

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b> |
| 1 Équations de Darcy . . . . .                                       | 2        |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 2        |
| 1.2 Travaux effectués . . . . .                                      | 2        |
| 1.3 Problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur . . . . . | 3        |
| 2 Etude mathématique et numérique . . . . .                          | 4        |
| 2.1 Modèles et études théoriques . . . . .                           | 4        |
| 2.2 Méthode des Éléments finis . . . . .                             | 4        |
| 2.3 Résultats obtenus . . . . .                                      | 5        |
| 2.4 Difficultés rencontrées . . . . .                                | 5        |
| 3 Plan de la thèse . . . . .   | 6        |
| <b>Chapitre 1</b>  |          |
| <b>Problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur</b>        |          |
| 1.1 Problème continu . . . . .                                       | 8        |
| 1.1.1 Présentation du problème . . . . .                             | 8        |
| 1.1.2 Notations . . . . .  | 8        |
| 1.1.3 Rappels . . . . .  | 11       |
| 1.1.4 Formule de Green et quelques résultats . . . . .               | 13       |
| 1.1.5 Formulation variationnelle . . . . .                           | 19       |
| 1.1.6 Existence et unicité de la solution exacte . . . . .           | 25       |

---

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 1.1.6.1 | Première formulation variationnelle continue . . . . .                | 25 |
| 1.1.6.2 | Deuxième formulation variationnelle continue . . . . .                | 31 |
| 1.1.7   | Régularité de la solution . . . . .                                   | 32 |
| 1.2     | Problème discret . . . . .  | 33 |
| 1.2.1   | Triangulation . . . . .   | 33 |
| 1.2.1.1 | Première formulation variationnelle discrète . . . . .                | 33 |
| 1.2.1.2 | Deuxième et troisième formulations variationnelles discrètes          | 36 |
| 1.2.1.3 | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 40 |
| 1.2.2   | Existence et unicité de la solution discrète de chaque schéma . . . . | 41 |
| 1.2.2.1 | Première formulation variationnelle discrète . . . . .                | 42 |
| 1.2.2.2 | Troisième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 44 |
| 1.2.2.3 | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 45 |
| 1.2.3   | Convergence vers la solution continue . . . . .                       | 47 |
| 1.2.3.1 | Première formulation variationnelle discrète . . . . .                | 47 |
| 1.2.3.2 | Troisième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 48 |
| 1.2.3.3 | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 51 |
| 1.3     | Estimation d'erreur <i>a priori</i> . . . . .                         | 52 |
| 1.3.1   | Première formulation variationnelle discrète . . . . .                | 52 |
| 1.3.2   | Troisième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 58 |
| 1.3.3   | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . .               | 63 |
| 1.4     | Problème itératif . . . . .   | 69 |
| 1.4.1   | Existence et unicité de la solution itérative . . . . .               | 70 |
| 1.4.1.1 | Première formulation variationnelle itérative . . . . .               | 71 |
| 1.4.1.2 | Troisième formulation variationnelle itérative . . . . .              | 71 |
| 1.4.1.3 | Quatrième formulation variationnelle itérative . . . . .              | 72 |
| 1.4.2   | Convergence vers la solution continue . . . . .                       | 72 |

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 1.4.2.1 | Première formulation variationnelle discrète . . . . .  | 72 |
| 1.4.2.2 | Troisième formulation variationnelle discrète . . . . . | 74 |
| 1.4.2.3 | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . . | 75 |
| 1.4.3   | Convergence vers la solution discrète . . . . .         | 76 |
| 1.4.3.1 | Première formulation variationnelle discrète . . . . .  | 76 |
| 1.4.3.2 | Troisième formulation variationnelle discrète . . . . . | 82 |
| 1.4.3.3 | Quatrième formulation variationnelle discrète . . . . . | 86 |
| 1.5     | Simulations numériques . . . . .                        | 91 |

## Chapitre 2

### Etude a posteriori du problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur 101

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 2.1     | Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .    | 102 |
| 2.1.1   | Majorations d'erreur . . . . .                       | 102 |
| 2.1.1.1 | Première formulation variationnelle . . . . .        | 102 |
| 2.1.1.2 | Troisième formulation variationnelle . . . . .       | 114 |
| 2.1.1.3 | Quatrième formulation variationnelle . . . . .       | 122 |
| 2.1.2   | Efficacité . . . . .                                 | 129 |
| 2.1.2.1 | Première formulation variationnelle . . . . .        | 130 |
| 2.1.2.2 | Troisième formulation variationnelle . . . . .       | 149 |
| 2.2     | Simulations numériques <i>a posteriori</i> . . . . . | 159 |

### Conclusions et perspectives 170

### Bibliographie 171

### Bibliographie 172

### Table des figures 175

---

Liste des tableaux 176

|        |     |
|--------|-----|
| Résumé | 177 |
|--------|-----|

|          |     |
|----------|-----|
| Abstract | 178 |
|----------|-----|

*Rapport-gratuit.com*   
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

# Introduction

# 1 Équations de Darcy

## 1.1 Introduction

Le fluide est un corps dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz), de façon que le corps prenne la forme du vase qui le contient. Un fluide compressible est un fluide dont le volume peut varier, par exemple : les gaz (air, gaz intestinaux...). Un fluide incompressible est un fluide dont le volume ne peut presque pas varier, par exemple : les liquides et les fluides corporels (sang, urine,...). La mécanique des fluides est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées.

La loi expérimentale de Darcy (ou loi de Darcy) est une loi physique qui exprime le débit d'un fluide incompressible filtrant au travers d'un milieu poreux. La viscosité du fluide détermine sa vitesse du mouvement (par exemple, la vitesse de déplacement d'une cuillère dans un bol : plus le liquide est visqueux, plus le mouvement est lent).

Cette loi a été établie en 1856 par Henry Darcy, après qu'il eut réalisé divers expérimentations visant à déterminer les lois régissant «l'écoulement de l'eau à travers le sable». La loi de Darcy est aujourd'hui constamment utilisée dans des domaines à enjeux forts pour la sécurité des travaux publics (transport, construction...), ainsi que pour l'alimentation en eau, en gaz et en pétrole et de nombreux domaines de la géotechnique et de l'industrie les calculs quantitatifs de l'hydraulique, des sciences du sol, de la mécanique des roches, et de la gestion des risques pour calculer des coefficients de percolation, ou de circulation horizontale ou verticale de l'eau, selon la masse, la hauteur ou la pression d'un fluide présente en surface ou dans un milieu hydrophile, selon la porosité du milieu et selon la viscosité du fluide.

La loi de Darcy peut enfin éclairer des phénomènes biologiques et processus de type biomécanique (mécanobiologie) impliquant la circulation (avec filtration ou échanges) d'un fluide (corporel ou extérieur comme l'eau) dans des tissus vivants et poreux, peu ou lentement déformables et anisotropique. C'est le cas du passage de fluides dans la partie spongieuse de l'os par exemple [49,50] ou encore du passage de l'eau dans les tissus filtrant d'une éponge vivante, qui se nourrit en filtrant l'eau dans son propre corps. Ces phénomènes intéressent aussi certains domaines des nanotechnologies ou de la biomimétique.

## 1.2 Travaux effectués

Les équations de Darcy non linéaires, avec viscosité dépendante de la pression, ont été introduites par K.R. Rajagopal [32] ou E.Ahusborde, M.Azaïez, F.B. Belgacem et C.Bernardi [3]. Elles sont très réalistes lorsque la pression présente de fortes variations, par exemple, induites par les conditions aux limites, et s'appliquent entre autres à la modélisation de

gisements pétroliers.

L'étude de la convection de la chaleur dans un milieu liquide dont le mouvement est décrit par les équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la chaleur ont été l'objet de plusieurs publications (Bernardi, Métivet and Pernaud-Thomas [11] ou Deteix, Jendoubi and Yakoubi [19] ou Gaultier and Lezaun [20]).

Un différent couplage du système de Darcy avec l'équation de la chaleur, où la viscosité est constante mais la force extérieur dépend de la température, a été analysé par Bernardi, Maarouf et Yacoubi [10] ou Boussinesq [12] et discrétisé par la méthode spectrale.

### 1.3 Problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière lipschitzienne  $\Gamma = \partial\Omega$ . Les équations de Darcy stationnaires modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux. La viscosité dépend de la température ([24] ou [33]), de sorte que le modèle obtenu sera non linéaire. Le système considéré est donné par :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\alpha\Delta T(\mathbf{x}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ T(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire sortant sur  $\Gamma$ . Les inconnues sont le vecteur vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}$ , la pression  $p$  et la température  $T$  du fluide. La fonction  $\mathbf{f}$  présente la densité des forces extérieures et  $g$  une fonction donnée. Nous supposons que  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ ,  $g \in L^2(\Omega)$  et le coefficient  $\alpha$  est une constante positive. La viscosité  $\nu$  est une fonction positive, bornée et il existe deux constantes positives  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , telles que  $\nu$  satisfait, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$(1) \quad 0 < \nu_1 \leq \nu(\tau) \leq \nu_2.$$

Dans la plupart des mémoires, le modèle utilisé pour la viscosité n'est pas nécessairement borné dans  $\mathbb{R}$ , mais l'analyse mathématique du problème devient plus compliqué. Cependant, dans des situations particulières, la viscosité n'est ni infini, ni zéro, c'est pour cela nous supposons (1) pour simplifier l'analyse.

## 2 Etude mathématique et numérique

### 2.1 Modèles et études théoriques

L'étude théorique du problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur où la viscosité  $\nu$  est constante mais la force extérieure dépend de la température a été traité par Bernardi, Maarouf et Yacoubi [10]. Dans ce travail, nous montrons l'existence de la solution, où  $\nu$  dépend de la température, en utilisant la méthode de Galerkin et du point fixe de Brouwer. De plus, nous démontrons l'unicité globale, sous des conditions supplémentaires sur la solution, en utilisant la méthode de Stampacchia.

Nous établissons deux formulations variationnelles continues. La première correspond aux espaces  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  en vitesse-pression tandis que la deuxième  $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  en vitesse-pression et  $H_0^1(\Omega)$  pour la température.

### 2.2 Méthode des Éléments finis

Nous utilisons la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace de l'équation de Darcy couplée avec l'équation de la chaleur. Elle est l'une des nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles modélisant des problèmes de la mécanique, de la physique, de la biologie, etc.

Les méthodes des éléments finis ont fait l'objet d'un grand nombre de publications. Elles sont utilisées tant par des ingénieurs que par des mathématiciens dans des domaines extrêmement variés. Les ingénieurs ont réinventé indépendamment la méthode dans les années 50, après avoir été conçue par R. Courant en 1943 mais l'importance de cette contribution est passée inaperçue à cette époque : les premières références généralement citées dans la littérature sont celles d'Argyris (1954 – 1955), Turner, Clough, Martin and Topp (1956). Le nom de la méthode a été proposé par Clough (1960). Nous trouvons chez Oden [29], Zienkiewicz [39] et dans l'article de l'introduction de J.T. Oden [30] l'historique sur le développement de cette méthode du point de vue des ingénieurs. Nous utilisons dans cette thèse, d'une part les éléments  $RT_0/\mathbb{P}_1$  en vitesse-pression (l'élément de "Raviart-Thomas") et d'autre part les éléments  $\mathbb{P}_1 + \text{bulle}/\mathbb{P}_1$  en vitesse-pression (le "mini-élément") et  $\mathbb{P}_1$  en température. Le choix du mini-élément est dû au fait que l'élément fini  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  ne satisfait pas la condition inf-sup discrète car l'espace de la vitesse n'est pas assez riche (ou l'espace de la pression est trop riche). L'idée du mini-élément est d'ajouter un degré de liberté à l'intérieur de chaque élément  $K$  de la triangulation  $\tau_h$ , pour chaque composante de la vitesse. La condition inf-sup, qui est une condition de compatibilité entre les espaces discrets de l'élément fini de la vitesse et de la pression, est alors vérifiée.



## 2.3 Résultats obtenus

Dans le cadre des travaux effectués durant la thèse, nous avons obtenu plusieurs résultats d'ordre théorique et numérique correspondants au problème de couplage Darcy-température, que nous résumons ci-dessous. En bref :

- Nous avons démontré l'existence de la solution sans restriction sur les données contrairement à l'unicité globale où nous avons imposé des régularités supplémentaires et nous avons considéré des petites données.
- Nous avons effectué des estimations d'erreur *a priori* de la vitesse, de la pression et de la température d'ordre un en espace, grâce aux petites conditions sur la solution exacte et à la régularité correspondante. Nous avons même pu généraliser ces estimations.
- Nous avons établi des estimations d'erreur *a posteriori* majorant l'erreur entre les solutions exacte et numérique. Cette majoration a été effectuée dans le cadre de petites données et en exigeant une régularité supplémentaire sur la solution. Nous obtenons deux types d'indicateurs : indicateurs de linéarisation et indicateurs de discrétisation.
- Les résultats numériques nous montrent la validation des résultats théoriques.

## 2.4 Difficultés rencontrées

Au cours des travaux de la thèse, nous avons rencontré plusieurs difficultés qu'on peut résumer en plusieurs étapes :

- La première difficulté apparaît au niveau de l'espace auquel doit appartenir le terme de convection  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ . Ce terme n'appartient pas nécessairement à  $H^1(\Omega)$ , tandis qu'il est seulement dans  $L^1(\Omega)$ . Nous pouvons remarquer que l'équation de la température assure que ce terme appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ . Cependant, pour pouvoir donner un sens au terme de convection, nous choisissons les fonctions tests dans  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .
- Les estimations d'erreur *a posteriori* nécessitent d'effectuer une majoration d'erreur entre les solutions exacte et approchée. Comme le problème traité est non-linéaire, il présente des difficultés d'ordre théorique afin de pouvoir traiter les termes non-linéaires. Ceci exige d'imposer des conditions de régularité supplémentaires sur la solution exacte pour pouvoir obtenir les résultats satisfaisants.

- L'utilisation d'élément fini de Raviart-Thomas pour discrétiser la formulation variationnelle dans  $H(\text{div}, \Omega)$  introduit une difficulté au niveau de la démonstration de l'optimalité des estimations d'erreur *a posteriori* établies. Pour cela, nous avons effectué un traitement spécifique.

### 3 Plan de la thèse

Ce mémoire de thèse comporte deux chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons les équations de Darcy stationnaires non linéaires couplées avec l'équation de la chaleur. Nous supposons que la viscosité dépend de la température ([24] ou [33]). Dans un premier temps, nous fixerons les notations et le vocabulaire mathématique, et nous donnons un rappel de quelques théorèmes et propositions sur les espaces fonctionnels considérés. Le système noté  $(P)$  admet deux formulations variationnelles  $(V_1)$  et  $(V_2)$  qui comportent trois inconnues : la vitesse, la pression et la température. Nous démontrons l'existence et l'unicité conditionnée des solutions continues correspondantes aux  $(V_1)$  et  $(V_2)$ . Puis nous introduisons les problèmes variationnels discrets  $(V_{h,1})$ ,  $(V_{h,2})$ ,  $(V_{h,3})$  et  $(V_{h,4})$ , et nous montrons l'existence des solutions des problèmes  $(V_{h,1})$ ,  $(V_{h,3})$  et  $(V_{h,4})$ , grâce au théorème de point fixe de Brouwer. De plus, nous établissons l'estimation d'erreur *a priori*, pour des petites données, correspondantes aux problèmes  $(V_{h,1})$ ,  $(V_{h,3})$  et  $(V_{h,4})$ . Nous introduisons par la suite les quatre problèmes itératifs  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,2})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$  et nous montrons que les uniques solutions correspondantes des  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$  convergent respectivement vers les solutions discrètes  $(V_{h,1})$ ,  $(V_{h,3})$  et  $(V_{h,4})$ . Finalement, nous présentons des résultats de validation numérique en utilisant le logiciel FreeFem++ [23].

Le but du second chapitre est d'établir des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de couplage Darcy et température dans le cas des petites données du problème. Par la suite, nous démontrons que l'estimation d'erreur *a posteriori* établie est optimale pour les première et troisième formulations variationnelles. Dans ce qui suit, nous effectuons des simulations numériques de validation en utilisant le logiciel FreeFem++ [23].

# Chapitre 1

## Problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Problème continu</b>                                       | <b>8</b>  |
| 1.1.1      | Présentation du problème                                      | 8         |
| 1.1.2      | Notations   | 8         |
| 1.1.3      | Rappels   | 11        |
| 1.1.4      | Formule de Green et quelques résultats                        | 13        |
| 1.1.5      | Formulation variationnelle                                    | 19        |
| 1.1.6      | Existence et unicité de la solution exacte                    | 25        |
| 1.1.7      | Régularité de la solution                                     | 32        |
| <b>1.2</b> | <b>Problème discret</b>                                       | <b>33</b> |
| 1.2.1      | Triangulation   | 33        |
| 1.2.2      | Existence et unicité de la solution discrète de chaque schéma | 41        |
| 1.2.3      | Convergence vers la solution continue                         | 47        |
| <b>1.3</b> | <b>Estimation d'erreur <i>a priori</i></b>                    | <b>52</b> |
| 1.3.1      | Première formulation variationnelle discrète                  | 52        |
| 1.3.2      | Troisième formulation variationnelle discrète                 | 58        |
| 1.3.3      | Quatrième formulation variationnelle discrète                 | 63        |
| <b>1.4</b> | <b>Problème itératif</b>                                      | <b>69</b> |
| 1.4.1      | Existence et unicité de la solution itérative                 | 70        |
| 1.4.2      | Convergence vers la solution continue                         | 72        |
| 1.4.3      | Convergence vers la solution discrète                         | 76        |
| <b>1.5</b> | <b>Simulations numériques</b>                                 | <b>91</b> |

---

## 1.1 Problème continu

### 1.1.1 Présentation du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière lipschitzienne  $\Gamma = \partial\Omega$ . Les équations de Darcy stationnaires modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux. La viscosité dépend de la température ([24] ou [33]), de sorte que le modèle obtenu sera non linéaire. Le système considéré est donné par :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) & = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) & = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\alpha \Delta T(\mathbf{x}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) & = g(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) & = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ T(\mathbf{x}) & = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire sortant sur  $\Gamma$ . Les inconnues sont le vecteur vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}$ , la pression  $p$  et la température  $T$  du fluide. La fonction  $\mathbf{f}$  présente la densité des forces extérieures et  $g$  une fonction donnée. Nous supposons que  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  et  $g \in L^2(\Omega)$ . La viscosité  $\nu$  est une fonction positive, bornée et minorée par une constante strictement positive et le coefficient  $\alpha$  est une constante positive.

### 1.1.2 Notations

Dans cette section, nous introduisons les espaces fonctionnels nécessaires pour notre travail et les normes correspondantes.

Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un vecteur d'entiers positifs et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , nous définissons la dérivée partielle  $\partial^\alpha$  par :

$$(1.1) \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

- a) Nous introduisons l'ensemble  $D(\Omega)$  des fonctions à support compact dans  $\Omega$  et infiniment dérivables sur  $\Omega$  et l'ensemble  $D'(\Omega)$  des distributions dans  $\Omega$ .

Le crochet de dualité associé à  $D(\Omega)$  (respectivement  $D(\Omega)^d$ ) sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}$  (respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d}$ ).

- b) Pour un nombre  $p$  supérieur ou égal à 1, nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.2) \quad L^p(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable dans } \Omega; \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$(1.3) \quad \|v\|_p = \left( \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le produit scalaire associé à  $L^p(\Omega)$  et  $L^p(\Omega)^d$  sera noté  $(\cdot, \cdot)_p$ .

De plus nous introduisons l'espace  $L^\infty(\Omega)$  suivant :

$$(1.4) \quad L^\infty(\Omega) = \{f \text{ mesurable dans } \Omega \text{ telle qu'il existe une constante } C \geq 0 \text{ vérifiant } |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme

$$(1.5) \quad \|v\|_\infty = \inf\{C; |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ pp sur } \Omega\}.$$

De même, nous introduisons l'espace de Hilbert  $L_0^2(\Omega)$  suivant :

$$(1.6) \quad L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\},$$

muni de la même norme de  $L^2(\Omega)$ .

c) Pour un entier  $m$  positif et un nombre  $p$  supérieur ou égal à 1, nous introduisons l'espace de Sobolev suivant ([2] ou [28]) :

$$(1.7) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\},$$

muni respectivement de la semi-norme

$$(1.8) \quad |v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

et de la norme

$$(1.9) \quad \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $m = 1$ , nous introduisons l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  suivant :

$$(1.10) \quad W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\}.$$

Pour  $p = 2$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  sera noté  $H^m(\Omega)$ , et sera muni respectivement de la semi-norme

$$(1.11) \quad |v|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et de la norme

$$(1.12) \quad \|v\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{k,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

De plus nous introduisons l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  suivant :

$$(1.13) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\},$$

muni de la même norme de  $H^1(\Omega)$ . D'après l'inégalité de Poincaré, nous avons que la semi-norme de  $H^1(\Omega)$  est une norme équivalente à la norme complète de  $H_0^1(\Omega)$ .

d) Nous introduisons l'espace de Sobolev  $H^{-1}(\Omega)$ , l'application linéaire et continue de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  qui est équivqlente à l'espace suivant :

$$(1.14) \quad H^{-1}(\Omega) = \{v \in D'(\Omega); v = \sum_{|\alpha| \leq 1} \partial^\alpha f_\alpha, \text{ avec } f_\alpha \in L^2(\Omega)\},$$

muni respectivement de la norme

$$(1.15) \quad \|f\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{|v|_{1,\Omega}}$$

qui est équivalente à la norme suivante :

$$(1.16) \quad \|v\|_{-1,\Omega} = \inf_{\sum_{|\alpha| \leq 1} \partial^\alpha f_\alpha} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq 1} \|f_\alpha\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$  est le crochet de dualité associé à  $H_0^1(\Omega)$ .

e) Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$(1.17) \quad H(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \in L^2(\Omega)^d; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$$

et

$$(1.18) \quad H(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \in L^2(\Omega)^d; \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\},$$

muni respectivement de la norme

$$(1.19) \quad \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2$$

et

$$(1.20) \quad \|\mathbf{v}\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2$$

et

$$(1.21) \quad H_0(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\},$$

muni de la même norme que (1.19).

### 1.1.3 Rappels

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer quelques théorèmes et propositions qui sont importants pour la suite.

**Théorème 1.1.1.** *Théorème de point fixe de Brouwer [38]*

Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension finie de norme  $\|\cdot\|_H$ , de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et soit  $F$  une application continue de  $H$  dans  $H$ , telle qu'il existe  $\mu > 0$  tel que :

$$(1.22) \quad \forall v \in H \text{ avec } \|v\|_H = \mu, \quad (F(v), v)_H \geq 0.$$

Alors il existe au moins un élément  $u \in H$ , tel que :

$$(1.23) \quad F(u) = 0 \text{ et } \|u\|_H \leq \mu.$$

Nous considérons deux espaces de Hilbert  $X$  et  $M$  de normes respectivement  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_M$ , de produits scalaires respectivement  $(\cdot, \cdot)_X$  et  $(\cdot, \cdot)_M$  et de duals  $X'$  et  $M'$  avec le crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Nous nous donnons une forme bilinéaire continue :  $b : X \times M \mapsto \mathbb{R}$ , et nous lui associons l'opérateur  $B$  tel que, pour tous  $v \in X$  et  $q \in M$ , nous avons :

$$(1.24) \quad b(v, q) = \langle Bv, q \rangle_{M', M} = \langle B'q, v \rangle_{X', X}.$$

Nous introduisons les espaces suivants :

$$V = \{v \in X; \forall q \in M, b(v, q) = 0\}.$$

$$V^\perp = \{v \in X; \forall w \in V, (v, w)_X = 0\}.$$

$$V^\circ = \{l \in X'; \forall v \in V, \langle l, v \rangle_{X', X} = 0\}.$$

**Théorème 1.1.2.** *Théorème de Babuška–Brezzi [16]*

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$(1.25) \quad \inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

b) L'opérateur  $B'$  est un isomorphisme de  $M$  sur  $V^\circ$  et

$$(1.26) \quad \forall q \in M, \quad \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M.$$

c) L'opérateur  $B$  est un isomorphisme de  $V^\perp$  sur  $M'$  et

$$(1.27) \quad \forall v \in V^\perp, \quad \|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X.$$

**Proposition 1.1.3.** Soit  $d = 2$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$ . L'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$ , où  $1 \leq q < +\infty$ , est compacte. Nous avons de plus :

$$(1.28) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \|\mathbf{v}\|_q \leq S_q \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

et

$$(1.29) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad \|\mathbf{v}\|_q \leq S_q^0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}.$$

Si la dimension  $d = 3$ , l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$  est vérifiée pour  $1 \leq q \leq 6$  et est compacte pour  $1 \leq q < 6$ .

**Proposition 1.1.4.** Inégalité de Hölder [25]

Si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $p$  et  $q$  conjugués ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et de plus nous avons l'inégalité de Hölder suivante :

$$(1.30) \quad \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Théorème 1.1.5.** Théorème de convergence dominée de Lebesgue [15]

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)$ . Nous supposons que :

- a)  $f_n \rightarrow f$  p.p. dans  $\Omega$ ,
- b)  $\exists F \in L^p(\Omega)$  telle que  $|f_n| \leq F$  p.p. dans  $\Omega$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors la suite  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$ .

**Propriété 1.1.6.** Dans un espace vectoriel normé, toute suite faiblement convergente  $(u_n)_n$  est bornée, et la norme de sa limite faible est inférieure ou égale à la limite inférieure des normes des  $u_n$ .

**Définition 1.1.7.** Soit  $F : L^p(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ . Nous disons que la fonction  $F$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $L^p(\Omega)$  si elle vérifie, pour tout  $(f, g) \in L^p(\Omega)^2$ , l'équation suivante :

$$(1.31) \quad \|F(f) - F(g)\|_p \leq \lambda \|f - g\|_p.$$

**Théorème 1.1.8.** Théorème de Lax-Milgram [16]

Soit  $X$  un espace de Hilbert,  $a : X \times X \mapsto \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue coercive pour la norme de  $X$  et  $l : X \mapsto \mathbb{R}$  une forme linéaire et continue. Alors il existe un unique  $u \in X$  tel que :

$$(1.32) \quad \forall v \in X, \quad a(u, v) = l(v).$$

**Théorème 1.1.9.** Théorème de Brézis-Browder [7]

Si  $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  et si  $g \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , alors

$$(1.33) \quad \langle f, g \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$



### 1.1.4 Formule de Green et quelques résultats

D'après le théorème des équations de Darcy, il est bien connu que pour un  $T \in H_0^1(\Omega)$  donné, la première équation du problème (P) admet une solution unique  $\mathbf{u}$  du fait que  $\nu$  est bornée et non dégénérée puisque minorée par une constante strictement positive. D'autre part, nous allons démontrer pour un  $\mathbf{u}$  donné convenable, l'existence et l'unicité de la solution de la deuxième équation du problème (P) en prenant  $g \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\alpha$  une fonction quelconque donnée dans  $L^\infty(\Omega)$ , telle que pour tout,  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$(1.34) \quad \alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 > 0.$$

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur donné dans  $H(\text{div}, \Omega)$  tel que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } T \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\text{div}(\alpha \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \nabla T = g, \text{ dans } D'(\Omega). \end{array} \right.$$

Effectivement, le terme de convection  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$  n'appartient pas nécessairement à  $H^1(\Omega)$ , tandis qu'il est seulement dans  $L^1(\Omega)$ . Nous pouvons remarquer que l'équation de la température donne que ce terme appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ . Cependant, il est plus simple de choisir les fonctions tests dans  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.10.** *le problème (1) est équivalent à la formulation variationnelle suivante :*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } T \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ < g, S >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{array} \right.$$

**Démonstration** En effet, si  $T$  vérifie (2), alors nous prenons  $S \in D(\Omega)$  et nous aurons (1).

Réciproquement, si  $T$  est solution de (1), alors  $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in L^1(\Omega)$  car  $\mathbf{u}$  et  $\nabla T$  sont dans  $L^2(\Omega)^d$  et comme

$$(1.35) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla T = g + \text{div}(\alpha \nabla T),$$

alors  $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in H^{-1}(\Omega)$ . En utilisant le théorème de Brézis-Browder (1.1.9), nous aurons :

$$(1.36) \quad \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

D'où, pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,

$$(1.37) \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

□

**Propriété 1.1.11.** Pour tous  $S$  et  $W$  dans  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et pour tout  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  tel que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , nous avons la formule de Green suivante :

$$(1.38) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla W)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**Démonstration** Nous commençons tout d'abord par démontrer que  $SW$  appartient à l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . Or, comme  $S \in L^2(\Omega)$  et  $W \in L^\infty(\Omega)$ , nous aurons que  $SW \in L^2(\Omega)$ . Par la suite,

$$(1.39) \quad \nabla(SW) = W\nabla S + S\nabla W.$$

Comme  $\nabla S, \nabla W$  sont dans  $L^2(\Omega)^d$  et  $S, W$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors  $\nabla(SW) \in L^2(\Omega)^d$ . De plus, nous avons que  $S \in H_0^1(\Omega)$ , nous déduisons alors que  $SW \in H_0^1(\Omega)$ .

Comme  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  tel que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  et  $SW \in H_0^1(\Omega)$ , alors nous pouvons appliquer la formule de Green et nous aurons :

$$(1.40) \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla(SW)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

En se référant à l'équation (1.39), nous déduisons. □

**Remarque 1.1.12.** En particulier, pour  $W = S$ , nous aurons la propriété d'antisymétrie suivante, pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  :

$$(1.41) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

**Théorème 1.1.13.** Pour tout  $g \in H^{-1}(\Omega)$  et pour tout  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  tel que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , le problème (2) admet au moins une solution.

**Démonstration** Nous allons construire une solution en utilisant la méthode de Galerkin. Nous considérons l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , avec  $p$  fini,  $p > d$ , donc  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ . Soit  $(w_i)_{i \geq 0}$  une base de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et soit  $W_m$  l'espace engendré par  $w_0, \dots, w_m$ . Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } T_m \in W_m \text{ tel que :} \\ \forall w_i \in W_m, \text{ pour } 0 \leq i \leq m \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T_m(\mathbf{x}) \cdot \nabla w_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T_m)(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \quad \quad \langle g, w_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \cdot \end{array} \right.$$

Ce problème est un système linéaire carré en dimension finie. Grâce à la formule de Green déjà démontrée, nous aurons l'unicité de la solution  $T_m$  et par la suite l'existence de la

solution comme nous travaillons dans un espace de dimension finie. De plus, nous avons la majoration suivante grâce à (1.34) :

$$(1.42) \quad |T_m|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|g\|_{-1,\Omega}.$$

Comme la suite  $(T_m)_m$  est bornée dans l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ , alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(T_m)_m$  qui converge faiblement vers  $T$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Nous fixons  $i = i_0$  dans le problème, comme  $\mathbf{u}w_{i_0} \in L^2(\Omega)^d$  et  $(\nabla T_m)_m$  converge faiblement vers  $\nabla T$  dans  $L^2(\Omega)^d$  alors  $(\mathbf{u}w_{i_0}, \nabla T_m)_2$  converge vers  $(\mathbf{u}w_{i_0}, \nabla T)_2$ . Donc, nous aurons :

$$(1.43) \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla w_{i_0}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) w_{i_0}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, w_{i_0} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Cette équation est vraie pour tout indice  $i_0 \geq 0$  et donc pour toute combinaison linéaire finie de la base. Comme  $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in L^1(\Omega)$  alors  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) \sum_{i=0}^{i=n} \gamma_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  converge vers  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  (lorsque  $n$  tend vers l'infini) avec  $S \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Donc,

$$(1.44) \quad \forall S \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

En particulier, ceci est vrai pour tout  $S \in D(\Omega)$  et nous retrouvons l'existence de la solution.  $\square$

L'unicité de la solution du problème (2) n'est pas évidente. Elle fait appel à la méthode de Stampacchia [36] qui nous a été communiqué par François Murat [27].

**Théorème 1.1.14.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.1.13, la solution  $T$  du problème (2) est unique et elle vérifie l'estimation suivante :*

$$(1.45) \quad |T|_{1,\Omega} \leq \frac{\|g\|_{-1,\Omega}}{\alpha_0}.$$

**Démonstration** Nous introduisons la tronquée  $\tau_k(\sigma)$  et sa primitive  $\sigma_k(t)$  pour  $k > 0$  fixé :

$$(1.46) \quad \tau_k(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(t) & \text{si } |t| > k, \end{cases}$$

et

$$(1.47) \quad \sigma_k(t) = \int_0^t \tau_k(s) \, ds.$$

Nous notons que  $\tau_k(0) = 0$  et

$$(1.48) \quad \tau'_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq k, \\ 0 & \text{si } |t| > k. \end{cases}$$

Donc,  $\tau_k \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ . La fonction  $\sigma_k$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et elle satisfait  $\sigma_k(0) = 0$ . Nous notons aussi que  $\tau_k(T) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et

$$(1.49) \quad \nabla \tau_k(T) = \begin{cases} \nabla T & \text{si } |T| \leq k, \\ 0 & \text{si } |T| > k. \end{cases}$$

Donc, nous pouvons tester le problème (2) avec  $S = \tau_k(T)$  :

$$(1.50) \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau_k(T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) \tau_k(T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, \tau_k(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Nous notons que  $\sigma_k(T) \in H_0^1(\Omega)$  puisque  $\sigma_k(0) = 0$  et  $\sigma'_k$  est continue et bornée. De plus, nous avons :

$$(1.51) \quad \nabla \sigma_k(T) = \sigma'_k(t)|_{t=T} \nabla T = \tau_k(T) \nabla T.$$

Donc, nous obtenons l'équation :

$$(1.52) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) \tau_k(T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma_k(T))(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , alors la formule de Green entraîne que :

$$(1.53) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma_k(T))(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Par ailleurs nous notons que :

$$(1.54) \quad \int_{\Omega} \alpha \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau_k(T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \alpha |\nabla \tau_k(T)(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite, nous avons l'estimation suivante

$$(1.55) \quad \alpha_0 |\tau_k(T)|_{1,\Omega}^2 \leq \langle g, \tau_k(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

qui nous permettra d'obtenir l'estimation (1.45) en passant à la limite en  $k$  car  $(\tau_k(T))_k$  converge vers  $T$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Pour démontrer l'unicité de la solution, soit  $T_1$  et  $T_2$  deux solutions et soit  $\bar{T}$  la différence entre elles qui vérifie (2) avec  $g = 0$  et nous aurons par la suite que  $\tau_k(\bar{T}) = 0$  et

donc  $\bar{T} = 0$ . □

Nous pouvons aussi démontrer une propriété d'antisymétrie qui a des conséquences intéressantes.

Nous commençons par définir l'espace  $X_{\mathbf{u}}$  et nous introduisons quelques propriétés. Nous définissons l'espace suivant :

$$(1.56) \quad X_{\mathbf{u}} = \{T \in H_0^1(\Omega); \mathbf{u} \cdot \nabla T \in H^{-1}(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$(1.57) \quad \|T\|_{X_{\mathbf{u}}} = (\|\nabla T\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} \cdot \nabla T\|_{-1,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons introduire un produit scalaire commode pour la théorie en associant à  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$  l'unique solution  $V_T \in H_0^1(\Omega)$  de

$$(1.58) \quad -\Delta V_T = \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous savons que

$$(1.59) \quad \|\mathbf{u} \cdot \nabla T\|_{-1,\Omega} = \|\nabla V_T\|_{0,\Omega}$$

et nous définissons le produit scalaire suivant, pour tous  $T$  et  $S$  appartenant à  $X_{\mathbf{u}}$  :

$$(1.60) \quad (S, T)_{X_{\mathbf{u}}} = (\nabla S, \nabla T)_2 + (\nabla V_S, \nabla V_T).$$

Nous obtenons alors :

$$(1.61) \quad \|T\|_{X_{\mathbf{u}}}^2 = (T, T)_{X_{\mathbf{u}}}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que  $X_{\mathbf{u}}$  est un espace complet donc un Hilbert.

**Propriété 1.1.15.** *La formule de Green suivante est valable dans l'espace  $X_{\mathbf{u}}$  : pour tous  $S$  et  $T$  appartenant à  $X_{\mathbf{u}}$ ,*

$$(1.62) \quad \langle \mathbf{u} \cdot \nabla S, T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

**Démonstration** Nous considérons un  $T \in X_{\mathbf{u}}$  et nous définissons  $h$  par :

$$(1.63) \quad -\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = h.$$

Alors  $h \in H^{-1}(\Omega)$ . Nous avons vu que ce problème admet une solution unique dans  $H_0^1(\Omega)$ . Donc la solution  $T$  est la limite faible de la suite  $(T_m)_m$  construite par Galerkin. Nous testons (1.63) avec  $T_m$  :

$$(1.64) \quad (\nabla T, \nabla T_m)_2 + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle h, T_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Mais  $\langle h, T_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla T_m\|_{0,\Omega}^2$ . Donc,

$$(1.65) \quad (\nabla T, \nabla T_m)_{2+} \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla T_m\|_{0,\Omega}^2.$$

Nous passons à la limite :

$$(1.66) \quad \|\nabla T\|_{0,\Omega}^2 \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (\|\nabla T_m\|_{0,\Omega}^2).$$

D'après la Propriété 1.1.6, nous aurons que :

$$(1.67) \quad \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0.$$

Nous recommençons le même travail avec la nouvelle équation :

$$(1.68) \quad -\Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T = g$$

et nous trouvons que :

$$(1.69) \quad \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq 0.$$

D'où

$$(1.70) \quad \forall T \in X_{\mathbf{u}}, \quad \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Nous déduisons alors (1.62), pour tous  $S$  et  $T$  appartenant à  $X_{\mathbf{u}}$  en développant le terme  $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla(S + T), S + T \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$ .  $\square$

**Remarque 1.1.16.** La propriété d'antisymétrie nous donne la convergence forte de la suite  $(T_m)_m$ , puisque nous obtenons :

$$(1.71) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} (\|\nabla T_m\|_{0,\Omega}^2) = \|\nabla T\|_{0,\Omega}^2.$$

Ce qui entraîne la convergence en norme, d'où la convergence forte de la suite  $(T_m)_m$ . Et aussi la convergence de toute la suite, puisque la limite est unique.

