

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	5
1 Echantillonnages et Représentations fréquentielles	6
1 Généralités sur l'échantillonnage	6
1.1 Echantillonnage d'un signal	7
1.2 Les différents types d'échantillonnage	8
2 Les différentes représentations fréquentielles	12
2 Transformée de Fourier Intégrale et Discrète	15
1 Transformée de Fourier Intégrale	15
1.1 Les Séries de Fourier	16
1.2 Méthode ou principe	18
1.3 Transformée de Fourier Intégrale	19
1.4 Transformée de Fourier Inverse	22
2 Transformée de Fourier Discrète	23
2.1 Transformée de Fourier Discrète Inverse	25
2.2 Transformée de Fourier et TFD	25
3 Transformée de Fourier Rapide	30
1 Transformée de Fourier Rapide	30
1.1 Algorithme de la transformée de Fourier rapide	30
1.2 Comparaison TFD et TFR	34
1.3 Exemple	35
1.4 Organigramme de la TFR	43
2 Evolution de la TFR du Colley-Tuckey	47
2.1 Organigramme général	47
2.2 Simulation avec le logiciel MAPLE	51

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
Conclusion	53
Bibliographie	54

Table des figures

1.1	Echantillonnage	6
1.2	Représentations temporelle et fréquentielle des signaux classés selon leurs caractéristiques: Périodiques, ou non périodiques, continus ou discrets	14
2.1	Transformée de Fourier discrète.	24
3.1	Opérateur de base pour le calcul de la TFR :opérateur " papillon ".	32
3.2	Calcul d'une TFR d'ordre N à partir de deux TFR d'ordre $N/2$	33
3.3	Représentation schématique de la TFR avec la méthode d'entrelacement temporel.	33
3.4	Représentation schématique de la TFR selon la méthode à entrelacement temporel pour 8 échantillons.	38
3.5	Organigramme de la TFR	46
3.6	TFR générale avec la méthode binaire	50

Introduction

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux, considérés dans cet article, sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $s(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. En général, les signaux peuvent être distingués en deux grandes catégories : les signaux déterministes et les signaux aléatoires ; et en deux types : signaux analogiques ou continus et les signaux numériques ou discrets. Pour chaque signal, on peut le représenter sous deux formes : la représentation simple et la représentation spectrale.

Le traitement du signal est donc la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux. Son champ d'application se situe alors dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux. Il est un outil très vaste et développé.

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations).

On s'intéresse à la partie de l'analyse des différents signaux. On veut savoir comment est-il à l'entrée ? Et que se passe-t-il à la sortie ? Nous allons faire l'analyse spectrale des signaux numériques. A vrai dire, nous voulons savoir si les informations contenues dans le signal initial peuvent être conservées ou non dans une autre représentation de ce signal

Trois chapitres sont alors présentés pour mener à terme cette étude : Dans le premier chapitre, on étudie généralement les échantillonnages et représentations fréquentielles des signaux, puis La Transformée de Fourier Intégrale (TFI) et la Transformée de Fourier Discrète (TFD) dans le second chapitre, et enfin dans le dernier chapitre la Transformée de Fourier Rapide (TFR) est explorée.

Chapitre 1

Echantillonnages et Représentations fréquentielles

1 Généralités sur l'échantillonnage

Définition 1.1. L'échantillonnage consiste à prélever à des instants précis, le plus souvent équidistants, les valeurs instantanées d'un signal. Le signal analogique $s(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeurs discrètes :

$$s_e(t) = \begin{cases} s(t) & \text{si } t = nT_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

avec n : entier

et T_e : période d'échantillonnage

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur.

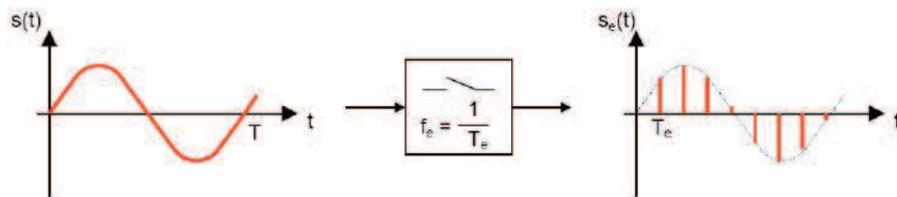


FIGURE 1.1 – Echantillonnage

Définitions 1.2.

- **Période d'échantillonnage T_e**

C'est l'instant infiniment bref de répétition d'un phénomène identique infiniment bref.

Elle est donc exprimée souvent en seconde (s)

– **Fréquence d'échantillonnage** F_e

C'est l'inverse de la période d'échantillonnage T_e .

Elle correspond au nombre de reproduction d'un même phénomène pendant une unité de temps. Elle est mesurée en Hertz (Hz)

– **Taille d'échantillonnage** N

La Taille d'échantillonnage est l'ensemble des points obtenus lors de la durée d'échantillonnage τ

– **Durée d'échantillonnage** τ

On appelle durée d'échantillonnage τ , la durée d'observation pendant laquelle est fait l'échantillonnage. Elle est donc le produit de la taille d'échantillonnage N et la Période d'échantillonnage T_e .

Interprétation

Les termes utilisés dans l'échantillonnage que nous venons de définir ci-dessus se lient de manière comme le suivant :

1.

$$F_e = \frac{1}{T_e}$$

2.

$$\tau = N.T_e = \frac{N}{F_e}$$

1.1 Echantillonnage d'un signal

De façon idéale, échantillonner un signal continu à temps continu consiste à générer un nouveau signal $s_e(t)$ toujours à temps continu, formé d'une succession des valeurs prises par $s(t)$ en des instants particuliers, dits instants d'échantillonnage (en général l'inverse de la période d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est alors appelé fréquence d'échantillonnage).

D'une façon très schématique, le dispositif d'échantillonnage peut être considéré comme un contact se fermant périodiquement (périodicité T_e) pendant un temps infiniment bref. Cette opération n'offre d'intérêt que si elle est réversible, c'est-à-dire que si, disposant du signal échantillonné, il est possible de reconstituer le signal d'origine sans perte d'information. L'objectif de ce chapitre est de donner une modélisation mathématique de cette opération, tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel et d'en déduire les conditions que doivent respecter le signal et la fréquence d'échantillonnage pour que cette opération soit réversible. Pour cela, nous considérerons dans un premier temps l'échantillonnage comme idéal (durée de chaque échantillon supposée infiniment brève), puis nous étudierons les cas plus pratiques où chaque échantillon a une durée θ non négligeable, et enfin nous terminerons sur les différentes représentations fréquentielles

1.2 Les différents types d'échantillonnage

Dans le traitement du signal, on trouve de types assez nombreux d'échantillonnage. Mais dans notre étude, on va aborder le plus connu et le plus utilisé

Proposition 1.3. Soit $s(t)$ un signal à spectre périodique, l'échantillonnage idéal $s_e(t)$ est donné par la formule suivante :

$$s_e(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (1.2)$$

Démonstration. Les processus d'échantillonnage se fait aux instants multiples de la période d'échantillonnage : i.e. $t_k = k \cdot T_e$

alors

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t_k) \delta(t - t_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (1.3)$$

Or $\delta(t - kT_e) = 0$ pour tout $t \neq kT_e$

Donc, $s(kT_e) \delta(t - kT_e) = 0$ pour $t \neq kT_e$

Ce qui entraîne $s(kT_e) \delta(t - kT_e) = s(t) \delta(t - kT_e)$ quelque soit t

Et on a l'expression suivante :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \delta(t - kT_e) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = s(t) Pgn_{T_e}(t) \quad (1.4)$$

□

L'expression

$$Pgn_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

symbolise un train d'impulsions régulier de Dirac. On l'appelle aussi "peigne de Dirac".

Un calcul montre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac dans l'espace temps est encore un peigne de Dirac dans l'espace des fréquences à un facteur multiplicatif près $f_e = 1/T_e$. c'est-à-dire :

$$TF(Pgn_{T_e}(t))(f) = \frac{1}{T_e} Pgn_{T_e}(f)$$

Remarque 1.4. Spectre du signal échantillonné

Soit $S_e(f)$ la transformée de Fourier de $s_e(t)$, D'après Le Théorème d'échange, on obtient

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} S(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

ou bien :

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - kF_e) S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e)$$

Notation 1.5.

On note souvent $s_e(t)$ le signal échantillonné du signal $s(t)$

Proposition 1.6. Soit $s(t)$ un signal analogique, l'amplitude de chaque impulsion coïncide avec la valeur du signal en ce point pendant un intervalle de temps ou largeur τ . En modèle mathématique, on représente le signal échantillonné $s_e(t)$ par un produit du signal initial $s(t)$ et de la fonction porte périodisée $i_{T_e, \tau}(t)$:

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t) = s(t) \cdot [\Pi_\tau(t) * Pgn_{T_e}(t)] \quad (1.5)$$

avec

$$i_{T_e, \tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau(t - kT_e)$$

et

$$\Pi_\tau(t - kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = kT_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

En utilisant la propriété de périodisation avec le peigne de Dirac et le produit de convolution, nous avons l'autre expression équivalente suivante :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \Pi_\tau(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (1.7)$$

et son spectre est donc :

$$I_{T_e, \tau}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau kF_e)}{\pi\tau kF_e} \cdot \delta(f - kF_e) \quad (1.8)$$

Définition 1.7. L'échantillonnage naturel est défini à partir du signal $s_e(t)$, tel que l'amplitude de chaque impulsion suit la valeur de la fonction $s(t)$ sur l'intervalle τ . Mathématiquement, le signal échantillonné s'obtient en faisant le produit du signal initial par la fonction porte périodisée $i_{T_e, \tau}$:

$$s_e(t) = s(t) i_{T_e, \tau}(t) = s(t) [\Pi_\tau(t) * Pgn_{T_e}(t)] \quad (1.9)$$

Représentation spectrale du signal échantillonné

On s'intéresse à l'étude spectrale pour pouvoir comparer l'information contenue dans le signal échantillonné $s_e(t)$ par rapport au signal initial $s(t)$.

Proposition 1.8. *le spectre du signal échantillonné obtenu par la méthode l'échantillonnage naturel s'exprime par la relation suivante :*

$$S_e(f) = \tau F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} S(f - k F_e) \quad (1.10)$$

Démonstration. Soit τ un intervalle de rayon court, et $t \in \mathbb{R}$. D'après l'équation 1.9 ci-dessous

$$s_e(t) = s(t) i_{T_e, \tau}(t) \quad (1.11)$$

En appliquant la théorème d'échange on a :

$$S_e(f) = S(f) * I_{T_e, \tau}(f)$$

Et d'après la relation 1.8

$$= S(f) * \tau F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} \delta(f - k F_e)$$

et la distributivité de la convolution implique

$$\begin{aligned} &= \tau F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f) * \left[\frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} \delta(f - k F_e) \right] \\ &= \tau F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} [S(f) * \delta(f - k F_e)] \\ &= \tau F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} S(f - k F_e) \end{aligned}$$

□

Définition 1.9. L'échantillonnage régulier se caractérise par le fait que l'amplitude de chaque impulsion est constante, et est égale à l'amplitude du signal initial au temps discret kT_e avec k un entier, et T_e période d'échantillonnage. Du point de vue mathématique, le signal échantillonné $s_e(t)$ est défini à partir d'une suite infinie de fonction appelée «Porte» pondérant la valeur du signal $s(t)$ en temps discret bien espacé kT_e , c'est-à-dire :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \Pi_{\tau}(t - kT_e) \quad (1.12)$$

