Table des matières

1 Définitions et résultats préliminaires **6**

1.1 Interpolation polynômiale 6

1.1.1 Problème d'interpolation 6

1.1.2 Méthode de Lagrange (1736-1813) 7

1.1.3 Méthode d'Hermite (1822-1901) 8

1.1.4 Méthode de Newton (1642-1727) 9

1.2 Polynômes généralisés de Laguerre 13

1.3 Polynômes généralisés de Jacobi 15

1.4 Espaces de Sobolev 15

1.5 Meilleure approximation hilbertienne 16

1.6 Rappels sur quelques matrices 17

1.6.1 Matrices définies positives symétriques 17

1.6.2 Matrice non-singulière 17

1.6.3 Mineur d'une matrice 17

1.6.4 Matrice de Gram 18

1.7 Orthogonalié de Sobolev 19

1.8 Formes bilinéaires et sésquilinéaires- Produit Hermetien . . . 21

1.8.1 Orthogonalité 23

1.8.2 Théorème de projection orthogonale 23

2 La forme discrète-continue de Sobolev **29**

2.1 Théorème 30
2.2 Théorème 32

3 Exemples **34**
3.1 Cas de Laguerre 34
3.2 Cas de Jacobi 35

4 Polynômes orthogonaux de Sobolev et interpolation **37**
4.1 Théorème 37
4.2 Théorème 40

5 Polynômes orthogonaux de Sobolev et approximation **42**
5.1 Théorème 43
5.2 Théorème 44

Introduction

Durant quelques années passées, les polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire comportant des dérivées (appelés aussi polynômes orthogonaux de Sobolev) ont été l'objet de nombreuses intéressantes études. Relations de récurrence, asymptotiques, algébriques, propriétés de differentiation et zéros de plusieurs familles de polynômes ont été étudiés. Dans cet article nous étudions une connéction entre le cas particulier des problèmes de polynômes orthogonaux non standards et des problèmes standards dans la théorie de l'interpolation et de l'approximation.

Dans la deuxième section, nous donnons une déscription des polynômes $\{Q_n\}_n$ qui sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire :

$$(f,g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} + \langle u, f^{(N)}g^{(N)} \rangle \tag{1.1}$$

où u est une fonction linéaire régulière sur l'éspace linéaire $\mathbb{P}$ des polynômes réels,$c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ sont des nombres réels distincts, N est un nombre entier positif et $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre N, réelle telleque toutes ses sousmatrices principales sont non singulières. Soit $\{P_n\}_n$ les polynômes orthogonaux unitaires. Si $n \geq N$, nous avons :$Q_n(c_i) = 0$,$i = 0, 1, \cdots, N-1$, et ${Q_n}^{(N)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!}P_{n-N}(x)$, où $\{Q_n\}_{n=0}^{N-1}$ sont orthogonaux par rapport à la partie discrète de la forme bilinéaire (1.1).

Dans la troisième partie, nous donnons quelques exemples de suites de polynômes orthogonaux unitaires qui sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire(1.1), en utilisant les fonctions linéaires de Laguerre et de Jacobi.

Dans la quatrième partie, nous verrons que le MOPS (Monic Orthogonals Polynomials Sequences : suites de polynômes unitaires orthogonaux) par rapport à (1.1) peut être exprimé comme l'erreur d'interpolation de la $N-$ième primitive de $\{P_{n-N}\}_{n\geq N}$, où $\{P_n\}_n$ est le MOPS associé avec la fonction linéaire régulière u.

La dernière partie de cet article est consacrée pour établir la relation entre le genre d'orthogonalité discret-continu de Sobolev et un problème d'interpolation et d'approximation simultané, dans le cas où (1.1) est un produit scalaire.

Chapitre 1

Définitions et résultats préliminaires

1.1 Interpolation polynômiale

1.1.1 Problème d'interpolation

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, on considère des points distints $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[a, b]$. Un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ avec des coefficients réels est appelé polynôme d'interpolation de f si

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, ..., n$$

On pose $f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., n$

Les coefficients $a_i,\ i = 0, 1, ..., n$ des polynômes $P_n(x)$ vérifient :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = y_j,\ j = 0, 1, ..., n \Leftrightarrow P_n(x_j) = y_j$$

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{y} \Leftrightarrow M.a = y$$

La matrice M est appelée matrice de Vandermonde et on a :

$$\det M = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j)$$

Comme les x_i sont distincts, $\det M \neq 0$

Donc le problème d'interpolation possède une solution unique. L'inversion de la matrice de Vandermonde n'est pas pratique. On va utiliser d'autres méthodes pratiques.

1.1.2 Méthode de Lagrange (1736-1813)

La méthode de Lagrange consiste à trouver des polynômes de base l_j de $\mathcal{P}_n$: ev des polynômes de degré $\leqslant n$, tel que

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les polynômes d'interpolation de Lagrange s'écrit sous la forme :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

et on aura alors : $P(x_j) = y_j$

Sous forme explicite, on trouve

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

les $l_j(x)$ ont les polynômes d'interpolation de Lagrange qui forment une base de l'ev $\mathcal{P}_n$.

Exemple :

$n = 2, x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$

$P(x) = \underbrace{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)}_{l_0} y_0 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) x(x-1)}_{l_1} y_1 + \underbrace{\frac{3}{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right)}_{l_2} y_2$

Remarque : base duale

Soit V une ev de dimension $(n+1)$ et $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ les formes linéaires indépendantes sur V. Alors il existe une unique base $w_0, w_1, ..., w_n$ de V dite base duale des φ_i tel que

$$\varphi_i(w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Avec cette base, on peut explicitement résoudre le problème suivant :
Trouver $v \in V$ tel que $\varphi_i(v) = y_i, \ i = 0, 1, ..., n$ où les y_i sont des points donnés. La solution est alors $v = \sum_{j=0}^{n} y_j w_j$

En effet, on a : $\varphi_i(v) = \sum_{j=0}^{n} y_j \varphi_i(w_j) = y_i$

Dans le cas de l'interpolation polynômiale, on a $V = \mathcal{P}_n$ et $\varphi_i(P) = P(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
On trouve alors la base duale $w_j = l_j$.

1.1.3 Méthode d'Hermite (1822-1901)

D'une manière générale, on parle d'interpolation d'Hermite quand l'interpolation ne porte pas seulement qur les valeurs de la fonction mais aussi sur les valeurs des dérivées. On calcule le polynôme P_3 de degré 3 tel que

$$\begin{cases} P_3(0) &= y_0 \\ P_3(1) &= y_1 \\ P_3'(0) &= y_0' \\ P_3'(1) &= y_1' \end{cases} \quad \text{où } y_0, y_1, y_0', y_1' \text{ sont donnés}$$

P_3 est défini sur l'intervalle $[0, 1]$.

En suivant le principe de la base duale, on a donc les 4 formes linéaires définies par

$$\begin{cases} \varphi_0(P_3) &= P_3(0) \\ \varphi_1(P_3) &= P_3(1) \\ \varphi_2(P_3) &= P_3'(0) \\ \varphi_3(P_3) &= P_3'(1) \end{cases} \quad \text{pour tout } P_3 \in \mathcal{P}_3$$

$$\text{On trouve : } \begin{aligned} w_0(x) &= (1-x)^2(1+2x) \\ w_1(x) &= x^2(3-2x) \\ w_2(x) &= (1-x)^2 x \\ w_3(x) &= x^2(1-x) \end{aligned}$$

$w_0(x), w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ sont les polynômes cubiques dinterpolation d'Hermite qui constituent une base de l'ev $\mathcal{P}_3$.
Le polynôme cherché est donc

$$P_3(x) = y_0 w_0(x) + y_1 w_1(xx) + y_0' w_2(x) + y_1' w_3(x)$$

1.1.4 Méthode de Newton (1642-1727)

La Méthode de Newton est basée sur la notion de différences divisées (dd) d'une fonction à une variable réelle . La dd d'ordre 1 de f relativement à deux abscisses α et β distincts est donnée par

$$f[\alpha, \beta] = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Si l'on a des abscisses $(x_i), i = 0, 1, ..., n$ toutes distintes, on pourra donc définir les différences divisées d'ordre 1 suivantes :