**Propriété 1.1.17.**  $D(\Omega)$  est dense dans  $X_{\mathbf{u}}$ .

**Démonstration** Soit  $l \in (X_{\mathbf{u}})'$  tel que :

$$(1.72) \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad \langle l, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} = 0.$$

Montrons que  $l = 0$ , ceci entraînera la densité de  $D(\Omega)$  dans  $X_{\mathbf{u}}$ . Nous utilisons la représentation de Riesz [6] : il existe un  $T_l \in X_{\mathbf{u}}$ , tel que pour tout  $S \in X_{\mathbf{u}}$  :

$$(1.73) \quad \begin{aligned} \langle l, S \rangle_{X_{\mathbf{u}}', X_{\mathbf{u}}} &= (T_l, S)_{X_{\mathbf{u}}} \\ &= (\nabla T_l, \nabla S)_2 + (\nabla V_{T_l}, \nabla V_S)_2. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$  :

$$(1.74) \quad (\nabla T_l, \nabla \varphi)_2 + (\nabla V_{T_l}, \nabla V_\varphi)_2 = 0.$$

Par définition de  $V_\varphi$ , nous avons :

$$(1.75) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad (\nabla V_\varphi, \nabla \psi)_2 = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Donc d'après la formule de Green, nous aurons :

$$(1.76) \quad (\nabla V_\varphi, \nabla V_{T_l})_2 = - \langle \mathbf{u} \cdot \nabla V_{T_l}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$(1.77) \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad (\nabla T_l, \nabla \varphi)_2 = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla V_{T_l}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Alors  $V_{T_l} \in X_{\mathbf{u}}$ . Nous considérons l'équation (1.77) avec  $\varphi = T_l$  et nous obtenons :

$$(1.78) \quad \|\nabla T_l\|_{0,\Omega}^2 = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla V_{T_l}, T_l \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Comme  $V_{T_l}$  et  $T_l$  sont dans  $X_{\mathbf{u}}$  donc on peut appliquer la formule de Green. Mais, pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.79) \quad (\nabla V_{T_l}, \nabla \psi)_2 = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T_l, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

En particulier, pour  $\psi = V_{T_l}$ . Par la suite, nous obtenons :

$$(1.80) \quad \|\nabla T_l\|_{0,\Omega}^2 = -\|\nabla V_{T_l}\|_{0,\Omega}^2.$$

Nous concluons que  $T_l = 0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et par la suite  $l = 0$ . D'où, la densité.  $\square$

### 1.1.5 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous établissons les deux formulations variationnelles associées au problème ( $P$ ) et nous supposons que  $g \in L^2(\Omega)$  et  $\alpha$  une constante strictement positive. Nous commençons tout d'abord, par préciser les hypothèses que nous faisons sur la viscosité  $\nu$  :

- a)  $\nu$  est continue.
- b)  $\nu$  est bornée et il existe deux constantes positives  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , telles que  $\nu$  satisfait, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$(1.81) \quad 0 < \nu_1 \leq \nu(\tau) \leq \nu_2.$$

Nous introduisons la première et la deuxième formulations variationnelles suivantes :

$$(V_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}, p, T) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x})\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q} \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x})\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{array} \right.$$

et

$$(V_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}, p, T) \in L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q} \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

**Proposition 1.1.18.** *Le problème (P) est équivalent à la première formulation variationnelle (V<sub>1</sub>).*

**Démonstration** Nous commençons par démontrer que toute solution de (P) est une solution de (V<sub>1</sub>).

Soit  $(\mathbf{u}, p, T) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  une solution de (P) nous avons :

$$(1.82) \quad \nu(T)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Nous travaillons au sens des distributions, nous avons pour tout  $\mathbf{v} \in D(\Omega)^d$  :

$$(1.83) \quad \langle \nu(T)\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} + \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d}.$$



Or,

$$(1.84) \quad \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} = - \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} .$$

Alors les trois termes sont maintenant dans  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)^d$  et donc nous nous ramenons à des intégrales et nous aurons :

$$(1.85) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

La densité de  $D(\Omega)^d$  dans  $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$  permet de conclure que :

$$(1.86) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

Comme  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ , nous aurons aussi :

$$(1.87) \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

Nous multiplions par  $q \in L_0^2(\Omega)$ , nous intégrons sur  $\Omega$  et nous aurons :

$$(1.88) \quad \forall \mathbf{q} \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 .$$

Finalement,  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ , donc nous aurons :

$$(1.89) \quad -\alpha \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla T) = g .$$

Comme  $g \in L^2(\Omega)$  et  $\Delta T \in H^{-1}(\Omega)$ , nous obtenons que  $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in H^{-1}(\Omega)$ . Donc nous prenons la dualité avec  $S \in H_0^1(\Omega)$  et nous aurons :

$$(1.90) \quad -\alpha \langle \Delta T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle g, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} .$$

Or,

$$(1.91) \quad -\alpha \langle \Delta T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

Par la suite, nous obtenons :

$$(1.92) \quad \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

En particulier, l'égalité est vrai pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . D'où  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(V_1)$ .

Inversement, soit  $(\mathbf{u}, p, T)$  une solution de  $(V_1)$ , démontrons que  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ .

Nous avons :

$$(1.93) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x})\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Or  $D(\Omega)^d \subset H_0(\text{div}, \Omega)$ , donc l'équation (1.93) est vérifiée pour tous les  $\mathbf{v}$  appartenant à  $D(\Omega)^d$ . Nous obtenons alors

$$(1.94) \quad \langle \nu(T)\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} - \langle p, \text{div} \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$  désigne le crochet de dualité entre  $D(\Omega)^d$  et son dual.

Par la suite,

$$(1.95) \quad \forall \mathbf{v} \in D(\Omega)^d, \quad \langle \nu(T)\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{D'(\Omega)^d, D(\Omega)^d} = 0.$$

D'où nous obtenons :

$$(1.96) \quad \nu(T)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } D'(\Omega)^d.$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  nous déduisons que :

$$(1.97) \quad \nu(T)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } L^2(\Omega)^d.$$

De plus, nous avons :

$$(1.98) \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x})\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

En particulier, pour  $q(\mathbf{x}) = \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , nous aurons :

$$(1.99) \quad \|\text{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = 0,$$

et ensuite,

$$(1.100) \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Enfin, nous avons :

$$(1.101) \quad \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Or  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , donc l'équation (1.101) est vérifiée pour tous les  $S$  appartenant à  $D(\Omega)$ . Nous appliquons la formule de Green et nous obtenons alors

$$(1.102) \quad \forall S \in D(\Omega), \quad -\alpha \int_{\Omega} T(\mathbf{x})\Delta S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite,

$$(1.103) \quad \forall S \in D(\Omega), \quad \langle -\alpha\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - g, S \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} = 0,$$

D'où nous aurons :

$$(1.104) \quad -\alpha\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = g \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

En utilisant le fait que  $g \in L^2(\Omega)$  nous obtenons que :

$$(1.105) \quad -\alpha\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = g \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ . □

**Proposition 1.1.19.** *Le problème  $(P)$  est équivalent à la deuxième formulation variationnelle  $(V_2)$ .*

**Démonstration** Nous commençons par démontrer que toute solution de  $(P)$  est une solution de  $(V_2)$ .

Soit  $(\mathbf{u}, p, T) \in L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  une solution de  $(P)$  nous avons :

$$(1.106) \quad \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous multiplions par  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$ , nous intégrons sur  $\Omega$  et nous obtenons :

$$(1.107) \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ , nous aurons aussi :

$$(1.108) \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous multiplions par  $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , nous intégrons sur  $\Omega$  et nous aurons :

$$(1.109) \quad \forall \mathbf{q} \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Nous appliquons La formule de Green pour obtenir le résultat voulu. Finalement,  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ , donc nous aurons :

$$(1.110) \quad -\alpha\Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla T) = g.$$

En appliquant le même travail déjà effectué dans la démonstration de la première formulation variationnelle, nous déduisons. D'où  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(V_2)$ .

Inversement, soit  $(\mathbf{u}, p, T)$  une solution de  $(V_2)$ , démontrons que  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ .

Nous avons :

$$(1.111) \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite,

$$(1.112) \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\nu(T)\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v})_2 = 0.$$

D'où nous aurons :

$$(1.113) \quad \nu(T)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } L^2(\Omega)^d.$$

De plus, nous avons :

$$(1.114) \quad \forall \mathbf{q} \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Or, pour  $q$  égale à une constante, nous aurons :

$$(1.115) \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

D'où l'égalité (1.114) est vérifié pour tout  $q \in H^1(\Omega)$ . Au sens des distributions, nous aurons :

$$(1.116) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Comme, pour tout  $q \in H^1(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.117) \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

alors nous obtenons en appliquant la formule de Green l'équation suivante :

$$(1.118) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

Et par la suite, nous déduisons que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ .

Enfin, nous avons :

$$(1.119) \quad \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En répétant le même travail déjà effectué dans la démonstration de la première formulation variationnelle, nous déduisons. D'où  $(\mathbf{u}, p, T)$  est une solution de  $(P)$ .  $\square$

## 1.1.6 Existence et unicité de la solution exacte

### 1.1.6.1 Première formulation variationnelle continue

Nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.120) \quad \mathcal{V}_1 = \{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall q \in L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx = 0\}.$$

**Remarque 1.1.20.**  $\mathcal{V}_1$  s'écrit de la manière suivante :

$$(1.121) \quad \mathcal{V}_1 = \{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div } \mathbf{v} = 0\}.$$

La formulation variationnelle ( $V_1$ ) peut être aussi écrite en fonction de  $T$ . Effectivement, en utilisant le théorème de Lax-Milgram (Théorème 1.1.8), pour un  $T$  donné, le système de Darcy admet une solution unique,  $(\mathbf{u}, p)$ , grâce à la relation (1.81) et à la condition inf-sup continue [34] suivante :

$$(1.122) \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx}{\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta' \|q\|_{0, \Omega}.$$

Alors  $\mathbf{u}$  et  $p$  sont des fonctions de  $T$ ,  $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}(T), p(T))$  et ( $V_1$ ) devient équivalent à la formulation variationnelle suivante : Chercher  $T \in H_0^1(\Omega)$  tel que : pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,

$$(1.123) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, dx,$$

où  $\mathbf{u}(T)$  est la solution de : Chercher  $(\mathbf{u}(T), p(T)) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tel que : pour tout  $(\mathbf{v}, q) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ ,

$$(1.124) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(T)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} p(T)(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx,$$

$$\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{u}(T)(\mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Nous testons l'équation (1.124), en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(T)$  et immédiatement nous dérivons de (1.81) et la condition inf-sup continue (1.122) les estimations suivantes :

$$(1.125) \quad \|\mathbf{u}(T)\|_{0, \Omega} \leq \frac{1}{\nu_1} \|f\|_{0, \Omega},$$

$$(1.126) \quad \|\sqrt{\nu(T)} \mathbf{u}(T)\|_{0, \Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_1}} \|f\|_{0, \Omega}$$

et

$$(1.127) \quad \|p(T)\|_{0, \Omega} \leq \frac{1}{\beta'} (\|f\|_{0, \Omega} + \nu_2 \|\mathbf{u}(T)\|_{0, \Omega}).$$

Commençons avec le résultat auxiliaire suivant :

**Lemme 1.1.21.** Soit  $(T_k)_{k \geq 1}$  une suite de fonctions dans  $L^2(\Omega)$  qui converge fortement vers  $T$  dans  $L^2(\Omega)$ . Alors, la suite  $(\mathbf{u}(T_k), p(T_k))$  converge faiblement vers  $(\mathbf{u}(T), p(T))$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  et

$$(1.128) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\nu(T_k)} \mathbf{u}(T_k) = \sqrt{\nu(T)} \mathbf{u}(T) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega)^d$$

et

$$(1.129) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p(T_k) = p(T) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

**Démonstration** Nous considérons une suite  $(T_k)_{k \geq 1}$  de fonctions dans  $L^2(\Omega)$  qui converge fortement vers  $T$  dans  $L^2(\Omega)$ . D'après (1.125) et (1.127), la norme de  $(\mathbf{u}(T_k), p(T_k))_{k \geq 1}$  dans l'espace de Hilbert  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est bornée, alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(\mathbf{u}(T_k), p(T_k))_{k \geq 1}$  qui converge faiblement vers un certain couple  $(\mathbf{u}, p)$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ . D'autre part, en raison de la forte convergence de  $(T_k)_{k \geq 1}$ , la suite  $(\nu(T_k))_{k \geq 1}$  converge vers  $\nu(T)$  presque partout dans  $\Omega$  (comme  $\nu$  est continue). Comme  $\nu(T_k) \in L^\infty(\Omega)$ , d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.1.5),  $(\nu(T_k))_{k \geq 1}$  converge fortement vers  $\nu(T)$  dans  $L^r(\Omega)$  pour  $r < \infty$ .

Nous mettons  $T_k$  à la place de  $T$  dans l'équation (1.124) et nous passons à la limite en prenant des fonctions  $\mathbf{v}$  régulières pour obtenir l'équation (1.124) avec  $T$ . Ensuite, nous aurons que  $(\mathbf{u}, p)$  est la solution de (1.124) et par la suite, nous déduisons que  $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}(T), p(T))$ .

Par la suite, d'après l'estimation (1.126), comme la norme de  $(\sqrt{\nu(T_k)} \mathbf{u}(T_k))_{k \geq 1}$  est bornée dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)^d$ , alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(\sqrt{\nu(T_k)} \mathbf{u}(T_k))_{k \geq 1}$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{z}$  dans  $L^2(\Omega)^d$ . Montrons alors que  $\mathbf{z} = \sqrt{\nu(T)} \mathbf{u}(T)$ .

Soit  $\vartheta \in D(\Omega)^d$ ,

$$(1.130) \quad \int_{\Omega} \sqrt{\nu(T_k(\mathbf{x}))} \mathbf{u}(T_k)(\mathbf{x}) \cdot \vartheta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(T_k)(\mathbf{x}) \cdot (\sqrt{\nu(T_k(\mathbf{x}))} \vartheta(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $(\sqrt{\nu(T_k)} \vartheta)_{k \geq 1}$  converge fortement vers  $\sqrt{\nu(T)} \vartheta$  dans  $L^2(\Omega)^d$  et  $(\mathbf{u}(T_k))_k$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}(T)$  dans  $L^2(\Omega)^d$ , alors d'après l'unicité de la limite, nous aurons que  $\mathbf{z} = \sqrt{\nu(T)} \mathbf{u}(T)$ .

Pour démontrer la forte convergence de la suite  $(\sqrt{\nu(T_k)} \mathbf{u}(T_k))_{k \geq 1}$  vers  $\sqrt{\nu(T)} \mathbf{u}(T)$ , nous testons l'équation (1.124), en prenant  $T = T_k$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(T_k)$  et nous obtenons :

$$(1.131) \quad \|\sqrt{\nu(T_k)} \mathbf{u}(T_k)\|_{0,\Omega}^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}(T_k))_2 = (\nu(T) \mathbf{u}(T), \mathbf{u}(T_k))_2.$$

D'après la convergence faible de  $(\mathbf{u}(T_k))_{k \geq 1}$  vers  $\mathbf{u}(T)$  et comme  $\nu(T) \mathbf{u}(T) \in L^2(\Omega)^d$ , nous obtenons la convergence en norme et par la suite la convergence forte. Comme la limite

est unique, nous aurons la convergence de toute la suite.

Passons maintenant à l'étude de la pression : d'après la condition inf-sup (1.122), il existe une suite  $(\mathbf{v}_k)_k \in H_0(\text{div}, \Omega)$  et telle que :

$$(1.132) \quad \text{div } \mathbf{v}_k = p(T_k)$$

et

$$(1.133) \quad \|p(T_k)\|_{0,\Omega} \geq \beta' \|\mathbf{v}_k\|_{H(\text{div}, \Omega)}.$$

Comme la norme de la suite  $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$  est bornée dans l'espace de Hilbert  $H_0(\text{div}, \Omega)$ , alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{v}$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega)$  tel que :  $\text{div } \mathbf{v} = p(T)$ . En testant (1.124) en prenant  $T = T_k$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$ , nous obtenons :

$$(1.134) \quad \begin{aligned} \|p(T_k)\|_{0,\Omega}^2 &= -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_k)_2 + (\nu(T_k)\mathbf{u}(T_k), \mathbf{v}_k)_2 \\ &= (p(T), \text{div } \mathbf{v}_k)_2 - (\nu(T)\mathbf{u}(T), \mathbf{v}_k)_2 + (\nu(T_k)\mathbf{u}(T_k), \mathbf{v}_k)_2. \end{aligned}$$

Pour passer la limite dans le terme non linéaire, nous écrivons  $(\nu(T_k)\mathbf{u}(T_k), \mathbf{v}_k) = (\sqrt{\nu(T_k)}\mathbf{u}(T_k), \sqrt{\nu(T_k)}\mathbf{v}_k)$ . D'après les relations (1.81) et (1.133), le dernier terme est borné dans  $L^2(\Omega)^d$ , donc il existe une sous suite qui converge faiblement vers  $\mathbf{w}$  dans  $L^2(\Omega)^d$ . Par la même démonstration que ci-dessus, nous montrons que  $\mathbf{w} = \sqrt{\nu(T)}\mathbf{v}$ . Finalement, nous aurons que :

$$(1.135) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|p(T_k)\|_{0,\Omega}^2 = \|p(T)\|_{0,\Omega}^2$$

et la convergence forte de toute la suite  $(p(T_k))_{k \geq 1}$ . □

Montrons maintenant l'existence de la solution de  $(V_1)$ . Pour cela, nous proposons de construire une solution de (1.123) en utilisant la méthode de Galerkin. Comme  $H^2(\Omega)$  est séparable, il en est de même pour son sous-espace fermé  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  qui admet une base dénombrable  $(\theta_i)_{i \geq 1}$ . Soit  $\Theta_m$  l'espace engendré par  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq m}$ . Alors le problème (1.123) est discrétisé dans  $\Theta_m$  par le système carré d'équations non-linéaires :

$$(1.136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } T_m = \sum_{1 \leq i \leq m} w_i \theta_i \in \Theta_m \text{ tel que :} \\ \forall 1 \leq i \leq m, \int_{\Omega} \alpha \nabla T_m(\mathbf{x}) \cdot \nabla \theta_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T_m) \cdot \nabla T_m)(\mathbf{x}) \theta_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \theta_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

où le couple  $(\mathbf{u}(T_m), p(T_m))$  est la solution de l'équation (1.124) avec  $T = T_m$ . Pour un  $T_m \in \Theta_m$  nous introduisons la fonction  $\phi(T_m) \in \Theta_m$  de la manière suivante :

$$(1.137) \quad \forall S_m \in \Theta_m, (\nabla \phi(T_m), \nabla S_m)_2 = \alpha (\nabla T_m, \nabla S_m)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T_m) \cdot \nabla T_m)(\mathbf{x}) S_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - (g, S_m)_2.$$

D'une part, (1.137) définit une application de  $\Theta_m$  dans lui même et nous pouvons très facilement dériver sa continuité grâce à la dimension finie et la continuité prouvée dans le Lemme 1.1.21. D'autre part, la formule de Green (applicable à cause de la régularité des fonctions de base) nous donne :

$$(1.138) \quad (\nabla\phi(T_m), \nabla T_m)_2 = \alpha|T_m|_{1,\Omega}^2 - (g, T_m)_2 \geq |T_m|_{1,\Omega}(\alpha|T_m|_{1,\Omega} - S_2^0\|g\|_{0,\Omega}).$$

Par conséquent, le théorème de point fixe de Brouwer nous donne immédiatement le résultat suivant :

**Lemme 1.1.22.** *Le problème discret (1.136) admet au moins une solution  $T_m \in \Theta_m$  et cette solution vérifie l'estimation suivante :*

$$(1.139) \quad |T_m|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0}{\alpha}\|g\|_{0,\Omega},$$

où  $S_2^0$  est la constante de la continuité de l'inégalité de Poincaré.

**Théorème 1.1.23.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ , le problème (1.123) admet au moins une solution  $T \in H_0^1(\Omega)$  et de plus cette solution vérifie l'estimation (1.139).*

**Démonstration** Pour simplifier la discussion, la démonstration est illustrée pour  $d = 3$ , elle est plus simple pour  $d = 2$ . D'après l'estimation (1.139), nous pouvons déduire qu'il existe une sous-suite notée aussi  $(T_m)_m$  qui converge faiblement vers  $T$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Donc, d'après la Proposition 1.1.3,  $(T_m)_m$  converge fortement vers  $T$  dans  $L^r(\Omega)$ ,  $r < 6$ . Par la suite, d'après le Lemme 1.1.21, nous aurons que  $(\mathbf{u}(T_m), p(T_m))$  converge faiblement vers  $(\mathbf{u}(T), p(T))$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ ,  $(\sqrt{\nu(T_m)}\mathbf{u}(T_m))_m$  converge fortement vers  $\sqrt{\nu(T)}\mathbf{u}(T)$  dans  $L^2(\Omega)^3$  et  $(p(T_m))_m$  converge fortement vers  $p(T)$  dans  $L^2(\Omega)$ . Nous fixons l'indice  $i$  dans l'équation (1.136) et faisons tendre  $m$  tend vers l'infini.

Comme la suite  $(T_m)_m$  converge faiblement vers  $T$  dans  $H_0^1(\Omega)$  alors  $(\nabla T_m)_m$  converge faiblement vers  $\nabla T$  dans  $L^2(\Omega)^3$ . Par la suite, le terme  $\alpha(\nabla T_m, \nabla\theta_i)_2$  tend vers  $\alpha(\nabla T, \nabla\theta_i)_2$ . Pour passer à la limite pour le terme non-linéaire, nous appliquons la formule de Green (applicable à cause de la régularité des fonctions de base) et nous écrivons :

$$(1.140) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T_m) \cdot \nabla T_m)(\mathbf{x}) \theta_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T_m) \cdot \nabla \theta_i)(\mathbf{x}) T_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

La convergence forte de  $(T_m)_m$  dans  $L^4(\Omega)$  et le fait que  $\nabla\theta_i \in L^4(\Omega)^3$  implique que  $(T_m \nabla\theta_i)_m$  converge fortement vers  $T \nabla\theta_i$  dans  $L^2(\Omega)^3$ . Et nous avons de plus que  $(\mathbf{u}(T_m))_m$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}(T)$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , ces deux convergences aboutissent à

$$(1.141) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T_m) \cdot \nabla T_m)(\mathbf{x}) \theta_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T) \cdot \nabla \theta_i)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par conséquent la limite des fonctions satisfait pour tout  $i \geq 1$ ,

$$(1.142) \quad \alpha(\nabla T, \nabla\theta_i)_2 - \int_{\Omega} (\mathbf{u}(T) \cdot \nabla \theta_i)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, \theta_i)_2.$$



A partir de ce système et de la densité des bases dans  $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ , nous obtenons au sens des distributions :

$$(1.143) \quad -\alpha \Delta T + \mathbf{u}(T) \cdot \nabla T = g.$$

En prenant la dualité avec  $S \in H_0^1(\Omega)$ , nous récupérons :

$$(1.144) \quad \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u}(T) \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En particulier, l'équation (1.144) est vérifiée pour  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . □

Par la suite, nous démontrons l'unicité globale de la solution du problème  $(V_1)$  pour une certaine régularité et pour des petites données.

**Théorème 1.1.24.** *Soit  $d = 3$ . Nous supposons que  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  (Définition 1.1.7) et que la solution de  $(V_1)$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  est telle que  $T \in L^\infty(\Omega)$ ,  $u(T) \in L^3(\Omega)^3$  et*

$$(1.145) \quad \lambda S_6^0(\|\mathbf{u}\|_3 \|T\|_\infty) < \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Alors la solution du problème  $(V_1)$  est unique.

**Démonstration** Soit  $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1)$  et  $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2)$  deux solutions de  $(V_1)$ . Nous posons :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ ,  $p = p_1 - p_2$  et  $T = T_1 - T_2$ . La preuve se fait en plusieurs étapes :

a) Pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , nous avons

$$(1.146) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.147) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T_2)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}_2$  dans le deuxième terme du membre de gauche de l'égalité (1.146) et nous retranchons (1.146) de (1.147). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.148) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous appliquons la formule de Green au premier terme du membre de droite de l'équation (1.148) (applicable comme  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ),

$$(1.149) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) T_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et nous testons (1.148) avec  $S = \tau_k(T)$ . Par la suite, en se référant à la démonstration du Théorème 1.1.14 formules (1.52) et (1.53), nous aurons :

$$(1.150) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) \tau_k(T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Par conséquent,

$$(1.151) \quad \alpha |\tau_k(T)|_{1,\Omega} \leq \|T_1\|_{\infty} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}.$$

En raison de la convergence forte de  $(\tau_k(T))_k$  vers  $T$  quand  $k$  tend vers l'infini, nous obtenons :

$$(1.152) \quad \alpha |T|_{1,\Omega} \leq \|T_1\|_{\infty} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}.$$

b) Pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  à divergence nulle, nous avons

$$(1.153) \quad \int_{\Omega} \nu(T_1(\mathbf{x})) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.154) \quad \int_{\Omega} \nu(T_2(\mathbf{x})) \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , nous retranchons l'équation (1.154) de (1.153) et nous obtenons :

$$(1.155) \quad \int_{\Omega} \nu(T_1(\mathbf{x})) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_2(\mathbf{x})) \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nu(T_2)$  dans le terme du membre de gauche de l'égalité (1.155). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.156) \quad \int_{\Omega} \nu(T_2(\mathbf{x})) |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nu(T_2) - \nu(T_1))(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$  alors d'après (1.81), l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ), (1.156) entraîne avec (1.152) :

$$(1.157) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} &\leq \|\nu(T_1) - \nu(T_2)\|_6 \|\mathbf{u}_1\|_3 \\ &\leq \lambda \|\mathbf{u}_1\|_3 \|T\|_6 \\ &\leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}_1\|_3 |T|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{\lambda S_6^0}{\alpha} \|\mathbf{u}_1\|_3 \|T_1\|_{\infty} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Alors l'hypothèse (1.145) entraîne que  $\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} = 0$  et par la suite  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$  et  $T_1 = T_2$ .

c) Pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$ , nous avons

$$(1.158) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_1(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.159) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_2(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.159) de (1.158) et nous obtenons, pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  :

$$(1.160) \quad \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Donc

$$(1.161) \quad \nabla p = 0 \text{ dans } D'(\Omega)^3.$$

Alors  $p$  est constant et comme  $p \in L_0^2(\Omega)$  alors la constante est égale à 0. D'où l'unicité.  $\square$

**Remarque 1.1.25.** La condition pour avoir l'unicité de la solution continue est un peu restrictive.

### 1.1.6.2 Deuxième formulation variationnelle continue

Nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.162) \quad \mathcal{V}_2 = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\}.$$

**Remarque 1.1.26.**  $\mathcal{V}_2$  s'écrit de la manière suivante :

$$(1.163) \quad \mathcal{V}_2 = \{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div } \mathbf{v} = 0\}.$$

En choisissant  $\mathbf{v} = \nabla q$  dans  $L^2(\Omega)^d$ , nous établissons La condition inf-sup continue suivante :

$$(1.164) \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \sup_{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{\int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}} \geq |q|_{1,\Omega}.$$

Par la suite, en suivant la même démarche déjà effectuée dans la partie 1.1.6.1, nous déduisons l'existence de la solution de la formulation variationnelle ( $V_2$ ) et l'unicité de la solution correspondante sous des conditions de régularité sur la solution exacte.

### 1.1.7 Régularité de la solution

Nous supposons que la solution du problème (P) existe. Nous cherchons à établir une certaine régularité pour cette solution.

Nous disons que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{D}^q$ ,  $2 < q < \infty$ , si l'équation

$$(1.165) \quad \Delta u = \operatorname{div} \mathbf{f}$$

admet une solution unique  $u$  dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$  pour tout  $\mathbf{f} \in L^q(\Omega)$  et

$$(1.166) \quad \|u\|_q \leq K_q \|\mathbf{f}\|_q,$$

où  $K_q$  est une constante indépendante de  $\mathbf{f}$ .

**Théorème 1.1.27.** *Nous supposons que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{D}^q$  et de classe  $C^{1,1}$  ou polygonal ou polyédrique convexe et que  $\mathbf{f} \in L^\infty(\Omega)^d$ . Alors la solution du problème (P) vérifie la régularité suivante :  $(u, p, T) \in (L^r(\Omega)^d, W^{1,r}(\Omega), W^{1,q}(\Omega))$ , où  $r > 2$ ,  $q < \infty$  si  $d = 2$  et  $q < 6$  si  $d = 3$ .*

**Démonstration** Nous commençons tout d'abord à écrire la première équation du problème (P) :

$$(1.167) \quad \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\nu(T)} = \frac{\mathbf{f}}{\nu(T)}.$$

Nous appliquons la divergence à l'équation précédente et comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , nous aurons alors :

$$(1.168) \quad \operatorname{div} \left( \frac{\nabla p}{\nu(T)} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{f}}{\nu(T)} \right).$$

De plus, nous avons  $\frac{1}{\nu_2} \leq \frac{1}{\nu(T)} \leq \frac{1}{\nu_1}$ . Nous notons  $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{f}}{\nu(T)}$ , donc d'après ([8] ou [26]), il existe un nombre  $r > 2$  dépendant de  $\nu_2$ , de la norme de  $\frac{1}{\nu(T)}$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , du domaine  $\Omega$  et de la dimension, tel que pour tout  $g \in L^r(\Omega)^d$ , nous avons que  $p \in W^{1,r}(\Omega)$ . Or  $\mathbf{f} \in L^\infty(\Omega)^d$ , par la suite  $\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega)^d$  en particulier dans  $L^r(\Omega)^d$  et nous aurons alors que  $p \in W^{1,r}(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in L^r(\Omega)^d$ .

Comme  $\mathbf{u} \in L^r(\Omega)^d$  et  $\nabla T \in L^2(\Omega)$ , nous aurons alors que  $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in L^s(\Omega)$  où  $s = \frac{2r}{r+2} > 1$ . Nous prenons  $s = 2$ , d'après le théorème du laplacien avec conditions aux bords du type dirichlet et comme  $\Omega$  est de classe  $C^{1,1}$  ou polygonal ou polyèdre convexe, alors nous obtenons que  $T \in H^2(\Omega)$ . Or d'après l'injection continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$  où  $q < \infty$  si  $d = 2$  et  $q < 6$  si  $d = 3$ , nous concluons que  $T \in W^{1,q}(\Omega)$ .  $\square$

## 1.2 Problème discret

Dans la suite, nous supposons que  $\Omega$  est polygonal si  $d = 2$  ou polyédrique si  $d = 3$ .

### 1.2.1 Triangulation

Pour la discrétisation, nous découpons  $\bar{\Omega}$  en un nombre fini des éléments qui sont des triangles si  $d = 2$  ou tétraèdres si  $d = 3$ , notés  $K$  fermés et nous notons par  $\tau_h = \bigcup\{K\}$  l'ensemble de ces éléments couvrant  $\bar{\Omega}$  tel que

$$(1.169) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K.$$

Nous notons  $h_K$  le diamètre de l'élément  $K$ ,  $h_e$  le diamètre de  $e$  et  $h$  le plus grand diamètre  $h_K$  du maillage (appelé paramètre du maillage).

Nous supposons que  $(\tau_h)_h$  est une famille régulière de triangulations de  $\bar{\Omega}$  [17] dans le sens suivant :

- a) L'intersection de deux éléments de  $\tau_h$  distincts est soit une arête, soit une face (si  $d = 3$ ), soit un sommet, soit vide.
- b) Soit  $\rho_K$  le rayon du cercle inscrit ou de la boule inscrite dans  $K$ . Alors, il existe une constante  $\sigma$  indépendante de  $h$  telle que

$$(1.170) \quad \max_{K \in \tau_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Nous notons  $\Delta_K$  l'union des éléments de  $\tau_h$  dont l'intersection avec  $K$  est non vide,  $\Delta_e$  l'union des éléments de  $\tau_h$  intersectent  $e$  et  $\omega_K$  les éléments partageant au moins une arête (ou une face) avec  $K$ . Nous notons  $\Gamma_h$  l'ensemble de toutes les arêtes  $e$  si  $d = 2$  ou faces  $e$  si  $d = 3$  du maillage,  $\Gamma_h^i$  l'ensemble des  $e$  qui sont contenues dans  $\Omega$  mais qui n'appartiennent pas à  $\Gamma$ ,  $\Gamma_h^b$  l'ensemble des  $e$  qui appartiennent à  $\Gamma$  et  $[\cdot]_e$  le saut sur  $e \in \varepsilon$  défini de la manière suivante :

$$(1.171) \quad [u]_e = u|_K - u|_{K'},$$

où  $K$  et  $K'$  sont les deux éléments qui ont  $e$  comme arête (ou face) commune (la précision de signe n'est pas nécessaire).

#### 1.2.1.1 Première formulation variationnelle discrète

Nous considérons la première formulation variationnelle continue  $(V_1)$  et nous proposons une formulation variationnelle discrète correspondante.

Nous choisissons de discrétiser la vitesse  $\mathbf{v}$  avec l'élément fini de Raviart-Thomas défini par l'espace discret suivant :

$$(1.172) \quad \mathcal{W}_h = \{\mathbf{v}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{v}_h|_K(\mathbf{x}) = a_K \mathbf{x} + \mathbf{o}_K, \forall K \in \tau_h\}$$

et

$$(1.173) \quad \mathcal{W}_{h,1} = \mathcal{W}_h \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega),$$

où  $a_K$  est une constante et  $\mathbf{o}_K$  est un vecteur constant. Les degrés de liberté de l'espace  $\mathcal{W}_{h,1}$  sont les flux des composantes normales sur les arêtes (ou faces) du maillage notées  $\mathbf{v}_h|_e = \int_e \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  et la base de  $\mathcal{W}_{h,1}$  est formée des fonctions  $\mathbf{v}_e \in \mathcal{W}_{h,1}$  avec  $e \in \Gamma_h$  de la manière suivante, pour tout  $f \in \mathcal{A}_h$

$$(1.174) \quad \int_f \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } f = e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc tout élément de  $\mathcal{W}_{h,1}$  s'écrit de la façon suivante :

$$(1.175) \quad \mathbf{v}_h = \sum_{e \in \mathcal{A}_h} \mathbf{v}_h|_e \mathbf{v}_e.$$

Soit  $\mathcal{X}_K$  la fonction caractéristique de  $K$ ,

$$(1.176) \quad \mathcal{X}_K(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous choisissons de discrétiser  $p$  avec l'élément fini  $P_0$ . Nous notons  $M_{h,1}$  l'espace discret correspondant :

$$(1.177) \quad M_h = \{q_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \tau_h, q_h|_K \text{ est constant}\}$$

et

$$(1.178) \quad M_{h,1} = M_h \cap L_0^2(\Omega).$$

Les degrés de liberté de l'espace  $M_{h,1}$  sont les valeurs moyennes sur les triangles (ou tétraèdres) notées  $q_K$  et la base de  $M_{h,1}$  est formée par les  $\mathcal{X}_K$ .

Donc tout élément de  $M_{h,1}$  s'écrit de la façon suivante :

$$(1.179) \quad q_h = \sum_{K \in \tau_h} q_K \mathcal{X}_K.$$

Soit  $S$  l'ensemble des sommets des éléments de  $\tau_h$  appelés sommets du maillage,  $S^i$  l'ensemble des sommets intérieurs et  $S^b$  l'ensemble des sommets du bord. Nous notons les sommets du maillage par  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, S$ .

Nous choisissons de discrétiser  $T$  avec l'élément fini de Lagrange de degré 1. Nous notons  $X_h$  l'espace discret correspondant :

$$(1.180) \quad Z_h = \{S_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \tau_h, S_h|_K \in \mathbb{P}_1\}$$

et

$$(1.181) \quad X_h = Z_h \cap H_0^1(\Omega).$$

Les degrés de liberté de l'espace  $X_h$  sont les valeurs aux sommets de  $S$  et la base de  $X_h$  est formée par les fonctions  $\phi_i \in X_h$ , associée au sommet  $s_i$  du maillage défini de la manière suivante :

$$(1.182) \quad \phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} = s_i, \\ 0 & \mathbf{x} = s_j (j \neq i). \end{cases}$$

Donc tout élément de  $X_h$  s'écrit de la façon suivante :

$$(1.183) \quad S_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^S S_h(s_i) \phi_i(\mathbf{x}).$$

Nous introduisons l'opérateur d'interpolation  $\xi_h^1$  [34], donné par :

$$(1.184) \quad \xi_h^1 : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{W}_h \quad \text{et} \quad \xi_h^1 : H^1(\Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \longrightarrow \mathcal{W}_{h,1},$$

tel que :

$$(1.185) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \text{div}(\xi_h^1 \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d.$$

**Proposition 1.2.1.** *Nous avons la majoration suivante :*

$$(1.186) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad \|\mathbf{v} - \xi_h^1 \mathbf{v}\|_{0,K} \leq C_1 h |\mathbf{v}|_{1,K}$$

et

$$(1.187) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \text{ avec } \text{div } \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \|\text{div}(\mathbf{v} - \xi_h^1 \mathbf{v})\|_{0,K} \leq C_2 h |\text{div } \mathbf{v}|_{1,K},$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes indépendantes de  $h$ .

Nous introduisons l'opérateur  $\rho_h$ , donné par :

$$(1.188) \quad \rho_h : L^2(\Omega) \longrightarrow M_h \quad \text{et} \quad \rho_h : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_{h,1},$$

tel que :

$$(1.189) \quad \rho_h q|_K = \frac{1}{|K|} \int_K q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \tau_h.$$

**Proposition 1.2.2.** *Nous avons la majoration suivante :*

$$(1.190) \quad \forall q \in H^1(\Omega), \quad \|q - \rho_h q\|_{0,K} \leq C h |q|_{1,K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Nous définissons l'opérateur d'approximation linéaire et continu  $R_h$ , (si  $d = 2$ , voir [9] ou [18]; si  $d = 3$ , voir [35]), comme étant :

$$(1.191) \quad R_h : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow Z_h \quad \text{et} \quad R_h : W^{1,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow X_h,$$

où  $p$  est un nombre supérieur ou égal à 2.

**Proposition 1.2.3.** *Nous avons les majorations suivantes :*

$$(1.192) \quad \forall S \in W^{l+1,p}(\Omega), \quad |S - R_h S|_{W^{m,p}(K)} \leq C h_K^{l+1-m} |S|_{W^{l+1,p}(\Delta_K)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  avec  $m = 0, 1$  et  $l = 0, 1$ .

Nous introduisons la première formulation variationnelle discrète suivante :

$$(V_{h,1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}, \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,1}, \quad \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

D'après [34], nous rappelons la condition inf-sup discrète pour une constante positive  $\beta_1$  :

$$(1.193) \quad \forall q_h \in M_{h,1}, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta_1 \|q_h\|_{0,\Omega}.$$

### 1.2.1.2 Deuxième et troisième formulations variationnelles discrètes

Nous considérons la deuxième formulation variationnelle continue ( $V_2$ ) et nous proposons deux formulations variationnelles discrètes correspondantes.



Nous choisissons de discrétiser la vitesse  $\mathbf{v}$  avec l'élément fini " $P_1$ +bulle" aussi appelé élément mini et nous introduisons par l'espace discret suivant :

$$(1.194) \quad \mathcal{W}_{h,2} = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^d; \forall K \in \tau_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}(K)^d\},$$

avec

$$(1.195) \quad \mathcal{P}(K) = \mathbb{P}_1 \oplus Vect\{b_K\},$$

où  $b_K$  est le produit des  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, d+1$  avec  $\lambda_i$  sont les coordonnées barycentriques du l'élément  $K$ . Les degrés de liberté de l'espace  $\mathcal{W}_{h,2}$  sont les valeurs sur les sommets et les centres des triangles (ou tétraèdres).

Donc tout élément de  $\mathcal{W}_{h,2}$  s'écrit de la façon suivante :

$$(1.196) \quad \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^S \mathbf{v}_h(s_i) \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{K \in \tau_h} \mathbf{f}_K b_K(\mathbf{x}),$$

où

$$(1.197) \quad \mathbf{f}_K = 27\mathbf{v}_h(c) - 9(\mathbf{v}_h(s_1) + \mathbf{v}_h(s_2) + \mathbf{v}_h(s_3))$$

avec  $c$  est le milieu de l'élément  $K$  et  $s_i$ , pour  $i = 1, \dots, 3$ , sont les sommets associés à  $K$ .

Nous choisissons de discrétiser  $p$  avec l'élément fini de Lagrange de degré 1. Nous notons  $M_{h,2}$  l'espace discret correspondant :

$$(1.198) \quad M_{h,2} = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega); \forall K \in \tau_h, q_h|_K \in \mathbb{P}_1\}.$$

Les degrés de liberté de l'espace  $M_{h,2}$  sont les valeurs aux sommets des triangles (ou tétraèdres).

Donc tout élément de  $M_{h,2}$  s'écrit de la façon suivante :

$$(1.199) \quad q_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^S q_h(s_i) \phi_i(\mathbf{x}).$$

Nous choisissons de discrétiser  $T$  avec le même élément fini déjà défini dans la première discrétisation.

