

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Contexte	3
1.1.1	Organe terminal d'un robot manipulateur	3
1.1.2	Intérêt de la préhension et de la manipulation dextre	6
1.2	Difficulté de mise en œuvre de la préhension et manipulation dextre . .	10
1.3	Objectifs	12
1.4	Plan du mémoire	15
2	Modèles pour la manipulation dextre et incertitudes de contact	17
2.1	Introduction	18
2.2	Cas d'étude	18
2.3	Etude statique d'un préhenseur multidigital	19
2.3.1	Définition de la saisie	19
2.3.2	Propriétés générales	25
2.3.3	Espace des forces de contact et des torseurs dynamiques	26
2.4	Incertitudes sur le point de contact	28
2.4.1	Origines des incertitudes	28
2.4.2	Formulation mathématique des incertitudes	29
2.4.3	Conséquences des incertitudes	30
2.5	Modélisation dynamique pour la manipulation dextre	30
2.5.1	Approches proposées dans la littérature	30
2.5.2	Proposition d'une nouvelle modélisation	32
2.5.3	Détermination de la représentation d'état du système	33
2.5.3.1	Description générale des dynamiques du système	33
2.5.3.2	Mise sous forme assemblée des équations dynamiques	34
2.5.3.3	Prise en compte de la redondance	35
2.5.3.4	Suppression des états liés	35
2.5.3.5	Détermination de l'équation d'état	37
2.5.3.6	Expression des forces de contact	38
2.5.4	Étude de la commandabilité du système	39
2.5.5	Conclusions	40
2.5.6	Remarque : Lien avec les synergies	41

3	Qualité de prise en présence d'incertitudes	43
3.1	Introduction	43
3.2	État de l'art	44
3.2.1	Méthodes classiques	44
3.2.2	Prise en compte d'incertitudes	47
3.2.3	Positionnement scientifique	48
3.3	Métrique de l'évaluation de l'espace atteignable	48
3.4	Evaluation du RWSU	50
3.4.1	Approche par intersection des polytopes	51
3.4.2	Approche par exploration extensive	51
3.5	Cas d'étude	53
3.5.1	Présentation	53
3.5.2	Evaluation des algorithmes	54
3.5.2.1	Erreur de translation	54
3.5.2.2	Erreur d'orientation	57
3.6	Exemple en trois dimensions	58
3.6.1	Présentation	58
3.6.2	Résultats	59
3.7	Conclusions	60
4	Manipulation dextre en présence d'incertitudes	61
4.1	Etat de l'art	62
4.1.1	Contexte statique	62
4.1.2	Contexte dynamique	63
4.1.2.1	L'approche par commande hybride	63
4.1.2.2	L'approche par commande en impédance	64
4.1.2.3	Premier constat	65
4.1.3	Prise en compte des incertitudes	65
4.2	Positionnement scientifique	66
4.3	Modélisation	67
4.3.1	Description du système	67
4.3.2	Modélisation des incertitudes du point de contact	68
4.4	Commande robuste par synthèse LMI	68
4.4.1	Forme générale	68
4.4.2	Objectifs de la commande	69
4.4.3	Commande en impédance par synthèse LMI	70
4.4.4	Contrôle des forces internes	74
4.4.5	Algorithme traitant les incertitudes	75
4.5	Cas d'étude et simulations	76
4.5.1	Exemple	76
4.5.2	Résultats de simulation	77
4.5.3	Résultats expérimentaux	78

4.5.3.1	Nouvelles problématiques et propositions de résolution	78
4.5.3.2	Evaluation de la commande	82
4.5.4	Premières Conclusions	86
4.6	Découplage du mouvement	87
4.6.1	Introduction	87
4.6.2	État de l'art sur l'étude du découplage des mouvements	87
4.6.3	Positionnement scientifique	89
4.6.4	Spécification de trajectoires, sous-espaces invariants et vecteurs propres	90
4.6.5	Commande robuste avec découplage du mouvement	91
4.6.5.1	Objectifs de commande	91
4.6.5.2	Placement des vecteurs propres	92
4.6.5.3	Prise en compte des incertitudes	93
4.7	Cas d'étude avec découplage	94
4.7.1	Paramètres de la commande	94
4.7.2	Résultats de simulation	94
4.7.3	Résultats expérimentaux	96
4.8	Conclusions	97
5	Conclusion générale	99
5.1	Contributions	99
5.1.1	Mesure de qualité de prise en présence d'incertitudes sur la saisie	100
5.1.2	Commande robuste aux incertitudes de modèle pour la manipu- lation dextre	100
5.2	Perspectives	101
5.2.1	Lien avec les synergies	101
5.2.2	Etude d'autres commandes robustes pour la manipulation dextre	102
5.2.3	Extension au cas à trois dimensions	103
5.2.4	Développement d'un algorithme unifié de saisie et de manipula- tion dextre en présence d'incertitudes	103
	Bibliographie	105
	Publications personnelles	111
	Annexe A Formalisme pour la description du mouvement d'un corps rigide	113
A.1	Définition d'un corps rigide	113
A.2	Transformation d'un corps rigide	114
A.2.1	Rotation pure	114
A.2.2	Rotation et translation	115
A.3	Cinématique d'un corps rigide	116
A.4	Torseur dynamique d'un corps rigide	117

A.5	Cinématique d'un robot manipulateur	117
A.5.1	Modèle géométrique	117
A.5.2	Jacobienne d'un robot manipulateur	118
Annexe B	Détails des calculs du modèle dynamique	119
B.1	Preuve de la mise sous forme matricielle de la dynamique du système préhenseur/objet	119
B.2	Paramétrisation locale	122
B.2.1	Passage des twists aux coordonnées locales	122
B.2.2	Passage des coordonnées locales aux twists	124
B.2.3	Changement de paramétrisation au niveau de l'équation dynamique	124

Nomenclature

d.d.l.	Degré(s) de liberté
$R_{o/w}$	Matrice de rotation du repère (O, o) (repère d'origine O et de base o) par rapport au repère (M, w) (M étant l'origine de la base w)
$g_{o/w} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	Matrice homogène, qui définit à la fois la rotation de la base o par rapport à la base w , et le vecteur translation entre l'origine des deux repères
$v_{A \in S_2/S_1}^o$	Vitesses linéaires du point A attaché au corps S_2 , par rapport à S_1 , exprimées dans le repère o
ω_{S_2/S_1}^o	Vitesses angulaires du corps rigide S_2 par rapport au corps rigide S_1 , exprimées dans le repère o
$V_{S_2/S_1}^o = \begin{bmatrix} v_{A \in S_2/S_1}^o \\ \omega_{S_2/S_1}^o \end{bmatrix}$	Torseur cinématique (<i>Twist</i>) du corps rigide S_2 par rapport au corps rigide S_1
$Ad_{g_{w/o}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$	Matrice adjointe associée à la matrice homogène $g_{w/o}$, qui relie le torseur cinématique du corps lié à la base o au torseur cinématique du corps lié à la base w
$f_{S_1 \rightarrow S_2}^o$	Forces appliquées par S_1 sur S_2 , écrites dans le repère o
$m_{A, S_1 \rightarrow S_2}^o$	moments en A appliqués par S_1 sur S_2 , écrits dans le repère o
$W_{S_1 \rightarrow S_2}^o = \begin{bmatrix} f_{S_1 \rightarrow S_2}^o \\ m_{A, S_1 \rightarrow S_2}^o \end{bmatrix}$	Torseur dynamique (<i>Wrench</i>) de l'action qu'applique S_1 sur S_2 , écrite dans le repère o
$J_{t/w}^w$	Jacobienne spatiale reliant les vitesses articulaires $\dot{q}$ au torseur cinématique $V_{t/w}^w$ par l'expression $V_{t/w}^w = J_{t/w}^w(q)\dot{q}$
$Ker(M)$	Noyau de la matrice M
LMI	Linear Matrix Inequality (inégalité matricielle linéaire)
BMI	Bilinear Matrix Inequality (inégalité matricielle bilinéaire)

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte	3
1.1.1	Organe terminal d'un robot manipulateur	3
1.1.2	Intérêt de la préhension et de la manipulation dextre	6
1.2	Difficulté de mise en œuvre de la préhension et manipulation dextre	10
1.3	Objectifs	12
1.4	Plan du mémoire	15

1.1 Contexte

1.1.1 Organe terminal d'un robot manipulateur

La robotique industrielle existe depuis plus de 55 ans. Elle est apparue avec Unimate, le premier robot industriel à avoir été déployé dans les chaînes d'assemblage de General Motors en 1961 [Nof (1999)]. Ce robot à 4 degrés de liberté (d.d.l.) dans sa version de base, disposait en bout de bras de différentes terminaisons, appelées organes effecteurs ou organes terminaux, parmi lesquelles une pince à 1 ou 2 degrés de liberté et une ventouse (Fig. 1.1). Ces organes terminaux servaient à la saisie d'éléments dans la chaîne d'assemblage. De manière générale, l'organe terminal est une partie du robot qui a pour but d'interagir avec l'environnement : saisie et manipulation d'objets, forage, soudure, découpe, etc. Dans ce manuscrit, nous nous concentrerons sur les organes terminaux dédiés à la saisie et manipulation d'objets.

La robotique industrielle a largement évolué, avec des bras robotiques désormais plus complexes, plus précis et plus rapides - il suffit de s'intéresser aux normes ISO pour s'apercevoir des conditions rigoureuses de fonctionnement imposées à la robotique industrielle actuelle (ISO 9283 :1998).

Quant aux organes terminaux dédiés à la saisie ou la manipulation, la plupart d'entre

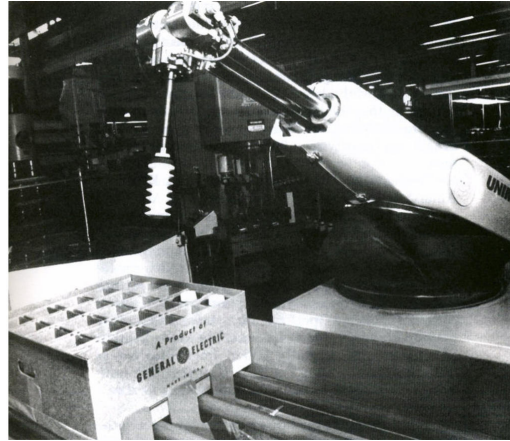


FIGURE 1.1 – Unimate (1961).

eux sont restés des pinces à 1 ou 2 d.d.l. Malheureusement, ce type d'organe terminal présente des limitations [Murray et Sastry (1994)] :

- **Manque de dextérité** : les pinces sont adaptées pour la saisie d'un objet mais elles n'ont pas assez de d.d.l. pour manipuler ou reconfigurer l'objet saisi.
- **Limitations des possibilités** : la pince peut saisir de manière sûre un objet de forme cubique, mais la saisie d'une sphère ou d'une tige peut devenir une tâche complexe. Il faut alors envisager d'utiliser un autre organe effecteur.
- **Nécessité d'effectuer de grands mouvements du bras pour reconfigurer l'objet saisi** : le nombre de d.d.l. de l'organe effecteur étant limité, il faut utiliser les d.d.l. du bras robotique pour réorienter l'objet, occasionnant des mouvements amples de l'ensemble de la structure robotique et pouvant constituer un danger si un opérateur se trouve à proximité.
- **Manque de finesse du contrôle en force** : les pinces peuvent présenter des actionneurs puissants, pouvant délivrer un couple moteur élevé. Ces pinces sont alors limitées à la prise en force d'objet rigide, et elles ne permettent pas la manipulation d'objet fragile.



FIGURE 1.2 – Belgrade Hand.

Dès les années 60, la recherche scientifique se penche sur l'amélioration des capacités de préhension et de manipulation des organes terminaux. Cela passe par la conception de systèmes mécaniques plus complexes, on voit apparaître des organes terminaux avec plus de d.d.l. que de simples pinces, on peut citer le préhenseur de Tomovic et Boni datant de 1963 (Fig. 1.2 et [Tomović et Boni (1962)]). On nomme cette nouvelle gamme d'organes terminaux par le terme de préhenseur multidigital (*multifingered hand*). L'amélioration des capacités de préhension et de manipulation des organes terminaux ne passe pas uniquement par la conception mécanique, mais aussi par l'intégration de capteurs pour de meilleures capacités de perception, ainsi que par le développement d'algorithmes rendant le contrôle plus efficace et le système plus intelligent. Ces développements visent à atteindre les buts suivants [Bicchi (2000)] :

- **La dextérité** : il s'agit de la capacité du préhenseur à manipuler des objets afin de les relocaliser arbitrairement dans l'espace de la paume pour la réalisation d'une tâche précise.
- **La robustesse de la saisie** : c'est la capacité à garder la saisie de l'objet en présence de perturbations (forces extérieures, estimation erronée des caractéristiques de l'objet saisi, etc.) tout en maintenant une saisie adaptée aux caractéristiques de l'objet afin d'éviter tout dommage.
- **L'opérabilité humaine** : cette capacité permet une interface facile du préhenseur avec l'opérateur humain. Cette définition est à prendre au sens large : l'opérateur peut être le programmeur du préhenseur, il s'agit alors de faciliter la programmation de la tâche à réaliser par le préhenseur. L'opérateur peut aussi être un patient qui a besoin du préhenseur comme prothèse.

D'autres sous-objectifs optionnels, inclus dans la désignation d' « opérabilité humaine », sont parfois recherchés :

- **Anthropomorphisme** : Il s'agit de l'attribution de la morphologie humaine au préhenseur multidigital. Cette qualité est parfois recherchée car la plupart des outils sont conçus pour la main humaine, un préhenseur anthropomorphe peut ainsi manipuler ces objets.
- **Capacité sensorielle** : On cherche à avoir une bonne connaissance de l'environnement du préhenseur en utilisant des capteurs (capteurs des positions articulaires, capteurs des courants des moteurs, capteurs de force et capteurs tactiles, vision).
- **Compliance** : Les préhenseurs peuvent être amenés à interagir avec un opérateur, et leur comportement doit alors être maîtrisé et sûr. Cette sûreté peut être assurée en jouant sur la raideur et l'amortissement du système et en adoptant un comportement dit souple (*soft robotics*) pour le préhenseur.

De nombreuses avancées ont ainsi permis le développement des préhenseurs multidigitaux et de la manipulation dextre [Okamura et al. (2000)], et aujourd'hui, de plus en plus d'applications industrielles cherchent à intégrer ces technologies.

1.1.2 Intérêt de la préhension et de la manipulation dextre

Afin d'évaluer l'intérêt qu'ont la recherche et l'industrie pour les préhenseurs et la manipulation robotique, on peut s'intéresser à la feuille de route multi-annuelle des projets européens [SPARC (2015)]. Ce document définit les axes privilégiés pour la recherche européenne, décrit les technologies à développer et les marchés clés dans lesquelles ces technologies pourraient être intégrées.

Cette feuille de route montre que la capacité de manipulation en robotique est un axe de recherche particulièrement important puisqu'il pourrait intervenir à l'avenir dans de nombreux secteurs industriels.

Trois catégories de manipulation y sont définies :

- La capacité de saisie : il s'agit de la capacité d'un mécanisme à saisir un objet ;
- La capacité de maintien : il s'agit de la capacité d'un système robotique à maintenir la saisie d'un objet dans le but de réaliser une tâche ;
- La capacité de manipulation : il s'agit de la capacité d'un système robotique à saisir et déplacer un objet dans le but de réaliser une tâche.

Chacune de ces capacités est découpée en différents niveaux traduisant la difficulté de mise en œuvre d'une telle technologie (Fig. 1.3). Le niveau 0 définit l'incapacité à saisir, maintenir ou manipuler un objet. Les niveaux suivants établissent des jalons technologiques à déverrouiller afin d'atteindre une certaine maîtrise de la capacité. Pour la capacité de manipulation, le niveau 1 est défini comme la manipulation simple d'un objet, avec la dépose de l'objet à une localisation mais sans maîtrise de l'orientation. Les niveaux suivants étendent les aptitudes demandées au système robotique : maîtrise de l'orientation, du placement, manipulation avec compliance, manipulation d'un objet en présence d'incertitudes (objet mal connu), réalisation d'une tâche complexe de manipulation, manipulation d'objet inconnu, identification de l'objet à partir de la manipulation. Ces niveaux permettent donc d'évaluer et quantifier la dextérité, la robustesse et l'opérabilité du système robotique.

Le document donne aussi des compétences cibles que le système robotique doit être capable de réaliser en terme de manipulation. On peut mettre en évidence les compétences suivantes :

- La manipulation dextre et la re-saisie d'un objet.
- La manipulation d'outils, et plus généralement, le système robotique doit être capable de manipuler différents objets, avec différents niveaux de serrage, et une forte capacité de réorientation de l'objet.
- La manipulation d'objets mal connu ou inconnu.

Ce dernier point est en outre stratégique car il est défini comme le point bloquant pour le développement de la capacité de manipulation dans des applications industrielles. Plus précisément, les incertitudes environnementales provoquant des erreurs de manipulation représentent un défi technique qu'il faudra relever afin d'intégrer les préhenseurs et la manipulation dextre dans les secteurs industriels.

	Capacité de saisie	Capacité de maintien	Capacité de manipulation
Niveau 0	Incapacité à saisir	Incapacité à maintenir	Incapacité à manipuler
Niveau 1	Saisie et dépose simple	Maintien simple d'un objet connu	Manipulation simple
Niveau 2	Saisie et dépose d'un objet connu	Maintien dynamique d'un objet connu	Manipulation avec réorientation
Niveau 3	Saisie avec tolérance	Maintien simple basé sur un modèle d'objet	Manipulation avec remplacement
Niveau 4	Saisie avec tolérance et capteurs	Maintien dynamique basé sur un modèle d'objet	Manipulation avec compliance
Niveau 5	Saisie avec localisation inconnue	Maintien d'objet inconnu	Manipulation suivant une tâche
Niveau 6	Saisie avec incertitudes		Manipulation d'objet avec incertitudes
Niveau 7	Saisie complexe d'objet		Manipulation d'objet complexe
Niveau 8	Saisie d'objet inconnu		Manipulation d'objet inconnu
Niveau 9			Identification de l'objet au travers de la manipulation

FIGURE 1.3 – Niveaux de complexité des capacités de saisie, maintien et manipulation d'un objet (adapté de [SPARC (2015)]).

La feuille de route fournit de plus plusieurs exemples d'application de manipulation robotique dans l'industrie.

L'industrie manufacturière : Les tâches réalisées dans le secteur de l'industrie manufacturière sont très variées et mettent en œuvre une large gamme de saisies et de manipulations dextres. Dans [Cutkosky (1989)], un machiniste d'une usine manufacturière a été suivi au cours de son travail afin d'évaluer ses différentes tâches de manipulation et les différentes saisies mises en œuvre. Une classification des différentes saisies a pu être réalisée, ce qui donne une taxonomie partielle des saisies faites dans l'industrie manufacturière (Fig. 1.4). On voit que cette taxonomie présente une grande variété de prise, avec une différenciation entre les saisies en force et les saisies en précision :

- La saisie en force utilise toute la paume de la main et a pour but de contraindre tout mouvement entre l'objet et la main ;
- La saisie en précision utilise uniquement les phalanges distales de la main (les extrémités des doigts) pour pouvoir repositionner ou réorienter l'objet dans l'es-

pace de la main.

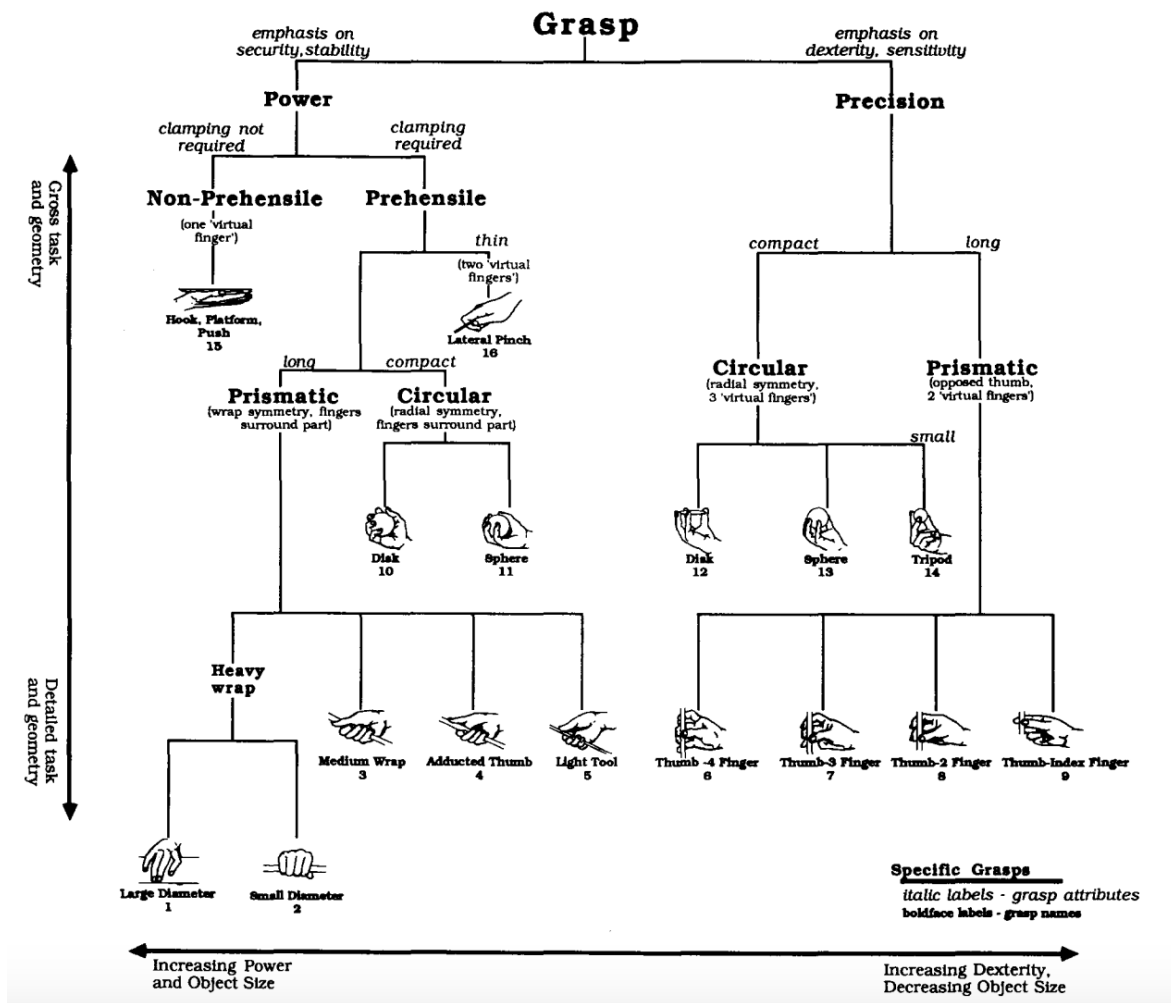


FIGURE 1.4 – Taxonomie partielle des saisies dans l’industrie manufacturière [Cutkosky (1989)].

Dans le cas où l’on souhaite automatiser les tâches de manipulation dans une usine manufacturière, un préhenseur spécialisé n’est pas adapté au vu de la grande variété de saisies à réaliser. Il est donc nécessaire d’utiliser un préhenseur ayant de fortes capacités de manipulation satisfaisant les contraintes de dextérité et de robustesse de l’application.

On peut citer le projet européen FP7 FIRST-MM dont une partie des études concerne les préhenseurs et la manipulation robotique. Ce projet propose un robot mobile capable de réaliser des manipulations dans un environnement non structuré. Ce projet a permis de développer un préhenseur compliant disposant d’une nouvelle technologie d’actionneurs pneumatiques [Deimel et Brock (2013)]. Ce préhenseur est conçu pour la saisie robuste d’objet. En outre, d’autres études portant sur l’évaluation de saisie par un préhenseur anthropomorphe ont été menées [De Souza et al. (2012)].

Parmi les exemples d’industries manufacturières intéressées par la manipulation robotique et les préhenseurs, on peut citer le secteur de l’alimentaire. Les applications dans

ce secteur présentent souvent de la manipulation avec un niveau de qualité requis, où des éléments de différentes formes et textures sont assemblés (par exemple l'élaboration d'un sandwich). L'industrie alimentaire pourrait bénéficier largement des progrès de la manipulation robotique. Par exemple, ces systèmes pourraient réaliser des tâches complexes dans une atmosphère inerte afin de stopper l'oxydation des produits [SPARC (2015)].

Le secteur médical : La robotique médical est un domaine en pleine expansion, avec de nombreuses applications qui voient le jour. Les préhenseurs et la manipulation robotique pourraient intervenir dans ce secteur avec les robots d'assistance. Ces robots pourraient assister les patients dans leurs déplacements et leurs manipulations ; ils doivent donc être une interface naturelle pour les patients tout en garantissant leur sécurité. Afin de respecter ces exigences, le système robotique doit disposer des compétences suivantes en manipulation :

- Manipulation dextre avec des outils d'encombrement limité ;
- Reconnaissance d'outils et manipulation d'objet ;
- Saisie et manipulation d'objets souples et fragiles.

Par rapport à la figure 1.3, les capacités exigées sont de niveau 4/5.

L'agriculture : L'agriculture est un domaine prêt au transfert de technologies liées à la robotique. La manipulation robotique doit d'ailleurs jouer un rôle important : les futurs systèmes doivent par exemple être capables de sélectionner les produits mûrs, de les récolter et les manipuler. Ce type de manipulation fait intervenir plusieurs compétences :

- Manipulation robuste de produits souples ;
- Contrôle des forces de serrage des produits

Par rapport à la figure 1.3, les capacités exigées sont de niveau 5/6.

On peut citer le projet européen CROPS qui a pour but de développer un système robotique de manipulation et perception intelligent pour la production et la récolte durable. Des études ont été menées concernant le développement de bras manipulateurs dédiés à l'agriculture dans le but de réaliser de la manipulation dextre [Baur et al. (2012)]. Dans le cadre de ce projet, l'organe effecteur en bout de bras est une structure mécanique simple (1 ou 2 d.d.l.), mais des développements ont été menés afin de rendre ces systèmes plus intelligents, avec de meilleures capacités de préhension et de manipulation : dans [Ohev-Zion et Shapiro (2011)], un algorithme pour la saisie d'objet fragile déformable est proposé, l'objectif de l'algorithme étant de déterminer les points de contact pour la saisie qui minimisent les forces à appliquer sur l'objet.

Le domaine civil : Le domaine civil couvre les applications dirigées par les autorités gouvernementales civiles, nationales et locales. De nombreuses applications robotiques

sont présentes dans l'ensemble des services proposés par ces autorités, ceux-ci couvrant le développement des infrastructures civiles, des routes, égouts, bâtiments publics, etc. Au vu des progrès technologiques en matière de surveillance et d'inspection, il sera à l'avenir intéressant de développer des systèmes d'intervention capables de réaliser de la maintenance et des tâches de manipulation dans ces environnements.

Parmi les domaines concernés, on peut citer l'exploration sous-marine. Le projet européen TRIDENT porte sur le développement d'un système permettant l'intervention en milieu sous-marin. Une partie de ce projet se focalise sur la manipulation dextre en milieu sous-marin [Sanz et al. (2010)]. On peut également mentionner le projet ANR SEAHAND, qui porte sur le développement d'une main marinisée mobile pour la saisie robuste en environnement sous-marin.

1.2 Difficulté de mise en œuvre de la préhension et manipulation dextre

La mise en œuvre de la préhension et manipulation dextre représente un véritable défi technique :

- **Dextérité** : la relocalisation de l'objet dans l'espace du préhenseur ne peut se faire qu'en augmentant, dans une certaine mesure, le nombre de d.d.l. du préhenseur. L'article [Mason et Salisbury Jr (1985)] montre qu'il faut en théorie un minimum de 9 d.d.l. pour réaliser une tâche dextre dans l'espace à trois dimensions avec un préhenseur rigide sans roulement ni glissement des points de contact. On voit alors apparaître une première difficulté lors de la conception des préhenseurs multidigitaux : proposer une mécanique avec suffisamment de d.d.l., tout en gardant une taille suffisamment réduite. Il y a donc un compromis à trouver entre dextérité et complexité mécanique. Mais le nombre de d.d.l. ne suffit pas à assurer un haut niveau de dextérité du préhenseur, et d'autres éléments doivent être pris en compte, tel que le débattement des doigts, l'espace de travail, les frottements du mécanisme, le poids global du système. La commande du préhenseur joue également un rôle très important pour la dextérité. D'après [Biagiotti et al. (2008)], un préhenseur avec peu de d.d.l. mais avec une commande adaptée peut être plus dextre qu'un préhenseur avec de nombreux d.d.l. et une commande désadaptée (Figure 1.5). Par le terme de «commande adaptée», on entend ici des solutions de commande améliorant les capacités de manipulation dextre du préhenseur. Ces solutions sont nombreuses : commande prenant en compte le roulement et le glissement entre l'objet et le préhenseur, commande en impédance, commande robuste aux incertitudes environnementales, etc. Le rôle de la commande est donc très important pour assurer une grande dextérité du préhenseur, qu'il soit multidigital ou simple.
- **Robustesse** : On constate que les applications qui mettent en œuvre des ma-

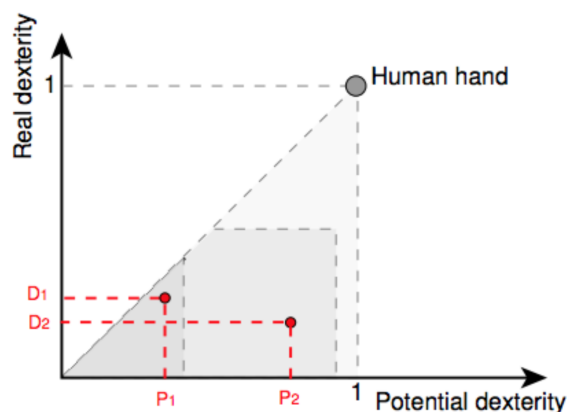


FIGURE 1.5 – Dextérité réelle vs. dextérité potentielle [Biagiotti et al. (2008)].

nipulateurs dextres les font évoluer dans des environnements peu structurés. Le préhenseur peut être amené à interagir avec des objets de géométries très différentes et aux propriétés dynamiques très variables. Le préhenseur peut aussi être amené à saisir plusieurs fois un objet identique, mais à chaque saisie l'objet est placé différemment. On voit donc qu'il y a des incertitudes sur la localisation de l'objet, sa géométrie et sa dynamique ; ces incertitudes s'ajoutent parfois aux incertitudes de modélisation du préhenseur lui-même. Il est donc nécessaire de définir des critères de robustesse pour la manipulation dextre, afin d'assurer la saisie et la manipulation ferme d'un objet sans le détériorer en présence d'incertitudes. Afin de robustifier le système, deux possibilités peuvent être mises en œuvre :

1. L'ajout de capteurs : en récoltant plus d'informations sur son environnement, le préhenseur peut identifier les incertitudes en ligne. Deux types de capteurs existent : les capteurs extéroceptifs et les capteurs proprioceptifs. Les capteurs extéroceptifs sont externes au préhenseur, tel que la vision, alors que les capteurs proprioceptifs sont internes aux préhenseurs. Nous avons vu précédemment qu'il y avait un dilemme entre dextérité et complexité mécanique ; l'ajout de capteurs peut aussi complexifier la conception mécanique. Il peut donc devenir difficile d'ajouter des capteurs sur un préhenseur : comme le montre le tableau 1.1, aucun préhenseur ne dispose actuellement d'une instrumentation complète. De plus, les capteurs ne peuvent pas identifier certaines incertitudes environnementales : il paraît difficile d'évaluer l'inertie d'un objet avant de l'avoir manipulé.
2. Définir des critères de robustesse dans la commande : la stratégie de commande peut prendre en compte les incertitudes de modèle et de saisie afin d'assurer la bonne réalisation de la tâche de manipulation en présence de ces incertitudes. Cette méthode évite de reprogrammer un nouveau correcteur à chaque fois que l'on change d'objet ou que l'objet est saisi différemment. La commande intègre ces changements comme des incertitudes environnemen-

tales et le préhenseur réalise la tâche dans un environnement incertain.

— **Opérabilité** : La mise en œuvre de préhenseur dextre est complexe pour deux raisons :

1. l'augmentation du nombre de d.d.l. implique des stratégies de commande plus complexes, qui doivent gérer de nouveaux aspects tels que la redondance (un robot est redondant lorsque le nombre de d.d.l. du mécanisme est inférieur au nombre d'articulations motorisées). La redondance autorise donc des mouvements internes, c'est-à-dire que le préhenseur peut se déplacer sans modifier la position de l'objet saisi. Ceci implique qu'il peut exister une infinité de saisies pour une position donnée de l'objet. La modélisation du système et la commande doivent alors prendre en compte cet aspect et une stratégie doit être proposée afin de déterminer la saisie la plus adaptée.
2. Le préhenseur interagit avec un objet, il est donc nécessaire de gérer le contact entre le préhenseur et l'objet. En effet, si le préhenseur saisit l'objet de manière inappropriée, celui-ci peut glisser, voir tomber. La commande du préhenseur doit donc intégrer des contraintes liées à la saisie et au contact afin d'éviter toute instabilité de la prise.

Ces nouvelles contraintes ont tendance à complexifier la stratégie de commande du préhenseur. Si l'opérateur doit reconfigurer le système pour une nouvelle tâche, il devra peut-être synthétiser un nouveau correcteur. L'ajout de nouvelles contraintes et une structure de commande plus élaborée peut rendre cette synthèse difficile et plus longue. Ainsi, les commandes de préhenseurs multidigitaux peuvent s'avérer difficile à reprogrammer ou à modifier, ce qui va à l'encontre du critère d'opérabilité demandé au préhenseur dextre. Récemment, de nouvelles commandes cherchent à améliorer l'opérabilité, par exemple en gérant la redondance [Bicchi et al. (2011)].

Au-delà de la structure mécanique du préhenseur, on constate que les trois fonctions (dextérité, robustesse, opérabilité) permettant de réaliser de la préhension et de la manipulation dextre sont fortement dépendantes de la commande du préhenseur.

1.3 Objectifs

Le but de cette thèse est de proposer une commande pour la manipulation dextre permettant d'améliorer la dextérité, la robustesse et l'opérabilité des préhenseurs en tirant profit d'une instrumentation et d'une complexité de l'architecture de contrôle minimaliste.

Pour cela, on se place dans le contexte suivant : au vu des contraintes mécaniques fortes imposées aux préhenseurs dextres, on considère le cas d'un préhenseur aux capacités de perception réduites (peu de capteurs disponibles) et opérant dans un environnement mal connu (e.g. géométrie et localisation de l'objet à manipuler mal connues).

Préhenseur	Capteurs					
	Position moteur	Position articulaire	Couple articulaire	Tension des tendons	Tactile intrinsèque	Matrice tactile
Okada Hand	+	+	-	-	-	-
Stanford/JPL Hand	+	-	-	+	+	+
Utah/MIT Hand	+	+	-	+	-	+
Belgrade/USC Hand	+	+	-	-	-	+
Barret Hand	+	-	+	-	-	-
UB Hand II	+	+	-	-	+	-
DLR Hand I	+	+	+	-	+	+
LMS Hand	+	+	-	+	-	-
DIST Hand	+	+	-	?	+	-
Robonaut Hand	+	+	?	+	-	+
Tokyo Hand	+	-	-	-	-	+
DLR Hand II	+	+	+	-	+	-
Tuat/Karlsruhe Hand	+	-	-	-	-	-
Ultralight Hand	+	+	-	-	-	+
Gifu Hand	+	?	?	?	+	+
Shadow Hand	-	+	?	-	+	+
CEA ABILIS	+	-	+	-	-	-
CEA HANDLE	+	-	+	-	-	-

légende : + → présence, - → absence, ? → donnée non disponible

TABEAU 1.1 – Capteurs des préhenseurs dextres (adapté de [Biagiotti et al. (2008)])

La robustesse à un environnement incertain est assez peu abordée dans la littérature. Pourtant, comme nous l'avons vu précédemment, il s'agit d'un point crucial au développement des préhenseurs et de la manipulation dextre. Le préhenseur peut perdre le contact avec l'objet saisi en présence d'incertitudes si celles-ci ne sont pas prises en compte, et peu de préhenseurs disposent de systèmes de perception suffisants leur permettant d'avoir une connaissance parfaite de leur environnement - le tableau 1.1 présente les capacités sensorielles de plusieurs préhenseurs, et on voit qu'aucun d'entre eux ne dispose d'une instrumentation complète. Jusqu'à présent, la plupart des commandes de manipulation dextre supposent une connaissance des points de contact entre le préhenseur et l'objet à manipuler. En pratique, si le préhenseur ne dispose pas de capteurs tactiles, ces points de contact peuvent être incertains (géométrie du préhenseur ou de l'objet incertaine, mauvaise calibration...). Il paraît donc indispensable de mettre en place des mécanismes assurant la robustesse du système.

L'idée proposée dans nos travaux est de considérer la problématique de l'environnement incertain au niveau de la stratégie de commande du préhenseur afin d'améliorer la robustesse de la manipulation dextre. On peut alors définir les objectifs de commande suivants :

- Assurer une saisie stable de l'objet ;
- Assurer la manipulation stable de l'objet ;
- Assurer la robustesse à un environnement incertain.

D'après la figure 1.3, ces objectifs s'apparentent au niveau 6 de la capacité de manipulation défini selon la feuille de route de la recherche européenne [SPARC (2015)].

Les travaux que nous proposons dans ce mémoire portent notamment sur la prise en précision d'un objet et sa manipulation dextre. La plupart des travaux sur les préhenseurs multidigitaux s'intéressent soit à la prise de l'objet, soit à la manipulation dextre. Ici, nous chercherons à répondre aux deux problèmes en présence d'incertitudes : qualification de la prise d'un objet, et ensuite, commander le préhenseur pour réaliser la tâche souhaitée. Le cadre de travail auquel nous nous rattachons concerne l'étude de la robustesse vis-à-vis d'un environnement incertain, et notamment l'étude de la robustesse vis-à-vis des incertitudes sur les surfaces de contact, ainsi que la robustesse aux dispersions du modèle.

En définitive, nous souhaitons apporter des réponses aux problèmes suivants :

- Q1** Comment qualifier la prise d'un objet par le préhenseur lorsqu'il y a des incertitudes sur les contacts, et plus généralement, sur l'ensemble du système ?
- Q2** Comment assurer le positionnement d'un objet par le préhenseur dans un environnement incertain ?
- Q3** Comment assurer un suivi de trajectoire de l'objet dans un environnement incertain en suivant une tâche spécifique à réaliser ?