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &\vdots \\ f[x_n, x_{n-1}] &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \end{aligned}$$

On forme ensuite les dd d'ordre 2 basées sur 3 abscisses distinctes de la forme :

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} \\ &\vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] &= \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} \end{aligned}$$

Si on remplace les dd d'ordre 1 par leurs expressions, on obtient :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ainsi la dd d'ordre 2 est une combinaison linéaire des valeurs de f aux 3 abscisses concernées. D'une manière générale, on passe des dd d'ordre $n-1$ basée sur n points aux dd d'ordre n basées sur $n+1$ points par la formule suivante :

Si A représente un ensemble de $n-1$ abscisses distinctes et si α, β sont deux abscisses distinctes non contenues dans A, alors la dd d'ordre n de f basée sur les $n+1$ abscisses $A \cup \{\alpha, \beta\}$ s'obtient par la formule :

$$f[A, \alpha, \beta] = \frac{f[A, \alpha] - f[A, \beta]}{\alpha - \beta}$$

Dans la pratique, pour calculer les dd, on adopte le schéma suivant :

$$\begin{array}{lcccc}
Y_0 = f(x_0) = f[x_0] & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
Y_1 = f(x_1) = f[x_1] & & & & f[x_0, x_1, x_2] \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
Y_2 = f(x_2) = f[x_2] & & & & f[x_1, x_2, x_3] \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \\
 & \nearrow & & & \\
Y_3 = f(x_3) = f[x_3] & & & &
\end{array}$$

D'une manière générale, la dd de f d'ordre n basée sur les points $x_0, x_1, ..., x_n$ est donnée par

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, ..., x_n] = & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)...(x_1 - x_n)} \\
& +... + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})} \\
= & \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}
\end{aligned}$$

Cette formule s'appelle identité de Newton.

Dans cette formule, on voit clairement que la dd ne dépend pas de l'ordre des abscisses mais seulement de l'ensemble des points $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Si f admet une dérivée n-ième continue alors $\exists \xi \in [a, b]$ où $[a, b]$ est le plus petit intervalle contenant les points $x_0, x_1, ..., x_n$ tels que la dd de f est

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}}{n!}(\xi)$$

Il en résulte que si $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ alors la dd d'ordre n de P est égale à 0 c'est-à dire : $P[x_0, x_1, ..., x_n] = 0$.

Exemple

$P(x) = x$

$P[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 0$

Formule de Newton

a) à l'ordre 0

Considérons la dd d'ordre 1 basée sur les points x_0, x. On a :

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on peut écrire $f(x) = f(x_0) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x]$

b) à l'ordre 1

Considérons la dd d'ordre 2 basée sur x_0, x_1, x

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_0, x]}{x - x_0}$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x] + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1]}_{\text{reste}}$$

Remarque

On voit que l'on a exprimé f sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré 1 et d'un reste.

Dans le cas où f est un polynôme de degré 1, le reste disparait car $f[x_0, x] = 0$

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P[x_0, x_1]$$

Supposons que l'on cherche le polynôme de degré 1 qui interpole f en x_0 et x_1 i.e. $P(x_0) = f(x_0)$ et $P(x_1) = f(x_1)$. On aura donc auusi

$$P[x_0, x_1] = f[x_0, x]$$

Par conséquent, $P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]$. C'est le polynôme dinterpolation de f d'ordre 1.

Un polynôme P de degré 1 qui interpole f aus points x_0, x_1 sous forme de Lagrange est

$$P(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

et sous forme de Newton

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

En continuant la construction précédente, on obtient la formule de Newton à l'ordre n

$$\begin{aligned} P_n(x) = \quad & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ... \\ & +(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, ..., x_n] \\ & +(x - x_0)...(x - x_n)f[x_0, ..., x_n, x] \end{aligned}$$

Donc si f est un polynôme de degré n, on a l'identité :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x_0, x_1] + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})P_n[x_0, ..., x_n]$$

Ainsi le polynôme P_n qui interpole f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ est donné par

$$\begin{aligned} P_n(x) = \quad & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ... \\ & +(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, ..., x_n] \end{aligned}$$

1.2 Polynômes généralisés de Laguerre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes généralisés de Laguerre sont définis par :

$$L^{(\alpha)}{}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-j \end{pmatrix} x^j,\ n \geq O$$

avec $\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix}$ désignant le coefficient généralisé

$$\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} = \frac{(a-k+1)_k}{k!}$$

et $(b)_k$ est le *symbole de Pochhammer* definie par :

$(b)_0 = 1$,$(b)_n = b(b+1)...(b+n-1),\ \ b \in \mathbb{R},\ n \geq 0.$

Dans ce chemin , pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille de polynômes généralisés de Laguerre est une base pour l'éspace linéaire de polynômes réels $\mathbb{P}$.

Dans le lemme suivant, on donne quelques propriétés éssentielles des polynômes généralisés de Laguerre. Les trois premières propriétés sont obtenues et peuvent être déduites à partir de l'éxpréssion éxplicite de ces polynômes.

Lemme

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$,$n \geq 1$ un nombre entier.Alors

1. (Relation de récurrence)

$$L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0\ ,\ L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$xL_{-1}^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} L_n{}^{(\alpha)}(x)$$

où $\beta_n^{(\alpha)} = 2n+\alpha+1$, $\gamma_n^{(\alpha)} = n(n+\alpha)$

2. $\left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)' = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$
3. $L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$
4. $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(L_n^{(\alpha)}\right)^{(i)}(x)$

Pour $\alpha > -1$, ces polynômes sont les polynômes classiques de Laguerre qui sont associés avec une fonction linéaire définie positive.

1.3 Polynômes généralisés de Jacobi

En mathématiques, les polynômes de Jacobi sont une classe de polynômes orthoguonaux.

Pour un nombre réel x, les polynômes généralisés de Jacobi sont définis par :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+\beta \\ n-m \end{pmatrix} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-m} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{m}, \ n \geq 0,$$

Dans le cas particulier où les quatre quantités $n, n+\alpha, n+\beta$ et $n+\alpha+\beta$ sont des nombres entiers positifs , le polynôme de Jacobi peut écrit sous la forme :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (n{+}\alpha)!(n{+}\beta)! \sum_{m} [m!(n+\alpha-m(\beta+m)!(n-m)!]^{-1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-m} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{m}$$

La somme s'étend sur m sur toute les valeurs entières pour lesquelles les arguments des factorielles sont positives.

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des epaces fonctionnels. Plus précisement , c'est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^pmuni de la norme de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible,au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonction pouvant être dérivées suffisament de fois et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. Les espaces de Sobolev doivent leur nom au mathématicien russe Sergei Lvovich Sobolev.

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque , p un réel et m un entir naturel positif.On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

où α est un multi-indice telque $0 \leq |\alpha| \leq m$, D^α est une dérivée partielle de f.

Dans le cas $p = 2$, les espaces de Sobolev ont un intérêtparticulier car dans ce cas ce sont des espaces de Hilbert.

1.5 Meilleure approximation hilbertienne

On cherche un polynôme qui est le "plus proche" de f au sens d'une certaine norme $||.||_\chi$, χ étant un espace vectoriel normé de fonctions, contenant les polynômes. Pour $f \in \chi$, on appellle *meilleure approximation polynômiale de f dans $\mathbb{P}_n$* ,un polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ vérifiant :

$$||f - p_n||_\chi = inf_{q \in \mathbb{P}_n} ||f - q||_\chi$$

La quantité $\inf\limits_{q \in \mathbb{P}_n} ||f - q||_\chi$ est appelée *erreur* de la meilleure approximation de f dans $\mathbb{P}_n$,au sens de la norme $||.||_\chi$.

Soit $I =]a, b[$, $\chi = L^2(I)$ ensemble des fonctions mesurables, définies sur I et tellesque $\int_b^a |f(x)|^2 dx < \infty$.