Proposition 1.10. *soit $s(t)$ un signal analogique, le signal échantillonné par l'échantillonnage régulier peut s'exprimer à partir du produit de convolution de la fonction porte Π_τ de largeur τ par le produit de distribution peigne de Dirac multiplié par le signal $s(t)$:*

$$s_e(t) = \Pi_\tau(t) * [s(t)Pgn_{T_e}(t)] \quad (1.13)$$

Démonstration. D'après la définition 1.12

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\Pi_\tau(t - kT_e)$$

or en appliquant la relation 1.7 on a :

$$\begin{aligned} s_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)[\Pi_\tau * \delta_{T_e}](t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)[\Pi_\tau(t) * \delta_{T_e}(t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau(t) * [s(kT_e)\delta_{T_e}(t)] \end{aligned}$$

et aussi la propriété de Dirac on a

$$\begin{aligned} s_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau(t) * [s(t)\delta_{T_e}(t)] \\ &= \Pi_\tau(t) * [s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)] \\ &= \Pi_\tau(t) * [s(t)Pgn_{T_e}(t)] \end{aligned}$$

□

Définition 1.11. L'échantillonnage moyenné consiste à échantillonner le signal $s(t)$ à partir de la valeur moyenne de ce signal prise sur la durée de l'impulsion τ pour donner l'échantillon $s_e(kT_e)$ avec k un entier. Mathématiquement le signal échantillonné $s(kT_e)$ qui représente le k^{eme} échantillon, $k \in \mathbb{Z}$ s'exprime par la relation suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s(t)dt \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad (1.14)$$

Définition 1.12. Avec la fonction porte, l'expression du signal échantionné au rang k est défini comme suit :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} \Pi(t - kT_e)s(t)dt \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

Proposition 1.13. Soit $s(t)$ un signal analogique, le signal échantillonné par la méthode d'échantillonnage moyenneur $s_e(kT_e)$, $k \in \mathbb{Z}$ s'écrit :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} [\Pi(t) * s(t)] \delta(t - kT_e) \quad (1.16)$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}$; d'après la définition 1.15 :

$$\begin{aligned} s_e(kT_e) &= \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} \Pi(t - kT_e) s(t) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) \Pi(t - kT_e) dt \\ &= \frac{1}{\tau} [s * \Pi_\tau](kT_e) \text{ (définition du produit de convolution)} \\ &= \frac{1}{\tau} s(kT_e) * \Pi_\tau(kT_e) \\ &= \frac{1}{\tau} [s(t) * \Pi_\tau(t)] \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

□

Le choix de la fréquence d'échantillonnage est très important dans le traitement du signal. Le théorème suivant donne la limite minimale du meilleur choix.

Théorème de Shannon 1.14. [3] *Pour que la construction périodique du spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné ne produise pas une déformation du motif répété du spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$, il faut et il suffit que la fréquence de répétition F_e , qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{max} contenue dans le signal initial. Soit l'équation correspondant au théorème de l'échantillonnage ou théorème de Shannon :*

$$F_e \geq 2 \cdot f_{max}$$

Remarques 1.15. L'échantillonnage :

- Ideal est à impulsion infiniment brève
- naturel : amplitude égale à $s(t)$ pendant la durée τ ;
- régulier : amplitude constante et égale à $s(nT_e)$ pendant la durée τ ;
- moyenneur : amplitude égale à la moyenne de $s(t)$ sur l'intervalle τ

Ces différents types d'échantillonnage doivent respecter la condition de Shannon.

2 Les différentes représentations fréquentielles

Définition 2.1. – La fréquence temporelle désigne le nombre de fois où un phénomène périodique se reproduit par unité de temps.

- La période temporelle est la durée nécessaire pour que le phénomène se reproduise de façon identique à lui-même.
- la représentation temporelle du phénomène qui se reproduit est appelée généralement le motif du signal périodique.

Définition 2.2. La représentation fréquentielle ou le spectre en fréquence $S(f)$ du signal $s(t)$ est constituée de la composante continue à la fréquence 0, du fondamental à la fréquence F_0 (ou harmonique d'ordre 1) et des différents harmoniques aux fréquences $f = n \cdot F_0$. Il est important de remarquer que le spectre d'une fonction périodique, de période $T_0 (= 1/F_0)$, est discontinu et composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences, F_0 .

Propriété 2.3. *la représentation fréquentielle possède des propriétés particulières :*

1. *Elle peut être continue ou discrète*
2. *Elle est périodique ou non périodique*

Méthode de calcul

Les méthodes utilisées pour calculer ces représentations spectrales ne sont pas les mêmes selon ces différents types de signaux.

En effet, le spectre d'un signal continu est non périodique, qu'il soit périodique (**cas 1**) ou non (**cas 2**), il est obtenu à partir du développement en série de Fourier pour le (cas 1) et de la transformée de Fourier ou de l'intégrale de Fourier pour le (cas 2). Le spectre d'un signal discret et non périodique (**cas 3**) est continu et périodique et obtenu à partir de l'intégrale de Fourier. Par contre, le calcul du spectre d'un signal périodique et discret (**cas 4**) utilise une nouvelle transformée : la transformée de Fourier discrète ou TFD.(cf. figure 1.2)

De façon plus générale, on va le résumer dans le tableau ci-dessous :

Signal	Méthode de calcul	Caractéristiques du spectre
continu et périodique	Série de Fourier	Discret et non périodique
continu et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
discret et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
discret et périodique	Transformée de Fourier discrète	Discret et périodique

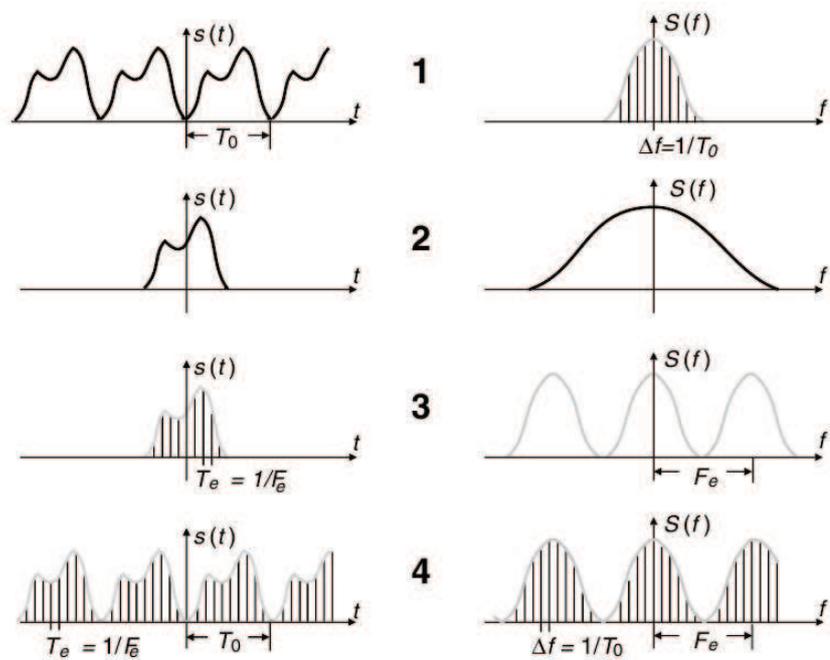


FIGURE 1.2 – Représentations temporelle et fréquentielle des signaux classés selon leurs caractéristiques : Périodiques, ou non périodiques, continus ou discrets

Chapitre 2

Transformée de Fourier Intégrale et Discrète

1 Transformée de Fourier Intégrale

Il est beaucoup plus facile de manipuler des fonctions *sinus* que des fonctions aux formes complexes. C'est la raison de représenter un signal sur d'autres formes. Dans ce chapitre, nous allons étudier la transformée de Fourier intégrale (TFI) et la transformée de Fourier Discrète (TFD). D'ailleurs, La décomposition en série de Fourier va être aussi un outil mathématique fondamental en traitement des signaux numériques. A partir de cet effet de déformation, une question essentielle alors se pose : le signal échantillonné $s_e(t)$ contient-il la même information que le signal initial $s(t)$? Une manière de répondre à cette question est d'étudier le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ et de le comparer au spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$. L'analyse fréquentielle des signaux apporte donc une information supplémentaire importante. C'est-à-dire, l'analyse spectrale ou l'étude d'une transformée de Fourier est très important au traitement du signal.

Tout d'abord,

1.1 Les Séries de Fourier

Série de Fourier Réelle

Théorème et Définition

Soit $s(t)$ un signal réel périodique sur $[0, T]$ d'énergie finie, alors son développement en Série de Fourier est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T) \quad (2.1)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(u) du$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(u) \cos\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du$$

et

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(u) \sin\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du$$

Définition 1.1. On appelle Harmonique de rang n de $s(t)$ la fonction définie par :

$$h_n(t) = a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)$$

Pour $n = 1$, on l'appelle Fondamentale ou 1ère harmonique : C'est-à-dire,

$$h_1(t) = a_1 \cos(2\pi t/T) + b_1 \sin(2\pi t/T)$$

et pour les autres $i \in \{2 \cdots n\}$, h_i sont les ièmes harmoniques

Proposition 1.2.

✓ si le signal $s(t)$ est impair alors :

pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = 0$$

et

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

✓ si il est pair alors :

pour tout $n \geq 0$,

$$b_n = 0$$

et

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Démonstration. Par définition,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

posons

$$F(t) = \int_0^T s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Si $s(t)$ est impaire alors $F(t)$ est impaire aussi.

Car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire.

Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^T F(t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt \\ &= \int_{-T/2}^0 F(t) dt + \int_0^{T/2} F(t) dt \\ &= - \int_0^{T/2} F(t) dt + \int_0^{T/2} F(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

ainsi

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} F(t) dt = 0$$

Et posons

$$G(t) = \int_0^T s(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Si $s(t)$ est impaire alors $G(t)$ est paire.

Car la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire.

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^T G(t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} G(t) dt \\ &= \int_{-T/2}^0 G(t) dt + \int_0^{T/2} G(t) dt \\ &= \int_0^{T/2} G(t) dt + \int_0^{T/2} G(t) dt \\ &= 2 \cdot \int_0^{T/2} G(t) dt \end{aligned}$$

d'où,

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} G(t) dt = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} F(t) dt$$

On montre de façon analogue pour le cas où $s(t)$ est pair □

1.2 Méthode ou principe

Pour économiser le temps de calcul de la Série de Fourier, il faut :

- i) tester alors la parité du signal $s(t)$
- ii) appliquer la proposition ci-dessus
- iii) calculer enfin les restes non nuls

Série de Fourier Complexe

Tout signal $s(t)$ périodique peut être décomposé en une somme de sinusoides.

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot \sin(n\omega t)$$

C'est le développement en série de Fourier du signal complexe $s(t)$ tel que C_0 est la valeur moyenne de $s(t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \exp(2i\pi nt/T) dt$$

définit le coefficient de rang n de $s(t)$.

$C_n \cdot \sin(n\omega t)$ est l'harmonique d'ordre n .

De même, l'harmonique d'ordre 1 est appelé **fondamental**.

ω est la pulsation du signal périodique $s(t)$ ainsi que du fondamental.

Relation entre les coefficients réels et complexes

Ces coefficients sont reliés par les relations suivantes :

$$a_0 = C_0$$

et pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= C_n + C_{-n} \\ b_n &= i(C_n - C_{-n}) \\ C_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ C_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{aligned}$$

1.3 Transformée de Fourier Intégrale

Définition 1.3.

Soit $s(t)$ un signal analogique, la fonction notée $F(s)$ définie sur \mathbb{R} par

$$F(s)(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-2i\pi ft) dt$$

s'appelle Transformée de Fourier de $s(t)$

Propriété 1.4.

Soient s, s_i des signaux et les a_i sont des constantes.

On a :

$$F(s)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

et

$$F(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 F(s_1) + a_2 F(s_2)$$

Démonstration.