Nous introduisons l'opérateur  $\mathcal{F}_h$ , donné par :

$$(1.200) \quad \mathcal{F}_h : L^2(\Omega)^d \longrightarrow \mathcal{W}_{h,2},$$

où

$$(1.201) \quad \mathcal{F}_h \mathbf{v} = \pi_h \mathbf{v} + \sum_{K \in \tau_h} \alpha_K b_K$$

avec  $\pi_h$  l'opérateur de Scott-Zhang défini dans ([4] ou [5] ou [21] ou [35]),

$$(1.202) \quad \alpha_K = \frac{1}{\int_K b_K(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \int_K (\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

**Proposition 1.2.4.** *Nous avons la majoration suivante :*

$$(1.203) \quad \forall \mathbf{v} \in H^l(\Omega)^d, \quad |\mathbf{v} - \mathcal{F}_h \mathbf{v}|_{m,K} \leq C h^{l-m} |\mathbf{v}|_{l,\Delta_K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ ,  $m$  et  $l$  sont des entiers tel que :  $m = 0, 1$  et  $0 \leq m \leq l \leq 2$ .

**Démonstration** Nous illustrons la démonstration pour  $m = 1$ , elle est plus simple pour  $m = 0$ . Nous avons,

$$(1.204) \quad |\mathbf{v} - \mathcal{F}_h \mathbf{v}|_{1,K} \leq |\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}|_{1,K} + |\alpha_K| |b_K|_{1,K}.$$

Nous utilisons l'élément de référence pour calculer  $|\alpha_K|$  et  $|b_K|_{1,K}$ . Commençons tout d'abord par calculer  $|\alpha_K|$  :

$$(1.205) \quad |\alpha_K| = \frac{|\hat{K}|}{|K| \int_{\hat{K}} \hat{b}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \left| \int_K (\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right|.$$

Or,

$$(1.206) \quad \left| \int_K (\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq |K|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_{0,K}.$$

Par la suite,

$$(1.207) \quad |b_K|_{1,K} \leq \frac{|K|^{\frac{1}{2}}}{|\hat{K}|^{\frac{1}{2}}} \|J_K^{-1}\| |\hat{b}_K|_{1,K},$$

où  $J_K$  est la matrice jacobienne associée à  $K$  qui vérifie la relation suivante :

$$(1.208) \quad \|J_K^{-1}\| \leq \frac{C}{\rho_K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons finalement :

$$(1.209) \quad |\alpha_K| |b_K|_{1,K} \leq \frac{C_1}{\rho_K} \|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_{0,K},$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $h$ . Comme la triangulation est régulière et en utilisant l'estimation de l'opérateur de Scott-Zhang ([4] ou [5] ou [21] ou [35]), nous concluons.  $\square$

Nous introduisons l'opérateur  $r_h$  [1], donné par :

$$(1.210) \quad r_h : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_{h,2}.$$

**Proposition 1.2.5.** *Nous avons la majoration suivante, pour tout s nombre compris entre 1 et 2 :*

$$(1.211) \quad \forall q \in H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \|q - r_h q\|_{m,K} \leq C h^{s-m} |q|_{s,K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et  $m = 0, 1$ .

Nous introduisons les deuxième et troisième formulations variationnelles discrètes suivantes :

$$(V_{h,2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{array} \right.$$

et

$$(V_{h,3}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}, \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,2}, \quad \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Pour pouvoir établir la condition inf-sup discrète, nous utilisons le lemme de Fortin. Comme la condition inf-sup continue est vérifiée, donc il suffit de trouver un opérateur linéaire et continu noté  $A$  de  $L^2(\Omega)^d$  dans  $\mathcal{W}_{h,2}$  qui vérifie les deux conditions citées ci-dessous pour pouvoir appliquer le lemme de Fortin et par la suite obtenir la condition inf-sup discrète : pour tout  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$  et  $q_h \in M_{h,2}$ ,

$$(1.212) \quad \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{v} - \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

et

$$(1.213) \quad \|A\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . Comme l'opérateur  $\mathcal{F}_h$  vérifie la première condition (d'après le choix de  $\alpha_K$ ) donc nous prenons  $A = \mathcal{F}_h$  et nous essayons de montrer maintenant la stabilité. Or,

$$(1.214) \quad \|\mathcal{F}_h\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq \|\mathcal{F}_h\mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

D'après la Proposition 1.2.4, nous concluons. Nous obtenons ainsi que pour une constante positive  $\beta_2$ , nous avons :

$$(1.215) \quad \forall q_h \in M_{h,2}, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}} \frac{\int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}} \geq \beta_2 |q_h|_{1,\Omega}.$$

### 1.2.1.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

Nous introduisons de nouveau pour la première formulation variationnelle continue ( $V_1$ ) une formulation variationnelle discrète.

Nous choisissons de discrétiser la vitesse  $\mathbf{v}$  avec l'élément fini " $P_1$ +bulle" et nous introduisons l'espace discret suivant :

$$(1.216) \quad \mathcal{W}_{h,4} = \mathcal{W}_{h,2} \cap H_0(\text{div}, \Omega).$$

**Remarque 1.2.6.** Avec ce choix d'espace, la trace normale de la vitesse est nulle au bord. Ce choix n'est pas bien adapté lorsque le domaine  $\Omega$  possède une frontière courbe car dans ce cas, l'approximation de cette dernière induit un nombre de coins assez grand qui tend vers l'infini et à la limite la fonction sera nulle au bord (pas seulement sa trace normale). Nous supposons que  $\Omega$  contient un nombre fini de coins. Pour remédier cet inconvénient, nous pouvons par exemple, prendre la normale moyenne sur chaque coin. Mais il est possible de modifier la discrétisation pour imposer cette condition (trace normale nulle) de manière faible ou d'utiliser la méthode de pénalisation ou de Lagrange. C'est un travail supplémentaire qui peut être la suite de mon travail de recherche après ma thèse.

Nous choisissons de discrétiser  $p$  avec le même élément fini déjà défini dans la deuxième et la troisième discrétisations.

La température  $T$  sera discrétisée avec le même élément fini déjà défini dans la première discrétisation.

Nous considérons l'opérateur d'approximation  $\mathcal{F}_h$  déjà défini dans la deuxième et la troisième discrétisations pour la vitesse et nous pouvons facilement vérifier que si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  alors  $\mathcal{F}_h\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Nous introduisons la quatrième formulation variationnelle discrète suivante :

$$(V_{h,4}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,4} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}, \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \quad - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \quad \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

où  $\gamma$  est une constante positive à choisir.

La démarche suivante considère à obtenir la condition inf-sup discrète pour la paire d'espaces  $(\mathcal{W}_{h,4}, M_{h,2})$ . Or, pour tout  $q_h \in M_{h,2}$ , nous avons :

$$(1.217) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq C \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega}},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . En appliquant le lemme de Fortin avec l'opérateur  $\mathcal{F}_h$ , nous obtenons le résultat voulu. Pour une constante positive  $\beta_4$ , nous avons :

$$(1.218) \quad \forall q_h \in M_{h,2}, \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta_4 \|q_h\|_{0, \Omega}.$$

## 1.2.2 Existence et unicité de la solution discrète de chaque schéma

Nous allons démontrer dans cette partie l'existence des solutions discrètes de la première, la troisième et la quatrième formulations variationnelles. Nous ne pouvons pas démontrer l'existence globale de la solution discrète de la deuxième formulation variationnelle car nous n'avons pas d'estimations *a priori* pour la température discrète  $T_h$  mais nous pouvons démontrer en utilisant le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [14], l'existence et l'unicité locale de cette solution en restant dans un petit voisinage dont le rayon dépend de  $h$ , de la solution exacte. Nous démontrons par la suite l'unicité des solutions discrètes associées aux première, troisième et quatrième formulations variationnelles sous des conditions sur les données et en remarquant que les solutions discrètes vérifient la régularité suivante :  $(\mathbf{u}_h, T_h) \in L^\infty(\Omega)^d \times W^{1, \infty}(\Omega)$ .

### 1.2.2.1 Première formulation variationnelle discrète

Nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.219) \quad \mathcal{V}_{h,1} = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}; \forall q_h \in M_{h,1}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) dx = 0\}.$$

**Remarque 1.2.7.**  $\mathcal{V}_{h,1}$  s'écrit de la manière suivante :

$$(1.220) \quad \mathcal{V}_{h,1} = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}; \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0\}.$$

En effet, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,1}$  et pour tout  $K \in \tau_h$

$$(1.221) \quad \mathbf{v}_h|_K(\mathbf{x}) = a_K \mathbf{x} + \mathbf{o}_K.$$

Par la suite,

$$(1.222) \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_h|_K(\mathbf{x}) = da_K \quad \forall K \in \tau_h.$$

De plus, comme  $\mathbf{v}_h \in H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ , nous aurons :

$$(1.223) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Alors,  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h \in M_{h,1}$  et nous obtenons que  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$  dans  $L^2(\Omega)$ . □

Nous avons pour tout  $q_h \in M_{h,1}$  :

$$(1.224) \quad \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Donc  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_{h,1}$  et par la suite  $\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0$ .

**Théorème 1.2.8.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , la formulation variationnelle  $(V_{h,1})$  admet au moins une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.225) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu_1},$$

$$(1.226) \quad \|p_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_1} \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

et

$$(1.227) \quad |T_h|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}}{\alpha},$$

où  $\beta_1$  est la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** En suivant la même démarche de la Section 1.1.6, nous montrons l'existence de la solution de  $(V_{h,1})$ . Tout d'abord,  $(V_{h,1})$  devient équivalente à la formulation variationnelle suivante : Chercher  $T_h \in X_h$  tel que :

$$(1.228) \quad \forall S_h \in X_h, \quad \alpha(\nabla T_h, \nabla S_h)_2 + (\mathbf{u}_h(T_h) \cdot \nabla T_h, S_h)_2 = (g, S_h)_2,$$

où  $(\mathbf{u}_h(T_h), p_h(T_h))$  est la solution de : Chercher  $(\mathbf{u}_h(T_h), p_h(T_h)) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1}$  tel que

$$(1.229) \quad \begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}, \quad (\nu(T_h)\mathbf{u}_h(T_h), \mathbf{v}_h)_2 - (p_h(T_h), \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_2 &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ \forall q_h \in M_{h,1}, \quad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h(T_h))_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour un  $T_h \in X_h$  donné, le problème (1.229) est un système linéaire carré fini. Donc, pour démontrer l'existence de la solution  $(\mathbf{u}_h(T_h), p_h(T_h))$ , il suffit de démontrer l'unicité qu'on peut la déduire grâce à la condition inf-sup discrète (1.193). En prenant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h(T_h)$ , nous aurons l'estimation de la vitesse. Tandis que pour la pression, nous utilisons le théorème de Babuška-Brezzi (Théorème 1.1.2). Comme  $p_h \in M_{h,1}$ , il existe un  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,1}^\perp$  unique et tel que : pour tout  $q_h \in M_{h,1}$

$$(1.230) \quad (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h)_2 = (p_h, q_h)_2$$

et

$$(1.231) \quad \|p_h\|_{0,\Omega} \geq \beta_1 \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}.$$

D'où, en prenant  $q_h = p_h$ , nous déduisons l'estimation de la pression. En suivant la même démarche du Lemme 1.1.22, nous montrons l'existence de la solution  $T_h$  qui vérifie l'estimation suivante :

$$(1.232) \quad |T_h|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0}{\alpha} \|g\|_{0,\Omega}.$$

□

**Théorème 1.2.9.** *Soit  $d = 3$ . Nous supposons que  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  et que la solution de  $(V_{h,1})$ ,  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  vérifie la condition suivante :*

$$(1.233) \quad \lambda S_6^0 (\|\mathbf{u}_h\|_3 \|T_h\|_\infty) < \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Alors la solution du problème  $(V_{h,1})$  est unique.

**Démonstration** En suivant la même démarche effectuée au Théorème 1.1.24, nous démontrons l'unicité de la solution discrète de la première formulation variationnelle discrète sous une condition de petites données (1.233). □

### 1.2.2.2 Troisième formulation variationnelle discrète

Nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.234) \quad \mathcal{V}_{h,2} = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}; \forall q_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) dx = 0\}.$$

**Théorème 1.2.10.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , la formulation variationnelle  $(V_{h,3})$  admet au moins une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.235) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu_1},$$

$$(1.236) \quad |p_h|_{1,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_2} \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_2} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

et

$$(1.237) \quad |T_h|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}}{\alpha},$$

où  $\beta_2$  est la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** Nous suivons la même démarche du Théorème 1.2.8. □

Comme la divergence de la solution discrète associée au troisième formulation variationnelle discrète n'est pas nulle alors la condition pour avoir l'unicité est un peu plus restrictive.

**Théorème 1.2.11.** *Soit  $d = 3$ . Nous supposons que  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  et que la solution de  $(V_{h,3})$ ,  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  vérifie la condition suivante :*

$$(1.238) \quad \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}_h\|_3 (\|T_h\|_{\infty} + S_6^0 |T_h|_{W^{1,3}(\Omega)}) < 2\alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Alors la solution du problème  $(V_{h,3})$  est unique.

**Démonstration** Nous considérons deux solutions  $(\mathbf{u}_{h,1}, T_{h,1})$  et  $(\mathbf{u}_{h,2}, T_{h,2})$  du problème  $(V_{h,3})$  et nous notons la différence de la vitesse et de la température par  $\mathbf{u}_h$  et  $T_h$ . D'une part, comme l'équation de la vitesse est la même pour les deux discrétisations,  $\mathbf{u}_h$  satisfait alors l'équation suivante :

$$(1.239) \quad \nu_1 \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}_{h,1}\|_3 |T_h|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, la différence de l'équation de la température avec  $S_h = T_h$ , est la suivante :

$$(1.240) \quad \alpha |T_h|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_{h,1}, T_h) - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h, T_{h,1})) = 0.$$

En utilisant l'estimation de  $\|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$  et la condition (1.238), nous déduisons l'unicité. □



### 1.2.2.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

Nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.241) \quad \mathcal{V}_{h,4} = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}; \forall q_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) dx = 0\}.$$

**Théorème 1.2.12.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , la formulation variationnelle  $(V_{h,4})$  admet au moins une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in \mathcal{W}_{h,4} \times M_{h,2} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.242) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\min(\nu_1, \gamma)},$$

$$(1.243) \quad \|p_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\nu_2 + \gamma}{\beta_4} \|\mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \frac{1}{\beta_4} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

et

$$(1.244) \quad |T_h|_{1,\Omega} \leq \frac{2S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}}{\alpha}.$$

où  $\beta_4$  est la constante de la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** Nous divisons la preuve en deux parties :

- a) Pour un  $T_h$  donné, les deux premières équations du système de Darcy de  $(V_{h,4})$  constituent un système linéaire carré fini qui admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h(T_h), p_h(T_h))$ .
- b) Nous définissons la fonction  $\phi_4$  de  $X_h$  dans  $X_h$  de la manière suivante :

$$(1.245) \quad \begin{aligned} (\phi_4(T_h), S_h)_2 &= \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h(T_h) \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'après [21], nous avons que :

$$(1.246) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(T_h)(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C h^r \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h(T_h)\|_{0,\Omega} |T_h|_{1,\Omega}^2,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et  $r = 1 - \kappa$ , où  $\kappa$  est une constante très petite positive si  $d = 2$  et  $r = \frac{1}{2}$  si  $d = 3$ . De plus, en prenant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$  dans l'équation de Darcy de  $(V_{h,4})$  et en se basant sur le fait que :

$$(1.247) \quad \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{4\nu_1} + \nu_1 \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2,$$

nous obtenons que :

$$(1.248) \quad \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h(T_h)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{2\sqrt{\nu_1\gamma}} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

D'après la propriété d'antisymétrie, nous aurons :

$$(1.249) \quad \begin{aligned} (\phi_4(T_h), T_h)_2 &\geq \left(\alpha - \frac{C h^r}{4\sqrt{\nu_1\gamma}} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\right) |T_h|_{1,\Omega}^2 \\ &\quad - S_2^0 \|g\|_{0,\Omega} |T_h|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

Nous posons  $h_0 = \left(\frac{2\alpha\sqrt{\nu_1\gamma}}{C\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}\right)^{\frac{1}{r}}$  et  $\theta_0 = \alpha - \frac{C h_0^r}{4\sqrt{\nu_1\gamma}} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} = \frac{\alpha}{2}$ . Par la suite, pour  $h < h_0$ ,

$$(1.250) \quad (\phi_4(T_h), T_h)_2 \geq |T_h|_{1,\Omega} \left(\frac{\alpha}{2} |T_h|_{1,\Omega} - S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}\right).$$

Nous appliquons le théorème de point fixe de Brouwer (Théorème 1.1.1) en considérant

$$(1.251) \quad \mu = |T_h|_{1,\Omega} = \frac{2 S_2^0}{\alpha} \|g\|_{0,\Omega}.$$

$\mathcal{V}_{h,4}$  est un espace de Hilbert pour la norme  $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ . D'après le Théorème 1.1.1, il existe au moins un  $T_h$  qui satisfait :

$$(1.252) \quad \forall S_h \in X_h, (\phi_4(T_h), S_h)_2 = 0$$

et

$$(1.253) \quad |T_h|_{1,\Omega} \leq \mu.$$

□

Puisque la divergence de la solution discrète correspondante à la quatrième formulation variationnelle n'est pas nulle, pour pouvoir démontrer l'unicité, nous suivons la démarche du Théorème 1.1.24, mais en se basant sur l'estimation (1.246). Nous aurons alors le théorème suivant :

**Théorème 1.2.13.** *Soit  $d = 3$ . Nous supposons que  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  et que la solution de  $(V_{h,4})$ ,  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  vérifie la condition suivante :*

$$(1.254) \quad \lambda S_6^0 (\|\mathbf{u}_h\|_3 \|T_h\|_\infty) < \frac{\alpha \min(\nu_1, \gamma)}{2},$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Alors la solution du problème  $(V_{h,4})$  est unique.

### 1.2.3 Convergence vers la solution continue

Nous allons démontrer dans cette partie que les solutions discrètes de  $(V_{h,1})$  et  $(V_{h,3})$  admettent des sous-suites qui convergent vers les solutions continues de  $(V_1)$  et  $(V_2)$ .

#### 1.2.3.1 Première formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.2.14.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , il existe une sous-suite de la solution discrète du problème  $(V_{h,1})$  notée aussi  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui converge faiblement vers la solution continue du problème  $(V_1)$ .*

**Démonstration** Soit  $d = 3$ , la première formulation variationnelle  $(V_{h,1})$  admet une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui est bornée. Comme la norme de  $(\mathbf{u}_h, p_h)_h$  dans l'espace de Hilbert  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est bornée, alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(\mathbf{u}_h, p_h)_h$  qui converge faiblement vers une limite  $(\mathbf{u}, p)$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ . De plus, la norme de  $(T_h)_h$  dans l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  est bornée, alors nous pouvons de même extraire une sous-suite notée aussi  $(T_h)_h$  qui converge faiblement vers une limite  $T$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Donc, d'après la Proposition 1.1.3,  $(T_h)_h$  converge fortement vers  $T$  dans  $L^r(\Omega)$ ,  $r < 6$ .

Nous effectuons la démonstration en trois étapes :

- a) Notre premier but est de démontrer que, pour tout  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$ , nous avons :

$$(1.255) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x})\text{div} \, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $D(\Omega)^3$  est dense dans  $H_0(\text{div}, \Omega)$ , alors nous considérons un  $\mathbf{v} \in D(\Omega)^3$ . Soit  $\mathbf{v}_h = \xi_h^1 \mathbf{v} \in \mathcal{W}_{h,1}$ , alors il vérifie d'après  $(V_{h,1})$  l'équation suivante :

$$(1.256) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x}))\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x})\text{div} \, \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\mathbf{v}$  dans le premier terme du membre de gauche de l'égalité (1.256). Nous posons :

$$(1.257) \quad I_1 = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x}))\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.258) \quad I_2 = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x}))\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

D'après l'équation (1.81) et comme  $(\mathbf{u}_h)_h$  est bornée dans  $H_0(\text{div}, \Omega)$  et  $(\mathbf{v}_h)_h$  converge fortement vers  $\mathbf{v}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , d'après l'équation (1.186), alors  $I_1$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

Nous savons de plus que  $(\nu(T_h))_h$  converge fortement vers  $\nu(T)$  dans  $L^r(\Omega)$ , pour  $r < \infty$  et que  $(\mathbf{u}_h)_h$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega)$ . Finalement, nous aurons :

$$(1.259) \quad I_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme la suite  $(\mathbf{v}_h)_h$  converge fortement vers  $\mathbf{v}$  dans  $H(\text{div}, \Omega)$ , d'après l'équation (1.186) et (1.187) et comme  $(p_h)_h$  converge faiblement vers  $p$  dans  $L_0^2(\Omega)$  alors les termes  $(p_h, \text{div } \mathbf{v}_h)_2$  et  $(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2$  tendent vers  $(p, \text{div } \mathbf{v})_2$  et  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})_2$ .

b) D'une part,  $(\mathbf{u}_h)_h$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $H_0(\text{div}, \Omega)$  donc dans  $D'(\Omega)^3$  et par la suite,

$$(1.260) \quad \text{div } \mathbf{u}_h \longrightarrow \text{div } \mathbf{u} \text{ dans } D'(\Omega).$$

De plus, nous avons que  $(\text{div } \mathbf{u}_h)_h$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ . Nous déduisons que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $L^2(\Omega)$  et par la suite pour tout  $q \in L_0^2(\Omega)$ ,

$$(1.261) \quad \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

c) Notre but est de démontrer que, pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.262) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous allons démontrer que cette équation est vérifiée pour tous les  $S \in H_0^1(\Omega)$ , donc en particulier pour les  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Comme  $D(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors nous considérons un  $S \in D(\Omega)$ . Soit  $S_h = R_h S \in X_h$  avec  $p = 4, m = 1$  et  $l = 1$ , alors il vérifie l'équation suivante :

$$(1.263) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En suivant la même démarche du Théorème 1.1.23, nous aurons le résultat voulu. Nous déduisons que  $(\mathbf{u}, p, T)$  est solution de  $(V_1)$ .  $\square$

### 1.2.3.2 Troisième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.2.15.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , il existe une sous-suite de la solution discrète du problème  $(V_{h,3})$  notée aussi  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui converge faiblement vers la solution continue du problème  $(V_2)$ .*

**Démonstration** Soit  $d = 3$ , la troisième formulation variationnelle  $(V_{h,3})$  admet une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui est bornée. Pour le même principe de la démonstration du Théorème 1.2.14, nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui converge

faiblement vers  $(\mathbf{u}, p, T)$  dans  $L^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . De plus, la suite  $(T_h)_h$  converge fortement vers  $T$  dans  $L^r(\Omega)$ ,  $r < 6$  et  $(p_h)_h$  converge fortement vers  $p$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme  $(p_h)_h$  est une suite dans  $L_0^2(\Omega)$  et  $L_0^2(\Omega)$  est un espace fermé, alors  $p \in L_0^2(\Omega)$ . Finalement, La suite  $(\nu(T_h))_h$  converge fortement vers  $\nu(T)$  dans  $L^p(\Omega)$  pour  $p < \infty$  et  $(\sqrt{\nu(T_h)}\mathbf{u}_h)_h$  converge fortement vers  $\sqrt{\nu(T)}\mathbf{u}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ .

Nous effectuons la démonstration en trois étapes :

a) Notre premier but est de démontrer que, pour tout  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$ , nous avons :

$$(1.264) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $D(\Omega)^3$  est dense dans  $L^2(\Omega)^3$ , alors nous considérons un élément  $\mathbf{v} \in D(\Omega)^3$ . Soit  $\mathbf{v}_h = \mathcal{F}_h \mathbf{v} \in \mathcal{W}_{h,2}$ , alors il vérifie d'après  $(V_{h,3})$  l'équation suivante :

$$(1.265) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x}))\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En suivant la même démarche du Théorème 1.2.14 et en se référant à l'équation (1.203), nous aurons le résultat voulu.

b) Notre second but est de démontrer que, pour tout  $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.266) \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Nous considérons  $q \in D(\Omega)$ . Soit  $q_h = R_h q \in Z_h$ , alors ce  $q_h$  vérifie d'après  $(V_{h,3})$  l'équation suivante :

$$(1.267) \quad \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Comme  $(q_h)_h$  converge fortement vers  $q$  dans  $H^1(\Omega)$  et  $(\mathbf{u}_h)_h$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , nous aurons alors pour tout  $q \in D(\Omega)$  :

$$(1.268) \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Nous déduisons que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans  $D'(\Omega)$  et ensuite  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ .

c) Notre dernier but est de démontrer que, pour tout  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.269) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous allons démontrer cette équation pour tous les  $S \in H_0^1(\Omega)$ , en particulier pour tous les  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Comme  $D(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors nous

considérons  $S \in D(\Omega)$ . Soit  $S_h = R_h S \in X_h$  avec  $p = 4, m = 1$  et  $l = 1$ , alors il vérifie l'équation suivante :

$$(1.270) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green, nous aurons :

$$(1.271) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Essayons d'étudier seulement le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.271) car tous les autres termes sont déjà traités au Théorème 1.2.14.

Nous commençons par écrire :

$$(1.272) \quad (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h, S_h)_2 = (\sqrt{\nu(T_h)} \mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h, \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h)_2.$$

Nous regardons un des termes de la somme :

$$(1.273) \quad (\sqrt{\nu(T_h)} \mathbf{u}_{h,i}, \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i})_2.$$

Le premier terme de (1.273) converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ . Le second terme est bornée de la manière suivante :

$$(1.274) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_1}} \|S_h\|_{\infty} \left\| \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i} \right\|_{0,\Omega} \leq C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . Comme  $\left( \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i} \right)_h$  est borné dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$  alors nous pouvons extraire une sous-suite notée aussi  $\left( \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i} \right)_h$  qui converge faiblement vers  $w$  dans  $L^2(\Omega)$ . Montrons alors que  $w = \frac{1}{\sqrt{\nu(T)}} S \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_i}$ .

Soit  $\psi \in D(\Omega)$ , alors nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$(1.275) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h(\mathbf{x}))}} S_h(\mathbf{x}) \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h(\mathbf{x}))}} S_h(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Comme  $(\frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{x}_i})_h$  converge faiblement vers  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_i}$  dans  $L^2(\Omega)$  donc il suffit de montrer que  $(\frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} S_h \psi)_h$  converge fortement vers  $\frac{1}{\sqrt{\nu(T)}} S \psi$  dans  $L^2(\Omega)$  pour obtenir le résultat voulu.

Nous avons de plus l'inégalité suivante :

$$(1.276) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}} - \frac{1}{\sqrt{\nu(T)}} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\nu_1} \left\| \sqrt{\nu(T)} - \sqrt{\nu(T_h)} \right\|_{0,\Omega}.$$

Or comme  $(\sqrt{\nu(T_h)})_h$  converge fortement vers  $\sqrt{\nu(T)}$  dans  $L^2(\Omega)$ , nous aurons que  $(\frac{1}{\sqrt{\nu(T_h)}})_h$  converge fortement vers  $\frac{1}{\sqrt{\nu(T)}}$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme  $(S_h)_h$  converge fortement vers  $S$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , nous obtenons le résultat voulu.

Nous déduisons que  $(\mathbf{u}, p, T)$  est solution de  $(V_2)$ . □

### 1.2.3.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.2.16.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , il existe une sous-suite de la solution discrète du problème  $(V_{h,4})$  notée aussi  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  qui converge faiblement vers la solution continue du problème  $(V_1)$ .*

**Démonstration** Nous répétons la même démarche de la démonstration du Théorème 1.2.14 mais en prenant  $\mathbf{v}_h = \mathcal{F}_h \mathbf{v} \in \mathcal{W}_{h,4}$ , où  $\mathbf{v} \in D(\Omega)^3$ . Nous remarquons que dans cette quatrième formulation variationnelle, le terme  $\text{div } \mathbf{u}_h$  n'est pas nulle donc nous devons traiter en plus les termes suivantes :

$$(1.277) \quad I_1 = \gamma \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.278) \quad I_2 = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En se basant sur la convergence faible de la suite  $(\text{div } \mathbf{u}_h)_h$  vers  $\text{div } \mathbf{u}$  dans  $L^2(\Omega)$ , nous aurons la convergence de ces deux termes :

$$(1.279) \quad I_1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.280) \quad I_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite, pour montrer que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , il suffit de démontrer que pour tout  $q \in L^2_0(\Omega)$ , nous avons :

$$(1.281) \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Nous avons déjà que pour tout  $q_h \in M_{h,2}$  :

$$(1.282) \quad \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Il suffit alors de prendre  $q_h = r_h q$  et en utilisant le fait que  $(q_h)_h$  converge fortement vers  $q$  dans  $L^2(\Omega)$  et que  $(\operatorname{div} \mathbf{u}_h)_h$  converge faiblement vers  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  dans  $L^2(\Omega)$ , alors nous aurons le résultat voulu. Nous déduisons que  $(\mathbf{u}, p, T)$  est solution de  $(V_1)$ .  $\square$

### 1.3 Estimation d'erreur a priori

Dans cette section, nous établissons des estimations d'erreur *a priori* pour des petites données pour la première, la troisième et la quatrième formulations variationnelles. Tandis que pour la deuxième formulation variationnelle nous n'avons pas pu l'établir globalement mais nous pouvons la démontrer localement en utilisant le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [14].

#### 1.3.1 Première formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.3.1.** *Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,1})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$ ,  $T \in W^{1,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :*

$$(1.283) \quad \lambda S_6^{02} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.284) \quad \left(1 - \frac{\lambda(S_6^0)^2}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}\right) |T - T_h|_{1,\Omega} \leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} + \frac{S_6^0}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega},$$

$$(1.285) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega}$$



et

$$(1.286) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq 2 \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_1} (\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega}).$$

**Démonstration** La preuve se fait en plusieurs étapes. Nous démontrons dans l'ordre l'estimation d'erreur sur la vitesse, puis celle sur la pression et enfin celle sur la température.

a) Pour tous  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,1}$ , nous avons

$$(1.287) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div} \, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.288) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Soit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$ . Comme  $\text{div} \, \mathbf{v}_h = 0$  alors l'équation (1.287) devient :

$$(1.289) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.288) de (1.289) et nous obtenons :

$$(1.290) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{w}_h$  un élément arbitraire de  $\mathcal{V}_{h,1}$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.290). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.291) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{w}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\nu(T_h)$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.291) :

$$(1.292) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{w}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h(\mathbf{x}))) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{w}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$  respectivement, le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (1.292).

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$ , alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4),  $I_1$  est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.293) \quad I_1 &\leq \|\nu(T) - \nu(T_h)\|_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \lambda \|T - T_h\|_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.81), nous avons :

$$(1.294) \quad I_2 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{w}_h$  appartiennent à  $\mathcal{V}_{h,1}$  alors nous choisissons  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h$ . D'après l'équation (1.81), nous obtenons :

$$(1.295) \quad \nu_1 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} + \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}.$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante

$$(1.296) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}.$$

Nous aurons finalement :

$$(1.297) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} + \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}.$$

b) Pour tous  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$ , nous avons

$$(1.298) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.299) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$  et nous retranchons l'équation (1.299) de (1.298) pour obtenir l'équation :

$$\begin{aligned}
 (1.300) \quad \int_{\Omega} (p_h - p)(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\rho_h p$  dans le terme du membre de gauche de l'égalité (1.300). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.301) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (p_h - \rho_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (p - \rho_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\nu(T_h)$  dans le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (1.301) pour avoir

$$(1.302) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h - \rho_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h(\mathbf{x}))) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (p - \rho_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_5$  respectivement, le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (1.306).

D'après l'équation (1.81),  $I_3$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.303) \quad I_3 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_4$  est similaire au calcul de  $I_1$  :

$$(1.304) \quad I_4 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Le terme  $I_5$  est majoré de la manière suivante :

$$(1.305) \quad I_5 \leq \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}.$$

Par la suite, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$ , nous obtenons :

$$(1.306) \quad \begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} (p_h - \rho_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}} &\leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \\ & \quad + \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Comme l'inégalité (1.306) est vérifiée pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$  alors elle est vérifiée pour la borne supérieur sur  $\mathcal{W}_{h,1}$ . En utilisant la condition inf-sup discrète (1.193), l'inégalité (1.306) devient :

$$(1.307) \quad \begin{aligned} \beta_1 \|\rho_h p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \\ &+ \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante :

$$(1.308) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \|p - \rho_h p\|_{0,\Omega} + \|\rho_h p - p_h\|_{0,\Omega}.$$

Nous aurons :

$$(1.309) \quad \begin{aligned} \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq \frac{\nu_2}{\beta_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3}{\beta_1} |T - T_h|_{1,\Omega} \\ &+ 2\|p - \rho_h p\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

c) Pour tous  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.310) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.311) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $S = S_h$ , nous retranchons l'équation (1.311) de (1.310) pour obtenir :

$$(1.312) \quad \begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla R_h T$ ,  $\mathbf{u}_h$  et  $\nabla R_h T$  respectivement dans le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de gauche de l'égalité (1.312). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.313) \quad \begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(T_h - R_h T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous choisissons  $S_h = R_h T - T_h$ . D'après la propriété d'antisymétrie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \alpha |T_h - R_h T|_{1,\Omega}^2 &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (1.314) \qquad &+ \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_6$ ,  $I_7$  et  $I_8$  respectivement, le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (1.314).

$I_6$  est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.315) \qquad I_6 &\leq \alpha \|\nabla(T - R_h T)\|_{0,\Omega} \|\nabla(T_h - R_h T)\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \alpha |T - R_h T|_{1,\Omega} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous avons :

$$\begin{aligned}
 (1.316) \qquad I_7 &\leq \|\nabla T\|_3 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|T_h - R_h T\|_6 \\
 &\leq S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ), l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et l'équation (1.225), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (1.317) \qquad I_8 &\leq \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\nabla(T - R_h T)\|_3 \|T_h - R_h T\|_6 \\
 &\leq \frac{S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} |T_h - R_h T|_{1,\Omega},
 \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité suivante

$$(1.318) \qquad |T - T_h|_{1,\Omega} \leq |T - R_h T|_{1,\Omega} + |T_h - R_h T|_{1,\Omega}$$

et l'équation (1.297), nous déduisons l'estimation de la température.  $\square$

**Remarque 1.3.2.** Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, le schéma  $(V_{h,1})$  converge fortement vers  $(V_1)$  quand  $h$  tend vers 0.

**Théorème 1.3.3.** *Nous rappelons que la triangulation est régulière. Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,1})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ ,  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :*

$$(1.319) \quad \lambda S_6^0 (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.320) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} + |T - T_h|_{1,\Omega} \leq C h (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

**Démonstration** D'après l'équation (1.185), nous avons que  $\xi_h^1 \mathbf{u}$  appartient à  $\mathcal{V}_{h,1}$  alors nous prenons  $\mathbf{w}_h = \xi_h^1 \mathbf{u}$ .

D'après le Théorème 1.3.1, les équations (1.192), pour  $p = 2, 3$ ,  $m = 1$  et  $l = 1$ , (1.186) et (1.190), nous déduisons l'ordre de convergence.  $\square$

### 1.3.2 Troisième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.3.4.** *Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{h,3})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$ ,  $T \in W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :*

$$(1.321) \quad \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 (\|T\|_\infty + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < 2 \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.322) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda S_6^0}{2 \alpha \nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty)\right) |T - T_h|_{1,\Omega} \leq 2 |T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{2 \alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T - R_h T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2 \alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2 \alpha \nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty), \end{aligned}$$

$$(1.323) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} & \leq \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{\nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

et

$$(1.324) \quad |p - p_h|_{1,\Omega} \leq 2 |p - r_h p|_{1,\Omega} + \frac{1}{\beta_2} (\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega}).$$

**Démonstration** Nous procédons en trois étapes, dans le même ordre que Théorème 1.3.1.

a) Pour tous  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,2}$ , nous avons

$$(1.325) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.326) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$  et nous retranchons l'équation (1.326) de (1.325) pour avoir :

$$(1.327) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathcal{F}_h \mathbf{u}$  dans le terme du membre de droite et  $\nu(T_h)$  dans le premier terme du membre de gauche de l'égalité de l'égalité (1.327) :

$$(1.328) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h(\mathbf{x}))) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \nabla(p - r_h p)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous notons  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  respectivement, le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (1.328).

La majoration du terme  $I_1$  est similaire au calcul de  $I_1$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.329) \quad I_1 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

D'après l'équation (1.81), nous avons :

$$(1.330) \quad I_2 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Le terme  $I_3$  est majoré de la manière suivante :

$$(1.331) \quad I_3 \leq |p - r_h p|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}$  appartient à  $\mathcal{V}_{h,2}$  alors nous choisissons  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}$ . D'après l'équation (1.81), nous obtenons :

$$(1.332) \quad \nu_1 \|\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} + \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + |p - r_h p|_{1,\Omega}.$$

Or, en utilisant l'inégalité suivante

$$(1.333) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\mathcal{F}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}.$$

Nous aurons :

$$(1.334) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} + \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega}.$$

b) Pour tous  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}$ , nous avons

$$(1.335) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.336) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous répétons la même démarche effectuée à l'étape (b) du Théorème 1.3.1, pour déduire l'estimation suivante :

$$(1.337) \quad |p - p_h|_{1,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3}{\beta_2} |T - T_h|_{1,\Omega} + 2|p - r_h p|_{1,\Omega}.$$

c) Pour tous  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.338) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.339) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous prenons  $S = S_h$  et nous retranchons l'équation (1.339) de (1.338) pour obtenir :

$$(1.340) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$



Nous ajoutons et nous retranchons dans cette dernière équation les termes  $\nabla R_h T$ ,  $\mathbf{u}_h$  et  $R_h T$ ,  $\nabla R_h T$ . Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.341) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(T_h - R_h T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) (T_h - R_h T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) R_h T(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (1.342) \quad & \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) R_h T(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla R_h T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) R_h T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  dans (1.342) et nous remplaçons dans (1.341) pour obtenir l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.343) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(T_h - R_h T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) (T_h - R_h T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) (R_h T - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

En choisissant  $S_h = R_h T - T_h$  et en utilisant la propriété d'antisymétrie, nous

obtenons :

$$\begin{aligned}
 \alpha |T_h - R_h T|_{1,\Omega}^2 &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (1.344) \quad &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T_h))(\mathbf{x}) (R_h T - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla(R_h T - T_h))(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$  et  $I_8$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième, le quatrième et le cinquième termes du membre de droite de l'équation (1.344).

La majoration du terme  $I_4$  est similaire au calcul de  $I_6$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.345) \quad I_4 \leq \alpha |T - R_h T|_{1,\Omega} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_5$  est similaire au calcul de  $I_7$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.346) \quad I_5 \leq \frac{S_6^0}{2} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_6$  est similaire au calcul de  $I_8$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.347) \quad I_6 \leq \frac{S_6^0}{2\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.$$

D'après l'équation (1.235),  $I_7$  est majoré de la manière suivante :

$$(1.348) \quad I_7 \leq \frac{1}{2\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|T - R_h T\|_{\infty} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}.$$

Comme  $T \in L^\infty(\Omega)$ , nous aurons :

$$(1.349) \quad I_8 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} |T_h - R_h T|_{1,\Omega} \|T\|_{\infty}.$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante :

$$(1.350) \quad |T - T_h|_{1,\Omega} \leq |T - R_h T|_{1,\Omega} + |T_h - R_h T|_{1,\Omega}$$

et l'équation (1.334), nous déduisons l'estimation de la température.  $\square$

**Remarque 1.3.5.** Nous gardons les hypothèses du Théorème 1.3.4 et de plus, nous supposons que  $T \in W^{1,s}(\Omega)$  avec  $s > 3$  car l'espace  $W^{1,s}(\Omega)$  s'injecte continument dans  $L^\infty(\Omega)$ . Le schéma  $(V_{h,3})$  converge fortement vers  $(V_2)$  quand  $h$  tend vers 0.