$L^2(I)$ est muni du produit scalaire et de la norme :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, ||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Par transformation affine, on peut toujours ramener l'intervalle I à l'intervalle $]-1, 1[$. La structure hilbertienne de l'espace $\chi = L^2(I)$ permet détendre à cet espace ,de dimension infinie, des concepts habituels en dimension finie : base, projection orthogonale,. . . .

1.6 Rappels sur quelques matrices

1.6.1 Matrices définies positives symétriques

Définition

Une matrice réelle A $n \times n$ est dite définie positive symétrique si :

(1) A est symétrique, c'est-à-dire $A^T = A$

(2) $X^T A X > 0$ pour tout vecteurs $X \neq 0$

Propriétés

Soit A une matrice définie positive symétrique. Alors

– toutes ses valeurs propres sont positives

– son déterminant est positive

– elle est non singulière

Si A et B sont deux matrices définies positives, alors $A + B$ l'est aussi. La matrice inverse d'une matrice définie positive est aussi définie positive.

1.6.2 Matrice non-singulière

Une matrice non-singulière est une matrice carrée qui admet un inverse c'est-à-dire une matrice carrée est non-singulière si et seulement si son déterminant est non nul. Une matrice non-singulière est appelée quelque fois une matrice régulière.

1.6.3 Mineur d'une matrice

Dans l'algèbre linéaire, un mineur d'une matrice A est le déterminant de quelque plus petite matrice carrée, couper vers le bas de A en enlevant une ou plusieurs de ses lignes et colonnes. Les mineurs obtenus juste une ligne et une colonne de la matrice carrée sont exigés pour calculer les matrices cofacteurs, ce sont les premiers mineurs, lesquels à leur tour sont utiles pour calculer le déterminant et l'inverse des matrices carrées.

Soit A une matrice $m \times n$ et k un entier $0 < k \leqslant m$, et $k \leqslant n$. Un mineur d'ordre $k \times k$ de A est le déterminant d'une matrice $k \times k$ obtenue par A par suppression des $m - k$ lignes et $n - k$ colonnes. Le mineur (i, j) M_{ij} d'une matrice carrée A $n \times n$ est définie comme le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ formé en supprimant dans A son i-ième ligne et j-ième colonne.

Un mineur sui est formé en suppression d'une seule ligne et une seule colonne d'une matrice carrée A est appelé le premier mineur.

Nous allons utiliser la notation suivante pour les mineurs :
Si A est une matrice $m \times n$, I est un sous-ensemble de $\{1, ..., m\}$ avec k éléments et J est sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$ avec k éléments, alors nous écrivons $[A]_{IJ}$ pour les mineurs $k \times k$ de A qui correspond aux lignes dans I et colonnes dans J.

- Si $I = J$, $[A]_{IJ}$ est appelé "mineur principal"
- Si la matrice qui correspond à un mineur principal est une partie supérieure à gauche quadratique (2^{nd} degré) de la plus grande matrice (c'est-à-dire, il consiste les éléments de la matrice dans les lignes et colonnes de 1 à k), alors le mineur principal est appelé un mineur principal directeur. Pour une matrice carrée $n \times n$, il existe n mineurs principaux directeurs.

1.6.4 Matrice de Gram

En géométrie euclidienne ou hilbertienne, le déterminant de Gram permet de calculer des volumes et de tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Il associe des calculs de produits scalaires et d'un déterminant. Son nom est un hommage au mathématicien danois Jorgon Pedersen Gram

Définition

Soit E un espace préhilbertien réel. Si $x_1, ..., x_n$ sont n vecteurs de E, la matrice de Gram associée est la matrice symétrique de terme générale : $(x_i, x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$
($(.,.)$ est le produit scalaire dans E)

Propriétés

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de l'espace engendré par les x_i : elle contient $d \leqslant n$ vecteurs. Soit X la matrice représentatrice du système de vecteurs x_i dans $\mathcal{B}$. C'est une matrice de taille $n \times d$, donc chaque colonne contient les composantes d'un des vecteurs x_i. La matrice de Gram n'est autre que $X^T X$.

Etant donné un ensemble V de n-vecteurs (points dans $\mathbb{R}^n$), la matrice de Gram G est la matrice de tout produit intérieur possible de V, c'est-à-dire :

$$G = (g_{ij})_{i,j} = (V_i^T V_j)_{i,j}$$

1.7 Orthogonalié de Sobolev

Pour toute forme bilinéaire symétrique $\phi(.,.)$ définie sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$, nous appelons la suite double $\{\phi_{m,n} := \phi(x^m, x^n)\}_{m,n=0}^{\infty}$ le moment de ϕ et nous disons que ϕ est quasi-définie(resp.définie positive)si

$$(1) \qquad \Delta_n(\phi) := det \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & \phi_{0,1} & \cdots & \phi_{0,n} \\ \phi_{1,0} & \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \vdots & & & \\ \phi_{n,0} & \phi_{n,1} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix} \neq 0, n \in N_0$$

(resp.$\Delta_n(\phi) > 0, n \in N_0$) où $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Lemme 1

Une forme bilinéaire symétrique $\phi(.,.)$ sur $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ est quasi-définie (resp.définie positive)si et seulement si il éxiste une suite de polynômes $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ et des constantes réelles $K_n \neq 0$ (resp.$K_n > 0$),$n \in N_0$,telles que :

$$(2) \qquad \phi(Q_m, Q_n) = K_n \delta_{mn}, \quad m, n \in N_0.$$

<u>Preuve</u> :

Supposons que $\phi(.,.)$ est quasi-définie.Définissons une suite de polynômes par :

$$Q_0(x) = 1$$

$$(3) \quad Q_n(x) = (\Delta_n(\phi))^{-1} det \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & \phi_{0,1} & ... & \phi_{0,n} \\ \phi_{n-1,0} & \phi_{n-1,1} & ... & \phi_{n-1,n} \\ \vdots & & & \\ 1 & x & ... & x^n \end{bmatrix}$$

$n \in N$, $N = \{1, 2, ...\}$.

Alors $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de polynômes unitaires et nous avons (2) avec $K_n = \frac{\Delta_n(\phi)}{\Delta_{n-1}(\phi)}$, $\Delta_{-1}(\phi) = 1$.

Inversement,supposons que $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ vérifie (2),$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ est uniqe si nous supposons que chaque $Q_n(x)$ est unitaire. En écrivant $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k$, nous voyons que la condition d'orthogonalité(2) donne pour $j = 0, 1, 2, ...$

$$(4) \quad \sum_{k=o}^{n} \phi_{j,k} C_k^n = \sum_{k=o}^{n} C_k^n \phi(x^j, x^k) = \phi(x^j, Q_n(x))$$
$$= \phi(Q_j(x), Q_n(x)) = K_n \delta_{jk}$$

Dès que les équations (4) ont une solution unique, non triviale, nous devons avoir $\Delta_n(\phi) \neq 0$ pour tout $n \in N_0$.Finallement,on a ($K_n > 0, n \in N_0$) si et

seulement si $(\Delta_{n-1}(\phi) > 0, n \in N_0)$.
Nous appelons une suite de polynômes $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ associée avec la forme bilinéaire $\phi(.,.)$ dans le Lemme1 une suite de polynômes de Sobolev-Tchebycheff relatif à ϕ (STPS).
Si la forme bilinéaire $\phi(.,.)$ est définie-positive,alors nous référons $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ comme suite de polynômes orthogonaux de Sobolev relatif à ϕ (SOPS).

1.8 Formes bilinéaires et sésquilinéaires- Produit Hermetien

Dans cette section, E est un $K[x_1, \ldots, x_n]$-espace vectoriel quelconque de dimension pas nécessairement finie.

Définition

– (**Formes sésquilinéaires.**) Soit E un $K[x_1, \ldots, x_n]$-ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\phi : (x, y) \longmapsto \phi(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme sésquilinéaire si :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\phi(x_1, y) + \mu\phi(x_2, y)$$

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \phi(x + \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}\phi(x, y_1) + \overline{\mu}\phi(x, y_2)$$

Cette définition est donnée dans le cas le plus général($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la deuxième relation devient :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \phi(x + \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\phi(x, y_1) + \mu\phi(x, y_2)$$

L'application est alors dite "bilinéaire".