En effet, par définition

$$F(s)(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-2i\pi ft) dt$$

donc, pour $f = 0$ on obtient le résultat

$$F(s)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

Et en utilisant la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} F((a_1 s_1 + a_2 s_2)(t))(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 s_1 + a_2 s_2)(t) \exp(-2i\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 s_1(t) \exp(-2i\pi ft) + a_2 s_2(t) \exp(-2i\pi ft)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a_1 s_1(t) \exp(-2i\pi ft) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} a_2 s_2(t) \exp(-2i\pi ft) dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \exp(-2i\pi ft) dt + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) \exp(-2i\pi ft) dt \\ &= a_1 F(s_1(t))(f) + a_2 F(s_2(t))(f) \end{aligned}$$

Théorème de Riemann Lebesgues 1.5. [8]

Soit $s(t)$ un signal analogique, alors la transformée de Fourier appliquée à f de ce signal est continue, bornée et tend vers 0 quand f tend vers ∞ C'est-à-dire

$$F(s(t))(f) \rightarrow 0 \text{ si } f \rightarrow \infty$$

Démonstration.

$$\lim_{f \rightarrow \infty} F(s(t))(f) = \lim_{f \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\Pi ft} dt$$

En utilisant l'intégration par partie,

Posons $U(t) = s(t)$ alors $U'(t) = s'(t)$

et $V'(t) = e^{-2i\Pi ft}$ alors $V(t) = \frac{1}{-2i\Pi f} e^{-2i\Pi ft}$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\Pi ft} dt &= \lim_{f \rightarrow \infty} \left(\left[s'(t) \cdot \frac{1}{-2i\Pi f} e^{-2i\Pi ft} \right] - \frac{1}{-2i\Pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t)e^{-2i\Pi ft} dt \right) \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1}{-2i\Pi f} \left(\left[s'(t) \cdot e^{-2i\Pi ft} \right] - \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t)e^{-2i\Pi ft} dt \right) \end{aligned}$$

or

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1}{-2i\Pi f} = 0$$

d'où,

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\Pi ft} dt = 0$$

Ainsi

$$\lim_{f \rightarrow \infty} F(s(t))(f) = 0$$

□

Propriété 1.6.

1.

$$F(s(-t))(u) = F(s)(-u)$$

2.

$$F(s(kt))(n) = \frac{1}{k} F(s)\left(\frac{n}{k}\right)$$

3.

$$F(\exp(2i\pi u_0 t)s(t))(u) = F(s)(u - u_0)$$

Démonstration. –

$$F(s)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

car

$$F(s)(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-2i\pi ft) dt$$

d'après la définition ci-dessous et pour $f = 0$

$$\exp(-2i\pi ft) = \exp(0)$$

donc on a le résultat

$$F(s(-t))(u) = F(s)(-u)$$

en faisant un changement de variable posons $u = -t$

Propriété 1.7 (Moyennes).

On appelle ici "Moyennes" les intégrales des fonctions sur tout leur domaine d'existence. On a alors les deux relations suivantes :

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t),$$

et

$$s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)$$

Pour se convaincre de ces deux relations, il suffit d'écrire les définitions des transformées de Fourier directe et inverse, dans lesquelles on prendra, respectivement, $f = 0$ et $t = 0$. À partir de l'expression de la TF, on a ainsi très simplement l'intégrale de la fonction considérée. Notons que $S(0)$ a une signification précise : c'est la composante fréquentielle à la fréquence nulle, c'est-à-dire la composante continue du signal.

Propriété 1.8 (Propriété de dualité).

La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de Fourier à partir des paires déjà connues. Cette propriété s'exprime comme suit : si

$$s(t) \rightleftharpoons S(f);$$

alors

$$S(t) \rightleftharpoons s(-f) :$$

Démonstration.

Ceci se montre en débutant avec l'expression de $s(-t)$ en fonction de sa TF $S(f)$:

$$s(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{-2i\pi ft} df$$

en échangeant maintenant les variables t et f , on obtient

$$s(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-2i\Pi tf} dt$$

□

Théorème d'échange 1.9. [8]

Posons $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des signaux définis sur \mathbb{R} , Soient g et h deux éléments de $S(\mathbb{R})$, les transformées de Fourier échangent le produit convolutif de g et h en produit multiplicatif g et h , et le produit multiplicatif g et h en produit convolutif de g et h . i.e. $\forall g, h \in S(\mathbb{R})$,

$$F(g \cdot h) = F(g) * F(h)$$

et

$$F(g * h) = F(g) \cdot F(h)$$

De même pour F^{-1} où F^{-1} désigne la cotransformation ou Transformation de Fourier Inverse

□

1.4 Transformée de Fourier Inverse

Théorème et Définition 1.10. [8] Soit $s(t)$ un signal sommable, si $F(s)$ est sommable presque par tout, alors on a

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)(f) \exp(2i\pi ft) df \tag{2.2}$$

Cette relation s'appelle Transformée de Fourier Inverse

Remarque 1.11. Si s est continu, cette égalité est vraie pour tout t

Par conséquent, on a donc un couple de signaux comme suit :

$$s(t) \rightleftharpoons S(f)$$

En bref

La transformée de Fourier existe si les trois conditions de DIRICHLET sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires) :

1. $s(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,
2. $s(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini,

3. $s(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

En effet, si $s(t)$ est absolument intégrable, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)e^{2i\Pi ft}| dt < \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt$$

Car $|s(t)e^{2i\Pi ft}| < |s(t)||e^{2i\Pi ft}| < |s(t)|$

2 Transformée de Fourier Discrète

Mathématiquement, la Transformée de Fourier discrète est une transformation qui fait correspondre deux séries de données de N points chacune :

$$\{s_k\} \longleftrightarrow \{S_m\} \text{ avec } k, m \text{ entiers } \geq 0, \in [0, N - 1]$$

Définition 2.1.

Afin de calculer la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on a besoin d'une nouvelle méthode appelée Échantillonnée-Tronquée. Cette méthode consiste à discrétiser le signal d'entrée analogique $s(t)$ (échantillonnage), puis à tronquer temporellement ce signal échantillonné $s_e(t)$. Enfin On obtient ainsi une suite de N termes représentée par :

$$s_{e,\Pi(t)} = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \tag{2.3}$$

Tels que s_e désigne le signal échantillonné par échantillonnage Idéal et $\Pi(t)$ et la fonction porte définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, N - 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $s_{e,\Pi(t)}$ est le produit du signal échantillonné $s_e(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$

En effet,

$$\begin{aligned} s_{e,\Pi(t)} &= s_e(t)\Pi(t) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\delta(t - kT_e) \right) \Pi(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e)\delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

Posons s_k les valeurs de $s_{e,\Pi}(t)$ au point kT_e .

C'est-à-dire :

$$s_k = s(kT_e)$$

avec $k \in [0, N - 1]$ et donc,

Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné est donné sous la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de $\frac{F_e}{N}$ par l'expression suivante :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \delta(f - m \frac{F_e}{N}) \quad (2.4)$$

Démonstration. En utilisant la linéarité de la transformée de Fourier Intégrale et la méthode échantillonnée-Tronquée, donc on a le résultat. \square

Définition 2.2. Soit alors s_k un signal discret défini sur N échantillons, on appelle Transformée de Fourier Discrète ou TFD la suite de N termes définie par :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-2i\Pi m \frac{k}{N}} \quad (2.5)$$

Remarque 2.3. La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes

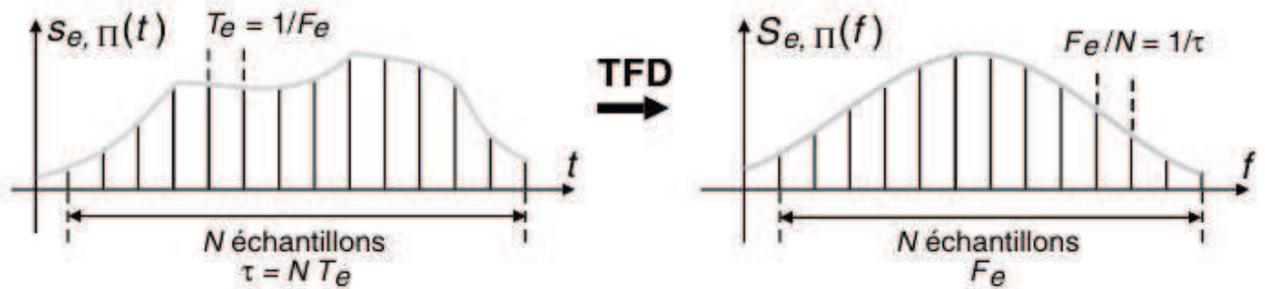


FIGURE 2.1 – Transformée de Fourier discrète.

Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage $F_e (F_e = \frac{1}{T_e})$, la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par :

$$\tau = N \cdot T_e = \frac{N}{F_e} \quad (2.6)$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre deux points successifs égale à :

$$\Delta f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{F_e}{N} \quad (2.7)$$

En effet, on a

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{F_e}{N}\right)$$

Donc N termes de S_m car $m \in [0, N - 1]$

De plus l'échantillon est espacé de $\Delta f = \frac{F_e}{N}$

Ce qui donne

$$N \cdot \frac{F_e}{N} = F_e$$

D'où l'intervalle ou domaine fréquentielle $[0, F_e]$

2.1 Transformée de Fourier Discrète Inverse

De même que pour la transformée de Fourier d'un signal continu, la TFD admet aussi une transformation inverse qu'on peut définir par :

$$s_k = \frac{1}{N} S_m e^{2i\Pi \frac{km}{N}} \quad (2.8)$$

Si on prend le signal échantillonné $s_{e,\Pi}(t)$, on peut le représenter aussi comme :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \delta(t - kT_e)$$

avec

$$s_k = \frac{1}{N} S_m e^{2i\Pi \frac{km}{N}}$$

2.2 Transformée de Fourier et TFD

Étant donné la définition de la transformée de Fourier discrète ou TFD que nous venons d'introduire, deux questions intéressantes concernant la relation entre la transformée de Fourier et la TFD se posent tout de suite. Ce sont :

- d'une part, le signal échantillonné de N points étant considéré comme un signal continu transitoire, quelle est la transformée de Fourier de ce signal ? En d'autre terme, quelle est la transformée de Fourier du signal $S_{e,\Pi}(t)$ si on le suppose continu
- d'autre part, connaissant la transformée de Fourier d'un signal continu, quelle est la relation entre les points de la transformée de Fourier discrète de ce signal échantillonné et les valeurs de la transformée de Fourier à ces mêmes fréquences ?

1. Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué et la TFD

Soit un signal $s(t)$, échantillonné à la fréquence F_e et tronqué par une fonction porte de largeur τ ($\tau = NT_e$) qui prélève N points d'amplitude s_k de ce signal, soit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Fourier de ce signal est donnée par :

$$\begin{aligned} S_{e,\Pi}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-2i\Pi ft} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_k \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \cdot e^{-2i\Pi ft} dt \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_k [TF(\delta(t - kT_e))] \end{aligned}$$

Et donne le résultat suivant :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\Pi f k T_e}$$

Or pour pouvoir passer à la transformée de Fourier discrète, il faut échantillonner dans le domaine fréquentiel par pas de $\frac{1}{\tau}$ ($\frac{1}{\tau} = \frac{F_e}{N}$), soit :

$$\begin{aligned} S_{e,\Pi,e}(f) &= S_{e,\Pi}(f) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - m \frac{1}{\tau}) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{e,\Pi}\left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot \delta(f - m \frac{1}{\tau}) \end{aligned}$$

Cette expression doit être tronquée, puisque le nombre des échantillons de la représentation spectrale est limité à N , donc on va multiplier par une fonction porte de taille N , et on a :

$$\begin{aligned} S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) &= S_{e,\Pi,e}(f) \cdot \prod_N(f) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_{e,\Pi}\left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot \delta(f - m \frac{1}{\tau}) \cdot \prod_N(m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} S_{e,\Pi}\left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot \delta(f - m \frac{1}{\tau}) \end{aligned}$$

Nous avons bien obtenu la relation de définition de la transformée de Fourier discrète (cf. Définition)

$$\begin{aligned}
 S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\Pi \frac{m}{\tau} k T_e} \right] \cdot \delta\left(f - m \frac{1}{\tau}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\Pi \frac{m}{N \cdot T_e} k T_e} \right] \cdot \delta\left(f - m \frac{1}{\tau}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\Pi \frac{km}{N}} \right] \cdot \delta\left(f - m \frac{1}{\tau}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{1}{\tau}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{F_e}{N}\right)
 \end{aligned}$$

2. Transformée de Fourier et la TFD

Soient $s(t)$ un signal continu, périodique de période τ , à spectre borné F_{max} , et $S(f)$ sa transformée de Fourier.