**Théorème 1.3.6.** Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{h,3})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ ,  $p \in H^2(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$(1.351) \quad \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 (\|T\|_\infty + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < 2\alpha\nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.352) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{1,\Omega} + |T - T_h|_{1,\Omega} \leq Ch (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)} + |T|_{W^{1,\infty}(\Omega)}),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

**Démonstration** D'après le Théorème 1.3.4, les équations (1.192), pour  $p = 2, 3$ ,  $m = 1$  et  $l = 1$ , pour  $p = \infty$ ,  $m = 0$  et  $l = 0$ , (1.203) et (1.211), nous déduisons l'ordre de convergence.  $\square$

### 1.3.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.3.7.** Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,4})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$ ,  $T \in W^{1,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$(1.353) \quad \lambda S_6^{02} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha \min(\nu_1, \gamma)}{2},$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.354) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{2\lambda(S_6^0)^2}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}\right) |T - T_h|_{1,\Omega} \leq 3|T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{2S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{2S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \\ & + \frac{2S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)}, \end{aligned}$$

$$(1.355) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} & \leq \left(1 + \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \frac{\lambda S_6^0}{\min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{\min(\nu_1, \gamma)} \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

et

$$(1.356) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq 2 \|p - r_h p\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_4} ((\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div},\Omega)} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega}).$$

**Démonstration** La démonstration suit les étapes de celle du Théorème 1.3.1.

a) Pour tous  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,4}$ , nous avons

$$(1.357) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.358) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$  et nous retranchons l'équation (1.358) de (1.357) pour avoir :

$$(1.359) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathcal{F}_h \mathbf{u}$  et  $\text{div}(\mathcal{F}_h \mathbf{u})$  respectivement dans le premier et le deuxième termes du membre de gauche et  $\nu(T_h)$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.359) :

$$(1.360) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h(\mathbf{x}))) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \gamma \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u})(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{\Omega} (p - r_h p)(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième termes du membre de droite de l'équation (1.360).

La majoration du terme  $I_1$  est similaire au calcul de  $I_1$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.361) \quad I_1 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

D'après l'équation (1.81), nous aurons :

$$(1.362) \quad I_2 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}.$$

Le terme  $I_3$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.363) \quad I_3 \leq \gamma \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u})\|_{0, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}.$$

Nous avons :

$$(1.364) \quad I_4 \leq \|p - r_h p\|_{0, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}.$$

Comme  $\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}$  appartiennent à  $\mathcal{V}_{h,4}$  alors nous choisissons  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}$ . D'après l'équation (1.81), nous obtenons :

$$(1.365) \quad \begin{aligned} & \min(\nu_1, \gamma) \|\mathbf{u}_h - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \\ & \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1, \Omega} + \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0, \Omega} + \gamma \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u})\|_{0, \Omega} \\ & \quad + \|p - r_h p\|_{0, \Omega}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante

$$(1.366) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} \leq \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|\mathcal{F}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}.$$

Nous aurons :

$$(1.367) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} & \leq \frac{\lambda S_6^0}{\min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1, \Omega} \\ & \quad + \left( \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)} + 1 \right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p - r_h p\|_{0, \Omega}. \end{aligned}$$

b) Pour tous  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}$ , nous avons

$$(1.368) \quad \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.369) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$  et nous retranchons l'équation (1.369) de (1.368) pour obtenir :

$$(1.370) \quad \int_{\Omega} (p_h - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $r_h p$  dans le terme du membre de gauche de l'égalité et  $\nu(T_h)$  dans le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (1.370) pour avoir :

$$(1.371) \quad \int_{\Omega} (p_h - r_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (p - r_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous notons  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$  et  $I_8$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième termes du membre de droite de l'équation (1.371).

D'après l'équation (1.81),  $I_5$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.372) \quad I_5 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_6$  est similaire au calcul de  $I_1$  du Théorème 1.3.1 :

$$(1.373) \quad I_6 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Nous avons :

$$(1.374) \quad I_7 \leq \gamma \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}.$$

Le terme  $I_8$  est majoré de la manière suivante :

$$(1.375) \quad I_8 \leq \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}.$$

Par la suite, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}$ , nous obtenons :

$$(1.376) \quad \frac{\int_{\Omega} (p_h - r_h p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \leq (\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1, \Omega} + \|p - r_h p\|_{0, \Omega}.$$

Comme l'inégalité (1.376) est vérifiée pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}$  alors elle est vérifiée pour la borne supérieur sur  $\mathcal{W}_{h,4}$ . En utilisant la condition inf-sup discrète (1.218), l'inégalité (1.376) devient :

$$(1.377) \quad \beta_4 \|r_h p - p_h\|_{0, \Omega} \leq (\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1, \Omega} + \|p - r_h p\|_{0, \Omega}.$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante :

$$(1.378) \quad \|p - p_h\|_{0, \Omega} \leq \|p - r_h p\|_{0, \Omega} + \|r_h p - p_h\|_{0, \Omega}.$$

Nous aurons :

$$(1.379) \quad \|p - p_h\|_{0, \Omega} \leq \frac{\nu_2 + \gamma}{\beta_4} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \frac{\lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3}{\beta_4} |T - T_h|_{1, \Omega} + 2 \|p - r_h p\|_{0, \Omega}.$$

c) Pour tous  $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.380) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.381) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous prenons  $S = S_h$ , nous retranchons l'équation (1.381) de (1.380) pour obtenir :

$$(1.382) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla R_h T$ ,  $\mathbf{u}_h$  et  $\nabla R_h T$  dans cette dernière équation et nous obtenons l'équation suivante :

$$(1.383) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(T_h - R_h T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous choisissons  $S_h = R_h T - T_h$ . D'après les équations (1.246) et (1.248), nous obtenons :

$$(1.384) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{2} |T_h - R_h T|_{1,\Omega}^2 & \leq \alpha \int_{\Omega} \nabla(R_h T - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla(R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla(R_h T - T))(\mathbf{x}) (R_h T - T_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous répétons la même démarche déjà effectuée à l'étape (c) du Théorème 1.3.1. D'après l'équation (1.367), nous concluons.  $\square$

**Remarque 1.3.8.** Sous les hypothèses du Théorème 1.3.7, le schéma  $(V_{h,4})$  converge fortement vers  $(V_1)$  quand  $h$  tend vers 0.

**Théorème 1.3.9.** Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,4})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3$ ,  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$(1.385) \quad \lambda S_6^{02} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha \min(\nu_1, \gamma)}{2},$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(1.386) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div},\Omega)} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} + |T - T_h|_{1,\Omega} \leq C h (\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

**Démonstration** D'après le Théorème 1.3.7, les équations (1.192), pour  $p = 2, 3$ ,  $m = 1$  et  $l = 1$ , (1.203) et (1.211), nous déduisons l'ordre de convergence.  $\square$



## 1.4 Problème itératif

Comme le problème est non linéaire, nous introduisons les quatre problèmes itératifs suivants :

$$(V_{h,i,1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T_h^i \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}, \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,1}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

$$(V_{h,i,2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T_h^i \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}, \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

$$(V_{h,i,3}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T_h^i \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}, \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} \nabla q_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{array} \right.$$

et

$$(V_{h,i,4}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T_h^i \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,4} \times M_{h,2} \times X_h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}, \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,2}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S_h \in X_h, \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Ici  $T_h^0$  est une donnée initiale arbitraire. A chaque itération  $i$ , pour chaque problème  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,2})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$ , connaissant  $T_h^i \in X_h$ , nous calculons  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  avec la première équation et nous l'injectons dans la deuxième équation pour déduire  $T_h^{i+1}$ . Chaque équation est maintenant linéaire.

### 1.4.1 Existence et unicité de la solution itérative

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité des solutions des problèmes itératifs  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$ . Pour le problème itératif  $(V_{h,i,2})$ , nous n'avons pas réussi à démontrer l'existence et l'unicité de la solution, faute d'estimations *a priori* suffisantes et nous nous contentons seulement à la fin de montrer des résultats de simulations numériques.

### 1.4.1.1 Première formulation variationnelle itérative

**Théorème 1.4.1.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , la première formulation variationnelle itérative  $(V_{h,i,1})$  admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.387) \quad \|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu_1},$$

$$(1.388) \quad \|p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_1} \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

et

$$(1.389) \quad |T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}}{\alpha},$$

où  $\beta_1$  est la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** Comme le problème est un système linéaire carré en dimension finie, il suffit alors de montrer l'unicité. Grâce à la condition inf-sup discrète (1.193) et d'après l'équation (1.81) et la propriété d'antisymétrie, nous déduisons l'unicité d'où l'existence de la solution.

Nous obtenons les estimations, en prenant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^{i+1}$  et  $S_h = T_h^{i+1}$  (respectivement dans la première et la deuxième équation de  $(V_{h,i,1})$ ) et en utilisant la condition inf-sup discrète (1.193).  $\square$

### 1.4.1.2 Troisième formulation variationnelle itérative

**Théorème 1.4.2.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , la troisième formulation variationnelle itérative  $(V_{h,i,3})$  admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.390) \quad \|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu_1},$$

$$(1.391) \quad |p_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_2} \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_2} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

et

$$(1.392) \quad |T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{S_2^0 \|g\|_{0,\Omega}}{\alpha},$$

où  $\beta_2$  est la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** Nous répétons le même travail déjà effectué au Théorème 1.4.1.  $\square$

### 1.4.1.3 Quatrième formulation variationnelle itérative

**Théorème 1.4.3.** *Pour tout  $(\mathbf{f}, g) \in (L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega))$ , il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , la quatrième formulation variationnelle itérative  $(V_{h,i,4})$  admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,4} \times M_{h,2} \times X_h$ . Cette solution vérifie les majorations suivantes :*

$$(1.393) \quad \|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}}{\min(\nu_1, \gamma)},$$

$$(1.394) \quad \|p_h^{i+1}\|_{0, \Omega} \leq \frac{\nu_2 + \gamma}{\beta_4} \|\mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \frac{1}{\beta_4} \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}$$

et

$$(1.395) \quad |T_h^{i+1}|_{1, \Omega} \leq \frac{2 S_2^0 \|g\|_{0, \Omega}}{\alpha}.$$

où  $\beta_4$  est la constante de la condition inf-sup discrète positive et  $S_2^0$  est la constante de Poincaré.

**Démonstration** Nous répétons le même travail déjà effectué au Théorème 1.4.1 mais en se basant sur les équations (1.246) et (1.248).  $\square$

## 1.4.2 Convergence vers la solution continue

Nous allons démontrer que les solutions des problèmes itératifs  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$  convergent vers les solutions exactes, mais sans pouvoir préciser un ordre de convergence et ceci passe par des formules d'erreur.

### 1.4.2.1 Première formulation variationnelle discrète

Dans cette section, nous adaptons les hypothèses du Théorème 1.3.1. En suivant les étapes de la preuve de ce théorème, nous déduisons les estimations d'erreur suivantes de la vitesse et de la pression :

$$(1.396) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0, \Omega} \leq \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0, \Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^i|_{1, \Omega}$$

et

$$(1.397) \quad \|p - p_h^{i+1}\|_{0, \Omega} \leq 2 \|p - \rho_h p\|_{0, \Omega} + \frac{1}{\beta_1} (\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0, \Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^i|_{1, \Omega}).$$

Tandis que le calcul de l'estimation d'erreur de la température est un peu complexe. Les arguments de la preuve du Théorème 1.3.1 nous donnent l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} + \frac{S_6^0}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} \\
 &+ \frac{S_6^0}{\alpha} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \left( \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \right) \\
 &+ \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^i|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}
 \tag{1.398}$$

Nous étudions alors deux cas :

a) S'il existe un  $i_0 \geq 0$ , tel que :

$$|T - T_h^{i_0}|_{1,\Omega} \leq |T - T_h^{i_0+1}|_{1,\Omega},$$

alors

$$\begin{aligned}
 \sup_{i \geq i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} &= \max \left( |T - T_h^{i_0}|_{1,\Omega}, \sup_{i \geq i_0+1} |T - T_h^i|_{1,\Omega} \right) \\
 &\leq \sup_{i \geq i_0+1} |T - T_h^i|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}
 \tag{1.399}$$

Nous appliquons l'équation (1.398), pour  $i \geq i_0$  et nous aurons :

$$\begin{aligned}
 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} + \frac{S_6^0}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} \\
 &+ \frac{S_6^0}{\alpha} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \left( \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \right) \\
 &+ \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 \sup_{i \geq i_0+1} |T - T_h^i|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}
 \tag{1.400}$$

En prenant le maximum de (1.400) par rapport à  $i_0 \geq 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\sup_{i \geq i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} \leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} \\
 &+ \frac{S_6^0}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}
 \tag{1.401}$$

b) Si un tel  $i_0$  n'existe pas alors, pour tout  $i$

$$|T - T_h^i|_{1,\Omega} > |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}.$$

Dans ce cas,  $(|T - T_h^i|_{1,\Omega})_{i \geq 0}$  est une suite strictement décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente et nous aurons :

$$(1.402) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda(S_6^0)^2}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}\right) \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^i|_{1,\Omega} \leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{S_6^0}{\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$  et  $T \in W^{1,3}(\Omega)$ , les termes du membre de droite des équations (1.401) et (1.402) tendent vers 0 quand  $h$  tend vers 0 et nous déduisons le théorème suivant :

**Théorème 1.4.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, la suite  $(T_h^i)_{i \geq 0}$  ou bien satisfait (1.401) et dans ce cas nous avons pour un  $i_0 \geq 0$ ,*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \lim_{i > i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0,$$

*ou bien la suite satisfait (1.402) et dans ce cas nous aurons :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0.$$

### 1.4.2.2 Troisième formulation variationnelle discrète

Nous introduisons les estimations d'erreur pour la vitesse et la pression définis par les équations suivantes :

$$(1.403) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} & \leq \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^i|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{\nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

et

$$(1.404) \quad |p - p_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq 2 |p - r_h p|_{1,\Omega} + \frac{1}{\beta_2} (\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^i|_{1,\Omega}).$$

La démonstration est semblable au cas de la première formulation variationnelle.

**Théorème 1.4.5.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.4, la suite  $(T_h^i)_{i \geq 0}$  ou bien satisfait pour un  $i_0 \geq 0$ ,*

$$(1.405) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda S_6^0}{2\alpha \nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty)\right) \sup_{i > i_0} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{2\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T - R_h T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2\alpha \nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty) \end{aligned}$$

et dans ce cas nous avons :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{i > i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0,$$

ou bien satisfait

$$(1.406) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda S_6^0}{2\alpha \nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty)\right) \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq 2|T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{2\alpha \nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T - R_h T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty) \\ & + \frac{1}{2\alpha \nu_1} |p - r_h p|_{1,\Omega} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty) \end{aligned}$$

et dans ce cas nous aurons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0.$$

### 1.4.2.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

Nous introduisons les estimations d'erreur pour la vitesse et la pression définis par les équations suivantes :

$$(1.407) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div},\Omega)} & \leq \left(1 + \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)}\right) \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div},\Omega)} + \frac{\lambda S_6^0}{\min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega} \\ & + \frac{1}{\min(\nu_1, \gamma)} \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

et

$$(1.408) \quad \|p - p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq 2 \|p - r_h p\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\beta_4} ((\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div},\Omega)} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h|_{1,\Omega}).$$

La démonstration est semblable au cas de la première formulation variationnelle.

**Théorème 1.4.6.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.7, il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , la suite  $(T_h^i)_{i \geq 0}$  ou bien satisfait pour un  $i_0 \geq 0$ ,*

$$(1.409) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{2\lambda(S_6^0)^2}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}\right) \sup_{i > i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} \leq 3|T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{2S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{2S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \\ & + \frac{2S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div},\Omega)} \end{aligned}$$

et dans ce cas nous avons :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \lim_{i > i_0} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0,$$

ou bien satisfait

(1.410)

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2 \lambda (S_6^0)^2}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}\right) \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^i|_{1,\Omega} \leq 3 |T - R_h T|_{1,\Omega} \\ & + \frac{2 S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |T - R_h T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{2 S_6^0}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|p - r_h p\|_{0,\Omega} \\ & + \frac{2 S_6^0}{\alpha} \left(1 + \frac{\nu_2 + \gamma}{\min(\nu_1, \gamma)}\right) |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \end{aligned}$$

et dans ce cas nous aurons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} |T - T_h^i|_{1,\Omega} = 0.$$

### 1.4.3 Convergence vers la solution discrète

Il peut être intéressant de comparer la solution de l'algorithme  $(V_{h,j})$ , pour  $j = 1, 3, 4$ , avec celle du schéma  $(V_{h,i,j})$ . Comme nous allons le voir plus loin, ceci fait appel à l'inégalité inverse suivante :

**Proposition 1.4.7.** *Inégalité inverse*

Pour tout élément  $K \in \tau_h$ , pour tout nombre  $p \geq 2$  et pour tout élément  $\mathbf{v}_h$  polynomiale sur  $K$ , nous avons la majoration suivante :

$$(1.411) \quad \|\mathbf{v}_h\|_{L^p(K)} \leq C h_K^{\frac{2}{p}-1} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(K)},$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $p$  et de l'espace de polynômes, mais qui ne dépend ni de  $h$ , ni de  $K$ .

Lorsque cette inégalité est appliquée globalement, nous lui associons l'hypothèse suivante de régularité uniforme : il existe une constante  $b > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$(1.412) \quad b h < h_k < h.$$

#### 1.4.3.1 Première formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.4.8.** *Soient  $d = 3$  et  $(\mathbf{u}, p, T)$  la solution respective de  $(V_1)$ . Nous supposons que  $u \in H^1(\Omega)^3$ ,  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :*

$$(1.413) \quad \lambda S_6^{0^2} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha \nu_1}{4},$$



où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). De plus, nous supposons que  $h$  est suffisamment petit, où

$$(1.414) \quad h < \min \left( \frac{\|\mathbf{u}\|_3^{\frac{3}{2}}}{[C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}}, \frac{|T|_{W^{1,3}(\Omega)}^{\frac{3}{2}}}{[C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

et  $C$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) et de l'estimation d'erreur a priori de la première formulation variationnelle. Alors la solution  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  de  $(V_{h,i,1})$  converge vers la solution discrète  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  de  $(V_{h,1})$ .

**Démonstration** La preuve se fait en trois étapes :

a) Pour tout  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.415) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.416) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.416) de (1.415) pour avoir :

$$(1.417) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T_h$  dans le troisième terme du membre de gauche de l'égalité (1.417). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.418) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla (T_h^{i+1} - T_h))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.418). Comme  $T_h$  et  $T_h^{i+1}$  appartiennent à  $X_h$  alors nous choisissons  $S_h = T_h - T_h^{i+1}$  et d'après la propriété d'antisymétrie, nous obtenons :

$$(1.419) \quad \begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} & = \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla (T_h - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$  respectivement, le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (1.419).

D'après l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) (pour  $p = 3$ ), la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4),  $I_1$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.420) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_3 \| \nabla(T - T_h) \|_{0,\Omega} \| S_h \|_6 \\ &\leq S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,\Omega} |T - T_h|_{1,\Omega} |S_h|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous avons :

$$(1.421) \quad \begin{aligned} I_2 &\leq \| \nabla T \|_3 \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,\Omega} \| S_h \|_6 \\ &\leq S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,\Omega} |S_h|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Nous aurons finalement :

$$(1.422) \quad \begin{aligned} |T_h - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq \frac{S_6^0}{\alpha} [C h^{-\frac{1}{3}} |T - T_h|_{1,\Omega} + |T|_{W^{1,3}(\Omega)}] \\ &\quad \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

b) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,1}$ , nous avons

$$(1.423) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.424) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.424) de (1.423) et nous obtenons :

$$(1.425) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}_h$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.425). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.426) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.426) :

$$\begin{aligned}
 (1.427) \quad & \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x}))(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_3$  et  $I_4$  respectivement, le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (1.427).

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, alors d'après l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) (pour  $p = 3$ ), la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (1.428) \quad I_3 &\leq \|\nu(T_h) - \nu(T_h^i)\|_6 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_3 \\
 &\leq C h^{-\frac{1}{3}} \lambda \|T_h - T_h^i\|_6 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \lambda |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$ , alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (1.429) \quad I_4 &\leq \|\nu(T_h) - \nu(T_h^i)\|_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \lambda \|T_h - T_h^i\|_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  appartiennent à  $\mathcal{V}_{h,1}$  alors nous choisissons  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}$ . L'équation (1.81) nous donne :

$$(1.430) \quad \nu_1 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq \lambda S_6^0 [C h^{-\frac{1}{3}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_3] |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}.$$

Nous concluons par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.431) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} (C h^{-\frac{1}{3}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_3) \\
 & \quad \left[ \frac{S_6^0}{\alpha} (C h^{-\frac{1}{3}} |T - T_h|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \right] \\
 & \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

D'après l'estimation d'erreur *a priori* (Théorème 1.3.3), nous obtenons finalement :  
 (1.432)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} (C' h^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + \|\mathbf{u}\|_3) \\ &\quad \left[ \frac{S_6^0}{\alpha} (C' h^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) \right] \\ &\quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $C'$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse et de l'estimation d'erreur *a priori*. Pour  $h$  suffisamment petit, nous aurons :

$$(1.433) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq C_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{0,\Omega},$$

où  $C_2 = \frac{4\lambda S_6^0}{\alpha \nu_1} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)})$ . Par la suite,

$$(1.434) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq C_2^{i+1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^0\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $C_2 < 1$  par donné, nous aurons alors la convergence de la solution  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  vers la solution discrète  $\mathbf{u}_h$ .

c) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$ , nous avons

$$(1.435) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.436) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.436) de (1.435) pour obtenir :

$$(1.437) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nu(T_h^i)$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.437). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.438) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h))(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}$  dans le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (1.438) :

$$(1.439) \quad \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h))(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous notons  $I_5$ ,  $I_6$  et  $I_7$  respectivement, le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (1.439).

D'après l'équation (1.81),  $I_5$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.440) \quad I_5 \leq \nu_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_6$  est similaire au calcul de  $I_3$  :

$$(1.441) \quad I_6 \leq S_6^0 \lambda C h^{\frac{-1}{3}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_7$  est similaire au calcul de  $I_4$  :

$$(1.442) \quad I_7 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Par la suite, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$ , nous obtenons :

$$(1.443) \quad \frac{\int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}} \leq \nu_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 (C h^{\frac{-1}{3}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \\ + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}.$$

Comme l'inégalité (1.443) est vérifiée pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,1}$  alors l'inégalité (1.443) est vérifiée pour la borne supérieur sur  $\mathcal{W}_{h,1}$ . En utilisant la condition inf-sup discrète (1.193) et l'estimation d'erreur *a priori* (Théorème 1.3.3), l'inégalité (1.443) devient :

$$(1.444) \quad \|p_h - p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq \frac{\nu_2}{\beta_1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\beta_1} (C' h^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) \\ + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}.$$

□

**Remarque 1.4.9.** Si  $h$  n'est pas suffisamment petit, nous remplaçons la condition du Théorème 1.4.8 par la condition suivante :

$$(1.445) \quad \begin{aligned} & \lambda S_6^0 (C \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + \|\mathbf{u}\|_3) \\ & [S_6^0 (C \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + |T|_{W^{1,3}(\Omega)})] \\ & < \alpha \nu_1, \end{aligned}$$

où  $C$  est le produit de la constante de l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) (pour  $p = 3$ ) et de la constante de l'estimation d'erreur *a priori* (Théorème 1.3.3).

### 1.4.3.2 Troisième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.4.10.** Soient  $d = 3$  et  $(\mathbf{u}, p, T)$  la solution respective de  $(V_2)$ . Nous supposons que  $u \in H^1(\Omega)^3$ ,  $p \in H^2(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$(1.446) \quad \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 (\|T\|_\infty + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha \nu_1}{2},$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). De plus, nous supposons que  $h$  est suffisamment petit, où

$$(1.447) \quad h < \min \left( \frac{\|\mathbf{u}\|_3^{\frac{3}{2}}}{[C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}}, \frac{(S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty)^{\frac{3}{2}}}{[2C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

et  $C$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) et de l'estimation d'erreur *a priori* de la troisième formulation variationnelle. Alors la solution  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  de  $(V_{h,i,3})$  converge vers la solution discrète  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  de  $(V_{h,3})$ .

**Démonstration** Nous procédons en trois étapes :

a) Pour tout  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.448) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

et

$$(1.449) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous retranchons l'équation (1.449) de (1.448) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 (1.450) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T_h$  dans le troisième terme du membre de gauche de l'égalité (1.450) et  $T_h$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.450). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.451) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T_h^{i+1} - T_h))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) (T_h^{i+1} - T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) T_h(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.451). Nous utilisons la formule de Green pour le deuxième terme et nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\nabla T$  et  $T$ . Comme  $T_h$  et  $T_h^{i+1}$  appartiennent à  $X_h$  alors nous choisissons  $S_h = T_h - T_h^{i+1}$  et d'après la propriété d'antisymétrie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (1.452) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla(T_h - T))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) (T_h - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla S_h)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième termes du membre de droite de l'équation (1.452).

La majoration du  $I_1$  est similaire au calcul de  $I_1$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.453) \quad I_1 \leq \frac{1}{2} S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |T - T_h|_{1,\Omega} |S_h|_{1,\Omega},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

La majoration du terme  $I_2$  est similaire au calcul de  $I_2$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.454) \quad I_2 \leq \frac{1}{2} S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |S_h|_{1,\Omega}.$$

D'après l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) (pour  $p = 3$ ), la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4),  $I_3$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.455) \quad \begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_3 \|\nabla S_h\|_{0,\Omega} \|T - T_h\|_6 \\ &\leq \frac{1}{2} S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |T - T_h|_{1,\Omega} |S_h|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Comme  $T \in L^\infty(\Omega)$  alors nous avons :

$$(1.456) \quad I_4 \leq \frac{1}{2} \|T\|_\infty \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |S_h|_{1,\Omega}.$$

Nous aurons finalement :

$$(1.457) \quad \begin{aligned} |T_h - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq \frac{S_6^0}{\alpha} [C h^{\frac{-1}{3}} |T - T_h|_{1,\Omega} + \frac{1}{2} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \\ &\quad + \frac{\|T\|_\infty}{2 S_6^0}] \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

b) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,2}$ , nous avons

$$(1.458) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.459) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.459) de (1.458) et nous obtenons :

$$(1.460) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous répétons le même travail déjà effectué à l'étape (b) du Théorème 1.4.8. D'après l'estimation d'erreur *a priori* (Théorème 1.3.6), nous déduisons l'équation



suivante :

(1.461)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div}, \Omega)} &\leq \frac{\lambda S_6^0}{\nu_1} (C' h^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + \|\mathbf{u}\|_3) \\ &\quad \left[ \frac{1}{\alpha} (C' h^{\frac{2}{3}} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_6^0}{2} |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \frac{\|T\|_\infty}{2} \right] \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $C'$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse et de l'estimation d'erreur *a priori*. Pour  $h$  suffisamment petit, nous aurons :

$$(1.462) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq C_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{0,\Omega},$$

où

$$(1.463) \quad C_2 = \frac{2\lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3}{\alpha \nu_1} (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Par la suite,

$$(1.464) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq C_2^{i+1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^0\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $C_2 < 1$  par donné, nous aurons alors la convergence de la solution  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  vers la solution discrète  $\mathbf{u}_h$ .

c) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,2}$ , nous avons

$$(1.465) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.466) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.467) de (1.465) pour obtenir :

$$(1.467) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous répétons le même travail déjà effectué à l'étape (c) du Théorème 1.4.8. En utilisant la condition inf-sup discrète (1.215), nous aurons :

$$(1.468) \quad \begin{aligned} |p_h - p_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq \frac{\nu_2}{\beta_2} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \frac{\lambda S_6^0}{\beta_2} (C h^{\frac{-1}{3}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}). \end{aligned}$$

□

### 1.4.3.3 Quatrième formulation variationnelle discrète

**Théorème 1.4.11.** *Soient  $d = 3$  et  $(\mathbf{u}, p, T)$  la solution respective de  $(V_1)$ . Nous supposons que  $u \in H^2(\Omega)^3$ ,  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $T \in W^{2,3}(\Omega)$  et  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $\mathbb{R}$  tel que :*

$$(1.469) \quad \lambda S_6^0 (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha \min(\nu_1, \gamma)}{8},$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ . De plus, nous supposons que  $h$  est suffisamment petit, où

$$(1.470) \quad h < \min \left( \frac{\|\mathbf{u}\|_3^{\frac{3}{2}}}{[C(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}}, \frac{|T|_{W^{1,3}(\Omega)}^{\frac{3}{2}}}{[C(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)})]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

et  $C$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) et de l'estimation d'erreur a priori de la quatrième formulation variationnelle et nous notons  $h_1$  ce minimum. Alors pour tout  $h < \min(h_0, h_1)$ , la solution  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  de  $(V_{h,i,4})$  converge vers la solution discrète  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  de  $(V_{h,4})$ .

**Démonstration** La preuve est illustrée en plusieurs étapes :

a) Pour tout  $S_h \in X_h$ , nous avons

$$(1.471) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.472) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.472) de (1.471) pour avoir :

$$(1.473) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T_h$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.473). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.474) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla (T_h^{i+1} - T_h))(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T_h)(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\nabla T$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.474). Comme  $T_h$  et  $T_h^{i+1}$  appartiennent à  $X_h$  alors nous choisissons  $S_h = T_h - T_h^{i+1}$  et d'après les équations (1.246) et (1.248), nous obtenons :

$$(1.475) \quad \frac{\alpha}{2} |T_h - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla (T_h - T))(\mathbf{x}) (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (T_h - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous répétons le même travail déjà effectué à l'étape (a) du Théorème 1.4.8. Nous déduisons l'équation suivante :

$$(1.476) \quad |T_h - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{2S_6^0}{\alpha} (C h^{\frac{-1}{3}} |T - T_h|_{1,\Omega} + |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) \\ \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div},\Omega)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

b) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{h,4}$ , nous avons

$$(1.477) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$(1.478) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous retranchons l'équation (1.478) de (1.477) pour obtenir :

$$(1.479) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}_h$  dans le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.479). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.480) \quad \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \text{div } (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}$  dans le terme du membre de droite de l'égalité (1.480) :

$$\begin{aligned}
 (1.481) \quad & \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x}))(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$  respectivement, le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (1.481).

La majoration du terme  $I_1$  est similaire au calcul de  $I_3$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.482) \quad I_1 \leq S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \lambda \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

La majoration du terme  $I_2$  est similaire au calcul de  $I_4$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.483) \quad I_2 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  appartiennent à  $\mathcal{V}_{h,4}$  alors nous choisissons  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}$ . D'après l'équation (1.81), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (1.484) \quad & \min(\nu_1, \gamma) \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \\
 & \leq \lambda S_6^0 (C h^{-\frac{1}{3}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}).
 \end{aligned}$$

D'après l'estimation d'erreur *a priori* (Théorème 1.3.9), nous déduisons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.485) \quad & \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \leq \frac{\lambda S_6^0}{\min(\nu_1, \gamma)} (C' h^{\frac{2}{3}} (\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + \|\mathbf{u}\|_3) \\
 & \quad \left[ \frac{2 S_6^0}{\alpha} (C' h^{\frac{2}{3}} (\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) + |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) \right] \\
 & \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{H(\operatorname{div},\Omega)},
 \end{aligned}$$

où  $C'$  est le produit des constantes de l'inégalité inverse et de l'estimation d'erreur *a priori*. Pour  $h$  suffisamment petit, nous aurons :

$$(1.486) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \leq C_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^i\|_{H(\operatorname{div},\Omega)},$$

où  $C_2 = \frac{8\lambda S_6^{02}}{\alpha \min(\nu_1, \gamma)} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)})$ . Par la suite,

$$(1.487) \quad \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \leq C_2^{i+1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^0\|_{H(\text{div}, \Omega)}.$$

Comme  $C_2 < 1$  par donné, nous aurons alors la convergence de la solution  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  vers la solution discrète  $\mathbf{u}_h$ .

c) Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}$ , nous avons

$$(1.488) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= -\gamma \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

et

$$(1.489) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= -\gamma \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous retranchons l'équation (1.489) de (1.488) pour avoir :

$$(1.490) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nu(T_h(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \gamma \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons  $\nu(T_h^i)$  dans le troisième terme du membre de droite de l'égalité (1.490). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$(1.491) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \gamma \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons  $\mathbf{u}$  dans le troisième terme du

membre de droite de l'égalité (1.491) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 (1.492) \quad \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} (\nu(T_h) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  et  $I_6$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième termes du membre de droite de l'équation (1.492).

D'après l'équation (1.81),  $I_3$  sera majoré de la manière suivante :

$$(1.493) \quad I_3 \leq \nu_2 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}.$$

Le terme  $I_4$  est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (1.494) \quad I_4 &\leq \gamma \|\operatorname{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1})\|_{0, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega} \\
 &\leq \gamma \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}.
 \end{aligned}$$

La majoration du terme  $I_5$  est similaire au calcul de  $I_3$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.495) \quad I_5 \leq S_6^0 C h^{-\frac{1}{3}} \lambda \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega} |T_h - T_h^i|_{1, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}.$$

La majoration du terme  $I_6$  est similaire au calcul de  $I_4$  du Théorème 1.4.8 :

$$(1.496) \quad I_6 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h - T_h^i|_{1, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

Par la suite, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (1.497) \quad &\frac{\int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \\
 &\leq (\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \lambda S_6^0 (C h^{-\frac{1}{3}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega} \\
 &\quad + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1, \Omega}).
 \end{aligned}$$

Comme l'inégalité (1.497) est vérifiée pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_{h,4}$  alors l'inégalité (1.497) est vérifiée pour la borne supérieur sur  $\mathcal{W}_{h,4}$ . En utilisant la condition inf-sup discrète (1.218), alors l'inégalité (1.497) devient :

$$(1.498) \quad \begin{aligned} \|p_h - p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \leq & \frac{(\nu_2 + \gamma)}{\beta_4} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div},\Omega)} + \frac{\lambda S_6^0}{\beta_4} (C h^{\frac{-1}{3}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \\ & + \|\mathbf{u}\|_3) |T_h - T_h^i|_{1,\Omega}). \end{aligned}$$

□

## 1.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous établissons les simulations numériques en utilisant le logiciel FreeFem++ [23].

Nous considérons le carré  $\Omega = ]0, 3[^2$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . Chaque bord est divisé en  $N$  segments égaux et alors  $\Omega$  est divisé en  $2N^2$  triangles (voir Figure 1.1).

Par la suite, nous considérons les solutions exactes  $(\mathbf{u}, p, T) = (\text{rot } \psi, p, T)$ , où  $\psi$ ,  $p$  et  $T$  sont définis de la manière suivante :

$$(1.499) \quad \psi(x, y) = e^{-\beta((x-1)^2+(y-1)^2)},$$

$$(1.500) \quad p(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right)$$

et

$$(1.501) \quad T(x, y) = x^2(x-3)^2y^2(y-3)^2.$$

Nous implémenterons les quatre schémas itératifs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 - (p_h^{i+1}, \text{div } \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (g, S_h)_2, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 + (\nabla p_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (\nabla q_h, \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (g, S_h)_2, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 + (\nabla p_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (\nabla q_h, \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, S_h)_2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 + \gamma(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_2 - (p_h^{i+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (\nabla q_h, \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, S_h)_2. \end{array} \right.$$

Où  $T_h^0$  est une donnée initiale arbitraire. Nous introduisons les trois erreurs de linéarisation définies par :

a) Pour la première et la quatrième formulation variationnelle :

$$(1.502) \quad err_{L_1} = \frac{\|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}}{\|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}}, \quad err_{L_2} = \frac{\|p_h^{i+1} - p_h^i\|_{0, \Omega}}{\|p_h^{i+1}\|_{0, \Omega}} \quad \text{et} \quad err_{L_3} = \frac{|T_h^{i+1} - T_h^i|_{1, \Omega}}{|T_h^{i+1}|_{1, \Omega}}.$$

b) Pour la deuxième et la troisième formulation variationnelle :

$$(1.503) \quad err_{L_1} = \frac{\|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i\|_{0, \Omega}}{\|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0, \Omega}}, \quad err_{L_2} = \frac{|p_h^{i+1} - p_h^i|_{1, \Omega}}{|p_h^{i+1}|_{1, \Omega}} \quad \text{et} \quad err_{L_3} = \frac{|T_h^{i+1} - T_h^i|_{1, \Omega}}{|T_h^{i+1}|_{1, \Omega}}.$$

Nous prenons désormais  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 1$  et  $N = 100$  avec le paramètre du maillage  $h$  qui vaut  $\frac{3}{N}$ . Le but est de valider l'estimation d'erreur *a priori*. Nous considérons  $T_h^0 = 0$ . Nous introduisons le critère d'arrêt suivant :

$$(1.504) \quad err_{L_1} + err_{L_2} + err_{L_3} \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Nous présentons dans la Figure 1.2 la comparaison des solutions numériques (pression et température) avec les solutions exactes (pression et température) pour  $\nu(T) = T + 1$  pour la première formulation variationnelle. Pour les autres formulations variationnelles et pour les autres  $\nu(T)$ , nous avons des résultats de comparaison similaires.

Nous présentons dans la Figure 1.3 la comparaison entre les vitesses numériques et exactes pour  $\nu(T) = T + 1$ . Les comparaisons sont similaires pour les autres formulations variationnelles et les autres formes de  $\nu(T)$ .

Pour le calcul de l'estimation d'erreur, nous définissons l'erreur suivante :



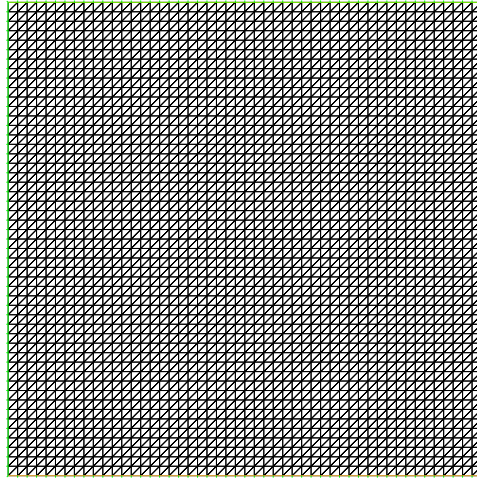


FIGURE 1.1 – Maillage du domaine

a) Pour la première et la quatrième formulation variationnelle :

$$(1.505) \quad err_1 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p - p_h\|_{0, \Omega} + |T - T_h|_{1, \Omega}.$$

b) Pour la deuxième et la troisième formulation variationnelle :

$$(1.506) \quad err_1 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega} + \|p - p_h\|_{1, \Omega} + |T - T_h|_{1, \Omega}.$$

Nous commençons par traiter la dépendance de la quatrième formulation variationnelle en fonction du paramètre  $\gamma$ . Nous présentons dans la Figure 1.4 (respectivement le Tableau 1.2) la comparaison entre les courbes d'erreur en fonction du pas de maillage en échelle logarithmique (respectivement la pente des courbes d'erreur) pour différents  $\gamma$  et différentes formes de  $\nu(T)$  pour la quatrième formulation variationnelle. Nous remarquons que pour  $\gamma = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  présente les meilleurs résultats concernant la pente et le niveau de la courbe d'erreur. Nous choisissons alors  $\gamma = 10^{-3}$  pour la suite.

