

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
PREMIERE PARTIE : QUELQUES ELEMENTS DES GRAPHS.....	2
I. Historique de la théorie des graphes	3
I.1. Rappels mathématiques des ensembles	3
I.2. Relation binaire d'un ensemble.....	4
I.3. Représentation schématique d'une relation binaire.....	4
I.4. Propriétés d'une relation binaire.....	6
II. Graphes.....	6
II.1. Graphe non orienté.....	6
II.2. Graphe orienté.....	8
III. Degré d'un sommet d'un graphe.....	9
IV. Chemin dans un graphe.....	11
V. Graphe Eulerien.....	12
VI. Graphe Hamiltonien.....	13
VII. CONNEXITE.....	14
VIII. Arbre et Arborescence.....	16
IX. Matrice d'adjacence	18
IX.1. Recherche du nombre de chemins de longueur k.....	19
IX.2. Matrice du coût d'un chemin d'un graphe valué.....	20
IX.3. Matrice du coût minimum.....	20
X. Coloration minimale d'un graphe.....	20
X.1. Nombre chromatique.....	20
X.2. Partie stable d'un graphe.....	21
Conclusion de la première partie	21

DEUXIEME PARTIE : APPLICATION DES GRAPHS DANS CERTAINS PROJETS	22
Chapitre 1 : Problème du court chemin	23
I. Algorithme de Edsger Dijkstra.....	23
I.1. Présentation	23
I.2. Algorithme de Dijkstra.....	24
I.3. Application dans le programme du vol.....	24
I.4. Problème de sécurité.....	26
I.5. Problème des ponts de Königsberg.....	27
II. Algorithme de FORD.....	28
II.1. Présentation	28
II.2. Application dans le problème de circulation	28
III. Algorithme de DANTZIG.....	30
III.1. Description	30
III.2. Application dans le problème de circulation.....	31
Chapitre 2 : Problème de coloriage	32
I. Problème des Provinces.....	32
II. Problème d'une carte.....	33
III. Algorithme de Welch et Powell.....	34
III.1. Description	34
III.2. Application dans le problème d'une carte.....	34
IV. Problème du Parc.....	34
V. Problème d'emploi du temps	36
VI. Problème d'aquariophilie	37
Chapitre 3 : Construction d'un arbre de recouvrement	39
I. Algorithme de construction d'un arbre de recouvrement.....	39
I.1. Description	39
I.2. Application de l'algorithme.....	39

I.3. Problème routier	40
II. Algorithme de Solin Calestagne.....	41
II.1. Description	41
II.2. Problème de réseau de communication	41
Chapitre 4 : Méthode d'ordonnement des tâches.....	43
I. Les contraintes.....	43
II. Méthode M.P.M.....	43
III. Application de la méthode MPM : Problème de commande.....	44
III.1. Les dates au plus tôt des débuts des tâches	45
III.2. Les dates au plus tard des débuts des tâches.....	46
III.3. La marge (intervalle de flottement).....	47
IV. Modification d'un ordonnancement	47
V. Méthode PERT.....	49
Conclusion partielle.....	50
TROISIEME PARTIE : IMPORTANCE DES ELEMENTS DES GRAPHES AU LYCEE.....	51
I. Application de l'arbre de choix	52
I.1. Jeu de pile ou face.....	52
I.2. Organigramme d'une hiérarchie scolaire.....	55
II. Conservation du flux.....	56
II.1. Recherche d'intensité	56
II.2. Conservation de l'énergie.....	57
III. Coloration de quelques molécules.....	57
III.1. Géométrie de quelques molécules.....	58
III.2. Coloration des molécules.....	60
CONCLUSION GENERALE.....	62
Bibliographie. Site Web	63

LISTE DES FIGURES

Figure 1. Représentation d'une relation binaire	5
Figure 2. Graphe simple non orienté.....	7
Figure 3. Schéma d'un multi graphe.....	7
Figure 4. Graphe orienté.....	8
Figure 5. Boucle	11
Figure 6. Circulation routière.....	11
Figure 7. Graphe G1 non Eulérien	12
Figure 8. Graphe G2 Eulérien	13
Figure 9. Graphe G1 non hamiltonien.....	14
Figure 10. Graphe G2 hamiltonien.....	14
Figure 11. Graphes connexes.....	15
Figure 12. Complémentarité des graphes	15
Figure 13. Racine d'un graphe	16
Figure 14. Arbre et Arborescence.....	17
Figure 15. Points d'articulations	18
Figure 16. Isthme	18
Figure 17. Plan d'une entreprise	26
Figure 18. Les ponts de Königsberg.....	27
Figure 19. Plan d'une ville.....	29
Figure 20. Plan des provinces.....	32
Figure 21. Coloration des provinces	33
Figure 22. Les pays d'Europe	33
Figure 23. Coloration des bancs.....	35

Figure 24. Graphe des épreuves d'examen	36
Figure 25. Système d'aquarium	38
Figure 26. Plan des routes d'une ville.....	39
Figure 27. Construction d'un arbre de recouvrement	40
Figure 28. Arbre de recouvrement des routes enneigées	41
Figure 29. Réseau des communications des ordinateurs	42
Figure 30. Arbre de recouvrement à coût minimal	42
Figure 31. Graphe des dates au plus tôt des débuts des tâches d'un commande.....	45
Figure 32. Graphe des dates au plus tard des débuts des tâches d'un commande.....	46
Figure 33. Evaluation des taches par la méthode PERT.....	50
Figure 34. Arbre de choix	53
Figure 35. Arbre de choix (suite).....	54
Figure 36. Montage d'un circuit	56
Figure 37. Représentation spatiale du Méthane	58
Figure 38. Formation du Méthane	58
Figure 39. Représentation spatiale de l'ammoniac	59
Figure 40. Formation de l'ammoniac.....	59
Figure 41. Représentation spatiale de l'eau	59
Figure 42. Formation de l'eau	60
Figure 43. Coloration de la molécule de chlorure d'hydrogène.....	60
Figure 44. Coloration de la molécule d'ammoniac.....	61
Figure 45. Coloration de la molécule d'eau.....	61
Figure 46. Coloration de la molécule du Méthane.....	61

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1. Représentation de $A(x)$	5
Tableau 2. Représentation de $S(x)$	6
Tableau 3. Recherche du temps minimum de parcours de A vers D.....	27
Tableau 4. Recherche du chemin de valeur minimale de x_1 à x_{16}	29
Tableau 5. Coloration de la carte de l'Europe selon Welch et Powell.....	34
Tableau 6. Coloration des bancs du parc selon Welch et Powell.....	35
Tableau 7. Présentation d'un système d'aquarium.....	37
Tableau 8. Dates au plus tôt des débuts des tâches.....	45
Tableau 9. Dates au plus tard des débuts des tâches.....	46
Tableau 10. Valeurs des marges des tâches i	47
Tableau 11. Evaluation des tâches sous la méthode PERT.....	49

INTRODUCTION GENERALE

De nos jours, grâce au développement considérable de la science et de la technologie, l'être humain essayait de créer de diverses innovations à l'aide de la découverte, la pratique se réfère toutefois basée sur des théories, constituant un modèle adéquate à l'élaboration des projets de construction tels que les réseaux routières, des réseaux de communication, etc.

Actuellement, des nombreux pays au monde demeurent encore sous développé du point de vue économique comme Madagascar qui est toujours à la recherche des plans pour éradiquer la pauvreté de la population, la théorie des graphes constitue un atout considérable dans le but d'optimiser autant que possible la construction des biens selon les moyens disponibles. Notre étude est alors consacrée à l'initiation de la théorie des graphes et leurs applications.

Pour ce faire, nous allons diviser notre travail en trois parties dont chacune a son importance. Dans la première partie, on va voir certaines notions sur la théorie des graphes, la deuxième partie est basée sur son application sur quelques projets et dans la troisième partie on va voir des éléments des graphes dans l'enseignement.

PREMIERE PARTIE :
QUELQUES ELEMENTS DES GRAPHS

I-HISTORIQUE DE LA THEORIE DES GRAPHES

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville de Königsberg une fois exactement et de revenir au point de départ. La théorie des graphes constitue une branche à part entière de mathématiques, grâce aux travaux de Koenig, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. Elle s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales.

D'une manière générale un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communications, réseaux routières, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété des problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens du fait de l'importance qu'y revêt d'aspect algorithmique.

I.1 Rappels mathématiques sur les ensembles

Nous allons voir certaines notions sur les ensembles. Les ensembles peuvent se présenter sous plusieurs formes comme les ensembles finis dénombrables (\mathbb{Q} : ensemble des nombres rationnelles), infinis (\mathbb{R} : ensemble des nombres réels)

Ensemble : C'est une collection d'objet non répétitif c'est-à-dire :

$$\{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad / \quad a_i \neq a_j, \forall i \neq j$$

Exemple

S1 : {Terre, mars Jupiter, ..., Uranus, Soleil}

S2 : Lundi, Mardi, Mercredi, ..., Dimanche}

S3 : {Tananarive, Fianarantsoa, ... ; Tuléar}

Remarques

Les éléments constituant d'un ensemble sont appelés sommets. Dans notre exemple Terre, mars.... sont des sommets de l'ensemble S_1 .

I.2 Relation binaire d'un ensemble

Les éléments d'un ensemble peuvent être liés par une relation, cette relation est dite relation binaire d'un ensemble qu'on note R.

Exemple 1 : soit E un ensemble défini par

$$E = \{\text{entreprise, Ménage, Banque}\}$$

Soit R la relation binaire définie sur E par

$$a_i R a_j / a_i \text{ financé par } a_j$$

Dans notre cas, entreprise R Banque si l'entreprise est financée par la Banque

Exemple 2 : Soit l'ensemble $\Omega = \{1 ; 2, 5 ; 5 ; 3\}$ on peut définir une relation binaire R sur Ω de telle sorte que $a_i R a_j$ si a_i divise a_j et $a_i \neq a_j$

$$a_i R a_j,$$

Il existe k un entier naturel tel que :

$$a_j = k a_i$$

$$\text{On a : } 1 \text{ divise } 3 \text{ et } 1 \neq 3, \quad 3 = k \cdot 1 \quad \text{D'où } k = \frac{3}{1} = 3 \in \mathbb{IN}$$

$$\text{Donc } 1 R 3$$

$$: 2,5/5 \text{ et } 2,5 \neq 5, \quad 5 = k \cdot 2,5 \quad \text{D'où } k = \frac{5}{2,5} = \frac{5}{\frac{5}{2}}$$

$$k = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2 \in \mathbb{IN}$$

$$\text{Donc : } 2,5 R 5$$

I.3 Représentation schématique d'une relation binaire :

Nombreux sont les modèles pour représenter une relation entre deux ou plusieurs éléments d'un ensemble, les sommets peuvent être représentés par des symboles ou des étiquètes. Une flèche ou une courbe représente la liaison entre les éléments.

Dans notre cas où l'ensemble $\Omega = \{1; 2, 5 ; 3 ; 5\}$

La relation entre ces éléments est donnée par la figure suivante munie de la relation R précédente

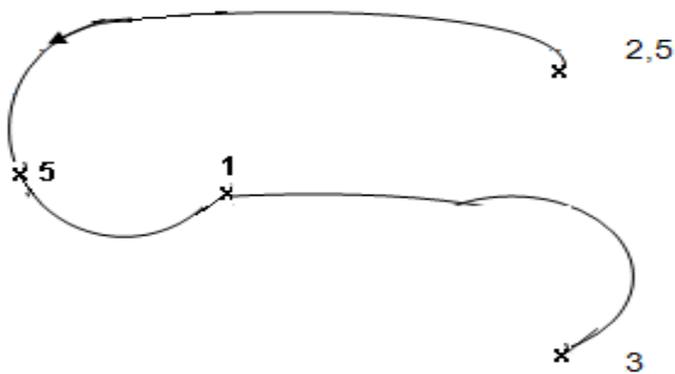


Fig (1)

Figure 1: Représentation d'une relation binaire

La relation R régissant les éléments de Ω nous permet de définir deux types dichotomies.

I.3.1 Dichotomie des antécédents

Définition : Soit X un élément d'un ensemble Ω . On appelle antécédents de X , les éléments de Ω qui sont en relation avec X et qui vient avant X qu'on note $A(X)$.

Donc $A(X) = \{Y \in \Omega / YRX\}$

Etant donné l'ensemble $\Omega = \{1 ; 2,5 ; 3 ; 5\}$ les antécédents de X est donné par :

Tableau 1: Représentation de $A(X)$

$X \backslash A(X)$	1	2,5	3	5
	\emptyset	\emptyset	{1}	{1 ; 2, 5}

Sur la figure dire que $2,5 \in A(5)$, le sens de la flèche liant la courbe (2,5 ; 5) part de 2,5 vers 5

I.3.2 Dichotomie des successeurs

Définition : On définit l'ensemble des successeurs de X d'un ensemble Ω , l'ensemble des éléments de Ω qui sont en relation avec X et qui vient après X qu'on note $S(X)$

Notation: $S(X)$

$$S(X) = \{Y \in \Omega / XRY\}$$

Exemple : $\Omega = \{1; 2, 5, 3; 5\}$

Tableau 2: Représentation de s(X)

X	1	2,5	3	5
S (X)	{3,5}	{5}	\emptyset	\emptyset

Dans ce cas {3, 5} sont les successeurs de 1.

Le sens de la flèche liant 3 et 1 part de 1 vers 3, ainsi que pour 5 et 1

I.4 Propriétés d'une relation binaire

P₁ Réflexivité

Une relation R est dite réflexive, si pour tout élément X d'un ensemble Ω , $X R X$

P₂ Symétrie

Une relation R est dite symétrique, pour tout couple (X, Y) appartenant à Ω^2 si $X R Y$ alors $Y R X$

Donc une relation R est dite non symétrique s'il existe un couple (X, Y) appartenant à Ω^2 , $X R Y$ et $Y \not R X$

$\not R$ Signifie : n'est pas en relation.

P₃ Transitivité

Une relation R est dite transitive si pour tout triplet (X, Y, Z) appartenant à Ω^3 , si $X R Y$ et $Y R Z$, alors $X R Z$.

Une relation R est dite antisymétrique si pour tout couple (X, Y) appartenant à Ω^2 si $X R Y$, alors $Y \not R X$.

La filiation est une relation antisymétrique car si X est père, Y le fils.

$X R Y$ alors $Y \not R X \implies$ vous ne pouvez pas être le père de votre père.

II. GRAPHES

II.1. Graphe non orienté

Graphe simple

Un graphe simple G est un couple formé de deux ensemble : un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots$

$\mathbf{a}_m \}$, partie de l'ensemble de $P(X)$ des parties à deux éléments de X , dont les éléments sont appelés arêtes. On notera $G = \{(X, A)\}$

Lorsque $a = \{x, y\} \in A$ on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y , ou que a joint x et y , ou que a passe par x et y . Les sommets x et y sont dits adjacents dans G .

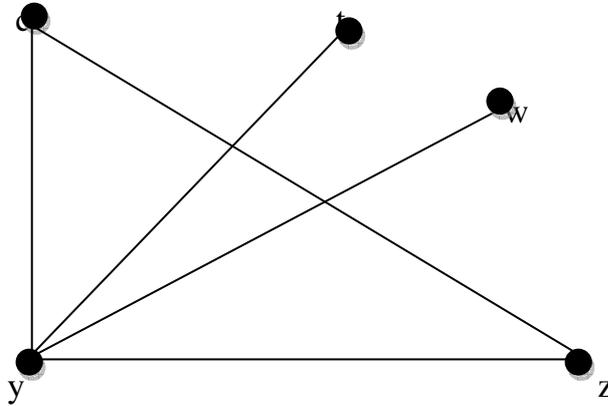


Figure 2: Graphe simple non orienté

Multi graphe

Un multi graphe $G = (X, A, F)$ est déterminé par :

- Un ensemble X des sommets
- Un ensemble A cette fois abstrait
- Une application $F : A \longrightarrow P_2(X)$

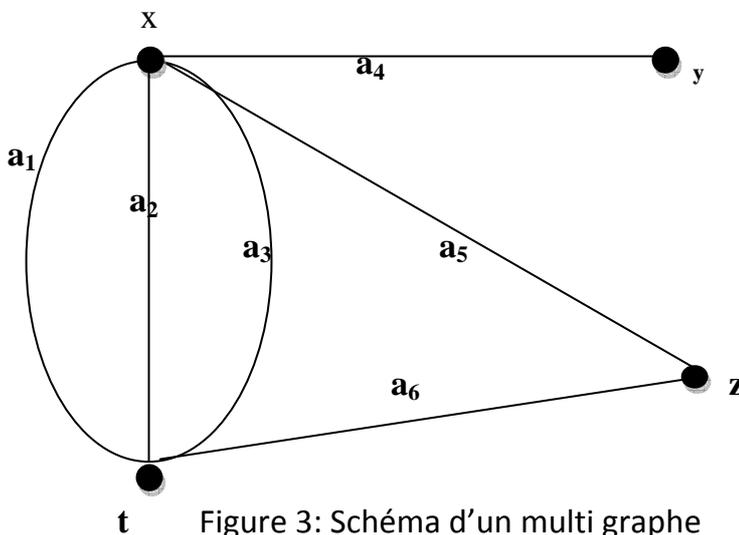


Figure 3: Schéma d'un multi graphe

Dans ce schéma x, y, t, z , sont les sommets du multi graphe et on a :

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = \{x, t\}$$

$$f(a_4) = \{x, y\}$$

$$f(a_5) = \{x, z\}$$

$$f(a_6) = \{t, z\}$$

II.2 Graphe orienté

Définition

Un graphe orienté G est formé de deux ensembles :

Un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets et un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Partie du produit cartésien $X \times X$, dont les éléments sont appelés arcs,.

On notera $G = (X, A)$

Si $a = (x, y)$ est un arc du graphe G , x est l'extrémité initiale de a et y l'extrémité finale de a .