Pour répondre à ces questions, nos travaux présentent les résultats suivants :

- R1** Une mesure pour évaluer la prise en précision, en présence d'incertitudes sur

les points de contact. Un nouveau concept d'espace atteignable en présence d'incertitudes est proposé. Cet algorithme permettra de choisir la prise - pour saisir l'objet - la plus robuste aux incertitudes sur les points de contact.

R2 Une commande du préhenseur robuste à un environnement incertain. Ici, même si les points de contact sont incertains, la manipulation dextre de l'objet par le préhenseur doit pouvoir être réalisée.

R3 Une commande du préhenseur robuste à un environnement incertain et permettant d'assurer un suivi de trajectoire de l'objet suivant un objectif donné, i.e. une trajectoire spécifique. L'idée est ici de découpler les mouvements du préhenseur (horizontal, vertical, rotation) afin d'assurer un meilleur suivi de trajectoire.

1.4 Plan du mémoire

Le mémoire est structuré de la manière suivante :

Chapitre 2 Cette partie présente les outils méthodologiques permettant de définir le système de manipulation dextre. Une nouvelle modélisation de la dynamique du système tenant compte de la redondance y est notamment proposée.

Chapitre 3 Ce chapitre est consacré à l'étude de la qualité d'une prise en présence d'incertitudes sur les points de contact. Une mesure de la qualité d'une prise dans ces conditions est proposée.

Chapitre 4 Dans cette partie, nous proposons une commande robuste aux incertitudes sur le point de contact. Cette commande peut être formulée sous la forme d'une commande en impédance. Par la suite, nous imposons un objectif supplémentaire permettant d'assurer le suivi de trajectoire. La commande proposée est alors robuste aux incertitudes et dispersion du modèle et assure un découplage de l'objectif de manipulation dans l'espace de l'objet.

Conclusion Des conclusions et perspectives sont proposées dans cette partie.

Chapitre 2

Modèles pour la manipulation dextre et incertitudes de contact

Sommaire

2.1	Introduction	18
2.2	Cas d'étude	18
2.3	Etude statique d'un préhenseur multidigital	19
2.3.1	Définition de la saisie	19
2.3.2	Propriétés générales	25
2.3.3	Espace des forces de contact et des torseurs dynamiques	26
2.4	Incertitudes sur le point de contact	28
2.4.1	Origines des incertitudes	28
2.4.2	Formulation mathématique des incertitudes	29
2.4.3	Conséquences des incertitudes	30
2.5	Modélisation dynamique pour la manipulation dextre	30
2.5.1	Approches proposées dans la littérature	30
2.5.2	Proposition d'une nouvelle modélisation	32
2.5.3	Détermination de la représentation d'état du système	33
2.5.3.1	Description générale des dynamiques du système	33
2.5.3.2	Mise sous forme assemblée des équations dynamiques	34
2.5.3.3	Prise en compte de la redondance	35
2.5.3.4	Suppression des états liés	35
2.5.3.5	Détermination de l'équation d'état	37
2.5.3.6	Expression des forces de contact	38
2.5.4	Étude de la commandabilité du système	39
2.5.5	Conclusions	40
2.5.6	Remarque : Lien avec les synergies	41

2.1 Introduction

Ce chapitre présente l'ensemble des outils et propriétés propres à la manipulation dextre et aux préhenseurs multidigitaux. En outre, nous présentons un système expérimental qui sera exploité tout au long du manuscrit.

Dans un premier temps, l'étude statique du système préhenseur/objet est développée en se basant sur le formalisme développé par [Murray et Sastry (1994)] et qui fait appel à des notions de mécanique du solide qui sont rappelées dans l'annexe A. Cette analyse montre que la saisie de l'objet est définie au travers de contraintes sur les points de contact. Ces contraintes permettent de lier les mouvements du préhenseur aux mouvements de l'objet et sont établies à partir de considérations géométriques et de la modélisation des frottements. Au-delà de ces considérations, nous nous intéresserons à l'implication d'incertitudes sur les points de contact dans la modélisation cinématique du système. Nous verrons quelles peuvent être les origines de ces incertitudes, leurs conséquences, et nous proposerons un formalisme pour les modéliser.

Dans un second temps, l'évaluation de la manipulabilité d'un système préhenseur/objet est présentée. On entend par manipulabilité la capacité du préhenseur à réorienter et manipuler l'objet. Les forces de contact appliquées par le préhenseur sur l'objet sont contraintes. On peut donc déterminer l'ensemble des forces de contact applicables à l'objet, et par la suite déduire l'ensemble des torseurs dynamiques que le préhenseur peut appliquer sur l'objet. Cet ensemble permet de quantifier la manipulabilité du système.

Dans un troisième temps, nous proposons une modélisation dynamique d'un préhenseur robotique saisissant un objet. La modélisation d'un tel système est une étape cruciale, car elle sert de base aux études proposées.

2.2 Cas d'étude

Le cas d'étude considéré dans le manuscrit porte sur la prise et la manipulation d'un objet par un préhenseur bidigital, chacun des doigts ayant trois degrés de liberté dont deux motorisés (Fig. 2.1). La troisième articulation est sous-actionnée : aucun actionneur n'est dédié au mouvement de cette articulation et son mouvement est couplé au mouvement de l'articulation 2. On considère seulement les mouvements dans le plan de l'objet (axes x et y) et son orientation (θ).

Les deux doigts sont écartés au niveau de leurs bases d'une longueur $l_0 = 11,03cm$. Les segments des doigts ont la même taille, avec pour le premier segment $l_1 = 4,56cm$, le second $l_2 = 2,56cm$ et le troisième $l_3 = 4,09cm$.

L'objet à manipuler est un cube creux en plastique de 13g. Il s'agit de l'objet du système nominal, mais par la suite, d'autres objets ayant une géométrie et des propriétés

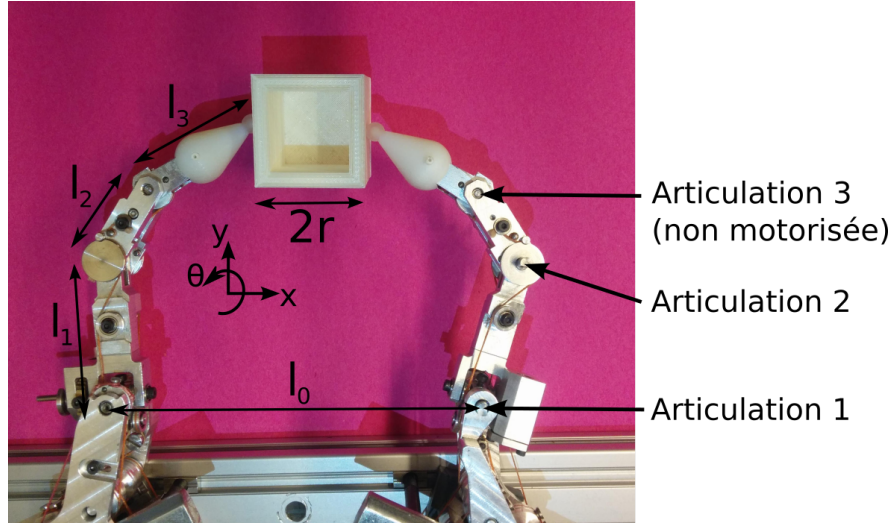


FIGURE 2.1 – Système expérimental

dynamiques différentes seront manipulés. Les contacts entre le préhenseur et l'objet sont considérés comme ponctuels.

L'inertie et les frottements visqueux des segments constituant le préhenseur sont négligeables par rapport à l'inertie et aux frottements visqueux des moteurs ramenés au niveau articulaire. De plus, la gravité n'affecte pas le système pour les mouvements plans (la gravité est orientée selon l'axe z).

2.3 Etude statique d'un préhenseur multidigital

Nous allons considérer l'étude cinématique de la prise d'un objet par un préhenseur multidigital. L'objectif de cette partie est de définir la saisie d'un objet par un préhenseur et de présenter quelques propriétés générales sur la saisie.

2.3.1 Définition de la saisie

Lors de la prise en précision d'un objet par un préhenseur, chaque i -ème phalange distale (dp_i) applique une force f_{c_i} sur l'objet aux points de contact C_i dans le but de maintenir l'objet stable. On associe à chaque point de contact C_i un repère c_i tel que l'axe z_c soit normal à la surface et pointe vers l'intérieur de l'objet, et tels que les axes x_c et y_c soient tangents à la surface et orthogonaux entre eux (en 2D, on choisit comme convention l'axe y_c normal à la surface) (Fig. 2.2).

Les forces de contact f_{c_i} dépendent du type de contact. On peut en répertorier trois types :

- Point de contact sans frottement (*Frictionless Point Contact*, FPC) : seule une force normale $f_{c_{iz}}$ peut être appliquée ($f_{c_i} = [f_{c_{iz}}] \in \mathbb{R}^+$).

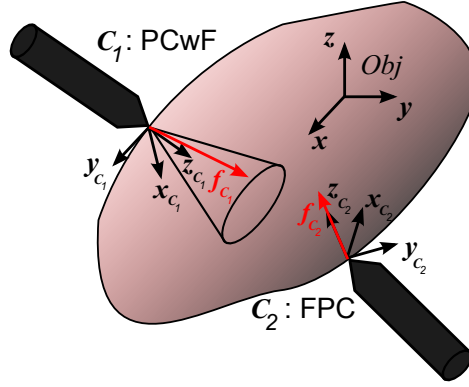


FIGURE 2.2 – Saisie d'un objet.

- Point de contact avec frottement (*Point Contact with Friction*, PCwF) : des forces normales $f_{c_{iz}}$ et tangentes $f_{c_{ix}}, f_{c_{iy}}$ sont appliquées ($f_{c_i} = [f_{c_{ix}} f_{c_{iy}} f_{c_{iz}}]^T \in \mathbb{R}^3$). D'après la loi de Coulomb, un glissement se produit sur le point de contact lorsque :

$$\sqrt{f_{c_{ix}}^2 + f_{c_{iy}}^2} > \mu f_{c_{iz}} \quad (2.1)$$

Ainsi, pour éviter tout glissement du point de contact et prendre en compte le fait que la force appliquée soit unilatérale, on impose les contraintes de type cône de frottement sur les forces de contact (Fig. 2.2) :

$$f_{c_{iz}} \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\sqrt{f_{c_{ix}}^2 + f_{c_{iy}}^2} \leq \mu f_{c_{iz}} \quad (2.3)$$

où μ est le coefficient de frottement ; sa valeur dépend du type de surface du doigt et de l'objet au point de contact.

- *Soft Finger Contact* (SFC) : ce type de contact autorise l'application de forces de contact normales $f_{c_{iz}}$, tangentielles $f_{c_{ix}}, f_{c_{iy}}$, ainsi qu'un moment $m_{c_{iz}}$ autour de l'axe z_c ($f_{c_i} = [f_{c_{ix}} f_{c_{iy}} f_{c_{iz}} m_{c_{iz}}]^T \in \mathbb{R}^4$). Comme pour le type de contact précédent, des contraintes doivent être appliquées afin d'éviter tout glissement du point de contact :

$$f_{c_{iz}} \geq 0 \quad (2.4)$$

$$\sqrt{f_{c_{ix}}^2 + f_{c_{iy}}^2} \leq \mu f_{c_{iz}} \quad (2.5)$$

$$|m_{c_{iz}}| \leq \gamma f_{c_{iz}} \quad (2.6)$$

avec $\gamma > 0$ le coefficient de frottement en torsion.

Cas d'étude

On fait l'hypothèse de contacts ponctuels avec frottements pour le système expérimental vu en 2.2. Comme nous ne considérons que les mouvements plans, les repères C_i des points de contact sont construits de la manière suivante : l'origine

du repère c_i est fixé sur le point de contact C_i , y_{c_i} est l'axe normal à la surface de contact, et x_{c_i} est l'axe tangent à la surface de contact. On fait l'hypothèse que le coefficient de frottement μ est égal à 1. En outre, comme on considère uniquement les mouvements plans, les contraintes de cônes de frottement peuvent être écrites sous forme (Fig.2.3) :

$$\begin{cases} f_{c_y} \geq 0 \\ f_{c_y} \geq f_{c_x} \end{cases} \quad (2.7)$$

On obtient donc des contraintes exprimées sous forme linéaire.

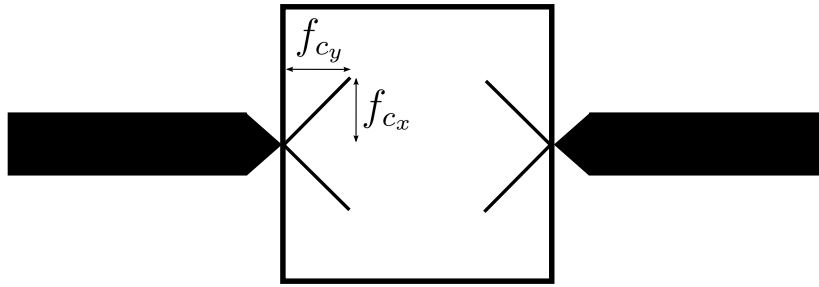


FIGURE 2.3 – Cônes de frottement pour le système expérimental

Type de Contact	Image	Base du torseur B_i	Contraintes
Point de contact sans frottement		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$f_1 \geq 0$
Point de contact avec frottement		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$
Soft-Finger Contact		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$ $ f_4 \leq \gamma f_3$

FIGURE 2.4 – Récapitulatif des types de contact (adapté de [Murray et Sastry (1994)]).

La force de contact f_{c_i} peut être définie sous la forme d'un torseur $W_{dp_i \rightarrow o}$ des forces et moments appliqués sur l'objet par le préhenseur, défini dans un repère o lié rigidement

à l'objet par la relation suivante :

$$W_{dp_i \rightarrow o} = \underbrace{Ad_{g_{c_i/o}}^T B_i}_{G_i} f_{c_i} \quad (2.8)$$

avec B_i la matrice de sélection du type de contact transformant les forces de contact en torseurs de contact (Fig. 2.4), et $Ad_{g_{c_i/o}}^T$ la matrice adjointe réalisant le changement de base du repère de contact vers le repère de l'objet. La matrice de saisie partielle G_i est une matrice qui lie la force de contact f_{c_i} au torseur $W_{dp_i \rightarrow o}$ appliqué par le doigt dp_i sur l'objet.

En considérant l'ensemble des torseurs appliqués par les doigts sur l'objet, on a, dans le cas d'une préhension à p contacts :

$$W_{dp \rightarrow o} = W_{dp_1 \rightarrow o} + W_{dp_2 \rightarrow o} + \dots + W_{dp_p \rightarrow o} \quad (2.9)$$

En considérant (2.8), on trouve :

$$W_{dp \rightarrow o} = G_1 f_{c_1} + G_2 f_{c_2} + \dots + G_p f_{c_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_p \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} f_{c_1} \\ f_{c_2} \\ \dots \\ f_{c_p} \end{bmatrix}}_{f_c} \quad (2.10)$$

On obtient donc l'équation liant les forces de contact au torseur dynamique appliqué sur l'objet par les phalanges distales :

$$W_{dp \rightarrow o} = G f_c \quad (2.11)$$

avec G la matrice de saisie (*grasp map*) et $f_c = [f_{c_1}^T \ f_{c_2}^T \ \dots \ f_{c_n}^T]^T$ la concaténation des forces de contact des p doigts, chacune des forces f_{c_i} étant exprimées dans le repère c_i correspondant.

La matrice de saisie G est donc construite à partir de matrices de sélection dépendant du type de contact B_i , et à partir de matrices adjointes permettant de faire le changement de repère entre les repères de contact c_i et le repère objet o .

On retrouve la relation duale au niveau des vitesses :

$$v_c = G^T V_{o/w}^o \quad (2.12)$$

avec $v_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ le vecteur des vitesses des points de contact par rapport au repère monde et exprimées dans les repères c_i (la taille n_c de ce vecteur correspond à la taille de l'espace de contact et dépend du type et du nombre de contacts entre le préhenseur et l'objet), $V_{o/w}^o \in \mathbb{R}^{n_o}$ le torseur cinématique de l'objet par rapport au repère monde w , et exprimé dans le repère objet.

Cette première description permet de faire le lien entre l'objet et les points de contact. Il est aussi possible d'exprimer les variables articulaires du préhenseur multidigital en fonction des variables au niveau contact. Le lien se fait avec la matrice Jacobienne du préhenseur, qui décrit les vitesses au niveau des phalanges distales en fonction des vitesses articulaires :

$$v_c = J_h(q, x_o) \dot{q} \quad (2.13)$$

avec $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ les variables articulaires du préhenseur multidigital, $x_o := g_{o/w}$ la configuration de l'objet par rapport au repère monde, et $J_h^T(q, x_o) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_c}$ la matrice Jacobienne du préhenseur (comme définie dans [Murray et Sastry (1994)]).

On a la relation duale au niveau des couples :

$$\tau = J_h(q, x_o)^T f_c \quad (2.14)$$

Avec $\tau \in \mathbb{R}^{n_q}$ le vecteur des couples articulaires du préhenseur.

A partir des équations (2.12) et (2.13), on peut déduire la contrainte de saisie sans glissement (Fig. 2.5) :

$$J_h(q, x_o) \dot{q} = G^T V_{o/w}^o \quad (2.15)$$

Cette équation est très importante car elle fait le lien entre les variables articulaires et le déplacement de l'objet. Cette contrainte définit donc le contact et la saisie entre le préhenseur et l'objet.

Cas d'étude

On cherche à déterminer la matrice de saisie G du système expérimental (paragraphe 2.2). Dans le cas de deux contacts, on a :

$$G = \begin{bmatrix} Ad_{g_{oc_1}}^T B_{c_1} & Ad_{g_{oc_2}}^T B_{c_2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Pour chaque contact, il faut donc évaluer deux matrices : la matrice adjointe $Ad_{g_{oc_i}}^T$, qui définit la localisation du point de contact, et la matrice B_{c_i} , qui définit le type de contact. Dans le système expérimental, nous considérons des contacts ayant des frottements de Coulomb, on a donc :

$$B_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les matrices adjointes. Dans le cas 2D, la

matrice adjointe est construite de la manière suivante :

$$Ad_{g_{oc_i}} = \begin{bmatrix} R_{c_i} & p_{c_i\perp} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

avec R_{c_i} la matrice de rotation entre le repère de l'objet et le repère du contact C_i , p_{c_i} le vecteur de translation de l'origine du repère de l'objet vers l'origine du repère du contact c_i , et $p_{c_i\perp}$ la rotation de $-\frac{\pi}{2}$ de ce vecteur de translation.

Il faut ensuite inverser la matrice adjointe :

$$Ad_{g_{oc_i}}^{-1} = Ad_{g_{oc_i}^{-1}} = \begin{bmatrix} R_{c_i}^T & -R_{c_i}^T p_{c_i\perp} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Et enfin, on transpose la matrice obtenue en (2.19), on trouve :

$$Ad_{g_{oc_i}^{-1}}^T = \begin{bmatrix} R_{c_i} & 0_{2\times 1} \\ -p_{c_i\perp}^T R_{c_i} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

On détermine donc les matrices de rotation et les vecteurs de translation entre le repère de l'objet et le repère du contact. On trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} R_{c_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & R_{c_2} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ p_{c_1} &= \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix} & p_{c_2} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La longueur de l'objet étant égale à $2r$. On a donc la matrice de saisie suivante :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & r & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

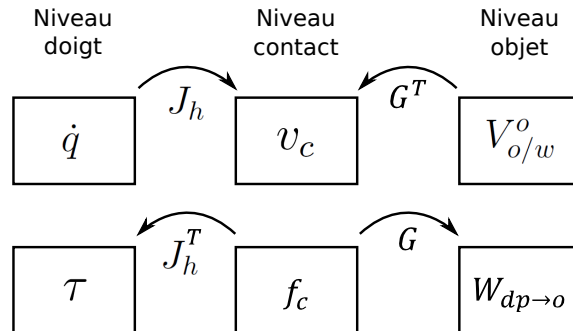


FIGURE 2.5 – Relations mathématiques de saisie ([Murray et Sastry (1994)]).

2.3.2 Propriétés générales

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés sur la saisie et la manipulation dextre à partir de préhenseurs multidigitaux.

Redondance cinématique ou mouvement interne : Le système est redondant si le préhenseur dispose de plus de degrés de liberté actionnés qu'il n'y a de degrés dans l'espace contact, et plus précisément si $Ker(J_h) \neq \emptyset$. Contrairement au robot manipulateur classique, il n'est pas nécessaire d'avoir plus de 6 d.d.l. pour avoir un système préhenseur/objet redondant. Comme un système de manipulation présente déjà des contraintes liées aux contacts (eq. 2.15), le nombre de d.d.l. nécessaire pour atteindre la redondance du mécanisme est réduit. Si on considère un doigt à 4 d.d.l. qui a un point de contact avec frottement de Coulomb sur un objet dans un espace à trois dimensions, le système dispose d'un d.d.l. redondant. Le noyau de J_h permet de décrire la redondance cinématique ; en effet, si on reprend la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses aux contacts :

$$v_c = J_h \dot{q} \quad (2.23)$$

Dans le cas où le système est redondant, la matrice J_h n'est pas carrée, on a $n_q > n_c$, et on peut l'étendre avec son noyau $N_h = Ker(J_h)$. On obtient alors la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} v_c \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_h \\ N_h \end{bmatrix} \dot{q} \quad (2.24)$$

avec v_n décrivant les mouvements internes du mécanisme, réalisant un déplacement du doigt sans déplacer l'objet. Dans la figure 2.6.a, on voit le cas d'un préhenseur ayant 2 doigts avec 4 d.d.l. La figure montre que l'on peut avoir plusieurs configurations du préhenseur pour la même position de l'objet.

Manipulabilité d'une saisie : Si un préhenseur est capable de réaliser n'importe quel mouvement de l'objet sans perdre le contact, on dit que la saisie est manipulable. Plus formellement, une saisie est manipulable à une configuration (q, x_o) si pour tout mouvement de l'objet $V_{o/w}^o$ il existe un mouvement des doigts $\dot{q}$ tel que (2.15) soit satisfaite. De cette définition, on peut en déduire la proposition suivante : *Une saisie est manipulable à la configuration (q, x_o) si et seulement si :*

$$Im(G^T) \subset Im(J_h) \quad (2.25)$$

Dans la figure 2.6.b, si on considère la saisie en 3 dimensions, le moment autour de l'axe x n'est pas contrôlable par le préhenseur, cette prise n'est donc pas manipulable.

Force-closure : Une saisie est *force-closure* s'il existe des forces de contact permettant de garder l'équilibre face à n'importe quels forces ou moments extérieurs.

Formellement, on définit cette propriété de la manière suivante : *Une saisie est force-closure si, quelque soit le torseur dynamique perturbateur $W_e \in \mathbb{R}^p$ appliqué sur l'objet, il existe des forces de contact satisfaisant les contraintes de frottements FC ($f_c \in FC$) telles que :*

$$Gf_c = -W_e \quad (2.26)$$

A partir de cette définition, on peut déduire la proposition suivante : *Une saisie est force-closure si et seulement si $G(FC) = \mathbb{R}^p$.*

Force interne ou redondance d'actionnement : Les forces internes sont des forces de contact qui ne produisent pas de mouvement sur l'objet, on a $f_i \in \text{Ker}(G) \cap FC$. Il s'agit de forces de serrage, qui améliorent la robustesse vis-à-vis de perturbations extérieures, tout en permettant le respect des contraintes de cônes de frottement. Les forces internes peuvent être une variable de commande permettant d'assurer que les forces de contact soient dans leurs cônes de frottements. La figure 2.6.c montre une saisie avec en bleu les forces internes appliquées sur l'objet. Ces forces se compensent et ne génèrent pas de mouvement tout en assurant une prise stable de l'objet.

Form-closure : La géométrie de la prise est telle qu'elle contraint complètement l'objet. La notion de *form-closure* correspond à la capacité d'immobilisation de l'objet par le préhenseur. Si on considère un espace d'ordre n , l'objet doit être entouré de n obstacles pour être *form-closure* (Figure 2.6.d).

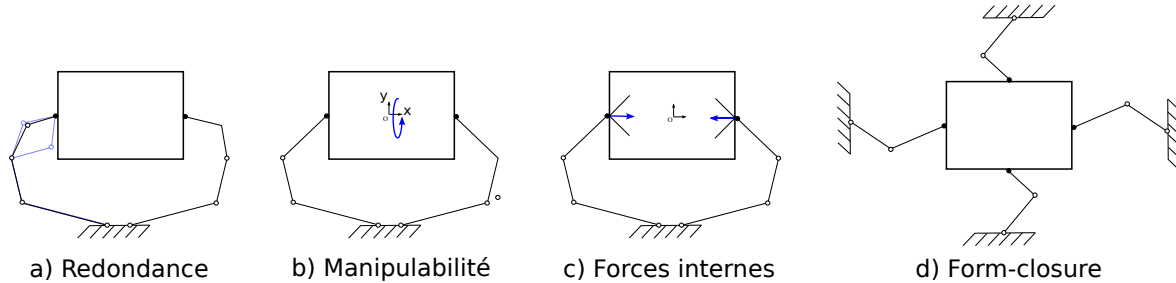


FIGURE 2.6 – Illustration des propriétés générales sur la manipulation dextre.

2.3.3 Espace des forces de contact et des torseurs dynamiques

Comme nous l'avons vu précédemment, les forces de contact sont contraintes si l'on souhaite éviter tout glissement, et en pratique, elles sont bornées (étant donné que ces forces sont issues des couples moteurs du préhenseur, eux-même bornés). Toutes ces contraintes peuvent être linéarisées (les contraintes des cônes de frottement peuvent notamment être linéarisées sous forme de pyramides à multiples facettes [Michalec (2011)]) et écrites sous la forme suivante :

$$\Lambda f_c \leq \beta \quad (2.27)$$

avec $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_{cn} \times n_c}$, n_{cn} étant le nombre de contraintes. Cette inégalité définit un polytope P_f de l'ensemble des forces de contact applicables sur l'objet, que l'on appelle l'*espace des forces de contact* :

$$f_c \in P_f \quad (2.28)$$

En se référant à l'équation (2.11), ce polytope peut être projeté selon la matrice de saisie G (Fig. 2.7). Le polytope résultant s'appelle l'*espace des torseurs dynamiques applicables à l'objet*, il représente l'ensemble des torseurs dynamiques que le préhenseur peut appliquer sur l'objet.

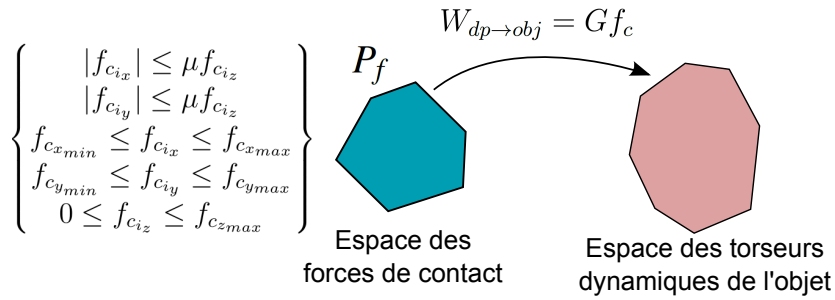


FIGURE 2.7 – Illustration des espaces de contact et de l'objet.

La définition de ces espaces est utile dans le choix d'une prise de l'objet et l'évaluation de leur qualité, comme nous le verrons dans le chapitre 3.

Cas d'étude

Pour le cas d'étude, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\mu & 0 & 0 \\ 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & 1 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{c1x} \\ f_{c1y} \\ f_{c2x} \\ f_{c2y} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ces contraintes définissent le polytope P_f , et en projetant selon la matrice de saisie G , on peut évaluer l'espace des torseurs dynamiques (Fig. 2.8).

Afin de réaliser la projection de polytopes en pratique, nous avons utilisé la tool-

box MPT sur Matlab [Kvasnica et al. (2004)]. Cette toolbox propose des méthodes computationnelles en géométrie et permet donc de réaliser des calculs sur les polytopes. La projection du polytope P_f selon G peut se faire directement si la matrice G est carrée ; si la matrice de saisie n'est pas carrée, il faut suivre trois opérations :

- On définit la matrice carrée G_{extend} , la concaténation de la matrice G et d'une base de l'image de la matrice G .
- On réalise la transformation affine du polytope P_f selon G_{extend} . On utilise pour cela l'application *range* de la toolbox MPT.
- On réalise la projection du polytope résultant de l'étape précédente selon les premières dimensions correspondant à G (les dimensions ajoutées par la définition de G_{extend} sont superficielles pour la détermination de l'ensemble des torseurs dynamiques applicables à l'objet).

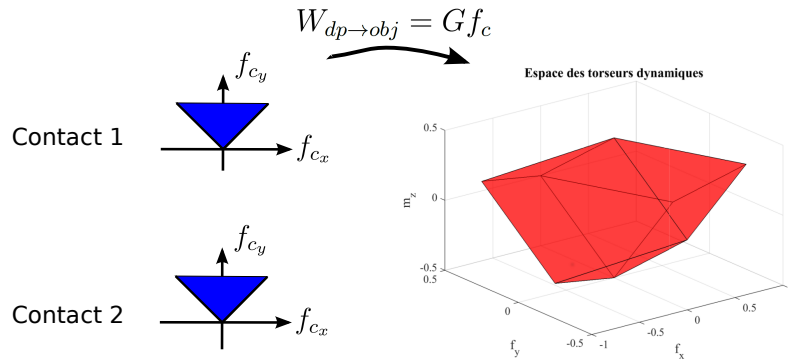


FIGURE 2.8 – Projection de l'espace de contact selon G (cas d'étude).

2.4 Incertitudes sur le point de contact

2.4.1 Origines des incertitudes

Dans cette partie, nous allons voir comment sont engendrées les incertitudes sur les points de contact. Nous avons recensé quatre sources possibles :

- Une erreur sur la surface de contact (Fig. 2.9.a) : la modélisation de la surface de l'objet peut parfois être simplifiée ou erronée. Or, par définition, l'axe z_c du repère du contact est normal à la surface. Si la surface est mal modélisée, ce repère est mal orienté.
- Une erreur sur la localisation de l'objet (Fig. 2.9.b) : cette erreur peut apparaître en cas de mauvaise calibration de l'asservissement visuel, ou lorsqu'il n'y a pas d'asservissement visuel et que l'objet est mal placé par rapport aux données initiales. Cette erreur produit un décalage entre le repère de l'objet réel et le repère de l'objet fictif (repère défini dans la commande).
- Des incertitudes sur la modélisation du préhenseur qui sont répercutées au niveau contact (Fig. 2.9.c) : si le modèle géométrique du préhenseur est entaché

d'erreurs, celles-ci entraînent des incertitudes sur la matrice Jacobienne du préhenseur, les positions articulaires réelles ne vont pas correspondre aux positions articulaires calculées. Le point de contact calculé sera donc décalé de sa position réelle. On peut noter que cette erreur est introduite seulement si on déduit la position des points de contact à partir des positions articulaires.

- Une erreur sur l'hypothèse de point de contact fixe, qui peut arriver lorsque l'on a un contact surfacique approximé par un contact ponctuel ou lorsqu'il y a du roulement lors de la manipulation. Par exemple, on fait l'hypothèse que le point de contact est fixe, mais en pratique, si le contact est souple (*Soft Finger Contact*), le point de contact équivalent est inconnu.

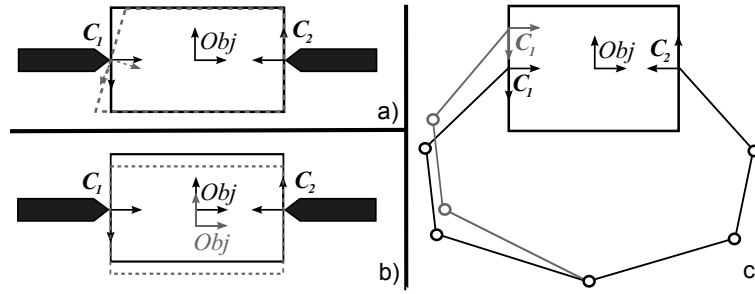


FIGURE 2.9 – Origines des incertitudes sur les points de contact.

Notons que d'autres incertitudes de modèle peuvent être présentes, comme une incertitude sur le type de matériaux de l'objet, entraînant une incertitude sur le coefficient de frottement μ . Dans ces travaux, nous ne considérons pas ce type d'erreur et nous nous focalisons sur les incertitudes géométriques.

2.4.2 Formulation mathématique des incertitudes

Les incertitudes géométriques impactent la localisation des repères de contact et celui de l'objet. Ces repères sont définis à partir de la matrice de saisie G , et c'est donc cette matrice qui est affectée par les incertitudes géométriques. On peut alors modéliser les incertitudes sur le point de contact de la manière suivante :

$$G_r = G_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i G_i \quad (2.30)$$

avec G_0 la matrice de saisie au point nominal, p le nombre d'incertitudes, G_i une matrice représentant la structure de la i ème incertitude, et $\delta_i \in [\delta_{i_{min}}; \delta_{i_{max}}]$ l'amplitude de la i ème incertitude. On ne considère ici que de faibles incertitudes, de l'ordre de 15 % de la valeur nominale du coefficient de la matrice G_0 affecté par cette incertitude. De plus, afin de simplifier l'étude, on considère que ces incertitudes évoluent linéairement.

Pour la suite, on définit le vecteur $\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_p]^T \in P_\delta \subset \mathbb{R}^p$. L'ensemble des valeurs que les incertitudes peuvent prendre est donc caractérisé par un polytope P_δ .

2.4.3 Conséquences des incertitudes

Les incertitudes sur le point de contact peuvent avoir des conséquences néfastes sur la saisie et la manipulation dextre.

Elle peuvent engendrer une erreur de suivi. Alors que le torseur dynamique désiré vaut :

$$W_{dp \rightarrow o}^{(d)} = G_0 f_c \quad (2.31)$$

le torseur dynamique qui est réellement appliqué vaut :

$$W_{dp \rightarrow o}^{(r)} = G_r f_c \quad (2.32)$$

En explicitant la matrice de saisie réelle avec (2.30), on trouve :

$$W_{dp \rightarrow o}^{(r)} = W_{dp \rightarrow o}^{(d)} + \sum_{i=1}^p \delta_i G_i f_c \quad (2.33)$$

On voit donc que les incertitudes ajoutent un torseur dynamique supplémentaire non désiré, engendrant une erreur de suivi.

Au delà d'une erreur de suivi de trajectoire, ces incertitudes peuvent impacter la stabilité du système. Si l'erreur de localisation est trop grande, la contrainte sur les cônes de frottement n'est plus respectée, les doigts peuvent alors glisser, entraînant la perte de la prise de l'objet. Dans la Figure 2.10, la prise est stable si la ligne connectant les deux points de contact reste à l'intérieur des cônes de frottement.

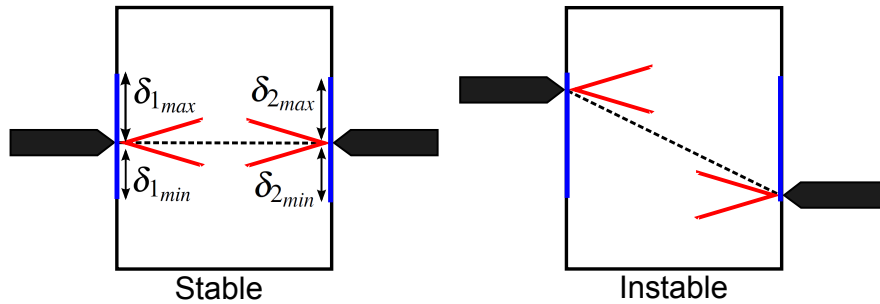


FIGURE 2.10 – Perte de la stabilité due à des incertitudes des points de contact.

Ces exemples montrent qu'il est nécessaire d'évaluer la robustesse d'une prise vis-à-vis d'incertitudes sur le point de contact et de proposer une mesure de qualité de prise tenant compte de ces incertitudes (chapitre 3).

2.5 Modélisation dynamique pour la manipulation dextre

2.5.1 Approches proposées dans la littérature

La manipulation dextre avec préhenseur multidigital compte déjà plusieurs décennies de recherche, et malgré cet âge avancé, la proposition d'un cadre formel de modélisation

du système préhenseur/objet reste toujours un sujet ouvert [Li (2016)].

Les phénomènes physiques régissant ces systèmes ont été très rapidement compris et mis en équation. Ceci a permis de réaliser des premières commandes de préhenseurs multi-digitaux par une approche plutôt mécanicienne. Les modèles et commandes développés sont soit statiques [Kerr et Roth (1986)] soit dynamiques [Nagai et Yoshikawa (1993)]. Aujourd'hui encore, les modèles statiques sont largement utilisés car ils permettent une bonne compréhension des phénomènes physiques, ainsi que le développement de commandes intuitives. En contre-partie, pour satisfaire l'hypothèse quasi-statique, la commande doit rester assez lente pour ne pas exciter les modes rapides du système.

En 1994, la publication de [Murray et Sastry (1994)] a été un jalon marquant pour la recherche en manipulation dextre. En posant clairement les bases mathématiques pour la manipulation dextre, ce livre est devenu une référence pour la communauté. L'étude des modèles statiques et dynamiques y est détaillée, et une approche de modélisation relevant du champ de l'automatique y est aussi présentée. Une représentation d'état niveau objet est proposée, avec l'hypothèse que la matrice Jacobienne du préhenseur est carrée, i.e. système non redondant. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, une autre représentation d'état est proposée, en complétant la matrice Jacobienne par des lignes indépendantes, issues d'une base du noyau de la matrice Jacobienne en question. On obtient alors une matrice carrée inversible, la représentation d'état est alors réalisable. L'état est constitué des positions et vitesses de l'objet, ainsi que les mouvements internes, dus à la redondance du préhenseur.

La modélisation d'un préhenseur robotique manipulant un objet présente des particularités dues à la présence de variables dépendantes entre elles qu'il est nécessaire d'éliminer afin d'avoir un modèle à la fois réaliste et commandable. En considérant des raideurs aux points de contact, il est possible d'éliminer ces dépendances. Cette modélisation peut être linéarisée et mise sous forme de représentation d'état [Prattichizzo et Bicchi (1998)].

Il est aussi possible de modéliser le système préhenseur/objet en se basant sur le formalisme des robots parallèles [Borràs et Dollar (2013)]. En effet, si on considère les points de contact comme des liaisons sphériques non commandables, on a la structure d'un robot parallèle. Plus précisément, on considère q l'ensemble des articulations de tous les doigts du préhenseur. Chaque valeur de q détermine une configuration du préhenseur, mais les seules configurations faisables pour la manipulation d'un objet sont celles qui respectent des contraintes cinématiques $H(q) = 0$, correspondant le plus souvent à des contraintes de distances entre les bouts de doigts du préhenseur. Ce modèle propose un cadre adapté à la modélisation de système sous-actionné. En revanche, il ne considère pas la dynamique du système.

