamment les rapports de polarisations décrits au chapitre 3.

Nous allons ici décrire la structure du code ARTEMIS-P, puis illustrer son fonctionnement par des exemples de propagation en milieu isotrope et anisotrope.

6.1 Structure du code ARTEMIS-P

Le code ARTEMIS-P calcule la trajectoire de l'énergie électromagnétique d'ondes radio à travers un milieu décrit par l'utilisateur. Implémenté en Fortran 90, le code se structure en trois niveaux (figure 6.1) :

Paramètres d'entrée Les paramètres d'entrée (paramètres initiaux des rayons et description du milieu de propagation) sont définis par l'utilisateur dans les fichiers `init_raytracing.txt` et `init_envIRON.txt`.

Résolution des équations Les équations d'Haselgrove sont résolues pas à pas dans le programme principal `raytracing.f90` à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta.

Paramètres de l'onde Des paramètres de l'onde et du milieu de propagation (rapports de polarisation, vitesses de phase et de groupe, fréquences caractéristiques ...) sont calculés le long du rayon par `params_raytracing.f90`.

6.1.1 Structure du programme principal

Les équations d'Haselgrove sont résolues par une méthode itérative permettant de calculer la position d'un point P le long du rayon et le vecteur d'onde associé au pas $k + 1$ en connaissant la position et le vecteur d'onde au pas k , en coordonnées cartésiennes. Le programme est vectorisé, les trajectoires de plusieurs rayons étant calculées en même temps à chaque itération. Indépendamment de l'algorithme d'intégration, le pas d'intégration de chaque rayon est adapté à chaque itération en fonction du gradient d'indice de réfraction¹.

La structure du programme principal est décrite par la figure 6.1.

Initialisation Lors de la phase d'initialisation, les paramètres d'entrée définis par l'utilisateur dans le fichier `init_raytracing.txt` sont lus par le programme principal. Les

1. voir § 6.1.3.2

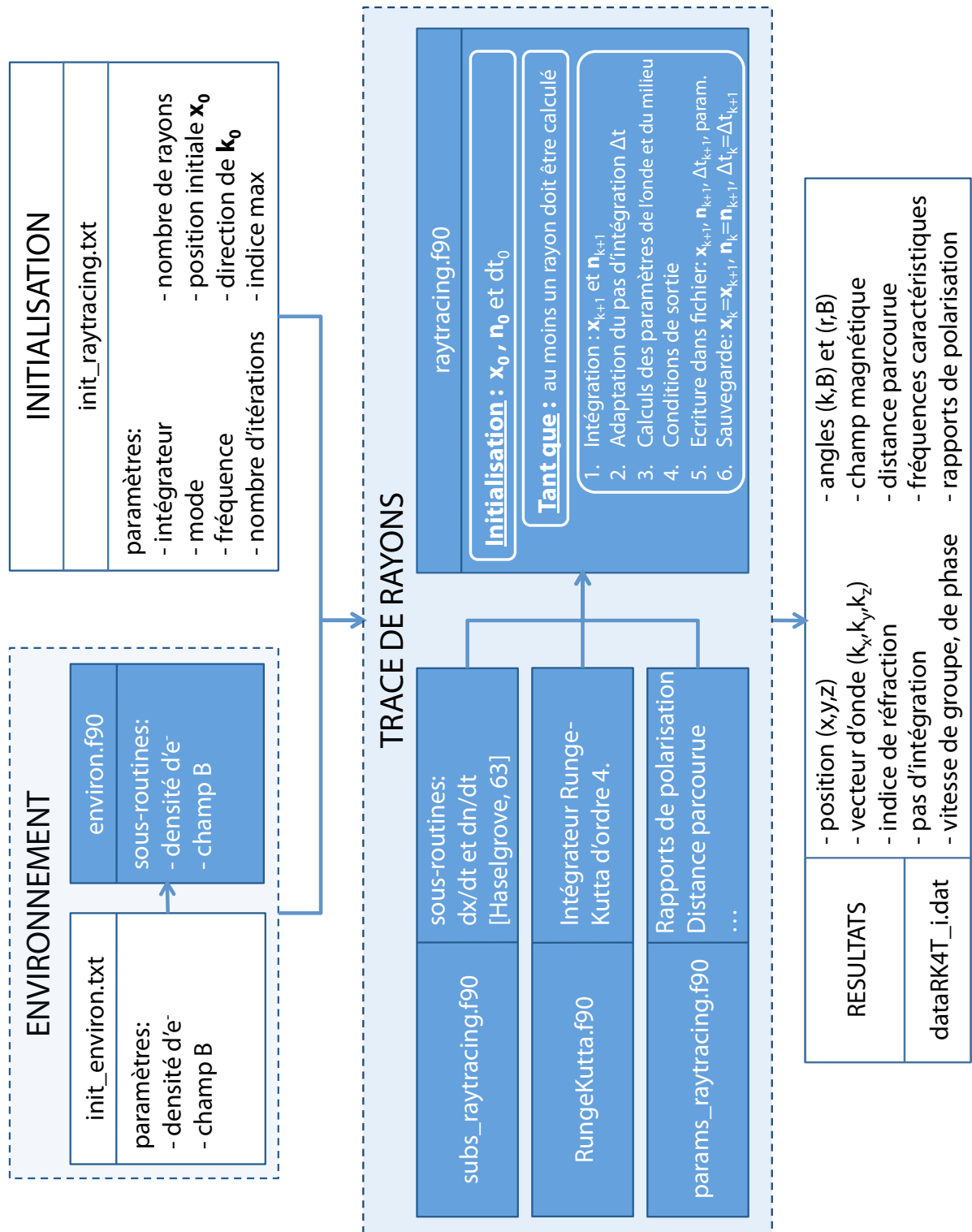


FIGURE 6.1 – Structure du code ARTEMIS-P

conditions initiales (position \mathbf{x}_0 et vecteur indice de réfraction \mathbf{n}_0) et le pas d'intégration initial Δt_0 sont alors fixés.

Calcul de la trajectoire du rayon Le cœur du programme principal est constitué d'une boucle « tant que » la trajectoire d'au moins un rayon doit être calculée, alors les étapes suivantes doivent être réalisées :

1. **Intégration** : Calcul des vecteurs position \mathbf{x}_{k+1} et indice de réfraction \mathbf{n}_{k+1} de chaque rayons à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta (§6.1.3.1).
2. **Adaptation du pas d'intégration** : En fonction de la situation, le pas d'intégration peut être diminué ou augmenté (§6.1.3.2).
3. **Calcul des paramètres de l'onde et du milieu** Les paramètres de l'onde et du milieu de propagation sont calculés à l'aide de la position et du vecteur d'onde au pas $k + 1$ (§6.1.5).
4. **Conditions de sortie** Plusieurs conditions sont testées pour savoir si le calcul du pas suivant doit être effectué ou non (§6.1.4).
5. **Ecriture dans le fichier de sortie** La position, le vecteur indice de réfraction, le pas d'intégration et les paramètres précédents sont écrits dans le fichier de sortie correspondant au rayon.
6. **Sauvegarde des variables** La position, le vecteur indice de réfraction et le pas d'intégration au pas $k + 1$ sont sauvegardés pour les rayons dont l'itération $k + 2$ doit être calculée.

6.1.2 Entrées décrites par l'utilisateur

6.1.2.1 Initialisation des paramètres du rayon

Les paramètres en entrée du code, déterminés par l'utilisateur sont rassemblés dans le fichier `init_raytracing.txt`, lu par le programme principal `raytracing.f90` en début d'exécution. Il contient, dans l'ordre :

- **Le nom du répertoire de sortie** [chaîne de 4 caractères] : les fichiers contenant les données de sortie de chaque rayon seront créés dans ce répertoire. Si le répertoire n'existe pas, le programme le crée, s'il existe déjà l'utilisateur choisit s'il veut écraser les données déjà existantes dans ce répertoire ou s'il veut arrêter l'exécution du programme.
- **Le choix de l'intégrateur** ['RK4T' ou 'RK4F'] : 'RK4T' permet d'utiliser un intégrateur de type Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe, 'RK4F' permet d'utiliser un intégrateur de type Runge-Kutta Fehlberg (voir § 6.1.3.1).
- **La fréquence de l'onde en kHz** [réel] : la fréquence est fixée et identique pour tous les rayons lancés.
- **Le nombre de rayons lancés** [entier] : le code permet de calculer le trajet de plusieurs rayons en parallèle.
- **Le nombre maximum d'itérations** [entier]

- **Le système de coordonnées** ['cart', 'sphr' ou 'cyl'] utilisé pour indiquer la position de la source : le calcul de la trajectoire des rayons se fait en coordonnées cartésiennes, mais il peut être plus pratique d'indiquer la position de la source en coordonnées sphériques ou cylindrique.
- **L'unité de longueur** ['km', 'RS', 'RT', 'RJ', 'RSol'] utilisée pour indiquer la position des sources (km, Rayon de Saturne, Rayon de Jupiter ou Rayon Solaire).
- **Les positions des sources** (\times le nombre de rayons) [réel,réel,réel] : coordonnées du point de démarrage de chaque rayon. Les distances seront données dans l'unité indiquée par le paramètre **unité de longueur**, les angles seront donnés en degré.
- **Les vecteurs d'onde initiaux** (\times le nombre de rayons) [réel, réel, réel] : direction des vecteurs d'onde initiaux des rayons en coordonnées cartésiennes. Ces paramètres permettent de prendre en compte les diagrammes d'émissions des sources radio.
- **Le mode de propagation** (\times le nombre de rayons) ['O' ou 'X'] : mode de propagation de chaque rayon : 'O' correspond à un rayon se propageant en milieu anisotrope sur le mode \oplus de la relation d'Appleton-Hartree (2.61), 'X' correspond à un rayon se propageant en milieu anisotrope sur le mode \ominus de la relation d'Appleton-Hartree (2.61). En l'absence de champ magnétique extérieur (milieu isotrope), le mode de propagation sera désigné par 'O'.
- **La valeur de l'indice de réfraction maximum autorisée** [réel] : proche d'une résonance, l'indice de réfraction diverge. S'il dépasse la valeur indiquée ici, le programme arrête le calcul de la trajectoire du rayon².
- **le pas d'intégration initial** [réel] : la valeur du premier pas d'intégration Δt_0 .
- **le pas d'intégration maximum** [réel] : la valeur maximum du pas d'intégration Δt_{max} .
- **le pas d'intégration minimum** [réel] : la valeur minimum du pas d'intégration Δt_{min} .

6.1.2.2 Description du milieu de propagation

La résolution des équations d'Haselgrove nécessite une description du milieu de propagation : la densité d'électrons et le champ magnétique doivent être connus en tout point. La description du milieu de propagation est laissée à la charge de l'utilisateur. Celui doit fournir en entrée du code un fichier nommé environ.f90 contenant un module nommé environ contenant lui-même aux moins deux sous-routines dénommées :

- `magneticf(x,B)` calculant le champ magnétique \mathbf{B}_0 en un point \mathbf{x} . L'argument d'entrée \mathbf{x} est le vecteur position du point en coordonnées cartésiennes, de dimension (3,Nray). L'argument en sortie \mathbf{B} est le vecteur champ magnétique calculé en ce point, en coordonnées cartésiennes, de dimension (3,Nray). L'intensité du champ magnétique doit être exprimée en Teslas³.

2. voir § 6.1.4

3. Pour rappel : 1 Gauss = 10^{-4} Tesla

- `density(x, Ne)` calculant la densité d'électron Ne en un point \mathbf{x} . L'argument d'entrée \mathbf{x} est le vecteur position du point en coordonnées cartésiennes, de dimension $(3, Nray)$. L'argument en sortie Ne est la densité d'électron calculée en ce point, de dimension $Nray$. La densité d'électron doit être exprimée en cm^{-3} .

6.1.3 Résolution des équations d'Haselgrove

Le système d'équations d'Haselgrove (5.43) est un système d'équations différentielles ordinaires (ne dépendant que d'un seul paramètre) pouvant s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) \quad (6.1)$$

avec

- \mathbf{w} une variable telle que $\mathbf{w}(t) = [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$
- t un paramètre indépendant variant le long du rayon
- \mathbf{F} un vecteur contenant les valeurs des dérivées de \mathbf{x} et \mathbf{u} par rapport à t

Pour calculer la trajectoire des rayons dans un milieu donné, il faut donc résoudre ce système d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, on utilise une méthode de discrétisation du problème qui consiste à calculer la variable \mathbf{w} pas à pas à partir d'un point initial sur une grille de paramètre t , de pas Δt .

D'après le développement de Taylor-Young de la fonction $\mathbf{w}(t)$, n fois dérivable en $(t + \Delta t)$, la valeur de \mathbf{w} en $(t + \Delta t)$ est donnée par :

$$\mathbf{w}(t + \Delta t) = \mathbf{w}(t) + \sum_{k=1}^n \frac{(\Delta t)^k}{k!} \frac{d^k \mathbf{w}}{dt^k} + o((\Delta t)^n)$$

Un approximation de la solution des équations différentielles en $t + \Delta t$ pourra alors se mettre sous la forme :

$$\mathbf{w}(t + \Delta t) \approx \mathbf{w}(t) + \Delta \mathbf{w}$$

où $\Delta \mathbf{w}$ dépend de Δt et des dérivées de \mathbf{w} par rapport au paramètre t . La quantité $\Delta \mathbf{w}$ sera déterminée par une méthode de Runge-Kutta, décrite au paragraphe 6.1.3.1.

6.1.3.1 Intégrateur

Pour résoudre le système d'équations différentielles décrit par Haselgrove, l'utilisateur a le choix entre deux algorithmes de type Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), l'un à pas fixe et l'autre à pas variable. Le deuxième ayant l'avantage d'être plus précis que le premier, mais de converger moins rapidement.

Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe La valeur de la quantité $\Delta \mathbf{w}$ est calculée à l'aide d'une moyenne arithmétique des estimations des dérivées $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ aux pas t , $t + \Delta t$ et $t + \Delta t/2$:

$$\Delta \mathbf{w} = \frac{1}{6} (\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{d}_2 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_1/2) \\ \mathbf{d}_3 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_2/2) \\ \mathbf{d}_4 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_3)\end{aligned}$$

La position et le vecteur indice de réfraction au pas $k + 1$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{1}{6} (\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4) \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \frac{1}{6} (\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4)\end{aligned}$$

Cet algorithme constitue la méthode de Runge-Kutta à pas fixe Δt .

Pour adapter le pas d'une méthode RK4, il est nécessaire d'estimer \mathbf{w}_{k+1} de deux manières différentes et de comparer les résultats. Une méthode classique consiste à estimer $\widetilde{\mathbf{w}}_1(t + \Delta t)$ en utilisant la méthode RK4 à partir de $\mathbf{w}(t)$ avec un pas Δt , puis $\widetilde{\mathbf{w}}_2(t + \Delta t)$ à l'aide de deux calculs successifs⁴ par RK4 de pas $\Delta t/2$. Si la différence des deux valeurs $\widetilde{\mathbf{w}}_1(t + \Delta t)$ et $\widetilde{\mathbf{w}}_2(t + \Delta t)$ est supérieure à la précision demandée, le pas Δt est réduit et \mathbf{w}_{k+1} est à nouveau calculé, sinon le pas est augmenté et le programme passe à l'itération suivante. Cette méthode fait donc appel trois fois à la routine RK4 pour adapter le pas d'intégration. La méthode de Runge-Kutta Fehlberg permet d'adapter le pas d'intégration en s'affranchissant des calculs superflus.

Runge-Kutta Fehlberg La méthode de Runge-Kutta Fehlberg est une méthode hybride entre un Runge-Kutta d'ordre 4 et un Runge-Kutta d'ordre 5 [Mathews 2004].

A chaque étapes les six valeurs suivantes sont calculées :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{d}_2 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_1/4) \\ \mathbf{d}_3 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + 3\mathbf{d}_1/32 + 9\mathbf{d}_2/32) \\ \mathbf{d}_4 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + 1932\mathbf{d}_1/2197 - 7200\mathbf{d}_2/2197 + 7296\mathbf{d}_3/2197) \\ \mathbf{d}_5 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} + 439\mathbf{d}_1/216 - 8\mathbf{d}_2 + 3680\mathbf{d}_3/513 - 845\mathbf{d}_4/4104) \\ \mathbf{d}_6 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{w} - 8\mathbf{d}_1/27 + 2\mathbf{d}_2 - 3544\mathbf{d}_3/2565 + 1859\mathbf{d}_4/4104 - 11\mathbf{d}_5/40)\end{aligned}$$

Une première estimation de \mathbf{w}_{k+1} est obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{4k+1} = \frac{25}{216} \mathbf{d}_1 + \frac{1408}{2565} \mathbf{d}_3 + \frac{2197}{4104} \mathbf{d}_4 - \frac{1}{5} \mathbf{d}_5$$

4. $\widetilde{\mathbf{w}}_2(t + \Delta t)$ est obtenue en faisant une estimation de $\mathbf{w}(t + \Delta t/2)$ à partir de $\mathbf{w}(t)$ avec un pas $\Delta t/2$, puis une estimation de $\mathbf{w}(t + \Delta t)$ à partir de $\mathbf{w}(t + \Delta t/2)$ avec un pas $\Delta t/2$.

Une deuxième estimation de \mathbf{w}_{k+1} est obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{5k+1} = \frac{16}{135}\mathbf{d}_1 + \frac{6656}{12825}\mathbf{d}_3 + \frac{28561}{56430}\mathbf{d}_4 - \frac{9}{50}\mathbf{d}_5 + \frac{2}{55}\mathbf{d}_6$$

Si la différence entre $\widetilde{\mathbf{w}}_{4k+1}$ et $\widetilde{\mathbf{w}}_{5k+1}$ est supérieure à l'erreur ΔE préalablement fixée ($\Delta E \sim 10^{-5}$), la solution est rejetée, le pas d'intégration est réduit et l'itération est recommencée. Pour une erreur ΔE donnée, le pas d'intégration optimum est donné par [Mathews 2004] :

$$\Delta t_{new} = 0.84\Delta t \left(\frac{\Delta E \Delta t}{|\widetilde{\mathbf{w}}_{5k+1} - \widetilde{\mathbf{w}}_{4k+1}|} \right)^{1/4}$$

6.1.3.2 Pas d'intégration

Pas d'intégration et mode de propagation Le paramètre d'intégration t_4 des équations d'Haselgrove n'a pas de signification physique. Il est lié au temps t par la relation :

$$dt_4 = -\frac{XY}{4(a+b)}dt \quad (6.2)$$

où les quantités a et b sont données par⁵ :

$$a = (1-X) [(1-X)^2 - Y^2]$$

$$b = \left[\frac{XY^2}{2} \sin^2 \theta - (1-X)(1-X-Y^2) \right] n^2$$

On remarquera que la quantité $(a+b)$ dépend du mode de propagation choisi par l'utilisateur, à travers l'indice de réfraction n . On peut également montrer⁶ que les signes de $(a+b)$ sont opposés pour les deux modes de propagation. Ce qui entraîne :

$$\text{signe}(dt_4|_{\oplus}) = -\text{signe}(dt_4|_{\ominus})$$

Ainsi, pour une même direction initiale du vecteur d'onde, les signes de $\frac{d\mathbf{x}}{dt_4}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt_4}$ sont opposés pour les deux modes de propagation. Il est donc nécessaire de renverser le sens d'intégration entre les deux modes, afin qu'un même vecteur d'onde initial implique un même sens de propagation pour les modes \oplus et \ominus . Ainsi, la position et le vecteur indice de réfraction au pas $k+1$ seront donnés par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + n_{mode}\Delta\mathbf{x} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + n_{mode}\Delta\mathbf{u} \quad (6.4)$$

tels que

$$n_{mode} = -1 \quad \text{pour le mode 'X' } \ominus$$

$$n_{mode} = +1 \quad \text{pour le mode 'O' } \oplus$$

$\Delta\mathbf{x}$ et $\Delta\mathbf{u}$ sont déterminés par l'algorithme de Runge-Kutta choisi.

5. voir chapitre 5

6. voir annexe G

Adaptation du pas d'intégration Le pas d'intégration initial Δt_0 est fixé par l'utilisateur dans le fichier `init_raytracing.f90`. Il peut ensuite être adapté de trois façons différentes, en restant dans les bornes Δt_{min} et Δt_{max} définies par l'utilisateur :

Runge-Kutta Fehlberg Si l'intégration se fait selon la méthode Runge-Kutta Fehlberg, le pas peut être adapté pour obtenir la précision souhaitée.

Gradient d'indice Le pas d'intégration est adapté au gradient d'indice. En effet, plus le gradient d'indice de réfraction est important, plus les effets de réfraction seront importants. Afin d'augmenter la précision du calcul de la trajectoire des rayons dans les milieux à forts gradients d'indice, le pas d'intégration est calculé à chaque itération comme proportionnel à l'inverse du gradient d'indice.

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_0 \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{n_{k+1} - n_k} \right|$$

Ainsi, si le gradient d'indice est important le pas d'intégration sera réduit et réciproquement. Si le gradient d'indice est nul, le pas d'intégration est mis à sa valeur maximale.

Erreur sur le paramètre p Lors de la détermination du système d'équations différentielles à résoudre⁷, nous avons introduit la quantité p , solution d'une équation du second degré (5.42), et défini tel que $X(pY - 1) = u^2 - 1$. Cette identité est utilisée pour tester la précision du programme. Si l'erreur relative entre $X(pY - 1)$ et $u^2 - 1$ est supérieure à 1%, le pas d'intégration pour l'itération suivante est mis à sa valeur minimale fixée par l'utilisateur.

6.1.3.3 Calcul des dérivées

La résolution du système d'équations (5.43) par une méthode de Runge-Kutta nécessite de connaître la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right]$.

Les valeurs des dérivées de \mathbf{x} et \mathbf{u} par rapport au paramètre t sont calculées à l'aide des équations d'Haselgrove (5.43) et (5.44) dont les sous-programmes sont contenus dans le module `subs_raytracing`.

Calcul de X et Y Les quantités X et Y définies par

$$X = \left(\frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m_e}} \right)^2$$

$$Y = \frac{e\mathbf{B}_0}{2\pi f m_e}$$

sont calculées en tout point à l'aide des sous-programmes `magneticf` et `density` définis par l'utilisateur.

7. voir chapitre 5

Détermination de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

— *Cas anisotrope* : Le vecteur \mathbf{v} est dans la direction de \mathbf{Y}

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (Y_x u_x + Y_y u_y + Y_z u_z) / Y$$

— *Cas isotrope* : Le vecteur \mathbf{v} est choisi arbitrairement⁸ dans la direction de la plus grande composante de \mathbf{k} .

Calcul de p La quantité p est calculée à partir de l'équation du second degré (5.42).

Calcul de J_{60}^* , K_{60}^* , L_{60}^* et M_{60}^* Ces quantités sont calculées à l'aide des valeurs de X , Y , p et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ d'après les équations (5.44).

Calcul de $\frac{\partial X}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}$ Les dérivées de X et Y_j par rapport aux coordonnées x_i sont calculées numériquement par :

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{X(x_{l \neq i}, x_i + h) - X(x_{l \neq i}, x_i - h)}{2h}$$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = \frac{Y_j(x_{l \neq i}, x_i + h) - Y_j(x_{l \neq i}, x_i - h)}{2h}$$

avec $h = 10^{-6}$.

Calcul de $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ Les dérivées de \mathbf{x} et \mathbf{u} par rapport au paramètre t sont alors calculées à l'aide des quantités J_{60}^* , K_{60}^* , L_{60}^* , M_{60}^* , $\frac{\partial X}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}$ d'après les équations (5.43).

6.1.4 Conditions de sortie

Le calcul de la trajectoire des rayons se fait sur un nombre d'itérations maximal défini par l'utilisateur. Cependant, le calcul de la trajectoire d'un rayon peut être stoppé avant que ce nombre d'itérations ne soit atteint, pour les raisons suivantes :

Résonance Si l'indice de réfraction du milieu calculé le long du rayon devient supérieur à l'indice maximum indiqué par l'utilisateur, alors le calcul du rayon est stoppé. En effet, si l'indice de réfraction diverge (résonance), le rayon sera soit absorbé, soit réfléchi. Une telle situation nécessite un traitement ondulatoire complet et ne peut être correctement modélisé par une méthode de tracé de rayons. Le calcul de la trajectoire du rayon est donc stoppé.

NaN L'apparition d'un « Not a Number » dans le calcul des coordonnées de la position stoppe le calcul de la trajectoire du rayon. L'apparition de NaN est la plupart du temps associée à une mauvaise description du milieu de propagation.

8. voir § 5.4

6.1.5 Paramètres calculés le long du rayon

Les paramètres du milieu calculés le long du rayon sont :

- La densité d'électrons N_e en cm^{-3}
- Le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 (direction et intensité) en Tesla.
- La fréquence plasma $f_p = \frac{10^{-3}}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e}}$ en Hz.
- La fréquence cyclotron $f_c = \frac{eB_0}{2\pi m_e}$ en Hz.

Les paramètres de l'onde calculés de long du rayon sont :

- L'indice de réfraction n , solution de l'équation du second degré (5.28).
- L'angle θ entre le vecteur d'onde et le champ magnétique externe.
- L'angle α entre le rayon et le vecteur d'onde.
- La vitesse de phase, $v_\phi = 1/n$ en unité de c .
- La vitesse de groupe⁹, $v_g = \frac{1}{n' \cos \alpha}$, avec $n' = \frac{\partial \omega n}{\partial \omega}$, en unité de c .
- La distance parcourue par le rayon depuis la source.

Tous ces paramètres sont écrits dans des fichiers de sortie, un par rayon, dans le répertoire indiqué par l'utilisateur.

6.2 Module Polarisation

Le module Polarisation du code ARTEMIS-P permet de calculer les rapports de polarisation $\rho = \Im m \left(\frac{E_y}{E_x} \right)$ et $\tau = \Re e \left(\frac{E_z}{E_x} \right)$ des ondes radio le long des rayons (voir chapitre 3). L'état de polarisation est déterminé à la fois par les caractéristiques du plasma et par le régime de couplage entre les modes de propagation.

6.2.1 Faible couplage de modes

En situation de faible couplage de mode, les modes \oplus et \ominus se propagent indépendamment l'un de l'autre à travers le plasma. Dans ce cas, l'état de polarisation est entièrement déterminé par les caractéristiques du plasma local. Les rapports de polarisation ρ et τ sont calculés en chaque point du rayon dans le repère lié au champ magnétique externe à l'aide des équations (3.6) du chapitre 3.

9. voir [Budden 1952] p.140

6.2.2 Couplage de modes

Lorsqu'un transfert d'énergie est possible entre les deux modes de propagation, ceux-ci ne se propagent plus indépendamment. Dans ce cas, les modes de propagation sont dits « couplés » et l'état de polarisation n'est plus entièrement déterminé par les caractéristiques du plasma local. Les phénomènes de couplage de mode apparaissent le plus souvent dans les cas suivants :

- Lorsque les caractéristiques du milieu varient lentement le long du rayon mais que les gradients d'indice de réfraction sont importants (coupures et résonances).
- Lorsque les caractéristiques du milieu varient sur de petites échelles devant la longueur d'onde. Ce cas ne peut pas être traité dans le cadre de la théorie du tracé de rayons.
- Lorsque la densité d'électrons tend à devenir nulle et que les indices de réfraction des modes \oplus et \ominus tendent vers 1. Dans ce cas, le couplage en chaque point est faible mais les ondes produites ont toutes la même vitesse de phase et interfèrent constructivement. Cet effet cumulatif permet à l'amplitude du mode produit par couplage d'atteindre des niveaux non négligeables. La polarisation résultante est alors une polarisation hybride de celles des deux modes de propagation. De plus lorsque les modes couplés se propagent, leur vitesse de phase étant proche, leurs polarisations évoluent de manière à ce que la polarisation résultante corresponde à celle de l'endroit où le phénomène de couplage est devenu significatif : la polarisation est donc figée à partir de ce point. Ce phénomène est appelé la « polarisation limitante » (*limiting polarization*). De nombreuses études ont été menées pour déterminer l'altitude et l'état de polarisation limitante dans l'ionosphère terrestre : [Booker 1936], [Försterling 1942], [Budden 1952], [Hayes 1971].

Dans le premier article, Booker propose un critère simple à interpréter : l'altitude à laquelle la polarisation est figée correspond à celle où la différence d'indice de réfraction entre les modes \oplus et \ominus devient petite devant la variation le long du rayon, sur une longueur d'onde, de ces mêmes indices.

$$|n_{\ominus} - n_{\oplus}| \leq \frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{dn_{\oplus}}{ds} \right| \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{dn_{\ominus}}{ds} \right| \quad (6.5)$$

avec

- n_{\oplus}, n_{\ominus} les indices de réfraction des modes \oplus et \ominus
- λ la longueur d'onde
- s l'abscisse curviligne le long du rayon

Ainsi nous pouvons dire que lorsque le couplage entre les modes de propagation est faible, le couplage « onde-milieu » est fort : l'état de polarisation est déterminé par les caractéristiques locales du plasma. Lorsque le couplage entre les modes est grand, le couplage « onde-milieu » devient faible : l'état de polarisation n'est plus défini par les caractéristiques locales du plasma mais par l'interaction des ondes couplées.

Le Module Polarisation du code ARTEMIS contrôle si le critère de l'équation (6.5) est vérifié lors de la propagation. Lorsque c'est le cas, nous savons que la polarisation ré-

sultante n'est pas celle déterminée par les conditions locales du plasma. Les valeurs des rapports de polarisation fournies par le code doivent alors être utilisées avec précaution.

6.2.3 Polarisation quasi-perpendiculaire du mode \oplus

Le calcul de la polarisation du mode \oplus présente une difficulté en propagation quasi-perpendiculaire ($\theta \rightarrow \pi/2$) car le rapport de polarisation τ diverge (la polarisation du mode O est transverse rectiligne selon \mathbf{B}_0).

Le module Polarisation, dans le cas d'une propagation en mode \oplus et lorsque θ est compris dans l'intervalle $\pi/2 \pm \pi/10$, calcule les rapports de polarisation ρ et τ à l'aide d'un développement limité de l'indice de réfraction au voisinage de $\pi/2$.

$$\begin{aligned} n_{\oplus}^2 &\approx \frac{1-X}{1-X \cos^2 \theta} \\ \rho &\approx \frac{Y(1-X \cos^2 \theta)}{Y^2 \sin^2 \theta + (1-X) \cos^2 \theta} \\ \tau &\approx \frac{\tan \theta}{X-1} \end{aligned}$$

Indice de réfraction : lorsque $\theta \rightarrow \pi/2$ alors

$$Y^4 \sin^4 \theta \gg 4(1-X)^2 Y^2 \cos^2 \theta$$

En faisant un développement limité au voisinage de zéro de la quantité $\sqrt{1 - 4(1-X)^2 Y^2 \cos^2 \theta / Y^4 \sin^4 \theta}$ dans la relation d'Appleton-Hartree, on obtient :

$$n_{\oplus}^2 \approx 1 - \frac{XY^2 \sin^2 \theta}{Y^2 \sin^2 \theta + (1-X)Y^2 \cos^2 \theta} = 1 - \frac{X \sin^2 \theta}{1-X \cos^2 \theta} = \frac{1-X}{1-X \cos^2 \theta}$$

Calcul de ρ : En remplaçant l'expression de n_{\oplus}^2 dans (3.6a), on obtient :

$$\rho \approx \frac{XY(1-X \cos^2 \theta)}{(1-X)(1-Y^2) - (1-X-Y^2)(1-X \cos^2 \theta)} = \frac{Y(1-X \cos^2 \theta)}{Y^2 \sin^2 \theta + (1-X) \cos^2 \theta}$$

Calcul de τ : En remplaçant l'expression de n_{\oplus}^2 dans (3.6b), on obtient :

$$\tau \approx \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta - 1 + X \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{(X-1) \cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{X-1}$$

6.3 Tests et illustrations du code ARTEMIS-P

6.3.1 Lois de Descartes en plasma non magnétisé

Plusieurs tests des résultats d'ARTEMIS-P en milieu isotrope ont été effectués. Nous montrerons simplement ici que les lois de Descartes pour la réfraction et la réflexion entre deux milieux isotropes d'indices constants sont vérifiées.

Le milieu de propagation étant isotrope, l'indice de réfraction ne dépend que de la densité d'électrons et de la fréquence de l'onde.

Modèle de densité d'électrons Le milieu de propagation est constitué de deux domaines semi-infinis de densités d'électrons constantes N_{e1} et N_{e2} , reliés par une zone de transition dont le profil est en tangente hyperbolique :

$$N_e(x) = N_{e1} + \frac{N_{e2} - N_{e1}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{x - x_0}{a} \right) \right]$$

$$N_{e1} = 100 \text{ cm}^{-3} \quad N_{e2} = 5 \text{ cm}^{-3}$$

$$x_0 = 10 L \quad a = 0.01 L$$

où L représente une unité de longueur telle que les échelles de variations de N_e soit grandes devant la longueur d'onde.

6.3.1.1 Lois de Descartes pour la réfraction

Les paramètres d'initialisation des rayons pour le test des lois de Descartes pour la réfraction sont donnés dans la table 6.1.

Nombre de rayons	Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence de l'onde	Mode de propagation
$N = 18$	$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [\cos i_1, \sin i_1, 0]$ $i_1 \in [0^\circ, 85^\circ]$ par pas de 5°	100 kHz	O

TABLE 6.1 – Paramètres d'initialisation des rayons pour les lois de Descartes en réfraction

Les rayons passent ici d'un milieu d'indice $n_1 = 1 - X = 0,431$ à un milieu d'indice $n_2 = 0,979$. Ces deux milieux sont reliés par une zone de transition verticale où l'indice de réfraction varie en tangente hyperbolique de la coordonnée x .

Dans les milieux d'indices n_1 et n_2 , les rayons se propagent en ligne droite car le milieu est homogène, tandis qu'ils sont réfractés dans la zone de transition. Les rayons tracés par ARTEMIS-P sont représentés figure 6.3(a). En milieu isotrope, les rayons doivent suivre la loi de Descartes pour la réfraction : les angle d'incidence i_1 et i_2 , dans les milieux d'indice respectif n_1 et n_2 , et définis comme l'angle entre les rayons et la normale à la zone de transition, doivent être liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{6.6}$$

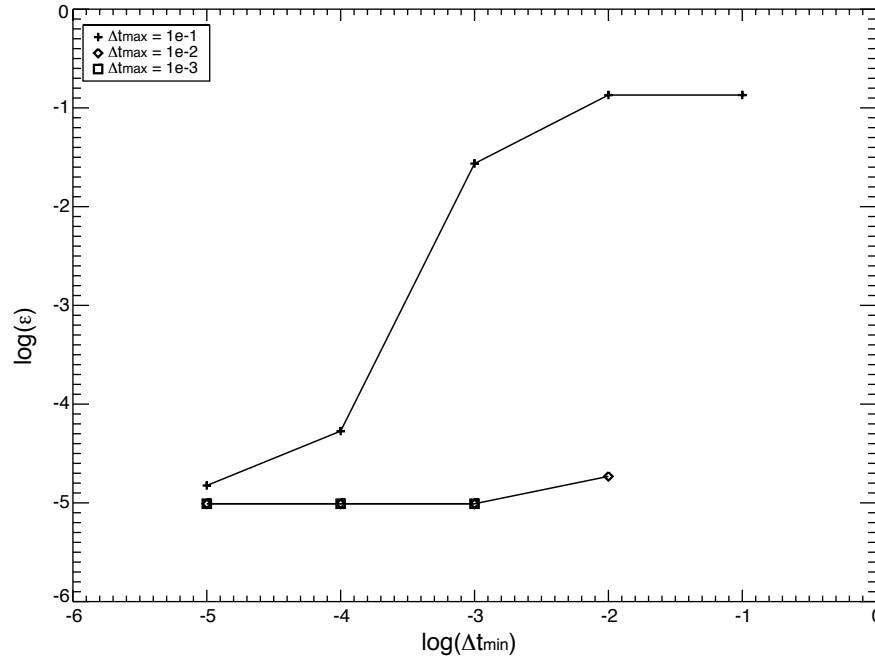


FIGURE 6.2 – Variation de l'erreur relative des lois de Descartes pour la réfraction en fonction du pas d'intégration minimum.

La figure 6.3(b) représente les valeurs de $n_2 \sin i_2$ en fonction de $n_1 \sin i_1$ pour les $N = 18$ rayons tracés sur la figure 6.3(a). L'erreur relative sur la pente est estimée par la formule suivante¹⁰ :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{n_2 \sin i_2}{n_1 \sin i_1} - 1 \right)^2} \quad (6.7)$$

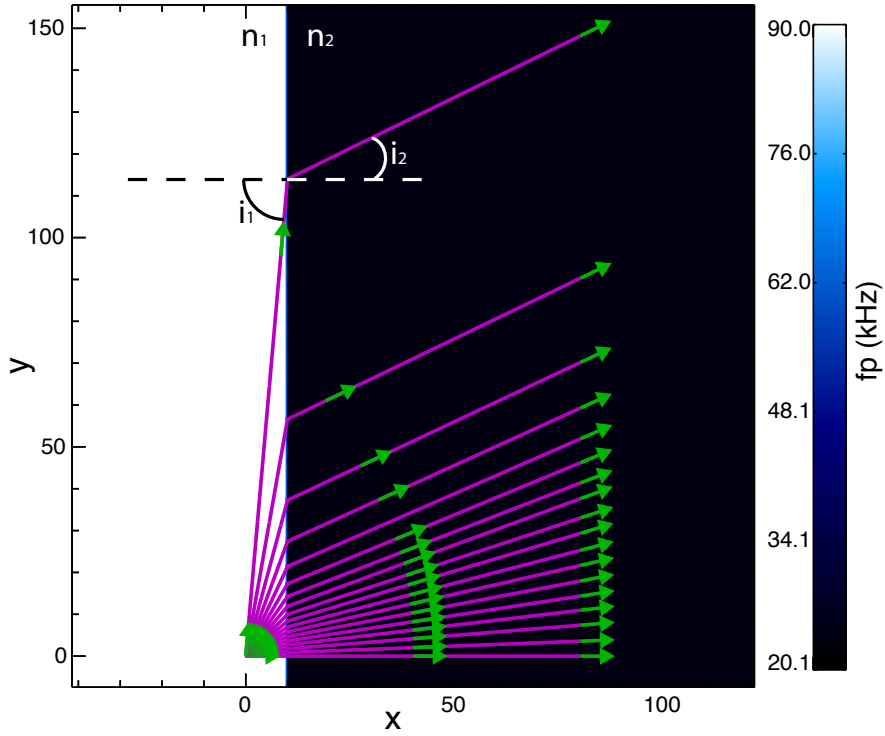
La valeur de l'erreur dépend du choix des pas d'intégration minimum et maximum. La figure 6.2 représente la variation de l'erreur ε par rapport au pas minimum, pour des valeurs de pas maximum de 10^{-1} , 10^{-2} et 10^{-3} . L'erreur est de l'ordre de 10^{-5} pour les pas maximum 10^{-2} et 10^{-3} quelque soit la valeur du pas minimum. En autorisant un pas maximum plus grand (10^{-1}), l'erreur augmente rapidement avec le pas minimum. Le choix ($\Delta t_{max} = 10^{-1}$, $\Delta t_{min} = 10^{-5}$) représente un bon compromis entre la rapidité d'exécution (lié à un pas maximum grand) et la précision.

6.3.1.2 Lois de Descartes pour la réflexion

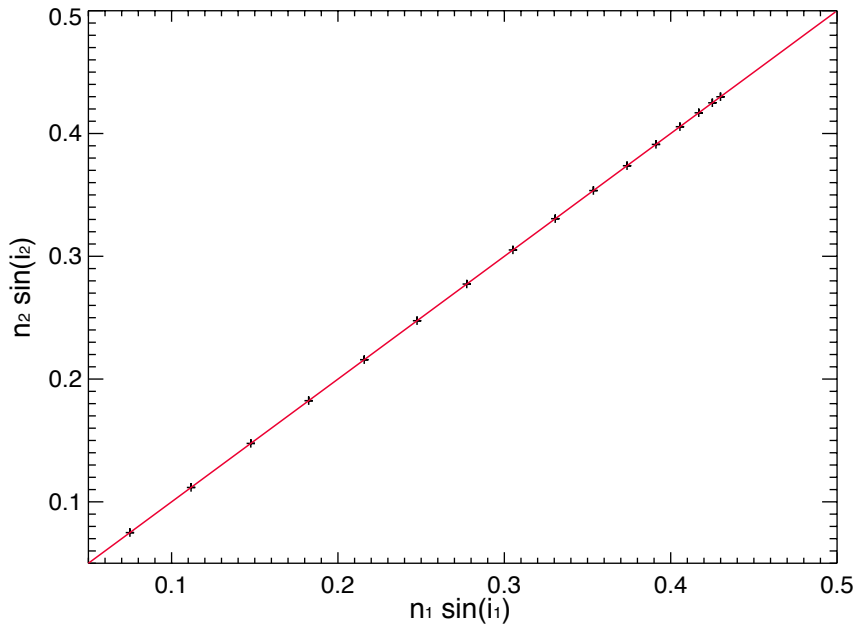
Les paramètres d'initialisation des rayons pour le test des lois de Descartes pour la réflexion sont donnés dans la table 6.2.

La source est maintenant située dans le milieu d'indice n_2 . Les rayons vont donc se propager à travers la zone de transition vers un milieu moins réfringent. Les rayons

10. Cette formule correspond à celle de l'écart-type pour un échantillon (ensemble fini et discret d'angles d'incidence)

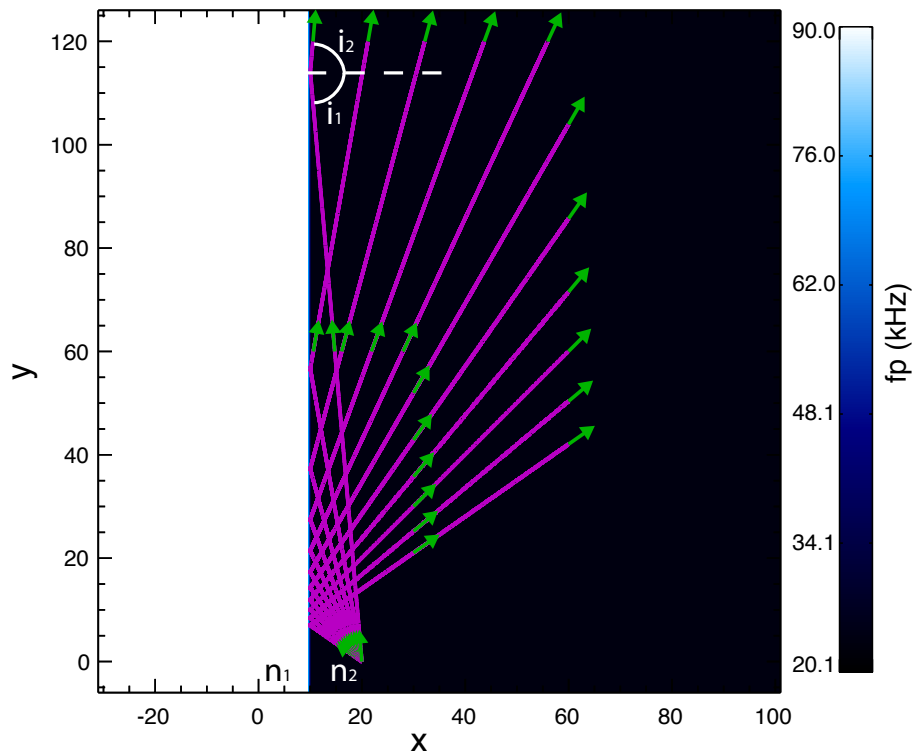
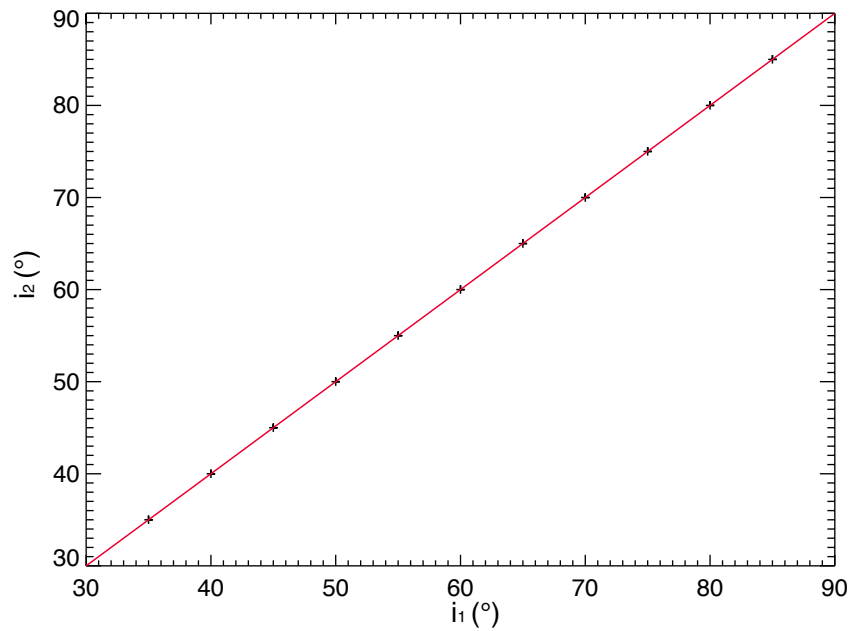


(a) Tracé de rayons. Les flèches verts correspondent au vecteur d'onde k .



(b) Test de la loi de Descartes pour la réfraction

FIGURE 6.3 – Réfraction de rayons entre deux milieux isotropes et vérification de la loi de Descartes associée.

(a) Tracé de rayons. Les flèches verts correspondent au vecteur d'onde \mathbf{k} .

(b) Test de la loi de Descartes pour la réflexion

FIGURE 6.4 – Réflexion totale interne de rayons entre deux milieux isotropes et vérification de la loi de Descartes associée.

Nombre de rayons	Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence de l'onde	Mode de propagation
$N = 11$	$\mathbf{x}_0 = [20L, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [-\cos i_1, \sin i_1, 0]$ $i_1 \in [35^\circ, 85^\circ]$ par pas de 5°	100 kHz	O

TABLE 6.2 – Paramètres d'initialisation des rayons pour les lois de Descartes en réflexion

ayant un angle d'incidence supérieur à l'angle limite $i_{lim} = \arcsin(n_1/n_2) \approx 26,45^\circ$ seront totalement réfléchis. Les rayons tracés par ARTEMIS-P sont représentés figure 6.4(a) En milieu isotrope, les rayons doivent suivre la loi de Descartes pour la réflexion : l'angle d'incidence et l'angle réfléchi, définis entre les rayons et la normale au point d'incidence, doivent être égaux. La figure 6.4(b) représente les valeurs de l'angle réfléchi en fonction de l'angle incident pour les onze rayons tracés à la figure 6.4(a). De la même manière, l'erreur relative sur la pente est estimée à l'aide de formule :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i_2}{i_1} - 1 \right)^2} \quad (6.8)$$

Lorsque le pas d'intégration minimum vaut $\Delta t_{min} = 10^{-5}$ ($\Delta t_{max} = 10^{-2}$), l'erreur relative sur la pente vaut $\varepsilon = 3.37 \cdot 10^{-7}$. Les angles incidents et réfléchis sont donc bien égaux.

Les trajectoires des rayons calculées par le code ARTEMIS-P respectent bien les lois de Descartes pour la réfraction et la réflexion dans les plasmas isotropes. Nous présentons maintenant une application classique d'utilisation du code ARTEMIS-P : le calcul des trajectoires d'ondes radio se propageant sous l'ionosphère terrestre, dans un premier temps, sans prendre en compte l'influence du champ magnétique terrestre, puis dans un deuxième temps, en supposant un champ magnétique terrestre dipolaire.

6.3.2 Propagation à travers l'ionosphère terrestre

La propagation des ondes radio à travers l'ionosphère terrestre est étudiée depuis le début du 20^e siècle. C'est en effet grâce à la première liaison radio radio transatlantique établie par Guglielmo Marconi en 1901 que les physiciens Heaviside et Kennelly envisagent pour la première fois l'existence à très haute altitude d'une couche réfléchissante pour les ondes radio. L'existence de l'ionosphère sera par la suite démontrée en 1925 par les travaux d'Edward Appleton. L'ionosphère terrestre est située au-dessus de 70 km d'altitude et la densité d'électrons maximale $N_e = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ se situe vers 300 km d'altitude (figure 6.5). Depuis les années 1930, les études sur la propagation des ondes radio se sont multipliées et ont été à l'origine de l'élaboration des méthodes de tracé de rayons dans les plasmas magnétisés. La connaissance et la compréhension des phénomènes affectant la propagation des ondes radio à travers l'ionosphère terrestre en font un bon sujet de test pour tout nouveau code de tracé de rayons. Pour illustrer

les performances d'ARTEMIS-P, nous nous sommes donc intéressés à la propagation d'ondes de fréquence de l'ordre du MHz à travers un modèle d'ionosphère magnétisée ou non.

L'ionosphère joue le rôle de filtre passe-haut pour les ondes radio : les ondes ayant une fréquence inférieure à la fréquence plasma du pic de densité électronique ($f_p \approx 9\sqrt{N_e} = 9$ MHz) seront réfléchies par les couches ionosphériques. Cette propriété explique le fait que l'on ne puisse pas observer au sol les ondes radio provenant du ciel si leur fréquence est inférieure à la fréquence plasma ionosphérique. Mais lorsque la source des émissions radio est située sous l'ionosphère, les réflexions des ondes sur les couches ionosphériques permettent d'atteindre des points éloignés, hors de portée d'une propagation directe, et peuvent ainsi être mises à profit pour les communications sur longues distances.

De nombreuses publications font état des trajectoires des rayons à travers l'ionosphère terrestre et peuvent servir de références pour tester, dans un premier temps, les résultats fournis par ARTEMIS-P. Pour cela, nous avons choisi de reproduire les tracés de rayons obtenus par [Tsai 2010].

Modèle de densité d'électrons L'*International Reference Ionosphere* (IRI) est une modélisation empirique de l'ionosphère terrestre réalisée conjointement par l'*Union des Radio-Sciences International* (URSI) et le *Committee on Space Research* (COSPAR). Pour une position et une date données, l'IRI fournit via une page internet¹¹ la densité d'électrons, la température électronique, la température ionique et la composition ionique de l'atmosphère pour une altitude comprise entre 50 km et 2000 km.

Le modèle de densité électronique de l'ionosphère utilisé ici dans ARTEMIS-P est une table, fournie par IRI, en fonction de l'altitude (50 - 600 km) et de la latitude (20°-25°), à la date du 15/08/2008 à 4hTU, pour une longitude de 121° (conditions spatiotemporelles utilisées dans l'article [Tsai 2010]). La variation de densité d'électrons en longitude est ici négligée. La densité d'électrons maximale dans la table est de $7,14 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-3}$, ce qui correspond à une fréquence plasma maximum de 7,6 MHz.

6.3.2.1 Ionosphère non magnétisée

Dans cette première étude, le champ magnétique terrestre est négligé. L'ionosphère est donc supposée isotrope.

Modélisation de la source

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.3.

Réflexions sous l'ionosphère

Les rayons se propageant sous l'ionosphère, calculés par ARTEMIS-P, sont représen-

11. http://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri_vitmo.php

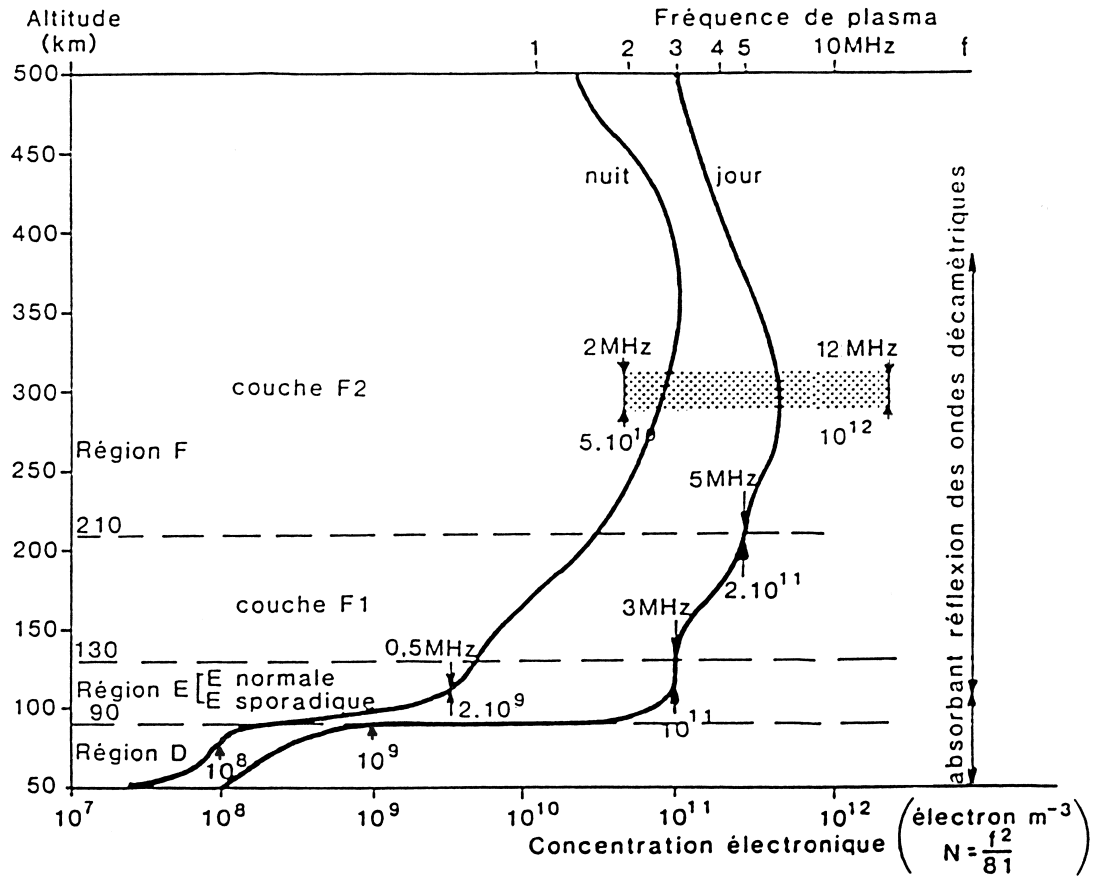


FIGURE 6.5 – Profil en densité d'électrons de l'ionosphère terrestre. La densité d'électrons en m^{-3} et la fréquence plasma correspondante ($f_p[\text{MHz}] = 9.10^{-6} \sqrt{N_e[m^{-3}]}$) sont représentées en fonction de l'altitude côté jour et côté nuit. La structure en couches (D, E et F) de l'ionosphère est bien visible, les limites de chaque couche étant indiquées par des tirets. La densité d'électrons maximum dans chaque couche, ainsi que la fréquence plasma correspondante, sont indiquées par les flèches. Les ondes décamétriques sont atténuées dans la couche D ($z < 100 \text{ km}$) et peuvent être réfléchies dans la couche F. D'après [ENST-Bretagne 2013].

Nombre de rayons	Position de la source [alt. (km), long. (°), lat. (°)]	Direction vecteur d'onde en coordonnées sphériques	Fréquence de l'onde
$N = 8$	$\mathbf{x}_0 = [0, 121^\circ, 24.5^\circ]$	$\mathbf{k}_0 = [\cos \theta_0, 10^{-3}, \sin \theta_0]$ $\theta_0 \in [0^\circ, 35^\circ]$ par pas de 5°	6.5 MHz

TABLE 6.3 – Paramètres d'initialisation des rayons pour la propagation sous l'ionosphère terrestre non magnétisée

tés sur la figure 6.7. Les flèches vertes représentent les vecteurs d'onde, et la fréquence plasma du milieu est indiquée selon le code couleur à droite. Le contour de fréquence plasma égale à la fréquence de l'onde (6,5 MHz) est représenté en noir.

La fréquence de l'onde étant inférieure à la fréquence plasma maximum, tous les rayons sont réfléchis sous l'ionosphère. Pour les altitudes inférieures à 70 km, la densité d'électrons est nulle et les rayons se propagent en ligne droite. Lorsque les rayons pénètrent dans l'ionosphère, ils sont peu à peu réfractés jusqu'à atteindre une altitude pour laquelle le vecteur d'onde est horizontal (altitude de réflexion z_r), puis repartent vers le sol. La réflexion des ondes radio sous l'ionosphère s'apparente aux phénomènes de mirage optique dans les atmosphères à gradient d'indice. L'altitude de réflexion des ondes radio correspond à l'altitude pour laquelle la fréquence plasma locale est égale à la fréquence verticale équivalente de l'onde :

$$f_p(z_r) = f \cos \theta_0 \quad (6.9)$$

où

- f la fréquence de l'onde (ici 6,5 MHz)
- θ_0 l'angle d'incidence du rayon sur l'ionosphère

La fréquence plasma à l'altitude de réflexion est tracée en fonction de la fréquence verticale équivalente à la figure 6.6. Une droite de pente unité est tracée en tirets noirs. Une régression linéaire des données montre que les fréquences sont reliées par une loi de type

$$f_p(z_r) = a \times f \cos \theta_0 + b$$

avec $a = 0,9932$ et $b = 0,020$ MHz.

Les trajectoires des rayons calculées par ARTEMIS-P sont conformes à celles attendues pour la propagation des ondes radio de fréquence inférieure à la fréquence plasma maximale de l'ionosphère ($f_p \approx 9$ MHz).

D'après les lois de Descartes, la quantité $n(z) \sin \theta(z)$ est conservée le long des rayons, où $n(z)$ est l'indice de réfraction à l'altitude z et $\theta(z)$ est l'angle entre le rayon et le verticale.

Sous l'ionosphère : $n(0) = 1$ et $\theta(0) = \theta_0$

A l'altitude de réflexion : $n(z_r) = \sqrt{1 - f_p(z_r)^2 / f^2}$ et $\theta(z_r) = 90^\circ$

Les lois de Descartes impliquent donc $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \frac{f_p(z_r)^2}{f^2}}$

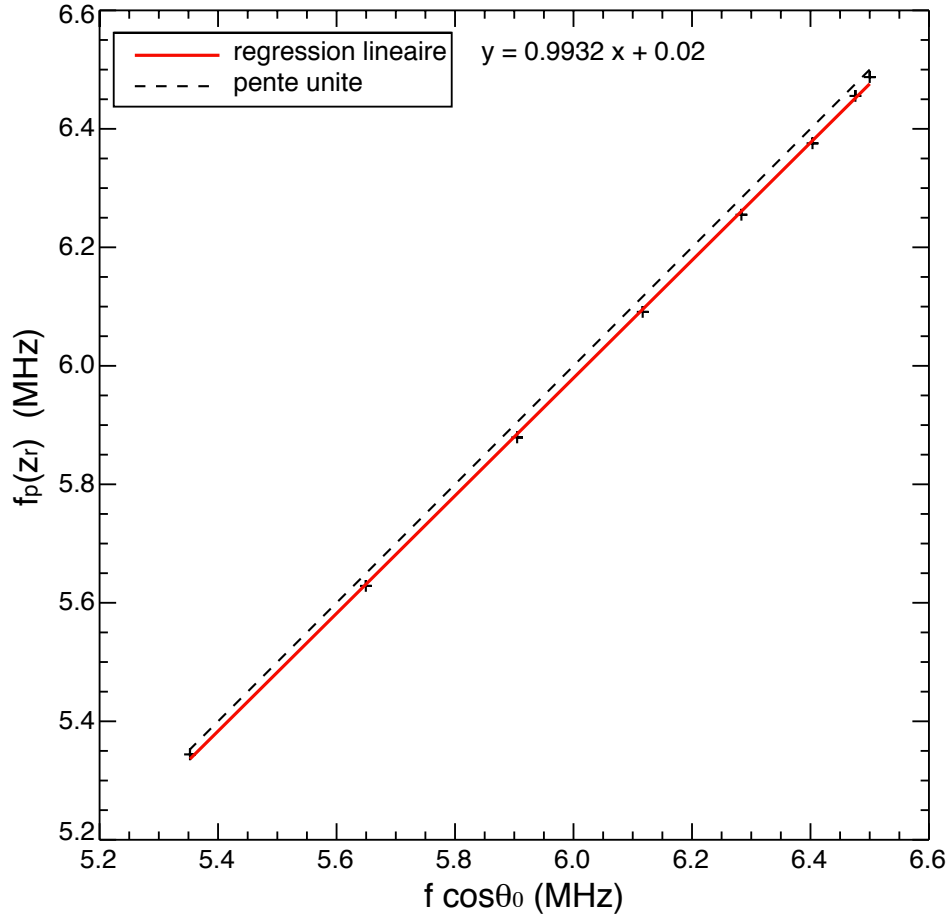


FIGURE 6.6 – Fréquence plasma à l'altitude de réflexion en fonction de la fréquence verticale équivalente de chaque rayon.

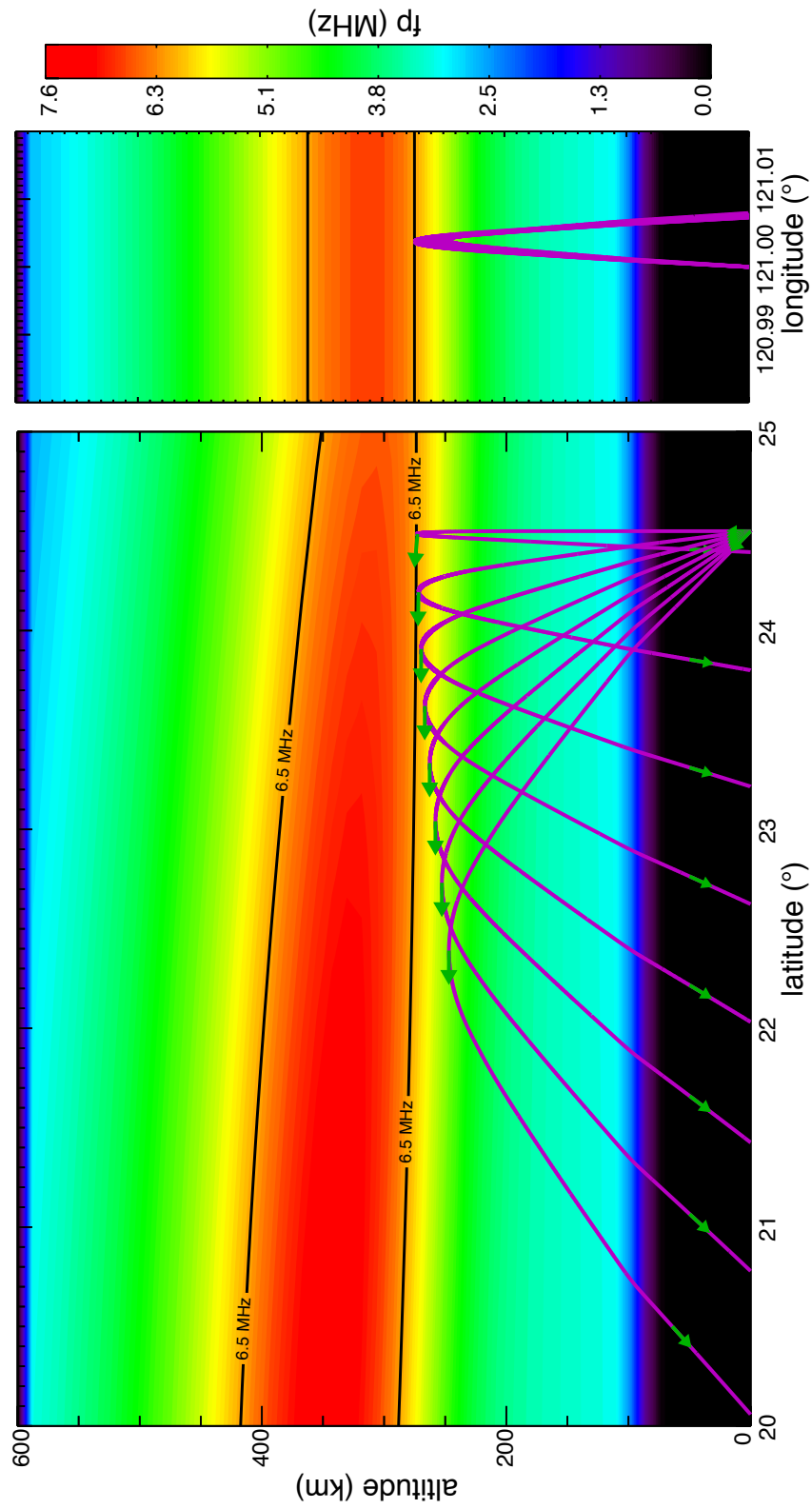


FIGURE 6.7 – Réflexions sous l'ionosphère non magnétisée de rayons à 6.5 MHz. Les directions des vecteurs d'ondes sont représentées par les flèches vertes.

6.3.2.2 Ionosphère magnétisée

Modèle de champ magnétique Le champ magnétique terrestre est supposé dipolaire avec une intensité à l'équateur égale à 0,311 G.

Modélisation de la source

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.4.

Nombre de rayons	Position de la source [alt. (km), long. (°), lat. (°)]	Direction vecteur d'onde en coordonnées sphériques	Fréquence de l'onde
$N = 8$	$\mathbf{x}_0 = [0, 121^\circ, 24, 5^\circ]$	$\mathbf{k}_0 = [\cos \theta_0, 10^{-3}, \sin \theta_0]$ $\theta_0 \in [0^\circ, 35^\circ]$ par pas de 5°	6,5 MHz

TABLE 6.4 – Paramètres d'initialisation des rayons pour la propagation sous l'ionosphère terrestre magnétisée

Réflexion sous l'ionosphère du mode \oplus

La figure 6.9 représente les trajectoires des rayons à 6,5 MHz à travers l'ionosphère magnétisée pour le mode \oplus . Celles-ci diffèrent des trajectoires à travers une ionosphère non magnétisée. Les rayons lancés avec un angle par rapport à la verticale supérieur à 20° sont réfléchis à une altitude où le rayon devient horizontal, mais pas nécessairement son vecteur d'onde (flèches vertes). Les rayons lancés avec un angle par rapport à la verticale inférieur à 20° sont tous réfléchis en changeant brusquement de direction à une altitude correspondant à $f_p(z_r) = f$ et où le rayon incident est perpendiculaire au champ magnétique local. Ces rayons initialement lancés vers le sud ont peu à peu tourné leur concavité vers le nord (direction du pôle magnétique le plus proche, voir figure 6.12) avant d'atteindre l'altitude de réflexion et de repartir vers le sud.

Poeverlein a mis en évidence pour la première fois en 1950 [Poeverlein 1950] le comportement des rayons Ordinaires à travers l'ionosphère terrestre grâce à sa méthode graphique de construction des rayons. Il a nommé ce phénomène de rebroussement le phénomène de « Spitze ».

Origine du phénomène de Spitze

L'intersection des surfaces d'indice de réfraction du mode \oplus avec un plan méridien du champ magnétique terrestre est représenté à la figure 6.8 dans le cas où $Y^2 = 0.25$. Ces surfaces sont de révolution autour de la direction du champ magnétique terrestre (ligne pointillée). Le segment PQ représente la surface d'indice de réfraction du mode \oplus lorsque $X = 1$. Dans ce cas, l'indice de réfraction est nul en tout point sauf dans la direction du champ magnétique.

La ligne AB , située à une distance $S = \sin \theta_0$ de l'axe n_z correspond à la ligne de référence d'un rayon incident sur l'ionosphère avec un angle θ_0 par rapport à la verticale. La direction du rayon est donnée par la normale à la surface d'indice de réfraction aux points d'intersection avec la ligne de référence AB . La densité d'électron augmentant

avec l'altitude, le rayon initialement montant intersecte des surfaces d'indice de réfraction de plus en plus petites autour du point O . Lorsque la ligne AB devient tangente à une surface d'indice de réfraction (point F) le rayon est horizontal et a atteint son altitude de réflexion. Le rayon est ensuite dévié vers le sol. Tous les rayons ayant une ligne caractéristique n'intersectant pas le segment PQ suivront ce comportement similaire à celui des rayons se propageant sous une ionosphère isotrope.

Si l'on considère un rayon pénétrant dans l'ionosphère en faisant un angle plus faible avec la verticale (ligne caractéristique $A'B'$), de telle manière à ce que la ligne caractéristique intersecte le segment PQ , alors son comportement sera différent. Tout d'abord, le rayon initialement montant verra sa direction nord-sud changer lorsque $A'B'$ sera confondu avec la normale à une surface d'indice de réfraction (où le rayon sera alors vertical), puis à l'altitude où $X = 1$, lorsque $A'B'$ intersecte le segment PQ , la direction du rayon, alors perpendiculaire à la direction du champ magnétique, change brutalement et se dirige vers le sol (altitude de réflexion).

Remarque :

En pratique, les rayons sont lancés dans un plan faisant un petit angle avec le plan méridien du champ magnétique terrestre, car les méthodes de tracés de rayons ne peuvent traiter le phénomène de discontinuité à l'intersection de la ligne $A'B'$ et de la surface d'indice de réfraction PQ dans ce plan. Pour plus de détails voir [Budden 1985] §10.9.