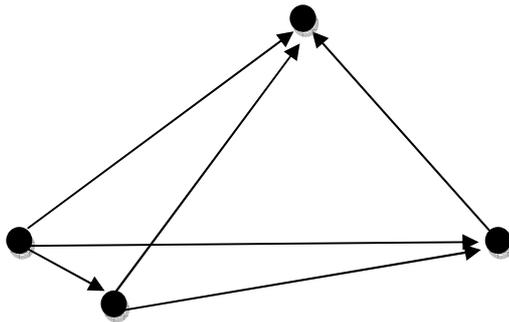
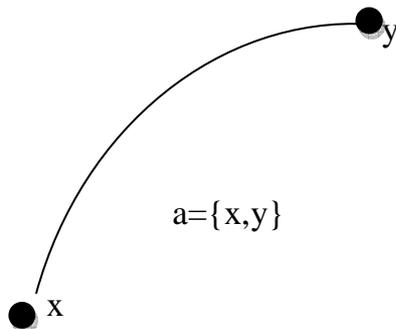
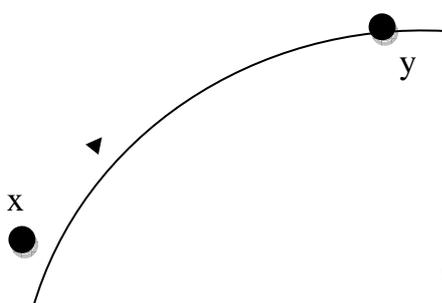


Figure 4: Graphe orienté

On en déduit de cela, que lorsque le graphe est non orienté, Alors la liaison $a = \{x, y\}$ est représentée par une arête en d'autre terme $a = \{x, y\}$ équivaut à dire que $x R y$ et $y R x$ et on obtient un graphe symétrique



Par contre, lorsque le graphe est orienté. Alors la relation $a = \{x, y\}$ étant représentée à la foi par un arc et par un arête $a = (x, y)$ et équivaut à dire que $x R y$ et $y \not R x$ et on obtient un graphe non symétrique



III. Degré d'un sommet d'un graphe

III.1 Description

Le degré d'un sommet d'un graphe joue un rôle majeur qui facilite à la résolution des problèmes en théorie des graphes. Etant donné un graphe simple $G = (X, A)$ et x un sommet de ce graphe. Le degré de x , noté $d(x)$ est le nombre d'arêtes incidentes à x , c'est-à-dire contenant x . Lorsque $d(x) = 0$, on dit que le sommet x est isolé,

Lorsque $d(x) = 1$, il est dit pendant.

III.2 quelque degré des sommets des graphes

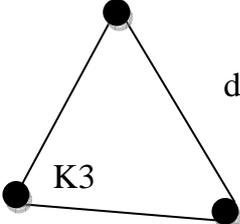
Dans le graphe k_n dit graphe complet d'ordre n où

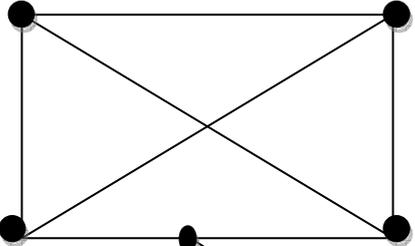
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $A = P_2(X)$

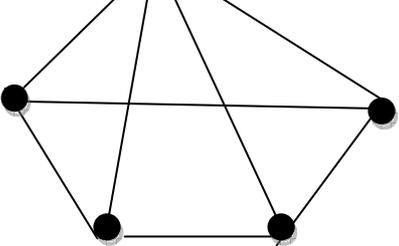
Si x est un sommet de k_n , $d(x) = n-1$

Cas $n = 1$, K_1  $d(x) = 1-1 = 0$, Alors x est isolé

Cas $n = 2$  $d(x) = 2-1 = 1$
 K_2

Cas $n = 3$  $d(x) = 3-1 = 2$
 K_3

Cas $n = 4$  $d(x) = 4-1 = 3$

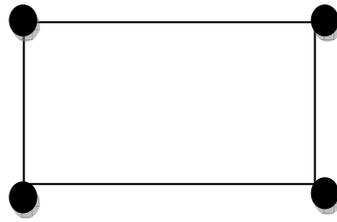
Cas $n = 5$  $d(x) = 5-1 = 4$

Cas $k = n$, On a $d(x) = n-1$

Dans le graphe C_n dit graphe cyclique si x est un sommet de C_n $d(x) = 2$

$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ et $A = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1,n\}, \{n,1\}\}$

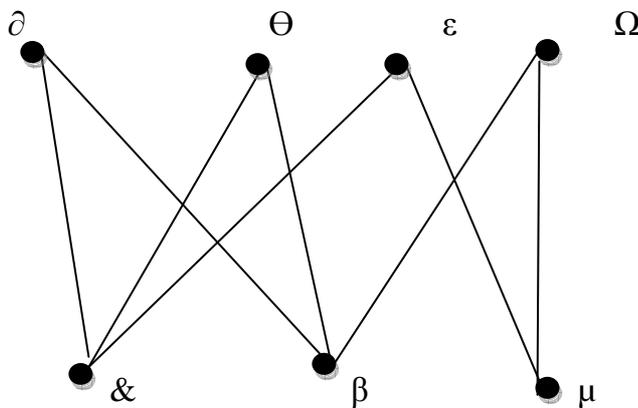
Cas $n=4$



$d(x) = 2$

Dans le graphe $K_{p,q}$ dit graphe biparti-complet où
 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q\}$ et
 $A = \{\{x_i, y_j\} / 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q\}$

Cas où $p = 4$ et $q = 2$



$d(\alpha) = d(\beta) = 3$

$d(\delta) = d(\theta) = d(\epsilon) = d(\Omega) = d(\mu) = 2$

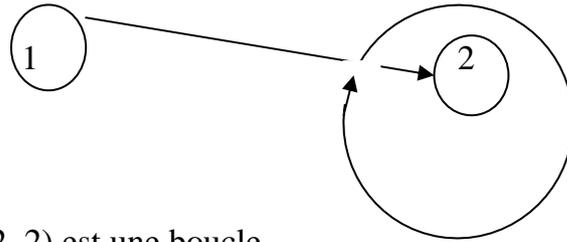
Les problèmes de factorisation de graphe émergent ainsi à la fin du XIX^{ème} siècle en s'intéressant aux sous graphes couvrants. Etant donné un graphe G , on peut définir qu'un sous graphe de G de la manière suivante si $H = (Y, B)$ est un sous graphe de $G = (X, A)$ si $Y \subset X$ et $B \subset A$. Un sous graphe couvrant est appelé un k -facteur si chacun de ses sommets a k arêtes. Julien Petersen montra qu'un graphe peut être séparé en 2 facteurs si et seulement si tous les sommets ont un nombre pair d'arêtes mais il a fallu attendre 50 ans pour que Babeler traite le cas impair.

Effectivement le système de transport mondial est considéré comme un atout, chaque réseau de transport est en théorie un sous graphe d'un autre.

III.3 Boucle

Dans le réseau de transport, la circulation des flux d'individus, de fret ou d'information, la théorie des graphes se doit donc de considérer la possibilité de représenter les mouvements par un arc ou une arête. Il y a boucle lorsqu'un arc fait correspondre un même sommet.

1-



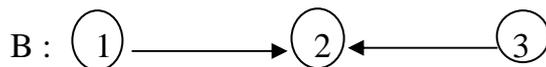
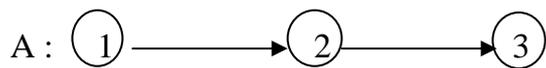
(2, 2) est une boucle

Figure 5: Boucle

IV. Chemin dans un graphe:

IV.1 Définition

Un chemin est une séquence d'arcs tous parcourus dans le même sens. Pour qu'un chemin relie deux sommets, un déplacement continu suivant une séquence d'arcs doit être possible. L'établissement des chemins est une étape fondamentale dans la mesure d'accessibilité et de flux de trafic au sein d'un réseau.



Sur le graphe A ; il a un chemin entre 1 et 3. Tandis que sur le graphe B aucun chemin ne relie 1 et 3.

IV.2 Longueur d'un arc, d'un chemin

Il s'agit du nombre associé à un arc, une arête ou un chemin. Ce nombre peut être une distance, un flot, ou tout autre attribut relié à ces éléments. La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs (ou d'arêtes) constituant ce chemin.

Application

Soit le schéma d'un graphe G définie suivant :

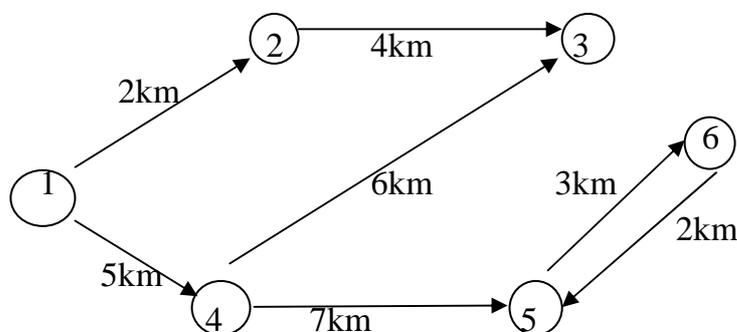


Figure 6: Circulation routière

Sur cette figure la longueur de l'arc (2,3) est 4 km et la longueur du chemin 1- 6 est 3.

L'étude du chemin d'un graphe constitue un atout considérable dans des nombreuses applications dans les domaines liés à la notion de réseaux : réseau social, réseau d'informatique, télécommunication. Son importance nous permet de définir une CHAÎNE comme étant une suite d'arc de telle sorte que chaque arc dans la suite à une extrémité en commun avec l'arc précédent où la direction n'a pas d'importance.

Sur la figure la séquence d'arcs reliant les sommets 1, 2, 3 et 6 est une chaîne.

Remarque

Une chaîne dont le sommet initial et le sommet terminal coïncide et qui n'emprunte pas le même arc constitue un cycle d'où le nom du graphe cyclique.

En dépit de la connaissance du cycle, des nombreux mathématiciens s'intéressèrent à travers le temps à l'étude du cycle dans lequel ils étudient les relations entre les sommets et les arcs constituant le graphe dont on a donné deux graphes connus portant le nom du graphe eulérien et le graphe hamiltonien.

V. Graphe eulérien

V.1 Description

Le graphe eulérien est du au problème d'Euler en 1766 qui consistait à travers une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg. Un chemin passant par toute arête exactement une fois fut nommé chemin eulérien ou circuit eulérien s'il finit là ou il a commencé. Par extension, un graphe admettant un circuit eulérien est dit graphe eulérien.

V.2 Théorème d'Euler

Cycle eulérien : c'est une chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois.

Un graphe eulérien est donc un graphe qui possède un cycle eulérien, l'étude de ce graphe a permis à Euler en 1799 a énoncé le théorème d'Euler qu'un graphe simple connexe $G = (X, A)$ est eulérien si et seulement si pour tout sommet x de G , $d(x)$ est pair. Ce théorème d'Euler reste valable pour des multi graphes connexes.

Exemples

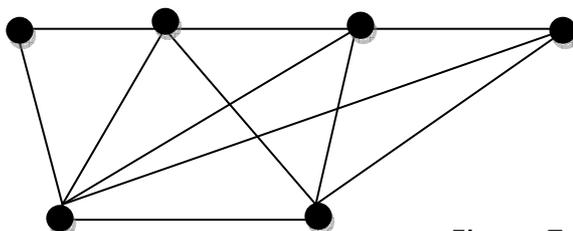


Figure 7: Graphe G1 non Eulérien

G1 n'est pas eulérien, ses sommets ne sont pas tous pairs

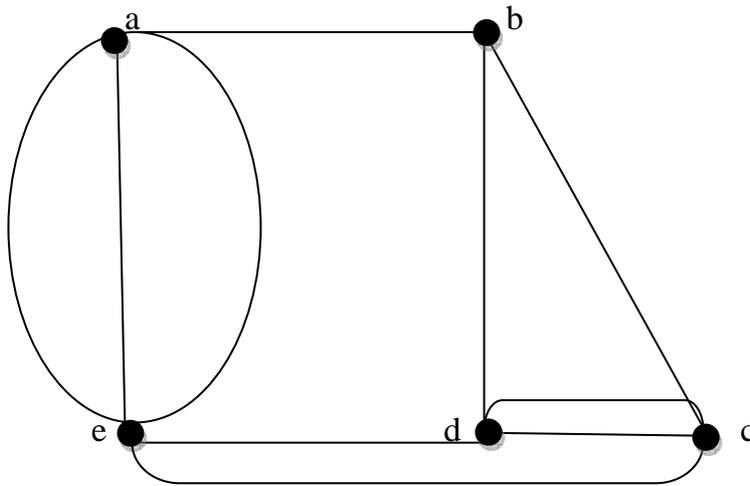


Figure 8: Graphe G2 Eulérien

G2 est eulérien, un cycle eulérien est par exemple a,b,c,d,c,e,d,b,e,a,e,a

Cependant, il peut y avoir qu'un graphe possédant une chaîne dite chaîne eulérienne se traduit par une chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe, ce graphe est dit semi-eulérien dont à la référence des sommets si et seulement si il admet 0 ou exactement 2 sommets de degré impair. Euler avait formulé qu'un graphe n'est eulérien que si chaque sommet a un nombre pair d'arêtes.

La connaissance d'un graphe eulérien par l'existence d'un cycle ou d'une chaîne eulérienne dans un graphe a été exploitée par d'autres Mathématiciens célèbres qu'ils avaient utilisés dans les résolutions de nombreux Algorithmes dont les plus connus portent le nom de l'algorithme Edsger Dijkstra, Algorithme de Hors pool.

VI. GRAPHE HAMILTONIEN

Contrairement aux graphes eulériens, il existe de son côté le graphe hamiltonien qui est un graphe particulier. Cette étude est due au mathématicien irlandais William Rowan Hamilton dans le quel, il évoqua que dans un graphe, il peut y avoir une chaîne simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois, cette chaîne est dite hamiltonnienne.

Un cycle hamiltonien correspond au cycle simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois, de cela on dit qu'un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien et de son côté il est dit semi-hamiltonien dans le cas où le graphe possède une chaîne hamiltonnienne.

Au référence des sommets du graphe $G = (X, A)$

Ore a énoncé un théorème qui dit qu'un graphe $G = (X, A)$ simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$.

Alors G est hamiltonien, **Dirac** dans son corollaire dit que si $G = (X, A)$ étant un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G , on a $d(x) \geq \frac{n}{2}$

Alors G est hamiltonien.

En effet un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent si x , et y ne sont pas adjacents on a bien :

$$d(x) \geq \frac{n}{2}$$

$$d(y) \geq \frac{n}{2}$$

$$\implies d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Exemples

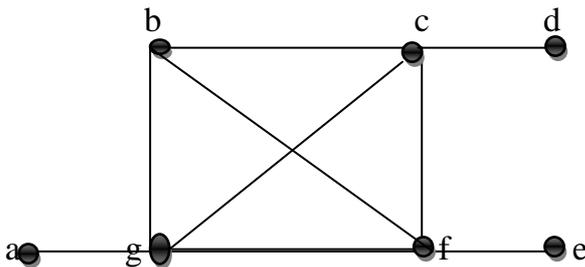


Figure 9: Graphe G_1 non Hamiltonien

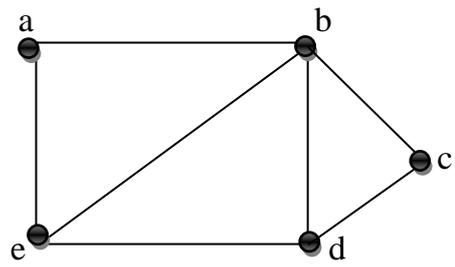


Figure 10: Graphe G_2 Hamiltonien

G_1 n'est pas hamiltonien, car il possède un sommet de degré 1

G_2 est hamiltonien : $a; b; c; d; e; a$, est un cycle hamiltonien du fait que $d(a)=2 < 5 : 2$

Remarques

1-L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe

2-Cependant on peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes sur les graphes hamiltoniens dont un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien. Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien, les graphes K_n sont hamiltoniens

3-Un graphe est symétrique lorsque chaque paire de sommets reliés dans un sens l'est aussi dans l'autre. Par convention, une ligne dépourvue de flèche représente un arc sur lequel un mouvement bidirectionnel est possible. Une majorité des systèmes de transport sont symétriques mais l'asymétrie est aussi possible comme dans le cas des services aériens et maritimes.

VII. CONNEXITE

VII.1 Définition

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ de G , il existe une chaîne de premier terme x et de dernier terme y . Il existe plusieurs degrés de connexité, selon l'aisance du mouvement au sein du graphe.

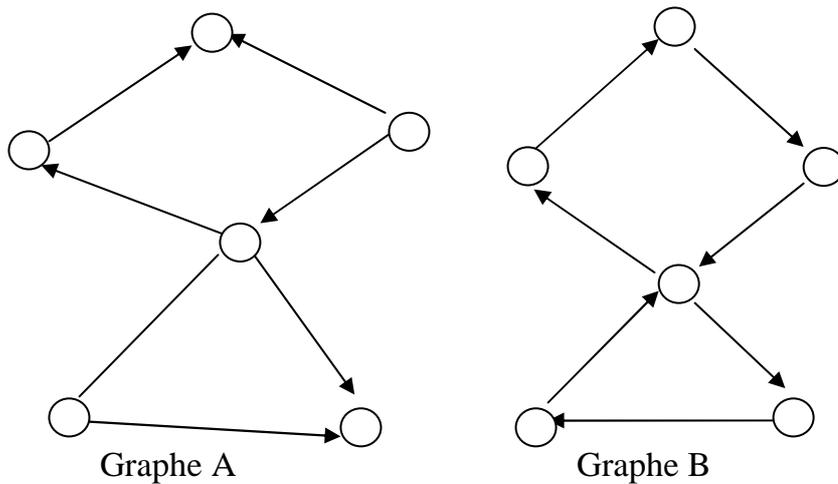


Figure 11: Graphes Connexes

Sur ces 2 figures les deux graphes sont connexes mais le graphe B est plus connexe que le graphe A.

Si dans un graphe, deux sommets quelconques sont reliés dans au moins une direction, alors ce graphe est dit complet. Parfois dans la pratique, il peut y avoir qu'un graphe complet G se construit à partir de deux graphes X et Y.

La construction de G se déduit de l'un de ces deux graphes, et dans ce cas on parle de la complémentarité des graphes

VII.2 complémentarité des graphes

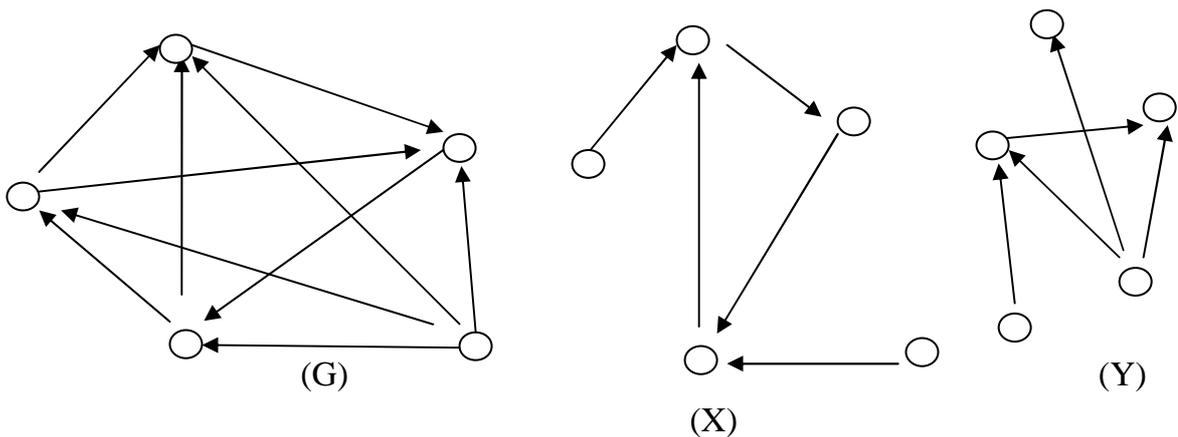


Figure 12: Complémentarité des graphes

Etant donné les deux graphes X et Y.