On suppose $s(kT_e) = s_k$ pour $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, et S_m avec $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ les échantillons de la transformée de Fourier Discrète définie par :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\Pi \frac{km}{N}}$$

La question, qui se pose, est donc : existe-t-il un lien entre les valeurs de $S(f)$ aux fréquences mF_e/N et S_m ? Etant donné que :

- la largeur de la troncature temporelle est égale à la période $\tau = NT_e$;
- le théorème de Shannon doit être respecté : $F_e \geq 2 \cdot F_{max}$

Il y a coïncidence, à un facteur multiplicatif près, entre $S(mF_e/N)$ et S_m :

$$S_m = \frac{\tau}{T_e} \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right) = N \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right)$$

Ce résultat provient essentiellement du fait que la fonction sinus cardinal (*sinc*), qui agit sur le spectre en le déformant, ne va pas produire cet effet car elle s'annule pour toutes les raies du spectre en $1/\tau$.

Remarque 2.4. La transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi_\tau(t)$ est la fonction sinus cardinal $sinc(\tau f)$ qui définit par

$$sinc(\tau f) = \frac{\sin(\tau \pi f)}{\tau \pi f}$$

Ainsi, les relations de modifications du signal dues à la mesure sur une durée finie τ sont : Soient $s(t)$ un signal d'entrée et $e(t)$ est la sortie, admettent respectivement un spectre $S(f)$ et $E(f)$, alors

$$s(t) = e(t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

et

$$E(f) * \frac{\sin(\tau\pi f)}{\tau\pi f}$$

L'influence de cette fenêtre temporelle sur le signal et sur son spectre peut être très importante. Plus l'observation ou la mesure du signal sera longue et plus le spectre du signal sera précis, c'est-à-dire peu perturbé par cette fenêtre temporelle physiquement inévitable.

3. Interprétation du résultat de la TFD

On obtient une suite de N termes après le calcul de la transformée de Fourier discrète. Comme nous avons étudié ci-dessous, les N échantillons temporels ayant été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$) et sur une durée t ($t = N/T_e$), le spectre, composé de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à $\Delta f = F_e/N$.

L'interprétation des N échantillons S_m obtenus peut se faire en s'appuyant sur une analogie avec la représentation spectrale obtenue avec le développement en série de Fourier. Chaque échantillon peut être considéré comme un "harmonique" du spectre du signal. D'autre part le calcul est réalisé avec un indice positif des échantillons variant entre $[0, N - 1]$ qui correspond à un domaine fréquentiel $[0, F_e[$. Mais il serait plus exact de la représenter sur un intervalle $] - F_e/2, F_e/2]$. Ainsi l'interprétation des échantillons est présentée sur le tableau 2.1 ci-dessous

En bref

- D'une part, si le signal est continu, la TFD va précéder d'abord par l'échantillonnage puis la troncature
- D'autre part, si il est discret, on peut appliquer immédiatement la TFD

Echantillons	Fréquence $[0, F_e]$	Fréquence $[-F_e/2, F_e/2]$	Intérpretation
S_0	0	0	Composante continue
S_1	Δf	Δf	Fondamentale ou 1 ^{re} harmonique
S_2	$2\Delta f$	$2\Delta f$	2 ^e harmonique
S_3	$3\Delta f$	$3\Delta f$	3 ^e harmonique
...			
$S_{\frac{N}{2}-1}$	$F_e/2 - \Delta f$	$F_e/2 - \Delta f$	$(\frac{N}{2} - 1)^e$ harmonique
$S_{\frac{N}{2}}$	$F_e/2$	$F_e/2$	$(\frac{N}{2})^e$ harmonique (fréquence de Nyquist)
$S_{\frac{N}{2}+1}$	$F_e/2 + \Delta f$	$-F_e/2 + \Delta f$	$(\frac{N}{2} + 1)^e$ harmonique/ ou $-(\frac{N}{2} - 1)^e$
...			
S_{N-3}	$F_e - 3\Delta f$	$-3\Delta f$	$(N - 3)^e$ harmonique/ ou -3^e harmonique
S_{N-2}	$F_e - 2\Delta f$	$-2\Delta f$	$(N - 2)^e$ harmonique/ ou -2^e harmonique
S_{N-1}	$F_e - \Delta f$	$-\Delta f$	$(N - 1)^e$ harmonique/ ou -1^e harmonique

TABLE 2.1 – Interprétation des échantillons calculés par TFD

Chapitre 3

Transformée de Fourier Rapide

1 Transformée de Fourier Rapide

Définition 1.1.

On appelle transformée de Fourier rapide TFR ou FFT (Fast Fourier Transform) en anglais, un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, en particulier le nombre de multiplications, pour calculer la TFD. Le coût de l'algorithme de la TFR est donc moins faible que celui de la TFD. Ce temps de calcul est en effet primordial pour réaliser des systèmes numériques en "temps réel".

En tant qu'algorithme, il existe donc plusieurs méthodes pour calculer la TFR. Mais dans ce chapitre, nous allons étudier celui du Cooley-Tukey :

1.1 Algorithme de la transformée de Fourier rapide

L'algorithme de Cooley-Tukey, appelé aussi algorithme de réduction à base 2 dans le domaine temporel, s'applique seulement dans le cas où le nombre N d'échantillons s_k s'exprime sous la forme 2^L et permet alors de simplifier le problème par une décomposition dichotomique ou division équitable en deux de l'ensemble des échantillons.

Posons alors :

$$W_N^{mk} = e^{-i2\pi \frac{km}{N}}$$

Propriété 1.2. *La fonction W_N^{mk} possède les propriétés suivantes :*

– Quel que soit $m \in \mathbb{Z}$

$$W_N^{2mk} = W_{N/2}^{mk}$$

– pour $m \prec N/2$

$$W_N^{mk+N/2} = -W_N^{mk}$$

Démonstration.

En effet, soit $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} W_N^{2mk} &= e^{-i2\pi \frac{2km}{N}} \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N/2}} \\ &= W_{N/2}^{mk} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_N^{mk+N/2} &= e^{-i2\pi \frac{km+N/2}{N}} \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N}} e^{-i2\pi \frac{-N/2}{N}} \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N}} e^{-i2\pi \frac{-1}{2}} \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N}} e^{i\pi} \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N}} (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \\ &= e^{-i2\pi \frac{km}{N}} \cdot (-1) \\ &= -e^{-i2\pi \frac{km}{N}} \\ &= -W_N^{km} \end{aligned}$$

□

Pour calculer les N échantillons de la TFD $\{S_0, S_1, S_2, \dots, S_{N-2}, S_{N-1}\}$, on utilise l'expression de base dans la définition :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-i2\pi \frac{km}{N}} \text{ pour } m \in \{0, 1, 2, 3, \dots, N-1\}$$

ou bien

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot W_N^{km} \text{ pour } m \in \{0, 1, 2, 3, \dots, N-1\}$$

En premier lieu, on sépare les échantillons d'ordre pair et d'ordre impair, et on a :

$$S_m = \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j} \cdot W_N^{(2j)m} + \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j+1} \cdot W_N^{(2j+1)m}$$

En utilisant les deux propriétés de W_N^{mk} ci-dessous, il vient

$$\begin{aligned}
 S_m &= \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j} \cdot W_N^{(2j)m} + \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j+1} \cdot W_N^{(2j)m} \cdot W_N^m \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j} \cdot W_{N/2}^{jm} + \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j+1} \cdot W_{N/2}^{jm} \cdot W_N^m \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j} \cdot W_{N/2}^{jm} + W_N^m \cdot \sum_{j=0}^{N/2-1} s_{2j+1} \cdot W_{N/2}^{jm}
 \end{aligned}$$

Cette dernière relation nous montre qu'au lieu de calculer les échantillons S_m de la DFT d'ordre N , la TFR le ramène deux TFD d'ordre $N/2$ qu'on exprime par :

$$S_m = S_{1(N/2),m} + W_N^m \cdot S_{2(N/2),m} \tag{3.1}$$

avec $S_{1(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre pair et $S_{2(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre impair. Pour terminer le calcul, il reste à calculer les 2 transformées d'ordre $N/2$ et $N/2$ multiplications complexes. On utilise un opérateur appelé "papillon" avec le coefficient W_N^m que le montre la suivante : Cet opérateur est obtenu par le cadrage des valeurs de l'indice m dans son intervalle

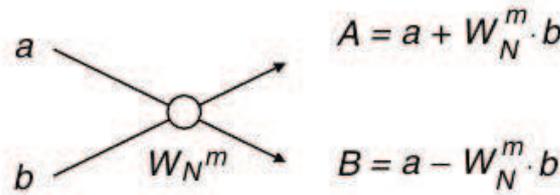


FIGURE 3.1 – Opérateur de base pour le calcul de la TFR :opérateur " papillon " .

d'appartenance définie dans la propriété de W_N^{mk} . Donc

- pour $0 \leq m \leq N/2 - 1$ alors $S_m = S_{1,m} + W_N^m \cdot S_{2,m}$
- pour $N/2 \leq m \leq N - 1$ alors $S_m = S_{1,m-N/2} + W_N^{m-N/2} \cdot S_{2,m-N/2}$

Posons $m' = m - N/2$ donc $m = m' + N/2$ alors $S_m = S_{1,m'} + W_N^{m'+N/2} \cdot S_{2,m'}$ Or $W_N^{m'+N/2} = -W_N^{m'}$ d'après la propriété (1.2) d'où

$$S_m = S_{1,m'} - W_N^{m'+N/2} \cdot S_{2,m'}$$

En principe, cette analyse doit répéter L fois car $N = 2^L$ afin d'avoir une transformée d'ordre 2. La matrice de calcul de cette dernière étape ne demande pas de multiplication complexe car les coefficients restants sont W_2^0 et W_2^1 . Or $W_2^0 = e^0 = 1$ et $W_2^1 = e^{-2i\pi(-1)} =$

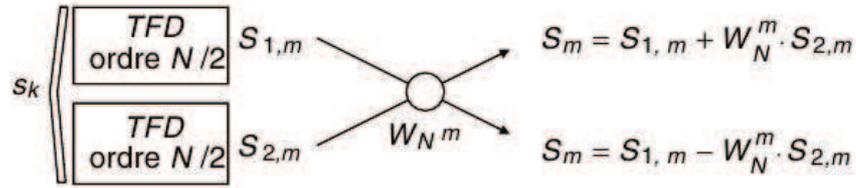


FIGURE 3.2 – Calcul d’une TFR d’ordre N à partir de deux TFR d’ordre $N/2$

$$e^{2i\pi} = -1$$

On peut représenter enfin une TFR comme suit : Mais de façon plus générale, voici une autre représentation de la TFR

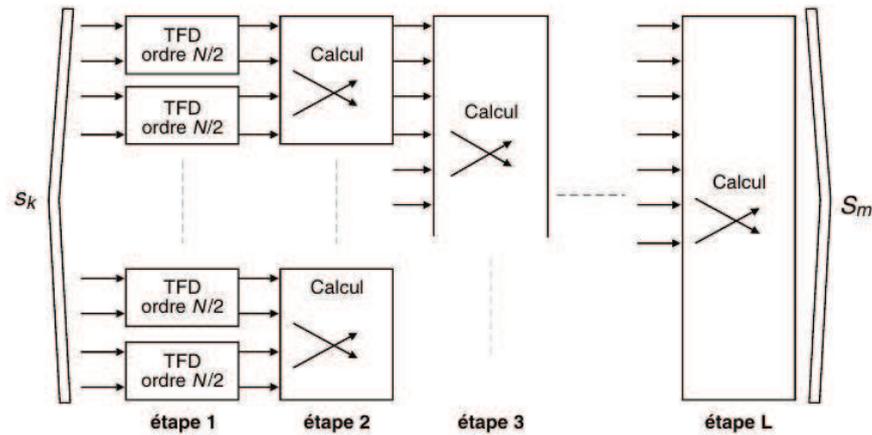


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de la TFR avec la méthode d’entrelacement temporel.