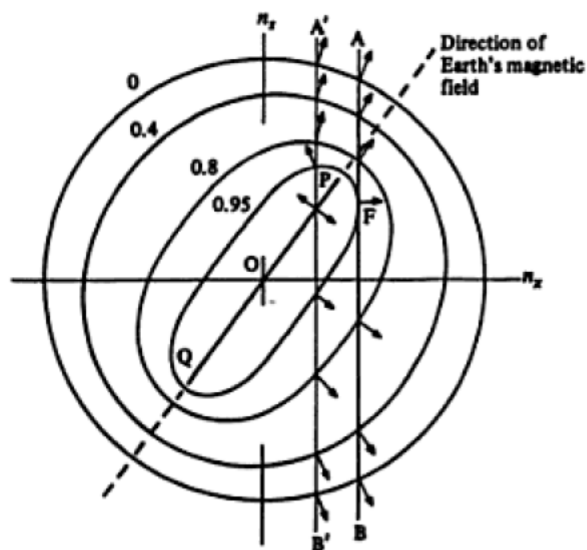


FIGURE 6.8 – Intersection des surfaces d'indice de réfraction du mode \oplus avec le plan méridien du champ magnétique terrestre pour $Y^2 = 0,25$ pour différentes valeurs de X (indiquées au dessus des courbes). La ligne PQ est la surface d'indice de réfraction du mode \oplus lorsque $X = 1$. Les lignes AB et $A'B'$ correspondent à deux rayons ayant deux angles d'incidences différents sur l'ionosphère. Le point F correspond à l'altitude de réflexion du rayon AB . La construction de Poverlein des rayons se propageant sous l'ionosphère est fondée sur ces tracés et met en évidence le phénomène de Spitze. D'après [Budden 1985].

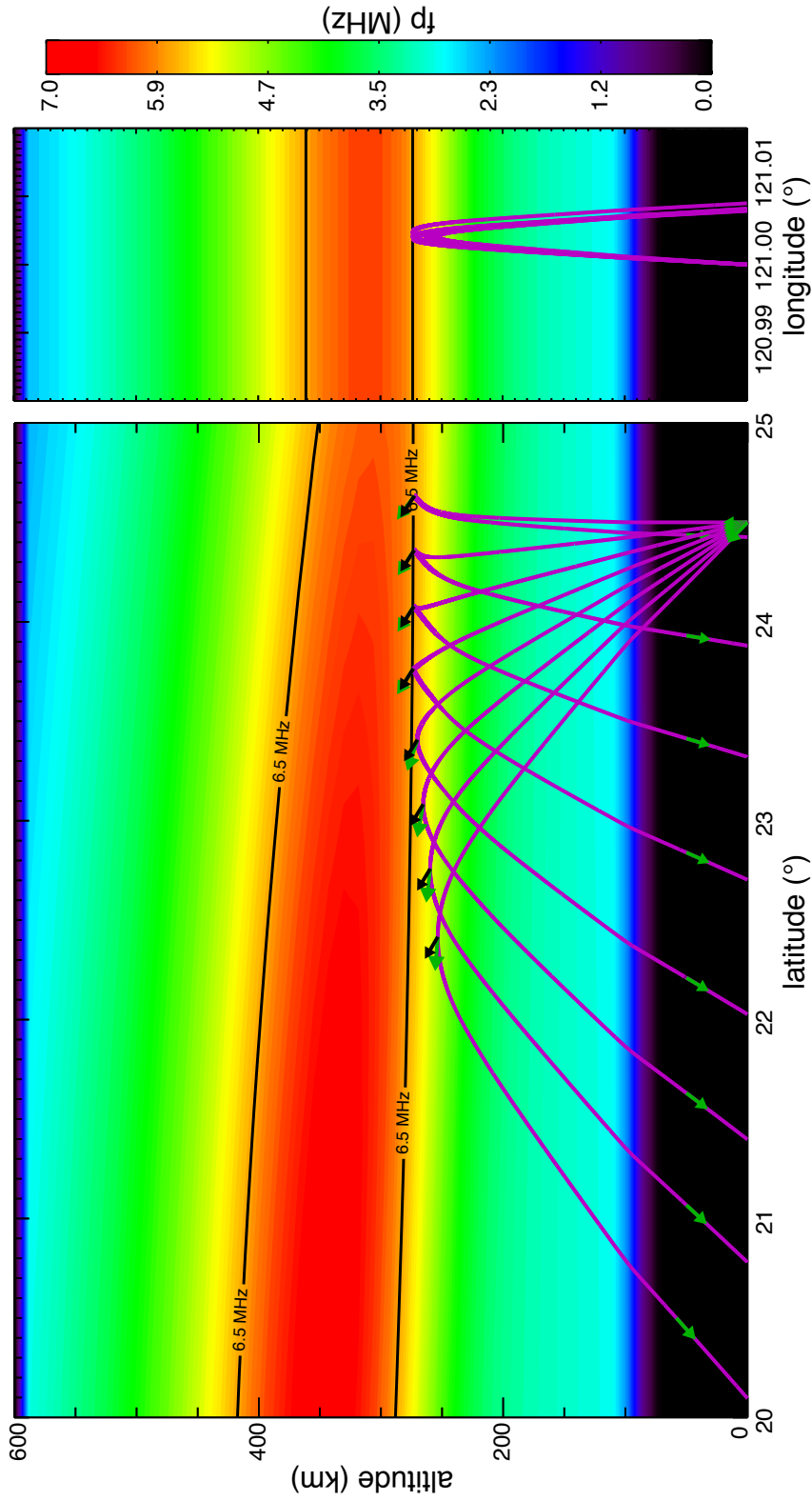


FIGURE 6.9 – Réflexions sous l'ionosphère magnétisée des rayons à 6.5 MHz en mode \oplus . Les directions des vecteurs d'ondes sont représentés par les flèches vertes, la direction du champ magnétique à l'altitude de réflexion est représentée par les flèches noires.

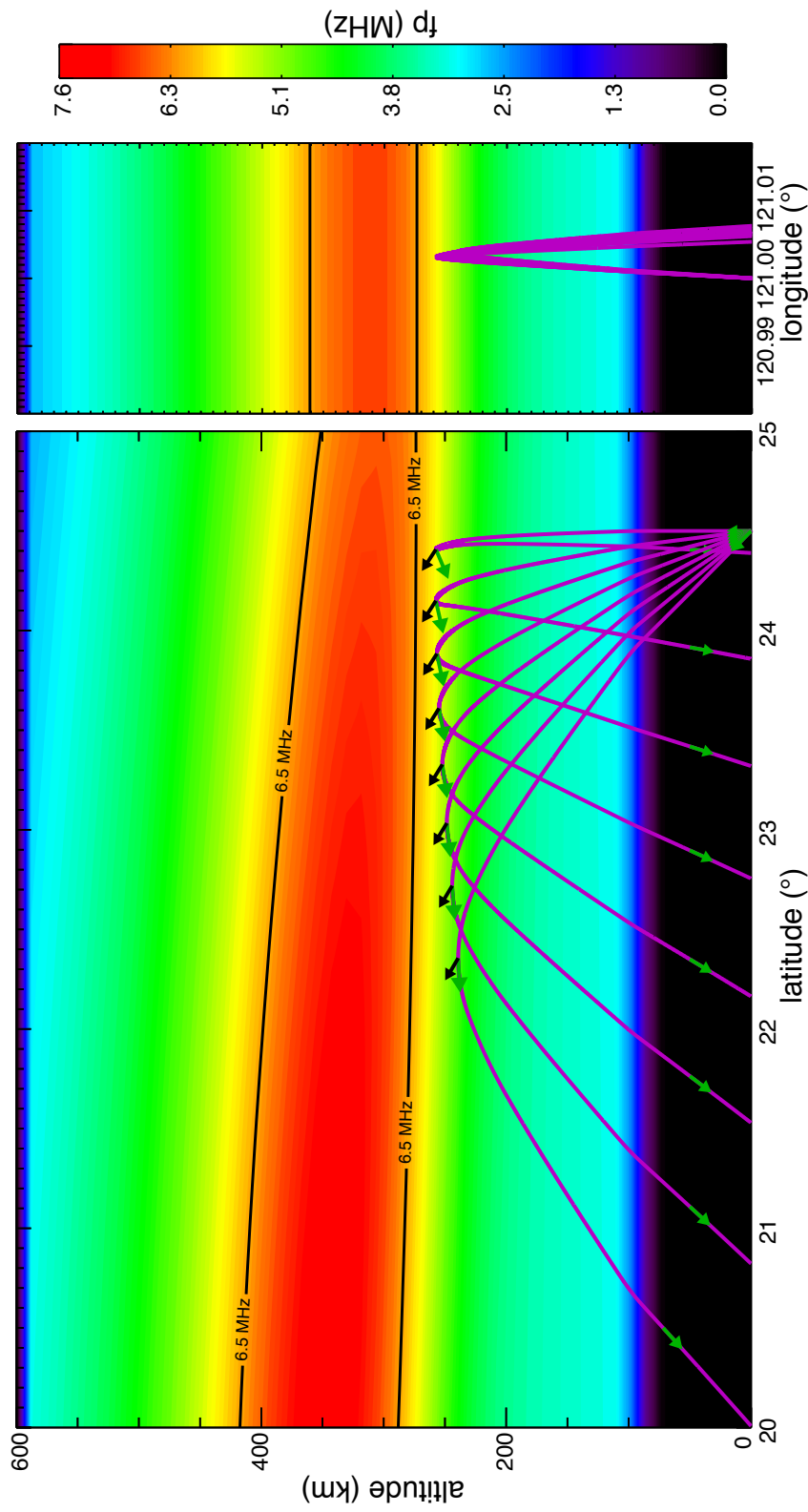


FIGURE 6.10 – Réflexions sous l'ionosphère magnétisée des rayons à 6.5 MHz en mode \ominus . Les directions des vecteurs d'ondes sont représentés par les flèches vertes, la direction du champ magnétique est représentée par les flèches noires.

Réflexion sous l'ionosphère du mode \ominus

La figure 6.10 représente la trajectoire des rayons à 6,5 MHz à travers l'ionosphère magnétisée pour le mode \ominus . Contrairement au mode \oplus , les rayons tournent leur concavité vers le sud (direction de l'équateur, voir figure 6.12) avant d'atteindre l'altitude à laquelle ils seront réfléchis. La fréquence de l'onde étant supérieure à la fréquence cyclotron maximale rencontrée le long des rayons ($f_{cmax} \sim 2$ MHz), ces ondes se propagent sur le mode R . L'altitude de réflexion du rayon arrivant en incidence normale sur l'ionosphère correspond à l'altitude où la fréquence de coupure du mode R f_R est égale à la fréquence de l'onde. Les valeurs de la fréquence de coupure du mode R à l'altitude de réflexion des rayons sont représentées figure 6.11. Pour le rayon en incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$), elle correspond effectivement à la fréquence de l'onde à 0,03% près. En incidence oblique, la fréquence de coupure du mode R à l'altitude de réflexion correspond à la fréquence verticale équivalente $f \cos \theta_0$ avec une erreur relative $\epsilon = 1,81.10^{-4}$.

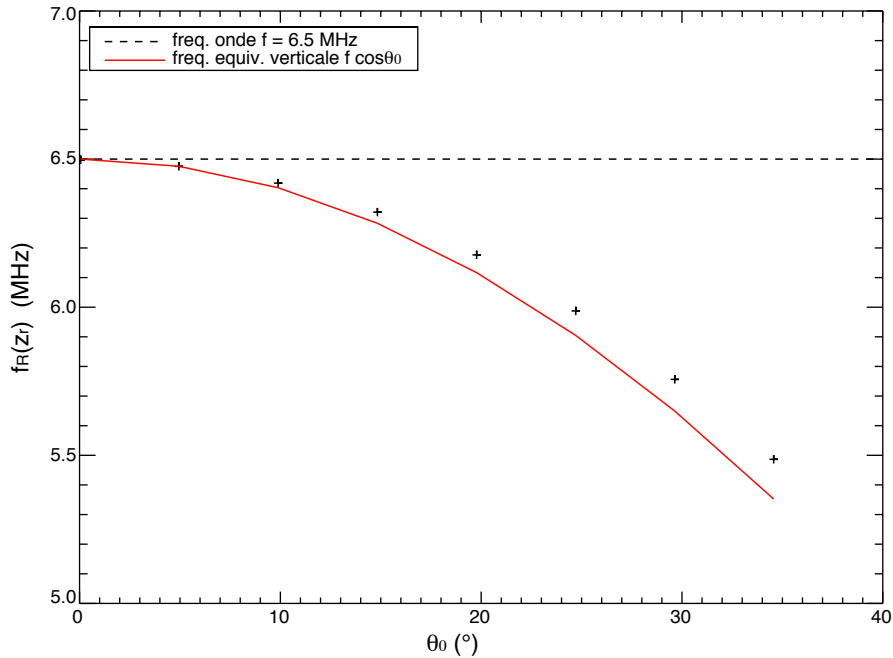


FIGURE 6.11 – Fréquence de coupure du mode R à l'altitude de réflexion en fonction de l'angle d'incidence du rayon sur l'ionosphère.

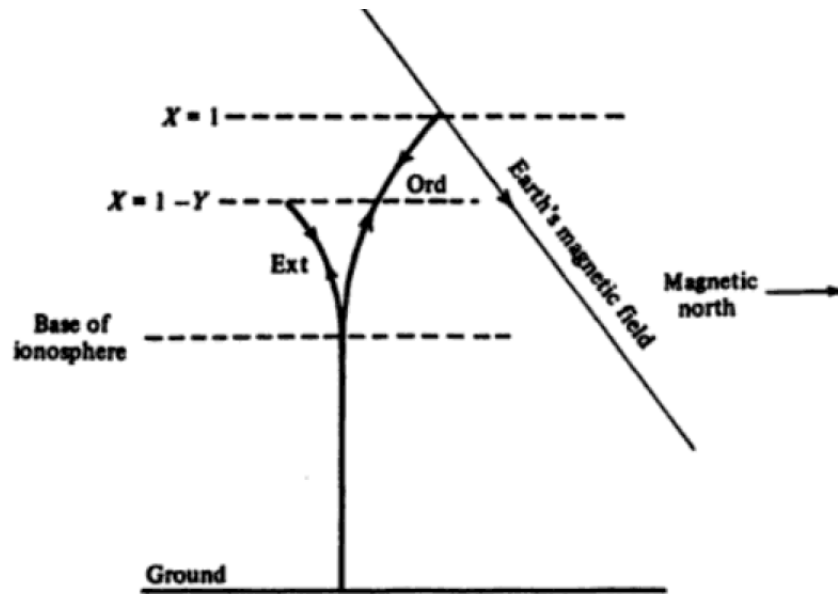


FIGURE 6.12 – Déviation latérale des rayons Ordinaire et eXtraordinaire en incidence verticale sous l'ionosphère terrestre dans un plan méridien du champ magnétique dans l'hémisphère nord. La fréquence des ondes est ici supérieure à la fréquence cyclotron. Le mode \oplus (Ordinaire) tourne sa concavité vers le pôle magnétique le plus proche avant d'être réfléchi à une altitude où la $f = f_p$ ($X = 1$), le rayon étant perpendiculaire à la direction du champ magnétique ; Le mode \ominus (eXtraordinaire) tourne sa concavité vers l'équateur avant d'être réfléchi à une altitude où $f = f_R$ ($X = 1 - Y$). D'après [Budden 1985].

6.4 Tests et illustrations du module Polarisation

Nous avons validé les résultats obtenus par le module Polarisation du code ARTEMIS-P en retrouvant ci-dessous les états de polarisation des ondes principales, ainsi que les caractéristiques générales de l'état de polarisation en propagation oblique, en régime de faible couplage de mode. Pour ce faire, nous considérons un milieu de propagation homogène et anisotrope. Les caractéristiques de l'onde seront donc constantes le long du rayon.

Modèle de densité électronique La densité d'électrons est supposée constante et uniforme.

$$N_e = 115 \text{ cm}^{-3} \quad \text{soit} \quad f_p = 96,51 \text{ kHz}$$

Modèle de champ magnétique Le champ magnétique est dirigé selon l'axe \mathbf{e}_z et son intensité est supposée constante et uniforme.

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad B_0 = 0,6 \text{ G} \quad \text{soit} \quad f_c = 1697,65 \text{ kHz}$$

Les rapports de polarisation sont calculés le long d'un rayon parcourant une distance arbitraire d_{\max} . Le milieu étant homogène, on prend cette distance égale à une longueur d'onde λ_0 . En chaque point P du rayon, situé à une distance d de la source, la phase

de l'onde s'écrira : $\phi = \frac{2\pi d}{d_{\max}}$. Connaissant les rapports de polarisation ρ et τ , on peut ainsi construire le vecteur champ électrique en chaque point du rayon, à une constante \tilde{E}_x près, d'après les équations (3.8).

6.4.1 Propagation parallèle

Polarisation du mode R

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.5.

Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence	Mode	ρ_{th}	τ_{th}	ρ	τ
$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [0, 0, 1]$	100 kHz	R (\ominus)	1	0	1.00	0.00

TABLE 6.5 – Paramètres d'initialisation des rayons en mode R

La figure 6.15(a) représente l'évolution du vecteur champ électrique (flèches rouges) le long du rayon en mode \ominus , le vecteur d'onde (flèches vertes) et le champ magnétique (flèches noires) étant colinéaires. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit un cercle dans le sens direct (trigonométrique par rapport à \mathbf{k}) dans le plan normal au vecteur d'onde et au champ magnétique externe. Les rapports de polarisation ρ et τ fournis par ARTEMIS-P correspondent donc bien à une polarisation transverse circulaire droite.

Polarisation du mode L

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.6.

Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence	Mode	ρ_{th}	τ_{th}	ρ	τ
$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [0, 0, 1]$	100 kHz	L (\oplus)	-1	0	-1.00	0.00

TABLE 6.6 – Paramètres d'initialisation des rayons en mode L

Les rapports de polarisation ρ et τ fournis par ARTEMIS-P correspondent bien à une polarisation circulaire gauche. La figure 6.15(b) représente l'évolution du vecteur champ électrique (flèches rouges) le long du rayon en mode \ominus , le vecteur d'onde (flèches vertes) et le champ magnétique (flèches noires) étant colinéaires. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit un cercle dans le sens horaire par rapport à \mathbf{k} dans le plan normal au vecteur d'onde et au champ magnétique. Les rapports de polarisation ρ et τ fournis par ARTEMIS-P correspondent bien dans ce cas à une polarisation transverse circulaire gauche.

Rotation Faraday Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un plasma magnétisé parallèlement au champ magnétique ambiant, de fréquence supé-

rieure à la fréquence de coupure du mode R et de polarisation quelconque (rectiligne, elliptique ou circulaire) : cette onde résulte d'une combinaison linéaire des deux modes caractéristiques R et L. Comme la fréquence de l'onde est supérieure à la fréquence de coupure du mode R, les deux composantes R et L peuvent se propager dans le plasma, mais avec des vitesses de phases différentes. La différence de vitesses de phase entre les deux modes caractéristiques va provoquer la rotation du champ électrique de l'onde résultante lors de la propagation. Cet effet est appelé *l'effet Faraday*.

Pour illustrer cet effet, considérons une onde incidente en $z = 0$ avec une polarisation rectiligne selon \mathbf{e}_x : cette polarisation correspond à la somme des polarisation circulaire droite et gauche des modes R et L.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = \frac{1}{2}E_0 \begin{vmatrix} \cos(k_R z - \omega t) \\ \sin(k_R z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(k_L z - \omega t) \\ -\sin(k_L z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

A l'aide de simples manipulations trigonométriques, les composantes E_x et E_y du champ résultants peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$E_x = E_0 \cos \left[\frac{1}{2}(k_R - k_L)z \right] \cos \left[\frac{1}{2}(k_R + k_L)z - \omega t \right] \quad (6.10)$$

$$E_y = E_0 \sin \left[\frac{1}{2}(k_R - k_L)z \right] \cos \left[\frac{1}{2}(k_R + k_L)z - \omega t \right] \quad (6.11)$$

Le rapport des composantes du champ magnétique se résume simplement à

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \left[\frac{1}{2}(k_R - k_L)z \right]$$

Lorsque l'onde se sera propagée sur une distance z , le plan de polarisation rectiligne, initialement selon \mathbf{e}_x , aura tourné d'un angle $\Psi = \frac{1}{2}(k_R - k_L)z = \frac{\omega}{2c}(n_R - n_L)z$.

La figure 6.13 représente la direction du champ électrique d'une onde de fréquence $f = 5$ MHz ($f \gg f_R$), de polarisation rectiligne selon \mathbf{e}_x en $z = 0$, se propageant dans le milieu décrit au paragraphe 6.4. Ce champ électrique est décrit par les équations (6.10) et (6.11). Les indices de réfraction des modes R et L valant respectivement $n_R = 0,99972$ et $n_L = 0,99986$ pour cette onde, le plan de polarisation aura tourné d'un angle $\Psi = -107,7^\circ$ au bout de 250 km.

Dans le cas où la fréquence de l'onde est très supérieure à la fréquence plasma et à la fréquence cyclotron (X et Y tendent vers 0), les indices de réfraction des modes R et L peuvent alors s'écrire simplement :

$$n_R \sim 1 - \frac{1}{2}X(1 - Y)$$

$$n_L \sim 1 - \frac{1}{2}X(1 + Y)$$

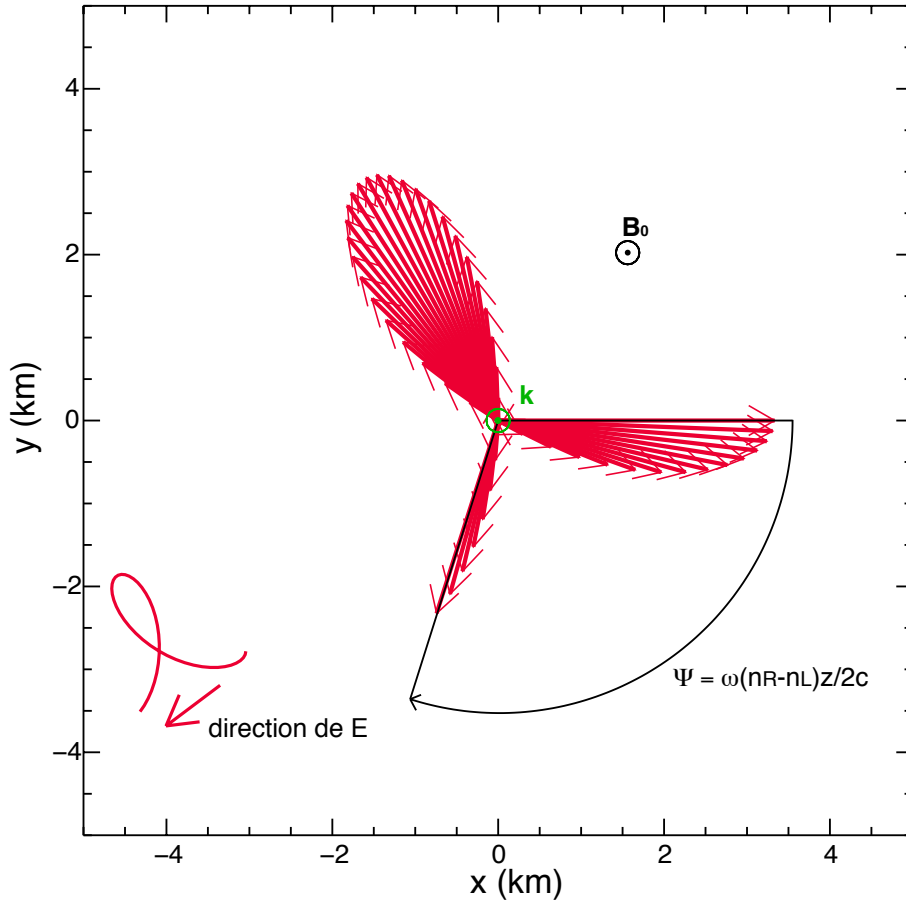


FIGURE 6.13 – Illustration de l'effet Faraday. Les flèches rouges représentent la direction du champ électrique d'une onde initialement polarisée réctilignement selon \mathbf{e}_x , se propageant dans un milieu uniforme, parallèlement au champ magnétique ambiant selon \mathbf{e}_z . Le plan de polarisation tourne au cours de la propagation d'un angle $\Psi = \frac{\omega}{2c}(n_R - n_L)$.

L'angle de rotation du plan de polarisation sera alors donné par :

$$\Psi = \frac{1}{2c} \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^2} z$$

L'angle de rotation du plan de polarisation est donc directement proportionnel au produit de la densité d'électrons et du champ magnétique. Ainsi, si ces deux quantités varient le long du rayon, l'angle de rotation du plan de polarisation devient :

$$\Psi = \frac{1}{2c\omega^2} \frac{e^3}{\epsilon_0 m_e} \int_{\text{rayon}} N_e B_{0z} dl$$

La mesure de l'angle de rotation du plan de polarisation permet alors d'obtenir des information sur la densité d'électrons ou sur la composante longitudinale du champ magnétique le long du rayon.

6.4.2 Propagation perpendiculaire

Polarisation du mode Z

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.7.

Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence	Mode	ρ_{th}	τ_{th}	ρ	τ
$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [1, 0, 0]$	100 kHz	Z (\ominus)	$-S/D$	0	-18,1	$6,5 \cdot 10^{-17}$

TABLE 6.7 – Paramètres d'initialisation des rayons en mode Z

Dans le cas où la fréquence de l'onde est inférieure à la fréquence hybride supérieure ($f_{UH} = 1700,39$ kHz), les rapports de polarisation ρ et τ fournis par ARTEMIS-P correspondent bien à une polarisation elliptique dans le plan normal au champ magnétique externe, tournant dans le sens horaire par rapport à \mathbf{B}_0 . Les quantités S et D valent ici respectivement 1,0032 et 0,05531 et le rapport $-S/D = -18,14$.

La figure 6.15(c) représente l'évolution du vecteur champ électrique (flèches rouges) le long du rayon en mode \ominus , le vecteur d'onde (flèches vertes) et le champ magnétique (flèches noires) étant perpendiculaires. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse dans le sens horaire par rapport à \mathbf{B}_0 dans le plan normal au champ magnétique externe.

Polarisation du mode X

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.8.

Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence	Mode	ρ_{th}	τ_{th}	ρ	τ
$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [1, 0, 0]$	1800 kHz	X (\ominus)	$-S/D$	0	39,5	$-2,5 \cdot 10^{-15}$

TABLE 6.8 – Paramètres d'initialisation des rayons en mode X

Dans le cas où la fréquence de l'onde est supérieure à la fréquence hybride supérieure ($f_{UH} = 1700,39$ kHz), les rapports de polarisation ρ et τ fournis par ARTEMIS-P correspondent bien à une polarisation elliptique dans le plan normal au champ magnétique externe, tournant dans le sens direct par rapport à \mathbf{B}_0 . Les quantités S et D valent ici respectivement 0,9738 et $-0,02465$ et le rapport $-S/D = -39,499$.

Polarisation du mode O

Pour s'assurer de l'exactitude du calcul des rapports de polarisation en propagation quasi-perpendiculaire du mode \oplus , l'angle γ entre le plan de polarisation de l'onde et l'axe \mathbf{e}_x perpendiculaire au champ magnétique externe, est calculé à partir des valeurs de τ fournies par le code. En mode \oplus , lorsque θ tend vers $\pi/2$, la polarisation doit

tendre vers une polarisation rectiligne transverse le long de \mathbf{B}_0 . Ainsi, nous vérifions que lorsque l'angle θ tend vers $\pi/2$, l'angle γ tend également vers $\pi/2$ (figure 6.14).

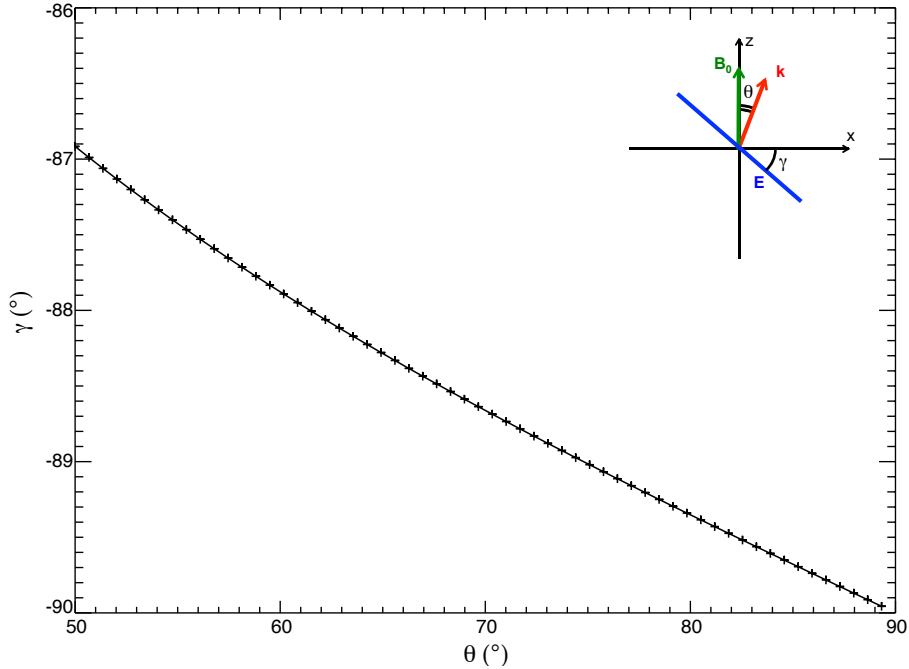


FIGURE 6.14 – Angle γ entre le plan de polarisation et l'axe \mathbf{e}_x perpendiculaire au champ magnétique externe en fonction de l'angle θ entre le vecteur d'onde et le champ magnétique externe en propagation quasi-perpendiculaire du mode \oplus .

6.4.3 Propagation oblique

Les paramètres d'initialisation des rayons sont donnés dans la table 6.9.

Position de la source	Direction du vecteur d'onde	Fréquence	Mode	ρ_{th}	τ_{th}	ρ	τ
$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]$	$\mathbf{k}_0 = [1, 0, 1]$	1800 kHz	X (\ominus)	(3.6a)	(3.6b)	1.89	-0.930

TABLE 6.9 – Paramètres d'initialisation des rayons en propagation oblique

La figure 6.15(d) représente l'évolution du vecteur champ électrique le long d'un rayon se propageant à 45° de la direction du champ magnétique externe. La polarisation est bien une polarisation elliptique contenue dans un plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$, correspondant au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$. L'axe e_y est un des axes principaux de l'ellipse de polarisation.

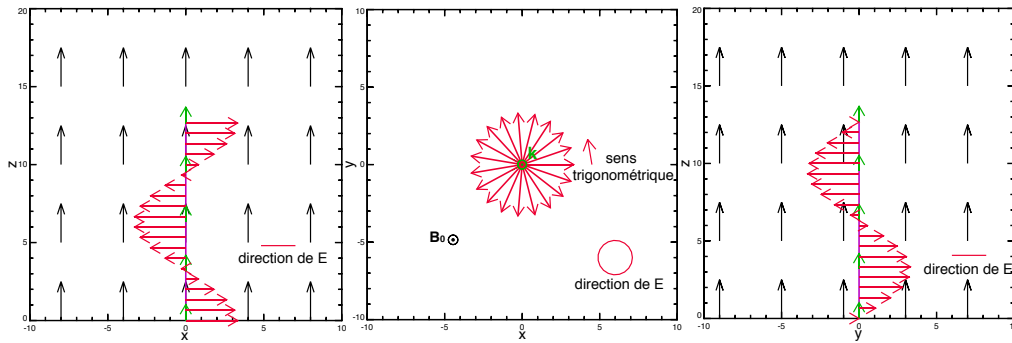
6.5 Conclusion

ARTEMIS-P est un code 3D de tracé de rayons dans les environnements planétaires. Il est fondé sur les équations d'Haselgrove décrivant la propagation des rayons dans les plasmas froids non collisionnels, magnétisés ou non. Les descriptions du milieu de propagation (densité d'électrons et champ magnétique) et des paramètres initiaux de l'onde (fréquence, directions des vecteurs d'onde, position de la source et mode de propagation) sont laissées à la charge de l'utilisateur, qui doit alors s'assurer que les échelles caractéristiques du milieu de propagation sont grandes devant la longueur d'onde. Les équations d'Haselgrove sont résolues par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe ou d'ordre hybride 4/5 à pas variable. La structure vectorielle du code permet de calculer la trajectoire de plusieurs rayons simultanément. En plus de la trajectoire, plusieurs paramètres sont déterminés en tout point des rayons (distance parcourue, angle entre le rayon et le vecteur d'onde, fréquences caractéristiques, indice de réfraction, vitesse de phase et de groupe). Le module Polarisation détermine l'état de polarisation le long des rayons, à partir des équations du chapitre 3. Il détermine également le régime de couplage de mode en tout point le long du rayon : en régime de faible couplage de mode l'état de polarisation est bien déterminé par les équations du chapitre 3, en régime de fort couplage de mode, l'état de polarisation doit être un état hybride entre les polarisation des modes couplés, les résultats du module polarisation sont donc à considérer avec précaution.

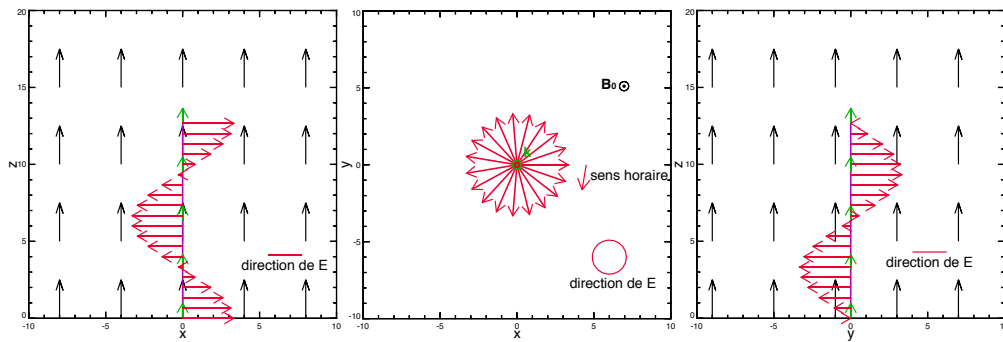
Quatre tests ont été présentés pour vérifier la pertinence des résultats fournis par le code :

- Les lois de Descartes pour la réfraction et la réflexion sont bien vérifiées,
- La propagation sous l'ionosphère terrestre non magnétisée à des fréquences proches de la fréquence plasma du pic de densité électronique de l'ionosphère est bien cohérente avec les résultats classiques de l'optique géométrique ($f_{coupure} = f_p / \cos \theta$),
- La propagation sous l'ionosphère terrestre magnétisée montre bien les phénomènes de rebroussement des rayons en mode \oplus et \ominus prédits par la théorie de la propagation en plasma magnétisé [Poevlerlein 1948], [Budden 1985],
- Le module polarisation fournit bien des rapports de polarisation cohérents avec l'état de polarisation des ondes principales décrits au chapitre 3.

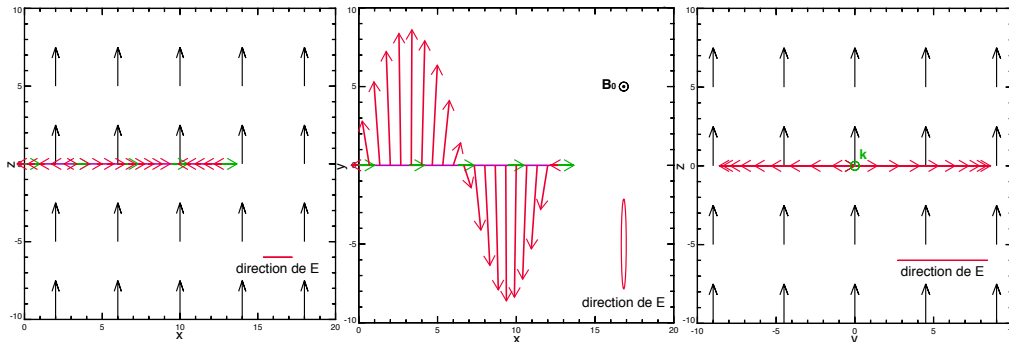
Dans la suite, le code ARTEMIS-P est appliqué à des études de propagation de rayonnement radio dans les environnements planétaires : l'étude de la propagation « au-delà de l'horizon » de la signature radio des éclairs d'orage de Saturne, et l'étude de la propagation du rayonnement kilométrique terrestre dans et à travers les cavités aurorales.



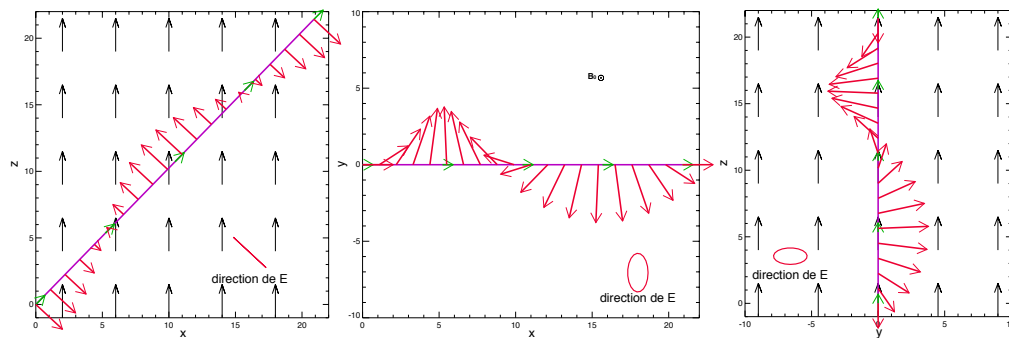
(a) **Mode R.** Polarisation transverse circulaire droite.



(b) **Mode L.** Polarisation transverse circulaire gauche.



(c) **Mode Z.** Polarisation elliptique dans le sens horaire par rapport à \mathbf{B}_0 dans le plan normal à \mathbf{B}_0 .



(d) **Mode \oplus en propagation oblique.** Polarisation elliptique dans le plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$

FIGURE 6.15 – Variations du vecteur champ électrique de l'onde le long du rayon à $f = 100$ kHz dans les plans $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ (gauche), $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (milieu), $(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ (droite). Le vecteur d'onde (flèches vertes), le champ magnétique (flèches noires), le vecteur champ électrique (flèches rouges) et le rayon (droite violette) sont représentés. La direction de \mathbf{E} est donnée par l'extrémité du vecteur champ électrique.

Troisième partie

Applications

PROPAGATION « AU-DELÀ DE L'HORIZON » DES ÉCLAIRS D'ORAGE DE SATURNE

Sommaire

7.1 Les éclairs d'orage dans l'atmosphère de Saturne	163
7.2 Observations des signatures radio	164
7.3 Propagation au-delà de l'horizon	169
7.3.1 Hypothèse	169
7.3.2 Code de tracé de rayons	169
7.3.3 Modèle d'ionosphère de Saturne	170
7.3.4 Simulation des détections radio par la sonde Cassini	171
7.4 Résultats des simulations et discussion	173
7.4.1 Simulation de l'épisode E62	173
7.4.2 Conditions d'apparition des SED « au-delà de l'horizon »	175
7.5 Étude statistique des effets « au-delà de l'horizon »	176
7.5.1 Effet « au-delà de l'horizon » avant l'épisode	177
7.5.2 Effet « au-delà de l'horizon » après l'épisode	178
7.5.3 Ilots de SED « au-delà de l'horizon »	180
7.6 Conclusion	182

7.1 Les éclairs d'orage dans l'atmosphère de Saturne

La signature radio des éclairs d'orage de Saturne a été détectée pour la première fois en 1980 par l'instrument Planetary Radio Astronomy (PRA) de la sonde Voyager 1, lors du survol de Saturne [Warwick 1981]. D'abord interprétés comme la signature radio de décharges électrostatiques dans les anneaux de Saturne par [Warwick 1981], [Warwick 1982] et [Evans 1982], ces signaux furent dénommés *Saturn Electrostatic Discharges* (SED). Il a depuis été démontré que les SED sont les signatures électromagnétiques des éclairs d'orages provenant de systèmes nuageux présents dans l'atmosphère de Saturne [Kaiser 1983], [Zarka 1985b], mais la dénomination « SED » est restée en usage. Ils sont régulièrement observés depuis 2004 par l'instrument Radio and Plasma Waves (RPWS) de la sonde Cassini [Gurnett 2004].

Les SED sont des impulsions radio très large bande (de quelques kHz à quelques dizaines de MHz), regroupées en épisodes d'une durée de 5 à 6 heures. Cette durée correspond à environ une demi-rotation planétaire ($P_{rot} \sim 10,8$ h). Une activité quasi-continue peut avoir lieu pendant des jours, voire des mois, avec une intensité variable d'un épisode à l'autre, mais elle peut également s'arrêter pendant plusieurs semaines. Lors de ces périodes d'activité, deux épisodes consécutifs sont généralement séparés par une période de 5 à 6 heures sans détection de SED. La figure 7.1 est un spectre dynamique (une représentation de l'intensité du signal mesuré en fonction du temps et de la fréquence) de trois épisodes de SED consécutifs entre le 23 et le 24 juin 2006, enregistré par l'instrument RPWS de la sonde Cassini.

Les observations couplées des caméras visibles de l'instrument Imaging Science Subsystem de Cassini et de l'instrument RPWS ont permis de montrer que les éclairs d'orage sont originaires de systèmes nuageux se formant dans l'atmosphère de Saturne [Porco 2005]; [Dyudina 2007]. Jusqu'à un an après l'équinoxe de 2009¹, tous les systèmes nuageux responsables des SED sont localisés à une latitude de 35°S [Fischer 2008] (figure 7.2(a)). À partir de 2010, ces systèmes nuageux sont situés à 35°N (figure 7.2(b)) [Fischer 2011b]. Durant la période d'activité de l'orage, celui-ci reste à une longitude à peu près fixe, dérivant d'environ 0.3° par jour, tabulée pour chaque orage par [Fischer 2011a] (table 7.1). Ces systèmes nuageux tournent donc avec la planète : la plupart des SED détectés par l'instrument RPWS proviennent d'orages présents dans l'hémisphère de Saturne visible depuis la sonde.

Cependant, lorsque Cassini se situe du côté matin, des SED sont parfois détectés par l'instrument RPWS avant que l'orage n'apparaisse dans l'hémisphère visible par l'instrument ISS, c'est-à-dire avant que le système nuageux ne franchisse l'horizon Ouest (schéma figure 7.3(a)). De même, lorsque la sonde est située côté soir, des SED sont parfois détectés après que l'orage a disparu derrière l'horizon Est. Cette visibilité inattendue des émissions radio est appelée l'effet « au-delà de l'horizon » [Fischer 2008].

Une explication qualitative de ces observations est proposée par [Zarka 2006] : cet effet serait dû à la propagation sous l'ionosphère de Saturne des ondes radio émises depuis l'orage. Le sujet de cette étude est de tester cette hypothèse à l'aide d'un code de tracé de rayons à 3D à travers un modèle réaliste d'ionosphère de Saturne.

7.2 Observations des signatures radio

La figure 7.3(b) représente le spectre dynamique d'un épisode de SED détectés par l'instrument RPWS de la sonde Cassini le 19 février 2006 entre 13h40 et 19h40 (62^{ème} épisode de l'orage E dans la nomenclature [Fischer 2011a]). Le récepteur de l'instrument RPWS utilisé pour détecter les SED est un récepteur radio à balayage en fréquence de 320 kHz à 16,1 MHz [Gurnett 2004]. Ce récepteur enregistre le signal avec un temps d'intégration de 20 à 40 ms sur des canaux de fréquence consécutifs séparés de 50 ou

1. La période de révolution de Saturne autour du Soleil étant d'environ 30 ans, les équinoxes se produisent tous les 15 ans. Jusqu'en 2009, l'hémisphère Sud était en été tandis que l'hémisphère Nord était en hiver.

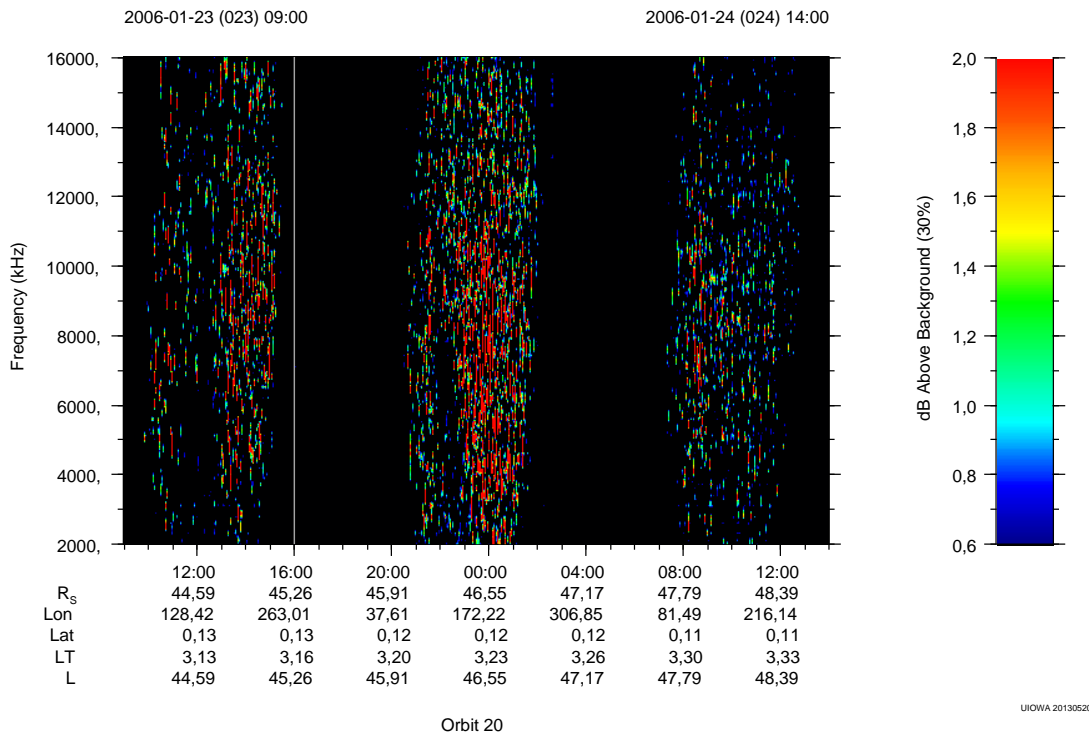


FIGURE 7.1 – Spectre dynamique des trois épisodes orageux entre le 23 et le 24 janvier 2006, enregistré par l'instrument RPWS de la sonde Cassini. Chaque épisode dure entre 5 et 6 heures, ce qui correspond environ à une demi rotation planétaire ($P_{rot} \sim 10,8 h$) : les SED sont produits au sein de systèmes nuageux tournant avec la planète, localisés à une latitude de $35^\circ S$ jusqu'à un an après l'équinoxe de 2009, et à $35^\circ N$ depuis.

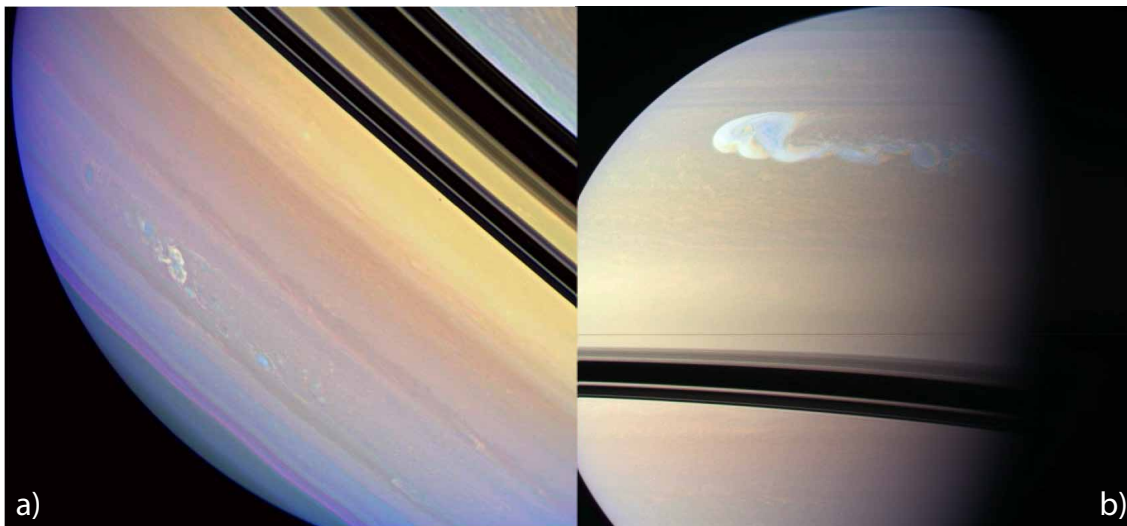


FIGURE 7.2 – Images des systèmes orageux responsables des SED pris par l'instrument Imaging Science Subsystem de la sonde Cassini. a) le 04 mars 2008 : image dans les bandes infrarouge, verte et violette d'un système nuageux localisé à $35^\circ S$ b) le 24 décembre 2010 : orage géant post-équinoxial situé à $35^\circ N$.

Nom de l’orage	Intervalle de temps	TL de Cassini	Longitude de l’orage (Voyager SLS système)
ABC	13 juil. au 28 sept. 2004	5,1-6,5	$Lon_{ABC} = 222,2 + 0,30t_{DOY}$
E	23 janv. au 23 fév. 2006	3,1-8,5	$Lon_E = 155,1 + 0,61t_{DOY}$
F ¹	27 nov. 2007 au 10 mars 2008	tous	$Lon_{F^1} = 173,2 + 0,30t_{DOY}$
F ²	11 mars au 15 juil. 2008	tous	$Lon_{F^2} = 268,0 + 0,34t_{DOY}$
G	19 nov. au 11 déc. 2008	tous	$Lon_G = 218,0 + 0,30t_{DOY}$
H	14 janv. au 13 déc. 2009	tous	$Lon_H = 320,0 + 0,22t_{DOY}$

TABLE 7.1 – Longitudes des orages en fonction du temps. Pour chaque orage sont indiqués le nom, l’intervalle de temps (jour, mois et année du début à la fin de l’épisode orageux), la gamme de temps locaux de Cassini, la longitude de l’orage (en degré dans le système Voyager SLS). Le temps t_{DOY} est le jour de l’année de début de l’épisode orageux. D’après [Fischer 2011a].

200 kHz (le temps total de balayage est donc de quelques secondes). Un flash de SED, durant typiquement 30 à 300 ms [Zarka 1983], ne sera détecté que pendant quelques mesures consécutives : les flashes de SED prennent la forme de courts segments parallèles à l’axe des fréquences sur les spectres dynamiques.

Durant cet épisode la sonde se situait près de l’équateur, vers 06:00 en temps local² (TL) et à environ 43 rayons de Saturne (R_S) (voir table 7.2). L’orage apparaît dans l’hémisphère visible depuis la sonde, près du limbe Ouest de Saturne vers 00:00 TL, et disparaît près du limbe Est vers 12:00 TL. L’atmosphère de Saturne tournant à la période $P_{rot} = 10,8$ h [Ingersoll 1984], un épisode devrait durer $\sim 5,4$ heures, correspondant au transit de la source dans l’hémisphère visible depuis la sonde. Sur la figure 7.3(b), les lignes verticales vertes indiquent l’apparition et la disparition de l’orage dans le champ de vue des caméras de Cassini.

Morphologie de l’épisode L’ionosphère de Saturne joue le rôle de filtre passe-haut sur le spectre des SED : seules les fréquences supérieures à la fréquence plasma du pic de densité électronique pourront se propager en dehors de l’atmosphère de Saturne³. Le maximum de la fréquence plasma de l’ionosphère kronienne varie entre 5-6 MHz côté jour et 0,5-1 MHz côté nuit [Fischer 2011a]. Les spectres dynamiques des SED présentent donc une fréquence de coupure basse à la fréquence plasma du pic de densité électronique de l’ionosphère : la partie basse fréquence du spectre d’émission des éclairs d’orage est réfléchiée sous l’ionosphère. L’augmentation graduelle de la fréquence de coupure sur la partie droite du spectre dynamique de l’épisode E62 est un effet composite de densité d’électrons et de géométrie. L’orage disparaît côté jour, sous une ionosphère plus dense en électrons : la fréquence plasma de l’ionosphère augmente donc quand l’orage

2. Le temps local est une coordonnée liée au repère fixé au Soleil, indépendant de la rotation de la planète : la longitude à l’aplomb du Soleil est à 12:00 TL et la longitude diamétralement opposée est à 00:00 TL.

3. De la même manière que l’ionosphère terrestre réfléchit les ondes radio de fréquences inférieures à 10 MHz, comme nous l’avons vu dans le chapitre 6.

se rapproche du limbe est. De plus, l'orage n'étant plus à l'aplomb de la sonde, la fréquence de coupure des rayons pouvant atteindre Cassini varie en $f = f_p / \cos \Lambda$, où Λ est l'angle entre la direction orage-Cassini et la normale à l'ionosphère au dessus de l'orage (figure 7.3(a)). La fréquence de coupure augmente d'autant que l'angle Λ se rapproche de 90° . Ce comportement est également attendu lors de l'apparition de l'orage mais sur des échelles 5 à 10 fois inférieures, car la fréquence plasma côté nuit est 5 à 10 fois plus faible à 00:00 TL qu'à 12:00 TL. Si le gradient de densité est suffisamment important, la détection des SED peut même commencer après l'horizon Ouest (quand l'orage est déjà visible) ou se terminer avant l'horizon Est (quand l'orage est toujours visible).

Détections radio avant l'horizon Lorsque l'orage est situé dans l'hémisphère visible depuis la sonde, les ondes radio de fréquence supérieure à la fréquence plasma de l'ionosphère peuvent atteindre directement le détecteur : ces détections forment le corps de l'épisode, compris entre les deux horizons. Lorsque l'orage est situé dans l'autre hémisphère, aucune détection radio n'est attendue. Cependant, durant l'épisode E62, des signatures radio d'éclairs d'orage sont clairement présentes avant que l'orage ne soit visible par les caméras de Cassini. Cette extension débute environ une heure avant l'apparition de l'orage, tout d'abord dans une gamme de fréquence limitée autour de 5 MHz, qui s'élargit avec le temps jusqu'à s'étendre sur toutes les fréquences à proximité de l'horizon. Cette extension « au-delà de l'horizon » est observée pour de nombreux épisodes et peut se produire aussi bien à l'apparition qu'à la disparition de l'orage dans l'hémisphère visible. La morphologie temps-fréquence des extensions « au-delà de l'horizon » varie d'un épisode à l'autre.

Episode E62	début : 2006/02/19 13:40:00	fin : 2006/02/19 19:40:00
POSITION DE CASSINI		
Longitude (°)	68.73	264.4
Temps Local (h)	6.48	6.54
Latitude (°)	-0.19	-0.20
Distance (R_s)	43.25	42.21
LOCALISATION DE L'ORAGE		
Longitude (°)	185.9	186.1
Temps Local (h)	22.67	11.76
LONGITUDE SOUS CASSINI LORSQUE L'ORAGE CROISE		
l'horizon Ouest	le centre de l'hémisphère visible	l'horizon Est
97.88°	181.1°	264.4°

TABLE 7.2 – Position de Cassini et localisation de l'orage durant l'épisode E62

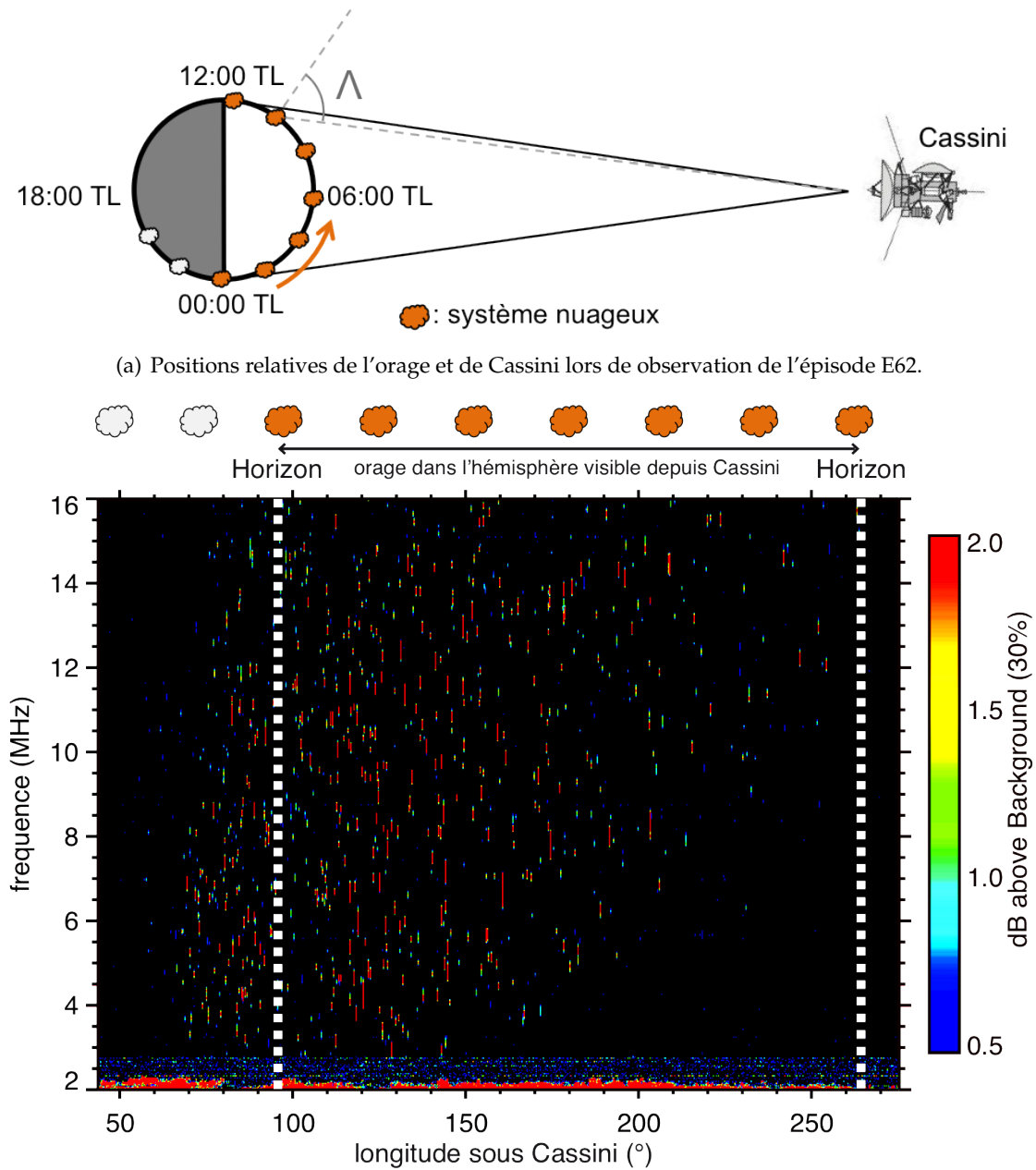


FIGURE 7.3 – Spectre dynamique de l'épisode E62 et schéma des positions relatives de l'orage et de Cassini durant cet épisode. Les lignes verticales pointillées délimitent la période durant laquelle l'orage est visible par les instruments de Cassini. Des SED sont détectés avant que l'orage ne soit dans le champ de vue de la sonde : c'est l'effet « au-delà de l'horizon ».

7.3 Propagation au-delà de l'horizon

7.3.1 Hypothèse

Les éclairs d'orage proviennent de nuages d'eau localisés dans l'atmosphère de Saturne entre 200 et 300 km en dessous du niveau où la pression est égale à 1 bar, c'est-à-dire à environ 2000 km sous l'altitude du pic ionosphérique de densité d'électrons [Fischer 2008]. Les ondes radio de fréquence inférieure à la fréquence plasma du pic de densité d'électrons $f_{p-pic} [kHz] \approx 9\sqrt{N_e [cm^{-3}]}$ sont réfléchies sous l'ionosphère. Si on suppose que la densité d'électrons ionosphérique ne varie pas en fonction du temps local, toutes les ondes de fréquence f inférieure à f_{p-pic} seront piégées sous l'ionosphère et n'atteindront jamais la sonde. Mais si l'on considère les variations de la densité d'électrons avec le temps local, avec une décroissance côté nuit et une remontée côté matin, le scénario peut être différent (figure 7.4). Les ondes radio de fréquence inférieure à $f_{p-pic}(TL_{orage})$ à l'aplomb de l'orage pourraient être temporairement piégées sous l'ionosphère et subir plusieurs réflexions tant que $f_{p-pic}(TL) > f$ et enfin s'échapper de l'atmosphère lorsque la fréquence plasma $f_{p-pic}(TL_{sortie})$ devient inférieure à la fréquence de l'onde. Si le point d'échappement des rayons est situé dans l'hémisphère visible depuis Cassini, les ondes radio peuvent atteindre le sonde même si l'orage n'est pas visible dans cet hémisphère.

Afin de tester quantitativement cette hypothèse, nous avons cherché à reconstruire la visibilité des ondes radio par la sonde Cassini à l'aide d'un code de tracé de rayons à 3D à travers un modèle réaliste de l'ionosphère de Saturne, prenant en compte la variation avec le temps local.

7.3.2 Code de tracé de rayons

Les fréquences observées lors des détections des SED par la sonde Cassini sont comprises entre 2 MHz et 16 MHz, fréquences supérieures à la fréquence plasma du pic de densité d'électrons ($f_{p-pic} > 1$ MHz). En considérant que le champ magnétique de Saturne est dipolaire, d'axe aligné avec l'axe de rotation et de moment dipolaire $M = 0.215 G.R_S^3$ [Connerney 1993], la fréquence cyclotron est de l'ordre de 600 kHz, inférieure à la fréquence plasma du pic de densité électronique de l'ionosphère. Les effets du champ magnétique planétaire sur la propagation sont donc ici négligés. Cette étude a été initiée au début de ma thèse, avant la mise en place du code de tracé de rayons en milieu anisotrope ARTEMIS-P. Nous avons utilisé un code de tracé de rayons en milieu isotrope (les effets du champ magnétique étant négligés) fondé sur les équations (5.6) présentées au chapitre 5⁴ et résolues par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 décrite dans [Sharma 1982].

4. Nous avons montré dans ce chapitre que ces équations sont équivalentes à la limite isotrope des équations d'Haselgrove.

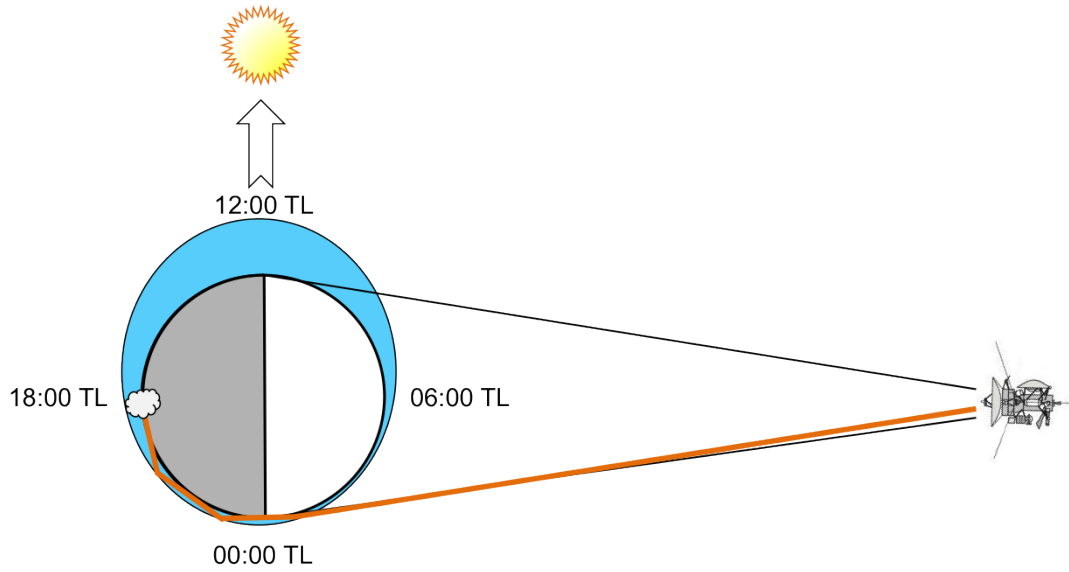


FIGURE 7.4 – Schéma décrivant le piégeage temporaire des ondes radio sous une ionosphère variant avec le temps local. La variation du pic de densité d’électrons en fonction du temps local est représentée par l’épaisseur de la zone bleue : il est maximum aux alentours de 12:00 TL et minimum vers 05:00 TL. Une onde émise depuis l’orage à une fréquence $f < f_{p-pic}(TL_{orage})$ sera réfléchiée sous l’ionosphère tant que $f_{p-pic}(TL) > f$ et ne pourra s’échapper que lorsque $f_{p-pic}(TL) < f$. Si le point d’échappement se situe dans l’hémisphère visible depuis Cassini, le rayon pourra atteindre la sonde.

7.3.3 Modèle d’ionosphère de Saturne

Comme pour l’utilisation d’ARTEMIS-P, ce code de tracé de rayons nécessite une description du milieu de propagation. L’indice de réfraction en milieu isotrope est donné par :

$$n(r, TL, \lambda) = \sqrt{1 - \frac{f_p(r, TL, \lambda)^2}{f^2}}$$

où $f_p(r, TL, \lambda) \approx 9\sqrt{N_e(r, TL, \lambda)}$ est la fréquence plasma de l’ionosphère, et (r, TL, λ) les coordonnées sphériques en rayon r , temps local TL et latitude λ .

Profil en temps local de la densité d’électrons

Le profil en temps local du pic de densité d’électrons à la latitude de 35°S provient de l’étude des fréquences de coupure des SED sans effet « au-delà de l’horizon » menées dans [Fischer 2011a] (voir figure 7.5). Nous avons choisi comme profil de densité d’électrons, le profil moyen sur les distances inférieures à 14 R_S (courbe pleine de la figure 7.5). Le creux de densité entre 14:00 TL et 19:00 TL, dû à un manque de données, a été comblé sur les conseils de l’auteur de manière à ce que la décroissance côté soir soit monotone. Le profil résultant utilisé pour modéliser le pic de la densité d’électrons de l’ionosphère à 35°S est donné à la figure 7.6. La densité d’électrons minimum ($N_{e-pic} \sim 8.10^3 \text{ cm}^{-3}$) se situe vers 04:30 TL et son maximum ($N_{e-pic} \sim 1,2.10^5 \text{ cm}^{-3}$) se situe vers 11:30 TL.

La rapide remontée de densité d'électrons côté matin est due aux processus de photo-ionisation, tandis que la plus lente décroissance côté nuit est due aux phénomènes de recombinaison.

Profil en latitude de la densité d'électrons

Le profil en latitude du pic de densité d'électrons de l'ionosphère provient des observations d'occultation de l'instrument Radio Science Subsystem (RSS) de la sonde Cassini [Kliore 2009], et est modélisé dans [Moore 2010] (figure 7.7) :

$$N_{e-pic}(\lambda) = 6400 + 45 \lambda + 4.4 \lambda^2 \quad (7.1)$$

où la latitude λ est en degré et la densité d'électrons en cm^{-3} . Le pic de densité d'électrons a sa valeur maximale près des pôles et minimale à l'équateur.

Profil en altitude de la densité d'électrons

Pour modéliser la variation en altitude de la densité d'électrons ionosphérique, nous supposons un profil gaussien centré sur l'altitude $r_0 = R_p(\lambda) + 0,03 R_S$ km, de largeur $\sigma = 0,003 R_S$. L'altitude de la surface (niveau de pression égal à 1 bar) $R_p(\lambda)$ prend en compte l'aplatissement de la planète : le rayon à l'équateur étant de 60268 km et le rayon aux pôles étant de 54364 km [Fischer 2011a], l'aplatissement est d'environ 9%. Ce profil en altitude correspond à une couche électronique de 180 km d'épaisseur située à environ 2000 km au dessus de la surface.

En normalisant le profil en latitude (équation(7.1)) pour l'ajuster au profil en temps local à 35°S, on obtient la description 3D de l'ionosphère suivante :

$$N_e(r, TL, \lambda) = N_{e-Fischer}(TL) \left[\frac{N_{e-Moore}(\lambda)}{N_{e-Moore}(35^\circ S)} \right] \exp \left[-\frac{(r - r_0)^2}{\sigma^2} \right] \quad (7.2)$$

Ce modèle ne prend en compte ni les variations temporelles et ni les variations saisonnières de l'illumination solaire.

7.3.4 Simulation des détections radio par la sonde Cassini

Le but des simulations est de reconstruire les effets de visibilité dans le plan temps-fréquence de la source radio lors des détections « au-delà de l'horizon ». Nous cherchons les gammes de fréquences et de temps (ou de longitudes) pour lesquelles la sonde peut détecter des ondes radio provenant d'une source tournant avec la planète.

Les simulations s'effectuent en trois étapes :

1. L'émission des ondes radio au niveau de l'orage
2. La propagation des ondes radio à travers l'ionosphère de Saturne
3. La détection des ondes radio par Cassini.