2.5.2 Proposition d'une nouvelle modélisation

On souhaite proposer une modélisation adaptée à l'étude et l'analyse du système préhenseur/objet à partir d'outils issus du champ de l'automatique (e.g. étude de la commandabilité, de l'observabilité, analyse de la stabilité, proposition de commandes classiques comme le retour d'état, etc).

Dans ce cadre, le système complet doit pouvoir s'exprimer sous la forme d'équations différentielles, avec en entrée les couples articulaires (variables commandées) et en sortie la position de l'objet (variables à asservir).

Une modélisation exprimée dans l'espace de l'objet présente, par rapport aux objectifs fixés, les avantages suivants :

- Les positions de l'objet sont directement exprimées comme les variables à asservir.
- Les contraintes sur les points de contact peuvent être exprimées au travers de la dynamique.
- Le modèle peut s'écrire sous la forme d'équations différentielles. En effet, on réalise une projection des variables articulaires dans l'espace objet, la dynamique du préhenseur est alors exprimée dans l'espace objet tout en restant sous la forme d'équations différentielles. A contrario, une modélisation du système préhenseur/objet au niveau articulaire implique d'exprimer les variables objets dans l'espace articulaire, donc vers une dimension possiblement plus grande si le préhenseur est redondant (dans le cas où le préhenseur est redondant, la dimension de l'espace articulaire est plus grande que celle de l'espace objet), il faut alors introduire des contraintes supplémentaires. Ces contraintes ne permettent pas d'exprimer le modèle uniquement à partir d'équations différentielles.

Une fois les équations différentielles obtenues, on peut exprimer le modèle sous la forme d'une représentation d'état, qui peut se rapprocher du modèle proposé dans [Murray et Sastry (1994)]. Dans le modèle que nous proposons, l'état est constitué des variables objets et des variables articulaires, alors que celui de [Murray et Sastry (1994)] présente un vecteur d'état constitué des variables objets et des mouvements internes. Or, les mouvements internes ne sont pas mesurables directement. Ils peuvent par contre être déduits des vitesses articulaires.

Tout au long du développement du modèle, une attention a été portée sur deux points :

- i) garder le sens physique des équations (par exemple vérifier que les transformations sur la matrice d'inertie n'altèrent pas sa structure de matrice symétrique définie positive),
- ii) ne pas appliquer de pseudo-inverse, afin de ne pas faire un choix particulier dans les calculs d'inversion.

Afin d'arriver à cette représentation, on adopte la démarche suivante :

- **Description des dynamiques** : cette première étape permet de formuler la

dynamique de chaque partie du système (i.e. objet, préhenseur) et de définir l'équations liant ces dynamiques entre elles.

- **Description de la dynamique assemblée** : cette étape a pour but d'exprimer toutes les équations précédentes sous une forme compacte et unifiée. Plus précisément, l'idée est d'inclure la contrainte liant les dynamiques entre elles dans les équations dynamiques elles-mêmes. Cette étape est détaillée en annexe B.1.
- **Prise en compte de la redondance** : à partir de l'équation obtenue lors de l'étape précédente, on exprime la redondance du système. En réalisant cette étape, on fait apparaître des variables articulaires redondantes qu'il est nécessaire de prendre en compte dans la dynamique du système.
- **Suppression des états liés** : la dynamique assemblée exprime les variables articulaires et le torseur cinématique de l'objet, or ces variables sont liées par les contraintes de contact. Afin d'éviter tout problème de commandabilité, on ré-exprime les variables articulaires en fonction du torseur cinématique de l'objet.
- **Mise sous forme de représentation d'état** : cette dernière étape consiste à définir l'équation dynamique à partir d'une paramétrisation locale et de la linéariser afin de retrouver l'équation d'état du système global.

2.5.3 Détermination de la représentation d'état du système

2.5.3.1 Description générale des dynamiques du système

Le système doit décrire la dynamique du préhenseur et celle de l'objet, ainsi que les contraintes liant ces deux dynamiques. Le système peut être formulé par les équations suivantes :

- La description dynamique du préhenseur robotique :

$$M_h(q)\ddot{q} + C_h(q, \dot{q})\dot{q} + B_h(q) - J_h^T(q, x_o)f_c = \tau \quad (2.34)$$

avec $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ (n_q étant le nombre d'articulations motorisées) respectivement les positions, vitesses et accélérations articulaires, $M_h(q) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ la matrice d'inertie symétrique et définie positive, $C_h(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ la matrice des effets Coriolis, centrifuge et des frottements, $B_h(q) \in \mathbb{R}^{n_q}$ la matrice de gravité, $f_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ les forces de contact, n_c étant la dimension de l'espace de contact, $J_h^T(q, x_o) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_c}$ la matrice Jacobienne du préhenseur, dépendant des positions articulaires et de $x_o := g_{o/w}$, la configuration de l'objet par rapport au repère monde, et $\tau \in \mathbb{R}^{n_q}$ les couples articulaires.

- La description dynamique de l'objet :

$$M_o \dot{V}_{o/w}^o + C_o V_{o/w}^o + B_o + G f_c = \mathbb{O} \quad (2.35)$$

avec $V_{o/w}^o \in \mathbb{R}^{n_o}$, avec n_o la dimension niveau objet ($n_o = 3$ en 2D, $n_o = 6$ en 3D), le torseur cinématique de l'objet par rapport au repère monde exprimé dans

le repère de l'objet (*body velocity* selon [Murray et Sastry (1994)]), $M_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ la matrice d'inertie symétrique et définie positive, $C_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ la matrice des effets Coriolis et centrifuge, $B_o \in \mathbb{R}^{n_o}$ la matrice de gravité, et $G \in \mathbb{R}^{n_o \times n_c}$ la matrice de saisie.

— La contrainte de contact sans glissement :

$$J_h(q, x_o) \dot{q} = G^T V_{o/w}^o \quad (2.36)$$

Cette contrainte cinématique permet de coupler la dynamique du préhenseur à celle de l'objet. Sans elle, les deux dynamiques restent indépendantes et il n'est alors pas possible de commander la position de l'objet à partir des variables articulaires du préhenseur, sauf si on prend en compte la dynamique de glissement et/ou roulement [Zheng et al. (2000)]. Les équations (2.34) et (2.35) peuvent aussi être couplées en faisant intervenir des raideurs entre les corps en contact [Prattichizzo et Bicchi (1998)].

Pour plus de clarté, les dépendances des matrices ne sont plus spécifiées, et les termes gravitationnels sont soit compensés soit négligeables. Au final, les équations dynamiques se simplifient de la manière suivante :

$$M_h \ddot{q} + C_h \dot{q} - J_h^T f_c = \tau \quad (2.37)$$

$$M_o \dot{V}_{o/w}^o + C_o V_{o/w}^o + G f_c = \mathbb{O} \quad (2.38)$$

$$J_h \dot{q} = G^T V_{o/w}^o \quad (2.39)$$

2.5.3.2 Mise sous forme assemblée des équations dynamiques

Les équations dynamiques précédentes peuvent s'exprimer sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} + (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} \dot{J}_h & -J_h^T P^{-1} \dot{G}^T \\ -G P^{-1} \dot{J}_h & G P^{-1} \dot{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

avec :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} & -J_h^T P^{-1} G^T M_o^{-1} \\ -G P^{-1} J_h M_h^{-1} & G P^{-1} G^T M_o^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$P = J_h M_h^{-1} J_h^T + G^T M_o^{-1} G \quad (2.42)$$

Une preuve est donnée en B.1.

2.5.3.3 Prise en compte de la redondance

Le système (2.40) présente une redondance cinématique. Ceci s'explique par un nombre de d.d.l. plus important que le nombre de variables à contrôler au niveau contact ($n_q > n_c$) : la matrice J_h n'est pas carrée. Afin d'exprimer cette redondance, il est possible de décomposer la matrice Jacobienne du préhenseur en deux sous-matrices :

$$\begin{bmatrix} J_o & J_i \end{bmatrix} = J_h T^{-1} \quad (2.43)$$

avec $J_o \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ décrivant la cinématique générant des mouvements sur l'objet, $J_i \in \mathbb{R}^{n_c \times (n_q - n_c)}$ décrivant la cinématique des mouvements internes (décrivant la redondance), et T **une matrice de changement de base telle que J_o est une matrice carrée inversible**. Cette condition permet de caractériser le fait que J_o décrit bien la cinématique de génération de mouvement niveau objet. On peut noter que le changement de base T n'est pas unique.

Cette décomposition de la matrice Jacobienne implique une décomposition des positions articulaires :

$$q = T^{-1} \begin{bmatrix} q_o \\ q_i \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

avec q_o (resp. q_i) les positions articulaires ou une combinaison de positions articulaires générant le mouvement de l'objet (resp. des mouvements internes).

2.5.3.4 Suppression des états liés

La dynamique assemblée présente plusieurs variables qui expriment la même notion (le déplacement de l'objet) à différents niveaux, ceci étant mis en valeur avec la prise en compte de la redondance :

- $\dot{q}_o$: cette variable permet d'exprimer le déplacement de l'objet à partir des variables articulaires du préhenseur ;
- $V_{o/w}^o$: cette variable exprime les vitesses de l'objet par rapport au repère inertiel.

Afin d'éviter cette redondance d'informations pouvant mener à des problèmes sur la commande du système, on exprime $\dot{q}_o$ en fonction de $V_{o/w}^o$.

En reprenant l'équation de contrainte (2.36), on obtient cette nouvelle décomposition :

$$\begin{bmatrix} J_o & J_i & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_o \\ \dot{q}_i \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} = \mathbb{O} \quad (2.45)$$

A partir de cette équation, on peut exprimer $\dot{q}_o$ en fonction de $\dot{q}_i$ et $V_{o/w}^o$:

$$\dot{q}_o = -J_o^{-1} J_i \dot{q}_i + J_o^{-1} G^T V_{o/w}^o \quad (2.46)$$

En dérivant, on trouve aussi une expression pour $\ddot{q}_o$:

$$\ddot{q}_o = -J_o^{-1} J_i \ddot{q}_i + J_o^{-1} G^T \dot{V}_{o/w}^o - ((J_o^{-1}) \dot{J}_i + J_o^{-1} \dot{J}_i) \dot{q}_i + ((J_o^{-1}) G^T + J_o^{-1} \dot{G}^T) V_{o/w}^o \quad (2.47)$$

On fait apparaître les variables q_o et q_i dans l'équation (2.40), et afin de conserver les propriétés de la matrice d'inertie, symétrique définie positive, on multiplie l'équation par la matrice $\begin{bmatrix} T^{-T} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$. Ensuite, on remplace $\dot{q}_o$ et $\ddot{q}_o$ par les expressions (2.46) et (2.47). On obtient :

$$M_f J_f \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \dot{V}_{o/w}^b \end{bmatrix} + C_f J_f \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ V_{o/w}^b \end{bmatrix} + (NL_f J_f + M_f J_{nl}) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ V_{o/w}^b \end{bmatrix} = T_f \tau \quad (2.48)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_f &= \begin{bmatrix} T^{-T} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-T} M_h T^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \\ C_f &= \begin{bmatrix} T^{-T} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-T} C_h T^{-1} - T^{-T} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} C_h T^{-1} & T^{-T} J_h^T P^{-1} G^T M_o^{-1} C_o \\ GP^{-1} J_h M_h^{-1} C_h T^{-1} & C_o - GP^{-1} G^T M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} \\ NL_f &= \begin{bmatrix} T^{-T} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} \dot{J}_h & -J_h^T P^{-1} \dot{G}^T \\ -GP^{-1} \dot{J}_h & GP^{-1} \dot{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-T} J_h^T P^{-1} \dot{J}_h T^{-1} & -T^{-T} J_h^T P^{-1} \dot{G}^T \\ -GP^{-1} \dot{J}_h T^{-1} & GP^{-1} \dot{G}^T \end{bmatrix} \\ T_f &= \begin{bmatrix} T^{-T} - T^{-T} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} \\ GP^{-1} J_h M_h^{-1} \end{bmatrix} \\ J_f &= \begin{bmatrix} -J_o^{-1} J_i & J_o^{-1} G^T \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ J_{nl} &= \begin{bmatrix} -((J_o^{-1}) \dot{J}_i + J_o^{-1} \dot{J}_i) & ((J_o^{-1}) G^T + J_o^{-1} \dot{G}^T) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $J_f, J_{nl} \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o) \times (n_q-n_c+n_o)}$

Afin d'écrire l'équation dynamique sous la forme d'une équation d'état, on multiplie (2.48) par J_f^T :

$$J_f^T M_f J_f \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \dot{V}_{o/w}^b \end{bmatrix} + J_f^T C_f J_f \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ V_{o/w}^b \end{bmatrix} + J_f^T (NL_f J_f + M_f J_{nl}) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ V_{o/w}^b \end{bmatrix} = J_f^T T_f \tau \quad (2.49)$$

2.5.3.5 Détermination de l'équation d'état

Paramétrisation locale :

L'équation (2.49) exprime la dynamique de l'objet à partir de son torseur cinématique. Afin d'exprimer la position et l'orientation de l'objet, variables à asservir, on exprime le torseur cinématique suivant une paramétrisation locale. Le détail des calculs est donné en annexe B.2 pour le cas d'une manipulation en 2D, on trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{x}_o \end{bmatrix} + (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_r^T J_f^T C_f J_f J_r \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} + \dots \\ & (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_f^T (N L_f J_f + M_f (J_{nl} + J_f J_{rnl})) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} \\ & = (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_f^T T_f \tau \end{aligned}$$

Avec :

$$J_r = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$J_{rnl} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R^{-1} \dot{R} R^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La matrice R représente le passage des torseurs à la paramétrisation locale ($\dot{x}_o = R V_{o/w}^b$).

Linéarisation et équation d'état :

Cette équation dynamique présente deux termes en fonction des vitesses, qui sont séparés volontairement car le deuxième terme présente des non linéarités d'ordre 2. En linéarisant autour d'un point d'équilibre à vitesse nulle $\begin{bmatrix} x_{o_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix}$, on peut écrire l'équation d'état suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_i \\ x_o \\ \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & -(J_{feq}^T M_f J_{feq})^{-1} J_{feq}^T C_{feq} J_{feq} & \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ x_o \\ \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ (J_{feq}^T M_f J_{feq})^{-1} J_{feq}^T T_{feq} \end{bmatrix} \tau \quad (2.52)$$

L'indice $(*)_{eq}$ désigne une matrice calculée au point d'équilibre et $J_{feq} = (J_f J_r)_{eq}$.

Cette modélisation est complète puisqu'elle définit la redondance du système. Il ne sera ainsi pas nécessaire d'exprimer la redondance au niveau de la commande [Albu-Schäffer et al. (2003)].

2.5.3.6 Expression des forces de contact

On peut exprimer les forces de contact dans le vecteur de sortie du système d'état, pour ensuite imposer des contraintes sur cette grandeur. On rappelle :

$$f_c = (JM^{-1}J^T)^{-1} [(JM^{-1}C - \dot{J})\dot{X} - JM^{-1}\Gamma] \quad (2.53)$$

Il faut exprimer les forces de contact en fonction de l'état et de l'entrée du système :

$$f_c = (JM^{-1}J^T)^{-1} (JM^{-1}C - \dot{J}) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} - (JM^{-1}J^T)^{-1} JM^{-1} \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

En développant, on trouve :

$$f_c = P^{-1} \begin{bmatrix} J_h M_h^{-1} C_h T^{-1} & -G^T M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} J_f \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} - P^{-1} \dot{J} J_f \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} - P^{-1} J_h M_h^{-1} \tau \quad (2.55)$$

On peut ensuite linéariser cette équation :

$$f_c = P_{eq}^{-1} \begin{bmatrix} J_{h_{eq}} M_h^{-1} C_h T^{-1} & -G^T M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} J_{f_{eq}} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} - P_{eq}^{-1} J_{h_{eq}} M_h^{-1} \tau \quad (2.56)$$

On peut remarquer que cette expression des forces de contact ne fait pas apparaître explicitement les forces internes, i.e. les forces appliquées sur l'objet mais non génératrices de mouvement de l'objet.

Cas d'étude

Le système expérimental présente les propriétés suivantes :

- Le système n'est pas redondant. Le préhenseur présente 4 articulations motorisées, et l'espace de contact est de dimension 4 lui aussi étant donné que l'on considère 2 points de contact avec frottements de type Coulomb pour des mouvements en 2D (donc $f_c = [f_{c_{1x}} \ f_{c_{1y}} \ f_{c_{2x}} \ f_{c_{2y}}]^T \in \mathbb{R}^4$). La matrice Jacobienne J_h est donc carrée. Il n'y a donc pas de mouvements internes des doigts pour une position fixe de l'objet.
- Les points de contact sont considérés fixes. La matrice G est alors constante. Cette hypothèse pourra être relâchée en considérant les incertitudes sur les points de contact.
- Les forces de contact doivent respecter les contraintes de forces unilatérales et de cônes de frottement. Cette propriété doit être validée par la commande.
- La saisie est manipulable, c'est-à-dire que le mouvement désiré peut être réalisé par les doigts. Dans ce cas, la matrice J_h est de rang ligne plein et ainsi inversible.
- L'influence de la gravité est négligée ou compensée par la loi de commande.

La modélisation du système se simplifie selon l'équation d'état suivante [Murray

et Sastry (1994)] :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{I}_{n_o \times n_o} \\ \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -M_{eq}^{-1} C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_q} \\ M_{eq}^{-1} G J_{h_{eq}}^{-T} \end{bmatrix} \tau \quad (2.57)$$

où les matrices constantes M_{eq} , C_{eq} and $J_{h_{eq}}$ définissent respectivement la matrice d'inertie du système, la matrice des effets Coriolis et centrifuge, et la matrice Jacobienne du préhenseur au point d'équilibre $[x_{o_{eq}} \ 0]^T$, et $\tilde{x}_o$ représente la variation de x_o autour du point d'équilibre.

De plus, les forces de contact peuvent être reformulées en fonction de l'état du système $[\tilde{x}_o \ \dot{\tilde{x}}_o]^T$, en reformulant la dynamique de l'objet :

$$M_o \ddot{\tilde{x}}_o + C_o \dot{\tilde{x}}_o + G f_c = 0 \Leftrightarrow G f_c = \begin{bmatrix} -C_o & -M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_o \\ \ddot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Avec (2.57) et en appliquant la pseudo-inverse de G , f_c peut être déduit :

$$f_c = G^+ \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -C_o + M_o M_{eq}^{-1} C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} - G^+ M_o M_{eq}^{-1} G J_{h_{eq}}^{-T} \tau + N_G \lambda \quad (2.59)$$

Le terme $N_G \lambda \in \text{Ker}(G)$ est défini par N_G une base du noyau de G qui spécifie la non-unicité de la pseudo-inverse, et λ qui introduit un nouveau degré de liberté.

2.5.4 Étude de la commandabilité du système

Sur la base du modèle linéaire du système, nous pouvons étudier sa commandabilité dans le contexte de l'automatique linéaire. Pour cela, nous construisons la matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & BA & \dots & BA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

n étant l'ordre du système. On explicite suivant la représentation obtenue en (2.52) :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1} J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}} & \dots \\ (J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1} J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}} & (J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1} J_{f_{eq}}^T C_{f_{eq}} J_{f_{eq}} (J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1} J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Le système est commandable ($\mathcal{C}$ est de rang plein) si la matrice $(J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1} J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}}$ est de rang ligne plein. On sait que la matrice $(J_{f_{eq}}^T M_f J_{f_{eq}})^{-1}$ est de rang plein. Nous allons donc étudier le rang de la matrice $J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}}$:

$$J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}} = \begin{bmatrix} -J_o^T J_o^{-T} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ G J_o^{-T} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix}_{eq} \begin{bmatrix} T^{-T} - T^{-T} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} \\ G P^{-1} J_h M_h^{-1} \end{bmatrix}_{eq} \quad (2.62)$$

$$J_{f_{eq}}^T T_{f_{eq}} = \left[\begin{array}{c} \left[-J_i^T J_o^{-T} \quad \mathbb{I} \right] (T^{-T} - T^{-T} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1}) \\ \left[G J_o^{-T} \quad \mathbb{O} \right] (T^{-T} - T^{-T} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1}) + G P^{-1} J_h M_h^{-1} \end{array} \right]_{eq} \quad (2.63)$$

En développant, on trouve :

$$J_f^T T_f = \left[\begin{array}{c} \left[-J_i^T J_o^{-T} \quad \mathbb{I} \right] T^{-T} - \left[-J_i^T J_o^{-T} \quad \mathbb{I} \right] \left[\begin{array}{cc} J_o^T P^{-1} J_o & J_o^T P^{-1} J_i \\ J_i^T P^{-1} J_o & J_i^T P^{-1} J_i \end{array} \right] \\ \left[G J_o^{-T} \quad \mathbb{O} \right] T^{-T} - \left[G J_o^{-T} \quad \mathbb{O} \right] \left[\begin{array}{cc} J_o^T P^{-1} J_o & J_o^T P^{-1} J_i \\ J_i^T P^{-1} J_o & J_i^T P^{-1} J_i \end{array} \right] T M_h^{-1} + G P^{-1} \left[J_o \quad J_i \right] T M_h^{-1} \end{array} \right]_{eq} \quad (2.64)$$

Après simplification :

$$J_f^T T_f = \left[\begin{array}{c} \left[-J_i^T J_o^{-T} \quad \mathbb{I} \right] T^{-T} \\ \left[G J_o^{-T} \quad \mathbb{O} \right] T^{-T} \end{array} \right]_{eq} \quad (2.65)$$

Soit :

$$J_f^T T_f = \left[\begin{array}{cc} -J_i^T J_o^{-T} & \mathbb{I} \\ G J_o^{-T} & \mathbb{O} \end{array} \right]_{eq} T^{-T} \quad (2.66)$$

La matrice T^{-T} est carrée inversible, donc de rang plein. La matrice $\left[\begin{array}{cc} -J_i^T J_o^{-T} & \mathbb{I} \\ G J_o^{-T} & \mathbb{O} \end{array} \right]$ est de rang ligne plein si G est de rang ligne plein.

Ainsi, **le système est commandable si G est de rang ligne plein**. Si G n'était pas de rang ligne plein, alors il y aurait une indétermination cinématique, et ceci signifierait que l'objet n'est pas saisi fermement, l'objet a au moins un degré de liberté qui ne peut être contrôlé par le préhenseur.

2.5.5 Conclusions

Cette partie nous a permis de développer un nouveau modèle présentant les propriétés suivantes :

- La modélisation s'écrit sous la forme d'équations d'état linéaires, on peut donc appliquer des stratégies de commande issues de l'automatique linéaire. Le modèle est bien adapté pour l'étude du contrôle pour la manipulation dextre.
- Le modèle est structurellement commandable. Par contre, en l'état, il n'est pas asymptotiquement stable puisqu'il présente des intégrateurs purs.
- L'état et la commande du système sont des grandeurs physiques supposées connues. Une commande par retour d'état est rendue possible.

- La modélisation prend en compte la redondance du système, et à partir de la matrice T , on peut définir les variables redondantes, et prévoir par la suite une commande intégrant des synergies afin de les contrôler.

En revanche, on peut souligner quelques conditions de validité du modèle :

- Les contacts sont fixes et ponctuels. A priori, on ne peut donc pas utiliser un préhenseur avec des doigts souples, ou autoriser le roulement ou le glissement. Cela dit, le chapitre suivant s'intéressera à la commande robuste du système vis-à-vis d'incertitudes sur les points de contact. On pourra donc relâcher cette hypothèse puisque la commande assurera la manipulation dextre même si les points de contact changent.
- Les forces de contact doivent rester dans le cône de frottement. La commande devra donc vérifier que cette condition est toujours valide au cours de la manipulation.
- La matrice Jacobienne doit être de rang ligne plein. Ceci permet de valider la propriété de manipulabilité du système.
- La matrice de saisie G doit être de rang ligne plein pour que le système soit commandable, afin d'éviter toutes indéterminations cinématiques.
- Le modèle est valable localement. Nous avons en effet négligé les non-linéarités d'ordre 2 et supérieur.

En récapitulant les conditions de validité du modèle, on voit se dessiner les objectifs que va devoir atteindre la commande du préhenseur : (i) robustesse aux incertitudes sur les points de contact et (ii) validation des contraintes de cônes de frottement.

2.5.6 Remarque : Lien avec les synergies

Lors de la prise en compte de la redondance du préhenseur, la décomposition de la Jacobienne implique une décomposition des positions articulaires suivant une matrice de changement de base T (équation 2.44). Cette formulation présente quelques similitudes avec les synergies [Bicchi et al. (2011)]. La notion de synergies est basée sur l'observation de l'humain et sa manière de gérer la complexité de la redondance de ses articulations (notamment du préhenseur). Des études en neurosciences ont montré qu'une grande majorité des mouvements de la main est gouvernée par des trajectoires dans un espace de beaucoup plus petite dimension que la cinématique de la main. Les synergies permettent donc de définir un mouvement du préhenseur par une seule variable (une synergie) et non plus par le mouvement de chaque articulation. On définit donc :

$$\sigma = Sq \tag{2.67}$$

avec σ le vecteur des synergies et S la matrice des synergies, définissant la combinaison des variables articulaires générant le mouvement. On voit que T^{-1} joue en partie le même rôle que la matrice des synergies puisqu'elle permet de définir deux sous-espaces

de plus petite dimensions que l'espace articulaire ($\dim(q_o) < \dim(q)$ et $\dim(q_i) < \dim(q)$), avec un espace générant le mouvement de l'objet, et un autre générant des mouvements internes. La matrice S permet quant à elle de définir un espace de plus petite dimension que l'espace articulaire générant un (ou plusieurs) mouvement global du préhenseur, on ne distingue donc pas les mouvements liés à un objet saisi des mouvements internes. Les synergies ont donc une définition plus générale que la matrice T^{-1} car cette dernière est liée à une application de manipulation dextre, alors que les synergies sont très souvent appliquées aux problématiques de saisie d'objets.

Chapitre 3

Qualité de prise en présence d'incertitudes

Sommaire

3.1	Introduction	43
3.2	État de l'art	44
3.2.1	Méthodes classiques	44
3.2.2	Prise en compte d'incertitudes	47
3.2.3	Positionnement scientifique	48
3.3	Métrique de l'évaluation de l'espace atteignable	48
3.4	Evaluation du RWSU	50
3.4.1	Approche par intersection des polytopes	51
3.4.2	Approche par exploration extensive	51
3.5	Cas d'étude	53
3.5.1	Présentation	53
3.5.2	Evaluation des algorithmes	54
3.5.2.1	Erreur de translation	54
3.5.2.2	Erreur d'orientation	57
3.6	Exemple en trois dimensions	58
3.6.1	Présentation	58
3.6.2	Résultats	59
3.7	Conclusions	60

3.1 Introduction

Avant même de vouloir manipuler un objet, il est nécessaire de savoir comment le saisir. La prise d'objet par un préhenseur multidigital est un sujet qui a suscité l'attention de nombreuses recherches, et une question s'est notamment posée : comment juger la qualité d'une prise ? On cherche donc à déterminer si une prise est pertinente selon certains critères (robustesse aux perturbations, potentiel d'actions offertes par la prise sur

l'objet...). Afin de répondre à cette problématique, différentes méthodes de mesure de la qualité d'une prise, aussi appelées métriques, sont apparues. Ces méthodes peuvent être très différentes selon les données prises en compte : objectif de manipulation à réaliser, configuration de la main, géométrie de l'objet,...

Plus particulièrement, dans le cadre de nos travaux, nous tentons de répondre aux questions suivantes :

- Comment évaluer la qualité d'une prise dans un environnement incertain ? Nous cherchons notamment à connaître l'impact d'une méconnaissance de la géométrie du préhenseur ou de l'objet sur la prise, et ainsi connaître l'existence d'une commande capable de réaliser une tâche de manipulation malgré l'introduction de ces incertitudes.
- Comment évaluer la qualité d'une prise lorsque l'on a des connaissances a priori sur la tâche de manipulation à réaliser ? La prise étant une première étape pour ensuite manipuler l'objet, on peut se demander s'il existe des prises plus aptes à manipuler l'objet dans une direction particulière.

Nous allons donc dans un premier temps présenter un état de l'art sur les mesures de qualité de prise, en nous intéressant en particulier aux méthodes prenant en compte les incertitudes et les objectifs de manipulation. Nous justifierons par la suite le positionnement scientifique choisi par rapport aux travaux existants.

3.2 État de l'art

3.2.1 Méthodes classiques

Les premières études sur la qualité de prise datent de la fin des années 1970 et cherchent à vérifier les propriétés de *Force-closure* et *Form-closure* [Murray et Sastry (1994), Bicchi (1995)]. On rappelle leurs définitions (vu en 2.3.2) :

- *Form-closure* : la géométrie de la prise contraint complètement l'objet.
- *Force-closure* : les forces de contact permettent de garder l'équilibre face à n'importe quels forces ou moments extérieurs appliqués sur l'objet.

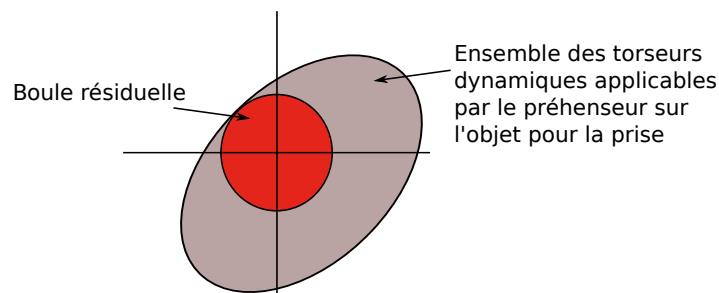
Bien que ces propriétés soient très utiles pour la compréhension de la qualité d'une prise, elles restent très théoriques. Par exemple, les propositions mathématiques sur la *Force-closure* ne tiennent pas compte de bornes minimales et maximales sur les forces de contact, il est donc impossible de valider la propriété dans un cas pratique. De plus, ces propriétés sont binaires (la prise est *Force-closure* ou ne l'est pas), alors que l'on cherche à quantifier la qualité de la prise, et elles ne peuvent pas être utilisées telles quelles en présence d'incertitudes sur les points de contact.

Dans les années 1980, des méthodes dites quantitatives ont été développées (un état de l'art complet est présenté dans [Roa et Suárez (2014)]). Elles permettent de pallier le caractère binaire des propriétés précédentes et sont plus adaptées pour l'étude

d'applications pratiques.

Ces méthodes sont fondées sur l'évaluation de l'*ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet* (voir Chapitre 2). Plus cet ensemble est grand, plus on peut appliquer des forces et moments élevés sur l'objet, pouvant assurer une meilleure robustesse aux perturbations extérieures. La robustesse vis-à-vis de perturbations extérieures est un bon critère de qualité de prise : il s'agit d'une adaptation de la propriété de *Force-closure* à un cas pratique, tenant compte des contraintes de minimum/maximum sur les forces de contact. On cherche donc à mesurer la taille de l'ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet, et déterminer la prise qui va maximiser cette mesure. La taille de ce polytope peut être évaluée de plusieurs manières.

Une des méthodes les plus classiques mesure le rayon de la «boule résiduelle» (*Residual Ball*) [Ferrari et Canny (1992), Kirkpatrick et al. (1992)]. Cette boule correspond à la plus grande hypersphère inscrite dans l'*ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet* et centrée en 0 (Figure 3.1). Cela nous fournit la perturbation maximale que l'on peut rejeter quelle que soit sa direction dans l'espace (*Largest-Minimum Wrench*).



Vue illustrative de l'espace des torseurs dynamiques

FIGURE 3.1 – Boule résiduelle

Cette métrique est très populaire, on la retrouve notamment dans des simulateurs de saisie et de manipulation dextre [Miller et Allen (2004)]. Cependant, cette mesure présente des défauts :

- Elle est sensible au choix des repères. Si l'on fait un changement de coordonnées, on aura un changement de la mesure de qualité, alors que l'on a la même prise. Ce problème est dû au choix d'une distance dans $se(3)^*$, groupe special Euclidien.
- Elle s'intéresse à toutes les directions dans l'espace. Or, si l'on dispose d'informations a priori sur la tâche de manipulation à réaliser, il serait intéressant de les utiliser dans la mesure de qualité en privilégiant certaines directions.

Ainsi, lorsque l'on dispose d'une description détaillée de la tâche à accomplir, il est préférable d'utiliser des métriques basées sur un objectif (*Task-oriented Measure*). Il convient tout d'abord de définir un objectif au sens mathématique : c'est l'ensemble des torseurs dynamiques qui doivent être appliqués sur l'objet afin d'atteindre une position

souhaitée. Cet ensemble forme l'*espace objectif* (*Task Wrench Space*), qui peut être approximé par une ellipsoïde [Li et Sastry (1988)] (ou par un ensemble de vecteurs [Zhu et al. (2003)]). La mesure de qualité correspond alors à la taille de l'ellipsoïde inscrite dans l'*ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet*, et centré en 0 (Figure 3.2).

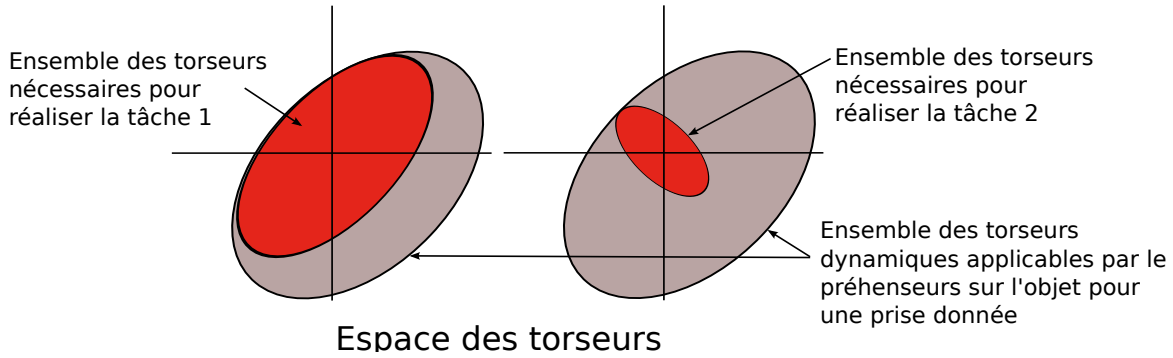


FIGURE 3.2 – Métrique basée sur un objectif.

Dans les deux exemples de la Figure 3.2, on a la même prise (l'*ensemble des torseurs dynamiques de l'objet* est le même). On voit par contre que l'espace objectif, en rouge vif, est différent dans chaque exemple. Dans le premier cas, la prise est parfaitement adaptée à la tâche à accomplir puisque l'espace objectif est très grand et recouvre une grande partie de l'*ensemble des torseurs dynamiques de l'objet*. Le deuxième cas montre que la même prise peut être complètement inadaptée pour une autre tâche, l'ellipsoïde étant très petite.

L'exemple de la Figure 3.3 présente 2 doigts chacun à un d.d.l. tenant une boule. On constate que l'on peut faire des mouvements selon l'axe x mais quasiment aucun selon y . La mesure de la boule résiduelle donne donc un résultat proche de zéro alors qu'une mesure basée sur un objectif de mouvement selon x donne de bons résultats.

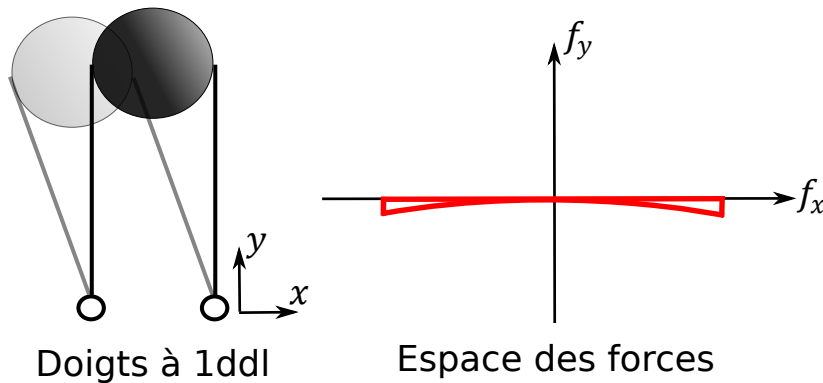


FIGURE 3.3 – Exemple avec deux doigts à un d.d.l.

L'ensemble de ces mesures suppose une connaissance parfaite de la géométrie de l'objet et du préhenseur. Dans le cadre de nos travaux, et pour mieux s'approcher de considérations pratiques, on se place dans un environnement incertain. On souhaite donc

évaluer une prise en prenant en compte des incertitudes de modèles, notamment sur la géométrie du système.

3.2.2 Prise en compte d'incertitudes

Nous allons dans cette section nous intéresser aux mesures de qualité de prise en présence d'incertitudes, en nous focalisant plus particulièrement sur des incertitudes sur les points de contact.

Certaines méthodes prennent en compte les données géométriques de la prise afin de formuler les incertitudes et le critère de sélection de la prise. Une approche traitant des incertitudes sur les points de contact consiste à déterminer des régions de contact pour chaque doigt où la propriété de *Force-closure* est toujours garantie [Nguyen (1988)]. Ainsi, quelle que soit la position du doigt dans cette zone, la prise est toujours *Force-closure*, on parle de zones indépendantes de contact (Figure 3.4). Le critère d'optimisation va chercher à choisir le point central de la zone de contact, afin d'être le moins sensible aux incertitudes. En revanche, cette méthode ne prend pas en compte les contraintes imposées au niveau contact (cônes de frottement, forces bornées).

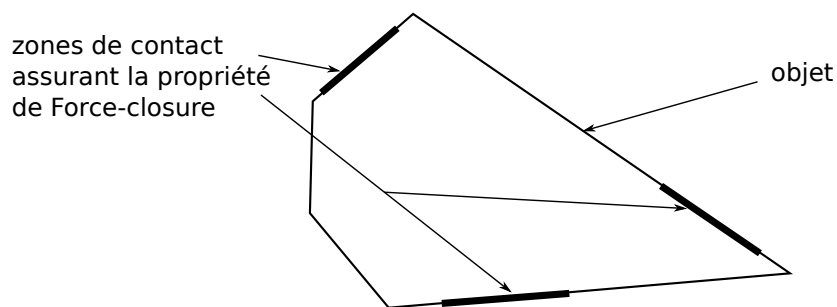


FIGURE 3.4 – Zones indépendantes de contact. L'exemple ci-dessus présente un objet tenu par trois doigts. Chacun des doigts peut se trouver n'importe où dans sa zone de contact (traits surlignés), la propriété de *Force-closure* sera toujours vérifiée.