Notation 1.3.

Il est important de noter que pour un calcul immédiat sous cette forme les échantillons s_k doivent être classés dans un ordre permuté. Cette permutation est due aux entrelacements successifs et se traduit par un retournement ou une inversion de la représentation binaire des indices (transformation 0->1 et 1->0 des indices codés en binaire). Prenons le cas $N = 8$, cette permutation est donnée par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Et on a

$$(1, 4) (3, 6)$$

La deuxième méthode concerne l'entrelacement en binaire des indices :

Pour avoir l'indice en ordre permuté, il faut coder ces indices en binaire de même taille que le nombre d'échantillon $N - 1$ choisi. Puis, les réécrire ces formes binaires obtenues de façon inverse. Et enfin, décoder ce nombre en décimal. (Ex : si $N - 1 = 15$ alors $15(2) = 1111$ donc 1111 est de longueur 4, alors soit $4 \Rightarrow 0100$ en binaire $\rightarrow 0010$ son écriture inverse $\Rightarrow 2$ en décimal).

Revenons à notre exemple où $N = 8$;

0	1	2	3	4	5	6	7			nombres successifs
000	001	010	011	100	101	110	111	écriture binaire des nombres dans le sens décroissant		
000	100	010	110	001	101	011	111	écriture binaire des nombres dans le sens croissant		
0	4	2	6	1	5	3	7	conversion des nombres ci-dessus en décimal		

1.2 Comparaison TFD et TFR

Prenons d'abord la relation définie par la TFR, $S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-2i\pi \frac{km}{N}}$, les opérations à effectuer pour obtenir ces N valeurs de la transformée de Fourier discrète dans le cas de N échantillons du signal initial sont :

- $N \cdot N = N^2$ multiplications complexes ;
- $N \cdot (N - 1)$ additions complexes.

A savoir que la durée d'exécution d'une addition complexe est négligeable devant la durée d'une multiplication complexe. C'est pourquoi le coût de calcul de la transformée de Fourier discrète va donc essentiellement dépendre du temps de réalisation d'une multiplication complexe. Le nombre des multiplications complexes de l'algorithme du Colley-Tuckey (appelé aussi à entrelacement temporel) que nous avons choisi est $N/2 \log_2 N$. Donc, cet algorithme est vraiment plus rapide que la TFD. Si on prend $N = 512$ ou 1024 échantillons, le coût de l'algorithme du TFR est réduit d'un facteur 100 fois que celui du trivial (TFD). Voici une preuve :

Le coût de multiplication complexe de l'algorithme trivial est N^2 ,

Pour le TFR, c'est $N/2 \log N$,

En faisant le rapport de ces deux nombres, on a :

$$N^2 / \frac{N}{2} \log_2 N = 2N / \log_2 N$$

et que $N = 2^L$, donc

$$\begin{aligned}
2N/\log_2 N &= \frac{2N}{\ln(2^L)/\ln 2} \\
&= \frac{2N}{L \ln(2)/\ln 2} \\
&= \frac{2N}{L}
\end{aligned}$$

Pour $N = 512$, ce résultat donne :

$$2 * 512/\log_2(512) = 113.7777778 \succ 100$$

Pour bien illustrer, voici un tableau figurant le nombre d'échantillons et le rapport du nombre de multiplications complexes après arrondissement

Nombre d'échantillons	Rapport du nombre de multiplications complexes
8	5
128	36
512	114
1024	205
2048	372

TABLE 3.1 – Amélioration des temps de calcul d'une transformée de Fourier discrète par utilisation d'un algorithme à entrelacement temporel.

1.3 Exemple

Etudions le cas pour $N = 8$,

Avant tout, nous disposons de 8 échantillons temporels s_k avec $k \in [0, 7]$ pour calculer la TFD. La finalité c'est d'avoir les 8 échantillons fréquentiels S_m où $m \in [0, 7]$. On utilise l'expression de base de S_m en fonction de s_k :

$$S_m = \sum_{k=0}^7 s_k \cdot W_8^{mk}$$

On rappelle que la fonction W_8^{mk} est périodique modulo $N = 8$. Il suffit donc de calculer les 8 premières valeurs. Et on a :

$$W_8^0 = e^{-2i\pi(0)} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 W_8^1 &= e^{-2i\pi\frac{1}{8}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \\
 W_8^2 &= e^{-2i\pi\frac{2}{8}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i \\
 W_8^3 &= e^{-2i\pi\frac{3}{8}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \\
 W_8^4 &= e^{-2i\pi\frac{4}{8}} = e^{-i\pi} = \cos(\pi) - i \sin(\pi/2) = -1 \\
 W_8^5 &= e^{-2i\pi\frac{5}{8}} = e^{-\frac{5i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \\
 W_8^6 &= e^{-2i\pi\frac{6}{8}} = e^{-\frac{3i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = i \\
 W_8^7 &= e^{-2i\pi\frac{7}{8}} = e^{-\frac{7i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)
 \end{aligned}$$

En résumé, on obtient :

$$\begin{aligned}
 W_8^0 &= -W_8^4 = 1 & W_8^1 &= -W_8^5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \\
 W_8^2 &= -W_8^6 = -i & W_8^3 &= -W_8^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)
 \end{aligned}$$

Passons maintenant à la première découpage dichotomique : Ceci conduit à réaliser deux TFD d'ordre 4 et un calcul "papillon" de $S_{i,m}$ avec $m \in \{1, 2\}$ tels que :

- échantillon pair $S_{1,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k} \cdot W_4^{km}$
- échantillon impair $S_{2,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k+1} \cdot W_4^{km}$

et

$$W_4^0 = -W_4^2 = 1 \quad (\text{et}) \quad W_4^1 = -W_4^3 = -i$$

Ensuite les échantillons de la DFT complète sont obtenus à l'aide du calcul "papillon" avec les coefficients W_8^{km} :

1. pour $0 \leq m \leq 3$: $S_m = S_{1,m} + W_8^m \cdot S_{2,m}$
2. pour $4 \leq m \leq 7$: $S_m = S_{1,m-4} + W_8^{m-4} \cdot S_{2,m-4}$

Les coefficients des expressions, donnant $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$, étant assez simples car 1 ou i . Ainsi la méthode de découpage peut se limiter à cette étape et conserver ainsi comme premier calcul des TFD d'ordre 4. Les algorithmes, construits sur ce principe, sont appelés "FFT Radix-4". Mais pour notre étude, on va continuer encore. Le deuxième découpage dichotomique nous permet d'obtenir alors le calcul de 4 TFD d'ordre 2 à réaliser suivi du calcul "papillon" avec les échantillons résultants $S_{i,j,m}$ où $i, j \in \{1, 2\}$ signifie les échantillons pairs ou impairs et $m \in [0, 1]$. Les quatre transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations

suivantes :

✓ échantillons pairs et impairs de $S_{1,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{1,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k} \cdot W_2^{mk} \quad S_{1,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+2} \cdot W_2^{mk}$$

✓ échantillons pairs et impairs de $S_{2,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{2,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+1} \cdot W_2^{mk} \quad S_{2,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+3} \cdot W_2^{mk}$$

avec les deux premières valeurs de la fonction $W_2^{mk} : W_2^0 = W_2^1 = 1$ étant donné les valeurs des coefficients W_2^{mk} ci-dessous, une TFD d'ordre 2 correspond à un opérateur de type "papillon" sans coefficient, donc une simple somme ou différence de nombres complexes. C'est qui conduit au coût de calcul négligeable. Ensuite les échantillons intermédiaires $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$ sont obtenus à l'aide du calcul "papillon" avec les coefficients W_2^{mk} , c'est-à-dire, les $S_{i,m}$ peuvent s'exprimer en fonction des $S_{i,j,m}$ qui sont calculés à l'ordre 2, équivalents :

✓ pour $m \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= S_{1,1,m} + W_4^m S_{1,2,m} = S_{1,1,m} + W_8^{2m} S_{1,2,m} \\ S_{2,m} &= S_{2,1,m} + W_4^m S_{2,2,m} = S_{2,1,m} + W_8^{2m} S_{2,2,m} \end{aligned}$$

✓ pour $m \in [2, 3]$:

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= S_{1,1,m-2} + W_4^{m-2} S_{1,2,m-2} = S_{1,1,m-2} + W_8^{2(m-2)} S_{1,2,m-2} \\ S_{2,m} &= S_{2,1,m-2} + W_4^{m-2} S_{2,2,m-2} = S_{2,1,m-2} + W_8^{2(m-2)} S_{2,2,m-2} \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons dans ce cas le schéma général du calcul de la TFD d'ordre 8 qui conduit à un calcul de 4 TFD d'ordre 2 (ou opérateur "papillon" sans coefficient), suivi de deux étapes de calcul "papillon"

Exemple 1.4. Prenons un cas concret pour bien illustrer que cette figure marche vraiment.

Soient $N = 8$ le nombre d'échantillons et $s = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

Calculons la TFD de s en utilisant la TFR

Tout d'abord, calculons les 8 premières valeurs de W_8^{mk} ,

$$W_8^0 = -W_8^4 = 1 \quad W_8^1 = -W_8^5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$W_8^2 = -W_8^6 = -i \quad W_8^3 = -W_8^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

✓ Passons à la première étape

Permutons les éléments de s afin d'avoir la bonne forme de la première étape ; donc on a :

$s_k = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ devient $s_k = [0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7]$ Ensuite, calculons les $S_{i,j,m}$ en utilisant

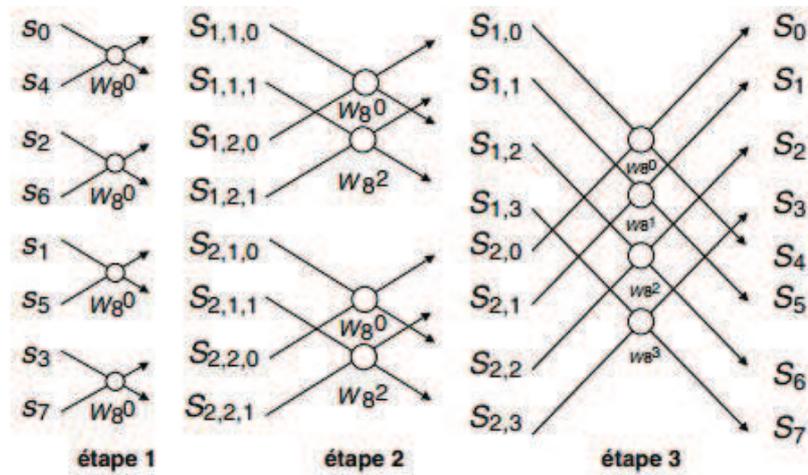


FIGURE 3.4 – Représentation schématique de la TFR selon la méthode à entrelacement temporel pour 8 échantillons.

