Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction

Monoïdes

Un monoïde est un ensemble M muni d'une multiplication et d'un élément neutre ; c'est-à-dire un groupe mais sans l'axiome d'inversibilité. Cette structure algébrique peut encoder naturellement la composition des opérations élémentaires d'un algorithme sur une structure de données. L'exemple fondamental est peut-être la théorie des langages, l'ensemble des mots sur un alphabet $\mathcal{A}$ muni de la concaténation constitue un monoïde. Plus algorithmique, considérons le *tri à bulles* qui trie un tableau de nombres en effectuant des transpositions élémentaires de gauche à droite jusqu'à obtenir une liste triée.

Étape 0 :	3	7	4	1
Étape 1 :	3	4	7	1
Étape 2 :	3	4	1	7
Étape 3 :	3	1	4	7
Étape 4 :	1	3	4	7

Pour abstraire l'algorithme, on peut considérer l'ensemble des opérations élémentaires effectuées par le tri à bulles, c'est-à-dire les opérateurs π_i qui intervertissent les cases i et $i+1$ si elles ne sont pas ordonnées. C'est un sous-monoïde de $\{f : [n] \to [n]\}$ engendré par les π_i; comme le déroulement de l'algorithme n'est pas inversible, ce n'est pas un groupe. Dans l'exemple précédent le tri que nous avons effectué correspond à l'élément $\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_2$ qui encode les mouvements successifs de droite à gauche. Ce monoïde non-commutatif de cardinal $n!$ est appelé monoïde de 0-Hecke, noté $H_n(0)$, et encode tous les déroulements possibles de l'algorithme. Notons que si les opérations étaient inversibles, on retrouverait le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Théorie des représentations

Naturellement, le monoïde précédemment défini *agit* sur les tableaux de longueur n. On peut poursuivre l'abstraction du problème : la valeur des éléments de la liste n'a pas vraiment d'importance, l'algorithme ne dépend que de la position de chaque case dans la liste, donc toutes les permutations de longueur n représentent une exécution différente de l'algorithme. On peut alors regarder l'action de $H_n(0)$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n!}$, dont la base est indexée par les permutations et qui représente toutes les entrées possibles de l'algorithme du tri à bulles. Se ramener à l'algèbre linéaire permet d'utiliser des processus d'élimination de type pivot de Gauss, afin de décomposer le problème en blocs plus simples. L'étude de $H_n(0)$ va ainsi passer par exemple par la décomposition de l'espace vectoriel en somme directe d'espaces invariants, l'étude de leurs dimensions, le calcul des valeurs propres des actions, *etc.* Plus généralement, le plongement de M dans un espace de matrices par une application $M \to M_n(\Bbbk)$ est appelé une *représentation*, et l'étude de ces morphismes (évidemment non uniques) est appelée *théorie*

des représentations.

Dans le cadre des groupes finis, c'est un axe majeur de recherche depuis plus d'un siècle : une représentation d'un groupe G est un plongement $G \to \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. Ces morphismes sont caractérisés par la donnée d'un nombre fini de représentations *irréductibles*, et la décomposition d'une représentation quelconque en représentations irréductibles est unique (c'est une somme directe) : c'est le théorème de Maschke qui affirme qu'une algèbre de groupe sur un corps de caractéristique 0 est semi-simple [Mas98]. Les représentations de groupes ont été introduites par Frobenius et les premiers résultats spectaculaires extérieurs à la théorie ont été obtenus par Burnside au début du XXème siècle[1].

La théorie des représentations joue un rôle de premier plan dans la plupart des mathématiques modernes comme l'analyse harmonique, la géométrie différentielle, la théorie des nombres ou la théorie de la complexité géométrique. On retrouve également la théorie des représentations en physique, en particulier en physique quantique où les symétries sont d'une importance capitale. Le cas des semigroupes et des monoïdes en particulier est étudié depuis les années 1960 [Sch58], [CP61], [LP69]. Classiquement, le point de vue fait intervenir très explicitement le monoïde des matrices de rang fini sur un corps. Plus récemment, de nombreuses connexions ont été faites avec d'autres domaines comme par exemple les chaînes de Markov ce qui a donné une nouvelle impulsion aux représentations de semigroupes [Put96], [Bro00]. Le point de vue est aujourd'hui très algébrique et utilise la généralité de la théorie des modules : une représentation d'un monoïde M sur un $\Bbbk$-espace vectoriel est exactement un $\Bbbk M$-module. Les résultats des dernières décennies en représentation de monoïdes donnent un contrôle assez fin sur les représentations des monoïdes, permettant de se ramener à la théorie des représentations des groupes et à de la combinatoire sur des préordres.

Mais la situation pour les monoïdes finis n'est pas aussi idyllique que pour les groupes finis : les $\Bbbk M$-modules ne sont pas semi-simples en général. Ils s'obtiennent bien comme extensions successives de modules irréductibles mais ceux-ci ne sont pas en somme directe en général. On peut cependant décomposer un $\Bbbk M$-module finiment engendré comme un quotient d'une somme directe de *modules projectifs indécomposables*. L'une des motivation principale de l'étude des représentations des monoïdes est la dualité entre modules projectifs indécomposables et modules simples, dualité qui est triviale dans le cas des groupes.

Tours de monoïdes

Si nous reprenons notre premier exemple d'algorithme de tri à bulles, on remarque qu'augmenter la taille de la liste initiale augmente par la même le monoïde des différentes exécutions. Aussi, les sous-monoïdes $H_i(0)$ de $H_n(0)$ pour $i < n$ contiennent une grande partie de l'information. On peut, à partir d'une représentation de $H_n(0)$, *restreindre* cette représentation à $H_i(0)$. Réciproquement on peut construire une représentation de $H_n(0)$ à partir d'une représentation de $H_i(0)$ de manière universelle via un processus qu'on appelle *induction*. Vu que l'on dispose ici d'une famille de monoïdes $(H_n(0))_n$ de même nature, il est naturel de considérer la tour $(H_n(0))_n$ ainsi que les foncteurs de restriction et d'induction afin d'en étudier les représentations.

Revenons au cas des groupes finis à la lumière du commentaire précédent. Les groupes symétriques y jouent un rôle central en particulier car les représentations sont décrites par la combinatoire des tableaux et des partitions. Frobenius décrit les caractères et Schur est le premier à remarquer le lien entre les *caractères* irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et une base de fonctions symétriques s_λ qui porte aujourd'hui son nom [Sch11]. Si l'on ne considère plus un groupe symétrique en particulier mais l'ensemble des groupes vu comme une tour $(\mathfrak{S}_n)_n$, la connexion est encore plus profonde : l'induction des représentations $\mathfrak{S}_m \otimes \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{m+n}$ est compatible avec la base de Schur, car $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \otimes \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} \chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ a les mêmes monômes que le produit $s_\lambda s_\mu$. En particulier, tous les coefficients de produit de fonctions symétriques sont positifs vu qu'ils représentent une décomposition en somme directe. Cela donne une interprétation des coefficients de structure, expliquant en particulier leur positivité.

Pour les monoïdes la situation est plus riche. Les représentations se décomposent en effet comme quotient de somme directe de représentations projectives qui elles-mêmes se décomposent en une somme

1. Pour un exposé historique sur la préhistoire des représentations de groupe, voir par exemple [Lam98a] et [Lam98b].

non directe de représentations irréductibles. Le formalisme est celui des *anneaux de Grothendieck* K_0 (respectivement G_0) sur la catégorie des $\Bbbk M$-modules projectifs (respectivement simples) finiment engendrés.

En 1996, Krob et Thibon ont montré que les algèbres de Hopf combinatoires duales **NCSF**/QSym encodent les représentations de la tour $(H_n(0))_n$ [KT97], y compris les règles d'induction et de restriction. Cette connexion permet en particulier d'étudier des modules sur $H_n(0)$ en manipulant des fonctions symétriques non commutatives, ce qui raffine la théorie de Pólya qui correspond à l'action de $\mathfrak{S}_n$. Aussi, les monoïdes 0-Hecke servent également à construire des bases d'ensembles de polynômes à plusieurs variables, avec de nombreuses applications en géométrie.

Catégorification

Les deux exemples précédents de la tour des groupes symétriques et de la tour des monoïdes 0-Hecke se placent dans le cadre plus général de la catégorification. L'idée derrière la catégorification est de passer des ensembles aux catégories, en transportant la notion d'ensemble en catégorie, de fonction en foncteur et de relations par des transformations naturelles. L'idée est ainsi de se passer du bruit des objets pour se concentrer sur les propriétés les plus structurelles de ces derniers. La catégorification apparaît tout d'abord en physique quantique [CF94], [Cra95], avant de donner des résultats spectaculaires en combinatoire algébrique, en particulier en théorie des nœuds [Kho00].

La tour des groupes symétriques *catégorifie* l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques pour toutes les raisons que l'on a déjà vues. De même, la tour des monoïdes 0-Hecke catégorifie le couple d'algèbres de Hopf duales **NCSF**/QSym comme l'ont remarqué Krob et Thibon [KT97].

Algèbres de Hopf

Les fonctions symétriques, **NCSF** et QSym sont des exemples phares d'algèbres de Hopf. Elles sont munies de deux opérations : une multiplication et une comultiplication vérifiant des relations de compatibilité. On peut le voir comme une structure avec deux opérations, une opération d'assemblage et une opération de désassemblage. Cette structure apparaît alors naturellement en combinatoire et dans l'étude des algorithmes. Un exemple fondamental est l'algèbre de Hopf **FQSym** qui est une algèbre de dimension infinie, dont la base est indexée par les sommes $\sum_{\mathrm{exec}(w)=E} w$ pour chaque exécution E du tri à bulles.

Les algèbres de Hopf donnent un cadre algébrique aux objets dont la théorie des représentations a de « bonnes propriétés ». C'est en effet la structure minimale pour laquelle une cogèbre est un module sur l'algèbre. De fait, elles apparaissent naturellement sur les algèbres de groupe, ou en théorie des groupes de Lie : les algèbres enveloppantes sont des algèbres de Hopf.

La catégorification d'une algèbre de Hopf dans une base donnée permet de donner une explication conceptuelle du fait que les coefficients de structures sont des entiers positifs. Comme beaucoup d'algèbres de Hopf sont combinatoires, un problème naturel depuis lors est d'essayer de les catégorifier au moyen de tours d'algèbres afin de mieux en comprendre la structure – par exemple l'algèbre des arbres binaires **PBT** de Loday et Ronco [LR98]. Novelli, Hivert et Thibon conjecturent qu'il existe une tour d'algèbres qui catégorifie l'algèbre auto-duale **PBT** [HNT05]. Deviner une telle tour d'algèbres est difficile en général. Dans le cadre de ce manuscrit nous restreignons le champ de recherche aux tours de monoïdes, afin de mieux contrôler leurs représentations. La démarche est naturelle car ce cadre couvre en fait les deux exemples fondamentaux ci-dessus tandis qu'il est impossible de catégorifier la paire d'algèbres de Hopf duales (**NCSF**/QSym) avec seulement une tour de groupes. Le premier objectif de cette thèse était de catégorifier de telles algèbres de Hopf au moyen de tours de monoïdes.

Fonctions de parking

Les fonctions de parking ont été introduites par Kohneim et Weiss [KW66] en 1966 afin de modéliser des problèmes de tables de hachage. La connexion profonde qui existe entre les fonctions de parking et les arbres binaires, puis plus récemment leur implication au cœur de la conjecture $n!$ [Hai01] ou dans l'inversion de Lagrange non-commutative en font des objets majeurs de la combinatoire algébrique

actuelle. On les retrouve aussi en géométrie dans l'étude des arrangements d'hyperplans [Shi86]. Plusieurs structures de combinatoire algébrique ont aussi été construites sur les fonctions de parking, notamment l'algèbre de Hopf **PQSym** [NT07]. Les fonctions de parking ne forment pas un monoïde, mais la restriction aux fonctions de parking croissantes est un monoïde quotient de $H_n(0)$.

Nous étudions les représentations de la tour des fonctions de parking croissantes $(\mathrm{NDPF}_n)_n$. La plupart des résultat concernant la théorie des représentation on été publiés dans [Vir14]. Nous donnons ensuite des formules d'énumération sur une généralisation des fonctions de parking dans un travail commun avec Jean-Baptiste Priez [PV14].

Plan de la thèse et résultats

Ce présent manuscrit est divisé en quatre chapitres. Les deux premiers sont essentiellement des chapitres généraux introduisant le matériel nécessaire à la lecture des deux derniers, qui contiennent la plupart des résultats obtenus pendant la thèse.

Le premier chapitre donne une vue générale des outils de combinatoire algébrique que nous allons rencontrer tout au long de ce mémoire. Les premières sections sont réservées à des rappels sur la combinatoire des mots, des partitions et des chemins de Dyck. Nous rencontrerons à la section § 2.4 nos premiers monoïdes. Nous définissons les relations de Green qui permettent de cataloguer les monoïdes en plusieurs grandes familles, en particulier les monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux (définition 2.15) dont nous investiguerons la structure (§ 2.4.4).

L'étude des représentations des monoïdes demande des prérequis en théorie des modules (§ 2.5). L'objectif de cette section est d'introduire des outils qui permettent de *dévisser* les algèbres et les modules. La décomposition de Peirce (définition 2.61) permet de décomposer une algèbre en somme directe de sous-algèbres, sous réserve de disposer d'une décomposition de l'identité en idempotents orthogonaux. Cette décomposition, qui est suffisante dans le cas des représentations de groupes pour définir l'ensemble des représentations simples, ne l'est plus dans le cas des monoïdes. En effet, les algèbres de monoïdes, contrairement aux algèbres de groupes, peuvent avoir du radical non réduit à zéro (définition 2.69) et en particulier ne sont pas décomposables en une somme directe de modules simples, mais de modules projectifs (§ 2.5.7). De façon plus abstraite, on peut alors définir deux groupes de Grothendieck à partir d'une catégorie de A-modules finiments engendrés (§ 2.6). Nous concluons le premier chapitre par des rappels sur les algèbres de Hopf § 2.7 et en donnons des exemples classiques. En particulier, nous rappelons la structure d'algèbre de Hopf combinatoire des fonctions quasi-symétriques libres (§ 2.7.3), de la paire d'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non-commutatives **NCSF**/QSym (§ 2.7.4) et de l'algèbre de Hopf de Loday et Ronco des arbres binaires (§ 2.7.5).

Le chapitre 3 est consacré à la théorie des représentions des monoïdes et ses applications. Nous commençons par rappeler le cas des représentations des groupes finis (§ 3.2) et en particulier nous présentons sans preuves la classification des représentations irréductibles du groupe symétrique (§ 3.3) ; en application, nous présentons la théorie des espèces (§ 3.4). Nous explorons ensuite les représentations des monoïdes, le point central étant le théorème de Clifford – Munn – Ponizovskiĭ permettant de construire une famille complète de modules simples sur une algèbre de monoïde fini (théorème 3.15). Nous nous focalisons enfin sur les monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux et rappelons les résultats combinatoires obtenus notamment par Denton, Hivert, Schilling et Thiéry (§ 3.7).

Le quatrième chapitre (§ 4) porte sur les représentations de tours de monoïdes et comporte une partie de mes contributions. Nous proposons une définition de tour d'algèbres et, en spécialisant, de monoïdes (définition 4.1). La notion de groupe de Grothendieck s'étend naturellement sur les tours (§ 4.4). On peut alors les munir d'une structure d'anneau. Il est naturel de regarder le cas précis des tours de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux pour lesquelles nous donnons une règle combinatoire d'induction et de restriction des modules (théorèmes 4.8 et 4.9). Nous introduisons enfin formellement la catégorification d'algèbres de Hopf (§ 4.5). Nous comparons notre définition avec la construction de Bergeron et Li (§ 4.6). La suite du chapitre est consacrée à l'exposé des résultats obtenus pendant ma thèse concernant la catégorification d'algèbres de Hopf par des tours de monoïdes. Les semi-treillis constituent une famille de monoïdes dont

les représentations sont simples à calculer. On donne une description complète de la théorie des représentations de la tour des permutoèdres, treillis de Tamari et treillis booléen (§ 4.7). On remarque alors que ces treillis fournissent des catégorifications de certaines algèbres de Hopf combinatoires, mais sans toutefois catégorifier les algèbres duales. (propositions 4.26, 4.33, 4.36). Nous menons ensuite une recherche exhaustive de catégorification du couple **PBT**/**PBT*** sous des hypothèses naturelles, et démontrons le théorème 4.46 de non-catégorification de **PBT**. Nous concluons le chapitre par le théorème 4.58 d'unicité de la catégorification par la tour des monoïdes 0-Hecke du couple d'algèbres duales **NCSF**/QSym.

Enfin le dernier chapitre est consacré aux fonctions de parking (§ 5), et est composé de deux parties. Nous commençons par étudier les fonctions de parking croissantes et donnons une description combinatoire de ses représentations. En particulier, nous décrivons de façon combinatoire l'induction des modules projectifs (théorème 5.22) et simples (théorème 5.24).

Nous étudions ensuite une généralisation des fonctions de parking due à Stanley et Pitman. Dans un premier temps nous donnons une interprétation combinatoire d'une formule de comptage en termes d'inclusion-exclusion sur les faces d'un polytope (§ 5.4). Enfin, nous munissons les fonctions de parking généralisées d'une structure de $H_n(0)$-module afin de relever, grâce à la catégorification de Krob-Thibon, les caractères dans les fonctions symétriques non-commutatives. Nous donnons ces caractères dans différentes bases et en déduisons des formules d'énumération (§ 5.5.5).

Chapitre 2

Combinatoire algébrique

Dans ce chapitre, nous faisons des rappels d'algèbre et de combinatoire algébrique. Nous commençons par introduire les objets discrets qui seront centraux dans ce manuscrit : les permutations, les partitions et les monoïdes finis. Puis le texte prendra une teneur plus algébrique en explorant les algèbres et leurs modules. Enfin nous introduirons les algèbres de Hopf graduées qui apparaîtront dans ce manuscrit.

Pour ce chapitre, je me suis beaucoup inspiré de la remarquable présentation de [Ber09].

2.1 Mots et permutations

Soit S un ensemble fini ; le groupe des permutations de S, noté $\mathfrak{S}_S$, est l'ensemble des bijections $S \to S$. A renumérotation près[1], $S = [n] = \{1, \dots, n\}$, et une *permutation de taille* n est une bijection de $[n] \to [n]$. L'ordre naturel sur les entiers $1 < 2 < \cdots < n$ nous permet de noter une permutation $\sigma : [n] \to [n]$ sous la forme d'un *mot* $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$ où $\sigma_i = \sigma(i)$.

Bien sûr, un résultat de combinatoire élémentaire affirme qu'il y a $n!$ permutations de taille n. Pour le voir, remarquons que le mot σ est composé des n *lettres* (les entiers de 1 à n) deux à deux distinctes. On dispose de n choix pour σ_1, puis de $n-1$ choix pour σ_2 et ainsi de suite jusqu'à σ_n qui est forcé (la dernière lettre restante), soit au total $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ choix.

La permutation $1 \cdots n$ est appelée *l'identité*. Étant donnée une permutation $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, on peut construire la permutation $\mu = \tilde{\sigma_1} \cdots \tilde{\sigma_n}$, où $\tilde{\sigma_i}$ est l'index de i dans σ. La composition μ vérifie la propriété $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma = \mathrm{id}$, donc $\mu = \sigma^{-1}$. L'ensemble des permutations de $[n]$ est alors muni d'une structure de groupe[2].

Dans ce manuscrit, on utilisera aussi la notation par cycle, qui a l'avantage d'être plus succincte en général (mais aussi parfois moins claire). Un k-cycle noté $(a_1 \ \dots \ a_k)$ est une permutation qui envoie a_1 sur a_2, a_2 sur a_3 *etc.* et enfin a_k sur a_1. Toute permutation peut s'écrire de façon canonique comme produit de cycles, par exemple $749235186 = (1\ 7) \circ (2\ 4) \circ (3\ 9\ 6\ 5)$.

Descentes et inversions

Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}$. L'ensemble des *descentes* de σ est l'ensemble $\mathrm{Des}(\sigma) = \{i : \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$. Le nombre de descentes est noté $\mathrm{des}(\sigma)$. Par exemple pour $\sigma = 749235186$ on a $\mathrm{Des}(\sigma) = \{1, 3, 6, 8\}$ et $\mathrm{des}(\sigma) = 4$.

L'ensemble des *inversions* de σ est l'ensemble des couples $\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(i,j) : i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$. La *longueur d'inversion d'une permutation* $\ell(\sigma)$ est le nombre de couples de $\mathrm{Inv}(\sigma)$. Par exemple $\mathrm{Inv}(3142) = \{(1,2), (1,4), (3,4)\}$ et $\ell(749235186) = 19$. Les inversions jouent un rôle crucial dans la décomposition en mots réduits.

Une autre statistique, *l'index majeur*, est définie comme $\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(\sigma)} i$. Le q-analogue de la factorielle est

$$\begin{aligned}[n]_q! = &\prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^k}{1-q} \\ =&(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).\end{aligned}$$

Il est aisé de démontrer que

$$\begin{aligned}[n]_q! &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)}, \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\ell(\sigma)},\end{aligned}$$

mais étonnament, en trouver une preuve bijective n'est pas si facile ([Foa68]). Encore plus surprenant, il existe une involution qui échange les statistiques ℓ et maj d'une permutation σ en préservant les descentes de σ^{-1} ([FS78]).

Longueur d'une permutation, mots réduits

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions élémentaires $s_i = (i, i+i)$: toute permutation peut être écrite comme un produit de ces transpositions. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ peut être défini

1. Nous reviendrons sur la renumérotation et l'importance de ce point de vue section 3.4.
2. On aurait pu le voir directement par le fait que σ est une bijection.

par générateurs et relations, avec comme générateurs les transpositions élémentaires $(s_i)_{i<n}$ et comme relations

$$\begin{array}{rcll} s_i^2 & = & \mathrm{id}, & \\ s_i s_j & = & s_j s_i & \text{si } |i-j|>1, \\ s_i s_{i+1} s_i & = & s_{i+1} s_i s_{i+1}. & \end{array} \tag{2.1}$$

Les deux dernières relations sont communément appelées *relations de tresse*.

On appelle *longueur* de la décomposition le nombre de facteurs de la décomposition. Il n'y a pas unicité de l'écriture comme produit de transpositions. On appelle *mot réduit* une décomposition de longueur minimale. Il n'y a pas unicité de l'écriture sous forme de mot réduit comme par exemple $3142 = s_2 s_3 s_1 = s_2 s_1 s_3$. La longueur d'une permutation est égale à son nombre d'inversions comme par exemple $749235186 = s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_4 s_3 s_2 s_8 s_7 s_6 s_5 s_4 s_3 s_4 s_5 s_6 s_8$ est de longueur $19 = \ell(\sigma)$.

Opérateur de mélange, opérateur de mélange décalé

Un *alphabet* $\mathcal{A}$ est un ensemble fini dont les éléments sont appelés *lettres*. Un *mot* w sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est une suite finie de lettres $w = a_1 \cdots a_n$ avec $a_i \in \mathcal{A}$ pour tout i. La *longueur* d'un mot est la longueur de la suite de lettres qui le compose. Si on inclut le mot vide ε (de longueur 0), l'ensemble des mots d'un alphabet donné est un *monoïde* pour la concaténation $u \cdot v = u_1 \cdots u_k v_1 \cdots v_l$.

L'ensemble des mots de longueur n est de cardinalité $|\mathcal{A}|^n$. L'*algèbre libre des mots* $\Bbbk\mathcal{A}^*$ est l'espace vectoriel de dimension infinie, de base indexée par l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$, et muni de la concaténation. Un opérateur de l'algèbre des mots qui reviendra fréquemment dans le présent manuscrit est l'*opérateur de mélange*, défini récursivement par

$$u \sqcup\!\sqcup v = \begin{cases} u & \text{si } v = \varepsilon, \\ v & \text{si } u = \varepsilon, \\ a(u' \sqcup\!\sqcup v) + b(u \sqcup\!\sqcup v') & \text{si } u = au' \text{ et } v = bv'. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le produit de mélange des mots 12 et 43 donne la combinaison linéaire des 6 mots

$$12 \sqcup\!\sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312.$$

Plus généralement, le produit de mélange de deux mots de longueur k et n donne une somme de $\binom{k+n}{n}$ termes de longueur $n+k$ (on sélectionne le placement du premier mot). Des multiplicités peuvent apparaître dans le produit de mélange : considérer par exemple $12 \sqcup\!\sqcup 12$.

Pour deux permutations σ et μ de longueur respectivement k et l, le *produit de mélange décalé* $\sigma \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} \mu$ est le produit de mélange de σ par μ avec cette dernière vue comme un mot dans lequel toutes les lettres ont été décalées de k. Par exemple on a $12 \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} 21 = 12 \sqcup\!\sqcup 43$.

Produit de convolution

La *convolution* de deux permutations σ et μ, notée $\sigma \star \mu$, est la somme formelle des inverses des termes du mélange décalé de σ^{-1} et μ^{-1}, c'est-à-dire

$$\sigma \star \mu = \sum_{\nu \in \sigma^{-1} \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} \mu^{-1}} \nu^{-1}.$$

Par exemple on a

$$12 \star 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421.$$

Cet opérateur nous servira à décrire le produit dans la base **G** de l'algèbre de Hopf **FQSym**, (*cf.* section 2.7).

Standardisation

Soit $\mathcal{A} = \{a < b < \cdots\}$ un alphabet ordonné infini. À chaque mot w de longueur finie n, on peut associer une permutation $\mathrm{Std}(w) = \sigma \in \mathfrak{S}_n$, appelée la *standardisation* de w en parcourant le mot w de gauche à droite, et en remplaçant successivement les occurrences des plus petites lettres par la suite $1, 2, \cdots$.

Exemple 2.1. $\mathrm{Std}(daccbad) = 6145327$.

Remarque 2.2. Le mot standardisé $\mathrm{Std}(w)$ est l'unique permutation avec les mêmes inversions que w.

Évaluation tassée

On appelle *évaluation* d'un mot w sur un alphabet $\mathcal{A}$ la suite $(|w|_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Par exemple le mot $w = abcbebe$ sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ a pour évaluation $\mathrm{Ev}(w) = (1, 3, 1, 0, 2)$. L'évaluation tassée d'un mot w est la suite $\mathrm{Ev}(w)$ dans laquelle on a supprimé les 0.

2.2 Partitions

2.2.1 Partition d'un entier

Une *partition* est une suite d'entiers strictement positifs $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$. L'entier k est la *longueur* de la partition que l'on notera $\ell(\lambda)$. Le *poids* d'une partition est l'entier $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. Une partition de poids n est souvent appelée plus simplement une *partition de* n. On note $\mathrm{Par}(n)$ l'ensemble des partitions de n.

Par exemple $(2, 1, 1, 1, 1)$ et $(3, 2, 1)$ sont deux partitions différentes de 6. On utilise souvent la notation en diagramme, qui consiste à placer λ_1 boites horizontales, puis λ_2 boites au-dessus collées à gauche *etc.*

(a) $(2, 1, 1, 1, 1)$ (b) $(3, 2, 1)$

FIG. 2.2.1: Diagrammes de Young de partitions

On note souvent les partitions comme un mot $1^{m_1}2^{m_2}\cdots$ où m_i compte le nombre de parts de taille i.

Partition conjuguée

La *partition conjuguée* à une partition λ de n est la partition $\lambda'_i = |\{j : \lambda_j \geqslant i\}|$. Plus visuellement, cela revient à faire une réflexion du diagramme par rapport à la diagonale. Par exemple, la partition conjuguée de $(2, 1, 1, 1, 1)$ est $(5, 1)$, et la partition $(3, 2, 1)$ est égale à sa conjuguée.

Combinatoire des partitions

Notons $p(n)$ le nombre de partitions de n et regardons $\mathrm{Par}(n)$ pour les premiers n.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Par}(0) &= \{0\}\\
\mathrm{Par}(1) &= \{1\}\\
\mathrm{Par}(2) &= \{2, 11\}\\
\mathrm{Par}(3) &= \{3, 21, 111\}\\
\mathrm{Par}(4) &= \{4, 31, 22, 211, 1111\}\\
\mathrm{Par}(5) &= \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}\\
\mathrm{Par}(6) &= \{6, 51, 42, 411, 33, 321, 3111, 222, 2211, 21111, 111111\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les premières valeurs de $p(n)$ sont $1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, \ldots$ (A000041). La série génératrice de p vérifie

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n)t^n = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-t^k}.$$

On connaît une estimation asymptotique de $p(n)$ due à Hardy et Ramanujan que je trouve fabuleuse.

Théorème 2.3 ([HR17])**.**

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

2.2.2 Compositions d'un entier

Une composition d'un entier n est une suite de parts strictement positives $c = (c_1, \ldots, c_k)$ telles que $c_1 + \cdots + c_k = n$. L'entier k est appelé la *longueur* de c. A chaque composition c, on associe l'ensemble des sommes partielles $\{s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ avec $s_i = c_1 + \cdots + c_i$, ce qui donne une bijection entre les sous-ensembles de $[n-1]$ et les compositions de n.

Proposition 2.4. *Il y a 2^{n-1} compositions de n (A000079).*

2.2.3 Partitions d'ensembles

Une partition d'un ensemble S est une décomposition de S en classes disjointes (C_i) telles que $\bigsqcup_i C_i = S$. Les partitions d'un entier sont les partitions d'un ensemble de n éléments indistinguables. Les premières partitions d'ensembles à n éléments sont

$$\begin{aligned}
\mathrm{Par}(\varnothing) &= \{\varnothing\}\\
\mathrm{Par}(\{1\}) &= \{\{\{1\}\}\}\\
\mathrm{Par}(\{1,2\}) &= \{\{\{1,2\}\}, \{\{1\},\{2\}\}\}\\
\mathrm{Par}(\{1,2,3\}) &= \{\{\{1,2,3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{2,3\},\{1\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}, \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\}.
\end{aligned}$$

Pour éviter les notations ensemblistes surchargées, on séparera les sous-ensembles par le symbole "/". Ainsi, la liste des 5 partitions de $\{1,2,3\}$ est $123, 23/1, 12/3, 13/2, 1/2/3$. Les partitions d'un ensemble à n éléments sont comptées par les nombres de Bell : $1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, \ldots$ (A000110).

2.2.4 Partitions ordonnées d'ensemble

Définition 2.5. Une *partition ordonnée* d'un ensemble S est une suite d'ensembles disjoints $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ telle que $S = \bigsqcup_i B_i$; chacun des B_i est une *part* de la partition.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des partitions ordonnées d'un ensemble de cardinal n. Les première sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \{\varnothing\} \\
\mathcal{B}_1 &= \{1\} \\
\mathcal{B}_2 &= \{12, 1/2, 2/1\} \\
\mathcal{B}_3 &= \{123, 1/2/3, 1/3/2, 2/1/3, 2/3/1, 3/1/2, 3/2/1, 12/3, 13/2, 23/1, 1/23, 2/13, 3/12\}.
\end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle des partitions ordonnées d'ensembles est

$$\sum_{i \geqslant 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - \exp(x)}.$$

dont les coefficients sont les nombres de Fubini : $1, 1, 3, 13, 75, 541, 4683, \dots$ (A000670).

Soit $B = B_0/B_1/\cdots/B_k$ une partition ordonnée d'ensembles, pour tout i on peut fusionner les parties B_i et B_{i+1} pour obtenir $\hat{B}_i = B_0/\cdots/B_i \cup B_{i+1}/\cdots/B_k$ qui contient désormais $k-1$ parts. On note $\hat{\varphi}_i$ cette application, que l'on notera comme agissant à droite. Soient deux partitions ordonnées d'ensembles B et C, on définit la relation d'ordre suivante : $B \preceq C$ s'il existe une suite $i_1, \dots i_l$ telle que $B = C \cdot \hat{\varphi_{i_1}}\hat{\varphi_{i_2}} \cdots \hat{\varphi_{i_l}}$. L'ordre partiel qui s'en déduit admet comme élément minimal la partition triviale formée d'une unique part $\{1, \dots, n\}$.

2.3 Chemins de Dyck

La suite de Catalan $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ (A000108) est l'une des plus fameuses en combinatoire. De très nombreux objets sont comptés par Catalan, et construire des bijections intéressantes entre ces objets fait partie du travail du combinatoricien ; par exemple Richard Stanley donne 214 objets comptés par Catalan [Sta15].

Dans cette partie, nous ne chercherons pas à être aussi exhaustif que la référence précédente, mais nous allons présenter les chemins de Dyck, que nous allons être amenés à voir par la suite.

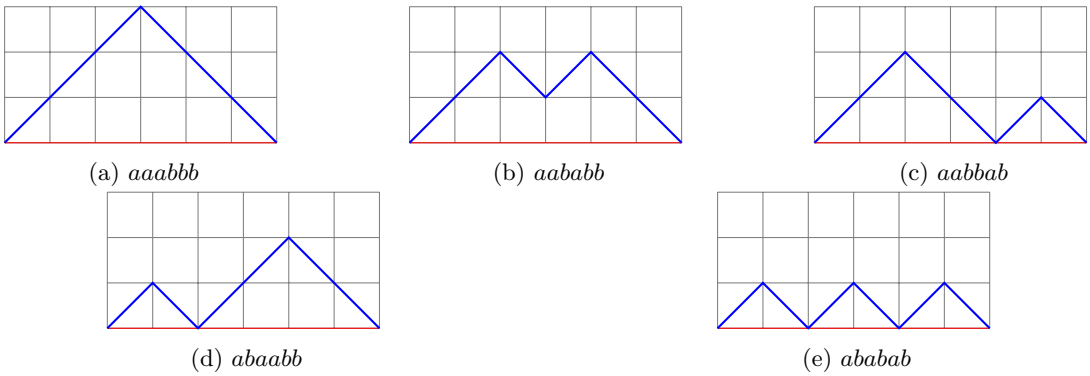
Un mot de Dyck est un mot w de longueur $2n$ sur un alphabet à deux lettres a et b, contenant autant de a que de b et tel que tout préfixe de w contienne plus de a que de b. Par exemple, *aababb* est un mot de Dyck mais *abbaba* n'en est pas un : le préfixe *abb* contient strictement moins de a que de b.

Exemple 2.6. Les cinq mots de Dyck de longueur 6 sont :

$$aaabbb, aababb, aabbab, ababab, abaabb.$$

On peut donner une représentation plus géométrique des mots de Dyck en les considérant comme un chemin du plan partant de $(0, 0)$ que l'on construit en lisant le mot de gauche à droite : on monte d'un pas diagonal lorsqu'on lit un « a » et on descend d'un pas diagonal si on lit « b ». On obtient alors un chemin de longueur $2n$ partant de $(0, 0)$ et arrivant à $(0, 2n)$. La contrainte sur les préfixes assure que ce chemin reste au-dessus de l'axe des abscisses. Il est aisé de vérifier que tout chemin ainsi décrit correspond uniquement à un mot de Dyck.

On peut donner une autre représentation géométrique trivialement équivalente que l'on utilisera dans le chapitre 5 sur les fonctions de parking. Au lieu de considérer des pas diagonaux, on peut considérer un pas horizontal pour la lettre a, et un pas vertical pour la lettre b. On obtient un chemin de $(0, 0)$ à (n, n) qui reste sous la diagonale.



(a) *aaabbb* (b) *aababb* (c) *aabbab*

(d) *abaabb* (e) *ababab*

FIG. 2.3.1: Liste des chemins de Dyck de longueur 6

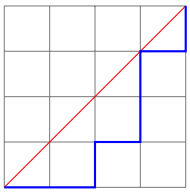


FIG. 2.3.2: Chemin de Dyck de *aababbab*

2.4 Monoïdes

Définition 2.7. Un *monoïde* $(M, \cdot, e)$ est un ensemble M muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ et d'un élément neutre e.

Exemple 2.8. Les ensembles suivants sont munis d'une structure de monoïde.

- L'ensemble des entiers naturels $(\mathbb{N}, +, 0)$ et $(\mathbb{N}, \times, 1)$.
- L'ensemble des parties d'un ensemble fini muni de l'union ensembliste est un monoïde dont l'élément neutre est l'ensemble vide $\varnothing$.
- Les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour la multiplication.
- Les ensembles de matrices $M_n(\mathbb{k})$ pour la multiplication.
- A partir d'un langage formel, on peut construire son *monoïde syntaxique*, dont les éléments sont des classes d'équivalence de mots pour une certain relation, qui est fini si et seulement si le langage est rationnel.
- Un groupe G est naturellement muni d'une structure de monoïde.

Un monoïde se distingue d'un groupe par le fait que ses éléments ne sont pas supposés inversibles. En particulier, un monoïde fini M va contenir des idempotents alors qu'un groupe a pour seul élément idempotent l'unité 1. À partir d'un élément $m \in M$, on peut construire un idempotent en considérant la suite $(m^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme M est fini, il existe par le principe de Dirichlet deux entiers a et b tels que $(m^{a+bn})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à m^a. Il est alors classique de montrer qu'il existe $k < b$ tel que m^{a+k} soit idempotent.