Une autre méthode consiste à déterminer l'ensemble des saisies validant la propriété de *Force-closure* [Cornella et Suárez (2005)]. Cet ensemble peut s'exprimer sous la forme d'un polytope. Afin d'être insensible aux incertitudes, on choisit les saisies qui sont le plus éloignées des frontières de ce polytope. Cette méthode n'a été réalisée que pour des exemples 2D car elle devient trop complexe pour un cas 3D.

L'article [Hsiao et al. (2011)] introduit une méthode de prise en compte d'incertitudes sur la forme de l'objet. On combine les données d'un algorithme de détection d'objet, dans le cadre d'une analyse probabiliste, afin de déterminer la prise optimale. Ces méthodes se basent donc sur un grand nombre d'acquisitions de données, et on les trouve plutôt dans des applications avec asservissement visuel.

Il est aussi possible de prendre en compte le processus de saisie (lorsque la main se ferme). Ce processus peut en effet déplacer l'objet avant même qu'il ne puisse être saisi.

Une méthode utilisant une simulation dynamique du processus et évaluant le taux de réussite est proposé dans [Kim et al. (2013)].

Des incertitudes sur le point de contact et sur les cônes de frottement sont prises en compte dans [Zheng et Qian (2005)]. Les auteurs proposent une reformulation de la propriété de *Force-closure*, puis l'évaluation de la qualité se fait grâce à un algorithme d'optimisation évaluant la nouvelle formulation. Cependant, aucun objectif de manipulation à réaliser ne peut être pris en compte avec cet algorithme et la mesure de qualité proposée ne possède pas une signification physique directe.

3.2.3 Positionnement scientifique

Les méthodes classiques de mesure de qualité de prise se basent sur l'*ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet*; ces méthodes se sont popularisées car elles donnent de bons résultats, avec une interprétation physique, et un objectif de manipulation peut être considéré. Mais dès que l'on prend en compte des incertitudes géométriques, l'*ensemble des torseurs dynamiques applicables par le préhenseur sur l'objet* n'est plus envisagé et l'on peut alors perdre l'interprétation physique des résultats ou les considérations sur l'objectif de manipulation.

Dans notre étude, nous allons chercher à reconsidérer l'*ensemble des torseurs dynamiques de l'objet* en y intégrant des incertitudes géométriques, exprimées au niveau de la matrice de saisie G (voir chapitre 2). Nous cherchons notamment à évaluer l'*espace des torseurs dynamiques atteignables en présence d'incertitudes sur les points de contact*. Cet espace nous permettra de déterminer :

- Une nouvelle mesure de qualité de prise en tenant compte des incertitudes sur les points de contact.
- L'ensemble des torseurs dynamiques applicables à l'objet, quelles que soient les incertitudes sur les points de contact.
- L'existence d'une solution à un problème de commande.

3.3 Métrique de l'évaluation de l'espace atteignable

Nous proposons une nouvelle mesure de qualité qui tient compte des incertitudes sur les points de contact, et permet d'évaluer l'espace des torseurs dynamiques atteignables en présence d'incertitudes. Par la suite, nous appellerons cet ensemble *RWSU* pour *Reachable Wrench Space under Uncertainties*.

Pour cela, on se fonde sur les métriques classiques de mesure de qualité de prise et on revient tout d'abord à la définition de l'*espace des torseurs dynamiques de l'objet*. On rappelle que pour obtenir cet espace, on détermine l'espace des forces de contact à partir des contraintes imposées sur les forces de contact, puis on projette cet ensemble

selon l'application G (Fig. 2.7). Or, les incertitudes sur le point de contact se traduisent par des incertitudes sur la matrice de saisie G , entraînant un éventail de projections possibles (Fig. 3.5). La matrice de saisie incertaine peut alors être écrite sous la forme :

$$G_r = G_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i G_i \quad (3.1)$$

avec G_0 la matrice de saisie au point nominal, p le nombre d'incertitudes, G_i une matrice représentant la structure de la i ème incertitude, et $\delta_i \in [\delta_{i_{min}}; \delta_{i_{max}}]$ l'amplitude de la i ème incertitude. On ne considère ici que de petites incertitudes, de l'ordre de 10 à 15% de la valeur nominale du coefficient qu'elles affectent ; leur influence peut alors être considérée comme linéaire.

Pour la suite, on définit le vecteur $\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_p]^T \in P_\delta \subset \mathbb{R}^p$. L'ensemble des valeurs que les incertitudes peuvent prendre est donc caractérisé par un polytope P_δ .

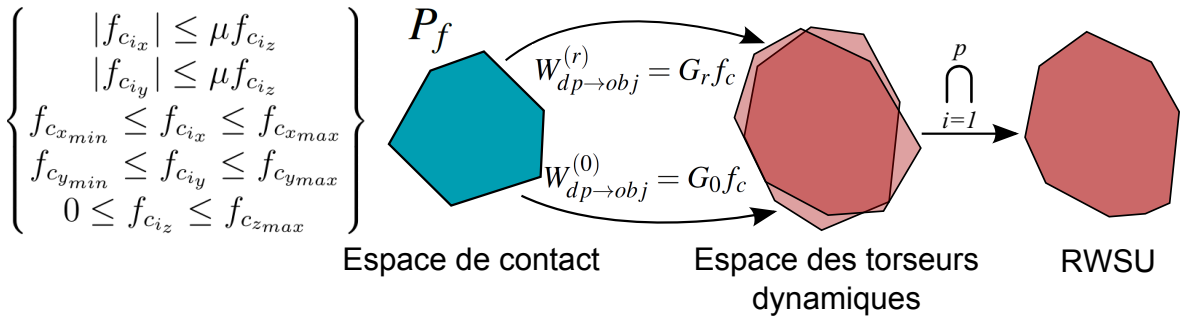


FIGURE 3.5 – Projection de l'espace des forces de contact selon G_0 et G_r , et évaluation du $RWSU$. L'espace des torseurs (resp. l'espace des forces de contact) est défini en 6 dimensions (resp. n_f dimensions), mais est représenté ici en 2D pour plus de clarté.

Sur l'exemple de la Figure 3.5, $W_{dp \rightarrow o}^{(r)}$ appartient à l'ensemble des torseurs que l'on peut réellement appliquer sur l'objet, et $W_{dp \rightarrow o}^{(0)}$ appartient à l'ensemble fictif des torseurs applicables sur l'objet selon l'algorithme implémenté pour la commande du préhenseur. Ces deux ensembles sont différents, et certains torseurs définis au niveau de l'algorithme sont en fait impossibles à réaliser. On voit que les méthodes classiques de mesures de qualité sont difficilement applicables avec une hypothèse d'incertitudes sur les points de contact.

Comme les incertitudes ne sont pas connues, la matrice de saisie réelle G_r n'est pas connue non plus, et la projection de P_f par G_r est aussi inconnue. En revanche, si on considère l'intersection de tous les ensembles de torseurs dynamiques de l'objet issus des différentes projections de P_f par $G(\delta)$, on trouve un ensemble, le $RWSU$, que l'on est certain de pouvoir atteindre, quelle que soit l'incertitude réellement existante sur le système (Fig. 3.5). Le $RWSU$ peut être défini mathématiquement de la manière suivante :

$$W_{dp \rightarrow o} \in RWSU \Leftrightarrow \forall \delta \in P_\delta, \exists f_c \in P_f / W_{dp \rightarrow o} = G_r f_c \quad (3.2)$$

De plus, soit P_{W_δ} la projection de l'espace des forces de contact pour une incertitude particulière, donc pour un G_r en particulier :

$$W_{dp \rightarrow o} \in P_{W_\delta} \Leftrightarrow \exists f_c \in P_f / W_{dp \rightarrow o} = G_r(\delta) f_c \quad (3.3)$$

Le $RWSU$ peut alors être exprimé suivant :

$$RWSU = \bigcap_{\delta \in P_\delta} P_{W_\delta} \quad (3.4)$$

Cet ensemble correspond à l'espace des torseurs dynamiques atteignables appliqués sur l'objet par le préhenseur, quelles que soient les incertitudes considérées. Cela donne une information sur le potentiel d'actions de la prise sur l'objet en présence d'incertitudes. L'espace des torseurs dynamiques atteignables est égal à l'opposé de l'espace des torseurs extérieurs (considérés comme des perturbations extérieures) que le système peut rejeter, ce qui nous donne aussi une information sur la robustesse du système face à des perturbations extérieures.

3.4 Evaluation du RWSU

L'évaluation du $RWSU$ présente une difficulté majeure : les incertitudes qui impactent la matrice de saisie peuvent prendre une infinité de valeurs ($\delta_i \in [\delta_{i_{min}}; \delta_{i_{max}}]$), ce qui implique une infinité de projections possibles, ce qui n'est pas réalisable en pratique. Pour répondre à cette problématique, nous proposons deux méthodes :

- par *intersection des polytopes*, permettant de trouver un majorant du $RWSU$;
- par *exploration extensive*, permettant de trouver un minorant.

La combinaison de ces deux méthodes donne une approximation du $RWSU$.

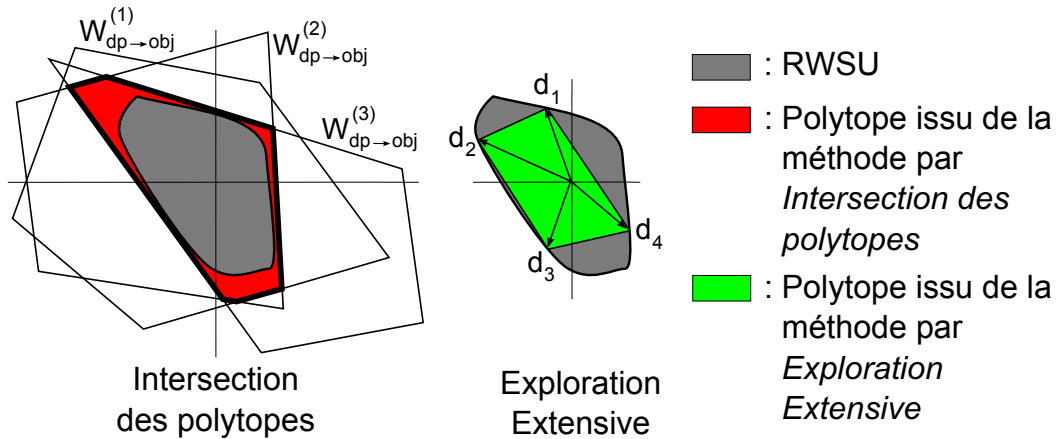


FIGURE 3.6 – Illustration des méthodes d'*intersection de polytopes* et d'*exploration extensive*.

3.4.1 Approche par intersection des polytopes

Les incertitudes introduisent une infinité de projections possibles. Pour résoudre ce problème, une première approche consiste à discrétiser les incertitudes, c'est-à-dire discrétiser la variable δ . L'évaluation devient alors possible, mais le temps de calcul peut être grand.

Nous proposons de considérer l'ensemble P_{δ_s} contenant tous les sommets δ_s du polytope P_δ , c'est-à-dire qu'on ne fait la projection que pour les incertitudes minimales et maximales. Cette méthode donne un nombre de projections raisonnable, et l'intersection est donc rapide à évaluer. Par définition, l'ensemble des incertitudes minimales et maximales est un sous-ensemble de P_δ , soit $P_{\delta_s} \subset P_\delta$, et en considérant (3.4) :

$$RWSU = \left(\bigcap_{\delta_s \in P_{\delta_s}} P_{W_{\delta_s}} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\delta_{\bar{s}} \in P_\delta \\ \delta_{\bar{s}} \neq \delta_s}} P_{W_{\delta_{\bar{s}}}} \right) \subseteq \left(\bigcap_{\delta_s \in P_{\delta_s}} P_{W_{\delta_s}} \right) \stackrel{def}{=} \bar{P} \quad (3.5)$$

avec $\delta_{\bar{s}}$ les incertitudes non minimales ou maximales et $\bar{P}$ le polytope déduit par la méthode d'*intersection des polytopes*. La propriété (3.5) peut être interprétée de la manière suivante : étant donné que l'on ne considère pas toutes les incertitudes mais seulement les sommets de P_δ , cette méthode fournit un majorant du $RWSU$.

3.4.2 Approche par exploration extensive

Cette approche est fondée sur les mesures de qualité de prise classiques qui utilisent souvent des méthodes d'optimisation. Ces méthodes cherchent à évaluer le torseur dynamique maximal $W_{dp \rightarrow obj}^{(i)} = d_i \lambda(d_i)$ qui peut être appliqué dans une direction particulière d_i de l'espace des torseurs dynamiques de l'objet, avec $\lambda(d_i)$ l'amplitude maximale du torseur dans cette direction particulière. Le polytope résultant est l'enveloppe convexe de tous les torseurs $W_{dp \rightarrow obj}^{(i)}$ évalués. Ce problème d'optimisation cherche donc à déterminer l'amplitude maximale $\lambda(d_i)$ tel que $W_{dp \rightarrow obj}^{(i)} = d_i \lambda(d_i) = G_0 f_c$, les forces de contact respectant leurs contraintes. Cette méthode se formule par le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \textbf{For } i = 1 \dots nb_{direction} \textbf{ do} \\ & \quad \textbf{max}_{f_c} \lambda(d_i) \\ & \quad \textbf{s.t.} \begin{cases} \lambda d_i = G_0 f_c \\ f_c \in P_f \end{cases} \\ & \textbf{end} \\ & \textbf{Résultat : } P = \textit{ConvexHull}_{d_i} d_i \lambda(d_i) \end{aligned}$$

Pour évaluer le $RWSU$, on recherche aussi le torseur maximum selon une direction particulière, mais en plus, ce torseur maximum doit être applicable quelle que soit

l'incertitude qui affecte la matrice de saisie G_r . Pour une direction particulière d_i , si on considère les torseurs dynamiques maxima pour toutes les projections possibles $G(\delta)$, ces torseurs forment un ensemble, et le torseur minimum appartenant à cet ensemble peut être toujours atteint par le système, quelle que soit l'incertitude qui l'affecte. Ainsi, le problème d'optimisation cherche à maximiser λ selon f_c et minimiser ce même λ selon l'incertitude δ (Fig. 3.6 et 3.7). Le problème d'optimisation peut être formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 &\textbf{For } i = 1 \dots nb_{direction} \textbf{ do} \\
 &\quad \min_{\delta} \underbrace{d_i^T G_r(\delta) f_c^*(\delta)}_{\lambda(d_i)} \\
 &\quad \textbf{s.t. } \delta \in P_{\delta} \\
 &\quad \textbf{with } f_c^*(\delta) = \underset{f_c}{\textbf{argmax}} \lambda \\
 &\quad \quad \textbf{s.t. } \begin{cases} \lambda d_i = G_r(\delta) f_c \\ f_c \in P_f \end{cases} \\
 &\textbf{end} \\
 &\textbf{Résultat : } \underline{P} \stackrel{def}{=} \underset{d_i}{ConvexHull} d_i \lambda(d_i)
 \end{aligned}$$

avec $\underline{P}$ le polytope résultant, enveloppe convexe de tous les torseurs dynamiques maxima en présence d'incertitudes dans une direction particulière $W_{dp \rightarrow obj}^{(i)} = d_i \lambda(d_i)$. Comme la méthode classique, une boucle *for* est utilisée pour explorer différentes régions de l'espace des torseurs dynamiques de l'objet. Si des informations a priori sont connues sur la tâche de manipulation à effectuer par le préhenseur, il est possible d'explorer des directions particulières en relation avec cette tâche.

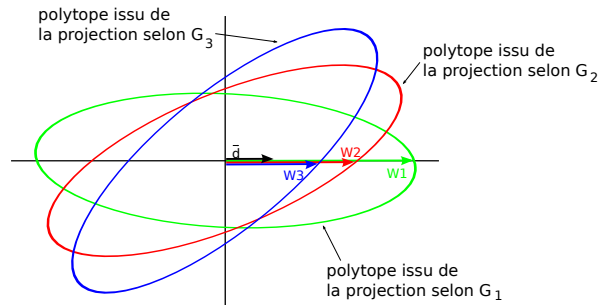


FIGURE 3.7 – Dans cet exemple, la matrice G peut prendre trois formes différentes selon les incertitudes considérées : G_1 , G_2 , G_3 . Ainsi, la projection par G de l'espace de contact donne trois ellipsoïdes distincts. On cherche les torseurs dynamiques maximales que l'on peut appliquer dans la direction $\vec{d}$ (maximisation de λ selon f_c). On trouve donc W_1 , W_2 et W_3 . A partir de là, on cherche le torseur dynamique applicable quelle que soit l'incertitude. On voit donc qu'il faut prendre le torseur dynamique minimal entre W_1 , W_2 et W_3 (minimisation de λ selon δ). Le résultat est donc W_3 dans la direction $\vec{d}$.

Si toutes les directions (une infinité) de l'espace des torseurs dynamiques de l'objet étaient explorées, on trouverait exactement le *RWSU*. Comme il n'est pas possible sur

le plan computationnel de parcourir toutes les directions, un choix doit être fait parmi les directions à explorer, en accord avec la tâche de manipulation à réaliser. On obtient donc une mesure basée objectif, donnant un minorant du $RWSU$.

3.5 Cas d'étude

Nous allons appliquer les deux algorithmes sur un système en simulation afin de vérifier leur validité.

3.5.1 Présentation

On reprend le système expérimental présenté au paragraphe 2.2, soit une prise 2D avec deux doigts sur un objet rectangulaire, avec des frottements de Coulomb, on a donc $f_c = [f_{c_{1x}} \ f_{c_{1y}} \ f_{c_{2x}} \ f_{c_{2y}}]^T \in \mathbb{R}^4$. Le polytope P_f est défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\mu & 0 & 0 \\ 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{c_{1x}} \\ f_{c_{1y}} \\ f_{c_{2x}} \\ f_{c_{2y}} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} f_{c_{1x_{max}}} \\ -f_{c_{1x_{min}}} \\ f_{c_{1y_{max}}} \\ 0 \\ f_{c_{2x_{max}}} \\ -f_{c_{2x_{min}}} \\ f_{c_{2y_{max}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

avec $f_{c_{1x_{max}}} = f_{c_{1y_{max}}} = f_{c_{2x_{max}}} = f_{c_{2y_{max}}} = 1$ et $f_{c_{1x_{min}}} = f_{c_{2x_{min}}} = -1$.

La matrice de saisie liant le torseur $W_{dp \rightarrow obj} = [f_x \ f_y \ m_z]^T$ aux forces f_c s'écrit :

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & r & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

avec la taille de l'objet $2r = 0.2m$.

Nous considérons deux types d'incertitudes :

- Erreur de translation (Fig. 3.8.a). La direction du point de contact est connue, mais sa localisation ne l'est pas. La matrice de saisie s'écrit alors :

$$G_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ r & \delta_1 & r & \delta_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où $\delta_i = [-0.06; 0.06] m$ représente l'incertitude en translation du i ème point de contact. Le polytope P_δ possède quatre sommets.

- Erreur d'orientation (Fig. 3.8.b). La localisation du point de contact est connue, mais son orientation est incertaine. La matrice de saisie s'écrit alors :

$$G_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & -1 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 & 0 \\ r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & r & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

où $\theta = [-15; 15]^\circ$ représente l'erreur d'orientation du premier point de contact. Le polytope P_δ possède deux sommets. On peut noter que cette erreur est non linéaire et nous permet d'étudier la méthode dans un cas plus général.

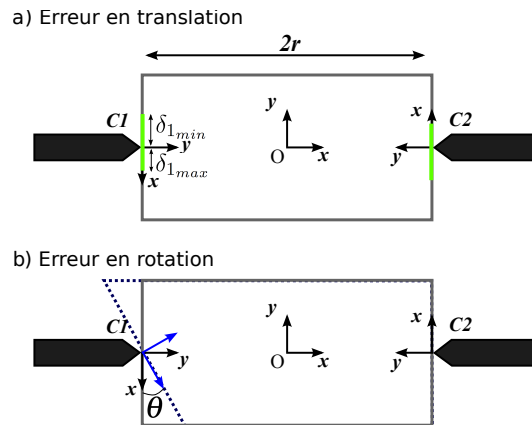


FIGURE 3.8 – Exemples proposés : a) Erreur de translation et b) Erreur d'orientation

3.5.2 Evaluation des algorithmes

3.5.2.1 Erreur de translation

Les deux algorithmes ont été testés, chacun d'entre eux donnant un polytope différent (Fig. 3.9). Pour ces exemples, aucune optimisation du temps de calcul n'a été faite, et on a pour la méthode par intersection de polytope un temps de calcul de 0.41s, et la méthode par exploration extensive met un peu moins de 0.5s par direction explorée¹. Dans le premier test, on a choisi des directions aléatoires pour la méthode par

1. les simulations étant réalisées à partir de la toolbox MPT sous Matlab 2010b avec un processeur Intel core i5 3.10GHz

exploration extensive. Le polytope obtenu par cette méthode est bien inclus dans le polytope obtenu par la méthode d'intersection des polytopes, confirmant que l'on a bien un majorant et un minorant du $RWSU$. Les volumes des deux polytopes, en N^3m , sont normalisés par les forces et moments maximaux, et on trouve :

$$\underline{\mathcal{V}} = 0.4535 \quad (3.10)$$

$$\overline{\mathcal{V}} = 0.8359 \quad (3.11)$$

où $\underline{\mathcal{V}}$ est le volume du polytope issu de la méthode par exploration extensive, et $\overline{\mathcal{V}}$ est le volume de la méthode par intersection des polytopes. On a donc le volume du $RWSU$ qui est borné par :

$$\underline{\mathcal{V}} \leq \mathcal{V}_{RWSU} \leq \overline{\mathcal{V}} \quad (3.12)$$

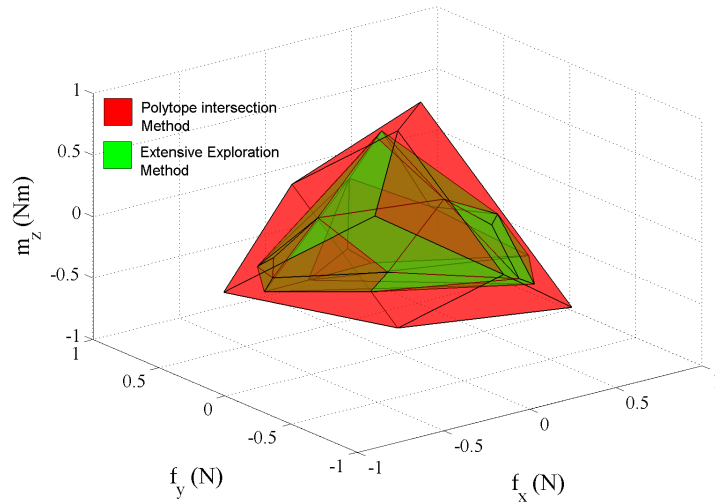
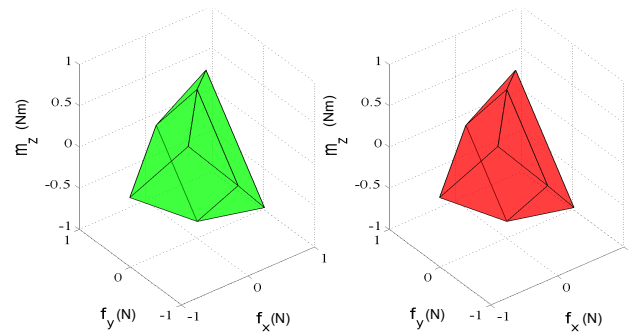


FIGURE 3.9 – Comparaison des polytopes obtenus par les méthodes d'intersection des polytopes et d'exploration extensive.

Les deux volumes obtenus sont assez distants l'un de l'autre. Si les directions d choisies pour la méthode par exploration extensive dépendent de la tâche à réaliser par le préhenseur, il est plus intéressant de considérer la valeur $\underline{\mathcal{V}}$ que $\overline{\mathcal{V}}$, car $\underline{\mathcal{V}}$ est une mesure basée sur objectif. De plus, cette mesure est plus robuste car pessimiste. Si aucune information n'est disponible a priori, les directions doivent être choisies pour maximiser le volume du polytope résultant. Nous avons donc évalué la méthode une deuxième fois, avec des directions correspondant aux sommets du polytope obtenu par la méthode par intersection de polytopes. Dans ce cas particulier, le minorant converge vers le majorant, et on obtient une approximation très précise du $RWSU$ (Fig. 3.10.a), avec le résultat suivant :

$$\underline{\mathcal{V}} \approx \overline{\mathcal{V}} \approx \mathcal{V}_{RWSU} \approx 0.8359 \quad (3.13)$$

a) Erreur en translation



b) Erreur en rotation

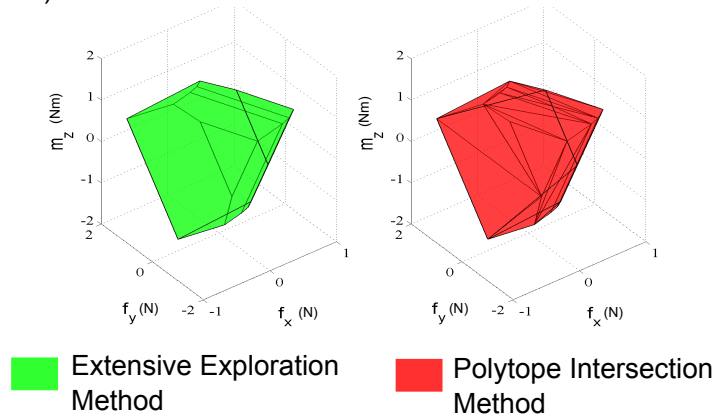


FIGURE 3.10 – Comparaison des polytopes obtenus par les méthodes d'intersection des polytopes et d'exploration extensive (cas particulier).

Le volume du *RWSU* est précis à 10^{-6} dans ce cas. Cette convergence est possible lorsque la valeur minimale du torseur dynamique en fonction des incertitudes est obtenue pour une valeur extremum de ces incertitudes (Fig. 3.11), correspondant donc à un sommet du polytope P_δ . Sachant que la méthode par intersection de polytopes ne tient compte que des sommets du polytope, dans ce cas précis, les deux méthodes convergent vers la même valeur, donnant une excellente approximation du *RWSU*.

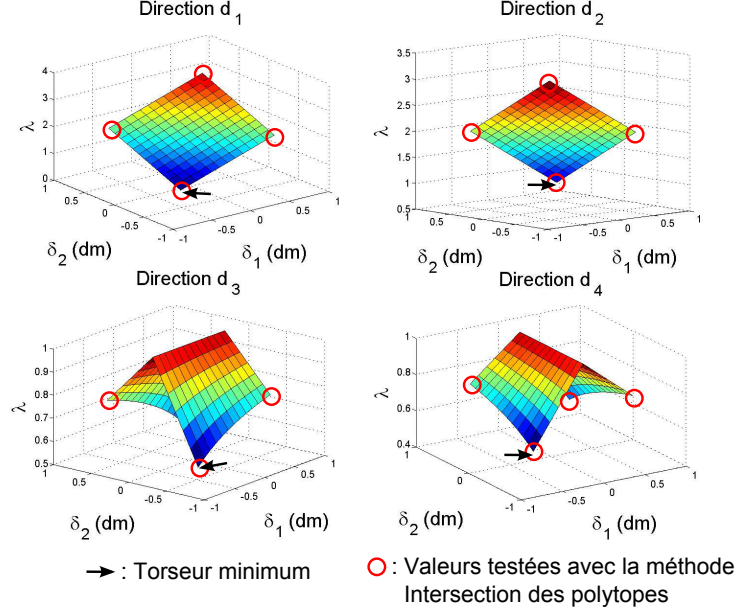


FIGURE 3.11 – Evolution du torseur dynamique en fonction des incertitudes, selon plusieurs directions. Cas de l'erreur en translation.

Nous avons aussi testé la méthode de la boule résiduelle pour cet exemple. Le volume de la sphère est de $3.42N^3m$ en ne considérant que la matrice de saisie nominale. Ce volume est plus grand que le volume évalué pour le *RWSU*. La méthode de la boule résiduelle considère des torseurs dynamiques qui ne sont pas applicables dans certaines configurations avec incertitudes de points de contact.

3.5.2.2 Erreur d'orientation

Les deux algorithmes ont été testés avec l'erreur d'orientation et avec la même procédure, c'est-à-dire que les directions d'explorations correspondent aux sommets du polytope issu de la méthode par intersection. Les temps de calcul sont similaires au premier cas, et on obtient les volumes suivants (Fig. 3.10.b) :

$$\underline{V} = 4.67 \qquad \bar{V} = 4.70 \qquad (3.14)$$

Les deux volumes sont très proches et on a une approximation du *RWSU* de 10^{-1} . La différence entre ces deux volumes est due au fait que le torseur dynamique minimum n'est pas obtenu pour une incertitude extremum (Fig. 3.12 avec la direction d_3 et d_4).

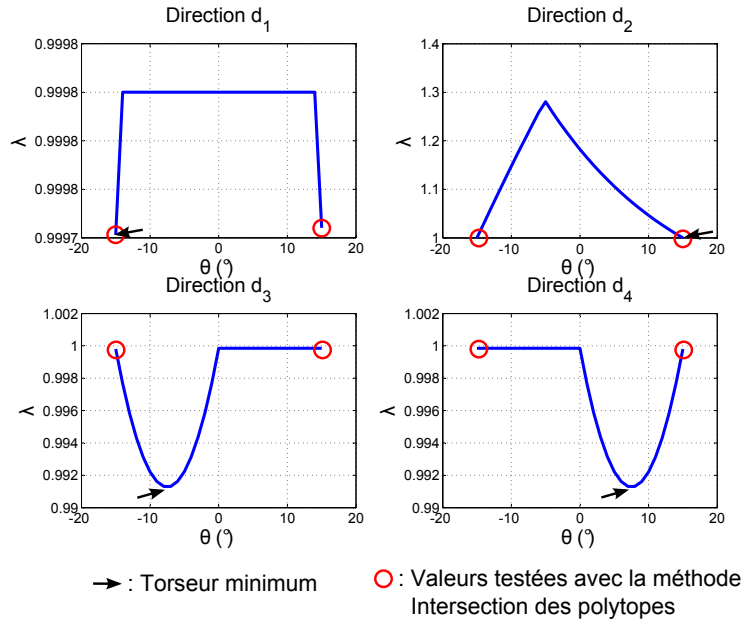


FIGURE 3.12 – Evolution du torseur dynamique en fonction des incertitudes, selon plusieurs directions. Cas de l'erreur en rotation.

On voit donc que les deux algorithmes donnent un minorant et un majorant du $RWSU$; et dans certains cas, ils peuvent converger vers la valeur exacte du $RWSU$. Concernant le choix des directions à explorer dans l'espace des torseurs dynamiques de l'objet, deux méthodes sont proposées :

- Sélectionner des directions correspondant à l'objectif à atteindre au cours de la manipulation dextre.
- Si aucune information a priori n'est disponible, il est conseillé de choisir les sommets du polytope issu de la méthode par intersection des polytopes.

3.6 Exemple en trois dimensions

3.6.1 Présentation

Le cas d'étude précédent est maintenant considéré avec des mouvements possibles dans les trois dimensions de l'espace, et nous considérons aussi un contact supplémentaire entre le préhenseur et l'objet, donc au total trois points de contact, sur différentes faces de l'objet (Fig. 3.13). L'ajout d'un contact permet d'assurer que la saisie est manipulable en 3D.

Les contraintes sur les points de contact sont similaires au cas d'étude précédent, c'est-à-dire que l'on considère des frottements de Coulomb.

On considère une incertitude géométrique de l'objet de translation sur le contact $C1$

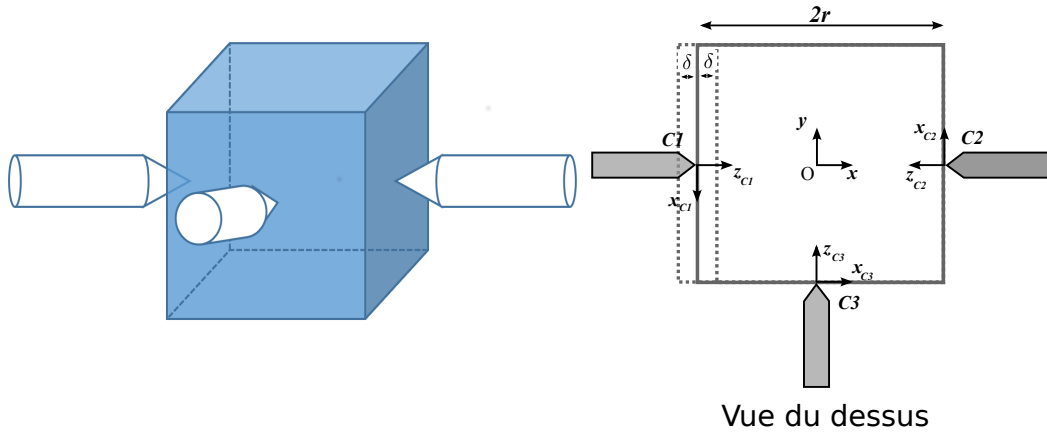


FIGURE 3.13 – Saisie d'un cube avec trois points de contact.

(Fig. 3.13). La matrice de saisie s'écrit alors :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & -r + \delta & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r + \delta & 0 & 0 & r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

avec $r = 17,5mm$ et $\delta \in [-4; 4]mm$.

3.6.2 Résultats

Les deux algorithmes ont été testés une nouvelle fois avec la même procédure, c'est-à-dire que les directions d'explorations correspondent aux sommets du polytope issus de la méthode par intersection. On obtient les volumes suivants :

$$\underline{\mathcal{V}} = 6,35 \cdot 10^{-4} \quad \bar{\mathcal{V}} = 6,42 \cdot 10^{-4} \quad (3.16)$$

On voit que ces volumes sont très proches et on évalue donc le $RWSU$ avec précision (de l'ordre de 10^{-5}).

Les polytopes obtenus sont de dimension 6, on peut donc faire une projection selon certains axes pour visualiser les résultats obtenus (Fig. 3.14). On voit que les points obtenus par l'exploration extensive (en bleu) sont toujours à la limite du polytope (rouge) issu de la méthode par intersection. On a donc toujours le polytope issu de la méthode par exploration extensive qui est inclus dans le polytope issu de la méthode par intersection, soit un minorant et un majorant du $RWSU$.

On constate donc que la méthode s'adapte bien au cas en trois dimensions, on obtient une mesure de qualité correcte à laquelle on peut donner une signification physique.

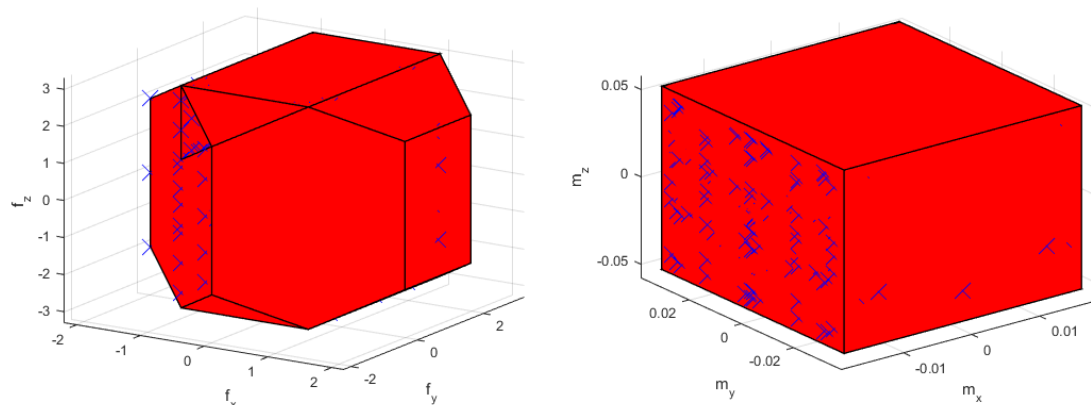


FIGURE 3.14 – Polytopes obtenus par la méthode d'intersection de polytope (rouge), et points obtenus par exploration extensive (bleu).

3.7 Conclusions

Une nouvelle mesure de qualité de prise tenant compte des incertitudes géométriques au niveau des points de contact est proposée. Elle se base sur la détermination du *Reachable Wrench Space under Uncertainties*, un nouvel espace introduit dans ces travaux et qui correspond à l'ensemble des torseurs dynamiques applicables à l'objet par le préhenseur, quelle que soit l'incertitude sur les points de contact. Cette méthode peut être considérée comme une extension des méthodes de mesure de qualité classiques au cas d'un environnement incertain. Le *RWSU* peut être estimé par deux algorithmes, fournissant un minorant et un majorant. Ces algorithmes ont été testés sur des exemples illustratifs. Les résultats montrent que les deux algorithmes peuvent converger vers la même valeur, donnant une approximation très précise du *RWSU*. En outre, l'un des deux algorithmes permet d'évaluer l'espace des torseurs atteignables en tenant compte d'un objectif de manipulation.