Le graphe complémentaire pour G est le graphe Y lorsque l'union de X et de Y est égale à G. ($G = X \cup Y$)

L'utilisation du graphe complet est très fréquente dans l'aménagement des infrastructures routières d'une région ou d'un pays qui se traduit par l'installation des réseaux routières de telle sorte qu'il existe une route reliant deux villes différentes du pays, deux à deux. Dans la représentation graphique au sens de la théorie des graphes, les sommets (Nœuds) s'agit d'une abstraction d'un lieu tel une ville, une division administrative, une intersection routière ou une infrastructure de transfert (stations, terminus ports et aéroports).

Ainsi le physicien allemand Gustav Kirchhoff étendit le travail de Georg Ohm pour établir en 1845 les lois de Kirchhoff exprimant la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique. En particulier, un circuit électrique peut se voir comme un graphe dans le quel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds.

VIII. Arbre et Arborescence

Il est évident que l'organisation des sommets et les arcs dans un graphe débouchent sur une structure à des propriétés descriptibles

VIII.1 Racine d'un graphe

Un sommet r tel que tout autre sommet du graphe est à l'extrémité d'un chemin issu de r . La direction doit nécessairement être prise en compte. Une racine se veut généralement le point d'origine d'un système de distribution.

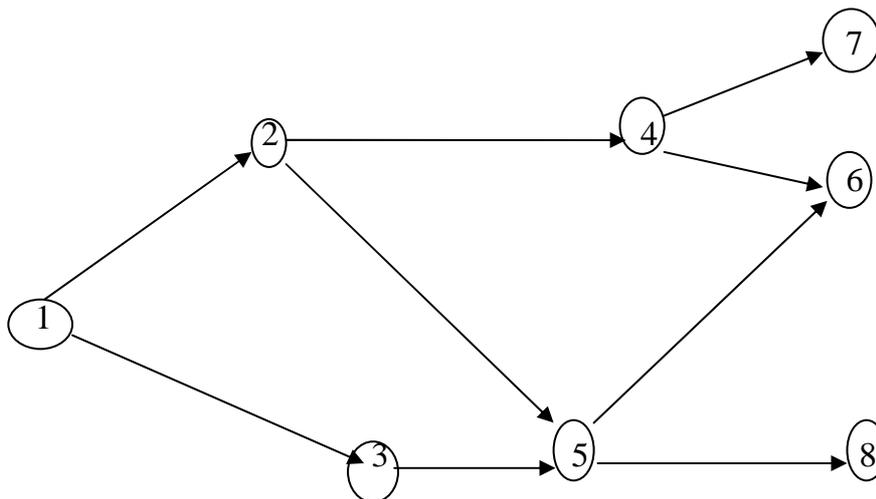


Figure 13: Racine d'un graphe

Sur ce graphe : 1 et la seule racine

VIII.2 Arbre et Arborescence

Un graphe connexe sans cycle simple et sans boucle est dit un arbre. Un arbre a autant d'arcs que de sommets moins un. Si un arc devrait être supprimé, il cesserait d'être connexe, si un nouvel arc devrait relier deux sommets, un cycle serait créé. Une arborescence de racine r est un arbre dans lequel aucun arc ne se termine en r et un seul se termine en tout sommet différent de r .

Exemple

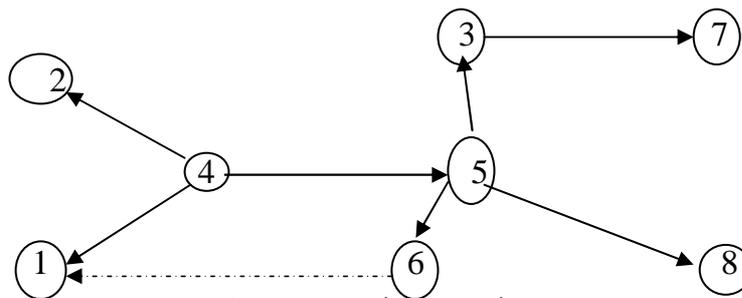


Figure 14: Arbre et Arborescence

Sur cette figure sans l'arc (6,1) ce graphe est un arbre. De plus il s'agit d'une arborescence de racine 4.

C'est ainsi qu'au milieu du XIX^{ème} siècle le mathématicien britannique Arthur Cayley s'intéressa aux arbres, qui sont un type particulier de graphe n'ayant pas de cycle ; C'est-à-dire dans le que il est impossible de revenir à un point de départ sans faire le chemin inverse. En particulier, il étudia les nombres d'arbres à n sommets et montra qu'il en existe n^{n-2} . Ceci constitua «une des plus belle formules en combinatoire énumérative » domaine consistant à compter le nombre d'éléments dans un ensemble fini, et ouvrit aussi la voie à l'énumération de graphes ayant certaines propriétés.

Dans les graphes connexes, il peut y avoir un caractère de sommet qu'on n'appelle point d'articulation.

VIII.3. Point d'articulation

Dans un graphe connexe, un sommet est dit point d'articulation si le graphe obtenu en le supprimant n'est pas connexe. Il contient, par voie de conséquence, plus d'un sous-graphe

Un nœud d'articulation est généralement un port ou une aéro-gare.

Exemple

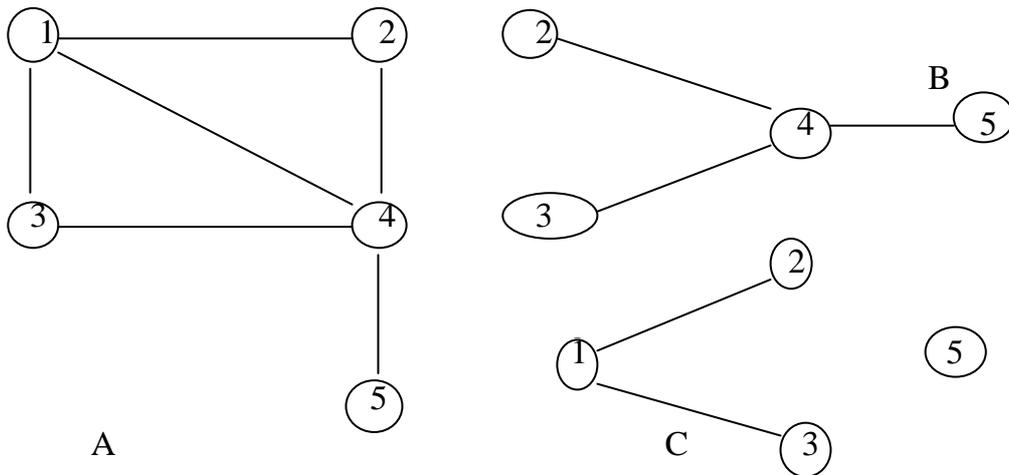


Figure 15: Points d'articulations

Les graphes B et C se déduisent du graphe A. En supprimant le sommet 1 du graphe A, On obtient le graphe B, qui est connexe. 1 n'est pas un point d'articulation.

En supprimant le sommet 4 du graphe A, le résultat est un graphe non-connexe C. Le sommet 4 est ainsi le point d'articulation du graphe A.

Un cas particulier dans un graphe connexe, la suppression d'une arête donnant la formation de deux composantes ayant chacune au moins une arête et l'arête supprimée est appelé *isthme*

Exemple

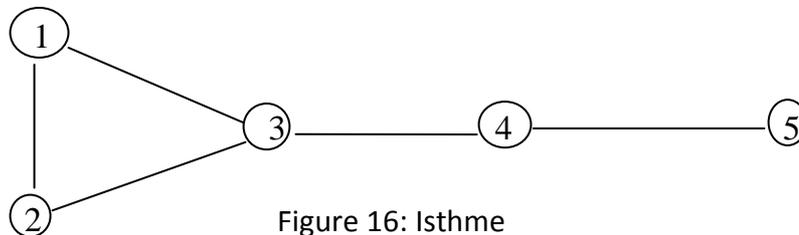


Figure 16: Isthme

On en déduit sur ce graphe que l'arc (3,4) représente un isthme.

Cependant, un graphe donné peut être représenté par diverses formes. Une de forme utilisée étant la forme matricielle. Cette dernière permet de résoudre certains problèmes du graphe : comme la recherche du nombre de chemins de longueur donné entre deux sommets quelconques adjacents ou non dans le graphe et d'un cout minimum du graphe

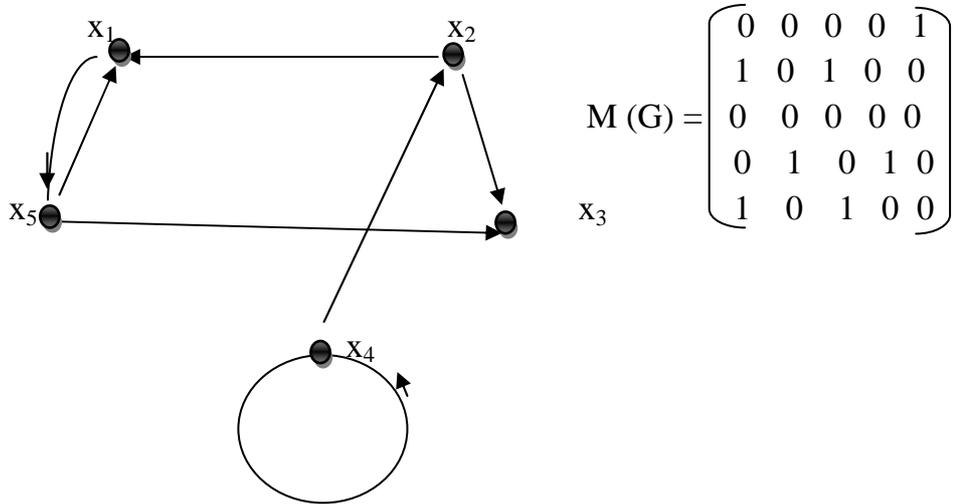
IX. Matrice d'adjacence

Définition

Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté avec, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M(G) \in M_n(\mathbb{IR})$ dont les éléments $m_{i,j}$ sont définis par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

Exemple



La représentation matricielle est également utilisée pour des graphes non orientés, leurs matrices sont symétriques

IX.1. Recherche du nombre de chemins de longueur k du sommet xi au sommet xj.

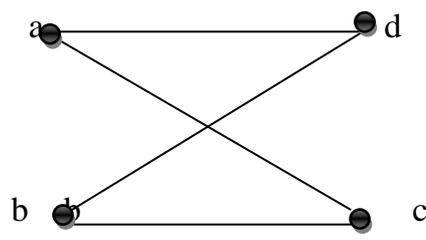
Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté avec $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de matrice d'adjacence $M = (m_{i,j})$. Pour tout entier naturel k, non nul,

Notons $M^k = (m_{i,j}^{(k)})$.

Alors $m_{i,j}^{(k)}$ est égale au nombre des chemins de longueur k du sommet x_i au sommet x_j est définie par $m_{i,j}^{(k)}$

Exemple

Détermination du nombre des chemins de longueur 4 allant de a à b dans le graphe G suivant



La Matrice d'adjacence de G est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chemins cherchés allant de a à b est égal à 8 défini dans la matrice suivante

$$M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Tapez une équation ici.

IX.2. Matrice du coût d'un chemin d'un graphe valué

Le coût du chemin est la somme des coûts des arcs de ce chemin. On peut définir la matrice de coût du graphe, c'est la matrice $C = (C_{i,j})$

$$\text{Où } C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \notin A \\ \delta(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in A \text{ ou } \delta(x_i, x_j) \text{ est la valeur de l'arc } (x_i, x_j) \end{cases}$$

x_j)

IX.3. Matrice du coût minimum

Soit $G = (X, A, \delta)$ un graphe valué, x et y deux éléments de X . Un chemin c de G de x à y est dit minimum lorsque pour tout chemin c' de G allant de x à y , on a $\delta(c) \leq \delta(c')$. On définit la matrice $M = (m_{i,j})$ de coût minimum de G par

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si il n'existe pas de chemin de } x \text{ à } y \\ \min \{ \delta(C) \mid C \text{ chemin de } x \text{ à } y \} & \end{cases}$$

X. COLORATION MINIMALE D'UN GRAPHE

X.1. Nombre chromatique

Soit un graphe simple $G = (E, U)$. G est « k-colorables », si on peut colorier ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur. On dira aussi qu'il est k-chromatique. Et on appelle « nombre chromatique » de G noté par $\alpha(G)$.

Le plus petit nombre k de couleurs nécessaires pour obtenir une k-coloration. On peut aussi colorier les arêtes de manière que deux arêtes adjacentes quelconques ne soient pas de la même couleur.

Si l'on a besoin pour ce faire d'un minimum de k couleurs, on dit qu'il existe une k -coloration des arêtes de G et que « indice chromatique », noté par $\chi(G)$ est le nombre k .

X.2. Partie stable d'un graphe

Soit $G(X, A)$ un graphe non orienté, un sous ensemble S de X est stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Le cardinal de la plus grande partie stable est le nombre de stabilité de G . On le note $\alpha(G)$. Donc une k -coloration est une partition de l'ensemble des sommets en partie stable.

Encadrement du nombre chromatique

Etant donné un graphe $G = (X, A)$ simple d'ordre n

On peut situer le nombre chromatique $\chi(G)$ par la relation suivante

$$\frac{n}{\chi(G)} \leq \alpha(G) \leq r$$

Où r désigne le degré maximal des sommets de G .

Le problème de coloration minimale est lié à des applications utilisant des graphes planaires il s'agit par exemple du coloriage de pays sur une carte de géographie : combien de couleurs un imprimeur doit il utiliser pour que deux pays à frontière commune n'aient pas la même couleur ? Le problème de planarité est aussi important dans la conception des circuits imprimés électroniques.

Conclusion de la première partie

Cette première partie, nous permet donc de voir quelques éléments de la théorie des graphes présentant des concepts généraux ; comme il revête de forme théorique ; il a aussi d'autant plus important dans la pratique, son utilité fait l'objectif des concepteurs à travers divers projets de construction dans plusieurs domaines telles que la chimie par la modélisation de la structure de la matière.

La biologie trouve son importance dans le génome où même les sciences sociales par la modélisation des relations et d'autres applications industrielles.

DEUXIEME PARTIE :
APPLICATION DES GRAPHERS
DANS CERTAINS PROJETS

Comme il était déjà vu en première partie que la majorité des problèmes de transports ou de relations sociales de la chimie et même la biologie peuvent être modélisés par des graphes.

Toutefois on peut se demander à quoi consiste un graphe ? Les réponses à cette question sont nombreuses. Une d'entre elles serait de connaître le coût minimum à la construction d'un projet, de faire une étude préliminaire à la gestion du temps, d'ordonnancement des tâches, ou encore de trouver une méthode efficace dans la coloration des pays d'une carte géographique grâce à la coloration minimale des sommets ou des arêtes.

De son côté, elle permet aussi de faire une étude au niveau d'une entreprise dont l'objectif est d'augmenter autant que possible les demandes des consommateurs. Pour comprendre ces faits, on va voir des applications des éléments des graphes sous des aspects algorithmiques dans la résolution des problèmes.

Chapitre 1 : Problème du court chemin

Le problème du court chemin est actuellement l'une des préoccupations majeures des hommes.

Les scientifiques essaient de créer des objets ou d'inventer des produits à l'aide des outils à la satisfaction des besoins de la société comme les téléphones mobiles moyen de communication, l'homme trouve l'utilité de l'internet à la consultation des informations, et même l'utilisation des flash pour stocker des données.

Le problème étant fondé sur l'hypothèse de trouver un cout minimal à la construction pour satisfaire la masse tout en minimisant le délai de la construction (construction de bâtiments, ponts,...)

I. Algorithme de Edsger Dijkstra

I.1. Présentation

Edsger Dijkstra était un mathématicien hollandais né en 1930, il fut d'abord des études en physiques théoriques avant de se pencher sur les premiers problèmes reliés à l'informatique.

Il fut l'un des premiers à se pencher sur le concept de sémaphore en 1962, concept qui est maintenant bien intégré dans les langages modernes pour la gestion et la synchronisation des processus. L'algorithme de Dijkstra est pratique pour résoudre les problèmes de plus court chemin dans les graphes.

I.2. Algorithme de Dijkstra

Numérotons les sommets du graphe de **1** à **n**. Cet algorithme calcule le plus court chemin du sommet 1 à tout le sommet du graphe (il donnera donc la première ligne de la matrice de cout minimum).

On construit un vecteur $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$

Ayant n composantes tels que $\pi(i)$ soit égal à la longueur du plus court chemin allant de 1 au sommet i. On initialise ce vecteur à $(C_{1,i})$ c'est-à-dire à la première ligne de la matrice des coûts du graphe. On considère ensuite deux ensembles de sommets, S est initialisé à {1} et \bar{S} son complémentaire dans X.

A chaque pas de l'algorithme, on ajoute à S des sommets jusqu'à ce que $S = X$ de telle sorte que le vecteur π donne, à chaque étape, le coût minimal des chemins de 1 aux sommets de S.

Description de l'algorithme

Initialisations

$$\pi = (C_{1,i}) \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S = \{1\}; \bar{S} = \{2, 3, \dots, n\}$$

Itérations Tant que $\bar{S} \neq \emptyset$

Choisir i dans \bar{S} tel que $\pi(i)$ est minimum

Retirer i de \bar{S} et l'ajouter à S

Pour chaque successeur j de i dans S

$$\pi(j) = \min(\pi(j), \pi(i) + d(i,j))$$

I.3. Application dans le programme du vol

I.3.1. Problème du vol sans escale

Un pays est constitué par 6 villes différentes, la matrice suivante donne en heurs les durées des vols entre les 6 villes (v_1, v_2, \dots, v_6) .

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le terme (i, j) de cette matrice est égal à ∞ lorsque le vol au départ de la ville v_i à la destination de v_j n'existe pas.