La situation est différente dans les monoïdes où la présence d'idempotents donne une combinatoire profondément différente de celle des groupes.

Proposition 2.9. *Un monoïde fini M admet un unique idempotent si et seulement si M est un groupe.*

Démonstration. En effet, si M n'admet qu'un seul idempotent, alors il s'agit de l'unité 1_M. Toutes les suites des itérés $(m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiennent alors 1_M et tout élément est inversible.
La réciproque est évidente. □

Les monoïdes pour lesquels $b = 1$, c'est-à-dire lorsque les itérés de m sont constants à partir d'un certain rang, constituent une importante variété de monoïdes appelés *apériodiques*.

Définition 2.10. Un monoïde fini M est *apériodique* s'il existe un entier N tel que

$$\forall x \in M,\ x^N = x^{N+1}.$$

Dans ce cas, on note x^ω l'idempotent x^N pour N tel que $x^N = x^{N+1}$.

On notera $E(M)$ l'ensemble des idempotents du monoïde M. Pour tout $e \in E(M)$, eMe est un monoïde d'élément neutre e. Le groupe des unités de eMe est le *sous-groupe maximal de M en e* noté G_e.

Définition 2.11. Un *idéal* bilatère d'un monoïde M est un ensemble non vide $I \subseteq M$ tel que pour tout $x \in M$, $MxM \subseteq I$.

Définition 2.12. Un élément $x \in M$ est *régulier* s'il existe $m \in M$ tel que $xmx = x$.

2.4.1 Relations de Green

Afin d'étudier les monoïdes (et plus généralement les semi-groupes), Green introduisit [Gre51] différents pré-ordres.

Définition 2.13 (Graphe de Cayley)**.** Le *graphe de Cayley* à gauche (respectivement à droite) d'un monoïde M est le graphe dirigé dont les sommets sont les éléments de M, et les flèches les couples (r, s) s'il existe $m \in M$ tel que $mr = s$ (respectivement $rm = s$).

Pour un monoïde M nous définissons les relations d'équivalence $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ suivantes :

$$\begin{array}{ll} x\mathcal{R}y & \text{si } xM = yM, \\ x\mathcal{L}y & \text{si } Mx = My, \\ x\mathcal{J}y & \text{si } MxM = MyM, \\ x\mathcal{H}y & \text{si } x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{L}y. \end{array} \tag{2.3}$$

Remarque 2.14.
1. La $\mathcal{J}$-classe contenant 1_M est le *groupe des unités* G_M.
2. Les $\mathcal{L}$-classes de M sont les composantes fortement connexes du graphe de Cayley à gauche de M.
3. Les $\mathcal{R}$-classes de M sont les composantes fortement connexes du graphe de Cayley à droite de M.
4. Les $\mathcal{J}$-classes de M sont les composantes fortement connexes du graphe de Cayley bilatère de M.

Les quatre relations de Green (2.3) coïncident sur les groupes. Comme tout élément d'un groupe est inversible, une $\mathcal{K}$-classe est constituée de l'ensemble des éléments du groupe.

2.4.2 Monoïdes $\mathcal{K}$-triviaux

L'inclusion munit les classes d'équivalences M de relations de pré-ordres $<_\mathcal{K}$ pour $\mathcal{K} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{R}\}$. Ces relations deviennent des relations d'ordres (partielles) lorsque les $\mathcal{K}$-classes sont de cardinalité 1. Ceci nous amène a définir certains types de monoïdes que nous étudierons très largement par la suite.

Définition 2.15. Un monoïde dont toutes les $\mathcal{H}$ classes (respectivement $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$) sont de cardinal 1 est appelé $\mathcal{H}$-trivial (respectivement $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$-trivial)

Les relations d'équivalences ci-dessus décomposent la structure de monoïde mais pas celle de groupe : un groupe n'admet qu'une seule $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$-classe.

Théorème 2.16. *Un monoïde M est $\mathcal{H}$-trivial si et seulement s'il est apériodique.*

La $\mathcal{H}$-classe $\mathcal{H}(e)$ contenant un idempotent e est un groupe d'unité e appelé *sous-groupe maximal* en e, nous le noterons G_e.

Proposition 2.17. *Un monoïde M est apériodique si et seulement si pour tout $e \in E(M)$ le groupe G_e est trivial.*

Il est possible de donner une définition équivalente en termes de relations d'ordre. Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur partielle sur un monoïde M, on dit que M est :

ordonné à droite	si $xy \leqslant x$ pour tout $x, y \in M$,
ordonné à gauche	si $xy \leqslant y$ pour tout $x, y \in M$,
ordonné à gauche et à droite	si $xy \leqslant x$ et $xy \leqslant y$ pour tout $x, y \in M$.

Remarquons que ces trois notions diffèrent de la définition traditionnelle qui appelle *monoïde ordonné* un monoïde muni d'une relation d'ordre qui est compatible avec le produit (voir [Pin15, section 1.4]).

Proposition 2.18. *Le monoïde M est ordonné à gauche (respectivement ordonné à droite, ordonné à gauche et à droite) si et seulement si M est $\mathcal{L}$-trivial (respectivement $\mathcal{R}$-trivial, $\mathcal{J}$-trivial).*

Les monoïdes $\mathcal{H}$ triviaux forment une importante classe de monoïdes aussi appelés apériodiques. Notons qu'il est équivalent de dire que toute suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement convergente vers un idempotent x^ω.

Monoïdes produit

Soient $(A, *, 1_A)$ et $(B, \star, 1_b)$ deux monoïdes, nous pouvons munir le produit direct $A \times B$ d'une structure de monoïde d'unité $1_A \times 1_B$ et de produit $\cdot$ défini par

$$(a_1 \times b_1) \cdot (a_2 \times b_2) = (a_1 * a_2) \times (b_1 \star b_2).$$

Les $\mathcal{K}$-classes du monoïde produit se déduisent des $\mathcal{K}$-classes de chacune des composantes selon la proposition suivante.

Proposition 2.19. *Soit A et B deux monoïdes et $\mathcal{K} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}\}$, on a*

$$\mathcal{K}(a \times b) = \mathcal{K}(a) \times \mathcal{K}(b).$$

Démonstration. Prenons $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ et $a \times b \in A \times B$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(a \times b) &= (a \times b)(A \times B) \\ &= aA \times bB \\ &= \mathcal{K}(a) \times \mathcal{K}(b). \end{aligned}$$

Les autres cas se traitent de la même façon. □

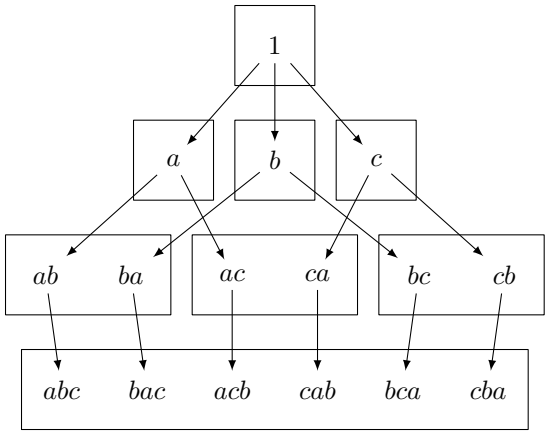
2.4.3 Quelques exemples

Bandes régulières à gauche

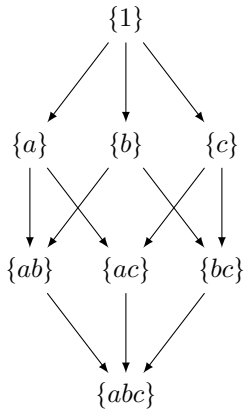
Voir par exemple [Bro00] pour une étude approfondie. Une *Bande régulière à gauche* (ou *BRG*) est un semigroupe S engendré par des éléments $s_1, \cdots, s_n$ satisfaisant les relations

$$x^2 = x \text{ pour tout } x \in S, \tag{2.4}$$

$$xyx = xy \text{ pour tout } x, y \in S. \tag{2.5}$$



(a) Bande régulière à gauche libre avec 3 générateurs



(b) Treillis des $\mathcal{R}$-classes régulières

La seconde relation peut également s'exprimer comme une propriété de simplification des facteurs apparaissant une seconde fois dans un produit :

$$x_1x_2\cdots x_i\cdots x_i\cdots x_k = x_1x_2\cdots x_i\cdots \hat{x_i}\cdots x_k.$$

Si nous supposons que les relations (2.4) sont les seules, on a alors une *bande régulière à gauche libre* (BRGL) S. Les éléments sont les mots sans répétition de taille n au plus. Ajoutons un élément neutre pour obtenir un monoïde $S^1 = S \cup \{1\}$, de cardinalité

$$|S^1| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!$$

le nombre d'arrangements de k dans n (A000522).

Soit x et y deux éléments de S^1, ils appartiennent à la même $\mathcal{R}$-classe si et seulement si $xS^1 = yS^1$. Si l'on suppose que $x \neq y$, alors les éléments de xS^1 ont un préfixe différent des éléments de yS^1. En particulier, $xS^1 \neq yS^1$ et le monoïde S^1 est $\mathcal{R}$-trivial.

Les $\mathcal{L}$-classes de S^1 sont composées des éléments ayant les mêmes facteurs à l'ordre près. En effet, si x et y ont les mêmes facteurs, alors $xy = x$ et $yx = y$. On compte alors 2^n $\mathcal{L}$-classes, n étant le nombre de générateurs de S^1.

Le monoïde S^1 est alors apériodique. La figure 2.4.1a donne l'ordre partiel des $\mathcal{J}$-classes de la BRGL à 3 générateurs. La figure 2.4.1b représente le treillis des $\mathcal{R}$-classes régulières de la bande régulière à gauche libre.

Monoïde 0-Hecke

Le monoïde 0-Hecke constituera un exemple récurrent du présent manuscrit. Bien que l'on étudiera essentiellement le type A, donnons une définition pour tous les types. Rappelons qu'un *groupe de Coxeter* W est un groupe défini par générateurs $(s_i)_{i\in I}$ et relations

$$\forall (i,j) \in I^2, (s_is_j)^{m_{i,j}} = 1_W \tag{2.6}$$

pour $m_{i,j} \in \{1, 2, \cdots\}$ et $m_{i,i} = 1$. Les générateurs s_i sont appelés *réflexions simples* et les relations peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 && \text{pour tout } i \in I, \\ \underbrace{s_is_js_is_j\cdots}_{m_{i,j}} &= \underbrace{s_js_is_js_i\cdots}_{m_{i,j}} && \text{pour tout } i,j \in I. \end{aligned}$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est un groupe de Coxeter avec $m_{i,i} = 1$, $m_{i,i+1} = 3$ et $m_{i,j} = 2$ pour $|i-j| > 1$. Voir par exemple l'excellent ouvrage [BB05] pour plus de détails sur les groupes de Coxeter.

À chaque groupe de Coxeter W on peut associer un monoïde de 0-Hecke.

Définition 2.20 (Monoïde 0-Hecke)**.** Soit W un groupe de Coxeter, le monoïde 0-Hecke noté $H_0(W)$ associé à W est le monoïde engendré par les idempotents $(\pi_i)_{i\in I}$ avec les relations

$$\underbrace{\pi_i\pi_j\pi_i\pi_j\cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{\pi_j\pi_i\pi_j\pi_i\cdots}_{m_{i,j}} \qquad \text{pour tout } i,j \in I.$$

Les éléments de $H_0(W)$ sont indexés par les éléments de W: à chaque $w = s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ on associe bijectivement $\pi_{i_1}\cdots\pi_{i_k}$. Ainsi $H_0(W)$ et W sont de même cardinal.

Théorème 2.21. *Pour tout groupe de Coxeter W, $H_0(W)$ est un monoïde $\mathcal{J}$-trivial.*

Élucidons la structure du monoïde 0-Hecke sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. L'ensemble des descentes d'un groupe de Coxeter W est l'ensemble $\mathrm{Des}(W) = \{s \in W : \ell(wx) < \ell(w)\}$. On peut faire agir $H_0(\mathfrak{S}_n)$ sur le groupe symétrique (et de façon générale $H_0(W)$ sur W) par

$$w \cdot \pi_i = \begin{cases} w & \text{si } i \in \mathrm{Des}(w), \\ w \cdot s_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, les générateurs π_i « trient » la permutation w (vue comme un mot) par transpositions successives.

Monoïde Bi-Hecke

Dans [HST13], pour un groupe de Coxeter W, les auteurs définissent le monoïde Bi-Hecke comme le sous-monoïdes des fonctions $W \to W$ engendré par les π_i défini comme dans le cas 0-Hecke, et les fonctions $\overline{\pi}_i$:

$$w \cdot \overline{\pi}_i = \begin{cases} w \cdot s_i & \text{si } i \in \mathrm{Des}(w), \\ w & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un monoïde apériodique qui n'est ni $\mathcal{L}$, ni $\mathcal{R}$, ni $\mathcal{J}$-trivial.

2.4.4 Structure des $\mathcal{J}$-classes

Les $\mathcal{J}$-classes d'un monoïde ainsi que les idempotents jouent un rôle important dans la théorie des représentations des monoïdes. On appelle $\mathcal{J}$-classe *régulière* une $\mathcal{J}$-classe de M qui contient un élément régulier (voir définition 2.12). On note $\mathcal{U}(M)$ l'ensemble des classes régulières d'un monoïde M.

Théorème 2.22. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est une $\mathcal{J}$-classe régulière ;*

(ii) *J contient un élément régulier ;*

(iii) *J contient un élément idempotent ;*

(iv) *$J \cap J^2 \neq \varnothing$.*

Dans le cas apériodique, on a vu que tout élément $x \in M$ est naturellement associé à un idempotent x^ω, donc à une $\mathcal{J}$-classe régulière. Dans le cas $\mathcal{J}$-trivial, les classes régulières forment un sous-ordre partiel de $<_{\mathcal{J}}$.

Théorème 2.23. *Soit M un monoïde $\mathcal{K}$-trivial pour $\mathcal{K} \in \{\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}\}$, l'ensemble des ses $\mathcal{J}$-classes régulières est un treillis pour l'inclusion.*

Théorème 2.24. *Soit M un monoïde fini et soit $\mathcal{K} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}\}$. Alors M est $\mathcal{K}$-trivial si et seulement si toutes les $\mathcal{K}$-classes régulières sont triviales.*

Démonstration. Il y a 4 cas selon $\mathcal{K}$.

(i) $\mathcal{K} = \mathcal{R}$: soient $x, y \in M$ tels que $x\mathcal{R}y$. Il existe alors $r, s \in M$ tels que $xr = y$ et $ys = x$. En particulier $xrs = x$ et il existe un n tel que $x(rs)^n = x$ et $(rs)^n$ idempotent. Comme $(rs)^n\mathcal{R}(rs)^n r$, nous avons l'égalité $(rs)^n r = rs$ vu que la $\mathcal{R}$-classe contenant l'idempotent $(rs)^n$ est triviale. S'ensuit alors

$$x = xrs = x(rs)^n = x(rs)^n s = y,$$

donc M est $\mathcal{R}$-trivial.

(ii) $\mathcal{K} = \mathcal{L}$: preuve duale de la précédente.

(iii) $\mathcal{K} = \mathcal{J}$: immédiat par ce qui précède.

(iv) $\mathcal{K} = \mathcal{H}$: soient $r, l \in M$ tels que $lx = y$ et $yr = x$. Alors $lxr = x$ et en itérant on obtient $l^n x r^n = x$ avec l^n idempotent. Par hypothèse, $l^{n+1} = l^n$ car $l^{n+1}\mathcal{H}l^n$ et $x = l^n x r^n = l^{n+1} x r^n = lx = y$, on a donc bien $x\mathcal{H}y$.

□

Soit M un monoïde $\mathcal{K}$-trivial avec $\mathcal{K} \in \{\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}\}$, l'ordre partiel des $\mathcal{J}$-classes admet un maximum et un minimum global. La $\mathcal{J}$-classe maximum J_1 est la J-classe contenant l'identité. La classe J_1 peut-être munie d'une structure de groupe. Si M est $\mathcal{J}$-trivial, alors $J_1 = \{1_M\}$. La $\mathcal{J}$-classe minimum est régulière, on la note J_0.

Théorème 2.25 (Théorème de localisation)**.** *Soit J une $\mathcal{J}$-classe d'un monoïde fini M et $s, t \in J$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$st \in \mathcal{R}(s) \cap \mathcal{L}(t)$,*
2. *$\mathcal{R}(t) \cap \mathcal{L}(s)$ contient un idempotent,*
3. *$st \in J$.*

Démonstration. Voir par exemple [Pin15, Théorème 1.11, p.100]. □

Proposition 2.26 ([Pin15, proposition 1.12])**.** *Soit J une $\mathcal{J}$-classe régulière d'un monoïde M, alors chaque $\mathcal{L}$-classe et chaque $\mathcal{R}$-classe de J contient un idempotent.*

Monoïdes $\mathbb{D}\mathbf{A}$

Dans ce manuscrit, on a besoin d'une dernière classe de monoïdes. On appelle $\mathbb{D}\mathbf{A}$ la classe des monoïdes dont toute $\mathcal{J}$-classe régulière ne contient que des idempotents. En particulier, tout monoïde de $\mathbb{D}\mathbf{A}$ est apériodique.

Matrices de Rees

Définition 2.27. Soit M un monoïde apériodique fini et $\mathcal{J}(e)$ la $\mathcal{J}$-classe régulière contenant l'idempotent e, $(R_i)_{i\in I}$ et $(L_j)_{j\in J}$ l'ensemble des $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ classes de $\mathcal{J}(e)$, $(H_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ les $\mathcal{H}$-classes contenues dans $\mathcal{J}(e)$. La *matrice de Rees* $m_{\mathcal{J}(e)}$ associées à $\mathcal{J}(e)$ est la matrice $(m_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ définie par

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } H_{i,j} \text{ est régulière,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 2.28. *Soit M un monoïde apériodique. La dimension du M-module simple associé à une $\mathcal{J}$-classe régulière J est* $\mathrm{rg}(m_J)$.

2.5 Modules et algèbres de dimensions finie

Dans ce manuscrit, nous allons être amenés à étudier de nombreux modules sur des algèbres de dimension finie, qui sont des objets abstraits fondamentaux en théorie des représentations. Dans cette section, nous donnons de nombreux rappels classiques sur les algèbres et leurs modules. Nous donnerons peu de démonstrations : seulement celles suffisamment courtes ou particulièrement éclairantes. Le lecteur peut se rapporter aux références suivantes pour les démonstrations : [Lam99], [CR90], [CR62], [Ibr97].

Dans toute la section, on considérera un R-module avec R un anneau unitaire pas nécessairement commutatif. Le lecteur pourra penser R comme une algèbre de dimension finie ; ce sera le cas le plus courant d'application dans la suite. On choisit cette notation dans un souci de généralité, et parce que cette hypothèse un peu plus faible ne change rien à la présentation.

Soit donc, pour toute cette section, R un anneau unitaire quelconque d'unité 1_R.

Définition 2.29. Un groupe abélien M est un *R-module à gauche* si, pour tout $r_1, r_2 \in R$ et $m_1, m_2 \in M$, on a

$$\begin{array}{lcl} r(m_1+m_2) & = & rm_1+rm_2, \\ (r_1+r_2)m & = & r_1m+r_2m, \\ (r_1r_2)m & = & r_1(r_2m), \\ 1_R\, m & = & m. \end{array}$$

La définition de *R-module à droite* est symétrique.

Un groupe abélien M est un (R,S)-bimodule si M est un R-module à gauche, un S-module à droite et si les actions commutent, c'est-à-dire que, pour tout $r \in R$, $m \in M$ et $s \in S$,

$$r(ms) = (rm)s.$$

Un sous R-module N de M est un sous-groupe de M stable sous l'action de R. Une application φ est un morphisme de R-module si $\varphi(m_1+m_2) = \varphi(m_1)+\varphi(m_2)$ et $\varphi(rm) = r\varphi(m)$.

On note $R-\mathbf{mod}$ (resp. $\mathbf{mod}-R$) la catégorie des R-modules à gauche (resp. à droite), et $R-\mathbf{mod}-S$ la catégorie des (R,S)-bimodules .

Remarque 2.30. Si R est une algèbre sur un corps commutatif $\Bbbk$, alors M est un $\Bbbk$-espace vectoriel.

Typiquement, nous considérerons des modules M sur une $\Bbbk$-algèbre unitaire A; M est alors aussi un $\Bbbk$-espace vectoriel. Pour tout $x \in \Bbbk$, $a \in A$ et $m \in M$ le produit par les scalaire est

$$\begin{array}{lcl} x \cdot m & = & (x \cdot 1_A)m, \\ x \cdot (am) & = & (x \cdot a)m. \end{array}$$

À l'instar des espaces vectoriels, on peut définir une notion de *base* sur certains modules. Un R-module L est *libre* si L est isomorphe à une somme directe de copies de R. Il y a alors un ensemble d'indices (éventuellement infini) I tel que $L = \bigoplus_{i\in I} R_i$ où $R_i \simeq R$ pour tout i. On appelle I une *base* de L.

Définition 2.31. Soit M un R-module ; une famille d'éléments $\{m_{\alpha\in I}\}$ de M est *R-libre* si toute relation $\sum_{\alpha\in I} r_\alpha m_\alpha = 0$ entraîne que tous les r_α sont nuls.

Si M admet une famille R-libre $\{m_\alpha\}$ qui est génératrice, alors M est un R-module *libre* de *rang* $|I|$.

Tous les espaces vectoriels sont des $\Bbbk$-modules libres et les modules libres ont des propriétés similaires, mais les modules n'admettent pas de base en général. Un $\mathbb{Z}$-module libre est un groupe abélien libre.

Toute $\Bbbk$-algèbre A est naturellement munie d'une structure de module sur elle-même, la multiplication externe coïncidant avec le produit de A. On appelle *module régulier à gauche* (*à droite*) l'algèbre A vu comme un A-module à gauche (à droite). De même on a un *module régulier à gauche* noté A_A. Les sous-modules de ${}_AA$ sont les *idéaux à gauche* de A, de même pour les *idéaux à droite*. Tout module régulier d'une algèbre A est un A-module libre de dimension 1, engendré par 1_A.

Définition 2.32. Un R-module M est de *type fini* s'il admet un système fini de générateurs. On dira aussi que M est *finiment engendré*.

Par exemple, si M est un groupe cyclique vu comme $\mathbb{Z}$-module, alors toute famille d'éléments de M est liée ($nx = 0$) et M n'admet pas de base. Cependant M est fini, ce qui en fait un module de type fini.

On appelle sous-module propre de M un sous-module de M qui n'est ni 0, ni M. Dans ce cas, on note $N \subsetneq M$. Par exemple un sous-module d'un $\Bbbk$-espace vectoriel B est un sous-espace vectoriel de V.

Soit N un sous R-module de M, le module quotient est le groupe quotient M/N (bien défini car N est un sous-groupe du groupe abélien M) muni du produit $r \cdot (m + N) = rm + N$ pour tout $r \in R$ et $m \in M$.

Définition 2.33.

1. Un R-module M est dit *simple* si M ne contient aucun sous-module propre.
2. Un R-module M est dit *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux sous-modules propres de M.
3. Un sous-module N de M est *maximal* si M/N est simple.
4. Un sous-module N de M est *superflu* si, pour tout sous-module H de M, la relation $N + H = M$ implique $H = M$.
5. Un sous-module N de M est *essentiel* si, pour tout sous-module H, la relation $H \cap N = \{0\}$ implique que $H = 0$.

Les définitions 1 et 3 sont duales l'une de l'autre. De même pour les définitions 4 et 5.

Lemme 2.34. *Soit S un R-module simple ; alors il existe un sous-module N de R tel que $S \simeq_R R/N$.*

Démonstration. Pour tout $s \in S$ non nul, Rs est un sous-module de S non vide, donc égal à S par simplicité de ce dernier. L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_R R & \longrightarrow & S \\ x & \longmapsto & xs \end{array} \right.$$

se factorise via son noyau $\ker \varphi = N$ ce qui donne $S \simeq_R R/N$. □

Lemme 2.35 (Lemme de Schur)**.** *Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre, M et N deux A-modules simples et $f : M \to N$ un morphisme de R-modules. Alors*

(i) si $M \simeq N$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda \,\mathrm{id}$,

(ii) sinon $f = 0$.

2.5.1 Produit tensoriel

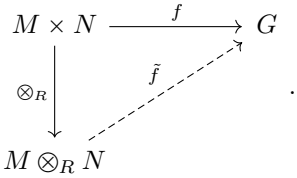
Nous introduisons la notion de produit tensoriel. Pour cette section, on s'inspire de la présentation de [Bou62]. Soit R un anneau non nécessairement commutatif. Pour un R-module à droite M et un R-module à gauche N, nous allons définir le groupe abélien $M \otimes_R N$ par quotient. Soit F le groupe abélien libre engendré par toutes les paires d'éléments (m, n) du produit cartésien $M \times N$, et F_0 le sous-groupe de F engendré par les relations

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) &= (m_1, n) + (m_2, n) \\ (m, n_1 + n_2) &= (m, n_1) + (m, n_2) \\ (m, n \cdot r) &= (r \cdot m, n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

pour tout $m_i \in M$, $n_i \in N$ et $r \in R$. Le produit tensoriel $M \otimes_R N$ est le groupe abélien quotient F/F_0. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons les éléments du produit tensoriel $m \otimes n$ sans préciser l'anneau R. Tout élément de $M \otimes_R N$ s'exprime comme une somme finie $\sum m_i \otimes n_i$ non nécessairement unique. Il est important de remarquer qu'il n'y *a priori* pas de structure de R-module sur $M \otimes_R N$. La construction présentée plus haut donne un morphisme bilinéaire $M \times N \to M \otimes N$.

Propriété universelle du produit tensoriel

Pour tout groupe abélien G et morphisme bilinéaire $M \times N \to G$, il existe un unique homomorphisme de groupe abélien $\tilde{f} : M \otimes_R N \to G$ tel que le diagramme suivant commute



Par construction, les éléments du produit tensoriel $m \otimes n$ vérifient

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,\\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2,\\ mr \otimes n &= m \otimes rn,\end{aligned}$$

pour tout $m_i \in M$, $n_i \in N$ et $r \in R$.

Remarque 2.36. Si l'anneau R est un corps commutatif $\Bbbk$ et M, N des $\Bbbk$-espaces vectoriels, alors $M \otimes_\Bbbk N$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension $(\dim M)(\dim N)$.

Exemple 2.37. Considérons $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}$-modules. On a

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0. \tag{2.8}$$

En effet pour tout $x \in \mathbb{Q}$ et $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on développe : $x \otimes k = \frac{1}{n}x \otimes nk = \frac{1}{n} \otimes 0 = 0$.

Proposition 2.38. *Soit M un R-module à gauche ; alors $R \otimes_R M \simeq M$ comme R-module à gauche.*

Démonstration. L'application $(r, m) \mapsto rm$ est bilinéaire de $R \times M$ dans M. Par la propriété universelle, elle se factorise donc en $\varphi : R \otimes_R M \to M$ avec $\varphi(r \otimes m) = rm$. L'application $\psi : M \to R \otimes_R M$ définie par $\psi(m) = 1 \otimes m$ vérifie la relation $\varphi\psi = \mathrm{id}_M$. Cependant $\psi\varphi$ est l'identité sur $R \otimes_R M$, ce qui implique que φ est un isomorphisme de R-module de $R \otimes_R M$ dans M. □

Théorème 2.39. *Soit M un R-module à droite tel que $M = M_1 \oplus M_2$ et N un R-module à gauche. Alors*

$$M \otimes_R N \simeq M_1 \otimes_R N + M_2 \otimes_R N$$

Théorème 2.40 (Associativité du produit tensoriel)**.** *Soient R et S deux anneaux, $L \in \mathbf{mod} - R$, $M \in S - \mathbf{mod} - R$ et $N \in S - \mathbf{mod}$. Alors $L \otimes_R M$ est un S-module à droite, $M \otimes_S N$ un R module à gauche et*

$$(L \otimes_R M) \otimes_S N \simeq L \otimes_R (M \otimes_S N).$$

Un autre théorème fondamental que nous allons être amenés à côtoyer est l'exactitude à droite du foncteur produit tensoriel. On peut par exemple consulter [Rot09, Théorème 2.63] pour une démonstration.

Théorème 2.41. *Soient R un anneau, M un R-module à droite et $A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ une suite exacte de R-modules à gauche ; alors la suite de groupes abéliens $M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B \longrightarrow 0$ est exacte.*

Adjonction $\otimes$ - Hom

Les foncteurs d'extension et de restriction des scalaires sont adjoints l'un de l'autre.

Théorème 2.42. *Soit R et S deux anneaux, L_R, ${}_RM_S$ et N_S des modules. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N)).$$

En d'autre termes, le foncteur $- \otimes_R M$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Hom}_S(M, -)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que les morphismes $\varphi : \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \to \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$ et $\psi : \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N)) \to \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$ définis ci-dessous sont linéaires et mutuellement inverses l'un de l'autre.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$, $m \in M$ et $l \in L$, on pose

$$\psi : f \longmapsto (l \mapsto (m \mapsto f(l \otimes m))).$$

Inversement pour $g \in \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$, $m \in M$ et $l \in L$ on définit

$$\varphi : g \longmapsto (l \otimes m \mapsto g(l)(m)).$$ □

Le fait que φ est l'inverse de ψ est clair.

2.5.2 Induction et restriction des modules

Extension des scalaires

Intéressons-nous de plus près à la structure des produits tensoriels de modules. Comme nous l'avons vu, ce sont des groupes abéliens. Il est cependant possible, sous certaines conditions, de munir un produit tensoriel d'une structure de module à l'instar de la proposition 2.38 ou de la remarque 2.36. Notre utilisation principale de produit scalaire concernera les foncteurs d'induction et de restriction (cf. section 4.2).

Il est clair que si M est un (R, S)-bimodule alors, pour tout R-module à droite N, $N \otimes_R M$ est un S-module à droite via l'action

$$(n \otimes m) \cdot s = n \otimes (m \cdot s).$$

Soient R et S deux anneaux avec $f : R \to S$ un homomorphisme et M un R-module à droite. En particulier S est un R-module à gauche *via* f et les actions de R et S sur S commutent. Le produit tensoriel $M \otimes_R S$ est bien défini et S agit à droite par

$$(m \otimes s) \cdot s' = (m \otimes ss').$$

On dit que le module $M \otimes_R S$ est obtenu par extension des scalaires du S-module M.

Soient M et N deux R-modules à droite, et $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$; il est facile de vérifier que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_M \otimes 1_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_N \otimes 1_S} \\ M \otimes_R S & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_S} & N \otimes_R S. \end{array}$$

Plus abstraitement on a défini un foncteur $- \otimes_R S : \mathbf{mod} - R \to \mathbf{mod} - S$.

Définition 2.43. Soit R un sous-anneau de S et M un R-module. Le foncteur $\mathrm{Ind} = \mathbf{mod}{-}R \to \mathbf{mod}{-}S$ tel que $\mathrm{Ind}_R^S(M) = M \otimes_R S$ est appelé foncteur d'*induction*.

Le foncteur d'induction permet, à partir d'un R-module, de construire un S module. Par exemple, tout S-module libre L est un module induit : soit J un sous-ensemble strict des indices de la base $(b_i)_{i \in I}$ de L et L_J le R-module libre de base $(b_j)_{j \in J}$. Alors $L = L_J \otimes L_J$

La construction duale est la *coinduction*: $\mathrm{Coind}_R^S(M) = \mathrm{Hom}_R(M, S)$.

Restriction des scalaires

Inversement, si M est un S-module à droite, alors on peut restreindre l'action de S à R à travers f: pour tout $r \in R$

$$m \cdot r = m \cdot f(r).$$

Définition 2.44. Le foncteur $\mathbf{mod} - S \to \mathbf{mod} - R$ est appelé foncteur de *restriction.*

Pour des rappels concernant les foncteurs adjoints, voir par exemple le très classique [ML98] pour un exposé très général ou [CR90] qui donne un cadre plus applicatif et plus proche du présent manuscrit.

Théorème 2.45 (Réciprocité de Frobenius)**.** *Le foncteur* Ind *est l'adjoint à gauche du foncteur* Res*.*

De la même façon, la coinduction est l'adjoint à droite du foncteur Res.

2.5.3 Séries de composition

Un sous-module d'un module libre n'est pas nécessairement libre. Par exemple la $\mathbb{C}$-algèbre des suites complexes $A = \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$ sur elle-même est un module libre de rang 1, mais le sous module des suites égales à 0 après un certain rang n'est pas de type fini. Si A est une algèbre de dimension finie, alors tous ses sous-modules seront de type fini. On peut être plus fin et considérer un cas plus général respecté pour les algèbres de dimensions finies, motivé par le théorème suivant.

Théorème 2.46 ([CR62, Theorem (11.14)])**.** *Soit M un R-module. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Tout sous-module de M est de type fini (en particulier M lui-même).

(ii) Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire.

(iii) Tout ensemble de sous-modules de M admet un élément maximal pour l'inclusion.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : soient $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-modules de M et notons $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Par hypothèse, N est un module de type fini de base $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Il existe alors n tel que pour tout $i \in [k]$, $x_i \in M_n$. On en conclut que pour tout $p > n$, $M_p = M_n = N$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : soit $\mathcal{P}$ un ensemble non vide de sous-modules de M. Soit $N_1 \in \mathcal{P}$, si N_1 n'est pas maximal, alors il existe $N_2 \in \mathcal{P}$ tel que $N_1 \subset N_2$. En itérant le processus, on construit une suite $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$ de sous-modules de M. Si $\mathcal{P}$ n'admet pas d'élément maximal pour l'inclusion, on a construit une suite croissante de sous-modules de M non stationnaire, ce qui contredit (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) : soit N un sous-module de M et $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-modules de type finie de N. L'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas vide car $\{0\} \in \mathcal{P}$. Par hypothèse, $\mathcal{P}$ contient un sous-module N_0 de N maximal pour l'inclusion. Si $N_0 \neq N$, alors il existe $x \in N \backslash N_0$ et le module engendré par x et N_0 est un majorant strict de N_0 de type fini ainsi qu'un sous-module de N, ce qui contredit (i). □

Définition 2.47 (Conditions de chaîne)**.** Soit M un R-module. Les sous-modules de M satisfont la

(i) *Condition de Chaîne Décroissante* (D.C.C) si toute chaîne de sous-modules

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$$

est stationnaire à partir d'un certain rang.

(ii) *Condition de Chaîne Croissante* (A.C.C) si toute chaîne de sous-modules

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$$

est stationnaire à partir d'un certain rang.

Si les sous-modules de M satisfont la D.C.C, alors M est un module *artinien*. Si les sous-modules de M satisfont la A.C.C, alors M est un module *noethérien*. Un anneau R est *noethérien* (à gauche) si le module régulier (à gauche) ${}_RR$ est noethérien.

Proposition 2.48. *Soit M un R-module artinien. Si M est finiment engendré, alors M est également noethérien.*

Proposition 2.49. *Soit R un anneau noethérien et M un R-module. Si M est finiment engendré, alors M est noethérien.*

Théorème 2.50. *Si M est un module artinien, alors M peut s'écrire comme somme directe finie de modules indécomposables.*

De plus, les modules intervenant dans la décomposition sont uniques à isomorphisme près.

Théorème 2.51 (Krull-Schmidt)**.** *Soit M un R-module satisfaisant les deux conditions de chaînes 2.47 et soient*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_h = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k,$$

deux décompositions de M en somme directe de sous-modules indécomposables. Alors $h = k$ et il existe une permutation $\{j_1, \cdots, j_k\}$ de $\{1, \cdots, k\}$ telle que

$$M_i \simeq N_{j_i}.$$

Démonstration. Voir par exemple [CR62, Theorem (14.5)]. □

Définition 2.52. Une chaîne décroissante

$$M = M_0 \supset M_2 \supset \dots M_k = (0)$$

de sous-modules de M est une *série de composition* si tous les modules quotients M_i/M_{i+1} sont irréductibles.

Les quotients M_i/M_{i+1} sont les *facteurs*. Deux séries de composition sont équivalentes si elles ont les mêmes facteurs. Le nombre de facteurs d'une série de composition est sa *longueur*, en particulier deux séries de compositions équivalentes sont de même longueur.

Théorème 2.53. *Soit M un R-module, M admet une série de composition si et seulement si M est à la fois noethérien et artinien.*

Démonstration. Voir par exemple [CR62, Theorem (13.4)]. □

De plus, si existence, toutes les séries de compositions sont équivalentes.

Théorème 2.54 (Jordan-Hölder [CR62, Theorem (13.7)])**.** *Soit M un R-module admettant une série de composition. Alors toutes les séries de compositions de M sont équivalentes.*

Un corollaire important du théorème de Jordan-Hölder affirme que tous les R-modules simples sont contenus dans la représentation régulière.