Chapitre 4

Manipulation dextre en présence d'incertitudes

Sommaire

4.1	Etat de l'art	62
4.1.1	Contexte statique	62
4.1.2	Contexte dynamique	63
4.1.2.1	L'approche par commande hybride	63
4.1.2.2	L'approche par commande en impédance	64
4.1.2.3	Premier constat	65
4.1.3	Prise en compte des incertitudes	65
4.2	Positionnement scientifique	66
4.3	Modélisation	67
4.3.1	Description du système	67
4.3.2	Modélisation des incertitudes du point de contact	68
4.4	Commande robuste par synthèse LMI	68
4.4.1	Forme générale	68
4.4.2	Objectifs de la commande	69
4.4.3	Commande en impédance par synthèse LMI	70
4.4.4	Contrôle des forces internes	74
4.4.5	Algorithme traitant les incertitudes	75
4.5	Cas d'étude et simulations	76
4.5.1	Exemple	76
4.5.2	Résultats de simulation	77
4.5.3	Résultats expérimentaux	78
4.5.3.1	Nouvelles problématiques et propositions de résolution	78
4.5.3.2	Evaluation de la commande	82
4.5.4	Premières Conclusions	86
4.6	Découplage du mouvement	87
4.6.1	Introduction	87
4.6.2	État de l'art sur l'étude du découplage des mouvements	87
4.6.3	Positionnement scientifique	89
4.6.4	Spécification de trajectoires, sous-espaces invariants et vecteurs propres	90
4.6.5	Commande robuste avec découplage du mouvement	91

4.6.5.1	Objectifs de commande	91
4.6.5.2	Placement des vecteurs propres	92
4.6.5.3	Prise en compte des incertitudes	93
4.7	Cas d'étude avec découplage	94
4.7.1	Paramètres de la commande	94
4.7.2	Résultats de simulation	94
4.7.3	Résultats expérimentaux	96
4.8	Conclusions	97

4.1 Etat de l'art

Suite à l'étude de la saisie d'un objet à partir d'un préhenseur multidigital, nous nous plaçons maintenant dans le cas où nous souhaitons le réorienter, le translater ou le déplacer dans l'espace du préhenseur, c'est-à-dire le manipuler de manière dextre. La manipulation dextre est un domaine de la robotique où plusieurs manipulateurs série, ou doigts, coopèrent afin de manipuler un objet. Une des principales caractéristiques de la manipulation dextre est qu'elle est centrée sur l'objet [Okamura et al. (2000)]. Le problème classique de la manipulation dextre consiste à déterminer les forces que doivent appliquer les doigts sur l'objet pour l'amener d'une configuration initiale à sa configuration finale. Il faut donc une connaissance parfaite de la géométrie des doigts, de l'objet, ainsi que des points de contact. La commande pour la manipulation dextre doit donc répondre aux deux objectifs suivants :

- O1** Réaliser l'asservissement en position de l'objet. Il s'agit du principal objectif de la manipulation dextre : pouvoir amener l'objet vers une nouvelle configuration.
- O2** Maitriser l'interaction préhenseur/objet. Le préhenseur ne doit à aucun moment perdre le contact avec l'objet. Pour cela, il doit appliquer des forces de contact permettant une saisie ferme de l'objet [Bicchi et Kumar (2000)]. Cette saisie doit être adaptée aux caractéristiques de l'objet pour éviter de le déformer, voir le détériorer.

4.1.1 Contexte statique

Les premières commandes en manipulation dextre datent du début des années 1980 et abordent le problème en considérant uniquement les équations statiques du système préhenseur/objet [Salisbury et Craig (1982); Salisbury (1982)]. Ces études considèrent des manipulations à très faibles vitesses afin de négliger les termes inertiels et les effets centrifuge et Coriolis. [Kerr et Roth (1986)] illustrent avec clarté l'étude en statique. L'analyse a pour point de départ l'équation liant les forces de contact au torseur dynamique de l'objet :

$$W_{dp \rightarrow o} = G f_c \quad (4.1)$$

En considérant la pseudo-inverse de la matrice de saisie G , on trouve :

$$f_c = \underbrace{G^+ W_{dp \rightarrow o}}_{f_m} + \underbrace{N \lambda}_{f_i} \quad (4.2)$$

avec $(*)^+$ l'opérateur de la pseudo-inverse, N une base du noyau de G , et λ le vecteur des amplitudes. Le premier terme de l'équation f_m permet la génération du mouvement de l'objet et le second terme f_i permet d'introduire des forces de contact dites internes ne générant pas de mouvement, mais permettant de choisir le serrage appliqué par les doigts sur l'objet. On voit donc qu'à partir de cette formulation, on peut répondre aux deux objectifs fixés précédemment.

4.1.2 Contexte dynamique

L'introduction des équations dynamiques dans la commande pour la manipulation dextre a permis le développement de nombreuses stratégies de contrôle [Bicchi (2000)]. Le modèle dynamique envisagé dans ces nouvelles approches définit la dynamique des doigts au niveau de l'espace objet. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, on peut ainsi obtenir une équation dynamique du système préhenseur/objet de la forme :

$$M_{eq} \ddot{x} + N_{eq} \dot{x} + Q_{eq} = G J_h^{-T} \tau \quad (4.3)$$

avec M_{eq} l'inertie du système préhenseur/objet définie au niveau objet, N_{eq} les effets centrifuge et Coriolis du système, Q_{eq} les effets gravitationnels, J_h la matrice Jacobienne du préhenseur, x la position de l'objet et τ les couples articulaires du préhenseur.

Deux approches se sont notamment distinguées : l'approche par commande hybride force / position [Li et al. (1989); Yoshikawa et Zheng (1993)], et l'approche par commande en impédance [Albu-Schäffer et al. (2003); Wimbock et al. (2008)].

4.1.2.1 L'approche par commande hybride

L'approche par commande hybride permet de contrôler simultanément la force dans certaines directions et la position dans d'autres directions. L'exemple de la Figure 4.1 montre le cas d'un objet que l'on souhaite faire glisser le long d'une surface plane. On peut voir qu'il faut appliquer une force contre la surface afin d'assurer un contact, et la commande en position permet de diriger l'objet le long de la surface. Dans le cas de la manipulation dextre, on envisage de contrôler les forces appliquées sur l'objet dans les directions spécifiques du noyau de G , afin de maîtriser les forces internes, et de contrôler la position de l'objet dans les directions de l'application définie par G . Dans [Yoshikawa (2010)], les auteurs proposent un découplage de l'équation dynamique (4.3)

afin de séparer l'espace de commande en position de l'espace de commande en force :

$$\tau = J_h^T G^+ (M_{eq} u_0 + N_{eq} \dot{x} + Q_{eq}) + J_h^T N u_i \quad (4.4)$$

On a alors la dynamique suivante :

$$\ddot{x} = u_0 \quad (4.5)$$

$$f_i = u_i \quad (4.6)$$

La variable de contrôle u_0 permet de commander la position de l'objet et la variable de contrôle u_i permet d'imposer les forces internes. On peut alors envisager des lois de contrôle classiques :

$$u_0 = \ddot{x}_d - K_v(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_p(x - x_d) \quad (4.7)$$

$$u_i = f_{i_d} - K_i \int (f_i - f_{i_d}) dt \quad (4.8)$$

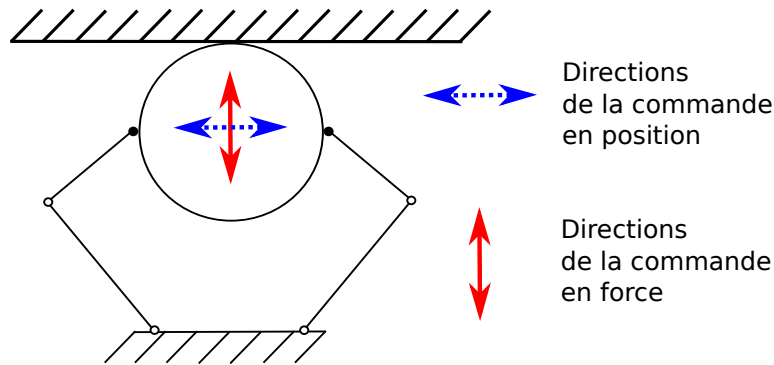


FIGURE 4.1 – Approche par commande hybride force/position

4.1.2.2 L'approche par commande en impédance

La commande en impédance [Hogan (1985)] permet de modéliser le comportement dynamique du système. Cette méthode consiste à spécifier l'impédance de l'objet saisi vis-à-vis de forces extérieures en considérant le système préhenseur/objet comme un système masse-ressort-amortisseur. On spécifie par la commande les caractéristiques de raideurs et d'amortissements désirées de ce système vis-à-vis de perturbations extérieures (Figure 4.2). L'objectif est donc d'imposer la dynamique suivante :

$$M_{eq}^{(d)} \ddot{x} + B_{eq}^{(d)} (\dot{x} - \dot{x}_r) + K_{eq}^{(d)} (x - x_r) = 0 \quad (4.9)$$

$M_{eq}^{(d)}$, $B_{eq}^{(d)}$ et $K_{eq}^{(d)}$ sont respectivement l'inertie, l'amortissement et la raideur désirés, et x_r est la position du repère de référence auquel est attaché l'impédance désirée. Afin d'obtenir cette dynamique, on impose les couples articulaires suivants :

$$\tau = J_h^T G^+ \left((M_{eq} - M_{eq}^{(d)}) \ddot{x} + (N_{eq} - B_{eq}^{(d)}) \dot{x} - B_{eq}^{(d)} \dot{x}_r - K_{eq}^{(d)} (x - x_r) + Q_{eq} \right) \quad (4.10)$$

Il est possible d'ajouter un terme supplémentaire $J_h^T N u_i$ aux couples articulaires afin d'imposer des forces internes sur le système.

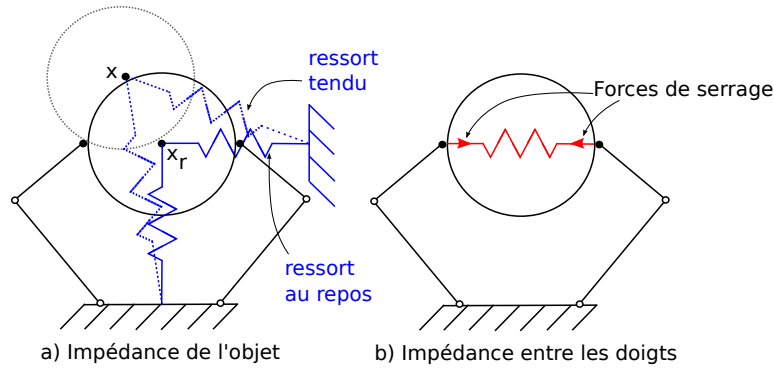


FIGURE 4.2 – Approche par commande en impédance

4.1.2.3 Premier constat

On constate que ces deux stratégies nécessitent une connaissance parfaite de la cinématique et de la dynamique du système, ce qui peut être difficile à obtenir, même sous l'hypothèse d'une instrumentation exhaustive du préhenseur. Ainsi, en plus des deux objectifs **O1** et **O2**, on peut définir l'objectif supplémentaire suivant :

- O3** Gérer les incertitudes vis-à-vis d'erreurs de modélisation géométriques et dynamiques. Aujourd'hui, il est encore difficile d'avoir une description géométrique et dynamique exacte de l'objet et du préhenseur. Afin d'assurer une manipulation stable de l'objet, il faut éviter toute sensibilité de la commande vis-à-vis d'incertitudes de modèle.

Ainsi, bien que l'asservissement en position de l'objet (**O1**) et la maîtrise des forces de contact (**O2**) soient aujourd'hui des problèmes résolus sur le plan théorique, le développement de commandes robustes vis-à-vis de ces incertitudes reste un défi pour la communauté scientifique [Gabbicini et al. (2011); Todorov et Jordan (2002)].

4.1.3 Prise en compte des incertitudes

Les incertitudes géométriques, et plus particulièrement les incertitudes sur les points de contact, peuvent être gérées de deux manières : (i) en détectant les erreurs d'estimation et en identifiant en ligne la géométrie exacte, ou (ii) en améliorant la robustesse de la commande vis-à-vis de ces incertitudes.

Dans la première approche, la localisation des points de contact peut être déduite de la cinématique du préhenseur robotique en observant les mouvements contraints [Haidacher et Hirzinger (2002)]. Ainsi, à partir de considérations géométriques et en ne mesurant que les positions et couples articulaires, un algorithme a été développé pour évaluer le point de contact en interagissant avec un objet inconnu [Huber et Gruben (1994)]. D'autres méthodes utilisent des changements de posture des doigts pour évaluer les points de contact [Kaneko et Tanie (1994)]. La plupart de ces méthodes font des hypothèses sur la géométrie des doigts qui doit être parfaitement connue, et

elles nécessitent de réaliser des trajectoires d'exploration pour l'identification, ce qui n'est pas toujours souhaitable.

Dans la deuxième approche, les incertitudes sont considérées dans le modèle du système, et une commande adaptative est proposée afin d'identifier les erreurs en ligne et les annuler. Dans [Cheah et al. (1998, 2006); Yao et Tomizuka (1993)], les auteurs montrent qu'une incertitude bornée implique une erreur en position et en force. Une commande proportionnelle dérivée adaptative est proposée afin d'annuler ces erreurs en considérant des incertitudes sur la matrice jacobienne. Cependant, seule une classe d'incertitudes est considérée et ces commandes nécessitent une mesure de la position de l'objet ainsi que des forces de contact. La commande est assez complexe et n'a pas été testée sur le plan pratique. On trouve des travaux similaires sur un seul doigt avec une commande en force/position adaptative [Doulgeri et Karayiannidis (2007)]. Plus récemment, [Ueki et al. (2009)] propose aussi une commande adaptative pour la manipulation dextre en présence d'incertitudes sur le modèle dynamique. Une partie expérimentale est présentée et montre l'efficacité de la méthode. En revanche, les incertitudes géométriques ne sont pas prises en compte.

Les méthodes par apprentissage présentent des résultats intéressants pour la manipulation d'objets inconnus. Dans [Van Hoof et al. (2015)], les auteurs proposent une méthode d'apprentissage permettant de manipuler des objet inconnus. Cette commande se base sur un préhenseur compliant et une instrumentation disposant de capteurs tactiles.

On constate que l'ensemble de ces méthodes s'apparente à de l'identification en ligne définie au niveau de la commande ou à des méthodes d'apprentissage, et à notre connaissance, les méthodes de commandes robustes n'ont pas été évaluées pour la manipulation dextre.

4.2 Positionnement scientifique

Le but de ce chapitre est de proposer une commande de manipulation dextre répondant aux trois objectifs précédemment cités (**O1-O3**). Contrairement à l'état de l'art, nous ne cherchons pas à identifier les incertitudes géométriques, nous souhaitons proposer une commande robuste aux incertitudes a priori. Plus précisément, la commande devra donc assurer la stabilité du système nominal, ainsi que la stabilité de l'ensemble des systèmes affectés par les incertitudes (objectif **O3**).

De nombreux problèmes de commande robuste peuvent être mis sous la forme d'un problème d'optimisation convexe standard impliquant des inégalités matricielles linéaires (LMIs pour *Linear Matrix Inequalities*) [Boyd et al. (1994)]. Cette mise en forme a déjà été utilisée dans des problèmes de saisie [Buss et al. (1996)] et de mesure de qualité [Han et al. (2000)]. Cependant, à notre connaissance, les LMIs n'ont jamais été utili-

sées pour la synthèse de correcteur dans le contexte de la manipulation dextre. Nous allons donc nous baser sur une optimisation avec contraintes LMI pour satisfaire les critères de robustesse. De plus, le correcteur doit vérifier les contraintes sur les forces de contact (unilatéralité, cône de frottement, bornes,...) au cours de la manipulation (objectif **O2**).

Nous appliquons ce cadre théorique au cas du système expérimental présenté au Chapitre 2, c'est-à-dire un système préhenseur/objet non redondant.

4.3 Modélisation

4.3.1 Description du système

Le système expérimental présente les caractéristiques suivantes :

- Le système n'est pas redondant, il n'y a donc pas de mouvements internes des doigts pour une position fixe de l'objet. La matrice jacobienne J_h est carrée.
- Les points de contact sont fixés dans le cas du système nominal, i.e. non-entaché d'incertitudes et la matrice G_0 est constante. Par contre, le système réel est bien sujet à des incertitudes sur les points de contact.
- Les forces de contact doivent respecter les contraintes de forces unilatérales et de cônes de frottement. Cette hypothèse doit être validée par la commande.
- La saisie est manipulable, c'est-à-dire que le mouvement désiré peut être réalisé par les doigts. Dans ce cas, la matrice J_h est de rang ligne plein et ainsi inversible.
- L'influence de la gravité est négligée ou compensée par la loi de commande.

On rappelle l'équation d'état du système :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{I}_{n_o \times n_o} \\ \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -M_{eq}^{-1}C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_q} \\ M_{eq}^{-1}GJ_{heq}^{-T} \end{bmatrix} \tau \quad (4.11)$$

où les matrices constantes M_{eq} , C_{eq} and J_{heq} définissent respectivement la matrice d'inertie du système, la matrice des effets Coriolis et centrifuge, et la matrice Jacobienne du préhenseur au point d'équilibre $\begin{bmatrix} x_{o_{eq}}^T & \mathbb{O}_{n_o \times 1}^T \end{bmatrix}^T$, $\tilde{x}_o$ représente la variation de x_o autour du point d'équilibre.

De plus, les forces de contact peuvent être formulées en fonction de l'état du système $\begin{bmatrix} \tilde{x}_o & \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix}^T$ et sa commande :

$$f_c = G^+ \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -C_o + M_o M_{eq}^{-1} C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} - G^+ M_o M_{eq}^{-1} G J_{heq}^{-T} \tau + N_G \lambda \quad (4.12)$$

Le terme $N_G \lambda \in \text{Ker}(G)$ est défini avec N_G une base du noyau de G qui spécifie la non-unicité de la pseudo-inverse, et λ qui introduit un nouveau degré de liberté qui sera par la suite utilisé dans la commande.

4.3.2 Modélisation des incertitudes du point de contact

Nous considérons le type d'incertitudes décrites dans le Chapitre 3, c'est-à-dire des incertitudes géométriques sur les points de contact, selon la matrice de saisie définie par :

$$G = G(\delta) \quad (4.13)$$

avec $\delta \in P_\delta$ le vecteur des incertitudes et P_δ représente l'ensemble des incertitudes considérées sur le système. Contrairement au Chapitre 3, nous nous plaçons dans le cas plus général d'incertitudes δ , pouvant être linéaires ou non linéaires.

4.4 Commande robuste par synthèse LMI

4.4.1 Forme générale

Le signal de commande de la représentation d'état (4.11) est défini par les couples articulaires. La commande est exprimée au niveau objet, permettant de faire directement le lien entre l'erreur d'asservissement de la position de l'objet et les couples articulaires exprimés au niveau objet. Le passage de l'espace articulaire à l'espace objet se fait via la matrice Jacobienne du préhenseur J_h et la matrice de saisie G :

$$\tau = \underbrace{\hat{J}_{heq}^T G^+ u}_{\tau_{motion}} + \underbrace{\hat{J}_{heq}^T N_G \lambda}_{\tau_{internal}} \quad (4.14)$$

avec $\hat{J}_{heq}$ une estimation de la matrice Jacobienne du préhenseur au point d'équilibre, et u le torseur de commande au niveau objet. Les grandeurs u et λ correspondent aux nouvelles entrées de commande du système.

La contribution τ_{motion} permet de déplacer l'objet, elle génère le mouvement, et la deuxième contribution $\tau_{internal}$ génère des forces internes, qui ne créent pas de mouvement dans le cas nominal, mais elles permettent d'introduire un nouveau degré de liberté pour respecter les contraintes (forces unilatérales, cônes de frottement). Cette décomposition du couple est classique [Kerr et Roth (1986)]. La commande se base donc sur une décomposition bien connue, qui assure une interprétation physique claire des signaux. Nos travaux se concentrent sur la détermination des grandeurs de commande u et λ pour faire en sorte qu'elles tiennent compte des incertitudes sur les points de contact et des erreurs dues à la linéarisation du système autour de son état d'équilibre.

Le système (4.11) en boucle fermée avec la commande (4.14) devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{I}_{n_o \times n_o} \\ \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -M_{eq}^{-1} C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_q} \\ M_{eq}^{-1} G J_{heq}^{-T} \end{bmatrix} \hat{J}_{heq}^T G^+ u + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_q} \\ M_{eq}^{-1} G J_{heq}^{-T} \end{bmatrix} \hat{J}_{heq}^T N_G \lambda \quad (4.15)$$

Si l'estimation de la Jacobienne est parfaite, i.e. $\hat{J}_{heq} = J_{heq}$, le modèle s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{I}_{n_o \times n_o} \\ \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -M_{eq}^{-1}C_{eq} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} \\ M_{eq}^{-1} \end{bmatrix}}_B u \quad (4.16)$$

Dans ce cas, le mouvement de l'objet n'est affecté que par la variable u , et la variable λ n'apparaît plus.

De plus, si on combine (4.12) et (4.14) en supposant une estimation parfaite de la Jacobienne :

$$f_c = G^+ \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -C_o + M_o M_{eq}^{-1} C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} - G^+ M_o M_{eq}^{-1} u + N_G \lambda \quad (4.17)$$

Le vecteur des forces de contact s'écrit sous la forme :

$$f_c = C_f x + B_f u + N_G \lambda \quad (4.18)$$

avec $x = [\tilde{x}_o^T \ \dot{\tilde{x}}_o^T]^T$ le vecteur d'état de (4.16).

Dans la suite de nos développements, on considère l'état du système mesurable :

$$y = C_x x \quad (4.19)$$

Avec la matrice $C_x = \mathbb{I}_{2n_o \times 2n_o}$. Cette condition peut être vérifiée en appliquant un module de vision extéroceptif au système de manipulation ou, comme nous le ferons dans la partie pratique, en déduisant la position de l'objet à partir des positions articulaires du préhenseur et du modèle géométrique direct.

La commande robuste sera déterminée à partir des équations (4.16) et (4.18).

4.4.2 Objectifs de la commande

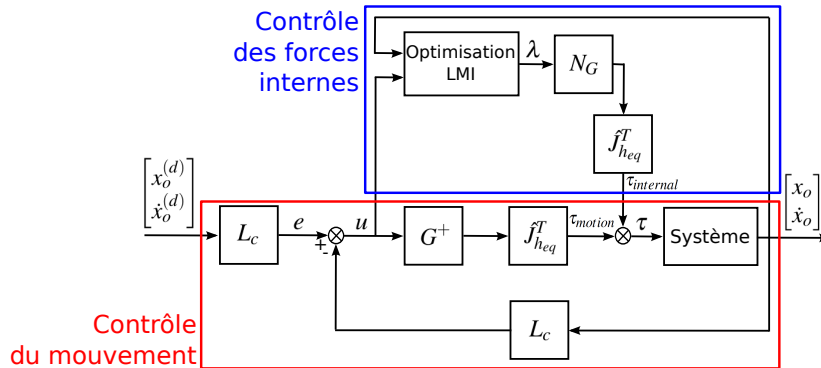


FIGURE 4.3 – Schéma général de la commande.

En considérant la structure de commande (4.14), on rappelle les objectifs en boucle fermée que l'on souhaite atteindre :

- O1** Asservissement de la position de l'objet. Cet objectif peut être réalisé grâce à la commande u qui apparaît explicitement dans la représentation (4.16). Plusieurs objectifs d'asservissement pourront être testés, notamment la robustesse par rapport aux forces extérieures ou la rapidité de l'asservissement, avec le but d'atteindre la position finale désirée.
- O2** Satisfaire les contraintes du système :
- cônes de frottement ;
 - forces de contact unilatérales ;
 - bornes minimales et maximales dues aux couples moteurs eux-mêmes bornés.
- Cet objectif est réalisé par la commande λ qui génère les forces internes.
- O3** Les deux objectifs précédents doivent être validés en présence d'incertitudes sur les points de contact. Nous souhaitons proposer une commande assurant la stabilité de l'asservissement pour le système nominal affecté par un ensemble d'incertitudes, ce qui est équivalent à assurer la stabilité de l'asservissement pour un ensemble de systèmes.

Au vu des objectifs précédents, nous proposons une commande par retour d'état statique, équivalent à une commande en impédance puisque l'état du système est $x = [\tilde{x}_o \ \dot{\tilde{x}}_o]^T$ (Fig. 4.3, partie «contrôle du mouvement») et synthétisé à partir d'un problème d'optimisation avec contraintes LMIs. La commande par retour d'état statique permet de régler la dynamique du système et d'asservir la position de l'objet, et répond donc à l'objectif **O1**. L'utilisation de contraintes LMIs lors de la synthèse du retour d'état permet de prendre en compte les incertitudes affectant le système afin de répondre à l'objectif **O3**. En outre, on ajoute une action dynamique, qui est fonction de la commande u et de l'état x , permettant ainsi de reconstruire les forces de contact (équation (4.18)) et de calculer les forces internes assurant la validation des contraintes (Fig. 4.3, partie «contrôle des forces internes»). L'ajout de cette action dynamique permet de satisfaire les contraintes de saisie, et donc répond à l'objectif **O2**.

4.4.3 Commande en impédance par synthèse LMI

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent, l'asservissement en position de l'objet est assuré par l'entrée de commande u . Le retour d'état proposé est donc :

$$u = e - L_c x \quad (4.20)$$

avec e l'entrée de la boucle fermée du système et L_c la matrice de retour d'état.

L'équation d'état en boucle fermée s'écrit alors :

$$\dot{x} = (A - BL_c)x + Be \quad (4.21)$$

avec A et B issus de (4.16).

L'asservissement de la position objet peut être spécifié par placement de pôles, en choisissant les valeurs propres de la matrice $A - BL_c$. Afin d'assurer la stabilité du système, on peut appliquer la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$V(0) = 0 \quad (4.22)$$

$$V(x(t)) > 0 \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (4.23)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (4.24)$$

Il est possible de choisir pour la fonction $V(x)$:

$$V(x) = x^T R x, \quad R \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad R = R^T > 0 \quad (4.25)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T R x + x^T R \dot{x} = x^T (A - BL_c)^T R x + x^T R (A - BL_c) x \quad (4.26)$$

On considère l'entrée $e = 0$ car si elle est indépendante de l'état, elle n'agit pas sur la stabilité du système. On définit $P = R^{-1}$, et $Y = L_c P$, on trouve alors :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T (PA^T - Y^T B + AP - BY) x \quad (4.27)$$

Ainsi, pour respecter la condition de stabilité de théorème de Lyapunov, il faut satisfaire les inégalités linéaires matricielles suivantes :

$$P = P^T \succ 0 \quad (4.28)$$

$$PA^T - Y^T B + AP - BY \prec 0 \quad (4.29)$$

Avec " $\succ$ " symbolisant la définie-positivité.

Afin de placer plus précisément les valeurs propres de la boucle fermée, on définit une région stable $\mathcal{D}$ dans le plan complexe. Habituellement, trois formes sont proposées pour définir la $\mathcal{D}$ -région stable [Chilali et Gahinet (1996)] : le demi-plan gauche, le cône et le disque (Fig. 4.4).

La $\mathcal{D}$ -région peut alors être décrite par des contraintes LMIs dépendant de la matrice $P = P^T \succ 0$ spécifiant la stabilité au sens de Lyapunov, du système (A, B, C, D) à stabiliser, de $Y = L_c P$ définissant le retour d'état, et les paramètres α , r et θ spécifiant respectivement le demi-plan gauche, le cône et le disque. Le problème LMI consiste à déterminer les matrices P et Y sous les contraintes suivantes :

— Le demi-plan de gauche défini par α :

$$(AP - BY) + (PA^T - Y^T B^T) + 2\alpha P \prec 0 \quad (4.30)$$

Le choix de $\alpha > 0$ permet de stabiliser et d'établir la dynamique minimale du système.

- Le disque centré en 0 et de rayon r :

$$\begin{bmatrix} -rP & AP - BY \\ PA^T - Y^T B^T & -rP \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.31)$$

Le rayon du disque est choisi en fonction de la dynamique maximale du système, dépendant de la période d'échantillonnage ou de l'influence du bruit.

- Le cône centré en 0 et d'angle θ (avec $X' = AP - BY$) :

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(X' + X'^T) & \cos(\theta)(X' - X'^T) \\ \cos(\theta)(X'^T - X') & \sin(\theta)(X' + X'^T) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.32)$$

Cette région contraint l'amortissement du système.

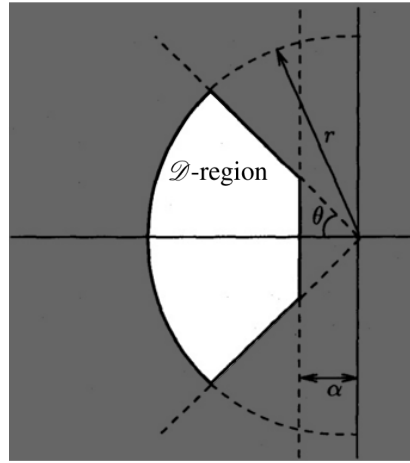


FIGURE 4.4 – Régions LMI [Chilali et Gahinet (1996)].

Les deux premières contraintes permettent de borner la vitesse de convergence de l'asservissement, et donc indirectement la raideur de notre système, et la troisième contrainte permet de régler l'amortissement. Cette méthode permet donc de choisir indirectement l'impédance du système bouclé, tout en gardant une bonne compréhension physique de l'asservissement et ses effets.

Plusieurs cas peuvent être considérés pour le problème d'optimisation :

Cas 1 Aucun objectif supplémentaire. On résout simplement le problème de faisabilité : trouver P et Y tels que (4.30) à (4.32) soient vérifiés. Le retour d'état est alors déduit par :

$$L_c = YP^{-1} \quad (4.33)$$

Cas 2 Améliorer le temps de réponse du système en boucle fermée en favorisant un placement des pôles vers la gauche de la région LMI. Cet objectif peut être réalisé en minimisant la trace de la matrice P , ce qui va maximiser les valeurs propres du système en boucle fermée [Luca et al. (2011)]. Le problème d'optimisation se

formule alors par :

$$\begin{cases} \min_{Y,P} & Tr(P) \\ \text{t.q. (4.30) - (4.32) sont satisfaites} \\ L_c = YP^{-1} \end{cases} \quad (4.34)$$

Cas 3 Maximiser la robustesse vis-à-vis de certaines incertitudes de modèle et perturbations extérieures. Cet objectif est réalisé en maximisant le temps de réponse du système en boucle fermée tout en respectant les contraintes imposées, il est donc l'opposé de l'objectif précédent et peut donc être réalisé en maximisant la trace de la matrice P , ce qui va minimiser les valeurs propres du système en boucle fermée. Le problème d'optimisation se formule alors par :

$$\begin{cases} \max_{Y,P} & Tr(P) \\ \text{t.q. (4.30) - (4.32) sont satisfaites} \\ L_c = YP^{-1} \end{cases} \quad (4.35)$$

Afin d'annuler l'erreur statique du système en boucle fermée, le signal e est défini avec la même dynamique que le retour d'état :

$$e = L_c x^{(d)} \quad (4.36)$$

avec $x^{(d)}$ l'état désiré, i.e. la position et vitesse désirées. Au final, la loi de commande s'écrit :

$$u = L_c(x^{(d)} - x) \quad (4.37)$$

Afin de s'apparenter à une formulation de commande en impédance, la matrice L_c est décomposée sous la forme :

$$L_c = \begin{bmatrix} L_{c_k} & L_{c_b} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

avec $L_{c_k}, L_{c_b} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ correspondant respectivement à la raideur et à l'amortissement du mouvement de l'objet.

Le système (4.16) en boucle fermée avec (4.37) et (4.38) devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{I}_{n_o \times n_o} \\ \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & -M_{eq}^{-1}C_{eq} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_o \times n_o} & \mathbb{O}_{n_o \times n_o} \\ M_{eq}^{-1}L_{c_k} & M_{eq}^{-1}L_{c_b} \end{bmatrix} (x^{(d)} - x) \quad (4.39)$$

En extrayant la seconde ligne de cette représentation d'état, on trouve :

$$M_{eq}\ddot{\tilde{x}}_o + C_{eq}\dot{\tilde{x}}_o + L_{c_b}(\dot{\tilde{x}}_o - \dot{\tilde{x}}_o^{(d)}) + L_{c_k}(\tilde{x}_o - \tilde{x}_o^{(d)}) = 0 \quad (4.40)$$

On retrouve donc la formulation de la commande en impédance.

4.4.4 Contrôle des forces internes

Le paragraphe précédent permet de déterminer une solution au problème d'asservissement de la position objet, mais cette commande reste valide si les contraintes sur les points de contact sont satisfaites, notamment :

- C1** Les points de contact sont fixes. Cette condition sera relâchée dans le prochain paragraphe, en prenant en compte les incertitudes sur les points de contact.
- C2** Les forces de contact doivent être unilatérales et dans leur cône de frottement.
- C3** Les forces de contact sont bornées puisqu'elles sont issues des couples articulaires, eux-même bornés.

Les contraintes C2 et C3 peuvent être satisfaites en résolvant un problème d'optimisation avec contraintes LMI sur les forces de contact.

Les couples articulaires sont bornés :

$$\tau_{min} < \tau < \tau_{max} \quad (4.41)$$

En introduisant l'équation dynamique du préhenseur, on a :

$$\tau_{min} < M_h \ddot{q} + C_h \dot{q} - J_h^T f_c < \tau_{max} \quad (4.42)$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} J_h^T f_c + (-M_h \ddot{q} - C_h \dot{q} + \tau_{min}) < 0 \\ -J_h^T f_c + (M_h \ddot{q} + C_h \dot{q} - \tau_{max}) < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

En ajoutant la contrainte des cônes de frottement (2.27) et la décomposition des forces de contact (4.18) :

$$\begin{cases} \Lambda N_G \lambda + \Lambda(C_f x + B_f u) - \beta < 0 \\ J_h^T N_G \lambda + J_h^T(C_f x + B_f u) + \beta_2(q) < 0 \\ -J_h^T N_G \lambda - J_h^T(C_f x + B_f u) + \beta_2'(q) < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

avec $\beta_2(q) = -M_h \ddot{q} - C_h \dot{q} + \tau_{min}$ et $\beta_2'(q) = M_h \ddot{q} + C_h \dot{q} - \tau_{max}$. L'entrée de commande λ permet de répondre aux contraintes en prenant en compte l'état courant x , les positions articulaires q et la commande u . Ce problème peut être résolu par une optimisation avec contraintes LMIs. Pour y un vecteur quelconque, on a la propriété suivante :

$$y < 0 \iff \text{diag}(y) \prec 0 \quad (4.45)$$

Les trois contraintes (4.44) peuvent donc être ré-écrites sous forme LMI [Han et al. (2000)]. En outre, ces contraintes peuvent être résolues en temps réel au travers d'une optimisation linéaire quadratique [Gazeau et al. (2005)].

De plus, on peut augmenter la robustesse à des perturbations externes en introduisant un offset sur λ . En effet, les forces de serrage seront au minimum supérieures à une certaine valeur seuil pour une prise minimale.

Il est important de noter que cet algorithme d'optimisation est résolu en ligne à chaque pas de temps, et grâce à l'étude du Chapitre 3, on sait s'il existe une solution à ce problème d'optimisation. Ceci nous permet donc de mettre en œuvre cet algorithme d'optimisation en s'assurant sa convergence. Afin de réduire le temps de calcul, on peut simplement résoudre le problème de faisabilité sans définir un critère d'optimisation.

4.4.5 Algorithme traitant les incertitudes

Si les incertitudes affectent linéairement le système, la méthode habituellement utilisée a pour but de ré-écrire le système sous forme LPV (Linéaire à Paramètres Variants) et de construire le polytope de ce système. Plus précisément, la synthèse d'un correcteur robuste LPV polytopique consiste à construire un hypercube pour lequel chaque sommet est un modèle LTI donné pour une combinaison de valeurs extrémales des paramètres variants (Fig. 4.5). On définit ensuite les contraintes LMIs pour chacun de ces systèmes et on synthétise un correcteur qui valide toutes ces contraintes. Ce correcteur sera stable pour tous les systèmes à l'intérieur de l'hypercube [Poussot-Vassal (2008)].

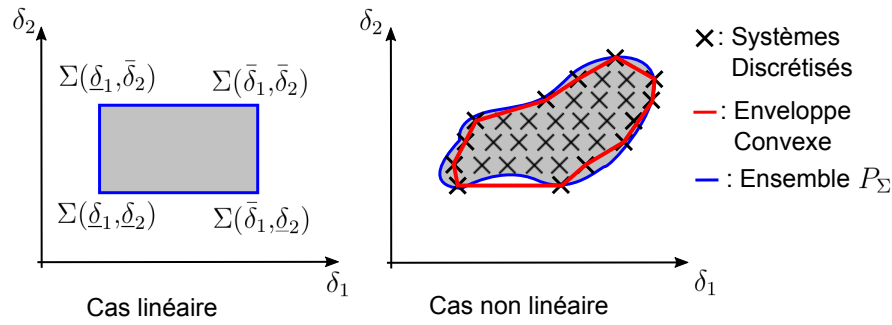


FIGURE 4.5 – Synthèse par LMI polytopique.

Dans notre cas, les incertitudes affectent la matrice de saisie G , et la représentation d'état (4.16) n'est pas linéaire selon G , on ne peut donc pas exprimer directement le système sous forme LPV. Nous proposons donc une autre approche.

Soit l'ensemble P_Σ de toutes les représentations d'état $\Sigma = (A, B, C, D)$ dépendant des incertitudes :

$$\Sigma \in P_\Sigma \Leftrightarrow \{\forall \delta \in P_\delta, \Sigma := \{\dot{x} = A(\delta)x + B(\delta)u\}\} \quad (4.46)$$

Les incertitudes n'affectant pas linéairement l'ensemble P_Σ , on ne peut pas faire d'hypothèse sur sa convexité. Les incertitudes peuvent alors être prises en compte en discrétisant le polytope P_δ , entraînant une discrétisation de l'ensemble P_Σ , et ensuite tester les problèmes LMI décrits dans les sections 4.4.3 et 4.4.4 pour chaque représentation d'état issue de la discrétisation de P_Σ (ce sous-ensemble sera désigné par la suite *discretized- P_Σ systems*). On assure ainsi la stabilité de tous les systèmes inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble *discretized- P_Σ systems* (Fig. 4.5). Par contre, on ne vérifie pas la stabilité pour tous les systèmes de l'ensemble P_Σ .

Pour l'asservissement en position de l'objet, et dans le cas d'une minimisation du temps de réponse, le problème peut être formulé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Y,P} Tr(P) \\ \text{t.q. for all } \delta_i \in P_\delta \\ \quad (4.30) - (4.32) \text{ sont satisfaites} \\ \text{end for} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Les forces internes sont aussi déterminées en résolvant le problème LMI déduit des contraintes (4.44) pour tous les *discretized- P_Σ systems*. Ce problème doit être résolu en ligne, contrairement à l'optimisation synthétisant le retour d'état qui est résolue hors ligne. L'ensemble de la commande est illustré Fig. 4.3.

4.5 Cas d'étude et simulations

4.5.1 Exemple

L'étude rapportée dans la suite porte sur notre cas expérimental, i.e. la prise d'un objet avec deux doigts ayant chacun trois d.d.l. dont deux motorisés (Fig. 4.6).