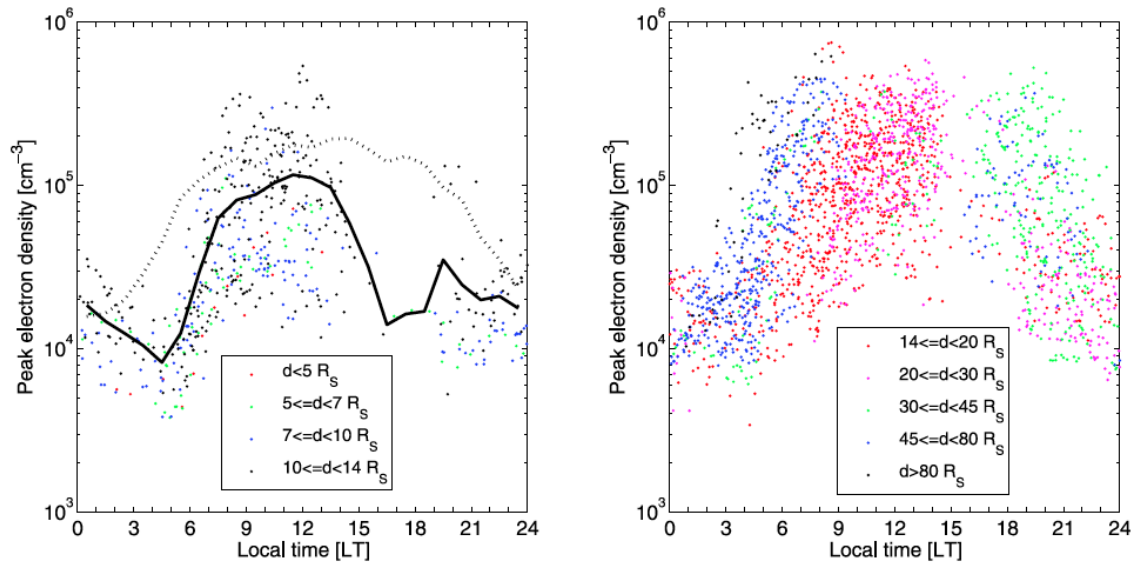


FIGURE 7.5 – Profil en temps local du pic de densité d'électrons de l'ionosphère de Saturne à 35°S, dérivée de l'étude des fréquences de coupure des SED sans effet « au-delà de l'horizon ». Les valeurs sont regroupées en fonction de la distance de Cassini à Saturne (couleurs). La ligne pleine correspond à la moyenne de toutes les mesures pour les distances inférieures à 14 R_S (panneau de gauche) et la ligne pointillée correspond à la moyenne sur les distances supérieures à 14 R_S (panneau de droite). D'après [Fischer 2011a].

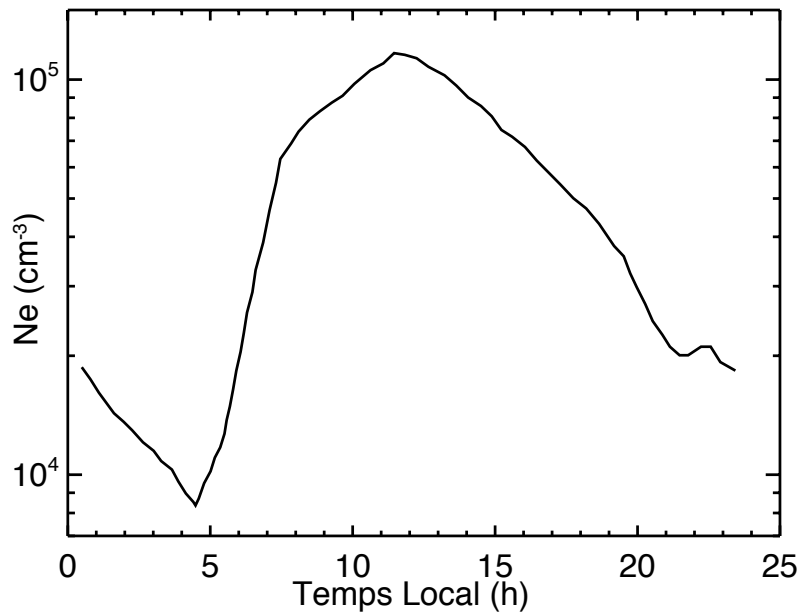


FIGURE 7.6 – Modèle du pic de densité d'électrons de l'ionosphère de Saturne à 35°S en fonction de temps local. La densité d'électrons minimum ($N_{e-pic} \sim 8.10^3 \text{ cm}^{-3}$) se situe vers 04:30 TL et son maximum ($N_{e-pic} \sim 1,2.10^5 \text{ cm}^{-3}$) se situe vers 11:30 TL.

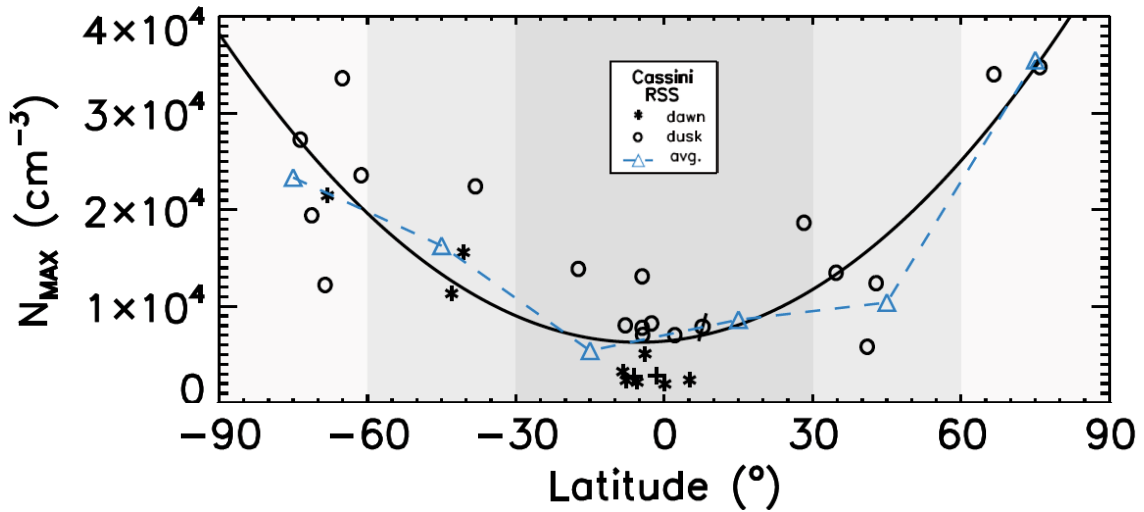


FIGURE 7.7 – Variation de la densité maximum d'électrons en fonction de la latitude fournie par les mesures d'occultations de l'instrument RSS de Cassini, à l'aube (astérisques) et au crépuscule (cercles). La ligne pleine correspond à l'ajustement parabolique des données (équation 7.1). Les triangles bleus reliés par la ligne en tirets sont les valeurs moyennes par secteurs de 30° (grisés). D'après [Moore 2010].

Les deux premières étapes permettent de construire un cube de données contenant la direction de propagation et la position du point de sortie des rayons s'échappant de l'ionosphère pour toutes les positions possibles de l'orage et à toutes les fréquences. La détection par Cassini revient simplement à appliquer un filtre sur ce cube de données. Les détections obtenues dépendent des positions relatives de la source et de la sonde. Nous détaillons ici les trois étapes de la simulation :

1. Émission des ondes radio à la position de l'orage L'orage est localisé à une latitude de 35°S et à une distance au centre de Saturne $R_p(-35^\circ) \approx 0,964 R_S$, à environ 2000 km sous l'ionosphère. Il est positionné successivement à tous les temps locaux entre 00:00 TL et 24:00 TL par pas de 00:15 TL. A chaque position, des rayons de fréquences comprises entre 2 MHz et 16 MHz sont émis avec un pas de 1 MHz. Pour chaque fréquence, nous supposons que l'émission radio est isotrope à la position de l'orage : les rayons sont lancés avec des vecteurs d'ondes initiaux distribués de manière homogène sur une sphère. Pour chaque position et pour chaque fréquence, 2560 rayons sont émis depuis la source, ce qui implique un écart angulaire d'environ 5° entre deux rayons voisins.

Nombre de rayons	Position de la source	Direction des vecteurs d'ondes	Fréquence de l'onde
$N = 2560$ $\times 15 \times 96$	$r_o = 0,964 R_S, \lambda_o = 35^\circ\text{S}$ $TL_o = [00:00, 24:00]$ pas de 15 minutes TL	répartition homogène sur une sphère	$f = [2 \text{ MHz}, 16 \text{ MHz}]$ pas de 1 MHz

TABLE 7.3 – Paramètres d'initialisation des rayons

2. Propagation des ondes radio à travers l’ionosphère de Saturne Pour chaque position de la source, fréquence et direction initiale du vecteur d’onde, le code de tracé de rayons calcule la trajectoire des rayons à travers l’ionosphère de Saturne grâce au modèle de densité d’électrons décrit au paragraphe précédent. La figure 7.8 représente la trajectoire 2D de quatre rayons provenant d’une source localisée à la surface de la planète à 20:00 TL, émis tangentiellement à la surface aux fréquences 2 MHz (bleu), 4 MHz (vert), 6 MHz (jaune) et 8 MHz (rouge). Le cercle pointillé figure l’altitude du pic de densité électronique de l’ionosphère. En dessous de l’ionosphère, la densité d’électrons étant faible, les rayons se propagent en ligne droite. Le rayon à 8 MHz traverse l’ionosphère sans être réfléchi : la fréquence de coupure ($f_{pe} / \cos \Lambda$, où Λ est l’angle d’incidence du rayon sur l’ionosphère) au point de sortie ($\sim 21:00$ TL) est inférieure à 8 MHz. Le rayon à 6 MHz est réfléchi deux fois sous l’ionosphère avant de s’échapper : la fréquence de coupure est supérieure à 6 MHz aux points de réflexion ($\sim 21:00$ TL et $\sim 23:00$ TL) et inférieure à 6 MHz au point d’échappement ($\sim 00:30$ TL). La variation en temps local du pic de densité d’électrons étant faible au voisinage du point d’incidence, l’angle de réflexion est égal à l’angle d’incidence sous l’ionosphère.

Il en va de même pour le rayon à 4 MHz, réfléchi 4 fois avant de sortir vers 04:00 TL. Le rayon à 2 MHz est toujours réfléchi sous l’ionosphère : la fréquence de coupure aux points de réflexion n’est jamais inférieure à 2 MHz. Ainsi, pour les fréquences supérieures à la fréquence plasma minimale de l’ionosphère et inférieures à la fréquence plasma au voisinage de l’orage, les rayons peuvent être piégés sous l’ionosphère et subir plusieurs réflexions avant de pouvoir atteindre la sonde : plus les fréquences sont basses, plus les rayons atteignant Cassini peuvent provenir de sources éloignées dans l’hémisphère invisible depuis la sonde.

Cependant un rayon réfléchi sous l’ionosphère est également atténué, phénomène qui n’est pas pris en compte par ce code simple de tracé de rayon. Pour rendre compte de cette atténuation, nous supposons qu’au-delà de trois réflexions sous l’ionosphère, le rayon est totalement absorbé. De même, un rayon pénétrant à l’intérieur de la planète sur une profondeur supérieure à 0,5% de son rayon $R_p(\lambda)$ est considéré comme étant absorbé.

L’hypothèse selon laquelle les ondes radio peuvent être réfléchies sous l’ionosphère dense en électrons et s’échapper lorsque la fréquence plasma locale devient inférieure à la fréquence de l’onde est donc vérifiée. Nous cherchons maintenant à savoir si ce comportement peut expliquer les effets de visibilités des ondes radio par la sonde Cassini.

3. Détection des ondes radio par Cassini La détection des ondes radio par Cassini se fait sur un critère géométrique appliqué à chaque rayon. Soit $\mathbf{k}_{\text{Cassini}}$ le vecteur entre le point de sortie de l’ionosphère d’un rayon et la position de Cassini et $\mathbf{k}_{\text{rayon}}$ le vecteur directeur du rayon en sortie de l’ionosphère (figure 7.9). L’angle α entre ces deux vecteurs est donné par :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{k}_{\text{Cassini}} \cdot \mathbf{k}_{\text{rayon}}}{\|\mathbf{k}_{\text{Cassini}}\| \|\mathbf{k}_{\text{rayon}}\|} \right) \quad (7.3)$$

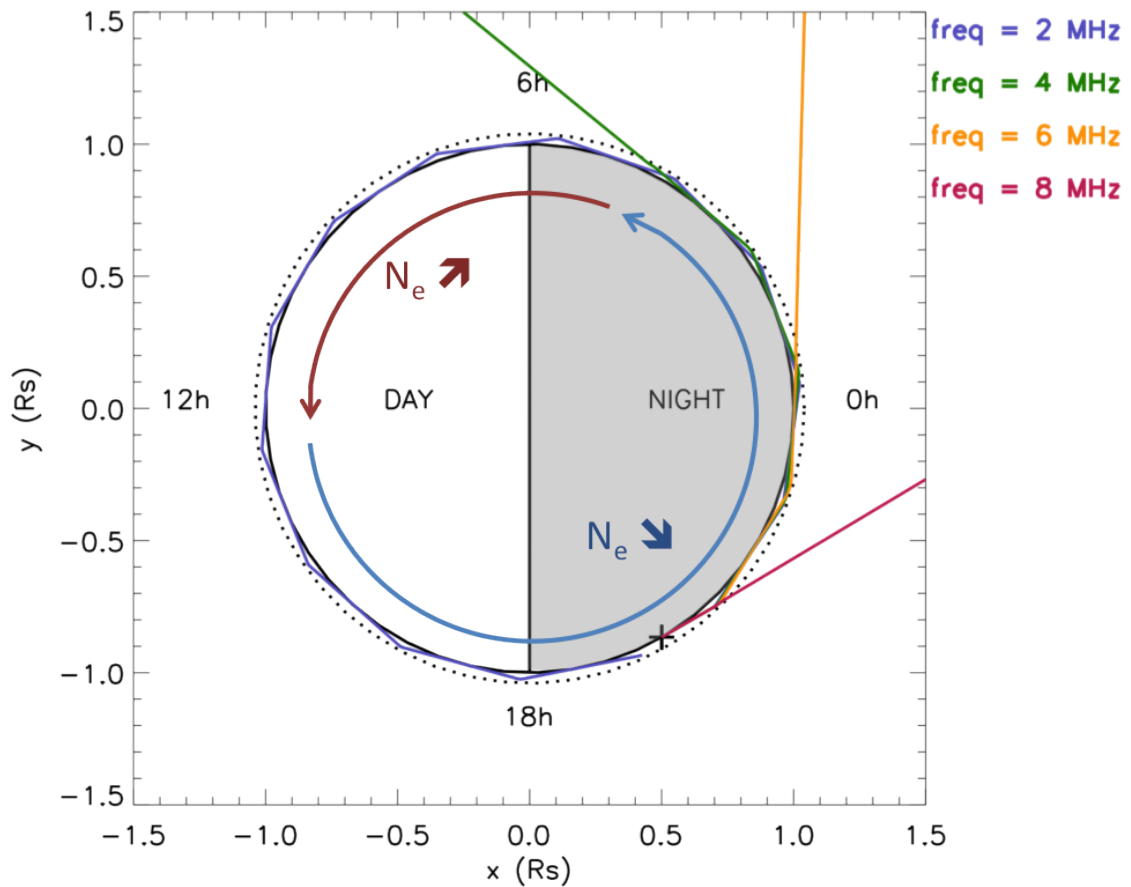


FIGURE 7.8 – Trajectoires à deux dimensions de quatre rayons émis tangentiellement à la surface par une source située à 20:00 TL (croix) aux fréquences 2 MHz, 4 MHz, 6 MHz et 8 MHz. La densité d'électrons (N_e) décroît entre 12:00 TL et 04:30 TL (flèche bleue) et remonte entre 04:30 TL et 12:00 TL (flèche rouge), selon le modèle de [Fischer 2011a].

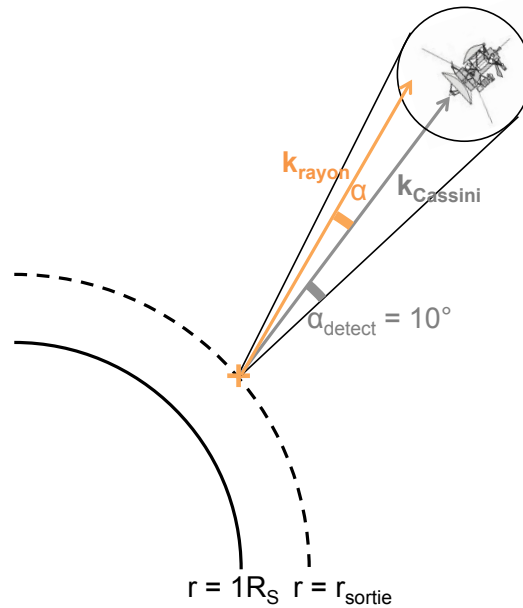


FIGURE 7.9 – Critère géométrique de détection d’un rayon par Cassini.

Un rayon est considéré comme détecté par Cassini si $|\alpha| < \alpha_{detect}$, où α_{detect} caractérise la section efficace de Cassini. L’écart angulaire initial entre deux rayons étant d’environ 5° , la section efficace de Cassini est fixée à $\alpha_{detect} = 10^\circ$ pour prendre en compte la divergence des rayons au cours de la propagation.

Nous cherchons par la suite à reproduire les formes des épisodes observés par la sonde Cassini. Nous disposons pour cela des éphémérides de Cassini (r , lon., lat., TL) et des positions de l’orage étudié [Fischer 2011a] au cours du temps. Pour chaque épisode, l’orage est successivement positionné à tous les temps locaux simulés entre $TL_{début} - 2h$ et $TL_{fin} + 2h$, où $TL_{début}$ est le temps local de l’orage au début de l’observation et TL_{fin} le temps local de l’orage à la fin de l’observation. Pour chaque position de la source simulée et la position correspondante de Cassini, on compte le nombre de rayons détectés par la sonde à chaque fréquence.

7.4 Résultats des simulations et discussion

7.4.1 Simulation de l’épisode E62

Les résultats des simulations sont représentés comme des spectres dynamiques à la différence près que l’intensité du signal n’est pas simulée. Seules sont représentées les gammes de fréquences et de temps (ou de longitudes sous Cassini) pour lesquelles la sonde est atteinte par au moins un rayon. Plusieurs épisodes observés ont été simulés, et nous illustrons les résultats obtenus dans le cas de l’épisode E62 dont les caractéristiques géométriques sont décrites dans la table 7.2.

La figure 7.10(a) représente la carte des détections des SED dans le plan fréquence-longitude sous Cassini au cours de l'épisode E62. Ces détections sont obtenues après une élimination des parasites de bord des données de l'instrument RPWS entre 1,8 MHz et 16,1 MHz. Le critère de sélection principal est un flux ≥ 2 dB au dessus de celui des pixels précédent et suivant à la même fréquence. Les pixels de flux $> 10^{-13} \text{ V}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ sont assimilés à des parasites. La figure 7.10(b) issue des simulations représente le nombre de rayons provenant d'une source ponctuelle et atteignant Cassini en fonction de la fréquence et de la longitude de la sonde ; la figure 7.10(c) représente le nombre moyen de réflexions sous l'ionosphère subies par les rayons provenant d'une source ponctuelle et atteignant Cassini ; la figure 7.10(d) représente le nombre moyen de réflexions sous l'ionosphère subies par les rayons atteignant Cassini et provenant une source ayant une extension en longitude de 7.5° , ce qui revient à considérer deux sources ponctuelles séparées de 15 minutes TL. Les lignes verticales pointillées rouges délimitent les observations radio effectives de l'épisode (entre $68,73^\circ$ et $264,4^\circ$, voir table 7.2).

Fréquence de coupure basse Lors de l'épisode E62, Cassini était située à $\sim 06:30$ TL, l'orage apparait côté nuit ($\sim 00:00$ TL) et disparaît côté jour ($\sim 12:00$ TL). La fréquence de coupure basse du corps de l'épisode simulé passe de 4 MHz à 2 MHz entre 100° et 115° de longitude, reste à 2 MHz entre 115° et 190° puis remonte jusqu'à 11 MHz entre 190° et 290° de longitude. La diminution de la fréquence de coupure au début de l'épisode est due à l'effet combiné de la diminution de la fréquence plasma côté nuit et de l'angle d'incidence des rayons sur l'ionosphère, de même que la remontée à la fin de l'épisode liée à l'augmentation de la fréquence plasma côté jour. Le spectre dynamique de l'observation de l'épisode E62 (figure 7.3(b)) montre également une fréquence de coupure basse autour de 2 MHz entre 100° et 150° de longitude puis une remontée jusqu'à 12 MHz entre 150° et 250° . La décroissance au début de l'épisode n'est pas clairement observée. Cependant, la forme globale de l'épisode simulé est cohérente avec celle de l'épisode observé.

Visibilité « au-delà de l'horizon » Les horizons géométriques sont représentés sur la figure 7.10 par les lignes verticales vertes en tirets. Les horizons aux longitudes $97,8^\circ$ et 264° sont calculés à partir de la position relative de l'orage et de la sonde : ils correspondent aux longitudes passant sous Cassini à l'instant où la droite reliant l'orage et la sonde ne passe plus (ou pas encore) par l'intérieur de la planète. La discrétisation des directions initiales des rayons oblige à fixer une section efficace de la sonde suffisante pour être atteinte par ceux-ci. Cette taille apparente de la sonde peut être vue comme une erreur sur la position de Cassini, impliquant une erreur sur la position de l'horizon. Les zones vertes de part et d'autre des horizons correspondent à l'erreur commise en amont et en aval sur la position de l'horizon. Seuls les rayons atteignant Cassini au-delà de ces horizons élargis peuvent être considérés comme provenant d'une source invisible depuis la sonde.

Deux extensions « au-delà de l'horizon » sont clairement visibles, avant et après le corps de l'épisode simulé E62. La figure 7.10(b) montre que ces extensions sont constituées par

un nombre beaucoup plus faible de rayons que le corps de l'épisode. La figure 7.10(c) montre que le nombre moyen de réflexions sous l'ionosphère subies par ces rayons est strictement supérieur à 1, tandis que le corps de l'épisode est construit par des rayons atteignant directement le détecteur. Les rayons atteignant la sonde alors que l'orage n'est pas encore visible ont subi des réflexions sous l'ionosphère.

L'extension après l'épisode est limitée en fréquence entre 11 MHz et 16 MHz sur 15° de longitude. L'extension avant l'épisode présente deux structures : une première extension à toutes les fréquences comprises entre 5 MHz et 16 MHz sur une largeur de 7,5° de longitude et une deuxième structure s'étendant entre 5 MHz et 7 MHz et en longitude sur 40° de plus, correspondant à un plus grand nombre de réflexions sous l'ionosphère. La figure 7.10(d) considère une source ayant une extension en longitude de 7,5° [Fischer 2011a]. La forme globale de l'épisode et des extensions est légèrement élargie mais n'est pas significativement modifiée.

L'épisode observé (figure 7.10(a)) présente une extension à toutes les fréquences d'environ 20° en longitude avant l'horizon Ouest précédée d'une extension d'environ 10° en longitude autour de 5 MHz. L'extension après l'épisode simulé n'est pas observée.

Nous avons étudié plusieurs épisodes présentant des positions relatives variées entre la source et le détecteur. La figure 7.11 montre les observations et les simulations associées de quatre épisodes répartis sur différents temps locaux. Globalement, les simulations et les observations montrent des similarités (existence et forme des extensions, fréquence de coupure basse du corps de l'épisode) mais aucun épisode ne reproduit la forme des observations de manière pleinement satisfaisante. Les divergences entre les simulations et les observations peuvent être attribuées au fait que le modèle d'ionosphère utilisé pour les simulations est un modèle simple, ne prenant pas en compte les variations temporelles et saisonnières de la densité d'électrons ni les petites échelles spatiales. De petites modifications dans le modèle d'ionosphère peuvent avoir des effets significatifs sur la forme des spectres simulés. En particulier, l'effet « au-delà de l'horizon » dépend fortement du profil de densité d'électrons en fonction du temps local. En modifiant le modèle de densité d'électrons, il doit être possible d'améliorer la correspondance entre observation et simulation, et réciproquement, l'étude de la forme et de la position des extensions « au-delà de l'horizon » devrait pouvoir permettre de contraindre les modèles d'ionosphère de Saturne. De par la grande variabilité des profils de densité (figure 7.5), une analyse statistique des occurrences d'apparition des extensions est nécessaire.

Cependant, la présence de détections au-delà des horizons correspondant à des rayons ayant subis plusieurs réflexions sous l'ionosphère avant d'atteindre la sonde est en accord avec l'hypothèse de propagation formulée par [Zarka 2006]. Si cette hypothèse est vérifiée, les extensions au-delà de l'horizon ne doivent apparaître que sous certaines conditions de position relatives entre la source et la sonde.

7.4.2 Conditions d'apparition des SED « au-delà de l'horizon »

Les simulations montrent bien que les SED détectés lorsque l'orage n'est pas visible par les caméras de Cassini ont subis plusieurs réflexions sous l'ionosphère avant d'atteindre la sonde. Pour cela, ces rayons doivent d'abord être piégés sous l'ionosphère au

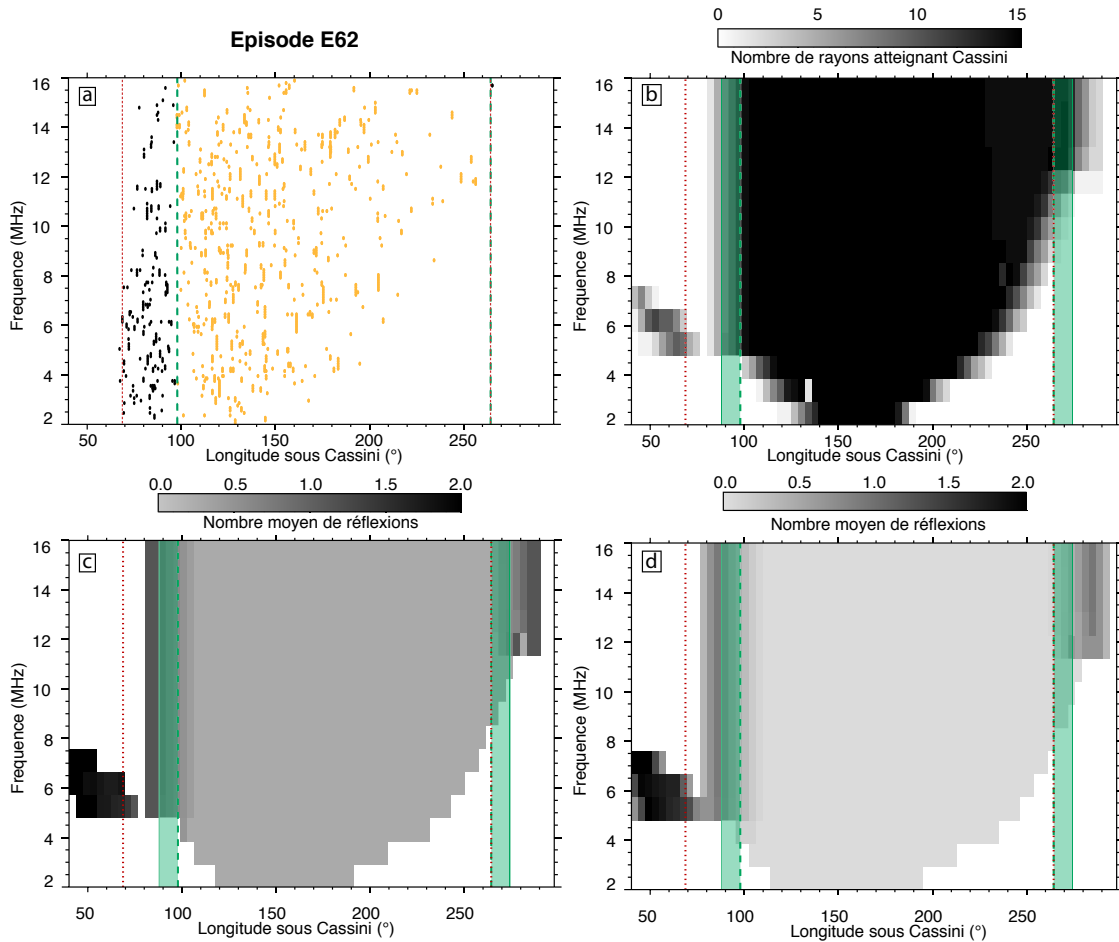


FIGURE 7.10 – Visibilités observées et simulées de l'épisode E62. a) : Détection par RPWS des SED dans le plan fréquence-longitude de Cassini. Les SED indiqués en jaune correspondent aux détections lorsque l'orage est visible depuis la sonde, en noir lorsque l'orage est au-delà des horizons. b) : Nombre de rayons atteignant Cassini, provenant d'une source ponctuelle. c) : Nombre moyen de réflexions subies par les rayons atteignant Cassini provenant d'une source ponctuelle. d) : Nombre moyen de réflexions subies par les rayons atteignant Cassini pour une source d'extension $7,5^\circ$ de longitude. Les zones gris clair correspondent aux gammes de fréquences et de longitudes pour lesquelles Cassini est atteint par des rayons n'ayant subi aucune réflexion. Les lignes verticales vertes internes correspondent à la longitude sous Cassini à l'instant où l'orage franchit les horizons Ouest et Est. Les zones vertes de part et d'autre de ces horizons représentent l'erreur sur la position de l'horizon due à la taille apparente du détecteur : seuls des rayons atteignant Cassini au-delà de ces horizons élargis peuvent être considérés comme provenant d'une source invisible pour la sonde. Les lignes pointillées rouges délimitent les extensions (limites à 98% du nombre de SED détectés dans l'extension). Les simulations montrent une extension avant l'horizon Ouest à toutes les fréquences proches de l'horizon et dans une gamme de fréquence limitée, centrée sur 6 MHz bien avant l'horizon, ainsi qu'une extension plus faible après l'horizon Est à haute fréquence.

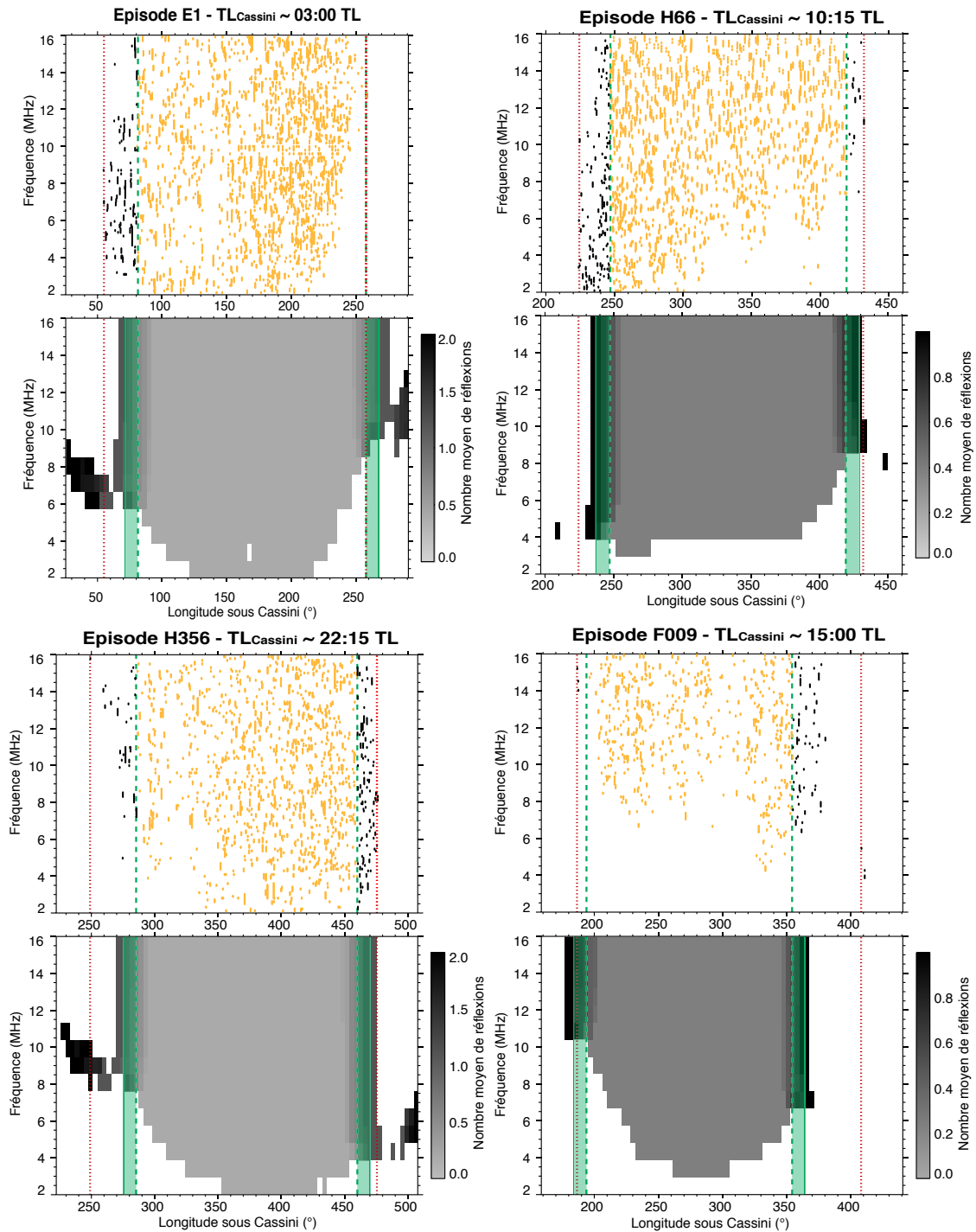


FIGURE 7.11 – Observations et simulations associées des épisodes E1, F009, H66 et H356. Les simulations et les observations montrent des similarités (fréquences de coupure, extension au-delà des horizons) mais aucun épisode simulé ne reproduit la forme des observations de manière pleinement satisfaisante.

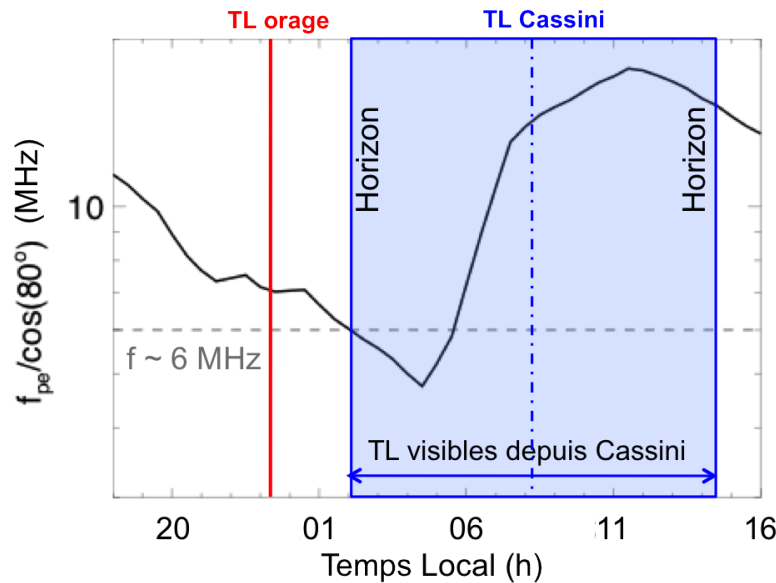


FIGURE 7.12 – Conditions ionosphériques d'apparition de SED « au-delà de l'horizon ». La fréquence de coupure pour une onde incidente à 80° sur le profil de densité d'électrons en temps local est représentée en noir, Cassini est située vers 08:00 TL et l'hémisphère visible s'étend de 02:00 TL à 14:00 TL, l'orage est positionné à 23:30 TL. Une onde émise à 6 MHz et atteignant l'ionosphère en faisant un angle de 80° avec la normale à l'ionosphère « ressent » une fréquence de coupure d'environ 7 MHz au niveau de l'orage, elle est réfléchiée sous l'ionosphère jusqu'à atteindre l'horizon où la fréquence plasma ressentie devient égale à la fréquence de l'onde qui peut alors s'échapper et atteindre la sonde.

moment de l'émission, puis pouvoir s'échapper au niveau de l'horizon visible : la fréquence de l'onde doit être inférieure à la fréquence plasma de l'ionosphère au dessus de l'orage et être supérieure à la fréquence plasma de l'ionosphère au niveau de l'horizon.

$$f_p(\text{horizon}) < f < f_p(\text{orage}) \quad (7.4)$$

Comme l'angle d'incidence des rayons sur l'ionosphère est à peu près constant au cours des réflexions consécutives d'un même rayon, ces conditions impliquent que la valeur du pic de densité d'électrons au dessus de l'orage doit être supérieure à la densité d'électrons au niveau de l'horizon et qu'elle varie de façon monotone entre ces deux positions. La figure 7.12 schématise cette situation, la fréquence de coupure pour une onde incidente à 80° sur le profil de densité d'électrons en temps local est représentée en noir, Cassini est situé vers 08:00 TL et l'hémisphère visible s'étend de 02:00 TL à 14:00 TL, l'orage est positionné à 23:30 TL. Une onde émise à 6 MHz rencontre une fréquence de coupure d'environ 7 MHz au niveau de l'orage, elle est réfléchiée sous l'ionosphère jusqu'à atteindre l'horizon où la fréquence de coupure devient égale à la fréquence de l'onde qui peut alors s'échapper et atteindre la sonde.

L'hypothèse de propagation des SED sous l'ionosphère implique que les extensions avant l'horizon (source en amont de l'horizon) doivent apparaître lorsque la source est située dans une région où le gradient de densité par rapport au temps local est négatif

et les extensions après l’horizon (source en aval de l’horizon) lorsque la source est située dans une région où le gradient de densité par rapport au temps local est positif. Pour savoir si cette hypothèse est vérifiée par les observations, nous avons mené une étude statistique sur l’occurrence des extensions avant ou après l’horizon en fonction du temps local de la source, comparée au profil en temps local du gradient de densité d’électrons.

7.5 Étude statistique des effets « au-delà de l’horizon »

Afin de mener cette étude statistique sur les occurrences des détections « au-delà de l’horizon » nous avons construit un catalogue regroupant tous les épisodes (587) détectés entre 2004 et 2009⁵ (avant l’équinoxe). Pour chaque épisode, la catalogue inclut :

- la répartition des SED détectés dans le plan temps-fréquence,
- la position de Cassini (distance, latitude, longitude et temps local) et de l’orage (longitude et temps local⁶, table 7.1) aux instants correspondants au début de l’épisode, aux franchissements des deux horizons par l’orage, au passage de l’orage à l’aplomb de Cassini (milieu du corps de l’épisode) et à la fin de l’épisode,
- le nombre de SED détectés avant l’horizon Ouest, entre les deux horizons et après l’horizon Est, pour toutes les fréquences allant de 1.8 MHz à 16.1 MHz ainsi que dans les bandes de fréquence [1.80 – 4.70] MHz, [4.70 – 7.50] MHz, [7.50 – 10.3] MHz, [10.3 – 13.1] MHz, et [13.1 – 16.1] MHz.

La figure 7.13 montre les morphologies d’épisodes présentant des extensions « au-delà de l’horizon ». Les droites pointillées vertes représentent les horizons et délimitent les SED détectés lorsque l’orage est visible depuis la sonde (jaunes) ou non (noirs). Les lignes pointillées rouges délimitent l’extension au-delà de l’horizon (98% du nombre de SED détectés dans l’extension). Les chiffres en noirs (respectivement bleu) indiquent le nombre de SED détectés avant l’horizon, entre les deux horizons et après l’horizon à toutes les fréquences (respectivement dans chaque bande de fréquence).

Les détections de SED sont également variables sur de courtes échelles de temps. La figure 7.14 montre les détections de SED pour quatre épisodes consécutifs entre le 02 et 04 février 2008. Lors du premier épisode (F143) environ 46000 SED sont détectés, 21000 lors de l’épisode F144 puis seulement 290 et 163 lors des épisodes suivants F145 et F146.

Pour obtenir des informations sur les conditions d’apparition des extensions avant et après l’horizon, nous avons besoin de connaître le profil de densité électronique en fonction du temps local, ainsi que les gradients associés. Pour cela, nous avons utilisé deux modèles de densité d’électrons à 35°S de latitude :

5. Entre le 11 mars 2008 et 15 juillet 2008 (lors de l’orage F) deux systèmes nuageux séparés de 30° en longitude sont détectés par l’instrument ISS. Nous ne tiendrons pas compte de ces épisodes pour l’étude statistique, car il n’est pas possible de définir avec certitude leur position par rapport aux horizons vus de Cassini.

6. Le temps local de l’orage est déterminé par la relation $TL_{orage}(t_{detection})$ donnée par [Fischer 2011a].

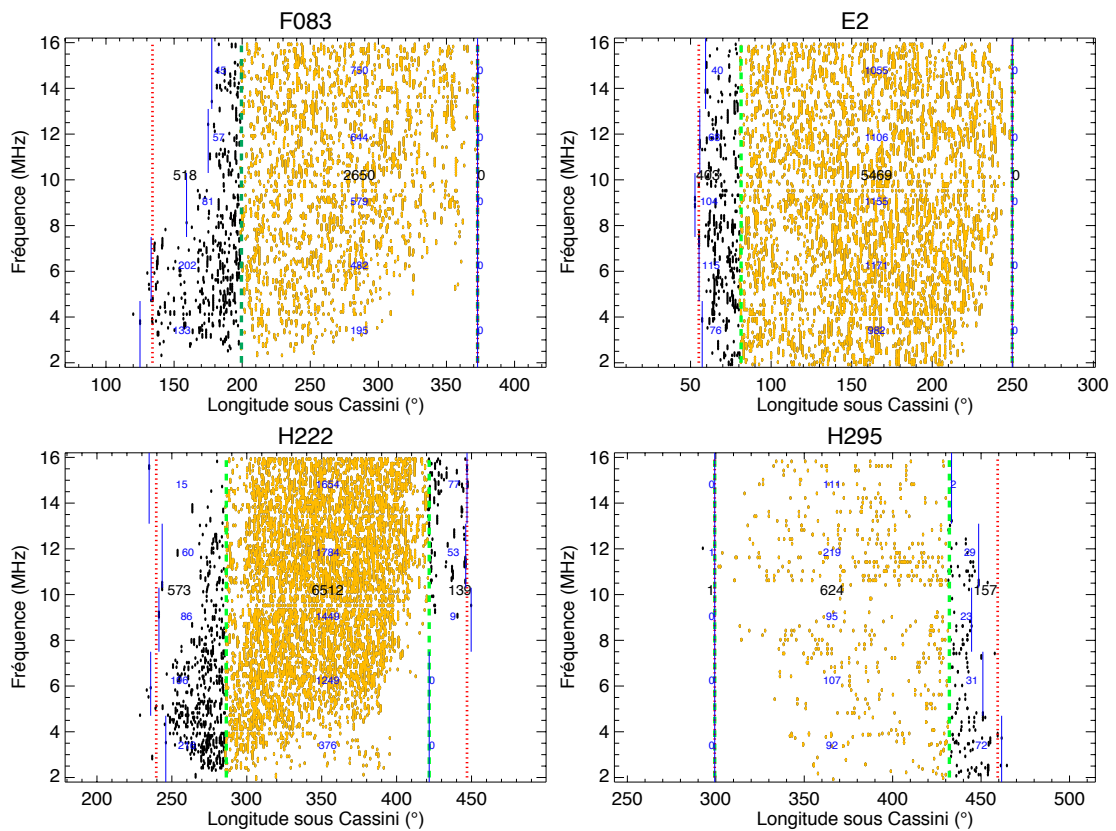


FIGURE 7.13 – Morphologies d'épisodes présentant des extensions « au-delà de l'horizon ». Les droites pointillées verte représentent les horizons et délimitent les SED détectés lorsque l'orage est visible depuis la sonde (jaunes) ou non (noirs). Les lignes pointillées rouges délimitent l'extension au-delà de l'horizon (98% du nombre de SED détectés dans l'extension). Les chiffres noirs (respectivement bleus) indiquent le nombre de SED détectés avant l'horizon, entre les deux horizons et après l'horizon à toutes les fréquences (respectivement dans cinq bandes de fréquence). F083 : apparition de l'extension à basse fréquence puis à toutes les fréquences près de l'horizon. E2 : extension à toutes les fréquences dès l'apparition. H222 : extension avant l'horizon à basse fréquence et extension après l'horizon à haute fréquence. H295 : extension après l'horizon à basse fréquence.

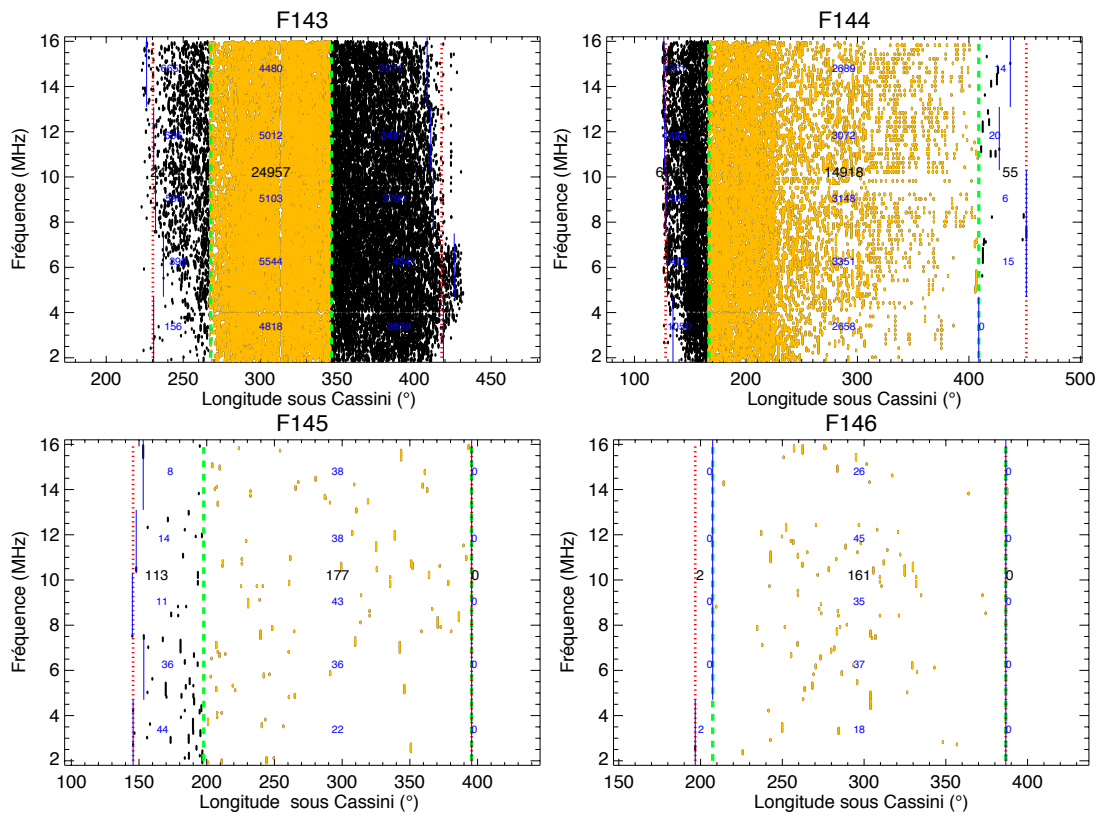


FIGURE 7.14 – Variabilité du nombre de SED détectés sur quatre épisodes consécutifs entre le 02 et 04 février 2008. Les droites pointillées vertes représentent les horizons et délimitent les SED détectés lorsque l'orage est visible depuis la sonde (jaunes) ou non (noirs). Les lignes pointillées rouges délimitent l'extension au-delà de l'horizon (98% du nombre de SED détectés dans l'extension). Les chiffres noirs (respectivement bleus) indiquent le nombre de SED détectés avant l'horizon, entre les deux horizons et après l'horizon à toutes les fréquences (respectivement dans cinq bandes de fréquence).

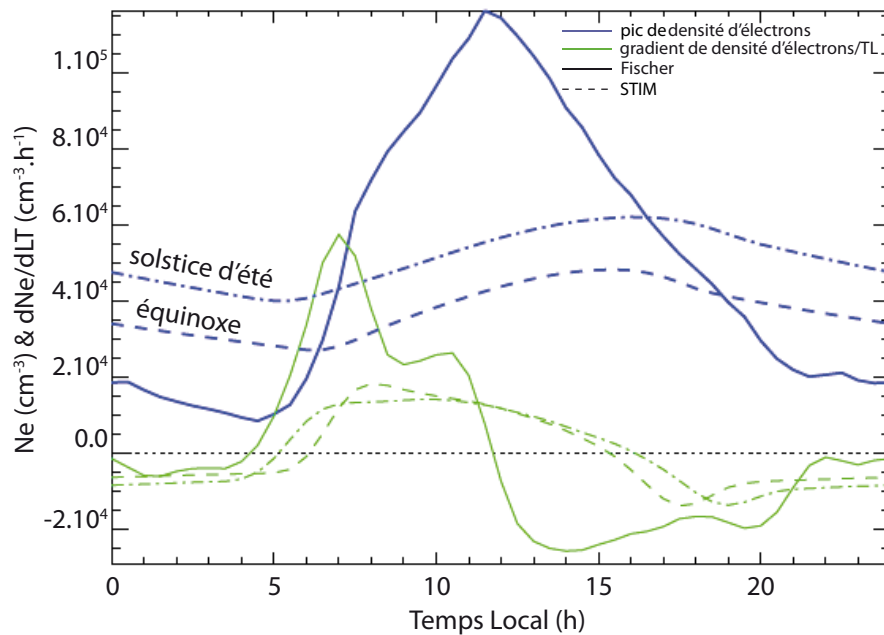


FIGURE 7.15 – Profils du pic de densité d'électrons à 35°S en fonction du temps local pour les modèles [Fischer 2011a] (courbe bleue pleine) et [Müller-Wodarg 2012] à l'équinoxe et au solstice d'été (courbes bleues tirets et tirets-points) et profils des gradients associés en fonction du temps local (en vert). Pour des raisons d'échelle, les profils de densité de [Müller-Wodarg 2012] sont multipliés par 2 et ses gradients de densités sont multipliés par 10, tandis que le gradient de [Fischer 2011a] est multiplié par 2.

- le profil en temps local donné par [Fischer 2011a], utilisé pour les simulations, construit à partir de l'étude de la fréquence de coupure des SED (voir figure 7.5)
- le profil en temps local donné par le modèle de circulation général *Saturn Thermosphere Ionosphere Model* (STIM) qui modélise la réponse globale de la haute atmosphère de Saturne aux contraintes solaires (illumination, variations saisonnières, ...) et magnétosphériques (précipitation de particules énergétiques, ...) [Müller-Wodarg 2012].

La figure 7.15 représente les profils de densités de Fischer et STIM en fonction du temps local, ainsi que leurs dérivées en fonction du temps local. Le gradient du modèle de Fischer est négatif (pic de densité d'électrons décroissant) entre 12:00 TL et 04:15 TL et positif entre 04:15 TL et 12:00 TL, tandis que les gradients de STIM sont négatifs entre environ 16:00 TL et 05:30 TL. Les profils au solstice et à l'équinoxe de STIM ne sont décalés que d'environ 1 heure en temps local. Par la suite, nous nous intéresserons aux distributions du nombre d'épisodes en fonction du temps local de la source ou de Cassini. Le pas en temps local des distributions des épisodes n'étant pas inférieur à l'heure, nous considérerons par la suite un profil moyen de ces deux profils pour le modèle STIM.

7.5.1 Effet « au-delà de l'horizon » avant l'épisode

On considérera qu'un épisode présente une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode si le nombre de SED détectés avant l'horizon Ouest est supérieur à

10, quelque soit la fréquence. Cette première sélection rassemble 159 épisodes du catalogue. La figure 7.16(a) montre la distribution de tous les épisodes du catalogue (courbe noire) en fonction du temps local de Cassini : les données couvrent tous les temps locaux de 00:00 TL à 24:00 TL. Les épisodes présentant une extension avant l'horizon sont majoritairement observés lorsque Cassini se situe côté matin (courbe rouge et distribution normalisée figure 7.16(b)). La figure 7.16(c) montre la distribution normalisée des épisodes présentant une extension avant l'horizon en fonction de la latitude de Cassini. Ces épisodes sont majoritairement détectés lorsque la sonde est située dans l'hémisphère sud. Les éphémérides de Cassini (figure 7.16(d)) indiquent qu'il existe une corrélation entre le temps local de Cassini et sa latitude : la sonde se trouve toujours dans l'hémisphère sud lorsqu'elle est située côté nuit-matin (de 22:00 TL à 11:00 TL) et dans l'hémisphère nord lorsqu'elle est située côté jour (de 11:00 à 22:00 TL).

Pour vérifier l'hypothèse sur les conditions d'apparition des SED formulée au paragraphe 7.4.2, il est plus pertinent de s'intéresser à la distribution des ces épisodes en fonction du temps local de la source (figure 7.17(a)). On s'attend à ce qu'elle se trouve dans une région où le gradient de densité d'électrons en fonction du temps local est négatif. Les profils de densité d'électrons de Fischer et STIM, ainsi que les gradients associés sont également tracés. Les épisodes présentant une extension avant l'horizon sont majoritairement observés lorsque la source se situe entre 13:00 TL et 05:00 TL, ce qui correspond bien à une gamme de temps locaux pour lesquels le gradient de densité d'électrons du modèle de Fischer est négatif. La correspondance est moins bonne pour STIM.

Pour limiter les effets de propagation entre la source (située dans l'hémisphère sud) et le détecteur, seuls les épisodes observés lorsque la sonde est elle aussi située dans l'hémisphère sud ($\lambda_{Cassini} < -5^\circ$) sont sélectionnés. La figure 7.17(b) montre la distribution de ces 47 épisodes en fonction du temps local de la source. La tendance précédente y est confirmée : tous les épisodes présentant une extension avant l'horizon sont observés lorsque la source se situe dans une région où le gradient de densité d'électrons est strictement négatif, d'après le modèle de Fischer.

Les rayons susceptibles d'être réfléchis sous l'ionosphère entre la source et l'horizon sont ceux dont la fréquence est inférieure à la fréquence plasma du pic de densité d'électrons entre la position de l'orage et l'horizon (voir § 7.8). La figure 7.17(c) montre la distribution des 112 événements présentant une extension avant l'horizon dont le nombre de SED à basse fréquence ($f < 7,5$ MHz) est supérieur à 10 (sans sélection en latitude ici). Comme précédemment, les quelques épisodes qui correspondaient à une source localisée sous un gradient positif n'apparaissent plus dans cette sélection. Les épisodes présentant une extension avant l'horizon aux fréquences inférieures à 7,5 MHz ne sont observés que lorsque la source est située dans une région où le gradient de densité d'électrons est négatif, d'après le modèle de Fischer.

Enfin, la figure 7.17(d) montre la distribution en fonction du temps local de la source des épisodes présentant tous les critères précédant : une extension avant l'horizon à basse fréquence ($f < 7.5$ MHz) pour lesquelles la sonde est situé dans l'hémisphère sud ($\lambda_{Cassini} < -5^\circ$). Ces 37 épisodes sont observés uniquement lorsque l'orage est situé sous

un gradient strictement négatif, d'après le modèle de Fischer. Seuls quelques épisodes correspondent à un gradient positif pour le modèle STIM. Afin de valider l'hypothèse sur les conditions d'apparition des extensions avant l'horizon, la distribution de ces épisodes a également été tracée en fonction de la différence de densité d'électrons à la position de l'orage et à l'horizon, pour les deux modèles de profil de densité (figure 7.18). Comme attendu, cette différence de densité est toujours strictement positive pour le modèle de Fischer et majoritairement positive pour le modèle de Muller-Wodarg.

Les configurations source-horizon pour lesquelles sont observées les extensions « au-delà de l'horizon » avant l'épisode sont donc en accord avec les hypothèses de conditions d'apparition posées au paragraphe 7.4.2.

On notera également que ces distributions présentent une diminution du nombre d'occurrences lorsque la source se situe entre 15:00 TL et 18:00 TL, alors que le gradient est fortement négatif.

7.5.2 Effet « au-delà de l'horizon » après l'épisode

La même étude a été menée pour les extensions « au-delà de l'horizon » apparaissant après l'horizon Est. La figure 7.19 représente la distribution des épisodes ayant plus de 10 SED détectés après l'horizon Est en fonction du temps local de Cassini en fin d'épisode. La figure 7.19(b) montre que ces épisodes sont majoritairement observés lorsque la sonde est située côté soir. Les éphémérides de Cassini imposent donc que la sonde est alors localisée dans l'hémisphère nord.

L'hypothèse d'apparition d'une extension après l'horizon suppose que la source se situe dans une région où le gradient de densité d'électrons en fonction du temps local est positif. La distribution de ces 133 épisodes en fonction du temps local de la source en fin d'épisode (figure 7.20(a)) montre un minimum entre 09:00 TL et 16:00 TL sans lien avec les gradients du pic de densité d'électrons des deux modèles. Le fait que la sonde se situe majoritairement dans l'hémisphère nord ne rend pas pertinente la distribution de tous les événements : non seulement la propagation ne se fait plus le long de la latitude de l'orage, mais l'ombre des anneaux (située dans l'hémisphère nord en cette saison) crée une zone de plus faible densité électronique à travers laquelle les ondes radio vont pouvoir s'échapper. Pour limiter à nouveau les effets de propagation, seuls les 24 épisodes pour lesquels la sonde est située dans l'hémisphère sud ($\lambda_{Cassini} < -5^\circ$) sont sélectionnés (figure 7.20(b)). Deux populations d'événements sont alors présentes : une dans les régions où le gradient de densité d'électrons est positif d'après le modèle de Fischer et une située entre 15:00 TL et 20:00 TL, alors que les gradients des deux modèles sont négatifs. De la même manière que pour l'extension avant l'horizon Ouest, les rayons susceptibles de se propager sous l'ionosphère sont ceux dont la fréquence est inférieure à la fréquence plasma du pic de densité électronique entre la source et l'horizon. En sélectionnant les épisodes pour lesquels le nombre de SED aux fréquences inférieures à 7,5 MHz est supérieur à 10 (figure 7.20(c)), la population correspondant aux gradients négatifs disparaît presque totalement. Seuls demeurent quelques rares

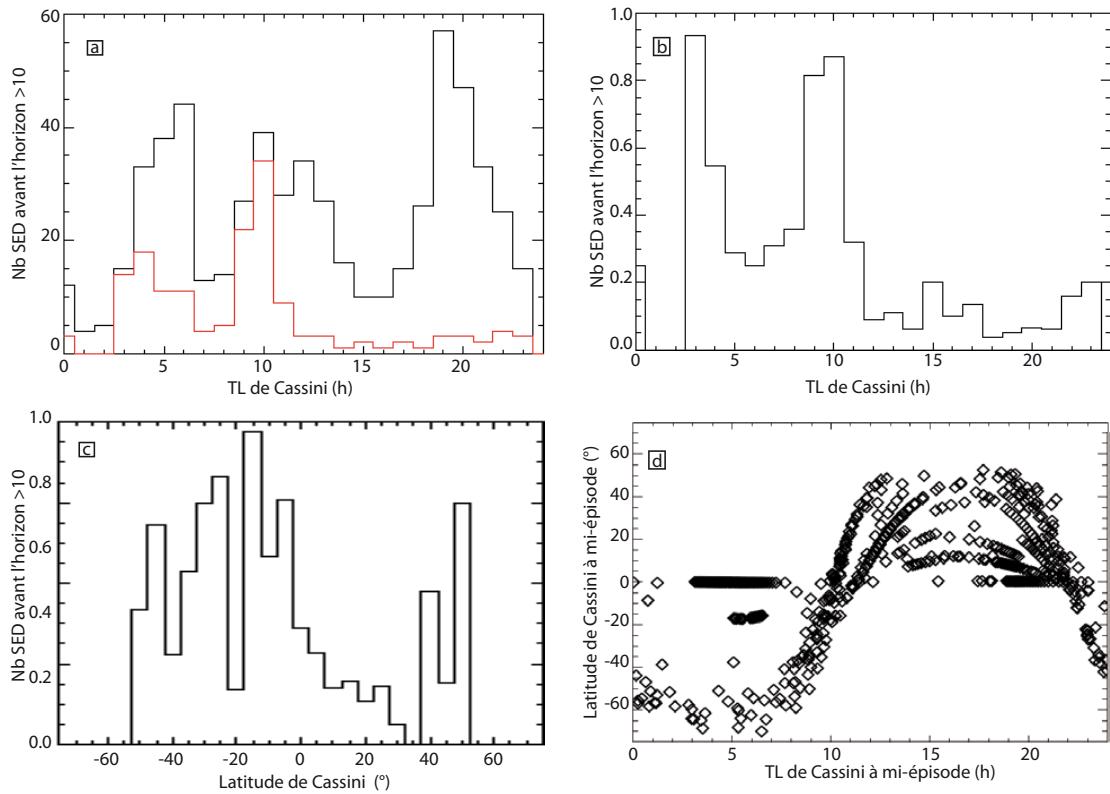
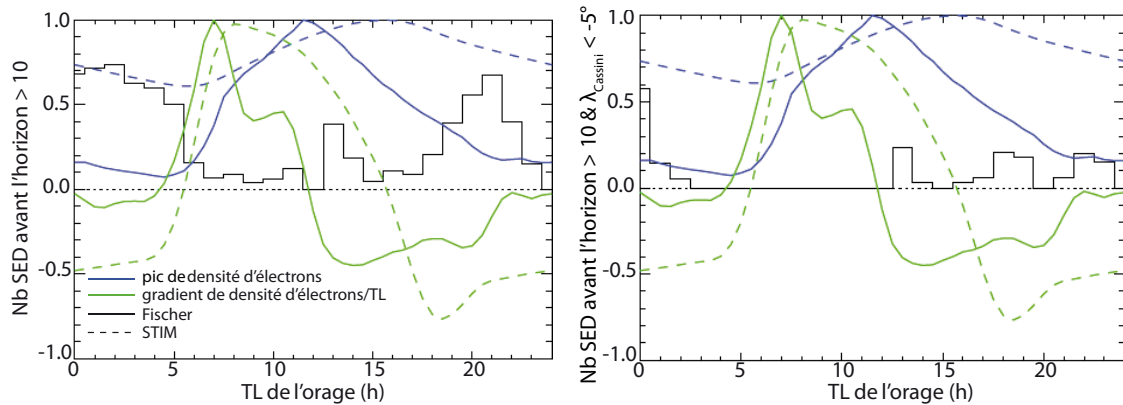
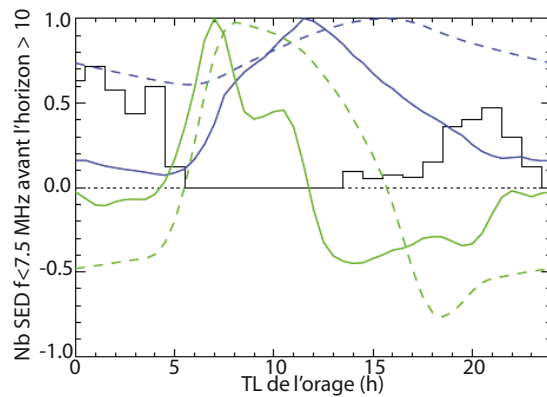


FIGURE 7.16 – Distribution du nombre d'épisode présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode supérieure à 10 SED en fonction du temps local et de la latitude de Cassini en début d'épisode. Le panneau a) représente la distribution en temps local de Cassini de tous les épisodes du catalogue (courbe noire) et des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode (courbe rouge). Le panneau b) représente le rapport de la distribution des épisodes présentant une extension avant l'horizon sur la distribution globale des épisodes. Le panneau c) représente la distribution en latitude de Cassini des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode normalisée par la distribution globale des épisodes. Le panneau d) représente la latitude de Cassini en milieu d'épisode en fonction de son temps local en milieu d'épisode.

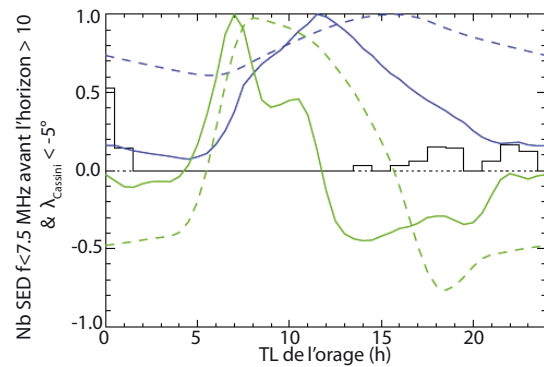


(a) Nombre de SED détectés avant l'horizon > 10 (159 épisodes).

(b) Nombre de SED détectés avant l'horizon > 10 et tels que $\lambda_{\text{Cassini}} < -5^\circ$ (47 épisodes).



(c) Nombre de SED de fréquence inférieure à 7.5 MHz détectés avant l'horizon > 10 (112 épisodes).



(d) Nombre de SED de fréquence inférieure à 7.5 MHz détectés avant l'horizon > 10 et tels que $\lambda_{\text{Cassini}} < -5^\circ$ (37 épisodes).

FIGURE 7.17 – Distribution normalisée des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » avant l'épisode en fonction du temps local de la source, pour différentes sélections. Sont également tracés les profils (courbes bleues) et les gradients normalisés (courbes vertes) du pic de la densité d'électrons du modèle Fischer (courbes pleines) et STIM (courbes pointillées) en fonction du temps local.

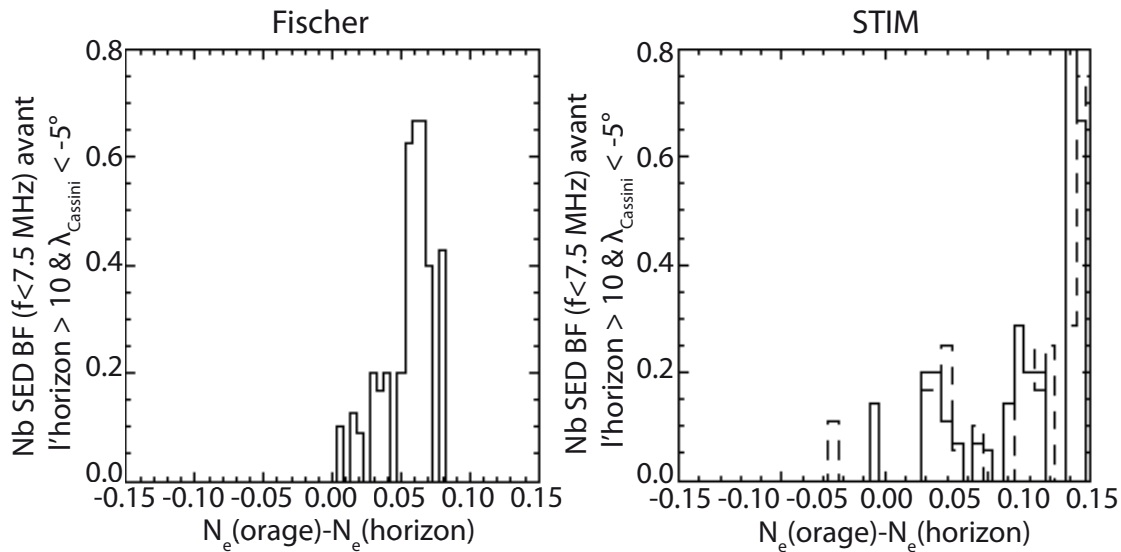


FIGURE 7.18 – Distribution des épisodes ayant plus de 10 SED de fréquence inférieure à 7.5 MHz détectés avant l’horizon et tels que la sonde soit située dans l’hémisphère sud en fonction de la différence de densité électronique entre la position de l’orage au début de l’épisode et l’horizon, pour les modèles de Fischer et STIM. Les extensions avant l’horizon apparaissent bien lorsque le pic de densité électronique au dessus de l’orage est plus élevé que le pic de densité électronique au niveau de l’horizon.

épisodes entre 19:00 TL et 20:00 TL.

Le faible nombre d’épisodes sélectionnés rend la conclusion plus délicate que pour l’extension avant l’horizon. Cependant, cette sélection drastique des épisodes présentant une extension « au-delà de l’horizon » après l’épisode semble également corroborer les hypothèses de conditions d’apparition posées au paragraphe 7.4.2.