Corollaire 2.55. *Soit R tel que le module régulier à gauche ${}_RR$ (resp. à droite R_R admet une série de composition. Alors tout R-module simple à gauche (resp. à droite) apparaît dans la série de composition du module régulier ${}_RR$ (resp. R_R).*

Démonstration. Soit S un R-module simple. Par le lemme 2.34, il existe un sous-module N de ${}_RR$ tel que $S \simeq_R R/N$. La série de composition commençant par ${}_RR \to N$ est équivalente à toutes les autres par le théorème 2.54. Ainsi, toute série de composition contient un quotient isomorphe à S. □

Dans ce manuscrit nous serons en général dans le cadre des algèbres de dimension finie, qui vérifient les deux conditions de chaînes. Les $\Bbbk$-algèbres de dimension finie sont à la fois noethériennes et artiniennes et admettent donc toujours une série de composition, unique à équivalence près.

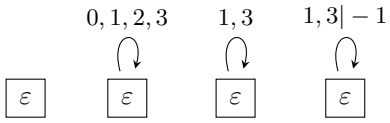


FIG. 2.5.2: Les quatre $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-simples modules.

Exemple 2.56. Considérons la $\mathbb{Q}$-algèbre du monoïde commutatif $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \times, 1)$ comme un module M sur lui-même que l'on peut représenter par la figure 2.5.1. Nous obtenons la série de composition suivante.

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0, 2, 1+3\rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow 0.$$

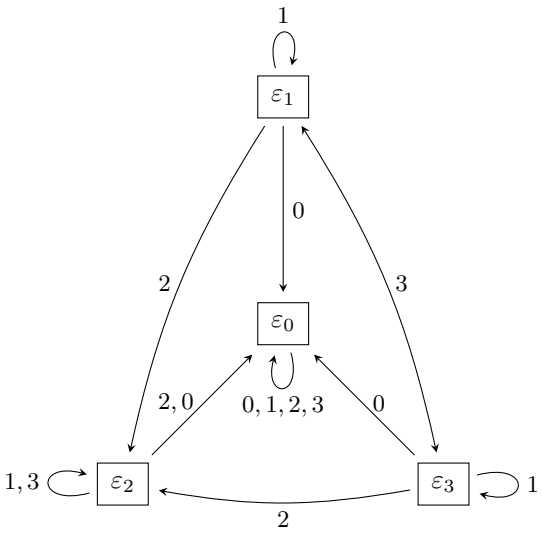


FIG. 2.5.1: Le $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-module régulier.

Nous en déduisons les quatre $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-modules simples non isomorphes représentés sur la figure 2.5.2.

2.5.4 Produits tensoriels d'algèbres

Soient A et B deux $\Bbbk$-algèbres ; on peut munir le produit tensoriel $A \otimes B$ d'une structure d'algèbre avec le produit :

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

Lemme 2.57 ([EGH+11, Theorem 3.10.2])**.** *Soient A et B deux $\Bbbk$-algèbres de dimension finie, S un A-module simple et T un B-module simple. Alors on a*

(i) le $(A \otimes B)$-module $S \otimes T$ est simple,

(ii) tout module simple de $A \otimes B$ s'écrit sous la forme $S \otimes T$ avec S un A-module simple et T un B-module simple.

2.5.5 Décomposition par blocs

Définition 2.58. Un idéal I d'un anneau R est *nilpotent* s'il existe n tel que $I^n = 0$, c'est-à-dire que, pour tout $a_1, a_2, \dots a_n \in R$, on a $a_1 a_2 \dots a_n = 0$.

En particulier, on notera qu'un idéal nilpotent ne contient aucun élément idempotent. Réciproquement nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.59. *Tout idéal non-nilpotent I d'un anneau artinien R contient un élément idempotent.*

Démonstration. Considérons la famille des idéaux non-nilpotents $\{I_k\}$ contenus dans I. Cette famille est non vide (elle contient I) et contient donc un plus petit idéal I_1. En particulier tout idéal propre de I_1 est nilpotent. Comme I_1^2 est un idéal non-nilpotent de I, on a $I_1^2 = I_1$.

Soit maintenant $\{J_k\}$ l'ensemble des idéaux contenus dans I_1 tels que $I_1 J_k \neq 0$. Cet ensemble n'est pas vide (il contient I_1) et admet alors un idéal minimal J_1. Par la construction, il existe $x \in J_1$ tel que $I_1 x \neq 0$. En particulier $I_1 x \subset J_1$ et on en déduit par minimalité que $I_1 x = J_1$. Il existe alors $a \in I_1$ tel que $x = ax = a^2 x$ soit $(a^2 - a)x = 0$.

Si $a^2 - a = 0$ alors le théorème est prouvé, sinon nous allons construire un idempotent par récurrence.

Posons

$$N = \{u \in I_1 : ux = 0\} \subset I_1$$

et $n_1 = a^2 - a$. Encore une fois par minimalité de I_1, N est un idéal nilpotent car idéal propre de I_1. Soit

$$a_1 = a + n_1 - 2an_1 \in I_1,$$

et remarquons que a, a_1 et n_1 commutent. Par contraposée, a_1 n'est pas nilpotent, sinon $a = a_1 - n_1 + 2an_1$ le serait aussi. L'élément

$$n_2 = a_1^2 - a_1 = 4n_1^3 - 3n_1^2$$

est dans N, commute avec a_1 et est un facteur de n_1^2. Par récurrence nous construisons ainsi une suite d'éléments $a_1, a_2, \cdots$ contenus dans I_1 tel que pour tout i, $a_i^2 - a_i \in N$ soit un multiple de $n_1^{2^i}$. Comme n_1 est nilpotent, il existe un i tel que $a_i^2 - a_i = 0$ et nous avons ainsi construit un idempotent de I_1. □

La preuve est intéressante en ce qu'elle construit algorithmiquement un idempotent de I à partir d'un idempotent du quotient de R par un idéal nilpotent : on a remonté un idempotent du quotient à R.

Soit A une $\Bbbk$-algèbre de dimension finie sur un corps de caractéristique 0. Soient $e \in A$ un idempotent et $f = 1 - e$ son idempotent complémentaire. On peut décomposer l'algèbre A des trois façons suivantes :

$$\begin{aligned} A =& eA \oplus fA, \\ A =& Ae \oplus Af, \\ A =& eAe \oplus eAf \oplus fAe \oplus fAf. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Définition 2.60. Un idempotent e de A est dit *central* si $e \in \mathrm{Z}(A)$. Deux idempotents e et f sont dits *orthogonaux* si $ef = fe = 0$.

Par exemple, dans toute algèbre A, les idempotents 1 et 0 sont orthogonaux. La somme $e + f$ de deux idempotents orthogonaux est un idempotent, qui est central si e et f le sont. Plus généralement, si nous pouvons exprimer l'identité de l'algèbre comme une somme d'idempotents orthogonaux,

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, \qquad e_i e_j = \delta_{i,j} e_i \tag{2.10}$$

alors nous pouvons décomposer A de la manière suivante.

Définition 2.61 (Décomposition de Peirce)**.** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une décomposition de l'identité d'une algèbre A en idempotents orthogonaux ; on a alors :

$$A = \bigoplus_{i,j \in I} e_i A\, e_j.$$

Exemple 2.62. Dans l'algèbre des matrices $A = M_n(\Bbbk)$, l'ensemble des matrices élémentaires diagonales $\mathbf{e}_{i,i}$ forme un système d'idempotents orthogonaux. La décomposition de Peirce de A selon la famille d'idempotents précédente est $A = \bigoplus_{i,j\in[n]} \mathbf{e}_i A \mathbf{e}_j$. Chacune des composantes $\mathbf{e}_i A \mathbf{e}_j$ correspond à un coefficient $M_n(\Bbbk)$.

Définition 2.63. Une idempotent $e \neq 0$ est dit (*centralement*) *primitif* s'il n'existe pas de décomposition $e = c_1 + c_2$ en idempotents (centraux) orthogonaux non nuls.

Une décomposition de l'identité de A en une famille d'idempotents centralements primitifs $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ donne une décomposition $A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$, où chaque Ae_i est un idéal bilatère de A. On appelle *bloc* un terme de la décomposition précédente.

2.5.6 Algèbres semi-simples

On remarque sur l'exemple 2.56 que l'élément $r = 2 - 0$ annihile tous les modules, au sens où, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $r\alpha = 0$. De façon équivalente, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas somme directe de sous-modules simples. L'existence de tels éléments complique l'étude du module. Nous allons tout d'abord caractériser ces éléments (radical) avant d'étudier les modules qui ne contiennent pas cette difficulté, appelés modules semi-simples.

Dans toute la suite, A est une algèbre de dimension finie sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique 0.

Définition 2.64. Un A-module M est *semi-simple* s'il est somme directe de A-modules simples.

Définition 2.65. Une algèbre A est *semi-simple* si ${}_AA$ est un A-module semi-simple.

Théorème 2.66 (Wedderburn)**.** *Soit A une $\Bbbk$-algèbre semi-simple de dimension finie ; alors A est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices $M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$, où chaque D_i est un sur-corps de $\Bbbk$ (pas nécessairement commutatif).*

On notera que d'après le théorème précédent, la semi-simplicité aurait pu être définie de manière équivalente sur la représentation régulière à droite.

Radical d'un module

Soit A une $\Bbbk$ algèbre de dimensions finie et M un A-module. On appelle *radical* (de Jacobson) de M et on note $\operatorname{Rad} M$ l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M.

Par exemple tout A-module simple S vérifie $\operatorname{Rad} S = 0$ car S n'a aucun sous-module propre. Si A est une algèbre de dimension finie, on a toujours $M \neq \operatorname{Rad} M$.

Théorème 2.67. *Soit $(M_i)_i$ une famille de A-modules, alors*

$$\operatorname{Rad}\left(\bigoplus_i M_i\right) = \bigoplus_i \operatorname{Rad} M_i.$$

Comme conséquence, le radical d'un module semi-simple est nul d'après le théorème précédent appliqué au théorème de Wedderburn. La réciproque est vraie pour les modules finiment engendrés (ou plus généralement artiniens).

Proposition 2.68. *Soit M un A-module finiment engendré avec A une $\Bbbk$-algèbre de dimension finie ; alors M est semi-simple si et seulement si* $\operatorname{Rad} M = 0$.

En particulier le quotient $M/\operatorname{Rad} M$ est semi-simple.

Radical d'une algèbre

Définition 2.69. Soit A une algèbre de dimension finie, on définit le *radical* de A comme le radical du A-module A_A.

Là encore, l'asymétrie est virtuelle : le radical peut se définir de manière équivalente à droite ou à gauche. On peut même donner une caractérisation du radical en terme d'éléments nilpotents.

Proposition 2.70. *Le radical d'une algèbre de dimension finie A est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A.*

2.5.7 Modules projectifs

Définition 2.71. Un R-module à gauche P est dit projectif si pour tout morphisme de R-modules surjectif $f : N \to M$ et pour tout morphisme $g : P \to M$, alors il existe $h : P \to N$ un relèvement de g le long de f tel que $g = fh$. C'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & \overset{\exists h}{\swarrow} & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{2.11}$$

Proposition 2.72. *Tout module libre est projectif.*

Démonstration. Soit F un module libre de base $(x_i)_{i\in I}$. Par surjectivité de f, on choisit une famille d'antécédents $(n_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $f(n_i) = g(x_i)$. La propriété universelle caractérisant les modules libres assure alors l'existence d'un morphisme $h : P \to N$ avec $h(x_i) = n_i$. □

Cependant, un tel relèvement n'existe pas en général. Par exemple fixons $n > 1$ et les trois modules $P = M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ sur l'anneau $R = \mathbb{Z}$. Si on considère l'unique morphisme surjectif $f : N \to M$, alors le morphisme identité ne peut se relever le long de f en un morphisme $h : P \to N$. Ainsi, les groupes cycliques ne sont pas des $\mathbb{Z}$-modules projectifs.

Il existe d'autres définitions équivalentes des modules projectifs.

(i) Un R-module P est projectif si et seulement si toute suite exacte de R-module

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

est scindée.

(ii) Un R-module P est projectif si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}(P, -) : R - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$ de la catégorie des R-modules dans la catégorie des groupes abéliens est exact.

(iii) (Critère d'Eilenberg, [Lam99, Corollary 2.7]) Un R-module P est projectif si et seulement si P est un facteur direct dans un module libre, *i.e.* il existe Q et F deux R-modules tel que F soit libre et $P \oplus Q = F$.

Proposition 2.73. *Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de R-modules. Le module $\bigoplus_{i\in I} P_i$ est projectif si et seulement si tous les facteurs P_i sont projectifs.*

Proposition 2.74. *Soit e un idempotent d'un anneau R, alors Re est un R-module projectif à gauche.*

Démonstration. Le R-module (libre) R se factorise en la somme directe $Re \oplus R(1-e)$ (voir section 2.5.5). La projectivité de Re découle immédiatement de la définition (iii). □

Enveloppe projective

Un morphisme $f : M \twoheadrightarrow M'$ est *essentiel* si $\ker f$ est un sous-module essentiel de M. En d'autre terme, si pour tout sous-module M'' de M on a $f(M'') \neq M'$. Par exemple, $\mathrm{id} : M \to M$ est un morphisme essentiel.

On peut voir l'enveloppe projective d'un module M comme la meilleure approximation de M par un module projectif.

Définition 2.75. Soit M un R-module. L'*enveloppe projective* de M est la donnée d'un R-module projectif P et d'un morphisme essentiel $\pi : P \twoheadrightarrow M$

Proposition 2.76. *Soit P un R-module projectif, P est l'enveloppe projective du plus grand quotient semi-simple $P/\operatorname{Rad} P$.*

Démonstration. Soit N un sous-module de P qui s'envoie par la projection canonique sur $P/\operatorname{Rad} P$. Alors N s'envoie surjectivement sur tous les sous-modules simples de P et ne peut donc être contenu dans un sous-module maximal de P: contradiction. □

En général l'existence d'une enveloppe projective pour tout R-module n'est pas assurée (les anneaux pour lesquels cette propriété est vraie sont appelés *anneaux parfaits*). Ce sera cependant le cas pour les modules que nous considérerons dans ce manuscrit.

Théorème 2.77. *(i) Soit M un module de type fini sur un anneau R satisfaisant les conditions de chaîne. Alors M admet une enveloppe projective.*

(ii) Si P_i est l'enveloppe projective de M_i, alors $P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ est l'enveloppe projective de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Corollaire 2.78. *Soit A une algèbre de dimension finie. Alors A est somme directe de modules projectifs indécomposables (P_i). De plus, chaque P_i est l'enveloppe projective d'un module simple (S_i).*

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 2.77 et de la proposition 2.76. □

Ce dernier corollaire permet de mettre en avant une bijection explicite entre les modules simples et les modules projectifs indécomposables d'un module M de type fini. Si S est un module simple, alors l'enveloppe projective P de S est un module projectif indécomposable. Réciproquement, si P est un module projectif indécomposable, alors le quotient $P/\operatorname{Rad} P$ est semi-simple.

2.6 Groupes de Grothendieck

Dans cette section, nous introduisons la notion de *groupe de Grothendieck* que l'on peut voir comme la façon la plus universelle de construire des groupes abéliens à partir de monoïdes commutatifs en ajoutant artificiellement des inverses. J'ai acquis l'essentiel de mes connaissances sur les groupes de Grothendieck en lisant [CR90].

Soit A une algèbre associative de dimension finie et $\mathfrak{A}$ une catégorie de A-modules finiment engendrés. Le groupe de Grothendieck $\mathbf{G}(\mathfrak{A})$ est le groupe abélien défini par générateurs et relations :

générateurs	$[M]$ pour chaque classe de modules isomorphes de $\mathfrak{A}$,
relations	$[M] = [L] + [N]$ pour chaque suite exacte $0 \to L \to M \to N \to 0$ de $\mathfrak{A}$.

Définition 2.79. - Le groupe de Grothendieck dans la catégorie des A-modules simples finiment engendrés est noté $G_0(A)$.

- Le groupe de Grothendieck dans la catégorie des A-modules projectifs finiment engendrés est noté $K_0(A)$.

Plus combinatoirement, $G_0(A)$ est le groupe libre engendré par les $[S_i]$ où $(S_i)_{i\in I}$ est la famille de tous les A-modules simples non isomorphes. Notons que comme A est de dimension finie, alors I est fini par le théorème de Jordan-Hölder.

Proposition 2.80. *Soit M un A-module finiment engendré, alors*

$$[M] = \sum_{i \in I} c_i [S_i]$$

où chaque c_i est la multiplicité du module simple S_i dans la série de composition de M.

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du théorème de Jordan-Hölder (2.54) et de la définition 2.79. □

Le corollaire 2.78 assure que de la même façon, le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ est le groupe libre engendré par une famille complète de modules projectifs (P_i).

Définition 2.81 (Caractère d'un module)**.** On appelle *caractère* d'un A-module M son image dans le groupe de Grothendieck $G_0(A)$.

Dualité K_0/G_0

Les deux groupes de Grothendieck K_0 et G_0 sont duaux l'un de l'autre.

Lemme 2.82 (Lemme de Schur)**.** *Soit A une algèbre sur un corps algébriquement clos et $(S_i)_{i \in I}$ une famille complète de A-modules simples. Alors*

$$\dim \mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Considérons un homomorphisme de A-module $\varphi : S_i \to S_j$. Le noyau de φ est un sous-module de S_i donc est soit 0, soit S_i. Comme A est une algèbre sur $\mathbb{K}$ algébriquement clos, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi - \lambda \,\mathrm{id}$ ait un noyau non réduit à $\{0\}$. Par la remarque précédente, on a alors $\varphi = \lambda \,\mathrm{id}$. □

Théorème 2.83 ([CR90, Proposition §18.8])**.** *Soit A une algèbre sur un corps algébriquement clos et soient (P_i) et (S_i) respectivement une famille complète de A-modules projectifs indécomposables et la famille de A-modules simples associée. Le crochet suivant défini une forme bilinéaire*

$$\langle P_i, S_j \rangle = \dim \mathrm{Hom}_A(P_i, S_j) \tag{2.12}$$

où $\langle P_i, S_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Morphisme de Cartan

Soit A une $\Bbbk$-algèbre associative de dimension finie, le morphisme $\mathcal{C} : K_0(A) \to G_0(A)$ envoie la classe d'un A-module projectif P sur la somme de ses sous-modules simples par

$$\mathcal{C}([P]) = \sum_{[S] \in G_0(A)} [P : S]\,[S] \tag{2.13}$$

où $[P : S]$ est la multiplicité de S dans la série de composition de P. Comme A est de dimension finie, $K_0(A)$ et $G_0(A)$ sont des espaces vectoriels sur $\Bbbk$, et $\mathcal{C}$ est alors une application linéaire. On appelle $\mathcal{C}$ le *morphisme de Cartan* associé à la $\Bbbk$-algèbre A défini en 2.13.

Il existe beaucoup de définitions équivalentes du morphisme de Cartan, voir par exemple [Thi12] qui permet notamment un calcul efficace.

Proposition 2.84. *Une algèbre A est semi-simple si et seulement si le morphisme de Cartan est l'identité.*

2.7 Algèbres de Hopf

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{A}$ désigne un alphabet ordonné infini.

Définition 2.85 (Algèbre)**.** Une *algèbre* A est un $\Bbbk$-espace vectoriel muni d'une *multiplication* $\nabla : A \otimes A \to A$ et d'une *unité* $\iota : \Bbbk \to A$ tels que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes A & \xrightarrow{\nabla} & A & \xleftarrow{\nabla} & A\otimes A \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\iota}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \iota\otimes\mathrm{id}} \\ A\otimes \Bbbk & \longleftarrow & A & \longrightarrow & A\otimes\Bbbk \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{\nabla\otimes\mathrm{id}} & A\otimes A \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\nabla}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} \\ A\otimes A & \xrightarrow[\nabla]{} & A \end{array} \tag{2.14}$$

Pour V et W deux $\Bbbk$-espaces vectoriels, on note $\sigma : V \otimes W \to W \otimes V$ la fonction de transposition $\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$. Pour deux algèbres A et A' le $\Bbbk$-espace vectoriel $A \otimes A'$ est muni d'une structure d'algèbre avec comme produit

$$\nabla((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2,$$

c'est à dire en posant

$$\begin{array}{rcl} \nabla_{A\otimes A'} & = & (\nabla_A \otimes \nabla_{A'}) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id}), \\ \iota_{A\otimes A'} & = & \iota_A \otimes \iota_{A'}\,. \end{array}$$

Définition 2.86 (Cogèbre)**.** Une *cogèbre* C est un $\Bbbk$-espace vectoriel muni d'une *comultiplication* $\Delta : C \to C \otimes C$ et d'une *counité* $\iota : C \to \Bbbk$ telles que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccccc} C\otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C & \xrightarrow{\Delta} & C\otimes C \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes\mathrm{id}} \\ C\otimes \Bbbk & \longrightarrow & C & \longleftarrow & C\otimes\Bbbk \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C\otimes C\otimes C & \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} & C\otimes C \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\Delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta} \\ C\otimes C & \xleftarrow[\Delta]{} & C \end{array} \tag{2.15}$$

La structure de cogèbre est duale à celle d'algèbre. Dans la littérature, une cogèbre est parfois appelée une *coalgèbre*. Nous avons ici choisi le vocabulaire de Bourbaki (voir [Bou70, III.138]). De la même façon que pour les algèbres, le produit tensoriel de deux cogèbres C et C' est naturellement muni d'une structure de cogèbre avec

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{C\otimes C'} & = & (\mathrm{id} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_{C'}), \\ \varepsilon_{C\otimes C'}(c \otimes c') & = & \varepsilon_C(c)\, \varepsilon_{C'}(c')\,. \end{array}$$

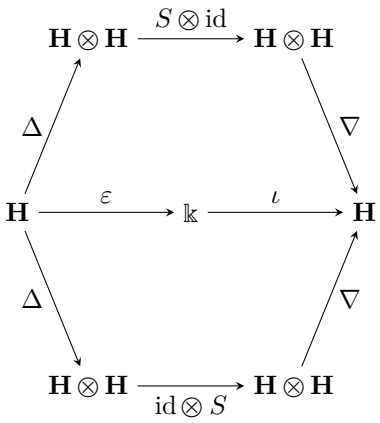
Définition 2.87 (Bigèbre)**.** Une *bigèbre* B est un quintuplet $(B, \nabla, \Delta, \iota, \varepsilon)$ tel que (B, ∇, ι) est une $\Bbbk$-algèbre et (B, Δ, ε) une $\Bbbk$-cogèbre telle que

(i) Δ et ε sont des morphismes de cogèbres,

(ii) ∇ et ι sont des morphismes d'algèbres.

Les conditions (i) et (ii) sont appelées *conditions de compatibilités*.

Définition 2.88 (Algèbre de Hopf)**.** Une *algèbre de Hopf* $\mathbf{H}$ sur un corps $\Bbbk$ est une bialgèbre d'unité et counité ι et ε munie d'une application $\Bbbk$-linéaire $S : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ appelée *antipode* telle que le diagramme suivant commute.



(2.16)

Un *morphisme d'algèbres de Hopf* φ est un morphisme d'algèbres et de cogèbres qui commute avec l'antipode $\varphi \circ S = S \circ \varphi$. Un idéal de $\mathbf{H}$ est un idéal bilatère I tel que

$$\Delta(I) \subset I \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes I, \quad \varepsilon(I) = 0, \quad S(I) \subset I.$$

On a alors une notion de *quotient* d'algèbres de Hopf.

Une représentation d'une algèbre de Hopf $\mathbf{H}$ est une représentation de son algèbre associative sous-jacente. Si V et W sont deux représentations d'une algèbre de Hopf $\mathbf{H}$ alors le produit tensoriel $V \otimes W$ est encore une représentation de $\mathbf{H}$ via l'action

$$h \cdot (u \otimes v) = \Delta(h) \cdot (u \otimes v).$$

Soit V une représentation de $\mathbf{H}$ et V^* l'espace dual des fonctions $f : V \to \Bbbk$, alors V^* est encore une représentation de $\mathbf{H}$:

$$(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v). \tag{2.17}$$

Remarque 2.89. L'antipode provient naturellement de la volonté de munir V^* d'une structure de $\mathbf{H}$-module. En effet, soit $f \in V^*$ et $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$. Nous avons

$$\begin{aligned} h_1 \cdot (h_2 \cdot f) &= h_1 \cdot (v \mapsto f(h_2 \cdot v)), \\ &= v \mapsto f(h_2 \cdot h_1 \cdot v). \end{aligned}$$

De la définition d'un $\mathbf{H}$-module et de la formule (2.17) on en déduit $S(h_1 h_2) = S(h_2)S(h_1)$. En supposant (2.17) on a montré que l'antipode S est un *anti-homomorphisme* de $\mathbf{H}$.

Proposition 2.90. *Soit* $\mathbf{H}$ *une algèbre de Hopf et* U*,* V *et* W *des représentations de* $\mathbf{H}$*, alors nous avons les deux morphismes linéaires*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(U, V \otimes W) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V^* \otimes U, W), \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(U \otimes V, W) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(U, W \otimes V^*). \end{aligned}$$

2.7.1 Exemples classiques d'algèbres de Hopf

Algèbres de groupes

Soit G un groupe et $\mathbf{H} = \Bbbk G$ l'algèbre de G sur le corps $\Bbbk$. On définit

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}$$

pour tout $g \in G$. Alors $\mathbf{H}$ est une algèbre de Hopf cocommutative et commutative seulement si G l'est.

Par analogie avec la construction précédente, on appelle élément de *type groupe* un élément $x \in \mathbf{H}$ qui vérifie $\Delta(x) = x \otimes x$. Notons $GLE(\mathbf{H}) = \{x \in \mathbf{H} : \Delta(x) = x \otimes x\}$ l'ensemble des éléments de type groupe de $\mathbf{H}$. L'axiome d'identité de cogèbre (2.15) assure que $\varepsilon(x) = 1$. Comme Δ est un morphisme d'algèbre on tire $\Delta(xy) = \nabla(\Delta(x) \otimes \Delta(y)) = xy \otimes xy$ munissant l'ensemble des éléments de type groupe d'une structure de monoïde (nous n'avons utilisé que la structure de bigèbre). De (2.16) on en déduit que $S(x)x = xS(x) = 1$ et x est inversible : l'ensemble GLE est un groupe.

Algèbres enveloppantes

L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf en posant

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$ étendu linéairement par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. L'algèbre de Hopf $U(\mathfrak{g})$ est commutative si et seulement si $\mathfrak{g}$ l'est.

Dans une algèbre de Hopf $\mathbf{H}$, les éléments x tels que $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ sont appelés *primitifs*. De la définition d'antipode (2.16) on montre que x est primitif si et seulement si $S(x) = -x$. L'ensemble des éléments primitifs d'une bigèbre forme une algèbre de Lie. Sur une algèbre de Hopf cocommutative graduée $\mathbf{H} = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ avec $\dim A_n < +\infty$ pour tout n, le théorème de Milnor-Moore établit que $\mathbf{H}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie graduée de ses éléments primitifs.

2.7.2 Fonctions symétriques

Les fonctions symétriques constituent un exemple fondamental d'algèbre de Hopf ainsi que de catégorification (voir section 2.5.7). Comme références générales sur les fonctions symétriques, on réfère a [Mac95] et [Sta97, chapitre 7]. Les algèbres de Hopf combinatoires sont particulièrement bien abordées dans [GR14].

Définition

Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ un ensemble infini de variable (ou *alphabet*).

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Soit λ une partition de longueur $m \leqslant n$, le *monôme* associé à λ est le polynôme $m_\lambda(x_1, \dots x_n) = \sum_\alpha x^\alpha$ où la somme se fait sur toutes les permutations α de $(\lambda_1, \dots \lambda_m)$. Le degré de m_λ est $|\lambda| = \sum_i |\lambda_i|$.

Exemple 2.91.

$$\begin{aligned} m_{(111)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ m_{(21)}(x_1, x_2) &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \\ m_{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \end{aligned}$$

Soit P un polynôme à n variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation sur les variables de P. Les polynômes symétriques forment un anneau gradué par le degré

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

Chaque Λ_n est de dimension infinie.

Théorème 2.92 (Théorème fondamental des polynômes symétriques)**.** *L'ensemble des monômes $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ pour toute partition λ de longueur inférieure à n forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n.*

L'anneau des fonctions symétriques est une limite directe des Λ_n quand n tend vers $+\infty$. Afin de le définir proprement, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.93. *L'application $\varphi_n : \Lambda_n \to \Lambda_{n+1}$ qui envoie $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ sur $m_\lambda(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est un morphisme injectif d'anneaux gradués.*

L'anneau des *fonctions symétriques* est la colimite[3] $\Lambda(\mathbf{x}) = \varinjlim \Lambda_n$ relativement aux morphismes de la proposition 2.93. On peut définir de la même façon les fonctions symétriques sur n'importe quel anneau commutatif R, ou en posant $\Lambda_R = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Remarque 2.94. Les « fonctions » symétriques sont des séries formelles.

Exemple 2.95. Dans Λ on a

$$\begin{aligned} m_{(111)}(\mathbf{x}) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + \cdots \\ m_{(21)}(\mathbf{x}) &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + \cdots \\ m_{(3)}(\mathbf{x}) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + \cdots \end{aligned}$$

Bases

On peut définir trois bases naturelles de Λ à partir des fonctions monomiales.

Définition 2.96. Pour tout $n \geqslant 1$ on définit les *fonctions symétriques élémentaires*, les *fonctions symétriques puissances* et les *fonctions symétriques homogènes* par

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} = m_{(1^n)}, \\ p_n &= \sum_{i\geqslant 1} x_i^n = m_{(n)}, \\ h_n &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}(n)} m_\lambda. \end{aligned}$$

Par convention on pose $e_0 = h_0 = p_0 = 1$.

Des définitions précédentes on peut obtenir les séries génératrices

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{k\geqslant 0} e_k t^k = \prod_{i\geqslant 1}(1 + x_i t), \\ H(t) &= \sum_{k\geqslant 0} h_k t^k = \prod_{i\geqslant 1}(1 - x_i t)^{-1}, \\ P(t) &= \sum_{k\geqslant 0} p_k t^k = \frac{d}{dt}\log\prod_{i\geqslant 1}(1 - x_i t)^{-1} = H'(t)/H(t). \end{aligned}$$

Orthogonalité

Le produit $\prod_{i,j}(1 - x_iy_j)^{-1}$ se développe de trois façons :

$$\begin{aligned} \prod_{i,j}(1 - x_iy_j)^{-1} &= \prod_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)p_\lambda(y) \\ &= \prod_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) \\ &= \prod_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y) \end{aligned}$$

avec $z_\lambda = \prod_{i\geqslant 1} i^{m_i} \cdot m_i!$ où $m_i = m_i(\lambda)$ est le nombre de parts de λ de longueur i. On définit alors un produit scalaire sur Λ par le crochet $\mathbb{Z}$-linéaire $\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$. De même, ce produit scalaire s'exprime aussi sur la base des p sur laquelle il est $\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1}$.

3. dans la catégorie des anneaux gradués

Structure d'algèbre de Hopf

La comultiplication dans chacune des trois bases est :

$$\begin{aligned}\Delta(p_n) &= 1 \otimes p_n + p_n \otimes 1\\ \Delta(e_n) &= \sum_{i+j=n} e_i \otimes e_j\\ \Delta(h_n) &= \sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j\\ \Delta(s_\lambda) &= \sum_{\mu\subseteq\lambda} s_\mu \otimes s_{\lambda/\mu}\end{aligned}$$

Et les antipodes qui permettent de finir la construction d'algèbre de Hopf sont :

$$\begin{aligned}S(p_n) &= -p_n,\\ S(e_n) &= (-1)^n h_n,\\ S(h_n) &= (-1)^n e_n.\end{aligned}$$

2.7.3 Fonctions quasi-symétriques libres

L'algèbre libre des fonctions quasi-symétriques notée **FQSym** (de l'anglais *Free Quasi Symmetric Functions*) se définit de façon combinatoire à partir des permutations. C'est une algèbre fondamentale de la théorie des algèbres de Hopf combinatoires.

Définition 2.97. Le *quasi-ruban* indexé par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le polynôme non-commutatif

$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{\mathrm{Std}(w)=\sigma^{-1}} w \qquad \in \mathbb{Z}\langle\mathcal{A}\rangle.$$

On a par exemple

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= a + b + c + \cdots\\ \mathbf{F}_{21} &= ba + ca + cb + da + db + \cdots\\ \mathbf{F}_{312} &= baa + caa + cab + daa + dab + \ldots\end{aligned}$$

Proposition 2.98. *Soient $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ et $\beta \in \mathfrak{S}_n$, alors*

$$\mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\beta = \sum_{\sigma\in\alpha\,\overline{\sqcup}\,\beta} \mathbf{F}_\sigma.$$

Démonstration. Voir par exemple [DHT02]. □

Exemple 2.99.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21},\\ \mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{123} + \mathbf{F}_{132} + \mathbf{F}_{312},\\ \mathbf{F}_{312}\mathbf{F}_{21} &= \mathbf{F}_{31254} + \mathbf{F}_{31524} + \mathbf{F}_{31542} + \mathbf{F}_{35124} + \mathbf{F}_{35142} + \mathbf{F}_{35412} + \mathbf{F}_{53124} + \mathbf{F}_{53142} + \mathbf{F}_{53412} + \mathbf{F}_{54312}.\end{aligned}$$

Définition 2.100. L'algèbre

$$\mathbf{FQSym} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigoplus_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{F}_\sigma$$

est appelée algèbre libre des fonctions quasi-symétriques.

On peut définir un coproduit et ainsi munir **FQSym** d'une structure de bigèbre.

Proposition 2.101. *L'algèbre* **FQSym** *est une bigèbre pour le coproduit* Δ *définie par*

$$\Delta(\mathbf{F}_\sigma) = \sum_{u\cdot v=\sigma} \mathbf{F}_{\mathrm{Std}(u)} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{Std}(v)}.$$

L'algèbre de Hopf **FQSym** est auto-duale via le crochet

$$\langle \mathbf{F}_\sigma, \mathbf{F}_\tau \rangle = \delta_{\sigma^{-1},\tau}.$$

On note $\mathbf{G}_\sigma = \mathbf{F}_{\sigma^{-1}}$ la base adjointe. En particulier on a

$$\mathbf{G}_\sigma = \sum_{\mathrm{Std}(w)=\sigma} w \in \mathbb{Z}\langle\mathcal{A}\rangle.$$

On retrouve, de la définition précédente, les règles de produit et de coproduit dans la base $\mathbf{G}$.

Proposition 2.102. *Soient* $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ *et* $\beta \in \mathfrak{S}_n$*, alors*

$$\mathbf{G}_\alpha \mathbf{G}_\beta = \sum_{\gamma\in\alpha\star\beta} \mathbf{G}_\gamma.$$

où $\star$ *est le produit de convolution défini en 2.1.*

2.7.4 Fonctions symétriques non-commutatives

Référence : [GKL+95]

Fonctions quasi-symétriques

L'application de **FQSym** qui envoie chaque variable non commutative a_i sur une variable commutative x_i est un homomorphisme φ qui envoie **FQSym** sur une sous-algèbre de $\mathbb{k}[X]$ que l'on appelle *algèbre des fonctions quasi symétriques*. En particulier, QSym est une algèbre commutative.

Définition 2.103. Soit $X = x_1, \dots$ une famille de variables commutatives. L'espace des *quasi symétriques* sur X, noté QSym, est l'espace des séries formelles sur X tel que le coefficient $[x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}]$ soit égal au coefficient de $[x_{j_1}^{\alpha_1} \dots x_{j_k}^{\alpha_k}]$ pour toutes suites croissantes $j_1 < \cdots < j_k$.

Les fonctions de QSym ne sont pas nécessairement symétriques, par exemple la série formelle $\sum_{i<j} x_i x_j^2$ est une fonction quasi-symétrique mais pas symétrique. L'algèbre QSym est graduée par le degré. On note QSym_n la composante de degré n. Par exemple, $\sum_{i<j} x_i x_j^2 \in \mathrm{QSym}_3$. Le fait que QSym est clos par multiplication n'est pas si évident, mais si $f \in \mathrm{QSym}_m$ et $g \in \mathrm{QSym}_n$, alors le produit fg est dans QSym_{m+n}.

A chaque composition $I \models n$ de longueur k on peut associer une fonction symétrique de QSym_n en posant

$$M_I = \sum_{\substack{\alpha\in I \\ i_1<\cdots<i_k}} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

La famille des (M_I) est appelée famille des *fonctions monomiales quasi-symétriques*. Par exemple, sur les compositions de 3 nous avons,

$$\begin{aligned}
M_3 &= \sum_{1\leqslant i} x_i^3, \\
M_{21} &= \sum_{1\leqslant i<j} x_i^2 x_j, \\
M_{12} &= \sum_{1\leqslant i<j} x_i x_j^2, \\
M_{111} &= \sum_{1\leqslant i<j<k} x_i x_j x_k.
\end{aligned}$$

Proposition 2.104. *Pour un entier n fixé, la famille $(M_I)_{I\models n}$ est une base de* QSym_n. *En particulier, la dimension de* QSym_n *est* 2^{n-1}.

Une autre base importante de QSym est la base des *quasi-rubans* définie par comme $F_I = \sum_{J\geqslant I} M_J$ à l'instar de [GKL+95]. Le nom provient du fait que sa base duale dans **NCSF** est la base des rubans, comment nous allons le voir dans le paragraphe sur **NCSF**.