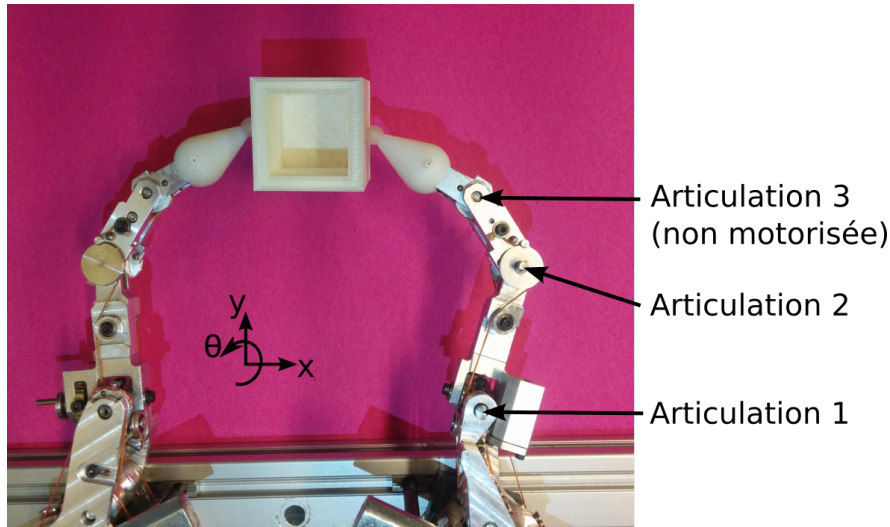


FIGURE 4.6 – Banc d'essai

Nous reprenons les cas d'étude vu au Chapitre 3, et de la même manière nous considérons une erreur de translation (E1) et une erreur d'orientation (E2), avec des frottements de Coulomb pour le type de contact (Fig. 4.7).

L'asservissement en position de l'objet est assuré avec les paramètres LMI suivants :

- $\alpha = 0.5$, on a donc $Re(pole) < -0.5$, garantissant la stabilité et la dynamique minimale. La constante de temps du mode le plus lent vaut $\tau = \frac{1}{\alpha} = 2s$, on a alors un temps d'établissement à 5% égal à trois fois la constante de temps, soit 6s maximum.

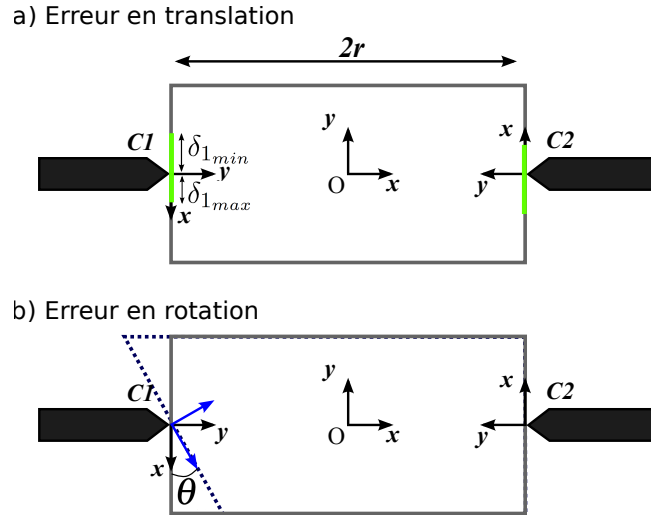


FIGURE 4.7 – Exemple proposé : a) erreur en translation and b) erreur en rotation

- $\theta = 25^\circ$, garantissant un amortissement $\xi \simeq 0.6$.
- $r = 7$, qui établit la dynamique maximale ayant une constante de temps $\tau = 0,14s$, et donc un temps d'établissement à 5% égal à $0,42s$.

La commande a été testée dans un premier temps en simulation et dans un second temps en pratique.

4.5.2 Résultats de simulation

L'algorithme (4.47) (appelé par la suite *Correcteur Rapide*) est testé pour l'asservissement en position de l'objet et comparé avec un deuxième correcteur faisable, déterminé sans la minimisation de la trace de P (que nous désignerons par la suite *Correcteur Faisable*). L'algorithme d'optimisation avec contraintes LMI a été testé sur les deux cas (E1-E2). Le mouvement désiré consiste à déplacer l'objet selon l'axe x de 20 mm et de l'orienter suivant l'axe z de $+10^\circ$. La Figure 4.10 permet de visualiser la manipulation de l'objet en simulation pour les exemples E1 et E2, et la Figure 4.9 donne la réponse dynamique du système pour l'exemple E1.

Les observations suivantes sont faites :

- Les pôles de tous les *discretized- P_Σ systems* sont dans la région stable $\mathcal{D}$ (le résultat est présenté pour l'exemple E1 Fig. 4.8) pour le *Correcteur Rapide* et *Faisable*. Le comportement rapide est obtenu en plaçant les pôles sur la gauche de la région stable.
- L'erreur statique est négligeable pour les deux exemples (Fig.4.9.a-c et 4.10), quel que soit le correcteur (*Rapide* or *Faisable*) lorsqu'il n'y a pas de perturbations extérieures. La loi de commande satisfait donc les critères de stabilité et de performance spécifiés par le placement de pôles. De plus, on rappelle que l'estimation de la Jacobienne $\hat{J}_{h_{eq}}$ est utilisée dans la commande, alors que c'est la Jacobienne réelle $J_h(q, x_o)$ qui est implémentée dans le modèle et qui varie au

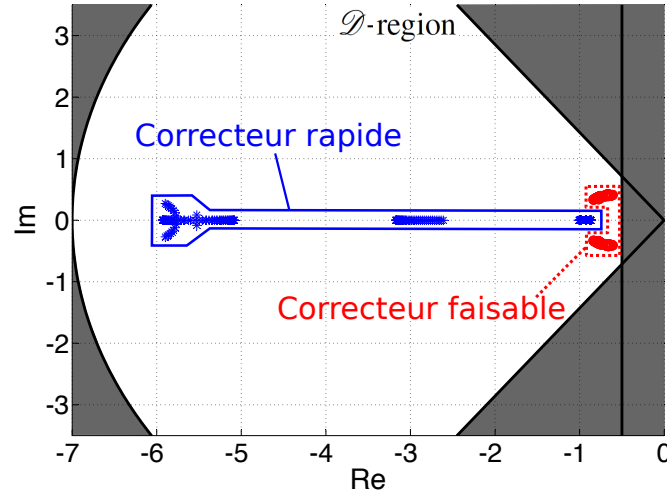


FIGURE 4.8 – Boucle fermée de tous les *discretized- P_Σ systems* avec un pas de 0.5 mm sur δ (Exemple E1)

cours de la simulation.

- La rapidité de la réponse en boucle fermée est réglée par le choix de l'objectif du problème d'optimisation. En minimisant la trace de P , on assure une réponse du système plus rapide, tout en respectant la contrainte LMI du cercle fixant la dynamique maximale. Dans la Fig. 4.9.a-c, on voit que le *Correcteur Rapide* assure un temps de montée de 1 s sur l'axe x alors que le *Correcteur Faisable* assure un temps de montée de 3,7 s.
- L'amplitude de la commande est compatible avec les limites des actionneurs (Fig. 4.9.d). Ce comportement dépend de la dynamique maximale autorisée, suivant la LMI qui spécifie un demi-cercle.
- Les forces de contact restent dans le cône de frottement pendant l'exécution du mouvement (Fig. 4.10 et 4.9.e-f). La composante y des forces de contact est toujours positive, on a donc bien l'application unilatérale des forces de contact, et f_{c_y} est toujours supérieure à $|f_{c_x}|$, validant la contrainte des cônes. Un seuil sur λ , i.e. f_{c_y} , de $100\mu N$ a été ajouté pour augmenter la robustesse aux perturbations extérieures, c'est-à-dire à l'application de torseurs dynamiques extérieurs sur l'objet.

4.5.3 Résultats expérimentaux

4.5.3.1 Nouvelles problématiques et propositions de résolution

Le passage à l'application pratique a fait apparaître de nouvelles problématiques.

Mesure de l'état du système : Le système expérimental ne présente pas une mesure directe de l'état du système, i.e. la position et la vitesse de l'objet. Afin d'évaluer cet

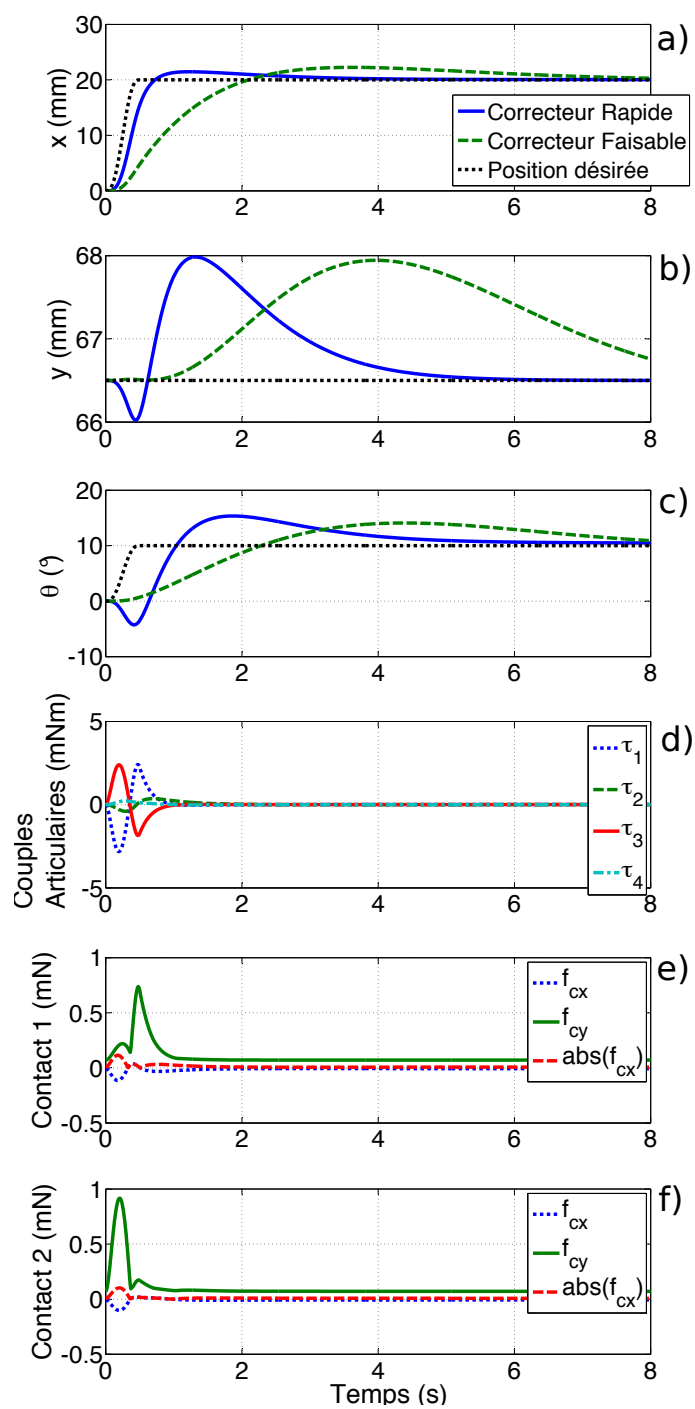


FIGURE 4.9 – Réponse dynamique (Exemple E1)

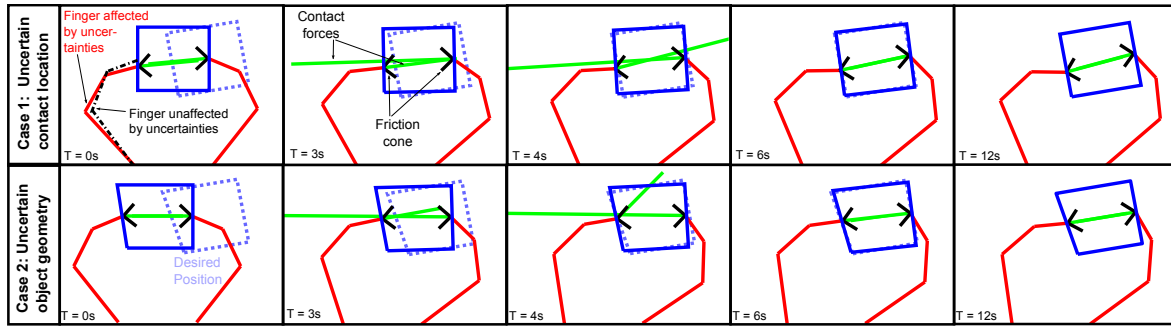


FIGURE 4.10 – Visualisation du repositionnement d'un objet avec incertitudes (exemples E1 et E2) en simulation.

état, on mesure les positions articulaires du préhenseur, et à partir de ces mesures et du modèle géométrique direct du système, on en déduit la position de l'objet.

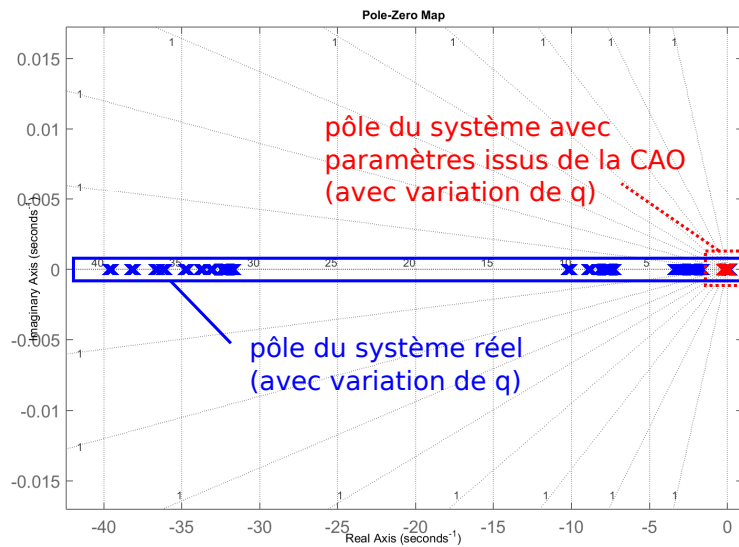


FIGURE 4.11 – Comparaison des pôles du système réel avec ceux du système issu de la CAO avec une variation des variables articulaires q .

Dispersion de modèle : Dans le cas pratique, les valeurs des matrices d'inerties M_f et des effets Coriolis et centrifuge C_f sont différentes de celles de la simulation. Les valeurs prises pour la simulation sont issues de la CAO des doigts, alors que les valeurs utilisées dans la partie pratique sont les paramètres identifiés du banc d'essai. On a noté que le modèle avec paramètres identifiés est plus sensible aux variations des positions articulaires q que le modèle avec paramètres issus de la CAO. La Figure 4.11 montre les pôles du système réel et les pôles du système avec les paramètres issus de la CAO, lors d'une variation des positions articulaires q . Alors que les pôles du système issus de la CAO varient entre 0 et -2, ceux du système réel varient entre 0 et -40.

Afin d'assurer la stabilité du système en plusieurs points de fonctionnement, la synthèse du correcteur prend en compte les variations de q dans la matrice Jacobienne $J_h(q)$ du préhenseur. L'algorithme s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Y,P} \quad Tr(P) \\ \text{s.t. for all } q \in [q_{min}; q_{max}] \\ \quad \text{for all } \delta_i \in P_\delta \\ \quad \quad (4.30) - (4.32) \text{ sont satisfaites} \\ \quad \text{end for} \\ \text{end for} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Prédominance des frottements secs : En outre, la modélisation proposée précédemment n'est plus suffisante car l'effet des frottements secs devient prédominant sur la dynamique précédente du système. On a donc la dynamique :

$$M_{f_i} \ddot{q} + C_{f_i} \dot{q} + B_{f_i} \text{sign}(\dot{q}) = \tau \quad (4.49)$$

Les frottements secs introduisent une erreur statique dans les réponses dynamiques du systèmes (Fig. 4.12.a/b/c). Afin de minimiser cet effet, deux solutions sont proposées :

- Ajouter une action intégrale. Il est possible de garder la même synthèse de commande que précédemment en y ajoutant une action intégrale. Cette méthode permet d'annuler l'erreur statique au détriment de la stabilité du système bouclé. En outre, on modifie le comportement de la commande en impédance. Pour ajouter cette action, il faut étendre la représentation d'état (4.16) avec l'action intégrale. On définit la variable r comme l'intégrale de l'erreur d'asservissement :

$$r(t) = \int_0^t (y(\nu) - y^{(d)}(\nu)) d\nu \quad (4.50)$$

Soit :

$$\dot{r} = y - y^{(d)} \quad (4.51)$$

On définit alors le nouveau système dont l'état est la concaténation de x et r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_{extend}} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{extend}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y^{(d)} \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

On réalise ensuite la synthèse LMI avec les matrices A_{extend} et B_{extend} . Cette méthode peut être difficile à mettre en place car le problème d'optimisation sous contraintes LMI devient plus complexe et le solveur peut avoir des difficultés pour trouver une solution.

- Compenser les frottements secs. Cette méthode nécessite une mesure précise des vitesses articulaires $\dot{q}$ afin d'ajouter au niveau du couple un terme compensateur :

$$\tau = \tau_{\text{synthèseLMI}} + B_{f_i} \text{sign}(\dot{q}) \quad (4.53)$$

Il faut aussi réaliser une identification des paramètres B_{f_i} des frottements secs. Cette compensation n'étant jamais parfaite, elle introduit un couple perturbateur dans la commande.

Pour notre cas d'étude, nous avons opté pour l'ajout d'une action intégrale.

4.5.3.2 Evaluation de la commande

Evaluation de la commande au point nominal Dans un premier temps nous avons testé la commande avec l'objet de référence (cube creux de 13g). La commande est donc évaluée dans le cas nominal, sans incertitudes sur les points de contact. La Figure 4.12 présente les résultats temporels d'un mouvement selon l'axe x . Ces résultats amènent aux observations suivantes :

- La sortie en x nous montre un suivi de trajectoire stable mais présentant une erreur statique de 1,2 mm, soit 12% (Fig.4.12.a). On observe des mouvements non désirés sur les autres variables de position y et θ (Fig.4.12.b et .c). Au point final, on a une erreur de 1 mm sur l'axe y , et de 22° d'orientation. Ces erreurs statiques sont dues à plusieurs phénomènes :
 1. L'état initial du système peut être sujet à des incertitudes. La position des doigts sur l'objet peut présenter des erreurs en translation, comme dans le cas E1 (Fig. 4.7). Ceci est dû au jeu dans les articulations, le placement des doigts n'est donc jamais identique.
 2. La présence de non-linéarités dans le système, tels que les frottements secs, rend notre modélisation imprécise par rapport au système réel.

Cela dit, malgré ces incertitudes et les limitations de notre modèle, on constate que le système bouclé est stable et maintient bien la prise lors de la manipulation.

- Les commandes sont raisonnables, on atteint des commandes maximales de 120mA, sachant que les moteurs peuvent délivrer jusqu'à 170mA en régime permanent (Fig.4.12.d).
- Les forces de contact présentées Figure 4.12.e sont estimées à partir de (4.18). On constate que les forces en y sont toujours positives et la valeur absolue des forces en x est toujours inférieure à la valeur de la force en y . Ainsi, les forces de contact sont bien unilatérales et respectent les contraintes de frottement fixés.

Tests de la robustesse de la commande Afin de tester la robustesse de la commande, une manipulation de mouvement en x de 10mm et de ré-orientation θ de 10° a été opérée pour plusieurs objets différents. Les manipulations ont toujours été réalisées avec le même retour d'état issu de la synthèse LMI.

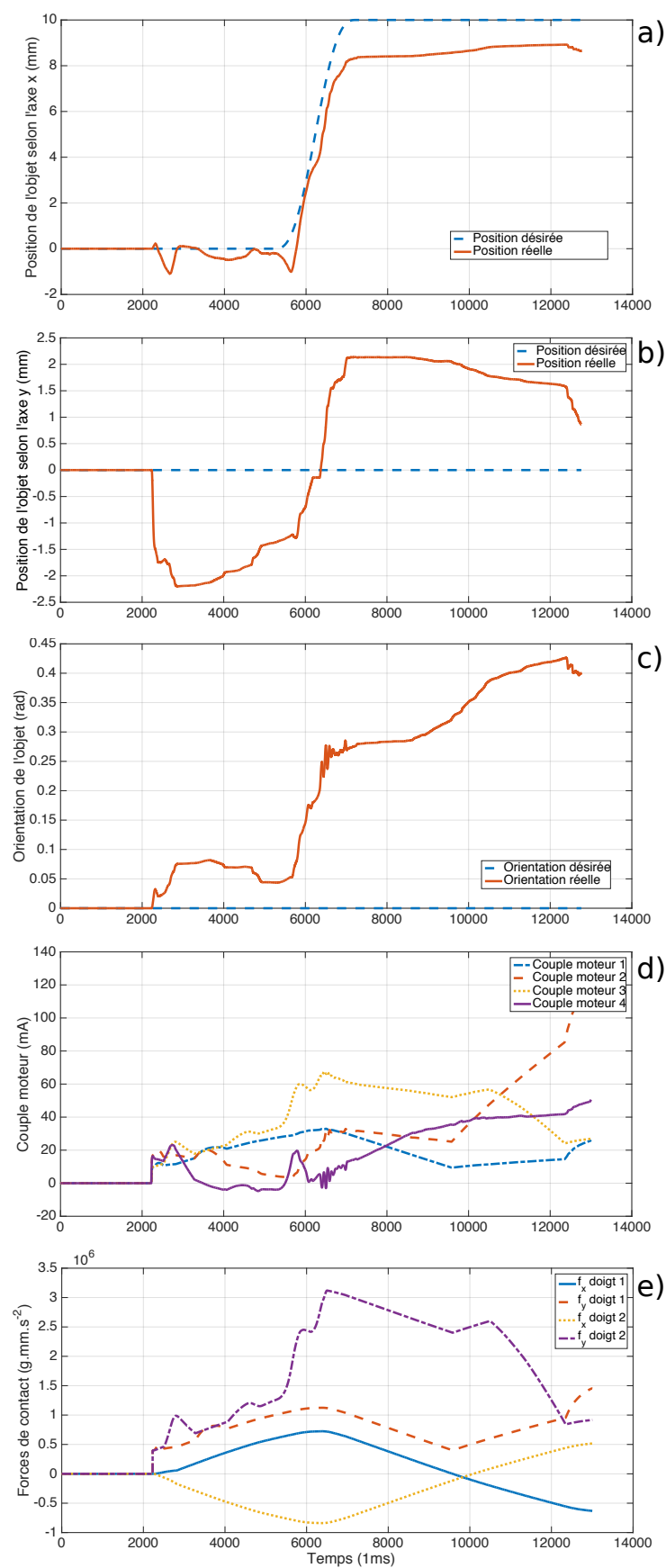


FIGURE 4.12 – Réponse du système réel.

Objet 1 Le cube creux correspond à notre objet de référence.

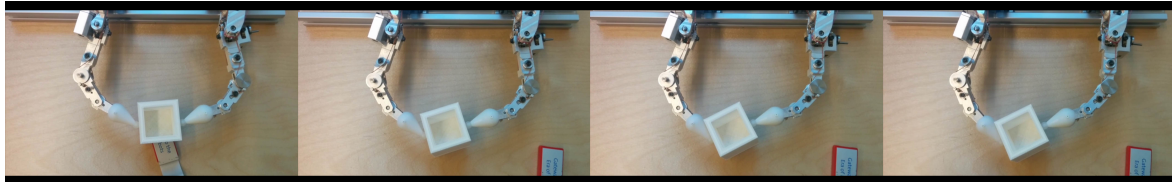
Objet 2 Un cube biseauté de 5° . Ceci permet d'évaluer la robustesse par rapport à une erreur d'orientation du repère du point de contact (exemple E2 dans la simulation).

Objet 3 Une balle de "ping-pong". Cet objet permet d'évaluer la robustesse par rapport à une erreur de translation, la longueur de l'objet étant différente (40 mm au lieu de 35 mm) et le doigt a été initialisé avec une configuration légèrement différente de la configuration nominale (exemple E1 dans la simulation). De plus, la balle de "ping-pong" présente une masse différente du cube (2,7g au lieu de 13g), et la répartition de son inertie est elle aussi différente.

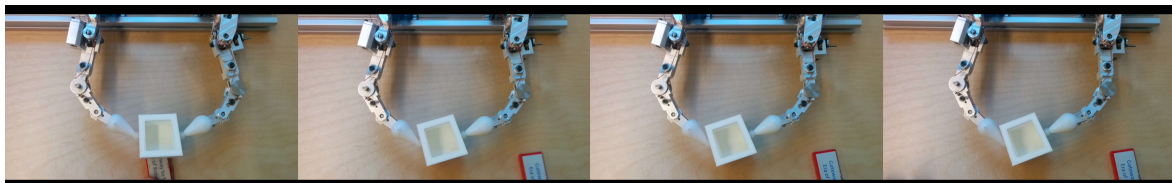
Objet 4 Un ruban adhésif. Cet objet présente les mêmes différences que pour la balle de ping pong, mais la masse de l'objet est plus importante (42g).

La Figure 4.13 montre que la manipulation est réalisée de manière stable pour tous les objets.

Cube normal



Cube biseauté



Balle de ping-pong



Ruban adhésif

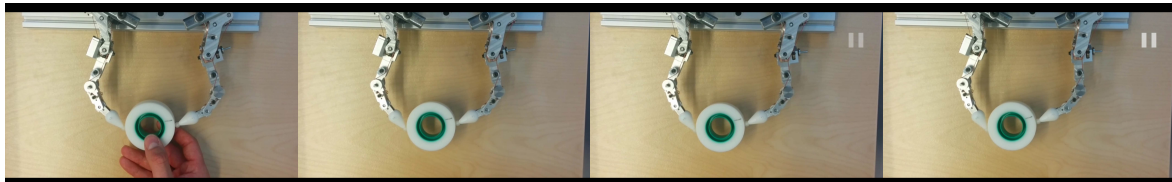


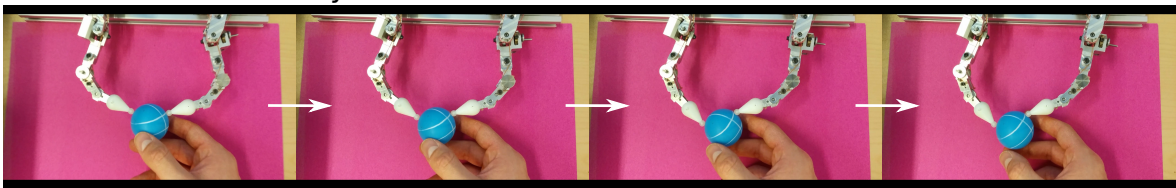
FIGURE 4.13 – Essais avec différents objets.

Comparaison de la synthèse LMI avec la synthèse par placement de la structure propre robuste Nous avons aussi voulu comparer la commande issue de la synthèse LMI avec une autre synthèse robuste, par placement de la structure propre complète [Kautsky et al. (1985)], disponible sur Matlab à partir de la fonction *place*. La synthèse

par placement de la structure propre consiste à placer les vecteurs propres tels qu'ils soient orthogonaux entre eux, afin de minimiser la sensibilité aux incertitudes sur la matrice A de la représentation d'état. Cette synthèse se fait uniquement en un seul point de fonctionnement du système.

La Figure 4.15 montre le placement de pôles de l'ensemble des systèmes incertains selon les deux synthèses robustes. On constate que le système en boucle fermée issu de la synthèse par placement de la structure propre présente des pôles à partie réelle positive. Cette méthode n'assure donc pas la stabilité du système pour toutes les incertitudes et configurations, contrairement à la synthèse LMI, pour laquelle tous les pôles sont à partie réelle négative et dans la $\mathcal{D}$ -région de l'espace complexe.

Correcteur issu de la synthèse LMI



Correcteur issu de la synthèse par placement de structure propre

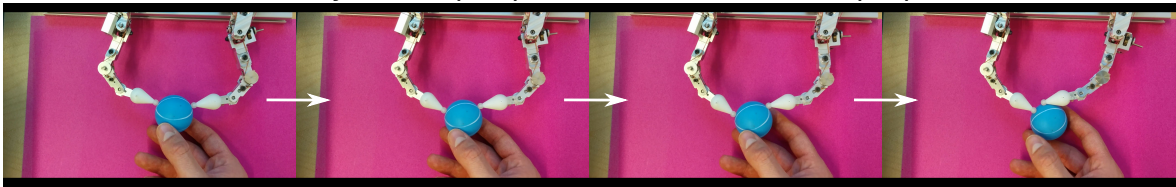


FIGURE 4.14 – Comparaison du correcteur issu de la synthèse LMI et celui issu de la synthèse par placement de la structure propre (fonction *place* sur Matlab).

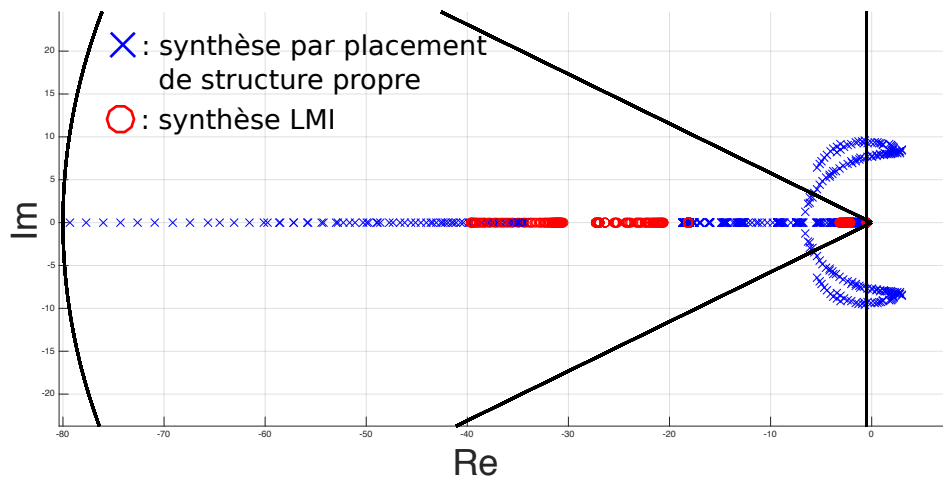


FIGURE 4.15 – Comparaison des pôles du système bouclé (synthèse LMI et synthèse par placement de la structure propre).

Nous avons tester les deux synthèses avec la manipulation d'une balle de ping-pong. En pratique, les deux synthèses assurent une bonne manipulation de l'objet et il faut

se placer dans des cas extrêmes pour observer une différence entre les deux méthodes. Nous avons pris la balle de ping-pong sur les bords, et donc avec une forte erreur d'orientation sur les points de contact, il faut d'ailleurs maintenir la balle de ping-pong avec un troisième contact. On constate que le correcteur issu de la synthèse robuste arrive toujours à réaliser la manipulation, alors que le correcteur classique perd le contact, dû au glissement du doigt (Fig. 4.14). La synthèse LMI assure donc une meilleure robustesse aux incertitudes que la synthèse par placement de la structure propre pour notre système. La synthèse par LMI définit un ensemble d'incertitudes, alors que la synthèse par placement de structure propre ne définit pas les incertitudes, ceci peut expliquer les meilleurs résultats de la synthèse LMI.

4.5.4 Premières Conclusions

La première partie de ce chapitre propose une loi de commande pour la manipulation dextre robuste aux incertitudes géométriques. Trois objectifs cherchent à être atteints avec cette commande : (O1) l'asservissement du mouvement de l'objet, (O2) la validation des contraintes imposées sur le système, (O3) la robustesse aux incertitudes géométriques.

Afin d'atteindre ces objectifs, un retour d'état statique est proposé afin d'asservir le mouvement de l'objet. Ce retour d'état est calculé à partir d'un problème d'optimisation avec contraintes LMIs pour plusieurs configurations du système afin d'assurer la robustesse aux incertitudes géométriques. La structure de commande proposée est similaire à une commande en impédance et les contraintes LMIs permettent de choisir la raideur et l'amortissement du système. En plus de ce retour d'état, une action dynamique est ajoutée afin de valider les contraintes du système.

La loi de commande a été testée en pratique. On constate que le préhenseur réussit à manipuler divers objets, en présence d'incertitudes géométriques et dynamiques. Les contraintes sont toujours vérifiées et les couples articulaires sont compris dans les bornes fixées. En revanche, le système n'atteint pas la position finale désirée à cause des frottements secs présent sur le préhenseur. On voit notamment apparaître des couplages entre les différentes variables (positions x et y , orientation θ). Dans la suite, nous allons donc chercher à améliorer ces résultats en assurant le meilleur découplage possible entre ces variables. Nous verrons que ceci peut être fait en plaçant les vecteurs propres du système bouclé.

4.6 Découplage du mouvement

4.6.1 Introduction

La partie précédente a montré l'intérêt d'une synthèse robuste pour la manipulation dextre : la commande proposée permet de manipuler des objets différents avec des incertitudes portant sur les modèles géométrique et dynamique. Cependant, le système préhenseur/objet est non linéaire, avec une dépendance forte aux frottements secs du préhenseur, et on voit là les limites du correcteur proposé précédemment. Ces non linéarités du système provoquent des erreurs importantes lors du suivi de trajectoire, ce qui peut avoir des conséquences néfastes lorsque le système est soumis à des contraintes sur l'espace de la tâche.

Dans cette partie, nous souhaitons assurer un meilleur suivi de trajectoire de l'objet tout en conservant la structure de commande vue précédemment ainsi que le niveau de robustesse aux incertitudes de modèle atteint avec la commande précédente.

Afin de répondre à ces exigences, nous proposons d'ajouter un objectif de découplage du mouvement de l'objet. En effet, la trajectoire à suivre peut être définie comme une tâche à réaliser et on peut chercher à découpler l'espace de la tâche des espaces perturbateurs. Ce nouvel objectif de commande peut s'exprimer sous une forme non linéaire (problème d'optimisation avec objectifs et/ou contraintes non linéaires, commande non linéaire, etc). Nous allons garder la même synthèse de commande que précédemment, en y ajoutant ce nouvel objectif; on aura alors une synthèse possiblement non linéaire permettant d'aboutir à un retour d'état statique, soit un correcteur linéaire, robuste aux incertitudes de modèle et permettant le découplage de la trajectoire désirée des autres trajectoires perturbatrices, i.e. découpler le mouvement selon l'objectif à réaliser.

4.6.2 État de l'art sur l'étude du découplage des mouvements

Les travaux sur les synergies présentent des résultats particulièrement intéressants sur le couplage/découplage des mouvements du préhenseur [Gabiccini et al. (2011); Gioioso et al. (2013)]. D'après des études en neurosciences, une main humaine réalisant une action de saisie utilise des postures dans un espace de configuration de plus petite taille que l'espace de la cinématique de la main. Cet espace de configuration est appelé espace des synergies. Dans [Santello et al. (1998)], un grand jeu de données a été collecté sur la saisie d'objets par plusieurs personnes. Une analyse en composantes principales a montré que 80% de la variance des saisies pouvait être prise en compte par les deux premières composantes. Cette analyse a donc montré que pour saisir un objet, on peut utiliser un espace de plus petite dimension que l'espace de la cinématique de la main (de la taille du nombre de d.d.l.) : au lieu de considérer les 24 d.d.l. de la main humaine, seulement deux combinaisons suffisent pour la plupart des saisies d'objets. Ces propositions ont été exploitées en robotique afin de simplifier la commande de

saisie d'objet. Mathématiquement, les synergies peuvent être définies au niveau de la commande en couplant les positions articulaires entre elles :

$$q = S\sigma \quad (4.54)$$

avec $S \in \mathbb{R}^{n_q \times n_\sigma}$ la matrice des synergies et $\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$ le vecteur des synergies.

Le couplage des variables articulaires permet de définir des trajectoires particulières pour réaliser la saisie d'un objet. On peut interpréter le couplage comme une méthode de suivi de trajectoire maximisant le nombre de saisie réussie.

Dans le cas de la manipulation dextre à partir d'un contrôle en synergie, les doigts du préhenseur suivent une trajectoire définie par la synergie. La corrélation des variables articulaires permet de ne considérer qu'un sous-espace de l'espace des déplacements de l'objet [Prattichizzo et al. (2010)], et ainsi de composer le mouvement à partir de trajectoires particulières.

Dans [Todorov et Jordan (2002)], une commande optimale stochastique est proposée pour de la manipulation dextre. Selon l'objectif de manipulation à réaliser, la commande n'utilise qu'un sous-espace des variables de commande disponibles. Plus précisément, les actionneurs du préhenseur sont couplés «synergistiquement» et obéissent au principe de l'intervention minimale. A notre connaissance, aucun autre article ne propose un lien entre synergie et objectif de manipulation. En outre, on voit apparaître à nouveau la notion de sous-espace.

Les méthodes d'apprentissage par renforcement présentent aussi des résultats très intéressants lorsqu'un objectif de manipulation est défini au préalable [Kober et Peters (2009); Gupta et al. (2016)]. Le but est ici de faire répéter la tâche de manipulation au préhenseur, et lorsqu'il réussit, on lui associe une récompense positive, lorsqu'il échoue, la récompense est négative. Ces méthodes ont été appliquées dans le cadre de la manipulation dextre en fournissant des connaissances sur l'objectif de manipulation [Pastor et al. (2011)]; l'algorithme est évalué en pratique. Par contre, ces méthodes nécessitent un grand nombre d'itérations afin de fixer la commande par apprentissage, ce qui n'est pas toujours possible dans un cadre industriel. En outre, cette mise en place doit être répétée si l'objectif de manipulation change. Une méthode d'apprentissage basée sur un modèle local est proposée dans [Kumar et al. (2016)]. Cette méthode applique une optimisation de la trajectoire et nécessite assez peu de données. Elle est testée sur un préhenseur à 24 d.d.l. basé sur une motorisation pneumatique, et les résultats montrent que malgré un apprentissage basé sur un modèle local, le système est robuste à une variabilité du point initial. Cela dit, le contrôleur ne peut être appliqué à une situation complètement différente.

Concernant les commandes par découplage selon objectif, des méthodes ont été proposées pour l'aviation dès les années 1980 [Sobel et al. (1994); Mudge et Patton (1988)]. Ces méthodes sont basées sur des retours d'états synthétisés par placement de la structure propre (i.e. le placement des valeurs et des vecteurs propres) du système bouclé.

Dans le cas des systèmes multivariables, il est possible de structurer la matrice d'état à partir de deux éléments : les valeurs propres, qui assurent la stabilité du système bouclé, et les vecteurs propres, qui permettent de réaliser d'autres objectifs de commandes. Dans [Mudge et Patton (1988)], les auteurs présentent une méthode de placement des vecteurs propres assurant le découplage des états du système bouclé.