On peut alors se demander un itinéraire à temps minimum de v_1 à v_6 . Pour déterminer cet itinéraire, on procède à l'algorithme de Dijkstra.

Initialisation

$$S = \{1\}; \bar{S} = \{2, 3, 4, 5, 6\}; \pi = (0, 3, \infty, 5, \infty, \infty)$$

1^{ère} itération: $i = 2$

$$S = \{1, 2\}; \bar{S} = \{3, 4, 5, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, \infty)$$

2^{ème} itération: $i = 4$

$$S = \{1, 2, 4\}; \bar{S} = \{3, 5, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

3^{ème} itération: $i = 5$,

$$S = \{1, 2, 4, 5\}; \bar{S} = \{3, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

4^{ème} itération: $i = 3$

$$S = \{1, 2, 4, 5, 3\}; \bar{S} = \{6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

5^{ème} itération: $i = 6$,

$$S = \{1, 2, 4, 5, 3, 6\}; \bar{S} = \emptyset, \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

L'itinéraire le plus rapide nécessite donc 9 heures pour aller de la ville v_1 à la ville v_6 . L'itinéraire v_1, v_4, v_6 est un itinéraire minimum.

I.3.2. Problème du vol avec escale

Dans le programme de vol, il peut y avoir des escales de la ville de départ à la ville d'arrivée. Dans notre cas s'il y a une escale obligatoire respectivement (2, 3, 1, 1, 4, 5) heures aux villes (v_1, v_2, \dots, v_6). La détermination de l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 est donné par l'algorithme de Dijkstra, pour déterminer la valeur d'un chemin minimale de v_1 à v_6 . On applique le même algorithme à la nouvelle matrice des durées, obtenue en ajoutant au vol de v_i à v_j la durée de l'escale en v_j , c'est à dire au graphe de matrice des couts :

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 6 & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & \infty & 8 & 3 \\ 8 & 5 & \infty & 0 & 8 & 4 \\ \infty & 7 & 5 & 6 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve à nouveau v_1, v_4, v_6 comme itinéraire minimale de durée 10 heures. La plupart des moyens de communication qui soient aérienne, routière ou dans la mer recourt à la procédure de Dijkstra dans leur déplacement. Il joue un rôle important dans les réseaux de transport.

I.4. Problème de sécurité :

On rencontre fréquemment l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra dans le système de surveillance d'une entreprise possédant une structure graphique donnée. Etant donné le graphe des parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante suivante :

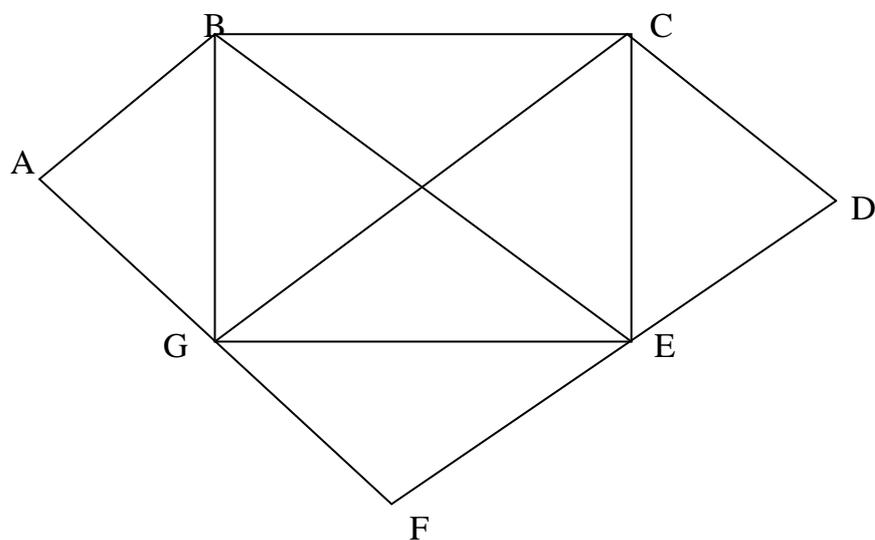


Figure 17: Plan d'une Entreprise

Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ces temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont donnés par :

AB: 16 minutes	EF: 8 minutes	BE: 12 minutes
BG: 8 minutes	BC: 8 minutes	CG: 10 minutes
DE: 2 minutes	CE: 4 minutes	FG: 8 minutes
CD: 7 minutes	EG: 15 minutes	AG: 12 minutes

L'agent de sécurité peut se demander s'il est possible de passer une fois et une seule par tous les chemins de l'usine.

Puisque seuls les sommets E et G sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne ; donc il est possible que l'agent passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est E G C B E C D E F G B A

G. Mais il est impossible que l'agent de sécurité revienne à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

Tableau 3: Recherche du temps minimum de parcours de A vers D

A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	0+16 = 16(A)	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	0+12 = 12 (A)	G (12)
+ ∞	12+8 = 20 (G)	12 +10 =22 (G)	+ ∞	12+15 =27 (G)	12+8 =20 (G)	+ ∞	C (22)
+ ∞			22+7 =29 (C)	20+8 = 28 (F) 22+4=26(c)			E = (26)
+ ∞			26 + 2 = 28 (E)				D (28)

⇒ On trouve pour chemin minimum le chemin A G C E D, de poids 28

I.5. Problème des ponts de Königsberg

La ville de Königsberg en Prusse (maintenant Kaliningrad) comprenant 4 quartiers séparés par les bras de prégel. Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible en partant d'un quartier quelconque de la ville de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ

Le plan de la ville peut se modéliser à l'aide du multi graphe ci-dessous, les quartiers sont les 4 sommets, les 7 ponts par les arêtes

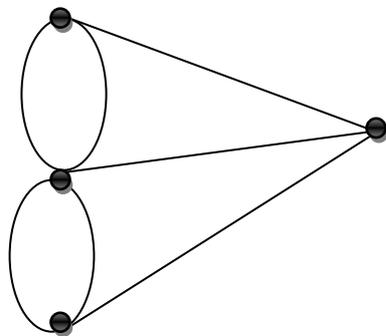


Figure 18: Les Ponts de Königsberg

La question posée devient alors ce graphe est il eulérien ?

Le degré de ces sommets sont tout impair, Le théorème d'Euler répond immédiatement de façon négative aux habitants de Königsberg.

II. Algorithme de FORD

II.1. Présentation

L'algorithme de FORD est utilisable dans la recherche de la valeur d'un chemin minimal dans un graphe valué dont l'algorithme est constitué par 4 étapes.

1-Numéroter les sommets du graphe dans un ordre quelconque, en observant toutes fois que le sommet de départ doit être marqué x_1 et celui d'arrivé x_n

2-Affecter provisoirement à tout sommet x_i ($i \neq 1$) une valeur $\lambda_i = +\infty$ (un très grand nombre M) et poser $\lambda_1 = 0$;

3-Pour tout sommet x_j , tel que $\lambda_j - \lambda_i > v(x_i, x_j)$,
 $V(x_i, x_j)$ représentant la valeur de l'arc (x_i, x_j) , remplacer λ_j par $\lambda_i + v(x_i, x_j)$

4-S'arrêter lorsque aucun λ_i ne peut plus être modifié.

Toutefois, si à un moment donné, on a $i > j$, c'est dire s'il existe un arc dont l'indice de l'extrémité terminale est inférieur à celui de l'extrémité initiale, il faut recommencer une partie des opérations en posant $i = j$, puis faisant ensuite $j = 2$.

A la fin de l'algorithme, λ_i donné, pour x_i , la valeur du chemin minimal entre les sommets x_1 et x_i . Si certains λ_i ont toujours la marque M, cela signifie qu'il n'existe pas de chemin entre x_1 et ces sommets.

Pour trouver le chemin de valeur minimale, il suffit de remonter dans le graphe, à partir de x_n , en cherchant au fur et à mesure, le ou les prédécesseurs du sommet x_p tels que $\lambda_p - \lambda_{p-1} = V(x_{p-1}, x_p)$.

On finira par trouver x_1 et le (s) chemin (s) de valeur minimale de x_1 à x_n .

II.2. Application dans le problème de circulation

Dans une ville constituée par 16 localités un voyageur du commerce veut aller de la localité 1 à la localité 16 avec un minimum de coût de déplacement. On représente le plan de la ville par un graphe orienté dont les localités sont représentées par des sommets x_i où i varie de 1 à 16, le coût de déplacement entre deux sommets est représenté par un arc valué

Plan de la ville

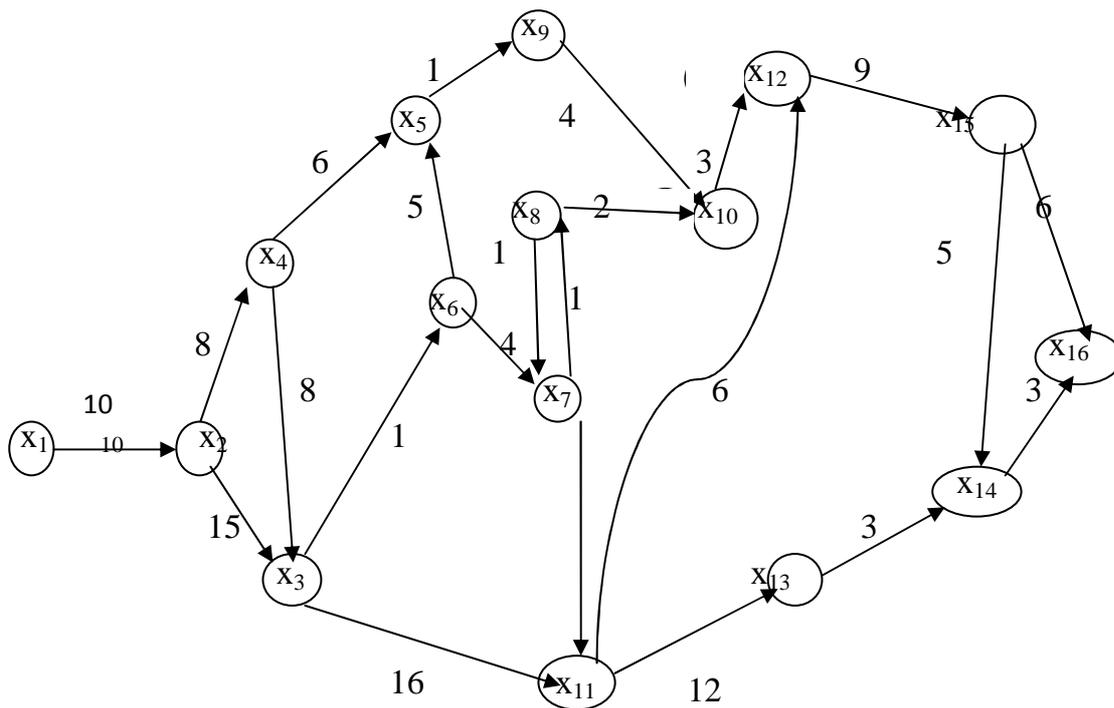


Figure 19: Plan d'une ville



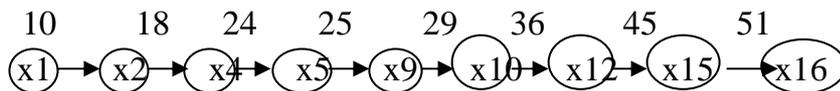
Tableau 4: Recherche du chemin de valeur minimale de X1 à X16

i	j	$\lambda_j - \lambda_i$	$v(x_j - x_i)$	λ_j
1	2	$M-0 = M$	10	$\lambda_2 = 10$
2	3	$M-10 = M$	15	$\lambda_3 = 25$
	4	$M-10 = M$	8	$\lambda_4 = 18$

i	j	$\lambda_j - \lambda_i$	$v(x_j - x_i)$	λ_j
7	8	$28-29=1$	1	-
	11	$38-29=9$	8	$\lambda_{11}=37$
8	7	$29-28=1$	1	-

3	6	M-25=M	1	$\lambda_6 = 26$		10	33-28=5	2	$\lambda_{10}=30$
	11	M-25=M	16	$\lambda_{11}=41$	9	8	28-25=3	3	
4	3	25-18 = 7	8	-		10	30-25=5	4	$\lambda_{10}=29$
	5	M-18=M	6	$\lambda_5 = 24$	10	12	M-29=M	7	$\lambda_{12}=36$
5	9	M-24=M	1	$\lambda_9 = 25$	11	12	36-37=-1	6	
6	5	24-26=-2	5	-		13	M_37=M	12	$\lambda_{13}=49$
	7	M-26=M	4	$\lambda_7 = 30$	12	15	M-36=M	9	$\lambda_{15}=45$
7	8	M-30=M	1	$\lambda_8 = 31$	13	14	M-49=M	3	$\lambda_{14}=52$
	11	41-30=11	8	$\lambda_{11}=38$	14	16	M-52=M	3	$\lambda_{16}=55$
8	7	30-31=-1	1	-	15	14	52-45=7	5	$\lambda_{14}=50$
	10	M-31=M	2	$\lambda_{10}=33$	14	16	55-50=5	3	$\lambda_{16}=53$
9	8	31-25=6	3	$\lambda_8 = 28$	15	14	50-45=5	5	-
8	7	30-28=2	1	$\lambda_7 = 29$		16	53-45=8	6	$\lambda_{16}=51$

Résultat : le chemin de valeur minimale (valeur du chemin de x_1 à $x_{16} = 51$) :



III. Algorithme de DANTZIG

Algorithme de DANTZIG est applicable dans la recherche de chemin de valeur minimale ; l'un des préoccupations du problème des plus courts chemins.

III.1. Description

On numérote d'abord les sommets du graphe de x_1 à x_n où x_1 est le sommet origine et x_n le sommet final entre lesquels on a besoin de connaître le(s) chemin(s) de valeur minimale.

- 1- On pose $\lambda_1 = 0$ et $E_1 = \{x_1\}$;
- 2- A toute étape k ($k \geq 1$) du problème, on considère l'ensemble E_k des k sommets marqués (c'est à dire, dont les λ_i sont déjà déterminés) et, à tout sommet $x_i \in E_k$ on associe le sommet $x_i^* \notin E_k$, tel que $V(x_i, x_i^*)$ soit minimal ;
- 3- On détermine un sommet $x_p \in E_k$, tel que :

$$\lambda_p + v(x_p, x_p^*) = \min [\lambda_i + V(x_i, x_i^*)]$$
- 4- On pose $E_{k+1} = E_k \cup \{x_p^*\} = E_k \cup \{x_q\}$

$$\text{Si } x_p^* = x_q \text{ et } q = p+v(x_p, x_q)$$

Puis l'on revient à 2- jusqu'à ce qu'on ait atteint x_n (si l'on veut seulement le chemin minimal entre x_1 et x_n) ou lorsque $E_k = S$ (Si l'on désire connaître tous les chemins minimaux de x_1 à x_i , $i = 1$).

III.2. Application de l'algorithme dans le problème de circulation

On applique l'algorithme de DANTZIG dans le problème du voyageur du commerce donné par le graphe précédemment où

$$X = \{x_i \mid i = \{1, 2, \dots, 16\} \text{ les sommets.}$$

Recherche du chemin de valeur minimale de x_1 à x_{16}

C.2 Application de l'algorithme

$$\mathbf{k=1} \quad v(x_1, x_2) \quad \lambda_2 = \lambda_1 + v(x_1, x_2) = 10$$

$$E_2 = \{x_1, x_2\}$$

$$\mathbf{k=2} \quad v(x_2, x_4) \quad \lambda_4 = \lambda_2 + v(x_2, x_4) = 18$$

$$E_3 = \{x_1, x_2, x_4\}$$

$$\mathbf{k=3} \quad v(x_2, x_3) \quad \lambda_3 = \lambda_2 + v(x_2, x_3) = 25$$

$$v(x_4, x_5) \quad \lambda_5 = \lambda_4 + v(x_4, x_5) = 24$$

$$E_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

$$\mathbf{k=4} \quad v(x_2, x_3) \quad \lambda_3 = \lambda_2 + v(x_2, x_3) = 25$$

$$v(x_4, x_3) \quad \lambda_3 = \lambda_4 + v(x_4, x_3) = 26$$

$$v(x_5, x_9) \quad \lambda_9 = \lambda_5 + v(x_5, x_9) = 25$$

$$E_5 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3\}$$

$$\mathbf{k=5} \quad v(x_3, x_6) \quad \lambda_6 = \lambda_3 + v(x_3, x_6) = 26$$

$$v(x_5, x_9) \quad \lambda_9 = \lambda_5 + v(x_5, x_9) = 25$$

$$E_6 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9\}$$

$$\mathbf{k=6} \quad v(x_3, x_6) \quad \lambda_6 = \lambda_3 + v(x_3, x_6) = 26$$

$$v(x_9, x_8) \quad \lambda_8 = \lambda_9 + v(x_9, x_8) = 28$$

$$E_7 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6\}$$

$$\mathbf{k=7} \quad v(x_3, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_3 + v(x_3, x_{11}) = 41$$

$$v(x_6, x_7) \quad \lambda_7 = \lambda_6 + v(x_6, x_7) = 30$$

$$v(x_9, x_8) \quad \lambda_8 = \lambda_9 + v(x_9, x_8) = 28$$

$$E_8 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8\}$$

$$\mathbf{k=8} \quad v(x_3, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_3 + v(x_3, x_{11}) = 41$$

$$v(x_6, x_7) \quad \lambda_7 = \lambda_6 + v(x_6, x_7) = 30$$

$$\mathbf{k=9} \quad v(x_3, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_3 + v(x_3, x_{11}) = 41$$

$$v(x_7, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_7 + v(x_7, x_{11}) = 37$$

$$v(x_8, x_{10}) \quad \lambda_{10} = \lambda_8 + v(x_8, x_{10}) = 30$$

$$v(x_9, x_{10}) \quad \lambda_{10} = \lambda_9 + v(x_9, x_{10}) = 29$$

$$E_{10} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}\}$$

$$\mathbf{k=10} \quad v(x_3, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_3 + v(x_3, x_{11}) = 41$$

$$v(x_7, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_7 + v(x_7, x_{11}) = 37$$

$$v(x_{10}, x_{12}) \quad \lambda_{12} = \lambda_{10} + v(x_{10}, x_{12}) = 36$$

$$E_{11} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_{12}\}$$

$$\mathbf{k=11} \quad v(x_3, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_3 + v(x_3, x_{11}) = 41$$

$$v(x_7, x_{11}) \quad \lambda_{11} = \lambda_7 + v(x_7, x_{11}) = 37$$

$$v(x_{12}, x_{15}) \quad \lambda_{15} = \lambda_{12} + v(x_{12}, x_{15}) = 45$$

$$E_{12} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_{12}, x_{11}\}$$

$$\mathbf{k=12} \quad v(x_{11}, x_{13}) \quad \lambda_{13} = \lambda_{11} + v(x_{11}, x_{13}) = 49$$

$$v(x_{12}, x_{15}) \quad \lambda_{15} = \lambda_{12} + v(x_{12}, x_{15}) = 45$$

$$E_{13} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_{12}, x_{11}, x_{13}\}$$

$$\mathbf{k=13} \quad v(x_{11}, x_{13}) \quad \lambda_{13} = \lambda_{11} + v(x_{11}, x_{13}) = 49$$

$$v(x_{15}, x_{14}) \quad \lambda_{14} = \lambda_{15} + v(x_{15}, x_{14}) = 50$$

$$E_{14} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_{12}, x_{11}, x_{13}, x_{14}\}$$

$$\mathbf{k=14} \quad v(x_{13}, x_{14}) \quad \lambda_{14} = \lambda_{13} + v(x_{13}, x_{14}) = 52$$

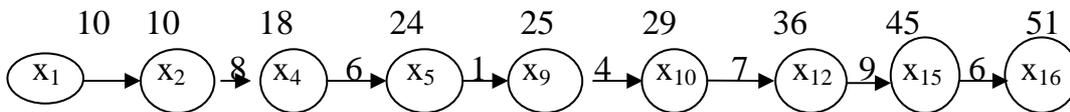
$$v(x_{15}, x_{14}) \quad \lambda_{14} = \lambda_{15} + v(x_{15}, x_{14}) = 50$$

$$E_{15} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_9, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_{12}, x_{11}, x_{13}, x_{14}\}$$

$$\mathbf{k=15} \quad v(x_{14}, x_{16}) \quad \lambda_{16} = \lambda_{14} + v(x_{14}, x_{16}) = 53$$

$$v(x_{15}, x_{16}) \quad \lambda_{16} = \lambda_{15} + v(x_{15}, x_{16}) = 51$$

Après l'obtention de la valeur minimale, la recherche du chemin minimal utilise le même principe que celle dans l'algorithme de FORD et on trouve le chemin minimal de x_1 à x_{16} :



Il existe plusieurs méthodes et autant d'algorithmes pour trouver le chemin de valeur minimale dans un graphe donné, de nombreux problèmes du plus court chemin sont rencontrés dans divers domaines : Comme le transport, la communication, etc. Elle permet aussi de minimiser le coût et de trouver un délai minimal de la construction.