Le coproduit de la base F consiste à séparer la composition en une partie gauche et une partie droite de toutes les façons possibles comme dans l'exemple suivant :

$$\Delta F_{3,1,2} = F_\varepsilon \otimes F_{3,1,2} + F_1 \otimes F_{2,1,2} + F_2 \otimes F_{1,1,2} + F_3 \otimes F_{1,2} + F_{3,1} \otimes F_2 + F_{3,1,1} \otimes F_1 + F_{3,1,2} \otimes F_\varepsilon.$$

NCSF

L'algèbre **NCSF** des *fonctions symétriques non commutatives* (de l'anglais *Non Commutative Symmetric Functions*) est l'algèbre libre $\Bbbk\langle \Lambda_1, \Lambda_2, \dots \rangle$ où $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille infinie d'indéterminées. L'algèbre **NCSF** est munie d'une graduation $w(\Lambda_k) = k$.

Les *fonctions symétriques non commutatives élémentaires* sont les Λ_k eux-mêmes, la série génératrice est

$$\lambda(t) = \sum_{k\geqslant 0} \Lambda_k t^k.$$

De la même façon que pour les fonctions symétriques (commutatives), on définit les fonctions *complètes homogènes* par série génératrice

$$\sigma(t) = \sum_{k\geqslant 0} S_k t^k = \lambda(-t)^{-1}.$$

On peut aussi construire **NCSF** comme sous-algèbre de **FQSym** en posant

$$\begin{aligned}\Lambda_k =& \mathbf{G}_{k\dots 21} = \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_k}\cdots a_{i_1},\\ S_k =& \mathbf{G}_{12\dots k} = \sum_{i_1\leqslant\dots\leqslant i_k} a_{i_1}\cdots a_{i_k}\,.\end{aligned}$$

Les générateurs S_n forment une base de $\mathbf{NCSF}_n$ en posant pour toute composition I de n l'élément

$$\begin{aligned}\Lambda^I =& \Lambda^{i_1}\cdots\Lambda^{i_k},\\ S^I =& S^{i_1}\cdots S^{i_k}.\end{aligned}$$

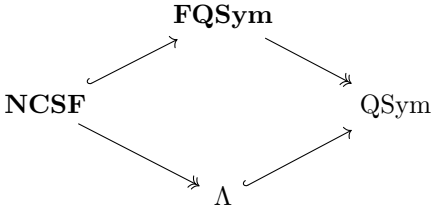
Ainsi, Λ_k correspond aux mots décroissants et S_k aux mots croissants. Il semble naturel d'introduire une autre base composée des mots avec descentes fixées

$$R_I = \sum_{Des(w)=I} w = \sum_{\mathrm{Des}(\sigma)=I} \mathbf{G}_\sigma.$$

On a alors $S^I = \sum_{J\geqslant I} R_J$. Les (R_I) sont appelées les fonctions *rubans de Schur* car leurs images commutatives sont les fonctions de Schur dans Λ.

Diagramme

Pour résumer la situation, nous avons décrit toutes les flèches du diagramme suivant.



2.7.5 Algèbre de Hopf de Loday et Ronco

L'algèbre des arbres binaires a été introduite par Loday et Ronco [LR98], provenant naturellement de leur étude des algèbres dendriformes : **PBT** est l'algèbre dendriforme libre à un générateur. Dans le même article, ils prouvent par ailleurs que **PBT** est une sous-algèbre de **FQSym**. L'approche de [HNT05] suit cette idée en définissant directement **PBT** comme un quotient de **FQSym**. C'est également l'approche que nous allons privilégier dans ce document.

Arbres binaires de recherche

Nous allons reprendre de nombreuses notations de [BBC92].

Définition 2.105. On note $\mathfrak{B}(n)$ l'ensemble des arbres binaires à n nœuds.

Nous allons considérer des arbres étiquetés. A chaque nœud x est associé une étiquette $c(x)$. On note $A_g(x)$ et $A_d(x)$ les sous-arbres gauche et droite enracinés en x.

Définition 2.106. Un *Arbre Binaire de Recherche* est un arbre binaire étiqueté tel que pour tout nœud x, pour tout $y \in A_g(x)$ et $z \in A_d(x)$ on a :

$$c(y) \leqslant c(x) < c(z).$$

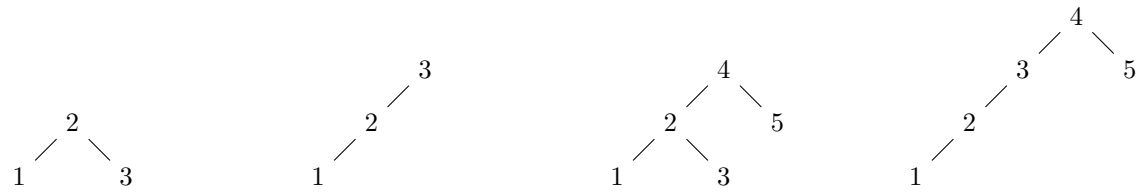


FIG. 2.7.1: Quelques Arbres Binaires de Recherche

Insertion dans les arbres binaires de recherche

Soit un élément x et un ABR A ne contenant pas x. Il est possible de rajouter x à l'unique feuille de A telle que $A \cup \{x\}$ soit toujours un ABR. Plus précisément,

- Si A est une feuille, alors on crée un nœud x.
- Sinon, on insère récursivement x dans le sous-arbre gauche (respectivement sous-arbre droit) de A si x est plus petit que la racine (respectivement plus grand).

L'algorithme précédent permet d'associer à tout mot w un arbre binaire de recherche en insérant successivement toutes les lettres de w de droite à gauche.

Exemple 2.107. Le mot $dcbfabec$ donne l'arbre binaire et la forme de la figure 2.7.2.

Remarquons que plusieurs mots admettent les mêmes arbres, par exemple $\mathcal{P}(cdbafebc) = \mathcal{P}(dcbfabec)$. L'objectif du prochain paragraphe est d'étudier les classes de mots dont les arbres binaires associés ont la même forme.

Classes sylvestres

Plaçons nous désormais dans les permutations $\mathfrak{S}_n$. Chaque arbre binaire non étiqueté admet un unique étiquetage avec $1, 2, \ldots$ tel que l'arbre soit un ABR. Ainsi, à chaque arbre T nous pouvons associer un sous-ensemble $S \subset \mathfrak{S}_n$ de permutations tel que l'insertion successive de droite à gauche donne T. Cet

(a) Arbre binaire de recherche (b) $\mathcal{P}(dcbfabec)$

FIG. 2.7.2: ABR et forme de $dcbfabec$

ensemble admet un représentant canonique : l'ordre postfixe droite-gauche, qui est aussi la permutation la plus grande pour l'ordre lexicographique de S. Nous noterons w_T la *permutation canonique* associée à l'arbre T.

Exemple 2.108. Reprenons le mot $dcbfabec$ de l'exemple 2.107, l'arbre admet comme ordre postfixe droite-gauche le mot $dfecbabc$.

Nous pouvons maintenant définir **PBT** comme sous-algèbre de **FQSym**. Pour chaque arbre T avec n nœuds, posons

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \mathcal{P}(\sigma) = T}} \mathbf{F}_\sigma. \tag{2.18}$$

Les $(\mathbf{P}_T)$ génèrent l'algèbre des arbres binaires de Loday et Ronco, aussi appelée **PBT**. Voir [HNT05] pour les détails et les preuves de la construction. Les propositions suivantes donnent les produits et coproduits sur les bases **P** et **Q** de **PBT** et **PBT***.

Théorème 2.109. *Soient T et T' deux arbres binaires, alors*

$$\mathbf{P}_T \mathbf{P}_{T'} = \sum_{T \in \mathrm{Sh}(T, T')} \mathbf{P}_T.$$

où $\mathrm{Sh}(T, T')$ est l'ensemble des arbres T tel que w_T est un terme du produit de mélange $w_T \sqcup\!\sqcup w_{T'}$.

Théorème 2.110. *Soit T un arbre binaire, le coproduit de $\mathbf{P}_T$ est donné par*

$$\Delta \mathbf{P}_T = \sum_{(T, T') \in \mathrm{Dec}(T)} \mathbf{P}_T \otimes \mathbf{P}_{T'}$$

où $\mathrm{Des}(T)$ est l'ensemble des paires d'arbres (T', T'') tel que $w_{T'}$ et $w_{T''}$ sont les standardisés de mots w_1 et w_2 tel que $w_1 \cdot w_2$ soit dans la classe sylvestre de T.

Dualité

L'algèbre de Hopf **PBT** est auto-duale. Notons $\mathbf{Q}_T$ la base duale des $\mathbf{P}_T$. Les deux théorèmes suivants décrivent le produit et le coproduit dans la base $\mathbf{Q}_T$.

Théorème 2.111. *Soient T et T' deux arbres, alors*

$$\mathbf{Q}_T \mathbf{Q}_{T'} = \sum_{T \in T \star T'} \mathbf{Q}_T,$$

avec $T \star T'$ l'ensemble des arbres qui sont des arbres binaires de recherche d'un élément du produit de convolution $w_T \star w_{T'}$.

Théorème 2.112. *Soit T un arbre, alors*

$$\Delta \mathbf{Q}_T = \sum_{(T,T')\in \mathrm{DeSh}(T)} \mathbf{Q}_T \otimes \mathbf{Q}_{T'}$$

où $\mathrm{DeSh}(T)$ *est l'ensemble des paires d'arbres dont les mots canoniques sont les standardisés des restrictions de* w_T *sur les paires d'intervalles* $[1, i]$ *et* $[i+1, n]$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant n$.

Antipode

Afin d'être complet sur la description de **PBT**, l'antipode de **PBT** s'exprime dans la base $\mathbf{Q}_T$ comme

$$\nu(\mathbf{Q}_T) = \sum_{I\models n} (-1)^k \mathbf{Q}_{w_T(I,0)} \cdots \mathbf{Q}_{w_T(I,k-1)}.$$

où k est la taille de la composition I et $w(I, j)$ la restriction du mot w à l'alphabet d'intervalle $[i_1 + \cdots + i_j + 1, i_1 + \cdots + i_{j+1}]$.

Chapitre 3

Représentations des monoïdes finis

Dans ce chapitre nous investiguons les représentations linéaires des groupes et des monoïdes finis. Nous commençons par rappeler les résultats fondamentaux sur les groupes et les représentations du groupe symétrique. Puis nous exposerons l'approche de Clifford - Munn - Ponizovskiĭ qui ramène l'étude des représentations de monoïdes à la structure en $\mathcal{J}$-classes de ces derniers. Nous finirons ce chapitre en énonçant des résultats généraux concernant les monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux.

Dans tout le chapitre, $\Bbbk$ désigne un corps commutatif de caractéristique 0.

Définition 3.1. Une *représentation* d'un monoïde M dans un $\Bbbk$-espace vectoriel E est un homomorphisme de monoïdes

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E).$$

Une *représentation d'un monoïde* M permet donc de voir les éléments de M comme des transformations linéaires d'un espace vectoriel, et nous allons montrer qu'une représentation de M peut être exprimée comme un $\Bbbk M$-module. La théorie des modules va nous permettre d'étudier M.

3.1 Équivalence avec la théorie des modules

De la même façon que pour les groupes, nous pouvons associer à chaque monoïde M une $\Bbbk$-algèbre $\Bbbk M$ de manière unique. Considérons en effet toutes les sommes formelles

$$\sum_{m \in M} \alpha_m m, \qquad \alpha_m \in \Bbbk,$$

avec addition, produit scalaire et produit :

$$\begin{aligned}\sum \alpha_m m + \sum \beta_m m &= \sum (\alpha_m + \beta_m) m,\\ \alpha(\sum \alpha_m m) &= \sum (\alpha\alpha_m) m,\\ (\sum \alpha_m m)(\sum \beta_n n) &= \sum \alpha_m \beta_n mn.\end{aligned}$$

Ces opérations définissent bien une $\Bbbk$-algèbre $\Bbbk M$ que l'on appellera *algèbre du monoïde* M, d'élément neutre $1 \cdot e$. Nous pouvons identifier M dans $\Bbbk M$ via le morphisme $m \mapsto 1 \cdot m$. Le monoïde M forme alors une base $\Bbbk$-linéaire de $\Bbbk M$.

Une représentation de l'algèbre $\Bbbk M$ dans le $\Bbbk$-espace vectoriel E est un morphisme $\Bbbk M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E)$.

Soit $T : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E)$ une représentation de M. Nous pouvons étendre T de façon unique en une représentation T' de $\Bbbk M$ dans E via

$$T'(\sum \alpha_m m) = \sum \alpha_m T(m).$$

Réciproquement, une représentation T' de $\Bbbk M$ donne, par restriction, une représentation de M.

Nous pouvons donner un sens à l'opération $a \cdot x$ pour $a \in \Bbbk M$ et $x \in E$. Prenons $T : \Bbbk M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, E)$ une représentation de $\Bbbk M$ dans le $\Bbbk$-espace vectoriel E, puis posons

$$ax = T(a)x.$$

Soient $a, a' \in \Bbbk M$, $x, x' \in E$ et $\alpha \in \Bbbk$. Par les propriétés de linéarité de la représentation T, nous avons les relations

$$\begin{cases} a(x + x') &= ax + ax' \\ (a + a')x &= ax + a'x \\ (aa')x &= a(a'x) \\ ex &= x \\ (\alpha a)x &= \alpha(ax) = a(\alpha x) \end{cases}$$

où e est l'élément neutre de $\Bbbk M$.
On a ainsi construit un $\Bbbk M$-module à gauche à partir d'une représentation T de $\Bbbk M$.

Réciproquement, étant donné E un $\Bbbk$-espace vectoriel qui est aussi un $\Bbbk M$ module, on peut construire une représentation T de $\Bbbk M$ en prenant $T(a) : E \longrightarrow E$ tel que :

$$T(a)x = ax, \qquad a \in \Bbbk M, x \in E.$$

Le théorème suivant justifie l'utilisation de la théorie des modules dans l'étude des représentations. En effet, une représentation est intégralement et uniquement « codée » dans un $\Bbbk M$-module, ramenant la théorie des représentations à la théorie des modules.

Théorème 3.2. *Soient E et E' deux $\Bbbk M$-modules. Alors $E \simeq E'$ si et seulement s'ils définissent la même représentation.*

3.2 Représentations des groupes finis

Dans cette section nous supposerons que $\Bbbk = \mathbb{C}$. Une inspiration majeure de cette section est le classique (et excellent) [Ser78].

Une *représentation linéaire* d'un groupe G dans un espace vectoriel V est un couple (V, φ) où φ est un morphisme de groupe de G dans $\mathrm{GL}(V)$. Une représentation est dite *irréductible* si aucun sous-espace propre de V n'est stable par l'action de G.

Théorème 3.3 (Maschke)**.** *Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.*

En utilisant le vocabulaire de la théorie des modules, ce résultat stipule que tout $\Bbbk G$-module se décompose en une somme directe de modules irréductibles. Ce dernier théorème n'est plus vrai sur les monoïdes en général.

Soit (V, φ) une représentation d'un groupe fini G. Pour tout $g \in G$, $\varphi(g)$ est une application linéaire de V dans lui-même que l'on notera φ_g. On appelle *caractère* de (V, φ) l'application linéaire de G dans $\Bbbk$

$$\chi_\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g).$$

Un résultat fondamental de la théorie des représentations des groupes est qu'une représentation φ de G est uniquement déterminée par son caractère. Un *caractère irréductible* est un caractère associé à une représentation irréductible. De plus, les caractères de G sont naturellement munis du produit scalaire

$$\langle \varphi | \psi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\, \psi(g^{-1})\,. \tag{3.1}$$

Soit G un groupe fini et considérons la *représentation triviale* $\varphi : G \to \{1\}$. Le caractère de cette représentation est constant $\chi_\varphi(g) = 1$. Soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel de base $(e_g)_{g \in G}$. L'application $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ telle que $\varphi(g)(e_{g'}) = e_{g^{-1}.g'}$ est la *représentation régulière* de G, dont le caractère est $\chi_\varphi(g) = |G|$ si $g = \mathrm{id}_G$ et 0 sinon. Toute représentation irréductible de G apparaît dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son carré. En particulier, un groupe G n'admet qu'un ensemble fini de représentations irréductibles, et ces dernières forment une famille orthogonale pour le produit scalaire 3.1.

Théorème 3.4. *Les caractères des représentations irréductibles forment une base orthonormée finie de l'anneau des caractères de G.*

3.3 Représentations des groupes symétriques

Le groupe symétrique est central dans l'étude des groupes notamment via le théorème de Cayley. Les classes de conjugaisons du groupe symétrique sont caractérisées par la longueur des cycles. On a donc une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ pour chaque partition λ de n, soit $\mathrm{Par}(n)$ représentations.

Tableaux de Young

On peut représenter chaque partition par un tableau de Young, et donc chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Il est remarquable que les tableaux de Young contiennent également, de façon combinatoire, l'essentiel de l'information liée à chaque représentation.

Un *tableau de Young* est un diagramme de Young de forme λ dans lequel on a réparti les entiers $1, \ldots, d$ de bas en haut, de gauche à droite. Par exemple pour la partition $(4, 2, 2, 1)$ de 9 cela donne

9			
8			
5	6	7	
1	2	3	4

Un tableau de Young *standard* est un tableau de Young strictement croissant de gauche à droite et de bas en haut. Un tableau de Young est *semi-standard* si les cellules sont strictement croissantes de bas en haut. Un mot de Young est le mot obtenu en lisant le tableau de haut en bas, de gauche à droite. Ainsi sur l'exemple précédent, on obtient le mot 985671234. On peut remarquer qu'il y a une bijection claire ente les mots et les tableaux.

On fait agir les permutations de $\mathfrak{S}_n$ sur les lignes et les colonnes du tableau par permutation des coefficients. On construit alors deux sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$

$$\begin{aligned} P_\lambda =& \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma \text{ conserve les lignes}\} \\ Q_\lambda =& \{\mu \in \mathfrak{S}_n : \mu \text{ conserve les colonnes}\}. \end{aligned}$$

On introduit alors la somme des permutations de chaque ensemble vue dans $\Bbbk\mathfrak{S}_n$, c'est à dire

$$a_\lambda = \sum_{\sigma\in P} \sigma \qquad \text{et} \qquad b_\lambda = \sum_{\mu\in Q} \varepsilon(\mu)\cdot\mu\,.$$

où $\varepsilon(\mu)$ est la signature de la permutation μ (le caractère de la représentation alternée).

Pour toute partition λ de d, l'élément $c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$ de l'algèbre de groupe $\Bbbk\mathfrak{S}_d$ est appelé *symétriseur de Young*. On peut alors expliciter les représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_d$.

Théorème 3.5. *Chaque c_λ engendre un $\Bbbk\mathfrak{S}_n$-module à droite V_λ. La famille de modules $(V_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Par}(n)}$ est une famille complète de $\Bbbk\mathfrak{S}_n$-modules irréductibles non deux à deux isomorphes.*
De plus, la dimension de V_λ est le nombre de tableaux de Young standards de forme λ.

Remarque 3.6. Les c_λ sont quasi-idempotents, c'est à dire qu'il existe un scalaire t_λ tel que $t_\lambda c_\lambda$ est idempotent.

Dans un tableau, une *équerre* est la donnée d'une cellule et de toutes les cellules à droite et au-dessus. La longueur d'équerre en la cellule x est l'entier $h(x)$ qui compte le nombre de cellules de l'équerre. Par exemple, en notant dans chaque case la longueur d'équerre associée.

1			
2			
5	2	1	
7	4	3	1

Théorème 3.7 (Formule des équerres)**.** *Soit λ une partition de n, la dimension des modules simples V_λ est donnée par la formule des équerres*

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod_x h(x)}\,.$$

D'après ce qui précède, c'est le nombre de tableaux de Young de forme donne λ. Pour l'exemple précédent on a alors $\dim V_{(4,2,2,1)} = \frac{9!}{2\cdot5\cdot2\cdot7\cdot4\cdot3} = 648$.

Représentations en petites dimensions

Du théorème précédent on peut facilement construire les représentations irréductibles de premiers groupes de permutation. Dans les tableaux de Young sont notés les longueurs d'équerres et la dimension de chaque V_λ.

$\mathfrak{S}_2$ | 2 1 | triviale (1) | 1 / 2 | alternée (1)

$\mathfrak{S}_3$ | 3 2 1 | triviale (1) | 1 / 3 1 | standard (2) | 1 / 2 / 3 | alternée (1)

$\mathfrak{S}_4$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&3&2&1\\\hline\end{array}$ triviale (1) $\quad$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 4&1\\\hline\end{array}$ (3) $\quad$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$ (2)

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1\\\hline 4&2&1\\\hline\end{array}$ (3) $\quad$ $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array}$ (1)

Fonctions de Schur

Pour un tableau de Young semi-standard T, et $x = (x_1, \dots, x_n)$, on note $x^T = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ où chaque t_i compte le nombre d'occurrence de i dans T. Soit λ une partition de d, la *fonction de Schur* est le polynôme

$$s_\lambda = \sum_T x^T$$

où la sommation porte sur les tableaux semi-standards. On peut montrer que les fonctions de Schur forment une base de l'anneau des fonctions symétriques Λ.

Exemple 3.8. Le monôme associé au tableau semi-standard $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7\\\hline 5\\\hline 4&5\\\hline 1&3&3\\\hline\end{array}$ est $x_1 x_3^2 x_4 x_5^2 x_7$.

On appelle *caractéristique* l'application $ch : \Bbbk\mathfrak{S}_n \to \Lambda_n$ avec $ch(V_\lambda) = s_\lambda$.

Théorème 3.9. *L'application ch est un isomorphisme isométrique entre l'anneau des fonctions centrales et les caractères de* $\mathfrak{S}_n$.

3.4 Théorie des espèces

3.4.1 Définition

Dans la section 5.4 nous allons énoncer des résultats dans le vocabulaire de la théorie des espèces. La présentation que nous allons donner est fortement inspirée de [Ber09]. Nous appelons **Set** la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les flèches les bijections. Une *espèce* est un foncteur $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.

Pour chaque ensemble A, on appelle *structure* de l'espèce F les éléments de l'ensemble fini image $F[A]$. Chaque flèche $\sigma : A \xrightarrow{\sim} B$ de **Set** donne par fonctorialité une bijection $F[\sigma] : F[A] \to [B]$ que l'on appelle *transport de structure*. La fonctorialité assure que l'identité de A est transportée sur l'identité de l'image : $F[\mathrm{id}_A] = \mathrm{id}_{F[A]}$. De même, la composition d'espèce est bien définie par $F[\varphi \circ \psi] = F[\varphi]F[\psi]$.

On peut résumer la situation par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ F[A] & \xrightarrow{F[\varphi]} & F[B] \end{array}$$

Deux structures $f \in F[A]$ et $g \in F[B]$ sont de même *type* s'il existe une bijection $\varphi : A \to B$ tel que $F[\varphi](f) = g$.

Quelques exemples

L'espèce définie par

$$\mathbf{1}[A] = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{si } A = \varnothing \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'*espèce caractéristique de l'ensemble vide*. Il faut définir le *transport de structure* qui ici est trivial : soient A et B deux ensembles non vides et $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$ une bijection, alors $\mathbf{1}[\varphi] = \mathrm{id}_{\{\varnothing\}}$.

De la même façon on pose $E[A] = \{A\}$ l'*espèce caractéristique des ensembles*. Plus généralement on peut définir l'*espèce caractéristique des k-ensembles* par

$$E[A] = \begin{cases} \{A\} & \text{si } |A| = k \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'*espèce des permutations* est définie par $\mathfrak{S}[A] = \{\sigma : \sigma : A \xrightarrow{\sim} A\}$. Le transport de structure est la conjugaison $\mathfrak{S}[\varphi](\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}$.

Si on considère toutes les endofonctions de A on peut définir l'*espèce des endofonctions* $End[A] = \{f : f : A \to A\}$. Le transport de structure est encore la conjugaison $End[\varphi](\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}$.

3.4.2 Fonction génératrice et arithmétique des espèces

A chaque espèce F on associe sa *série génératrice exponentielle*

$$F(\zeta) = \sum_{n \geqslant 0} f_n \frac{\zeta^n}{n!},$$

où f_n est le nombre de structures de $F[\mathbf{n}]$. Les exemples précédents donnent directement

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(\zeta) =& \zeta\,, \\ E(\zeta) =& \sum_{n \geqslant 0} \frac{\zeta^n}{n!} = e^{\zeta}\,, \\ \mathfrak{S}(\zeta) =& \sum_{n \geqslant 0} n! \frac{\zeta^n}{n!} = \frac{1}{1-\zeta}\,, \\ End(\zeta) =& \sum_{n \geqslant 0} n^n \frac{\zeta^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Définition 3.10. Soient F et G deux espèces, les espèces $F + G$, $F \cdot G$ et $F \circ G$ sont définies comme

$$\begin{aligned} (F+G)[A] =& F[A] \sqcup G[A]\,, \\ (F \cdot G)[A] =& \sum_{B+C=A} F[B] \times G[C]\,, \\ (F \circ G)[A] =& \sum_{\pi \in \mathrm{Par}(A)} F[\pi] \times \prod_{B \in \pi} G[B]\,. \end{aligned}$$

De plus les séries génératrices exponentielles s'expriment en fonction de $F[\zeta]$ et $G[\zeta]$

$$\begin{aligned} (F+G)(\zeta) =& F(\zeta) + G(\zeta)\,, \\ (F \cdot G)(\zeta) =& F(\zeta)G(\zeta)\,, \\ (F \circ G)(\zeta) =& F(G(\zeta))\,. \end{aligned}$$

3.4.3 Série indicatrice des cycles

Étant donné une espèce, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ agit sur l'ensemble $F[\mathcal{A}]$. On peut alors considérer le caractère de cette action et définir la *caractéristique de Frobenius* selon le relèvement dans Λ du théorème de la section 3.3.

Définition 3.11. Soit F une espèce, la *caractéristique* de F est

$$ch(F) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_{F[\mathbf{n}]}(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{z})\,.$$

Dans le cadre de la théorie des espèce, on l'appelle aussi *série indicatrice de cycle*

La série indicatrice de cycle contient beaucoup d'information que l'on peut récupérer par spécialisation. On peut notamment retrouver la série génératrice exponentielle de l'espèce à travers l'application $p_1 \mapsto \zeta$ et $p_k \mapsto 0$ pour $k \geqslant 0$ (c'est clair : $\chi_\rho(1) = |F[n]|$). On retrouve également le nombre de types d'isomorphismes par la spécialisation $p_k \mapsto \zeta^k$: cela revient à obtenir le coefficient de s_n dans la série de Frobenius $ch(F)$.

On a par exemple

$$\begin{aligned} ch(\mathbf{1}) &= p_1, \\ ch(E) &= H, \\ ch(\mathfrak{S}) &= \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-p_k}. \end{aligned}$$

3.5 Construction de Clifford – Munn – Ponizovskiĭ des modules simples

La théorie des représentations des monoïdes est fondamentalement différente de la théorie des groupes : il n'y a pas directement de notion de fonction centrale et le théorème 3.3 n'est plus valide. Contrairement aux groupes, les représentations irréductibles d'un monoïde M ne permettent pas de donner une décomposition en somme directe. Chaque module simple (associé à une représentation irréductible) est contenu dans un module *projectif indécomposable* éventuellement distinct. Étudier les représentations d'un monoïde fini M revient donc à donner une liste des modules simples et des modules projectifs associés.

Dans cette section, nous exposons la construction de Clifford – Munn – Ponizovskiĭ qui donne une construction explicite des modules simples dans un monoïde fini.

Les relations de Green introduites à la définition 2.3 permettent de construire les $\Bbbk M$-modules simples à partir d'un dévissage de M en $\mathcal{J}$-classes. Ce travail est bien exposé dans [GMS09] dont nous allons réutiliser les notations.

Soit J une $\mathcal{J}$-classe de M, on note $I_J = \{m \in M : J \nsubseteq \mathcal{J}(m)\}$ l'ensemble des éléments de m qui ne sont pas $\leqslant_{\mathcal{J}}$-au-dessus de J pour $\mathcal{J}$. Soit L un $\Bbbk M$-module à gauche, on introduit l'idéal annihilateur $\mathrm{Ann}_M(L) = \{m \in L : mL = 0\}$.

Définition 3.12. Une $\mathcal{J}$-classe régulière J est l'*apex* d'un $\Bbbk M$-module L si $\mathrm{Ann}_M(L) = I_J$.

En d'autres termes, J est l'apex de L si c'est la $\leqslant_{\mathcal{J}}$-minimale $\mathcal{J}$-classe régulière qui n'annihile pas L. Le théorème fondamental est le suivant.

Théorème 3.13 (Munn – Ponizovskiĭ)**.** *Soit L un $\Bbbk M$-module simple, alors L a un apex.*

Démonstration. Il existe J une $\leqslant_{\mathcal{J}}$-minimale $\mathcal{J}$-classe qui n'annihile pas L, *i.e.* $J \nsubseteq \mathrm{Ann}_M(L)$. On procède en deux étapes : montrer que $I_J = \mathrm{Ann}_M(L)$ et que J est régulière. Considérons l'idéal $I = MJM$;

par minimalité de J, nous obtenons que $I \backslash J \subseteq \mathrm{Ann}_M(L)$. Aussi, $\Bbbk I\, L$ est un sous L-module non nul et par simplicité de L nous avons

$$L = \Bbbk I\, L = \Bbbk J\, L. \tag{3.2}$$

Comme $I_J J \subseteq I \backslash J \subseteq \mathrm{Ann}_M(L)$, (3.2) implique que $I_J = \mathrm{Ann}_M(L)$. Supposons maintenant que J n'est pas une $\mathcal{J}$-classe régulière. Alors le théorème 2.22 implique que $J^2 \subseteq I \backslash J$ et en particulier par (3.2) $\Bbbk J^2\, L = J \Bbbk L = 0$ ce qui contredit la définition de J. □

Lemme 3.14 (Green)**.** *Soit A une algèbre et $e \in A$ un idempotent.*

(i) Si M est un A-module simple, alors $eM = 0$ ou M est un eAe-module simple.

(ii) Si V est un eAe-module simple, alors le A-module induit $\mathrm{Ind}(V)$ a un unique sous-module maximal $N(\mathrm{Ind}(V))$ et $\mathrm{Ind}(V)/N(\mathrm{Ind}(V))$ est l'unique A-module simple M tel que $eM \simeq V$.

(iii) Si V est eAe-module simple, alors le A-module coinduit $\mathrm{Coind}(V)$ a un unique sous-module minimal $L(\mathrm{Coind}(V))$ et $L(\mathrm{Coind}(V))$ est l'unique A-module simple M tel que $eM \simeq V$.

On peut maintenant construire les représentations irréductibles du monoïde S par induction et coinduction des représentations des sous-groupes maximaux G_J. L'induction et la coinduction sont ici les foncteurs $eAe - \mathbf{mod} \to A - \mathbf{mod}$ qui sont les adjoints à gauche et à droite du foncteur de restriction Res.

Théorème 3.15 (Clifford-Munn-Ponizovskiĭ)**.** *Soit S un monoïde fini et $E = \{e_J : J \in \mathcal{U}(S)\}$ une transversale d'idempotents de S.*

(i) Si M est un $\Bbbk S$-module d'apex J, alors Me_J est un $\Bbbk G_J$-module simple.

(ii) Si V est un simple $\Bbbk G_J$-module, alors

$$N = \{w \in \mathrm{Ind}_{G_J}^S(V) : w \Bbbk S e_J = 0\}$$

est l'unique $\Bbbk S$-sous-module maximal de $\mathrm{Ind}_{G_J}^S(V)$ et $\mathrm{Ind}_{G_J}^S(V)/N$ est l'unique $\Bbbk S$-module M d'apex J tel que $Me_J = V$.

(iii) Si V est un $\Bbbk G_J$-module simple, alors $\mathrm{Coind}_{G_J}^S(V)eA$ est l'unique A-sous-module minimal de $\mathrm{Coind}_{G_J}^S(V)$ ainsi que l'unique $\Bbbk S$-module simple M d'apex J tel que $Me_J = V$.

Corollaire 3.16. *Les représentations irréductibles de S sont en bijection avec les représentations irréductibles des sous-groupes maximaux G_J de S pour $J \in \mathcal{U}(S)$.*

3.6 Modules de Schützenberger

Chaque $\mathcal{R}$-classe est naturellement munie d'une structure de module à droite. Cette construction due à Schützenberger (voir exemple [Sch58]) permet de donner une première décomposition des représentations des monoïdes finis.

Définition 3.17 (Module de Schützenberger)**.** Soit R une $\mathcal{R}$-classe d'un monoïde fini M. La classe R est munie d'une structure de $\Bbbk M$-module à droite de base $(\varepsilon_r)_{r \in R}$ via l'action

$$\varepsilon_r \cdot m = \begin{cases} \varepsilon_{rm} & \text{si } rm \in R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les R_i sont des facteurs de composition de la représentation régulière. Si le module est $\mathcal{R}$-trivial, alors on a une décomposition de la représentation régulière à droite en modules à droite de dimension 1, de même à gauche. En particulier, tous les modules sont simples. En conclusion, nous avons démontré la proposition suivante.

Proposition 3.18. *Soit M un monoïde $\mathcal{R}$-trivial (respectivement $\mathcal{L}$-trivial), tous les $\Bbbk M$-modules simples à droite (respectivement à gauche) sont de dimension* 1.

Il est intéressant de voir que les modules de Schützenberger peuvent s'écrire sous forme de quotient. En effet, notons $\mathcal{R}_<(x)$ l'ensemble des éléments plus petits que x pour $<_\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}_<(x) = \{y \in M : yM \subset xM\}.$$

Soit x un élément d'une $\mathcal{R}$-classe de M, le module de Schützenberger s'écrit alors comme le module quotient $x\Bbbk M/\Bbbk\mathcal{R}_<(x)$.

3.7 Représentations des monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux

Le cas particulier des représentations des monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux a été étudié par Denton-Hivert-Schilling-Thiéry [DHST11]. La $\mathcal{J}$-trivialité d'un monoïde M permet de décrire les représentations de façon combinatoire. En effet, tous les $\Bbbk M$-modules simples sont induits depuis des représentations triviales.

Dans toute cette section, M est un monoïde $\mathcal{J}$-trivial fini. L'ensemble des idempotents $E(M)$ indexe donc les $\mathcal{J}$-classes régulières de M et également les $\Bbbk M$ modules simples d'après les résultats de la section précédente. Soit e un idempotent de $E(M)$. Le module simple S_e de dimension 1 est le module de Schützenberger associé à la $\mathcal{R}$-classe du singleton $\{e\}$:

$$\varepsilon_e \cdot m = \begin{cases} \varepsilon_e & \text{si } em = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Soient e et f deux idempotents distincts de M et supposons que $S_e \simeq S_f$; alors on a les relations $ef = e$ et $fe = f$. On en déduit que e et f sont dans la même $\mathcal{J}$-classe, ce qui contredit la $\mathcal{J}$-trivialité de M. Les $(S_e)_{e\in E(M)}$ forment donc un système complet de $\Bbbk M$-modules simples à droite non isomorphes.

Proposition 3.19. *Soit $e \in E(M)$, le $\Bbbk M$-module simple S_e est d'apex $\mathcal{J}(e) = \{e\}$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition 3.12 et de la description des $\Bbbk M$-modules simples (3.3). □

Considérons une série de Jordan-Hölder de $\Bbbk M$:

$$\Bbbk M = \Bbbk M_0 \hookrightarrow \Bbbk M_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow M_n.$$

Comme tous les modules simples sont de dimension 1, cette série de composition est de longueur $n = |M|$. Étant donné un élément non idempotent $x \in M$, le module S_x est isomorphe par le théorème 2.54 à un module simple S_e. Combinatoirement, on peut construire e à partir de x avec les symboles gauche et droite :

$$\mathrm{lfix}(x) = \min\{e \in E(M) : ex = x\}, \tag{3.4}$$
$$\mathrm{rfix}(x) = \min\{e \in E(M) : xe = x\}. \tag{3.5}$$

On peut voir ces opérateurs comme une généralisation de la notion de descentes dans les groupes symétriques.

Proposition 3.20. *Soit $x \in M$, le $\Bbbk M$-module à droite (respectivement à gauche) S_x est isomorphe à $S_{\mathrm{lfix}(x)}$ (respectivement à $S_{\mathrm{rfix}(x)}$).*

Démonstration. Il suffit de remarquer que S_x et $S_{\mathrm{rfix}(x)}$ ont le même apex, ce qui assure que $S_e \simeq S_{\mathrm{rfix}(x)}$ par le théorème 3.15. L'argument est identique à gauche. □

Dans les monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux, les $\Bbbk M$-modules projectifs sont eux aussi combinatoires.