– (**Produit hermetien.**) Soit E un $\mathbb{K}$'ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\phi : (x, y) \longmapsto \phi(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ définit un produit hermetien (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou produit scalaire (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), si :

1. ϕ est sésquilinéaire
2. ϕ est symétrique : $\phi(x, y) = \overline{\phi(x, y)}$
3. ϕ estpositive : $\phi(x, y) \geqslant 0$
4. ϕ est définie : $\phi(x, y) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Ici $\overline{\mu}$ désigne le complexe conjugué de μ. Le produit hermetien est défini par des propriétés algébriques mais on peut donner immédiatement un cadre analytique grâce à la proposition suivante :

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'un produit hermetien ϕ. L'application $N : \exists \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N(x) = \sqrt{\phi(x, x)}$ est une norme appelée "norme hilbertienne" (euclidienne dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Désormais, on note $(x, y)_E = \phi(x, y)$ (ou (x, y) 'il n'y a pas d'ambiguité) et $||x||_E$ (ou $||x||$) la norme qui en est issue.

– (**Espace de Hilbert.**) Un espace muni d'un produit hermetien est préhilbertien. Si de plus, il est complet pour la norme $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, c'est un espace de Hilbert.

Remarque

On prendra toujours implicitement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{R}$-ev, les définitions sont les mêmes. Il faut seulement prendre en compte le fait que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\overline{\lambda} = \lambda$.

Exemples

1. $\mathbb{R}$ est un Hilbert avec $(x, y) = xy$ et $||x|| = |x|$
2. $\mathbb{R}^N$ est un Hilbert avec $(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ et $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $\mathbb{C}^N$ est un Hilbert avec $(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$ et $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

1.8.1 Orthogonalité

Définition

Soit E préhilbertien. On dit que x et y sont orthogonaux (noté $x \perp y$) si $(x, y) = 0$.
Soit F un sous-ensemble de E. L'orthogonal de F est

$$F^{\perp} = \{y \in E/(x, y) = 0, \forall x \in E\}$$

Un ensemble dénombrable $\mathcal{B} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal si

$$(\varphi_n, \varphi_k) = 0 \text{ pour tout } n \text{ et tout } k \neq n$$

L'ensemble $\mathcal{B}$ est orthonormé si :

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.8.2 Théorème de projection orthogonale

*** Théorème (Projection orthogonale sur un espace vectoriel fermé)**
Soit H un espace de Hilbert (de norme $||.||_H$), V un sous-espace fermé de H et $f \in H$. Il existe un unique élément $\widetilde{f} \in V$ appelé projeté de f sur V, vérifiant :

$$||f - \widetilde{f}||_H = \inf_{g \in V} ||f - g||_H$$

De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que $\widetilde{f}$ soit le projeté de f sur V est :

$$\forall g \in V, (g, f - \widetilde{f})_H = 0$$

où $(.,.)_H$ désigne le produit hermetien de H associé à la norme $||.||_H$.

Démonstration

Comme $||f - g||_H$ est minoré sur V, l'infinimum existe, on peut trouver une suite minimisant $f_n \in V$ telle que :

$$||f - f_n||_H \longrightarrow d \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{g \in V} ||f - g||_H$$

Montrons que la suite (f_n) est de Cauchy : pour cela, on applique le théorème de la médiane.

Théorème de la médiane

Soit E un espace préhilbertien muni du produit $(.,.)$ et de la norme associée $||.||$. Si x, y et z sont des éléments de E, on a l'identité suivante :

$$\left|\left|2\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\right|\right|^2 + ||x-y||^2 = 2[||z-x||^2 + ||z-y||^2]$$

Prenons donc $x = f_n, y = f_p$ et $z = f$

$$\left|\left|2\left(f - \frac{f_n+f_p}{2}\right)\right|\right|_H^2 + ||f_n - f_p||_H^2 = 2\left[||f - f_p||_H^2 + ||f - f_n||_H^2\right]$$

c'est à dire

$$||f_n - f_p||_H^2 = 2\left[||f - f_p||_H^2 + ||f - f_n||_H^2\right] - 4\left|\left|f - \frac{f_n+f_p}{2}\right|\right|_H^2$$

or $\dfrac{f_n + f_p}{2} \in V$ est par conséquent :

$$\left|\left|f - \frac{f_n+f_p}{2}\right|\right|_H^2 \leqslant d^2$$

On obtient

$$||f_n - f_p||_H^2 \leqslant 2\left[||f - f_p||_H^2 + ||f - f_n||_H^2\right] - 4d^2$$

Or $\lim\limits_{p \to +\infty} ||f - f_p||_H = d$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f - f_n||_H = d$. Cela permet de conclure que la suite (f_n) est de Cauchy.

Car H est un espace de Hilbert, il est complet donc la suite (f_n) converge vers une limite $\widetilde{f}$. L'espace V étant fermé, cette limite est dans V. Enfin, il est claire que :

$$d = \lim_{p \to +\infty} ||f - f_p||_H = ||f - \widetilde{f}||_H$$

Nous avons donc l'existence d'un projeté de f sur V. L'unicité provient encore du théorème de la médiane : supposons qu'il y ait deux éléments de V, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ qui réalise l'infinimum. L'égalité de la médiane appliquée à $z = f, x = \tilde{f}$ et $y = \tilde{g}$ donne comme précédemment :

$$||\tilde{f} - \tilde{g}||_H^2 \leqslant 2\left[||f - \tilde{f}||_H^2 + ||f - \tilde{g}||_H^2\right] - 4d^2 \leqslant 0$$

On en conclut que $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Montrons maintenant la condition :

$$\forall g \in V, (g, f - \tilde{f}) = 0 \qquad (*)$$

On appelle $\tilde{f}$ le projeté de f sur V.
Soit $g \in V(g \neq 0)$. On peut supposer $||g||_H = 1$ puisque

$$\left(f - f^*, \frac{g}{||g||_H}\right)_H = 0 \Leftrightarrow (f - f^*, g)_H = 0$$

Nous avons par définition de $\tilde{f}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, ||f - \tilde{f}||_H^2 \leqslant ||f - \tilde{f} - \alpha g||_H^2$$

En développant, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, 0 \leqslant |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha}(f - \tilde{f}, g)_H\right)$$

En prenant $\alpha = (f - \tilde{f}, g)_H$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, 0 \leqslant |\alpha|^2 - 3|\alpha|^2 = -|\alpha|^2$$

Donc $\alpha = 0$.

Réciproquement : Supposons que $(*)$ a lieu :

$$||f - g||_H^2 = ||f - \tilde{f} + \tilde{f} - g||_H^2 = ||f - \tilde{f}||_H^2 + ||\tilde{f} - g||_H^2 + 2\mathrm{Re}\left(f - \tilde{f}, \tilde{f} - g\right)$$

or $f-g \in V$ donc $(*) \Longrightarrow \mathrm{Re}\,(f-\widetilde{f}, \widetilde{f}-g) = 0$

Finallement, $||f-g||_H^2 = ||f-\widetilde{f}||_H^2 + ||\widetilde{f}-g||_H^2 \geqslant ||f-\widetilde{f}||_H^2$

et l'égalité a lieu si $g = \widetilde{f}$.

Tout élément $f \in H$ admet donc un unique projeté $f^* \in V$ vérifiant

$$||f-f^*||_H = \inf_{g \in V} ||f-g||$$

Ce projeté est caractérisé par : $\forall g \in V, (f-f^*, g) = 0$, c'est-à-dire, $f-f^* \in V^2$. C'est pour cela qu'on dit que c'est le projeté orthonormal.

L'application $\begin{array}{rccc} \Pi : & H & \longrightarrow & V \\ & f & \longmapsto & f^* \end{array}$ est une projection orthogonale.