Chapitre 2 : Problème de coloriage

Le problème de la minimisation est nombreux, non seulement en terme de coût et du temps, mais trouve aussi son importance dans la modélisation d'une grande variété de problèmes incluant le problème de coloriage des sommets, des arcs ou les arêtes d'un graphe. L'objectif étant de trouver le nombre de couleur minimale d'un graphe en étudiant les sommets et les arcs (arêtes) à l'aide du nombre chromatique $\alpha(G)$ où $\chi(G)$ désigne le nombre de stabilité de G .

Remarques

- a) $\alpha(C_{2n}) = 2$
- b) $\alpha(K_n) = n$

I. Problème des provinces

Etant donné un pays constitué par ces provinces, le service topographique veut colorier les provinces sur la carte de telle sorte que deux provinces adjacentes ne soient pas de la même couleur

Notons $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ les sommets indiquant les provinces donné par le graphe suivant :

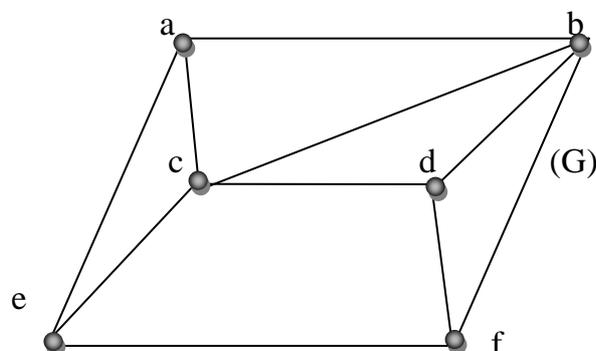


Figure 20: Plan des provinces

Déterminons le nombre chromatique du graphe (G), considérons la partition de l'ensemble des sommets de G en sous ensembles stables,

$$S_1 = \{a, d\}$$

$$S_2 = \{b, e\}$$

$$S_3 = \{c, f\}$$

On a donc $\alpha(G) \leq 3$. D'autre part, G contient un cycle d'ordre 3, donc $\alpha(G) \geq 3$. Finalement le nombre chromatique de G est donc 3. La partition précédente nous donne une 3 coloration

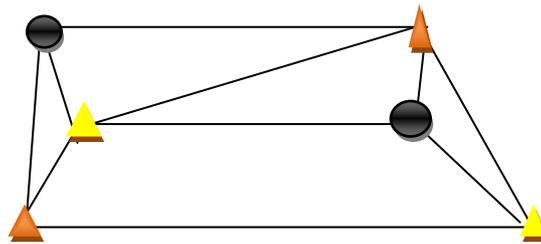


Figure 21: Coloration des provinces

II. Problème d'une carte

Dans l'archive des données de services spéciales de la topographie Européens (S.S.T.E), la carte de l'Europe est constitué par 7 pays qui sont : Belgique (B), France(F), Italie (I), Pays Bas (NL), Luxembourg (L), Allemagne (D), Suisse (CH). Le projet de la SSTE étant de colorier avec un minimum de couleurs la carte d sorte que deux pays frontaliers ne soient pas affectés de la même couleur.

Le service a décidé de représenter la situation par un graphe d'ordre 7 dans le quel l'existence d'une frontière entre deux pays se traduit par une arête :

Graphe de la carte

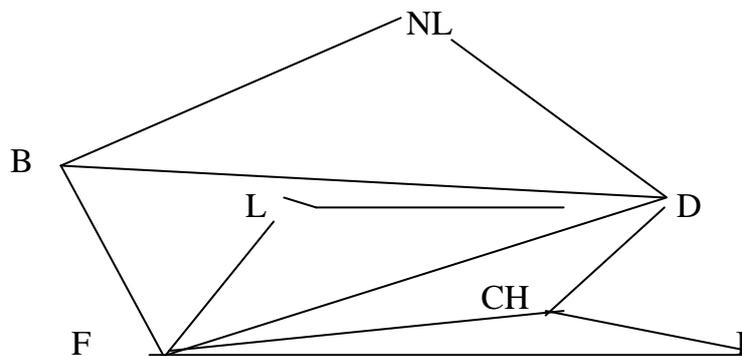


Figure 22: Les Pays d'Europe

Comme le sommet de plus fort degré est F ou D, de degré 5. Le sous graphe complet d'ordre maximal est d'ordre 3, par exemple B, L, F, D. Le nombre chromatique $\alpha(G)$ vérifie donc $4 \leq \alpha(G) \leq 5+1$

C'est-à-dire

$$4 \leq \alpha(G) \leq 6$$

III. Algorithme de coloriage des sommets d'un graphe simple dite algorithme de Welch et Powell

III.1. Description

Voici un algorithme permettant de colorier un graphe simple. Nommons les sommets du graphe en ordre de degré décroissant : x_1, x_2, \dots, x_n , avec $d(x_i) \geq d(x_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$

Attribuons la couleur C1 à x_1 et au sommet suivant de la liste qui n'est pas adjacent à x_1 et ainsi de suite avec les sommets de la liste qui ne sont pas adjacents aux sommets déjà coloriés.

Ensuite, on attribue la couleur C2 au premier sommet non colorié ainsi qu'aux sommets suivants qui ne sont pas adjacents aux sommets coloriés par la couleur C2. On continue ce processus jusqu'à épuisement des sommets de la liste.

Notons bien que le nombre de couleurs utilisées n'est pas nécessairement minimal.

III.2. Application de l'algorithme de coloration de Welch et Powell dans le problème d'une carte

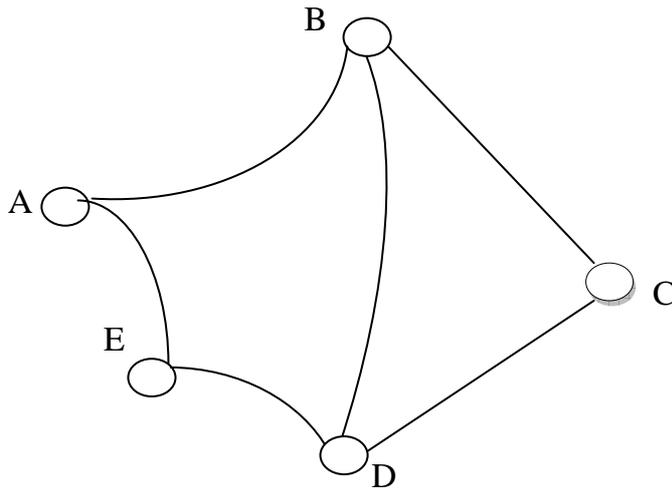
Tableau 5: Coloration de la carte d'Europe selon Welch et Powell

Degré	Sommet	Couleur
5	D	C1
5	F	C2
4	B	C3
3	CH	C4
3	L	C3
2	I	C1
2	NL	C2

On peut colorier la carte par 4 couleurs différentes

IV. Problème d'un Parc

Un des projets du ministère de l'environnement étant l'aménagement des parcs. Dans un parc, le ministère décide de disposer 5 bancs reliés entre eux par des allées dans le parc défini par le graphe suivant



Les sommets A, B, C, D, E du graphe représente les bancs et les arêtes celles des allées, le programme consiste de peindre les bancs avec un nombre minimal de couleurs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.

Avec la notion habituelle où $\alpha(G)$ désigne le nombre chromatique du graphe.

Puisque le sous graphe BCD est complet on aura $\alpha(G) \geq 3$ et puisque le degré maximum de G est égal à 3 pour les sommets B et D, on aura $\alpha(G) \leq 3+1$, c'est à dire au final, $3 \leq \alpha(G) \leq 4$

On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell.

Tableau 6: Coloration des bancs du parc selon Welch et Powell

Sommet	Degré	Couleur
B	3	C1
D	3	C2
A	2	C2
C	2	C3
E	2	C1

Ainsi on peut colorier les sommets (bancs) par 3 couleurs différentes

Donc $\alpha(G) = 3$

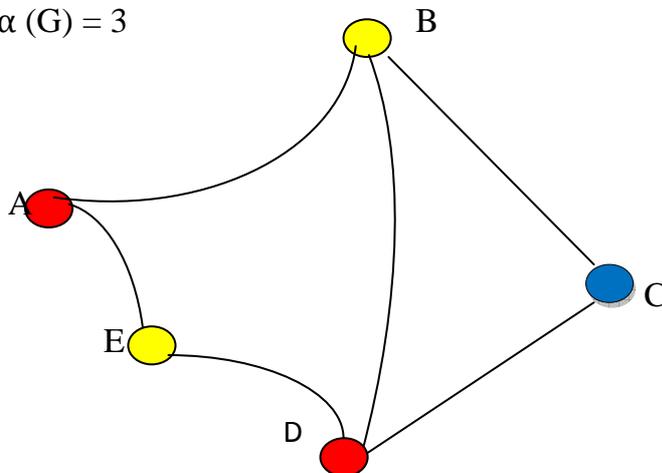


Figure 23: Coloration des Bancs

De plus le nombre des sommets de degré impair étant exactement égal à 2 il existe donc une chaîne eulérienne qui donne la possibilité que les visiteurs peuvent se promener une seule fois dans toutes allées du parc.

V. Problème d'emploi du temps.

Un des problèmes majeurs dans l'administration est le problème d'emploi du temps autant sur l'organisation des horaires des examens, Dans les études supérieures.

On veut planifier 7 épreuves, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivants ont des étudiants communs 1 et 2 ; 1 et 3 ; 1 et 4 ; 1 et 7 ; 2 et 3 ; 2 et 4 ; 2 et 5 ; 5 et 7 ; 3 et 4 ; 3 et 6 ; 3 et 7 ; 4 et 5 ; 4 et 6 ; 5 et 6 ; 5 et 7 et 6 et 7 ; 2 et 7.

Le service des examens peut se demander comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Le problème de coloriage des sommets résoud cette situation recourant à la modélisation d'un graphe G ou les sommets désignent les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs.

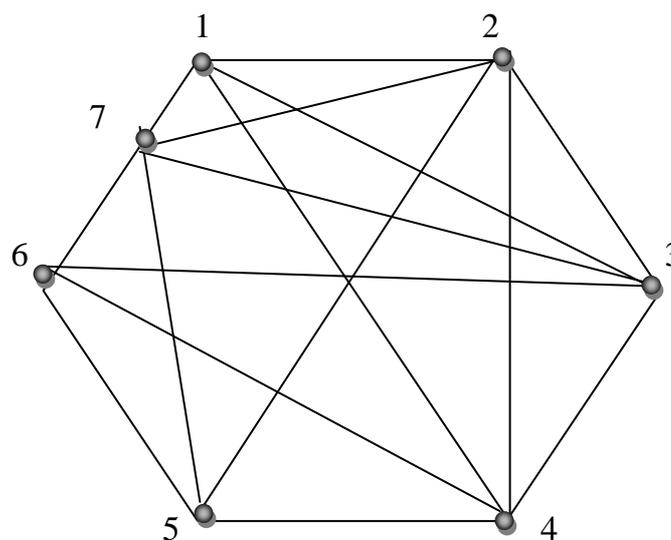


Figure 24: Graphe des Epreuves d'Examen

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une k colorations de G, avec $k = \alpha(G)$

Comme G possède un sous graphe complet d'ordre 4 (des sommets 1, 2, 3, 4) donc $\alpha(G) \geq 4$

Déterminons une partition de G en sous ensembles stables

$$S_1 = \{1, 6\}$$

$$S_2 = \{2\}$$

$$S_3 = \{3, 5\}$$

$$S4 = \{4, 7\}$$

D'où $\alpha(G) \leq 4$ et finalement $\alpha(G) = 4$

Les examens peuvent être répartis en 4 périodes de la manière suivante

*1^{ère} période, épreuves des cours 1 et 6

*2^{ème} période, épreuve du cours 2

*3^{ème} période, épreuve des cours 3 et 5

*4^{ème} période, épreuve des cours 4 et 7.

Parfois l'organisation de l'emploi du temps demeure un problème majeur dans l'administration scolaire depuis la préscolaire à enseignement supérieure.

Le coloriage des sommets offre un atout bénéfique face à ces difficultés, non seulement sur l'enseignement, il est aussi utilisable dans des nombreuses services des opérateurs économiques, politiques et commerciale dans la bonne gestion de la planification.

VI. Problème d'aquariophilie :

Comme tout autre secteur d'exploitation, la pisciculture détient un rôle prépondérant qui apporte sa contribution dans le développement économique du pays.

Dans la pratique, on rencontre le problème d'aquariophilie qui se traduit par certains poissons ne pouvant cohabiter dans un même aquarium pour des raisons bénéfiques à l'exploitation.

Le programme est de répartir les poissons dans minimum d'aquarium. Etant donné 8 poissons A, B, C, D, E, F, G et H. La planification est présentée par le tableau suivant ou une croix signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium

Tableau 7: Présentation d'un système d'aquarium

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Cette situation peut être représentée par un graphe G dont les sommets sont les huit poissons tels que deux de ces sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter. Le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique du graphe

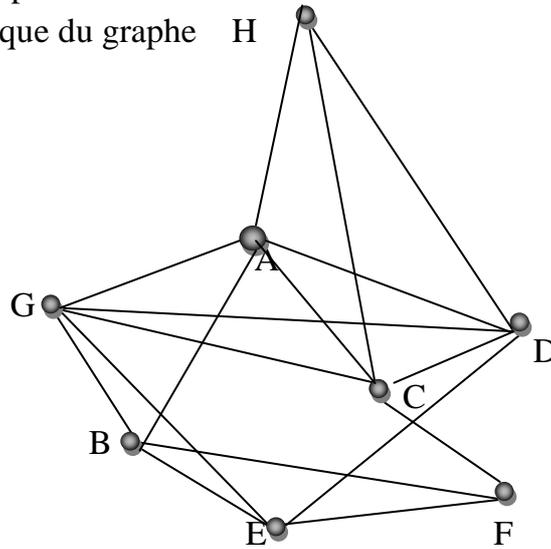


Figure 25: Système d'aquarium

G Contient un sous graphe complet d'ordre 4 (des sommets A, C, D, H), donc $\alpha(G) \geq 4$

Déterminons une partition des sommets de G en sous ensembles stables

$$S_1 = \{A, E\}$$

$$S_2 = \{B, C\}$$

$$S_3 = \{D, F, G\}$$

$$S_4 = \{H\}$$

Donc $\alpha(G) \leq 4$, et on en déduit que $\alpha(G) = 4$

Il faut au minimum 4 aquariums pour effectuer ce programme

Compte tenu de ce chapitre le coloriage des sommets d'un graphe facilite à la résolution des nombreux problèmes dans diverses domaines que la plupart d'entre eux sont rencontrés dans la vie quotidienne, il offre une opportunité pour l'humanité dans ces travaux.

CHAPITRE 3 : CONSTRUCTION D'UN ARBRE DE RECOUVREMENT

Beaucoup des problèmes peuvent être modélisés par des graphes valués ou non, en particulier la recherche de cheminement dans les graphes.

La recherche d'un arbre de recouvrement est très fréquente dans les réseaux routiers. Son application peut être perçue dans le problème de canalisation, dans les cataclysmes naturels ou du phénomène climatique. Sa recherche peut être trouvée de façon algorithmique.

I. Algorithme de construction d'un arbre de recouvrement

I.1 Description

On choisit un sommet arbitraire du graphe, puis on construit à partir de ce sommet une chaîne simple en ajoutant des arêtes de G tant que c'est possible.

Si la chaîne ainsi construite contient tous les sommets du graphe, la chaîne est un arbre de recouvrement. Sinon, on retourne à l'avant dernier sommet de la chaîne et à partir de celui-ci, et si c'est possible, on construit une nouvelle chaîne simple aussi longue que possible et ne contenant aucun sommet du premier chemin construit. Si ce n'est pas possible, il faut remonter à l'antépénultième sommet et recommencer. Si le graphe est connexe, on peut répéter ce processus jusqu'à épuisement des sommets pour obtenir un arbre de recouvrement.