Théorème 3.21. *La couverture projective de module simple à droite S_e est le module P_e de base $\{\varepsilon_x : \mathrm{lfix}(x) = e\}$ muni de l'action*

$$\varepsilon_x \cdot m = \begin{cases} xm & si\ \mathrm{lfix}(xm) = e \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Nous pouvons alors donner un description complète des $\Bbbk M$-modules projectifs à droite en terme de quotient. Notons

$$\mathcal{R}_{=}^{\mathrm{lfix}}(e) = \{x \in eM : \mathrm{lfix}(x) = e\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{<}^{\mathrm{lfix}}(e) = \{x \in eM : \mathrm{lfix}(x) <_{\mathcal{R}} e\}, \tag{3.6}$$

alors le module projectif P_e associé au module simple S_e est le quotient

$$P_e = \mathcal{R}_{=}^{\mathrm{lfix}}(e) \Big/ \mathcal{R}_{<}^{\mathrm{lfix}}(e)\,.$$

De la même façon, la matrice de Cartan est explicite.

Théorème 3.22 ([DHST11, Théorème 3.20])**.** *Les coefficients de la matrice de Cartan $(\mathcal{C}_{i,j})$ de $\Bbbk M$ sont*

$$\mathcal{C}_{i,j} = |\{x \in M : i = \mathrm{lfix}(x)\ et\ j = \mathrm{rfix}(x)\}|.$$

En conséquence nous pouvons dévisser les modules projectifs indécomposables comme somme (non directe) de sous-modules simples dans l'anneau de Grothendieck $G_0(\Bbbk M)$:

$$[P_e] = \sum_{\mathrm{lfix}(f)=e} [S_f]. \tag{3.7}$$

Chapitre 4

Tours de monoïdes et catégorification

Dans ce chapitre, nous étendons aux tours de monoïdes les résultats de théorie des représentations que nous avons vu au chapitre 3.

Une tour de monoïdes est une suite de monoïdes $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et de plongements $M_n \hookrightarrow M_{n+1}$ compatibles avec une notion de *produit extérieur* ainsi que quelques axiomes de compatibilité que nous donnons dans la section 4.1. Les axiomes que nous donnons sont minimaux pour permettre l'existence de deux anneaux gradués de caractères virtuels appelés anneaux de Grothendieck que nous définissons dans la section 4.4.

Lorsque les deux anneaux K_0 et G_0 sont munis d'une structure d'algèbre de Hopf, avec comme dualité faible un isomorphisme de Hopf, on parle de *catégorification*. Le mot provient du fait que l'on a établit une transformation naturelle entre une algèbre de Hopf et une catégorie de modules finiment engendrés comme nous l'explicitons dans la section 4.5. Un exemple fondamental est la tour des fonctions symétriques dont les anneaux de Grothendieck sont les fonctions symétriques.

La construction de Bergeron et Li, exposée section 4.6 assure par exemple que toute d'algèbre vérifiant certaines conditions plus fortes que notre définition, est associée à un couple d'algèbres de Hopf duales via leurs anneaux de caractères virtuels. On déduit de cette construction le théorème de Krob-Thibon sur la catégorification des fonctions symétriques non commutatives par la tour des monoïdes 0-Hecke, résultat qui est la majeure source d'inspiration de ce travail.

Nous construisons, dans la section 4.7, des tours des semi-treillis à partir du permutoèdre et de certains de ses quotients. On obtient de la sorte des semi-catégorifications de certaines algèbres de Hopf : **FQSym**, **PBT** et **NCSF**. Cependant, nous ne parvenons pas, par ce moyen, à catégorifier les algèbres duales.

Afin d'obtenir une catégorification complète, nous menons une recherche exhaustive sur l'algèbre de Hopf autoduale $(\mathbf{PBT}, \mathbf{P})/(\mathbf{PBT}^*, \mathbf{Q})$. Nous démontrons (théorème 4.46) que sous des hypothèses naturelles, il n'existe pas de tour de monoïdes catégorifiant **PBT**.

Enfin, nous étudions dans la section 4.10 la catégorification de l'algèbre de Hopf $(\mathbf{NCSF}, \mathbf{R})/(\mathrm{QSym}, F)$ et montrons que la catégorification par la tour des monoïdes 0-Hecke est essentiellement unique.

4.1 Tours d'algèbres et de monoïdes

On trouve dans la littérature de nombreuses définitions de tours d'algèbres [BL09], [BHRZ06]. Les axiomes minimaux seraient de demander d'avoir une algèbre graduée, c'est à dire une algèbre $A = \bigoplus_{i\geqslant 0} A_i$ telle que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ on ait $A_iA_j \subset A_{i+j}$. Cependant, nous voulons pouvoir étudier les représentations de A à partir des représentations des composantes graduées. Comme nous le verrons section 4.6, Bergeron et Li donnent une axiomatique de tour d'algèbre dont les anneaux de caractères sont des algèbres de Hopf duales. Nous choisissons de donner ici une axiomatique faible qui permet néanmoins de définir l'anneau de Grothendieck $K_0(A)$ des A-modules projectifs finiment engendrés.

Définition 4.1. Une *tour d'algèbres* est une famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'algèbres associatives et de morphismes $(\rho_{m,n} : A_m \otimes A_n \hookrightarrow A_{m+n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) $A_0 \simeq \Bbbk$,

(ii) pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i est de dimension finie,

(iii) les homomorphismes $\rho_{m,n}$ sont injectifs et associatifs : pour tout k, l, m on a

$$\rho_{k+l,m} \circ (\rho_{k,l} \otimes -) = \rho_{k,l+m} \circ (- \otimes \rho_{l,m}),$$

(iv) pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, A_{m+n} est un $(A_m \otimes A_n)$-module projectif.

Pour une tour d'algèbres $(A_i)_i$ on note l'algèbre graduée $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Définition 4.2. Une tour de monoïdes $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de monoïdes dont les algèbres munies des plongements canoniques forment une tour.

Les relations de Green se transportent via les morphismes de plongements comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Soit $(M_i)_i$ une tour de monoïdes, $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments du monoïde produit $(M_m \times M_n)$ et $\mathcal{K} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}\}$ une relation de Green. Si ρ est un morphisme de monoïdes $M_m \times M_n \to M_{m+n}$, alors $\rho(x_1, x_2) \leqslant_{\mathcal{K}} \rho(y_1, y_2)$.*

Démonstration. Considérons x et y comme dans l'énoncé avec $x \leqslant_{\mathcal{R}} y$, il existe alors $u \in M_m \times M_n$ tel que $x = yu$. Comme ρ est un morphisme de monoïdes on a $\rho(x) = \rho(y)\rho(u)$ et $\rho(x) \leqslant_{\mathcal{R}} \rho(y)$.

Les preuves pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{J}$ sont similaires. □

La tour des groupes symétriques

Les algèbres des groupes symétriques forment une tour satisfaisant la définition 4.1. Il nous faut définir les morphismes de plongement $\rho_{m,n}$. Posons comme produit extérieur

$$\rho_{m,n} : \begin{cases} \mathfrak{S}_m \otimes \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{m+n} \\ \sigma \otimes \mu & \longmapsto & \sigma \bar{\cdot} \mu. \end{cases}$$

On vérifie facilement que les hypothèses de la définition 4.2 sont respectées, faisant de la tour des groupes symétriques une tour de monoïdes.

Exemple 4.4. $\rho_{3,4}([3,1,2],[4,1,3,2]) = [3,1,2,8,5,7,6] \in \mathfrak{S}_7$

4.2 Induction et restriction des représentations

Grâce à la graduation des tours d'algèbres, nous pouvons étudier de quelle façon les représentations dans une composante donnée peuvent s'induire dans des composantes plus hautes, ou se restreindre dans des composantes inférieures. L'induction et la restriction sont des outils fondamentaux de la théorie des représentations et on été défini de façon très générale précédemment (voir définitions 2.43 et 2.44).

Originellement l'induction a été étudiée dans le cas des groupes finis. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe. Si χ est le caractère d'une représentation de G et ψ le caractère d'une représentation de H, on a alors la *réciprocité de Frobenius*:

$$\langle \mathrm{Ind}(\psi), \chi \rangle = \langle \psi, \mathrm{Res}(\chi) \rangle,$$

où $\langle -, - \rangle$ est le produit scalaire usuel sur l'anneau des caractères d'un groupe fini G (voir section 3.2). L'induction joue un rôle majeur dans la théorie des représentations des groupes finis.

Dans le cas des monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux, la rigidité de la structure nous permet de formuler des énoncés généraux pour le calcul des anneaux de Grothendieck associés. La description des groupes de Grothendieck a été donnée section 3.7.

Disposer d'une tour de monoïdes nous permet, à partir de représentations de M_m et M_n, de construire la *représentation induite* dans M_{m+n}.

Définition 4.5. Soient V un A_m-module, U un A_n-module, on note $U \hat{\otimes} V$ le A_{m+n}-module $\mathrm{Ind}_{A_m \otimes A_n}^{A_{m+n}} V$.

Nous allons régulièrement utiliser le lemme suivant qui semble faire partie du folklore de la combinatoire algébrique, bien que je n'ai pas trouvé de référence. La preuve fournie ici est personnelle.

Lemme 4.6. *Soit $B \subseteq A$ deux $\Bbbk$-algèbres, $f \in B$ un idempotent et $U \subseteq fB$ un B-module à droite. Nous avons l'isomorphisme de A-module suivant :*

$$\mathrm{Ind}_B^A(fB)/U \simeq (fA)/(UA)\,.$$

Démonstration. Nous définissons tout d'abord l'isomorphisme :

$$\mu : \begin{cases} fB \otimes_B A & \longrightarrow & fA \\ fb \otimes_B a & \longmapsto & fba \end{cases}$$

d'inverse $x \longmapsto f \otimes_B x$. En particulier la restriction $\tilde{\mu} = \mu_{|U \otimes_B A}$ est un épimorphisme de A-modules à droite de $U \otimes_B A$ dans UA.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow fB \longrightarrow fB/U \longrightarrow 0$$

composée par le foncteur exact à droite $- \otimes_B A$ donne le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} U\otimes_B A & \longrightarrow & fB\otimes_B A & \longrightarrow & (fB/U)\otimes_B A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mu}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \vdots{\scriptstyle w} & & \\ 0 \longrightarrow & UA & \longrightarrow & fA & \longrightarrow & fA/UA & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il existe un unique morphisme w de A-module à droite tel que le carré droit commute, surjectif par surjectivité de μ. Par application du *lemme du serpent*, il existe une suite exacte

$$\ker\mu \longrightarrow \ker w \dashrightarrow \operatorname{coker}\tilde{\mu} \longrightarrow \operatorname{coker}\mu\ . \tag{4.1}$$

Comme μ est un isomorphisme, $\ker\mu = \operatorname{coker}\mu = 0$ ce qui implique que la flèche centrale de 4.1 est un isomorphisme. La surjectivité de $\tilde{\mu}$ assure que $\operatorname{coker}\tilde{\mu} = 0$, donc $\ker w = 0$ et w est un isomorphisme de A-modules à droite. □

Le lemme précédent permet de construire l'induit des modules de Schützenberger dans une tour de monoïdes. Considérons en effet deux modules de Schützenberger $\mathfrak{R}_e$ et $\mathfrak{R}_f$ avec $e \in M_m$ et $f \in M_n$ donc en particulier $\mathfrak{R}_e \simeq eM_m/\mathcal{R}_<(e)$ et $\mathfrak{R}_f \simeq fM_n/\mathcal{R}_<(f)$. Le $(A_m \otimes A_n)$-module $\mathfrak{R}_e \otimes \mathfrak{R}_f$ s'écrit

$$(e\otimes f)(A_m\otimes A_n)\Big/\mathcal{R}_<(e)\otimes\mathcal{R}_<(f)\cdot$$

Le lemme 4.6 donne directement la formule d'induction suivante :

Théorème 4.7. *Soient e et f des idempotents d'un monoïde M; on a*

$$\operatorname{Ind}_{A_m\otimes A_n}^{A_{m+n}} \mathfrak{R}_e\otimes\mathfrak{R}_f \simeq \rho_{m,n}(e\otimes f)A_{m+n}\Big/\rho_{m,n}(\mathcal{R}_<(e)\otimes\mathcal{R}_<(f))A_{m+n}\,.$$

4.3 Tours de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux

Dans cette section, nous nous restreignons aux tours de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux. Dans ce cas, l'étude des représentations composante par composante est essentiellement combinatoire comme l'ont remarqué [DHST11]. Il s'avère que l'on peut également donner des règles combinatoires d'induction et de restriction.

4.3.1 Induction des modules simples

Rappelons que dans le cas d'un monoïde $\mathcal{J}$-trivial M, les modules de Schützenberger des $\mathcal{J}$-classes régulières forment une collection complète de $\Bbbk M$-modules simples. Le théorème 4.7 donne alors une construction combinatoire de l'induction de deux M-modules simples.

Soient $e \in M_m$, $f \in M_n$ et $ef = \rho(e\otimes f)$ vus comme éléments de M_{m+n}, définissons l'ensemble $X(e,f)$ des éléments de $(ef)M_{m+n}$ qui ne sont pas image par ρ de $(x\otimes y)$ avec $x \in \mathcal{R}_<(e)$ et $y \in \mathcal{R}_<(f)$; c'est à dire

$$X(e,f) = (ef)M_{m+n}\Big/\bigcup_{\substack{e'\in eM, f'\in fM\\(e',f')\neq(e,f)}} e'f'M_{m+n}\,. \tag{4.2}$$

Théorème 4.8. *Soit $(M_i)_i$ une tour de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux et (A_i) les $\Bbbk$-algèbres associées. L'induction de deux modules simples S_e et S_f est alors donnée par :*

$$\operatorname{Ind}_{A_m\otimes A_n}^{A_{m+n}} S_e\otimes S_f = \sum_{x\in X(e,f)} S_{\mathrm{lfix}(x)}.$$

Démonstration. Une application directe du théorème 4.7 donne que :

$$\operatorname{Ind}_{A_m\otimes A_n}^{A_{m+n}} S_e\otimes S_f = \sum_{x\in X(e,f)} S_x.$$

La proposition 3.20 donne directement la formule du théorème. □

4.3.2 Restriction des modules simples

Intéressons nous maintenant à la restriction d'un $\Bbbk M_{m+n}$-module simple S_e. Comme ce dernier est d'apex $\mathcal{J}(e)$, tous les éléments qui ne sont pas plus grands que e dans le $\mathcal{J}$-ordre agissent par 0 sur S_e. En particulier, après restriction de l'action, les éléments de $\Bbbk M_m \otimes \Bbbk M_n$ qui annihilent S_e sont ceux dont l'image par ρ est dans l'annihilateur de S_e.

Théorème 4.9. *Soit $(A_i) = (\Bbbk M_i)$ une tour de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux. Soit $x \in M_{m+n}$ et S_x le A_{m+n}-module simple associé ; alors*

$$\mathrm{Res}^{A_{m+n}}_{A_m \otimes A_n} S_x = S_e \quad \text{où} \quad e = \min_{\mathcal{J}} \{e \in M_m \times M_n : \rho_{m,n}(e) \in E(M_{m+n}) \text{ et } \rho_{m,n}(e)x = x\}.$$

Démonstration. Comme la tour (A_i) est une tour de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux, S_x est un module de dimension 1 et sa restriction à $A_m \otimes A_n$ est simple car de dimension 1. En particulier par le théorème 3.13, le module restreint a pour apex $\mathcal{J}(e)$. La plus petite $\mathcal{J}$-classe qui n'annihile par $\mathrm{Res}\, S_x$ contient tous les éléments $\{e \in M_m \times M_n : \rho_{m,n}(e) \in E(M_{m+n}) \text{ et } \rho_{m,n}(e)x = x\}$. L'existence de l'apex pour tout module simple permet de conclure. □

4.4 Anneaux de Grothendieck

Soit (A_i) une tour d'algèbres, chaque composante graduée A_i admet deux groupes de Grothendieck $G_0(A_i)$ et $K_0(A_i)$ et le groupe de Grothendieck de $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} G_0(A) =& G_0\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} G_0(A_i) \\ K_0(A) =& K_0\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} K_0(A_i). \end{aligned}$$

Notre définition de tour d'algèbres 4.1 nous permet de définir les fonctions d'induction et de restriction sur G_0 et K_0. Soit M et N deux modules sur respectivement A_m et A_n. On munit les groupes de Grothendieck $K_0(A)$ et $G_0(A)$ d'un produit d'anneaux en posant

$$[M][N] = [\mathrm{Ind}^{A_{m+n}}_{A_m \otimes A_n} M \otimes N]. \tag{4.3}$$

L'associativité du produit tensoriel (théorème 2.40) assure que le produit défini est bien associatif. De la même façon, on définit un coproduit par

$$\Delta([M]) = \sum_{i+j=n} [\mathrm{Res}^{A_{m+n}}_{A_i \otimes A_j} M]. \tag{4.4}$$

Le produit et le coproduit ne sont en général pas compatibles et les anneaux ne sont en général pas des bialgèbres ou des algèbres de Hopf. Cependant, une question intéressante est de déterminer dans quels cas on obtient une structure d'algèbre de Hopf sur les anneaux de Grothendieck.

4.5 Catégorification

Dans cette section, nous donnons une définition de catégorification que nous allons utiliser de multiples fois par la suite. Les références principales que On recommande les références suivantes dont la section est inspirée : [Sav14], [Maz12] et [Cra95]. On choisit ici d'éviter d'avoir une posture très algébrique et d'aller directement à l'essentiel, dans un cadre qui peut aisément se généraliser.

Idées derrière la catégorification

L'objet de la *catégorification* est de traduire dans la théorie des catégories des notions de théorie des ensembles, dans l'espoir d'avoir un équivalent « riche » d'un objet « simple » afin d'obtenir de la structure supplémentaire sur celui-ci. L'équivalence recherchée peut-être résumée dans le tableau suivant.

Théorie des ensembles	Théorie des catégories
ensemble	catégorie
élément	objet
relations entre éléments	morphismes d'objets
fonction	foncteur
relations entre fonctions	transformations naturelles

Exemple 4.10. La catégorie **Set** des ensembles finis catégorifie le semi-anneau $(\mathbb{N}, +, \times)$. L'addition est catégorifiée par l'union disjointe et le produit par le produit cartésien. De plus les opérations (addition et multiplication) catégorifiées sont toujours associatives, commutatives et distributives l'une envers l'autre.

Pour passer d'une catégorie à l'ensemble, il faut en *oublier* la structure. Le *groupe de Grothendieck* d'une catégorie est l'outil que nous allons utiliser pour passer des catégories aux ensembles.

Nous allons essentiellement considérer une catégorie $\mathfrak{A}$ de A-modules pour une algèbre A finiment engendrée. Le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ a pour équivalent de l'addition le foncteur somme directe dans $\mathfrak{A}$. De plus, l'identité dans $K_0(A)$ correspond bien sûr au foncteur identité de $\mathfrak{A}$. En conclusion, $\mathfrak{A}$ catégorifie le groupe $K_0(A)$.

L'utilisation des groupes de Grothendieck comme *foncteurs d'oubli* permet d'avoir une interprétation en théorie des représentations de l'objet catégorifié. En combinatoire, la catégorification est utilisée comme tentative de voir des objets riches dans un contexte de théorie des représentations d'algèbres. Aussi, cela permet de donner une interprétation de certains coefficients de structures qui sont positifs.

Catégorification naïve

Soit A une $\Bbbk$-algèbre engendrée par une famille $(a_i)_{i\in I}$. Considérons M un A-module à droite, chaque a_i définit alors un endomorphisme de M par multiplication à droite :

$$a_i^M : m \mapsto m \cdot a_i.$$

Définition 4.11. Une *catégorification naïve* du triplet $(A, (a_i)_{i\in I}, M)$ est la donnée d'un triplet $(\mathfrak{M}, \varphi, (F_i)_{i\in I})$ où

- $\mathfrak{M}$ est une catégorie de modules finiment engendrés,
- $\varphi : K_0(\mathfrak{M}) \to A$ est un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbre,
- pour chaque $i \in I$, $F_i : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ est un endofoncteur de $\mathfrak{M}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{[F_i]} & K_0(\mathfrak{M}) \\ \updownarrow{\scriptstyle \varphi} & & \updownarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A & \xrightarrow{a_i^A} & A \end{array}$$

En d'autre termes, le morphisme φ permet de remonter l'action des a_i^M au niveau de $K_0(\mathfrak{M})$. La notion de catégorification en tant que telle est très faible, idéalement on veut pouvoir aussi catégorifier

des relations entre les générateurs a_i mais nous ne donnerons pas d'élément généraux de *catégorification forte* dans ce manuscrit. Sur ce sujet, voir par exemple le très complet [Maz12].

Dans nos exemples, $\mathfrak{M}$ sera une catégorie de A-modules finiments engendrés avec $A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$ avec A_n de dimension finie. Le foncteur F_i sera typiquement l'induction de modules.

Exemple 4.12. On peut réécrire le théorème 3.9 dans le vocabulaire de la catégorification. En effet, l'anneau des caractères du groupe symétrique, comme on l'a vu, est isomorphe à l'anneau des fonctions symétriques.

On peut construire les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sans faire de choix sur les tableaux. Voir par exemple [FH91, Problème 4.47] pour une construction des modules de *Specht* S^λ. En posant $\varphi : K_0(\mathfrak{S}) \to \Lambda$ qui envoie $[S^\lambda] \mapsto s_\lambda$ où s_λ est la fonction de Schur associée à la partition λ, alors le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathfrak{S}) \otimes \Bbbk & \xrightarrow{\mathrm{Ind} \otimes [\mathrm{id}_\Bbbk]} & K_0(\mathfrak{S}) \otimes \Bbbk \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\text{right mult.}} & \Lambda \end{array}$$

Catégorification d'algèbres de Hopf duales

Soit $(\mathbf{H}, \mathbf{H}^*)$ un couple d'algèbres de Hopf duales et un morphisme $\mathcal{C} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$. On appelle *catégorification* de la paire d'algèbres de Hopf duale $\mathbf{H}/\mathbf{H}^*$ par le crochet $\langle -, - \rangle$. Catégorifier la paire revient à exhiber une catégorie $\mathfrak{M}$ telle que les deux groupes de Grothendieck $K_0(\mathfrak{M})$ et $G_0(\mathfrak{M})$ soient isométriques à $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^*$, c'est à dire que les trois diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathfrak{M}) \otimes \Bbbk & \xrightarrow{\mathrm{Ind} \otimes [\mathrm{id}_\Bbbk]} & K_0(\mathfrak{M}) \otimes \Bbbk \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_K} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_k} \\ \mathbf{H} & \xrightarrow{\text{right mult.}} & \mathbf{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G_0(\mathfrak{M}) \otimes \Bbbk & \xrightarrow{\mathrm{Ind} \otimes [\mathrm{id}_\Bbbk]} & G_0(\mathfrak{M}) \otimes \Bbbk \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_G} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_G} \\ \mathbf{H}^* & \xrightarrow{\text{right mult.}} & \mathbf{H}^* \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} K_0 \times G_0 & & & & \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_K \times \varphi_G} & & \searrow^{\langle -,- \rangle} & & \\ & & & \Bbbk & \\ & & \nearrow_{\langle -,- \rangle} & & \\ \mathbf{H} \times \mathbf{H}^* & & & & \end{array} .$$

Définition 4.13. Si $\mathfrak{M}$ catégorifie la paire d'algèbres de Hopf duales $\mathbf{H}, \mathbf{H}^*$, la transformation naturelle $K_0(\mathfrak{M}) \to G_0(\mathfrak{M})$ est appelée *morphisme de Cartan* et est un homomorphisme d'algèbres de Hopf.

Exemple 4.14. Le monoïde 0-Hecke catégorifie le couple d'algèbres duales **NCSF**/QSym. En effet, $K_0(H_n(0)) \simeq \mathbf{NCSF}$ et $G_0(H_n(0)) \simeq \mathrm{QSym}$. De plus, le morphisme $\mathbf{NCSF} \to \mathrm{QSym}$ qui envoie

$$R_I \longmapsto \sum_{\mathrm{Des}_L(\sigma)=I} F_{\mathrm{Des}_R(\sigma)}$$

est catégorifé par le morphisme de Cartan $K_0 \to G_0$.

4.6 Tours d'algèbres au sens de Bergeron et Li

Plusieurs définitions de tours d'algèbres à des fins de catégorification existent dans la littérature. Dans [BL09], Bergeron et Li ont proposé une définition de tour d'algèbre qui garantit que les anneaux de Grothendieck K_0 et G_0 sont des algèbres de Hopf duales. Il apparaît cependant que leurs axiomes (4) et (5) sont trop contraignants pour la plupart de nos exemples ; c'est pourquoi notre définition 4.1 ne les inclut pas.

Dans cette section, nous rappelons leurs définitions et les différentes conséquences de leur construction.

Définition 4.15 ([BL09, Section 3.1])**.** Une algèbre graduée $A = \oplus_{n\geqslant 0} A_n$ est une tour de $\mathbb{C}$-algèbres si les conditions suivantes sont respectées :

(1-2-3) A satisfait la définition 4.1 de tour d'algèbres ;

(4) une relation entre les décompositions de A_{m+n} comme $(A_m \otimes A_n)$-module à gauche et comme $(A_m \otimes A_n)$-module à droite est vérifiée ;

(5) une égalité analogue à la formule de Mackey pour les groupes est vérifiée.

Après avoir introduit cette définition, Bergeron et Li montrent que les conditions sont suffisantes pour obtenir une paire de bigèbres duales.

Théorème 4.16 ([BL09, Théorème 3.6])**.** *Soit A une tour d'algèbres satisfaisant les axiomes (1)-(5), alors nous pouvons munir les anneaux de Grothendieck $K_0(A)$ et $G_0(A)$ d'une structure d'algèbres de Hopf duales.*

La condition (5) est suffisamment rigide pour impliquer la compatibilité entre produit et coproduit. Cependant, cette condition qui est toujours vérifiée dans le cas des groupes finis, est très contraignante dans le cadre des algèbres de dimensions finies quelconques. On peut se demander si la condition est également nécessaire, où alors donner un résultat quantitatif donnant une idée de ce qu'il est possible de catégorifier avec ce théorème.

Bergeron et Li donnent deux exemples d'application du théorème. Le premier est la tour des algèbres de groupes symétriques $(\mathfrak{S}, \varphi)$ où $\Bbbk\mathfrak{S} = \otimes_{n\geqslant 0}\Bbbk\mathfrak{S}_n$ et $\varphi_{m,n} : (\sigma \otimes \mu) = \sigma\bar{\cdot}\mu$ la concaténation décalée. Il est aisé de vérifier que les hypothèses sont bien vérifiées (l'hypothèse (4) est impliquée par le théorème de Maschke).

Le second exemple est la tour des algèbres de Hecke à $q = 0$.

Avec Thomas Lam, les deux auteurs précédents montrent que la structure de tour d'algèbres telle que définie en 4.15 implique des contraintes sur la dimension des composantes graduées.

Théorème 4.17 ([BLL12, Théorème 1.1])**.** *Soit $A = \oplus_{n\geqslant 0} A_n$ une tour d'algèbres au sens de Bergeron et Li, alors* $\dim A_n = r^n n!$ *avec* $r = \dim A_1$.

4.7 Tours de semi-treillis

On étudie dans cette section des représentations de certaines tours de semi-treillis. Ces tours constituent les exemples les plus élémentaires de tours de monoïdes et les règles d'induction et de restriction s'expriment simplement. On obtiendra plusieurs semi-catégorifications de certaines algèbres de Hopf. Certains semi-treillis ont déjà été étudiés avec les mêmes fins. Les auteurs de [BHRZ06] considèrent le semi-treillis des partitions afin de retrouver les fonctions symétriques non commutatives à partir des représentations.

Rappelons qu'un semi-treillis est un monoïde commutatif idempotent. La loi $\wedge$ munie naturellement E d'une structure d'ordre avec 1 comme maximum, ce qui en fait un monoïde $\mathcal{J}$-trivial par la proposition 2.18. Chaque élément e d'un semi-treillis E contribue à un $\Bbbk E$-module simple de dimension 1, l'ensemble (S_e) des modules simples est complet.

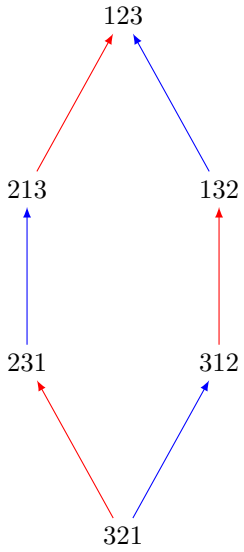
Proposition 4.18. *Soit $\Bbbk E$ l'algèbre d'un semi-treillis E, alors $\Bbbk E$ est semi-simple.*

Démonstration. Tous les modules simples $(S_e)_{e\in E}$ sont deux à deux non isomorphes, et par égalité des dimensions nous avons :

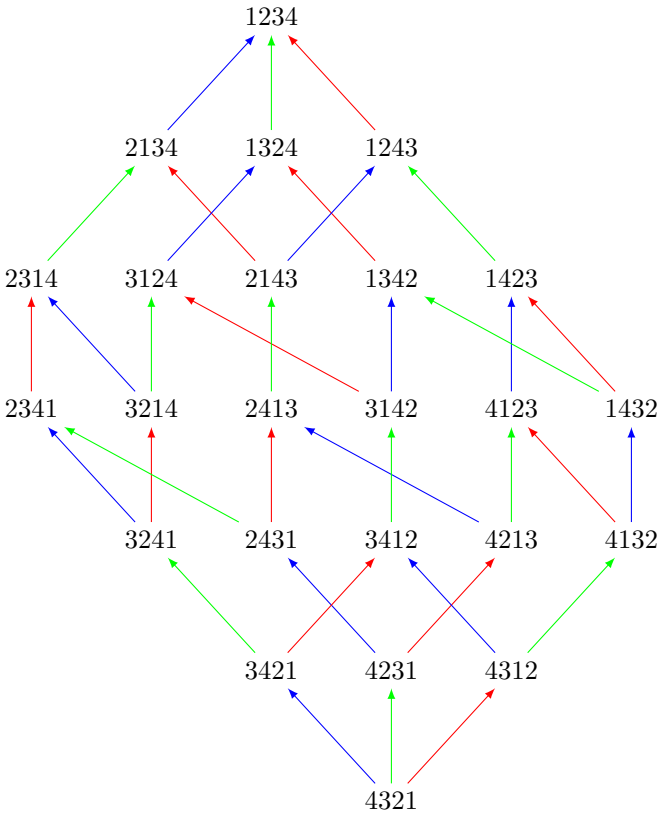
$$\Bbbk E = \bigoplus_{e\in E} S_e\,. \qquad \square$$

En particulier, les deux anneaux de Grothendieck $K_0(\Bbbk E)$ et $G_0(\Bbbk E)$ sont isomorphes.

4.7.1 Tour des permutoèdres



(a) $\mathfrak{S}_3$-permutoèdre



(b) $\mathfrak{S}_4$-permutoèdre droit

Ordre faible sur les permutations

Il existe de nombreuses définitions toutes équivalentes de l'ordre faible sur les permutations. Celle que nous allons utiliser repose sur la notion d'inversion (définition 2.1). Soient σ et μ deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ pour un n fixé. On définit l'ordre faible comme suit :

$$\sigma \preceq \mu \text{ si et seulement si } \mathrm{Inv}(\mu) \subseteq \mathrm{Inv}(\sigma).$$

Cet ordre permet de munir l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$ d'une structure de treillis $(\mathcal{P}_n, \wedge, \vee)$ avec pour élément maximum id, et pour élément minimum la permutation de longueur maximale $n\cdots 21$.

Définition 4.19. On appelle *permutoèdre* le treillis $\mathcal{P}$.

Ce treillis est gradué par le nombre d'inversions des permutations. La distance entre id et w_0 dans $\mathcal{P}_n$ est donc $n(n-1)/2$.

Par abus, nous noterons $\mathcal{P}_n$ le monoïde $(\mathcal{P}_n, \wedge, \mathrm{id})$.

A l'instar de la tour des groupes symétriques, nous munissons l'ensemble des permutoèdres $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la concaténation décalée comme plongement :

$$\rho_{m,n} : \begin{cases} \mathcal{P}_m \otimes \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathcal{P}_{m+n} \\ (\sigma, \mu) & \longmapsto & \sigma \,\overline{\cdot}\, \mu\,. \end{cases}$$

De la structure même du plongement, nous déduisons que les inversions (voir 2.1) du plongement $\rho_{m,n}(\sigma,\mu)$ s'expriment naturellement en fonction de $\mathrm{Inv}(\sigma)$ et $\mathrm{Inv}(\mu)$:

$$\mathrm{Inv}(\rho_{m,n}(\sigma,\mu)) = \mathrm{Inv}(\sigma) \overline{\cup}\, \mathrm{Inv}(\mu).$$

Induction des $\mathbb{k}\mathcal{P}$-modules

Nous sommes dans le cadre d'application du théorème 4.8. Comme tout élément de $\mathcal{P}$ est idempotent, $\forall e \in \mathcal{P}$, $\mathrm{lfix}(e) = \mathrm{rfix}(e) = e$. Il reste alors à comprendre la structure de l'ensemble $X(\sigma,\mu)$ de l'équation 4.2. Soit $\sigma \in \mathcal{P}$, l'idéal $\sigma \cdot \mathcal{P}$ est composé des permutations ν telles que $\ell(\sigma) \subseteq \ell(\nu)$. Les éléments de $X(\sigma,\mu)$ sont les permutations ν telles que

$$\nu \in X(\sigma,\mu) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \mathrm{Inv}(\nu) & \subseteq \mathrm{Inv}(\sigma) \overline{\cup}\, \mathrm{Inv}(\mu), \\ \mathrm{Inv}(\nu)_{|[1,m]} & = \mathrm{Inv}(\sigma), \\ \mathrm{Inv}(\nu)_{|[m+1,m+n]} & = \mathrm{Inv}(\mu). \end{cases} \tag{4.5}$$

La première condition provient de $\nu \in \rho_{m,n}(\sigma,\mu)\cdot\mathcal{P}$ et les deux suivantes du quotient. En effet, si $\ell(\nu)_{|[1,n]} \subsetneq \mathrm{Inv}(\sigma)$, alors il existe $\sigma' \preceq \sigma$ tel que $\nu \in \rho_{m,n}(\sigma',\mu)\cdot\mathcal{P}$.

Nous avons démontré le théorème suivant décrivant l'induction des modules simples dans la tour des permutoèdres.

Théorème 4.20. *Dans la tour des permutoèdres, la règle d'induction des modules simples est donnée par*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{k}(\mathcal{P}_m\otimes\mathcal{P}_n)}^{\mathbb{k}\mathcal{P}_{m+n}} S_{\sigma\otimes\mu} = \bigoplus_{\nu\in X(\sigma,\mu)} S_\nu\,.$$

On peut remarquer que les multiplicités des modules de la somme directe sont toutes 1. Il est connu que les permutations satisfaisant 4.5 sont exactement les permutations ν telles que $\nu^{-1} \in \sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \mu$. Cet ensemble est également un intervalle du permutoèdre. On obtient alors une formule simple pour le produit dans l'anneau de Grothendieck de la tour des permutoèdres.

Corollaire 4.21. *Le produit dans $G_0(\mathbb{k}\mathcal{P})$ est*

$$[S_\sigma]\cdot[S_\mu] = \sum_{\nu\in\sigma\,\overline{\sqcup\!\sqcup}\,\nu} [S_{\nu^{-1}}]\,.$$

On reconnaît la règle de produit de la base **G** de **FQSym**.