Anomalie dans le profil de densité d’électrons Les distributions des épisodes ayant une extension avant l’horizon Ouest ou après l’horizon Est présentent toutes les deux des tendances contraires à celles attendues lorsque la source est située entre 15:00 TL et 20:00 TL. Ce comportement commun aux deux distributions suggère la présence d’une anomalie dans le profil du pic de densité d’électrons en fin d’après midi. Cette anomalie n’est pas visible dans le profil de Fischer car il y a très peu de points de mesure dans cette gamme de temps locaux (voir figure 7.5). La notion de profil moyen à cet endroit n’a donc pas de sens et nous avons considéré que le profil était monotone décroissant côté soir. Cependant la piste d’une anomalie dans le profil de densité en temps local avait déjà été suggérée par [Zarka 1985a] (voir figure ??) et semble confirmée par de nouvelles mesures de fréquence de coupure des SED (Fischer, communication personnelle). L’origine d’une anomalie dans le profil de densité électronique à 35°S entre 15:00 TL et 20:00 TL peut être brièvement discutée :

- l’illumination solaire ne peut pas être à l’origine de cette anomalie, puisqu’elle décroît de façon monotone entre le zénith et le crépuscule

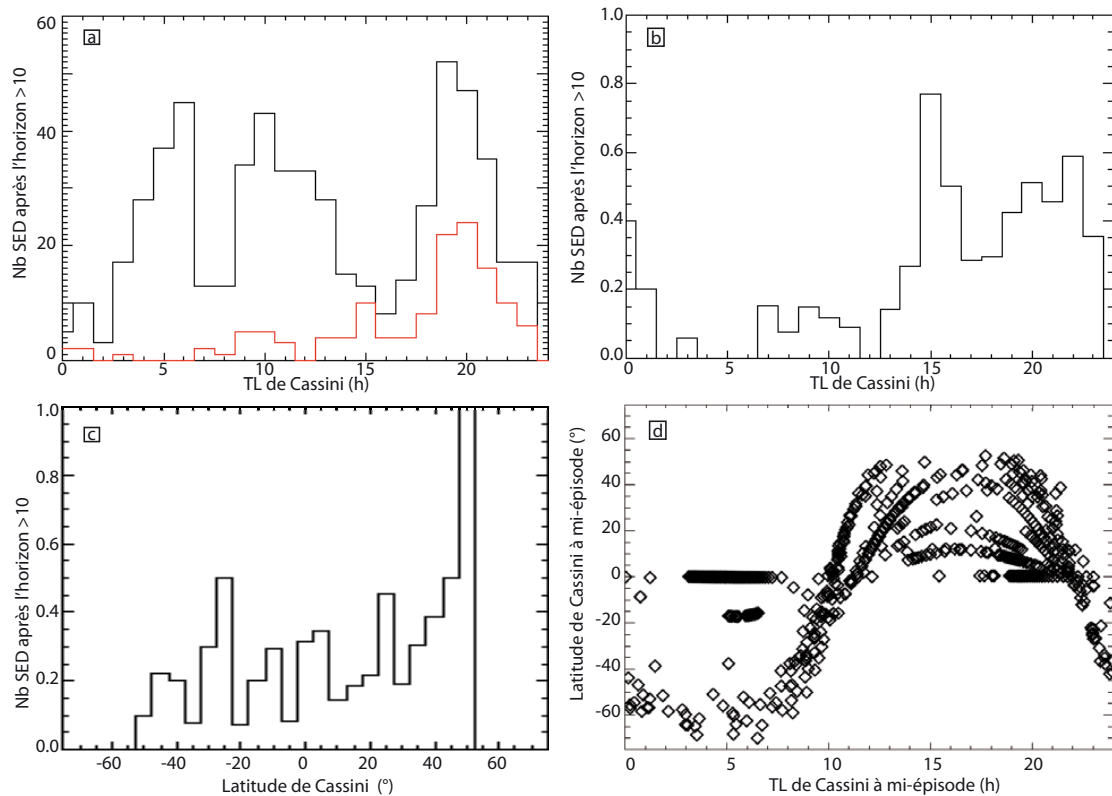
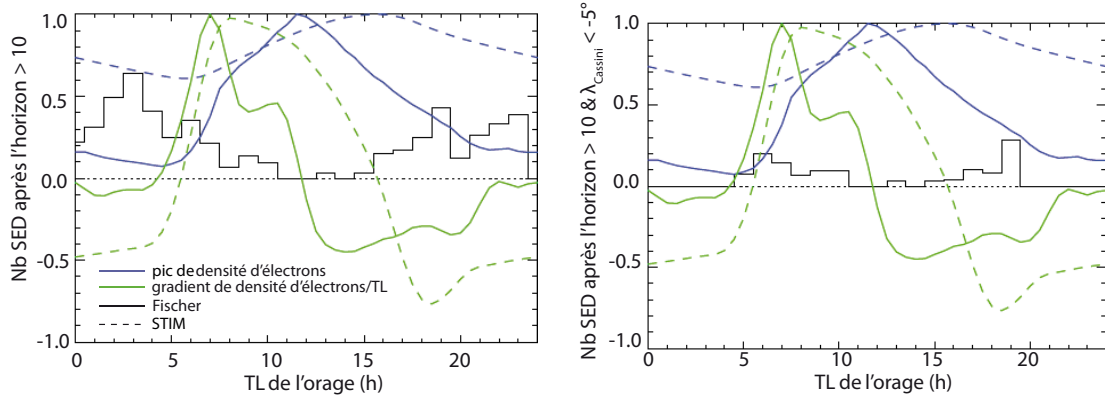
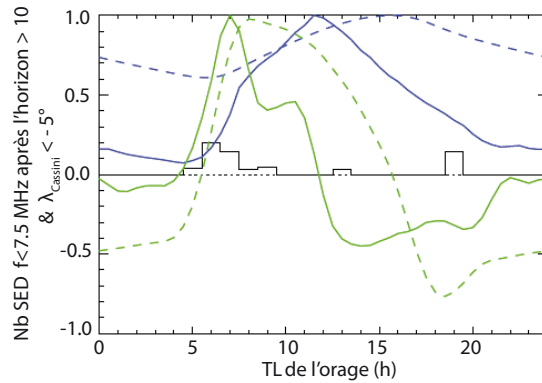


FIGURE 7.19 – Distribution du nombre d'épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode supérieure à 10 SED en fonction du temps local et de la latitude de Cassini en fin d'épisode. Le panneau a) représente la distribution en temps local de Cassini de tous les épisodes du catalogue (courbe noire) et des épisode présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode (courbe rouge). Le panneau b) représente le rapport de la distribution des épisodes présentant une extension après l'horizon sur la distribution globale des épisodes. Le panneau c) représente la distribution en latitude de Cassini des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode normalisée par la distribution globale des épisodes. Le panneau d) représente la latitude de Cassini en milieu d'épisode en fonction de son temps local en milieu d'épisode.



(a) Nombre de SED détectés après l'horizon > 10 (133 épisodes). (b) Nombre de SED détectés après l'horizon > 10 et tels que $\lambda_{Cassini} < -5^\circ$ (24 épisodes).



(c) Nombre de SED de fréquence inférieure à 7.5 MHz détectés après l'horizon > 10 et tels que $\lambda_{Cassini} < -5^\circ$ (11 épisodes).

FIGURE 7.20 – Distribution normalisée des épisodes présentant une extension « au-delà de l'horizon » après l'épisode en fonction du temps local de la source, pour différentes sélections. Sont également tracés les profils (courbes bleues) et les gradients normalisés (courbes vertes) du pic de la densité d'électrons des modèles Fischer (courbes pleines) et STIM (courbes pointillées) en fonction du temps local.

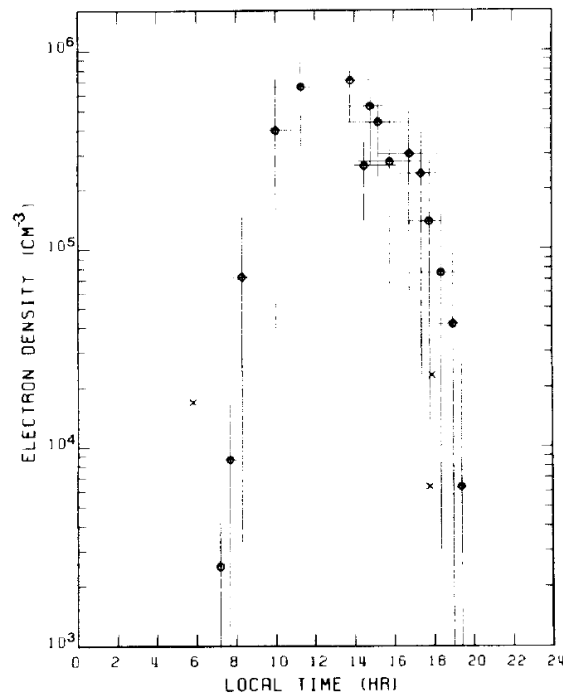


FIGURE 7.21 – Profil en temps local côté jour de la densité d'électrons de l'ionosphère de Saturne déduit des mesures des fréquences de coupures des SED mesurées par Voyager 1. D'après [Zarka 1985a].

- un excès de recombinaison pourrait être dû à un influx d'ions de H_2O provenant des anneaux [Connerney 1984]. Mais comment expliquer la diminution de la densité d'électrons seulement observée entre 15:00 TL et 18:00 TL ?
- un excès d'électrons pourrait être expliqué par une augmentation des précipitations électroniques magnétosphériques. L'observation d'une augmentation de la densité électronique entre 18:00 TL et 20:00 TL est compatible avec la localisation des sources du SKR, générée par la précipitation d'électrons le long des lignes de champ magnétiques côté soir de la planète. Cependant les sources du SKR étant situées à haute latitude magnétique ($\sim 70^\circ$), un mécanisme de diffusion en latitude serait donc nécessaire. Un tel mécanisme n'est pas identifié.

7.5.3 Ilots de SED « au-delà de l'horizon »

Pour certains épisodes, la détection des SED avant l'horizon commence dans une gamme très limitée en fréquence et détachée du reste de l'extension (voir figure 7.22). Ces « îlots » de SED sont également présents dans de nombreuses simulations et correspondent toujours à des rayons ayant subi plusieurs réflexions sous l'ionosphère. Un rayon est réfléchi sous l'ionosphère lorsque sa fréquence est inférieure à la fréquence de coupure de l'ionosphère. Cette fréquence de coupure dépend de la valeur de la fréquence plasma au point d'incidence $f_p(TL_{inc})$ ainsi que de l'angle d'incidence du rayon

sur l'ionosphère θ_{inc} :

$$f_{coupure} = \frac{f_p(TL_{inc})}{\cos(\theta_{inc})} \quad (7.5)$$

La figure ?? représente la fréquence de coupure de l'ionosphère à 35°S de latitude en fonction du temps local du point d'incidence TL_{inc} et de l'angle d'incidence θ_{inc} . A une fréquence donnée, on peut définir l'angle limite de réflexion sous l'ionosphère en fonction du temps local du point d'incidence. La figure 7.24(a) représente pour la fréquence 5 MHz les gammes d'angles d'incidences qui seront réfléchis sous l'ionosphère (zone noire) à un temps local d'incidence donné.

Supposons une source située à 14:00 TL émettant à 5 MHz : tous les rayons atteignant l'ionosphère avec un angle d'incidence inférieur à $\sim 57^\circ$ sortiront directement à l'aplomb de la source⁷. Les rayons atteignant l'ionosphère avec un angle d'incidence supérieur à 60° seront réfléchis. Ils rencontreront à nouveau l'ionosphère vers 17:00 TL. Cette fois seuls les rayons ayant un angle d'incidence supérieur à $\sim 65^\circ$ seront réfléchis : les rayons ayant un angle d'incidence compris entre 57° et 65° pouvant traverser l'ionosphère à ce temps local. Enfin, les rayons réfléchis deux fois rencontreront à nouveau l'ionosphère vers 20:00 TL : seul les rayons ayant un angle d'incidence inférieur à $\sim 70^\circ$ pourront s'échapper, et ainsi de suite (voir schéma 7.24(b)).

Le diagramme d'émission d'une source est donc découpé en faisceaux étroits s'échappant de l'ionosphère à des temps locaux différents. À haute fréquence l'angle d'incidence limite tendant vers 90° , une plus large gamme de rayons peut s'échapper de l'ionosphère à l'aplomb de la source. Cet effet est donc observé essentiellement aux basses fréquences.

7. Un cône d'angle au sommet 120° dont le sommet est situé à la surface de la planète illumine une portion de l'ionosphère large de seulement 4° en longitude soit environ 00:15 TL.

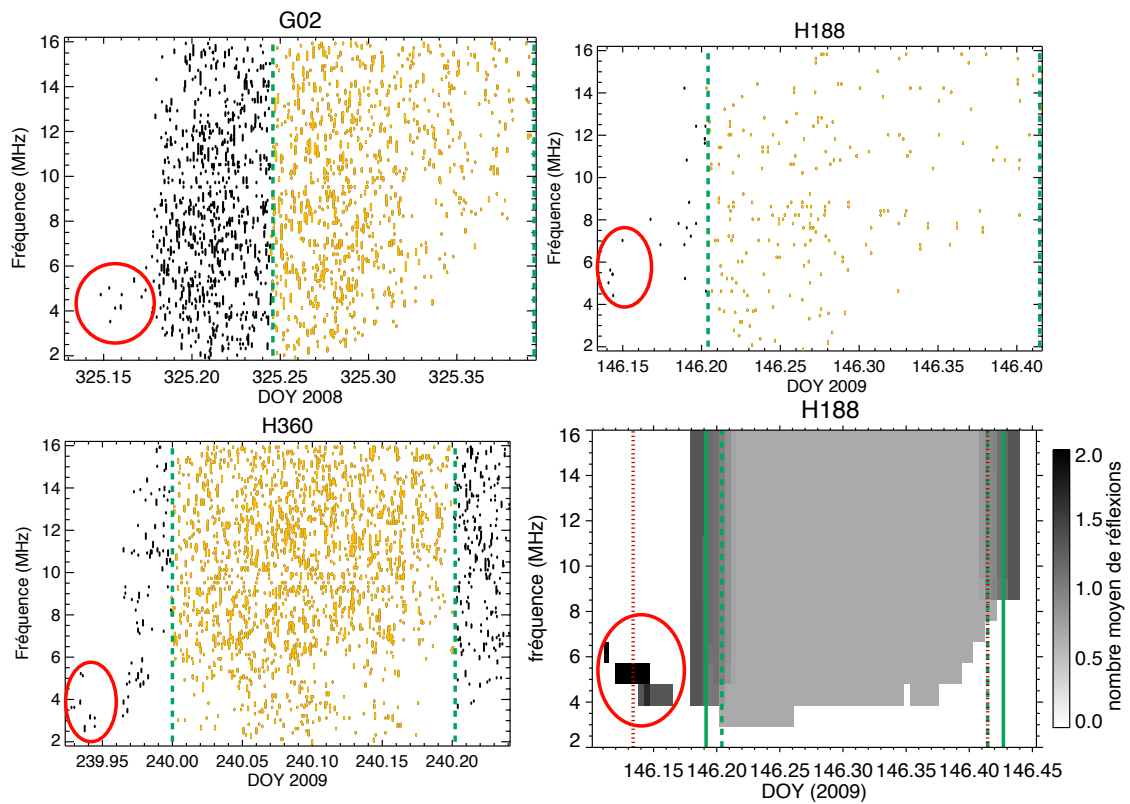


FIGURE 7.22 – Episodes observés et simulations présentant des « îlots » de SED détectés avant l'extension avant l'horizon.

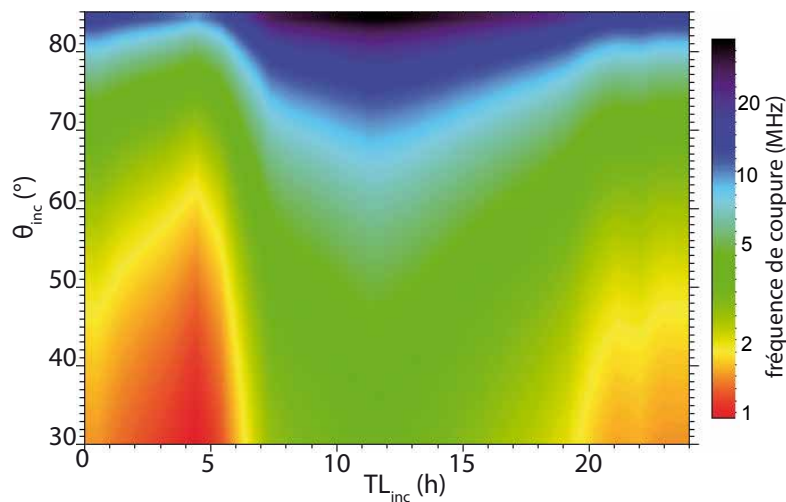
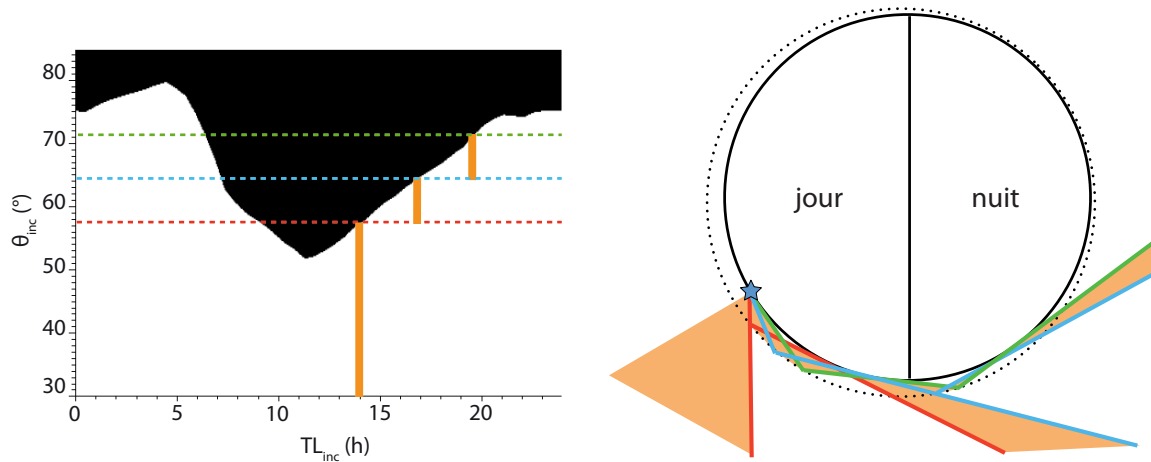


FIGURE 7.23 – Fréquence de coupure de l'ionosphère en fonction du temps local d'incidence et de l'angle d'incidence des rayons sur l'ionosphère.



(a) Angle limite de réflexion sous l’ionosphère en fonction du temps local d’incidence pour $f = 5\text{MHz}$. La zone noire correspond aux angles d’incidence des rayons réfléchis.

(b) Schéma de l’évolution du diagramme de rayonnement de la source à 5 MHz en fonction des angles d’incidence sur l’ionosphère. Le diagramme d’émission initialement isotrope forme des faisceaux étroits sortant à des temps locaux différents, responsables de la formation des « îlots » de SED détectés en amont des extensions avant l’horizon.

FIGURE 7.24 – Schéma explicatif de la formation des « îlots » de SED détectés en amont des extensions avant l’horizon.

7.6 Conclusion

Nous avons montré que :

- Les simulations des visibilité des détections radio montrent des extensions « au-delà de l’horizon » correspondant à des rayons ayant subi plusieurs réflexions sous l’ionosphère,
- Les distributions des épisodes présentant une extension avant ou après l’horizon sont cohérentes avec l’hypothèse d’un piégeage des ondes sous l’ionosphère au moment de l’émission suivit d’une traversée de l’ionosphère au niveau de l’horizon.

L’effet de détection « au-delà de l’horizon » des signatures radio des éclairs d’orages de Saturne est donc bien expliqué par une propagation sous l’ionosphère entre la source et l’horizon visible depuis la sonde. Cette hypothèse de propagation permet d’expliquer la forme des extensions, ainsi que la présence des « îlots » de SED. Elle permet également de prédire les conditions d’apparition des extensions avant ou après les horizons, et par ce fait de contraindre les modèles d’ionosphère à 35°S. Nous avons notamment montré que le profil de Fischer, déduit de l’étude des fréquences de coupure des épisodes, est plus cohérent avec les apparitions des extensions que le modèle STIM. Cette étude nous a également permis d’émettre une hypothèse sur la présence d’une anomalie dans le secteur 15:00 - 20:00TL de l’ionosphère.

L'écart entre les épisodes simulés et les observations associées peut être dû à plusieurs raisons :

- la variabilité des profils ionosphériques aux grandes et aux petites échelles de temps, ainsi qu'aux petites échelles spatiales (figure 7.5), alors que le modèle utilisé pour les simulations est un modèle simple et statique,
- la variabilité des morphologies et des nombre de SED détectés lors des épisodes consécutifs,
- les biais de visibilité dus à la position de Cassini (notamment lorsque la sonde se situe dans l'hémisphère Nord).

PROPAGATION DU RAYONNEMENT KILOMÉTRIQUE TERRESTRE À TRAVERS LES CAVITÉS AURORALES

Sommaire

8.1	Introduction	201
8.2	Mécanismes d'émission des ondes radio dans les régions aurorales	203
8.2.1	Description du plasma dans les régions aurorales	203
8.2.2	Instabilité Maser Cyclotron	205
8.2.3	Application aux distributions des vitesses des électrons dans les sources aurorales	206
8.3	Modélisation du milieu de propagation	208
8.3.1	Modélisation de la distribution des vitesses des électrons	210
8.3.2	Modélisation de la cavité aurorale	210
8.3.2.1	Extérieur de la cavité	210
8.3.2.2	Intérieur de la cavité	210
8.3.2.3	Bords de la cavité	211
8.3.3	Modélisation de la source du rayonnement	211
8.4	Simulations	212
8.4.1	Scénario de base	212
8.4.2	Influence de l'échelle des gradients	213
8.4.3	Influence de la taille de la cavité	215
8.4.4	Influence de la fréquence de l'onde	217
8.4.5	Influence de la densité et de l'énergie thermique des électrons	217
8.4.6	Influence de l'énergie des électrons au pic de la distribution	221
8.5	Conclusion	224

8.1 Introduction

Le rayonnement kilométrique auroral (AKR) est le pendant radio des émissions aurorales terrestres qui sont observées dans une vaste gamme de longueurs d'onde allant de l'infrarouge (IR) à l'ultraviolet (UV); la partie visible du spectre de ces émissions forme les fameuses aurores polaires. Ce rayonnement radio est émis à haute latitude

($\sim 70^\circ$), généralement côté nuit, le long des lignes de champ magnétiques connectées à la queue de la magnétosphère terrestre. Il est généré par la précipitation d'électrons énergétiques, accélérés par des champs électriques parallèles aux lignes de champ magnétiques et se reconnectant dans l'ionosphère terrestre. Une partie de ces électrons énergétiques est perdue par collisions avec les particules neutres de l'atmosphère et produit les émissions aurorales allant de l'IR à l'UV. La fraction d'électrons qui n'est pas perdue par collision génère les émissions radio aurorales par un mécanisme non-thermique : l'Instabilité Maser Cyclotron (IMC, voir § 1.2.2 et § 8.2). Cette instabilité se produit lorsqu'une onde électromagnétique polarisée droite résonne avec le mouvement de giration des électrons autour des lignes de champ magnétiques. Sous certaines conditions (notamment l'existence dans la distribution des vitesses des électrons d'un gradient positif de vitesses perpendiculaires au champ magnétique), l'IMC amplifie les ondes sur le mode RX pouvant s'échapper de la source. Une des conditions nécessaires à l'amplification du mode RX par l'IMC est que le paramètre de plasma $\epsilon = \omega_p^2/\omega_c^2$ soit faible ($\epsilon \ll 1$) [Le Quéau 1984]. Les émissions radio aurorales sont donc produites dans des régions fortement magnétisées et peu denses en plasma. Les mesures in-situ de nombreux satellites montrent que les sources du rayonnement kilométrique terrestre sont situées à l'intérieur de cavités peuplées d'électrons chauds de densités inférieures à 1 cm^{-3} (voir figure 8.1 et [Benson 1979], [Calvert 1981], [Roux 1993], [Louarn 1996a], [Louarn 1996b]). Les caractéristiques précises de l'onde émise (pulsation ω et vecteur d'onde \mathbf{k}) sont contraintes par la distribution de vitesses des électrons. L'ensemble du problème étant axisymétrique autour de la direction du champ magnétique, en première approximation, le diagramme de rayonnement dans la source est un feuillet conique dont l'axe est aligné avec le champ magnétique local. Les caractéristiques du milieu variant spatialement en dehors de la source (densité d'électrons, température, champ magnétique ...), les ondes peuvent ensuite être réfractées ou réfléchies : le diagramme de rayonnement loin des sources peut donc être considérablement plus complexe que celui prédit par l'IMC. Les ondes émises dans les cavités aurorales vont rencontrer de forts gradients de densité proche de la source [Louarn 1996a], [Louarn 1996b] et seront donc particulièrement sensibles à ces phénomènes de propagation.

Plusieurs études se sont intéressées à l'influence de l'environnement de la source sur le diagramme d'émission, aussi bien d'un point de vue observationnel [Green 1977], [Roux 1993], [Louarn 1996a], [Mutel 2008] que de modélisation de la propagation. Plusieurs de ces études de propagation s'intéressent soit à l'environnement dans ou proche de la source [Omid 1984], [Gaelzer 1994], soit à l'environnement très loin de la source (influence de la plasmopause) [Green 1977], [Xiao 2007]. Certaines études cherchent à reproduire des observations particulières afin d'obtenir des informations sur les paramètres de la source [Menietti 2011]. Toutes ces études s'accordent sur l'importance du profil de densité sur le diagramme de rayonnement apparent des sources de l'AKR. Mais si des techniques de tracé de rayons variées sont utilisées (Poeverlein [Omid 1984], hamiltonienne [Xiao 2007], méthode d'Haselgrove [Green 1977],[Menietti 2011]), la plupart supposent une relation de dispersion en plasma froid. Or les observations ainsi que les mécanismes d'émission montrent l'importance de la population d'électrons chauds

(relativistes) dans la description du milieu à l'intérieur des cavités aurorales.

Dans cette étude nous ne cherchons pas à reproduire une observation particulière, mais à modéliser de façon la plus précise possible les conditions dans et en dehors des cavités aurorales terrestres afin de mettre en évidence les effets de propagation que subissent les ondes radio émises par IMC dans ces environnements. Nous avons donc utilisé le code de tracé de rayons ARTEMIS-P pour tester l'influence de paramètres géométriques et énergétiques du milieu ainsi que des paramètres de l'onde sur le diagramme de rayonnement mesuré loin des sources de l'AKR. Le code ARTEMIS-P étant développé à partir de la relation de dispersion en plasma froid, nous montrerons dans un premier temps qu'il est possible de modifier les fréquences caractéristiques du plasma pour prendre en compte le plasma chaud et les effets relativistes des électrons accélérés. Puis nous étudierons l'influence des paramètres du plasma et de l'onde sur le diagramme de rayonnement.

8.2 Mécanismes d'émission des ondes radio dans les régions aurorales

8.2.1 Description du plasma dans les régions aurorales

Les cavités aurorales sont des régions situées à haute latitude dans lesquelles la densité de plasma est inférieure à la densité moyenne des régions voisines de même altitude. Elles se situent entre des structures de potentiel électrique qui accélèrent les électrons magnétosphériques vers la planète et empêchent les électrons ionosphériques d'y pénétrer, provoquant ainsi cette diminution de la densité du plasma à l'intérieur des cavités. Les électrons présents dans la cavité sont des électrons accélérés et ne peuvent pas être considérés comme une population froide. Les mesures in-situ du satellite FAST (Fast Auroral SnapshoT) montrent en effet que l'intérieur des cavités est peuplé d'électrons chauds (d'énergie supérieure à 100 eV), tandis que le plasma extérieur est constitué d'une population froide et d'une population chaude (figure 8.1).

Le code ARTEMIS-P est un code de tracé de rayon fondé sur l'équation de dispersion en plasma froid. Afin de pouvoir l'utiliser pour l'étude de la propagation du rayonnement radio kilométrique dans les cavités aurorales, il est donc nécessaire de se pencher sur la description des plasmas chauds.

Relation de dispersion Les électrons accélérés dans les cavités aurorales peuvent atteindre des vitesses égales à une fraction de la vitesse de la lumière. La figure 8.2 représente la distribution des vitesses des électrons dans une région source de l'AKR : l'ordre de grandeur des vitesses mesurées est de $5 \cdot 10^4 \text{ km.s}^{-1}$, soit environ 15% de la vitesse de la lumière. La description des instabilités dans les plasmas nécessite l'utilisation de modèles cinétiques fondés sur l'équation de Vlasov. Au vu des énergies mises en jeu dans les plasmas sources de l'AKR, nous nous intéresserons à la forme relativiste de l'équation

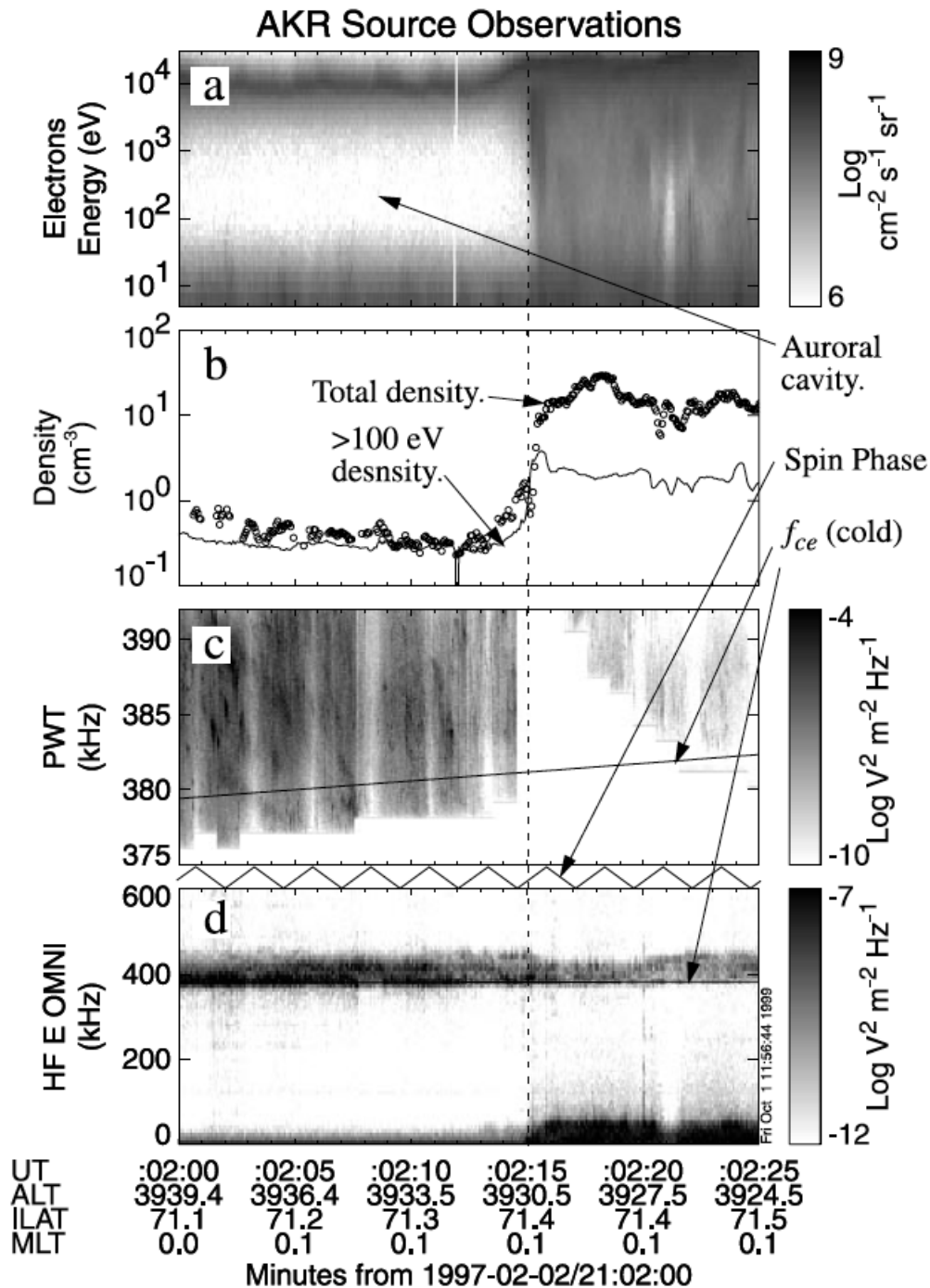


FIGURE 8.1 – Mesures par le satellite FAST (Fast Auroral SnapshoT) de l'énergie et de la densité des électrons dans une région source de l'AKR. L'axe horizontal représente ~ 150 km (25 s d'observation) d'une zone aurorale située à 4000 km d'altitude et à 70° de latitude. La ligne verticale pointillée correspond à la sortie du satellite hors de la cavité aurorale. a) Flux d'énergie des électrons en fonction de l'énergie et du temps. Il n'y a aucun flux d'électron mesurable entre ~ 100 eV et ~ 1 keV dans la cavité aurorale. Les flux inférieurs à 100 eV correspondent aux photoélectrons produits par le satellite. b) Densité totale d'électrons (cercles) et densité des électrons chauds (> 100 eV, trait plein). Une population chaude et une population froide sont présentes en dehors de la cavité, tandis que la cavité n'est peuplée que d'électrons chauds. c) Densité spectrale de puissance du champ électrique mesuré par l'instrument Plasma Wave Tracker. La ligne horizontale représente la fréquence cyclotron en plasma froid (400 kHz). Les émissions s'étendent en dessous de f_{ce} (froid). d) Densité spectrale de puissance du champ électrique entre 0 et 600 kHz. D'après [Ergun 2000].

de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f) + m_e \left(\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0}{\rho_e} \mathbf{E} + \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{b} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (8.1)$$

avec

f	la distribution des vitesses des électrons dans la source
m_e, ρ_e	la masse et la densité de charge des électrons
ω_p, ω_c	les pulsations plasma et cyclotron des électrons
$\mathbf{v}, \mathbf{p} = \Gamma m_e \mathbf{v}$	la vitesse et l'impulsion des électrons, avec Γ le facteur de Lorentz
\mathbf{E}, \mathbf{b}	le champ électrique local et le vecteur directeur unitaire du champ magnétique local

En considérant une perturbation d'ordre 1 de la distribution d'électron ($f = f_0 + \delta f$), l'ordre 1 de l'équation de Vlasov perturbée devient :

$$\left[i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}) + \frac{v_{\perp}}{r_L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \delta f + m_e \left(\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0}{\rho_e} \delta \mathbf{E} + \omega_c \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (8.2)$$

où les indices \parallel et \perp font références aux composantes parallèles et perpendiculaires au champ magnétique local et $\mathbf{x} = (r_L \cos \alpha, r_L \sin \alpha, x_{\parallel})$ avec $r_L = \Gamma \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$ le rayon de Larmor des électrons et α l'angle d'attaque. En supposant que $v^2/c^2 \ll 1$, soit $d\mathbf{p} \sim \Gamma m_e d\mathbf{v}$:

$$\left[i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}) + \frac{\omega_c}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \delta f + \left(\frac{\omega_p^2}{\Gamma} \frac{\varepsilon_0}{\rho_e} \delta \mathbf{E} + \frac{\omega_c}{\Gamma} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (8.3)$$

Au premier ordre, la perturbation δf dans un plasma relativiste peut s'exprimer de la même manière que dans un plasma froid en remplaçant la pulsation cyclotron ω_c par $\Omega_c = \omega_c/\Gamma$ et la pulsation plasma ω_p par $\Omega_p = \omega_p/\sqrt{\Gamma}$. Afin de retrouver la relation de dispersion nécessaire à toute étude de propagation, le tenseur diélectrique est obtenu en intégrant cette équation sur l'ensemble des vitesses. Cette tâche est rendue complexe par la dépendance de Γ avec la vitesse et implique que la relation de dispersion exacte dépend de la fonction de distribution des vitesses. Des relations de dispersion approchées peuvent être obtenues en faisant des hypothèses sur la distribution des vitesses (voir par exemple [Pritchett 1984]) et/ou des approximations sur les éléments du tenseur diélectrique (voir par exemple [Louarn 1996b]). En supposant que la largeur de la distribution en énergie des électrons ε_{th} est faible devant la valeur en énergie du pic de la distribution des électrons, ou bien que le facteur de Lorentz Γ est proche de 1, on peut considérer que Γ est indépendant de la vitesse et est entièrement déterminé par la valeur moyenne de l'énergie des électrons ε_{\ominus} . On notera

$$\Gamma_{\ominus} = 1 + \frac{\varepsilon_{\ominus}}{mc^2} \quad (8.4)$$

Dans cette approximation, le tenseur diélectrique se calcule de la même façon qu'en plasma froid et l'expression de l'indice de réfraction est équivalente à la relation d'Appleton-Hartree 2.61 :

$$n^2 = 1 - \frac{2\tilde{X}(1 - \tilde{X})}{2(1 - \tilde{X}) - \tilde{Y}^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{\tilde{Y}^4 \sin^4 \theta + 4(1 - \tilde{X})^2 \tilde{Y}^2 \cos^2 \theta}} \quad (8.5)$$

avec

$$\tilde{X} = \frac{\Omega_{p\ominus}^2}{\omega^2}, \quad \tilde{Y} = \frac{\Omega_{c\ominus}}{\omega}, \quad \Omega_{p\ominus} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\Gamma_\ominus}} \quad \text{et} \quad \Omega_{c\ominus} = \frac{\omega_c}{\Gamma_\ominus} \quad (8.6)$$

La pulsation de coupure du mode X devient donc :

$$\Omega_{X\ominus} = \frac{\Omega_{c\ominus}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\Omega_{p\ominus}^2}{\Omega_{c\ominus}^2}} \right) \quad (8.7)$$

Le facteur Γ_\ominus étant supérieur à 1, la pulsation de coupure du mode X corrigée peut donc être inférieure à la pulsation cyclotron ω_c , ce qui n'est jamais le cas de la pulsation de coupure du mode X en plasma froid ω_X . Dans l'approximation faiblement relativiste ($\Gamma_\ominus^{-1} \simeq 1 - v_\ominus^2/2c^2$), un simple développement limité au premier ordre en v_\ominus^2/c^2 permet de retrouver l'expression de la pulsation de coupure du mode X en plasma chaud utilisée par [Louarn 1996b] :

$$\Omega_{X\ominus} \simeq \omega_c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} - \frac{v_\ominus^2}{2c^2} \right) \quad (8.8)$$

8.2.2 Instabilité Maser Cyclotron

L'Instabilité Maser Cyclotron est le mécanisme d'émission du rayonnement kilométrique dans les cavités aurorales par amplification d'ondes électromagnétiques. Cette émission IMC est produite par des électrons qui, dans leur repère propre, ont un mouvement de giration autour du champ magnétique de même fréquence que l'onde amplifiée. La condition de résonance est donc donnée par :

$$\omega = \frac{\omega_c}{\Gamma_r} + k_{\parallel} v_{r;\parallel} \quad (8.9)$$

où ω est \mathbf{k} sont la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde amplifiée, Γ_r et \mathbf{v}_r le facteur de Lorentz et la vitesse des électrons résonants. Si l'on introduit l'indice de réfraction de l'onde $n = kc/\omega$, ainsi que l'angle θ entre le vecteur d'onde et le champ magnétique local, la condition de résonance se réécrit :

$$\omega(\theta) = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} + \frac{v_{r;\parallel}}{c} n(\omega, \theta) \omega(\theta) \cos \theta \quad (8.10)$$

Dans l'approximation faiblement relativiste ($\Gamma_r^{-1} \sim 1 - (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2c^2$), la condition de résonance entre l'onde et les particules dans le plan des vitesses (v_{\parallel}, v_{\perp}) est un cercle de centre v_0 sur l'axe v_{\parallel} et de rayon R tels que :

$$v_0 = \frac{\omega}{\omega_c} n(\omega, \theta) c \cos \theta$$

$$R = \sqrt{v_0^2 - 2c \left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right)}$$

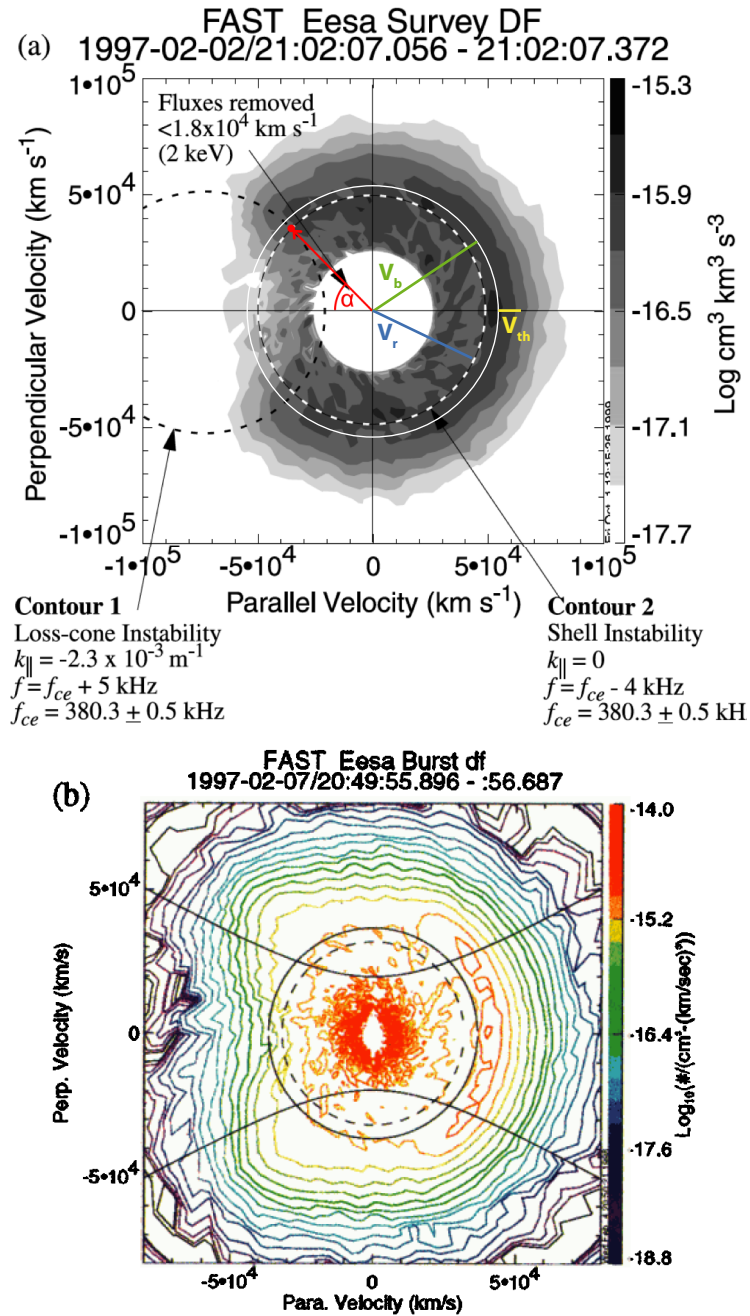


FIGURE 8.2 – Mesures par le satellite FAST de la distribution des vitesses des électrons dans la région source de l'AKR. a) : distribution des vitesses dans la région source décrite dans la figure 8.1. Les niveaux de gris représentent la densité dans l'espace des phases. Les dénominations « parallèle » et « perpendiculaire » font référence à la direction du champ magnétique local. Le cercle de résonance lié à l'instabilité « cône de perte » est représenté en tirets noirs, le cercle de résonance de l'instabilité « coquille » est représenté en tirets blancs. Le point rouge correspond au point d'intersection entre l'instabilité « cône de perte » et l'instabilité « coquille ». L'angle α correspond à l'angle du cône de perte. La vitesse v_b (verte) correspond à la vitesse du pic de la distribution (cercle blanc), la vitesse v_{th} (jaune) correspond à la vitesse thermique des électrons et la vitesse v_r (bleue) correspond à la vitesse de résonance (rayon du cercle de résonance). D'après [Ergun 2000]. b) : distribution des vitesses mesurée par FAST dans une région source. Les contours de couleurs représentent la densité dans l'espace des phases. Le cercle en tirets correspond au cercle de résonance de l'instabilité « coquille ». D'après [Delory 1998].

Le taux de croissance de l'onde γ est obtenu en intégrant, sur ce cercle de résonance, le gradient de la fonction de distribution des vitesses par rapport aux vitesses perpendiculaires :

$$\gamma \propto \iint v_{\perp}^2 \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \delta \left(\omega - k_{\parallel} v_{r\parallel} - \frac{\omega_c}{\Gamma_r} \right) dv_{\parallel} dv_{\perp} \quad (8.11)$$

Une amplification de l'onde ($\gamma > 0$) requiert une inversion de populations en vitesse perpendiculaire au champ magnétique ambiant $\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} > 0$ dans le domaine où la condition de gyrorésonance est vérifiée.

8.2.3 Application aux distributions des vitesses des électrons dans les sources aurorales

La figure 8.2 montre la fonction de distribution en « fer à cheval » (*horseshoe*) des vitesses dans une région source de l'AKR. On peut représenter la largeur à mi-hauteur de cette distribution par la vitesse v_{th} correspondant à une énergie moyenne $\epsilon_{th} = m_e v_{th}^2 / 2$. De plus, les électrons de cette distribution gagnent une énergie ϵ_b en étant accélérés. L'énergie moyenne des électrons ϵ_{\ominus} , nécessaire au calcul du facteur de Lorentz Γ_{\ominus} est donc donnée par : $\epsilon_{\ominus} = \epsilon_b + \epsilon_{th}$.

Les deux contours indiqués en pointillés figurent les cercles de résonance possibles pour cette distribution. Le contour 2, centré sur la vitesse nulle, correspond à l'instabilité dite « coquille » (*shell*) : cette instabilité favorise la croissance des ondes dont le vecteur d'onde est perpendiculaire au champ magnétique local ($v_0 = 0$).

Le contour 1 correspond à l'instabilité dite « cône de perte » : le cône de perte correspond à la portion du plan (v_{\parallel}, v_{\perp}) formé par les angles d'attaque ($\alpha = \arccos(v_{\parallel}/v)$) des électrons dont la fréquence miroir¹ est supérieure à la fréquence cyclotron à la limite de l'ionosphère (f_{c-max}). Ces électrons sont alors perdus par collisions dans l'atmosphère, ce qui dépeuple cette partie du plan (v_{\parallel}, v_{\perp}). Cette instabilité favorise la croissance des ondes obliques dont le vecteur d'onde forme un angle θ_{cp} avec la direction du champ magnétique local tel que :

$$\theta_{cp} = \arccos \left(\frac{v_r}{c \cos \alpha} \right) = \arccos \left(\frac{v_r}{c \sqrt{1 - \frac{f_c}{f_{c-max}}}} \right) \quad (8.12)$$

Ces deux cercles de résonance s'intersectent en un point (point rouge sur la figure 8.2(a)) correspondant aux particules ayant environ l'angle d'attaque du cône de perte

$\alpha = \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{f_c}{f_{c-max}}} \right)$ et une vitesse $v_r \simeq \sqrt{2(\epsilon_b - \epsilon_{th})/m_e}$. La condition de résonance de ces particules avec une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} faisant un angle θ avec la direction du champ magnétique local, s'exprime

1. Fréquence cyclotron au point de réflexion des électrons en giration adiabatique autour de lignes de champ magnétiques convergentes.

alors :

$$\omega(\theta) = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} + n(\omega, \theta) \omega \frac{v_r}{c} \sqrt{1 - \frac{f_c}{f_{c-max}}} \cos \theta \quad (8.13)$$

Fréquence et angle d'émission Pour une même distribution de vitesses des électrons (i.e. pour une même source), la fréquence d'émission et la direction du vecteur d'onde amplifiée sont liées par la relation (8.13). Pour les ondes émises perpendiculairement au champ magnétique, la fréquence d'émission est donnée par $\omega(\theta = 90^\circ) = \omega_c / \Gamma_r$. Pour déterminer la fréquence d'émission en fonction de l'angle d'émission pour une source donnée, il faut résoudre l'équation (8.13) avec $v_r = \sqrt{2(\epsilon_b - \epsilon_{th}) / m_e}$ et avec un indice de réfraction $n(\omega, \theta)$ donné par l'équation d'Appleton-Hartree corrigée pour les plasmas relativistes (équation (8.5)).

La figure 8.3 représente la fréquence d'émission calculée par l'équation (8.13) en fonction de l'angle d'émission pour une source telle que $\epsilon_b = 5$ keV, $\epsilon_{th} = 350$ eV. Le champ magnétique est supposé vertical et décroissant en $1/z^3$: $B(z) = B_0 / (1 + z/R_T)^3$, avec $B_0 = 0.551$ G et $R_T = 6378$ km.

La fréquence d'émission à 90° est fixée à $f(\theta = 90^\circ) = 500$ kHz, la fréquence cyclotron dans la source² vaut $f_c = \Gamma_r f = 504.61$ kHz. La fréquence cyclotron maximale est calculée en supposant $z_{max} = 200$ km, soit $f_{c-max} = 1405.47$ kHz. La densité d'électrons dans la source est fixée à $N_e = 1$ cm⁻³. L'angle d'émission préférentiel par l'instabilité « cône de perte » vaut ici $\theta_{cp} \approx 80^\circ$.

Pour tous les angles d'émission, la fréquence d'émission est supérieure à la fréquence de coupure du mode X en plasma chaud (ω_X chaud). Les ondes sont donc émises sur le mode RX corrigé pour les plasmas chauds. Les ondes émises en faisant un angle $\theta > 85^\circ$ sont émises à des fréquences inférieures à la fréquence de coupure du mode X en plasma froid (ω_X froid) ainsi qu'à la fréquence cyclotron locale en plasma froid (ω_c). Cette situation n'est possible que dans les cavités peuplées de plasma chaud et est couramment observée dans les régions sources de l'AKR (figure 8.1(c) et [Ergun 2000]).

Plus une onde est émise proche de la fréquence de coupure du mode X, plus elle sera sensible aux effets de réfraction proche de la source ($n \neq 1$, voir chapitre 5). Ces effets de propagation proches de la source se feront particulièrement sentir pour les ondes émises quasi perpendiculairement au champ magnétique local. Afin de prendre en compte rigoureusement ces effets de réfraction proche de la source (qui peuvent se révéler importants), la fréquence d'émission est déterminée pour chaque direction d'émission du vecteur d'onde à partir de l'équation 8.13, contrairement aux études précédentes de propagation de l'AKR au voisinage de la source qui supposent un écart *ad hoc* entre la fréquence d'émission de l'onde et la fréquence cyclotron locale [Mutel 2008], [Menietti 2011], [Xiao 2007].

2. La fréquence cyclotron corrigée en plasma chaud étant $F_c = f_c / \Gamma_\Theta = 499.30$ kHz $< f(90^\circ)$.

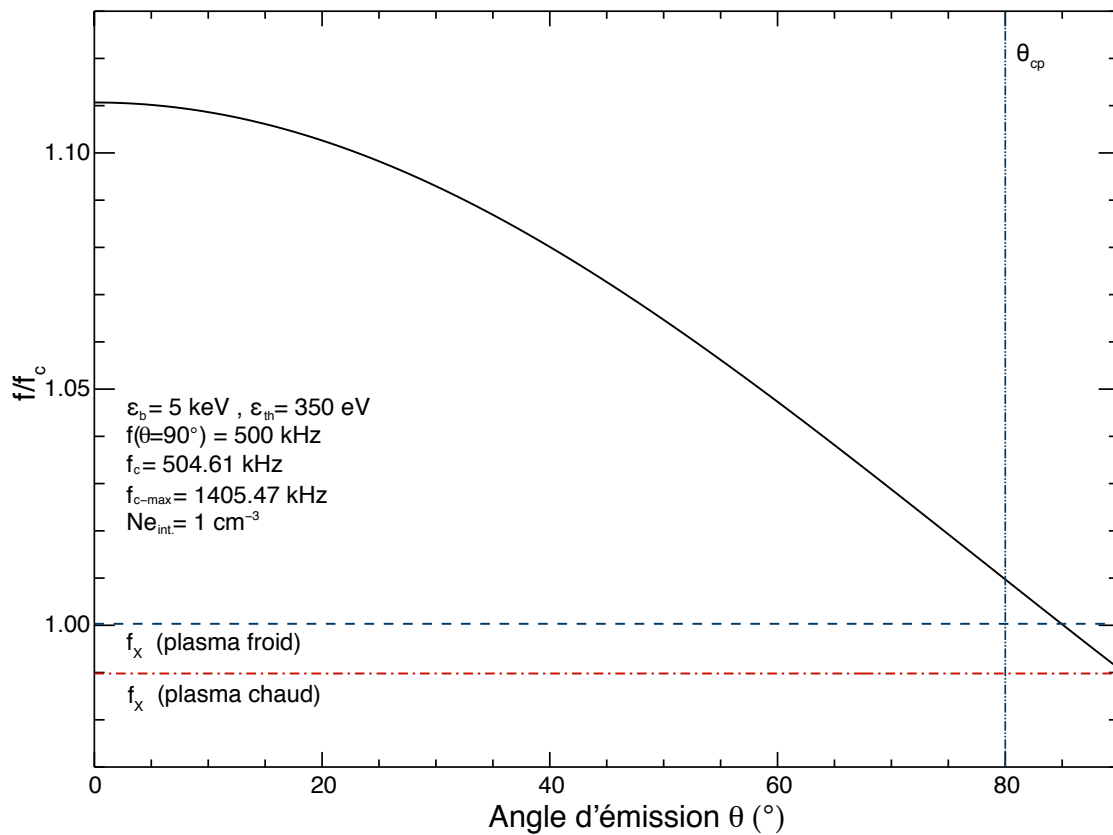


FIGURE 8.3 – Rapport de la fréquence d'émission par Instabilité Maser Cyclotron sur la fréquence cyclotron dans un plasma froid en fonction de l'angle d'émission dans un plasma chaud de faible densité. Lorsque $\theta > 85^\circ$, la fréquence de l'onde est inférieure à la fréquence cyclotron et à la fréquence de coupure du mode X en plasma froid.

8.3 Modélisation du milieu de propagation

Il existe plusieurs mesures des paramètres du plasma dans les cavités aurorales terrestres ([Delory 1998], [Ergun 2000]) qui montrent que les caractéristiques des ces cavités sont grandement variables. La dimension latitudinale est généralement beaucoup plus petite que la dimension longitudinale (de quelques km à quelques centaines de km pour cette dernière), et les bords de la cavité présentent généralement des gradients de densité électronique très raides par rapport à la largeur de la cavité. La densité à l'intérieur de la cavité excède rarement quelques particules par cm^3 .

La modélisation du milieu de propagation est le point clé de notre étude. Nous avons choisi de modéliser une cavité cylindrique peuplée de plasma chaud de faible densité, dont nous pouvons faire varier les paramètres géométriques et énergétiques.

8.3.1 Modélisation de la distribution des vitesses des électrons

La prise en compte de la distribution des vitesses des électrons dans la source se fait via les deux paramètres ϵ_{th} et ϵ_b décrits ci-dessus : ϵ_{th} représente l'énergie thermique moyenne des électrons (largeur à mi-hauteur de la distribution en énergie des électrons) et ϵ_b représente l'énergie gagnée par les électrons lors de l'accélération (énergie du pic de la distribution d'énergie). Ces deux paramètres nous permettent de calculer les facteurs de Lorentz Γ_\ominus et Γ_r nécessaires aux calculs respectifs de la relation de dispersion corrigée en plasma chaud et de la condition de résonance onde-particule.

$$\Gamma_\ominus = 1 + \frac{\epsilon_b + \epsilon_{th}}{m_e c^2} \quad (8.14)$$

$$\Gamma_r = 1 + \frac{\epsilon_b - \epsilon_{th}}{m_e c^2} \quad (8.15)$$

8.3.2 Modélisation de la cavité aurorale

La cavité aurorale est supposée cylindrique selon l'axe Oz et de rayon r_0 . On distinguera le milieu intérieur de la cavité, peuplé de plasma chaud et le milieu extérieur de la cavité, peuplé de plasma froid.

8.3.2.1 Extérieur de la cavité

Champ magnétique La direction du champ magnétique est supposée verticale selon \mathbf{e}_z , son intensité décroissant en $1/z^3$:

$$\mathbf{B}_{\text{ext}}(z) = B_{0\text{ext}} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-3} \mathbf{e}_z$$

avec $B_{0\text{ext}} = 5,51 \cdot 10^{-5}$ T et $R_T = 6378$ km. L'intensité $B_{0\text{ext}}$ est extraite du terme dipolaire du modèle de l'*International Geomagnetic Reference Field* (IGRF) 1995 [Barton 1997].

Densité d'électrons Les mesures aux hautes latitudes en dehors des cavités aurorales montrent une décroissance radiale de la densité d'électrons en $(r/R_T)^{-4.7}$ [Hilgers 1992]. Nous prenons donc :

$$Ne_{ext}(z) = Ne_{0ext} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-4.7}$$

avec $Ne_{0ext} = 400 \text{ cm}^{-3}$.

8.3.2.2 Intérieur de la cavité

Champ magnétique En toute rigueur, le champ magnétique n'est pas affecté par la présence de la cavité. Cependant, le plasma à l'intérieur de la cavité étant chaud, le traitement de la propagation des ondes en plasma froid n'est plus valable. Nous avons montré au paragraphe 8.2.1 que la relation de dispersion en plasma froid peut être corrigée pour les plasmas chauds en remplaçant la pulsation cyclotron par la pulsation $\Omega_{c\Theta} = \omega_c/\Gamma_\Theta$ et la pulsation plasma par $\Omega_{p\Theta} = \omega_p/\sqrt{\Gamma_\Theta}$. Pour prendre en compte l'effet sur la propagation des ondes de la présence de plasma chaud dans la cavité, le champ magnétique à l'intérieur de la cavité sera artificiellement divisé par Γ_Θ .

$$\mathbf{B}_{int}(z) = B_{0int} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-3} \mathbf{e}_z$$

avec $B_{0int} = \frac{B_{0ext}}{\Gamma_\Theta}$.

Densité d'électrons Le plasma étant peu dense et chaud, la densité d'électrons dans la cavité sera supposée uniforme :

$$Ne_{int} = 1 \text{ cm}^{-3}$$

8.3.2.3 Bords de la cavité

On suppose des profils de densité d'électrons et de champ magnétique décrit par une tangente hyperbolique pour relier l'intérieur et l'extérieur de la cavité.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r, z) &= \mathbf{B}_{int}(z) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{ext}(z) - \mathbf{B}_{int}(z)) \left[1 + \tanh\left(\frac{|r| - r_0}{\sigma}\right)\right] \\ Ne(r, z) &= Ne_{int} + \frac{1}{2} (Ne_{ext}(z) - Ne_{int}) \left[1 + \tanh\left(\frac{|r| - r_0}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Les paramètres r_0 et σ représentent respectivement le rayon de la cavité et l'échelle caractéristique des gradients aux bords de la cavité.

8.3.3 Modélisation de la source du rayonnement

La source du rayonnement est supposée ponctuelle et située au centre de la cavité.

Altitude de la source L'altitude de la source est déterminée à partir de la fréquence d'une onde émise dans la direction perpendiculaire au champ magnétique local $f(90^\circ)$. D'après la condition de résonance, la fréquence d'émission à 90° est donnée par $f(90^\circ) = f_c/\Gamma_r$, où f_c est la fréquence cyclotron en plasma froid. Connaissant la valeur de Γ_r et le modèle de champ magnétique, nous pouvons déterminer l'altitude z_s de la source émettant à la fréquence $f(90^\circ)$ par :

$$z_s = R_T \left[\left(\frac{eB_{0ext}}{2\pi m_e f(90^\circ)\Gamma_r} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad (8.16)$$

Fréquence d'émission en fonction de l'angle d'émission Pour chaque source située à une altitude z_s , la fréquence d'émission dépend de l'angle entre le vecteur d'onde et la direction du champ magnétique local à travers la relation (8.13). Pour chaque source et pour chaque rayon, la fréquence d'émission correspondante est calculée en résolvant cette équation.

8.4 Simulations

Dans cette étude nous cherchons à déterminer l'influence de différents paramètres géométriques et énergétiques des cavités aurorales terrestres sur le diagramme de rayonnement loin des sources. Les paramètres considérés sont :

Paramètres géométriques de la cavité	la taille de la cavité r_0 l'échelle caractéristique des gradients σ
Paramètres énergétiques de la source	l'énergie thermique des électrons ϵ_{th} l'énergie des électrons au pic de la distribution ϵ_b
Paramètres de l'onde émise	la fréquence de l'onde f la direction initiale du vecteur d'onde \mathbf{k}

Nous avons utilisé le code ARTEMIS-P pour calculer la trajectoire des ondes radio dans l'environnement proche de la source en faisant varier différents paramètres des cavités. Afin de fournir un cadre aux résultats des simulations, un scénario de base a été choisi, illustrant les phénomènes que peuvent subir les rayons lors de la propagation.

8.4.1 Scénario de base

Dans cette simulation, la cavité fait 300 km de large ($r_0 = 150$ km), l'échelle du gradient aux bords de la cavité³ σ étant de 10 km. L'énergie des électrons accélérés est $\epsilon_b = 5$ keV, leur énergie thermique $\epsilon_{th} = 350$ eV⁴. Ces quatre valeurs sont cohérentes avec les caractéristiques mesurées dans l'environnement terrestre (figure 8.2).

La source émet perpendiculairement au champ magnétique à une fréquence de 500 kHz :

3. Du même ordre de grandeur que la longueur inertielle des ions $l_i = c/\omega_{pi}$.

4. Ces valeurs sont égales à celles de la figure 8.3.

son altitude est donc de 2877,12 km. On s'intéresse aux rayons émis avec un angle θ relativement à la direction du champ magnétique compris entre 70° et 90° (avec un pas de 1°). Les fréquences correspondantes sont calculées par la relation (8.13).

Le panneau de gauche de la figure 8.4 montre les trajectoires de ces rayons calculées par ARTEMIS-P. Le panneau de droite représente l'angle que fait le rayon avec la direction du champ magnétique en dehors de la cavité (lorsque l'on peut considérer que le rayon se propage librement) en fonction de l'angle d'émission. Tout au long de sa trajectoire, un rayon peut subir plusieurs réfractions. Tout d'abord, dans l'environnement proche de la source (quelques kilomètres) les rayons ne suivent pas nécessairement la direction du vecteur d'onde : cette déviation des rayons, plus efficace pour les ondes émises au voisinage de 90° , est due au fait que leur indice de réfraction n'est pas égal à 1 au voisinage de la fréquence de coupure du mode X. L'anisotropie du milieu de propagation due à la présence du champ magnétique implique qu'il existe un angle α non nul entre le vecteur d'onde et le rayon tel que $\tan \alpha \propto (n^2 - 1)$ (chapitre 5). De plus, le champ magnétique décroissant en $(1/z^3)$, un gradient d'indice vertical est présent à l'intérieur de la cavité, déviant les rayons.

Après cette première déviation, le rayon est à nouveau réfracté lorsqu'il atteint le bord de la cavité. Cette réfraction peut aller jusqu'à la réflexion totale de certains rayons qui sont alors renvoyés vers l'intérieur de la cavité. Le gradient vertical de la densité d'électrons et du champ magnétique en dehors de la cavité peut alors permettre à ces rayons de sortir à une altitude supérieure à celle de la réflexion.

Le panneau de droite de la figure 8.4 montre que pour un nombre de réflexions donné, l'angle que forme le rayon avec la verticale en dehors de la cavité est globalement décroissant avec l'angle d'émission. Dans cette simulation les rayons ne sont pas réfléchis pour les angles d'émission inférieurs à 80° (losanges noirs) et l'ouverture du diagramme d'émission en dehors de la cavité est comprise entre 10° et 50° par rapport à la direction du champ magnétique pour des rayons émis entre 70° et 80° , tandis que les rayons émis entre 80° et 90° sont réfléchis une fois (losanges rouges) de sorte que l'ouverture du diagramme de rayonnement en dehors de la cavité est comprise entre 40° et 50° .

L'ouverture du diagramme de rayonnement dépend donc du nombre de réflexions subies par les rayons. Si l'on considère une source émettant préférentiellement de manière quasi perpendiculaire, alors le diagramme de rayonnement se referme légèrement autour de la direction du champ magnétique lorsque l'angle d'émission augmente.

8.4.2 Influence de l'échelle des gradients

Plus les gradients des caractéristiques du milieu de propagation sont forts, plus les effets de réfractions sont importants. Les paramètres de cette simulation sont identiques à ceux du scénario de base, sauf pour l'échelle des gradients de densité et de champ magnétique aux bords de la cavité : ici $\sigma = 3$ km au lieu de $\sigma = 10$ km. Le panneau de gauche de la figure 8.5 montre les trajectoires des rayons calculées par ARTEMIS-P

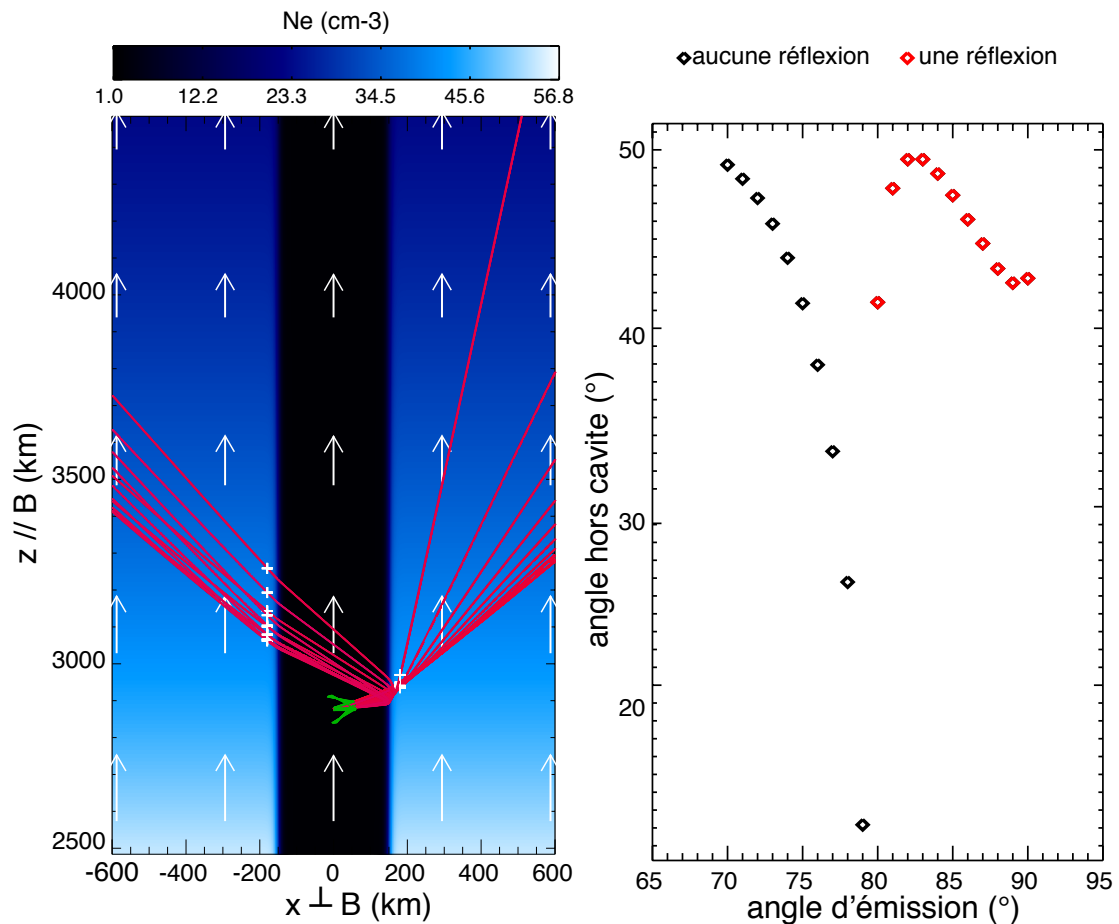


FIGURE 8.4 – Panneau de gauche : tracé de rayons dans une cavité cylindrique de 300 km de diamètre avec un gradient aux bords de 10 km. Les niveaux de bleus représentent la densité d'électrons, les flèches blanches indiquent la direction du champ magnétique. Les rayons sont émis à $f \sim 500$ kHz en faisant un angle compris entre 70° et 90° avec la verticale (flèches vertes). Les croix blanches indiquent les points de sortie de la cavité pour chaque rayon. Panneau de droite : angle que fait le rayon avec la direction du champ magnétique en dehors de la cavité en fonction de l'angle d'émission. Les losanges noirs correspondent aux rayons n'ayant subi aucune réflexion avant de sortir de la cavité, les losanges rouges correspondent aux rayons ayant subi une réflexion avant de sortir de la cavité. Voir §8.4.1.

dans cet environnement. On constate que l'échelle des gradients influe sur le nombre de réflexions que peuvent subir les rayons avant de sortir : certains rayons rencontrant un fort gradient sont réfléchis deux fois ($\theta_0 = 86^\circ$ et 87°), alors que les rayons rencontrant un gradient plus faible ne sont jamais réfléchis plus d'une fois. Ce comportement est lié au fait que le rayon de courbure des rayons est d'autant plus faible que le gradient de densité est élevé.

Le panneau de droite représente la variation de l'angle entre le rayon et la direction du champ magnétique en dehors de la cavité en fonction de l'angle d'émission, pour les deux environnements $\sigma = 3$ km et $\sigma = 10$ km. Quel que soit le gradient, les rayons émis avec un angle inférieur à 80° ne sont pas réfléchis sur les bords de la cavité mais sortent directement de la cavité en étant réfractés. Dans les deux cas, pour ces rayons, l'angle que forment les rayons avec la direction du champ magnétique en dehors de la cavité décroît avec l'angle d'émission. Tous les rayons émis à plus de 80° de la direction du champ magnétique sont réfléchis au moins une fois. L'ouverture du diagramme d'émission en dehors de la cavité pour les rayons émis quasi-perpendiculairement ($\theta_0 > 80^\circ$) est compris ici entre 28° et 53° et ne varie pas de façon monotone avec la direction d'émission.