*** Cas où V est un espace de dimension finie**

Supposons que V est un sous-espace de dimension finie N de H, de base $(\varphi_1, ..., \varphi_N)$. Soit f^* le projeté orthogonal de $f \in H$ sur V, on peut écrire :

$$f^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i$$

Comme $f-f^* \in V^\perp$, on obtient $(f-f^*, \varphi_i) = 0\ \forall i$, et donc

$$(f, \varphi_i) = (f^*, \varphi_i)\ \forall i$$

c'est-à-dire

$$\forall i = 1, ..., N \qquad \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_j \right) = (f, \varphi_i)$$

On désigne par G la matrice $N \times N$ (à coefficients complexes) de terme général $g_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$. Il s'agit de la matrice de Gram.

On peut donc déterminer $(\alpha_i)_{i=1,...,N}$ en résolvant le système linéaire

$$G\Lambda = F, \quad \text{où} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_N) \end{pmatrix}$$

Si la base est orthogonale, G est diagonale.

Théorème

Si la famille $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est libre, la matrice de Gram est hermitienne (c'est-à-dire $G = \overline{G}^T$) définie positive.

Preuve

La matrice de Gram est hermitienne car le produit hermitien est symétrique et donc $g_{j,i} = \overline{g_{i,j}}$.

Montrons qu'elle est définie positive.
Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^N$ et calculons $(X, GX)_{\mathbb{C}^N}$

$$\begin{aligned}
(X, GX)_{\mathbb{C}^N} &= \sum_{i=1}^N x_i \overline{(GX)_i} = \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{k=1}^N \overline{g_{i,k}}\ \overline{x}_k \right) \\
(X, GX)_{\mathbb{C}^N} &= \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{k=1}^N \overline{(\varphi_i, \varphi_k)_H}\, \overline{x}_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{k=1}^N (\varphi_k, \varphi_i)_H \overline{x}_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^N x_i \sum_{k=1}^N (\overline{x}_k \varphi_k, \varphi_i)_H \\
&= \left(\sum_{k=1}^N \overline{x}_k \varphi_k, \sum_{i=1}^N \overline{x}_i \varphi_i \right)_H
\end{aligned}$$

Posons $\chi = \sum_{k=1}^N \overline{x}_k \varphi_k$, on en déduit que

$$(X, GX)_{\mathbb{C}^N} = (\chi, \chi)_H = ||\chi||_H^2$$

Par conséquent $(X, GX)_{\mathbb{C}^N} \geqslant 0$ et la matrice G est positive. De plus si $(X, GX)_{\mathbb{C}^N} = 0$ alors $||\chi||_H^2 = 0$ et donc $\chi = 0$ car la famille $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est libre. Cela entraîne que $X = 0$ et la matrcie G est définie (et donc en particulier inversible).

Dans le cas où la base $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est orthogonale, on obtient

$$\lambda_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

donc

$$f^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \, \varphi_i$$

et $C_i(f) = \dfrac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$ est appelé coefficient de Fourier relativement à la base $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$.

Chapitre 2

La forme discrète-continue de Sobolev

Soit $\mathbb{P}$ l'éspace linéaire des polynômes réels,u une fonction linéaire régulière sur $\mathbb{P}$, et $\mathbf{A}$ une matrice réelle,symétrique et quasi-définie, c'est une matrice dont touts ses mineurs principaux sont différents de zéro.L'éxpréssion

$$(f,g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))\mathbf{A} \begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} + \langle u, f^{(N)} g^{(N)} \rangle \tag{2.1}$$

où $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ sont des nombres réels distinctes , définie une forme bilinéaire sur $\mathbb{P}$.

De l'expréssion (2.1) on a des dérivées, la forme bilinéaire est non standard,et par analogie avec la terminologie usuelle nous l'appellons une *forme bilinéaire discrete-continue de Sobolev.*

Soit

$$w_N(x) = \prod_{i=0}^{N-1} (x - c_i).$$

Dans l'éspace linéaire des polynômes réels,nous pouvons considérer la base donnée par

$$B = \Big\{ \{l_i(x)\}_{i=0,1,...,N-1}, \{w_N(x)x^j\}_{j\geq 0} \Big\}$$

où

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N-1} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}, \qquad i = 0,1,...,N-1.$$

sont les polynômes de Lagrange.

Pour $n \leq N-1$,la matrice de Gram est donnée par la sous matrice principale d'ordre n de la matrice **A**.Pour $n \leq N$,la matrice de Gram associée est donnée par :

$$G_n = \begin{pmatrix} A & 0 \\ O & B_{n-N} \end{pmatrix}$$

,

où B_{n-N} est la matrice de Gram associée avec la fonction linéaire u dans la base

$\tilde{B} = \{D^{(N)}[w_N(x)x^j], j \geq 0\}$.Dans les deux cas,$G_n$ est quasi-définie et par conséquent,la forme bilinéaire discrete-continue de Sobolev (2.1) est quasi-définie.Donc,nous pouvons assurer l'éxistence d'une suite de polyômes unitaires,notée $\{Q_n\}_n$,qui est orthogonal par rapport à (2.1).Ces polynômes seront appelés *polynômes orthogonaux de Sobolev.*

2.1 Théorème

Soit $\{Q_n\}_n$ la MOPS qui suit la forme discrete-continue (2.1) et soit $\{P_n\}_n$ la MOPS associée à la fonction linéaire régulière u.

i) Les polynômes ${\{Q_n\}_n}^{N-1}$ sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire discrete définie par :

$$(f,g)_D = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ii) si $n \geq N$,alors

$$Q_n(c_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{2.3}$$

$$Q_n{}^{(N)}(x) = \tfrac{n!}{(n-N)!} P_{n-N}(x). \tag{2.4}$$

Preuve

i) Si $0 \leq n, m < N$,alors $Q_n(x) = Q_m(x) = 0$, et évidemment

$$(Q_n, Q_m)_S = Q_n, Q_m)_D = (Q_n(c_0), Q_n(c_1), ..., Q_n(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} Q_m(c_0) \\ Q_m(c_1) \\ \vdots \\ Q_m(c_{N-1}) \end{pmatrix}$$

ii)Pour $n \geq N$, par l'orthogonalité de Q_n, nous déduisons

$$0 = (Q_n, l_i)_S = (Q_n, l_i)_D = (Q_n(c_0), Q_n(c_1), ..., Q_n(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} l_i(c_0) \\ l_i(c_1) \\ \vdots \\ l_i(c_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$= (Q_n(c_0), Q_n(c_1), ..., Q_n(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } 0 \leq i \leq N-1.$$

Donc,le vecteur $(Q_n(c_0), Q_n(c_1), ..., Q_n(c_{N-1}))$ est la seule solution d'un système linéaire homogène de N équations et N inconnues,et la matrice **A** est régulière. Nous concluons que $Q_n(c_i) = 0$,$i = 0, 1, \cdots, N-1$,c'est-à-dire,Q_n contient le facteur $(x - c_0)(x - c_1)...(x - c_{N-1})$.

Dans ce chemin,si $n, m \geq N - 1$,

$$(Q_n, Q_m)_S = \langle u, f^{(N)}g^{(N)} \rangle = \tilde{k}_n \delta_{nm}, \qquad \tilde{k}_n \neq 0.$$

Donc,les polynômes $\{Q_n^{(N)}\}_{n \geq N}$ sont orthogonaux relativement à la fonction u,et l'égalité (2.4)provient d'une simple inspection des principaux coefficients.

Inversement,nous allons montrer qu'un système de polynômes unitaires $\{Q_n\}_n$ vérifiant les équations (2.3) et (2.4) est orthogonal pour quelque forme discrete-continue de Sobolev comme (2.1).Ce résultat pourrait être considéré comme un théorème de type *Favard*.

2.2 Théorème

Soit $\{P_n\}_n$ la MOPS associée à la fonction linéaire régulière u et $N \geq 1$ un nombre entier donné.Soit $\{Q_n\}_n$ une suite de polynômes unitaires satisfaisant :

i) $\deg Q_n = n, \; n = 0, 1, ...,$

ii) $Q_n(c_i) = 0, \; 0 \leq i \leq N - 1$,$n \geq N$,

iii) ${Q_n}^{(N)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!} P_{n-N}(x), \; n \geq N.$

Alors, il existe une matrice réelle A quasi-définie et smmétrique,d'ordre N,telle que $\{Q_n\}_n$ est la suite de polynômes orthogonaux unitaires associée avec la forme bilinéaire de Sobolev définie par (2.1).