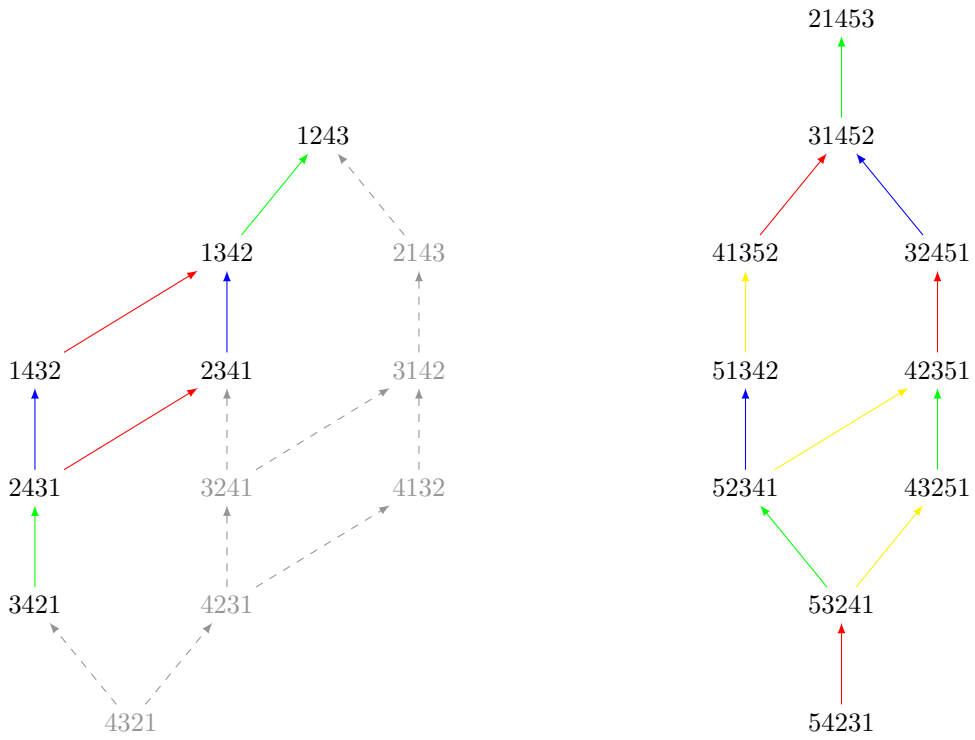
Exemple 4.22. Considérons le plongement $\mathbb{k}\mathcal{P}_2 \otimes \mathbb{k}\mathcal{P}_2 \to \mathbb{k}\mathcal{P}_4$ et l'induction du module $S_{12}\otimes S_{21}$ dans $\mathcal{P}_4$. Le théorème 4.20 donne la décomposition suivante (voir figure 4.7.2a)

$$S_{12}\hat{\otimes}S_{21} = S_{1243}\otimes S_{1342}\otimes S_{1432}\otimes S_{2341}\otimes S_{2431}\otimes S_{3421}.$$

Dans l'anneau de Grothendieck $G_0(\mathcal{P})$ on a immédiatement

$$[S_{12}][S_{21}] = [S_{1243}] + [S_{1342}] + [S_{1432}] + [S_{2341}] + [S_{2431}] + [S_{3421}].$$

Exemple 4.23. Dans $G_0(\mathcal{P})$, le produit de $[S_{21}][S_{231}]$ donne l'intervalle de la figure 4.7.2b:
$[S_{21}]\cdot[S_{231}] =$
$[S_{21453}] + [S_{31452}] + [S_{32451}] + [S_{41352}] + [S_{42351}] + [S_{43251}] + [S_{51342}] + [S_{52341}] + [S_{53241}] + [S_{54231}]$.



(a) $X(12, 21)$ (b) $X(21, 231)$

FIG. 4.7.2: Quelques intervalles du permutoèdre

Restriction des $\Bbbk\mathcal{P}$-modules

Comme l'algèbre de la tour des permutoèdres est semi-simple, nous pouvons appliquer le théorème de dualité de Frobenius.

Lemme 4.24. *Soit $\sigma \in \mathcal{P}_{m+n}$, la restriction de S_σ à $\mathcal{P}_m \otimes \mathcal{P}_n$ est*

$$\operatorname{Res} S_\sigma = S_{\sigma_{|[1,m]}} \otimes S_{\sigma_{|[m+1,m+n]}}.$$

Démonstration. Grâce à la semi-simplicité de l'algèbre $\Bbbk\mathcal{P}$, c'est une application directe du théorème de Frobenius. On a

$$\langle \underbrace{\operatorname{Ind} U}_{K_0}, \underbrace{V}_{G_0} \rangle = \langle U, \operatorname{Res} V \rangle,$$

avec $K_0 = G_0$ par semi-simplicité. On peut alors l'interpréter comme : V est un terme de $\operatorname{Ind} U$ si et seulement si U est un terme de $\operatorname{Res} V$. Comme on sait que $\operatorname{Res} V$ est de dimension 1, l'assertion de droite est équivalente à $U = \operatorname{Res} V$.

Soit S_σ un $\Bbbk\mathcal{P}_{m+n}$-module simple. Le seul module de $\Bbbk\mathcal{P}_m \otimes \Bbbk\mathcal{P}_n$ dont l'induit admet S_σ comme terme est $S_{\sigma_{|[1,m]}} \otimes S_{\sigma_{|[m+1,m+n]}}$. □

On en déduit directement le coproduit 4.4.

Théorème 4.25. *Soit $\sigma \in \mathcal{P}_{m+n}$, le coproduit vérifie la formule*

$$\Delta([S_\sigma]) = \sum_{\substack{u\cdot v=\sigma \\ \mathrm{Inv}(\mu)=\mathrm{Inv}(u) \\ \mathrm{Inv}(\nu)=\mathrm{Inv}(v)}} [S_\mu] \otimes [S_\nu] = \sum_{u\cdot v=\sigma} [S_{\mathrm{Std}(u)}] \otimes [S_{\mathrm{Std}(v)}]\,.$$

Semi-catégorification de FQSym

Notons $\mathfrak{P}$ la catégorie des $\Bbbk\mathcal{P}$-modules à droite finiment engendrés. Les lois de produit et de coproduit dans la tour des permutoèdres sont semblables au produit dans **FQSym** de la base **G** et au coproduit de la base **G**.

Nous disposons de la décatégorification suivante : $\varphi : S_\sigma \mapsto \mathbf{G}_\sigma \in \mathbf{FQSym}$. Il est clair que φ est un isomorphisme de la catégorie des $\Bbbk\mathcal{P}$-modules dans **FQSym**. Il reste à étudier comment φ relève la multiplication de **FQSym**.

Chaque $\mathbf{G}_\sigma$ donne un endomorphisme de **FQSym** par multiplication à droite

$$\mathbf{G}_\mu \longmapsto \mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\sigma.$$

Le théorème 4.20 permet de remonter cet endomorphisme dans la catégorie des $\Bbbk\mathcal{P}$-modules. Soit $\sigma \in \mathcal{P}_m$, le foncteur $\mathrm{Ind}(- \otimes S_\sigma)$ commute avec φ selon la définition 4.11.

Proposition 4.26. *Le triplet $(\mathfrak{P}, \varphi, (S_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}})$ catégorifie l'algèbre $(\mathbf{FQSym}, (\mathbf{G}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}}, \Bbbk\mathcal{P})$.*

4.7.2 Tour des treillis de Tamari

Le treillis de Tamari a été introduit par [Tam62] lors de l'étude d'algèbres de parenthésages. La théorie des treillis de Tamari a été, depuis, fortement étudiée avec un très fort regain au début des années 2000 pour sa connexion fondamentale avec les algèbres amassées ([FR07]).

Rotations dans les ABR

Sur les arbres binaires, nous disposons de deux opérations appelées *rotations* à gauche et à droite. Elles s'effectuent à partir d'un nœud de l'arbre comme dans la figure 4.7.3.

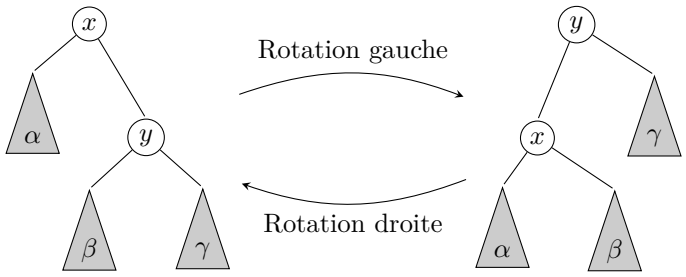


FIG. 4.7.3: Rotations

Définition 4.27. Sur les arbres binaires à n nœuds, on note $T \leqslant_T T'$ si on peut obtenir T depuis T' par rotations à gauche successives. On peut montrer que cela donne un ordre bien défini appelé *ordre de Tamari*

Proposition 4.28 ([FT67])**.** *L'ensemble ordonné $(\mathcal{T}_n, \leqslant_T)$ est un treillis, appelé treillis de Tamari.*

Ce treillis admet comme élément maximal l'arbre filiforme droit (l'unique arbre dont tous les nœuds ont un unique fils droit), et comme élément minimal l'arbre filiforme gauche. Il est gradué par le nombre de fils gauches. La figure 4.7.4 représente les treillis de Tamari des arbres binaires à 4 nœuds.

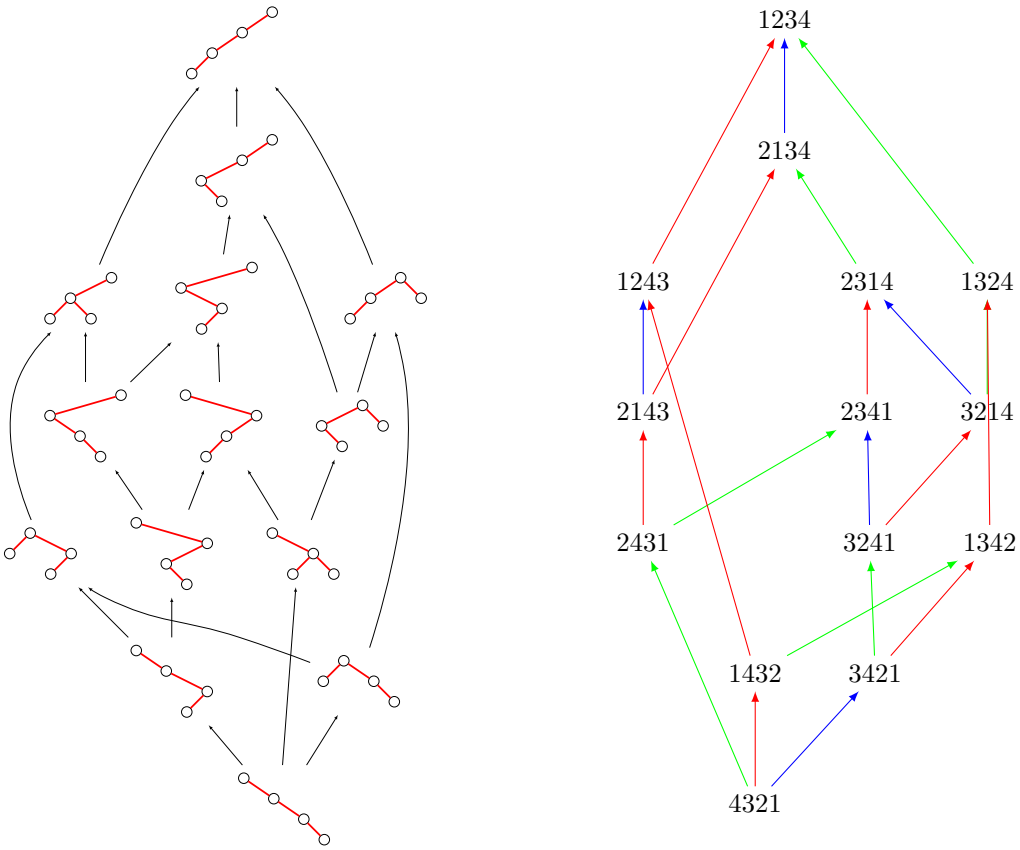


FIG. 4.7.4: Treillis de Tamari sur les arbres binaires à 4 nœuds.

Théorie des représentations du treillis de Tamari

Comme précédemment pour la tour des permutoèdres, munissons les treillis de Tamari d'une structure de tour et étudions les représentations. L'objectif est de les relier à l'algèbre de Hopf **PBT**. Dans toute la suite, nous confondrons un arbre et sa permutation canonique.

Considérons le monoïde commutatif idempotent $(\mathcal{T}_n, \wedge)$ dont l'unité est l'arbre filiforme droit (l'élément maximal du treillis de Tamari). Soient deux arbres $T_m \in \mathcal{T}_m$ et $T_n \in \mathcal{T}_n$, la forme de la concaténation décalée de w_{T_m} et w_{T_n} donne un arbre $T_{m+n} \in \mathcal{T}_{m+n}$. On dispose ainsi d'une famille de plongements

$$\varphi_{m,n} : \begin{cases} \mathcal{T}_m \otimes \mathcal{T}_n & \longrightarrow & \mathcal{T}_{m+n} \\ (T_m, T'_n) & \longmapsto & w_{T_m} \bar{\cdot} w_{T'_n}, \end{cases}$$

qui sont injectifs et associatifs selon l'axiome (iii). On représentera les éléments du treillis de Tamari $\mathcal{T}_n$ comme les représentants minimaux des classes sylvestres sur les permutations $\mathfrak{S}_n$.

Exemple 4.29. $(132) \cdot (21) = (13254)$

Nous allons réutiliser le résultat obtenu dans le cadre du permutoèdre. En effet, le théorème suivant affirme qu'il existe un morphisme de treillis $\pi : \mathcal{P}_n \twoheadrightarrow \mathcal{T}_n$.

Théorème 4.30 ([LR98, Corollaire 2.8]). *Le treillis de Tamari $\mathcal{T}_n$ est un quotient du permutoèdre $\mathcal{P}_n$.*

Plus précisément, les classes du quotient sont exactement les classes sylvestres. Voir figure 4.7.5 pour une illustration du quotient pour $n = 4$.

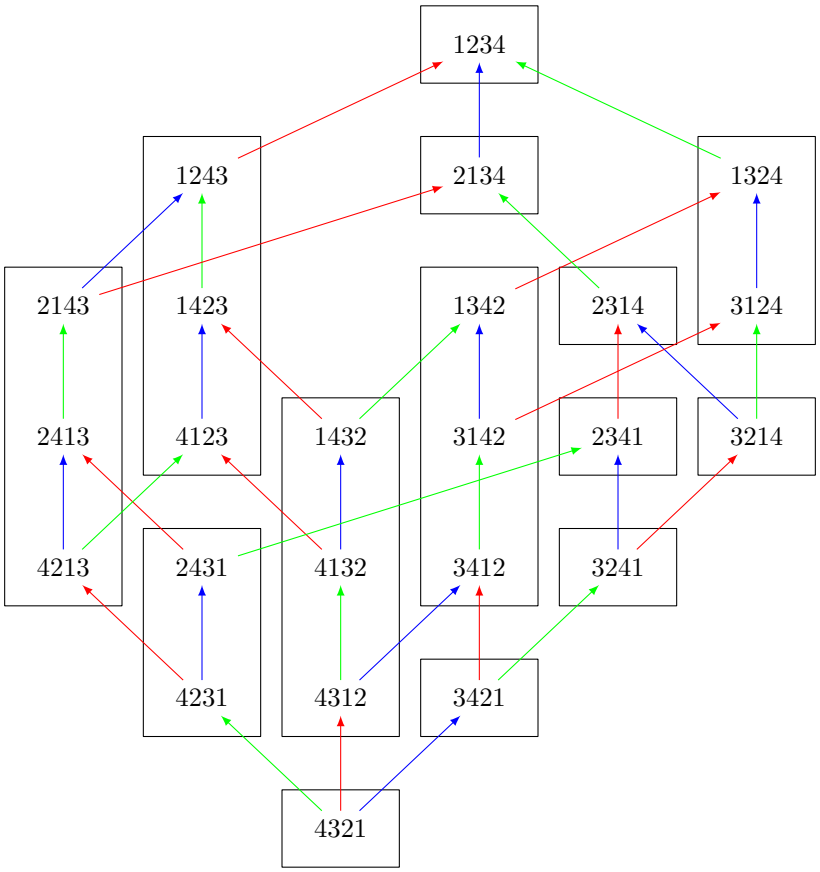


FIG. 4.7.5: Le treillis de Tamari comme quotient du permutoèdre.

Considérons deux arbres $T \in \mathcal{T}_m$ et $T' \in \mathcal{T}_n$. Ils engendrent deux $\Bbbk\mathcal{T}$-modules simples S_T et $S_{T'}$. Afin de se ramener au cas du permutoèdre, soit σ (respectivement μ) une permutation telle que $\pi(\sigma) = T$ (respectivement $\pi(\mu) = T'$).

Là encore, par application du théorème 4.8 on cherche à construire l'ensemble $X(T, T')$ décrit à l'équation 4.2. Comme π est un morphisme de POSET, si $U < V$ dans $\mathcal{T}_m$, avec $\pi(u) = U$ et $\pi(v) = V$, alors $u < v$ dans $\mathcal{P}$. En appliquant le même raisonnement que pour les treillis des permutoèdres, nous en déduisons que les termes de $S_U \hat{\otimes} S_V$ admettent comme représentants des permutations de $w_U \,\overline{\sqcup}\, w_V$. Réciproquement si $\sigma \in w_U \,\overline{\sqcup}\, w_V$, alors l'arbre $\mathcal{P}(\sigma)$ est dans le quotient décrit par le théorème d'induction des modules simples dans les tours de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux (4.8).

Proposition 4.31. *Soient $U \in \mathcal{T}_m$ et $V \in \mathcal{T}_n$, S_U et S_V les deux modules simples associés aux arbres précédemment définis. La règle d'induction est*

$$S_U \hat{\otimes} S_V = \sum_{\nu \in w_U \,\overline{\sqcup}\, w_V} S_{\mathcal{P}(\nu^{-1})}. \tag{4.6}$$

De la même façon que pour la tour des permutoèdres, on déduit de la dualité de Frobenius la règle de restriction suivante.

Proposition 4.32. *Soit T un arbre du treillis de Tamari $\mathcal{T}_{m+n}$, la restriction du module S_T à $\Bbbk\mathcal{T}_m \otimes \Bbbk\mathcal{T}_n$ est*

$$\operatorname{Res} S_T = S_U \otimes S_V, \tag{4.7}$$

où $U = \mathcal{P}(w_{T_{|[1,m]}})$ et $V = \mathcal{P}(w_{T_{|[m+1,m+n]}})$.

Semi-catégorification de PBT

On remarque que l'induction des simples ressemble au produit de la base **P** dans **PBT**. On peut là encore donner un sens algébrique à cette ressemblance. De la proposition 4.32 on en déduit un coproduit sur $\Bbbk\mathcal{T}$:

$$\Delta(S_T) = \sum_{(U,V)\in \mathrm{Des}(T)} S_U \otimes S_V, \tag{4.8}$$

où $\mathrm{Des}(T)$ est l'ensemble des paires (U, V) d'arbres telles que w_U (respectivement w_V) sont les mots standardisés de mots w_1 (respectivement w_2) avec $\mathcal{P}(w_1 \bar{\cdot} w_2) = T$.

On note $\mathfrak{T}$ la catégorie des $\Bbbk\mathcal{T}$-modules à droite finiment engendrés. On a les deux propositions suivantes de semi-catégorification.

Proposition 4.33. - *Le triplet* $(\mathfrak{T}, \varphi, (S_T)_{T\in\mathcal{T}})$ *catégorifie l'algèbre* $(\mathbf{PBT}, (\mathbf{P}_T)_{T\in\mathcal{T}})$.

- *Le triplet* $(\mathfrak{T}, \varphi, (S_T)_{T\in\mathcal{T}})$ *catégorifie la cogèbre* $(\mathbf{PBT}, (\mathbf{Q}_\sigma)_{T\in\mathcal{T}})$.

4.7.3 Tour des treillis booléens

On considère le treillis booléen $\mathcal{B}_n$ que l'on représente comme l'ensemble des mots binaires (u_i) de longueur n muni de la relation d'ordre :

$$(u_i) \leqslant (v_i) \text{ si et seulement si } \forall i, u_i \leqslant v_i.$$

La concaténation donne un morphisme $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{m+n}$ qui vérifie les axiomes de la définition 4.2 et $\mathcal{B} = \oplus_{n\geqslant 0}\mathcal{B}_n$ est une tour de monoïdes commutatifs et idempotents, et en particulier $\mathcal{J}$-triviaux.

Induction des $\Bbbk\mathcal{B}$-modules simples

Soient $u \in \mathcal{B}_m$ et $v \in \mathcal{B}_m$ qui contribuent en deux modules simples S_u et S_v. Si on se donne $w \in \mathcal{B}_{m+n}$ tel que $w < u\bar{\cdot}v$ alors sans perte de généralité, $w_{|[1,m]} < u$ d'où l'on déduit que $w \in \rho(\mathcal{R}_<(u)\otimes\mathcal{R}_<(v))\mathcal{B}_{m+n}$. D'après le théorème 4.7, on a alors montré la règle d'induction donné par la proposition suivante.

Proposition 4.34. *Soient* u *et* v *deux éléments de* $\mathcal{B}$, S_u *et* S_v *les modules simples associés ; alors*

$$\mathrm{Ind}_{\Bbbk\mathcal{B}_m\otimes\Bbbk\mathcal{B}_n}^{\Bbbk\mathcal{B}_{m+n}} S_u \otimes S_v = S_{u\bar{\cdot}v}.$$

Restriction des $\Bbbk\mathcal{B}$-modules simples

Comme l'algèbre $\Bbbk\mathcal{B}$ est semi-simple, on peut obtenir la règle de restriction des modules simples par dualité de Frobenius à partir de la règle d'induction. On obtient trivialement la proposition suivante.

Proposition 4.35. *Soit* $w \in \mathcal{B}_{m+n}$ *et* S_w *le* $\Bbbk\mathcal{B}_{m+n}$*-module simple associé ; alors*

$$\mathrm{Res}_{\Bbbk\mathcal{B}_m\otimes\Bbbk\mathcal{B}_n}^{\Bbbk\mathcal{B}_{m+n}} = S_{w_{|[1,m]}} \otimes S_{w_{|[m+1,m+n]}}.$$

Le coproduit

$$\Delta(S_w) = \sum_{0\leqslant i\leqslant m} S_{w_{|[1,i]}} \otimes S_{w_{|[i+1,m]}}$$

muni $G_0(\mathcal{B})$ d'une structure de cogèbre.

On reconnaît le produit dans **NCSF** sur la base des Λ et le coproduit dans QSym sur la base fondamentale F ce qui donne une fois encore une semi-catégorification de l'algèbre et de la cogèbre, mais sans pour autant retrouver la structure d'algèbre de Hopf.

Semi-catégorification de NCSF

Proposition 4.36. *Le triplet* $(\mathfrak{B}, \varphi, (S_w))$ *catégorifie l'algèbre* $(\mathbf{NCSF}, \mathcal{B}, (\Lambda_I))$.

4.8 Tours d'algèbres basiques

La notion d'algèbre basique à été introduite par Nesbitt et Scott [NS43]. On va montrer que dans certains cas, incluant ceux qui vont nous intéresser par la suite, l'algèbre catégorifiante est nécessairement basique.

Définition 4.37. Une $\Bbbk$-algèbre A est *basique* si tous les A-modules irréductibles sont de dimension 1.

Proposition 4.38. *Soit* A *une algèbre basique de dimension finie et* $(m_{i,j})$ *sa matrice de Cartan. On a l'égalité* $\dim A = \sum m_{i,j}$.

Démonstration. Soit A une algèbre de dimension finie vue comme un module sur elle-même ; alors

$$\dim A = \sum_{i \in I} (\dim P_i)(\dim S_i)$$

où $(P_i)_{i \in I}$ est un système complet de A-module projectifs indécomposables et $(S_i)_{i \in I}$ est un système complet de modules simples associés. Supposons A basique, alors chaque S_i est de dimension 1 et nous avons $\dim A = \sum_{i \in I} (\dim P_i)$.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une décomposition de l'identité en idempotents primitifs orthogonaux. La décomposition de Peirce donne

$$P_i = \bigoplus_{j \in I} e_i A e_j,$$

d'où $\dim P_i = \sum_{j \in I} \dim e_i A e_j$. Nous avons donc

$$\dim A = \sum_{i,j \in I} \dim e_i A e_j = \sum_{i,j} m_{i,j}. \qquad \square$$

La définition d'algèbre basique s'étend naturellement aux monoïdes.

Définition 4.39. Soit $\Bbbk$ un corps, on dit qu'un monoïde M est $\Bbbk$-*basique* si $\Bbbk M$ est une algèbre basique.

Exemple 4.40. Un monoïde $\mathcal{J}$-trivial est basique.

Les monoïdes basique ont fait l'objet d'une attention particulière [AMSV09, MS12] et sont caractérisés par le théorème suivant.

Théorème 4.41 ([AMSV09])**.** *Soit* $\Bbbk$ *un corps de caractéristique* 0 *et algébriquement clos et* M *un monoïde fini, alors* M *est basique si et seulement les deux conditions suivantes sont respectées :*

(i) pour chaque $\mathcal{J}$*-classe régulière* $\mathcal{J}(e)$*, le groupe* G_e *est abélien,*

(ii) pour tout $e, f \in E(M)$ *et dans la même* $\mathcal{J}$*-classe, alors* $efe = e$ *(*M *est un monoïde rectangulaire).*

Lemme 4.42. *Soit* (M_n) *une tour de monoïdes qui catégorifie une paire d'algèbres de Hopf duales* $(\mathbf{H}, \mathbf{H}^*)$ *telle que le coproduit sur* $\mathbf{H}^*$ *admet* $n+1$ *termes avec coefficient* 1 *dans toute les graduations :*

$$\Delta([S]) = \sum_{\substack{i,j \geqslant 0 \\ i+j=n}} [S_i] \otimes [S_j].$$

Si $\dim(\mathbf{H}_1^*) \leqslant 2$*, alors chaque* M_n *est basique.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Pour l'initialisation, il faut montrer qu'un monoïde qui possède deux représentations irréductibles est nécessairement basique. Nous distinguons deux cas :

- Cas 1 : $\dim(\mathbf{H}_1^*) = 1$; nécessairement M_1 est un monoïde admettant une unique représentation irréductible donc une unique $\mathcal{J}$-classe régulière contenant l'identité. Le monoïde M_1 admet donc une unique $\mathcal{J}$-classe et est alors le groupe trivial qui est l'unique groupe admettant une seule classe de conjugaison.
- Cas 2 : $\dim(\mathbf{H}_1^*) = 2$;
  (a) Cas 2.1 : M_1 contient une unique classe régulière contribuant deux représentations irréductibles. Alors M_1 est un groupe ayant deux classes de conjugaison. Soit n le cardinal de M_1, le cardinal de la classe ne contenant pas l'identité est $n-1$ et divise n par la formule des classes. On en déduit que $n = 2$ d'où $M_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; en particulier M_1 est un monoïde basique.
  (b) Cas 2.2 : M_1 contient deux $\mathcal{J}$-classes régulières, contribuant chacune une représentation irréductible. En particulier, M_1 est apériodique. La classe J_1 est réduite à l'identité ; la représentation irréductible associée est de degré 1. La classe J_2 est complètement régulière. En effet, considérons $x \in J_2$ et deux idempotents $e \in \mathcal{L}(x)$ et $f \in \mathcal{R}(x)$ dont l'existence est assurée par la proposition 2.26. Alors le produit $fe \in \mathcal{L}(f) \cap \mathcal{R}(e)$ est trivial car M_1 est apériodique. Le théorème de localisation 2.25 assure que J_2 n'est composé que d'éléments idempotents. En particulier le rang de l'image de la matrice de Rees est 1 et J_2 contribue alors un unique module irréductible de dimension 1.

Considérons le théorème vrai pour la graduation n. Soit S un M-module simple tel que $[S] \in G_0(M_{n+1})$. La restriction

$$\mathrm{Res}^{M_n}_{M_1 \otimes M_{n-1}} S = 1 \otimes U$$

avec U un M_n-module simple qui est de dimension 1 par hypothèse de récurrence. Donc le module simple S est de dimension 1. □

Corollaire 4.43. *Une tour de monoïdes (M_n) qui catégorifie le couple* **NCSF**/QSym *ou* **PBT**/**PBT*** *vérifie $|M_n| = n!$.*

Démonstration. Le coproduit de QSym vérifie les hypothèses du lemme 4.42 et M_n est alors un monoïde basique. Le corollaire se déduit alors de la proposition 4.38. □

4.9 Non catégorification de PBT

Dans cette section nous allons discuter d'un résultat négatif obtenu pendant la thèse avec mon encadrant Nicolas M. Thiéry. Nous répondons partiellement négativement à une conjecture énoncée par Hivert, Novelli, Thibon dans [HNT05] portant sur la catégorification de **PBT**. Ce résultat a été obtenu en couplant des techniques d'exploration informatique sur un espace de recherche très important, avec des techniques algébriques et combinatoires pour réduire au maximum la recherche et ainsi la rendre accessible.

Dans cette partie nous reprenons les notations de l'article original.

4.9.1 Énoncé

Matrices de Cartan

Rappelons que la suite de morphismes de Hopf

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{PBT} & \hookrightarrow & \mathbf{FQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}^* & \twoheadrightarrow & \mathbf{PBT}^* \\ \mathbf{P}_T & \mapsto & \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma, & \mathbf{F}_\sigma & \mapsto & \mathbf{G}_{\sigma^{-1}}, & \mathbf{G}_\sigma \mapsto \mathbf{Q}_{\mathcal{P}(\sigma)} \end{array}$$

fournit un isomorphisme $\phi : \mathbf{PBT} \to \mathbf{PBT}^*$ ([HNT05, corollaire 34]). Ce morphisme est donné par

$$\phi(\mathbf{P}_T) = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} \mathbf{Q}_{\mathcal{P}(\sigma^{-1})}. \tag{4.9}$$

Dans [HNT05], les auteurs se demandent si on peut interpréter **PBT** et $\mathbf{PBT}^*$ comme les K_0 et G_0 d'une tour d'algèbre dont ϕ serait l'opérateur de Cartan $K_0 \to G_0$.

L'analogie entre les rubans de Schur et la base $\mathbf{P}_T$ de **PBT** nous amène à nous demander si les entiers

$$c_{T,U} = \langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U \rangle = |\{\sigma : \mathcal{P}(\sigma) = T, \mathcal{P}(\sigma^{-1}) = U\}|$$

peuvent être vus comme la matrice des invariants d'une tour d'algèbres (A_n).

Comme $\langle \mathbf{P}_T, \mathbf{Q}_U \rangle = \dim \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_T, \mathbf{Q}_U)$ alors les coefficients diagonaux $\langle \mathbf{P}_T, \mathbf{Q}_U \rangle$ comptent au moins une fois le morphisme identité, donc sont supérieurs à 1. Ce qui implique que la matrice de Cartan doit vérifier $\mathcal{C}_{U,U} \geqslant 1$. Comme l'ont remarqués les auteurs de [HNT05], il existe une renumérotation $\nu(T) = T' = \mathcal{P}(w_T^{-1})$ des lignes dans laquelle $\mathcal{C}$ admet des 1 sur la diagonale. Du point de vue de la théorie des représentations, cela revient à ré étiqueter les modules projectifs.

Théorème 4.44 ([HNT05, Théorème 41])**.** *La matrice $C^{(n)}$ définie par*

$$C^{(n)}(T, U) = \langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_{\nu(U)} \rangle$$

est triangulaire par blocs si les arbres sont ordonnés lexicographiquement par squelette puis par ordre lexicographique sur les mots canoniques associés.

$$\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.9.1: Matrices $C^{(n)}$ pour $n = 2, 3, 4$.

Conjecture 4.45 ([HNT05, Conjecture 44])**.** Il existe une tour d'algèbres $(A_n)_{n\geqslant 0}$ satisfaisant $K_0(A) = \mathbf{PBT}$, $G_0(A) = \mathbf{PBT}^*$ et pour tout n, la matrice de Cartan de A_n est $C^{(n)}$.

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème de non-existence suivant.

Théorème 4.46. *Il n'existe pas de tour de monoïdes apériodiques catégorifiant le couple d'algèbres de Hopf duales $(\mathbf{PBT}, \mathbf{P})/(\mathbf{PBT}^*, \mathbf{Q})$ et $\phi : \mathbf{PBT} \to \mathbf{PBT}^*$.*

On obtiendra ce théorème en restreignant d'abord l'espace de recherche aux monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux dans la prochaine sous-section, puis en effectuant une recherche exhaustive pour $n \leqslant 4$ dans la sous-section suivante.

4.9.2 $\mathcal{J}$-trivialité pour $n \leqslant 5$

Lemme 4.47. *Soit (M_n) une tour de monoïdes de matrices de Cartan $C^{(n)}$ catégorifiant le couple $(\mathbf{PBT}, \mathbf{P})/(\mathbf{PBT}^*, \mathbf{Q})$; alors la tour (M_n) est basique et chaque M_n est de cardinalité $n!$. Si de plus (M_n) est apériodique, alors elle est $\mathcal{J}$-triviale au moins pour $n \leqslant 5$.*

On peut faire immédiatement plusieurs remarques. Le coproduit de **PBT** sur la base de $\mathbf{Q}_T$ vu au théorème 2.112 vérifie les hypothèses du lemme 4.42. Ainsi, une tour d'algèbres de monoïdes (A_n) qui catégorifie le couple d'algèbres de Hopf duales $(\mathbf{PBT}, \mathbf{P})/(\mathbf{PBT}^*, \mathbf{Q})$ est nécessairement basique. De plus, la somme des coefficients de $C^{(n)}$ est $n!$. D'après le lemme 4.42, une tour d'algèbres de monoïdes (A_n) qui catégorifie **PBT** doit donc être de dimension graduée $\dim A_n = n!$. Pour conclure, nous avons besoin de trois lemmes techniques généraux.

Lemme 4.48. *Soit M un monoïde fini et $\pi \in M$ un idempotent. Soit $\mathcal{J}(e)$ une $\mathcal{J}$-classe régulière contenant un idempotent e et $R(e)$ le module de Schützenberger à droite associé à la $\mathcal{R}$-classe $\mathcal{R}(e)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) π agit non trivialement sur $R(e)$,

(ii) π agit non trivialement sur tous les modules simples induits par $\mathcal{J}(e)$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que π agit non trivialement sur $R(e)$, il existe alors $r \in \mathcal{R}(e)$ tel que $r \cdot \pi \in \mathcal{R}(e)$. Par définition de $\mathcal{R}$-classe, il existe alors $s \in M$ tel que $r \cdot \pi \cdot s = e$ d'où $MeM \subseteq M\pi M$. En particulier, $\mathcal{J}(\pi) \geqslant_{\mathcal{J}} \mathcal{J}(e)$ donc pour tout M-module V induit depuis $\mathcal{J}(e)$, $\pi \notin \mathrm{Ann}_M(V)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Les modules simples induits depuis $\mathcal{J}(e)$ sont d'apex $\mathcal{J}(e)$ et π est au-dessus de tout élément de $\mathcal{J}(e)$ pour le $\mathcal{J}$-ordre par hypothèse. On a alors $MeM \subseteq M\pi M$ et il existe $r \in \mathcal{R}(e)$ tel que $r \cdot \pi \in \mathcal{R}(e)$ donc le module de Schützenberger à droite $R(e)$ n'est pas annihilé par π. □

Lemme 4.49. *Soit M un monoïde fini et soit $\mathcal{R}(e)$ un module de Schützenberger à droite associé à une $\mathcal{R}$-classe. Si $\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e) \neq 0$ alors le caractère de $\mathcal{R}(e)$ s'écrit*

$$[R(e)] = \sum_{i \in C_{G_e}} c_{e,i}^{\mathcal{R}(e)} [S_{e,i}] + \sum_{\substack{f >_{\mathcal{J}} e \\ j \in C_{G_f}}} c_{f,j}^{\mathcal{R}(e)} [S_{f,j}]. \tag{4.10}$$

En d'autres termes, le caractère de $\mathcal{R}(e)$ est une somme de caractères de modules simples d'apex soit $\mathcal{J}(e)$, soit $\mathcal{J}(f)$ avec $f >_{\mathcal{J}} e$.

Démonstration. La suite exacte $0 \longrightarrow \operatorname{Rad}\mathcal{R}(e) \longrightarrow \mathcal{R}(e) \longrightarrow \mathcal{R}(e)/\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e) \longrightarrow 0$ donne directement l'égalité

$$[\mathcal{R}(e)] = [\mathcal{R}(e)/\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)] + [\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)]. \tag{4.11}$$

La partie gauche de (4.11) corresponds à la partie gauche de (4.10).

En exprimant le caractère du radical de $\mathcal{R}(e)$ sur les simples, la partie droite de (4.11) devient :

$$[\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)] = \sum_{\substack{f \\ j \in C_{G_f}}} c_{f,j}^{\mathcal{R}(e)} [S_{f,j}].$$

Prenons f, j tels que $c_{f,j} \neq 0$. Par construction, f agit non trivialement sur $S_{f,j}$ et donc sur $\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)$. Il s'ensuit que $e <_{\mathcal{J}} f$, comme voulu. □

Lemme 4.50. *Soit M un monoïde basique fini et $\mathcal{J}(e)$ une $\mathcal{J}$-classe régulière telle que $\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e) \neq 0$. Alors il existe $f \in E(M)$ avec $e <_{\mathcal{J}} f$, et deux $\Bbbk M$ modules simples $S_{e,i}$ et $S_{f,i}$ tels que le terme $[S_{e,i}] \otimes [S_{f,j}]$ de la matrice de Cartan soit non nul.*

Lorsque $\operatorname{Rad}\mathcal{L}(e) \neq 0$, l'énoncé symétrique est valide, en remplaçant $[S_{e,i}] \otimes [S_{f,j}]$ par $[S_{f,j}] \otimes [S_{e,i}]$.

Démonstration. Considérons le bimodule $\mathcal{L}(e)\otimes_{\Bbbk G_e}\mathcal{R}(e)$ et prenons la décomposition maximale de l'unité du groupe G_e en idempotents centraux $e=\sum_i g_i$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e)\otimes_{\Bbbk G_e}\mathcal{R}(e) &= \left(\bigoplus_i \mathcal{L}(e)g_i\right)\otimes_{\Bbbk G_e}\left(\bigoplus_i g_i\mathcal{R}(e)\right)\\ &= \sum_{i,j}\mathcal{L}(e)g_i\otimes_{\Bbbk G_e} g_j\mathcal{R}(e)\\ &= \sum_i \mathcal{L}(e)g_i\otimes_{\Bbbk G_e} g_i\mathcal{R}(e).\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la propriété d'orthogonalité $g_ig_j=\delta_{i,j}$. Comme M est basique, G_e est un groupe commutatif et $g_i\Bbbk G_e=\Bbbk G_e g_i\approx\Bbbk$; en conclusion

$$[\mathcal{L}(e)\otimes_{\Bbbk G_e}\mathcal{R}(e)]=[\sum_i \mathcal{L}(e)g_i\otimes_{\Bbbk} g_i\mathcal{R}(e)]=\sum_i[\mathcal{L}(e)g_i]\otimes[g_i\mathcal{R}(e)].$$

Comme $\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)\neq 0$, le lemme 4.49 nous assure qu'il existe un module simple $S_{f,j}$ avec $e<_{\mathcal{J}} f$ tel que $S_{f,j}$ apparaît comme facteur de composition de $\mathcal{R}(e)$, et donc de l'un des $g_i\mathcal{R}(e)$.