Nous présentons dans la Figure 1.5 les courbes d'erreur en fonction du pas de maillage  $h$  en échelle logarithmique pour les différentes valeurs de  $\nu(T)$ . Nous testons l'algorithme pour  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 30$  et  $N$  allant de 30 à 120, par pas de 30. L'erreur doit être d'ordre  $h$  et la pente de la ligne droite doit être d'ordre 1. Nous notons F.V pour désigner les formulations variationnelles. D'après le Tableau 1.1, nous remarquons que la pente des courbes d'erreur est presque égale à 1, ce qui nous permet de déduire que les résultats expérimentaux s'accordent avec les résultats théoriques.

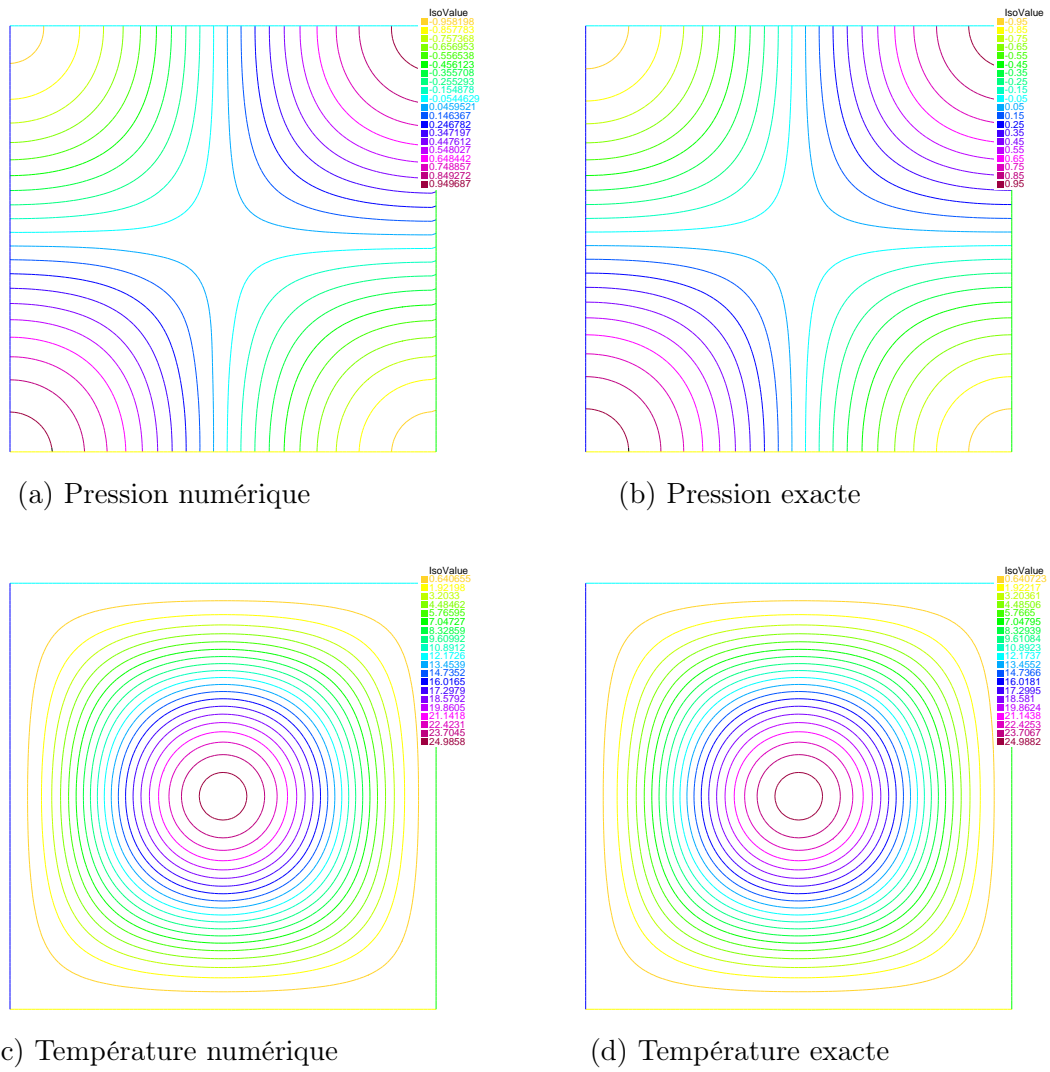
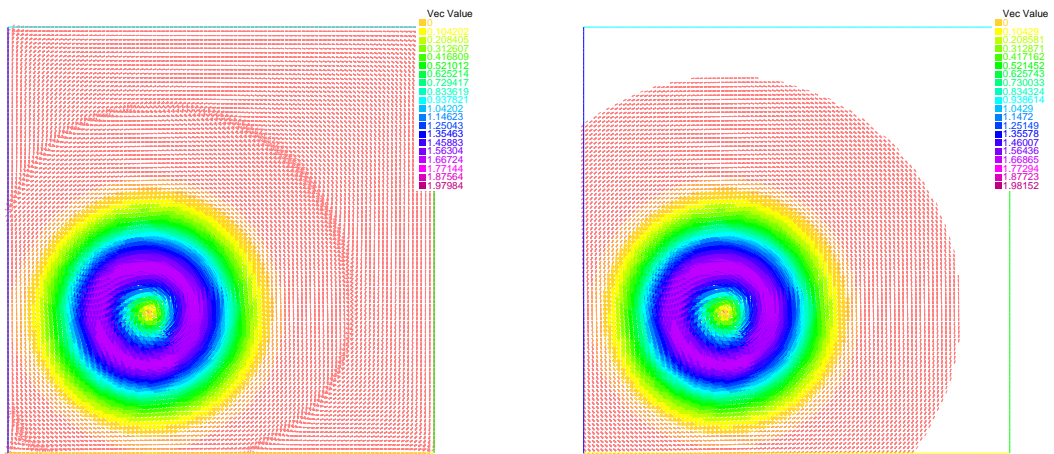
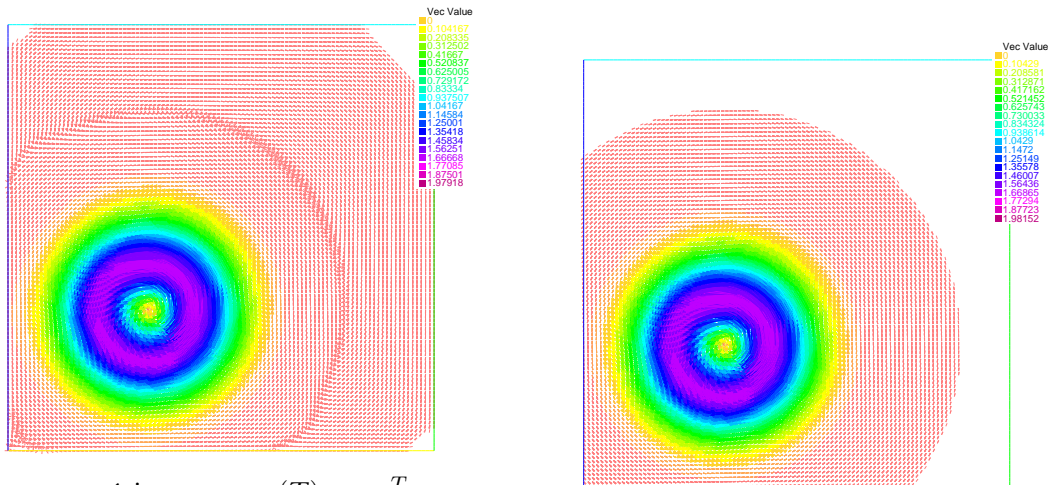


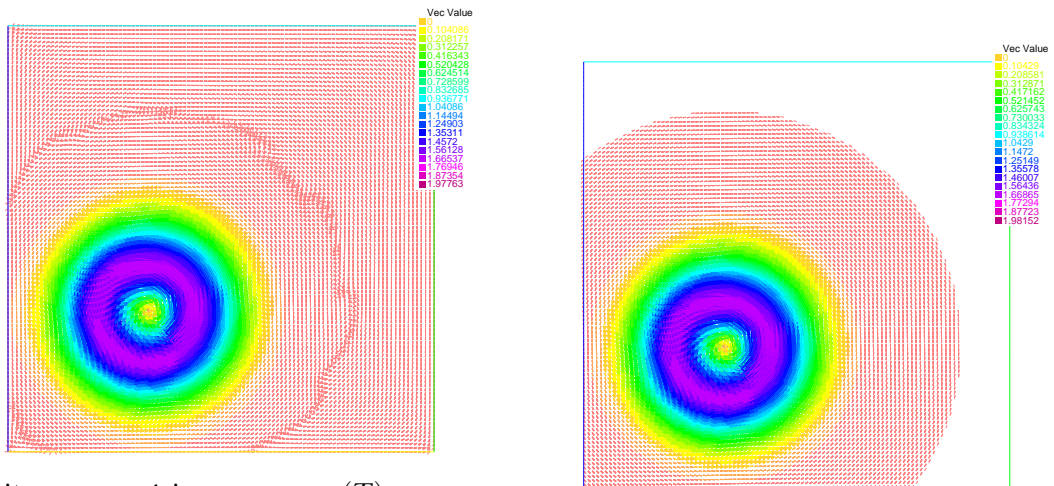
FIGURE 1.2 – Comparaison entre les solutions numériques et exactes pour  $\nu(T) = T + 1$  pour la première formulation variationnelle.



(a) La vitesse numérique pour  $\nu(T) = T + 1$       (b) La vitesse exacte pour  $\nu(T) = T + 1$

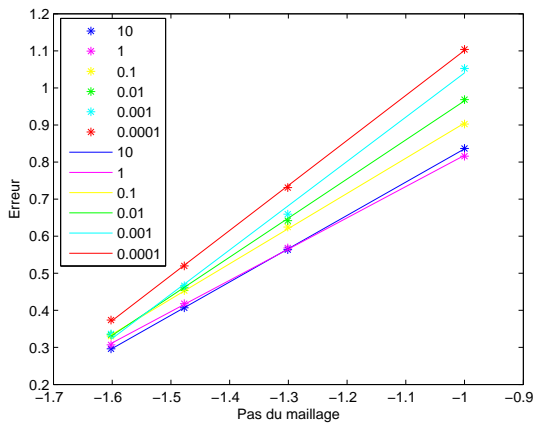


(c) la vitesse numérique pour  $\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$       (d) la vitesse exacte pour  $\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$

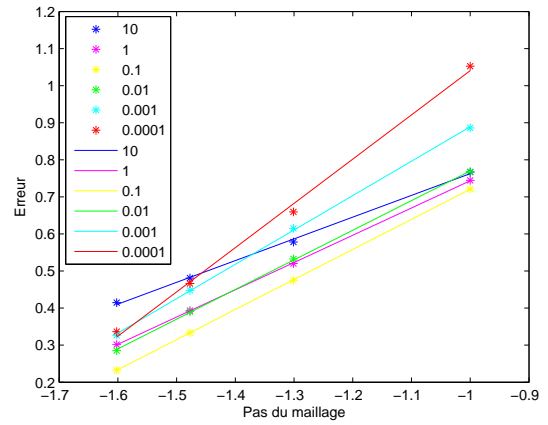


(e) la vitesse numérique pour  $\nu(T) = \sin(T) + 2$       (f) la vitesse exacte pour  $\nu(T) = \sin(T) + 2$

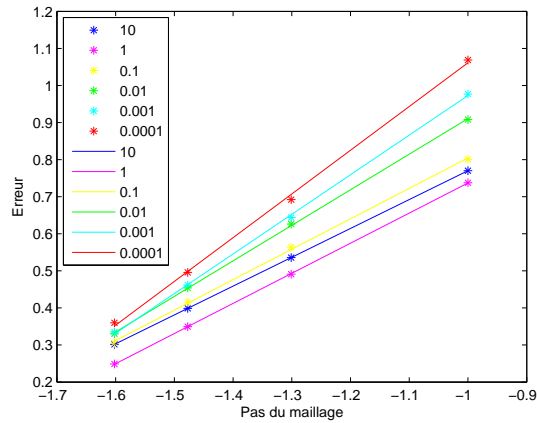
FIGURE 1.3 – Comparaison entre les vitesses numériques et exactes pour différents  $\nu(T)$  pour la première formulation variationnelle.



(a)  $\nu(T) = T + 1$

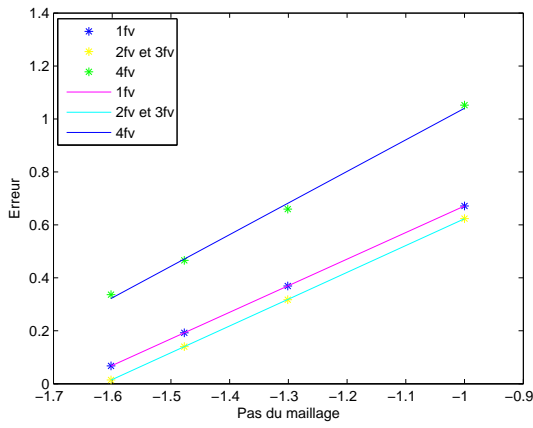


(b)  $\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$

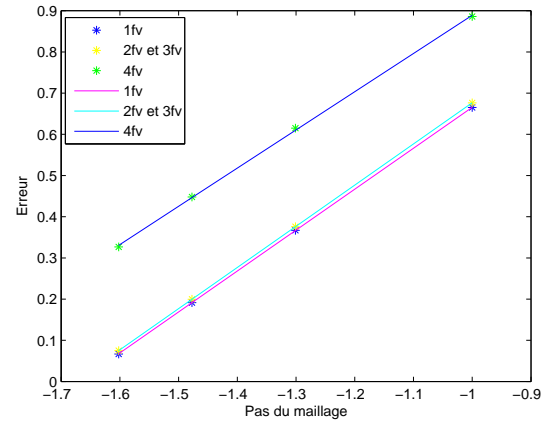


(c)  $\nu(T) = \sin(T) + 2$

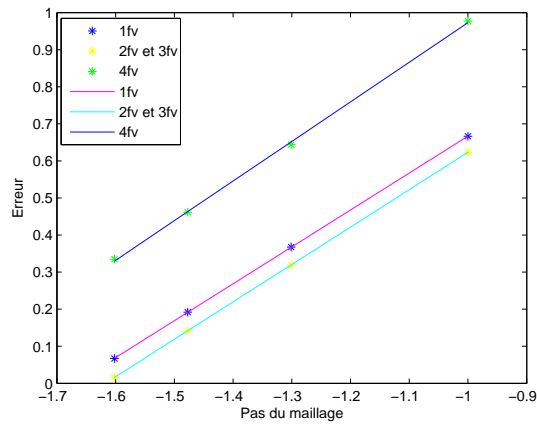
FIGURE 1.4 – Comparaison des courbes d’erreur en échelle logarithmique pour différents  $\gamma$  et à chaque  $\nu(T)$ .



(a)  $\nu(T) = T + 1$



(b)  $\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$



(c)  $\nu(T) = \sin(T) + 2$

FIGURE 1.5 – Courbe d'erreur en échelle logarithmique pour différents  $\nu(T)$ .

| F.V \ $\nu(T)$ | $T + 1$ | $e^{-T} + \frac{1}{10}$ | $\sin(T) + 2$ |
|----------------|---------|-------------------------|---------------|
| 1              | 1.0036  | 0.9938                  | 0.9956        |
| 2              | 1.0122  | 0.9995                  | 1.0091        |
| 3              | 1.0122  | 0.9994                  | 1.0091        |

TABLE 1.1 – Pente des courbes d’erreur pour différentes formulations variationnelles et différentes formes de  $\nu(T)$ .

| $\gamma$ \ $\nu(T)$ | $T + 1$ | $e^{-T} + \frac{1}{10}$ | $\sin(T) + 2$ |
|---------------------|---------|-------------------------|---------------|
| 10                  | 0.8977  | 0.5868                  | 0.7778        |
| 1                   | 0.8428  | 0.7355                  | 0.8122        |
| $10^{-1}$           | 0.9492  | 0.8112                  | 0.8211        |
| $10^{-2}$           | 1.0545  | 0.8691                  | 0.9586        |
| $10^{-3}$           | 1.1936  | 0.9276                  | 1.0682        |
| $10^{-4}$           | 1.2146  | 1.2835                  | 1.1794        |

TABLE 1.2 – Pente des courbes d’erreur pour différentes  $\gamma$  et différentes formes de  $\nu(T)$  pour la quatrième formulation variationnelle.

Dans ce qui suit, afin d’étudier la convergence des formulations variationnelles, nous considérons la solution exacte suivante :

$$(1.507) \quad (\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{T}) = (\mu_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, p, \mu_T T),$$

où  $\mu_{\mathbf{u}}$  et  $\mu_T$  sont des paramètres positives.

Dans la suite, l’algorithme ne converge pas lorsque l’erreur ne décroît pas pour un large nombre d’itérations. Dans les tableaux suivants, nous notons par c que l’algorithme converge et par d lorsque il diverge. Nous présentons dans les trois Tableaux 1.3, 1.4 et 1.5, l’étude de la convergence en fonction des paramètres  $\mu_{\mathbf{u}}$  et  $\mu_T$ , pour  $N = 100$  et  $\nu(T) = T + 1$ . Dans le Tableau 1.3, nous choisissons  $\mu_{\mathbf{u}} = \mu_T = \mu$ . Nous remarquons que pour chaque formulation variationnelle, il existe un seuil au delà duquel l’algorithme ne

converge pas. Ce résultat est en cohérence avec les formules (1.283), (1.321) et (1.353) qui correspondent aux petites conditions de convergence. En effet, lorsque la valeur de  $\mu$  augmente, les normes de  $\mathbf{u}$  et  $T$  augmentent et par conséquent les conditions de petites données ne seront pas vérifiées. Pour compléter l'étude de la convergence, nous présentons dans le Tableau 1.4 (respectivement le Tableau 1.5) des résultats qui corespondent à un  $\mu_{\mathbf{u}}$  constant par formulation variationnelle (respectivement un  $\mu_T$  constant) et nous varions la valeurs de  $\mu_T$  (respectivement  $\mu_{\mathbf{u}}$ ). Nous constatons que la convergence dépend des valeurs de  $\mu_T$  et  $\mu_{\mathbf{u}}$  et par la suite de l'amplitude de la solution théorique.

| F.V \ $\mu$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1           | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 2           | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 3           | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | c   | c   | c   | d   |
| 4           | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | c   | d   | d   | d   |

TABLE 1.3 – Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de  $\mu$ .

| F.V \ $\mu_T$               | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1, $\mu_{\mathbf{u}} = 100$ | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 2, $\mu_{\mathbf{u}} = 90$  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 3, $\mu_{\mathbf{u}} = 150$ | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | c   | c   | c   | d   |
| 4, $\mu_{\mathbf{u}} = 130$ | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | d   | d   | d   | d   |

TABLE 1.4 – Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de  $\mu_T$ .

| F.V \ $\mu_{\mathbf{u}}$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1, $\mu_T = 100$         | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 2, $\mu_T = 90$          | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | d  | d  | d   | d   | d   | d   | d   | d   |
| 3, $\mu_T = 150$         | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | c   | c   | c   | d   |
| 4, $\mu_T = 130$         | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c  | c   | c   | d   | d   | d   | d   |

TABLE 1.5 – Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de  $\mu_{\mathbf{u}}$ .



# Chapitre 2

## Etude a posteriori du problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>2.1</b> | <b>Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .</b>    | <b>102</b> |
| 2.1.1      | Majorations d'erreur . . . . .                              | 102        |
| 2.1.2      | Efficacité . . . . .  | 129        |
| <b>2.2</b> | <b>Simulations numériques <i>a posteriori</i> . . . . .</b> | <b>159</b> |

---

## 2.1 Estimation d'erreur a posteriori

Nous supposons que  $\nu$  est dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  tout au long de ce chapitre. Par conséquent,  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour tout  $p \geq 1$ , où  $\lambda$  est une constante indépendante de  $p$ .

### 2.1.1 Majorations d'erreur

Nous établissons des estimations d'erreur *a posteriori* pour des petites données pour les première, troisième et quatrième problèmes itératifs  $(V_{h,i,1})$ ,  $(V_{h,i,3})$  et  $(V_{h,i,4})$ . Pour le deuxième problème itératif  $(V_{h,i,2})$ , en l'absence de l'existence de la solution et des estimations d'erreur *a priori* correspondantes, il est inutile d'effectuer les estimations *a posteriori* correspondantes.

#### 2.1.1.1 Première formulation variationnelle

Dans cette section concernant la première formulation variationnelle, nous supposons que  $d = 2$  et que  $\Gamma$  est connexe pour pouvoir obtenir une régularité suffisante.

Nous considérons la formulation variationnelle continue  $(V_1)$  et la formulation variationnelle itérative  $(V_{h,i,1})$ . Nous procédons en plusieurs étapes :

- a) Tout d'abord, nous commençons par écrire l'équation du résidu correspondante à l'équation de la température :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} R(S) = & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la troisième équation du problème  $(V_1)$ ,  $R(S)$  devient :

$$(2.2) \quad R(S) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En ajoutant et en retranchant dans le deuxième (respectivement le troisième) terme du membre de droite de l'équation (2.2), le terme  $\nabla S_h$  (respectivement  $S_h$ ) et d'après la troisième équation du problème  $(V_{h,i,1})$ , nous obtenons :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} R(S) = & \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous introduisons une approximation  $g_h$  de  $g$  qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ . Nous aurons :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} R(S) &= \int_{\Omega} (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{K \in \tau_h} \int_K (g_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par partie sur l'équation (2.4) pour avoir :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} R(S) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_{\partial K} (\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right]. \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.1.** En fait le terme  $\Delta T_h^{i+1}$  est nulle sur chaque  $K \in \tau_h$  comme  $T_h^{i+1} \in \mathbb{P}_1$  sur  $K$ . Mais nous préférons de le garder pour la forme de l'indicateur de discrétisation.

b) Nous présentons l'équation du résidu correspondante à la vitesse :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (p - p_h^{i+1})(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la première équation du problème  $(V_1)$ ,  $R_1(\mathbf{v})$  devient :

$$(2.7) \quad R_1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En ajoutant et en retranchant dans le deuxième (respectivement le troisième) terme du membre de droite de l'équation (2.7), le terme  $\mathbf{v}_h$  (respectivement  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ ) et d'après la première équation du problème  $(V_{h,i,1})$ , nous obtenons :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous introduisons une approximation  $\mathbf{f}_h$  de  $\mathbf{f}$  qui est un polynôme de degré  $l$  avec

$l \geq 1$ , sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ . Nous aurons :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \tau_h} \int_K p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f}_h - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

c) Enfin, nous allons présenter la dernière équation du résidu donnée par :

$$(2.10) \quad R_2(q) = \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la deuxième équation du problème  $(V_1)$  et le fait que  $\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} = 0$ ,  $R_2(q)$  devient :

$$(2.11) \quad R_2(q) = 0.$$

Les problèmes  $(V_1)$  et  $(V_{h,i,1})$  donnent les équations suivantes :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} &\alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right] \end{aligned}$$

et

$$(2.13) \quad \begin{aligned} &\int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K p_h^{i+1} \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

Nous gardons la même notation de  $R(S)$  (membre de gauche de l'équation (2.12)), nous notons  $R'(S)$  le membre de droite de l'équation (2.12) et  $R_1(\mathbf{v})$  (respectivement  $R_1'(\mathbf{v})$ )

le membre de gauche (respectivement droite) de l'équation (2.13). Pour tout élément  $K \in \tau_h$ , nous introduisons l'indicateur local de linéarisation et les deux indicateurs locaux de discrétisation :

$$\eta_{K,i}^{(L,1)} = |T_h^{i+1} - T_h^i|_{1,K},$$

$$\eta_{K,i,1}^{(D,1)} = h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}$$

et

$$\eta_{K,i,2}^{(D,1)} = h_K \|\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} + h_K \|\text{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|[p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e\|_{0,e} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|[-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h] \cdot \mathbf{t}_e\|_{0,e},$$

où  $\mathbf{t}_e$  est le vecteur tangent unité de l'arête  $e$ .

**Remarque 2.1.2.** Il est connu qu'en utilisant les éléments finis de Raviart-Thomas, les estimations *a posteriori* correspondantes au problème de Darcy ne sont pas optimales. Pour cela, nous supposons que  $\mathbf{f} \in H(\text{rot}, \Omega)$  et nous aurons :

$$(2.14) \quad \text{rot}(\nu(t) \mathbf{u}) = \text{rot } \mathbf{f}.$$

Dans ce cas, nous enrichissons l'indicateur  $\eta_{K,i,2}^{(D,1)}$  avec des termes supplémentaires afin d'obtenir l'optimalité correspondante.

Dans le théorème suivant, nous considérons que  $S \in H_0^1(\Omega)$  car nous supposons que la solution  $(\mathbf{u}, T) \in L^3(\Omega)^2 \times W^{1,3}(\Omega)$  et dans ce cas nous n'avons plus besoin de prendre la fonction test  $S \in L^\infty(\Omega)$  et l'intégrale  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est bien définie.

**Théorème 2.1.3.** Soient  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,i,1})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^2$ ,  $T \in W^{1,3}(\Omega)$  et  $\mathbf{f} \in H(\text{rot}, \Omega)$  tel que :

$$(2.15) \quad \lambda S_6^{0,2} (\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \alpha \nu_1,$$

où  $S_6^0$  est la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(2.16) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}$$

$$\leq C \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,1)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|[(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e\|_{0,e}^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C' \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,1)})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $C, C'$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $g_h$  (respectivement  $\mathbf{f}_h$ ) est une approximation de  $g$  (respectivement  $\mathbf{f}$ ) qui est constante (respectivement qui est un polynôme de degré  $l$  avec  $l \geq 1$ ) sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ .

**Démonstration** Nous procédons en deux étapes :

a) Nous considérons l'équation (2.12).

Nous commençons par calculer le terme  $R(S)$  :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et nous obtenons :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous prenons  $S = T - T_h^{i+1}$  et d'après la propriété d'antisymétrie, l'équation (2.18) devient :

$$(2.19) \quad \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}^2 = R'(T - T_h^{i+1}) + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nabla T$  dans le deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.19) et nous obtenons :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} &\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla(T_h^{i+1} - T))(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'après la propriété d'antisymétrie, nous éliminons le premier terme du membre de droite de l'équation (2.20) et comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)^2$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous majorons l'équation précédente par les termes suivants :

$$(2.21) \quad \left| \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}.$$

Par la suite, nous majorons le terme  $R'(T - T_h^{i+1})$  :

$$\begin{aligned}
 R'(S) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x})(S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 (2.22) \quad &+ \int_K (g - g_h)(\mathbf{x})(S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\left. - \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s})(S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].
 \end{aligned}$$

Nous avons toujours que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq |a|$  et nous utilisons cette inégalité tout au long de notre travail où nous l'avons besoin. Alors  $R'(S)$  devient :

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad R'(S) &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ (\|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \|g - g_h\|_{0,K}) \|S - S_h\|_{0,K} \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} \|S - S_h\|_{0,e} \right].
 \end{aligned}$$

Nous choisissons pour  $S_h$  l'image de  $S$  par l'opérateur de Clément ou Scott-Zhang  $R_h$  dans  $H_0^1(\Omega)$  défini par l'équation (1.191). Par la suite, d'après l'équation (1.192), nous avons :

$$\begin{aligned}
 (2.24) \quad R'(S) &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ C_1 h_K (\|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \|g - g_h\|_{0,K}) |S|_{1,\Delta_K} \right. \\
 &\left. + \frac{C_2}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} |S|_{1,\Delta_e} \right],
 \end{aligned}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Nous utilisons le fait que  $|S|_{1,\Delta_e} \leq |S|_{1,\Delta_K}$  et l'inégalité

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad \sum (a + a')b &\leq \left( (\sum a^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum a'^2)^{\frac{1}{2}} \right) (\sum b^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{2} (\sum (a^2 + a'^2))^{\frac{1}{2}} (\sum b^2)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Nous prenons :

$$(2.26) \quad a = h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e},$$

$$(2.27) \quad a' = h_K \|g - g_h\|_{0,K}$$

et

$$(2.28) \quad b = |S|_{1,\Delta_K},$$

et nous aurons :

$$(2.29) \quad R'(T - T_h^{i+1}) \leq C_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega},$$

où  $C_3$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous concluons par l'équation suivante :

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} &\leq C \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

b) Nous considérons l'équation (2.13). Soit  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$  tel que  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Nous traitons le terme  $R_1(\mathbf{v})$  et nous avons :

$$(2.31) \quad R_1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \nu(T_h^{i+1}(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  dans l'équation (2.31) pour obtenir :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T) - \nu(T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^{i+1}) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

L'équation (2.32) s'écrit alors de la forme :

$$(2.33) \quad \begin{aligned} &\int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= R'_1(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} (\nu(T_h^{i+1}) - \nu(T))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$ , les deuxième et troisième termes du membre de droite de l'équation (2.33). Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^2$ , la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) nous permet d'avoir :

$$(2.34) \quad I_1 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$



Pour les mêmes raisons, le terme  $I_2$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.35) \quad I_2 \leq \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h^{i+1} - T_h^i|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $\mathbf{v}$  est un élément tel que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  et comme  $\Gamma$  est connexe alors il existe un  $\eta \in H_0^1(\Omega)$  [22], qui satisfait :

$$(2.36) \quad \mathbf{v} = \operatorname{rot} \eta.$$

De plus,

$$(2.37) \quad |\eta|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

Nous définissons :

$$(2.38) \quad \mathbf{v}_h = \operatorname{rot} R_h \eta,$$

avec  $R_h$  est l'interpolation de Clément ou Scott-Zhang de  $\eta$ . Nous majorons le terme  $R'_1(\mathbf{v})$  :

$$(2.39) \quad \begin{aligned} R'_1(\mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot}(\eta - R_h \eta)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot}(\eta - R_h \eta)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par partie et  $R'(\mathbf{v}, q)$  devient :

$$(2.40) \quad R'_1(\mathbf{v})$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ (\|\operatorname{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} + \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}) \|\eta - R_h \eta\|_{0,K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} (\| [(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} + \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}) \|\eta - R_h \eta\|_{0,e} \right]. \end{aligned}$$

Nous utilisons les propriétés de l'opérateur  $R_h$  l'équation (1.192), pour obtenir :

$$(2.41) \quad R'_1(\mathbf{v})$$

$$\begin{aligned} &\leq C_4 \sum_{K \in \tau_h} \left[ h_K (\|\operatorname{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} + \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}) |\eta|_{1,\Delta K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} (\| [(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} + \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}) |\eta|_{1,\Delta e} \right], \end{aligned}$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous utilisons le fait que  $|\eta|_{1,\Delta_e} \leq |\eta|_{1,\Delta_K}$  et l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.42) \quad a = h_K \|\operatorname{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e},$$

$$(2.43) \quad a' = h_K \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K} + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}$$

et

$$(2.44) \quad b = |\eta|_{1,\Delta_K},$$

pour obtenir la majoration suivante :

$$(2.45) \quad \begin{aligned} R'_1(\mathbf{v}) &\leq C_5 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $C_5$  est une constante indépendante de  $h$ . Par la suite, nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}$  et nous aurons d'après l'équation (1.81) :

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq C_5 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,1)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où d'après l'équation (2.30), nous aurons :

$$(2.47) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq C_6 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,1)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_K^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\alpha} S_6^{02} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,1)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $C_6$  est une constante indépendante de  $h$ . Sous la condition (2.15) du Théorème 2.1.3, nous concluons.

c) Nous considérons l'équation (2.13).

Nous traitons le terme  $R_1(\mathbf{v})$  par :

$$(2.48) \quad \begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(T_h^{i+1}(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \text{ dans l'équation (2.48) pour obtenir :} \\ \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= R'_1(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} (\nu(T_h^{i+1}) - \nu(T))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu(T_h^i)(\mathbf{x}) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Nous traitons les deuxième et troisième termes du membre de droite de l'équation (2.49) par la même démarche déjà démontré avant. Puisque  $(p_h^{i+1} - p) \in L_0^2(\Omega)$ , alors d'après la condition inf-sup usuelle entre  $H_0^1(\Omega)^2$  et  $L_0^2(\Omega)$  [22], il existe un  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ , tel que :

$$(2.50) \quad ((p_h^{i+1} - p), \operatorname{div} \mathbf{v})_2 = \|p_h^{i+1} - p\|_{0,\Omega}^2$$

et

$$(2.51) \quad |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \|p_h^{i+1} - p\|_{0,\Omega}.$$

Dans le but de bien choisir  $\mathbf{v}_h$ , nous introduisons l'opérateur de projection  $\Pi_h$  de  $H^1(\Omega)^2$  dans  $\mathcal{W}_{h,1}$  introduit dans [13] qui vérifie l'estimation suivante :

$$(2.52) \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^2, \quad \|\mathbf{w} - \Pi_h \mathbf{w}\|_{0,K} \leq c_1 h_K |\mathbf{w}|_{1,K},$$

où  $K$  est un triangle quelconque de  $\tau_h$  et  $c_1$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous avons également besoin de traiter le terme  $\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,e}$ , où  $e$  est une arête de l'élément  $K \in \tau_h$ . Pour cela, nous intercalons le terme  $\rho_h \mathbf{v}$ , où  $\rho_h$  est l'opérateur défini par (1.188). Comme

$$(2.53) \quad \|\mathbf{v} - \rho_h \mathbf{v}\|_{0,e} \leq c_2 h_e^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,K},$$

il suffit de démontrer que  $\|\rho_h \mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,e} \leq c_3 h_e^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,K}$ , où  $c_2$  et  $c_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Or,

$$\begin{aligned}
 \|\rho_h \mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,e}^2 &= \frac{|e|}{|\hat{e}|} \|\widehat{\rho_h \mathbf{v}} - \widehat{\Pi_h \mathbf{v}}\|_{0,\hat{e}}^2 \\
 &\leq \frac{|e|}{|\hat{e}|} \|\widehat{\rho_h \mathbf{v}} - \widehat{\Pi_h \mathbf{v}}\|_{0,\partial\hat{K}}^2 \\
 (2.54) \qquad &\leq c_4 \frac{|e|}{|\hat{e}|} \|\widehat{\rho_h \mathbf{v}} - \widehat{\Pi_h \mathbf{v}}\|_{0,\hat{K}}^2 \\
 &\leq c_5 \frac{|e|}{|K|} \|\rho_h \mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,K}^2,
 \end{aligned}$$

où  $c_4$  et  $c_5$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Nous intercalons de nouveau le terme  $\mathbf{v}$  dans  $\|\rho_h \mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,K}$  et nous utilisons le fait que  $|K| \geq C' \rho_K^2$ , où  $C'$  est une constante indépendante de  $h$ , pour avoir le résultat voulu.

Nous déduisons alors la majoration suivante :

$$(2.55) \qquad \|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,e} \leq c_6 h_e^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,K},$$

où  $c_6$  est une constante indépendante de  $h$ .

Finalement, nous définissons :

$$(2.56) \qquad \mathbf{v}_h = \Pi_h \mathbf{v}.$$

Nous terminons par majorer le terme  $R'_1(\mathbf{v})$  :

$$\begin{aligned}
 R'_1(\mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 (2.57) \qquad &+ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\left. + \int_K p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right].
 \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par partie sur l'équation (2.57) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 R'_1(\mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 (2.58) \qquad &+ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} \right].
 \end{aligned}$$

En fait le terme  $\nabla p_h^{i+1}$  est nulle sur chaque  $K \in \tau_h$  comme  $p_h^{i+1} \in \mathbb{P}_0$  sur  $K$ . Mais nous préférons de le garder pour la forme de l'indicateur de discrétisation.

$R'_1(\mathbf{v})$  devient :

$$(2.59) \quad \begin{aligned} R'_1(\mathbf{v}) &\leq \sum_{K \in \tau_h} [(\| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}) \|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,K} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \|[p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e\|_{0,e} \|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,e}]. \end{aligned}$$

Nous utilisons les propriétés de l'opérateur  $\Pi_h$  (les équations (2.52) et (2.55)), pour obtenir :

$$(2.60) \quad \begin{aligned} R'_1(\mathbf{v}) &\leq C_7 \sum_{K \in \tau_h} [h_K (\| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}) |\mathbf{v}|_{1,K} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|[p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e\|_{0,e} |\mathbf{v}|_{1,K}], \end{aligned}$$

où  $C_7$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous utilisons l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.61) \quad a = h_K \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|[p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e\|_{0,e},$$

$$(2.62) \quad a' = h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}$$

et

$$(2.63) \quad b = |\mathbf{v}|_{1,K},$$

pour obtenir la majoration suivante :

$$(2.64) \quad R'_1(\mathbf{v}) \leq C_8 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \right),$$

où  $C_8$  est une constante indépendante de  $h$ . Par la suite,

$$(2.65) \quad \begin{aligned} \|p - p_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq \frac{C_8}{\beta} \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,1)})^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,1)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

### 2.1.1.2 Troisième formulation variationnelle

Nous considérons la formulation variationnelle continue ( $V_2$ ) et la formulation variationnelle itérative ( $V_{h,i,3}$ ). Nous procédons en plusieurs étapes :

- a) Tout d'abord, nous commençons par écrire l'équation du résidu correspondante à l'équation de la température :

$$(2.66) \quad \begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la troisième équation du problème ( $V_2$ ),  $R(S)$  devient :

$$(2.67) \quad \begin{aligned} R(S) &= \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant dans le deuxième (respectivement le troisième et le quatrième) terme du membre de droite de l'équation (2.67), le terme  $\nabla S_h$  (respectivement  $S_h$ ) et d'après la troisième équation du problème ( $V_{h,i,3}$ ), nous obtenons :

$$(2.68) \quad \begin{aligned} R(S) &= \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous introduisons une approximation  $g_h$  de  $g$  qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ . Nous aurons :

$$(2.69) \quad \begin{aligned} R(S) &= \int_{\Omega} (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \alpha \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{K \in \tau_h} \int_K (g_h - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1})(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par partie sur l'équation (2.69) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 (2.70) \quad R(S) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad + \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad \left. - \alpha \int_{\partial K} (\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].
 \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.4.** En fait le terme  $\Delta T_h^{i+1}$  est nulle sur chaque  $K \in \tau_h$  comme  $T_h^{i+1} \in \mathbb{P}_1$  sur  $K$ . Mais nous préférons de le garder pour la forme de l'indicateur de discrétisation.

b) Nous présentons l'équation du résidu correspondante à la vitesse :

$$\begin{aligned}
 (2.71) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Omega} \nabla(p - p_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la première équation du problème  $(V_2)$ ,  $R_1(\mathbf{v})$  devient :

$$(2.72) \quad R_1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En ajoutant et en retranchant dans le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (2.72), le terme  $\mathbf{v}_h$  et d'après la première équation du problème  $(V_{h,i,3})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.73) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous introduisons une approximation  $\mathbf{f}_h$  de  $\mathbf{f}$  qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ . Nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (2.74) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f}_h - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right].
 \end{aligned}$$

c) Enfin, nous allons présenter la dernière équation du résidu donnée par :

$$(2.75) \quad R_2(q) = \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la deuxième équation du problème (P),  $R_2(q)$  devient :

$$(2.76) \quad R_2(q) = - \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En ajoutant et en retranchant dans le terme du membre de droite de l'équation (2.76), le terme  $\nabla q_h$ , nous obtenons :

$$(2.77) \quad R_2(q) = - \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla(q - q_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous appliquons l'intégration par partie,

$$(2.78) \quad R_2(q) = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (q - q_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s})(q - q_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].$$

Pour chaque arête  $e$  du maillage, nous notons :

$$(2.79) \quad \phi_{h,1}^e = \begin{cases} \frac{1}{2} [\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e & \text{si } e \in \Gamma_h^i, \\ \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \mathbf{n} & \text{si } e \in \Gamma_h^b. \end{cases}$$

Les problèmes  $(V_2)$  et  $(V_{h,i,3})$  donnent les équations suivantes :

$$(2.80) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e (\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right], \end{aligned}$$

$$(2.81) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] \end{aligned}$$



et

$$(2.82) \quad \int_{\Omega} \nabla q(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (q - q_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \sum_{e \in \partial K} \int_e \phi_{h,1}^e(\mathbf{s})(q - q_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].$$

Nous gardons la même notation de  $R(S)$  (membre de gauche de l'équation (2.80)), nous notons  $R'(S)$  le membre de droite de l'équation (2.80),  $R_1(\mathbf{v})$  (respectivement  $R'_1(\mathbf{v})$ ) le membre de gauche (respectivement droite) de l'équation (2.81) et  $R_2(q)$  (respectivement  $R'_2(q)$ ) le membre de gauche (respectivement droite) de l'équation (2.82). Pour tout élément  $K \in \tau_h$ , nous introduisons l'indicateur local de linéarisation et les deux indicateurs locaux de discrétisation :

$$\eta_{K,i}^{(L,3)} = |T_h^{i+1} - T_h^i|_{1,K},$$

$$\eta_{K,i,1}^{(D,3)} = h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}$$

et

$$\eta_{K,i,2}^{(D,3)} = \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + h_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \sum_{e \in \partial K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}.$$

De même, nous considérons la fonction test  $S$  dans  $H_0^1(\Omega)$  comme nous supposons que  $(\mathbf{u}, T) \in L^3(\Omega)^d \times W^{1,3}(\Omega)$  dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1.5.** *Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  les solutions respectives de  $(V_2)$  et  $(V_{h,i,3})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$  et  $T \in W^{1,3}(\Omega)$  tel que :*

$$(2.83) \quad \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 (S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_{\infty}) < 2\alpha\nu_1,$$

où  $S_6^0$  la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(2.84) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + |p - p_h^{i+1}|_{1,\Omega} + |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \\ & \leq C \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,3)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,3)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + C' \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,3)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $C, C'$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $g_h$  (respectivement  $\mathbf{f}_h$ ) est une approximation de  $g$  (respectivement  $\mathbf{f}$ ) qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ .

**Démonstration** La démonstration est illustrée en deux étapes :

a) Nous considérons l'équation (2.80).

Nous commençons par calculer le terme  $R(S)$  :

(2.85)

$$\begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nabla T_h^{i+1}$  dans le second terme du membre droite de l'équation (2.85) et nous obtenons :

(2.86)

$$\begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous prenons  $S = T - T_h^{i+1}$ , nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  et  $T$  (respectivement  $\nabla T$ ) dans le troisième (respectivement quatrième) terme de l'équation (2.86). Comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et d'après la propriété d'antisymétrie, nous aurons :

(2.87)

$$\begin{aligned} \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}^2 &= R(T - T_h^{i+1}) - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ (2.88) \quad &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous appliquons la formule de Green et comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)$  et  $T \in L^\infty(\Omega)$ , alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous majorons l'équation précédente de la manière suivante :

$$(2.89) \quad I \leq \left( \frac{S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega}.$$

Par la suite, nous majorons le terme  $R'(T - T_h^{i+1})$  :

$$\begin{aligned}
 (2.90) \quad R'(S) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x})(S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad + \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s})(S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].
 \end{aligned}$$

Il devient :

$$\begin{aligned}
 (2.91) \quad R'(S) &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ (\|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \|g - g_h\|_{0,K}) \times \right. \\
 &\quad \left. \|S - S_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} \|S - S_h\|_{0,e} \right].
 \end{aligned}$$

Nous choisissons  $S_h$  l'image de  $S$  par l'opérateur de Clément ou Scott-Zhang  $R_h$  dans  $H_0^1(\Omega)$  défini par l'équation (1.191). Par la suite, d'après l'équation (1.192), nous avons :

$$\begin{aligned}
 (2.92) \quad R'(S) &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ C_1 h_K (\|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} \right. \\
 &\quad \left. + \|g - g_h\|_{0,K}) |S|_{1,\Delta_K} + \frac{C_2}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} |S|_{1,\Delta_e} \right],
 \end{aligned}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Nous utilisons le fait que  $|S|_{1,\Delta_e} \leq |S|_{1,\Delta_K}$  et l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.93) \quad a = h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e},$$

$$(2.94) \quad a' = h_K \|g - g_h\|_{0,K}$$

et

$$(2.95) \quad b = |S|_{1,\Delta_K},$$

et nous aurons :

$$(2.96) \quad R'(T - T_h^{i+1}) \leq C_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,3)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega},$$

où  $C_3$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous concluons par l'équation suivante :

$$(2.97) \quad \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C_4 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,3)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}.$$

b) Nous considérons l'équation (2.82). Nous traitons le terme  $R'_2(q)$  en prenant  $q_h = R_h q$  (équation (1.192) modifié pour qu'elle soit à moyenne nulle) pour obtenir :

$$(2.98) \quad R'_2(q) \leq C_5 \sum_{K \in \tau_h} [h_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |q|_{1,\Delta K} + \sum_{e \in \partial K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e} |q|_{1,\Delta e}],$$

où  $C_5$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous utilisons le fait que  $|q|_{1,\Delta_e} \leq |q|_{1,\Delta_K}$  et l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.99) \quad a = h_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \sum_{e \in \partial K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}$$

et

$$(2.100) \quad b = |q|_{1,\Delta K},$$

pour obtenir la majoration suivante :

$$(2.101) \quad R'_2(q) \leq C_5 \left( \sum_{K \in \tau_h} [h_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K} h_e \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}^2] \right)^{\frac{1}{2}} |q|_{1,\Omega}.$$

Nous posons  $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}$  et nous avons :

$$(2.102) \quad (\nabla q, \mathbf{z})_2 = R'_2(q).$$

Nous appliquons la condition inf-sup (1.164), il existe un  $\mathbf{z}_r \in L^2(\Omega)^3$  tel que, pour tout  $q \in H^1(\Omega)$

$$(2.103) \quad R'_2(q) = (\nabla q, \mathbf{z}_r)_2,$$

avec

$$(2.104) \quad \|\mathbf{z}_r\|_{0,\Omega} \leq \sup_{q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)} \frac{R'_2(q)}{|q|_{1,\Omega}}.$$

Par la suite, nous aurons :

$$(2.105) \quad \|\mathbf{z}_r\|_{0,\Omega} \leq C_5 \left( \sum_{K \in \tau_h} [h_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K} h_e \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}^2] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- c) Nous considérons l'équation (2.81). Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{z}_r = \mathbf{z}_0$ , alors  $(\nabla q, \mathbf{z}_0)_2 = 0$

Nous traitons le terme  $R_1(\mathbf{z}_0)$  :

$$(2.106) \quad R_1(\mathbf{z}_0) = \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et

$\int_{\Omega} \nu(T_h^{i+1}(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  dans l'équation (2.106) pour obtenir :

$$(2.107) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{z}_0\|_{0,\Omega}^2 &\leq R'_1(\mathbf{z}_0) + \int_{\Omega} (\nu(T_h^{i+1}) - \nu(T))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i)(\mathbf{x}) \mathbf{z}_r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$ , le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (2.107). Pour la majoration de  $I_1$  et  $I_2$ , nous répétons les mêmes démarches effectuées au Théorème 2.1.3.

Nous terminons par majorer le terme  $R'_1(\mathbf{z}_0)$  :

$$(2.108) \quad \begin{aligned} R'_1(\mathbf{z}_0) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right], \end{aligned}$$

de la manière suivante :

$$(2.109) \quad R'_1(\mathbf{z}_0) \leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ (-\|\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}) \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h\|_{0,K} \right].$$

Nous prenons  $\mathbf{v}_h$  égale à 0. Nous utilisons l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.110) \quad a = \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K},$$

$$(2.111) \quad a' = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}$$

et

$$(2.112) \quad b = \|\mathbf{z}_0\|_{0,K},$$

et nous aurons :

$$(2.113) \quad R'_1(\mathbf{z}_0) \leq C_6 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,3)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{z}_0\|_{0,\Omega},$$

où  $C_6$  est une constante indépendante de  $h$ . Par la suite,

$$(2.114) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{z}_0\|_{0,\Omega} &\leq C_6 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,3)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \nu_2 \|\mathbf{z}_r\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,3)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

D'où d'après l'équation (2.97), nous aurons :

$$(2.115) \quad \begin{aligned} \nu_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} &\leq C_7 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,3)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,3)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \frac{S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty}{2\alpha} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,3)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $C_7$  est une constante indépendante de  $h$ . Sous la condition (2.83) du Théorème 2.1.5, nous concluons.

- d) Pour l'estimation de la pression, nous suivons la même démarche suivi du Théorème 2.1.3.

□

### 2.1.1.3 Quatrième formulation variationnelle

Nous considérons la formulation variationnelle continue ( $V_1$ ) et la formulation variationnelle itérative ( $V_{h,i,4}$ ). Nous procédons en plusieurs étapes :

- a) Tout d'abord, nous commençons par écrire l'équation du résidu correspondante à l'équation de la température :

$$(2.116) \quad \begin{aligned} R(S) &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant les troisièmes équations des problèmes ( $V_1$ ) et ( $V_{h,i,4}$ ) et en suivant la même démarche déjà effectuée pour la première formulation variationnelle,  $R(S)$

devient égale à :

$$\begin{aligned}
 R(S) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 (2.117) \quad &+ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\left. - \alpha \int_{\partial K} (\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right],
 \end{aligned}$$

où  $g_h$  est une approximation de  $g$  qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ .

**Remarque 2.1.6.** En fait le terme  $\Delta T_h^{i+1}$  est nulle sur chaque  $K \in \tau_h$  comme  $T_h^{i+1} \in \mathbb{P}_1$  sur  $K$ . Mais nous préférons de le garder pour la forme de l'indicateur de discrétisation.

b) Nous présentons l'équation du résidu correspondante à la vitesse :

$$\begin{aligned}
 (2.118) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p - p_h^{i+1})(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la première équation du problème  $(V_1)$ ,  $R_1(\mathbf{v})$  devient égale à :

$$\begin{aligned}
 (2.119) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant dans le deuxième (respectivement le troisième et le quatrième) terme du membre de droite de l'équation (2.119) le terme  $\mathbf{v}_h$  (respectivement  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ ) et d'après la première équation du problème  $(V_{h,i,4})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.120) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous introduisons une approximation  $\mathbf{f}_h$  de  $\mathbf{f}$  qui est constante sur chaque élément

$K$  de  $\tau_h$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 (2.121) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \sum_{K \in \tau_h} \int_K (p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f}_h - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par partie sur l'équation (2.121) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 (2.122) \quad R_1(\mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 &+ \int_K (-\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &\left. + \int_{\partial K} ((p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) \mathbf{n})(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{s}) \, ds \right].
 \end{aligned}$$

c) Enfin, nous allons présenter l'équation du résidu donnée par :

$$(2.123) \quad R_2(q) = \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la deuxième équation du problème  $(P)$ ,  $R_2(q)$  devient égale à :

$$(2.124) \quad R_2(q) = - \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En ajoutant et en retranchant dans le terme du membre de droite de l'équation (2.124), le terme  $q_h$ , nous obtenons :

$$(2.125) \quad R_2(q) = - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (q - q_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Pour chaque arête (ou face),  $e$  du maillage, nous notons :

$$(2.126) \quad \phi_{h,2}^e = \begin{cases} \frac{1}{2} [(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) \mathbf{n}]_e & \text{si } e \in \Gamma_h^i, \\ (p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) \mathbf{n} & \text{si } e \in \Gamma_h^b. \end{cases}$$



Les problèmes  $(V_1)$  et  $(V_{h,i,4})$  donnent les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (2.127) \quad & \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. + \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot (S - S_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) (S - S_h)(\mathbf{s}) \, ds \right] \\
 & \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.128) \quad & + \int_{\Omega} p_h^{i+1}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{e \in \partial K} \int_e \phi_{h,2}^e(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{s}) \, ds \right]
 \end{aligned}$$

et

$$(2.129) \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (q - q_h)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous gardons la même notation de  $R(S)$  (membre de gauche de l'équation (2.127)), nous notons  $R'(S)$  le membre de droite de l'équation (2.127),  $R_1(\mathbf{v})$  (respectivement  $R'_1(\mathbf{v})$ ) le membre de gauche (respectivement droite) de l'équation (2.128) et  $R_2(q)$  (respectivement  $R'_2(q)$ ) le membre de gauche (respectivement droite) de l'équation (2.129). Pour tout élément  $K \in \tau_h$ , nous introduisons l'indicateur local de linéarisation et les deux indicateurs locaux de discrétisation :

$$\begin{aligned}
 \eta_{K,i}^{(L,4)} &= |T_h^{i+1} - T_h^i|_{1,K}, \\
 \eta_{K,i,1}^{(D,4)} &= h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \eta_{K,i,2}^{(D,4)} &= \|-\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \\
 & \quad + \sum_{e \in \partial K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,2}^e\|_{0,e}.
 \end{aligned}$$

Nous prenons la fonction test  $S$  seulement dans  $H_0^1(\Omega)$  comme la solution exacte vérifie une régularité supplémentaire dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1.7.** Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T)$  et  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$  les solutions respectives de  $(V_1)$  et  $(V_{h,i,4})$ . Nous supposons que  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$  et  $T \in W^{1,3}(\Omega)$ , tel que :

$$(2.130) \quad \lambda S_6^{02}(\|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}) < \frac{\alpha}{2} \min(\nu_1, \gamma),$$

où  $S_6^0$  la constante de la continuité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$  (Proposition 1.1.3). Il existe un nombre  $h_0 > 0$  qui dépend de  $\gamma$ , tel que pour tout  $h < h_0$ , nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$(2.131) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0, \Omega} + |T - T_h^{i+1}|_{1, \Omega} \\ & \leq C \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,4)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,4)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + C' \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,4)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $C, C'$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $g_h$  (respectivement  $\mathbf{f}_h$ ) est une approximation de  $g$  (respectivement  $\mathbf{f}$ ) qui est constante sur chaque élément  $K$  de  $\tau_h$ .

**Démonstration** La preuve se fait en deux étapes :

- a) Nous répétons la même démarche déjà effectué dans la première partie du Théorème 2.1.3 pour avoir l'équation suivante :

$$(2.132) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{2} |T - T_h^{i+1}|_{1, \Omega} & \leq C_1 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,4)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0, \Omega}, \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $h$ .

- b) Nous considérons l'équation (2.129). Nous traitons le terme  $R'_2(q)$  en prenant  $q_h = 0$  (équation (1.188) pour obtenir :

$$(2.133) \quad R'_2(q) \leq C_2 \sum_{K \in \tau_h} \|\text{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|q\|_{0,K},$$

où  $C_2$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous utilisons l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.134) \quad a = \|\text{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}$$

et

$$(2.135) \quad b = \|q\|_{0,K},$$

pour obtenir la majoration suivante :

$$(2.136) \quad R'_2(q) \leq C_2 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{0,\Omega}.$$

Nous posons  $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}$  et nous avons :

$$(2.137) \quad (q, \operatorname{div} \mathbf{z})_2 = R'_2(q).$$

Nous appliquons la condition inf-sup (1.122), il existe un  $\mathbf{z}_r \in H_0(\operatorname{div}, \Omega)$  tel que :

$$(2.138) \quad R'_2(q) = (q, \operatorname{div} \mathbf{z}_r)_2,$$

avec

$$(2.139) \quad \|\mathbf{z}_r\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \leq \sup_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{R'_2(q)}{\beta' \|q\|_{0,\Omega}}.$$

Par la suite, nous aurons :

$$(2.140) \quad \|\mathbf{z}_r\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \leq C_2 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- c) Nous considérons l'équation (2.128). Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{z}_r = \mathbf{z}_0$ , alors  $(q, \operatorname{div} \mathbf{z}_0)_2 = 0$

Nous traitons le terme  $R_1(\mathbf{z}_0)$  :

$$(2.141) \quad R_1(\mathbf{z}_0) = \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\int_{\Omega} \nu(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et

$\int_{\Omega} \nu(T_h^{i+1}(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  pour obtenir :

$$(2.142) \quad \begin{aligned} \min(\nu_1, \gamma) \|z_0\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 &\leq R'_1(\mathbf{z}_0) + \int_{\Omega} (\nu(T_h^{i+1}) - \nu(T))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i) - \nu(T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu(T_h^i)(\mathbf{x}) \mathbf{z}_r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{z}_r(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$ , le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (2.142). Pour la majoration de  $I_1$  et  $I_2$ , nous répétons les mêmes démarches effectuées au Théorème 2.1.3.

Nous terminons par majorer le terme  $R'_1(\mathbf{z}_0)$  donné par :

(2.143)

$$\begin{aligned} R'_1(\mathbf{z}_0) &= \sum_{K \in \tau_h} \left[ \int_K (-\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{e \in \partial K} \int_e \phi_{h,2}^e(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h)(\mathbf{s}) \, ds \right]. \end{aligned}$$

$R'_1(\mathbf{z}_0)$  sera majoré de la manière suivante :

(2.144)

$$\begin{aligned} R'_1(\mathbf{z}_0) &\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[ (\| -\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}) \times \right. \\ &\quad \left. \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h\|_{0,K} + \sum_{e \in \partial K} \|\phi_{h,2}^e\|_{0,e} \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{v}_h\|_{0,e} \right]. \end{aligned}$$

Nous prenons  $\mathbf{v}_h = 0$  et nous utilisons l'inégalité (2.25), en prenant :

$$(2.145) \quad a = \| -\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \sum_{e \in \partial K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,2}^e\|_{0,e},$$

$$(2.146) \quad a' = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}$$

et

$$(2.147) \quad b = \|\mathbf{z}_0\|_{H(\operatorname{div}, K)},$$

et nous aurons :

$$(2.148) \quad R'_1(\mathbf{z}_0) \leq C_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,4)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}, \right.$$

où  $C_3$  est une constante indépendante de  $h$ . Par la suite,

$$\begin{aligned} (2.149) \quad &\min(\nu_1, \gamma) \|\mathbf{z}_0\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \\ &\leq C_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,2}^{(D,4)})^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} + (\nu_2 + \gamma) \|\mathbf{z}_r\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,4)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

D'où d'après l'équation (2.132), nous aurons :

(2.150)

$$\begin{aligned} \min(\nu_1, \gamma) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{H(\text{div}, \Omega)} &\leq C_4 \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D,4)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D,4)})^2 + h_K^2 \|g - g_h\|_{0,K}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha} \lambda S_6^{02} \|\mathbf{u}\|_3 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \\ &\quad \times \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega} + \lambda S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 \left( \sum_{K \in \tau_h} (\eta_{K,i}^{(L,4)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $h$ . Sous la condition (2.130) du Théorème 2.1.7, nous concluons.

- d) Pour l'estimation de la pression, nous suivons la même démarche suivi du Théorème 2.1.3. □

**Remarque 2.1.8.** Nous avons établi des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de couplage Darcy et température en supposant que la solution exacte vérifie une certaine régularité et en se restreignant aux petites données. Dans le cadre des équations aux dérivées partielles non-linéaires, il existe d'autres approches qui nous permettent d'établir des estimations d'erreur *a posteriori* dont nous citons le théorème de Poussin-Rappaz [31] et [37]. Dans le cadre de ce dernier théorème, nous démontrons des estimations d'erreur *a posteriori* lorsque la solution approchée est dans un voisinage de la solution exacte et lorsque cette dernière vérifie des régularités supplémentaires. Pour pouvoir appliquer ce théorème, nous citons deux méthodes :

- La première consiste à considérer une fonction  $F$  définie sur un espace  $X$  à valeur dans lui-même et qui s'annule en une solution exacte non-singulière  $U = (\mathbf{u}, p, T)$ . Dans le cadre de cette approche, le voisinage dépend en général du pas de maillage  $h$ , ce qui rend l'application pratique difficile lorsque  $h$  est trop petit et par suite le voisinage est trop petit.
- La deuxième consiste à considérer une fonction  $F$  définie sur un espace  $X$  à valeur dans un espace dual  $Y'$  et qui s'annule en la solution exacte  $U = (\mathbf{u}, p, T)$ . Cette méthode exige aussi que la solution exacte soit régulière. La difficulté présentée dans ce cadre est la démonstration de l'isomorphisme de  $DF(U)$  qui n'est pas nécessairement vérifié dans notre cas. Mais l'avantage de cette technique est que le voisinage autour de la solution exacte est indépendant du pas de maillage  $h$ .

## 2.1.2 Efficacité

Dans cette section, nous majorons les indicateurs  $\eta_{K,i}^{(L,l)}$ ,  $\eta_{K,i,1}^{(D,l)}$  et  $\eta_{K,i,2}^{(D,l)}$ ,  $l = 1, 3$ , par l'erreur local entre la solution exacte et la solution approchée afin de valider l'optimalité de la majoration d'erreur *a posteriori* de la première et la troisième formulation variationnelle.

Nous n'avons pas pu démontrer l'efficacité de l'estimation d'erreur *a posteriori* correspondante à la quatrième formulation variationnelle.

Nous considérons également un opérateur de relèvement  $\mathcal{L}_e$  définie sur les polynômes sur  $e$  qui s'annulent sur  $\partial e$  en des polynômes sur les deux éléments  $K$  et  $K'$  contenant  $e$ , qui s'annule sur  $\partial(K \cup K') \setminus e$ . Cet opérateur est réalisé par une transformation affine à partir de l'opérateur fixe sur l'élément de référence. Nous énonçons quelques propositions qui sont utiles pour la suite de cette section.

**Proposition 2.1.9.** *Nous notons  $\mathbb{P}_r(K)$  l'ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal que  $r$  sur  $K$  et nous avons pour tout  $v \in \mathbb{P}_r(K)$*

$$(2.151) \quad \begin{cases} C\|v\|_{0,K} \leq \|v\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K} \leq C'\|v\|_{0,K}, \\ |v|_{1,K} \leq C'' h_K^{-1} \|v\|_{0,K}, \end{cases}$$

où  $\psi_K = \lambda_1 \dots \lambda_{d+1}$  avec  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, d+1$ , sont les coordonnées barycentriques de l'élément  $K$  et,  $C$ ,  $C'$  et  $C''$  sont des constantes.

**Proposition 2.1.10.** *Nous notons  $\mathbb{P}_r(e)$  l'ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal que  $r$  sur  $e$  et nous avons pour tout  $v \in \mathbb{P}_r(e)$*

$$(2.152) \quad C\|v\|_{0,e} \leq \|v\psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{0,e} \leq C'\|v\|_{0,e},$$

où  $\psi_e = \lambda_1 \dots \lambda_d$  avec  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , sont les coordonnées barycentriques de l'élément  $K$  associés aux extrémités de  $e$  et,  $C$  et  $C'$  sont des constantes. Pour tout polynôme  $v \in \mathbb{P}_r(e)$  qui s'annule sur  $\partial e$ , si  $K$  un élément qui contient  $e$ , nous avons

$$(2.153) \quad \|\mathcal{L}_e(v)\|_{0,K} + h_e |\mathcal{L}_e(v)|_{1,K} \leq C'' h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,e},$$

où  $C''$  est une constante.

### 2.1.2.1 Première formulation variationnelle

Nous rappelons que dans cette formulation variationnelle, nous supposons que  $d = 2$ . De plus, nous supposons que  $\nu \in W^{2,\infty}(\Omega)$  et par la suite sa dérivée est majorée par  $\nu'_2$  et est  $\lambda'$ -lipschitzienne. Dans le but d'obtenir l'efficacité pour la première formulation variationnelle, nous approchons la fonction  $\nu$  par  $\nu_h$ , tel que pour tout  $t \in H^1(K)$  :

$$(2.154) \quad \nu_h(t)|_K = \frac{1}{|K|} \int_K \nu(t(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \left[ \frac{1}{|K|} \int_K \nu'(t(\mathbf{x})) \nabla t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] (\mathbf{x} - c),$$

où  $c$  est le centre de l'élément  $K$  donc  $|\mathbf{x} - c| \leq h_K$ . Cet opérateur  $\nu_h$  vérifie les propriétés suivantes :

- a) Pour tout  $t \in H^1(K)$ , d'après l'équation (1.81) et comme la triangulation est régulière, nous avons :

$$(2.155) \quad |\nu_h(t)|_K \leq \nu_2 + \nu'_2 \sigma \|\nabla t\|_{0,K}.$$

Par la suite,  $\nu_h(t)$  est borné dans  $L^\infty(K)$ .

- b) Pour tous  $t_1$  et  $t_2$  appartenant à l'espace  $H^1(K)$ , comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\nu'$  est  $\lambda'$ -lipschitzienne, nous avons :

$$(2.156) \quad \|\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)\|_{0,K} \leq (\lambda + \sigma \lambda' \|\nabla t_1\|_{0,K}) \|t_1 - t_2\|_{0,K} + C \sigma \nu'_2 \|\nabla t_1 - \nabla t_2\|_{0,K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . En effet :

$$(2.157) \quad \begin{aligned} & |\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)|_K \\ & \leq \frac{\lambda}{|K|} \int_K |t_1(\mathbf{x}) - t_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \frac{h_K}{|K|} \left| \int_K (\nu'(t_1(\mathbf{x})) \nabla t_1(\mathbf{x}) - \nu'(t_2(\mathbf{x})) \nabla t_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nu'(t_2) \nabla t_2$  dans l'équation précédente et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous avons :

$$(2.158) \quad \begin{aligned} & |\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)|_K \\ & \leq \frac{\lambda}{|K|^{\frac{1}{2}}} \|t_1 - t_2\|_{0,K} \\ & \quad + \frac{h_K}{|K|} \left| \int_K [\nu'(t_1(\mathbf{x})) - \nu'(t_2(\mathbf{x})) \nabla t_1(\mathbf{x}) + \nu'(t_2(\mathbf{x})) \nabla (t_1(\mathbf{x}) - t_2(\mathbf{x}))] d\mathbf{x} \right| \\ & \leq \frac{\lambda}{|K|^{\frac{1}{2}}} \|t_1 - t_2\|_{0,K} \\ & \quad + \frac{h_K \lambda'}{|K|} \int_K |t_1(\mathbf{x}) - t_2(\mathbf{x})| |\nabla t_1(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \frac{h_K \nu'_2}{|K|} \int_K |\nabla t_1(\mathbf{x}) - \nabla t_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ & \leq \left( \frac{\lambda}{|K|^{\frac{1}{2}}} + \frac{h_K \lambda'}{|K|} \|\nabla t_1\|_{0,K} \right) \|t_1 - t_2\|_{0,K} + \sigma \nu'_2 \|\nabla t_1 - \nabla t_2\|_{0,K}. \end{aligned}$$

Nous déduisons la norme de  $\|\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)\|_{0,K}$ .

**Théorème 2.1.11.** Soient  $(\mathbf{u}, p, T) \in H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  une solution du problème non linéaire (P) et  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,1} \times M_{h,1} \times X_h$  une solution du problème itératif  $(V_{h,i,1})$ . Nous supposons que nous avons les mêmes conditions du Théorème 1.4.8 et nous supposons de plus que  $\mathbf{f} \in H(\text{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^2$ . Alors il existe un entier  $i_0$  dépendant de  $h$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , nous avons l'estimation des indicateurs suivante, pour tout élément  $K \in \tau_h$  :

$$(2.159) \quad \eta_{K,i}^{(L,1)} \leq |T - T_h^{i+1}|_{1,K} + |T - T_h^i|_{1,K},$$

$$(2.160) \quad \eta_{K,i,1}^{(D,1)} \leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\omega_K} + \|T - T_h^{i+1}\|_{1,\omega_K} + \sum_{k \subset \omega_K} h_k \|g - g_h\|_{0,k})$$

et

$$(2.161) \quad \begin{aligned} \eta_{K,i,2}^{(D,1)} &\leq C'(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\omega_K} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0,\omega_K} + \|T - T_h^i\|_{1,\omega_K} \\ &\quad + \sum_{k \subset \omega_K} [h_k \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,k} + h_k \|\text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,k} + \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{1,k}] \\ &\quad + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \|[(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e\|_{0,e}), \end{aligned}$$

où  $C$  et  $C'$  sont des constantes indépendantes de  $h$ .

**Démonstration** La preuve sera illustrée en trois étapes :

a) La première majoration est évidente en ajoutant et en retranchant le terme  $T$  dans  $\eta_{K,i}^{(L,1)}$  et en utilisant l'inégalité triangulaire.

b) Nous considérons l'équation (2.12). En ajoutant et en retranchant le terme

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ et en prenant } S_h = 0, \text{ nous obtenons :}$$

$$(2.162) \quad \begin{aligned} &\sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) S(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous prenons  $S$  égale à  $S_K$  dans l'équation (2.162) avec :

$$(2.163) \quad S_K = \begin{cases} (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h) \psi_K \text{ sur } K, \\ 0 \text{ sur } \Omega \setminus K, \end{cases}$$



où  $\psi_K$  désigne la fonction bulle sur l'élément  $K$ . Nous aurons l'équation suivante :  
(2.164)

$$\begin{aligned} & \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)^2(\mathbf{x}) \psi_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \alpha \int_K \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_K (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous commençons par le deuxième terme : comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous obtenons :

$$(2.165) \quad \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) (S_K)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |S_K|_{1,K}.$$

Passons au troisième terme où nous ajoutons et nous retranchons le terme  $R_h \mathbf{u}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_K (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ (2.166) \quad &= \int_K ((\mathbf{u}_h^{i+1} - R_h \mathbf{u}) \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_K (R_h \mathbf{u} \cdot \nabla(T - T_h^{i+1}))(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I_1$  et  $I_2$ , le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (2.166).

Nous commençons par majorer le terme  $I_1$ , d'après l'inégalité inverse (Proposition 1.4.7) (pour  $p = 3$ ) et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4),  $I_1$  devient :

$$(2.167) \quad I_1 \leq \frac{c S_6^0}{h_K^{\frac{1}{3}}} \|\mathbf{u}_h^{i+1} - R_h \mathbf{u}\|_{0,K} |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K},$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $h$ . Or,

$$(2.168) \quad \|\mathbf{u}_h^{i+1} - R_h \mathbf{u}\|_{0,K} \leq \|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h\|_{0,K} + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{0,K} + \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{0,K}.$$

Nous allons étudier ces trois termes :

D'après le Théorème 1.4.8, il existe un  $h_0$  tel que pour tout  $h < h_0$ , nous avons que :

$$(2.169) \quad \|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h\|_{0,K} \leq c_1^i \|\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h\|_{0,K},$$

où  $c_1$  est une constante strictement plus petit que 1. Nous notons  $D = \|\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h\|_{0,K}$  qui dépend de  $h$ . D'après les formules (1.225) et (1.387),  $D$  est bornée. Nous avons que  $(c_1^i D)_i$  converge vers 0 quand  $i$  tend vers l'infini et alors il existe un  $i_0$  dépendant de  $h$ , telle que pour tout  $i \geq i_0$ ,  $\|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h\| \leq c_2 h$ , où  $c_2$  est une constante indépendante de  $h$ .

D'après l'estimation d'erreur *a priori*, nous avons :

$$(2.170) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K} \leq c_3 h [|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}],$$

où  $c_3$  est une constante indépendante de  $h$ .

D'après l'équation (1.192), nous avons :

$$(2.171) \quad \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{0,K} \leq c_4 h |\mathbf{u}|_{1,\Omega},$$

où  $c_4$  est une constante indépendante de  $h$ . Ensuite (2.167) donne

$$(2.172) \quad I_1 \leq C (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Nous continuons par majorer le terme  $I_2$ . Comme  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^2$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ), l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et la stabilité de  $R_h \mathbf{u}$  dans  $L^3(\Omega)$ ,  $I_2$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.173) \quad I_2 \leq C_1 S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K},$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons alors :

$$(2.174) \quad \begin{aligned} & \|(\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \\ & \leq \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K} + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |S_K|_{1,K} \\ & \quad + C (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K} \\ & \quad + C_1 S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K} + \|g - g_h\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K}. \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.9. Il en résulte que :

$$(2.175) \quad \begin{aligned} & h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K}^2 \\ & \leq C_2 [C_3 \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} + C_3 S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K} \\ & \quad + C_3 C (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} \\ & \quad + C_3 C_1 S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T - T_h^{i+1}|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} + h_K \|g - g_h\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K}], \end{aligned}$$

où  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$\|S_K\|_{0,K} \leq C_4 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K},$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du premier terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.176) \quad \begin{aligned} & h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} \\ & \leq C' (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + |T - T_h^{i+1}|_{1,K} + h_K \|g - g_h\|_{0,K}), \end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante indépendante de  $h$ .

Ensuite, nous bornons le second terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation. En prenant  $S_h = 0$ , nous déduisons de l'équation (2.162) la relation suivante :

$$(2.177) \quad \begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) S(\mathbf{s}) \, ds \\ & = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \alpha \int_{\Omega} \nabla(T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T_h^{i+1} - T))(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, dx + \sum_{K \in \tau_h} \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

Nous prenons  $S$  égale à  $S_e$  dans l'équation (2.177) avec :

$$(2.178) \quad S_e = \begin{cases} \mathcal{L}_e(\alpha [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e) & \text{sur } K \cup K', \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où  $\psi_e$  désigne la fonction bulle sur l'arête  $e$ ,  $K$  et  $K'$  sont les éléments de  $\tau_h$  qui contiennent  $e$  et  $\mathcal{L}_e$  est l'opérateur de relèvement défini comme précédemment. Nous aurons alors l'équation suivante :

$$(2.179) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e^2(\mathbf{s}) \psi_e(\mathbf{s}) \, ds \\ & = \int_{K \cup K'} (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S_e(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \alpha \int_{K \cup K'} \nabla(T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_e(\mathbf{x}) \, dx + \int_{K \cup K'} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_e(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \int_{K \cup K'} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla(T_h^{i+1} - T))(\mathbf{x}) S_e(\mathbf{x}) \, dx + \int_{K \cup K'} (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S_e(\mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

En poursuivant la même démarche utilisée avant, nous obtenons :

(2.180)

$$\begin{aligned}
 & \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{0,e}^2 \\
 & \leq \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K \cup K'} \|S_e\|_{0,K \cup K'} \\
 & \quad + \alpha |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} + S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} \\
 & \quad + C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} \\
 & \quad + C_1 S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} + \|g - g_h\|_{0,K \cup K'} \|S_e\|_{0,K \cup K'}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.10. Il en résulte que :

(2.181)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}^2 \\
 & \leq C_5 [h_e C_6 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + C_6 \alpha |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + C_6 S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + C_6 C (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + C_6 C_1 S_6^0 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + h_e C_6 \|g - g_h\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e},
 \end{aligned}$$

où  $C_5$  et  $C_6$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.10, nous avons :

$$\|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e\|_{0,e} \leq C_7 \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e},$$

où  $C_7$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du second terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation :

(2.182)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} \\
 & \leq C'' \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} + |T - T_h^{i+1}|_{1,K \cup K'} + \sum_{k \in K \cup K'} h_k \|g - g_h\|_{0,k} \right),
 \end{aligned}$$

où  $C''$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons finalement le résultat voulu.

c) Nous considérons l'équation (2.13). En ajoutant et en retranchant le terme  $\int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et  $\int_{\Omega} \nu_h(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et en prenant  $\mathbf{v}_h = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.183) \quad & \sum_{K \in \tau_h} \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous prenons  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{v}_K$  dans l'équation (2.183) avec :

$$(2.184) \quad \mathbf{v}_K = \begin{cases} (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Nous aurons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (2.185) \quad & \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)^2(\mathbf{x}) \psi_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_K (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul, nous notons, pour tout  $K \in \tau_h$  :

$$(2.186) \quad \varepsilon_K = \|(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et d'après la Proposition 1.1.3

(pour  $q = 6$ ) et les inégalités (1.81) et (1.387), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.187) \quad & \|(-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \\
 & \leq \frac{\lambda S_3 S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|T - T_h^i\|_{1,K} |\mathbf{v}_K|_{1,K} + \varepsilon_K \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \\
 & \quad + \nu_2 S_2^0 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |\mathbf{v}_K|_{1,K} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0,K} |\mathbf{v}_K|_{1,K} \\
 & \quad + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.9. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 (2.188) \quad & h_K \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 \\
 & \leq C_8 \left[ C_9 \frac{\lambda S_3 S_6^0}{\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|T - T_h^i\|_{1,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} + h_K \varepsilon_K \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \right. \\
 & \quad + C_9 \nu_2 S_2^0 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} + C_9 \|p - p_h^{i+1}\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \\
 & \quad \left. + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \right],
 \end{aligned}$$

où  $C_8$  et  $C_9$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$\|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \leq C_{10} \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K},$$

où  $C_{10}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du terme suivant :

$$\begin{aligned}
 (2.189) \quad & h_K \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} \\
 & \leq \bar{C} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} + h_K \varepsilon_K),
 \end{aligned}$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour majorer le premier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation, nous utilisons l'inégalité triangulaire et nous aurons :

$$(2.190) \quad \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} \leq \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K} + \varepsilon_K.$$

Nous ajoutons et nous retranchons à  $\varepsilon_K$ , les deux termes  $\nu(T_h^i)\mathbf{u}$  et  $\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}$  et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.191) \quad \varepsilon_K & \leq \|\nu_h(T_h^i)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) - \nu(T_h^i)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K} \\
 & \quad + \|(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i))\mathbf{u}\|_{0,K}.
 \end{aligned}$$

Nous ajoutons les termes  $\nu_h(T)\mathbf{u}$  et  $\nu(T)\mathbf{u}$  au second terme du membre de droite de l'égalité (2.191) et nous aurons :

$$(2.192) \quad \begin{aligned} \|(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i))\mathbf{u}\|_{0,K} &\leq \|(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T))\mathbf{u}\|_{0,K} + \|(\nu_h(T) - \nu(T))\mathbf{u}\|_{0,K} \\ &\quad + \|(\nu(T) - \nu(T_h^i))\mathbf{u}\|_{0,K}. \end{aligned}$$

Alors, nous aurons :

$$(2.193) \quad \begin{aligned} \varepsilon_K &\leq \|\nu_h(T_h^i)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K} + \|\nu(T_h^i)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K} \\ &\quad + \|(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T))\mathbf{u}\|_{0,K} + \|(\nu_h(T) - \nu(T))\mathbf{u}\|_{0,K} \\ &\quad + \|(\nu(T) - \nu(T_h^i))\mathbf{u}\|_{0,K}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I'_1, I'_2, I'_3, I'_4$  et  $I'_5$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième, le quatrième et le cinquième termes du membre de droite de l'équation (2.193).

D'après l'équation (2.155),  $I'_1$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.194) \quad I'_1 \leq (\nu_2 + \nu'_2 \sigma |T_h^i|_{1,K}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}.$$

D'après l'équation (1.81),  $I'_2$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.195) \quad I'_2 \leq \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\Omega}.$$

Comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^2$ , d'après l'équation (2.156), nous majorons  $I'_3$  et nous aurons :

$$(2.196) \quad I'_3 \leq c_5 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2} \|T - T_h^i\|_{1,K},$$

où  $c_5$  est une constante indépendante de  $h$ .

Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $I'_5$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.197) \quad I'_5 \leq \lambda S_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2} \|T - T_h^i\|_{1,K}.$$

D'où, nous aurons alors la majoration du premier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.198) \quad \begin{aligned} h_K \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} \\ \leq \bar{C}' (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \|p - p_h^{i+1}\|_{0,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} \\ + \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{0,K}), \end{aligned}$$

où  $\bar{C}'$  est une constante indépendante de  $h$ .