l'opérateur "papillon"

$$\begin{aligned}
 S_{1,1,0} &= s[0] + W_8^0 \cdot s[4] \\
 &= s[0] + s[4] \\
 &= 0 + 4 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,1,1} &= s[0] - W_8^0 \cdot s[4] \\
 &= s[0] - s[4] \\
 &= 0 - 4 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,2,0} &= s[2] + W_8^0 \cdot s[6] \\
 &= s[2] + s[6] \\
 &= 2 + 6 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,2,1} &= s[2] - W_8^0 \cdot s[6] \\ &= s[2] - s[6] \\ &= 2 - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2,1,0} &= s[1] + W_8^0 \cdot s[5] \\ &= s[1] + s[5] \\ &= 1 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2,1,1} &= s[1] - W_8^0 \cdot s[5] \\ &= s[1] - s[5] \\ &= 1 - 5 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2,2,0} &= s[3] + W_8^0 \cdot s[7] \\ &= s[3] + s[7] \\ &= 3 + 7 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2,2,1} &= s[3] - W_8^0 \cdot s[7] \\ &= s[3] - s[7] \\ &= 3 - 7 \\ &= -4 \end{aligned}$$

On obtient alors $S_{i,j,m} = [4, -4, 8, -4, 6, -4, 10, -4]$ en supposant que :

$$S_{i,j,m} = S'_k$$

✓ Deuxième étape

Dans cette étape, nous allons calculer les $S_{i,m}$ en utilisant les valeurs des $S_{i,j,m}$ que nous venons de trouver. Alors :

$$\begin{aligned}
 S_{1,0} &= S_{1,1,0} + W_8^0 \cdot S_{1,2,0} \\
 &= S'[0] + S'[2] \\
 &= 4 + 8 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,1} &= S_{1,1,1} + W_8^2 \cdot S_{1,2,1} \\
 &= S'[1] + (-i)S'[3] \\
 &= -4 + (-i)(-4) \\
 &= -4 + 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,2} &= S_{1,1,0} - W_8^0 \cdot S_{1,2,0} \\
 &= S'[0] - S'[2] \\
 &= 4 - 8 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,3} &= S_{1,1,1} - W_8^2 \cdot S_{1,2,1} \\
 &= S'[1] - (-i)S'[3] \\
 &= -4 - (-i)(-4) \\
 &= -4 - 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{2,0} &= S_{2,1,0} + W_8^0 \cdot S_{2,2,0} \\
 &= S'[4] + S'[6] \\
 &= 6 + 10 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,1} &= S_{2,1,1} + W_8^2 \cdot S_{2,2,1} \\
&= S'[5] + (-i)S'[7] \\
&= -4 + (-i)(-4) \\
&= -4 + 4i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,2} &= S_{2,1,0} - W_8^0 \cdot S_{2,2,0} \\
&= S'[4] - S'[6] \\
&= 6 - 10 \\
&= -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,3} &= S_{2,1,0} - W_8^2 \cdot S_{2,2,0} \\
&= S'[5] - (-i)S'[7] \\
&= -4 - (-i)(-4) \\
&= -4 - 4i
\end{aligned}$$

On a encore $S_{i,m} = [12, -4 + 4i, -4, -4 - 4i, 16, -4 + 4i, -4, -4 - 4i]$

Supposons que $S_k'' = S_{i,m}$

✓ Finissons par la dernière étape

$$\begin{aligned}
S_0 &= S_{1,0} + W_8^0 \cdot S_{2,0} \\
&= S''[0] + S''[4] \\
&= 12 + 16 \\
&= 28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_{1,1} + W_8^1 \cdot S_{2,1} \\
&= S''[1] + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)S''[5] \\
&= -4 + 4i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \cdot (-4 + 4i) \\
&= -4 + i(4 + 4\sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= S_{1,2} + W_8^2 \cdot S_{2,2} \\
&= S''[2] + (-i)S''[6] \\
&= -4 + (-i)(-4) \\
&= -4 + 4i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= S_{1,3} + W_8^3 \cdot S_{2,3} \\
&= S''[3] + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)S''[7] \\
&= -4 - 4i + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)(-4 - 4i) \\
&= -4 + i(-4 + 4\sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= S_{1,0} - W_8^0 \cdot S_{2,0} \\
&= S''[0] - (1)S''[4] \\
&= 12 - 16 \\
&= -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5 &= S_{1,1} - W_8^1 \cdot S_{2,1} \\
&= S''[1] - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)S''[5] \\
&= -4 + 4i - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \cdot (-4 + 4i) \\
&= -4 + 4\sqrt{2} - 4i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_6 &= S_{1,2} - W_8^2 \cdot S_{2,2} \\
&= S''[2] - (-i)S''[6] \\
&= -4 + i(-4) \\
&= -4 - 4i
\end{aligned}$$

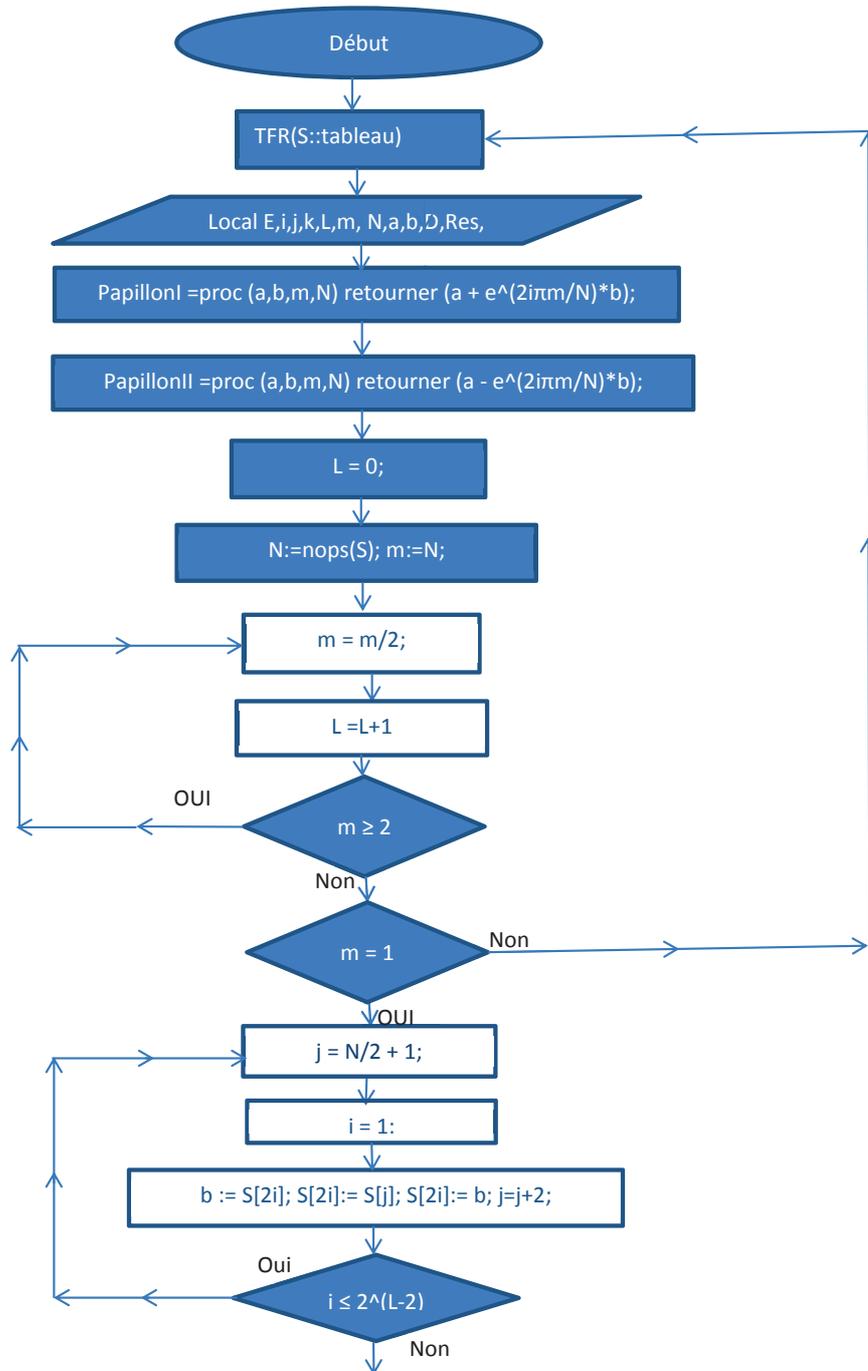
$$\begin{aligned}
S_7 &= S_{1,3} - W_8^3 \cdot S_{2,3} \\
&= S''[3] - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)S''[7] \\
&= -4 - 4i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(6+10i) \\
&= -4 - i(4+4\sqrt{2})
\end{aligned}$$

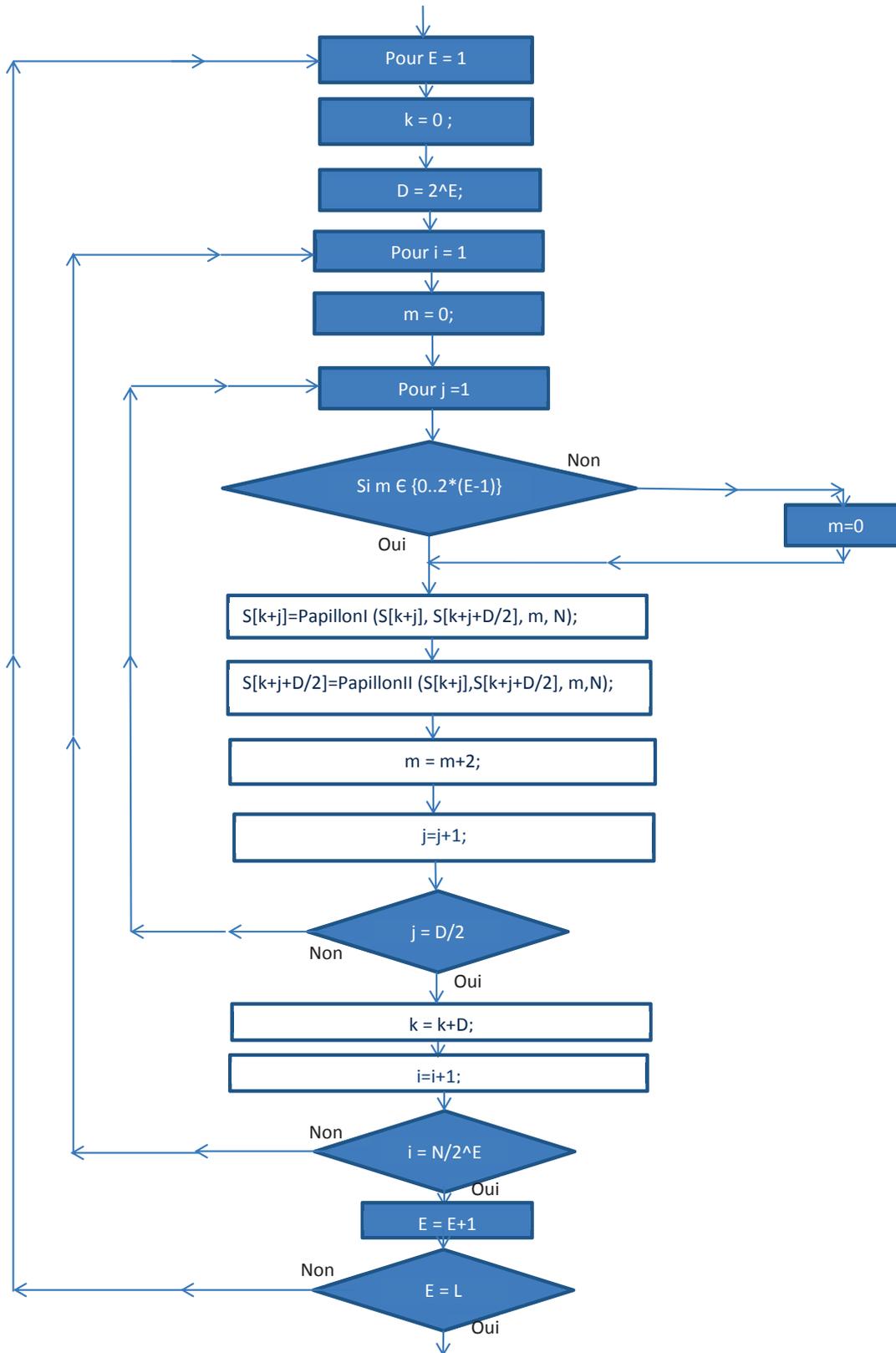
En conclusion, la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné $s_k = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ par la méthode de TFR est $S_m = [28, -4 + i(4 + 4\sqrt{2}), -4 + 4i, -4 + i(-4 + 4\sqrt{2}), -4, -4 + 4\sqrt{2} - 4i, -4 - 4i, -4 - i(4 + 4\sqrt{2})]$

1.4 Organigramme de la TFR

Remarque 1.5. Cet algorithme sert pour $N = 8$ ou $N = 4$ seulement avec la méthode de découpage dichotomique. Mais si on peut avoir la généralité (cf. Chapitre 3. section 2.1) avec une autre méthode de permutation.