Comme $g_i=eg_i$, la droite $\Bbbk g_i$ est un sous $\Bbbk G_e$-module à gauche de $\mathcal{L}(e)g_i$ isomorphe à $S_{e,i}^{G_e}$. Comme $\mathcal{L}(e)g_i$ est un $\Bbbk M$-module à gauche, il s'ensuit que $\operatorname{Ind}_{\Bbbk G_e}^{M} S_{e,i}^{G_e}$ est un sous-module de $\mathcal{L}(e)g_i$, et donc, d'après la construction des modules simples d'un monoïde, le $\Bbbk M$ module simple $S_{e,i}$ est un facteur de $\mathcal{L}(e)g_i$. Il s'ensuit que $S_{e,i}\otimes S_{f,j}$ est un $\Bbbk M$-mod-$\Bbbk M$ facteur de $\mathcal{L}(e)g_i\otimes_{\Bbbk} g_i\mathcal{R}(e)$ et donc de $\mathcal{L}(e)\otimes_{\Bbbk G_e}\mathcal{R}(e)$. □

Corollaire 4.51. *Soient M un monoïde apériodique basique et fini, et $\mathcal{J}(e)$ une $\mathcal{J}$-classe régulière non réduite à la $\mathcal{H}$-classe $\mathcal{H}(e)$. Alors il existe $f\in E(M)$ avec $e<_{\mathcal{J}} f$ et deux modules simples $S_{e,i}$ et $S_{f,j}$ tels que l'un des termes $[S_{e,i}]\otimes[S_{f,j}]$ ou $[S_{f,j}]\otimes[S_{e,i}]$ soit non nul dans la matrice de Cartan.*

Démonstration. Comme M est apériodique et basique, la $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}(e)$ peut se représenter sous la forme d'une matrice de Rees (cf. définition 2.27) avec tous les coefficients égaux à 1. En particulier $\operatorname{top}\mathcal{L}(e)$ et $\operatorname{top}\mathcal{R}(e)$ sont de dimension 1. Si $\mathcal{R}(e)$ contient plus d'une $\mathcal{H}$-classe, alors $\operatorname{Rad}\mathcal{R}(e)\neq 0$. L'argument est symétrique pour $\mathcal{L}(e)$.

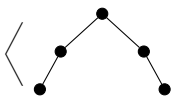
La conclusion découle alors immédiatement du lemme précédent. □

Démonstration du lemme 4.47. Avec le logiciel SageMath ([S+15]) nous avons vérifié le fait suivant.

Fait 4.52. Soient $n\leqslant 5$ et i,j tels que $C_{i,j}^{(n)}\neq 0$; alors les arbres T_i et T_j ne sont pas comparables dans l'ordre du treillis de Tamari.

En particulier pour $n\leqslant 5$, il n'existe pas de coefficient i,j tel que $C_{i,j}^{n}\neq 0$ et $T_i<_{\mathcal{J}} T_j$ ou $T_j<_{\mathcal{J}} T_i$. D'après le corollaire 4.51, cela implique que toute $\mathcal{J}$-classe régulière $\mathcal{J}(e)$ de M est réduite à la $\mathcal{H}$-classe $\mathcal{H}(e)$. Comme M est supposé apériodique, chaque $\mathcal{J}$-classe régulière est de cardinal 1, et M est $\mathcal{J}$-trivial par le théorème 2.24. □

Remarque 4.53. Ce n'est plus vrai pour $n=6$: on peut vérifier que les arbres U et V suivants vérifient $U\leqslant_{\mathcal{J}} V$ mais $\langle U,V\rangle=1$. :

$\langle$  $\rangle=1.$

Il s'agit du seul contre-exemple pour $n=6$. Le nombre de contre-exemples au fait 4.52 semble croître pour $n>5$ comme l'atteste l'exploration numérique suivante du nombre d'arbres comparables U et V tels que $\langle U,V\rangle\neq 0$:

n	5	6	7	8	9
	0	1	8	54	305

Cette suite n'est pas dans *OEIS*.

4.9.3 Exploration informatique

Grâce au lemme 4.47, nous savons qu'une tour de monoïdes apériodiques catégorifiant le couple $(\mathbf{PBT}, \mathbf{P})/(\mathbf{PBT}, \mathbf{Q})$ est $\mathcal{J}$-triviale pour $n \leqslant 5$. Dans cette section, nous menons une recherche exhaustive. Notre résultat principal est le fait suivant.

Fait 4.54. Il n'existe pas de tour de monoïdes $(M_n)_n$ telle que les hypothèses suivantes soient respectées :

(i) $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une tour de monoïdes apériodiques,

(ii) pour tout $n \leqslant 4$, M_n est un monoïde $\mathcal{J}$-trivial de cardinal $n!$,

(iii) le treillis des idempotents de M_n pour le $\mathcal{J}$-ordre est le treillis de Tamari,

(iv) lfix et rfix satisfont la définition de la matrice de Cartan $C^{(n)}$.

Ce qui conclu la preuve du théorème 4.46.

Nous avons programmé un algorithme de type *force brute*. La contrainte (iv) provient de la description combinatoire de la matrice de Cartan d'un monoïde $\mathcal{J}$-trivial donné par le théorème 3.22. Plus précisément, si M_n est un monoïde de cardinal $n!$, indexé par les permutations et avec $C^{(n)}$ comme matrice de Cartan alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{lfix}(\sigma) =& \mathcal{P}(\sigma),\\ \mathrm{rfix}(\sigma) =& \mathcal{P}(\sigma^{-1}).\end{aligned}$$

4.9.3.1 Algorithme principal

Depuis les hypothèses, nous pouvons déduire un certain nombre de contraintes. Dans un monoïde $\mathcal{J}$-trivial M avec $a, b \in M$, nous avons en particulier :

- M est associatif,
- $a \cdot b \leqslant_{\mathcal{J}} \mathrm{lfix}(a) \wedge \mathrm{rfix}(a)$,
- pour tout $g \geqslant_{\mathcal{J}} \mathrm{rfix}(x)$, $xg = x$,
- pour tout $g \geqslant_{\mathcal{J}} \mathrm{lfix}(x)$, $gx = x$.

Algorithme

Entrée :

1. Entier n
2. Tables de multiplication pour M_k avec $k < n$
3. Matrice de Cartan $C^{(n)}$
4. Treillis $\mathcal{L}$
5. Plongements $M_i \times M_j \hookrightarrow M_{i+j}$
6. Indexation des éléments de M et de $\mathcal{L}$

Sortie : si existence, une liste des tables de multiplication possibles pour le monoïde M_n.

Initialisation

1. Initialiser la table de multiplication avec
   (a) l'action de l'identité 1 (top de $\mathcal{L}$),
   (b) l'action de $\perp$ (bottom de $\mathcal{L}$),
   (c) pour $e, f \in \mathcal{L}$, le produit $ef \geqslant_{\mathcal{J}} e \wedge f$,
   (d) les produits xg pour $g \geqslant_{\mathcal{J}} \mathrm{rfix}(x)$,
   (e) les produits gx pour $g \geqslant_{\mathcal{J}} \mathrm{lfix}(x)$,
   (f) les produits déterminés par les plongements.

Backtracking

1. Choisir un produit $a \cdot b$; si les contraintes forcent la valeur de $a \cdot b$, alors lui attribuer cette valeur ; sinon faire un choix encore non fait.
2. Propager par associativité.
3. Si contradiction lors de la propagation (vient contredire une contrainte ajoutée précédemment), alors couper la branche. Continuer à 1 avec le choix suivant.
4. Si la table de multiplication de M est déterminée, alors passer à *Traitement* puis poursuivre le backtracking jusqu'à épuisement des choix.

Traitement

1. Vérifier que pour tout $i+k = n$, la restriction $\mathrm{Res}_{M_i \otimes M_j} M_n$ est un module projectif (voir paragraphe 4.9.3.3). Sinon, jeter.
2. Rajouter M_n aux résultats possibles.

Cet algorithme a été implanté avec le logiciel libre de calcul mathématique Sagemath [S+15]. Dans l'implantation, `PBTData()` initialise un objet contenant toutes les données du problème sauf les tables de multiplications.

```
Usage : PBTData().monoids([None, M1, ..., Mn])
  Renvoie la liste des monoïdes M_{n+1} possibles où M1, ..., Mn sont fixés
```

Voici une exécution du programme :

```
sage : from search import *
sage : data = PBTData()
sage : J1, = data.monoids([None])
sage : J2, = data.monoids([None, J1])
sage : Ms3 = data.monoids([None, J1, J2])
sage : J3 = Ms3.list()[0]
sage : J3.cardinality()
6
```

4.9.3.2 Exécution

Nous appliquons maintenant l'algorithme pour $n \leqslant 4$, ce qui est suffisant pour terminer la preuve du théorème 4.46. A titre d'illustration et de vérification, nous l'appliquons à la main pour $n \leqslant 3$.

M_1**:**

On cherche un monoïde de cardinal 1 catégorifiant le couple $(\mathbf{PBT}_1, \mathbf{PBT}_1^*)$. Il existe un unique monoïde qui vérifie les conditions, $M_1 = \{1\}$.

```
sage : M1, = data.monoids([None]).list()
sage : M1
J-trivial monoid with 1 elements and 0 generators
```

M_2**:**

Les algèbres de Hopf $\mathbf{PBT}_2$ et $\mathbf{PBT}_2^*$ sont toutes deux de dimension 2. Le monoïde M_2 contient alors nécessairement deux idempotents et la table de multiplication est forcée :

	1	e
1	1	e
e	e	e

.

Il est aisé de voir que $G_0(M_2) = K_0(M_2)$ et que M_2 catégorifie bien le couple d'algèbres de Hopf $(\mathbf{PBT}_2, \mathbf{PBT}_2^*)$.

```
sage : M2, = data.monoids([None,M1])
sage : M2
J-trivial monoid with 2 elements and 1 generators
```

M_3**:**

On a $\dim(\mathbf{PBT}_3) = \dim(\mathbf{PBT}_3^*) = 5$ donc M_3 est un monoïde de 6 éléments (par hypothèse) contenant 5 idempotents. Par hypothèse, le treillis des $\mathcal{J}$-classes est le treillis de Tamari à 4 éléments. Pour que M_3 admette $C^{(3)}$ comme matrice de Cartan, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathrm{rfix}(132) &= 312, \\ \mathrm{lfix}(132) &= 231. \end{aligned}$$

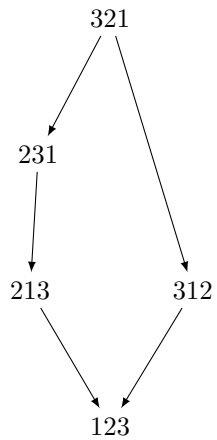


FIG. 4.9.2: Treillis des $\mathcal{J}$-classes régulières de M_3

Cela implique directement que l'ordre partiel des $\mathcal{J}$-classes est l'ordre partiel présenté figure 4.9.3.

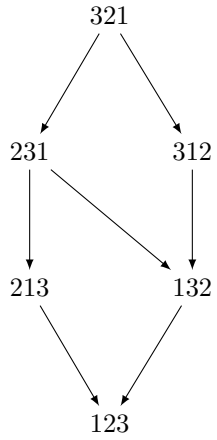


FIG. 4.9.3: Ordre partiel des $\mathcal{J}$-classes de M_3

Initialement, la table de multiplication de M_3 est la suivante. La seule inconnue est le produit $231 \cdot 312$. L'algorithme va tester les deux seuls choix :

$$213 \cdot 312 = 132,$$
$$213 \cdot 312 = 123.$$

	321	312	231	213	132	123
321	321	312	231	213	132	123
312	312	312	123	123	123	123
231	231	?	231	213	132	123
213	213	123	213	213	123	123
132	132	312	123	123	123	123
123	123	123	123	123	123	123

Notons que l'on pourrait rajouter l'hypothèse :

(v) M est engendré par les idempotents.

Cette hypothèse force le produit $231 \cdot 312 = 132$. Comme $xy \leqslant_{\mathcal{J}} x$ et $xy \leqslant_{\mathcal{J}} y$, on en déduit que les deux seul possibilités pour ce produit sont 132 et 123. Il est aisé de vérifier que les deux tables de multiplications définissent bien deux monoïdes non isomorphes M_{31} et M_{32}, ayant la même matrice de Cartan $C^{(3)}$.

On ne supposant pas (v) :

```
sage : M31, M32 = data.monoids([None, M1, M2]).list()
sage : M31, M32
(J-trivial monoid with 6 elements and 4 generators,
J-trivial monoid with 6 elements and 4 generators)
```

En supposant (v) :

```
sage : M3, = data.monoids([None, M1, M2]).list()
sage : M3
J-trivial monoid with 6 elements and 3 generators
```

M_4

Le problème de trouver un monoïde $\mathcal{J}$-trivial de matrice de Cartan $C^{(4)}$ demande beaucoup plus de calculs que les cas précédents déjà traités. La taille de l'espace de recherche après initialisation peut être calculée par simple multiplication du nombre de choix pour chaque produit restant. On obtient les tailles suivantes.

Contraintes de plongement	Taille de l'espace d'exploration
Aucune	6.27×10^{50}
M_{31}	6.00×10^{34}
M_{32}	9.77×10^{30}

Explorer l'arbre sans faire l'hypothèse que M est engendré par des idempotents demande environ 2h30 de calcul pour chaque exploration sur une machine GNU/Linux (Debian) x86-64, 4 core i5 3.2Gz.

```
sage : L41 = data.monoids([None,M1,M2,M31], verbose=True).list()
sage : L42 = data.monoids([None,M1,M2,M32], verbose=True).list()
sage : len(L41) ; len(L42)
4384
6096
```

Contraintes de plongement	Candidats potentiels
M_{31}	4384
M_{32}	6096

De tous ces candidats, il nous reste à vérifier l'axiome (iv) pour avoir une tour de monoïdes. Malheureusement, aucun de ces candidats ne satisfait à la règle de projectivité.

Remarque 4.55. Si on suppose v, alors les plongements mènent directement à une contradiction.

```
sage : data.monoids([None, M1, M2, M3]).list()
[]
```

4.9.3.3 Décomposition projective

Nous décrivons ici l'algorithme utilisé pour déterminer si un module donné est projectif. En effet, de toutes les tables que l'on obtient il reste à comprendre lesquelles définissent des monoïdes M_{m+n} dont l'algèbre (associative) est un $\Bbbk M_m \otimes \Bbbk M_n$-module projectif. Rappelons que les caractères d'un module projectif sur un monoïde $\mathcal{J}$-trivial sont décrits combinatoirement par le théorème 3.21. Il faut alors faire une petite digression sur les $(\Bbbk M_i \otimes \Bbbk M_j)$-modules projectifs lorsque M_i et M_j sont deux monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux.

Proposition 4.56. *Soient M_i et M_j deux monoïdes finis $\mathcal{J}$-triviaux, alors*

$$[\Bbbk M_i \otimes \Bbbk M_j] = [\Bbbk M_i] \otimes [\Bbbk M_j]$$

Démonstration. Conséquence directe du lemme 2.57. □

Il est alors facile de calculer les caractères de tous les $\Bbbk M_i \otimes \Bbbk M_j$ modules projectifs. L'algorithme procède en deux temps : calculer les projectifs indécomposables sur $\Bbbk M_i \otimes \Bbbk M_j$, puis tenter de décomposer $\Bbbk M_{i+j}$ comme somme directe de modules projectifs. La seconde partie est la plus technique.

Entrée :

1. un module sur un monoïde $\mathcal{J}$-trivial M
2. un ensemble de modules projectifs indécomposables P_i

Sortie : un partitionnement de M en projectifs indécomposables si existence, `Faux` sinon

1. Calculer les caractères des modules P_i
2. $U \leftarrow$ l'ensemble des arêtes de M
3. `partition` $\leftarrow$ l'ensemble des arrêtes de M
4. Tant que U n'est pas vide faire :
   (a) Récupérer un sommet s de M sans arrête entrante
   (b) Calculer le caractère χ du module projectif porté par s
   - Si χ n'est pas un caractère d'un P_i renvoyer `Faux`
   (c) Construire un plongement V de P_i autour de s dans M
   - Si échec, renvoyer `Faux`
   (d) Mettre à jour `partition` (rajouter V) et U (retirer V)
   (e) $M \leftarrow$ sous-graphe U
5. Renvoyer `partition`

On peut vérifier qu'aucun des candidats potentiels pour M_4 n'est projectif sur $\Bbbk M_1 \otimes \Bbbk M_3$, ce qui termine la preuve du théorème 4.46.

```
sage : any(data.is_projective(M1, M31, M._graph) for M in L41)
False
sage : any(data.is_projective(M1, M32, M._graph) for M in L42)
False
```

4.10 Catégorifications de NCSF/QSym

4.10.1 Énoncé

Le point de départ de cette section est le théorème de catégorification de Krob-Thibon.

Théorème 4.57 (Krob-Thibon [KT97])**.** *La tour $(H_n(0))_n$ des monoïdes 0-Hecke catégorifie le couple d'algèbres duales $(\mathbf{NCSF}, \mathbf{R})/(\mathrm{QSym}, F)$.*

Autrement dit,

(i) $K_0(H_n(0))_n) = \mathbf{NCSF}$ *avec les règles d'induction et de restriction correspondant au produit et au coproduit sur la base* $\mathbf{R}$*,*

(ii) $G_0(H_n(0))_n) = \mathrm{QSym}$ *avec les règles d'induction et de restriction correspondant au produit et au coproduit sur la base* F*.*

Nous allons montrer que $(H_n(0))_n$ est la tour de monoïdes la plus simple – en terme de nombre de générateurs et de relations – satisfaisant ces propriétés.

Théorème 4.58. *Soit $(M_n)_n$ une tour de monoïdes qui catégorifie le couple d'algèbres duales $(\mathbf{NCSF}, \mathbf{R})/(\mathrm{QSym}, F)$ comme dans le théorème 4.57. Alors, pour tout n,*

(i) M_n *est dans* $\mathbb{D}\mathbf{A}$ *(autrement dit,* M_n *est apériodique et basique),*

(ii) M_n *est de cardinal* $n!$*,*

(iii) le treillis des $\mathcal{J}$-classes régulières de M_n est le treillis booléen d'ordre 2^{n-1}.

Si de plus M_3 est $\mathcal{J}$-trivial, alors

(iv) l'application $\pi_i \mapsto \pi_i$ défini un morphisme de $H_n(0)$ dans M_n. En particulier, si M_n est engendré par $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$, alors $M_n = H_n(0)$.

Si tous les M_n sont $\mathcal{J}$-triviaux alors,

(v) Les éléments de M_n peuvent être indexés par les permutations de S_n de sorte que les idempotents soient indexés par les éléments maximaux des sous-groupes paraboliques de S_n, et pour tout $\sigma \in M_n$ on a $\mathrm{lfix}(\sigma) = \mathrm{Des}_L(\sigma)$ et $\mathrm{rfix}(\sigma) = \mathrm{Des}_R(\sigma)$.

Il ressort de ce théorème que $(H_n(0))_n$ est la tour de monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux la plus simple – en terme de nombre de générateurs et de relations – qui catégorifie le couple d'algèbres de Hopf $(\mathbf{NCSF}, \mathbf{R})/(\mathrm{QSym}, F)$.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce théorème.

4.10.2 Démonstration

Coproduit dans F et sous-ensembles

Traditionnellement, la base de la composante homogène de degré n de QSym (et donc de **NCSF**) est indexée par les compositions de n. En utilisant la bijection classique entre compositions et sous-ensembles, il est possible de l'indexer alternativement par les sous-ensembles de $[n-1]$. La règle de coproduit dans F s'exprime alors comme :

$$\Delta(F_I) = \sum_{k+l=n} F_{I\cap[k-1]} \otimes F_{\{i-k, i\in I\cap k+1,\dots,k+l-1\}},$$

où I est un sous-ensemble de $[n]$. De manière équivalente en termes de mots binaires, le coproduit est la déconcaténation.

Exemple 4.59. Calculons avec Sage le coproduit des quatre quasi-rubans de degré 3:

```
sage : F = QuasiSymmetricFunctions(QQ).F()
sage : for f in F.basis(4) : print "Delta(%s) = %s"%(f,f.coproduct())
Delta(F[1,1,1]) = F[] # F[1,1,1]  +  F[1] # F[1,1]  +  F[1,1] # F[1]  +  F[1,1,1] # F[]
Delta(F[1,2])   = F[] # F[1,2]    +  F[1] # F[2]    +  F[1,1] # F[1]  +  F[1,2]   # F[]
Delta(F[2,1])   = F[] # F[2,1]    +  F[1] # F[1,1]  +  F[2]   # F[1]  +  F[2,1]   # F[]
Delta(F[3])     = F[] # F[3]      +  F[1] # F[2]    +  F[2]   # F[1]  +  F[3]     # F[]
```

En terme d'ensembles, cela se traduit comme :

$$\begin{aligned}
\Delta F_{\{1,2\}} &= 1\otimes F_{\{1,2\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{1\}} + F_{\{1\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{1,2\}}\otimes 1,\\
\Delta F_{\{1,2\}} &= 1\otimes F_{\{1\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{1\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{1\}}\otimes 1,\\
\Delta F_{\{1,2\}} &= 1\otimes F_{\{2\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{1\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{2\}}\otimes 1,\\
\Delta F_{\{\}} &= 1\otimes F_{\{\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{\}}\otimes F_{\{\}} + F_{\{\}}\otimes 1.
\end{aligned}$$

Chaque monoïde M_n est basique

D'après la forme du coproduit de QSym sur la base F, le lemme 4.42 assure qu'une tour de monoïdes $(M_n)_n$ satisfaisant les hypothèses précédentes est une tour de monoïdes basiques. Du corollaire 4.43 on déduit que, pour tout $n \geqslant 0$, le cardinal du monoïde est $|M_n| = n!$. Sans perte de généralité, on peut alors indexer les éléments du monoïdes par les permutations de $\mathfrak{S}_n$.

Comme $\mathbf{NCSF}_n$ et QSym_n sont de dimension 2^{n-1}, le théorème de Clifford-Munn-Ponizovkiĭ assure que M_n contient au plus 2^{n-1} $\mathcal{J}$-classes régulières. Nous allons montrer en raisonnant que M_n contient exactement 2^{n-1} $\mathcal{J}$-classes régulières, ce qui impliquera que M_n est apériodique.

Étude du monoïde M_1

Le monoïde M_1 est l'unique monoïde $\{1\}$ de cardinal $1! = 1$.

Étude du monoïde M_2

Le monoïde M_2 est de cardinal $2! = 2$ et contient deux représentations simples non-isomorphes. Nous notons ses éléments 1 et π_1. Il s'agit soit du groupe symétrique S_2, soit du monoïde à deux idempotents dont la table de multiplication est donnée ci-dessous :

	1	π_1
1	1	π_1
π_1	π_1	π_1

.

Il nous faut étudier M_3 pour éliminer le cas $M_2 = \mathfrak{S}_2$ (voir lemme 4.60)

Étude du monoïde M_3

Les plongements permettent de définir deux éléments dans M_3:

$$\pi_1 = \rho_{2,1}(\pi_1 \otimes 1) \qquad \pi_2 = \rho_{1,2}(1 \otimes \pi_1)$$

L'algèbre de Hopf QSym étant de dimension 4 en degré 3, le monoïde M_3 a quatre modules simples qui sont de dimension 1.

La restriction de ces modules peut être lue sur les coproduits de l'exemple 4.59. Ainsi, que le module simple $S_{\{1\}}$ se restreint en le module simple $S_{\{1\}} \otimes S_\varepsilon$ sur $M_2 \otimes M_1$ et en le module simple $S_\varepsilon \otimes S_{\{1\}}$ sur $M_1 \otimes M_2$. D'après les plongements, il s'ensuit que $\pi_1 \in M_3$ agit sur $S_{\{1\}}$ comme $\pi_1 \in M_2$ sur $S_{\{1\}}$, tandis que $\pi_2 \in M_3$ agit sur $S_{\{1\}}$ comme $\pi_1 \in M_2$ sur S_ε.

En particulier 1, π_1 et π_2 sont distincts dans M_3.

Lemme 4.60. *M_2 est le monoïde à deux idempotents.*

Démonstration. Supposons que M_2 soit le groupe $\mathfrak{S}_2$. Alors, dans M_3, π_1 et π_2 sont dans le groupe G_1. Ce dernier contient au moins 3 éléments et deux sous groupes d'ordre 2. Il est donc de cardinalité 4 ou 6.

Cas 1 : $G_1 = M_3$: c'est impossible car la matrice de Cartan M_3 n'est pas diagonale, et donc M_3 n'est pas semi-simple.

Cas 2 : $|G_1| = 4$; c'est impossible car G_1 est alors commutatif et contribue à lui tout seul quatre représentations simples à M_3 alors qu'il reste au moins une autre $\mathcal{J}$-classe dans M_3. □

Par convention, on indexera les modules simples S_ε et $S_{\{1\}}$ de M_2 de sorte que $\pi_1 \in M_2$ agisse sur la base ε_I de S_I par

$$\varepsilon_I \cdot \pi_1 = \begin{cases} \varepsilon_I & \text{si } 1 \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étude du treillis des $\mathcal{J}$-classes de M_n et apériodicité

Grâce à l'associativité des plongements telle que supposée par l'axiome (iii), nous pouvons, comme dans M_3, définir de manière canonique dans M_n les idempotents $\pi_i \in M_n$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ par

$$\pi_i = \rho_{i-1,2,n-i-1}(1 \otimes \pi_1 \otimes 1),$$

où $\rho_{i-1,2,n-i-1}$ est le plongement de $M_{i-1} \otimes M_2 \otimes M_{n-i-1}$ dans M_n. Cette indexation des π_i est compatible aux plongements entre M_n selon les règles usuelles des générateurs de $H_n(0)$.

La règle de coproduit dans F combinée avec la convention d'indexation des modules simples de M_2 indique que, comme dans $H_n(0)$, les idempotents π_i agissent sur le module simple S_I de M_n par :

$$\varepsilon_I \cdot \pi_i = \begin{cases} \varepsilon_I & \text{si } i \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un ensemble $I \subseteq [n-1]$ on défini l'idempotent $\pi_I = (\prod_{i\in I} \pi_i)^\omega$. Le monoïde n'étant pas forcément $\mathcal{J}$-trivial, il faut préciser dans quel ordre le produit est fait, et on supposera que ce sera selon i croissant dans I. Notons que, π_i étant idempotent, on a $\pi_i^\omega = \pi_i$.

Ces idempotents agissent sur les modules simples par

$$\varepsilon_I.\pi_J = \begin{cases} \varepsilon_I & \text{si } J \subset I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ils sont en particuliers tous deux à deux non-isomorphes. Plus fortement, d'après le théorème 3.15 ils sont tous dans des $\mathcal{J}$-classes régulières distinctes. Il y a donc au moins 2^{n-1} $\mathcal{J}$-classes régulières, et donc exactement autant de $\mathcal{J}$-classes régulières que de modules simples. D'après le corollaire 3.16 du théorème de Clifford – Munn – Ponizovkiĭ, les groupes G_{π_I} associés à ces $\mathcal{J}$-classes régulières sont donc triviaux.

On a montré

Proposition 4.61. *Pour tout n, M_n est dans $\mathbb{D}\mathbf{A}$ (apériodique et basique). Les idempotents π_I forment une transversal du treillis des $\mathcal{J}$-classes régulières. L'application $I \mapsto \mathcal{J}(\pi_I)$ donne un isomorphisme avec le treillis booléen des sous-ensembles de $[n-1]$.*

Étude de M_n lorsqu'il est $\mathcal{J}$-trivial

Nous ne sommes pas parvenus à démontrer que les monoïdes M_n sont forcément $\mathcal{J}$-triviaux. Nous supposons ici que, pour un n donné, M_n est $\mathcal{J}$-trivial, et étudions les conséquences pour ce monoïde.

Nous pouvons alors donner une interprétation de la matrice de Cartan $\mathcal{C} : \mathbf{NCSF} \to \mathrm{QSym}$. A dimension fixée, la matrice de Cartan dans les bases que l'on cherche à catégorifier est

$$\mathcal{C}(\mathbf{R}_I) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \mathrm{Des}(\sigma)=I}} F_\sigma \,.$$

Voir figure 4.10.1 pour les matrices de Cartan en petites dimension. A chaque coefficient non nul $c_{I,J}$ de la matrice de Cartan, on associe des éléments (σ_i) de M_n avec $\mathrm{lfix}(\sigma_i) = I$ et $\mathrm{rfix}(\sigma_i) = J$.

Par exemple pour $n = 3$, l'ordre sur les compositions est $3, 21, 12, 111$. Le coefficient $\mathcal{C}_{2,3} = \mathcal{C}_{21,12} = 1$ est associé à un élément σ de M_n avec

$$\begin{aligned} \mathrm{lfix}(\sigma) &= 21 \\ \mathrm{rfix}(\sigma) &= 12 \,. \end{aligned}$$

L'unique permutation de $\mathfrak{S}_3$ avec descentes à gauche et à droite 21 est 132. De même l'idempotent indexé par la composition 12 est 213. Avec ce raisonnement on indexe sans ambiguïté tous les éléments de M_3 par des permutations de longueur trois. Les idempotents sont exactement les π_I que l'on a indexé par les éléments maximaux des sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{S}_n$.

	3	21	12	111
3	123	.	.	.
21	.	213	231	.
12	.	312	132	.
111	.	.	.	321 .

Cas où M_3 est $\mathcal{J}$-trivial

On procède comme décrit précédemment dans 4.10.2. Le monoïde M_3 contient alors 2 idempotents π_1 (respectivement π_2) obtenu par par plongement $M_2 \otimes M_1 \to M_3$ (respectivement $M_1 \otimes M_2 \to M_3$). L'idempotent $(\pi_1\pi_2)^w$ est le dernier idempotent de M_3 et les $\mathcal{J}$-classes régulières forment le treillis :

$$\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $n = 3$

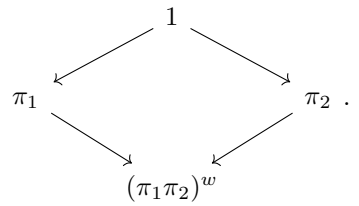
$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & 2 & . & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 2 & . & 2 & 1 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & 2 & . & 2 & 1 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & . & . & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 2 & 2 & . & . & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & . & . & 2 & 2 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & . & . & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 2 & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 2 & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $n = 5$

FIG. 4.10.1: Matrices de Cartan pour $n \leqslant 5$



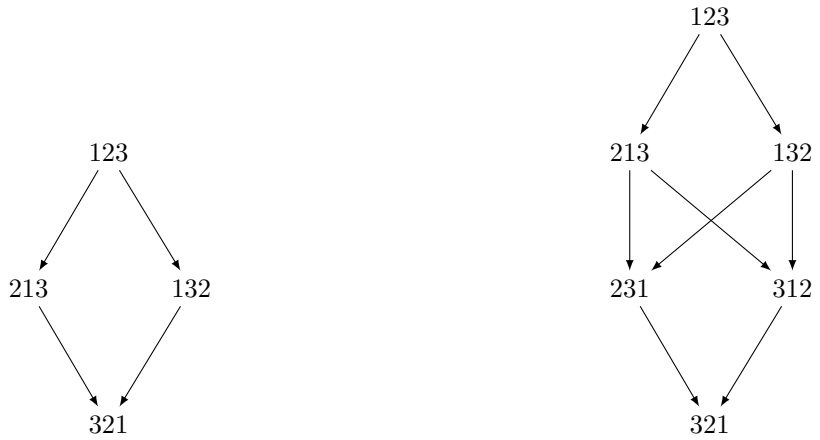
Comme le nombre d'idempotents est borné par 4, ce sont les seuls de M_3.

La matrice de Cartan de M_3 est par hypothèse :

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Le monoïde M_3 est indexé par les 6 permutations de $\mathfrak{S}_3$. Les idempotents correspondent aux éléments diagonaux, c'est à dire les 2^{n-1} permutations σ telles que $|\operatorname{Des}(\sigma)| = |\operatorname{Des}(\sigma^{-1})|$. Le monoïde M_3 contient alors quatre idempotents indexés par les permutations 123, 213, 132, 321 et deux éléments non idempotents indexés par 231 et 312. D'après la forme de la matrice de Cartan, nous avons sans perte de généralité

$$\begin{array}{ll} \operatorname{lfix}(231) = 213, & \operatorname{lfix}(312) = 132, \\ \operatorname{rfix}(231) = 132, & \operatorname{rfix}(312) = 213. \end{array}$$



(a) Treillis des $\mathcal{J}$-classes régulières de M_3 (b) Treillis des $\mathcal{J}$-classes de M_3 si engendré par les idempotents

Initialement, la table de multiplication du monoïde M_3 est la suivante.

	123	132	213	231	312	321
123	123	132	213	231	312	321
132	132	132	?	321	312	321
213	213	?	213	231	312	321
231	231	231	321	321	321	321
312	312	321	312	321	321	321
321	321	321	321	321	321	321

Les deux seules indéterminées sont les produits $132 \cdot 213 \in \{312, 321\}$ et $213 \cdot 132 \in \{231, 321\}$.

On vérifie aisément que, pour ces quatre choix de produits, on a la relation de tresse. Par exemple, dans l'unique cas où M_3 est engendré par les idempotents (0-Hecke), on a :

$$\begin{aligned} 213 \cdot 132 \cdot 213 =& 213 \cdot 312 \\ =& 312 \\ =& 312 \cdot 213 \\ =& 132 \cdot 213 \cdot 132, \end{aligned}$$

d'où le lemme suivant.

Lemme 4.62. *Si le monoïde M_3 est $\mathcal{J}$-trivial, alors on a la relation de tresse $\pi_1\pi_2\pi_1 = \pi_2\pi_1\pi_2$.*

L'exploration de quelques exemples semble suggérer que la relation de tresse reste valide même si M_3 n'est pas $\mathcal{J}$-trivial.

4.10.3 M_n contient un quotient de $H_n(0)$

Proposition 4.63. *Supposons que M_3 est $\mathcal{J}$-trivial. Alors, pour tout n, les π_i vérifient les relations suivantes dans M_n, :*

$$\pi_i^2 = \pi_i, \tag{4.12}$$

$$\pi_i\pi_j = \pi_j\pi_i \text{ si } |i-j| > 1, \tag{4.13}$$

$$\pi_i\pi_{i+1}\pi_i = \pi_{i+1}\pi_i\pi_{i+1}. \tag{4.14}$$

Démonstration. La relation 4.12 est immédiate. On effectue le calcul de $\pi_i\pi_{i+1}\pi_i$ dans $M_i \otimes M_3 \otimes M_{n-i-3}$ qui vérifie la relation de tresse, d'où 4.14. Enfin si π_i et π_j sont comme dans l'équation 4.13, alors le calcul

$$(1 \otimes \pi_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)\cdot(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \pi_1 \otimes 1)$$

effectué dans $M_{i-1} \otimes M_2 \otimes M_{j-i-2} \otimes M_2 \otimes M_{n-j-1}$ commute. □

Chapitre 5

Fonctions de parking

Le dernier chapitre du présent manuscrit traite des fonctions de parking. Tout d'abord nous étudions la tour des fonctions de parking croissantes et appliquons les théorèmes du chapitre 4 afin de donner une règle combinatoire pour l'induction et la restriction des modules simples et projectifs. Puis nous aborderons l'étude des fonctions de parking généralisées selon Stanely et Pitman dans un travail en collaboration avec Jean-Baptiste Priez. Nous introduisons une interprétation des fonctions de parking généralisées en terme de théorie des espèces, où nous faisons cependant agir $H_n(0)$ au lieu de S_n. Nous en déduisons alors des formules d'énumération.

5.1 Préliminaires

Les fonctions de parking ont été introduites par Kohneim et Weiss [KW66] afin de modéliser des problèmes de tables de hachage. Depuis, les fonctions de parkings sont au centre d'une grande variété de champs de la combinatoire.

Considérons le problème des places de parking suivant. Il y a n places de parkings numérotées le long d'une rue à sens unique, dans laquelle n voitures vont s'engouffrer. Les voitures ont chacune une place préférée $v_1, v_2, \dots v_n \in [n]$ et vont tenter de se garer une à une selon le processus suivant :

1. la voiture i va jusqu'à la place de parking v_i;
2. si la place v_i est occupée, la voiture continue en $v_i + 1, v_i + 2, \dots$ jusqu'à trouver une place libre :
   (a) si la voiture se gare à la place $v_i + k \leqslant n$, alors le processus continue avec la voiture $i + 1$,

(b) si la voiture sort de la rue, le processus échoue.