I.2 Application de l'algorithme

Appliquons l'algorithme précédent pour trouver un arbre de recouvrement du graphe connexe suivant :

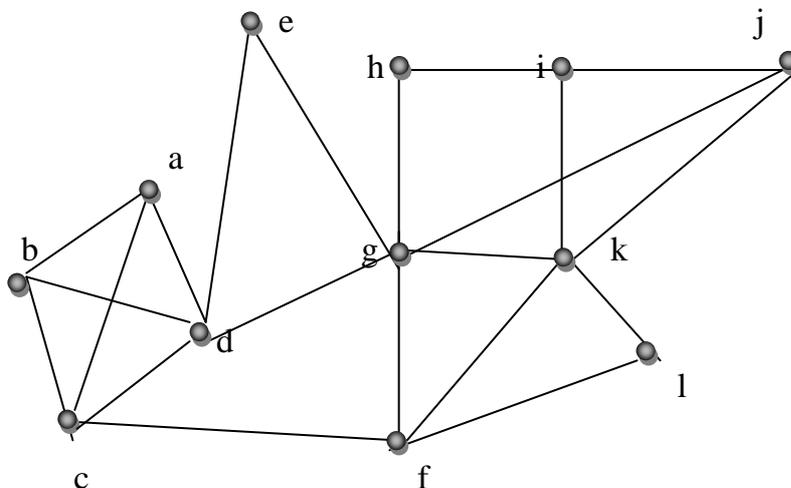


Figure 26: Plan des routes d'une ville

- Partons par exemple du sommet a
- 1^{ère} étape : on construit la chaîne simple : **a, b, c, d, g, h, i, j, k, l, f**
- 2^{ème} étape : on remonte jusqu'au sommet **g** pour former la chaîne **g, e**
- Un arbre de recouvrement est alors :

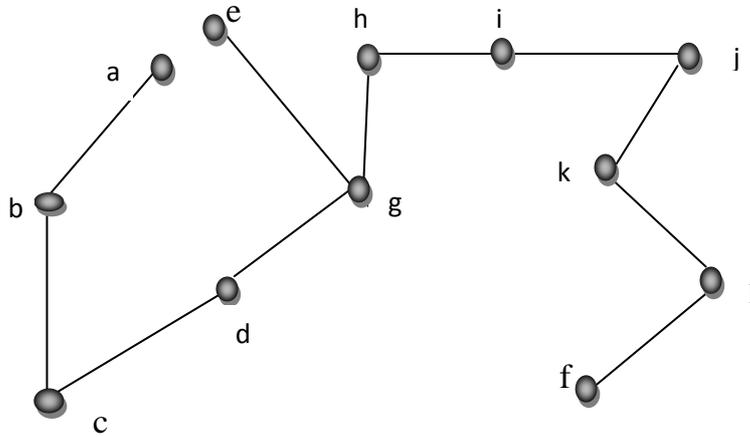
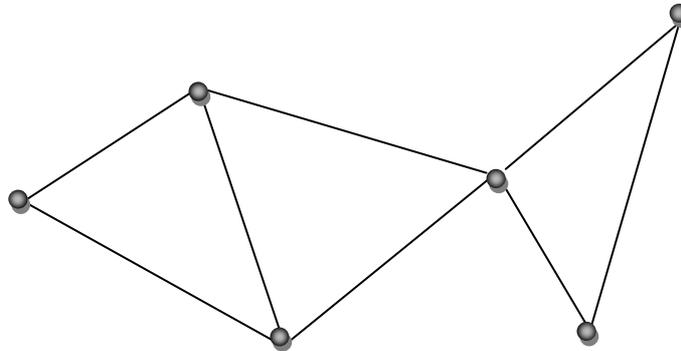


Figure 27: Construction d'un arbre de recouvrement

I.3. Problème routier :

Dans certaine période de l'année ; il y a des routes qui sont souvent enneigées en hiver. On considère le réseau routier représenté par le graphe ci-dessous et l'équipement décide de déneiger un nombre minimal de routes de telle sorte que deux villages quelconques du réseau soient toujours reliés par une route déneigée.



Les sommets du graphe désignent les villages et l'arête celle de la route liant deux villages. Le problème consiste à construire un graphe partiel, connexe, comprenant un nombre minimal d'arêtes. Appliquons l'algorithme précédemment et on aura un arbre de recouvrement défini par :

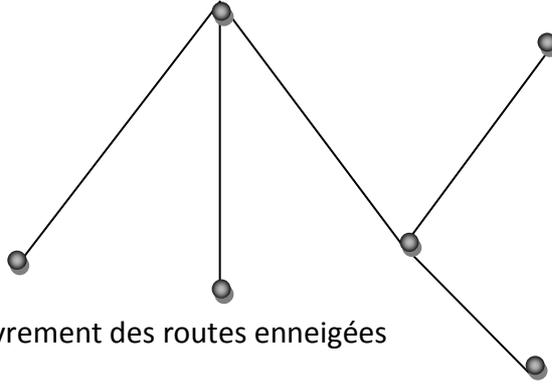


Figure 28: Arbre de recouvrement des routes enneigées

Dans le graphe simple, connexe et valué, la recherche d'un arbre de recouvrement conduit à trouver l'arbre partiel de coût minimum relatif au graphe valué.

La recherche de ce graphe partiel peut être trouvée à l'aide de l'Algorithme de Solin-Calestagne

II. Algorithme de Solin Calestagne

II.1. description

$G = (X, A, \partial)$ est un graphe simple connexe et valué

-(1) $a_1 = \{x_1, y_1\}$ est une arête de coût minimum

On pose $S = \{x_1, y_1\}$ et $T = \{a_1\}$, passer en (2),

-(2) Si $S = X$, alors l'arbre (S, T) est l'arbre cherché sinon, passer en (3).

-(3) On choisit une arête $a = \{x, y\}$ de coût minimum ayant un sommet dans S et l'autre dans le complémentaire de S dans X . On remplace S par $S \cup \{x, y\}$ et T par $T \cup \{a\}$, passer en (2)

II.2. Problème de réseau de Communication

Utilisation de l'algorithme de solin Calestagne pour concevoir un réseau de communication à coût minimal reliant tous les ordinateurs représentés par le graphe suivant :

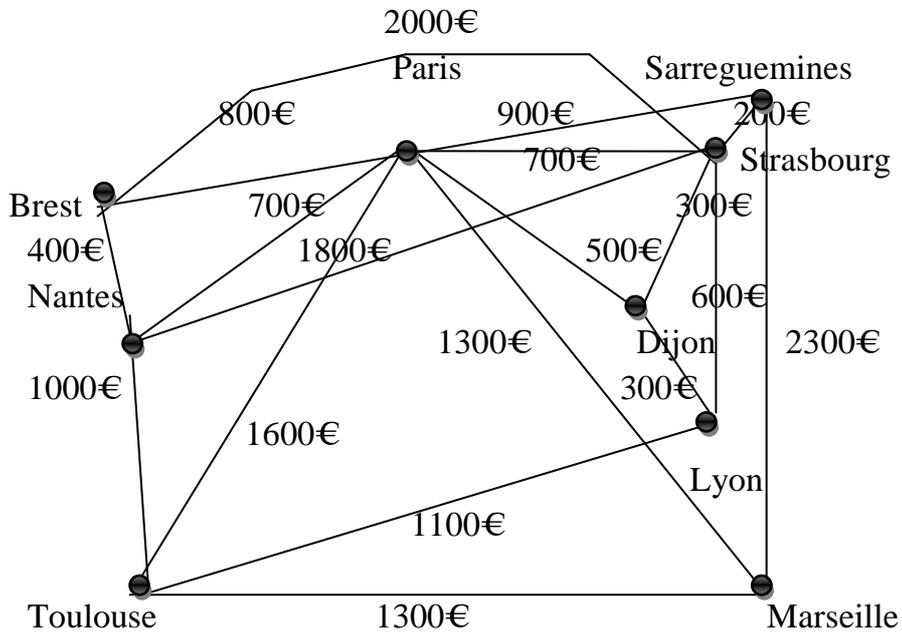
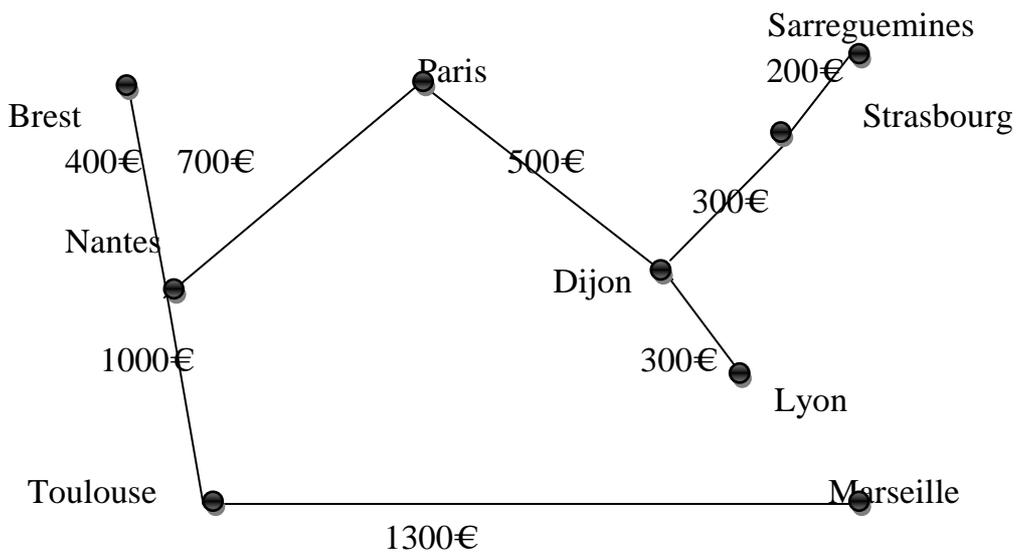


Figure 29: Réseau des communications des ordinateurs

Une solution possible dans la recherche d'un arbre à coût minimal est donnée par le graphe suivant



Le coût minimal vaut à 4700€

Figure 30: Arbre de recouvrement à cout minimal

Chapitre 4: Méthode d'ordonnement des tâches

Un ordonnancement consiste à placer dans un certain ordre chronologique des opérations qui ne sont pas généralement pas indépendantes et qui font intervenir des dépenses des ressources des performances et du temps. Alors il consiste à organiser l'exécution des tâches en vue d'atteindre un objectif fixé. Ces tâches sont soumises à un ensemble des contraintes qui peuvent être classées en trois types :

I. Les contraintes

Les contraintes potentielles :

Ceux sont des contraintes de localisation temporelle dans les quelles se situent la date limite et la date initiale des tâches

- a) Date initiale : la tâche i ne doit pas commencer avant telle date.
- b) Date limite : la tâche i doit être impérativement achevée à telle date.

Les contraintes disjonctives

Elles interdisent la réalisation simultanée de deux tâches utilisant un moyen unique
Dans certains cas, ces contraintes peuvent être ramenées aux types potentiels

Les contraintes cumulatives:

Elles considèrent un certain niveau maximal de disponibilité à un instant donné, et des différents moyens indispensables pour la réalisation d'un projet.

Nous allons voir comment la théorie des graphes peut être efficace à la recherche des solutions de divers problèmes d'ordonnement

Pour cela, on va utiliser la méthode MPM.

II. Méthode MPM (ou Méthode des potentiels METRA ou Méthode potentiels-tâches)

C'est une méthode étudiée en France dès 1957 sous la direction de B.ROY et ayant été appliquée à la construction du paquebot France en 1960. Cette méthode est fondée sur la théorie des graphes. En effet, elle considère un graphe orienté sans circuit $G=(X, \Gamma)$ ou X est la liste des tâches (sommets) et Γ est l'ensemble des contraintes (arcs)

Elle permet :

- d'établir un ordonnancement, dès l'instant qu'aucune contrainte n'est contradictoire avec un autre.
- de déterminer le meilleur temps total nécessaire à la réalisation de l'objectif (la date au plus tôt de la fin du projet et les dates au plus tard de l'exécution de chaque tâche)

III. Application de la méthode MPM dans le problème de commande

Un éditeur veut passer une commande d'ouvrage technique à un écrivain scientifique. Les opérations à accomplir sont définies dans le tableau suivant avec leur durée et la mention des opérations qui doivent précéder chacune d'entre elles

Tableau : Opérations des tâches d'un commande

DESIGNATION DE LA TACHE		DUREE (en jours)	TACHES ANTERIEURES
a	Approbation du plan d'ouvrage	7	
b	Signature du contrat	7	a
c	Remise du manuscrit	150	b
d	Approbation du comité de lecture	30	c
e	Composition du texte	45	d
f	Correction par les correcteurs de l'imprimerie	15	e
g	Clichage et tirage des hors-textes	45	d
h	Exécution des dessins de figures	60	d
i	Révision des dessins par l'auteur	20	h
j	Correction des dessins, clichage des figures	30	i
k	Première correction des épreuves par l'auteur	30	f
l	Exécution des premières corrections par l'imprimerie	15	k
m	Seconde correction des épreuves par l'auteur-Indication de l'emplacement des clichées-Approbation des hors-textes	30	g, j, l
n	Exécution des secondes corrections à l'imprimerie et Mise en page	15	m
o	Tirage du livre	30	n
p	Etablissement de la prière d'insérer des listes d'exemplaires de presse et d'hommage	15	m
q	Pliage	15	o
r	Brochage	15	q
s	Reiure de certains exemplaires	30	q
t	Impression de la prière d'insérer	7	p
u	Envoi des exemplaires de presse	4	r et t
v	Envoi d'hommages	2	s et t
w	Envoi des contingents aux librairies	7	r et s

III.1. Les dates au plus tôt des débuts des tâches

Il est d'usage d'inclure deux fictives D et F désignant le début et l'achèvement du projet. Si on désigne par t_i la date au plus tôt de la tâche i et d_{ij} la durée des tâches i telle que i sont les prédécesseurs de j , la formule pour calculer la date au plus tôt de l'exécution de la tâche j utilise le principe de max-addition. $t_j = \max \{t_i + d_{ij}\}$

Cette méthode consiste à dresser un tableau dans le quel chaque tâche est dotée d'une colonne t_j et des sous colonnes t_i, d_{ij}

Les dates au plus tôt de chaque tâche sont données par le tableau suivant :

Tableau 8: Dates au plus tôt des début des tâches

O	a	7	b	14	c	164	d	194	e	239	f	194	g	194	h
o	D-O	O	a.7	7	b.7	14	C150	164	d.30	194	e.45	164	d.30	164	d.30

254	i	274	j	254	k	284	l	304	m	334	n	349	o	334	p
194	h.60	254	i.20	239	f.15	254	k.30	194	g.45	304	m.30	334	n.15	304	m.30
								274	j.30						
								284	l.15						

379	q	394	r	394	s	349	t	409	u	424	v	424	w	431	F
349	o.30	379	q.15	379	q.15	334	p.15	394	r.15	394	s.30	394	r.15	409	u.4
								349	t.7	349	t.7	394	s.30	424	v.2
												424	w.7	424	w.7

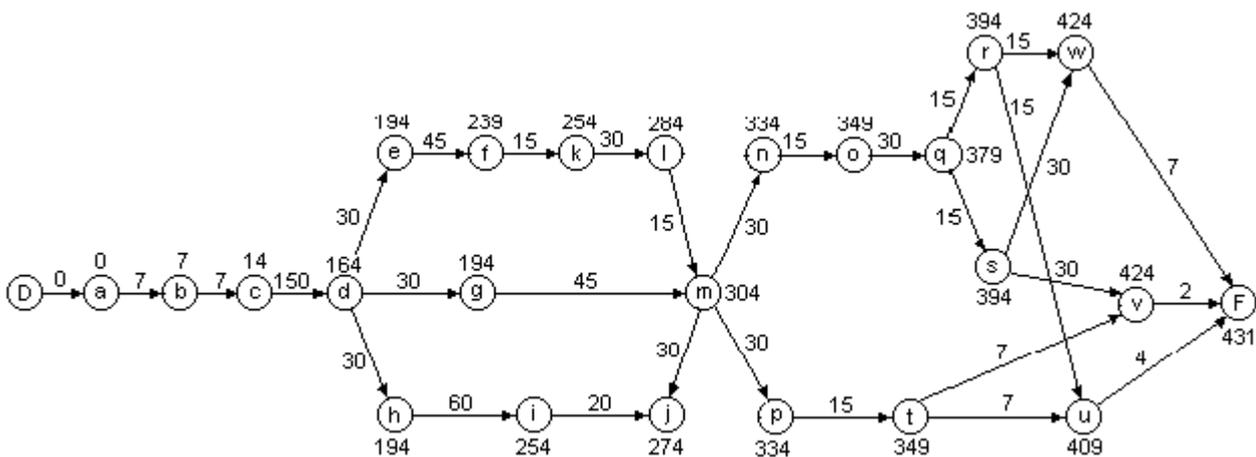


Figure 32: Graphe des dates au plus tôt des débuts des tâches

Résultat : Date au plus tôt de la fin du projet est 431

Chemin critique : D, a, b, c, d, h, i, j, m, n, o, q, s, w, F

C'est le plus long chemin entre D et F.

Remarque : Le retard de l'exécution d'une tâche dans le chemin critique provoque un décalage du temps correspondant à la meilleure date limite de la fin de l'ensemble des tâches.

III.2. Les dates au plus tard des débuts des tâches

Si on désigne par T_k la date au plus tard de la tâche k et d_{jk} la durée de la tâche j telle que k est le successeur de j.