Preuve

Evidemment,le polynôme Q_n, avec $n \geq N$, est orthogonal à chaque polynômes de degré inférieur ou égale à $n-1$ respectant la forme bilinéaire (2.1), contenant ne matrice arbitraire $\mathbf{A}$ dans la partie discrete et la fonction u dans la seconde partie.

Ensuite, nous montrerons que nous pouvons retrouver la matrice $\mathbf{A}$ à partir des N premiers polynômes $Q_k, k = 0, 1, ..., N-1$.

Introduisons

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_0(c_0) & Q_0(c_1) & ... & Q_0(c_{N-1}) \\ Q_1(c_0) & Q_1(c_1) & ... & Q_1(c_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{N-1}(c_0) & Q_{N-1}(c_1) & ... & Q_{N-1}(c_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{Q}$ est régulière grâce au système de polynômes linéairement indépendants $\{Q_n\}_n{}^{N-1}$.

Soit $\mathbf{D}$ une matrice diagonale régulière.Définissons $\mathbf{A}$ par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{-1})^T.$$

Evidemment $\mathbf{A}$ est symmétrique et quasi-définie et à partir de l'égalité :

$$\mathbf{QAQ}^T = \mathbf{D},$$

les polynômes $Q_0, Q_1, ..., Q_{N-1}$ sont orthogonaux suivant (2.1), avec la matrice $\mathbf{A}$ dans la partie discrete. De plus, les entrées diagonales de $\mathbf{D}$ sont $(Q_k, Q_k)_S$ pour $k = 0, 1, ..., N-1$.

Chapitre 3

Exemples

3.1 Cas de Laguerre

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et introduisons les polynômes unitaires généralisés de Laguerre :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \textstyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-j \end{pmatrix} x^j, \ n \geq O$$

Quand $\alpha \in \{0, 1, ...\}$,les polynômes de Laguerre sont orthogonaux par rapport à une fonction linéaire régulière $u^{(\alpha)}$,c'est-à-dire

$$\langle u^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} L_m^{(\alpha)} \rangle = c_n \delta_{nm}$$

avec $c_n \in \mathbb{R}$
Si $\alpha > -1$,$u^{(\alpha)}$ est définie positive c'est-à-dire $c_n > 0$.

Considérons la suite de polynômes unitaires suivante :

$$Q_n(x) = L_n^{(\alpha-N)}(x), n = 0, 1, ..., N-1$$

$$Q_n(x) = L_n^{(\alpha-N)}(x) - \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} L_n^{(\alpha-N)}(c_i) l_i(x) n \geq 0$$

où $l_i(x), i = 0, 1, ..., N-1$,sont les polynômes de Lagrange.

On a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $deg\left(L_n^{(\alpha)}\right) = n$

d'où $deg(Q_n) = deg\left({L_n}^{(\alpha)}\right) = n, n = 0, 1, ...$

Et pour $n \geq N$,on a :

$$Q_n^{(N)}(x) = \frac{d^N}{dx^N} L_n^{(\alpha-N)}(x)$$

Or on sait que les dérivées des polynômes de Laguerre sont encore des polynômes de Laguerre et :

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

D'où

$$\frac{d^N}{dx^N} L_n^{(\alpha-N)}(x) = n(n1)...(n-N+1) L_{n-N}^{(\alpha)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!} L_{n-N}^{(\alpha)}(x)$$

Prenons alors $P_{n-N} = L_{n-N}^{(\alpha)}$ .Doc la suite de polynômes unitaires $\{Q_n\}_n$ consiérée précédement vérifie le théorme (2.2) , et est donc par suite orthogonale par rapport à la relation (2.1) avec :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{-1})^T$$

$$\mathbf{Q} = \left(L_n^{(\alpha-N)}(c_i)\right)_{i=0,...,N-1}$$

3.2 Cas de Jacobi

Pour α et β des nombres réels,les polynômes de Jacobi généralisés peuvent être définie au moyen de leurs représentations éxplicites :

$$P_n{}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n+\alpha \\ m \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n+\beta \\ n-m \end{array} \right) \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-m} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{m}, \ n \geq 0,$$

Quand $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, ...\}$,les polynômes de Jacobi sont orthogonaux par rapport à une fonction linéaire régulière $u^{(\alpha,\beta)}$. Cette fonction linéaire est définie positive pour $\alpha, \beta > -1$.

Soient $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x), n \geq 0$, les polynômes de Jacobi. On sait que les dérivées des polynômes de Jacobi sont ,aussi,toujours des polynômes de Jacobi :

$$\tfrac{d}{dx}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x), n \geq 1.$$

Soit $\{Q_n\}_n$ la suite de polynômes unitaires donnés par :

(3.1) $\quad Q_n(x) = \tilde{P}_n^{(\alpha-N,\beta-N)}(x), \ n = o, 1, ..., N-1,$

(3.2) $\quad Q_n(x) = \tilde{P}_n^{(\alpha-N,\beta-N)}(x) - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{P}_n^{(\alpha-N,\beta-N)}(c_i) l_i(x), \ n \geq N,$

où $\alpha, \beta et \alpha + \beta - 2N \in \{1, 2, ...\}$. Il s'en suit du Théorème 2.2 que la suite $\{Q_n\}_n$ est orthogonale par rapport à la forme bilinéaire de Sobolev :

$$(f, g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))\mathbf{A} \left(\begin{array}{c} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{array} \right) + \langle u, f^{(N)} g^{(N)} \rangle$$

où $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ sont des nombres réels distincts et $\mathbf{A}$ une matrice donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{-1})^T,$$

où

$$\mathbf{Q} = \left(\tilde{P}_n^{(\alpha-N,\beta-N)}(c_i) \right)_{i,n=0,,1,...,N-1}$$

et $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale régulière arbitraire.

Chapitre 4

Polynômes orthogonaux de Sobolev et interpolation

Soit $\{Q_n\}_n$ la MOPS qui suit la forme discrete-continue (2.1) et soit $\{P_n\}_n$ la MOPS associée à la fonction linéaire régulière u. Alors les polynômes $\{Q_n\}_n$ peuvent être éxprimés comme l'érreur d'interpolation d'une $N-$ième primitive de $\{P_{n-N}\}_{n\geq N}$.

4.1 Théorème

Soient les MOPS $\{Q_n\}_n$ et $\{P_n\}_n$ définies comme au-dessus,et $\{R_n\}_{n\geq N}$ une suite des $N-$ième primitives des polynômes $\{P_{n-N}\}_{n\geq N}$.Alors

$$Q_n(x) = R_n\left[c_0, c_1, ..., c_{N-1}, x\right] \prod_{i=0}^{N-1} (x - c_i), \; n \geq N$$

où $R_n\left[c_0, c_1, ..., c_{N-1}, x\right], n \geq N$ dénote la différence divisée usuelle.