Plus l'échelle du gradient est petite, plus la dispersion des directions des rayons en dehors de la cavité est grande : il est donc beaucoup plus difficile d'extraire un comportement général du diagramme de rayonnement en fonction de l'angle d'émission lorsque le gradient aux bords de la cavité est raide.

Pour la suite des études nous nous intéresserons principalement à des rayons subissant le même nombre de réflexions. La distribution des vitesses des électrons en « fer à cheval » permet une émission principale dans deux directions : celle associée à l'instabilité en « coquille » émettant préférentiellement à 90° et celle associée à l'instabilité du « cône de perte » émettant préférentiellement à l'angle $\theta = \arccos(v_r / (c\sqrt{1 - \frac{f_c}{f_{c-max}}}))$ ($\simeq 80^\circ$ ici). Nous étudierons donc le comportement des rayons émis à 80° , 85° et 90° .

8.4.3 Influence de la taille de la cavité

Dans cette étude nous ne modélisons pas les effets ondulatoires tels que la résonance entre la longueur d'onde et la taille de la cavité. La taille de la cavité jouera un rôle sur l'altitude d'incidence des rayons sur les bords de la cavité : plus la cavité est grande, plus les rayons rencontreront le bord de la cavité à haute altitude.

La figure 8.6 montre les trajectoires des rayons émis à 80° (ligne pleine), 85° (ligne pointillée) et 90° (ligne tiret-point) calculées par ARTEMIS-P pour des cavités de 15 km, 100 km et 300 km de diamètre, tels que $\sigma = 3$ km. La fréquence des ondes et les paramètres énergétiques sont identiques à ceux des études précédentes. Dans les très petites cavités, les rayons sont réfléchis un grand nombre de fois avant de pouvoir sortir de la cavité. Plus la cavité est large, plus le nombre de réflexions avant l'échappement est faible. En effet, plus la cavité est large, plus l'altitude de première incidence des rayons sur le bord de la cavité est élevée et plus la différence de densité d'électrons entre l'intérieur de la cavité et l'extérieur est faible. La densité d'électrons à l'extérieur de la cavité

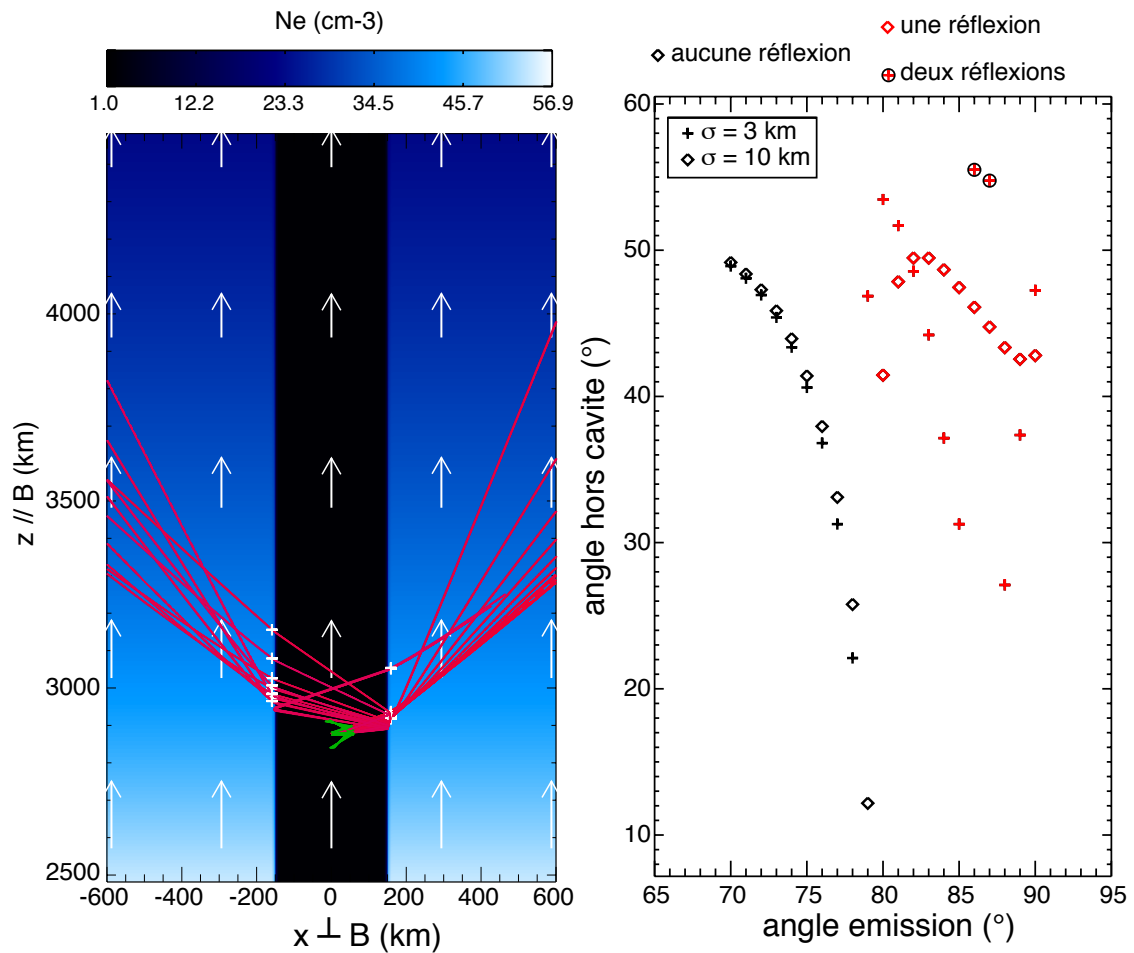


FIGURE 8.5 – Influence de la raideur des gradients aux bords de la cavité. Panneau de gauche : Tracé de rayons dans une cavité cylindrique de 300 km de diamètre avec un gradient aux bords de 3 km. Les rayons sont émis à $f \sim 500$ kHz en faisant un angle avec la verticale compris entre 70° et 90° (flèches vertes). Les croix blanches indiquent le point de sortie de la cavité pour chaque rayon (le tracé équivalent pour un gradient de 10 km est représenté figure 8.4, panneau de gauche). Panneau de droite : Angle que fait le rayon avec la direction du champ magnétique en dehors de la cavité en fonction de l'angle d'émission. Les losanges noirs correspondant aux rayons n'ayant subi aucune réflexion avant de sortir de la cavité, les losanges rouges correspondent aux rayons ayant subi au moins une réflexion avant de sortir de la cavité. Voir §8.4.2.

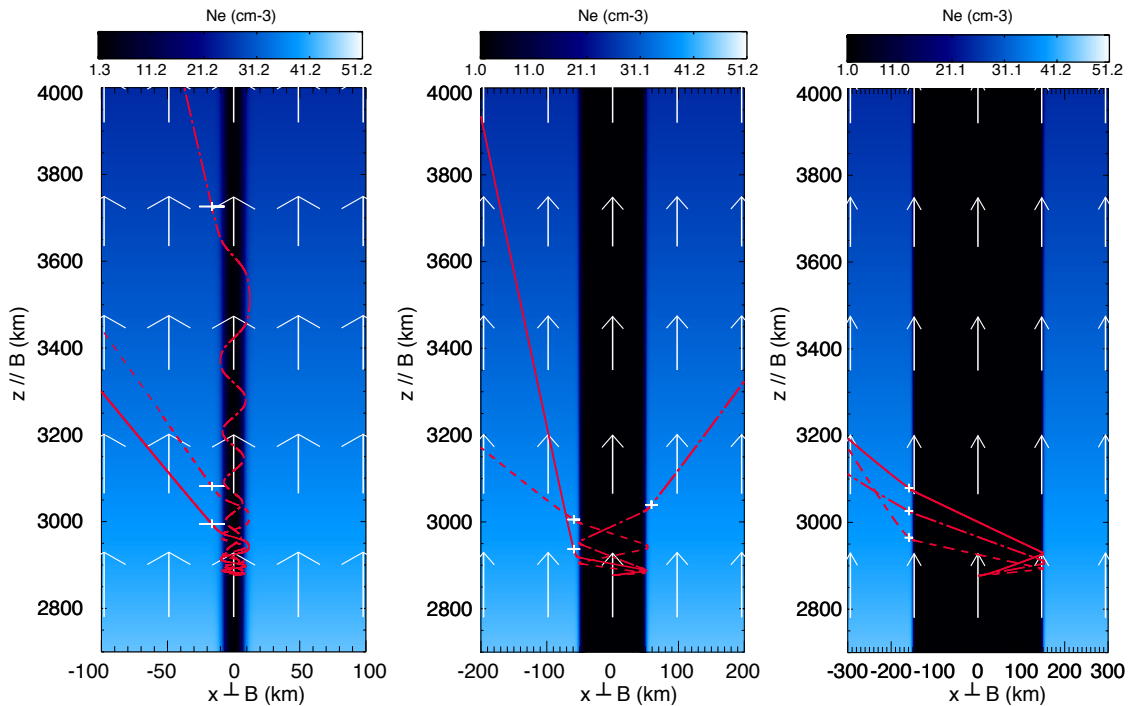


FIGURE 8.6 – Tracés de rayons d’ondes émises à $f \sim 500$ kHz et $\theta = [80^\circ, 85^\circ, 90^\circ]$ (ligne pleine, ligne tirets, ligne point-tiret) pour différentes tailles de cavités ($\sigma = 3$ km). Panneau de gauche : cavité de 15 km de diamètre. Panneau central : cavité de 100 km de diamètre. Panneau de droite : cavité de 300 km de diamètre. Voir §8.4.3.

décroissant en $(1/z^3)$, le gradient d’indice de réfraction n’est pas perpendiculaire aux bords rectilignes de la cavité. Lorsqu’un rayon est réfléchi sur le bord de la cavité, l’angle d’incidence doit être compté entre le rayon et la direction du gradient d’indice. L’angle entre le rayon réfléchi et la normale aux bords de la cavité est légèrement supérieur à l’angle entre le rayon incident et la normale aux bords de la cavité : à chaque réflexion, le rayon réfléchi se rapproche de la verticale.

L’indice de réfraction étant croissant avec l’altitude (la densité d’électrons décroissant $1/z^3$), l’angle que forme le rayon avec la verticale se resserre après une réflexion. L’angle entre le rayon et la direction du champ magnétique en dehors de la cavité sera d’autant plus faible que les rayons ont subi un grand nombre de réflexions. Le diagramme de rayonnement des petites cavités est donc plus resserré que celui des grandes cavités.

8.4.4 Influence de la fréquence de l’onde

La fréquence d’émission de l’onde perpendiculaire fixe l’altitude de la source, par la relation (8.16) : plus la fréquence est basse, plus l’altitude de la source est élevée. Les figures 8.7 et 8.8 représentent les tracés de rayons émis à 80° , 85° et 90° , aux fréquences $f(90^\circ) = 300$ kHz, $f(90^\circ) = 500$ kHz, $f(90^\circ) = 700$ kHz, dans des cavités de 100 km (figure 8.7) et 300 km (figure 8.8) de diamètre, avec $\sigma = 10$ km. L’énergie des électrons au pic de la distribution vaut 5 keV et l’énergie thermique des électrons vaut 350 eV. L’al-

titude des sources est respectivement, 4595,15 km pour $f(90^\circ) = 300$ kHz, 2877,12 km pour $f(90^\circ) = 500$ kHz, 1895,18 km pour $f(90^\circ) = 700$ kHz. Le panneau de droite de ces figures représente les valeurs des angles entre les rayons en dehors de la cavité et la direction du champ magnétique. La dispersion des valeurs à chaque fréquence est assez importante, cependant la tendance générale semble montrer une augmentation de l'angle d'ouverture du diagramme de rayonnement avec la fréquence.

La densité de plasma à l'intérieur de la cavité étant constante et le champ magnétique décroissant avec l'altitude en $(1/z^3)$, le rapport ω_p/ω_c augmente avec l'altitude. Or, plus ce rapport est grand, plus l'indice de réfraction proche de la source est différent de 1. La table 8.1 rassemble les valeurs de l'indice de réfraction dans la source pour chaque rayon aux trois fréquences. Plus la fréquence diminue (donc plus l'altitude augmente), plus l'indice de réfraction diminue. Les effets de réfraction proche de la source avant la première incidence sur les bords de la cavité seront donc plus importants à haute altitude qu'à basse altitude. Le diagramme de rayonnement à l'intérieur de la cavité sera donc plus étroit à basse fréquence qu'à haute fréquence. A l'extérieur de la cavité, on retrouve ce comportement mais brouillé par les effets de réfractions et de réflexions subis par les rayons aux bords de la cavité.

f (kHz)	θ	n	f (kHz)	θ	n	f (kHz)	θ	n
300	80°	0,989	500	80°	0,996	700	80°	0,998
	85°	0,980		85°	0,992		85°	0,996
	90°	0,727		90°	0,932		90°	0,968

TABLE 8.1 – Indice de réfraction proche de la source pour les fréquences 300 kHz, 500 kHz et 700 kHz.

8.4.5 Influence de la densité et de l'énergie thermique des électrons

Nous avons montré que pour un plasma chaud faiblement relativiste, la fréquence de coupure du mode X peut être approchée par l'équation (8.8). Cette fréquence de coupure dépend à la fois de l'énergie thermique des électrons (à travers v_Θ) et de la densité d'électrons dans la cavité (à travers le rapport ω_p^2/ω_c^2). Une modification de ces paramètres doit donc conduire à des variations de même amplitude mais opposées de l'indice de réfraction dans et proche de la source. Nous avons utilisé le code ARTEMIS-P pour différentes valeurs de ϵ_{th} et de densité d'électrons ($N_e = 1 \text{ cm}^{-3}$ et $N_e = 3 \text{ cm}^{-3}$). L'indice de réfraction et l'angle entre le rayon et la direction du champ magnétique sont calculés lorsque le rayon a parcouru 75 km depuis la source (la cavité faisant 300 km de diamètre).

La figure 8.9 représente les valeurs de l'indice de réfraction et de l'angle pour différentes valeurs de ϵ_{th} et différentes densités, en fonction de l'angle d'émission des rayons (80°, 85° et 90°). Les sources générant des émissions obliques ne sont affectées ni par l'énergie des électrons, ni par la densité à l'intérieur de la cavité. La fréquence de ces émissions obliques (déterminée par l'équation (8.13)) est suffisamment grande devant la fréquence de coupure du mode X pour que l'indice de réfraction soit toujours proche de 1. Au

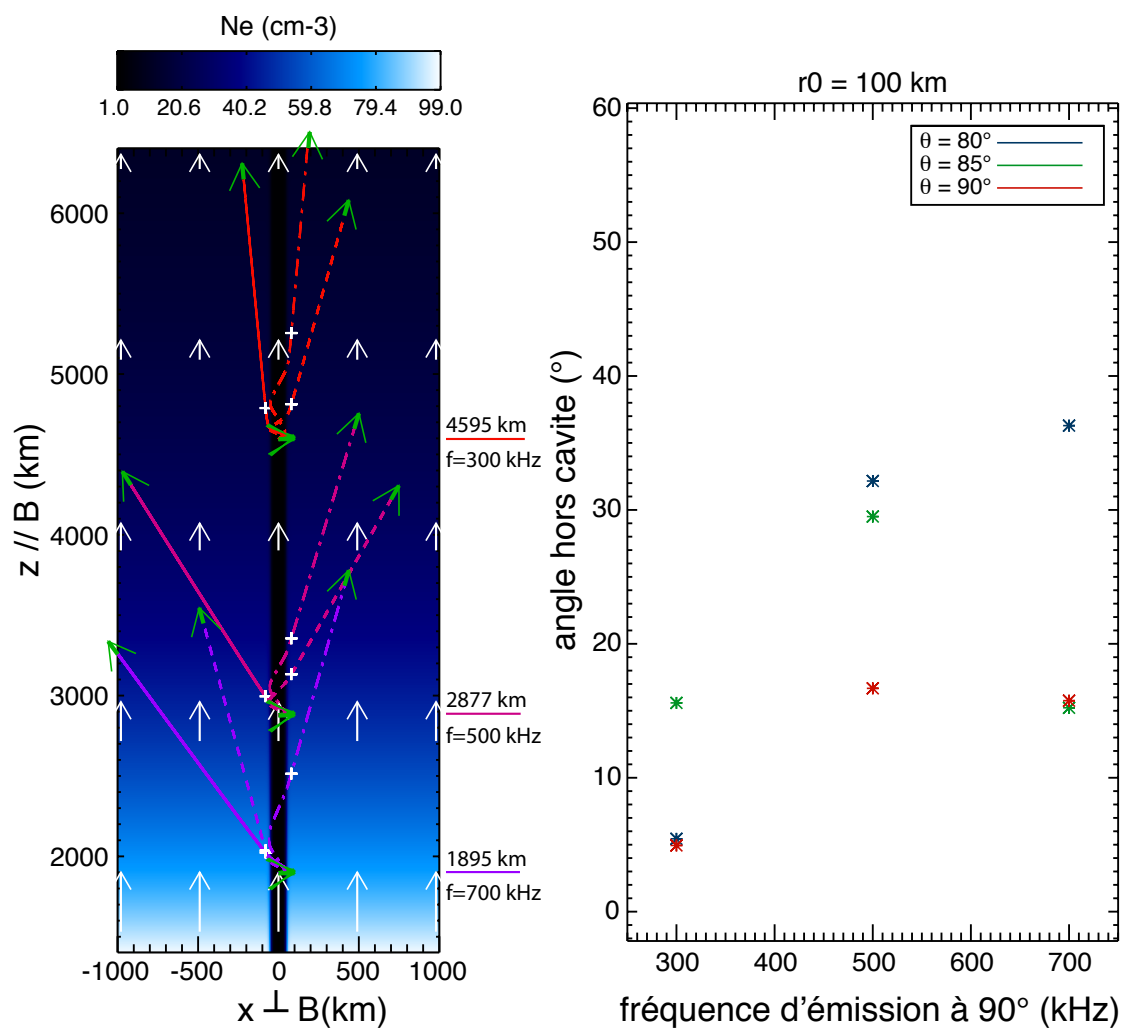


FIGURE 8.7 – Influence de la fréquence de l'onde sur le diagramme de rayonnement pour une cavité de 100 km de diamètre. Panneau de gauche : tracés de rayons d'onde émises à $f \sim 300$ kHz (rouge), $f \sim 500$ kHz (rose) et $f \sim 700$ kHz (violet) et $\theta = [80^\circ, 85^\circ, 90^\circ]$ (ligne pleine, ligne tiret, ligne point-tiret). Panneau de droite : valeur de l'angle entre le rayon en dehors de la cavité et la direction du champ magnétique, en fonction de la fréquence émise perpendiculairement. Voir §8.4.4.

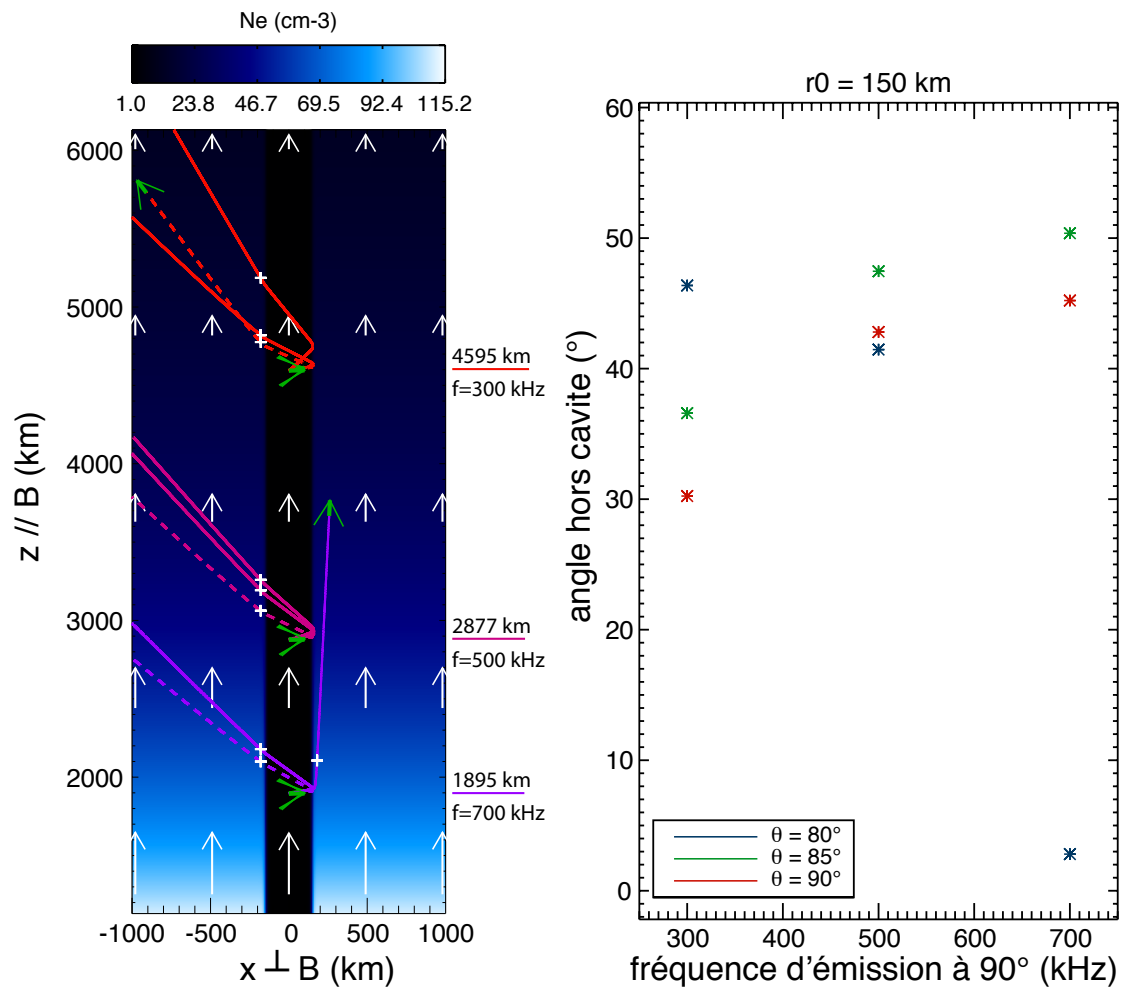


FIGURE 8.8 – Influence de la fréquence de l'onde sur le diagramme de rayonnement pour une cavité de 300 km de diamètre. Panneau de gauche : tracés de rayons d'onde émises à $f \sim 300$ kHz (rouge), $f \sim 500$ kHz (rose) et $f \sim 700$ kHz (violet) et $\theta = [80^\circ, 85^\circ, 90^\circ]$ (ligne pleine, ligne tiret, ligne point-tiret). Panneau de droite : valeur de l'angle entre le rayon en dehors de la cavité et la direction du champ magnétique, en fonction de la fréquence émise perpendiculairement. Voir §8.4.4.

contraire, le comportement des ondes émises à 90° est très dépendant de l'énergie et de la densité des électrons. Pour les faibles densités, l'indice de réfraction et l'angle θ tendent vers zéro lorsque l'énergie thermique des électrons diminue : la fréquence de coupure du mode X se rapprochant de la fréquence de l'onde pour les basses énergies thermiques, l'indice de réfraction devient très différent de 1. Pour les densités plus élevées et les basses énergies thermiques, la fréquence de coupure du mode X devient supérieure à la fréquence de l'onde : pour $\epsilon_{th} = 50$ eV et $\epsilon_{th} = 100$ eV, les ondes sont émises sur le mode Z supraluminique ($n > 1$). Pour $\epsilon_{th} = 150$ eV et $\epsilon_{th} = 200$ eV, la fréquence de l'onde est supérieure à la fréquence de résonance hybride haute mais inférieure à la fréquence de coupure du mode X, la fréquence de l'onde est située dans la bande interdite entre le mode Z et le mode X : l'onde ne peut se propager.

De cette simulation, il apparaît donc que l'énergie thermique des électrons est un paramètre clé pour déterminer le diagramme de rayonnement de la source émettant perpendiculairement (émission liée à la distribution des vitesses en « coquille »). La densité d'électrons à l'intérieur de la cavité joue un rôle important dans l'écart entre la fréquence de coupure du mode X et la fréquence d'émission de l'onde.

8.4.6 Influence de l'énergie des électrons au pic de la distribution

L'énergie moyenne des électrons accélérés (ϵ_b) détermine les fréquences plasma et cyclotron effectives à l'intérieur de la cavité (à travers le paramètre Γ_\ominus et l'équation (8.6)). Elle intervient également dans le calcul de la fréquence d'émission en fonction de l'angle d'émission (à travers le paramètre Γ_r et l'équation (8.13)). Ce paramètre est donc impliqué dans le calcul de l'indice de réfraction de l'onde, aussi bien par la détermination des fréquences de coupure que de la fréquence des ondes.

Pour tester l'influence de l'énergie des électrons accélérés sur le diagramme de rayonnement en dehors de la cavité, nous avons calculé la trajectoire de rayons émis à 80° , 85° et 90° à la fréquence $f \sim 300$ kHz, dans une cavité de 300 km de diamètre avec un gradient de 10 km aux bords de la cavité. La densité d'électrons à l'intérieur de la cavité est de 1 cm^{-3} et l'énergie thermique des électrons est de 350 eV. La figure 8.10 représente la variation de l'angle entre le rayon et la direction du champ magnétique en fonction de la distance parcourue par le rayon pour différentes valeurs de ϵ_b . Cet angle est indiqué pour différentes positions le long du rayon : dans la source, proche de la source avant la première réflexion, après la première réflexion et loin de la cavité. On constate que l'effet de l'énergie des électrons sur les rayons émis perpendiculairement au champ magnétique est négligeable et que la resserrement de ces rayons autour de la direction du champ magnétique intervient principalement dans la zone proche de la source. Pour les rayons émis à 80° et 85° la dispersion des angles en fonction de l'énergie des électrons est plus importante.

La table 8.2 regroupe les écarts à la fréquence cyclotron en plasma froid des fréquences de coupure du mode X en plasma chaud pour les différentes valeurs de ϵ_b , ainsi que des fréquences d'émission aux angles $\theta = 80^\circ$, 85° et 90° . La variation d'énergie des électrons a une influence sur l'écart entre la fréquence cyclotron et la fréquence de coupure

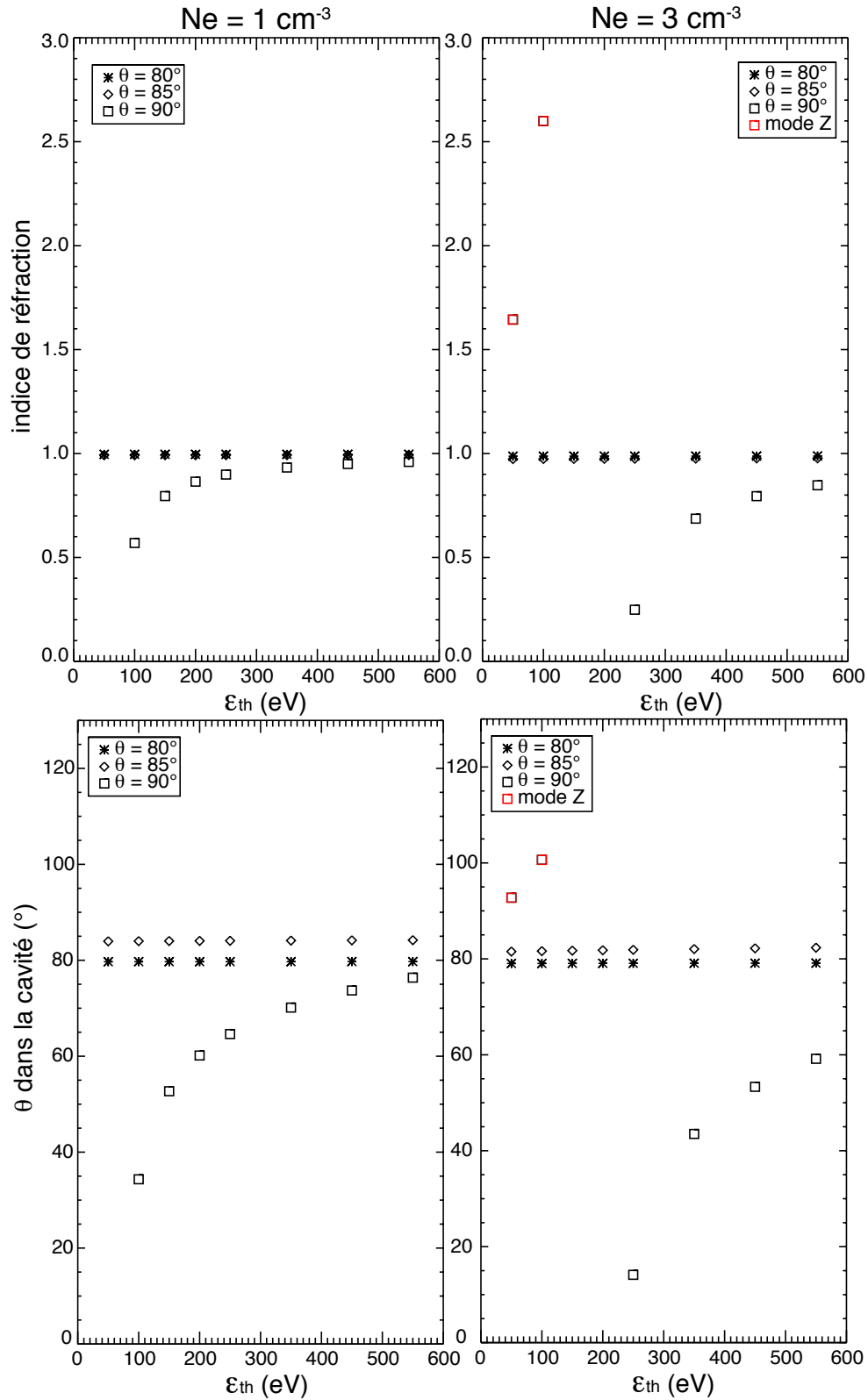


FIGURE 8.9 – Influence de l'énergie thermique des électrons et de la densité à l'intérieur de la cavité. Panneaux du haut : valeur de l'indice de réfraction en fonction de l'énergie thermique des électrons pour un angle d'émission de 80° , 85° et 90° et pour deux densités d'électrons différentes (panneau de gauche : $N_e = 1 \text{ cm}^{-3}$, panneau de droite : $N_e = 3 \text{ cm}^{-3}$). Panneaux du bas : valeur de l'angle entre le rayon et la direction du champ magnétique dans la cavité (avant toute réflexion) en fonction de l'énergie thermique des électrons. Voir § 8.4.5.

ϵ_b (keV)	$f_c - F_{X_\theta}$ (kHz)	$f_c - f_{80^\circ}$ (kHz)	$f_c - f_{85^\circ}$ (kHz)	$f_c - f_{90^\circ}$ (kHz)
0.5	0,229	-0,972	-0,422	0,088
1	0,524	-1,899	-0,723	0,382
3	1,70	-3,15	-0,754	1,56
5	2,88	-3,56	-0,360	2,73

TABLE 8.2 – Fréquence de coupure du mode X en plasma chaud et fréquence d’émission des ondes pour $\theta = 80^\circ, 85^\circ$ et 90° pour différentes valeurs de l’énergie des électrons accélérés (ϵ_b) avec $\epsilon_{th} = 350$ eV et $N_e = 1 \text{ cm}^{-3}$ et $f_{90^\circ} = 300$ kHz. Voir § 8.4.6.

du mode X en plasma chaud : plus l’énergie des électrons est importante, plus l’écart entre la fréquence cyclotron et la fréquence de coupure est grand. Cependant, dans cette simulation, la fréquence d’émission des rayons émis à 90° est constante et toujours très proche de la fréquence de coupure du mode X ($f_{90^\circ} - F_{X_\theta} \sim 0,14$ kHz). La variation de l’énergie des électrons n’a donc que peu d’incidence sur la trajectoire des rayons émis à 90° , les écarts en fréquence entre la fréquence d’émission et la fréquence de coupure étant globalement constants. De plus, la fréquence d’émission étant très proche de la fréquence de coupure, les effets de réfraction proches de la source se feront plus sentir que pour les émissions obliques. Pour les émissions à 80° et 85° , les fréquences d’émission s’éloignent d’autant plus de la fréquence de coupure que l’énergie des électrons est élevée. Plus l’énergie est élevée, plus les effets de réfraction proches de la source seront faibles. L’angle entre le rayon et la direction du champ magnétique est donc d’autant plus faible que l’énergie est petite : on retrouve ce comportement dans la dispersion des angles à l’intérieur de la cavité. A l’inverse, pour les ondes émises à 85° , les angles en dehors de la cavité sont plus petits pour les hautes énergies. Ce comportement est dû au fait qu’un angle d’émission important implique une altitude de sortie plus faible et donc une réfraction plus importante à la sortie de la cavité (la différence de densité entre l’intérieur et l’extérieur de la cavité étant plus importante dans ce cas que pour des altitudes supérieures).

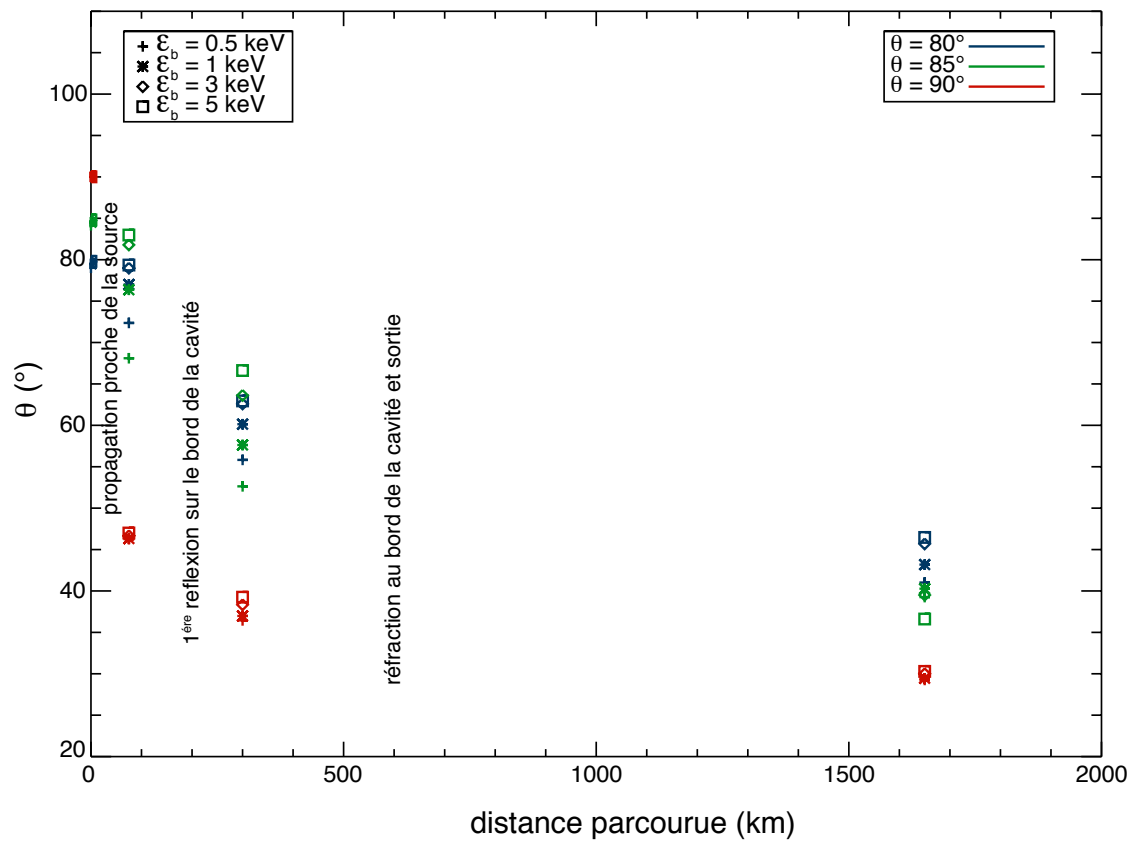


FIGURE 8.10 – Valeur de l'angle entre le rayon et la direction du champ magnétique à différentes positions le long du rayon pour différentes valeurs de ϵ_b . Voir § 8.4.6.

8.5 Conclusion

La détermination du diagramme de rayonnement des sources de l'AKR est importante pour l'interprétation des observations radio par les satellites tels que FAST ou Viking. La propagation des ondes radio émises par IMC dans les cavités aurorales est rendue complexe par la présence de forts gradients de densité aux bords de la cavité. La description du milieu de propagation est donc un point fondamental de toute étude de propagation à travers les cavités aurorales. Cette description passe aussi bien par les caractéristiques géométriques des gradients de densité d'électrons que par la prise en compte de la présence de plasma chaud à l'intérieur des cavités et la connaissance des mécanismes d'émission.

Dans ce travail, nous ne cherchions pas à reproduire des observations particulières du diagramme de rayonnement mais à étudier l'influence des différents paramètres géométriques et énergétiques des plasmas dans l'environnement des sources de l'AKR. Pour prendre en compte la présence de plasma chaud à l'intérieur de la cavité, nous avons montré que pour les plasma faiblement relativiste ($\Gamma \sim 1$), le développement en perturbation à l'ordre 1 de l'équation de Vlasov permet de retrouver une relation de dispersion équivalente à celle des plasmas froids en remplaçant les fréquence caractéristiques par les fréquences réduites $\Omega_{p\ominus}$ et $\Omega_{c\ominus}$ (équations (8.5) et (8.6)). Les phénomènes de réfraction proche de la source dépendent fortement de l'écart entre la fréquence d'émission et la fréquence de coupure du mode RX. Or la fréquence d'émission par IMC dépend de la direction du vecteur d'onde émis ainsi que de la distribution des vitesses des électrons dans la source. Pour prendre en compte de façon rigoureuse les effets de propagation proches de la source, il est donc nécessaire de déterminer la fréquence d'émission en fonction de la direction du vecteur d'onde pour des paramètres énergétiques de la source donnés. Pour cela, nous avons résolu l'équation (8.13) pour chaque source et chaque rayon considérés lors de cette étude.

Cette étude paramétrique sur un modèle très simple de cavité nous a permis de mettre en évidence le fait que le diagramme de rayonnement en dehors des cavités dépend fortement et de manière non linéaire des paramètres énergétiques et structurels du plasma. La modélisation d'observations particulières en ajustant les paramètres du plasma est donc impossible, car plusieurs paramètres peuvent avoir la même influence sur le diagramme de rayonnement final. De même la prédiction d'observation est impossible car elle nécessiterait de connaître parfaitement toutes les caractéristiques du plasma au cours de la propagation.

Cependant, nous avons pu dégager des tendances relatives du comportement du diagramme d'émission en fonction des paramètres étudiés : l'angle d'ouverture du diagramme de rayonnement par rapport à la direction du champ magnétique doit être

- plus faible à haute altitude (basse fréquence),
- plus faible pour les plus petites cavités,
- plus faible pour les gradients abrupts,
- pour l'émission par instabilité « coquille » ($\theta_0 = 90^\circ$), plus faible pour les faibles

- énergies thermiques,
- pour l'émission par instabilité « cone de perte », plus faible pour les plus faibles énergies au pic de la distribution.

Pour poursuivre cette étude, ces tendances pourraient être comparées à une étude statistique sur les paramètres du diagramme de rayonnement déduits des observations radio. Le rayonnement kilométrique associé aux aurores de Jupiter et Saturne est également émis par des mécanismes d'instabilités maser cyclotron. La densité électronique aux hautes latitudes pour ces planètes est beaucoup plus faible qu'à la Terre ce qui rend la présence de cavité non nécessaire pour l'émission par IMC, cavités qui n'ont jamais été observées. Le diagramme de rayonnement des sources joviennes et kroniennes est l'objet de nombreuses études. Une étude similaire prenant comme paramètres du milieu de propagation les valeurs typiques à Jupiter et à Saturne pourrait permettre d'estimer l'influence de la présence d'une cavité sur le diagramme de rayonnement de ces sources.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La propagation des ondes radio dans les environnements planétaires est régie par la réponse des plasmas spatiaux à la présence d'une perturbation électromagnétique. Dans ces environnements, les plasmas peuvent être considérés, en première approche, comme des plasmas froids, non collisionnels et magnétisés. Les fréquences caractéristiques des ondes radio étant grandes devant celles du mouvement des ions, seule la réponse des électrons du plasma à la présence de l'onde électromagnétique peut être considérée. Le caractère chargé des particules du plasma implique l'existence d'une grande variété de modes de propagation. En l'absence de champ magnétique ambiant, le plasma est isotrope et un seul mode de propagation est possible, dont l'indice de réfraction est caractérisé par la fréquence plasma locale. En présence d'un champ magnétique ambiant, le plasma devient biréfringent, car deux modes principaux peuvent s'y propager (i.e. les deux branches \oplus et \ominus de la relation d'Appleton-Hartree) et anisotrope car la relation de dispersion dépend de la direction du champ magnétique par rapport à celle du vecteur d'onde. Les fréquences de coupures et de résonances des ondes électromagnétiques susceptibles de s'y propager sont liées aux fréquences caractéristiques du plasma, décrivant les mouvements des électrons. Ces fréquences de coupures et de résonances permettent de subdiviser les modes principaux en modes de propagation dont seulement deux peuvent se propager dans le vide, et donc s'échapper de leur région source : le mode LO, correspondant à la branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, pour les fréquences supérieures à la fréquence plasma, et le mode RX, correspondant à la branche \ominus de la relation d'Appleton-Hartree, pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure du mode X (chapitre 2).

La relation de dispersion permet de déterminer le lien entre le vecteur d'onde et la fréquence des ondes pouvant se propager dans les plasmas, mais l'interaction entre l'onde électromagnétique et les particules chargées du plasma contraint également l'évolution du champ électrique de l'onde au cours de la propagation. Nous avons montré que dans un plasma magnétisé, l'état de polarisation d'une onde en propagation oblique est une ellipse contenue dans un plan perpendiculaire au plan formé par le vecteur d'onde et la direction du champ magnétique ambiant (\mathbf{k}, \mathbf{B}_0), dont les axes principaux sont selon la direction $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0$ et un axe contenu dans le plan $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$. Pour un mode donné, le sens de rotation du champ électrique autour du champ magnétique est indépendant du sens de propagation. Les limites de cette description en propagation parallèle ($\theta = 0$) correspondent bien à des polarisation circulaires respectivement droites (rotation dans le sens direct autour de \mathbf{B}_0) et gauche (rotation dans le sens horaire autour de \mathbf{B}_0) pour les modes R et L ; tandis que les limites en propagation perpendiculaire ($\theta = \pi/2$) correspondent bien à une polarisation rectiligne le long de \mathbf{B}_0 pour le mode O et à une polarisation elliptique dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 pour le mode X (chapitre 3).

Toutes ces caractéristiques ont été démontrées pour des ondes se propageant dans des plasmas homogènes et restent valables pour des plasmas inhomogènes à condition que les échelles caractéristiques des variations spatiales soient grandes devant la longueur

d'onde (approximation de l'optique géométrique). Une telle approximation n'autorise pas la considération des phénomènes d'optique ondulatoire tels que la diffraction, mais permet le traitement des phénomènes de réfraction et de réflexion des ondes radio à grandes échelles. Dans ce cadre, on peut considérer que l'énergie électromagnétique se propage le long de trajectoires particulières appelées « rayons », dont la direction n'est pas nécessairement confondue, dans les plasmas anisotropes, avec la direction du vecteur d'onde (chapitre 5).

Pour étudier la propagation des ondes radio dans les environnements planétaires, j'ai choisi de développer un outil de tracé de rayons hautes fréquences dans les plasmas froids magnétisés, fondé sur la résolution des équations d'Haselgrove : ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetics in Magnetospheres, Ionospheres and Solar wind - including Polarization, chapitre 6). L'étude théorique que j'ai menée sur la propagation et la polarisation des ondes électromagnétiques dans les plasmas froids, magnétisés, non collisionnels et inhomogènes m'a permis de connaître et de comprendre les fondements physiques d'un tel outil, ainsi que ses limites et les cadres d'application appropriés. J'ai également fait le choix de construire cet outil de la manière la plus générique possible, en n'imposant aucune restriction supplémentaire sur la description du milieu de propagation ou sur les caractéristiques des ondes.

Cet outil est donc adapté à l'étude de la propagation :

- des ondes électromagnétiques hautes fréquences (de fréquence très supérieure aux fréquences caractéristiques des mouvements des ions) afin de considérer uniquement l'influence des électrons sur la propagation,
- dans les plasmas froids, faiblement inhomogènes, non collisionnels, magnétisés ou non.

Il nécessite, de la part de l'utilisateur, de connaître :

- la description du milieu de propagation en tout point, l'utilisateur devant s'assurer que celle-ci entre dans le cadre d'utilisation du code,
- les caractéristiques initiales des ondes se propageant : leur fréquence (restant fixe au cours de la propagation), la position des sources, la direction initiale du vecteur d'onde et le mode de propagation.

Il permet d'obtenir :

- la trajectoire de plusieurs rayons dans l'environnement donné,
- la variation de plusieurs paramètres le long des rayons : direction du vecteur d'onde, indice de réfraction, angle entre le rayon et le vecteur d'onde, vitesses de phase et de groupe, distance parcourue depuis la source, fréquences caractéristiques du milieu.

Le module Polarisation calcule les rapports de polarisation ρ et τ le long des rayons et indique le régime de couplage de mode : en faible couplage, l'état de polarisation est bien décrit par ces rapports de polarisation, en fort couplage, la polarisation résultante est une polarisation hybride entre les polarisations des ondes couplées, les rapports de polarisation calculés sont donc à utiliser avec précaution.

L'implémentation générique du code ARTEMIS-P m'a permis de mener deux études de propagation à travers des milieux très différents : l'ionosphère de Saturne à grande échelle ($\sim R_S$), pour l'étude de la propagation « au-delà de l'horizon » des signatures radio des éclairs d'orage de Saturne (SED, chapitre 7), et les cavités aurorales terrestres de petites dimensions (~ 100 km), pour l'étude de l'influence de la présence des cavités aurorales sur le diagramme de rayonnement des sources du rayonnement kilométrique terrestre (AKR, chapitre 8).

Lors de l'étude de la propagation « au-delà de l'horizon » des SED, le tracé de rayons nous a permis de valider l'hypothèse qualitative d'un piégeage des ondes radio subissant plusieurs réflexions sous l'ionosphère dense côté soir avant de pouvoir s'échapper, lorsque les gradients de densité d'électrons en temps local sont négatifs. Cette première étude nous a également incité à mener une étude statistique plus large des occurrences des événements au-delà de l'horizon, qui a conforté cette hypothèse et mis en évidence la présence d'une anomalie de densité d'électrons entre 15:00 et 20:00 en temps local. De plus, l'absence de correspondance satisfaisante entre chaque épisode observé et simulé a souligné l'importance d'une description du milieu de propagation à toutes les échelles et dépendante du temps pour toute étude rigoureuse de tracé de rayon.

La seconde étude menée à l'aide du code ARTEMIS-P va également dans ce sens. Elle avait pour but d'étudier l'influence de la présence de plasma chaud et de forts gradients de densité au voisinage des sources de l'AKR sur le diagramme de rayonnement apparent. Cette étude nous a permis :

- de développer un moyen d'utiliser le code ARTEMIS-P pour l'étude de la propagation des ondes radio dans les plasmas faiblement relativistes ($\Gamma \sim 1$) en modifiant les fréquences caractéristiques du milieu,
- de prendre en compte les mécanismes d'émission dans la détermination de la fréquence des ondes se propageant à différents angles par rapport à la direction du champ magnétique local,
- de mettre en évidence la grande sensibilité des résultats aux modifications des paramètres décrivant le milieu, aussi bien énergétiques que géométriques.

Des tendances générales ont cependant pu être dégagées. Ainsi, l'ouverture du diagramme de rayonnement apparent diminue lorsque : l'altitude augmente, la taille des cavités diminue et/ou les gradients sont plus abrupts. Pour les émissions perpendiculaires au champ magnétique, elle diminue lorsque l'énergie des électrons diminue et, pour les propagations obliques, elle diminue pour les plus faibles énergies au pic de la distribution des électrons.

Ces deux études sont des exemples d'application du code ARTEMIS-P dans son stade actuel de développement. Le code de tracé de rayons est la clé de voûte du code ARTEMIS-P, sur laquelle peuvent venir se greffer différents modules, tels que le module Polarisation, permettant de traiter d'autres aspects de la propagation. Ainsi, il est

envisagé de développer un module spécifique permettant de traiter des phénomènes de diffusion des ondes sur les fluctuations de densité d'électrons du milieu, ainsi qu'un module calculant l'atténuation des ondes au cours de la propagation.

Le champ d'application possible du code ARTEMIS-P est vaste. Plusieurs pistes d'études à venir sont possibles :

- la propagation du rayonnement kilométrique de Saturne (SKR) à travers le disque de plasma pour tenter d'interpréter des structures observées dans les spectres dynamiques,
- la propagation des émissions radio solaires à travers l'héliosphère,
- la prise en compte rigoureuse des effets de propagation dans le code SERPE/EXPRESS [Hess 2008], permettant de simuler les émissions radio planétaires et exoplanétaires,

Et toutes autres études de propagation intéressant la communauté scientifique en radioastronomie et en physique des plasmas, comme par exemple, en préparation de la mission JUICE, l'étude de la propagation des émissions radio joviennes dans l'environnement de Ganymède.

Annexes

Publications et Communications

Sommaire

A.1 Publications en préparation	233
A.2 Actes de conférences (sans comité de lecture)	233
A.3 Communications en congrès et réunions	233

A.1 Publications en préparation

- **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, *Explanation for the detection of Saturn's radio lightning over the horizon via ray-tracing in the kronian ionosphere and statistical study*, In prep., 2013
- **A.-L. Gautier**, S. Hess, B. Cecconi, and P. Zarka, *Propagation of the radio waves in and out of the auroral cavities*, In prep., 2013

A.2 Actes de conférences (sans comité de lecture)

A.-L. Gautier, *ARTEMIS-P : A general Ray Tracing code in anisotropic plasma for radioastronomical applications*, Journées scientifiques de l'URSI-France, Mars 2013

A.3 Communications en congrès et réunions

- *Propagation "over the horizon" of Saturn's radio lightning studied by ray tracing*, **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, European Geoscience Union, Avril 2011, Vienne, Oral
- *Propagation "over the horizon" of Saturn's radio lightning studied by 3D ray tracing*, **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, Union Radio-Scientifique Internationale - General Assembly, Août 2011, Istanbul, Poster
- *Propagation "over the horizon" of Saturn's radio lightning studied by 3D ray tracing*, **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, European Planetary Science Congresses - Division for Planetary Sciences of the American Astronomical Society Joint Meeting, Septembre 2011, Nantes, Oral
- *Study of the over the horizon effect of Saturn's radio lightning*, **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, Cassini/RPWS team-meeting, Mai 2012, Iowa City, Oral

- *ARTEMIS-P : un code de tracé de rayons en milieu anisotrope et applications en radio astronomie*, **A.-L. Gautier**, B. Cecconi, and P. Zarka, Journées scientifiques de l'URSI-France, Mars 2013, Paris, Oral
- *Explanation for the detection of Saturn's radio lightning « Over The Horizon » via ray-tracing in the kronian ionosphere*, **A.-L. Gautier**, P. Zarka, B. Cecconi, and G. Fischer, Cassini/RPWS team-meeting, Mai 2013, Iowa City, Oral (présentée par Laurent Lamy)
- *A parametric study of the propagation of auroral radio emissions through auroral cavities*, **A.-L. Gautier**, S. Hess, B. Cecconi, and P. Zarka, Magnetospheres of Outer Planets, Juillet 2013, Athènes, Oral
- *ARTEMIS-P : A general Ray Tracing code in anisotropic plasma for radioastronomical applications*, **A.-L. Gautier**, B. Cecconi, and P. Zarka, Journées scientifiques de l'URSI-France, Juillet 2013, Athènes, Poster.

ANNEXE B

Propagation of the radio waves in and out of the auroral cavities

A.-L. Gautier, S. Hess, B. Cecconi, and P. Zarka

Article en préparation.

Propagation of the radio waves in and out of the auroral cavities

A. L. Gautier¹, S. L. G. Hess², B. Cecconi¹, and P. Zarka¹

Abstract. The terrestrial auroral kilometer radiations (AKR) are radio emissions associated with accelerated electron populations in the Earth auroral region which are emitted through a mechanism known as the Cyclotron Maser Instability (CMI). This instability requires that the density of electrons be low (that the ratio between plasma and electron cyclotron frequencies be small) to allow for the growth of the radio waves. This condition is generally not fulfilled at Earth. However, the currents which power the auroral emissions generate auroral cavities depleted in plasma and source of the terrestrial AKR. These cavities being formed thanks to electrostatic potential drops, the electrons inside of the cavity have an energy of a few keV, sufficient to introduce relativistic corrections to the wave dispersion relation. The beaming pattern of the waves generated by the CMI are generally assumed to be a hollow cone, because CMI amplifies waves propagating at a given angle relative to the magnetic field. However, AKR sources being in an inhomogeneous plasma region, the radio emissions suffer strong refractions, in particular on the cavity borders. The resulting beaming pattern is a compelling problem that has not received a general answer yet. We perform a parametric study of the wave emission and propagation in the Earth cavities taking into account the effects of both the cavity geometry (size, gradient scale, altitude) and of the plasma conditions (density, energy, temperature). We reveal global trends of the beaming angle dependency on these parameters as well as intrinsic uncertainties regarding the problem. We also discuss the possibility of doing accurate modelings of natural cavities.

1. Introduction

Planets with an internal magnetic field are surrounded by a magnetosphere, that is a region where the dynamics of the plasma is controlled by the planetary magnetic field forcing it to corotation. However external perturbations like the solar wind flow may oppose to the plasma corotation. Then, a current develops which generally follows the magnetic field lines and close in the planet ionosphere. Electric fields parallel to the magnetic field are generated from these currents close to the planet due to density and magnetic field gradients and accelerate electrons [Knight, 1973; Ergun et al., 2009; Lysak and Song, 2003]. Part of the electrons collide in the atmosphere generating auroras from the Infrared to the UV, whereas the electrons that are not lost by collision move away from the planet and may generate radio emissions by a mechanism known as Cyclotron-Maser Instability (CMI) [e.g. Zarka, 1998; Treumann, 2006, and references therein].

The CMI instability, discussed in more details in section 2, results from the resonance between a circularly polarized wave and the gyration of the electrons in the magnetic field. The waves amplified by CMI thus have a frequency, ω , close to the local electron cyclotron frequency in the source, ω_c , its exact value depending on the velocity distribution of the electrons [Wu and Lee, 1979; Pritchett, 1984; Wu, 1985]. The polarization of the wave in the magnetic field reference frame is generally right-handed, corresponding to the so-called RX mode. This mode has a minimum (cutoff) frequency, ω_x , also close to the cyclotron frequency, its exact value depending on the electron density and temperature

[Pritchett, 1984]. The opposite polarization (LO mode) is only amplified when the emission frequency is not compatible with the RX mode. To be propagated, the waves must have a frequency larger than the cutoff frequency, which is smaller for lower density and larger temperature. Hence, it is easier to emit waves from plasma density cavities, in particular in environments – like Earth’s – where the effect of the electron density is important. Indeed, all auroral radio sources in the terrestrial environment have been found to be plasma cavities [Benson and Calvert, 1979; Calvert, 1981; Roux et al., 1993; Louarn and Le Quéau, 1996a, b].

For the waves to be amplified, the electrons must have been accelerated to have a distribution unstable in regards to the CMI [Wu and Lee, 1979; Wu, 1985]. The electron velocity distribution determines both the frequency, ω , and the wavevector, \mathbf{k} , of the amplified waves [Pritchett, 1984, and section 2] and thus the direction of propagation of the amplified waves. The system being axisymmetric relative to the direction of the magnetic field, the waves beaming pattern in the source is a hollow cone. Outside of the source, the wave may be refracted (or even reflected) due to variations of the refraction index caused by variations of the electron density, temperature and/or of the magnetic field. This is particularly the case for radio emissions emitted in the density cavities, which encounter strong gradients on the cavity borders [Louarn and Le Quéau, 1996a, b].

Many studies addressed the modification of the radio beaming angle, either from observational [Green et al., 1977; Roux et al., 1993; Louarn and Le Quéau, 1996a; Kasaba et al., 1997; Mutel et al., 2008] and/or from modeling (ray-tracing) points of view [Gaelzer et al., 1994; Xiao et al., 2007; Mutel et al., 2008; Menietti et al., 2011]. All these studies highlighted the importance of the density in the final beaming angle of the radio sources. However, it reveals itself difficult to determine a precise relation between the plasma parameters and the beaming angle outside of the cavity. Ray tracing studies have been performed to answer

¹LESIA - Observatoire de Paris/CNRS, France

²LATMOS, IPSL/CNRS, UVSQ, UPMC, France

this question and some succeed to reproduce observations. However, there are two drawbacks to these successes: (1) all models succeeds to reproduce only a particular set of observations by adjusting some poorly constrained parameters, but can not reproduce all the observations with more constrained parameters, (2) none of the ray tracing studies took into account the temperature of the electrons for determining both the propagation of the wave and its frequency. As this temperature determines the cutoff frequency and the refraction index of the RX mode in the cavity, the cold plasma approximation may appear inappropriate for the modeling of the cavities.

In the present paper, we do not try to reproduce any particular observations. We rather study the dependence of the radio source beaming angle on several parameters of the cavity (size, altitude,...) and of the plasma (density, temperature,...). We perform this study using wave parameters consistent with the plasma parameters, which has not been done before, and modeling as accurately as possible the conditions of the plasma inside and outside of the emitting cavities. We use a ray tracing method to test the dependency of the beaming angle on several parameters of the plasma. We show in particular the importance of taking properly into account the plasma temperature and conclude on the capacity of any code to accurately model the beaming angle of terrestrial radio sources embedded in natural cavities.

2. CMI: theory and application to the auroral regions

2.1. Dispersion relation

2.1.1. Cold plasma

The dispersion relation of plasma waves in a magnetized plasma depends on the plasma parameters in the source: we note n the electron density, B the magnetic field, $-e$ and m the electron charge and mass, $\omega_p = \sqrt{ne^2/m\epsilon_0}$ the plasma frequency and $\omega_c = eB/m$ the electron cyclotron frequency. The wave parameters are the wave frequency ω , the beaming angle relative to the magnetic field θ , and the wave refractive index N . The dispersion relation of plasma waves in a magnetized plasma is known as the Appleton-Hartree relation [Lassen, 1926]:

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \frac{\omega_c^2 \sin^2 \theta}{2\chi_p} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(2 \frac{\omega \chi_p \cot \theta}{\omega_c \sin \theta} \right)^2} \right)} \quad (1)$$

$$\chi_p = (1 - \omega_p^2/\omega^2)$$

The right-handed waves correspond to the '+' sign in the above equation. The cutoff frequency of X mode is thus:

$$\omega_x = \frac{\omega_c}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}} \right) > \omega_c \quad (2)$$

Right-handed waves above this frequency are emitted on the RX mode, which can propagate in free space, whereas waves emitted below it are emitted on the RZ mode, which cannot. As we are interested in radio emissions, we only address the propagation of RX waves.

2.1.2. Auroral region plasma

Figure 1 shows a typical electron distributions measured by the FAST satellite in radio emitting auroral cavities [from Ergun et al., 2000]. Similar distributions are observed in all

radio source regions in the terrestrial auroral regions [De-lory et al., 1998; Su et al., 2008]. The aurorae are powered by electrons accelerated to a fraction of the speed of light, which implies that the plasma in the auroral region cannot be considered as cold. We consider the relativistic Vlasov equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \left(\omega_p^2 \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}}{\rho} + \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{b} \right) \frac{m \partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (3)$$

where f, ρ, v, p are the electron distribution, charge density, velocity and impulsion, respectively. E is the electric field and b the unitary magnetic field vector. Although unusual, the form of the above equation explicitly shows the characteristic time scales of the system (E/ρ measuring the deviation from quasi-neutrality in the electrostatic case). The first order approximation of a perturbation of the distribution ($f \sim f_0 + \delta f$) is given by:

$$\left(i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + \frac{v_{\perp}}{r_L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \delta f + \left(\omega_p^2 \frac{\epsilon_0}{\rho} \delta \mathbf{E} + \omega_c \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \right) \frac{m \partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

or, assuming $d\mathbf{p} \sim \Gamma m d\mathbf{v}$

$$\left(i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + \frac{\omega_c}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \delta f + \left(\frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\Gamma} \delta \mathbf{E} + \frac{\omega_c}{\Gamma} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (4)$$

where α and r_L are the electron pitch angle and Larmor radius, respectively. Γ is the relativistic Lorentz factor. The \parallel and \perp subscripts stand for quantities parallel and perpendicular to the magnetic field, respectively. The first order expression of a perturbation in a relativistic plasma is similar to that in a cold plasma, provided the replacement of the cyclotron frequency by $\Omega_c = \omega_c/\Gamma$ and of the plasma frequency by $\Omega_p = \omega_p/\sqrt{\Gamma}$. The dispersion relation is computed from the dielectric tensor, which is obtained from the terms of the above equation and integrated over velocity. The dependency of Γ on the velocity implies that the exact dispersion relation depends on the exact distribution of the electrons [e.g. Pritchett, 1984]. Approximated dispersion relations have been built from approximations of the different terms of the dielectric tensor [Pritchett, 1984; Louarn and Le Quéau, 1996b]. However, assuming that the width (ϵ_{th}) of the energy distribution of the electrons is narrow relative to the electron energy at the peak of the distribution (ϵ_b), the Lorentz factor can be considered constant and corresponds to the mean value of the electron energy (ϵ_{Θ}). We note $\Gamma_{\Theta} = 1/\sqrt{1 - 2\epsilon_{\Theta}/mc^2}$ this constant Lorentz factor. Under this assumption, the dispersion relation is computed exactly as in the cold plasma approximation and is similar to the Appleton-Hartree relation:

$$N^2 = 1 - \frac{\Omega_{p\Theta}^2}{\omega^2 - \frac{\Omega_{c\Theta}^2 \sin^2 \theta}{2\chi_p} \left(1 + \sqrt{1 + \left(2 \frac{\omega \chi_p \cot \theta}{\Omega_{c\Theta} \sin \theta} \right)^2} \right)} \quad (5)$$

$$\Omega_{c\Theta} = \frac{\omega_c}{\Gamma_{\Theta}}; \Omega_{p\Theta} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\Gamma_{\Theta}}}; \chi_p = 1 - \left(\frac{\Omega_{p\Theta}}{\omega} \right)^2$$

The corresponding cutoff frequency is:

$$\Omega_{x\Theta} = \frac{\Omega_{c\Theta}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\Omega_{p\Theta}^2}{\Omega_{c\Theta}^2}} \right) \quad (6)$$

which may be lower than ω_c . Mottez et al. [2010] showed that in the weak relativistic approximation ($\Gamma_{\Theta}^{-1} \simeq 1 - v_{\Theta}^2/2c^2$), one can retrieve the cutoff frequency approximation of Louarn and Le Quéau [1996b]:

$$\Omega_{x\Theta} \simeq \omega_c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} - \frac{v_{\Theta}^2}{2c^2} \right) \quad (7)$$

In the present paper, we assume that the unstable electron distribution which amplifies the emissions is a horseshoe distribution similar to that shown on Figure 1. This kind of distribution is due to the parallel acceleration of the electrons followed by a pitch angle dispersion due to the adiabatic motion of the electrons toward an increasing magnetic flux and their subsequent magnetic mirroring. The loss-cone corresponds to the electrons lost by collision with atmospheric neutrals before they reached their mirror point. The half width of the velocity distribution before acceleration is about v_{th} , corresponding to a mean energy $\epsilon_{th} = mv_{th}^2/2$. This distribution gained an energy ϵ_b by acceleration so its mean energy after acceleration is $\epsilon_{\Theta} = \epsilon_b + \epsilon_{th}$. This value of the mean energy is used to compute the relativistic correction applied in the wave dispersion relation (Eq. 5).

2.2. CMI

Detailed descriptions of the linear Cyclotron Maser Instability (CMI) theory are presented in *Wu and Lee* [1979] and *Wu* [1985]. The CMI involves electrons which velocities fulfill the wave-particle resonance condition:

$$\omega = \omega_c/\Gamma_r + k_{\parallel}v_{r;\parallel} \quad (8)$$

where Γ_r and v_r are the relativistic Lorentz factor and velocity of the resonant electrons. We introduce the beaming angle θ and the wave refractive index N and re-write the resonance condition as :

$$\omega(\theta) = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} + \omega(\theta)N(\omega, \theta) \frac{v_{r;\parallel}}{c} \cos \theta \quad (9)$$

In the weakly relativistic approximation and in the $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ frame, the wave-particle resonance condition is a circle of center v_0 and radius R . The maser cyclotron growth rate γ is obtained by integration over the resonance circle of the particle distribution gradient relative to the perpendicular velocity $\nabla_{v_{\perp}} f(\mathbf{v}_0, \mathbf{R}(\tau))$, $\mathbf{R}(\tau)$ being the vector-radius of the resonance circle and τ the angle relative to the parallel velocity axis. The wave growth rate, solution of the complex dispersion equation for weakly-relativistic particles and for $|\omega| > |\gamma|$ is:

$$\gamma = \frac{\omega_p^2 c^2}{8\omega_c} \int_0^{2\pi} v_{\perp}^2(\tau) \nabla_{v_{\perp}} f(\mathbf{v}_0, \mathbf{R}(\tau)) d\tau \text{ with } \omega > \omega_c \quad (10)$$

Positive growth rates require the gradient $\nabla_{v_{\perp}} f(\mathbf{v}_0, \mathbf{R}(\tau))$ to reach positive values along a section of the resonance circle, with a dominant contribution to the integral in equation (10).

Resonant circles associated to unstable wave parameters for an auroral horseshoe distribution are indicated by dashed lines in Figure 1. The circle centered on the velocity zero corresponds to the so-called shell-driven instability (perpendicular emissions), whereas the circle tangent to the loss-cone corresponds to the so-called loss-cone-driven instability [*Hess et al.*, 2007]. Every circle corresponding to unstable wave parameters approximately cross at the same point, corresponding to particles with a pitch angle equal to the loss-cone opening ($\cos \alpha_{lc} = (1 - B/B_{max})^2$) and a velocity $v_r \simeq \sqrt{\epsilon_b - \epsilon_{th}}$. This velocity is obtained by considering that the gradient of a velocity distribution is largest close to the thermal velocity. Using this value of the electron velocity common to all unstable resonance circles in Eq. 9, the frequency as a function of emission angle is:

$$\omega(\theta) = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} + \omega(\theta)N(\omega, \theta) \frac{v_r}{c} \sqrt{1 - \frac{B}{B_{max}}} \cos \theta \quad (11)$$

Figure 2 shows the frequency as a function of the beaming angle for the plasma parameters of our baseline scenario (cf. section 3.2.) It also shows the hot and cold cutoff frequencies. The beaming angle corresponding to a loss-cone-driven emission is about 80° ($\cos \theta_{lc} = v_r/c \cos \alpha_{lc}$). When a cold core is added to the horseshoe distribution, oblique emissions such as the loss-cone driven are the only ones possible for two reasons: because their resonance circle does not cross the negative perpendicular velocity gradient of the distribution core, and because the frequency of the wave is higher than the perpendicular one. In the auroral cavities however, there is no cold core. In this case, the perpendicular instability dominates because it involves more electrons, i.e. more free energy [*Louarn et al.* [1990]]. In this case, the emission frequency is below the cyclotron frequency, as commonly observed at Earth [see for examples *Louarn and Le Quéau*, 1996a; *Delory et al.*, 1998; *Ergun et al.*, 2000].

This is a major drawback of the ray tracing calculation which have been performed to reproduce the radio wave propagation in the terrestrial density cavities: the terrestrial emission are mostly shell-driven, i.e. perpendicular to the magnetic field and emitted below ω_c , whereas the ray tracing models assume a cold plasma dispersion relation for which the RX mode is limited to frequency above ω_c [*Mutet et al.*, 2008]. This paradox is usually solved by choosing an emission frequency close to –but larger than– the local cyclotron frequency. This can also be seen as artificially decreasing the cyclotron frequency. According to Eq. 5, this is equivalent to assume a warm plasma. However, the models do not determine the corresponding temperature and do not diminish it out of the cavity. In the present study, we carefully compute the emission frequency from the CMI theory applied to plasma parameters explicitly defined (Eq. 11) and use it in our model.

3. Model

3.1. Ray tracing model

In order to compute the refractive effects sustained by radio waves through cavity gradients, we developed a general three-dimensional ray tracing code for magnetoionic plasma: ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetics in Magnetosphere, Ionosphere and Solar wind including Polarization). This code is based on the Haselgrove equations [*Haselgrove* [1963]], which are differential equations of the position \mathbf{r} and wave vector \mathbf{k} along the ray path. These equations are derived from the dispersion relation in a cold plasma and are solved by a 4th order Runge-Kutta algorithm. The integration step is adjusted with respect to the gradient of refractive index along the ray.