Les méthodes de placement de la structure propre du système bouclé répondent à notre problématique de suivi de trajectoire. Ces méthodes permettent d'assurer de nouveaux objectifs de suivi de trajectoire par le placement des vecteurs propres, en découplant les états du système bouclé. La plupart des méthodes de placement de structures propres consistent à placer les vecteurs propres une fois les valeurs propres choisies [Kautsky et al. (1985)]. Dans notre cas, on souhaite plutôt un placement strict des vecteurs propres, afin d'assurer le découplage désiré, tout en plaçant les valeurs propres dans une région stable de l'espace complexe (placement non strict). Certaines méthodes de placement de structures propres relâché (*Loose Assignment*) permettent de placer les valeurs propres dans une région de l'espace complexe et on définit des cônes pour la direction des vecteurs propres [Sato et Sugimoto (2006)]. A notre connaissance, aucun algorithme de placement de structures propres ne propose un placement des valeurs propres relâché avec un placement strict des vecteurs propres.

4.6.3 Positionnement scientifique

Dans le cadre de nos travaux, nous allons chercher à résoudre deux problématiques :

1. Proposer une commande pour la manipulation dextre à partir d'un préhenseur avec les objectifs de commande suivant :
 - O1** Réaliser un suivi de trajectoire de l'objet et assurer le découplage du mouvement de l'objet en un point de fonctionnement précis. Cet objectif consiste principalement à définir une trajectoire désirée et de la découpler d'autres trajectoires perturbatrices en un point de fonctionnement.
 - O2** Garder un contact adapté avec l'objet. Le préhenseur ne doit à aucun moment perdre le contact avec l'objet. Pour cela, il doit appliquer des forces de contact ne générant pas de mouvement mais permettant de garder une saisie ferme de l'objet [Bicchi et Kumar (2000)]. Cette saisie doit être adaptée aux caractéristiques de l'objet pour éviter de le briser ou le déformer.
 - O3** Gérer les incertitudes vis-à-vis d'erreurs de modélisation géométrique et dynamique. Afin d'assurer une manipulation stable de l'objet, il faut éviter toute sensibilité de la commande vis-à-vis d'incertitudes de modèle.
2. Proposer une nouvelle méthode de placement strict de vecteurs propres et le placement de valeurs propres non strict, i.e. dans une zone de l'espace complexe.

4.6.4 Spécification de trajectoires, sous-espaces invariants et vecteurs propres

Cette partie va nous permettre de définir les notions de trajectoires, de sous-espaces invariants et de vecteurs propres.

Une trajectoire correspond aux positions successives d'un point en mouvement, et lorsque l'on considère la trajectoire d'un solide (un objet dans notre cas), on choisit en général d'étudier la trajectoire de son centre de gravité. Dans le cadre de la manipulation dextre, le préhenseur peut amener l'objet en différents points de l'espace et cet ensemble de points correspond à l'espace de travail du système préhenseur/objet. Une trajectoire peut alors être définie comme étant un sous-espace de l'espace de travail.

Afin de clarifier le lien entre spécification de trajectoire et sous-espace de l'espace objet, on considère la manipulation d'un objet dans le plan. La position de l'objet est définie par les variables :

$$\tilde{x}_o = \begin{bmatrix} \tilde{x}_x & \tilde{x}_y & \tilde{x}_\theta \end{bmatrix}^T \quad (4.55)$$

Avec $\tilde{x}_x$, $\tilde{x}_y$, et $\tilde{x}_\theta$ respectivement les différences entre la position à l'équilibre et la position actuelle de l'objet selon l'axe x , l'axe y et l'orientation θ de l'objet.

On considère que l'objectif à réaliser est un mouvement selon l'axe y uniquement (Fig. 4.16). Aucun mouvement selon x ou θ n'est autorisé. Dans ce cas, seulement la variable $\tilde{x}_y$ doit être affectée par le mouvement et les autres variables restent nulles (en considérant que la position initiale est au point d'équilibre). Cette trajectoire peut donc être définie comme un sous-espace de l'espace objet par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_x \\ \tilde{x}_y \\ \tilde{x}_\theta \end{bmatrix} \in \text{Traj}_y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_x \\ \tilde{x}_y \\ \tilde{x}_\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Sb_y} \tilde{\sigma}_y \quad (4.56)$$

Avec $\tilde{\sigma}_y$ l'amplitude du mouvement et Sb_y le sous-espace de l'espace objet permettant de réaliser un mouvement selon y .

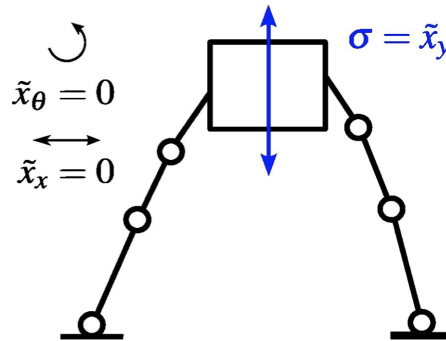


FIGURE 4.16 – Exemple de spécification de trajectoire : mouvement selon l'axe y .

En conclusion, la trajectoire, i.e. l'objectif de manipulation dextre à réaliser, peut être définie mathématiquement comme un sous-espace de l'espace objet. Il est possible d'ajouter des spécifications sur les vitesses $\dot{\hat{x}}_o = [\dot{\hat{x}}_x \ \dot{\hat{x}}_y \ \dot{\hat{x}}_\theta]^T$ (niveau objet) en considérant $\dot{\hat{\sigma}}_y$.

Après avoir défini la trajectoire de manipulation à partir d'un sous-espace de l'espace objet, on cherche à spécifier le suivi de trajectoire du système. Pour assurer un suivi de trajectoire parfait, le sous-espace lié à la trajectoire désirée doit être orthogonal aux autres sous-espaces de l'espace objet pour le système en boucle fermée. Cette spécification peut être formulée par l'équation :

$$\overline{Sb}^T A_{CL} Sb = 0 \quad (4.57)$$

avec $\overline{Sb}$ le sous-espace complémentaire de Sb , et $A_{CL} = A - BL_c$ la matrice d'état du système en boucle fermée. Le suivi de trajectoire est ainsi assuré par un découplage de la trajectoire désirée vis-à-vis des autres trajectoires possibles dans l'espace objet et s'exprime par des contraintes d'égalité.

La décomposition en éléments propres de la matrice d'état A_{CL} du système en boucle fermée donne :

$$A_{CL} = V\Lambda V^{-1} \quad (4.58)$$

En considérant (4.57), on a la contrainte :

$$\overline{Sb}^T V\Lambda V^{-1} Sb = 0 \quad (4.59)$$

La matrice Λ doit être choisie telle que le système en boucle fermée soit stable. Ceci correspond à un placement de valeurs propres. La matrice V doit être choisie telle que l'équation (4.59) soit vérifiée. Ceci correspond à un placement de vecteurs propres. Ainsi, le suivi de trajectoire peut être assuré par un placement de la structure propre du système bouclé.

4.6.5 Commande robuste avec découplage du mouvement

4.6.5.1 Objectifs de commande

On rappelle les objectifs du contrôleur que l'on souhaite atteindre :

- O1** Réaliser un suivi de trajectoire de l'objet et assurer le découplage du mouvement de l'objet en un point de fonctionnement précis. Cet objectif peut être réalisé grâce à la commande u qui apparaît explicitement dans la représentation (4.16). Le découplage de la trajectoire peut être assuré en considérant la contrainte (4.57), à partir de laquelle nous savons que le suivi de trajectoire peut être assuré par un placement de la structure propre du système bouclé.
- O2** Satisfaire les contraintes du système :

- Cônes de frottement ;
 - Forces de contact unilatérales ;
 - Bornes minimales et maximales dues aux couples moteurs eux-mêmes bornés.
- Cet objectif est réalisé par la commande λ qui génère les forces internes. Cet objectif a déjà été traité et les développements restent les mêmes, nous n'aborderons donc pas cette problématique dans la suite.

O3 Les deux objectifs précédents doivent être validés en présence d'incertitudes sur les points de contact. Nous souhaitons proposer une commande assurant la stabilité de l'asservissement pour le système nominal affecté par un ensemble d'incertitudes, ce qui est équivalent à assurer la stabilité de l'asservissement pour un ensemble de systèmes.

Au vu des objectifs précédents, nous gardons la même structure de commande que précédemment, c'est-à-dire une commande par retour d'état statique, équivalent à une commande en impédance puisque l'état du système est $x = [\tilde{x}_o^T \ \dot{\tilde{x}}_o^T]^T$, avec l'ajout d'une action dynamique assurant la validation des contraintes de contact. La synthèse est toujours faite par la résolution d'un problème d'optimisation avec contraintes LMI afin d'assurer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes de modèle. Ainsi, la formulation du problème est la même et le placement des valeurs propres reste valable. Mais cette fois-ci, la synthèse intègre en plus le placement des vecteurs propres afin d'assurer le découplage de la trajectoire en un point de fonctionnement donné. Contrairement aux méthodes existantes, nous souhaitons assurer un placement des valeurs propres dans une zone de l'espace complexe (placement non strict), et placer les vecteurs propres selon une contrainte d'égalité (placement strict).

4.6.5.2 Placement des vecteurs propres

Dans cette partie, nous allons étendre le placement des valeurs propres de la boucle fermée au placement de la structure propre afin de découpler la trajectoire désirée du système en un point de fonctionnement des autres trajectoires dites perturbatrices. Nous avons vu que cet objectif de découplage peut être réalisé en ajoutant la contrainte (4.59) à la synthèse du correcteur. Le problème s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{find} & L_c \\ & \text{t.q. for all } i \\ & \quad \overline{Sb}_i^T (A - BL_c) Sb_i = 0 \\ & \text{end for} \end{array} \right. \quad (4.60)$$

(4.60) permet le découplage, mais cette optimisation ne résout pas le problème de stabilité (placement des valeurs propres).

Dans notre cas, on souhaite garder la liberté de placer les pôles dans une $\mathcal{D}$ -région de l'espace complexe. Par contre, on souhaite un découplage strict de la trajectoire, donc un placement strict des vecteurs propres. On souhaite donc « assembler » les deux

optimisations (4.47) et (4.60). La première optimisation portant sur les matrices Y et P , et la seconde optimisation portant directement sur la matrice de retour d'état L_c , on peut lier les deux problèmes d'optimisation en ajoutant la contrainte $Y = L_c P$ formulée comme $|Y - L_c P| \leq \epsilon$ avec ϵ petit. On trouve donc la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Y, P, L_c} \quad \epsilon \\ \text{t.q.} \quad \blacktriangleright (4.30) - (4.32) \text{ sont satisfaites} \\ \quad \quad \blacktriangleright \text{for all } i \\ \quad \quad \quad \overline{Sb}_i^T (A - BL_c) Sb_i = 0 \\ \quad \quad \quad \text{end for} \\ \quad \quad \blacktriangleright -\epsilon \leq Y - L_c P \leq \epsilon \end{array} \right. \quad (4.61)$$

La première contrainte permet de déterminer un correcteur YP^{-1} qui assure la stabilité du système en boucle fermée. La seconde contrainte avec la boucle «for» détermine un correcteur L_c qui permet le découplage de la trajectoire pour un point de fonctionnement donné. La dernière contrainte permet de faire converger les deux correcteurs YP^{-1} et L_c . Cette formulation est non linéaire et l'algorithme doit résoudre des contraintes LMI et BMI (Inégalités Matricielles Bilinéaires).

4.6.5.3 Prise en compte des incertitudes

Nous reprenons la même méthode que précédemment pour robustifier le correcteur vis-à-vis d'incertitudes sur la matrice de saisie G .

Concernant le découplage, on ne peut pas valider la contrainte (4.60) pour différents systèmes. On cherche donc à vérifier cette contrainte uniquement pour le système au point nominal, sans incertitude.

Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Y, P, L_c} \quad \epsilon \\ \text{t.q.} \quad \blacktriangleright \text{for all } \delta_i \in P_\delta \\ \quad \quad (4.30) - (4.32) \text{ sont satisfaites pour } A(\delta), B(\delta) \\ \quad \quad \text{end for} \\ \quad \quad \blacktriangleright \text{for all } Sb_i \\ \quad \quad \quad \overline{Sb}_i^T (A_0 - B_0 L_c) Sb_i = 0 \\ \quad \quad \quad \text{end for} \\ \quad \quad \blacktriangleright -\epsilon \leq Y - L_c P \leq \epsilon \end{array} \right. \quad (4.62)$$

La première contrainte permet de trouver un correcteur YP^{-1} qui assure la stabilité pour tous les *discretized- P_Σ systems*. La seconde contrainte permet de trouver un correcteur L_c qui assure le découplage de la trajectoire pour le système au point nominal (A_0, B_0) . La dernière contrainte assure la convergence des deux correcteurs YP^{-1} et L_c .

4.7 Cas d'étude avec découplage

L'étude porte sur le système expérimental et les mêmes exemples que précédemment (Fig. 4.7).

4.7.1 Paramètres de la commande

Il faut déterminer les trajectoires que l'on souhaite appliquer à notre système, pour en déduire les sous-espaces à découpler. Les recherches en neurosciences ont montré que l'humain réalise des mouvements en ligne droite dans l'espace cartésien [Flanagan et Rao (1995)], le découplage dans cet espace nous paraît donc naturel. De plus, la sensibilité aux incertitudes est minimisée lorsque l'on applique un découplage des états du système [Kautsky et al. (1985)]. Les sous-espaces correspondants sont donc :

$$Sb_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; Sb_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; Sb_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Pour chaque sous-espace Sb_i , la position selon un axe est corrélée à la vitesse sur ce même axe et décorrélée des positions et vitesses selon les autres axes.

La commande a été testée dans un premier temps en simulation et dans un deuxième temps en pratique.

4.7.2 Résultats de simulation

Le problème d'optimisation étant non linéaire, il est fortement recommandé d'évaluer l'algorithme en plusieurs points de fonctionnement (*multistart*) afin d'éviter les minima locaux. La non convergence de l'optimisation peut être due à des contraintes trop fortes (problème infaisable), ou à des non linéarités qui bloquent l'optimisation dans un minimum local (ceci peut être résolu avec une procédure *multistart*). Pour les cas E1 et E2, la variable ϵ de (4.62) est minimisée à 10^{-13} .

Nous avons dans un premier temps testé le correcteur issu de ces synthèses dans le cas du système nominal, c'est-à-dire le système linéarisé sans incertitude (Fig. 4.17). Différents mouvements sont testés sur ce système : un mouvement selon l'axe x (a), selon l'axe y (b), un mouvement d'orientation θ (c), et une combinaison de ces différents mouvements. Ces simulations montrent que le système est stable et que le découplage dans l'espace cartésien est parfaitement réalisé.

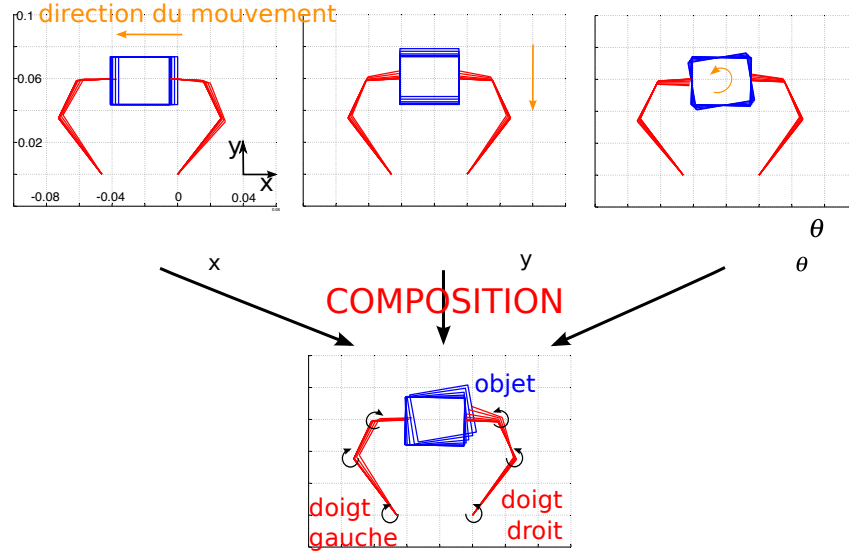


FIGURE 4.17 – Evaluation du découplage sur le système linéarisé sans incertitude

Dans un deuxième temps, le correcteur a été testé dans le cas non linéaire avec un mouvement de 30 mm suivant l'axe x (Fig. 4.18 et 4.19). La première simulation est réalisée sans incertitudes (courbe bleue Fig. 4.19 et 4.18.a). Lorsque le système s'écarte du point d'équilibre (sur lequel a été spécifié le découplage), l'objet s'écarte de la trajectoire spécifiée de 1.8 mm suivant l'axe y et de 5° suivant l'orientation θ . Dans la figure 4.18.a, on voit que lorsque le système est proche du point d'équilibre, la trajectoire spécifiée est correctement découplée, i.e. le mouvement est appliqué uniquement le long de l'axe x , mais lorsque le système s'approche du point final désiré, il est affecté par des mouvements perturbateurs selon l'axe y et θ . La synthèse de découplage n'étant réalisée que sur le modèle au point nominal, lorsque le système s'écarte de ce point, le modèle varie et le découplage est moins efficace. Ces erreurs sont donc dues à la linéarisation du système.

Les deuxième et troisième simulations (courbe tirets rouges et pointillés verts dans la Figure 4.19 et 4.18.b-c) sont réalisées en présence d'incertitudes sur les points de contact (exemples E1 et E2). Ces exemples montrent l'effet des incertitudes sur le suivi de trajectoire. La Figure 4.19 montre que le suivi de trajectoire est perturbé suivant l'orientation θ et suivant l'axe y plus tôt que dans le cas sans incertitude. Ainsi, le découplage devient moins efficace en présence d'incertitudes. Ceci est encore dû au fait que le découplage n'est réalisé que pour un point de fonctionnement, et en s'écartant de ce point, il devient moins efficace. On note cependant que l'erreur sur l'axe y est toujours inférieure à 4mm et sur l'axe θ , l'erreur est inférieure à 11° . Malgré les incertitudes et la dispersion de modèle, on note que la manipulation est toujours correctement réalisée et stable, comme nous l'avons spécifié dans la synthèse du correcteur. De plus, le point final désiré est toujours atteint par le système bouclé.

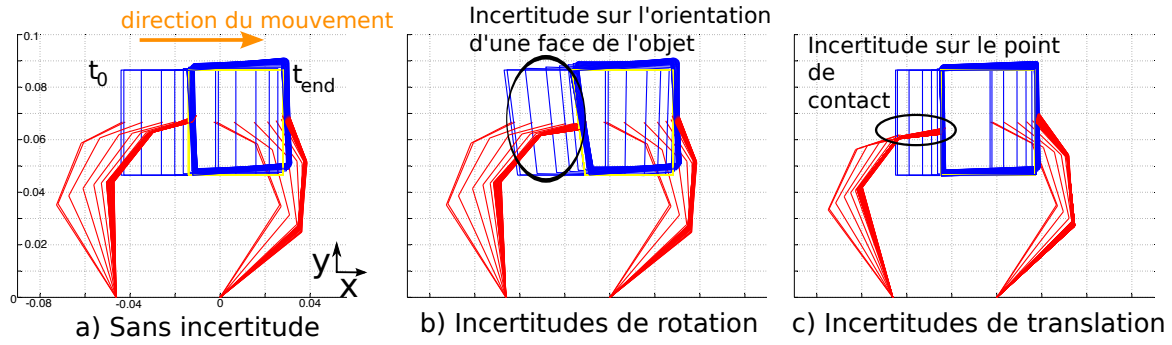
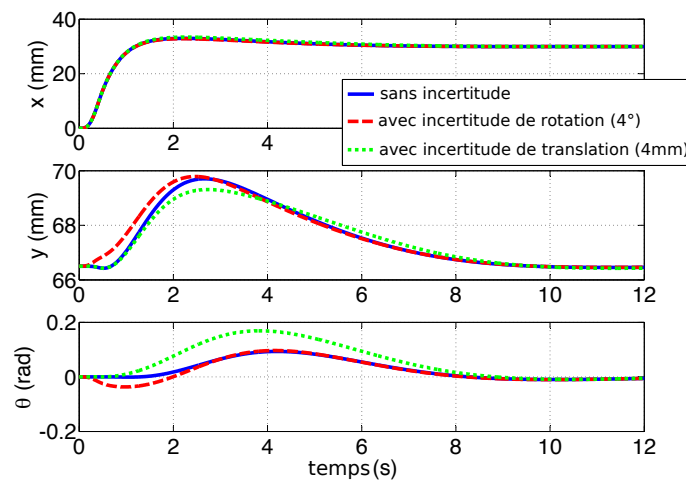


FIGURE 4.18 – Influence des incertitudes sur le suivi de trajectoire.

FIGURE 4.19 – Evaluation temporelle de la commande sur le système non linéaire avec un mouvement selon x (voir Fig. 4.18)

4.7.3 Résultats expérimentaux

Les résultats pratiques ont été comparés avec ceux obtenus à partir du correcteur robuste par synthèse LMI sans découplage. Avec le correcteur précédent, le suivi de trajectoire n'était pas satisfaisant à cause des non linéarités du système non prises en compte, notamment les frottements secs. On a donc cherché à comparer le suivi de trajectoire des deux corrections (Fig. 4.20).

Le couplage a été réalisé pour un point de fonctionnement intermédiaire (ni le point initial ni le point final). On constate que le suivi de trajectoire sur les trois axes est meilleur :

- Sur l'axe x : l'erreur statique finale passe de 1,2mm à 0,7mm, avec un meilleur suivi de trajectoire global. On note qu'à 6,1s, la position réelle colle à la position désirée.
- Sur l'axe y : l'erreur statique finale passe de 0,85mm à 1,05mm. En revanche, le suivi de trajectoire est meilleur et on note toujours à 6,1s un parfait découplage

selon l'axe y .

- Sur l'axe θ : l'erreur statique finale passe de 0,4rd à 0,25rd. On a donc une nette diminution de l'erreur d'orientation de l'objet avec un meilleur suivi de trajectoire global. Le découplage n'est par contre pas assuré à 6,1s sur cet axe.

On constate donc que le correcteur avec objectif de découplage assure un meilleur suivi de trajectoire. On reste toujours sensible aux non linéarités du système. Ceci est dû à notre choix d'avoir un correcteur linéaire, qui ne permet pas une prise en compte de ces non linéarités dans le suivi de trajectoire. On constate cependant que les objectifs de stabilité sont atteints malgré la forte dispersion du système.

On peut aussi remarquer que les couples moteurs sont tout à fait raisonnables avec un pic à 70 mA, le moteur supportant 170 mA en régime permanent. La courbe des forces de contact montre que les forces sont unilatérales (les forces selon y sont toujours positives) et la contrainte des cônes de frottement est toujours respectée (la valeur absolue des forces selon x est toujours inférieure aux forces selon y).

La robustesse a aussi été évaluée et on retrouve des résultats similaires au correcteur robuste par synthèse LMI sans découplage.

4.8 Conclusions

Ce chapitre présente une commande par retour d'état pour la manipulation dextre répondant aux exigences suivantes : (O1) assurer le meilleur suivi de trajectoire possible en présence de non linéarités tout en gardant une structure de correction linéaire, (O2) satisfaire les contraintes liées aux systèmes, (O3) assurer la robustesse du système bouclé vis-à-vis d'incertitudes de modèle.

La commande proposée se base sur un retour d'état synthétisé à partir d'un problème d'optimisation avec contraintes LMI et BMI. La résolution de ce problème permet de répondre aux trois objectifs précédents, notamment l'objectif de suivi de trajectoire qui est assuré en découplant la trajectoire désirée des autres trajectoires de l'espace objet.

Les résultats pratiques montrent une nette amélioration du suivi de trajectoire, bien qu'il ne soit pas encore parfait. La synthèse de suivi de trajectoire étant faite sur un seul point de fonctionnement, les non linéarités empêchent un découplage parfait hors de ce point de fonctionnement. Lorsque le système se trouve sur ce point de fonctionnement, le découplage du mouvement est réalisé, et on peut ainsi assurer l'évitement d'une contrainte environnementale en choisissant judicieusement ce point.

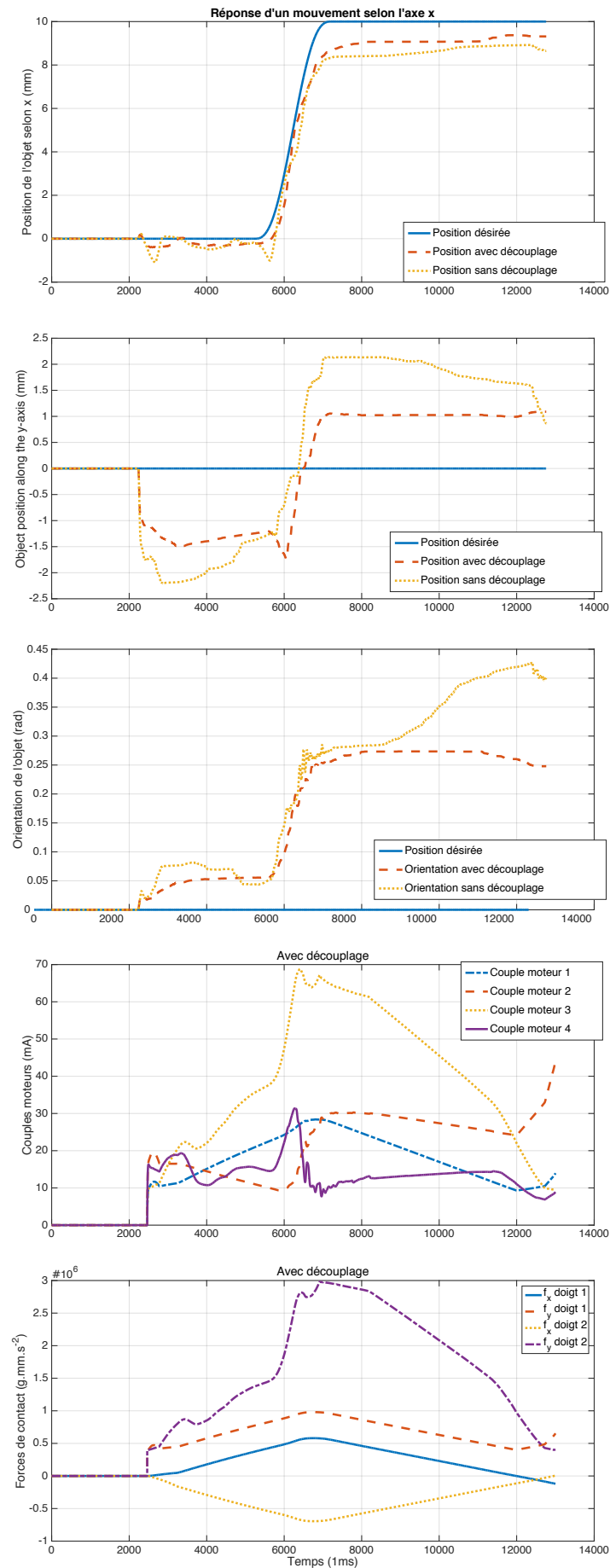


FIGURE 4.20 – Réponse dynamique

Chapitre 5

Conclusion générale

Sommaire

5.1 Contributions	99
5.1.1 Mesure de qualité de prise en présence d'incertitudes sur la saisie	100
5.1.2 Commande robuste aux incertitudes de modèle pour la manipulation dextre	100
5.2 Perspectives	101
5.2.1 Lien avec les synergies	101
5.2.2 Etude d'autres commandes robustes pour la manipulation dextre	102
5.2.3 Extension au cas à trois dimensions	103
5.2.4 Développement d'un algorithme unifié de saisie et de manipulation dextre en présence d'incertitudes	103

5.1 Contributions

La manipulation dextre et la saisie par des préhenseurs multidigitaux sont des sujets en plein essor pour lesquels de nombreuses problématiques émergent. Les travaux de ce manuscrit s'inscrivent à la fois dans les thèmes de recherche de la saisie d'objets à partir d'un préhenseur et de la manipulation dextre, et ont pour fil conducteur les incertitudes de modèle.

Les incertitudes considérées dans ces travaux sont principalement d'origine géométrique : incertitudes sur la géométrie de l'objet à manipuler ou du préhenseur, mauvaise initialisation de la saisie, etc. Ces incertitudes ont des conséquences sur la précision de la manipulation, ainsi que sur sa stabilité. Elles interviennent dans la définition des repères de contact et de l'objet par rapport au repère inertiel, et peuvent donc être modélisées au niveau de la matrice de saisie G du système, matrice liant les contacts au repère de l'objet suivant le type de contact. On définit alors une matrice de saisie incertaine $G(\delta)$ avec δ le vecteur des incertitudes affectant le système. En outre, des incertitudes sur le modèle dynamique du système {préhenseur/objet} sont aussi consi-

dérées pour la manipulation dextre. En effet, des incertitudes sur la matrice d'inertie de l'objet peuvent être prises en compte indirectement. Deux apports sont présentés dans ce manuscrit :

- Une mesure de qualité de prise en présence d'incertitudes sur la saisie.
- Une commande robuste aux incertitudes de modèle pour la manipulation dextre.

5.1.1 Mesure de qualité de prise en présence d'incertitudes sur la saisie

La mesure de qualité de prise est un outil indispensable afin d'étudier les différentes possibilités de saisie d'un objet et choisir celle qui a les meilleures capacités désirées (robustesse vis-à-vis de perturbations extérieures, manipulabilité de la prise). Nos travaux proposent une nouvelle mesure de qualité, dont le principe reste dans la continuité des méthodes les plus connues qui consistent à déterminer l'espace des torseurs dynamiques applicables sur l'objet par le préhenseur, en fonction des points de contact entre le préhenseur et l'objet. Or, les mesures de qualité de prise les plus connues et utilisées de la littérature ne sont pas adaptées à la prise en compte d'incertitudes sur les points de contact. Nos travaux portent donc sur une nouvelle mesure tenant compte de ces incertitudes.

Cette mesure de qualité cherche à évaluer l'espace des torseurs dynamiques applicables sur l'objet par le préhenseur quelle que soit l'incertitude affectant le système, pour un intervalle d'incertitudes donné. On appelle cet ensemble le *Reachable Wrench Space under Uncertainties* (RWSU). Deux algorithmes sont proposés afin de déterminer un majorant et un minorant du RWSU. L'évaluation d'un majorant se base sur l'intersection de plusieurs polyèdres, chacun correspondant à l'espace des torseurs dynamiques applicables à l'objet par le préhenseur pour une incertitude donnée. Le minorant du RWSU est le résultat d'un problème d'optimisation qui consiste à explorer plusieurs directions dans l'espace des torseurs dynamiques. On peut noter que l'algorithme évaluant un minorant du RWSU est directif étant donné que l'on ne s'intéresse qu'à des directions particulières de l'espace des torseurs dynamiques ; ainsi, on peut évaluer la saisie pour une tâche de manipulation donnée.

La mesure de qualité de prise que nous proposons prend donc en compte les incertitudes géométriques de saisie, tout en gardant une interprétation physique claire et dans la continuité des méthodes les plus connues.

5.1.2 Commande robuste aux incertitudes de modèle pour la manipulation dextre

La deuxième contribution de cette thèse concerne l'application d'algorithmes de commande robuste pour la manipulation dextre. A notre connaissance, assez peu de travaux se sont intéressés aux conséquences d'incertitudes de modèle pour la manipula-

tion dextre. Les contributions dans ce domaine se sont dirigées vers l'application de commandes adaptatives ou prédictives. Nos travaux se sont quant à eux orientés vers l'application d'une commande robuste aux incertitudes de modèle.

La commande que nous proposons est un retour d'état, permettant de répondre à la consigne de manipulation, auquel on ajoute une action dynamique, permettant de répondre aux contraintes de saisie. Le retour d'état est synthétisé suivant un problème d'optimisation avec contraintes LMI. Les contraintes LMI permettent d'une part de définir la réponse dynamique du système bouclé, et d'autre part d'assurer la robustesse aux incertitudes de modèle. Cette commande a été testée en simulation puis sur un système expérimental. Les simulations montrent la validité de cette proposition, tandis que les résultats expérimentaux montrent que le système bouclé est bien stable même en présence d'incertitudes, aussi bien géométriques que dynamiques, mais que le suivi de trajectoire n'est pas entièrement satisfaisant, notamment à cause des non linéarités du système qui ne sont pas prises en compte dans le modèle.

Afin d'améliorer le suivi de trajectoire, une nouvelle commande est proposée. Les principes généraux et la structure de la commande précédente sont conservés, mais un objectif supplémentaire sur le problème d'optimisation est proposé afin d'assurer le découplage des mouvements du préhenseur. L'idée consiste alors à améliorer les performances de suivi de trajectoire pour ce système MIMO en découplant la trajectoire à suivre des trajectoires perturbatrices résultant des couplages dynamiques entre les axes. Ce découplage de la trajectoire désirée est réalisé en plaçant les vecteurs propres du système en boucle fermée selon les objectifs de la tâche à réaliser.

Cette commande a été testée en pratique et on constate une amélioration du suivi de trajectoire lorsque l'on intègre cette contrainte de découplage de trajectoire. La synthèse du découplage étant réalisée uniquement en un point de fonctionnement et le système étant non linéaire, le découplage de la trajectoire est très satisfaisant autour de ce point de fonctionnement nominal mais la dispersion du modèle engendre un suivi de trajectoire moins efficace lorsque l'on s'éloigne de ce point de fonctionnement. Cela dit, la stabilité est toujours assurée.

5.2 Perspectives

Plusieurs pistes peuvent être explorées suite à ces travaux de thèse.

5.2.1 Lien avec les synergies

Tout d'abord, l'une des pistes que nous avons commencé à explorer concerne le lien entre le découplage de la trajectoire désirée, les sous-espaces de l'espace objet, et les synergies.

La notion de synergie désigne le couplage des articulations du préhenseur afin de définir une seule variable permettant de générer un mouvement complet du préhenseur. Les synergies sont principalement utilisées pour la saisie d'objet et sont déduites à partir d'études en neuroscience sur les mouvements de saisie de l'être humain. Les positions articulaires autour d'un point d'équilibre $\tilde{q}$ peuvent être définies par une fonction de dimension plus faible, dont les éléments sont sélectionnés selon un vecteur d'intensité $\tilde{\sigma}$, et qui contraint les configurations de la main dans un ensemble de dimension n_s [Gabbicini et al. (2011)] :

$$\tilde{q} = S\tilde{\sigma} \quad (5.1)$$

Avec $S \in \mathbb{R}^{n_q \times n_s}$ la matrices des synergies, et n_s le nombre de synergies.

Le concept de synergies peut être lié à la notion de sous-espace de l'espace objet. Dans l'exemple de la figure 4.16, les positions articulaires peuvent être corrélées afin d'appliquer un mouvement uniquement selon l'axe y . Pour cela, on reprend l'équation (4.56) qui définit ce mouvement au niveau objet, et on applique la transformation $J_{heq}^{-1}G^T$ afin d'exprimer (4.56) au niveau articulaire. On obtient :

$$\tilde{q} \in \text{Traj}_y \Leftrightarrow \tilde{q} = \underbrace{(J_{heq}^{-1}G^T)^+}_{S_y} S b_y \tilde{\sigma}_y \quad (5.2)$$

S_y correspond à un sous-espace de l'espace articulaire permettant de générer un mouvement en y . S_y est un vecteur colonne de corrélation des positions articulaires et $\tilde{\sigma}_y$ est l'amplitude du mouvement. Cette équation peut être liée à (5.1) en considérant que S_y est une colonne de S et $\tilde{\sigma}_y$ un élément du vecteur σ .

Les synergies habituellement proposées sont issues de travaux en neurosciences et ici, une nouvelle manière de déterminer des synergies peut être envisagée pour la manipulation dextre par l'objectif de commande exprimé au niveau objet, en suivant ces étapes :

- Déterminer l'objectif de manipulation.
- En déduire la trajectoire à réaliser et déterminer le sous-espace de l'espace objet correspondant (e.g. (4.56)).
- En déduire la synergie correspondante à partir de (5.2).

On constate donc qu'il y a un lien entre synergies, sous-espaces de l'espace objet, et par conséquent découplage de la trajectoire. Ce lien avec les synergies mérite d'être plus détaillé et il serait intéressant de proposer une commande robuste aux incertitudes de modèle dans l'espace des synergies.

5.2.2 Etude d'autres commandes robustes pour la manipulation dextre

Les travaux de cette thèse se sont intéressés à l'application d'algorithmes de commande robuste pour la manipulation dextre, et nous nous sommes concentrés sur une com-

mande par retour d'état synthétisée à l'aide d'une optimisation avec contraintes LMI et BMI.

Il serait intéressant d'étudier la faisabilité de l'application d'autres commandes robustes pour la manipulation dextre. On pense notamment à la commande H_∞ par approche standard ou par «loop-shaping». Il faudra cela dit être vigilant aux incertitudes considérées dans la synthèse de ces contrôleurs. Ces commandes robustes étant basées sur le théorème du petit gain, et ce théorème ne fournissant que des conditions suffisantes à la robustesse, la synthèse pourrait s'avérer trop conservative.

En outre, dans nos travaux, on réalise une estimation de la position de l'objet en fonction des variables articulaires. Il serait intéressant de pousser la démarche en synthétisant un observateur pour estimer cette position, et coupler celui-ci avec un système de vision permettant de recalibrer régulièrement la position estimée par l'observateur avec la position réelle de l'objet issue du système de vision.

Il serait aussi intéressant de comparer les commandes robustes appliquées à la manipulation dextre aux autres commandes tenant compte d'incertitudes de modèle proposées dans la littérature sur la manipulation dextre. On pense notamment aux commandes adaptatives [Cheah et al. (1998, 2006); Yao et Tomizuka (1993); Ueki et al. (2009)] ainsi qu'aux commandes prédictives [Todorov et Jordan (2002)].

5.2.3 Extension au cas à trois dimensions

L'algorithme de mesure de qualité de prise en présence d'incertitudes sur la saisie a été évalué pour des exemples en deux dimensions, en considérant notamment l'exemple du cas expérimental dont nous disposons, mais aussi pour un exemple à trois dimensions.

En revanche, la commande robuste aux incertitudes de modèle n'a été développée et testée que pour un exemple en deux dimensions (mouvements de l'objet dans un plan uniquement). Il serait intéressant d'étendre les résultats au cas à trois dimensions.

En ce sens, un modèle dynamique du système {préhenseur/objet} est proposé sous la forme d'une représentation d'état au chapitre 2. Ce modèle est exprimé au niveau objet et considère les trois dimensions de cet espace, il peut donc constituer un point de départ pour la synthèse de commandes robustes pour la manipulation dextre en 3D.

5.2.4 Développement d'un algorithme unifié de saisie et de manipulation dextre en présence d'incertitudes

Les travaux proposés dans ce manuscrit développent successivement l'évaluation de la qualité de prise puis la commande pour la manipulation dextre. Ici, aucune proposition n'est faite concernant l'étape de saisie d'un objet, notamment en considérant des incertitudes de modèle.