Preuve

On a la relation (2.4)

$$Q_n^{(N)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!} P_{n-N}(x)$$

et en intégrant cette égalité on obtient

$$Q_n^{(N-1)}(x) = \frac{n!}{(n-N+1)!} P_{n-N+1}(x) + cste$$

D'où en intégrant l' égalité (2.4) N-fois, nous aurrons :

$$Q_n(x) = R_n(x) + \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}$$

Mais comme $\{l_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$ forme une base de $\mathbb{P}$, on peut donc trouver

$A_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq N-1$ tels que

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{N-1} A_i l_i(x)$$

D'où

$$Q_n(x) = R_n(x) + \sum_{i=0}^{N-1} A_i l_i(x)$$

Or $Q_n(c_i) = 0, i = 0, 1, ..., N-1, n \geq N$

alors

$$0 = R_n(c_i) + \sum_{j=0}^{N-1} A_j l_j(c_i), 0 \leq i \leq N-1$$

d'où

$$0 = R_n(c_i) + A_i l_i(c_i)$$

car $l_j(c_i) = \delta_{ji}$

Donc $R_n(c_i) = -A_i,\ i = 0, 1, ..., N-1$

Alors

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= R_n(x) - \sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i) l_i(x) \\ Q_n(x) &= R_n(x) - \sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{x - c_j}{c_i - c_j} \end{aligned}$$

$$Q_n(x) = R_n(x)\frac{\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)}{\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)} - \sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i)\frac{\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N-1}(c_i-c_j)}$$

$$Q_n(x) = \left[\frac{R_n(x)}{\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)} - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{R_n(c_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N-1}(c_i-c_j)}\right]\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)$$

Posons $x = c_N$, d'où

$$Q_n(x) = \left[\frac{R_n(c_N)}{\prod_{j=0}^{N-1}(c_N-c_j)} - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{R_n(c_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N-1}(c_i-c_j)}\right]\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)$$

$$Q_n(x) = \left\{\frac{R_n(c_N)}{\prod_{j=0}^{N-1}(c_N-c_j)} - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{R_n(c_i)}{-\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N-1}(c_j-c_i)}\right\}\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)$$

$$Q_n(x) = \left\{\frac{R_n(c_N)}{\prod_{j=0}^{N-1}(c_N-c_j)} + \sum_{i=0}^{N-1}\frac{R_n(c_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N-1}(c_j-c_i)}\right\}\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)$$

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{N}\frac{R_n(c_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N}(c_i-c_j)}\prod_{j=0}^{N-1}(x-c_j)$$

On a l'identité de Newton :

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1,...,x_n] = &\ \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)...(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)...(x_1-x_n)} \\ &+ ... + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)...(x_n-x_{n-1})} \\ = &\ \sum_i \frac{f(x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$Q_n(x) = R_n[c_0, c_1, ..., c_{N-1}, c_N] \prod_{j=0}^{N-1} (x - c_j)$$

D'où le résultat

$$Q_n(x) = R_n[c_0, c_1, ..., c_{N-1}, x] \prod_{j=0}^{N-1} (x - c_j)$$

Remarque

Dans la troisième partie nous voyons que $Q_n,\ n \geq 0$, donné par (3.1) et (3.2), est l'erreur d'interpolation des polynômes de Laguerre ${L_n}^{(\alpha-N)}$ aux points $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$. D'une manière analogue $Q_n,\ n \geq 0$, donné par (3.3) et (3.4) , est l'erreur d'interpolation des polynômes de Jacobi ${P_n}^{(\alpha-N,\beta-N)}$ aux points $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$.

4.2 Théorème

Soit $\{R_n\}_n$ la suite de polynômes unitaires telle que deg$R_n = n$, $n = 0, 1, ...$, et soit $\{Q_n\}_n$ la suite de polynômes détérminée par :

(4.1) $$Q_n(x) = R_n(x),\ n = 0, 1, ..., N-1,$$

et soit

(4.2) $$Q_n(x) = R_n(x) - \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i) l_i(x),\ n \geq N,$$

où $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ sont des nombres réels distincts, l_i polynômes de Lagrange. Si $\{R_n^{(N)}\}_{n\geq N}$ est une suite de polynômes orthogonaux associés à quelques fonctions linéaires régulières u, alors il existe une matrice réelle **A** quasi-définie et symétrique, d'ordre N, telle que $\{Q_n\}_{n\geq N}$ est la MOPS associée avec la forme bilinéaire de Sobolev définie par (2.1).

Preuve

De (4.1) et (4.2) nous avons $degQ_n = degR_n = n$, et pour $n \geq N$ on a :

$$Q_n(c_j) = R_n(c_j) - \sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i)l_i(c_j) = R_n(c_j) - \sum_{i=0}^{N-1} R_n(c_i)\delta_{ij} = 0.$$

De plus,

$$Q_n{}^{(N)}(x) = R_n{}^{(N)}(x) = \tfrac{n!}{(n-N)!}P_{n-N}(x),\ \ n \geq N,$$

où $\{P_n\}_n$ est la MOPS associée avec u.
Il suit du théorème (2.2) que : $\{Q_n\}_n$ est la MOPS suivant la forme bilinéaire définie par (2.1), où

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{R}^{-1})^T$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} R_0(c_0) & R_0(c_1) & ... & R_0(c_{N-1}) \\ R_1(c_0) & R_1(c_1) & ... & R_1(c_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{N-1}(c_0) & R_{N-1}(c_1) & ... & R_{N-1}(c_{N-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q_0(c_0) & Q_0(c_1) & ... & Q_0(c_{N-1}) \\ Q_1(c_0) & Q_1(c_1) & ... & Q_1(c_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{N-1}(c_0) & Q_{N-1}(c_1) & ... & Q_{N-1}(c_{N-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et $\mathbf{D}$ est une matrice régulière arbitraire.

Chapitre 5

Polynômes orthogonaux de Sobolev et approximation

Le genre d'orthogonalité discrete-continue de Sobolev peut être relaté simultanément comme polynôme d'interpolation et d'approximation quand (2.1) est un produit scalaire. Supposons que u est définie positive et que $\mathbf{A}$ est une matrice réelle ,définie positive et symmétrique. Comme u est définie positive, il éxiste une mesure μ définie positive de Borel satisfaisant :
$\langle u, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$
et le produit scalaire dicret-continu de Sobolev (2.1) peut être écrit comme :

$$(5.1)\ (f,g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))\mathbf{A}\begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} f^{(N)}(x)g^{(N)}(x)d\mu(x).$$

Soit I l'envellope convexe de l'ensemble $supp(\mu)\bigcup\{c_i\}_{i=0}^{N-1}$, et introduisons l'éspace de Sobelev :
$W_2^N[I, d\mu] = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \in C^{N-1}(I),\ f^{(N)} \in L^2_\mu(I)\}$.

Définissons la norme $|f|_S = \sqrt{(f,f)_S}$ dans $W_2^N[I, d\mu]$;donc $W_2^N[I, d\mu]$ devient un éspace linéaire normé. Cet éspace est strictement convexe. Par conséquent le probème de la meilleure approximation dans $W_2^N[I, d\mu]$ admet une unique solution.

Nous pouvons calculer la meilleure approximation de $f \in W_2^N[I, d\mu]$ projétée sur $\mathbb{P}_n$.Il est bon de voir que$v \in \mathbb{P}_n$ est la meilleure approximation de $f \in W_2^N[I, d\mu]$ si et seulement si $f - v$ est orthogonal à $\mathbb{P}_n$.

5.1 Théorème

Soit $f \in W_2^N[I, d\mu]$. Alors la meilleure approximation de $f \in (\mathbb{P}_n, (.,.)_S)$ est la N-ième primitive de $f^{(N)}$ dans $(\mathbb{P}_{n-N}, d\mu)$ qui interpôle f aux points $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$.

Preuve

Soit w la meilleur approximation de $f^{(N)}$ dans $(\mathbb{P}_{n-N}, d\mu)$. Soit v la primitive d'ordre N de v qui interpôle f aux points $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$.Par conséquent

$$\begin{aligned}(f - v, q)_S &= (f - v, q)_D + \textstyle\int_{\mathbb{R}}(f^{(N)} - v^{(N)})q^{(N)}(x)d\mu \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}}(f^{(N)} - w)q^{(N)}(x)d\mu = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n\end{aligned}$$

Donc, v est la meilleure approximation de f dans $(\mathbb{P}_n, (.,.)_S)$.

Soit $\{Q_n\}_n$ la MOPS suivant le produit intérieur discret-continu de Sobolev (5.1).Soit v la meilleure approximation de $f \in W_2^N[I, d\mu]$ dans $(\mathbb{P}_n, (.,.)_S)$.

On sait que :

$$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f, Q_i)_S}{||Q_i||_S^2} Q_i,$$

où $\dfrac{(f, Q_i)_S}{||Q_i||_S^2}$ sont les coéfficients de Fourier de v.