Equations of propagation are implemented in a general form and ARTEMIS-P computation only depends on the description of the propagation medium and the initial characteristics of the wave. As in all other ray tracing codes, the spatial scale of variation of the medium must be larger than the wavelength of the radio wave.

3.2. Cavity models and observations

There have been numerous measurements of the plasma parameters inside the auroral cavities hosting radio sources in the terrestrial environment [*Delory et al.*, 1998; *Ergun et al.*, 2000]. The characteristics of these cavities are highly variable: their size may vary from several kilometers (generally in the latitudinal direction) up to a few hundreds of

kilometers (generally in the longitudinal direction). The cavity usually present sharp borders in regards to the cavity size. The density inside the radio emitting cavities is a few cm^{-3} at most. The cavities sit in altitude between electric potential structures which prevent ionospheric electrons from entering the cavity, and accelerate the magnetospheric plasma so that the electrons in the cavity have a low density and a high temperature.

We model a cylindrical cavity along the magnetic field direction filled with tenuous hot plasma. We run the code with different geometrical parameters of the cavity (cavity diameter, gradient steepness and altitude) to investigate their impact on the beaming of the radio sources.

3.2.1. Electron distribution

The electron distribution is described by two parameters: the mean value of the energy of accelerated electrons ϵ_b and the mean value of the electronic thermic energy ϵ_{th} . The Lorentz factors Γ_Θ and Γ_r required to compute the hot plasma correction and the wave frequency are then given by:

$$\Gamma_\Theta = 1 + \frac{(\epsilon_b + \epsilon_{th})}{mc^2} \text{ and } \Gamma_r = 1 + \frac{(\epsilon_b - \epsilon_{th})}{mc^2} \quad (12)$$

3.2.2. Cavity model

Outside cavity: The outside of the cavity is composed of cold plasma with a density which decreases with the altitude z as described in *Hilgers* [1992]:

$$n_{out} = n_0 (1 + z/R_E)^{-4.7} \quad (13)$$

with $n_0 = 400\text{cm}^{-3}$ and $R_E = 6378$ km. The earth magnetic field is assume to be along the e_z direction and to decrease with the altitude z :

$$\mathbf{B}_{out} = B_0 (1 + z/R_E)^{-3} \mathbf{e}_z \quad (14)$$

with $B_0 = 0.551$ G according to the IGRF 1995 model.

Inside cavity: The density inside the cavity is assumed to be uniform, we note $\eta = n_{in}/(n_{out}\Gamma_\Theta)$ the ‘‘depth’’ of the cavity. The magnetic field is not affected by the presence of a hot plasma cavity. However, we have shown that the cyclotron and plasma frequencies can be corrected by the Lorentz factor Γ_Θ in order to take into account the effect of hot plasma on relation dispersion. Then we have artificially divided the magnetic field inside the cavity by the Γ_Θ :

$$\mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{out}/\Gamma_\Theta = B_0/\Gamma_\Theta (1 + z/R_E)^{-3} \mathbf{e}_z \quad (15)$$

Cavity edges: The plasma model inside and outside of the cavity are connected by a radial profil in hyperbolic tangent function:

$$\mathbf{B}(r, z) = \mathbf{B}_{out}(z) \left(1 + \frac{\Gamma_\Theta^{-1} - 1}{2} \left[1 - \tanh \left| \frac{r - r_0}{\sigma} \right| \right] \right) \quad (16)$$

$$n(r, z) = n_{out}(z) \left(1 + \frac{\eta(z) - 1}{2} \left[1 - \tanh \left| \frac{r - r_0}{\sigma} \right| \right] \right) \quad (17)$$

where r_0 is the radius of the cavity and σ is the characteristic scale of the gradients.

3.2.3. Source model

We have assumed a point source located at the center of the cavity. The altitude of the source derived from the equation 11: the frequency of ray emitted at 90 is fixed and equal to f_c/Γ_r and the altitude of the source is given by the corresponding cyclotron frequency. Then the frequencies of oblique emissions are deduced from equation 11.

4. Simulations

4.1. Baseline scenario

In the present paper, we simulate numerous cavities with different characteristics, but we take as a baseline scenario a 300km wide cavity at an altitude of 2877 kilometers above Earth’s surface (corresponding to a frequency for $\theta = 90^\circ$ of 500kHz). Both these size and altitude are within the characteristic values observed in the terrestrial environment. The characteristic scale of the density gradient on the cavity borders is chosen to be 10km, i.e. about the inertial length of the ions in the auroral regions. The density in the cavity is chosen to be 1 cm^{-3} . The electron distribution is assumed to be a horseshoe formed from magnetospheric electrons accelerated by 5keV. The dispersion in energy of the electrons, ϵ_{th} , is 350eV. The energy used to compute the ‘‘thermal’’ correction to the dispersion relation is then $\epsilon_\Theta = 5.35\text{keV}$.

The right panel of Figure 4 shows the ray-tracing of waves emitted at the center of the cavity with an initial beaming angle between 70° and 90° (at frequencies varying as in Eq. 11), and the left one the value of the beaming angle out of the cavity, when the wave can be considered as propagating in free-space.

The typical scenario of the wave propagation in and out of the emitting cavities is that the wave is refracted immediately after being emitted, within a distance of a few kilometers. This refraction, larger for larger initial beaming angle, is due to the fact that a refractive index gradient along the magnetic field direction exists in the source due to the magnetic field gradient. The magnetic field direction thus coincides with the normal to the isosurface of the refractive index. The larger is the initial beaming angle, the closer is the emission frequency to the cutoff frequency and the larger is the angle of incidence relative to the refractive index isosurfaces. Hence, waves emitted at larger angles relative to the magnetic field are more refracted. After this initial refraction, the wave may be reflected on the cavity borders, the number of reflections may also vary with the initial beaming angle, which decides for the angle of incidence on the reflection surface. Then the wave are once again refracted when passing across the cavity border.

The final free-space propagation angle generally decreases for larger emission angle, however, as the number of reflections may differ, this variation is not monotonic. In our simulations, the waves are not reflected at all for emission angles lower than 80° , and are reflected once above. The fact that all waves have the same number of reflections for emission angle between 80° (corresponding to the loss-cone-driven emission) and 90° (shell-driven emission), explains our choice of parameters for the baseline scenario.

4.2. Effect of the cavity geometry

4.2.1. Effect of the gradient scale

The first parameter we test is the scale of the electron density and temperature gradients on the border of the cavity. We ran a series of run, using exactly the same parameters than for the baseline scenario, only changing the gradient scale from 10 km to 3 km. The results of these runs are shown on Figure fig:grd. Panel a shows the ray paths of the waves emitted with emission angles ranging from 70° to 90° , and panel b shows the corresponding values of the beaming angle out of the cavities. Panel b also includes the results

from the baseline scenario for comparison.

The effect of the gradient scale is negligible for significantly oblique emission angles (below 79°), which are not reflected of the cavity borders. For larger emission angles, the difference between the results of the two series of simulations becomes significant. This is mostly due to the fact that the curvature radius of the ray during reflection is proportional to the scale of the gradient. Because of the supplementary parallel gradient of magnetic field, the refractive index of the wave is larger just after reflection than just before. This difference of index is larger for larger curvature radii. Then, the wave angle relative to the magnetic field is smaller for larger gradient scales, and the wave ends up leaving the cavity at higher altitude. In that case, the wave refraction across the cavity borders is smaller. On the contrary, small gradient leads to waves with a smaller angle relative to the magnetic field whose second hit the cavity border is at lower altitude, which can lead to supplementary reflections. This explains that multiple reflections occurs for the simulations with a gradient scale of 3 km, but not for a gradient scale of 10 km.

The possibility of having a different number of reflections, and thus very different final beaming angles, for slight changes of the density profile across the cavity question the possibility of performing deterministic simulations of natural cavities in which the density profiles is affected by a significant level of fluctuations. The results of our simulations rather show that, although it may be possible to determine trends, it is not possible to simulate accurately a particular observation or to determine an average beaming angle for the waves emitted in the terrestrial cavities that could be applied (with a defined uncertainty) to the modeling of the AKR observations.

4.2.2. Effect cavity size

We then test the effect of the size of the cavity on the beaming angle. In the present paper, we do not model wave-related effects such as resonance between the wavelength and the cavity size which have been proposed by several authors [Baumbach and Calvert, 1987; Calvert *et al.*, 1988]. The effect of the cavity size is then limited to taking into account that the wave propagating in the cavity will encounter the cavity border at a higher altitude if the cavity is larger. Hence, the wave has a larger chance of escaping at its first encounter with the cavity border if the cavity is large.

Figure 6 shows the propagation of waves emitted at 80° , 85° and 90° and at an altitude corresponding to an electron cyclotron frequency of 500kHz in cavities whose diameter are 15km, 100km and 300km. In small cavities, the wave are reflected several times before being able to escape the cavity, whereas in larger cavities they bounce once (or never for even larger cavities). For a cavity size of 300km, all the waves bounce once before escaping the cavity. This is why we chose this size as a baseline scenario, as it facilitates the comparison for waves emitted between 80° and 90° . The fact that there can be reflection in the cavity, and that the number of reflections may vary depending on the beaming angle in the source may represent a difficulty for the modeling of the natural cavities as it generates non-linearities (i.e. a small inaccuracy in the modeling of a cavity can lead to a radically different prediction of the beaming angle outside of the source.)

Because of the positive gradient of refractive index along the magnetic field direction, the beaming angle before and after a reflexion at the cavity borders are not the same, the beaming angle after the reflexion being necessarily smaller

than before. Hence, small cavities leading to numerous reflection also lead to smaller beaming angle at the altitude at which the wave finally escapes the cavity. The beaming angle outside the cavity is then smaller for small cavities.

4.2.3. Effect of the source altitude

Panel as and b of Figure 7 shows the ray-tracing of waves emitted at 80° , 85° and 90° at three different altitudes, corresponding to perpendicular waves emitted at 700 kHz, 500 kHz and 300 kHz. The other parameters are that of the baseline. Panel c of the same Figure shows the corresponding final beaming angles. The beaming angle spread is large, reflecting the numerous non-linearity of the problem highlighted in the previous sections. Nonetheless, the average trend is that emissions at lower frequencies have smaller final beaming angle. The reason for this is that the density inside the cavity is constant with altitude, whereas the magnetic field decreases. Then, the ratio between plasma and cyclotron frequency increases and the refractive index of the wave decreases. This leads to larger near source refractions for waves emitted at high altitude. This smaller beaming angle resulting from this effect is propagated until the wave finally leaves the cavity, although all the successive reflections and refractions encountered by the waves before it escapes intrude a large scatter.

4.3. Effect of the plasma parameters

4.3.1. Energy dispersion and density effects

For a hot auroral plasma, the cutoff frequency can be approximated by Eq. 7, which depends on the dispersion of the electron velocity, v_{th}^2 , and on the density in the cavity (through ω_p^2/ω_c^2). It is thus expected that modification of one or the other produce similar, but opposite changes of the refractive index in the source, and thus of the near source refraction. We ran the ARTEMIS-P code for different values of the energy dispersion, ϵ_{th} , and for two different densities in the cavity ($n_e = 1\text{cm}^{-3}$ and $n_e = 3\text{cm}^{-3}$). We measured the refractive indice in the source and the propagation angle after the near source refraction (for source emitting at 80° , 85° and 90°). The results are shows on figure 8.

Sources generating oblique emissions are weakly affected by the energy dispersion and the density, since their frequency is sufficiently above the cutoff to have refractive index close to one anyway. The source emitting at 90° on the other hand is strongly affected by both the energy dispersion and the density. In particular, one can see the decrease of the beaming angle toward 0° when the emission frequency get close to the cutoff frequency. For the case with the largest density ($n_e = 3\text{cm}^{-3}$), the emission happen on the Z-mode instead of the X-mode for the smallest ϵ_{th} . For ϵ_{th} between 100eV and 250eV, no solution were found, corresponding to the forbidden band in the Appleton-Hartree equation.

From the results of these simulations, it appears that the energy dispersion is a key parameter to determine the beaming of a shell-driven source. For oblique emission, this parameter is of little importance. The density of electron in the cavity is a key parameter that fixes the cutoff frequency. We note that for oblique emissions, this parameter is of little importance at least as long as the mean energy of the electron is sufficient to ensure that the refractive index of the wave in the source is close to unity.

4.3.2. Effect of the electron energy

The electron energy determines the effective plasma and cyclotron frequencies in the cavity, and thus acts on the refractive index in the cavity (Eq. 5). It is also involved in the determination of the frequency of the waves as a function of

their beaming angle (Eq. 11), i.e. oblique wave are emitted at higher frequency, and thus with refractive index closer to unity, for larger electron energy). Figure 9 shows the beaming angle of waves emitted at 80° , 85° and 90° for different electron energy ϵ_\ominus . The beaming angle are shown at different distance along the ray path corresponding to the source, the region after the near source refraction, the region after the reflection on the cavity border and the region far from the cavity (where the waves can be considered as being in free space).

One can see that the effect of the electron energy on the perpendicular emission is negligible. Because the wave exits the cavity at an altitude sufficiently higher than that of the source, the difference between the local electron cyclotron frequencies at the source and at the altitude at which the waves emitted perpendicularly escape is much larger than the slight frequency shift introduced by the electron energy. The effect for the oblique wave is larger: Large electron energy lead to high emitted frequency and thus to weaker refractions in the cavity. Hence, the beaming angle in the cavity is larger for larger energy. For wave emitted at 80° , this relation is preserved when the wave escapes the cavity. For wave emitted at 85° the beaming angle out of the cavity becomes smaller for larger energies (opposite to the relation inside the cavity). This is due to the fact that a larger beaming angle in the source leads to an altitude of exit lower than for smaller beaming angles, and thus to a larger refraction.

5. Conclusion

Determining the beaming pattern of the AKR sources is important to the understanding of the radio observations of spacecraft such as FAST or Viking. The propagation of the radio waves generated by CMI in the auroral cavities is complicated by the presence of strong gradients of density and temperature at the border of the cavity. Describing properly the plasma characteristics in and near the cavities thus is a fundamental part of the modeling work. In this work, we do not try to reproduce any particular observation of either the radio emissions or the cavity profile, but rather to understand and whenever possible to quantify the effect on the beaming angle of the variation of a set of parameters describing the characteristics of the plasma in and out of a cavity. In this work we paid a particular attention to compute wave and plasma characteristic frequencies in a consistent way and to take into account the effects of the electron temperature, density and of the emission angle on these frequencies.

This parametric study over a simplified model of cavities permits us to show the non-linear dependency of the beaming angle on the cavity and plasma parameters. Because of the large variation of beaming angle introduced by small variation of the parameters, we conclude that it is not possible to compute an accurate beaming pattern of the natural plasma cavities in the terrestrial auroral regions. To describe the beaming pattern of a given cavity, one would require to have accurate profiles of the plasma parameters in and around the cavity including the natural variability, a simplified parameterized description being not sufficient to give even a relevant approximation of the final beaming pattern. To model accurately the beaming pattern in a more generic way is thus impossible, since the natural fluctuations of the plasma parameters are different for each natural cavities.

Nevertheless, the present study shows generic trends. Statistically, the beaming angle is smaller when:

- the source is at high altitude (low frequency),
- the cavity size is small,
- the characteristic scale of the gradients on the cavity borders is small,
- the thermal energy, ϵ_{th} , is small (for quasi-perpendicular –i.e. shell-driven– emissions only),
- the peak energy, ϵ_b , is small (for oblique –i.e. loss-cone-driven – emissions only).

References

- Baumback, M. M., and W. Calvert, The minimum bandwidths of auroral kilometric radiation, *Geophys. Res. Lett.*, , 14, 119–122, 1987.
- Benson, R. F., and W. Calvert, Isis 1 observations at the source of auroral kilometric radiation, *Geophys. Res. Letter*, 6, 479–482, 1979.
- Calvert, W., The auroral plasma cavity, *Geophysical Research Letter*, 8, 919–921, 1981.
- Calvert, W., Y. Leblanc, and G. R. A. Ellis, Natural radio lasing at Jupiter, *Astrophys. J.*, , 335, 976–985, 1988.
- Delory, G. T., R. E. Ergun, C. W. Carlson, L. Muschietti, C. C. Chaston, W. Peria, J. P. McFadden, and R. Strangeway, FAST observations of electron distributions within AKR source regions, *Geophys. Res. Lett.*, , 25, 2069–2072, 1998.
- Ergun, R. E., C. W. Carlson, J. P. McFadden, G. T. Delory, R. J. Strangeway, and P. L. Pritchett, Electron-Cyclotron Maser Driven by Charged-Particle Acceleration from Magnetic Field-aligned Electric Fields, *Astrophys. J.*, , 538, 456–466, 2000.
- Ergun, R. E., L. Ray, P. A. Delamere, F. Bagenal, V. Dols, and Y. J. Su, Generation of parallel electric fields in the JupiterIo torus wake region, *J. Geophys. Res.*, 114, A05,201, 2009.
- Gaelzer, R., F. L. Ziebell, and R. S. Schneider, Ray tracing studies on auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities, *J. Geophys. Res.*, , 99, 8905–8916, 1994.
- Green, J. L., D. A. Gurnett, and S. D. Shawhan, The angular distribution of auroral kilometric radiation, *J. Geophys. Res.*, , 82, 1825–1838, 1977.
- Haselgrove, J., The Hamiltonian ray path equations, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 25, 397–399, doi: 10.1016/0021-9169(63)90173-9, 1963.
- Hess, S., F. Mottez, and P. Zarka, Jovian S-bursts generation by Alfvén waves, *J. Geophys. Res.*, 112, A11,212, 2007.
- Hilgers, A., The auroral radiating plasma cavities, *Geophysical Research Letters*, 19, 237–240, 1992.
- Kasaba, Y., H. Matsumoto, K. Hashimoto, and R. R. Anderson, Angular distribution of auroral kilometric radiation observed by the GEOTAIL spacecraft, *Geophys. Res. Lett.*, , 24, 2483, 1997.
- Knight, S., Parallel electric fields, *Planetary and Space Science*, 21, 741–750, 1973.
- Lassen, H., , *I. Zeitschrift fr Hochfrequenztechnik*, 28, 109–113, 1926.
- Louarn, P., and D. Le Quéau, Generation of the Auroral Kilometric Radiation in plasma cavities-I. Experimental study, *Planetary and Space Science*, 44, 199–210, 1996a.
- Louarn, P., and D. Le Quéau, Generation of the Auroral Kilometric Radiation in plasma cavities-II. The cyclotron maser instability in small size sources, *Planetary and Space Science*, 44, 211–224, 1996b.
- Louarn, P., A. Roux, H. de Feraudy, D. Le Queau, and M. Andre, Trapped electrons as a free energy source for the auroral kilometric radiation, *J. Geophys. Res.*, , 95, 5983–5995, 1990.
- Lysak, R. L., and Y. Song, Kinetic theory of the Alfvén wave acceleration of auroral electrons, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 108(A4), 6–1, 2003.
- Menietti, J. D., R. L. Mutel, I. W. Christopher, K. A. Hutchinson, and J. B. Sigwarth, Simultaneous radio and optical observations of auroral structures: Implications for AKR beaming, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 116(A15), A12219, 2011.

- Mottez, F., S. Hess, and P. Zarka, Explanation of dominant oblique radio emission at Jupiter and comparison to the terrestrial case, *Planetary and Space Science*, 58, 1414–1422, doi: 10.1016/j.pss.2010.05.012, 2010.
- Mutel, R. L., I. W. Christopher, and J. S. Pickett, Cluster multi-spacecraft determination of AKR angular beaming, *Geophys. Res. Lett.*, 35, L07104, 2008.
- Pritchett, P. L., Relativistic dispersion, the cyclotron maser instability, and auroral kilometric radiation, *Journal of Geophysical Research*, 89, 8957–8970, 1984.
- Roux, A., et al., Auroral kilometric radiation sources - In situ and remote observations from Viking, *Journal of Geophysical Research*, 98, 11,657, 1993.
- Su, Y., L. Ma, R. E. Ergun, P. L. Pritchett, and C. W. Carlson, Short-burst auroral radiations in Alfvénic acceleration regions: FAST observations, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 113(A12), 8214–+, 2008.
- Treumann, R. A., The electron cyclotron maser for astrophysical application, *Astron. and Astrophys. Rev.*, 13, 229–315, 2006.
- Wu, C. S., Kinetic cyclotron and synchrotron maser instabilities - Radio emission processes by direct amplification of radiation, *Space Science Reviews*, 41, 215–298, 1985.
- Wu, C. S., and L. C. Lee, A theory of the terrestrial kilometric radiation, *Astrophys. J.*, 230, 621–626, 1979.
- Xiao, F., L. Chen, H. Zheng, and S. Wang, A parametric ray tracing study of superluminous auroral kilometric radiation wave modes, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 112(A11), A10214, 2007.
- Zarka, P., Auroral radio emissions at the outer planets: Observations and theories, *J. Geophys. Res.*, 103, 20,159–20,194, 1998.

LESIA - Observatoire de Paris/CNRS - France

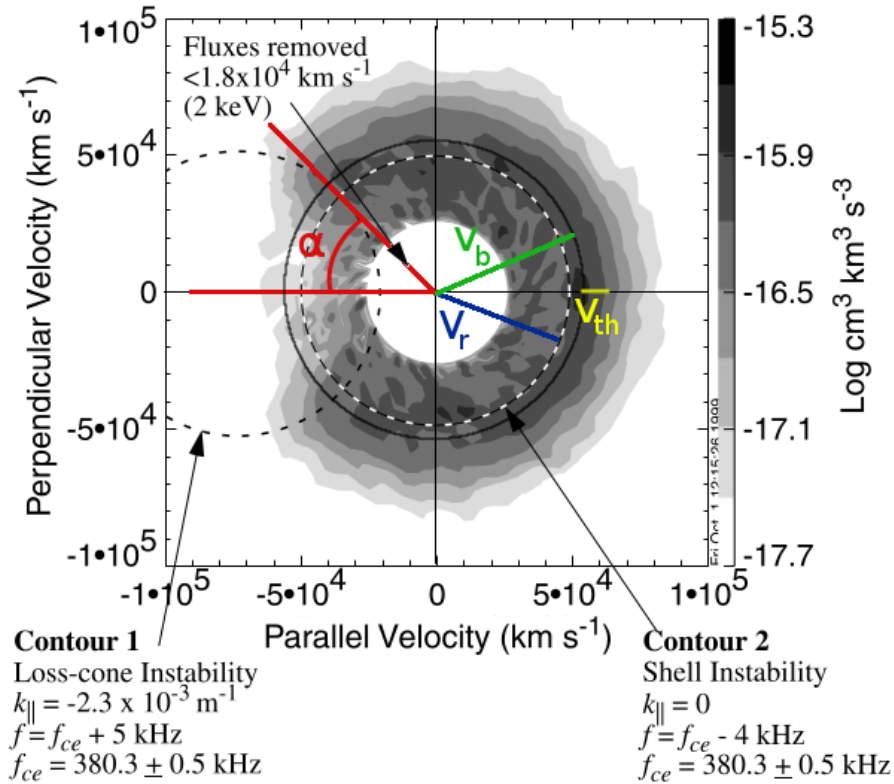


Figure 1. Typical distribution of electrons in an emitting cavity measured by the FAST spacecraft and published in *Ergun et al.* [2000]. This distribution is a “horseshoe” distribution generated by the acceleration of a gaussian-like distribution with a thermal velocity v_{th} by an electric potential drop. The electrons gained from the acceleration a parallel kinetic energy ϵ_b . The adiabatic motion of the electrons along the converging magnetic field lines leads to a rotation of the electron velocity vector which forms the shell part of the velocity distribution. The electrons whose magnetic mirror point is in or below the Earth atmosphere are lost by collision, a leave an empty sector in the distribution, called loss-cone. The distribution can be parametrized by the peak velocity v_b , by the velocity dispersion v_{th} , and by the loss-cone opening α . In the paper, we make the computations using energies rather than velocity with $\epsilon_b = \frac{m}{2} v_b^2$, $\epsilon_{th} = \frac{m}{2} v_{th}^2$ and $\epsilon_{\Theta} = \epsilon_b + \epsilon_{th}$. The resonant particles (located along the resonance circle shown by the dashed circles on both panels) have a velocity $v_r \sim \sqrt{v_b^2 - v_{th}^2}$.

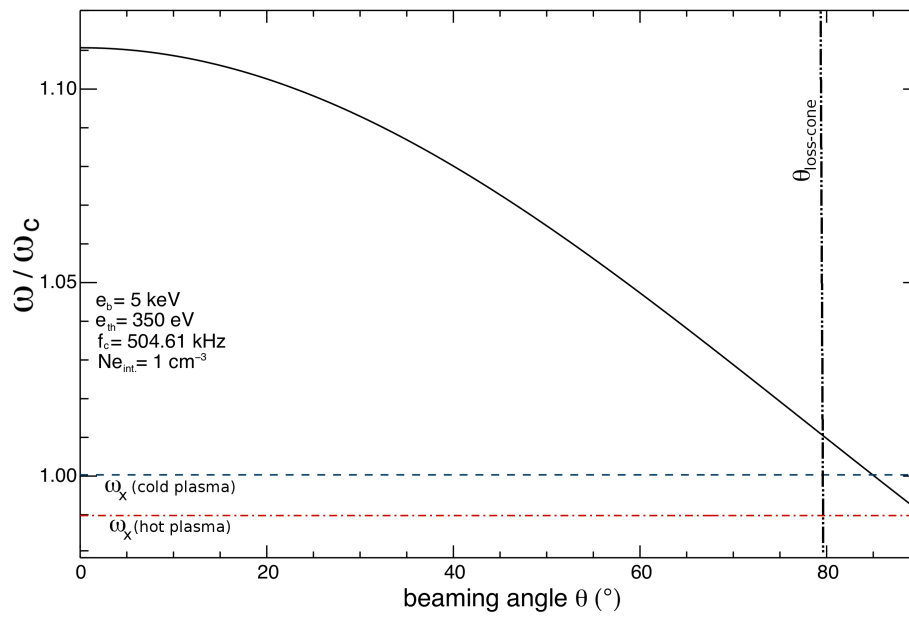


Figure 2. Emission frequency versus emission angle for a horseshoe electron distribution parameterized by $\epsilon_b = 5$ keV, $\epsilon_{th} = 350$ eV and a loss-cone opening of $\sim 39^\circ$. The cold and hot plasma cutoff frequency are indicated, as well as the beaming angle of the loss-cone driven emissions. The emission occurs above the cold cutoff frequency (and thus above the electron cyclotron frequency) for beaming angle lower than $\sim 85^\circ$.

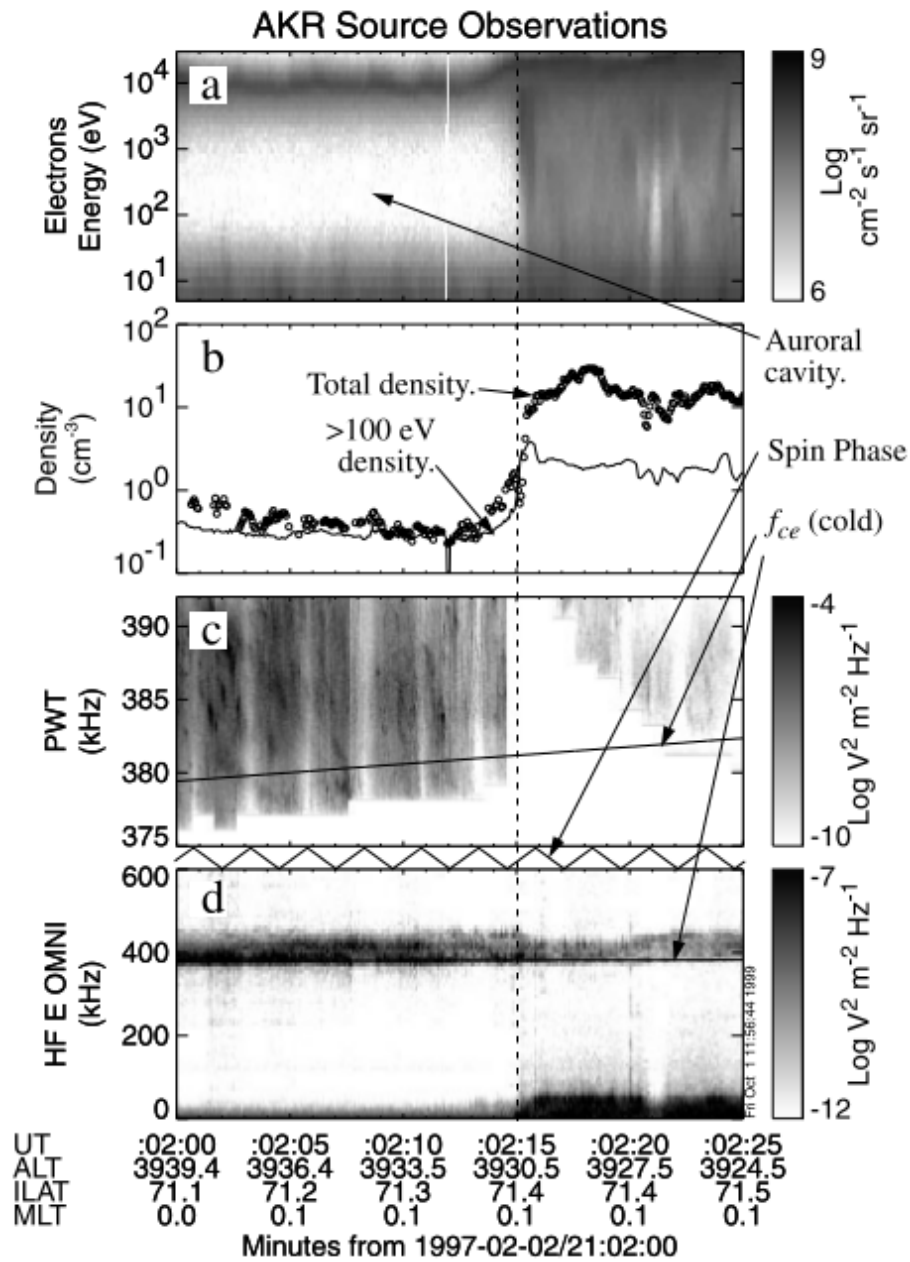


Figure 3. Plasma parameters in an emitting auroral cavity observed by the FAST spacecraft (from *Ergun et al. [2000]*). From top to bottom: (a) spectrogram of the electron energy, (b) hot electron (>100 eV) and total electron densities, (c) spectrogram of the radio emissions around the cyclotron frequency and (d) wideband spectrogram of the observed radio emissions. This observation corresponds to the observation of the electron distribution shown on Figure 1.

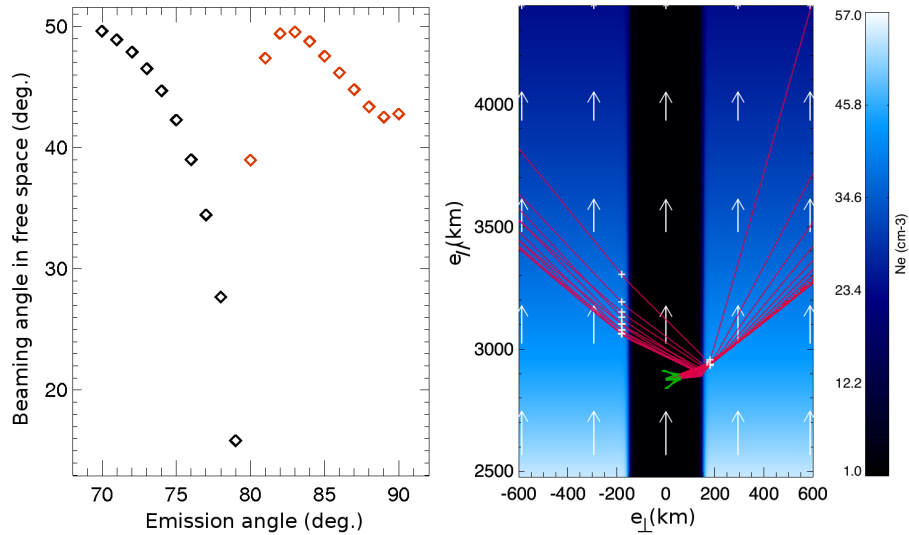


Figure 4. Beaming angle (a) and ray-tracing (b) of waves emitted around 500 kHz as a function of their initial emission angle (baseline scenario). The variation of the beaming angle is smooth and monotonic as long as no reflection happens of the cavity borders, no becomes non-linear is reflections happen.

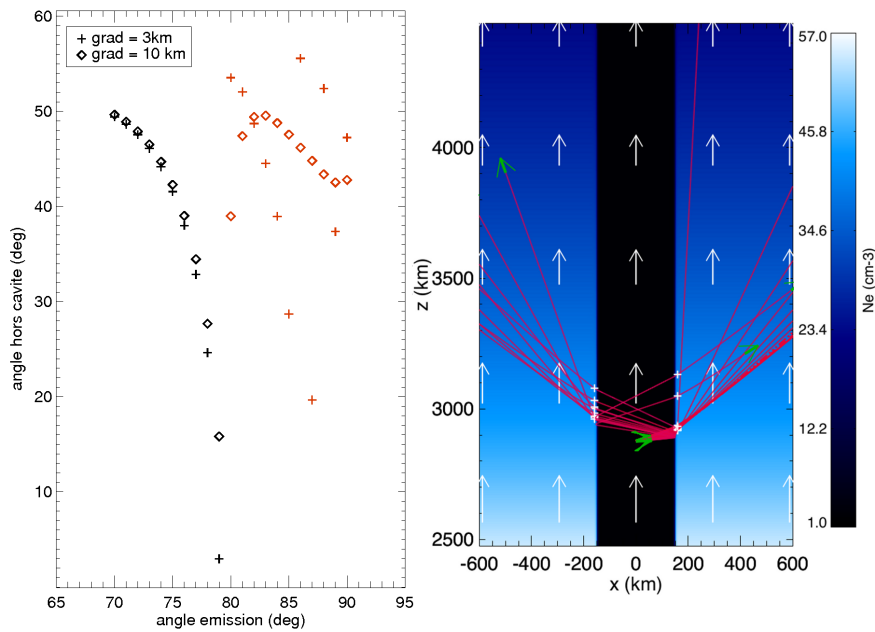


Figure 5. Beaming angle (a) and ray-tracing (b) of waves emitted around 500 kHz as a function of their initial emission angle a cavity gradient scale of 3 km. The beaming angles obtained for the 3 km scale gradients are shown with crosses, whereas the results for the baseline scenario (grade scale of 10 km) are shown with diamonds. For a gradient scale of 3 km multiple reflections on the cavity borders may occur. This strongly complicates the relation between the initial emission angle and the final beaming angle and question whether it is possible to accurately model natural cavities with significant fluctuations of the denisty on the cavity borders.

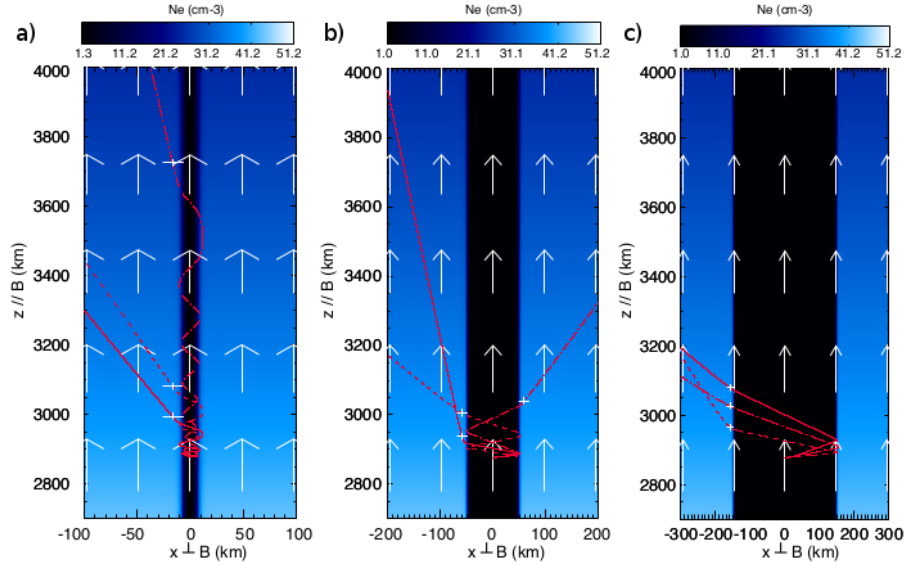


Figure 6. Ray-tracing of waves emitted with an initial angle of 80° (solid line), 85° (dashed line) and 90° (dot-dashed line) in cavities with a radius of (a) 15 km, (b) 30 km and (c) 150 km. Small cavities lead to smaller beaming angles.

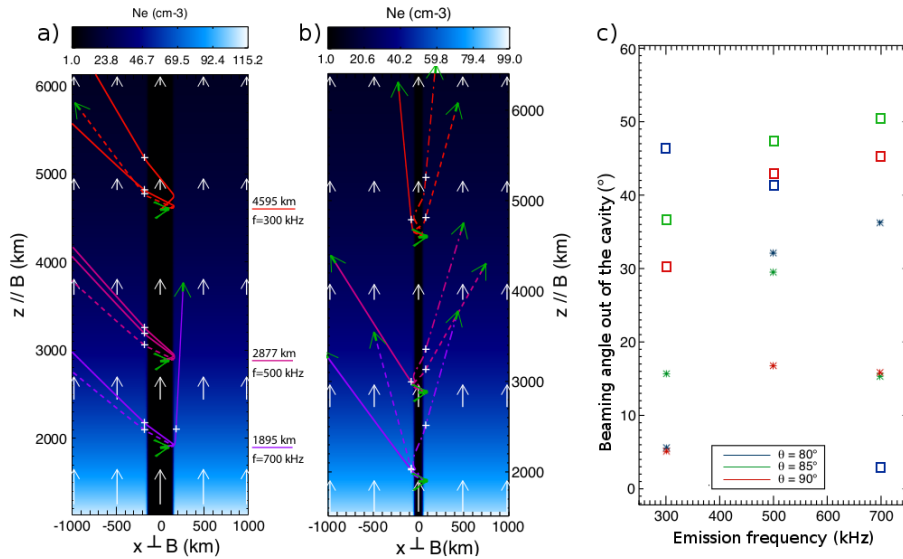


Figure 7. Ray-tracing of waves emitted with an initial angle of 80° (solid line), 85° (dashed line) and 90° (dot-dashed line) in cavities with a radius of (a) 300 km and (b) 100 km and at altitudes corresponding to perpendicular emission frequencies of 300 kHz, 500 kHz, and 700 kHz. Panel c shows the corresponding beaming angles out of the cavity, where stars standing for the cavity with a radius of 100 km and squares to the cavity with a radius of 300 km. Although there is a large scatter of the beaming angle, the beaming angle tends to decrease with frequency (with increasing altitude).

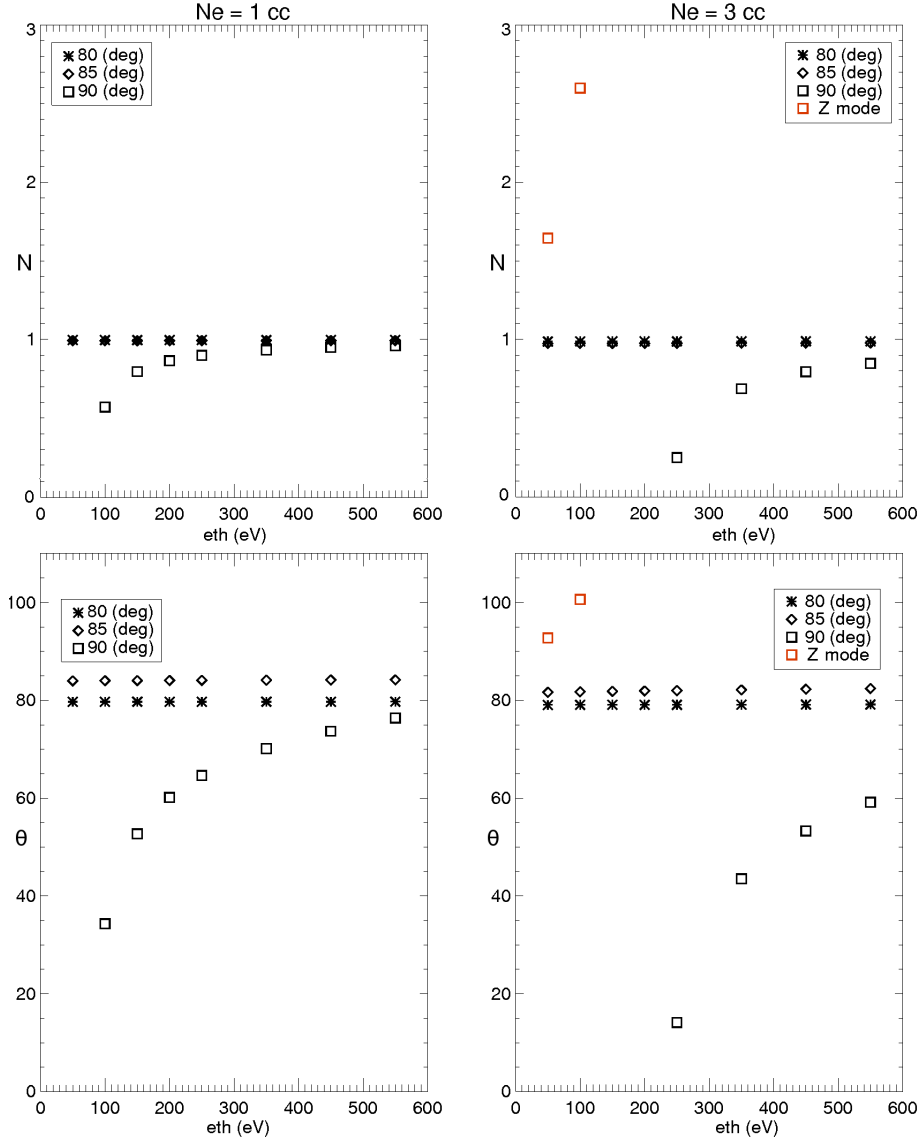


Figure 8. Refractive index and beaming angle as a function of the electron “thermal” energy, ϵ_{th} , for densities in the cavity of 1 cm^{-3} (left panels) and 3 cm^{-3} (right panels) and for waves emitted at 80° (stars), 85° (diamonds) and 90° (squares). Oblique emissions are weakly affected by the thermal energy, whereas perpendicular ones are strongly affected. The beaming angle of the perpendicular emissions goes to 0° when the wave gets emitted close to the cutoff frequency. Beaming angles larger than 90° for low ϵ_{th} corresponds to waves emitted on the Z mode which cannot propagate in vacuum.

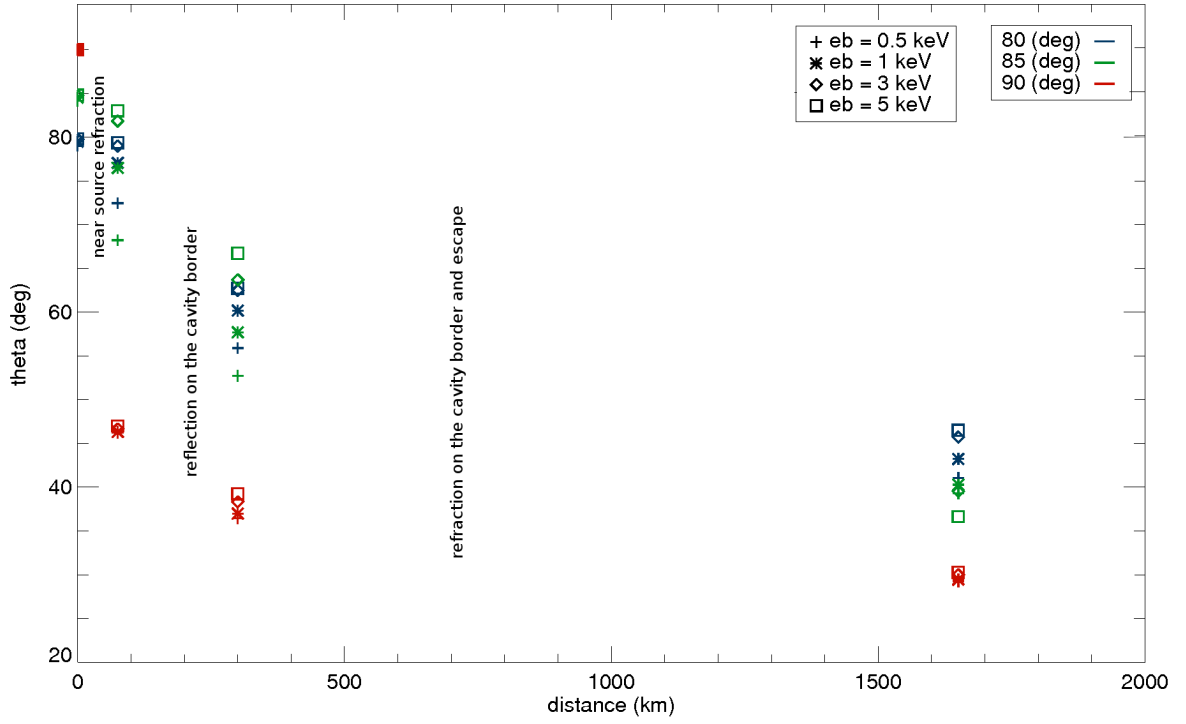


Figure 9. Angles of propagation of the waves relative to the magnetic field as a function of the distance to the source for waves emitted at 80° (blue), 85° (green) and 90° (red). Different peak energies of the electron distribution, ϵ_b , are explored: $\epsilon_b=0.5$ keV (crosses), $\epsilon_b=1$ keV (stars), $\epsilon_b=3$ keV (diamonds) and $\epsilon_b=5$ keV (squares). The distances at which the angles are indicated are chosen to be in the source, after the near source refraction, after the reflection on the cavity borders and far from the cavity after the waves escaped it. Perpendicular emissions are weakly affected by the variation of ϵ_b , whereas oblique emissions are midly affected.

ANNEXE C

ARTEMIS-P : un code de tracé de rayons en milieu anisotrope et applications en radio astronomie

A.-L. Gautier, B. Cecconi, and P. Zarka

Acte de conférence des Journées Scientifiques de l'URSI-France,
Mars 2013.

ARTEMIS-P: un code de tracé de rayons en milieu anisotrope et applications en radio astronomie.

ARTEMIS-P: A general Ray Tracing code in anisotropic plasma for radioastronomical applications.

A.-L. Gautier ^{#1}, B. Cecconi ^{#2}, P. Zarka ^{#3}

[#] LESIA, Observatoire de Paris - CNRS - UPMC - Univ. Paris-Diderot

5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

¹ anne-lise.gautier@obspm.fr

² baptiste.cecconi@obspm.fr

³ philippe.zarka@obspm.fr

Abstract

The ARTEMIS-P code is a ray tracing code in magnetoionic plasma based on the Haselgrove equations [7], which computes the polarization state of the wave along the ray path. With the general form of the equations as well as their implementation scheme, it is able to perform ray tracing studies in any given magneto-ionic medium, such as planetary magnetospheres. The ARTEMIS-P code has already been used to study the propagation ‘over the horizon’ of Saturn Electrostatic Discharges through the Kronian magnetosphere. We present here the principle of the ARTEMIS-P code and these two applications.

Keywords / Mots-clés

Ray tracing; Propagation in anisotropic medium; Magnetoionic theory

Tracé de rayons; Propagation en milieu anisotrope ; Thorie magnéto-ionique

1 Introduction

Ray tracing techniques are important tools in the study of radio waves propagation. Based on the calculation of the trajectory of electromagnetic energy through a given medium (ionosphere, solar wind, tokamak . . .), these techniques provide approximate solutions of Maxwell’s equations in this medium. Since the 50’s, many different ray tracing techniques were developed, from geometrical ones, as Pöeverlein method [9], to numerical ones, as Haselgrove method [6], [7]. This latter is probably the most useful technique for a general study of the propagation of radio waves in the terrestrial ionosphere. The general form of the Haselgrove equations [7] allows us to extend their application not only in the terrestrial ionosphere but also in any anisotropic plasma which is a common medium in the solar system, from the Sun to planetary magnetospheres. Planetary magnetospheres result from the interaction between the solar wind and the planetary magnetic field, which dominates the dynamics of charged particles. They are complex structures where interplanetary plasma and magnetic field are in interaction. Planetary radio emissions are produced by the precipitation of plasma electrons along the magnetic field lines, close to the magnetic poles. After their emission, the radio waves propagate through this inhomogeneous and anisotropic medium. In order to compute the refractive effects sustained by such radio waves through planetary magnetospheres, we are developing ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetism in Magnetosphere, Ionosphere and Solar wind including Polarization), a general three-dimensional ray tracing code based on the Haselgrove equations, which also include computation of the polarization state along the ray path. The scope of this paper is to briefly describe the numerical scheme of ARTEMIS-P code and given some examples of application in the Saturn ionosphere and magnetosphere.

2 Description of ARTEMIS-P code

2.1 Ray tracing based on the Haselgrove equations

This code is based on the Haselgrove equations described in [7], which are differential equations in position \mathbf{r} and wave vector \mathbf{k} along the ray path. In anisotropic medium, the main difficulty arises from the non-collinearity of the wave vector

and the ray path (Poynting vector \mathbf{P}). In such a medium the refractive index n at frequency f is given by the magnetoionic theory [1] :

$$n^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{2(1-X) - Y^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4Y^2(1-X)^2 \cos^2 \theta}} \quad (1)$$

Where $X = (f_p/f)^2$ with f_p the plasma frequency, $Y = f_c/f$ with f_c the cyclotron frequency and θ the angle between the wave vector \mathbf{k} and the ambient magnetic field \mathbf{B} . The sign $(-)$ corresponds to the eXtraordinary mode and $(+)$ to the Ordinary mode.

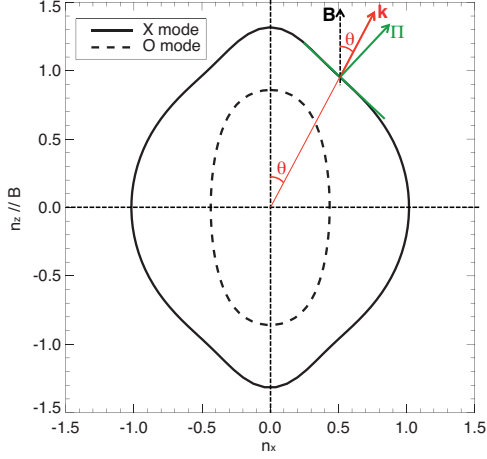


Figure 1: Definition of the wave vector \mathbf{k} and Poynting vector \mathbf{P} for the refractive index surface of X mode and O mode with $X = 0.81$ and $Y^2 = 4.41$.

If we consider the refractive index surface described by a vector of length n and direction \mathbf{k} , the Poynting vector \mathbf{P} is defined by the normal of the surface at the intersection with the vector \mathbf{k} , as illustrated in figure 1.

In [6], the author derives a set of Hamiltonian equations in \mathbf{r} and \mathbf{k} along the ray path from the Fermat's principle and the property of reciprocal surfaces of the refractive index surface and the wave front.

Equations implemented in ARTEMIS-P (coming from [7]) are more suitable for numerical integration and propagation in isotropic medium. These differential equations are solved by a 4th order Runge-Kutta algorithm, with an integration step which is adjusted with respect to the gradient of refractive index along the ray. Equations of propagation are implemented in a general form and ARTEMIS-P only needs a description of the propagation medium and the initial characteristics of the ray supplied by the user.

2.2 Wave polarization along the ray path

The polarization of radio waves is defined by the direction of its electric field \mathbf{E} . To characterize the propagating electromagnetic wave, the relative position of the electric field vector of the wave \mathbf{E} with respect to the wave vector \mathbf{k} has to be calculated. In a frame where the vector \mathbf{k} is fixed, it amounts to find the components of the electric field \mathbf{E} , which are extracted from Maxwell's equations in a given medium :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2)$$

where $\bar{\bar{\mathbf{K}}}$ is the dielectric tensor. In a cold magnetized plasma $\bar{\bar{\mathbf{K}}}$ is given by (see [5]):

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

where

$$S = 1 - \frac{X}{1-Y^2}, \quad D = \frac{YX^2}{1-Y^2}, \quad P = 1-X \quad (3)$$

In a frame where the local magnetic field \mathbf{B} is along the z -axis, the wave vector \mathbf{k} begin in the (x, z) plane and making an angle θ with \mathbf{B} , the components of the electric field solutions of equation (2) are linked by (see [10]):

$$\frac{E_x}{(n^2 - S)(n^2 \sin^2 \theta - P)} = \frac{E_y}{iD(n^2 \sin^2 \theta - P)} = \frac{E_z}{(n^2 - S)n^2 \sin \theta \cos \theta} \quad (4)$$

Thus the polarization of the wave only depends on the characteristics of the propagation medium and θ . In addition to the propagation computation, the ARTEMIS-P code can calculate the polarization ratios E_y/E_x , E_z/E_x and E_z/E_y in each point along the ray path. In radio astronomy, the polarization of a wave is often described with the Stokes parameters S , Q , U and V , where S is the flux density of the wave, Q and U characterize the linear polarization and V is the circular polarization degree. It can be shown that the Stokes parameter V can be related to the axial ratio $\rho = E_y/E_x$ when the longitudinal component of the polarization can be neglected by (see [8]):

$$V = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \quad (5)$$

2.3 Mode coupling and limiting polarization

The magnetoionic theory predicts the existence of different mode of propagation of radio waves (see equation (1)), often called extraordinary mode and Ordinary mode, both characterized by a refractive index (n_O and n_X) and a polarization state (ρ_O and ρ_X). In an homogeneous medium, each mode propagates independently and its features are fixed by the medium. When the medium is slowly varying, Booker [2] has shown that in many cases this theory is still valid, and the features of the wave are varying along the ray path. However he has also shown that there exist regions in the ionosphere where the magnetoionic modes are not propagating independently. In these regions the propagation modes are ‘coupled’. Furthermore Booker has shown in [2] that when a radio wave arrives in such a region its polarization is frozen and does not change across the coupling region. It is called the ‘limiting polarization’ effect.

Regions where mode coupling occurs are characterized in [3] by a difference between the refractive indices of the two modes smaller than there variations along the ray path:

$$|n_O - n_X| \leq \frac{1}{k} \left| \frac{dn_O}{ds} \right| \text{ or } \frac{1}{k} \left| \frac{dn_X}{ds} \right| \quad (6)$$

where ds is the path length and $k = 2\pi c/f$.

The ARTEMIS-P code computes the refractive indices of both modes and there derivatives along the ray path. As long as the criterion of the equation (6) is not satisfied, the polarization ratios are computed in each point of the ray and as soon as this criterion is satisfied, the polarization ratios are retained as long as the propagating modes are ‘coupled’.

3 Propagation over the horizon of Saturn Electrostatic Discharges

Saturn Electrostatic Discharges (SED) are radio signatures of lightning flashes originating from Saturn atmosphere. Before the equinox in 2009, observations by Cassini/ RPWS (Radio and Plasma Waves Science) and Cassini/ISS (Imaging Science Subsystem) have shown strong correlation between the periodicity and occurrence of radio bursts and cloud features localized at a planetocentric latitude of 35° South and an altitude of 2000 km below the altitude of the peak of electron density of the ionosphere. When Cassini was located in the morning sector, the cloud system appeared on the nightside and disappeared on the dayside, but the detection of SED started before the cloud system could actually be seen by the Cassini camera (figure 2a). This effect is called the ‘over the horizon’ effect, as the radio horizon extends beyond the visible horizon. In [11], this effect has been qualitatively attributed to propagation effects through the nightside ionosphere, where electron density varies with the local time. Indeed, if a radio wave is emitted at a frequency lower than the local plasma frequency, it can then be trapped under the ionosphere and ultimately escape where the local plasma frequency becomes lower than the wave frequency and then it can reach the Cassini spacecraft.

We have used the ARTEMIS-P code to compute the path of propagation of radio waves through a realistic model of Saturn ionosphere. Over the horizon effect is detected by the RPWS instrument in a frequency range of 2 MHz to 16 MHz, which is high above the typically local cyclotron frequency ($f_c \sim 500$ kHz). We can neglect in this frequency range the effect of the kronian magnetic field on the propagation of radio waves. The variation of electron density with the local time is obtained by the study of the low frequency cut-off of the SED, studied in [4]. ARTEMIS-P propagates radio rays in the frequency range [2-16] MHz at several local times of the source during one storm episode. We then simulate an observed dynamic spectrum as illustrated in figure 2b. The grey levels in the simulation correspond to the mean number of reflections under the ionosphere before the escape of the rays that ultimately reach the spacecraft. For some geometric configurations, we can observe an extent before the horizon, which corresponds to a higher rate of reflection than in the center of the episode. This study shows that the hypothesis of trapped radio rays under the ionosphere is consistent and also shows the key-role of the peak electron density profile versus local time. A statistical study of the occurrences of the phenomenon on Cassini data and simulations of this occurrence are in progress.

4 Conclusion

The ARTEMIS-P code is a ray tracing code in magnetoionic plasma based on the Haselgrove equations, which computes the polarization state of the wave along the ray path and taken into account the limiting polarization in regions of mode coupling. The studies of the propagation ‘over the horizon’ of the SED and the refraction of the SKR through the Saturn magnetosphere shows the interest and the flexibility of this code. The ultimate aim of the developement of the ARTEMIS-P code is to create a general, flexible, fast and user-friendly ray tracing tool which could be apply on a large panel of astrophysical studies (Quasi-Periodic bursts in jovian magnetosphere, planetary lightnings, propagation in auroral cavities, attenuation lanes, ...)

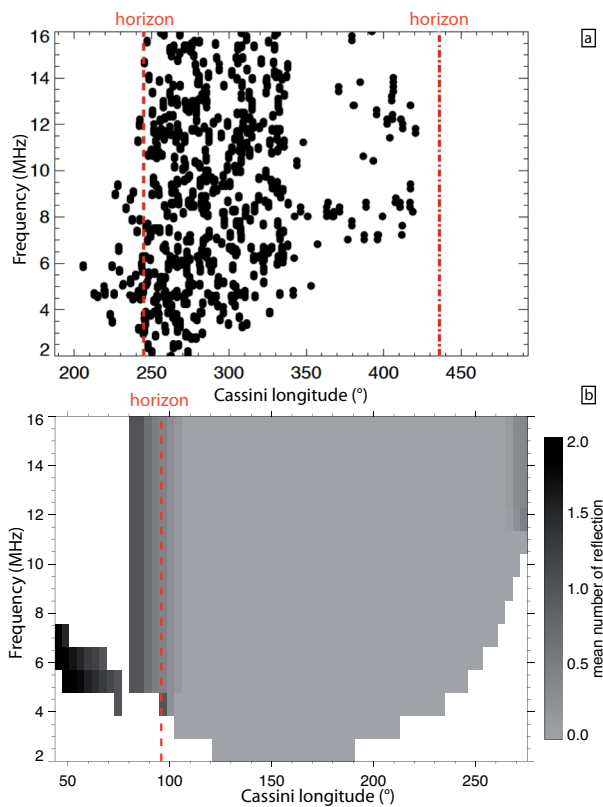


Figure 2: a) Dynamic spectrum of the SED episode during the day 04/10/2009. Black dots correspond to SED detections, red dashed lines to the Cassini spacecraft longitude when the cloud system cross the visible horizons. b) Simulation of a dynamic spectrum of a SED episode. Grey levels correspond to the mean number of reflections sustained by the rays before reaching Cassini and red dashed line to the Cassini longitude when the cloud system crosses the visible horizon.

References

- [1] E.V. Appleton. Wireless studies of the ionosphere. *Wireless Section, Institution of Electrical Engineers - Proceedings of the*, 7(21):257–265, september 1932.
- [2] H. G. Booker. Oblique propagation of electromagnetic waves in a slowly-varying non-isotropic medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 155(885):pp. 235–257, 1936.
- [3] K. G. Budden. The Theory of the Limiting Polarization of Radio Waves Reflected from the Ionosphere. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 215:215–233, November 1952.
- [4] G. Fischer, D. A. Gurnett, P. Zarka, L. Moore, and U. A. Dyudina. Peak electron densities in Saturn’s ionosphere derived from the low-frequency cutoff of Saturn lightning. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 116:A04315, April 2011.
- [5] D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee. *Introduction to Plasma Physics*. January 2005.
- [6] J. Haselgrove. Ray Theory and a New Method for Ray Tracing. In *Physics of the Ionosphere*, page 355, 1955.
- [7] J. Haselgrove. The Hamiltonian ray path equations. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 25:397–399, July 1963.
- [8] J. D. Kraus. *Radio astronomy*. 1966.
- [9] H. Pöeverlein. *Strahlwege von Radiowellen in der Ionosphäre: Mitteilg 1. Mit 6 Abb.* Number vol. 1 in Bayerische Akademie der Wissenschaften München. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Sitzungsberichte. Schr. v. 13. Aug. 1949 (Nicht f. d. Aust.), 1948.
- [10] D. Quémada. *Ondes dans les plasmas*. 1968.
- [11] P. Zarka, B. Cecconi, L. Denis, W. M. Farrell, G. Fischer, G. B. Hospodarsky, M. L. Kaiser, and W. S. Kurth. Physical properties and detection of Saturn’s lightning radio bursts. In H. O. Rucker, W. S. Kurth, and G. Mann, Austrian Academy of Sciences Press, Vienna, editor, *Planetary Radio Emissions VI*, 2006.

ANNEXE D

Explanation for the detection of Saturn's radio lightning « Over The Horizon » via ray-tracing in the kronian ionosphere

A.-L. Gautier, P. Zarka, B.Cecconi, and G. Fischer

Présentation au team-meeting Cassini/RPWS, Mai 2013.

Explanation for the detection of Saturn's radio lightning "Over The Horizon" via ray-tracing in the kronian ionosphere

Anne-Lise Gautier¹, Philippe Zarka¹,
Baptiste Cecconi¹, and Georg Fischer²

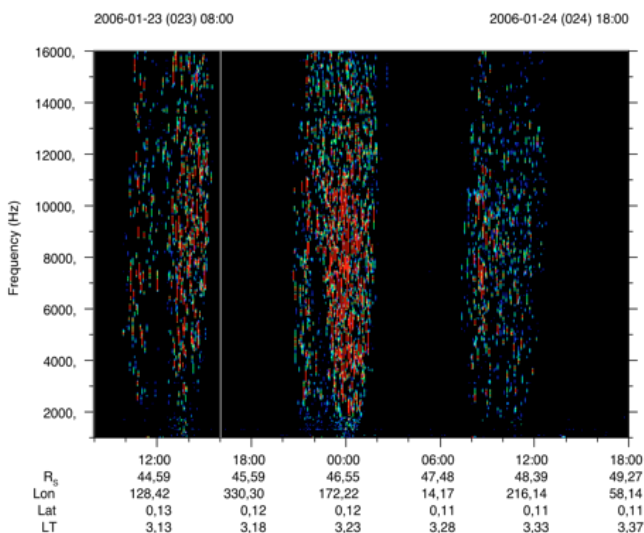
kindly presented by Laurent Lamy¹

¹LESIA, Observatoire de Paris, Meudon, France

²Space Research Institute, Austr. Acad. Sci., Graz, Austria

Saturn Electrostatic Discharges

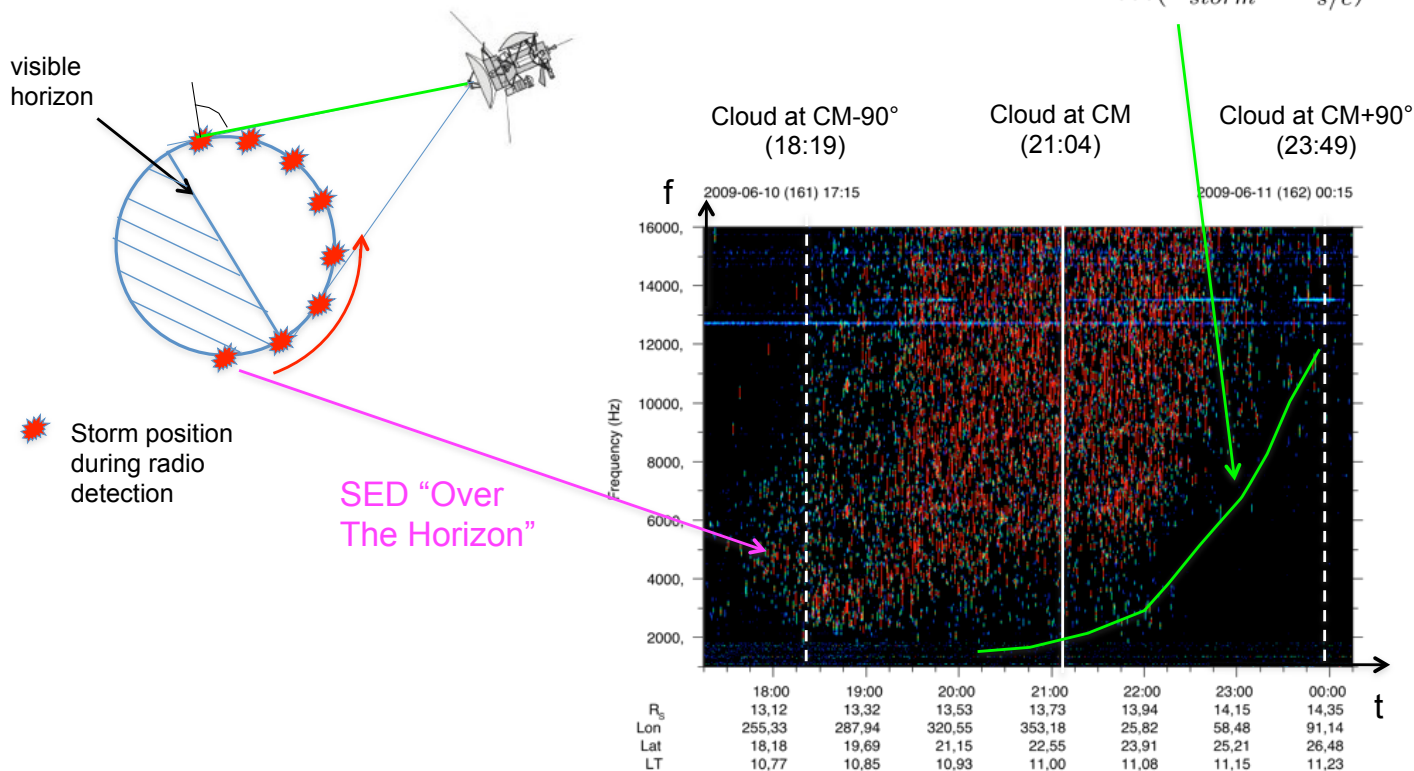
- SED : radio signatures of lightning flashes from Saturn's atmosphere
brief broadband bursts grouped in episodes (lasting ~1/2 Saturn rotation)
1st detection: Voyager 1 (PRA) - 1981



- Cassini ISS & RPWS : correlation between SED occurrence and periodicity & localization of visible cloud systems
 - at a latitude of 35°S (before equinox)
 - slowly drifting westward (wrt planet)

SED: “Over The Horizon” effect

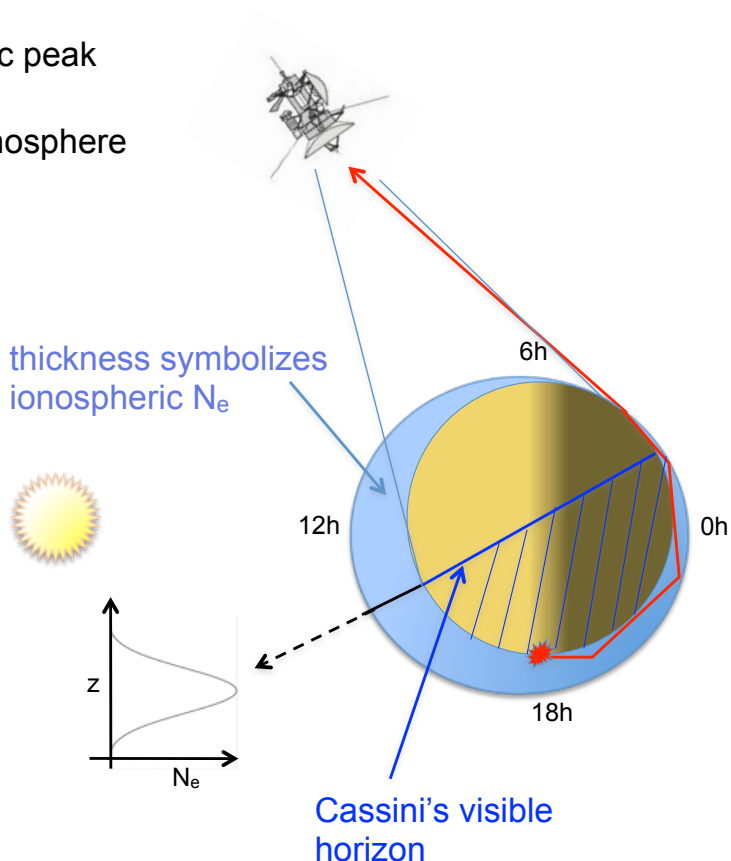
- “OTH” effect : detection of radio bursts before and/or after the cloud is direct view of Cassini
- Chromatic effect : LF appear first here
- SED disappearance: ionospheric cutoff incl. source-S/C angle $f_{cutoff} = \frac{f_p}{\cos(\Lambda_{storm} - \Lambda_{s/c})}$



“Over The Horizon” : propagation effect ?