ORGANIGRAMME de la TFR





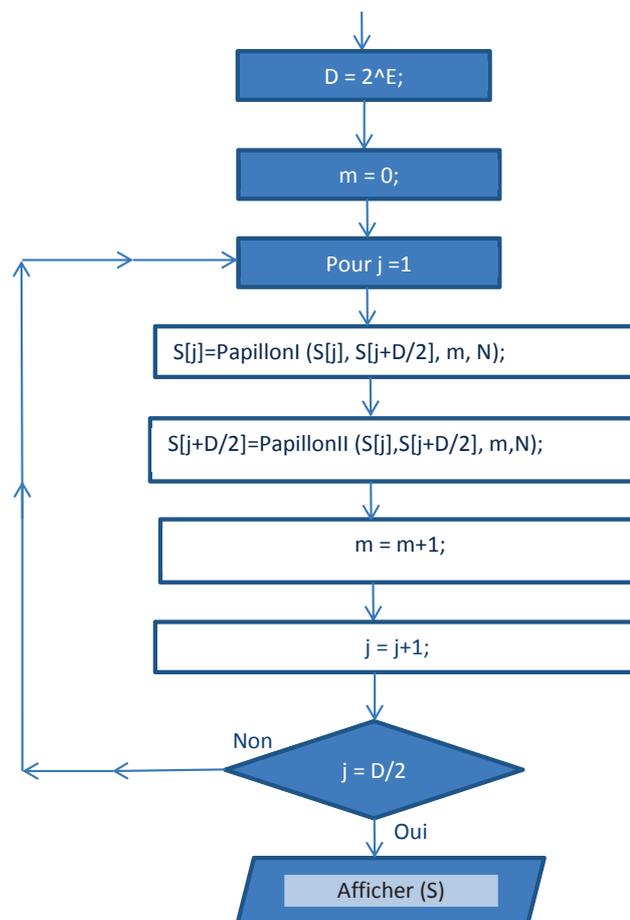
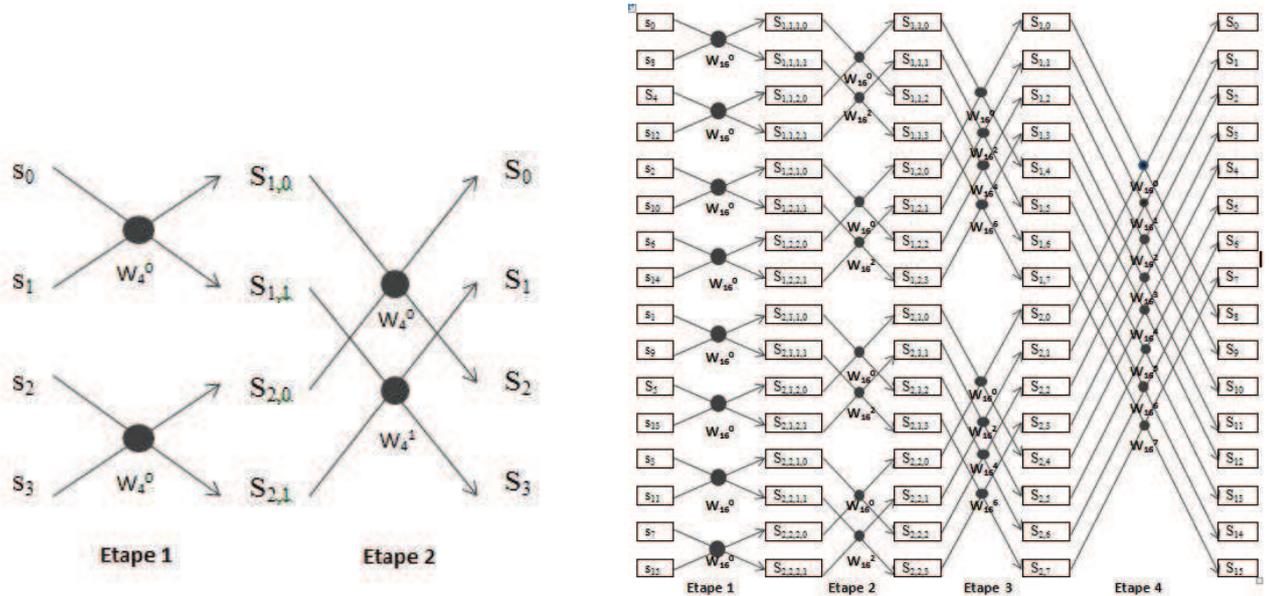