Le calcul de la date au plus tard de l'exécution de la tâche j se fait par la formule

$$T_j = \text{Min} \{ T_k - d_{jk} \}$$

Ce calcul tient compte de la valeur du chemin critique obtenue lors du calcul des dates au plus tôt des débuts des tâches, C'est-à-dire la valeur qui représente la durée minimale de l'exécution du projet doit être considérée comme date au plus tard de la fin du projet

On établit alors le tableau suivant dont le remplissage se fait de la fin vers le début :

Tableau 9: Dates au plus tard des débuts des tâches

O	D	D	a	7	b	14	c	164	d	199	e	244	f	259	g		
o	a.o	7	b.7	14	c.7	164	d.150	199	e.30	244	f.45	259	k.15	304	m.45		
194	4	254	i	274	j	274	j	259	k	289	l	304	m	334	n	349	o
254	i.60	274	i.20	304	m.30	289	l.30	304	m.15	334	m.30	405	p.30	349	o.15	379	9.30
405	p	379	q	409	r	349	s	420	t	427	u	429	v	424	w		
420	t.15	409	r.15	427	u.15	429	p.15	427	u.7	431	F4	431	f.2	431	f.7		
		394	s.15	424	w.15	424	15	429	v.7								

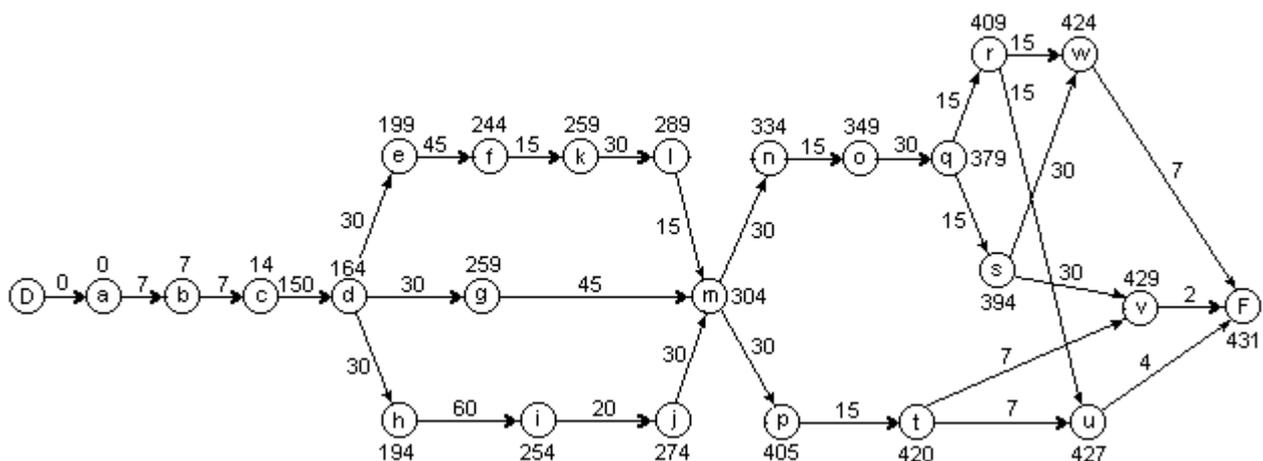


Figure 33: Graphe des dates au plus tard des débuts des tâches

III.3. La marge (intervalle de flottement)

La marge représente le retard admissible sur une opération c'est-à-dire les opérations antérieures ayant commencées à leurs dates au plus tôt et les opérations postérieures pouvant commencer à leurs dates au plus tard. Alors pour chaque tâche i, la marge est calculée : $M = T_i - t_i$

On donne les marges des taches dans le tableau suivant :

Tableau 10: Valeurs des marges

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
0	0	0	0	4	5	65	0	0	0	5	5	0	0	0	71

q	r	s	t	u	v	w	
0	15	0	71	18	5	0	

On observe que la marge est nulle sur le chemin critique.

IV. modification d'un ordonnancement

Supposons que des modifications interviennent dans notre application du problème de commande de telle sorte que :

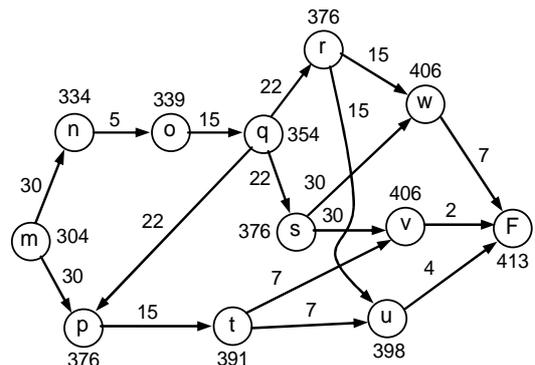
- 1-Le tirage o peut commencer lorsque la mise en page n a été effectuée à $\frac{1}{3}$
- 2-Le pliage q peut commencer avec un décalage d'une quinzaine de jours sur le début du tirage o, mais alors sa durée est augmentée d'une semaine.
- 3-On ne désire demander à l'auteur la prière d'insérer des listes d'exemplaires de presse et d'hommages p que lorsque le pliage q est achevé

Ces nouveaux données créent des modifications des dates au plus tôt et les dates au plus tard des débuts des tâches comme la modification se faite à partir du tirage o
Donc on obtient une nouvelle valeur de la meilleure date limite de l'exécution du projet représenté par les tableaux et les graphes suivant.

IV.1 .Les dates au plus tôt des débuts des taches

334	n	339	o	376	p	354	q	376	r	s	391	t	398	u	
304	m.30	334	n.5	304	m.30	339	o.15	354	q.22	354	q.2	37	p.1	391	t.7
				354	q.22						6	5	376	r.15	

406		413	
w		F	
376	r.15	406	w.7
376	s.30	406	v.2
		398	u.4

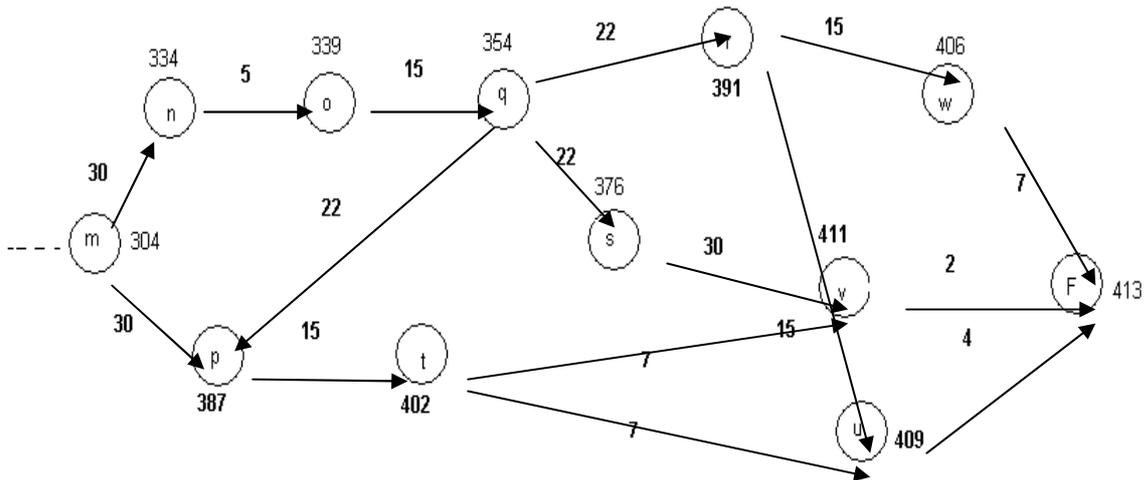


.....l	304	334	339	387					
		m	n	0	p					
.....	334	n.30	339	0.5	354	q.15	402	t.15
	387	p.30						

IV.2. Les dates au plus tard de débuts des tâches

354	q	391	376	402	409	411	406
		r	s	t	u	v	w
387	p.22	409	411	409	413	413	413
391	r.22	406	406	411	F4	F2	F.7
376	s.22						

Graphe de modification



Dans l'exécution de l'ensemble du projet, il y a des cas où les durées des opérations à effectuer sont soumises à des aléas de divers natures (climatique, technique.....).

Principe : Supposons en effet, qu'on puisse évaluer pour chaque tâche i.

- ai : durée minimale de l'opération i
- bi : durée maximale de l'opération i
- mi : durée la plus probable de l'opération i

V. La Méthode PERT (Program Evaluation and Review Task)

Cette méthode a été conçue spécialement afin d'introduire des éléments aléatoires dans la détermination des durées moyennes et des écarts types à prendre en compte lors de l'évaluation des valeurs des chemins traversant le graphe. En se fondant sur la théorie de la limite centrée, les concepteurs de la méthode aient estimés que quelle que soit la loi suivie par chacune des durées, la durée moyenne du chemin (somme des durées correspondant aux arcs constituant le chemin) puisse être considérée comme issue d'une loi normale (la variance est la somme des variances de ces arcs). Afin de faciliter les calculs, on a choisi, comme loi élémentaire pour chacun des arcs, la loi β , dont :

$$t_i = \frac{1}{6} (a_i + 4m_i + b_i) : \text{durée moyenne}$$

$$\delta_i^2 = \left[\frac{1}{6} (b_i - a_i) \right]^2 : \text{variance}$$

Application

Tableau 11: Evaluation des tâches sous la méthode PERT

Tâche i	a_i	m_i	b_i	t_i	δ_i^2
a	1	2	4	2,16	0,25
b	7	9	12	9,16	0,694
c	15	19	21	18,66	1
d	4	5	9	5,5	0,694
e	5	7	7,5	6,75	0,173
f	1	2	4	2,16	0,25

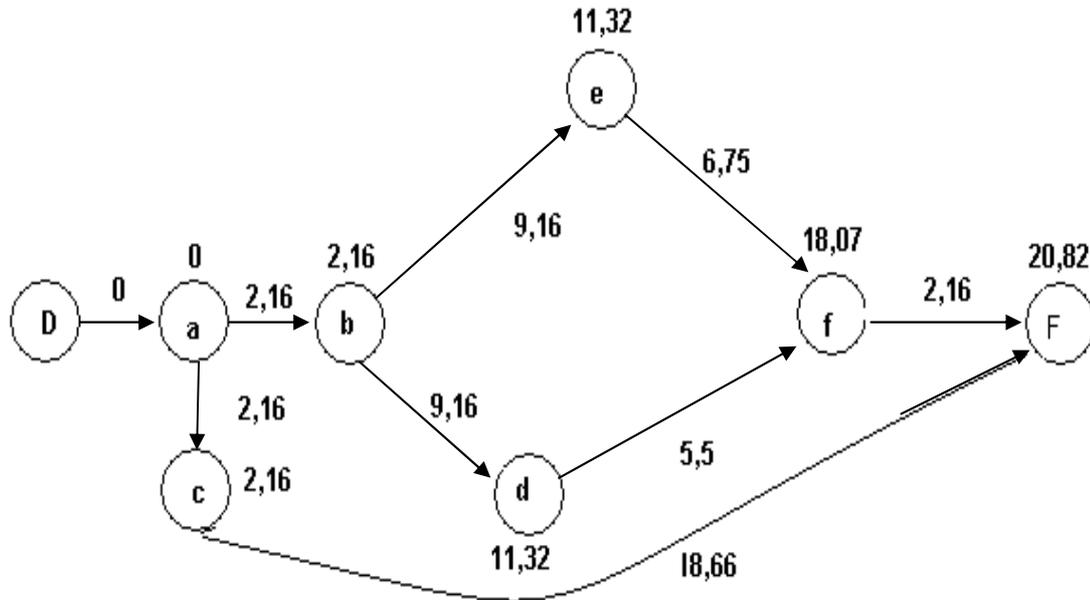


Figure 33 : Evaluation des taches par la méthode PERT

Interprétation

Après évaluation, le chemin critique est formé par les arcs (D,a), (a ;c) et (C,F) et vaut 20,82. Considérons aussi le chemin (D, a, b, e, f, F) vaut 20,23 qui peut être comparé au chemin critique, dont la valeur est de 2,83% seulement inférieure. Il convient donc, non seulement de surveiller le chemin critique durant l'exécution du projet, mais aussi les chemins sub-critiques dont les valeurs ne sont inférieures que de 5% à la valeur du chemin critique.

Conclusion partielle

La vocation des méthodes d'ordonnements consiste à fournir aux chefs du projet un instrument qui leur permettra de suivre la réalisation dont ils ont la charge et au fur et à mesure que se produisent des aléas, d'y remédier aussi bien que possible des modifications des prévisions, son domaine d'application privilégié est le secteur du bâtiment et travaux publics aussi bien que dans la mise en place d'une unité de production et de traitement informatisé de l'information.

TROISIEME PARTIE :
IMPORTANCE DES ELEMENTS DES
GRAPHES AU LYCEE

Comme de la théorie des graphes embrassent plusieurs domaines à travers ses applications, certaines d'entre elles trouvent son utilité dans les études secondaires au lycée et au collège qu'on peut voir à travers les disciplines enseignées dans les mathématiques, physique-chimie, sciences naturelles.

I. Application de l'arbre de choix

L'utilisation de l'arbre de choix est très fréquente dans les calculs de probabilité des épreuves aléatoires.

I.1. Jeu de pile ou face

On lance 4 fois de suite successives une pièce de monnaie possédant deux faces : pile et face (P et F). Parmi les 4 lancers indépendants, on demande de calculer la probabilité d'obtenir 3 fois piles

Solution

On note A « l'événement d'obtenir 3 fois piles lors des 4 lancers indépendants »

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles

$$\Omega = \left\{ \overset{4}{P, F} \right\}$$

$$\text{Card } \Omega = 2^4$$

La probabilité d'obtenir la face pile est donnée par

$$P(P) = \frac{\text{nombre de face a coté pile}}{\text{nombre des faces de la pièce}}$$

$$P(P) = \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'obtenir le coté face : P (F) est donnée par :

$$P(F) = \frac{\text{nombre de face a coté face}}{\text{nombre des faces de la pièce}}$$

$$P(F) = \frac{1}{2}$$

Construction de l'arbre de choix : deux cas sont possibles, si le premier lancer donne le côté pile, on aura l'arbre suivant.

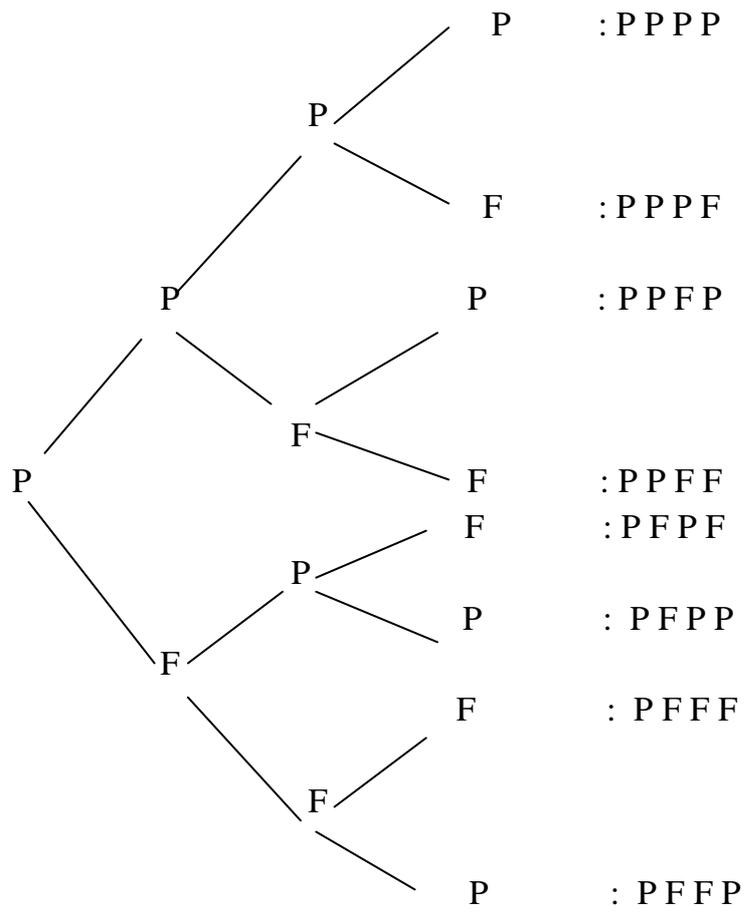


Figure 34: Arbre de choix

Dans le deuxième cas, si le premier lancer donne le côté face (F), on obtient un arbre comme suit :

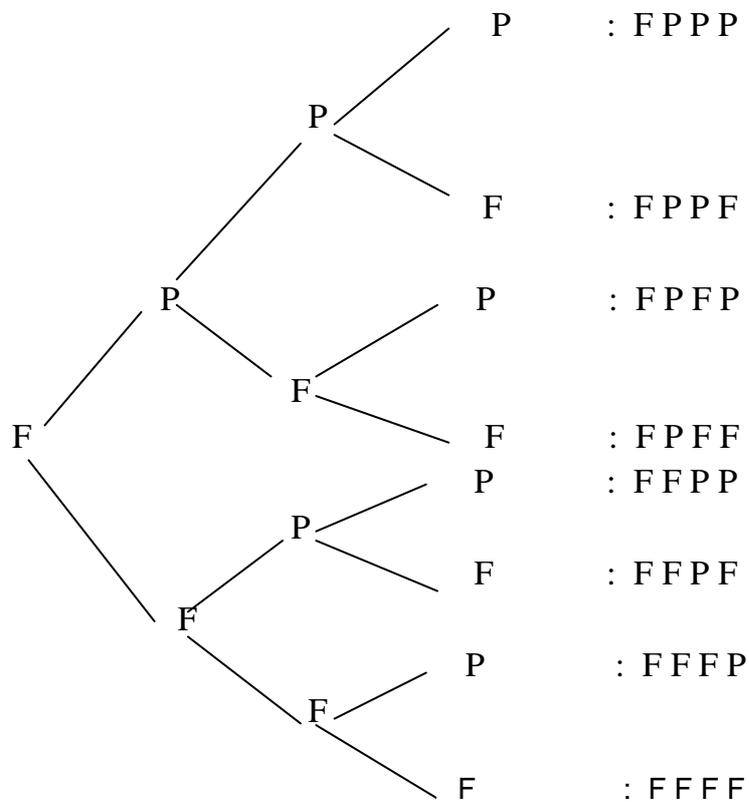


Figure 35 : Arbre de choix (suite)

Donc $A : \{(P P P F) ; (P P F P) ; (P F P P) ; (F P P P)\}$

$$\text{Card } A = 4$$

$$\text{Card } \Omega = 2^4 = 16$$

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Une autre façon, comme les épreuves (lancers) sont indépendantes en étant 4 épreuves de Bernoulli indépendantes. On peut appliquer la loi Binomiale $B(n, p)$ où $n = 4$ correspond au nombre des lancers :

$P(P)$: la probabilité d'obtenir le côté pile

$$P(P) = \frac{1}{2}$$

La probabilité d'obtenir 3 fois piles lors des 4 lancers est donnée par

$$P(A) = C_4^3 * (\frac{1}{2})^3 * (1 - \frac{1}{2})^{4-3}$$

$$P(A) = \frac{4!}{3!(4-3)!} * \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$P(A) = \frac{1}{4}$