- SED are produced below the ionospheric peak
- If $f < f_{cutoff}$ rays are trapped under the ionosphere
- Variation of N_e with LT may lead to temporary trapping of rays under the ionosphere before escape to Cassini

[Zarka et al., 2006]



Ray tracing code in non-magnetized plasma

- Ray : path of time-averaged Poynting vector, colinear to the group velocity \mathbf{V}_g
- In an **isotropic** medium (without \mathbf{B}), the wave vector \mathbf{k} and \mathbf{V}_g are **colinear**
- Code based on [Haselgrove, 1963] formalism, 2D & 3D implementations

Ray Equations:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{d\mathbf{r}} \end{cases}$$

with \mathbf{r} position vector
 \mathbf{k} wave vector
 n refractive index
 S path length

$$\|\mathbf{k}\| = n$$

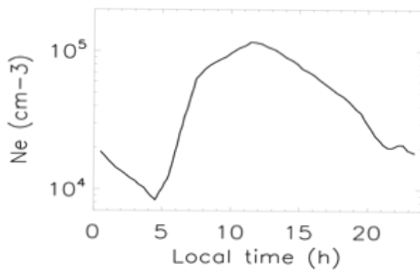
$$d\tau = \frac{ds}{n}$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$$

Resolved by 3rd order Runge-Kutta algorithm

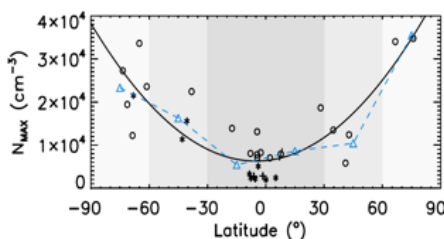
Application: SED Propagation

Model of Saturn's Ionosphere



$\leftarrow Ne_{Fischer}(LT)$ at $\lambda=35^\circ S$ from SED LF cutoff within the horizons [Fischer et al. 2011]

$$Ne_{Moore}(\lambda) = 6400 + 45*\lambda^2 + 4.4*\lambda \quad [\text{Moore et al. 2010}]$$



$$Ne(\lambda, LT) = Ne_{Fischer}(LT) \times Ne_{Moore}(\lambda) / Ne_{Moore}(-35^\circ)$$

$$f_p(r, \lambda, LT) \approx 9\sqrt{Ne(\lambda, LT)} \times \exp\left[-\frac{(r-m)^2}{\sigma^2}\right] \quad \begin{matrix} m = 1.03R_S \\ \sigma = 0.004R_S \end{matrix}$$

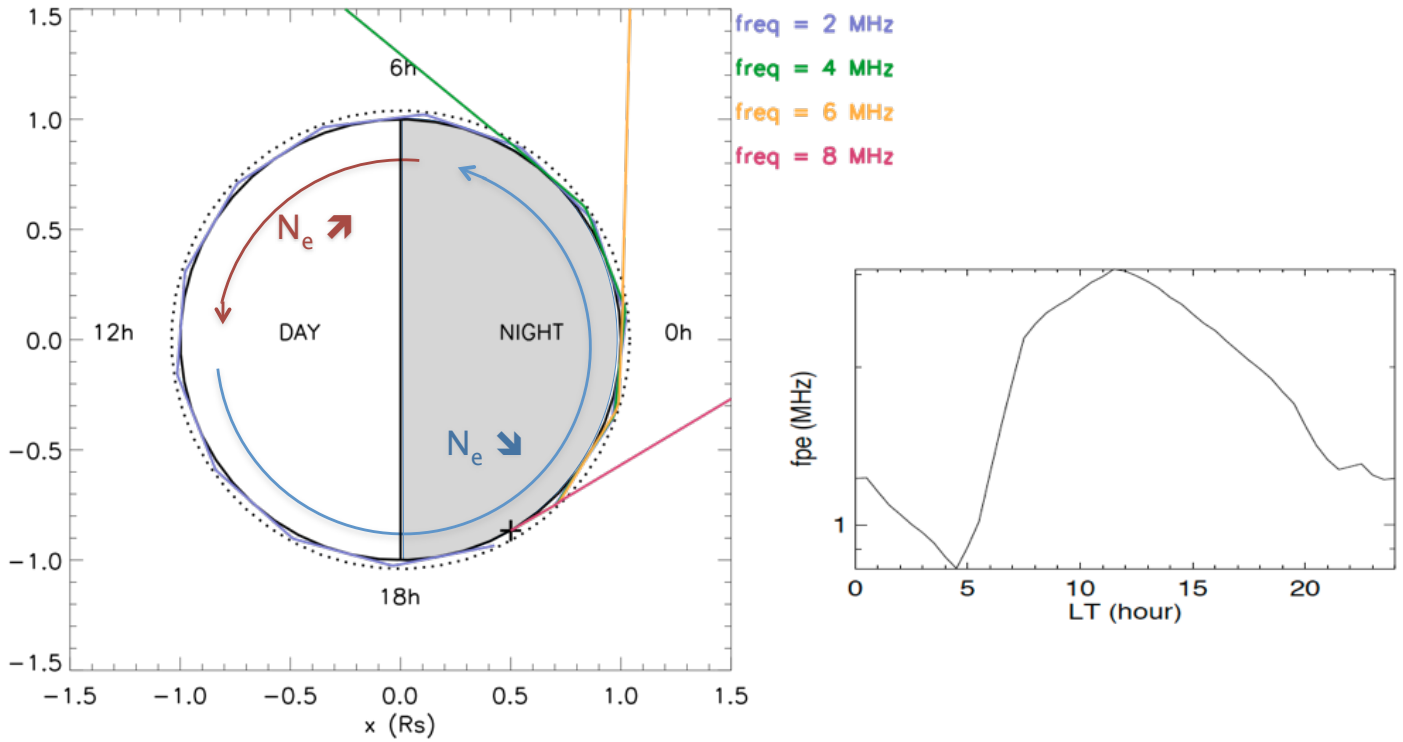
+

Ray Tracing code

Simulation of dynamic spectrum of events observed by Cassini

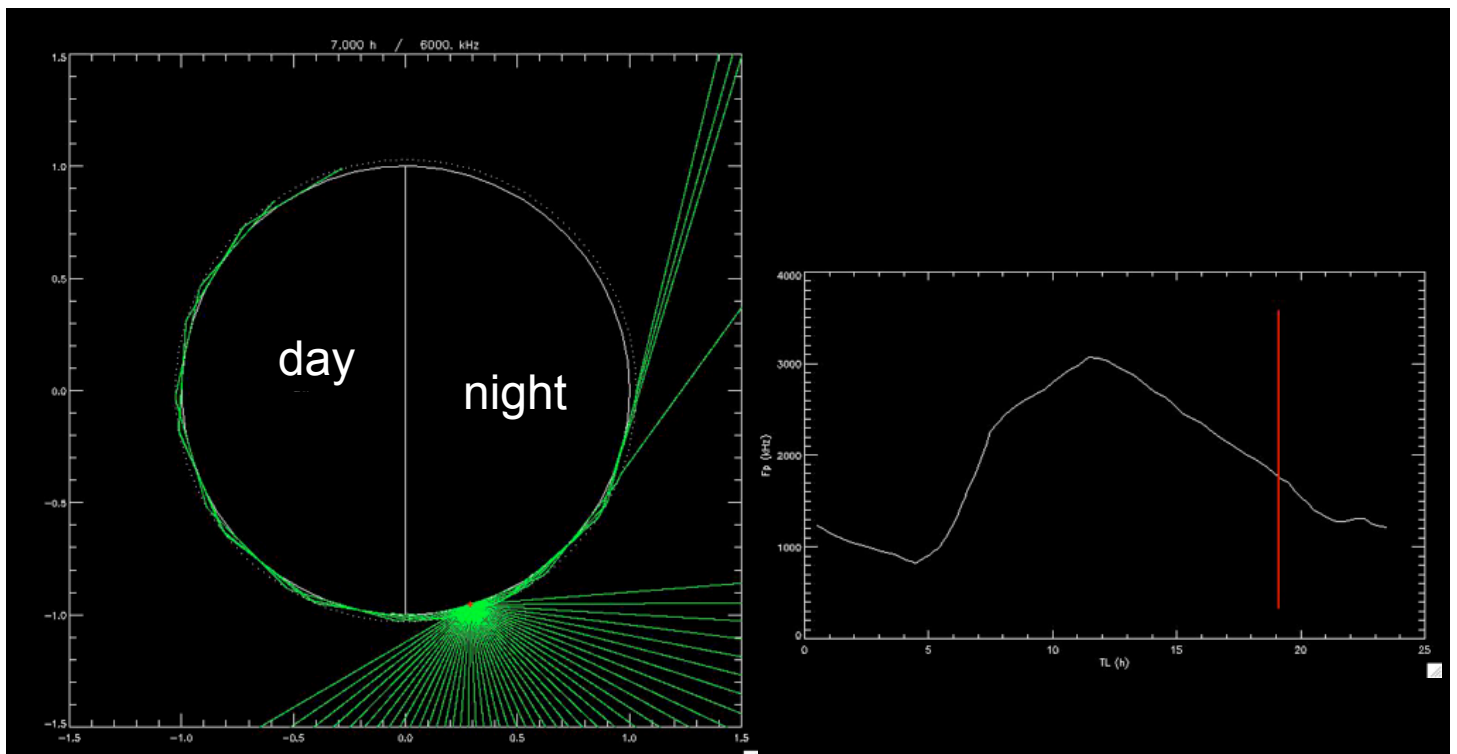
Ray tracing through Saturn's ionosphere

- Storm at 20h LT : rays emitted tangent to Saturn's surface, $f = 2, 4, 6, 8$ MHz
 - a ray can escape the ionosphere after temporary trapping
 - LT of escape point depends on frequency
 - a ray can reach Cassini even if storm not visible



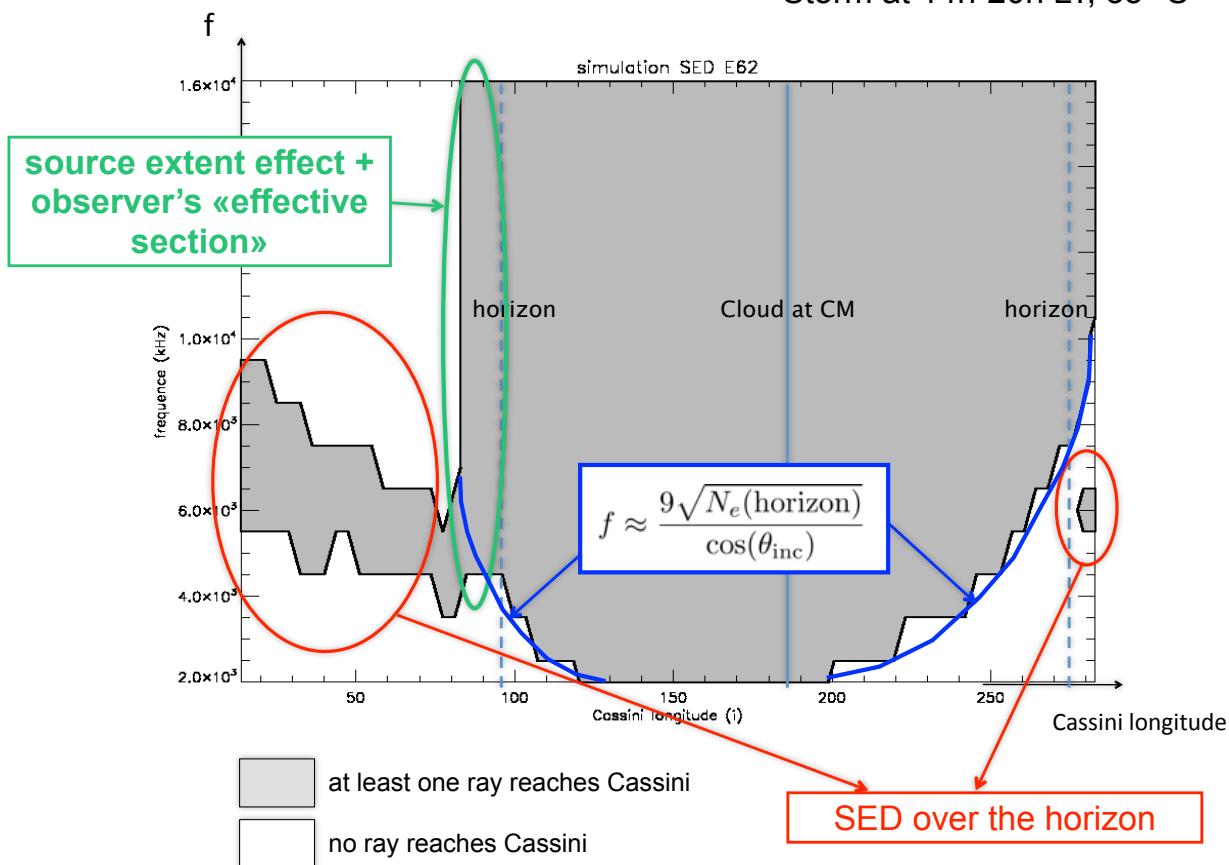
Ray tracing through Saturn's ionosphere

- Ray at 6 MHz : isotropic emission, rays emitted at $\delta\theta \approx 5^\circ$ from a storm moving in LT
 - a ray can escape the ionosphere after temporary trapping
 - LT of escape point depends on frequency
 - a ray can reach Cassini even if storm not visible



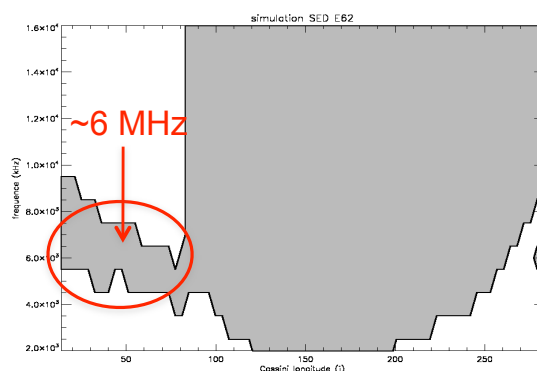
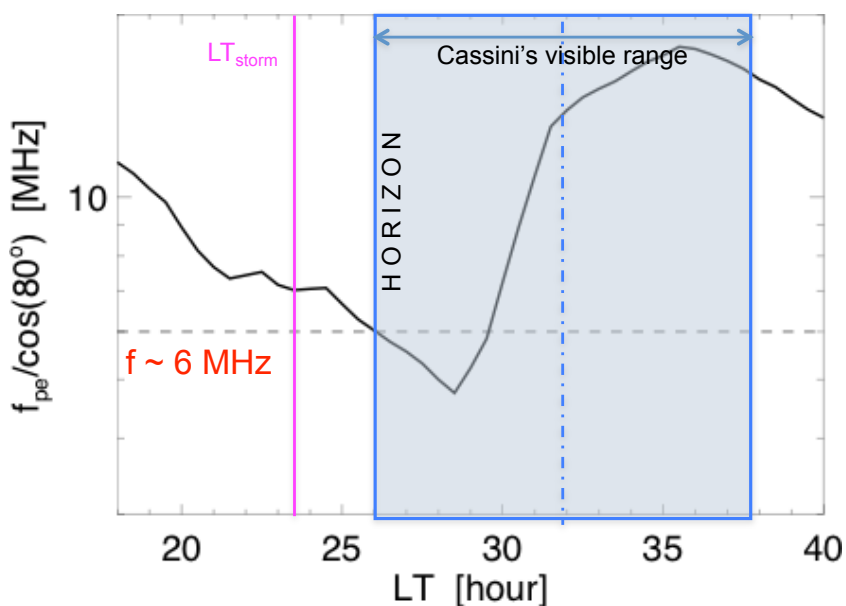
Application: SED dynamic spectrum simulation

- Example of 3D ray tracing without magnetic field : Cassini at 6h LT, 43 R_S
Storm at 14h-20h LT, 35° S



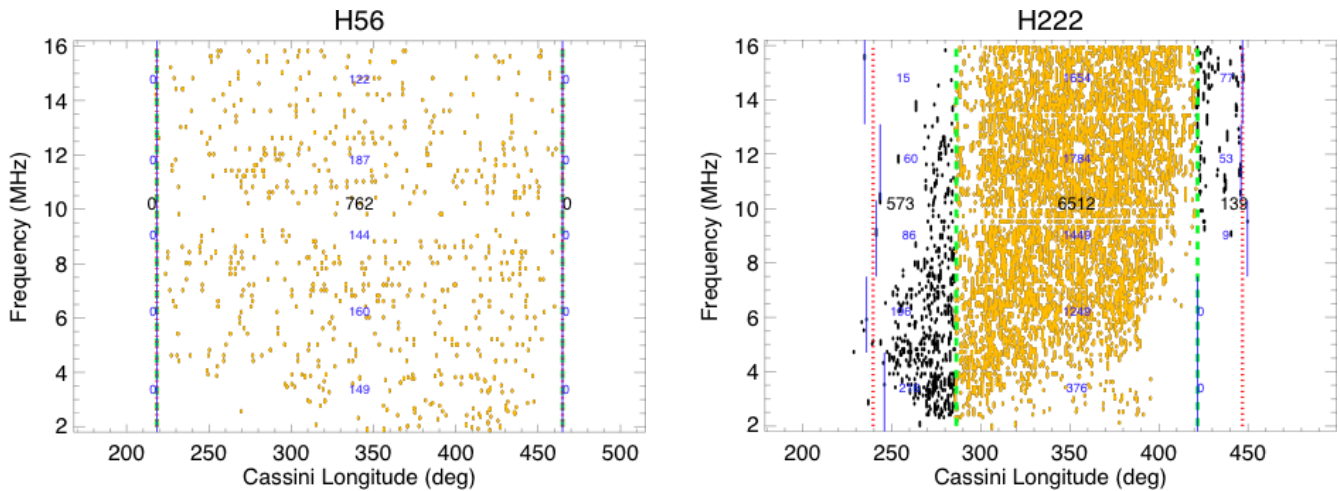
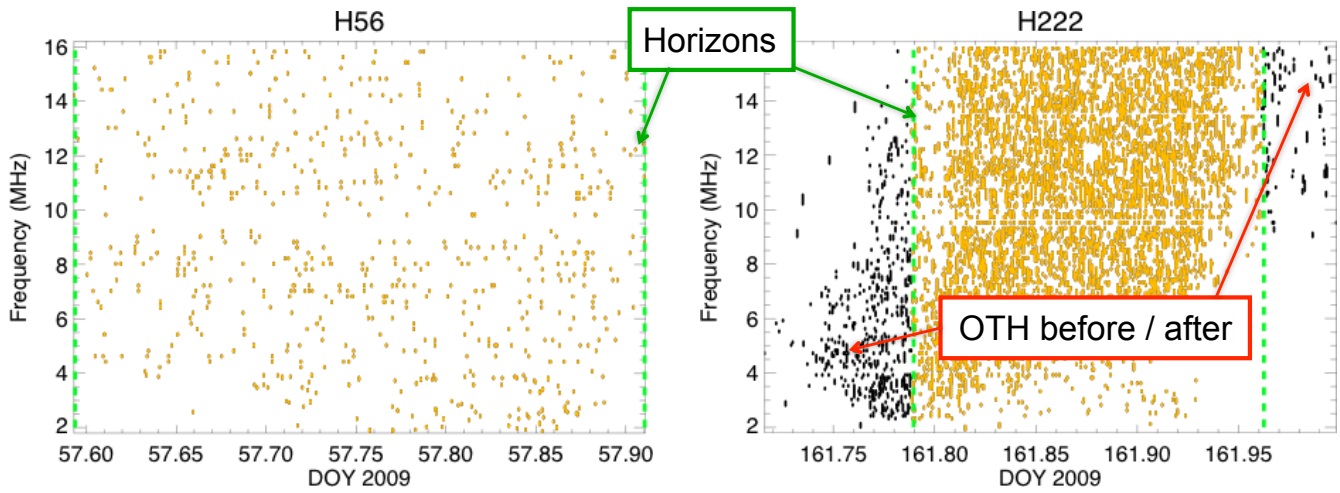
Conditions for “over the horizon” effect

- “Over The Horizon” rays : are trapped at source LT
can escape at Cassini’s visible horizon
⇒ $N_e(\text{LT}_{\text{storm}}) > N_e(\text{horizon})$

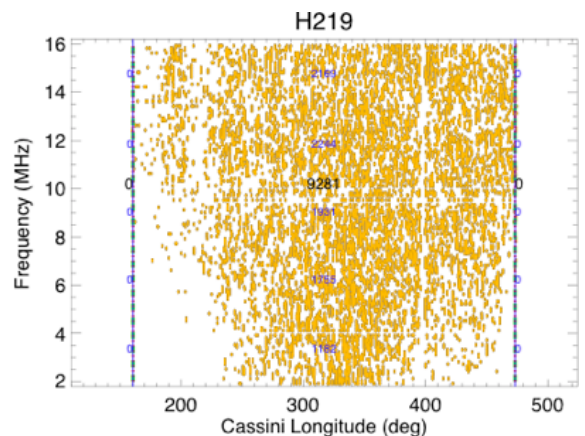
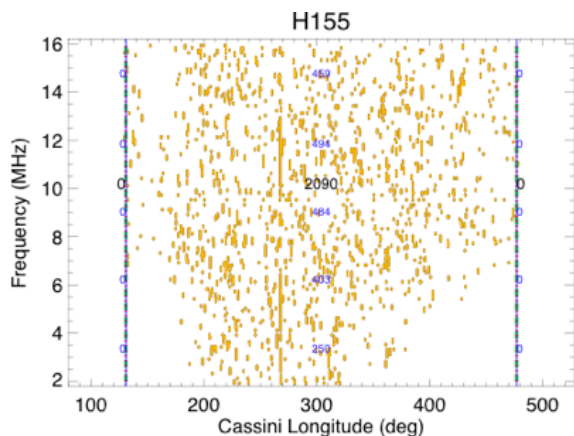
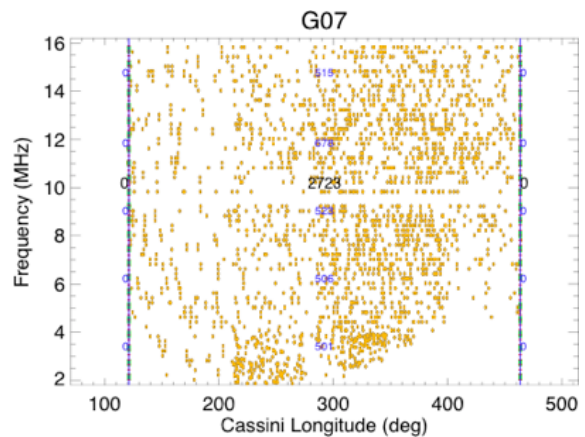
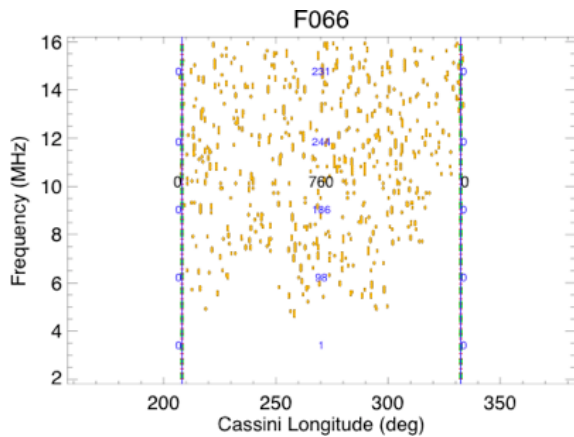


- Localization and frequency of OTH SED provide constraints on ionosphere

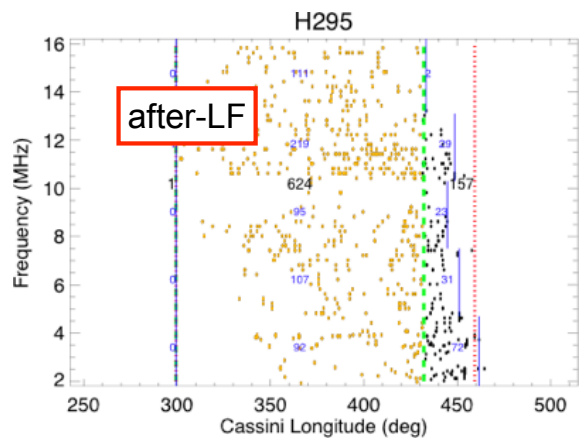
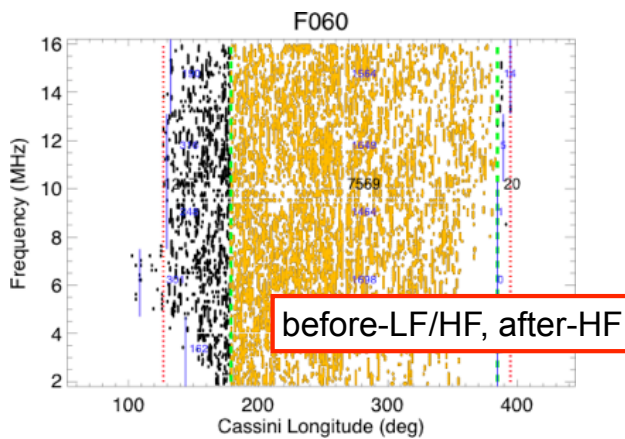
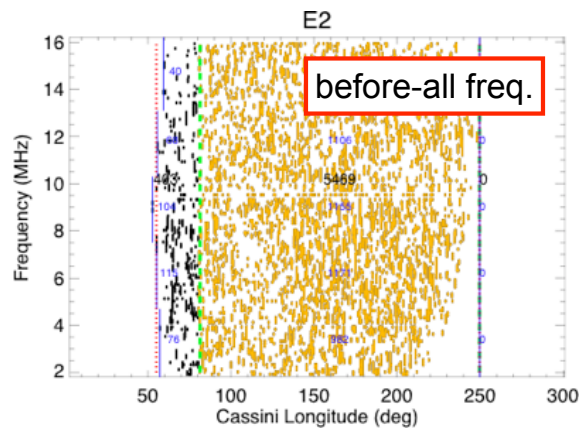
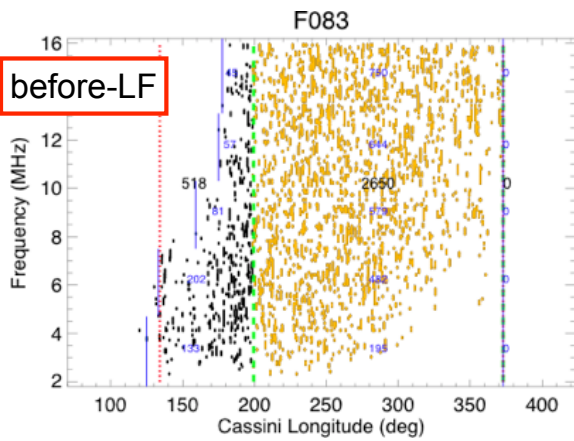
Catalog of 587 episodes 2004-2009 (pre-equinox)



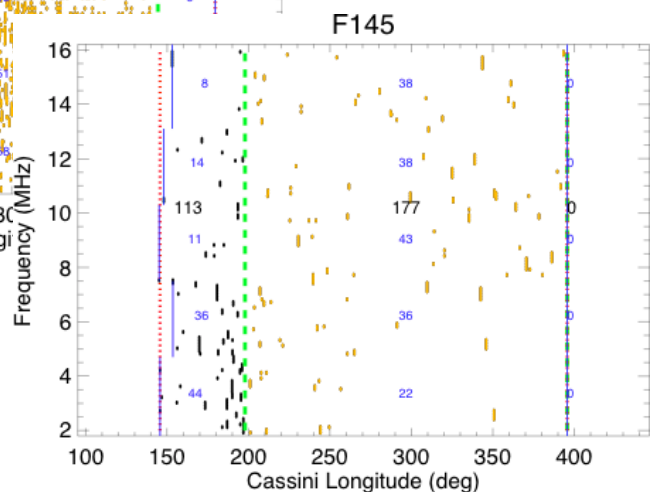
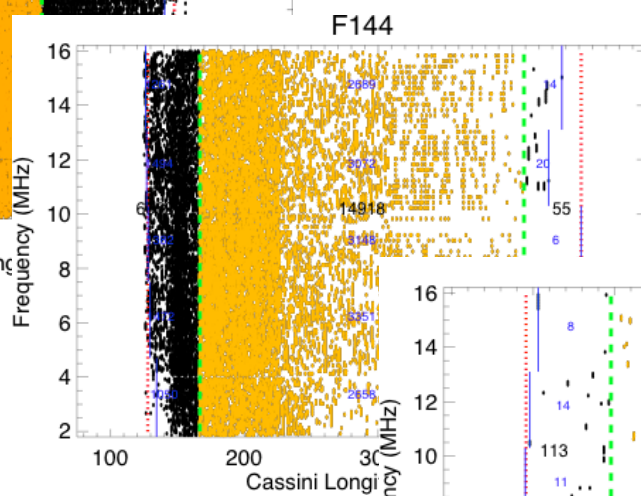
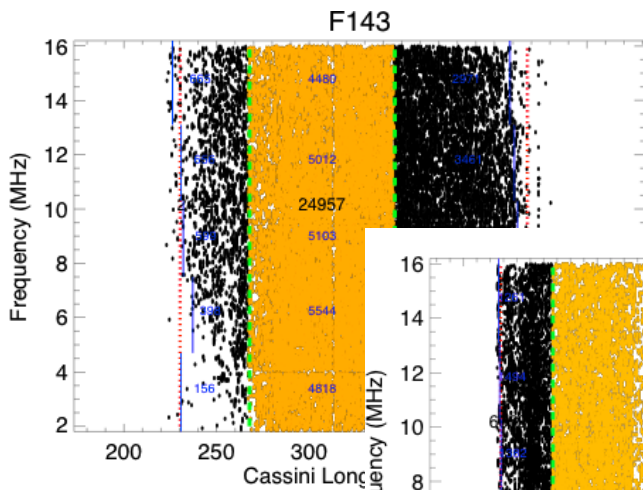
No OTH effect



OTH effect before/after, LF/HF/all frequencies

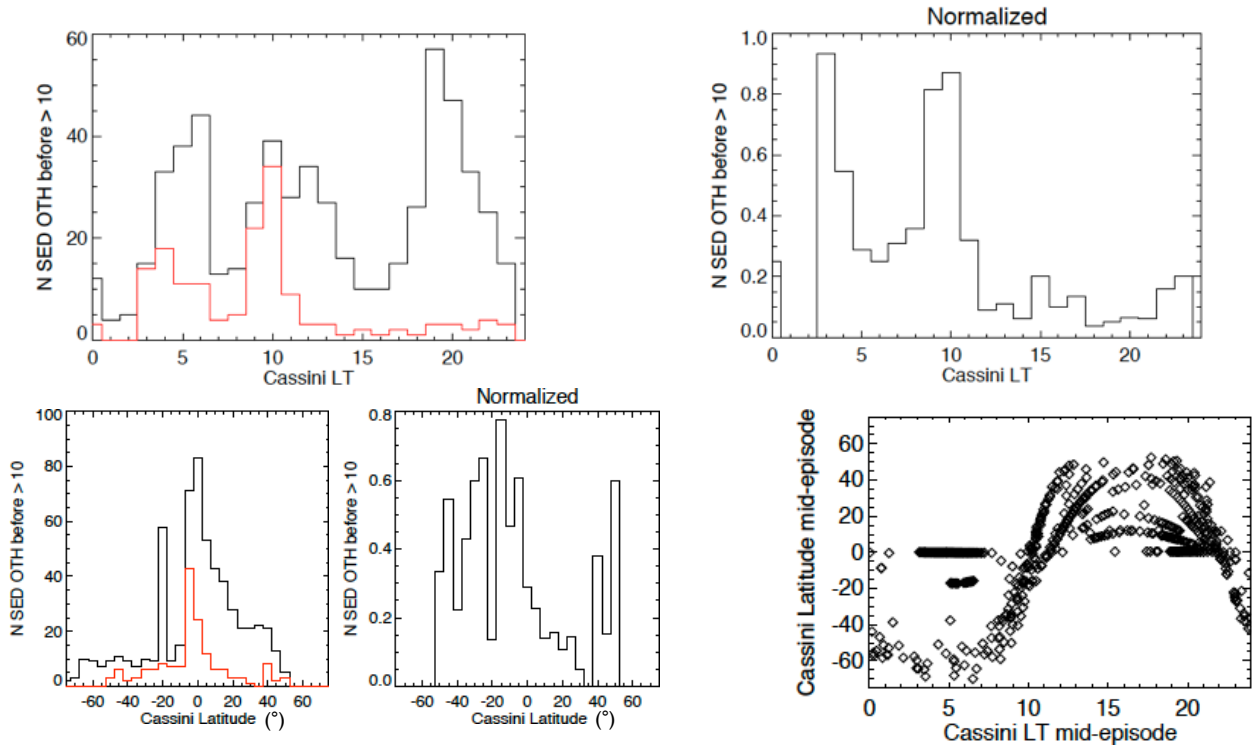


Fast variability of occurrence rate & OTH effect



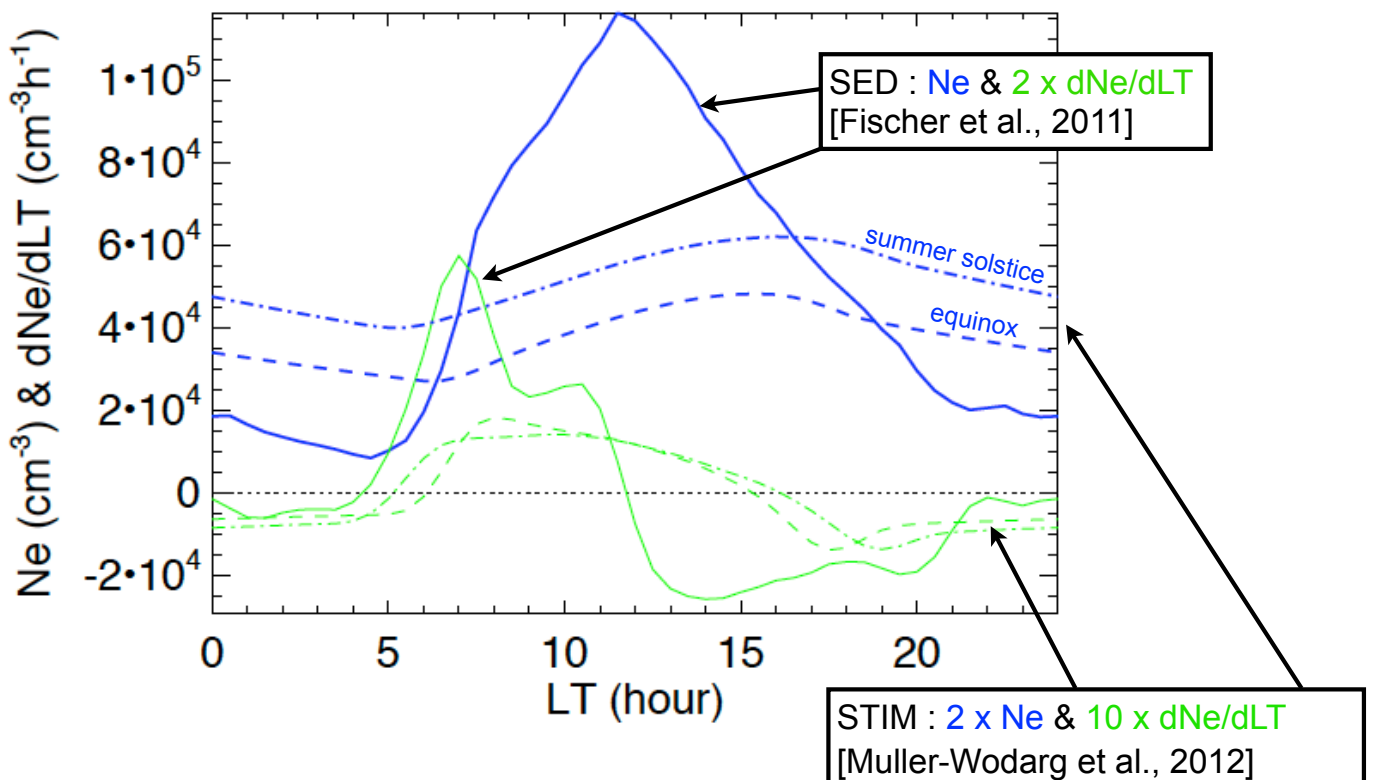
Statistical occurrence : OTH before

- OTH-before events : >10 SED (t,f pixels) before horizon (**159** events in catalog)
- Observed mostly when Cassini above Saturn's morning side
 \Rightarrow southern hemisphere



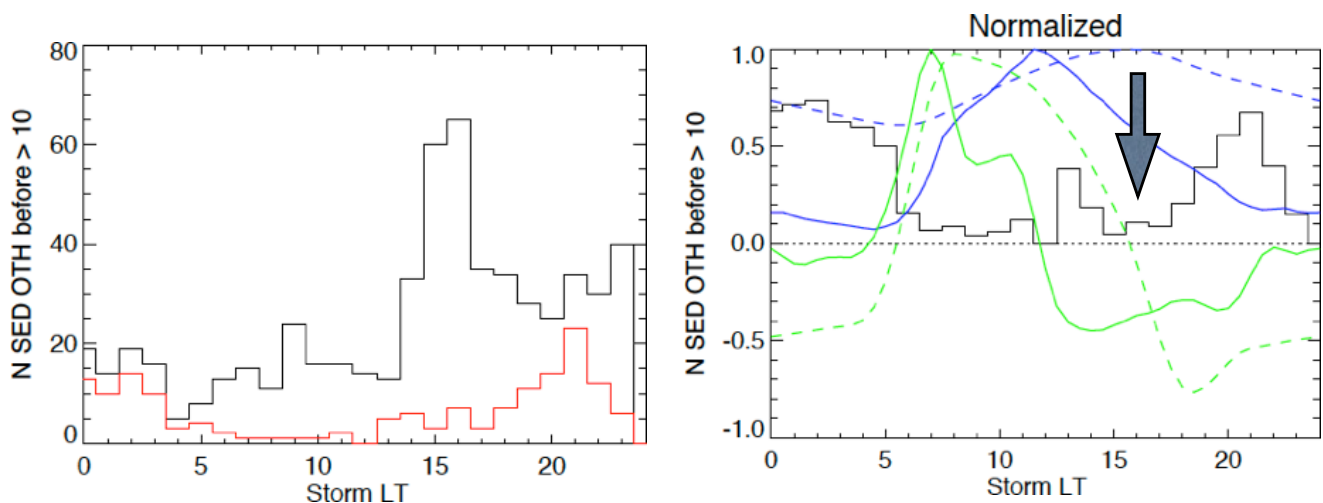
- Correlation LT - Latitude : Cassini is in the morning side in the S hemisphere and in the afternoon side in the N hemisphere

Ionospheric density profiles at 35°S



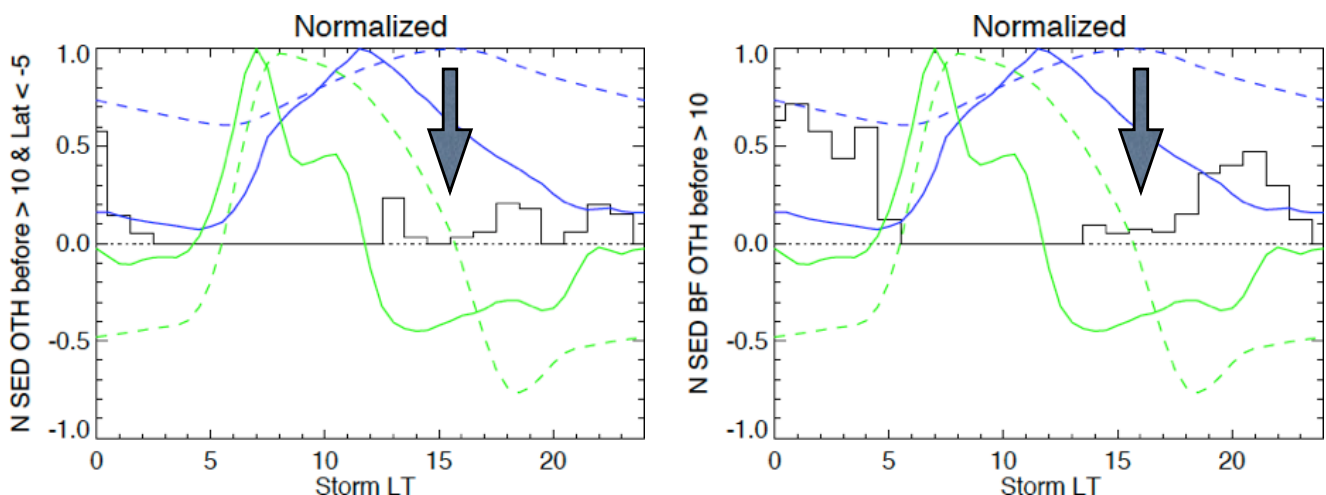
Statistical occurrence : OTH before

- OTH-before events : >10 SED (t,f pixels) before horizon (**159** events in catalog)
- OTH-before appears mostly when $13\text{h} < \text{Storm LT} < 5\text{h}$
 \Rightarrow corresponds well to $dN_e/dLT < 0$ (during OTH interval) with Fischer profile
- Reduced OTH-before occurrence $\sim 15\text{-}18\text{h LT}$



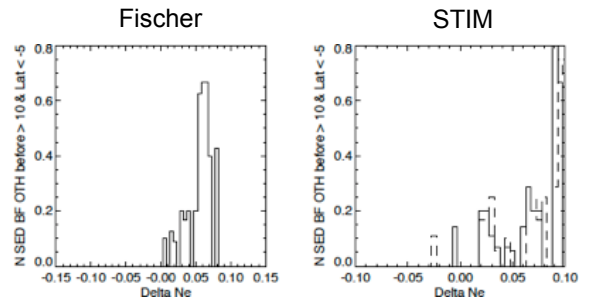
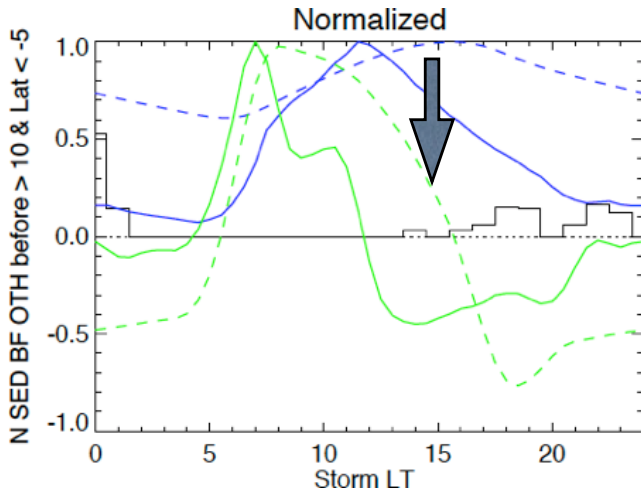
Statistical occurrence : OTH before

- OTH-before events : >10 SED (t,f pixels) & Cassini Latitude $< -5^\circ$ (**47** events)
- OTH-before events : >10 SED (t,f pixels) & $f \leq 7.5$ MHz (**112** events)
- OTH-before appears only where $dN_e/dLT < 0$ (better match with Fischer profile)
- Reduced but nonzero OTH-before occurrence $\sim 14\text{-}18\text{h LT}$ in spite of $dN_e/dLT < 0$



Statistical occurrence : OTH before

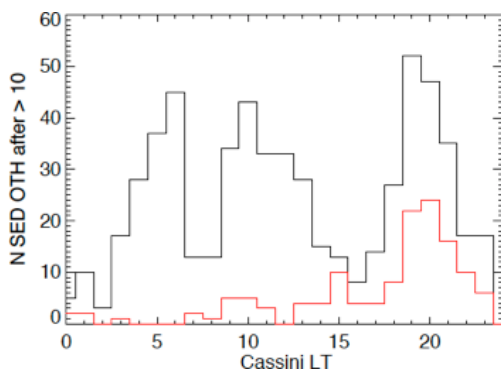
- OTH-before events : >10 SED (t,f pixels) & Cassini Latitude $< -5^\circ$ & $f \leq 7.5$ MHz (37 events)
- OTH-before appears only where $dNe/dLT < 0$ (better match with Fischer profile)
- Reduced but nonzero OTH-before occurrence $\sim 14-18$ h LT in spite of $dNe/dLT < 0$



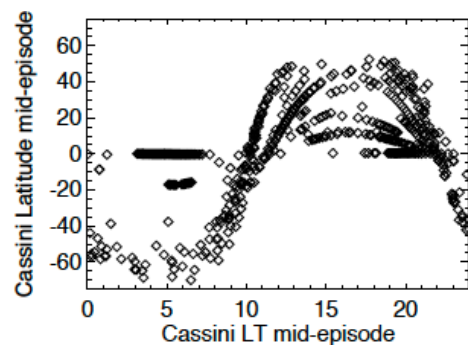
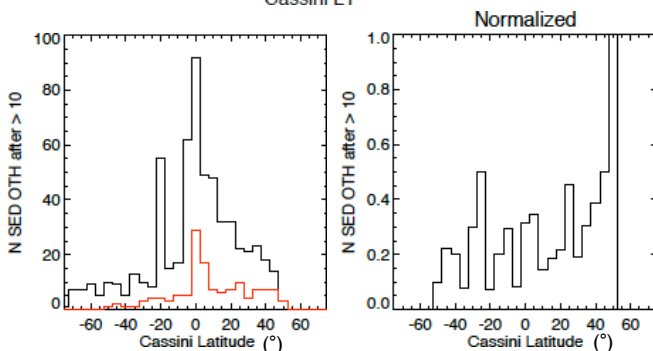
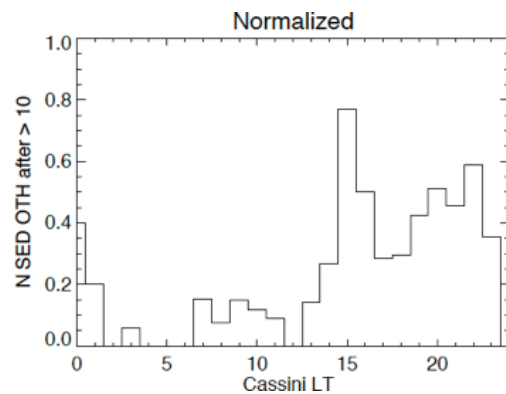
Check : Ne (start OTH event) - Ne (Horizon) > 0
for OTH-before events

Statistical occurrence : OTH after

- OTH-after events : >10 SED (t,f pixels) after horizon (133 events in catalog)
- Observed mostly when Cassini above Saturn's afternoon/evening side
 \Rightarrow northern hemisphere



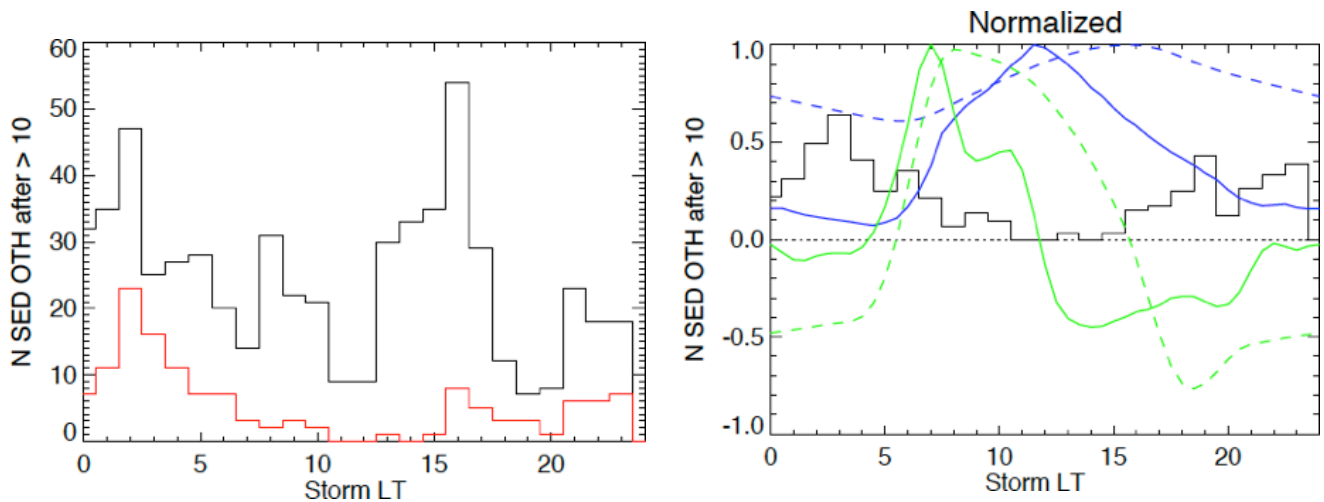
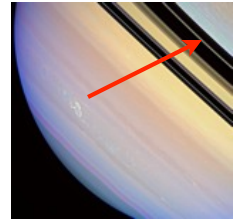
(°)



- Correlation LT - Latitude : Cassini is in the morning side in the S hemisphere and in the afternoon side in the N hemisphere

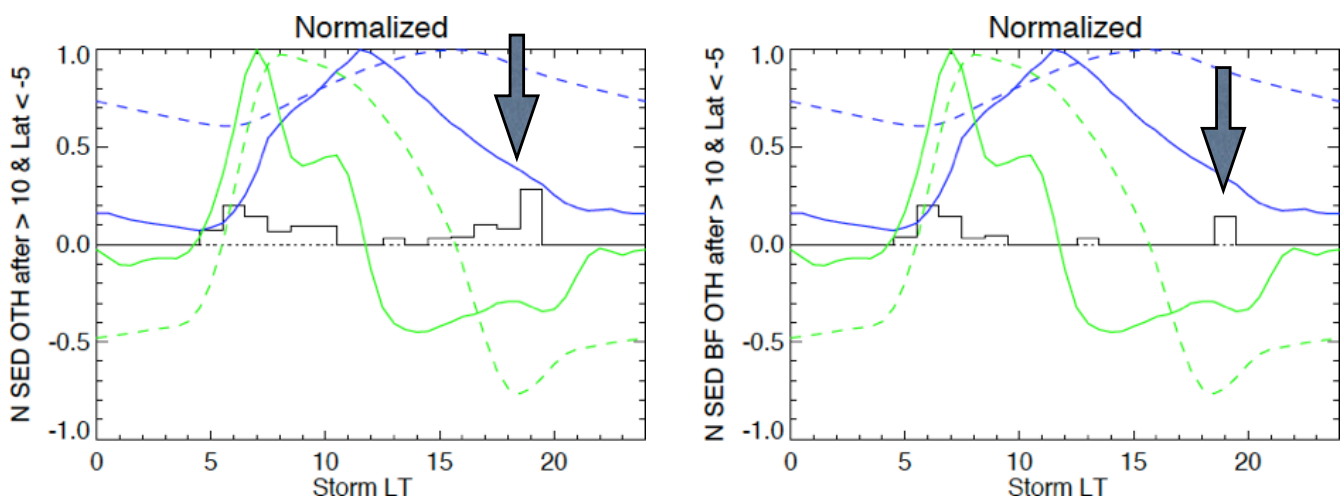
Statistical occurrence : OTH after

- OTH-after events : >10 SED (t,f pixels) after horizon (**133** events in catalog)
- Overall OTH-after occurrence not related to dNe/dLT sign
- Because OTH-after observed mostly from northern hemisphere
 - propagation not along $35^\circ S$ latitude
 - northward propagation meets ring shadow (southern summer)
 - \Rightarrow possible ray escape
 - modelling difficult

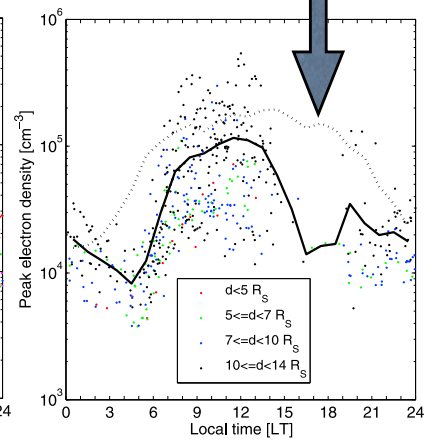
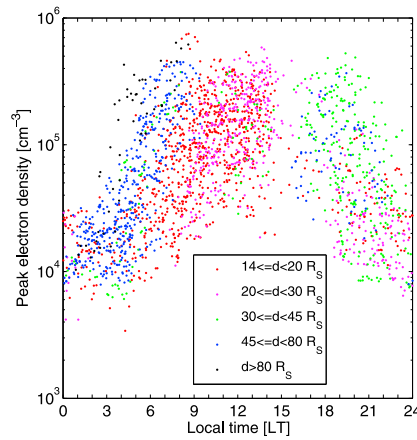
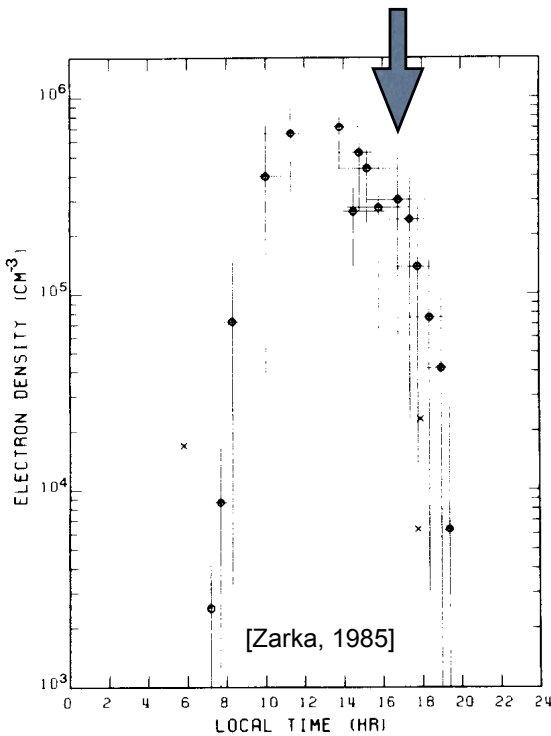


Statistical occurrence : OTH after

- OTH-after events : >10 SED (t,f pixels) & Cassini Latitude $< -5^\circ$ (**24** events)
 - \Rightarrow 1 group of events where $dNe/dLT > 0$ and 1 where $dNe/dLT < 0$ (~15-19h LT)
- OTH-after events : >10 SED (t,f pixels) & Cassini Latitude $< -5^\circ$ & $f \leq 7.5$ MHz (**11** events)
 - \Rightarrow most events where $dNe/dLT > 0$ (better match with Fischer profile)
- Event where $dNe/dLT < 0$ ~ where OTH-before occurrence is reduced



Existence of an anomaly in the ionospheric profile vs LT (at 35°S) ?

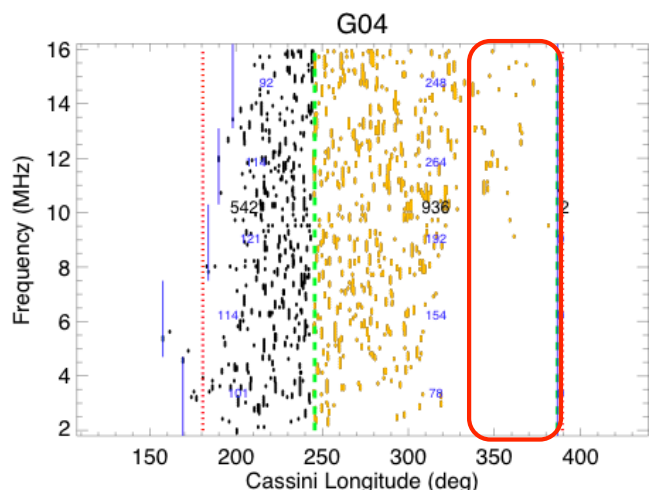
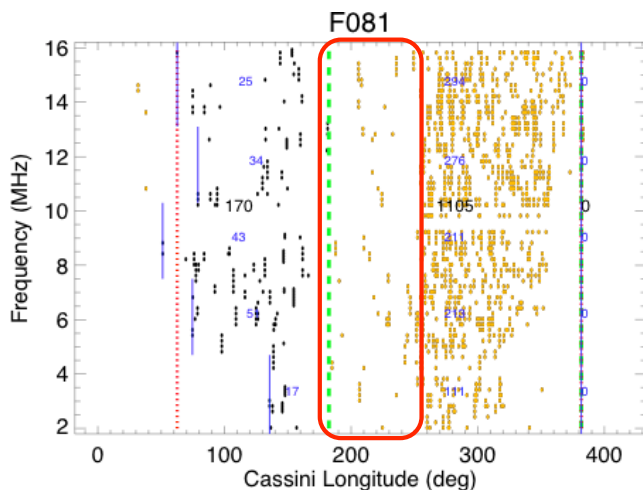


[Fischer et al., 2011]

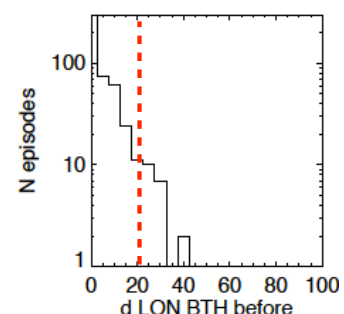
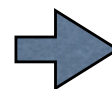
⇒ afternoon Ne plateau or secondary peak : origin ?

Gaps within the horizons

- Some episodes start or end well within the visible horizons
- Episode extent between ~50° and 300° longitude



- ~30 episodes (~5%) with a gap $\geq 20^\circ$ between horizon and start of SED emission (BTH-start)
- ~30 episodes (~5%) with a gap $\geq 20^\circ$ between end of SED emission and horizon (for Cassini Latitude $< -5^\circ$) (BTH-end)

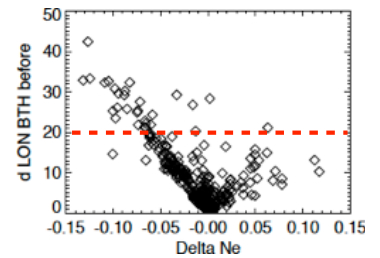
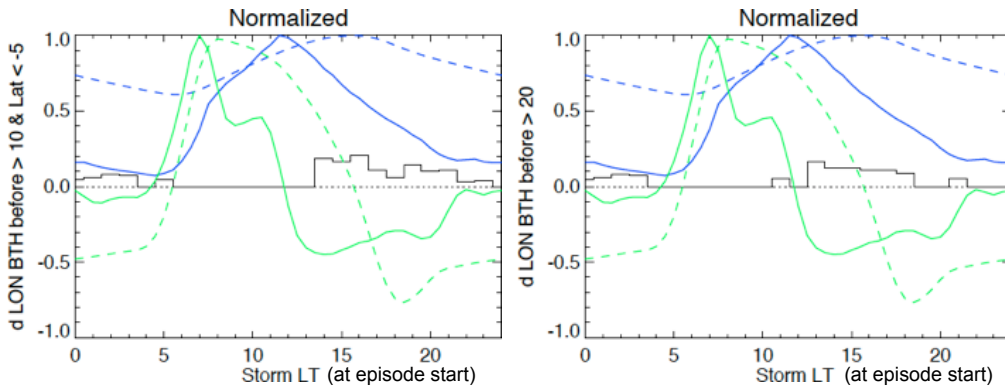


Gaps within the horizon at episode start

- Observed at no particular Cassini LT
- Observed mostly for $dNe/dLT < 0$ above the storm (idem OTH-before)
 - ⇒ due to apparition of storm below an ionosphere with steep $dNe/dLT < 0$

combined with a cutoff $f_{cutoff} = \frac{f_p}{\cos(\Lambda_{storm} - \Lambda_{s/c})}$

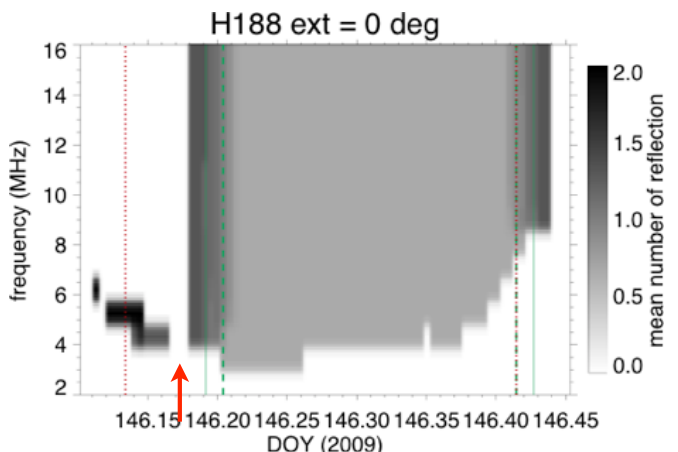
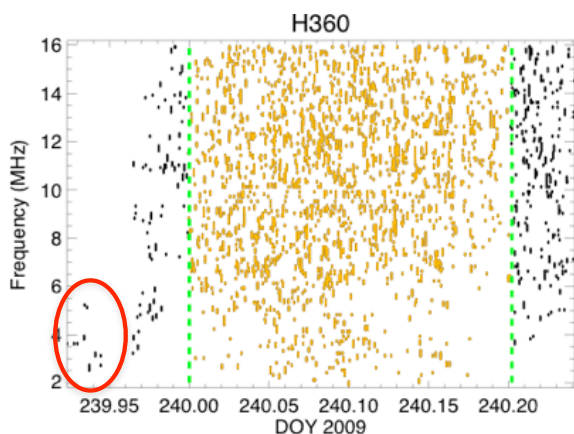
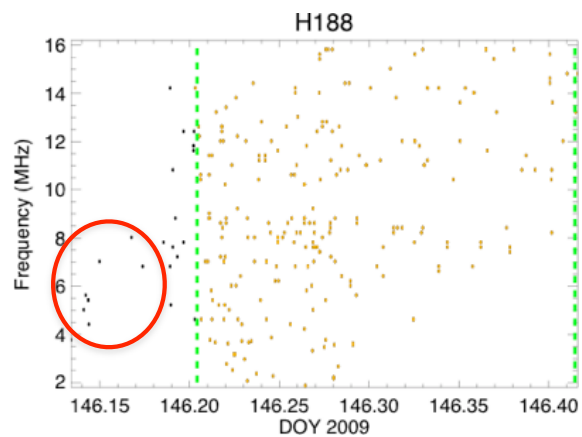
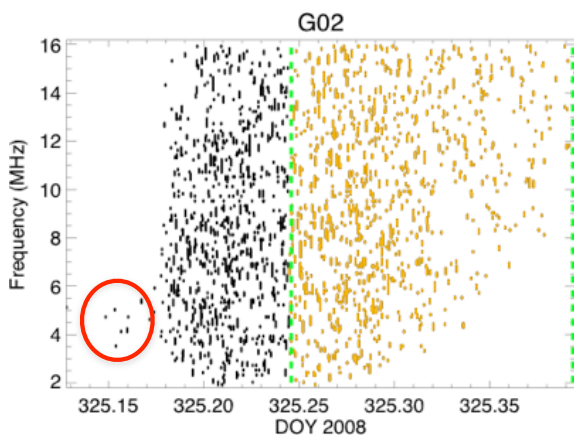
- Better match with Fischer profile



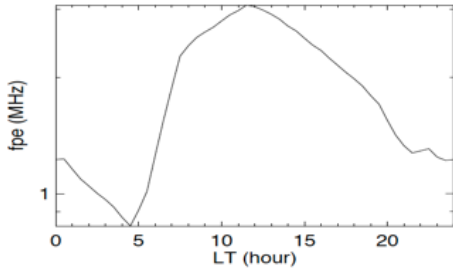
Check : gap width increases with $|Ne(\text{end BTH-start}) - Ne(\text{Horizon})|$

- Distribution of BTH-after events less clear, with most events at $dNe/dLT > 0$ or $LT \sim 14-18h$ (anomaly?)