Bornons le troisième terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. En prenant  $\mathbf{v}_h = 0$ , nous déduisons de l'équation (2.183) la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 (2.199) \quad & \frac{1}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}) \, ds \\
 &= - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Pour une arête  $e$  intérieur (qui n'appartient pas au bord), nous prenons  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{v}_e$  dans l'équation (2.199) avec :

$$(2.200) \quad \mathbf{v}_e = \begin{cases} \mathcal{L}_e([p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \psi_e) \text{ sur } K \cup K', \\ 0 \text{ sur } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où  $K$  et  $K'$  sont les éléments de  $\tau_h$  qui contiennent  $e$ . Nous aurons alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (2.201) \quad & \int_e [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e^2(\mathbf{s}) \psi_e(\mathbf{s}) \, ds \\
 &= - \int_{K \cup K'} (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{K \cup K'} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{K \cup K'} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{K \cup K'} \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{K \cup K'} (p_h^{i+1} - p)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{K \cup K'} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$



En utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et les inégalités (1.387) et (1.81), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \| [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \psi_e^{\frac{1}{2}} \|_{0,e}^2 \\
 & \leq \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K \cup K'} \| \mathbf{v}_e \|_{0,K \cup K'} \\
 & \quad + \frac{\lambda S_3 S_6^0}{\nu_1} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} | \mathbf{v}_e |_{1,K \cup K'} \\
 (2.202) \quad & + \varepsilon_{K \cup K'} \| \mathbf{v}_e \|_{0,K \cup K'} \\
 & + \nu_2 S_2^0 \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} | \mathbf{v}_e |_{1,K \cup K'} \\
 & + \| p - p_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} | \mathbf{v}_e |_{1,K \cup K'} + \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{0,K \cup K'} \| \mathbf{v}_e \|_{0,K \cup K'}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.10. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 (2.203) \quad & h_e^{\frac{1}{2}} \| [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \|_{0,e}^2 \\
 & \leq C_{11} [h_e C_{13} \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K \cup K'} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{12} \frac{\lambda S_3 S_6^0}{\nu_1} (\| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} + \| g \|_{0,\Omega}) \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + h_e C_{12} \varepsilon_{K \cup K'} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{12} \nu_2 S_2^0 \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{12} \| p - p_h^{i+1} \|_{0,e} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,K \cup K'} + h_e C_{12} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{0,e} \| \phi_h^e \psi_e \|_{0,K \cup K'}],
 \end{aligned}$$

où  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{13}$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.10, nous avons :

$$\| [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \psi_e \|_{0,e} \leq C_{14} \| [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \|_{0,e},$$

où  $C_{14}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du troisième terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$\begin{aligned}
 (2.204) \quad & h_e^{\frac{1}{2}} \| [p_h^{i+1} \mathbf{n}]_e \|_{0,e} \\
 & \leq \bar{C} (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} + \| p - p_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} + \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} \\
 & \quad + \sum_{k \in K \cup K'} \| \nu(T) - \nu_h(T) \|_{0,k} + \sum_{k \in K \cup K'} h_k \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{0,k}),
 \end{aligned}$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Par la suite, nous bornons le second terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. Nous considérons à nouveau l'équation (2.13) avec  $\mathbf{v} = \text{rot } \eta$ . En ajoutant et en retranchant le terme  $\int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et en prenant  $\mathbf{v}_h = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{K \in \tau_h} \int_K (-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.205) \quad &+ \int_{\Omega} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Or, la formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \int_K (-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.206) \quad &= \int_K \text{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e(\mathbf{s}) \eta(\mathbf{s}) \, ds
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.207) \quad &= \int_K \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e(\mathbf{s}) \eta(\mathbf{s}) \, ds.
 \end{aligned}$$

Nous choisissons  $\eta$  égal à  $\eta_K$  dans l'équation (2.205) avec :

$$(2.208) \quad \eta_K = \begin{cases} \text{rot}(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K, \end{cases}$$

et nous aurons :

$$\begin{aligned}
 & \int_K (\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h))^2(\mathbf{x}) \cdot \psi_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_K (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x})))\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.209) \quad &+ \int_K (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x})))\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K \nu(T(\mathbf{x}))(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \int_K \operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\mathbf{u}$  dans le premier terme du membre droite de l'équation (2.209) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \int_K (\nu(T) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.210) \quad &= \int_K (\nu(T) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K (\nu(T) - \nu(T_h^i))(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \eta_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I_3$  et  $I_4$ , le premier et le deuxième termes du membre de droite de l'équation (2.210).

Nous majorons le terme  $I_3$ . D'après l'équation (1.81), nous aurons :

$$(2.211) \quad I_3 \leq 2\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|\operatorname{rot} \eta_K\|_{0,K}.$$

Nous terminons par le terme  $I_4$ . Comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne et  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^2$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4),  $I_4$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.212) \quad I_4 \leq \lambda S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^i\|_{1,K} \|\operatorname{rot} \eta_K\|_{0,K}.$$

Par la suite, l'équation (2.209) nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \|\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \\
 (2.213) \quad & \leq \lambda S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^i\|_{1,K} |\eta_K|_{1,K} + 3\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |\eta_K|_{1,K} \\
 & + \varepsilon_K |\eta_K|_{1,K} + \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \|\eta_K\|_{0,K}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.9. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 (2.214) \quad & h_K \|\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 \\
 & \leq C_{15} [C_{16} \lambda S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^i\|_{1,K} \|\eta_K\|_{0,K} \\
 & \quad + C_{16} 3\nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|\eta_K\|_{0,K} + C_{16} \varepsilon_K \|\eta_K\|_{0,K} \\
 & \quad + h_K \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \|\eta_K\|_{0,K}],
 \end{aligned}$$

où  $C_{15}$  et  $C_{16}$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$\|\eta_K\|_{0,K} \leq C_{17} \|\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K},$$

où  $C_{17}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons alors la majoration du terme suivant :

$$\begin{aligned}
 (2.215) \quad & h_K \|\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \\
 & \leq \bar{C} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{0,K} \\
 & \quad + h_K \|\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}),
 \end{aligned}$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour majorer le second terme du second indicateur d'erreur de discrétisation, nous utilisons l'inégalité triangulaire et nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (2.216) \quad & \|\operatorname{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \leq \|\operatorname{rot}(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \\
 & \quad + \|\operatorname{rot}((\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1})\|_{0,K}.
 \end{aligned}$$

Or,

$$(2.217) \quad \operatorname{rot}((\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1}) = (\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \operatorname{rot} \mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \times \mathbf{u}_h^{i+1}.$$

Nous remarquons que  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_h^{i+1} = 0$ . Nous ajoutons et nous retranchons au second terme du membre droite de l'équation (2.217), les termes  $\nabla \nu(T_h^i) \times \mathbf{u}$ ,  $\nabla \nu_h(T_h^i) \times \mathbf{u}$ ,  $\nabla \nu_h(T) \times \mathbf{u}$  et  $\nabla \nu(T) \times \mathbf{u}$  et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.218) \quad & \|\operatorname{rot}((\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1})\|_{0,K} \\
 & \leq \|\nabla \nu_h(T_h^i) \times (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K} + \|\nabla \nu(T_h^i) \times (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K} \\
 & \quad + \|\nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \times \mathbf{u}\|_{0,K} + \|\nabla(\nu_h(T) - \nu(T)) \times \mathbf{u}\|_{0,K} \\
 & \quad + \|\nabla(\nu(T) - \nu(T_h^i)) \times \mathbf{u}\|_{0,K}.
 \end{aligned}$$

Nous notons  $I'_6, I'_7, I'_8, I'_9$  et  $I'_{10}$  respectivement, le premier, le deuxième, le troisième, le quatrième et le cinquième termes du membre de droite de l'équation (2.218).

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nabla\nu_h(T)$  dans le terme  $I'_6$  et nous aurons :

$$(2.219) \quad I'_6 = \|\nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \times (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) + \nabla\nu_h(T) \times (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\|_{0,K}.$$

Or,

$$(2.220) \quad |\nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T))|_K = \frac{1}{|K|} \int_K (\nu'(T_h^i(\mathbf{x}))\nabla T_h^i(\mathbf{x}) - \nu'(T(\mathbf{x}))\nabla T(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nu'(T_h^i)\nabla T$  et nous utilisons l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4). Comme  $\nabla T \in L^\infty(\Omega)^2$ , nous obtenons :

$$(2.221) \quad |\nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T))|_K \leq \frac{\nu'_2}{|K|^{\frac{1}{2}}} \|\nabla(T - T_h^i)\|_{0,K} + \frac{\lambda'}{|K|^{\frac{1}{2}}} \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2} \|T - T_h^i\|_{0,K}.$$

D'après l'estimation d'erreur *a priori* et comme  $\nabla T \in L^\infty(\Omega)^2$ , nous aurons :

$$(2.222) \quad I'_6 \leq (c_6 \nu'_2 + c_6 \lambda' \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2} + \nu'_2 \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}.$$

où  $c_6$  est une constante indépendante de  $h$ .

Comme  $\nabla T_h^i$  est constante par triangle donc  $I'_7$  s'exprime de la manière suivante

$$(2.223) \quad I'_7 \leq \frac{1}{|K|} \int_K |\nabla T_h^i(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \|\nu'(T_h^i)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})\|_{0,K}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nabla T$  et nous utilisons l'estimation d'erreur *a priori* pour obtenir :

$$(2.224) \quad \begin{aligned} I'_7 &\leq \frac{1}{|K|} \left[ \int_K |\nabla(T_h^i - T)(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_K |\nabla T(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right] \|\nu'(T_h^i)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})\|_{0,K} \\ &\leq (c_7 \nu'_2 + \nu'_2 \|\nabla T\|_{L^\infty(K)}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}, \end{aligned}$$

où  $c_7$  est une constante indépendante de  $h$ .

D'après l'équation (2.221), nous avons :

$$(2.225) \quad \|\nabla(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T))\|_{0,K} \leq \nu'_2 \|\nabla(T - T_h^i)\|_{0,K} + \lambda' \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2} \|T - T_h^i\|_{0,K}.$$

Par la suite  $I'_8$  sera majoré de la manière suivante :

$$(2.226) \quad I'_8 \leq (\nu'_2 + \lambda' \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2}) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2} \|T - T_h^i\|_{1,K}.$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nu'(T)\nabla T_h^i$  dans le terme  $I'_{10}$  et nous aurons :

$$(2.227) \quad I'_{10} = \|(\nu'(T_h^i) - \nu'(T))\nabla T_h^i \times \mathbf{u} + \nu'(T)\nabla(T_h^i - T) \times \mathbf{u}\|_{0,K}.$$

Un calcul similaire à celui de  $I'_7$  nous donne :

$$(2.228) \quad I'_{10} \leq (c_8 \lambda' \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2} \|\nabla T\|_{L^\infty(K)^2} + \nu'_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(K)^2}) \|T - T_h^i\|_{1,K},$$

où  $c_8$  est une constante indépendante de  $h$ .

Nous obtenons alors la majoration du second terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.229) \quad \begin{aligned} & h_K \|\text{rot}(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K} \\ & \leq \bar{\bar{C}}' (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{1,K} \\ & \quad + h_K \|\text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,K}), \end{aligned}$$

où  $\bar{\bar{C}}'$  est une constante indépendante de  $h$ .

Bornons le quatrième terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. En prenant  $\mathbf{v}_h = 0$ , nous déduisons la relation suivante :

$$(2.230) \quad \begin{aligned} & \sum_{K \in \tau_h} \int_K (-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x})))\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x})))\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x}))(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & \quad - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \text{rot } \eta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pour une arête  $e \in \Gamma_h^i$  du maillage, nous choisissons  $\eta$  égal à  $\eta_e$  dans l'équation (2.230) avec :

$$(2.231) \quad \eta_e = \begin{cases} \mathcal{L}_e([(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \psi_e) & \text{sur } K \cup K', \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où  $K$  et  $K'$  sont les éléments de  $\tau_h$  qui contiennent  $e$ . En suivant les mêmes étapes du calcul effectuées avant, nous obtenons :

(2.232)

$$\begin{aligned}
 & \| [(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \psi_e^{\frac{1}{2}} \|_{0,e}^2 \\
 & \leq \| \text{rot}(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \|_{0,K \cup K'} \| \eta_e \|_{0,K \cup K'} \\
 & \quad + \lambda S_6 \| \mathbf{u} \|_3 \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} | \eta_e |_{1,K \cup K'} + 3\nu_2 \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} | \eta_e |_{1,K \cup K'} \\
 & \quad + \varepsilon_{K \cup K'} | \eta_e |_{1,K \cup K'} + \| \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_{0,K \cup K'} \| \eta_e \|_{0,K \cup K'} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e}.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.10. Il en résulte que :

(2.233)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}^2 \\
 & \leq C_{18} [h_e C_{19} \| \text{rot}(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \|_{0,K \cup K'} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{19} \lambda S_6 \| \mathbf{u} \|_3 \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{19} 3\nu_2 \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + C_{19} \varepsilon_{K \cup K'} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + h_e C_{19} \| \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_{0,K \cup K'} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e} \\
 & \quad + \frac{h_e^{\frac{1}{2}}}{2} \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e] \psi_e \|_{0,e}].
 \end{aligned}$$

où  $C_{18}$  et  $C_{19}$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.10, nous avons :

$$\| [(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \psi_e \|_{0,e} \leq C_{20} \| [(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e},$$

où  $C_{20}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du terme suivant :

(2.234)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu_h(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} \\
 & \leq \bar{C} (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K \cup K'} + \| T - T_h^i \|_{1,K \cup K'} + \sum_{k \in K \cup K'} \| \nu(T) - \nu_h(T) \|_{0,k} \\
 & \quad + \sum_{k \in K \cup K'} h_k \| \text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_{0,k} + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}),
 \end{aligned}$$

où  $\overset{\equiv}{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour majorer le quatrième terme du second indicateur d'erreur de discrétisation, nous utilisons l'inégalité triangulaire et nous aurons :

(2.235)

$$\begin{aligned} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} \\ \leq h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} + h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1}] \cdot \mathbf{t}_e \|_{0,e}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes  $\nu_h(T)$  et  $\nu(T)$  dans le deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente et nous obtenons :

(2.236)

$$\begin{aligned} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1}] \cdot \mathbf{t}_e \|_{0,e} &\leq h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u}_h^{i+1}] \cdot \mathbf{t}_e \|_{0,e} \\ &\quad + h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\nu_h(T) - \nu(T)) \mathbf{u}_h^{i+1}] \cdot \mathbf{t}_e \|_{0,e} \\ &\quad + h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\nu(T) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u}_h^{i+1}] \cdot \mathbf{t}_e \|_{0,e}. \end{aligned}$$

Nous notons  $I'_{11}$ ,  $I'_{12}$  et  $I'_{13}$  respectivement, le premier, le deuxième et le troisième termes du membre de droite de l'équation (2.236).

En passant au triangle de référence et le fait que les normes sont équivalentes en dimension finie, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (2.237) \quad I'_{11} &\leq c_9 h_e^{\frac{1}{2}} \| (\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,e} \\ &\leq \frac{c_9 h_e}{|\hat{e}|^{\frac{1}{2}}} \| (\widehat{\nu_h(T_h^i)} - \widehat{\nu_h(T)}) \widehat{\mathbf{u}_h^{i+1}} \|_{0,\partial\hat{K}} \\ &\leq c_{10} h_e \| (\widehat{\nu_h(T_h^i)} - \widehat{\nu_h(T)}) \widehat{\mathbf{u}_h^{i+1}} \|_{0,\hat{K}} \\ &\leq c_{11} \frac{h_e}{|K|^{\frac{1}{2}}} \| (\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K} \\ &\leq c_{11} \sigma \| (\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K}, \end{aligned}$$

où  $c_9$ ,  $c_{10}$  et  $c_{11}$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Par la suite, nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\mathbf{u}$  dans  $\| (\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K}$ . D'après l'estimation d'erreur *a priori*, les équations (2.156) et (2.158) et comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^2$ , nous aurons :

$$(2.238) \quad I'_{11} \leq c_{12} \| T - T_h^{i+1} \|_{1,K},$$

où  $c_{12}$  est une constante indépendante de  $h$ .



Comme  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  est constante sur chaque triangle  $K$ , alors

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{u}_h^{i+1}| &= \frac{1}{|K|} \int_K |\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 (2.239) \quad &\leq \frac{\|\mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}}{|K|^{\frac{1}{2}}} \\
 &\leq \frac{\|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}\|_{0,K}}{|K|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|\mathbf{u}\|_{0,K}}{|K|^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation d'erreur *a priori* et comme  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^2$ , alors d'après le théorème de trace, nous aurons :

$$(2.240) \quad I'_{12} \leq c_{13} \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{1,K},$$

où  $c_{13}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Par rapport au troisième terme  $I'_{12}$ , nous suivons la même démarche effectuée dans le calcul de  $I'_{11}$  et nous obtenons :

$$(2.241) \quad I'_{13} \leq \lambda c_{13} \|T - T_h^i\|_{1,K}.$$

Nous aurons alors la majoration du quatrième terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$\begin{aligned}
 (2.242) \quad &h_e^{\frac{1}{2}} \| [(-\nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e} \\
 &\leq \overset{\equiv}{C'} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} + \|T - T_h^i\|_{1,K \cup K'} + \sum_{k \in K \cup K'} \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{1,k} \\
 &\quad + \sum_{k \in K \cup K'} h_k \|\text{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\|_{0,k} + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e^{\frac{1}{2}} \| [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e]_e \|_{0,e}),
 \end{aligned}$$

où  $\overset{\equiv}{C'}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons ainsi le résultat voulu.  $\square$

### 2.1.2.2 Troisième formulation variationnelle

Dans le but d'obtenir l'efficacité pour la troisième formulation variationnelle, nous approchons la fonction  $\nu$  par une constante dans chaque  $K$ , tel que pour tout  $t \in L^p(K)$  :

$$(2.243) \quad \nu_h(t)|_K = \frac{1}{|K|} \int_K \nu(t(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Cet opérateur  $\nu_h$  vérifie les propriétés suivantes :

a) Pour tout  $t \in L^p(K)$ , d'après l'équation (1.81), nous avons :

$$(2.244) \quad \nu_1 \leq \nu_h(t) \leq \nu_2.$$

b) Pour tout  $t_1$  et  $t_2$  appartenant à l'espace  $L^1(K)$ , comme  $\nu$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, nous avons :

$$(2.245) \quad |\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)|_K \leq \frac{\lambda}{|K|} \int_K |t_1(\mathbf{x}) - t_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

c) Pour tout  $t_1$  et  $t_2$  appartenant à l'espace  $L^p(K)$ , nous avons :

$$(2.246) \quad \|\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)\|_{L^p(K)} \leq \lambda \|t_1 - t_2\|_{L^p(K)}.$$

En effet,

$$(2.247) \quad \|\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)\|_{L^p(K)} \leq \frac{|K|^{\frac{1}{p}}}{|K|} \lambda \int_K |t_1(\mathbf{x}) - t_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous aurons :

$$(2.248) \quad \|\nu_h(t_1) - \nu_h(t_2)\|_{L^p(K)} \leq |K|^{\frac{1}{p}-1} \lambda \|t_1 - t_2\|_{L^p(K)} |K|^{1-\frac{1}{p}}.$$

**Théorème 2.1.12.** Soient  $d = 3$ ,  $(\mathbf{u}, p, T) \in L^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  une solution du problème non linéaire (P) et  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1}) \in \mathcal{W}_{h,2} \times M_{h,2} \times X_h$  une solution du problème itératif  $(V_{h,i,3})$ . Nous supposons que nous avons les mêmes conditions du Théorème 1.4.10. Alors il existe un entier  $i_0$  dépendant de  $h$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , nous avons l'estimation des indicateurs suivante :

$$(2.249) \quad \eta_{K,i}^{(L,3)} \leq |T - T_h^{i+1}|_{1,K} + |T - T_h^i|_{1,K},$$

$$(2.250) \quad \eta_{K,i,1}^{(D,3)} \leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,\omega_K} + \|T - T_h^{i+1}\|_{1,\omega_K} + \sum_{k \subset \omega_K} h_k \|g - g_h\|_{0,k})$$

et

$$(2.251) \quad \eta_{K,i,2}^{(D,3)} \leq C'(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + |p - p_h^{i+1}|_{1,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} + \|\nu(T) - \nu_h(T)\|_{L^3(K)}).$$

où  $C$  et  $C'$  sont des constantes indépendantes de  $h$ .

**Démonstration** Nous procédons en trois étapes :

- a) La première majoration est évidente en ajoutant et en retranchant le terme  $T$  dans  $\eta_{K,i}^{(L,3)}$  et en utilisant l'inégalité triangulaire.
- b) Nous considérons l'équation (2.80). En appliquant la formule de Green sur les trois termes, en utilisant le fait que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , en ajoutant et en retranchant le terme  $\mathbf{u}$  et en prenant  $S_h = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2.252) \quad & \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) (T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) S(\mathbf{s}) \, ds.
 \end{aligned}$$

Nous prenons  $S$  égale à  $S_K$  dans l'équation (2.252) avec :

$$(2.253) \quad S_K = \begin{cases} (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Nous aurons ainsi l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 (2.254) \quad & \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)^2(\mathbf{x}) \psi_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \alpha \int_K \nabla(T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla S_K)(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K (\mathbf{u} \cdot \nabla S_K)(\mathbf{x}) (T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &- \int_K (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous commençons par majorer le troisième terme du membre de droite de l'équation (2.254). Comme  $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)^3$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous obtenons :

$$(2.255) \quad \int_K (\mathbf{u} \cdot \nabla S_K)(\mathbf{x}) (T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^{i+1}\|_{1,K} |S_K|_{1,K}.$$

Passons au quatrième terme du membre de droite de l'équation (2.254). Nous ajoutons et nous retranchons le terme  $\nabla T$  dans l'équation (1.267) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.256) \quad & = \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla (T_h^{i+1} - T))(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous effectuons le même calcul déjà effectué dans le Théorème 2.1.11 pour le premier terme du membre droite de l'équation (2.256). Par rapport au deuxième terme de la même équation, comme  $\nabla T \in L^3(\Omega)$  alors d'après la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ) et l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous obtenons :

$$(2.257) \quad \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T)(\mathbf{x}) S_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \frac{S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)}}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |S_K|_{1,K}.$$

En ce qui concerne le second terme du membre de droite de l'équation (2.254) :

$$(2.258) \quad \frac{1}{2} \int_K ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla S_K)(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

nous ajoutons et nous retranchons le terme  $T$  dans l'équation (2.258) et nous effectuons le même calcul déjà effectué sur ces termes dans le Théorème 2.1.11.

Par la suite, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
 & \|(\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \\
 & \leq \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K} \\
 (2.259) \quad & + C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K} |S_K|_{1,K} \\
 & + \left( \frac{S_6^0 |T|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_{\infty}}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} |S_K|_{1,K} \\
 & + C_1 S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^{i+1}\|_{1,K} |S_K|_{1,K} + \|g - g_h\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K},
 \end{aligned}$$

où  $C$  et  $C_1$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . Nous appliquons les inégalités

de la Proposition 2.1.9 et nous aurons :

(2.260)

$$\begin{aligned}
 & h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K}^2 \\
 & \leq C_2 [C_3 \alpha |T - T_h^{i+1}|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} \\
 & \quad + C_3 C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T - T_h^{i+1}|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} \\
 & \quad + C_3 \left( \frac{S_6^0 \|T\|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_\infty}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K} \\
 & \quad + C_3 C_1 S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^{i+1}\|_{1,K} \|S_K\|_{0,K} + h_K \|g - g_h\|_{0,K} \|S_K\|_{0,K}],
 \end{aligned}$$

où  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$\|S_K\|_{0,K} \leq C_4 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K},$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons alors la majoration du premier terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation :

$$\begin{aligned}
 (2.261) \quad & h_K \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K} \\
 & \leq C' (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} + \|T - T_h^{i+1}\|_{1,K} + h_K \|g - g_h\|_{0,K}),
 \end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante indépendante de  $h$ .

Par la suite, nous bornons le second terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation. En prenant  $S_h = 0$ , nous déduisons de l'équation (2.252) l'équation suivante :

(2.262)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{2} \sum_{K \in \tau_h} \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e(\mathbf{s}) S(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} \\
 & = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \alpha \int_\Omega \nabla(T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_\Omega ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla S)(\mathbf{x}) (T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_\Omega ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \tau_h} \int_\Omega (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous prenons  $S$  égale à  $S_e$  dans l'équation (2.262) avec :

$$(2.263) \quad S_e = \begin{cases} \mathcal{L}_e(\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e) \text{ sur } K \cup K', \\ 0 \text{ sur } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où  $K$  et  $K'$  sont les éléments de  $\tau_h$  qui contiennent  $e$ . Nous aurons alors l'équation suivante :

$$(2.264) \quad \begin{aligned} & \alpha \int_e [\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e^2(\mathbf{s}) \psi_e(\mathbf{s}) \, ds \\ &= \int_{K \cup K'} (\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h)(\mathbf{x}) S_e(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \alpha \int_{K \cup K'} \nabla(T_h^{i+1} - T)(\mathbf{x}) \cdot \nabla S_e(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{K \cup K'} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \cdot \nabla S_e)(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \int_{K \cup K'} (\mathbf{u} \cdot \nabla S_e)(\mathbf{x}) (T - T_h^{i+1})(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{K \cup K'} ((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_e(\mathbf{x}) \, dx + \int_{K \cup K'} (g - g_h)(\mathbf{x}) \cdot S_e(\mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

Un calcul similaire au calcul déjà effectué avant nous donne :

$$(2.265) \quad \begin{aligned} & \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{0,e}^2 \\ & \leq \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K \cup K'} \|S_e\|_{0,K \cup K'} \\ & \quad + \alpha |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} \\ & \quad + C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} \\ & \quad + \left( \frac{S_6^0 \|T\|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_{\infty}}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} \\ & \quad + C_1 S_6 \|\mathbf{u}\|_3 |T_h^{i+1} - T|_{1,K \cup K'} |S_e|_{1,K \cup K'} + \|g - g_h\|_{0,K \cup K'} \|S_e\|_{0,K \cup K'}. \end{aligned}$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.10 pour avoir :

(2.266)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}^2 \\
 & \leq C_5 [h_e C_6 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e]_{0,e} \\
 & \quad + C_6 \alpha \|T_h^{i+1} - T\|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e \\
 & \quad + C_6 C (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + |p|_{2,\Omega} + |T|_{W^{2,3}(\Omega)}) \|T_h^{i+1} - T\|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e \\
 & \quad + C_6 \left( \frac{S_6^0 \|T\|_{W^{1,3}(\Omega)} + \|T\|_{\infty}}{2} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e \\
 & \quad + C_6 C_1 S_6 \|\mathbf{u}\|_3 \|T_h^{i+1} - T\|_{1,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e \\
 & \quad + h_e C_6 \|g - g_h\|_{0,K \cup K'} \|\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \psi_e,
 \end{aligned}$$

où  $C_5$  et  $C_6$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.10, nous avons :

$$\|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e \psi_e\|_{0,e} \leq C_7 \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e},$$

où  $C_7$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du second terme du premier indicateur d'erreur de discrétisation :

(2.267)

$$\begin{aligned}
 & h_e^{\frac{1}{2}} \|\alpha[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e} \\
 & \leq C'' (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} + \|T - T_h^{i+1}\|_{1,K \cup K'} + \sum_{k \in K \cup K'} h_k \|g - g_h\|_{0,k}),
 \end{aligned}$$

où  $C''$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons finalement le résultat voulu.

- c) Dans cette étape, nous majorons le premier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. Pour cela, nous considérons l'équation (2.81). En ajoutant et en retranchant le terme  $\int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} \nu_h(T_h^i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  et

en prenant  $\mathbf{v}_h = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{K \in \tau_h} \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.268) \quad &+ \int_{\Omega} (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \nabla(p - p_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous prenons  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{v}_K$  dans l'équation (2.268) avec :

$$(2.269) \quad \mathbf{v}_K = \begin{cases} (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Nous aurons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_K (-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)^2(\mathbf{x}) \psi_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_K (\nu(T(\mathbf{x})) - \nu(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 (2.270) \quad &+ \int_K (\nu(T_h^i(\mathbf{x})) - \nu_h(T_h^i(\mathbf{x}))) \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K \nu(T(\mathbf{x})) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &+ \int_K \nabla(p - p_h^{i+1})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_K(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous répétons le même calcul déjà effectué dans la preuve du Théorème 2.1.11 et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \|(-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \\
 (2.271) \quad &\leq \frac{\lambda S_6 \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu_1} \|\mathbf{u}\|_3 \|T - T_h^i\|_{1,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} + \nu_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \\
 &+ \varepsilon_K \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} + |p - p_h^{i+1}|_{1,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{0,K} \|\mathbf{v}_K\|_{0,K},
 \end{aligned}$$

D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$\|\mathbf{v}_K\|_{0,K} \leq C_8 \|-\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K},$$



où  $C_8$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous aurons alors la majoration du terme suivant :

$$(2.272) \quad \begin{aligned} & \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} \\ & \leq \bar{C} (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K} + |p - p_h^{i+1}|_{1,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + \varepsilon_K + \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{0,K}), \end{aligned}$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour majorer le premier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation, nous utilisons l'inégalité triangulaire et nous aurons :

$$(2.273) \quad \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} \leq \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu_h(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} + \varepsilon_K.$$

Nous ajoutons et nous retranchons à  $\varepsilon_K$ , les deux termes  $\nu(T_h^i) \mathbf{u}$  et  $\nu_h(T_h^i) \mathbf{u}$  et nous obtenons :

$$(2.274) \quad \begin{aligned} \varepsilon_K & \leq \| \nu_h(T_h^i) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) - \nu(T_h^i) (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}) \|_{0,K} \\ & \quad + \| (\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u} \|_{0,K}. \end{aligned}$$

Nous ajoutons les termes  $\nu_h(T) \mathbf{u}$  et  $\nu(T) \mathbf{u}$  au second terme du membre de droite de l'égalité (2.274) et nous aurons :

$$(2.275) \quad \begin{aligned} \| (\nu_h(T_h^i) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u} \|_{0,K} & \leq \| (\nu_h(T_h^i) - \nu_h(T)) \mathbf{u} \|_{0,K} + \| (\nu_h(T) - \nu(T)) \mathbf{u} \|_{0,K} \\ & \quad + \| (\nu(T) - \nu(T_h^i)) \mathbf{u} \|_{0,K}. \end{aligned}$$

Comme  $\nu$  et  $\nu_h$  sont  $\lambda$ -lipschitziennes et  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$  alors d'après (1.81), l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4) et la Proposition 1.1.3 (pour  $q = 6$ ), (2.274) nous donne :

$$(2.276) \quad \begin{aligned} \varepsilon_K & \leq 2\nu_2 \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K} + 2S_6 \lambda \| \mathbf{u} \|_{L^3(K)^d} \|T - T_h^i\|_{1,K} \\ & \quad + \| \nu(T) - \nu_h(T) \|_{L^3(K)} \| \mathbf{u} \|_{L^6(K)^d}. \end{aligned}$$

D'où, nous aurons alors la majoration du premier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.277) \quad \begin{aligned} & \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K} \\ & \leq \bar{C} (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{0,K} + |p - p_h^{i+1}|_{1,K} + \|T - T_h^i\|_{1,K} + \| \nu(T) - \nu_h(T) \|_{L^3(K)} \\ & \quad + \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{0,K}), \end{aligned}$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

De plus, pour majorer le second terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. Nous considérons l'équation (2.82) et nous prenons  $q_h = 0$  et  $q = q_K$  avec :

$$(2.278) \quad q_K = \begin{cases} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) \psi_K \text{ sur } K, \\ 0 \text{ sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

D'où, nous aurons :

$$(2.279) \quad \|(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{0,K}^2 \leq |q_K|_{1,K} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}.$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.9 et nous aurons :

$$(2.280) \quad h_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 \leq C_9 \|q_K\|_{0,K} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K},$$

où  $C_9$  est une constante indépendante de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$(2.281) \quad \|q_K\|_{0,K} \leq C_{10} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K},$$

où  $C_{10}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons alors la majoration du second terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.282) \quad h_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K} \leq \bar{C} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K},$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ .

Par la suite, nous bornons le dernier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation. Soit  $e$  une arête ou une face intérieur, nous considérons l'équation (2.82) et nous prenons  $q_h = 0$  et  $q = q_e$  avec :

$$(2.283) \quad q_e = \begin{cases} \mathcal{L}_e(\phi_{h,1}^e \psi_e) \text{ sur } K, \\ 0 \text{ sur } \Omega \setminus K, \end{cases}$$

où  $K$  et  $K'$  sont les éléments de  $\tau_h$  qui contiennent  $e$ . En utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.4), nous obtenons :

$$(2.284) \quad \|\phi_{h,1}^e \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{0,e}^2 \leq \frac{1}{2} [\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} \|q_e\|_{0,K \cup K'} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} |q_e|_{1,K \cup K'}].$$

Nous appliquons les inégalités de la Proposition 2.1.10 et nous aurons :

$$(2.285) \quad h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}^2 \leq \frac{C_{11}}{2} [h_e C_{12} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} \|\phi_{h,1}^e \psi_e\|_{0,e} + C_{13} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'} \|\phi_{h,1}^e \psi_e\|_{0,e}].$$

où  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{13}$  sont des constantes indépendantes de  $h$ . D'après la première inégalité de la Proposition 2.1.9, nous avons :

$$(2.286) \quad \|\phi_{h,1}^e \psi_e\|_{0,e} \leq C_{14} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e},$$

où  $C_{14}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous obtenons alors la majoration du dernier terme du second indicateur d'erreur de discrétisation :

$$(2.287) \quad h_e^{\frac{1}{2}} \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e} \leq \bar{C} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K \cup K'},$$

où  $\bar{C}$  est une constante indépendante de  $h$ . Nous répétons la même démarche pour  $e$  est une arête ou face du bord. □

**Remarque 2.1.13.** Dans la première et la troisième formulations variationnelles, nous concluons l'optimalité en ajoutant des régularités supplémentaires sur la solution et en imposant des conditions appelées des petites données.

## 2.2 Simulations numériques a posteriori

Dans cette partie, afin d'effectuer des simulations numériques, nous proposons un modèle particulier de solutions exactes. Dans ce but, nous considérons le domaine rectangulaire  $\Omega = ]0, 3[^2$  et la solution exacte :  $(\mathbf{u}, p, T) = (\text{rot } \psi, p, T)$ , où  $\psi$ ,  $p$  et  $T$  sont définis de la manière suivante :

$$(2.288) \quad \psi(x, y) = e^{-\beta((x-1)^2+(y-1)^2)},$$

$$(2.289) \quad p(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right)$$

et

$$(2.290) \quad T(x, y) = x^2(x-3)^2y^2(y-3)^2e^{-\beta((x-1)^2+(y-1)^2)}.$$

Nous prenons désormais  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 1$  (pour la quatrième formulation variationnelle),  $N = 30$  et  $\nu(T) = T + 1$ . Nous implémenterons les trois schémas itératifs suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 - (p_h^{i+1}, \text{div } \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, S_h)_2, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 + (\nabla p_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (\nabla q_h, \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{x}) T_h^{i+1}(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, S_h)_2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h)_2 - (p_h^{i+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_2 + \gamma(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_2, \\ (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1})_2 = 0, \\ \alpha(\nabla T_h^{i+1}, \nabla S_h)_2 + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1})(\mathbf{x}) S_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (g, S_h)_2 \end{array} \right.$$

qui correspondent respectivement à la première, la troisième et la quatrième formulations variationnelles.

Nous définissons l'indicateur d'erreur de discrétisation global  $\eta_i^{(D)}$  comme suit :

$$(2.291) \quad \eta_i^{(D)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ((\eta_{K,i,1}^{(D)})^2 + (\eta_{K,i,2}^{(D)})^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\eta_{K,i,1}^{(D)}$  et  $\eta_{K,i,2}^{(D)}$  sont données de la manière suivante :

a) Pour la première formulation variationnelle :

$$(2.292) \quad (\eta_{K,i,1}^{(D)})^2 = h_K^2 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\llbracket \nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_e\|_{0,e}^2$$

et

$$(2.293) \quad \begin{aligned} (\eta_{K,i,2}^{(D)})^2 &= h_K^2 \|\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\operatorname{rot}(-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h)\|_{0,K}^2 \\ &+ \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\llbracket p_h^{i+1} \mathbf{n} \rrbracket_e\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\llbracket (-\nu(T_h^i) \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{t}_e \rrbracket_e\|_{0,e}^2. \end{aligned}$$

b) Pour la troisième formulation variationnelle :

$$(2.294) \quad \begin{aligned} (\eta_{K,i,1}^{(D)})^2 &= h_K^2 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K}^2 \\ &+ \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\llbracket \nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_e\|_{0,e}^2 \end{aligned}$$

et

$$(2.295) \quad (\eta_{K,i,2}^{(D)})^2 = \| -\nabla p_h^{i+1} - \nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\phi_{h,1}^e\|_{0,e}^2.$$

c) Pour la quatrième formulation variationnelle :

$$(2.296) \quad (\eta_{K,i,1}^{(D)})^2 = h_K^2 \|\alpha \Delta T_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i+1} \cdot \nabla T_h^{i+1} + g_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|[\nabla T_h^{i+1} \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}^2$$

et

$$(2.297) \quad (\eta_{K,i,2}^{(D)})^2 = \| -\nabla(p_h^{i+1} - \gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}) - \nu(T_h^i)\mathbf{u}_h^{i+1} + \mathbf{f}_h \|_{0,K}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1}\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_h^i} h_e \|\phi_{h,2}^e\|_{0,e}^2.$$

De même, nous définissons l'indicateur d'erreur de linéarisation  $\eta_i^{(L)}$  comme suit :

$$(2.298) \quad \eta_i^{(L)} = \left( \sum_{K \in \tau_h} ((\eta_{K,i}^{(L)})^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec

$$(2.299) \quad \eta_{K,i}^{(L)} = |T_h^{i+1} - T_h^i|_{1,K}.$$

Nous introduisons le critère d'arrêt classique suivant :

$$(2.300) \quad \eta_i^{(L)} \leq 10^{-7}.$$

Par la suite, nous choisissons une approximation initiale arbitraire ( $T_h^0 = 0$ ), et nous introduisons l'algorithme itératif suivant : Pour  $i = 0$ ,

- a) Connaissant  $T_h^i$ 
  - (a) nous résolvons le problème pour calculer  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, T_h^{i+1})$ ,
  - (b) nous calculons  $\eta_i^{(D)}$  et  $\eta_i^{(L)}$  définis en (2.291) et (2.298) respectivement.
- b) Si l'erreur de linéarisation vérifie le critère d'arrêt (2.300), nous arrêtons la boucle d'itération en  $i$  et nous passons à l'étape (c), sinon nous recommençons l'étape (a) avec  $i = i + 1$ .
- c) (a) Si  $\eta_i^{(D)}$  est inférieur à une tolérance  $\nu$  fixée, nous arrêtons l'algorithme,
  - (b) sinon nous effectuons l'adaptation du maillage qui peut être décrite comme suit :
 

Sur un triangle  $K$  du maillage,

    - si  $\eta_{K,i,1}^{(D)2} + \eta_{K,i,2}^{(D)2}$  est très petite, nous déraffions le maillage autour de  $K$ ,

- 
- si  $\eta_{K,i,1}^{(D)2} + \eta_{K,i,2}^{(D)2}$  est très grande, nous raffinons le maillage autour de  $K$ .  
Par la suite, nous repassons à l'étape (a) avec  $i = i + 1$ .