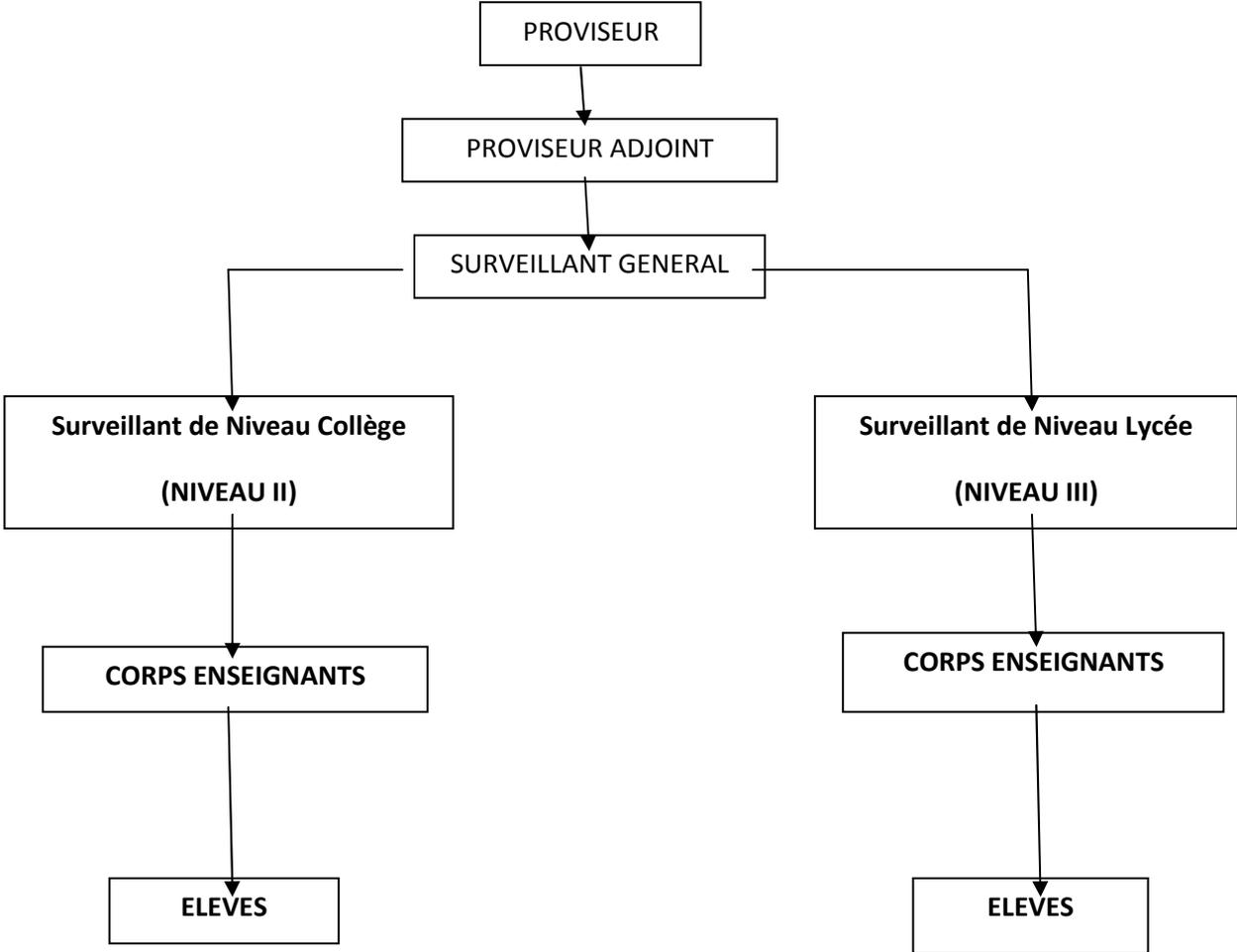
Il est ressorte de cela que l'utilisation de l'arbre de choix et la loi binomiale donne le même résultat.

I.2. Organigramme d'une hiérarchie scolaire

Au niveau de l'établissement scolaire, les personnels sont caractérisés selon leurs fonctions qui soient corps enseignants, personnels administratifs et techniques, corps des élèves.

Dans la représentation au terme de graphe, les sommets désignent les noms des personnels, les arêtes ou les arcs indiquent les relations des services entre les sommets.

Organigramme du Lycée d'Andoharanofotsy



Remarque :

La représentation graphique d'une direction ne se situe seulement au collège où au lycée, mais employée par d'autres services comme la Banque, dans les entreprises, et également au service de l'enseignement supérieur dans les grandes écoles comme l'Ecole Normale Supérieure de l'Université de FIANARANTSOA.

II. Conservation du flux

Une des applications de la conservation du flux est la loi de Kirchoff exprimant la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.

Soit un graphe $G = (S, U)$ dont les arcs seront désignés par $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$

- a) A chaque élément ϕ_i , appelé FLUX dans l'arc U_i
- b) En tout sommet $x \in S$, la loi des nœuds (loi de Kirchoff) exprime la conservation du flux vérifie : $\sum \phi_i (i \in U_x^-) = \sum \phi_i (i \in U_x^+)$
Où U_x^- et U_x^+ désignent respectivement l'ensemble des arcs incidents vers l'intérieur et vers extérieur au sommet x .

En particulier, un circuit électrique peut se voir comme un graphe, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre les nœuds.

II.1. Recherche d'intensité

On donne le schéma d'un circuit défini par :

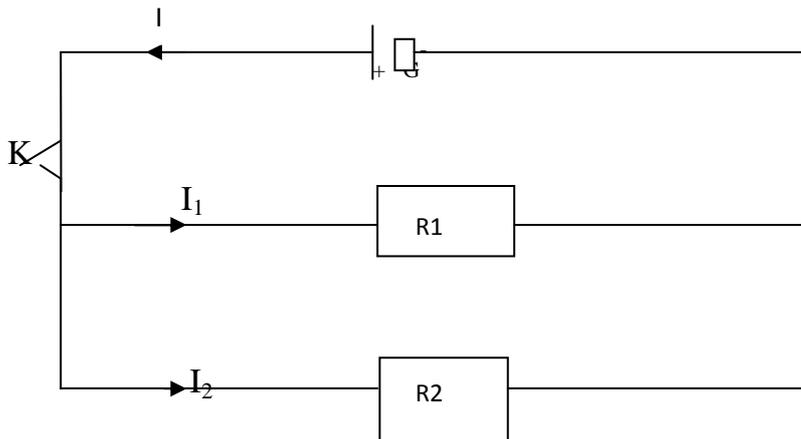


Figure 36 : Montage d'un circuit

On donne $I = 1A$ et $I_2 = 600mA$

Calcul de I1

En utilisant la loi des nœuds,

On peut écrire $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = I - I_2$$

$$I_1 = 1\text{A} - 0,6\text{A}$$

$$I_1 = 0,4\text{ A}$$

II.2.conservation de l'énergie

La somme des énergies électriques dissipées par les deux résistances R_1 et R_2 notées W_1 et W_2 est égale à la quantité d'énergie enregistrée au générateur qu'on note W .

$$W = W_1 + W_2$$

$$W_1 = R_1 I_1^2 t ; W_2 = R_2 I_1^2 t$$

$$W = R_1 I_1^2 t + R_2 I_1^2 t$$

$$R_1 = 20 \Omega$$

$$R_2 = 40 \Omega$$

$$t = 1\text{h} = 60\text{mn} = 3600\text{s}$$

$$I_1 = 0,4\text{ A}; I_2 = 0,6\text{A}$$

$$W = 20 \times (0,4)^2 \times 3600\text{J} + 40 \times (0,6)^2 \times 3600\text{J}$$

$$W = 3600 (20 \times 0,16 + 40 \times 0,36) \text{ J}$$

$$W = 63\,360\text{J}$$

Nombreux sont les applications de la conservation du flux, ceci offre des analogies dans l'étude d'écoulement d'un liquide dans les canalisations, ou la circulation dans un réseau routier.

III- Coloration de quelques molécules

Une molécule est une entité constituée par deux ou plusieurs atomes identiques ou différents : la molécule d'eau (H_2O), le gaz butane (C_4H_{10}), etc.....

III.1. Géométrie de quelques molécules

Certaines molécules possèdent des formes géométriques dans leur représentation spatiale.

III.1.1. Forme tétraédrique

Exemple : méthane CH_4

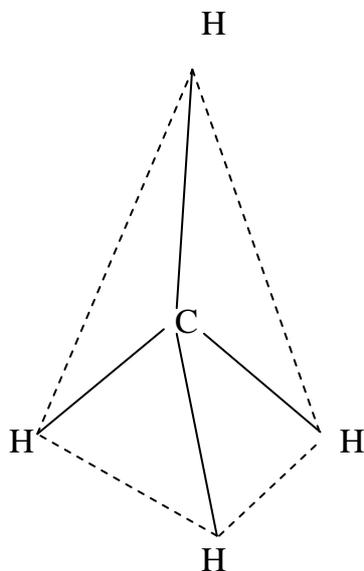


Figure 37 : Représentation spatiale du Méthane

Le méthane de formule brute CH_4 peut être représenté par un graphe d'ordre 5.

Les sommets de ce graphe sont constitués par les atomes formants la molécule, les arêtes sont formées par la liaison entre l'atome de carbone et un atome d'hydrogène (C – H) qu'on appelle liaison covalente résultant de la mise en commun des électrons de leurs couches externes.

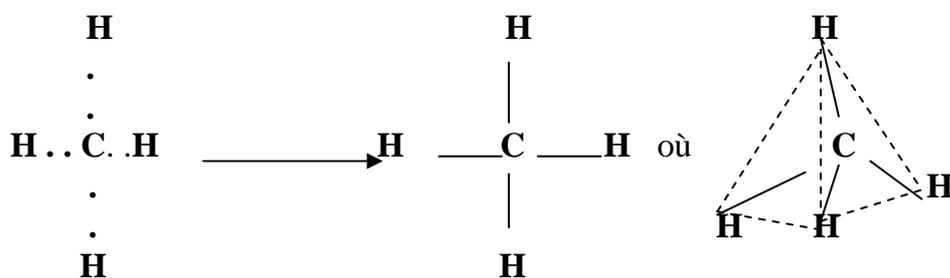


Figure 38 : Formation du méthane

III.1.2 .Forme pyramidale

Exemple : L'ammoniac : NH_3

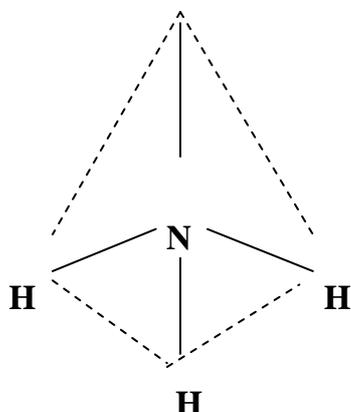


Figure 39 : Représentation spatiale de l'ammoniac

L'atome d'azote (N) est au sommet d'une pyramide. Les atomes d'hydrogène (H) sont les sommets de la base. On peut dire que le schéma de l'ammoniac est un graphe d'ordre 4, les sommets sont formés par les atomes d'hydrogène et l'atome d'azote. La liaison covalente N – H forme une arête du graphe.

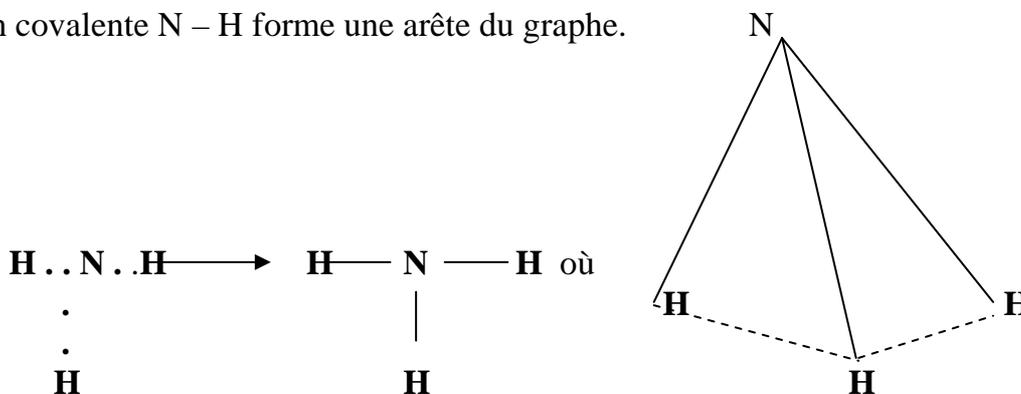


Figure 40 : Formation de l'ammoniac

III.1.3. La forme coudée

Exemple : l'eau (H_2O)

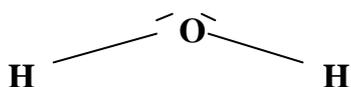


Figure 41 : Représentation spatiale de l'eau

La structure de la molécule est plane. Ces 3 atomes sont dans le même plan et le graphe obtenu est d'ordre 3 avec ces sommets, l'atome d'oxygène (O) et les 2 atomes d'hydrogène (H). L'atome d'oxygène forme avec les atomes d'hydrogène deux liaisons covalentes formants les arêtes du graphe.

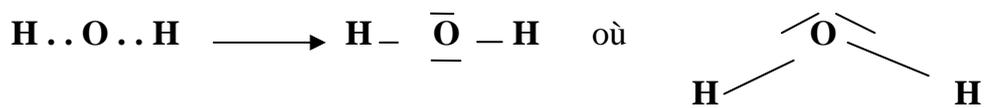


Figure 42: Formation de l'eau

III.2. Coloration des molécules

Dans les modèles moléculaires, les atomes sont matérialisés par des boules de couleurs. A chaque élément chimique courant correspond une couleur : blanche pour l'hydrogène ; noir pour le carbone ; rouge pour l'oxygène ; bleu pour l'azote ; verte pour le chlore ; jaune pour le soude en terme de graphe les atomes entrants dans une liaison covalente sont des sommets adjacents ayant des couleurs différentes, ce qui rappelle la coloration des sommets d'un graphe auquel deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

III.2.1. Chlorure d'hydrogène.

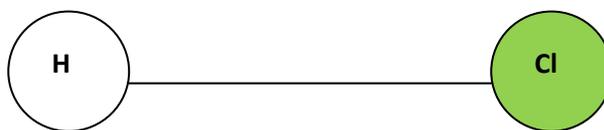


Figure 43 : Coloration de HCL

III.2.2 Ammoniac

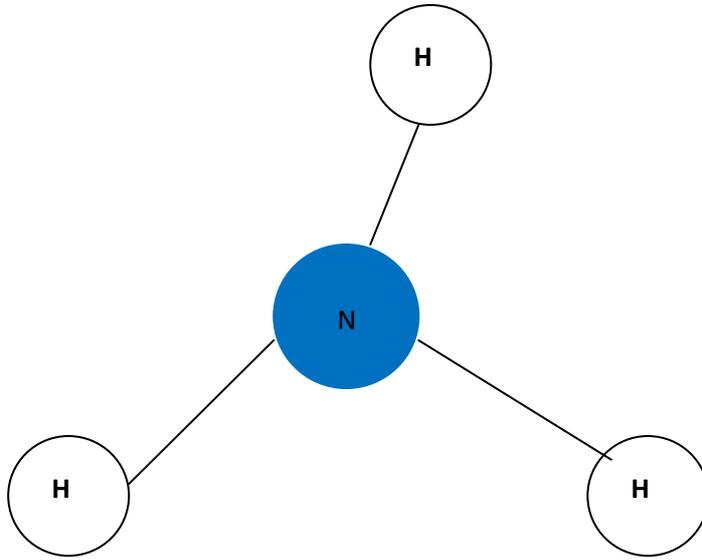


Figure 44 : Coloration de NH₃

III.2.3. Eau

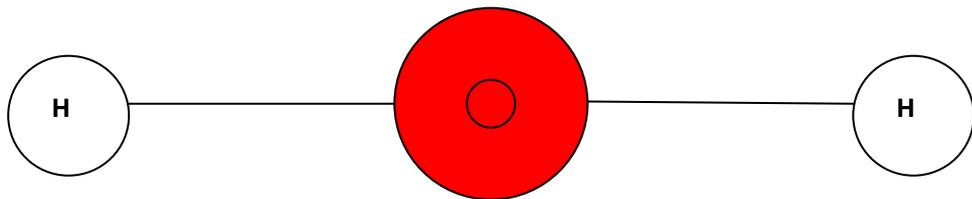


Figure 45 : Coloration de H₂O

III.2.4. Méthane

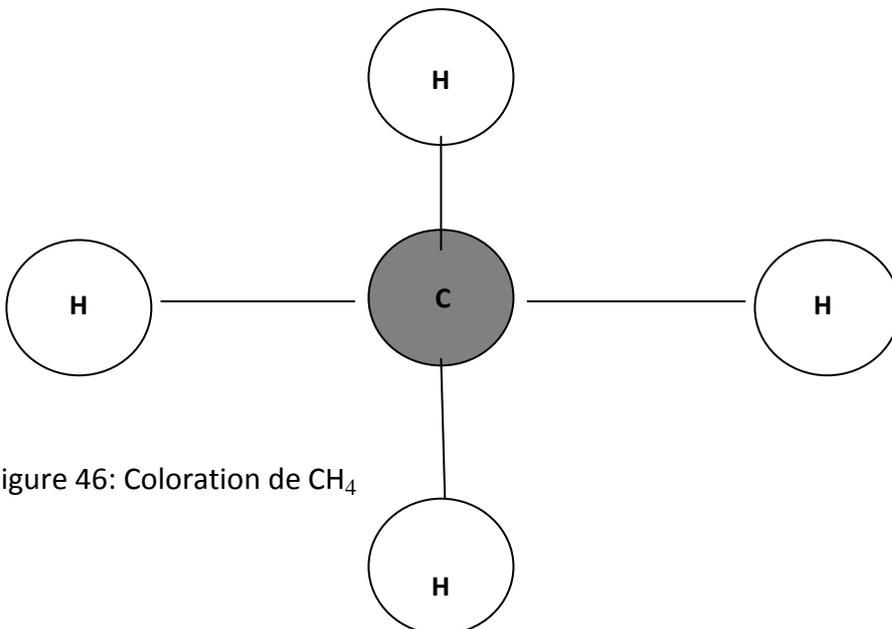


Figure 46: Coloration de CH₄

CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire est un des plusieurs témoins de l'utilité et de l'application des sciences mathématiques grâce à l'étude de quelques éléments de la théorie des graphe , le champ de son application s'étend sur la réalisation des projets qui facilite l'être humain à résoudre ces tâches quotidiennes ; la spécificité se réside dans l'utilisation des méthodes de minimisation à l'échelle du temps et des gens . L'enseignement trouve aussi son utilité dans les savoirs transmis en classe aux élèves.

La réalisation de ce mémoire est donc pour nous une occasion rêvée non seulement pour approfondir nos connaissances en mathématiques mais aussi de mettre les premiers pas dans le domaine de la recherche scientifique.

BIBLIOGRAPHIE

- René Caspien, Physique – chimie 2^{nde}, collection Nathan. P.164
- Emily Stewart, Theory of Graph, Tomes 1, P.68 News collection.
- Jacques Normand, Mathématiques Terminales, P.75, Di mathème.
- Didier Maquin, Cours de théorie des graphes. P.71
- Recherche opérationnelle (R.O.)

WEBOGRAPHIE

- www.Theoryofgraphs.com
- @sigward.Introductiontheorie.desgraphes.com
- www.capturefugitif.com.graph