FIGURE 3.5 – Organigramme de la TFR

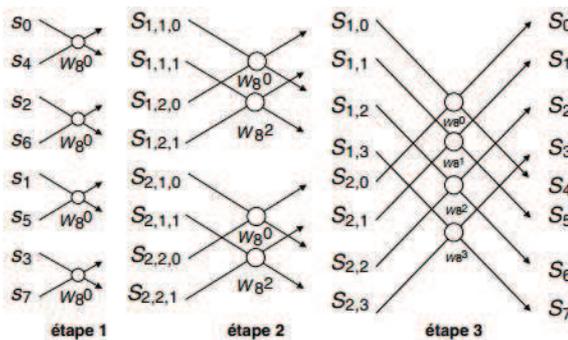
2 Evolution de la TFR du Colley-Tuckey

Voici un processus de l'évolution de l'algorithme du Colley-Tuckey

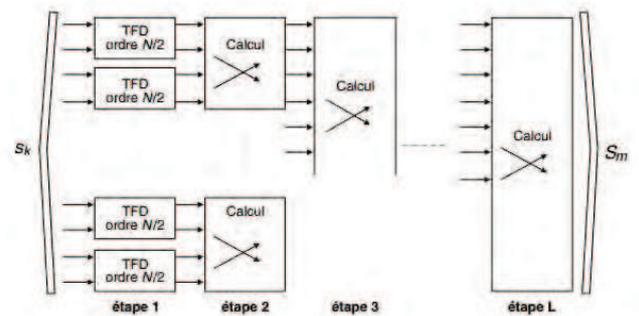


TFR d'ordre 4

TFR d'ordre 16



TFR d'ordre 8

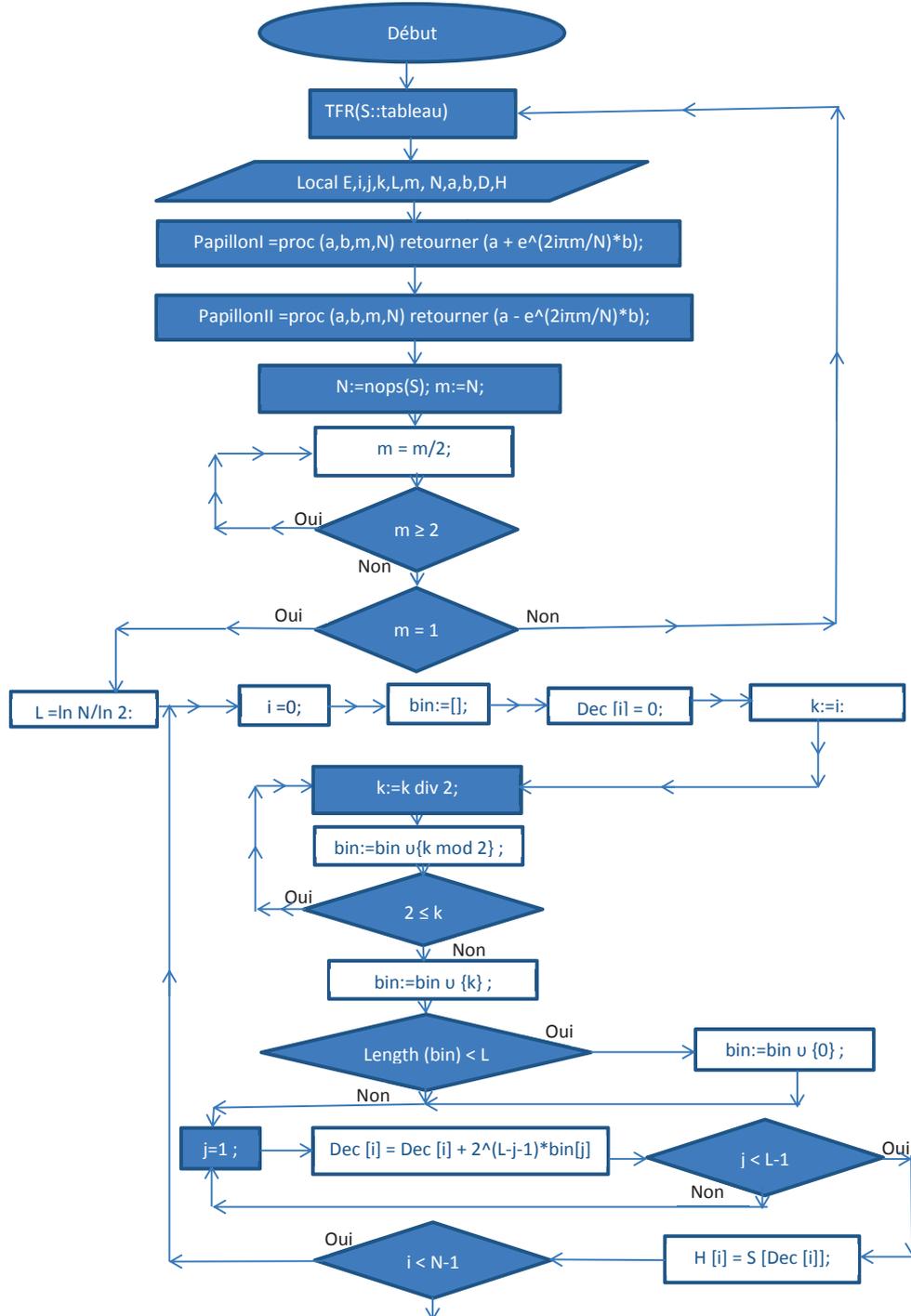


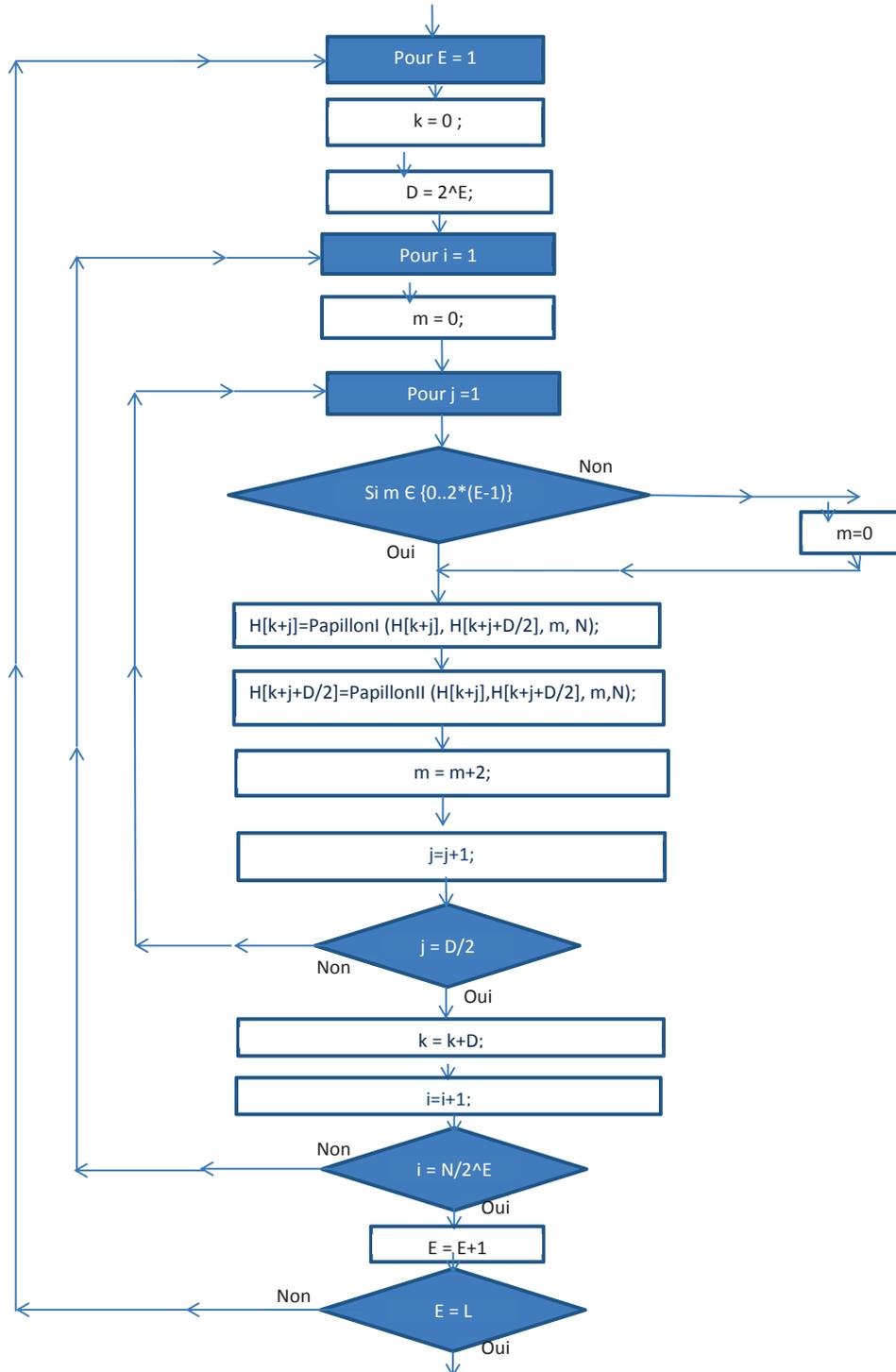
TFR d'ordre N

2.1 Organigramme général

Pour une taille d'échantillonnage N supérieure ou égale à 16 mais toujours de la forme 2^L , On peut adopter une deuxième méthode pour trouver la forme des indices permutés. C'est la méthode binaire. Elle consiste à coder en binaire le nombre $N - 1$, ainsi les indices du signal initial, dont la longueur de ce nombre et celle de $N - 1$ ont la même taille. Puis réécrire ce nombre de droite à gauche. Et enfin faire, son décodage en nombre décimal. D'où les indices, du signal initial, sous forme permutés. On a donc la figure 3.6 :

ORGANIGRAMME de la TFR





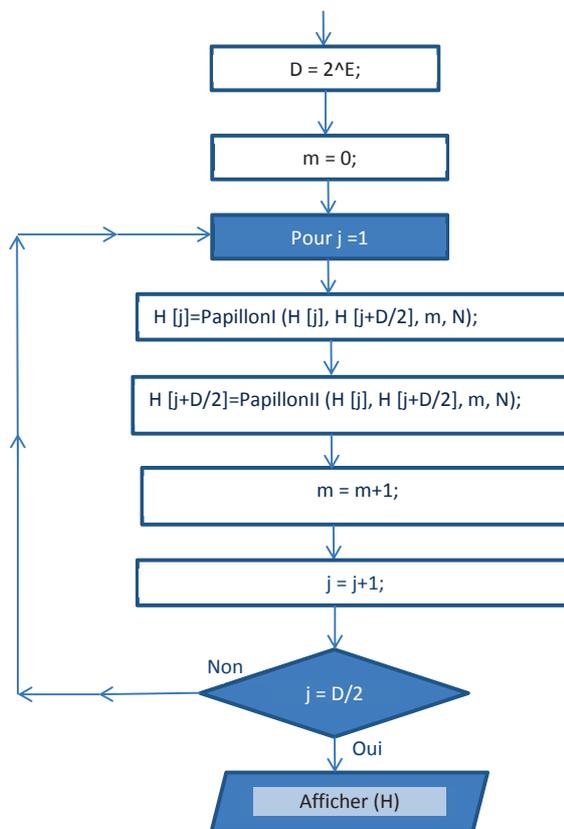


FIGURE 3.6 – TFR générale avec la méthode binaire

2.2 Simulation avec le logiciel MAPLE

Voici la programmation en MAPLE de l'algorithme de Cooley-Tukey pour le calcul de TFR en utilisant les codages binaires des indices du signal d'entrée. Pour simplifier la programmation, on va écrire tout de suite les restes de la division de l'indice par 2 de gauche à droite. Ceci donne le nombre binaire renversé. Puis faire le décodage en décimal de ce nombre. Et on a enfin les indices en ordre pérmuté. On doit passer alors au calcul de la TFR avec l'opérateur "papillon".

```

restart : with(linalg) :
s := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] : #entrer ici votre signal initial
N := nops(s); m := N;
while m >= 2 do m := (1/2) * m end do :# Tester N est-il de la forme 2L
if (m = 1) then
  l := ln(N)/ln(2); bin := matrix(N, l) : h := matrix(N, l) :
  Dec := vector(N) : g := vector(N) :
  PapI := proc(a, b, m, N) return (a + e(-2 * I * Pi * m)/N * b) end proc :
  PapII := proc(a, b, m, N) return (a - e(-2 * I * Pi * m)/N * b) end proc :
  for i from 1 to N do
    k := i - 1 : j := 0 :
    while (k >= 2) do
      j := j + 1 : bin[i, j] := irem(k, 2) : k := iquo(k, 2) :
    end do :
    j := j + 1 : bin[i, j] := k;
    while (j < l) do
      j := j + 1 : bin[i, j] := 0 :
    end do :
    Dec[i] := 0 :
    for j from 1 to l do
      Dec[i] := Dec[i] + 2(l - j) * bin[i, j] :
    end do :
    h[i, 1] := s[Dec[i] + 1]; print(h) ;
  end do ;
else
  print("Entrer à nouveau");
end if ;
for E from 1 to l - 1 do
  k := 0 : R := 2E :

```

```

for  $i$  from 1 to  $N/(2^E)$  do
   $m := 0$  :
  for  $j$  from 1 to  $R/2$  do
    if ( $evalb(minseq(2 * i, i = 0..E - 1)) = 'true'$ ) then
       $g[k + j] := PapI(h[k + j, E], h[k + j + R/2, E], m, N)$  :
       $g[k + j + R/2] := PapII(h[k + j, E], h[k + j + R/2, E], m, N) : m := m + 2$  :
    else
       $m := 0$  :
       $g[k + j] := PapI(h[k + j, E], h[k + j + R/2, E], m, N)$  :
       $g[k + j + R/2] := PapII(h[k + j, E], h[k + j + R/2, E], m, N) : m := m + 2$  :
    end if :
  end do ;
   $k := k + R$  :
end do :
for  $u$  to  $N$  do
   $h[u, E + 1] := g[u]$ ;
end do ;
  print(h) ;
end do ;
 $E := l$ ;  $R := 2^E$ ;  $m := 0$ ;
for  $j$  to  $(1/2) * R$  do
   $Res[j] := PapI(g[j], g[j + (1/2) * R], m, N)$ ;
   $Res[j + (1/2) * R] := PapII(g[j], g[j + (1/2) * R], m, N)$ ;
   $m := m + 1$  :
end do ;
print("la TFR de ", s) ; print(Res) ;

```

Conclusion

Notre travail est consacré au traitement d'un signal analogique. On a parlé de différents types d'échantillonnage tels que : l'échantillonnage idéal, naturel, régulier et moyenné. Cette étape précède l'analyse spectrale d'un signal, c'est-à-dire, l'utilisation des différents types de Transformée de Fourier. En fait, nous nous sommes intéressés à la Transformée de Fourier Rapide. On a essayé de traiter en particulier l'algorithme de Cooley-Tukey, en partant de la formule de base pour le calcul de la Transformée de Fourier Discrète : $S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-2i\pi \frac{km}{N}}$, suivi de l'algorithme de découpage dichotomique et des exemples concrets. Enfin on a abouti à un algorithme général de TFR avec la méthode de codage et décodage binaire.

En quelque sorte, notre étude est partie plus précisément par des échantillons s_k d'un signal, Et on voudrait avoir ses TFD. Afin d'atteindre cet objectif, on a parcouru les processus de la TFR pour améliorer le calcul.

Bibliographie

- [1] M. Barbi, "*Introduction à l'Analyse Spectrale*" Paris, 2013 - 2014
- [2] G. Baudoin et J.F. Bercher, "*Elements de Traitement du Signal*" Septembre 1998-
version 0.89
- [3] F. Cottet, "*Traitement du Signal*" DUNOD, Paris, 2005
- [4] V. CROAUETTE, "*La transformée de Fourier discrète*" Février 2009
- [5] J.DUMAS et B. BENNEVAULT, "*Analyse du signal \propto Analyse des sys-
tèmes*" version Février 2001
- [6] M. FRIKEL-G. BINET, "*Transformée de Fourier Discrète et Principes des analy-
seurs de spectre "Numérique"*" (2008 – 2009)
- [7] Y. Gagou, "*Cours de Traitement du Signal*" Université de Picardie Jules Verne 2009
- [8] F. Golse, "*Distribution, Analyse de Fourier, Equation aux dérivées partielles*",
Octobre 2012
- [9] J.P. Muller, "*Analyse Spectral* Juillet 2002
- [10] T. Paquet, "*Traitement du Signal*", 2009

Impétrant : ANDRIANALISEFA Sanni José

e-mail : andrianalifasannijose@gmail.com

Tél : (+261)34 76 782 82

TITRE : TRAITEMENT DU SIGNAL ET TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

Résumé

Afin qu'un ordinateur puisse analyser un signal analogique $s(t)$, il faut qu'il soit échantillonné et tronqué pour avoir un signal discret $s_{e,\Pi}(t)$. A partir duquel, on peut calculer sa TFD en utilisant la formule de base $S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{2i\pi \frac{km}{N}}$. Grâce à la TFR, qui est un algorithme de calcul de la TFD où $N = 2^L$, ce calcul devient plus rapide et moins coûteux.

mots clés :Echantillonnage, Transformé de Fourier Discrète (TFD), Transformé de Fourier Rapide (TFR), Opérateur "papillon"

Abstract

In order to analyze an analogic signal with a computer, it has to be sampled and truncated to have a discrete signal $s_{e,\Pi}(t)$. From which, we can determine his DFT by using the basic formula $S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{2i\pi \frac{km}{N}}$. The FFT is an algorithm which allows to calculate the DFT with a size of sampling $N = 2^L$, this method is faster and less expensive.

key words :Digitizing, Discrete Fourier Transform (DFT), Fast Fourier Transform (FFT), "papillon" operator

Encadreur : ANDRIATAHINY Harinaivo

Maître de conférence

Mention : Sciences et technologies

Université d'Antananarivo

e-mail : aharinaivo@yahoo.fr