Nous nous intéressons à étudier l'évolution de l'adaptation du maillage pour la première (respectivement troisième et quatrième) formulation variationnelle. Pour cela, nous commençons avec le même maillage initial (carré dont les arrêtes sont divisés en 30 segments). Dans la Figure 2.1, nous présentons l'évolution du maillage durant les itérations pour la première formulation variationnelle. Nous remarquons que le maillage se concentre de plus en plus dans la région où la solution a besoin d'être bien décrite. Le même phénomène se répète dans la Figure 2.2 concernant la troisième formulation variationnelle. Pour la quatrième formulation variationnelle, nous avons la même évolution du maillage.

Nous présentons dans la Figure 2.3 (respectivement Figure 2.4) une comparaison entre la vitesse exacte et les vitesses numériques (respectivement la température exacte et les températures numériques) correspondantes au dernier maillage des algorithmes associés aux trois formulations variationnelles (dernier maillage des Figures 2.1 et 2.2).

Nous présentons dans la Figure 2.5 la comparaison entre les courbes d'erreur en fonction du nombre de sommets en échelle logarithmique pour différentes  $\gamma$ . Nous remarquons que pour n'importe valeur de  $\gamma$ , la courbe décroît et nous choisissons pour toute la suite  $\gamma = 1$ . Nous présentons dans la Figure 2.6 les courbes d'erreur en fonction du nombre de sommets en échelle logarithmique pour les différentes formulations variationnelles pour  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 50$ . Nous remarquons que la courbe associée à la troisième formulation variationnelle donne une meilleure précision par rapport aux deux autres.

Nous présentons dans la Figure 2.7 les courbes relatives aux estimations d'erreur en fonction du nombre de sommets en échelle logarithmique pour les différentes formulations variationnelles pour  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 50$ . La première courbe (rose) correspond à un maillage uniforme avec  $N$  allant de 40 à 200 par pas de 40, alors que la seconde (bleue) correspond à un maillage adaptatif avec le critère d'arrêt classique (2.300). Nous remarquons qu'avec un maillage adaptatif, l'erreur est beaucoup plus petite que celle avec un maillage uniforme d'où l'efficacité de cette méthode.

Nous présentons dans les Tableaux 2.1 et 2.2 les estimations d'erreur en fonction du temps pour les différentes formulations variationnelles pour  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 50$ . Nous remarquons qu'avec un maillage adaptatif, pour une estimation d'erreur fixée, le temps est beaucoup plus petit que celle avec un maillage uniforme d'où l'efficacité de cette méthode. Par exemple, dans le Tableau 2.2, un maillage uniforme de 139413 sommets donne une erreur de 0.0405 avec un temps de calcul de 297.6 secondes tandis qu'avec l'algorithme adaptatif, le maillage de 16345 sommets donne une erreur de 0.0331 avec un temps de calcul de 36.4 secondes.

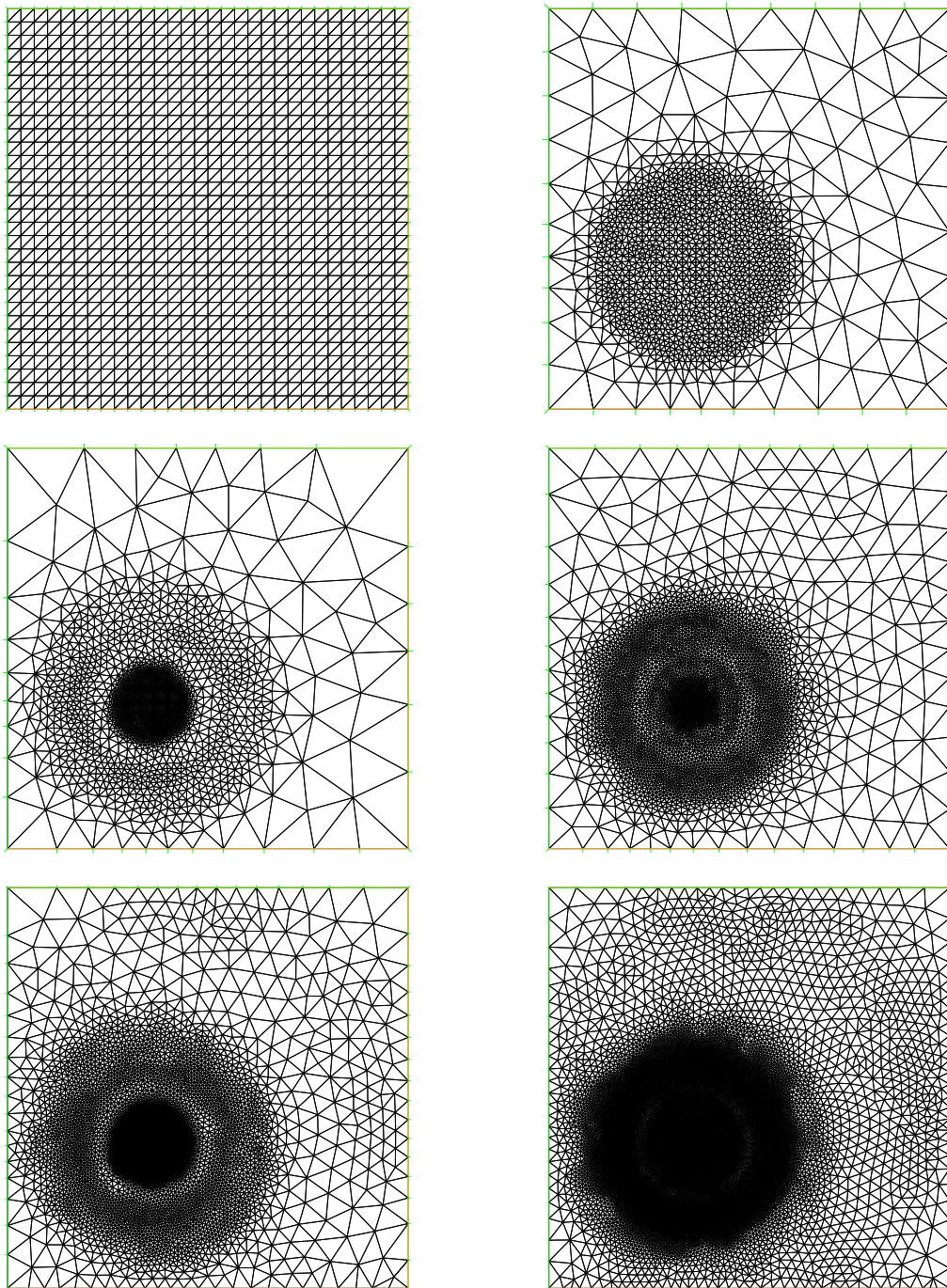


FIGURE 2.1 – Evolution de l’adaptation du maillage pour la première formulation variationnelle.

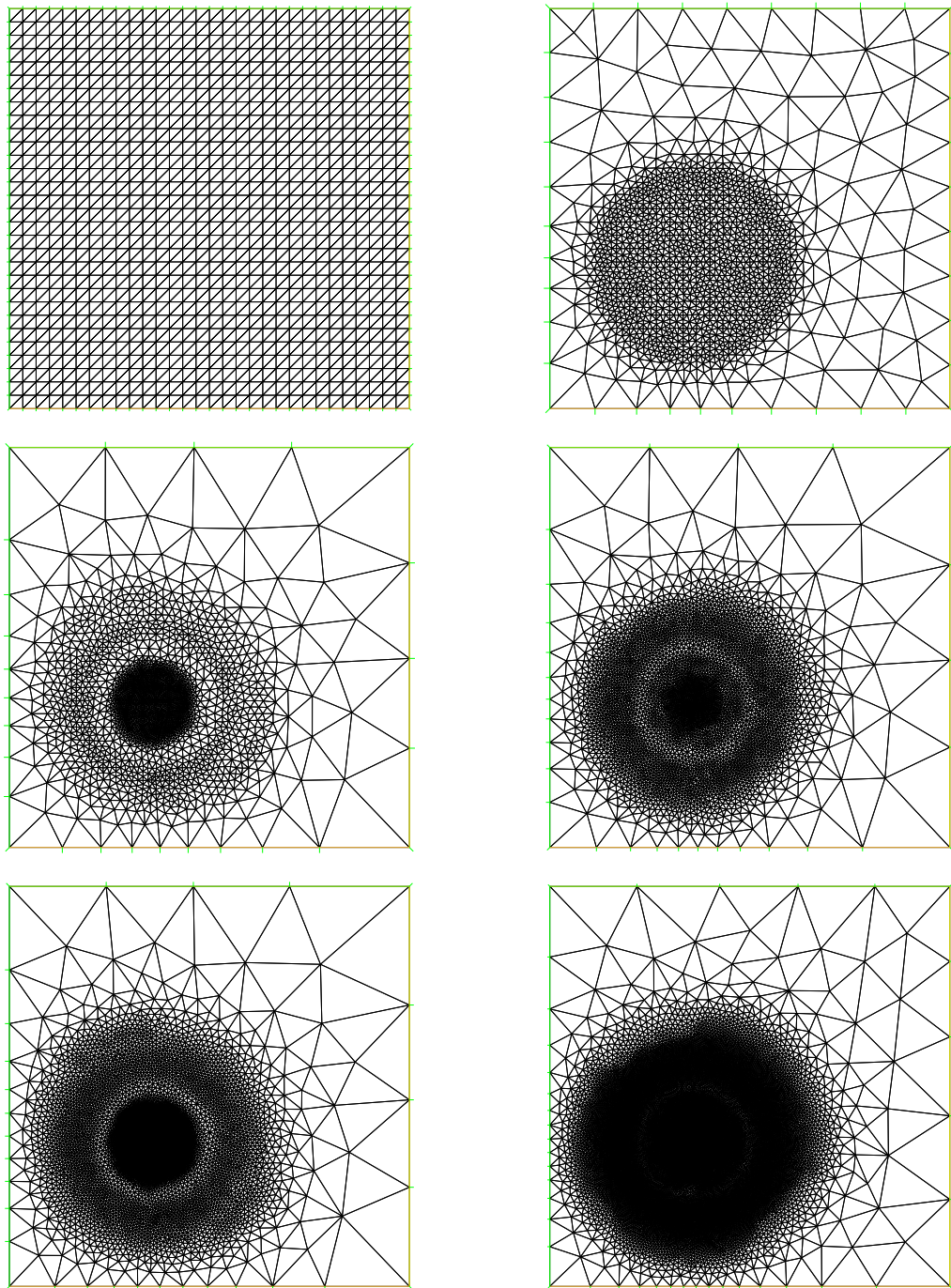
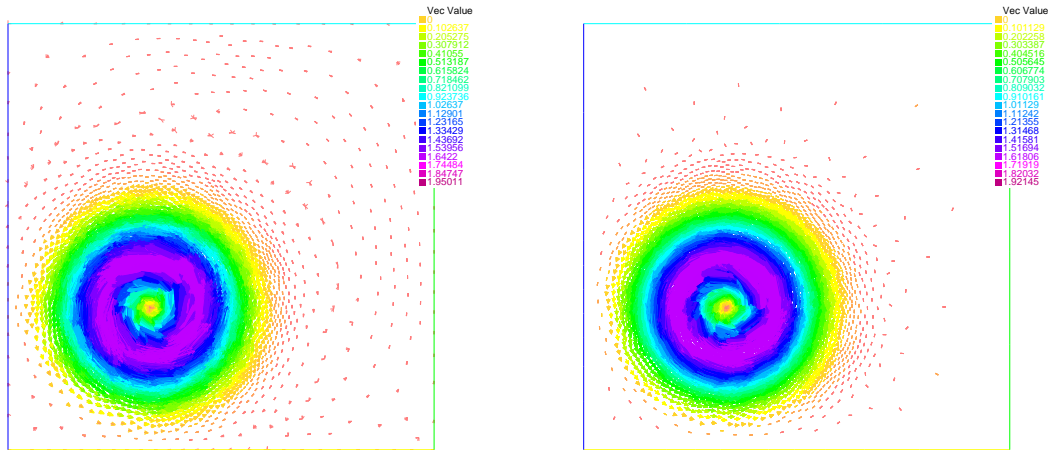


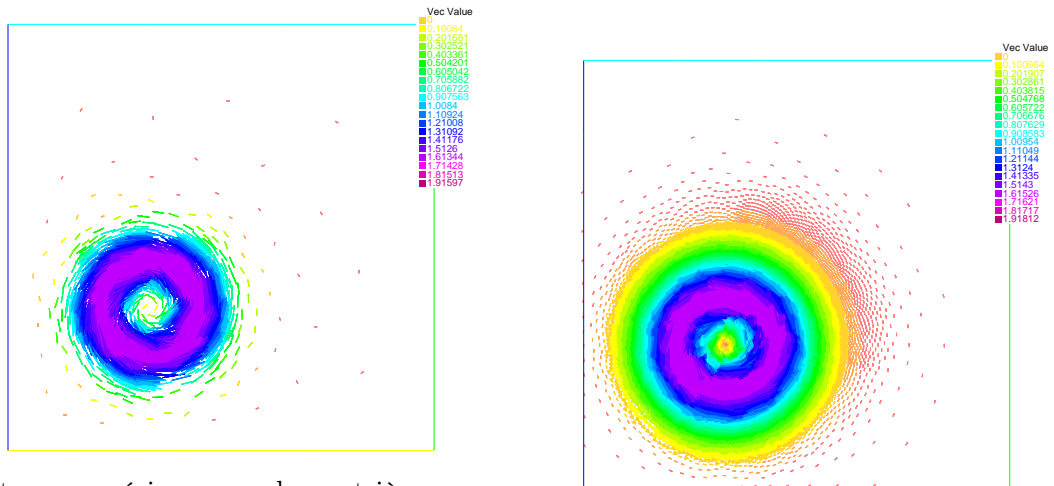
FIGURE 2.2 – Evolution de l’adaptation du maillage pour la troisième formulation variationnelle.





(a) La vitesse numérique pour la première formulation variationnelle

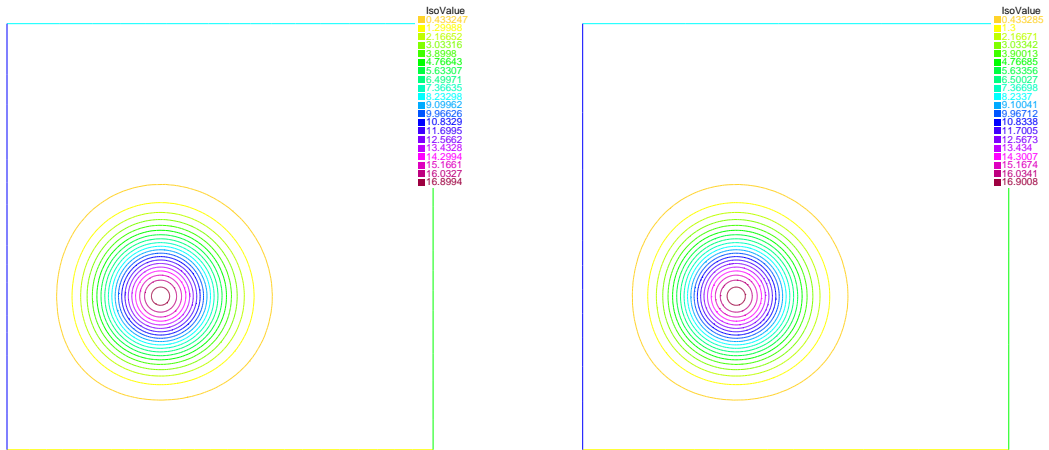
(b) La vitesse numérique pour la troisième formulation variationnelle



(c) La vitesse numérique pour la quatrième formulation variationnelle

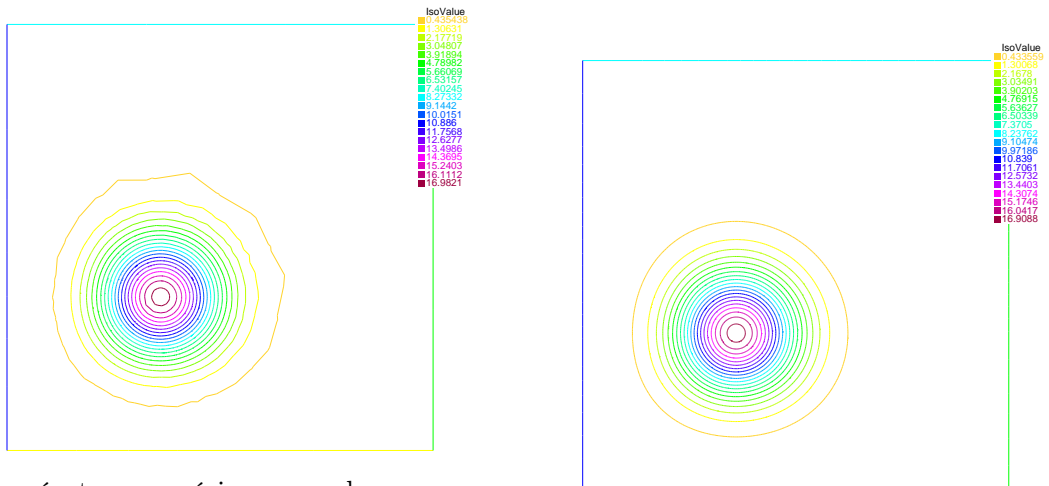
(d) La vitesse exacte

FIGURE 2.3 – Comparaison des vitesses numériques correspondantes aux trois formulations variationnelles avec la vitesse exacte.



(a) La température numérique pour la première formulation variationnelle

(b) La température numérique pour la troisième formulation variationnelle



(c) La température numérique pour la quatrième formulation variationnelle

(d) La température exacte

FIGURE 2.4 – Comparaison des températures numériques correspondantes aux trois formulations variationnelles avec la température exacte.

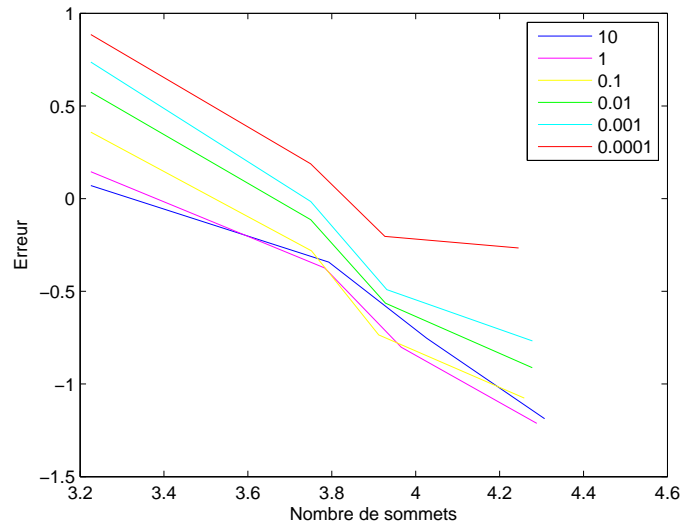


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les courbes d’erreur en échelle logarithmique des différentes  $\gamma$ .

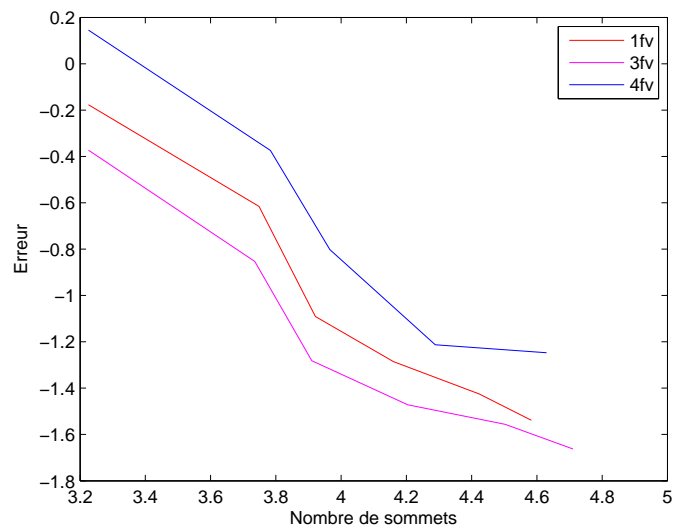
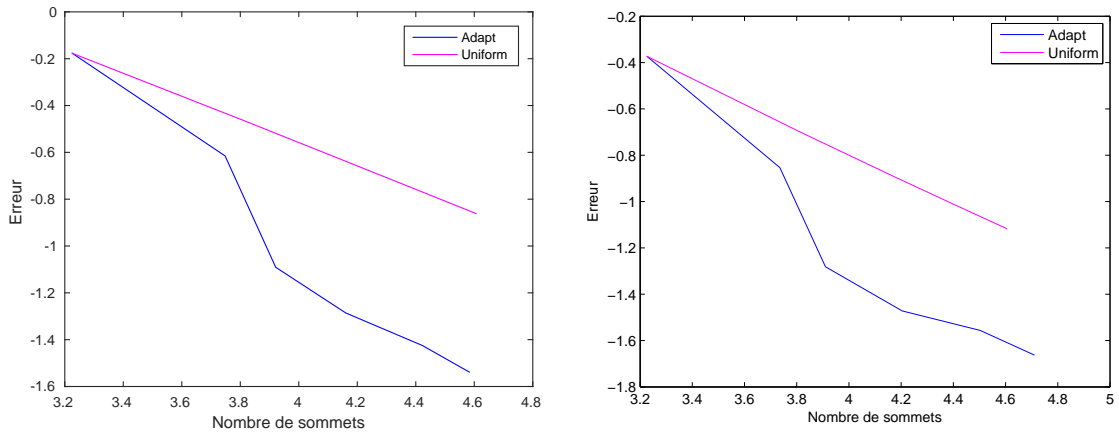
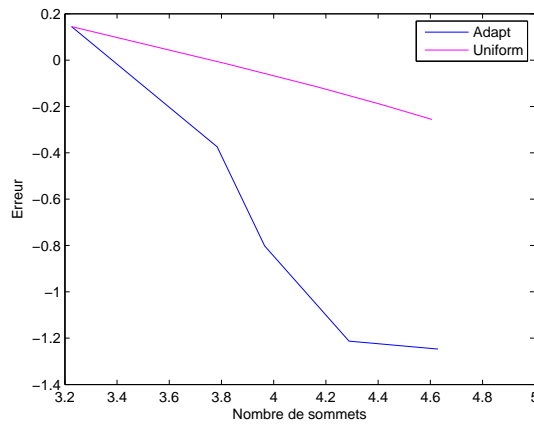


FIGURE 2.6 – Courbe d’erreur en échelle logarithmique : comparaison entre la première, la troisième et la quatrième formulations variationnelles.



(a) Première formulation variationnelle

(b) Troisième formulation variationnelle



(c) Quatrième formulation variationnelle

FIGURE 2.7 – Courbe d’erreur en échelle logarithmique pour différentes formulations variationnelles en fonction du nombre de sommets.

|                   | Type              |           |                   |           |         |
|-------------------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|---------|
|                   | Maillage uniforme |           | Maillage adaptive |           |         |
|                   | Erreur            | Temps (s) | Erreur            | Temps (s) |         |
| Nombre de sommets | 1681              | 0.650347  | 1.84733           | 0.665495  | 1.9658  |
|                   | 5591              | 0.368663  | 6.89125           | 0.242479  | 7.25125 |
|                   | 8337              | 0.300814  | 11.0125           | 0.0811673 | 16.7318 |
|                   | 14470             | 0.22876   | 22.318            | 0.0517883 | 30.5471 |
|                   | 26480             | 0.169742  | 55.9189           | 0.0375766 | 59.809  |
|                   | 38286             | 0.141107  | 95.587            | 0.0289422 | 109.688 |
|                   | 43890             | 0.131679  | 113.015           | 0.0286815 | 166.129 |
|                   | 50918             | 0.122336  | 149.778           | 0.0251285 | 236.458 |
|                   | 58209             | 0.11423   | 157.845           | 0.0256931 | 298.579 |

TABLE 2.1 – Comparaison entre l’erreur et le temps de calcul entre le maillage uniforme et le maillage adaptif pour la première formulation variationnelle.

|                   | Type              |           |                   |            |         |
|-------------------|-------------------|-----------|-------------------|------------|---------|
|                   | Maillage uniforme |           | Maillage adaptive |            |         |
|                   | Erreur            | Temps (s) | Erreur            | Temps (s)  |         |
| Nombre de sommets | 1681              | 0.412416  | 2.51429           | 0.423838   | 2.10416 |
|                   | 5593              | 0.212989  | 8.65219           | 0.143551   | 8.62951 |
|                   | 8252              | 0.1752    | 12.6259           | 0.0526563  | 19.1315 |
|                   | 16345             | 0.12086   | 26.7024           | 0.0331407  | 36.3826 |
|                   | 32204             | 0.0854256 | 54.9968           | 0.0274092  | 72.6641 |
|                   | 52637             | 0.0664096 | 95.197            | 0.0212261  | 132.033 |
|                   | 82554             | 0.0528107 | 162.512           | 0.0198576  | 232.789 |
|                   | 106855            | 0.0462852 | 213.838           | 0.0174972  | 331.263 |
|                   | 139413            | 0.0405317 | 297.672           | 0.00749261 | 466.481 |

TABLE 2.2 – Comparaison entre l’erreur et le temps de calcul entre le maillage uniforme et le maillage adaptif pour la troisième formulation variationnelle.

# Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons considéré le problème stationnaire de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur où la viscosité dépend de la température.

Tout d'abord, nous établissons deux formulations variationnelles continues associées au problème de Darcy où nous les discrétisons en utilisant la méthode des éléments finis : "Raviart-Thomas" et "mini-éléments", par quatre formulations variationnelles discrètes. Nous avons établi des estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori* efficaces et nous avons effectué des simulations numériques pour valider les résultats théoriques obtenus.

Par rapport à l'estimation d'erreur *a posteriori*, nous remarquons que la technique d'adaptation est efficace du fait que le maillage poursuit l'évolution de la solution. L'avantage primordial de cette méthode par rapport à celle de l'estimation d'erreur *a priori* est le gain en mémoire et en temps.

Pour la continuité de ce travail, nous pouvons étudier le problème de Darcy couplé avec l'équation de la chaleur où le second membre dépend également de la température. De même, nous pouvons discuter le problème instationnaire de Darcy ou celui de Darcy-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur.

# Bibliographie

# Bibliographie

- [1] H. ABBOUD, V. GIRAULT AND T. SAYAH, A SECOND ORDER ACCURACY IN TIME FOR A FULL DISCRETIZED TIME-DEPENDENT NAVIER-STOCKES EQUATIONS BY A TWO-GRID SCHEME. *Numer. Math*, **114**, (2009), 189-231.
- [2] R. A. ADAMS, SOBOLEV SPACES. *Academic Press, New York*, (1975).
- [3] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, F. B BELGACEM AND C. BERNARDI, AUTOMATIC SIMPLIFICATION OF DARCY'S EQUATIONS WITH PRESSURE DEPENDENT PERMEABILITY. *ESAIM : M2AN*, **47**, (2013), 1797-1820.
- [4] S. BADIA, ON STABILIZED FINITE ELEMENTS METHODS BASED ON THE SCOTT-ZHANG PROJECTOR. CIRCUMVENTING THE INF-SUP CONDITION FOR THE STOCKES PROBLEM. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg*, **247**, (2012), 65-72.
- [5] S. BADIA AND A. HIERO, ON MONOTONICITY-PRESERVING STABILIZED FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS OF TRANSPORT PROBLEMS. *SIAM J. Sci. Comput.*, **36**, (2014), 2673-2967.
- [6] J. BAGLIO, LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DE RIESZ. ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME EN DIMENSION INFINIE. *Algèbre linéaire*.
- [7] H. H. BAUSCHKE, J. M BORWEIN, X. WANG AND L. YAO, THE BREZIS-BROWDER THEOREM IN GENERAL BANACH SPACE, (2011).
- [8] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS AND G. PAPANICOLAOU, ASYMPTOTIC ANALYSIS FOR PERIODIC STRUCTURES. *Mathematics Subject classification*, (2010).
- [9] C. BERNARDI AND V. GIRAULT, A LOCAL REGULARISATION OPERATION FOR TRIANGULAR AND QUADRILATERAL FINITE ELEMENTS. *SIAM J. Numer. Anal.*, **35**, (1998), 1893-1916.
- [10] C. BERNARDI, S. MAAROUF AND D. YAKOUBI, SPECTRAL DISCRETIZATION OF DARCY'S EQUATIONS COUPLED WITH THE HEAT EQUATION. *IMA Journal of Numerical Analysis*, (2015), 1-24.
- [11] C. BERNARDI, B. MÉTIVET AND B. PERNAUD-THOMAS, COUPLAGE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE LA CHALEUR : LE MODÈLE ET SON APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **29(7)**, (1995), 871-921.
- [12] J. BOUSSINESQ, THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR, *Volume 2 of Lecture Notes in Mathematics. Gauthier-Villars, Paris*, (1903).



- 
- [13] F. BREZZI AND M. FORTIN, MIXED AND HYBRID FINITE ELEMENTS. *Springer-Verlag, New York*, (1991).
- [14] F. BREZZI, J. RAPPAZ AND P.-A. RAVIART, FINITE DIMENSIONAL APPROXIMATION OF NON LINEAR PROBLEMS, PART I : BRANCHES OF NONSINGULAR SOLUTIONS. *Numer. Math.*, **36**, (1980), 1-25.
- [15] J. F. BURNOL, LE THÉORÈME DE LA CONVERGENCE DOMINÉE POUR LES FONCTIONS RIEMANN-INTÉGRABLES, (2009).
- [16] L. CHEN, INF-SUP CONDITIONS, (2014).
- [17] P. G. CIARLET, BASIC ERROR ESTIMATES FOR ELLEPTIC PROBLEMS. *Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (Part I)*, **II**, North-Holland, (1991), 17-343.
- [18] P. CLÉMENT, APPROXIMATION BY FINITE ELEMENT FUNCTIONS USING LOCAL REGULARIZATION. *RAIRO Anal. Numér.*, (1975), 77-84.
- [19] J. DETEIX, A. JENDOUBI AND D. YAKOUBI, A COUPLED PREDICTION SCHEME FOR SOLVING THE NAVIER-STOKES AND CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS. *SIAM J. Numer. Anal.*, **52(5)**, (2014), 2415-2439.
- [20] M. GAULTIER AND M. LEZAUN, ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES COUPLÉES À DES ÉQUATIONS DE LA CHALEUR : RÉOLUTION PAR UNE MÉTHODE DE POINT FIXE EN DIMENSION INFNIE. *Ann. Sci. Math. Québec*, **13(1)**, (1989), 1-17.
- [21] V. GIRAULT AND J.-L. LIONS, TWO-GRID FINITE-ELEMENT SCHEMES FOR THE STEADY NAVIER-STOCKES PROBLEM IN POLYHEDRA. *Portgaliae Mathematica* **58** (2001).
- [22] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, FINITE ELEMENT METHODS FOR NAVIER-STOCKES EQUATIONS, THEORY ANS ALGORITHMS. *Springer series in computational mathematics*, **5**, (1986).
- [23] F. HECHT, NEW DEVELOPMENT IN FREEFEM++. *Journal of Numerical Mathematics*, **20**, (2012), 251-266.
- [24] K. HOOMAN AND H. GURGENCI, EFFECTS OF TEMPERATURE-DEPENDENT VISCOSITY VARIATION ON ENTROPY GENERATION, HEAT AND FLUID FLOW THROUGH A POROUS-SATURATED DUCT OF RECTANGULAR CROSS-SECTION. *ISSN Appl. Math. Mech.*, **28**, (2007), 69-78.
- [25] A. LAMBERT, THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION, (2011-2012).
- [26] N. G. MEYERS, AN  $L^p$  ESTIMATE FOR THE GRADIENT OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER ELLIPTIC DIVERGENCE EQUATION. *Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa*, **17**, (1963), 189-206.
- [27] F. MURAT, COMMUNICATION PERSONNELLE, février (2016).
- [28] J. NEČAS, LES MÉTHODES DIRECTES EN THÉORIE DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES. *Masson, Paris*, (1967).

- 
- [29] J. T. ODEN, FINITE ELEMENTS OF NONLINEAR CONTINUUM. *McGraw-Hill, New York*, (1972).
- [30] J. T. ODEN, FINITE ELEMENTS : AN INTRODUCTION. *Handbook of Numerical Analysis, II*, édité par P. G. Ciarlet and J. L. Lions, North-Holland, (1991), 3-15.
- [31] J. POUSIN AND J. RAPPAZ, CONSISTENCY, STABILITY, A PRIORI AND A POSTERIORI ERRORS FOR PETROV-GALERKIN METHODS APPLIED TO NONLINEAR PROBLEMS. *Numer. Math.*, **69**, (1994), 213-231.
- [32] K. R. RAJAGOPAL, ON A HIERARCHY OF APPROXIMATE MODELS FOR FLOWS OF INCOMPRESSIBLE FLUIDS THROUGH POROUS SOLID. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17**, (2007), 215-252.
- [33] A. M. RASHAD, EFFECTS OF RADIATION AND VARIABLE VISCOSITY ON UNSTEADY MHD FLOW OF A ROTATING FLUID FROM STRETCHING SURFACE IN POROUS MEDIUM. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **22**, (2014), 134-142.
- [34] J. E. ROBERTS AND J.-M. THOMAS, MIXED AND HYBRID METHODS. *Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (Part I)*, **II**, North-Holland, (1991), 523-637.
- [35] L.R. SCOTT AND S. ZHANG, FINITE ELEMENT INTERPOLATION OF NON-SMOOTH FUNCTIONS SATISFYING BOUNDARY CONDITIONS. *Math. Comp.*, **54**, (1990), 483-493.
- [36] G. STAMPACCHIA, LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS ELLEPTIQUES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS DISCONTINUS. *Annales de l'institut Fourier (Grenoble)*, **15**, (1985), 189-258.
- [37] R. VERFURTH, A REVIEW OF A POSTERIORI ERROR ESTIMATION AND ADAPTIVE MESH-REFINEMENT TECHNIQUES, WILEY AND TEUBNER, (1996).
- [38] D. VINCENT, LE THÉORÈME DU POINT FIXE DE BROUWER, (2002-2003).
- [39] O. C. ZIENKIEWICZ, VISCO-PLASTICITY AND PLASTICITY. AN ALTERNATIVE FOR FINITE ELEMENT SOLUTION OF MATERIAL NONLINEARITIES. *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, (1973), 259-287.

# Table des figures

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Maillage du domaine . . . . .  | 93  |
| 1.2 | Comparaison entre les solutions numériques et exactes pour $\nu(T) = T + 1$ pour la première formulation variationnelle. . . . .             | 94  |
| 1.3 | Comparaison entre les vitesses numériques et exactes pour différents $\nu(T)$ pour la première formulation variationnelle. . . . .           | 95  |
| 1.4 | Comparaison des courbes d'erreur en échelle logarithmique pour différents $\gamma$ et à chaque $\nu(T)$ . . . . .                            | 96  |
| 1.5 | Courbe d'erreur en échelle logarithmique pour différents $\nu(T)$ . . . . .  | 97  |
| 2.1 | Evolution de l'adaptation du maillage pour la première formulation variationnelle. . . . .   | 163 |
| 2.2 | Evolution de l'adaptation du maillage pour la troisième formulation variationnelle. . . . .  | 164 |
| 2.3 | Comparaison des vitesses numériques correspondantes aux trois formulations variationnelles avec la vitesse exacte. . . . .                   | 165 |
| 2.4 | Comparaison des températures numériques correspondantes aux trois formulations variationnelles avec la température exacte. . . . .           | 166 |
| 2.5 | Comparaison entre les courbes d'erreur en échelle logarithmique des différentes $\gamma$ . . . . .   | 167 |
| 2.6 | Courbe d'erreur en échelle logarithmique : comparaison entre la première, la troisième et la quatrième formulations variationnelles. . . . . | 167 |
| 2.7 | Courbe d'erreur en échelle logarithmique pour différentes formulations variationnelles en fonction du nombre de sommets. . . . .             | 168 |

# Liste des tableaux

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Pente des courbes d'erreur pour différentes formulations variationnelles et différentes formes de $\nu(T)$ . . . . .                                     | 98  |
| 1.2 | Pente des courbes d'erreur pour différentes $\gamma$ et différentes formes de $\nu(T)$ pour la quatrième formulation variationnelle. . . . .             | 98  |
| 1.3 | Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de $\mu$ . . . . .  | 99  |
| 1.4 | Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de $\mu_T$ . . . . .  | 99  |
| 1.5 | Etude de convergence pour différentes formulations variationnelles et différents valeurs de $\mu_{\mathbf{u}}$ . . . . .                                 | 100 |
| 2.1 | Comparaison entre l'erreur et le temps de calcul entre le maillage uniforme et le maillage adaptif pour la première formulation variationnelle. . . . .  | 169 |
| 2.2 | Comparaison entre l'erreur et le temps de calcul entre le maillage uniforme et le maillage adaptif pour la troisième formulation variationnelle. . . . . | 169 |

# Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'équation de la chaleur couplée avec la loi de Darcy à travers de la viscosité non-linéaire qui dépend de la température pour les dimensions  $d = 2, 3$  (Hooman et Gurgenci [24] ou Rashad [33]). Nous analysons ce problème en introduisant la formulation variationnelle équivalente et en la réduisant à une simple équation de diffusion-convection pour la température où la vitesse dépend implicitement de la température.

Nous démontrons l'existence de la solution sans la restriction sur les données par la méthode de Galerkin et du point fixe de Brouwer. L'unicité globale est établie une fois la solution est légèrement régulière et les données se restreignent convenablement. Nous introduisons aussi une formulation variationnelle alternative équivalente. Toutes les deux formulations variationnelles sont discrétisées par quatre schémas d'éléments finis pour un domaine polygonal ou polyédrique. Nous dérivons l'existence, l'unicité conditionnée, la convergence et l'estimation d'erreur *a priori* optimale pour les solutions des trois schémas. Par la suite, ces schémas sont linéarisés par des algorithmes d'approximation successifs et convergentes. Nous présentons quelques expériences numériques pour un problème modèle qui confirme les résultats théoriques de convergence développées dans ce travail. L'estimation d'erreur *a posteriori* est établie avec deux types d'indicateurs d'erreur de linéarisation et de discrétisation. Enfin, nous montrons des résultats numériques de validation.

**Mots-clés.** Équation de Darcy ; Équation de la chaleur ; Problème non-linéaire ; Méthode de Stampacchia ; Méthode d'éléments finis ; "Mini-élément" ; Élément fini de Raviart-Thomas ; Estimation d'erreur *a priori* ; Estimation d'erreur *a posteriori*.

# Abstract

In this thesis, we study the heat equation coupled with Darcy's law by a nonlinear viscosity depending on the temperature in dimension  $d = 2, 3$  (Hooman and Gurgenci [24] or Rashad [33]). We analyse this problem by setting it in an equivalent variational formulation and reducing it to an diffusion-convection equation for the temperature where the velocity depends implicitly on the temperature.

Existence of a solution is derived without restriction on the data by Galerkin's method and Brouwer's Fixed Point. Global uniqueness is established when the solution is slightly smoother and the data are suitably restricted. We also introduce an alternative equivalent variational formulation. Both variational formulations are discretized by four finite element schemes in a polygonal or polyhedral domain. We derive existence, conditional uniqueness, convergence, and optimal *a priori* error estimates for the solutions of the three schemes. Next, these schemes are linearized by suitable convergent successive approximation algorithms. We present some numerical experiments for a model problem that confirm the theoretical rates of convergence developed in this work. *A posteriori* error estimates are established with two types of errors indicators related to the linearisation and discretization. Finally, we show numerical results of validation.

**Keywords.** Darcy's equation ; Heat equation ; Nonlinear problem ; Stampacchia's method ; Finite element method ; "Mini-element" ; Raviart-Thomas finite element ; *A priori* error estimates ; *A posteriori* error estimates.