Il serait donc intéressant de proposer un algorithme de saisie d'un objet à partir d'un préhenseur tenant compte d'incertitudes de modèle. On aurait alors un algorithme plus général, permettant la saisie en présence d'incertitudes, une fois la saisie faite, la mesure de qualité de prise permettrait d'évaluer la manipulabilité de cette prise en présence d'incertitudes, et si cette manipulabilité est suffisante, on pourrait alors appliquer la commande robuste en présence d'incertitudes de modèle. Cet algorithme général exploiterait une large gamme de fonctionnalités d'un préhenseur dextre.

Bibliographie

- Albu-Schäffer, A., C. Ott, U. Frese et G. Hirzinger. 2003, «Cartesian impedance control of redundant robots : Recent results with the dlr-light-weight-arms», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, vol. 3, IEEE, p. 3704–3709.
- Baur, J., J. Pfaff, H. Ulbrich et T. Villgrattner. 2012, «Design and development of a redundant modular multipurpose agricultural manipulator», dans *2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, IEEE, p. 823–830.
- Biagiotti, L., F. Lotti, C. Melchiorri et G. Vassura. 2008, «How far is the human hand», *A review on anthropomorphic robotic endeffectors. Bologna (Italy) : University of Bologna.*
- Bicchi, A. 1995, «On the closure properties of robotic grasping», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 14, n° 4, p. 319–334.
- Bicchi, A. 2000, «Hands for dexterous manipulation and robust grasping : A difficult road toward simplicity», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, n° 6, p. 652–662.
- Bicchi, A., M. Gabbicini et M. Santello. 2011, «Modelling natural and artificial hands with synergies», *Philosophical Transactions of the Royal Society B : Biological Sciences*, vol. 366, n° 1581, p. 3153–3161.
- Bicchi, A. et V. Kumar. 2000, «Robotic grasping and contact : A review», dans *ICRA*, Citeseer, p. 348–353.
- Borràs, J. et A. M. Dollar. 2013, «A parallel robots framework to study precision grasping and dexterous manipulation», dans *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1595–1601.
- Boyd, S. P., L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. 1994, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, vol. 15, SIAM.
- Buss, M., H. Hashimoto et J. B. Moore. 1996, «Dextrous hand grasping force optimization», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, n° 3, p. 406–418.
- Cheah, C.-C., H.-Y. Han, S. Kawamura et S. Arimoto. 1998, «Grasping and position

- control for multi-fingered robot hands with uncertain jacobian matrices», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, IEEE, p. 2403–2408.
- Cheah, C.-C., C. Liu et J. Slotine. 2006, «Adaptive jacobian tracking control of robots with uncertainties in kinematic, dynamic and actuator models», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, n° 6, p. 1024–1029.
- Chilali, M. et P. Gahinet. 1996, «Hinf design with pole placement constraints : an LMI approach», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n° 3, p. 358–367.
- Cornella, J. et R. Suárez. 2005, «Fast and flexible determination of force-closure independent regions to grasp polygonal objects», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 766–771.
- Cutkosky, M. R. 1989, «On grasp choice, grasp models, and the design of hands for manufacturing tasks», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, n° 3, p. 269–279.
- De Souza, R., A. Bernardino, J. Santos-Victor et A. Billard. 2012, «On the representation of anthropomorphic robot hands : Shape versus function», dans *2012 12th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids 2012)*, IEEE, p. 791–798.
- Deimel, R. et O. Brock. 2013, «A compliant hand based on a novel pneumatic actuator», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, p. 2047–2053.
- Doulgeri, Z. et Y. Karayiannidis. 2007, «Force position control for a robot finger with a soft tip and kinematic uncertainties», *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, n° 4, p. 328 – 336.
- Ferrari, C. et J. Canny. 1992, «Planning optimal grasps», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, p. 2290–2295.
- Flanagan, J. R. et A. K. Rao. 1995, «Trajectory adaptation to a nonlinear visuomotor transformation : evidence of motion planning in visually perceived space», *Journal of neurophysiology*, vol. 74, n° 5, p. 2174–2178.
- Gabiccini, M., A. Bicchi, D. Prattichizzo et M. Malvezzi. 2011, «On the role of hand synergies in the optimal choice of grasping forces», *Autonomous Robots*, vol. 31, n° 2-3, p. 235–252.
- Gazeau, J.-P., S. Zeghloul et G. Ramirez. 2005, «Manipulation with a polyarticulated mechanical hand : a new efficient real-time method for computing fingertip forces for a global manipulation strategy», *Robotica*, vol. 23, n° 04, p. 479–490.
- Gioioso, G., G. Salvietti, M. Malvezzi et D. Prattichizzo. 2013, «Mapping synergies from human to robotic hands with dissimilar kinematics : an approach in the object domain», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, n° 4, p. 825–837.

- Gupta, A., C. Eppner, S. Levine et P. Abbeel. 2016, «Learning dexterous manipulation for a soft robotic hand from human demonstration», *arXiv preprint arXiv :1603.06348*.
- Haidacher, S. et G. Hirzinger. 2002, «Contact point identification in multi-fingered grasps exploiting kinematic constraints», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, IEEE, p. 1597–1603.
- Han, L., J. C. Trinkle et Z. X. Li. 2000, «Grasp analysis as linear matrix inequality problems», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, n° 6, p. 663–674.
- Hogan, N. 1985, «Impedance control : An approach to manipulation», *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 107, n° 1.
- Hsiao, K., M. Ciocarlie et P. Brook. 2011, «Bayesian grasp planning», dans *ICRA Workshop on Mobile Manipulation : Integrating Perception and Manipulation*.
- Huber, M. et R. A. Grupen. 1994, «2-d contact detection and localization using proprioceptive information», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, n° 1, p. 23–33.
- Kaneko, M. et K. Tanie. 1994, «Contact point detection for grasping an unknown object using self-posture changeability», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, n° 3, p. 355–367.
- Kautsky, J., N. K. Nichols et P. Van Dooren. 1985, «Robust pole assignment in linear state feedback», *International Journal of Control*, vol. 41, n° 5, p. 1129–1155.
- Kerr, J. et B. Roth. 1986, «Analysis of multifingered hands», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, n° 4, p. 3–17.
- Kim, J., K. Iwamoto, J. Kuffner, Y. Ota et N. Pollard. 2013, «Physically based grasp quality evaluation under pose uncertainty», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, n° 6, doi :10.1109/TRO.2013.2273846, p. 1424–1439, ISSN 1552-3098.
- Kirkpatrick, D., B. Mishra et C.-K. Yap. 1992, «Quantitative Steinitz’s theorems with applications to multifingered grasping», *Discrete & Computational Geometry*, vol. 7, n° 1, p. 295–318.
- Kober, J. et J. R. Peters. 2009, «Policy search for motor primitives in robotics», dans *Advances in neural information processing systems*, p. 849–856.
- Kumar, V., E. Todorov et S. Levine. 2016, «Optimal control with learned local models : Application to dexterous manipulation», dans *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, p. 378–383.
- Kvasnica, M., P. Grieder, M. Baotić et M. Morari. 2004, «Multi-parametric toolbox

- (mpt)», dans *International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control*, Springer, p. 448–462.
- Li, M. 2016, «Dynamic grasp adaptation», .
- Li, Z., P. Hsu et S. Sastry. 1989, «Grasping and coordinated manipulation by a multi-fingered robot hand», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 8, n° 4, p. 33–50.
- Li, Z. et S. S. Sastry. 1988, «Task-oriented optimal grasping by multifingered robot hands», *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, n° 1, p. 32–44.
- Luca, A., P. Rodriguez-Ayerbe, D. Dumur et al.. 2011, «Control of disturbed LPV systems in a LMI setting», dans *18th IFAC World Congress, Milan, Italy*.
- Mason, M. T. et J. K. Salisbury Jr. 1985, «Robot hands and the mechanics of manipulation», .
- Michalec, R. 2011, *Modeling and control of multifingered dextrous manipulation for humanoid robot hands*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00825438>.
- Miller, A. T. et P. K. Allen. 2004, «Grasptit ! a versatile simulator for robotic grasping», *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 11, n° 4, p. 110–122.
- Mudge, S. et R. Patton. 1988, «Analysis of the technique of robust eigenstructure assignment with application to aircraft control», dans *Control Theory and Applications*, vol. 135, IET, p. 275–281.
- Murray, R. M. et S. S. Sastry. 1994, *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC press.
- Nagai, K. et T. Yoshikawa. 1993, «Dynamic manipulation/grasping control of multi-fingered robot hands», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, p. 1027–1033.
- Nguyen, V.-D. 1988, «Constructing force-closure grasps», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 7, n° 3, p. 3–16.
- Nof, S. Y. 1999, *Handbook of industrial robotics*, vol. 1, John Wiley & Sons.
- Ohev-Zion, A. et A. Shapiro. 2011, «Grasping of deformable objects applied to organic produce», dans *Conference Towards Autonomous Robotic Systems*, Springer, p. 396–397.
- Okamura, A. M., N. Smaby et M. R. Cutkosky. 2000, «An overview of dextrous manipulation», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000*, vol. 1, IEEE, p. 255–262.
- Pastor, P., M. Kalakrishnan, S. Chitta, E. Theodorou et S. Schaal. 2011, «Skill learning

- and task outcome prediction for manipulation», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, p. 3828–3834.
- Poussot-Vassal, C. 2008, *Commande robuste LPV multivariable de châssis automobile*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Prattichizzo, D. et A. Bicchi. 1998, «Dynamic analysis of mobility and graspability of general manipulation systems», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, n° 2, p. 241–258.
- Prattichizzo, D., M. Malvezzi et A. Bicchi. 2010, «On motion and force controllability of grasping hands with postural synergies.», dans *Robotics : Science and Systems*.
- Roa, M. A. et R. Suárez. 2014, «Grasp quality measures : review and performance», *Autonomous Robots*, vol. 38, n° 1, p. 65–88.
- Salisbury, J. 1982, *Kinematic and Force Analysis of Articulated Hands*, thèse de doctorat, PhD thesis, Stanford University.
- Salisbury, J. K. et J. J. Craig. 1982, «Articulated hands force control and kinematic issues», *The International journal of Robotics research*, vol. 1, n° 1, p. 4–17.
- Santello, M., M. Flanders et J. F. Soechting. 1998, «Postural hand synergies for tool use», *The Journal of Neuroscience*, vol. 18, n° 23, p. 10 105–10 115.
- Sanz, P. J., P. Ridao, G. Oliver, C. Melchiorri, G. Casalino, C. Silvestre, Y. Petillot et A. Turetta. 2010, «Trident : A framework for autonomous underwater intervention missions with dexterous manipulation capabilities», *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 43, n° 16, p. 187–192.
- Satoh, A. et K. Sugimoto. 2006, «An lmi approach to gain parameter design for regional eigenvalue/eigenstructure assignment», dans *45th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, p. 5778–5783.
- Sobel, K. M., E. Y. Shapiro et A. N. Andry Jr. 1994, «Eigenstructure assignment», *International Journal of Control*, vol. 59, n° 1, p. 13–37.
- SPARC. 2015, «Robotics 2020 multi-annual roadmap», URL <http://sparc-robotics.eu/roadmap/multi-annual-roadmap-ict-2016/>.
- Todorov, E. et M. I. Jordan. 2002, «Optimal feedback control as a theory of motor coordination», *Nature neuroscience*, vol. 5, n° 11, p. 1226–1235.
- Tomović, R. et G. Boni. 1962, «An adaptive artificial hand», *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 7, n° 3, p. 3–10.
- Ueki, S., H. Kawasaki et T. Mouri. 2009, «Adaptive coordinated control of multi-fingered robot hand», *Journal of Robotics and Mechatronics*, vol. 21, n° 1, p. 36.
- Van Hoof, H., T. Hermans, G. Neumann et J. Peters. 2015, «Learning robot in-hand

- manipulation with tactile features», dans *IEEE-RAS 15th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, IEEE, p. 121–127.
- Wimbock, T., C. Ott et G. Hirzinger. 2008, «Analysis and experimental evaluation of the intrinsically passive controller (ipc) for multifingered hands», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, IEEE, p. 278–284.
- Yao, B. et M. Tomizuka. 1993, «Adaptive coordinated control of multiple manipulators handling a constrained object», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, IEEE, p. 624–629.
- Yoshikawa, T. 2010, «Multifingered robot hands : Control for grasping and manipulation», *Annual Reviews in Control*, vol. 34, n° 2, p. 199–208.
- Yoshikawa, T. et X.-Z. Zheng. 1993, «Coordinated dynamic hybrid position/force control for multiple robot manipulators handling one constrained object», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 12, n° 3, p. 219–230.
- Zheng, X.-Z., R. Nakashima et T. Yoshikawa. 2000, «On dynamic control of finger sliding and object motion in manipulation with multifingered hands», *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 16, n° 5, p. 469–481.
- Zheng, Y. et W.-H. Qian. 2005, «Coping with the grasping uncertainties in force-closure analysis», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 24, n° 4, p. 311–327.
- Zhu, X., H. Ding et J. Wang. 2003, «Grasp analysis and synthesis based on a new quantitative measure», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, n° 6, p. 942–953.

Publications personnelles

Communications internationales à comité de lecture

Caldas, A., Micaelli, A., Grossard, M., Makarov, M., Rodriguez-Ayerbe, P. et Dumur, D., "New metric for wrench space reachability of multifingered hand with contact uncertainties", 2014 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics.

Caldas, A., Micaelli, A., Grossard, M., Makarov, M., Rodriguez-Ayerbe, P. et Dumur, D., "Object-level Impedance Control for Dexterous Manipulation with Contact Uncertainties using an LMI-based Approach", 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA).

Caldas, A., Micaelli, A., Grossard, M., Makarov, M., Rodriguez-Ayerbe, P. et Dumur, D., "On task-decoupling by robust eigenstructure assignment for dexterous manipulation", 2015 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS).

Communications nationales sans actes

Caldas, A., Micaelli, A., Grossard, M., Makarov, M., Rodriguez-Ayerbe, P. et Dumur, D., "Commande robuste pour la manipulation dextre avec incertitudes sur les points de contact", 2015 Journées Nationales de la Robotique Humanoïde (JNRH).

Annexe A

Formalisme pour la description du mouvement d'un corps rigide

Cette annexe fournit les outils pour décrire le mouvement d'un corps rigide dans l'espace. A partir de ce formalisme, la cinématique d'un préhenseur multidigital est ensuite déduite. Le mouvement d'un corps rigide s'exprime en utilisant des notions d'algèbre linéaire et la théorie des torseurs (*screw theory*). Cette annexe s'inspire en grande partie des travaux de [Murray et Sastry \(1994\)](#) et [Michalec \(2011\)](#).

La théorie des torseurs a été développée par Sir Robert S. Ball dès 1876 pour être appliquée dans la statique et la cinématique des corps rigides. Elles se basent notamment sur les théorèmes de Chasles et de Poincot. Chasles a montré que tout corps rigide peut être déplacé d'une position à une autre par une translation le long d'une ligne suivie (ou précédée) d'une rotation autour de cette ligne. La version infinitésimale de ce mouvement est appelé torseur cinématique (*twist*), et comme son nom l'indique, elle permet de définir la cinématique d'un mécanisme robotique. Poincot a quant à lui montré que n'importe quel système de forces appliqué à un corps rigide peut être défini par une unique force appliquée le long d'une ligne combinée à un moment autour de cette ligne. La combinaison de cette force et ce moment forme un torseur dynamique (*wrench*) et est la version duale du torseur cinématique.

La description de la cinématique d'un robot par la théorie des torseurs présente deux avantages : il s'agit d'une description globale qui n'est pas affectée par les singularités introduites par une paramétrisation locale. Le deuxième avantage est que cette description est basée sur la géométrie du système, ce qui en simplifie l'analyse.

A.1 Définition d'un corps rigide

Le mouvement d'une particule dans l'espace Euclidien peut être décrit par la localisation de cette particule à chaque instant par rapport à un repère inertiel cartésien

orthonormé, la localisation est alors spécifiée par un triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La trajectoire est alors décrite par la courbe $p(t) = (x(t),y(t),z(t)) \in \mathbb{R}^3$.

En robotique, on s'intéresse à cette définition non pas avec une seule particule, mais avec un ensemble de particules, appelé corps rigide, tel que la distance entre deux particules reste toujours identique, le corps rigide est donc défini comme indéformable.

On définit un *mouvement rigide* comme étant le mouvement continu au cours du temps d'un corps rigide. Un *déplacement rigide* se définit comme étant le déplacement net d'un point à un autre d'un corps rigide. Le déplacement rigide ne s'intéresse donc qu'à la position initiale et finale.

Pour suivre la localisation d'un corps rigide, il suffit de suivre la position d'un seul point appartenant à ce corps rigide et de suivre les rotations du corps autour de ce point. Ainsi, on définit la *configuration* d'un corps rigide par un repère cartésien orthonormé attaché à un point du corps rigide, dont on définit la position et l'orientation en fonction du repère inertiel.

A.2 Transformation d'un corps rigide

Dans cette partie, nous présentons les outils qui permettent de définir la configuration d'un corps rigide dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

A.2.1 Rotation pure

Nous proposons un premier cas en ne considérant que la rotation pure, c'est-à-dire que nous décrivons l'orientation d'un corps rigide dans l'espace en déterminant les coordonnées du repère attaché au corps par rapport au repère inertiel. Soit (M,w) (pour *world*) le repère inertiel d'origine M avec la base w , et (O,o) (pour *object*) le repère lié au corps d'origine O avec la base o . Dans ce cas d'étude, O et M sont confondus. On définit $x_{o/w}$, $y_{o/w}$ et $z_{o/w} \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées des principaux axes de o exprimés dans w . On peut alors définir :

$$R_{o/w} = \begin{bmatrix} x_{o/w} & y_{o/w} & z_{o/w} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Cette matrice est appelée *matrice de rotation* et possède les propriétés suivantes :

- Elle est orthogonale directe ($\det R_{o/w} = +1$).
- Elle est toujours inversible et son inverse est égale à sa transposée :

$$R_{o/w}^T = R_{o/w}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

- L'inverse de la matrice de rotation de (O,o) par rapport à (M,w) est égale à la matrice de rotation de (M,w) par rapport à (O,o) :

$$R_{o/w}^{-1} = R_{w/o} \quad (\text{A.3})$$

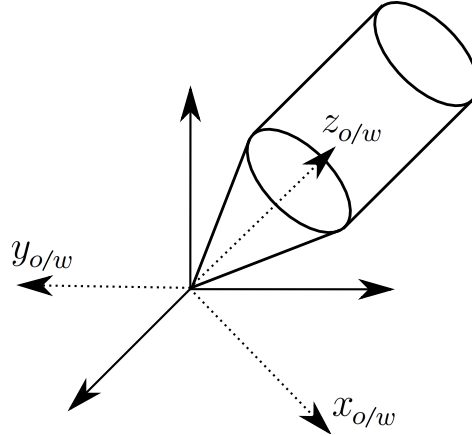


FIGURE A.1 – Configuration d'un corps rigide.

Les matrices de rotation appartiennent à l'ensemble des matrices 3×3 orthogonales directes $SO_3(\mathbb{R})$ (pour *Special Orthogonal group* de degré 3 sur $\mathbb{R}$).

A.2.2 Rotation et translation

Dans le cas général, deux repères peuvent être définis l'un par rapport à l'autre par une *transformation rigide*, qui peut être une rotation, une translation, ou une combinaison des deux (Fig. A.2).

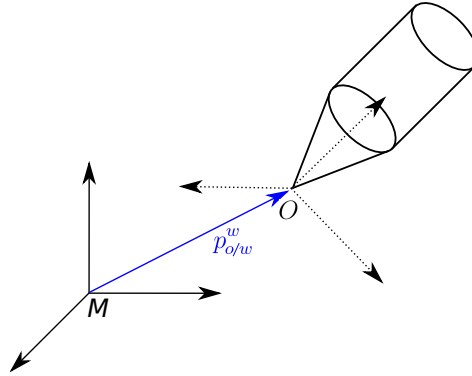


FIGURE A.2 – Configuration d'un corps rigide (cas général).

Plusieurs formalismes existent pour définir une transformation rigide. Une première méthode en robotique consiste à utiliser la matrice homogène, une matrice 4×4 qui définit à la fois la rotation de la base o par rapport à la base w , et le vecteur translation entre l'origine des deux repères :

$$g_{o/w} = \begin{bmatrix} R_{o/w} & p_{o/w}^w \\ \mathbb{O}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

avec $p_{o/w}^w = \overrightarrow{MO}$ le vecteur entre les origines des deux repères défini dans la base w . Une matrice homogène présente les propriétés suivantes :

- Elle est toujours inversible, mais son inverse n'est pas égale à sa transposée (qui n'est pas une matrice homogène).
- Son déterminant est égal à +1.
- L'égalité suivante est vérifiée :

$$g_{o/w}^{-1} = g_{w/o} \quad (\text{A.5})$$

L'ensemble des matrices homogènes forme un groupe de Lie, noté $SE_3(\mathbb{R})$ (pour *Special Euclidean group* de degré 3 sur $\mathbb{R}$). Cet ensemble correspond à toutes les transformations rigides possibles dans un espace à trois dimensions.

A.3 Cinématique d'un corps rigide

La cinématique d'un corps rigide permet de définir ses vitesses linéaires et angulaires, elle est décrite par le torseur cinématique (*twist*) :

$$V_{S_2/S_1}^o = \begin{bmatrix} v_{A \in S_2/S_1}^o \\ \omega_{S_2/S_1}^o \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

avec ω_{S_2/S_1}^o la vitesse angulaire du corps rigide S_2 par rapport au corps rigide S_1 , exprimée dans le repère o , et $v_{A \in S_2/S_1}^o$ est la vitesse linéaire du point A attaché au corps S_2 , par rapport à S_1 , exprimée dans le repère o .

Plusieurs transformations permettent de déduire un torseur cinématique. La relation de Varignon permet de réaliser un changement de point de la vitesse linéaire :

$$v_{B \in S_2/S_1}^o = v_{A \in S_2/S_1}^o + \omega_{S_2/S_1}^o \times \overrightarrow{AB} \quad (\text{A.7})$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel.

Il est aussi possible de changer la base du torseur cinématique :

$$V_{S_2/S_1}^o = Ad_{g_{w/o}} V_{S_2/S_1}^w \quad (\text{A.8})$$

Ce changement de base se fait à partir de la matrice adjointe, définie par :

$$Ad_{g_{w/o}} = \begin{bmatrix} R_{w/o} & \hat{p}_{w/o}^o R_{w/o} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & R_{w/o} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

avec $\hat{p}_{w/o}^o$ la matrice antisymétrique 3×3 correspondant au produit vectoriel par le vecteur $p_{w/o}^o$:

$$p_{w/o}^o = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{p}_{w/o}^o = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

La matrice adjointe est donc une matrice 6×6 largement utilisée pour les changements de base, elle présente les propriétés suivantes :

- Elle est inversible.
- Son déterminant est égal à +1.
- L'égalité suivante est vérifiée :

$$Ad_{g_{w/o}}^{-1} = Ad_{g_{o/w}} \quad (\text{A.11})$$

A.4 Torseur dynamique d'un corps rigide

La dynamique d'un corps rigide est définie par le torseur dynamique (*wrench*) :

$$W_{S_1 \rightarrow S_2}^o = \begin{bmatrix} f_{S_1 \rightarrow S_2}^o \\ m_{A, S_1 \rightarrow S_2}^o \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Le torseur dynamique $W_{S_1 \rightarrow S_2}^o$ de l'action qu'applique S_1 sur S_2 , écrite dans le repère o , est composé des forces $f_{S_1 \rightarrow S_2}^o$ appliquées par S_1 sur S_2 et des moments $m_{A, S_1 \rightarrow S_2}^o$ en A appliqués par S_1 sur S_2 , le tout écrit dans le repère o .

Le torseur dynamique étant l'expression duale au torseur cinématique, on retrouve des propriétés de transformation similaires. On a donc la relation de Varignon, permettant de changer le point sur lequel est appliqué le moment :

$$m_{B, S_1 \rightarrow S_2}^o = m_{A, S_1 \rightarrow S_2}^o + f_{S_1 \rightarrow S_2}^o \times \overrightarrow{AB} \quad (\text{A.13})$$

Et on retrouve aussi une relation de changement de base du torseur dynamique en fonction de la matrice co-adjointe :

$$W_{S_1 \rightarrow S_2}^o = Ad_{g_{w/o}}^{-T} W_{S_1 \rightarrow S_2}^w \quad (\text{A.14})$$

A.5 Cinématique d'un robot manipulateur

Avant de présenter la cinématique d'un préhenseur multidigital, nous nous intéressons au cas d'un robot manipulateur. Ce cas correspond à l'étude d'un doigt du préhenseur.

A.5.1 Modèle géométrique

Le modèle géométrique permet de donner la position de l'organe terminal du robot en fonction de ses différents angles articulaires. Il peut être déterminé à partir des matrices homogènes, un robot manipulateur étant une suite de corps rigide dont la position dépend des variables articulaires.

Le modèle géométrique du robot manipulateur Fig. A.3 peut être défini par la relation suivante :

$$g_{t/s}(q_1, q_2) = g_{l_1/s}(q_1)g_{l_2/l_1}(q_2)g_{t/l_2} \quad (\text{A.15})$$

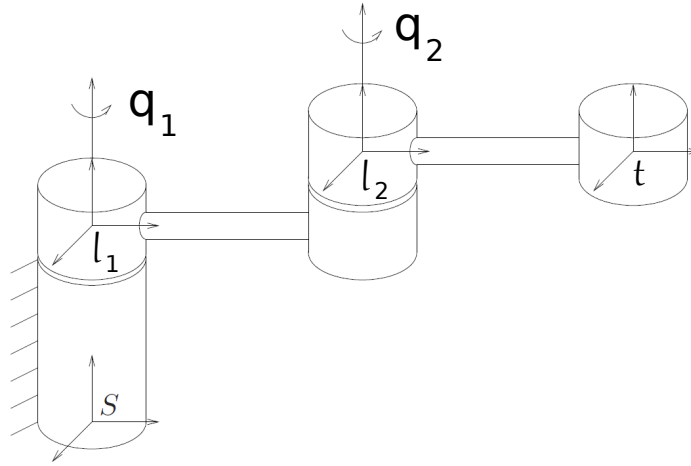


FIGURE A.3 – Modèle géométrique d'un robot manipulateur (issu de Murray et Sastry (1994)).

A.5.2 Jacobienne d'un robot manipulateur

La Jacobienne d'un robot manipulateur est la matrice qui lie la vitesse de l'organe effecteur aux variables articulaires.

La vitesse spatiale instantanée de l'organe effecteur s'exprime à partir du torseur cinématique $V_{t/w}^w$ entre le repère de l'organe effecteur (T, t) par rapport au repère inertiel (ou base du robot manipulateur) (M, w) , exprimé dans le repère inertiel. Ce torseur peut être déduit à partir du modèle géométrique du robot manipulateur (on prend le cas d'un robot avec $q \in \mathbb{R}^n$ variables articulaires) (pour plus de détails, voir Murray et Sastry (1994)) :

$$\hat{V}_{t/w}^w = \dot{g}_{t/w}(q) g_{t/w}^{-1}(q) \quad (\text{A.16})$$

En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\hat{V}_{t/w}^w = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_{t/w}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) g_{t/w}^{-1}(q) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_{t/w}}{\partial q_i} g_{t/w}^{-1}(q) \right) \dot{q}_i \quad (\text{A.17})$$

La relation entre la vitesse de l'organe terminal et les vitesses articulaires est donc linéaire, et on peut écrire :

$$V_{t/w}^w = J_{t/w}^w(q) \dot{q} \quad (\text{A.18})$$

$J_{t/w}^w$ est la Jacobienne spatiale du robot manipulateur.

Annexe B

Détails des calculs du modèle dynamique

B.1 Preuve de la mise sous forme matricielle de la dynamique du système préhenseur/objet

Le but de cette annexe est de partir des équations dynamiques de chaque élément du système (objet, préhenseur), et d'en déduire une forme compact en liant les deux dynamiques avec une équation de contrainte.

On commence par concaténer les équations (2.37)-(2.38) afin d'exprimer la dynamique sous une forme assemblée :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix}}_{\dot{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix}}_{\dot{X}} - \underbrace{\begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix}}_{J^T} f_c = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \quad (\text{B.1})$$

avec $X \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o)}$ la concaténation des vecteurs des positions articulaires et objets, $M \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o) \times (n_q+n_o)}$ la matrice d'inertie globale du système, $C \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o) \times (n_q+n_o)}$ la matrice globale des effets Coriolis et centrifuge du système, $J^T \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o) \times n_c}$ la matrice Jacobienne globale du système (concaténation de la Jacobienne du préhenseur et de la matrice de saisie), et $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n_q+n_o)}$ les couples appliqués au système.

La contrainte (2.39) s'exprime alors sous la forme :

$$J\dot{X} = \mathbb{O} \quad (\text{B.2})$$

Afin d'avoir une modélisation consistante, prenant en compte cette contrainte cinématique, la dynamique est ré-écrite sous une forme minimale qui n'envisage que le vecteur position X , ses dérivées et la commande τ . Dans cette optique, on réalise les étapes suivantes :

1. *Ré-exprimer les forces de contact f_c en fonction des autres variables du système.*

Pour cela, on reprend le modèle assemblé (B.1) :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} - J^T f_c = \Gamma \quad (\text{B.3})$$

La matrice Jacobienne du préhenseur n'est pas inversible (matrice non carrée), la seule matrice inversible est la matrice d'inertie M , carrée, symétrique et définie positive :

$$\ddot{X} + M^{-1}C\dot{X} - M^{-1}J^T f_c = M^{-1}\Gamma \quad (\text{B.4})$$

On multiplie ensuite l'équation (B.4) par la matrice Jacobienne J :

$$J\ddot{X} + JM^{-1}C\dot{X} - JM^{-1}J^T f_c = JM^{-1}\Gamma \quad (\text{B.5})$$

Les forces de contact sont multipliées par la matrice carrée $(JM^{-1}J^T)$, qui est **inversible si et seulement si J est de rang ligne plein**. Ceci signifie que la prise est manipulable, c'est-à-dire que le mouvement désiré peut être réalisé par le préhenseur. Sous cette condition, on peut écrire :

$$f_c = (JM^{-1}J^T)^{-1} [J\ddot{X} + JM^{-1}C\dot{X} - JM^{-1}\Gamma] \quad (\text{B.6})$$

2. *Introduire la contrainte dans l'expression de f_c .*

Dans un premier temps, on dérive l'équation (B.2) :

$$J\ddot{X} + \dot{J}\dot{X} = \mathbb{O} \quad (\text{B.7})$$

Avec cette équation, on peut éviter d'exprimer les forces de contact en fonction de l'accélération $\ddot{X}$:

$$f_c = (JM^{-1}J^T)^{-1} [(JM^{-1}C - \dot{J})\dot{X} - JM^{-1}\Gamma] \quad (\text{B.8})$$

3. *Remplacer l'expression de f_c dans le modèle assemblé.*

On remplace (B.8) dans (B.3) :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} - J^T (JM^{-1}J^T)^{-1} [(JM^{-1}C - \dot{J})\dot{X} - JM^{-1}\Gamma] = \Gamma \quad (\text{B.9})$$

En réorganisant les termes, on trouve :

$$M\ddot{X} + \left(C - J^T (JM^{-1}J^T)^{-1} (JM^{-1}C - \dot{J}) \right) \dot{X} = \left(\mathbb{I} - J^T (JM^{-1}J^T)^{-1} JM^{-1} \right) \Gamma \quad (\text{B.10})$$

4. *Développer les calculs matriciels (voir annexe B.1).*

On part de l'équation :

$$M\ddot{X} + \left(C - J^T (JM^{-1}J^T)^{-1} (JM^{-1}C - \dot{J}) \right) \dot{X} = \left(\mathbb{I} - J^T (JM^{-1}J^T)^{-1} JM^{-1} \right) \Gamma \quad (\text{B.11})$$

En développant, on a (pour plus de lisibilité, on a posé $J_h = J_h(q, x_o)$) :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 + & \left(\begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} - j \right) \right) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 & = \left(\mathbb{I} - \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On développe les termes inertiels :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 + & \left(\begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} (J_h M_h^{-1} J_h^T + G^T M_o^{-1} G)^{-1} \left(\begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} - j \right) \right) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 & = \left(\mathbb{I} - \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} (J_h M_h^{-1} J_h^T + G^T M_o^{-1} G)^{-1} \begin{bmatrix} J_h & -G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On pose :

$$P = J_h M_h^{-1} J_h^T + G^T M_o^{-1} G \quad (\text{B.12})$$

On a donc l'équation dynamique suivante :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 + & \left(\begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h & -J_h^T P^{-1} G^T \\ -G P^{-1} J_h & G P^{-1} G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} P^{-1} j \right) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 & = \left(\mathbb{I} - \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h & -J_h^T P^{-1} G^T \\ -G P^{-1} J_h & G P^{-1} G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_h^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En développant, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 + & \left(\begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} C_h & -J_h^T P^{-1} G^T M_o^{-1} C_o \\ -G P^{-1} J_h M_h^{-1} C_h & G P^{-1} G^T M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_h^T \\ -G \end{bmatrix} P^{-1} j \right) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} \\
 & = \left(\mathbb{I} - \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} & -J_h^T P^{-1} G^T M_o^{-1} \\ -G P^{-1} J_h M_h^{-1} & G P^{-1} G^T M_o^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut définir la matrice :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} J_h M_h^{-1} & -J_h^T P^{-1} G^T M_o^{-1} \\ -G P^{-1} J_h M_h^{-1} & G P^{-1} G^T M_o^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

et expliciter $\dot{J}$:

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{J}_h & -\dot{G}^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

On obtient alors l'équation dynamique suivante :

$$\begin{bmatrix} M_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{V}_{o/w}^o \end{bmatrix} + (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \begin{bmatrix} C_h & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_h^T P^{-1} \dot{J}_h & -J_h^T P^{-1} \dot{G}^T \\ -GP^{-1} \dot{J}_h & GP^{-1} \dot{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ V_{o/w}^o \end{bmatrix} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

B.2 Paramétrisation locale

La linéarisation du système et sa mise sous la forme d'équations d'état ne peuvent pas être appliquées avec des torseurs cinématiques, et il faut donc les ré-exprimer avec un système de coordonnées locales. Cette partie a donc pour but de définir la paramétrisation des *twists* en coordonnées locales. Pour cela, nous allons prendre un exemple particulier en deux dimensions avec pour coordonnées locales le vecteur translation entre le repère objet et le repère monde $r_{o/w} = \begin{bmatrix} x_{o/w} \\ y_{o/w} \end{bmatrix}$ et l'orientation de l'objet θ .

B.2.1 Passage des twists aux coordonnées locales

On définit la matrice homogène $g_{o/w}$:

$$g_{o/w} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_{o/w} \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_{o/w} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

On peut donc déduire la position et l'orientation de l'objet par rapport au repère monde :

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos(2\text{tr}(g_{o/w}) - 1) \quad (\text{B.16})$$

$$r_{o/w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

En dérivant les expressions précédentes, on fait le lien entre les *twists* et la dérivée des positions et orientation. On a :

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_{o/w}^b \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{r}_{o/w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{g}_{o/w} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

On peut faire apparaître le twist au niveau de la dérivée du vecteur translation :

$$\dot{r}_{o/w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} g_{o/w}^{-1} \dot{g}_{o/w} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\dot{r}_{o/w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} \hat{V}_{o/w}^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\dot{r}_{o/w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_{o/w}^b \quad (\text{B.22})$$

On peut donc concaténer la dérivée du vecteur translation avec celle de l'orientation, on trouve alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{o/w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R V_{o/w}^b \quad (\text{B.23})$$

Nous allons maintenant faire le lien entre les accélérations. En dérivant l'équation (B.23), on trouve :

$$\begin{bmatrix} \ddot{r}_{o/w} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = R \dot{V}_{o/w}^b + \dot{R} V_{o/w}^b \quad (\text{B.24})$$

avec :

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{g}_{o/w} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} g_{o/w}^{-1} \dot{g}_{o/w} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} g_{o/w} \hat{V}_{o/w}^b & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

B.2.2 Passage des coordonnées locales aux twists

On définit la matrice homogène $g_{o/w}$:

$$g_{o/w} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_{o/w} \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_{o/w} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Au niveau des vitesses, on a :

$$V_{o/w}^b = R^{-1} \begin{bmatrix} \dot{r}_{o/w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

Au niveau des accélérations :

$$\dot{V}_{o/w}^b = R^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{r}_{o/w} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} - R^{-1} \dot{R} V_{o/w}^b \quad (\text{B.30})$$

$$\dot{V}_{o/w}^b = R^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{r}_{o/w} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} - R^{-1} \dot{R} R^{-1} \begin{bmatrix} \dot{r}_{o/w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

B.2.3 Changement de paramétrisation au niveau de l'équation dynamique

Afin d'introduire la nouvelle paramétrisation dans l'équation dynamique, on définit les matrices suivantes :

$$J_r = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

$$J_{rnl} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R^{-1} \dot{R} R^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

La matrice R représentant le passage des torseurs à la paramétrisation locale ($\dot{x}_o = RV_{o/w}^b$). On obtient alors l'équation dynamique suivante :

$$J_f^T M_f J_f J_r \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{x}_o \end{bmatrix} + J_f^T C_f J_f J_r \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} + J_f^T (N L_f J_f + M_f (J_{nl} + J_f J_{rnl})) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = J_f^T T_f \tau \quad (\text{B.34})$$

Afin de garder la matrice d'inertie symétrique définie positive, on multiplie l'équation par J_r^T :

$$J_r^T J_f^T M_f J_f J_r \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{x}_o \end{bmatrix} + J_r^T J_f^T C_f J_f J_r \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} + J_r^T J_f^T (N L_f J_f + M_f (J_{nl} + J_f J_{rnl})) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = J_r^T J_f^T T_f \tau \quad (\text{B.35})$$

Par définition, les matrices J_f et J_r sont de rang colonne plein, donc $J_r^T J_f^T M_f J_f J_r$ est inversible. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{x}_o \end{bmatrix} + (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_r^T J_f^T C_f J_f J_r \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} + (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_f^T (N L_f J_f + M_f (J_{nl} + J_f J_{rnl})) \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} \\ = (J_r^T J_f^T M_f J_f J_r)^{-1} J_f^T T_f \tau \end{aligned}$$