5.2 Théorème

Soient $\{Q_n\}_n$ *et* v *définies comme précédemment.*
i) Si $n \leq N-1$*, alors*
$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f,Q_i)_D}{||Q_i||_D^2} Q_i,$
ii) Si $n \geq N$*, alors*
$$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f,Q_i)_D}{||Q_i||_D^2} Q_i + \sum_{i=N}^{n} \frac{(i-N)!}{i!} \frac{\langle u, f^{[N]} P_{i-N} \rangle}{\langle u, P_{i-N}^2 \rangle} Q_i.$$

Preuve

Soit v la meilleure approximation de $f \in W_2^N[I, d\mu]$ dans $(\mathbb{P}_n, (.,.)_S)$.On a (d'aprés le thérème précédent) :

$$(f-v, q)_S = 0, \qquad \forall q \in \mathbb{P}_n.$$

Comme $\{Q_n\}_n$ est la MOPS définie précédement, avec $degQ_n = n$ alors $Q_n \in \mathbb{P}_n$
Prenons donc $q = Q_i$, $i = 0, 1, ..., n$.
On a :

$$(f-v, Q_i)_S = 0 \text{ , pour } i = 0, 1, ..., n$$

Comme $(.,.)_S$ est une forme bilinéaire symmétrique ,on a :

$$(f, Q_i)_S - (v, Q_i)_S = 0 \ ,$$

D'où

$$(f, Q_i)_S = (v, Q_i)_S$$

$$\tfrac{(v,Q_i)_S}{(Q_i,Q_i)_S} Q_i = \tfrac{(f,Q_i)_S}{(Q_i,Q_i)_S} Q_i \text{ , car } (Q_i, Q_i)_S \neq 0$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(v,Q_i)_S}{(Q_i,Q_i)_S} Q_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f,Q_i)_S}{(Q_i,Q_i)_S} Q_i$$

– Pour $n \leq N-1$,on a

$$(f, Q_i)_S = (f, Q_i)_D$$

et

$$(Q_i, Q_i)_S = (Q_i, Q_i)_D$$

D'où

$$v = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(f, Q_i)_D}{(Q_i, Q_i)_D} Q_i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{{(f, Q_i)_D}^2}{||Q_i||_D} Q_i$$

– Pour $n \geq N$, on a

$$(f, Q_i)_S = (f, Q_i)_D + \langle u, f^{(N)} Q_i^{(N)} \rangle$$

$$(Q_i, Q_i)_S = (Q_i, Q_i)_D + \langle u, [Q_i^{(N)}]^2 \rangle$$

Or d'après (2.4) on a :

$${Q_n}^{(N)}(x) = \tfrac{n!}{(n-N)!} P_{n-N}(x)$$

D'où

$$v = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{{(f, Q_i)_D}^2}{||Q_i||_D} Q_i + \sum_{i=N}^{n} \frac{\langle u, f^{(N)} Q_i^{(N)} \rangle}{\langle u, [Q_i^{(N)}]^2 \rangle}$$

et

$$\langle u, [Q_i^{(N)}]^2 \rangle = \langle u, [\frac{i!}{(i-N)!}]^2 P_{i-N}^2 \rangle$$

D'où

$$\frac{\langle u, f^{(N)} Q_i^{(N)} \rangle}{\langle u, [Q_i^{(N)}]^2 \rangle} = \frac{(i-N)!}{i!} \frac{a}{b}$$

Donc on a le résultat :

$$v = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{{(f, Q_i)_D}^2}{||Q_i||_D} Q_i + \sum_{i=N}^{n} \frac{(i-N)!}{i!} \frac{a}{b} Q_i$$

avec

$$a = \langle u, f^{(N)} P_{i-N} \rangle \text{ et } b = \langle u, P_{i-N}^2 \rangle$$

Conclusion

En conclusion, on a vue une description des polynômes unitaires $\{Q_n\}_n$ qui sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire (1.1). Comme exemples de ces polynômes $\{Q_n\}_n$, on a les fonctions linéaires de Laguerre et celles de Jacobi qui sont des MOPS (Suites de polynômes unitaires orthogonaux) et qui sont aussi orthogonales par rapport à la forme bilinéaire (1.1).

Ces MOPS sont d'une grande importance dans la théorie de l'interpolation et de l'approximation polynômiale car elles ont permis d'exprimer l'erreur d'interpolation de la N-ième primitive de $\{P_{n-N}\}_{n\geqslant N}$ où $\{P_n\}_n$ est la MOPS associée à une fonction linéaire régulière u, et aussi de calculer la meilleure approximation de $f \in W_2^N[I, d\mu]$ relativement sur $\mathbb{P}_n$. Les polynômesorthogonaux de Sobolev tiennent donc une grande place dans la théorie de l'interpolation et de l'approximation polynômiale mais aussi dans d'autres domaines.

Bibliographie

[1] M. Alfaro, T.E. Pérez, M.A. Piñar, and M.L. Rezola, *Sobolev orthogonal polynomials : the discrete-continuous case*, Methods and Appl. of Anal., (to appear).

[2] T.S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York,1978.

[3] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover Publication, New York, 1975.

[4] I.H. Jung, K.H. Kwon, and J.K. Lee, *Sobolev Orthogonal Polynomials relative to* $\lambda p(c)q(c) + < \tau, p'(x)q'(x) >$), Comm. Korean Math. Soc. 12 (3) (1997), pp. 603-617.

[5] K.H. Kwon, and L.L. Littlejohn, *The originality of the Laguerre Polynomials* $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ *for positive integers* k, Annals of Numerical Mathematics, 2 (1995), 289-304.

[6] K.H. Kwon, and L.L. Littlejohn, *Sobolev Orthogonal Polynomials and second-order differential equations*, Rocky Mountain J. Math., 28 (2) (1998), pp. 547-594.

[7] F. Marcellan, T.E. Pérez, M.A. Piñar, and A. Ronveaux, *General Sobolev Orthogonal Polynomials*, J Math. Anal. Appl., 200 (1996), 614-634.

[8] T.E. Pérez, and M.A. Piñar, *On Sobolev Orthogonality for the Generalized Laguerre Polynomials*, J. Approx. Theory, 86, (1996), 278-285.

[9] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RJ, 1975 (4th edition).

[10] J. Stoer, and Bulirsch, *Introduction to Numerical Anlysis*, Springer, 1993 (2nd ed.).

Candidat : ANDRIAMAMPIONONA Ramaromanompo Romule Fleurys
e-mail : mampionona_02@hotmail.fr

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions les polynômes orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire

$$(f, g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))A \begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} + < u, f^{(N)} g^{(N)} >,$$

où u est une fonction linéaire quasi-définie (ou régulière) sur l'espace linéaire $\mathbb{P}$ des polynômes réels, $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ sont des nombres réels distincts, $N \in \mathbb{N}$ et A est une matrice carrée $N \times N$ telle que toutes ses sous matrices principales sont non singulières. Nous voyons une connection entre les polynômes orthogonaux non standard et quelques problèmes standard dans la théorie de l'interpolation et de l'approximation.

Mots clés :

Polynômes orthogonaux de Sobolev, polynômes orthogonaux classiques, interpolation, approximation.

Abstract :

In this paper, we study orthogonal polynomials with respect to the bilinear form

$$(f, g)_S = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_{N-1}))A \begin{pmatrix} g(c_0) \\ g(c_1) \\ \vdots \\ g(c_{N-1}) \end{pmatrix} + < u, f^{(N)} g^{(N)} >,$$

where u is a quasi-definite (or regular) linear functional on the linear space $\mathbb{P}$ of real polynomials, $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ are distinct real numbers, N is a positive integer number, and A is a real $N \times N$ matrix such that each of its principal submatrices are nonsingular. We show a connection between these non-standard orthogonal polynomials and some standard problems in the theory of interpolation and approximation.

Key words :

Sobolev orthogonal polynomials, classical orthogonal polynomials, interpolation, approximation.

Encadreur : Monsieur RANDRIAMBELOSOA Germain,
Professeur, Université d'Antananarivo, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques et Informatique.