Isolated SED «blobs» before main episode

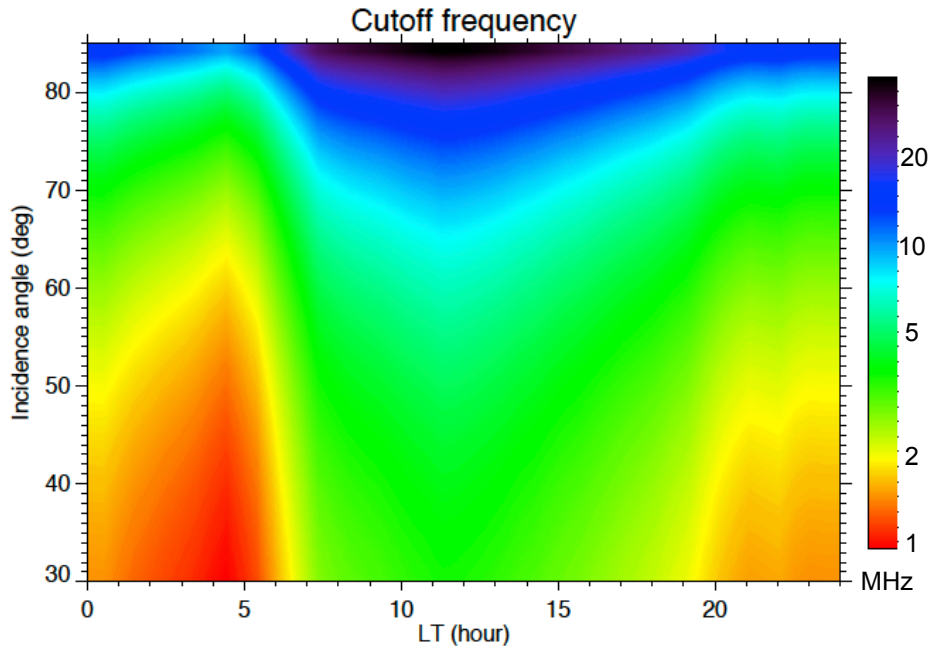
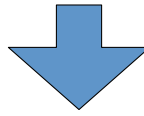


Isolated SED «blobs» before main episode

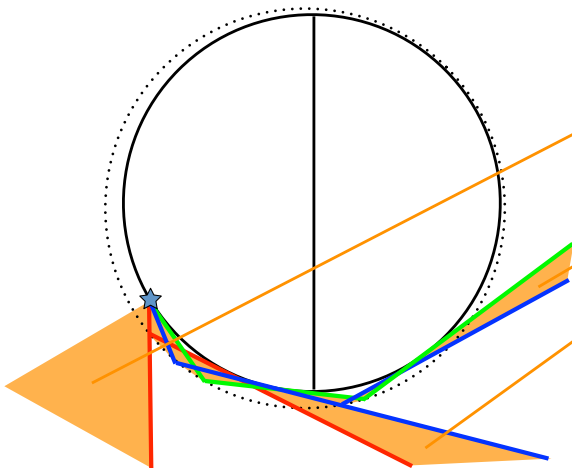
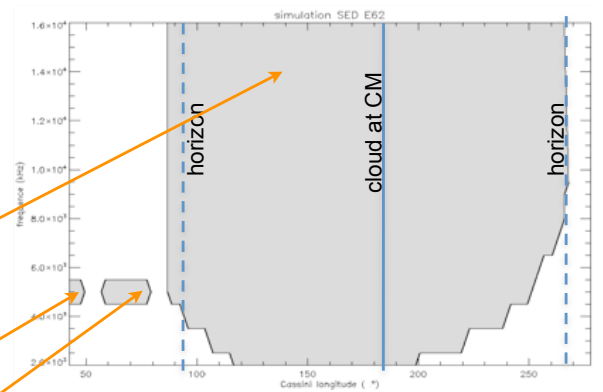
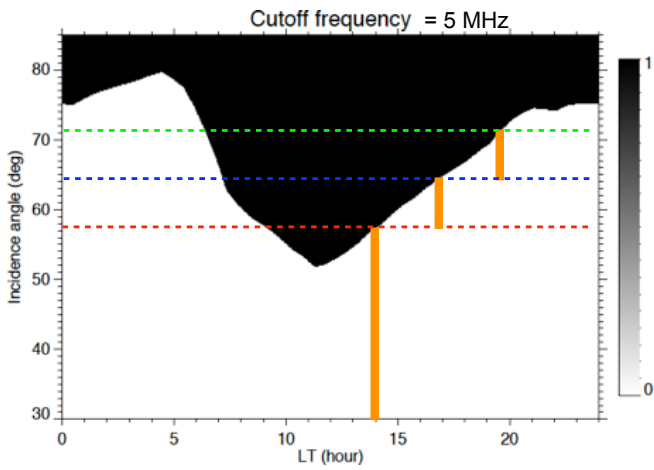


+

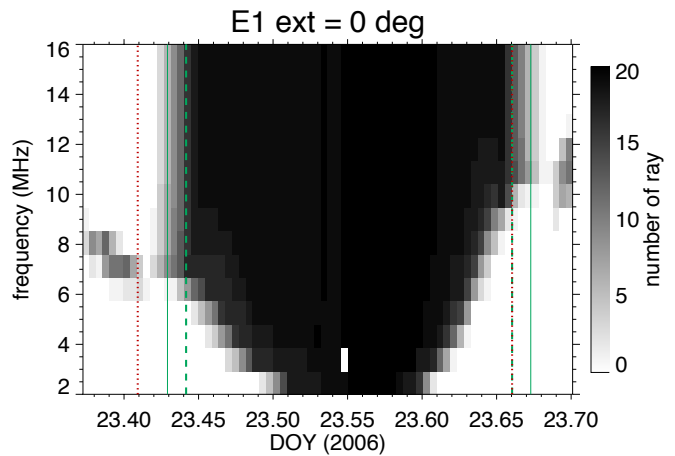
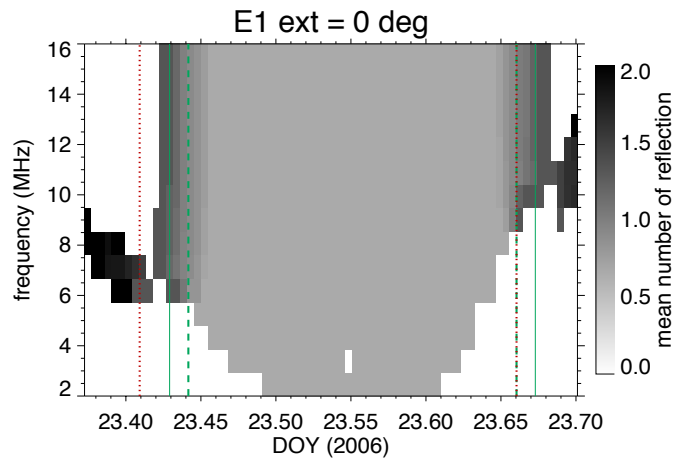
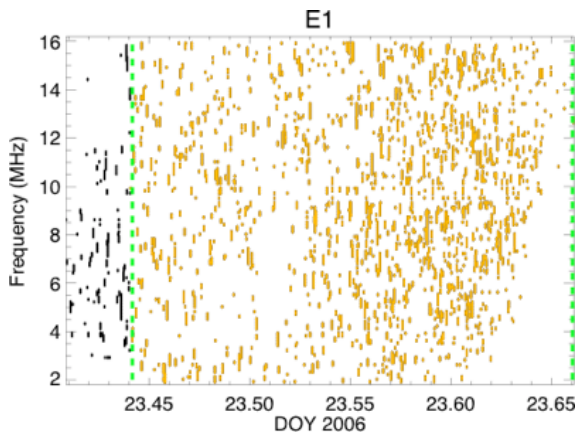
$$f_{\text{cutoff}} = \frac{f_p(LT)}{\cos(\theta_{\text{inc}})}$$



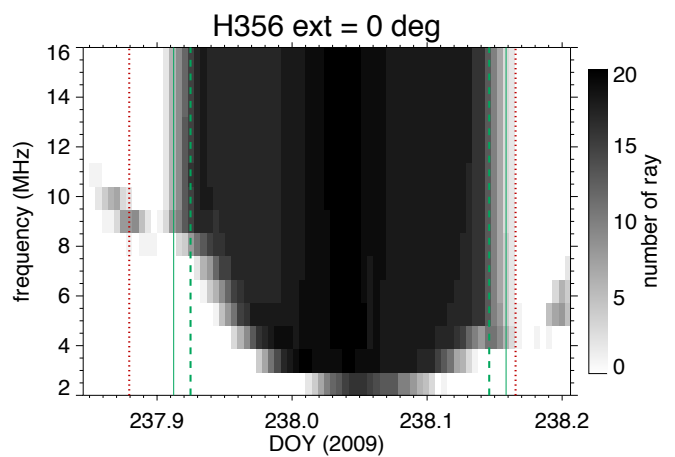
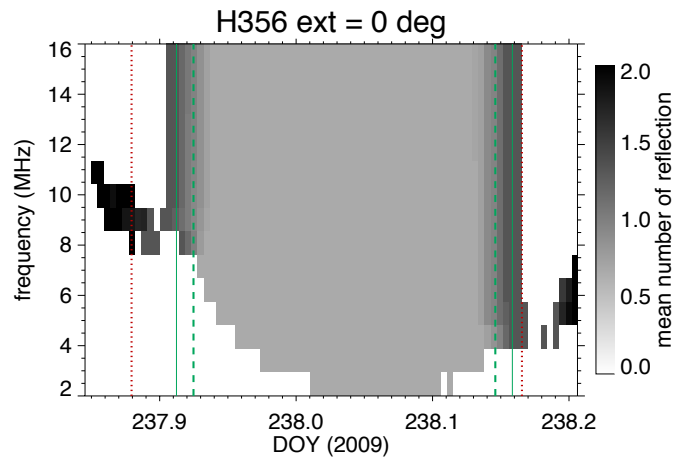
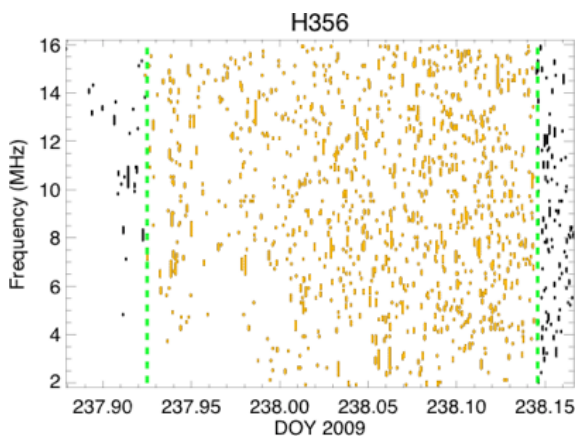
Isolated SED «blobs» before main episode



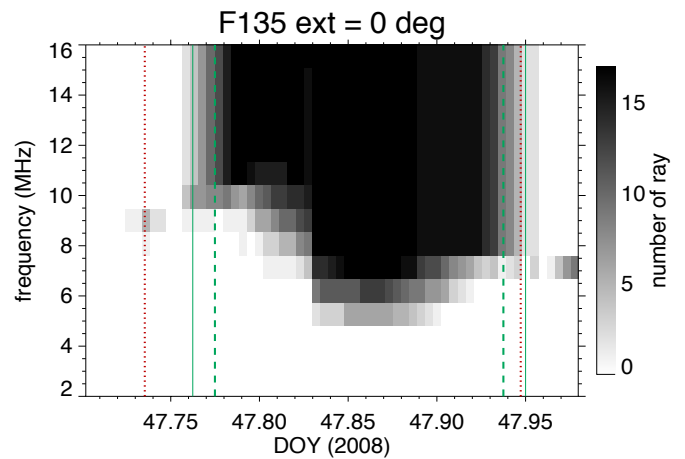
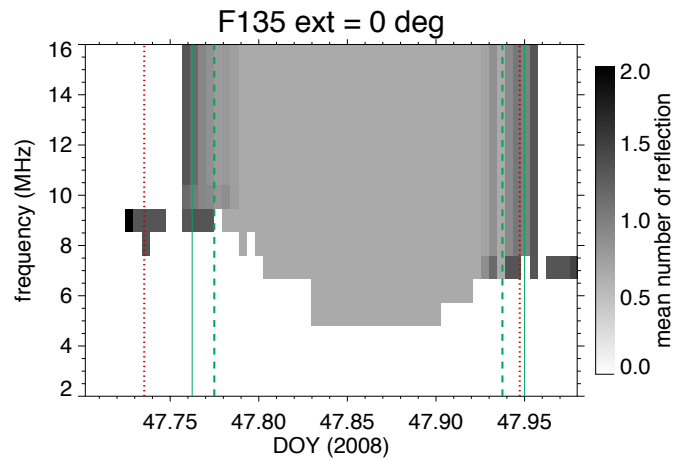
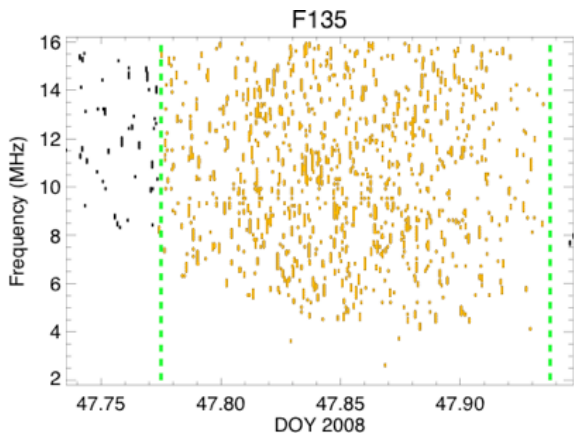
Observed vs Simulated episodes



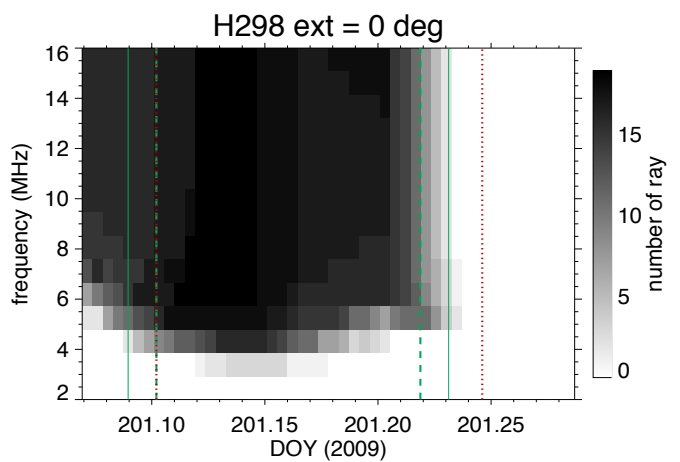
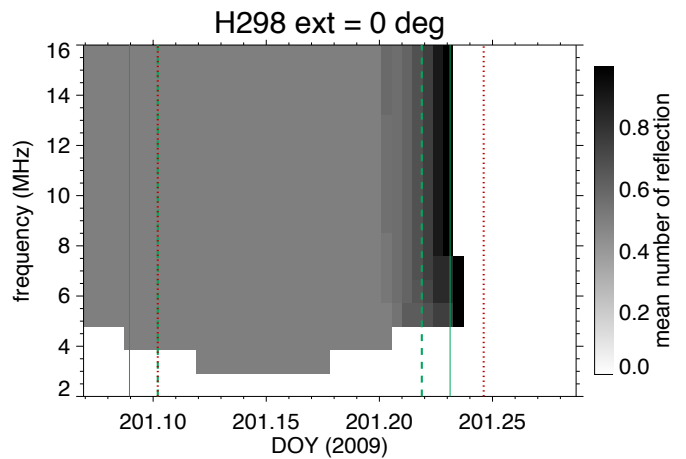
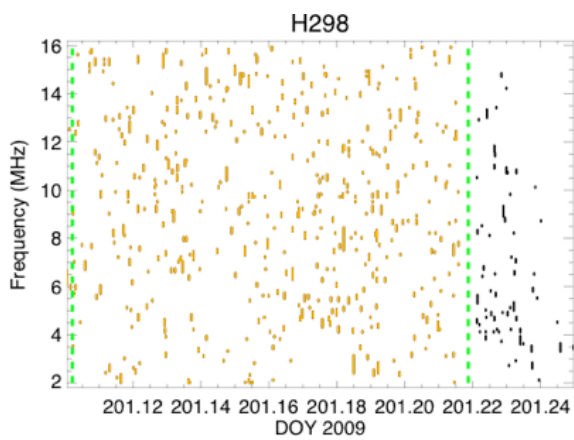
Observed vs Simulated episodes



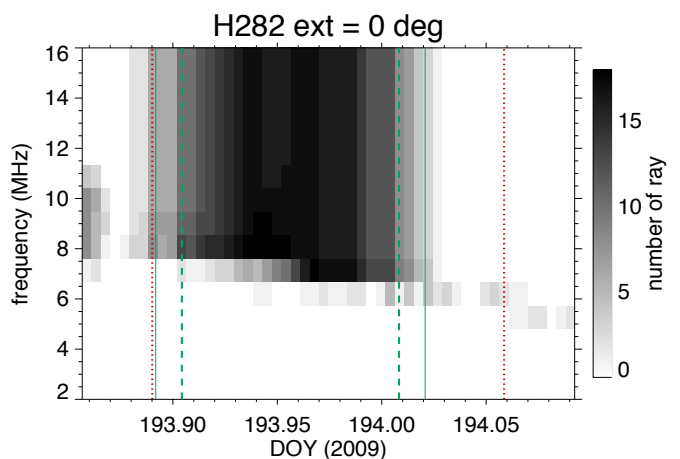
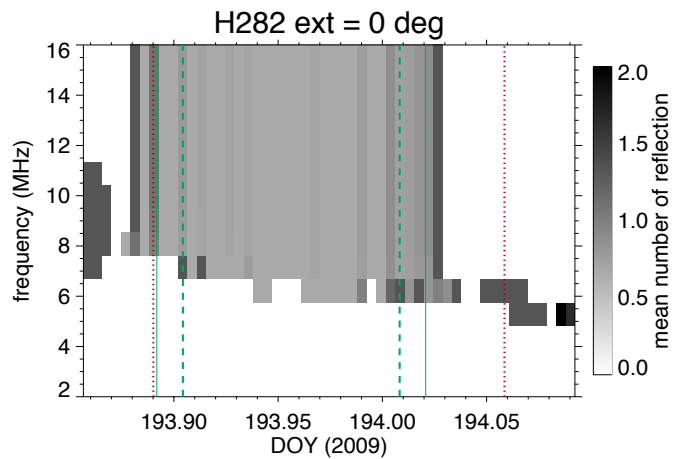
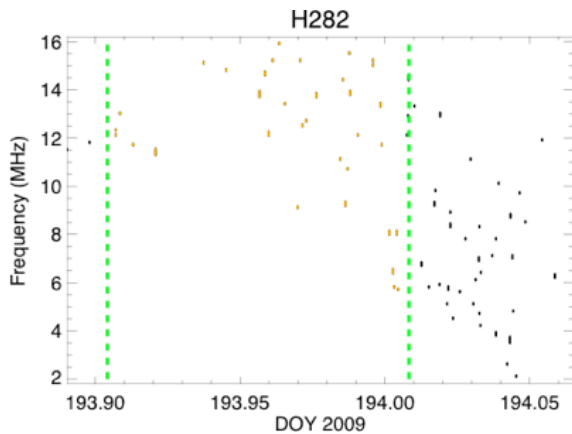
Observed vs Simulated episodes



Observed vs Simulated episodes



Observed vs Simulated episodes



Conclusions

- OTH effect explained : sub-ionospheric propagation, temporary trapping of radio waves due to variable ionospheric $N_{e\text{peak}}$ versus LT
 - existence of sub-ionospheric propagation at Saturn
 - validation of ray-tracing code
- Isolated blobs explained
- Gaps within the horizons due to similar effect as OTH (possibly steeper gradients)
- OTH observations bring constraints on Saturn's ionosphere
 - Fischer et al. 2011 profile well consistent with OTH observations
 - Existence of an «anomaly» in $N_{e\text{peak}}$ ~14-18h LT : origin ?
 - e^- precipitations (latitude ? where on the morning side ? ...)
- OTH effect (statistically) predictable : $N_e(\text{horizon}) < N_e(\text{above source})$
 - + smooth variation in between
- No one-to-one correspondence between observed and simulated dynamic spectra
 - large time variability of ionospheric density (cf. Fischer individual profiles)
 - SED occurrence variable on short timescales
 - propagation/visibility biases due to Cassini trajectory ephemeris (3D time-dependent ionospheric model needed, STIM not Ok)

Diagramme Clemmow-Mullaly-Allis

Le diagramme Clemmow-Mullaly-Allis (CMA) représente les zones d'existence des différents modes de propagation dans le plan (X, Y^2) . On peut montrer qu'à l'intérieur d'une zone, les surfaces d'indice de réfraction (ou de vitesses de phase) sont similaires. Puisque la topologie dépend du nombre de modes en propagation parallèle et perpendiculaire, les limites de ces régions sont définies par les courbes de coupures et de résonances des modes principaux. A la traversée d'une courbe limite un mode peut disparaître ou apparaître. Dans l'approximation haute fréquence ($\omega \gg \omega_{p_{ion}}$), les courbes limites de coupures et de résonances définissent huit régions du plan (X, Y^2) .

Equations des courbes limites du diagramme CMA

Les indices de réfraction des modes principaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{mode } R : \quad n_R^2 &= 1 - \frac{X}{1+Y} \\ \text{mode } L : \quad n_L^2 &= 1 - \frac{X}{1-Y} \\ \text{mode } O : \quad n_O^2 &= 1 - X \\ \text{mode } X : \quad n_X^2 &= 1 - \frac{X(1-X)}{1-X-Y^2} \end{aligned}$$

Les séparatrices des régions dans le plan (X, Y^2) sont définies par les coupures et les résonances des modes principaux.

Coupures

$$\begin{aligned} - \text{ la coupure plasma } (n_O \rightarrow 0) : \quad X &= 1 \\ - \text{ la coupure } RL \text{ } (n_{R,L} \rightarrow 0) : \quad Y^2 &= (X-1)^2 \end{aligned}$$

Résonances

$$\begin{aligned} - \text{ la résonance gyromagnétique } (n_R \rightarrow \infty) : \quad Y^2 &= 1 \\ - \text{ la résonance hybride supérieure } (n_X \rightarrow \infty) : \quad Y^2 &= 1 - X \end{aligned}$$

La figure E.1 représente le diagramme CMA dans l'approximation des hautes fréquences et les modes susceptibles de se propager dans chacune des huit régions. La figure E.2 représente l'allure des surface de vitesse de phase pour chacune des

nappes de la relation d'Appleton-Hartree et leur position relative.

L'intérêt du diagramme CMA est de déterminer de manière qualitative, en fonction de la fréquence, les modes susceptibles de se propager dans un plasma donné (à ω_c et ω_p fixé). Ceci s'avère utile pour une analyse qualitative de la propagation en milieu inhomogène.

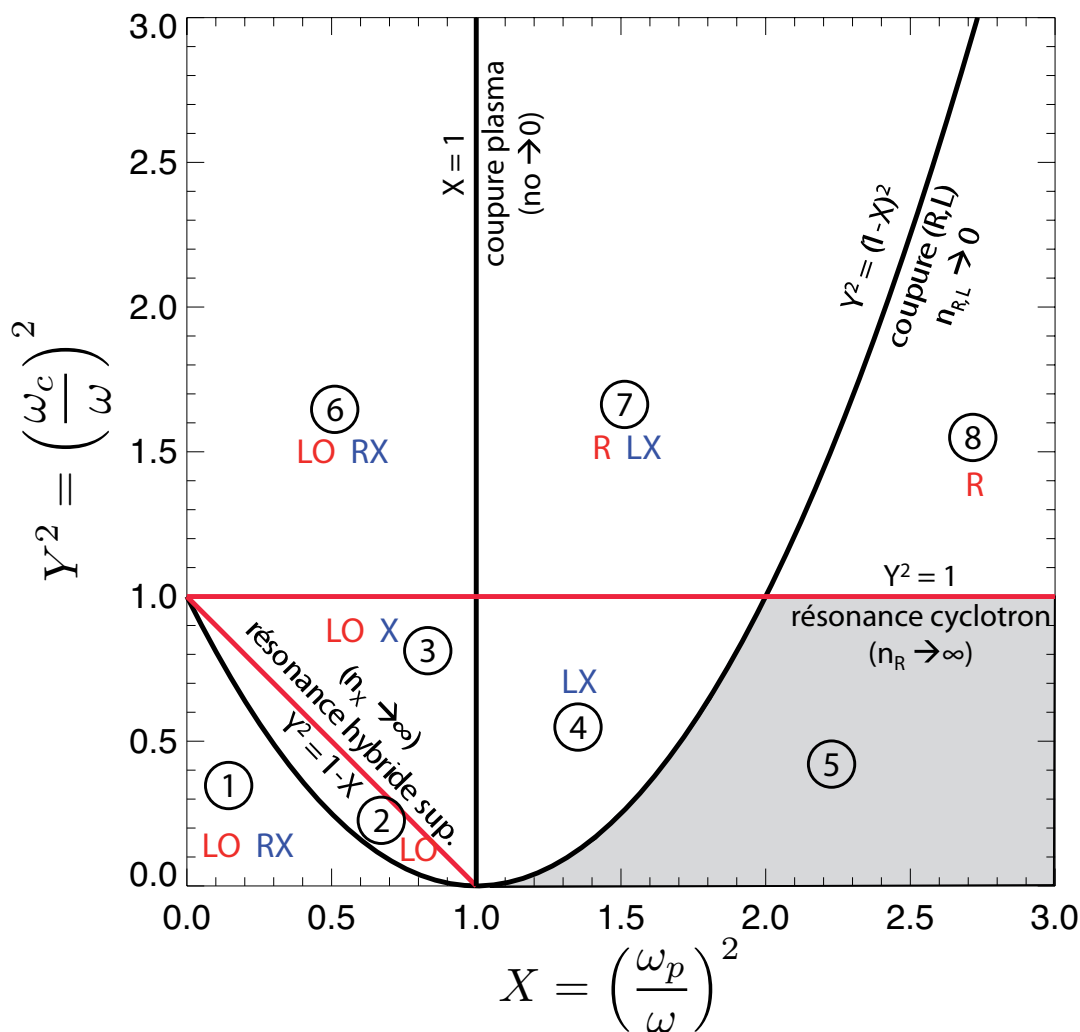


FIGURE E.1 – Diagramme CMA à haute fréquence. Le plan (X, Y^2) est découpé en huit zones délimitées par les courbes de résonances (rouge) et de coupures (noir) des modes principaux. Les modes susceptibles de se propager à l'intérieur de chaque zone sont indiqués en rouge pour la branche \oplus de la relation d'Appleton-Hartree, en bleu pour la branche \ominus . Aucun mode ne peut se propager dans la zone 5. D'après [Quémada 1968]

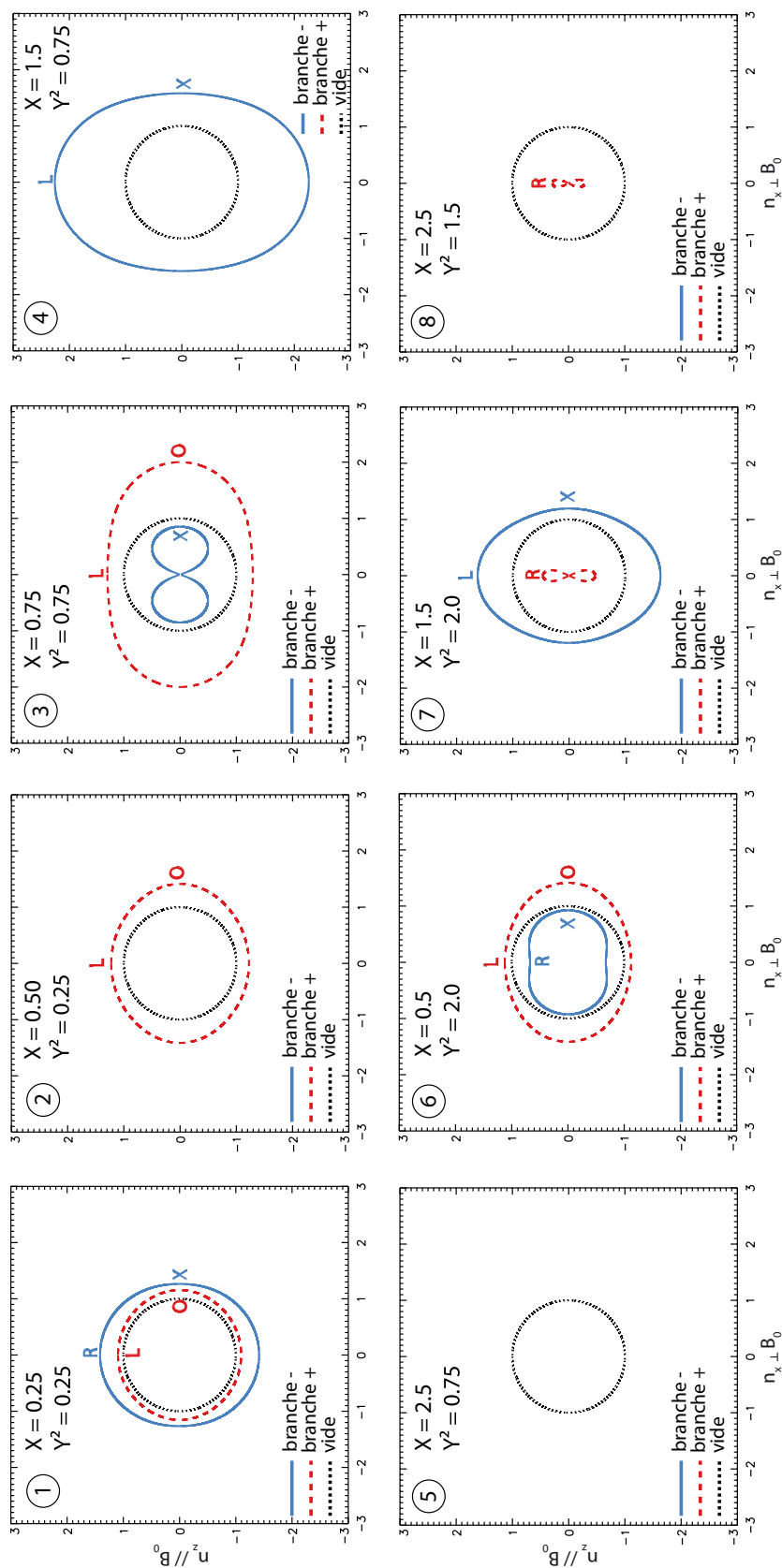


FIGURE E.2 – Surfaces de vitesse de phase pour les huit zones du diagramme CMA (exprimées en unité de c). Les courbes pleines bleues correspondent à la nappe \ominus de la relation d'Appleton-Hartree, les courbes en tirets rouges correspondent à la nappe \oplus de la relation d'Appleton-Hartree. Les courbes en tirets noirs correspondent à une onde de lumière (cercle de rayon c). Les modes principaux pouvant se propager sont indiqués dans chaque zone, ainsi que les valeurs de X et Y^2 choisies pour représenter la topologie des surfaces dans chaque zone du diagramme.

Calcul des paramètres de Stokes

Cette annexe est fondée sur [Kraus 1966].

F.1 Détermination de l'expression de l'ellipse de polarisation

On considère une onde radio de pulsation ω se propageant dans le sens des z croissants ($\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$), dont les composantes du champ électrique sont données par E_x et E_y (champ transverse), déphasées d'une quantité δ . On notera qu'ici les Ox et Oy sont choisis arbitrairement, la seule contrainte étant que le repère (O, x, y, z) soit orthonormé.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \\ E_x &= E_1 \sin(\omega t) \\ E_y &= E_2 \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

On cherche à éliminer les termes en ωt :

$$\begin{aligned}E_y &= E_2 [\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta] \\ \sin \omega t &= E_x/E_1 \Rightarrow \cos \omega t = \sqrt{1 - (E_x/E_1)^2}\end{aligned}$$

En réinjectant les expressions de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ dans l'expression de E_y , on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 &= \sin^2 \omega t \cos^2 \delta + \cos^2 \omega t \sin^2 \delta + 2 \sin \omega t \cos \omega t \sin \delta \cos \delta \\ &= \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 [\cos^2 \delta - \sin^2 \delta] + \sin^2 \delta + 2 \frac{E_x}{E_1} \cos \omega t \sin \delta \cos \delta \\ &= \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 [2 \cos^2 \delta - 1] + \sin^2 \delta + 2 \frac{E_x}{E_1} \cos \omega t \sin \delta \cos \delta \\ &= -\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \sin^2 \delta + 2 \frac{E_x}{E_1} \left[\cos \omega t \sin \delta + \frac{E_x}{E_1} \cos \delta \right] \cos \delta \\ &= -\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \sin^2 \delta + 2 \frac{E_x}{E_1} [\cos \omega t \sin \delta + \sin \omega t \cos \delta] \cos \delta \\ &= -\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \sin^2 \delta + 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \delta \\ &\boxed{\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \delta + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \sin^2 \delta} \tag{F.1}\end{aligned}$$

Les composantes E_x et E_y sont donc bien liées par une équation de type ellipse :

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1$$

avec $a = 1/E_1^2 \sin^2 \delta$, $b = 2 \cos \delta / E_1 E_2 \sin^2 \delta$ et $c = 1/E_2^2 \sin^2 \delta$.

F.2 Détermination des amplitudes des composantes du champ électrique

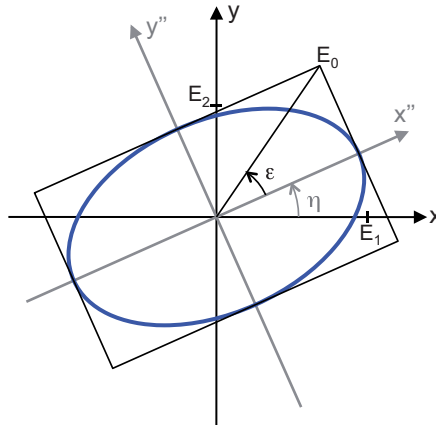


FIGURE F.1 – Ellipse de polarisation dans le plan (O, x, y) . L'axe x' correspond à l'axe principal de l'ellipse (grand axe) et l'axe y' à l'axe secondaire (petit axe).

L'axe principal de l'ellipse de polarisation (passant par les deux foyers de l'ellipse) fait un angle η avec l'axe \mathbf{e}_x et la diagonale du rectangle circonscrit à l'ellipse fait un angle ϵ avec l'axe principal de l'ellipse.

On peut exprimer E_1 et E_2 en fonction de ϵ et η .

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'})$, on peut écrire :

$$E_{x'} = E_0 \cos \epsilon \sin \omega t$$

$$E_{y'} = E_0 \sin \epsilon \cos \omega t$$

Soit :

$$E_x = E_{x'} \cos \tau - E_{y'} \sin \tau = E_0 [\cos \epsilon \cos \tau \sin \omega t - \sin \epsilon \sin \tau \cos \omega t]$$

$$E_y = E_{x'} \sin \tau + E_{y'} \cos \tau = E_0 [\cos \epsilon \sin \tau \sin \omega t + \sin \epsilon \cos \tau \cos \omega t]$$

D'autre part, on a :

$$E_x = E_1 \sin(\omega t - \delta_1) = E_1 [\sin \omega t \cos \delta_1 - \cos \omega t \sin \delta_1]$$

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - \delta_2) = E_2 [\sin \omega t \cos \delta_2 - \cos \omega t \sin \delta_2]$$

Par identification, on obtient :

$$E_1 \cos \delta_1 = E_0 \cos \epsilon \cos \tau \quad \text{et} \quad E_1 \sin \delta_1 = E_0 \sin \epsilon \sin \tau$$

$$E_2 \cos \delta_2 = E_0 \cos \epsilon \sin \tau \quad \text{et} \quad E_2 \sin \delta_2 = -E_0 \sin \epsilon \cos \tau$$

On obtient alors :

$$E_1 = E_0 \sqrt{\cos^2 \epsilon \cos^2 \tau + \sin^2 \epsilon \sin^2 \tau} \quad (\text{F.2})$$

$$E_2 = E_0 \sqrt{\cos^2 \epsilon \sin^2 \tau + \sin^2 \epsilon \cos^2 \tau} \quad (\text{F.3})$$

F.3 Expressions des paramètres de Stokes

On définit les composantes S_x et S_y de la densité de flux selon les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y définis précédemment :

$$S_x = \frac{E_1^2}{Z\sqrt{2}} = \frac{E_0^2}{Z\sqrt{2}} (\cos^2 \epsilon \cos^2 \eta + \sin^2 \epsilon \sin^2 \eta)$$

$$S_y = \frac{E_2^2}{Z\sqrt{2}} = \frac{E_0^2}{Z\sqrt{2}} (\cos^2 \epsilon \sin^2 \eta + \sin^2 \epsilon \cos^2 \eta)$$

Les paramètres de Stokes s'expriment alors :

$$S = S_x + S_y = \frac{E_1^2 + E_2^2}{Z\sqrt{2}} = \frac{E_0^2}{Z\sqrt{2}}$$

$$Q = S_x - S_y = \frac{E_1^2 - E_2^2}{Z\sqrt{2}} = S \cos 2\epsilon \cos 2\eta$$

$$U = (S_x - S_y) \tan 2\eta = S \cos 2\epsilon \sin 2\eta$$

$$V = (S_x - S_y) \tan 2\epsilon / \cos 2\eta = S \sin 2\epsilon$$

où Z est l'impédance intrinsèque du milieu $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ (en $\Omega.m^{-1}$), avec $\mu = \mu_r \mu_0$ la perméabilité du milieu de propagation et $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ la permittivité du milieu de propagation.

F.4 Cas d'une onde partiellement polarisée

Les ondes électromagnétiques émises lors de processus radiatifs naturels ne sont généralement pas totalement polarisées. On ne peut donc pas les décrire comme une superposition d'ondes polarisées linéairement et circulairement, mais comme la superposition d'un grand nombre d'ondes de polarisations variables statistiquement indépendantes.

On notera :

$$E_x = E_1(t) \sin[\omega t]$$

$$E_y = E_2(t) \sin[\omega t + \delta(t)]$$

où $E_1(t)$, $E_2(t)$, et $\delta(t)$ varient lentement dans le temps par rapport à la fréquence de l'onde. Dans ce cas, ϵ et η seront également fonction du temps.

On obtient les paramètres de Stokes en prenant la moyenne temporelle des grandeurs définies ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle}{Z\sqrt{2}} \\
 q &= \langle \cos 2\epsilon \cos 2\eta \rangle = \frac{\langle E_1^2 \rangle - \langle E_2^2 \rangle}{ZS\sqrt{2}} \\
 u &= \langle \cos 2\epsilon \sin 2\eta \rangle = \frac{\sqrt{2}\langle E_1 E_2 \cos \delta \rangle}{ZS} \\
 v &= \langle \sin 2\epsilon \rangle = \frac{\sqrt{2}\langle E_1 E_2 \sin \delta \rangle}{ZS}
 \end{aligned}$$

où

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

Remarques :

- On note d le degré de polarisation de l'onde : $d = \sqrt{u^2 + q^2 + v^2}$. Lorsque $d = 1$, l'onde est totalement polarisée, lorsque $d < 1$, l'onde est partiellement polarisée et lorsque $d = 0$, l'onde est totalement non polarisée.
- Pour une onde totalement non polarisée, $\langle E_1 E_2 \cos \delta \rangle = \langle E_1 E_2 \sin \delta \rangle = 0$ et $\langle E_1^2 \rangle = \langle E_2^2 \rangle$. Les paramètres de Stokes sont donc : $S = S, q = 0, u = 0, v = 0$.

Signe du pas d'intégration dt_4 des équation d'Haselgrove en fonction du mode de propagation

Lors du développement des équations d'Haselgrove au chapitre 5, le pas d'intégration le long du rayon est donné par :

$$dt_4 = -\frac{XY}{4(a+b)} dt \quad (\text{G.1})$$

où les quantités X et Y dépendent uniquement des paramètres du plasma, t est le temps et les quantités a et b sont données par :

$$a = (1 - X) [(1 - X)^2 - Y^2]$$

$$b = \left[\frac{XY^2}{2} \sin^2 \theta - (1 - X)(1 - X - Y^2) \right] n^2$$

La quantité a est indépendante du mode de propagation, mais la quantité fait intervenir l'indice de réfraction, différent pour les deux modes de propagation. On peut montrer graphiquement, que lorsque les deux modes sont définis ($n^2 > 0$), le signe de la quantité $a + b$ (et donc de dt_4) change en fonction du mode de propagation.

La figure G.1 représente, pour différentes valeurs de θ , dans le plan (X, Y^2) le signe de la quantité $a + b$ pour les branches \oplus et \ominus de la relation d'Appleton-Hartree. Les zones vertes indiquent les régions du plan pour lesquels au moins un des deux modes de propagation n'est pas défini. Les zones noires correspondent à des valeurs de $a + b$ négatives, tandis que les zones blanches correspondent à des valeurs de $a + b$ positives. On constate que les signes des modes \oplus et \ominus sont toujours opposés lorsque les deux modes sont définis. Il sera donc nécessaire d'inverser le sens d'intégration des équations d'Haselgrove entre les deux modes de propagation.

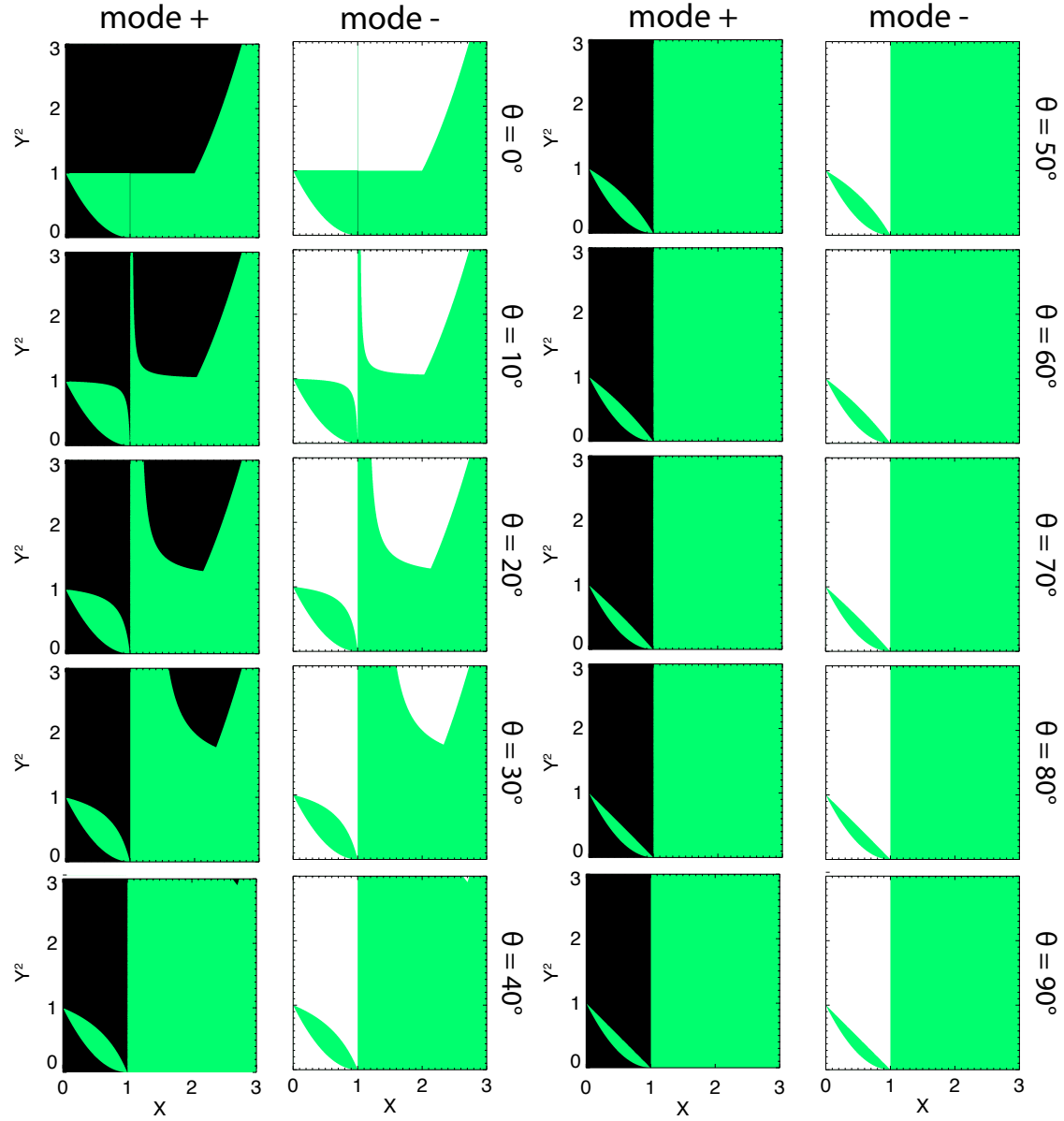


FIGURE G.1 – Signe de la quantité $a + b$ dans le plan (X, Y^2) pour les deux branches de la relation d'Appleton-Hartree (\oplus colonne de gauche, \ominus colonne de droite), pour différentes valeurs de θ . Les zones vertes correspondent aux régions du plan pour lesquels au moins un des deux modes de propagation n'est pas défini, les zones noires à $a + b < 0$, les zones blanches à des valeurs de $a + b > 0$. Dans les régions où les deux modes sont définis, les signes de $a + b$ sont toujours opposés.

Paramètres des simulations pour l'étude de la propagation de l'AKR dans les cavités aurorales terrestres

H.1 Scénario de base

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ (km)	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
5	350	300	10	1	2877,12	[70°, 90°], 1°	sol. de (8.13)

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ (km)	$N_{e_{in}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	$f(90^\circ)$ (kHz)
5	350	300	10	1	2877,12	[70°, 90°], 1°	500 kHz

H.2 Influence de l'échelle des gradients

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
5	350	300	[3,10]	1	2877,12	80°	509,52
						85°	504,71
						90°	500,00

H.3 Influence de la taille de la cavité

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
5	350	[15,100,300]	3	1	2877,12	80°	509,52
						85°	504,71
						90°	500,00

H.4 Influence de la fréquence de l'onde

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
5	350	[100,300]	10	1	4595,15	80°	306,29
						85°	303,09
						90°	300,00
5	350	[100,300]	10	1	2877,12	80°	509,52
						85°	504,71
						90°	500,00
5	350	[100,300]	10	1	1895,18	80°	711,73
						85°	705,83
						90°	700,00

H.5 Influence de la densité et de l'énergie thermique des électrons

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
5	50	300	10	1	2875,27	80	509,82
						85	504,86
						90	500,00
5	100	300	10	1	2875,58	80	509,77
						85	504,84
						90	500,00
5	150	300	10	1	2875,89	80	509,72
						85	504,81
						90	500,00
5	200	300	10	1	2876,19	80	509,67
						85	504,79
						90	500,00
5	250	300	10	1	2876,50	80	509,62
						85	504,76
						90	500,00
5	350	300	10	1	2877,12	80	509,52
						85	504,71
						90	500,00
5	450	300	10	1	2877,73	80	509,41
						85	504,66
						90	500,00
5	550	300	10	1	2878,34	80	509,31
						85	504,61
						90	500,00

H.6 Influence de l'énergie des électrons au pic de la distribution

ϵ_b (keV)	ϵ_{th} (eV)	r_0 (km)	σ	$N_{e_{int}}$ (cm ⁻³)	z_s (km)	θ (°)	f (kHz)
0,5	350	300	10	1	4595,15	80°	301,06
						85°	300,51
						90°	300,00
1	350	300	10	1	4595,15	80°	302,28
						85°	301,11
						90°	300,00
3	350	300	10	1	4595,15	80°	304,71
						85°	302,31
						90°	300,00
5	350	300	10	1	4595,15	80°	306,29
						85°	303,09
						90°	300,00

Bibliographie

- [Achilleos 2010] N. Achilleos, P. Guio and C. S. Arridge. *A model of force balance in Saturn's magnetodisc*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 401, pages 2349–2371, February 2010. (cité page 100).
- [Appleton 1932] E.V. Appleton. *Wireless Studies of the Ionosphere*. Wireless Section, Institution of Electrical Engineers - Proceedings of the, vol. 7, no. 21, pages 257–265, september 1932. (cité pages 41 and 101).
- [Bagenal 2000] F. Bagenal. *Planetary Magnetospheres*. In P. Murdin, editeur, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics. November 2000. (cité page 6).
- [Barton 1997] C. E. Barton. *International Geomagnetic Reference Field : the seventh generation*. Journal of Geomagnetism and Geoelectricity, vol. 49, pages 123–148, 1997. (cité page 210).
- [Benson 1979] R. F. Benson and W. Calvert. *Isis 1 observations at the source of auroral kilometric radiation*. Geophysical Research Letters, vol. 6, pages 479–482, June 1979. (cité page 202).
- [Bonnin 2008] Xavier Bonnin. *Étude stéréoscopique de la directivité des sursauts radio solaires de type III aux fréquences inférieures à 10 MHz*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2008. (cité page 106).
- [Booker 1936] HG Booker. *Oblique propagation of electromagnetic waves in a slowly-varying non-isotropic medium*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences, vol. 155, no. 885, pages 235–257, 1936. (cité pages 101 and 138).
- [Booker 1938] H. G. Booker. *Propagation of Wave-Packets Incident Obliquely upon a Stratified Doubly Refracting Ionosphere*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 237, no. 781, pages pp. 411–451, 1938. (cité page 108).
- [Born 1975] M. Born and E. Wolf. Principles of Optics. 1975. (cité pages 71 and 101).
- [Budden 1952] K. G. Budden. *The Theory of the Limiting Polarization of Radio Waves Reflected from the Ionosphere*. Royal Society of London Proceedings Series A, vol. 215, pages 215–233, November 1952. (cité pages 136 and 138).
- [Budden 1985] K. G. Budden. The propagation of radio waves. 1985. (cité pages 20, 101, 102, 104, 108, 149, 152 and 159).
- [Burke 1955] B. F. Burke and K. L. Franklin. *Observations of a Variable Radio Source Associated with the Planet Jupiter*. Journal of Geophysical Research, vol. 60, pages 213–217, June 1955. (cité page 9).
- [Calvert 1981] W. Calvert. *The auroral plasma cavity*. Geophysical Research Letters, vol. 8, pages 919–921, August 1981. (cité page 202).

- [Cecconi 2004] Baptiste Cecconi. *Étude goniopolarimétrique des émissions radio de Jupiter et Saturne à l'aide du récepteur radio de la sonde Cassini*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2004. (cité pages 76, 83 and 84).
- [Cecconi 2010] B. Cecconi. *Goniopolarimetric techniques for low-frequency radio astronomy in space*. ISSI Scientific Reports Series, vol. 9, pages 263–277, 2010. (cité pages 13 and 25).
- [Cecconi 2013] B. Cecconi. *Goniopolarimétrie, l'imagerie radio basse fréquence depuis l'espace*, 2013. Présentation aux Journées Scientifiques de l'URIS-France 2013 : <http://ursi-france.institut-telecom.fr/index.php?id=13>. (cité page 83).
- [Cerisier 2003] J.-C. Cerisier. *Ondes dans les plasmas, 2002-2003*. Cours du DEA de physique des Plasmas de l'Université Paris VI. (cité page 20).
- [Coleman 2011] Christopher J. Coleman. *Point-to-point ionospheric ray tracing by a direct variational method*. Radio Science, vol. 46, no. 5, pages n/a–n/a, 2011. (cité page 109).
- [Connerney 1984] J. E. P. Connerney and J. H. Waite. *New model of Saturn's ionosphere with an influx of water from the rings*. Nature, vol. 312, pages 136–138, November 1984. (cité page 180).
- [Connerney 1993] J. E. P. Connerney. *Magnetic fields of the outer planets*. Journal of Geophysical Research, vol. 98, page 18659, October 1993. (cité page 169).
- [Delory 1998] G. T. Delory, R. E. Ergun, C. W. Carlson, L. Muschietti, C. C. Chaston, W. Peria, J. P. McFadden and R. Strangeway. *FAST observations of electron distributions within AKR source regions*. Geophysical Research Letters, vol. 25, pages 2069–2072, 1998. (cité pages 12, 206 and 208).
- [Dungey 1961] J. W. Dungey. *Interplanetary Magnetic Field and the Auroral Zones*. Physical Review Letters, vol. 6, pages 47–48, January 1961. (cité page 8).
- [Dyudina 2007] U. A. Dyudina, A. P. Ingersoll, S. P. Ewald, C. C. Porco, G. Fischer, W. Kurth, M. Desch, A. Del Genio, J. Barbara and J. Ferrier. *Lightning storms on Saturn observed by Cassini ISS and RPWS during 2004 2006*. Icarus, vol. 190, pages 545–555, October 2007. (cité page 164).
- [Encrenaz 2003] T. Encrenaz, J.P. Bibring, M. Blanc, M.A. Barucci, F. Roques and P. Zarka. *Le système solaire*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2003. (cité pages 4 and 6).
- [ENST-Bretagne 2013] ENST-Bretagne. *Méthode de prévision ionosphérique*, 2013. http://www-iono.enst-bretagne.fr/logiciels/point-a-point/aide_ptp/ptp_presentation_methode.html. (cité page 144).
- [Ergun 2000] R. E. Ergun, C. W. Carlson, J. P. McFadden, G. T. Delory, R. J. Strangeway and P. L. Pritchett. *Electron-Cyclotron Maser Driven by Charged-Particle Acceleration from Magnetic Field-aligned Electric Fields*. Astrophysical Journal, vol. 538, pages 456–466, July 2000. (cité pages 100, 203, 206 and 208).
- [Evans 1982] D. R. Evans, J. H. Romig, C. W. Hord, K. E. Simmons, J. W. Warwick and A. L. Lane. *The source of Saturn electrostatic discharges*. Nature, vol. 299, page 236, September 1982. (cité page 163).

- [Fischer 2008] G. Fischer, D. A. Gurnett, W. S. Kurth, F. Akalin, P. Zarka, U. A. Dyudina, W. M. Farrell and M. Kaiser. *Atmospheric Electricity at Saturn*. *Space Science Review*, vol. 137, pages 271–285, June 2008. (cité pages 164 and 169).
- [Fischer 2011a] G. Fischer, D. A. Gurnett, P. Zarka, L. Moore and U. A. Dyudina. *Peak electron densities in Saturn's ionosphere derived from the low-frequency cutoff of Saturn lightning*. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 116, page 4315, April 2011. (cité pages 164, 167, 170, 173, 174, 176, 177, 185, 188 and 194).
- [Fischer 2011b] G. Fischer, W. S. Kurth, D. A. Gurnett, P. Zarka, U. A. Dyudina, A. P. Ingersoll, S. P. Ewald, C. C. Porco, A. Wesley, C. Go and M. Delcroix. *A giant thunderstorm on Saturn*. *Nature*, vol. 475, pages 75–77, July 2011. (cité page 164).
- [Försterling 1942] K. Försterling. *Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem magnetisierten Medium bei senkrechter Incidenz*. *Hörfrequenztech. u. Elektrokust.*, vol. 59, pages 10–20, 1942. (cité page 138).
- [Gaelzer 1994] R. Gaelzer, F. L. Ziebell and R. S. Schneider. *Ray tracing studies on auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities*. *Journal of Geophysical Research*, vol. 99, pages 8905–8916, May 1994. (cité page 202).
- [Gillies 2007] R. G. Gillies, G. C. Hussey, H. G. James, G. J. Sofko and D. André. *Modelling and observation of transionospheric propagation results from ISIS II in preparation for ePOP*. *Annales Geophysicae*, vol. 25, pages 87–97, February 2007. (cité page 110).
- [Green 1977] J. L. Green, D. A. Gurnett and S. D. Shawhan. *The angular distribution of auroral kilometric radiation*. *Journal of Geophysical Research*, vol. 82, pages 1825–1838, May 1977. (cité page 202).
- [Gurnett 1979] D. A. Gurnett, R. R. Shaw, R. R. Anderson and W. S. Kurth. *Whistlers observed by Voyager 1 - Detection of lightning on Jupiter*. *Geophysical Research Letters*, vol. 6, pages 511–514, June 1979. (cité page 12).
- [Gurnett 1990] D. A. Gurnett, W. S. Kurth, I. H. Cairns and L. J. Granroth. *Whistlers in Neptune's magnetosphere - Evidence of atmospheric lightning*. *Journal of Geophysical Research*, vol. 95, pages 20967–20976, December 1990. (cité page 12).
- [Gurnett 2004] D. A. Gurnett, W. S. Kurth, D. L. Kirchner, G. B. Hospodarsky, T. F. Averkamp, P. Zarka, A. Lecacheux, R. Manning, A. Roux, P. Canu, N. Cornilleau-Wehrlin, P. Galopeau, A. Meyer, R. Boström, G. Gustafsson, J.-E. Wahlund, L. Åhlen, H. O. Rucker, H. P. Ladreiter, W. Macher, L. J. C. Woolliscroft, H. Alleyne, M. L. Kaiser, M. D. Desch, W. M. Farrell, C. C. Harvey, P. Louarn, P. J. Kellogg, K. Goetz and A. Pedersen. *The Cassini Radio and Plasma Wave Investigation*. *Space Science Reviews*, vol. 114, pages 395–463, September 2004. (cité pages 163 and 164).
- [Gurnett 2005] D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee. *Introduction to Plasma Physics*. January 2005. (cité pages 20 and 109).
- [Haselgrove 1955] J. Haselgrove. *Ray Theory and a New Method for Ray Tracing*. In *Physics of the Ionosphere*, page 355, 1955. (cité pages 110, 111, 114, 116 and 123).

- [Haselgrove 1960] C. B. Haselgrove and J. Haselgrove. *Twisted Ray Paths in the Ionosphere*. Proceedings of the Physical Society, vol. 75, pages 357–363, March 1960. (cité pages 111, 118, 121 and 123).
- [Haselgrove 1963] J. Haselgrove. *The Hamiltonian ray path equations*. Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, vol. 25, pages 397–399, July 1963. (cité pages 111, 121, 122 and 123).
- [Hayes 1971] M. G. W. Hayes. *Theory of the Limiting Polarization of Radio Waves Emerging Obliquely from the Ionosphere*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 324, no. 1558, pages pp. 369–390, 1971. (cité page 138).
- [Helliwell 1965] R.A. Helliwell. Whistlers and related ionospheric phenomena. Stanford University Press, 1965. (cité page 12).
- [Herman 1973] J. R. Herman, J. A. Caruso and R. G. Stone. *Radio Astronomy Explorer (RAE)-I. Observations of terrestrial radio noise*. Planetary and Space Science, vol. 21, pages 443–461, March 1973. (cité page 12).
- [Hess 2008] S. Hess, B. Cecconi and P. Zarka. *Modeling of Io-Jupiter decameter arcs, emission beaming and energy source*. Geophysical Research Letters, vol. 35, page 13107, July 2008. (cité page 230).
- [Hilgers 1992] A. Hilgers. *The auroral radiating plasma cavities*. Geophysical Research Letters, vol. 19, pages 237–240, February 1992. (cité page 210).
- [Ingersoll 1984] A. P. Ingersoll, R. F. Beebe, B. J. Conrath and G. E. Hunt. Structure and dynamics of Saturn's atmosphere, pages 195–238. 1984. (cité page 167).
- [Kaiser 1983] M. L. Kaiser, J. E. P. Connerney and M. D. Desch. *Atmospheric storm explanation of saturnian electrostatic discharges*. Nature, vol. 303, pages 50–53, May 1983. (cité pages 12 and 163).
- [Kivelson 1995] M.G. Kivelson and C.T. Russell. Introduction to space physics. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge University Press, 1995. (cité page 25).
- [Kliore 2009] A. J. Kliore, A. F. Nagy, E. A. Marouf, A. Anabtawi, E. Barbini, D. U. Fleischman and D. S. Kahan. *Midlatitude and high-latitude electron density profiles in the ionosphere of Saturn obtained by Cassini radio occultation observations*. Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 114, page 4315, April 2009. (cité page 170).
- [Kraus 1966] J. D. Kraus. Radio astronomy. 1966. (cité pages 71, 75, 77 and 281).
- [Ladreitner 1990] Hans Peter Ladreitner and Yolande Leblanc. *Source location of the Jovian hectometric radiation via ray-tracing technique*. Journal of Geophysical Research : Space Physics, vol. 95, no. A5, pages 6423–6435, 1990. (cité page 110).
- [Lamy 2010] L. Lamy, P. Schippers, P. Zarka, B. Cecconi, C. S. Arridge, M. K. Dougherty, P. Louarn, N. André, W. S. Kurth, R. L. Mutel, D. A. Gurnett and A. J. Coates. *Properties of Saturn kilometric radiation measured within its source region*. Geophysical Research Letters, vol. 37, page 12104, June 2010. (cité page 82).

- [Lamy 2011] L. Lamy, B. Cecconi, P. Zarka, P. Canu, P. Schippers, W. S. Kurth, R. L. Mutel, D. A. Gurnett, D. Menietti and P. Louarn. *Emission and propagation of Saturn kilometric radiation : Magnetoionic modes, beaming pattern, and polarization state*. Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 116, page 4212, April 2011. (cité pages 15, 82, 88 and 89).
- [Langmuir 1928] I. Langmuir. *Oscillations in Ionized Gases*. Proceedings of the National Academy of Science, vol. 14, pages 627–637, August 1928. (cité page 1).
- [Le Quéau 1984] D. Le Quéau, R. Pellat and A. Roux. *Direct generation of the auroral kilometric radiation by the maser synchrotron instability - Physical mechanism and parametric study*. Journal of Geophysical Research, vol. 89, pages 2831–2841, May 1984. (cité page 202).
- [Louarn 1990] P. Louarn, A. Roux, H. de Féraudy, D. Le Quéau, M. André and L. Matson. *Trapped electrons as a free energy source for the auroral kilometric radiation*. Journal of Geophysical Research : Space Physics, vol. 95, no. A5, pages 5983–5995, 1990. (cité page 12).
- [Louarn 1996a] P. Louarn and D. Le Quéau. *Generation of the Auroral Kilometric Radiation in plasma cavities-I. Experimental study*. Planetary and Space Science, vol. 44, pages 199–210, March 1996. (cité pages 91, 100 and 202).
- [Louarn 1996b] P. Louarn and D. Le Quéau. *Generation of the Auroral Kilometric Radiation in plasma cavities-II. The cyclotron maser instability in small size sources*. Planetary and Space Science, vol. 44, pages 211–224, March 1996. (cité pages 100, 202 and 205).
- [Mathews 2004] J.H. Mathews and K.D. Fink. *Numerical methods using matlab*. Pearson Prentice Hall, 2004. (cité pages 132 and 133).
- [Menietti 2011] J. D. Menietti, R. L. Mutel, I. W. Christopher, K. A. Hutchinson and J. B. Sigwarth. *Simultaneous radio and optical observations of auroral structures : Implications for AKR beaming*. Journal of Geophysical Research (Space Physics), vol. 116, page 12219, December 2011. (cité pages 202 and 208).
- [Moore 2010] L. Moore, I. Mueller-Wodarg, M. Galand, A. Kliore and M. Mendillo. *Latitudinal variations in Saturn's ionosphere : Cassini measurements and model comparisons*. Journal of Geophysical Research, vol. 115, page A11317, November 2010. (cité pages 170 and 187).
- [Müller-Wodarg 2012] I. C. F. Müller-Wodarg, L. Moore, M. Galand, S. Miller and M. Mendillo. *Magnetosphere-atmosphere coupling at Saturn : 1 - Response of thermosphere and ionosphere to steady state polar forcing*. Icarus, vol. 221, pages 481–494, November 2012. (cité pages 177 and 194).
- [Mutel 2008] R. L. Mutel, I. W. Christopher and J. S. Pickett. *Cluster multispacecraft determination of AKR angular beaming*. Geophysical Research Letters, vol. 35, page 7104, April 2008. (cité pages 202 and 208).
- [Nagy 2009] A. F. Nagy, A. J. Kliore, M. Mendillo, S. Miller, L. Moore, J. I. Moses, I. Müller-Wodarg and D. Shemansky. *Upper Atmosphere and Ionosphere of Saturn*.

- In M. K. Dougherty, L. W. Esposito and S. M. Krimigis, editeurs, Saturn from Cassini-Huygens, page 181. 2009. (cité pages 5 and 100).
- [Omidi 1984] N. Omidi and D. A. Gurnett. *Path-integrated growth of auroral kilometric radiation*. Journal of Geophysical Research, vol. 89, pages 10801–10812, December 1984. (cité page 202).
- [Platino 2004] M. Platino, U. S. Inan, T. F. Bell, J. Pickett, E. J. Kennedy, J. G. Trotignon, J. L. Rauch and P. Canu. *Cluster observations of ELF/VLF signals generated by modulated heating of the lower ionosphere with the HAARP HF transmitter*. Annales Geophysicae, vol. 22, no. 7, pages 2643–2653, 2004. (cité page 110).
- [Poeverlein 1948] H. Poeverlein. *Strahlwege von radiowellen in der ionosphäre : Mitteilg 1. mit 6 abb. Numeéro vol. 1 de Bayerische Akademie der Wissenschaften München. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse : Sitzungsberichte. Schr. v. 13. Aug. 1949 (Nicht f. d. Aust.), 1948*. (cité pages 55, 108 and 159).
- [Poeverlein 1950] H. Poeverlein. *Strahlwege von radiowellen in der ionosphäre : Dritte mitteilung. bilder theoretisch ermittelter strahlwege. Zeitschrift für angewandte Physik, 1950*. (cité page 148).
- [Porco 2005] C. C. Porco, E. Baker, J. Barbara, K. Beurle, A. Brahic, J. A. Burns, S. Charnoz, N. Cooper, D. D. Dawson, A. D. Del Genio, T. Denk, L. Dones, U. Dyudina, M. W. Evans, B. Giese, K. Grazier, P. Helfenstein, A. P. Ingersoll, R. A. Jacobson, T. V. Johnson, A. McEwen, C. D. Murray, G. Neukum, W. M. Owen, J. Perry, T. Roatsch, J. Spitale, S. Squyres, P. Thomas, M. Tiscareno, E. Turtle, A. R. Vasavada, J. Veverka, R. Wagner and R. West. *Cassini Imaging Science : Initial Results on Saturn's Atmosphere*. Science, vol. 307, pages 1243–1247, February 2005. (cité page 164).
- [Pritchett 1984] P. L. Pritchett. *Relativistic dispersion, the cyclotron maser instability, and auroral kilometric radiation*. Journal of Geophysical Research, vol. 89, pages 8957–8970, October 1984. (cité page 205).
- [Quémada 1968] D. Quémada. *Ondes dans les plasmas*. 1968. (cité pages 3, 20, 29, 102, 108 and 278).
- [Roux 1993] A. Roux, A. Hilgers, H. de Feraudy, D. Le Queau, P. Louarn, S. Perraut, A. Bahnsen, M. Jespersen, E. Ungstrup and M. Andre. *Auroral kilometric radiation sources - In situ and remote observations from Viking*. Journal of Geophysical Research, vol. 98, page 11657, July 1993. (cité page 202).
- [Rézeau 2007] L. Rézeau and G. Belmont. *Quelques propriétés des plasmas*, 2007. http://www.lpp.fr/IMG/pdf_Intro_plasmas.pdf. (cité page 3).
- [Savoini 2005] P. Savoini. *Introduction à la physique des plasmas*, mars 2005. http://www.lpp.fr/IMG/pdf/Cours_Intro_Plasma_M2_PEL_Web.pdf. (cité page 25).
- [Schneider 1995] N. M. Schneider and J. T. Trauger. *The Structure of the Io Torus*. Astrophysical Journal, vol. 450, page 450, September 1995. (cité page 100).
- [Sharma 1982] A. Sharma, D. V. Kumar and A. K. Ghatak. *Tracing rays through graded-index media : a new method*. Applied Optics, vol. 21, pages 984–987, March 1982. (cité pages 106, 107, 123 and 169).

- [Sommerfeld 1954] A. Sommerfeld. *Optics. Lectures on theoretical physics*. Academic Press, 1954. (cité page 101).
- [Stix 1992] T.H. Stix. *Waves in plasmas*. American Institute of Physics, 1992. (cité pages 20, 31 and 109).
- [Strobel 2000] D. Strobel. *Planetary Ionospheres*. In P. Murdin, editeur, *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*. November 2000. (cité pages 5 and 100).
- [Thejappa 2007] G. Thejappa, R. J. MacDowall and M. L. Kaiser. *Monte Carlo Simulation of Directivity of Interplanetary Radio Bursts*. *Astrophysical Journal*, vol. 671, pages 894–906, December 2007. (cité page 106).
- [Thejappa 2008] G. Thejappa and R. J. MacDowall. *Effects of Scattering on Radio Emission from the Quiet Sun at Low Frequencies*. *Astrophysical Journal*, vol. 676, pages 1338–1345, April 2008. (cité page 106).
- [Treumann 2000] R. A. Treumann. *Planetary Radio Emission Mechanisms : A Tutorial*. Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series, vol. 119, page 13, 2000. (cité page 91).
- [Tsai 2010] L.-C. Tsai, C. H. Liu and J. Y. Huang. *Three-dimensional numerical ray tracing on a phenomenological ionospheric model*. *Radio Science*, vol. 45, page 5017, October 2010. (cité page 143).
- [Warwick 1981] J. W. Warwick, J. B. Pearce, D. R. Evans, T. D. Carr, J. J. Schauble, J. K. Alexander, M. L. Kaiser, M. D. Desch, M. Pedersen, A. Lecacheux, G. Daigne, A. Boischoit and C. H. Barrow. *Planetary radio astronomy observations from Voyager 1 near Saturn*. *Science*, vol. 212, pages 239–243, April 1981. (cité page 163).
- [Warwick 1982] J. W. Warwick, D. R. Evans, J. H. Romig, J. K. Alexander, M. D. Desch, M. L. Kaiser, M. G. Aubier, Y. Leblanc, A. Lecacheux and B. M. Pedersen. *Planetary radio astronomy observations from Voyager 2 near Saturn*. *Science*, vol. 215, pages 582–587, January 1982. (cité page 163).
- [Wu 1979] C. S. Wu and L. C. Lee. *A theory of the terrestrial kilometric radiation*. *Astrophysical Journal*, vol. 230, pages 621–626, June 1979. (cité page 11).
- [Wu 1985] C. S. Wu. *Kinetic cyclotron and synchrotron maser instabilities - Radio emission processes by direct amplification of radiation*. *Space Science Reviews*, vol. 41, pages 215–298, August 1985. (cité page 11).
- [Xiao 2007] F. Xiao, L. Chen, H. Zheng and S. Wang. *A parametric ray tracing study of superluminescent auroral kilometric radiation wave modes*. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 112, page 10214, October 2007. (cité pages 202 and 208).
- [Zarka 1983] P. Zarka and B. M. Pedersen. *Statistical study of Saturn electrostatic discharges*. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, vol. 88, pages 9007–9018, November 1983. (cité page 167).
- [Zarka 1985a] P. Zarka. *Directivity of Saturn electrostatic discharges and ionospheric implications*. *Icarus*, vol. 61, pages 508–520, March 1985. (cité pages 12 and 179).

- [Zarka 1985b] P. Zarka. *Saturn Electrostatic Discharges : Characterlstics, Comparison to Planetary Lightning and Importance in the Study of Saturn's Ionosphere*. In H. O. Rucker, W. S. Kurth and G. Mann, editeurs, *Planetary Radio Emissions I*, page 161, 1985. (cité page 163).
- [Zarka 1986] P. Zarka and B. M. Pedersen. *Radio detection of Uranian lightning by Voyager 2*. *Nature*, vol. 323, pages 605–608, October 1986. (cité page 12).
- [Zarka 2000] P. Zarka. *Radio Emissions from the Planets and their Moons*. Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series, vol. 119, pages 167–178, 2000. (cité pages 13 and 25).
- [Zarka 2004] P. Zarka. *Radio and plasma waves at the outer planets*. *Advances in Space Research*, vol. 33, pages 2045–2060, January 2004. (cité page 10).
- [Zarka 2006] P. Zarka, B. Cecconi, L. Denis, W. M. Farrell, G. Fischer, G. B. Hospodarsky, M. L. Kaiser and W. S. Kurth. *Physical properties and detection of Saturn's lightning radio bursts*. In H. O. Rucker, W. S. Kurth, and G. Mann, Austrian Academy of Sciences Press, Vienna, editeur, *Planetary Radio Emissions VI*, 2006. (cité pages 164 and 175).

Étude de la propagation des ondes radio dans les environnements planétaires

Résumé : Dans le système solaire, l'étude des rayonnements radio très basse fréquence (de quelques kHz à quelques MHz) permet d'obtenir des informations sur les processus d'accélération des électrons dans les environnements planétaires et dans le vent solaire. La compréhension des mécanismes d'émission et la maîtrise des moyens de détection permettent de sonder les conditions physiques dans les plasmas sources. Cette thèse porte sur l'étude de la propagation des ondes radio dans les environnements planétaires. Leur caractère inhomogène implique que la propagation n'est pas obligatoirement rectiligne, et la présence des champs magnétiques ambiants rend le plasma anisotrope. L'étude des phénomènes de propagation permet de s'affranchir d'une hypothèse de propagation en ligne droite entre les sources du rayonnement et les détecteurs, de suivre l'évolution des caractéristiques des ondes et de sonder le milieu de propagation. L'étude théorique de la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas magnétisés a mené au développement d'un code général de tracé de rayons, calculant également l'état de polarisation de l'onde le long des rayons : ARTEMIS-P (Anisotropic Ray Tracer for Electromagnetism in Magnetosphere, Ionosphere and Solar wind, including Polarization). Ce code nous a permis de mener deux études : l'effet de détection au-delà de l'horizon des signatures radio des éclairs d'orages de Saturne et l'influence de l'ionosphère sur la propagation des ondes radio produites dans l'atmosphère de Saturne, et l'influence du profil des cavités aurales sur le diagramme de rayonnement des sources de l'émission kilométrique terrestre.

Mots-clés : Radioastronomie, propagation, ionosphère, magnétosphère, tracé de rayons