Si toutes les voitures arrivent à se garer selon l'algorithme précédent, alors la fonction de $[n]$ dans lui-même définie par $i \mapsto v_i$ est une *fonction de parking*. Il est clair que le processus de garage aboutit si et seulement si pour tout k au plus k voitures veulent se garer sur les places $\{n, n-1, \dots, n-k+1\}$. On en déduit alors la définition algébrique équivalente suivante.

Définition 5.1. Une fonction $f : [n] \to [n]$ est une *fonction de parking* si on a $|f^{-1}([k])| \geqslant k$ pour tout $k \in [n]$. L'entier n est alors la *longueur* de f et on note PF_n l'ensemble des fonctions de parking de longueur n.

On utilisera la notation par image $[f_1 \cdots f_n]$ pour une fonction de parking g de longueur n avec $f : i \mapsto f_i$. On omettra parfois les crochets pour écrire $f_1 \cdots f_n$ si le contexte le permet.

Exemple 5.2.

- La fonction 313 n'est pas une fonction de parking.
- Les 3 fonctions de parking pour $n = 2$ sont $11, 12, 21$.
- Les 16 fonctions de parking pour $n = 3$ sont :

$$111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Vu comme un mot, $v = v_1 v_2 \cdots v_n$ est une fonction de parking si et seulement si un réarrangement croissant $v\uparrow = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n}$ vérifie $(v\uparrow)_i \leqslant i$ pour tout $i \in [n]$. Notons que si $v_1 v_2 \cdots v_n$ est une fonction de parking, alors tous ses permutés sont également des fonctions de parking.

Théorème 5.3. *Le nombre de fonctions de parking de longueur n est donné par la formule*

$$|\mathrm{PF}_n| = (n+1)^{n-1}.$$

Démonstration. Considérons le groupe $G = (\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^n$ sur lequel nous faisons agir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par

$$(g_1, g_2, \dots g_n) \cdot k = (g_1 + k, g_2 + k, \dots, g_n + k).$$

Le groupe G encode les places favorites de n voitures sur un parking circulaire de $n+1$ places. L'action consiste à faire une rotation de l'attribution, de telle sorte que si la place i est libre, la place $i+k$ sera libre après l'action de $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, chaque orbite contient une unique attribution (ou élément de G) telle que la place $n+1$ soit libre, soit une unique fonction de parking de taille n. Toutes les orbites étant de taille $n+1$, le nombre d'orbites est $(n+1)^{n-1}$. □

Il est remarquable que le nombre de fonctions de parking soit lié à la formule de Cayley qui compte le nombre d'arbres étiquetés.

Théorème 5.4 (Cayley)**.** *Il y a $(n+1)^{n-1}$ arbres sur $n+1$ sommets numérotés.*

Il existe plusieurs bijections explicites entre les fonctions de parking et les arbres étiquetés, voir par exemple [GdOLV12, Shi08].

L'ensemble des fonctions de parking PF_n n'est pas un sous-monoïde de l'ensemble des applications $[n] \to [n]$. En effet, la propriété d'être une fonction de parking n'est pas stable par la composition. Par exemple $[2122] \cdot [1142] = [2222]$ alors que $[2122]$ et $[1142]$ sont des fonctions de parking. Qualitativement, l'obstruction provient du fait que l'on peut envoyer de « petits » éléments sur de « grands » éléments. Cependant, il existe un sous-ensemble naturel des fonctions de parking qui est un sous-monoïde. Nous allons l'introduire comme représentant canonique des orbites sous l'action du groupe symétrique.

On peut naturellement faire agir $\mathfrak{S}_n$ sur PF_n par permutation des indices. Une orbite est alors l'ensemble des permutés d'une fonction de parking f. En particulier, chaque orbite $\mathcal{O}$ contient une unique fonction de parking croissante que nous choisissons comme représentant. Par exemple, l'ensemble des permutations de taille n est trivialement en bijection avec l'orbite contenant $[12 \cdots n]$.

Exemple 5.5. $[1132] \cdot (23) = [1312]$

Les cinq orbites de PF_3 sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ sont

$$\{\mathbf{111}\} \mid \{\mathbf{112}, 121, 211\} \mid \{\mathbf{113}, 131, 311\} \mid \{\mathbf{122}, 212, 221\} \mid \{\mathbf{123}, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

En gras les uniques fonctions de parking croissantes de chaque orbite.

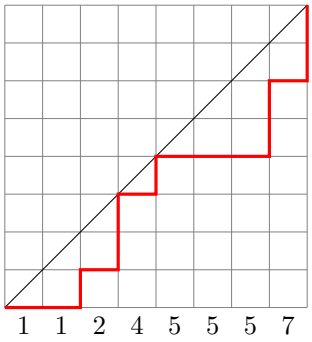
5.2 Fonctions de parking croissantes

Les fonctions de parking croissantes forment un sous-monoïde du monoïde des fonctions croissantes de $[n]$ dans lui-même ; il provient de l'étude de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les fonctions de parking, chaque orbite admettant un unique représentant qui soit une fonction de parking croissante. Comme nous allons le voir, ce sous-monoïde est $\mathcal{J}$-trivial ce qui permet d'étudier ses représentations de façon combinatoire. Nous retrouvons de nombreux résultats de [HT09] où les auteurs étudient également les représentations de NDPF, mais vu comme un quotient du monoïde 0-Hecke. Une description des idempotents orthogonaux se trouve dans [DHST11].

Définition 5.6. Une *fonction de parking* croissante est une fonction croissante $f : [n] \to [n]$ telle que, pour tout $k \in [n]$, $f(k) \leqslant k$.

On note NDPF_n l'ensemble des fonctions de parking croissantes de taille n (de l'anglais *Non Decreasing Parking Functions*).

Dans la suite de ce mémoire, nous dessinerons les fonctions de parking croissantes par un chemin comme dans l'exemple suivant qui représente la fonction $[11245557] \in \mathrm{NDPF}_8$:



(5.1)

Quitte à redresser par une rotation de $3\pi/4$, on reconnaît un *chemin de Dyck*; il est clair que cela établit une bijection entre fonctions de parking croissantes et chemins de Dyck, ce qui démontre le théorème suivant.

Théorème 5.7. *Le nombre de fonctions de parking croissantes est donné par la formule*

$$|\mathrm{NDPF}_n| = C(n)$$

où $C(n) = 1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$ *est le* $n^{\text{ème}}$ *nombre de Catalan.*

Soient f et g deux fonctions de parking croissantes. La composition $f \circ g$ vérifie, pour tout $i \in [n]$, les inégalités

$$\begin{array}{rcl} f \circ g\,(i) & \leqslant & f(i), \\ f \circ g\,(i) & \leqslant & g(i). \end{array} \tag{5.2}$$

En particulier la composée de deux fonctions de parking croissantes reste une fonction de parking croissante, c'est un sous-ensemble stable des fonctions de parking pour la composition. De plus, les relations 5.2 montrent que NDPF_n est ordonné à gauche et à droite : $f \circ g \leqslant f$ et $f \circ g \leqslant g$. L'identité id est clairement un élément maximal pour l'ordre $\leqslant$. La proposition 2.18 implique alors directement :

Proposition 5.8. *Le sous-ensemble* NDPF_n *est un monoïde* $\mathcal{J}$*-trivial pour la composition.*

Les idempotents de NDPF_n sont entièrement caractérisés par leurs images ; ce sont les fonctions qui correspondent aux chemins de Dyck (dessin 5.1) dont les descentes rejoignent la diagonale.

Proposition 5.9. *Un élément* $f \in \mathrm{NDPF}_n$ *est idempotent si et seulement si* $\forall i,\ f(i) = k \Rightarrow f(k) = k$.

Exemple 5.10. L'unique idempotent d'image $\{1, 3, 4\}$ de NDPF_4 est 1134. L'unique idempotent de NDPF_6 d'image $\{1, 3, 4\}$ est 113444.

Proposition 5.11. *Le treillis des* $\mathcal{J}$*-classes régulières de* NDPF_n *est le treillis booléen d'ordre* 2^{n-1}.

Démonstration. C'est en effet le treillis des sous-ensembles de $\{2, \dots, n\}$ qui est en bijection avec les idempotents de NDPF_n d'après la proposition précédente. De plus, étant donné e_I et e_J deux idempotents d'image I et J, l'idempotent $(e_I \circ e_J)^\omega = (e_J \circ e_I)^\omega$ est d'image $I \cap J$. □

Générateurs et relations

On peut également décrire le monoïde NDPF_n par générateurs et relations en suivant [HT09]. Pour tout $1 \leqslant i < n$, soit π_i la fonction de parking croissante définie par

$$\pi_i(k) = \begin{cases} i & \text{si } k \in \{i, i+1\} \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces $n-1$ idempotents engendrent le monoïde NDPF_n et satisfont les relations :

$$\begin{array}{rcll} \pi_i^2 & = & \pi_i & \\ \pi_i\pi_j & = & \pi_j\pi_i & \text{si } |i-j| > 1 \\ \pi_{i+1}\pi_i\pi_{i+1} & = & \pi_i\pi_{i+1}\pi_i & \\ \pi_i\pi_{i+1}\pi_i & = & \pi_i\pi_{i+1} & \end{array}$$

Ces relations donnent en fait une présentation de NDPF_n.

Il s'ensuit en particulier que NDPF_n est isomorphe à son opposé.

Proposition 5.12. *L'application* $\pi_i \to \pi_{n-i}$ *est un anti-automorphisme du monoïde* NDPF_n.

Démonstration. Il suffit de vérifier la proposition sur les relations de NDPF ce qui est évident. □

5.3 Représentations de la tour des monoïdes des fonctions de parking croissantes

5.3.1 Représentations de NDPF_n

Rappelons que NDPF_n est un monoïde $\mathcal{J}$-trivial. Ses modules simples sont donc de dimension 1 et entièrement caractérisés par les actions des générateurs $(\pi_i)_{i<n}$. Ainsi, nous pouvons indexer les modules simples non isomorphes de $\mathcal{N}_n$ par des mots binaires de longueur $n-1$ indiquant la valeur propre (0 ou 1) de l'action des π_i. La donnée de ces valeurs propres, disons $(b_1 b_2 \cdots b_{n-1})$, décrit uniquement un NDPF_n-module simple S de base $\{\varepsilon\}$:

$$\varepsilon \cdot \pi_i = b_i\,.$$

Pour $f \in \mathrm{NDPF}_n$, l'objectif est maintenant de déterminer combinatoirement $\mathrm{lfix}(f)$ et $\mathrm{rfix}(f)$. Nous allons pour ce faire introduire une notion de *descente* dans les fonctions de parking croissantes.

Définition 5.13. Pour une fonction de parking croissante $f \in \mathrm{NDPF}_n$, on appelle *descentes de* f le sous-ensemble $i \in \mathrm{Des}(f) \iff f \cdot \pi_i \neq f$. Ou alors de façon équivalente le sous-ensemble des indices où f croit strictement :

$$\mathrm{Des}(f) = \{i : f(i+1) > f(i)\}.$$

Proposition 5.14. *Soit f une fonction de parking croissante de longueur n.*

- $\mathrm{lfix}(f)$ *est l'unique idempotent e tel que* $\mathrm{Img}(e) = \mathrm{Img}(f)$.

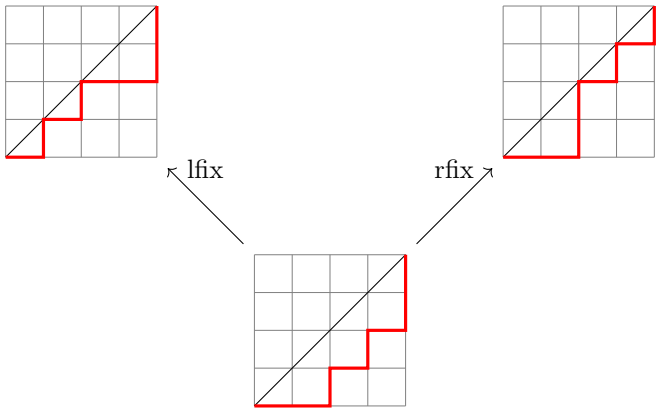
- $\mathrm{rfix}(f)$ *est l'unique idempotent e tel que* $\mathrm{Img}(e) = \mathrm{Des}(f)$.

Démonstration. - Soit $e = \mathrm{lfix}(f)$; il est immédiat que $\mathrm{Img}(f) \subseteq \mathrm{Img}(e)$. L'unique idempotent d'image $\mathrm{Img}(f)$ est minimal et convient.

- Soit $e = \mathrm{lfix}(f)$; il est immédiat que $\mathrm{Img}(f) \subseteq \mathrm{Des}(e)$. L'unique idempotent avec descentes $\mathrm{Des}(e)$ convient.

□

Exemple 5.15.



Le théorème 3.22 permet de calculer les matrices de Cartan de NDPF_n avec les lfix et rfix. Comme chaque idempotent de NDPF_n est indexé par un mot binaire de longueur $n-1$, en choisissant comme base l'ordre lexicographique sur les mots binaires, la matrice de Cartan est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. En particulier, $\mathcal{C}_n$ est une matrice inversible et symétrique selon l'axe transversal de bas à gauche – haut droite. Cette symétrie découle de la proposition suivante. Cet symétrie découle de l'anti-automorphisme de la proposition 5.12. On remarque aussi que les coefficients de la matrice de Cartan sont 0 ou 1 car une fonction de parking croissante est uniquement déterminée par la donnée de ses descentes et de son image.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 5.3.1: Matrices de Cartan pour NDPF_3 et NDPF_4

5.3.2 La tour des monoïdes $(\mathrm{NDPF}_n)_n$

Les représentations de NDPF_n ont été étudiées dans [HT09] comme application de la théorie des représentations du monoïde 0-Hecke. En effet, les auteurs montrent que le noyau du plongement $\phi : H_n(0) \to \mathrm{NDPF}_n$ qui envoie $\pi_i \mapsto \pi_i$ est contenu dans le radical de $H_n(0)$ et préserve la notion de

descente. Ils construisent de cette façon les représentations simples et projectives de NDPF_n à partir des représentations simples et projectives de $H_n(0)$.

Notre approche ici est moins spécifique, nous utilisons la structure de $\mathcal{J}$-trivialité de NDPF_n pour obtenir directement une description combinatoire des modules simples et projectifs. Nous étudions enfin l'induction et la restriction des modules simples et projectifs dans la tour d'algèbres des fonctions de parking croissantes.

On construit une tour de monoïdes vérifiant les axiomes précédemment énoncées en 4.2. Les axiomes (i) et (ii) sont directement respectés. On rajoute comme plongement la composition décalée, c'est à dire que pour deux fonctions de parking croissantes $f = f_1\ f_2\ \cdots f_m$ et $g = g_1\ g_2\ \cdots g_n$, la *composition décalée* envoie le produit cartésien de f et g sur la fonction $f_1 \cdots f_m\ (g_1 + m)\ (g_2 + m) \cdots (g_n + m)$ de NDPF_{m+n}. Plus formellement le plongement est le suivant :

$$\rho_{m,n} : \begin{cases} \mathrm{NDPF}_m \times \mathrm{NDPF}_n & \longrightarrow \\ f \times g & \longmapsto \end{cases} \quad \mathrm{NDPF}_{m+n} \\ h : i \mapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } i \leqslant m\,, \\ g(i-m)+m & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.3}$$

On vérifie aisément que ce plongement préserve les identités des monoïdes : $h = \rho_{m,n}(\mathrm{id}_m \times \mathrm{id}_n) = \mathrm{id}_{m+n}$. En effet, $h(i) = i$ si $i \leqslant m$ et $h(i+m) = i+m$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemple 5.16.

$$\rho_{4,3}(1134 \times 112) = 1134556$$
$$\rho_{5,4}(11244 \times 1224) = 112445668$$

L'axiome (iii) (associativité des plongements) découle de l'associativité de l'addition dans les entiers naturels. L'axiome (iv) est plus difficile à vérifier.

Afin d'alléger les notations, dans toute la suite nous noterons $\mathcal{N}_k = \Bbbk\mathrm{NDPF}_k$ l'algèbre du monoïde NDPF_k.

Lemme 5.17. *Pour tout $m \leqslant n$, $\mathcal{N}_n$ est un $\mathcal{N}_m$-module projectif.*

Démonstration. La projectivité à droite découle de la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{N}_{m+1} = \mathcal{N}_m \oplus \pi_m \cdot \mathcal{N}_m \oplus \pi_m\pi_{m-1} \cdot \mathcal{N}_m \oplus \pi_m\pi_{m-1}\pi_{m-2} \cdot \mathcal{N}_m \oplus \cdots\,,$$

où chaque terme est un $\mathcal{N}_m$-module projectif à droite.

L'anti-isomorphisme de la proposition 5.12 permet d'appliquer le même argument à gauche. □

Remarque 5.18. C'est aussi une conséquence des deux formules de restriction des projectifs : voir théorème 5.25. Le lecteur pourra vérifier que nous n'utilisons pas ce lemme dans la démonstration du théorème de restriction.

Théorème 5.19. *Le module $\mathcal{N}_{m+n}$ est un $(\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_n)$-module projectif.*

Afin de démontrer le théorème nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 5.20. *Soit M le $\mathcal{N}_n$-module engendré par une fonction croissante $f : [n] \to \mathbb{N}$; alors $M \simeq e \cdot \mathcal{N}_n$ où, e est l'unique idempotent de NDPF_n ayant le même ensemble de descentes que f.*

En particulier, le quotient de M obtenu en annihilant les éléments g de la base de M tels que $\mathrm{Img}(g) \subsetneq \mathrm{Img}(f)$ est isomorphe au $\mathcal{N}_n$-module projectif indécomposable P_I.

Démonstration. Soit $I = \mathrm{Des}(f)$, et e_I l'unique idempotent de NDPF_n tel que $\mathrm{rfix}(e) = I$. On note h la bijection $\mathrm{Img}(f) \to \mathrm{Img}(e)$ qui envoie $f(i) \mapsto e(i)$ pour tout $i \in [n]$. La composition à gauche par h donne une bijection entre la base de M et la base de $e \cdot \mathcal{N}_n$. Cette bijection commute l'action à droite des $\pi_i \in \mathcal{N}_n$, ce qui implique $M \simeq e \cdot \mathcal{N}_n$.

La seconde partie du théorème se déduit de la description des modules projectif des monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux donnée par le théorème 3.21 car dans NDPF_n, le lfix de f est l'unique idempotent ayant la même image que f. □

Preuve du Théorème 5.19. Nous allons montrer que $\mathcal{N}_{m+n}$ est un $(\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_n)$-module projectif à droite en donnant une suite de modules de la représentation régulière tels que les quotients soient projectifs. Définissons le module $F_i = \Bbbk\{f \in \mathrm{NDPF}_{m+n} : f(m) \leqslant i\}$ et considérons la suite de $(\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_n)$-modules

$$\mathcal{N}_{m+n} = F_m \supseteq F_{m-1} \supseteq \cdots \supseteq F_1 = \mathcal{N}_m.$$

Comme $\mathcal{N}_m$ et $\mathcal{N}_n$ agissent sur les positions, Q_i est isomorphe au produit tensoriel $L_i \otimes_{\Bbbk} R_i$ où L_i et R_i sont respectivement les $\mathcal{N}_m$-module et $\mathcal{N}_n$-module définis par :

$$\begin{aligned} L_i =& \Bbbk\{f \in \mathrm{NDPF}_m : f(m) = i\}, \\ R_i =& \Bbbk\{f \in [n] \to [n+m-i] \text{ croissante} : f(k) \leqslant k+m-i\}. \end{aligned}$$

La figure 5.3.2 illustre cet isomorphisme sur un élément f de la base de Q_i.

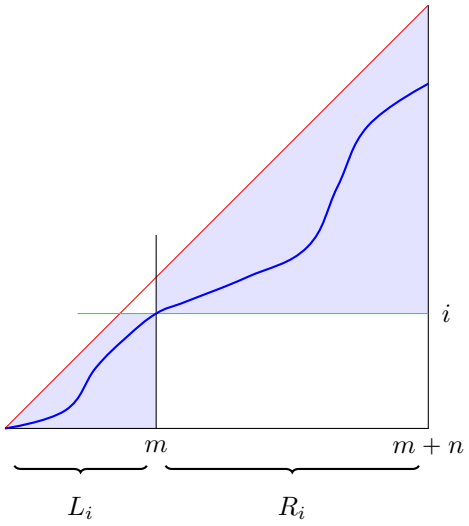


FIG. 5.3.2: Isomorphisme $L_i \otimes R_i$

L_i est $\mathcal{N}_m$-projectif : en effet L_i est isomorphe à l'idéal principal $L_i \simeq e \cdot \mathcal{N}_m$ où e est la fonction de parking croissante idempotente $e(k) = \min(k, i)$, pour $1 \leqslant k \leqslant m$.

R_i est $\mathcal{N}_n$-projectif : filtrons par le cardinal de l'image en posant $V_j = \{f \in R_i : |\mathrm{Img}(f)| \leqslant j\}$. Chacun des V_j est stable sous l'action de $\mathcal{N}_n$ et nous avons donc une suite de modules (pas forcément strictement décroissante) :

$$R_i = V_n \supseteq V_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq V_0 = 0.$$

Chaque quotient V_j/V_{j-1} peut se décomposer comme la somme directe $\bigoplus_{T \subset [n+m-i], |T|=j} P'_T$, où P'_T est le $\mathcal{N}_n$ sous-module ayant pour base

$$\{f \in R_i : \mathrm{Img}(f) = T\}.$$

Ce module est engendré par le plus grand $f \in R_i$ tel que $\mathrm{Img}(f) = T$, et est donc isomorphe à un $\mathcal{N}_n$-module projectif indécomposable P_I d'après le lemme 5.20. □

5.3.3 Règles d'induction et de restriction

Dans toute cette section, sauf précisé autrement, on considérera des $\mathcal{N}$-modules *à gauche*.

Restriction des modules simples

Rappelons que chaque $\mathcal{N}_n$-module simple est caractérisé (et indexé) par un sous-ensemble I de $\{1,\dots,n-1\}$. L'action de $f \in \mathrm{NDPF}_{m+n}$ sur S_I de base ε_I est

$$f \cdot \varepsilon_I = \begin{cases} \varepsilon_I & \text{si } fe_I = e_I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, f agit trivialement sur S_I si et seulement si $\mathrm{Img}(e_I) \subseteq \mathrm{Img}(f)$ avec e_I l'unique idempotent d'image I. La proposition suivante décrit la restriction des modules simples.

Proposition 5.21. *Soit $I \subseteq \{1,\dots,m+n-1\}$ et S_I l'unique module simple sur lequel (π_i) agit par 1 si $i \in I$ et par 0 sinon. La restriction de S_I à $\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_n$ est*

$$\mathrm{Res}^{\mathcal{N}_{m+n}}_{\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_n} S_I = S_J \otimes S_K$$

avec $J = I \cap \{1,\dots,m-1\}$ et $K = I \cap \{m+1, m+n-1\}$.

Induction des modules projectifs

La dualité de Frobenius (théorème 2.45) permet de décrire l'induction des $\mathcal{N}$-modules projectifs à partir de la proposition 3.22.

Proposition 5.22. *Soient P_I et P_J deux modules projectifs indécomposables sur $\mathcal{N}_m$ et $\mathcal{N}_n$, alors*

$$\mathrm{Ind}^{\mathcal{N}_{m+n}}_{\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}} P_I \otimes P_J = P_{I \cup J} \oplus P_{I \cup \{m\} \cup J}.$$

Induction des modules simples

On peut déduire de ce qui précède un lemme d'induction des modules simples qui servira le cas général. Ce lemme fait la transition entre le cas projectif et le cas simple. En particulier le $\mathcal{N}$-module trivial est le $\mathcal{N}$-module de dimension 1 fixé seulement par l'identité.

Lemme 5.23. *Soient m, n deux entiers positifs et $I = \{1,\dots,m-1\}$ et $J = \varnothing \subset \{1,\dots,n-1\}$ deux ensembles. On note S_I et S_J les $\mathcal{N}_m$ et $\mathcal{N}_n$-modules simples associés. Alors, dans l'anneau de Grothendieck, $G_0(\mathcal{N})$ on a le produit*

$$[S_I][S_\varnothing] = \sum_{\substack{K \subseteq [m+n] \\ |K| \in \{m-1, m\}}} [S_K].$$

Démonstration. Le module S_I est un $\Bbbk\mathcal{N}_m$-module projectif car c'est l'idéal $\mathcal{N}_m\, w$ où w est l'idempotent minimum du $\mathcal{J}$-ordre, c'est à dire la fonction de parking croissante $[1 \dots 1]$. Le module simple S_J est aussi projectif car le monoïde NDPF_m étant $\mathcal{J}$-trivial, l'unique élément ayant $\{1,\dots,m-1\}$ comme rfix est l'élément identité.

Les modules S_I et S_J étant projectifs, on peut alors appliquer la proposition 5.22 pour obtenir l'induction comme somme directe de deux modules projectifs indécomposables $[P_I][P_J] = [P_{I \cup J}] + [P_{I \cup \{w\} \cup J}]$; puis décomposer chaque module projectif indécomposable dans $G_0(\mathcal{N})$ selon le théorème 3.22.

Les éléments dont le rfix est $I \cup J$ sont toutes les fonctions de NDPF_{m+n} telles que l'image est $\{1,\dots,m-1\}$. Chacune de ces fonctions est uniquement déterminée par l'ensemble de ses descentes donc son lfix. Comme l'image est de cardinal $m-1$, ces fonctions contribuent en les modules simples indexés par les sous-ensembles de $[m+n-1]$ de cardinal $m-1$.

En répétant le même argument pour les fonctions dont le rfix est $I \cup \{m\} \cup J$, on a montré que le module projectif induit se décompose en une somme de modules simples de multiplicités 1 indexé par les fonctions de parking croissantes dont le nombre de descentes est $m-1$ ou m comme dans l'énoncé. □

Théorème 5.24. *Soient S_I et S_J deux modules simples, avec I et J sous la forme $S_I = (a_1, a_2, \ldots, a_i, 1^k) \in G_0(\mathcal{N}_m)$ et $S_J = (0^l, b_j, b_{j+1}, \ldots, b_{n-1}) \in G_0(\mathcal{N}_n)$ où $a_i = 0$ et $b_j = 1$, alors*

$$[S_a][S_b] = \left\{ [(a_1, \ldots, a_i, c_1, \ldots, c_{k+l+1}, b_j, \ldots, b_{n-1})] : \sum_i c_i \in \{k, k+1\} \right\} .$$

Démonstration. On est encore dans le cadre d'application du lemme 4.6, le quotient fA/UA avec $A = \mathrm{NDPF}_{m+n}$, $f = \varphi_{m,n}(e_a \otimes e_b)$ et $U = \varphi(\mathcal{R}_<(e_a) \otimes \mathcal{R}_<(e_b))$ où e_a (respectivement e_b) est l'unique idempotent associé à a (respectivement b). Il est aisé de remarquer que toutes les fonctions de parking qui ne sont pas de lfix tel que décrit dans l'énoncé sont dans le quotient.

On se ramène alors au cas du lemme précédent qui exprime les termes de $[S_a][S_b]$ à partir du produit $[(1^k)][(0^l)]$ dans l'anneau de Grothendieck $\mathcal{N}_{k+1} \otimes \mathcal{N}_{l+1}$. □

Restriction des modules projectifs

Le cas général de la restriction peut se déduire des deux théorèmes suivants qui sont des formules de Pieri pour les fonctions de parking croissantes.

1. À gauche.

Commençons par regarder un exemple qui contient toute la généricité de la restriction. Soit $I = (0, 1, 0, 1, 0)$ et P_I le N_6-module projectif à gauche indécomposable associé.

Il a pour base combinatoire l'ensemble des fonctions de parking croissantes f de NDPF_6 telles que $\mathrm{rfix}(f) = 12333$, voir figure 5.3.3.

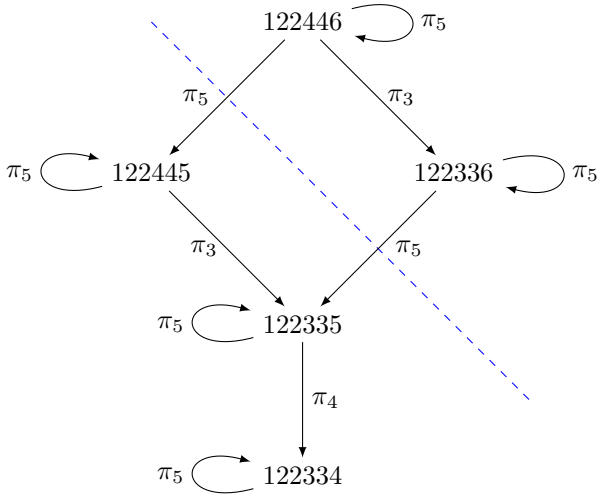


FIG. 5.3.3: $\mathcal{N}_6$-module projectif $(0, 1, 0, 1, 0)$

On remarque que la restriction à $\mathcal{N}_5 \otimes \mathcal{N}_1$ consiste juste à enlever la flèche indexée par le générateur π_5. On obtient alors deux modules en somme directe qui correspondent à $P_{(0,1,0,1)} \oplus P_{(0,1,0,0)}$.

Théorème 5.25. *Soit P_I un $\mathcal{N}_{m+1}$-module à gauche projectif indécomposable avec $I = (i_1, \ldots, i_m)$, et* $\mathrm{Res} : \mathcal{N}_{m+1} - \mathbf{mod} \longrightarrow \mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_1 - \mathbf{mod}$ *le foncteur de restriction ; on distingue deux cas :*

- *si $i_m = 1$ alors $\mathrm{Res}\, P_I = P_J$ avec $J = (i_1, \ldots, i_{m-1})$;*
- *si $i_m = 0$ alors $\mathrm{Res}\, P_i = P_J \oplus P_K$ avec $J = (i_1, \ldots, i_{m-1})$ et K le mot binaire égal à J dans lequel on a remplacé le dernier 1 par 0.*

Démonstration. Le module à gauche P_I est combinatoire d'après le théorème 3.21, avec pour base l'ensemble $\{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{rfix}(f) = I\}$.

- Si π_m agit par 1, alors la base du module combinatoire $\{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{rfix}(f) = I\}$ est en bijection avec $\{f \in \mathrm{NDPF}_m : \mathrm{rfix}(f) = J\}$ avec J comme dans l'énoncé. De plus, pour $i, j \neq m+1$ alors les actions dans le module combinatoire P_I

$$f \xrightarrow{\pi_i} g \qquad , \qquad h \circlearrowright \pi_j$$

sont également dans le module P_J.

- Si $i_m = 0$, alors nous n'avons plus la bijection ci-haut. Nous pouvons cependant décomposer la base $B = \{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{lfix}(m+1) = m+1\}$ en deux parties disjointes

$$B = \{f \in B : f(m+1) = m+1\} \sqcup \{f \in B : f(m+1) < m+1)\} = B_J \sqcup B_K.$$

On appelle e_K (respectivement e_J) l'élément maximal de B_K (respectivement M_J) pour le $\mathcal{J}$-ordre. Ces deux ensembles forment la base de deux $\mathcal{N}_m$-modules M_J et M_K. Il est clair que la seule opération pour passer de M_J à M_K est l'action par le générateur π_m comme le résume le schéma suivant (voir figure 5.3.4).

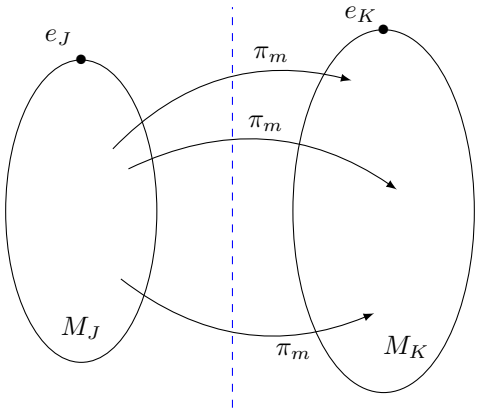


FIG. 5.3.4: Le module combinatoire $M_K + M_J$

La restriction à $\mathcal{N}_m \otimes \mathcal{N}_1$ sépare alors les deux modules en une somme directe. Le module M_J est clairement isomorphe à P_J comme $\mathcal{N}_5$-module. Pour déterminer M_J il suffit de remarquer que $e_K = \pi_m \pi_{m-1} \cdots \pi_\alpha \cdot e_J$ avec π_α le premier générateur dans l'ordre décroissant de $\pi_1 < \pi_2 < \cdots$ qui agit par 1.

Par exemple le $\mathcal{N}_6$-module P_I avec $I = (0, 1, 1, 0, 0)$

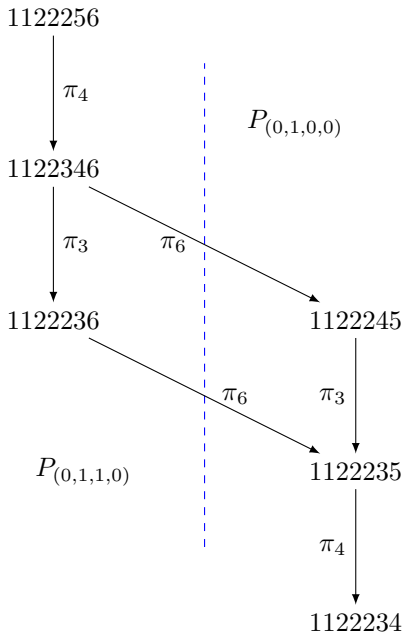


FIG. 5.3.5: $\mathcal{N}_7$-module projectif $(0,1,1,0,0)$

2. À droite

Commençons par regarder un exemple qui contient toute la généricité de la restriction. Soit $I = (0,0,1,1)$ et P_I le $\mathcal{N}_5$-module projectif indécomposable associé. Il a pour base combinatoire l'ensemble des fonctions de parking croissantes f de NDPF_5 telles que $\mathrm{lfix}(f) = 12333$. Dans la figure 5.3.6.

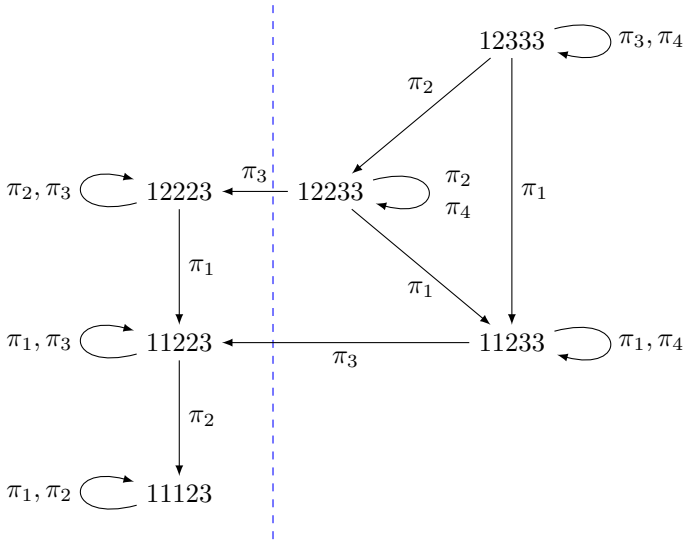


FIG. 5.3.6: $\mathcal{N}_5$-module projectif $(0,0,1,1)$

On remarque que le module est composé de deux morceaux : un qui est « tué » par π_4 et l'autre qui est fixé. On peut passer de droite à gauche par l'action de π_3 qui est le générateur le plus *petit* (au sens où $\pi_1 < \pi_2 < \cdots$) qui n'agit pas trivialement.

On reconnait à droite le $\mathcal{N}_4$-module projectif $P_{(0,1,1)}$ et à gauche le $\mathcal{N}_4$-module projectif $P_{(0,0,1)}$. On

a alors la suite de composition de modules projectifs

$$P_I \supsetneq P_{(0,0,1)} \supsetneq 0,$$

de laquelle on déduit l'isomorphisme de $\mathcal{N}_4$-modules $P_I \simeq P_I/P_{(0,0,1)} \oplus P_{(0,0,1)}$, soit $P_I \simeq P_{(0,1,1)} \oplus P_{(0,0,1)}$.

Théorème 5.26. *Soit P_I un $\mathcal{N}_{m+1}$-module à droite projectif indécomposable avec $I = (i_1, \ldots, i_m)$, et* $\mathrm{Res} : \mathcal{N}_{m+1} - \mathbf{mod} \longrightarrow \mathcal{N}_m - \mathbf{mod}$ *le foncteur de restriction ; on distingue deux cas :*

- *si $i_m = 0$ alors* $\mathrm{Res}\, P_I = P_J$ *avec $J = (i_1, \ldots, i_{m-1})$;*
- *si $i_m = 1$ alors* $\mathrm{Res}\, P_i = P_J \oplus P_K$ *avec $J = (i_1, \ldots, i_{m-1})$ et K le mot binaire égale à J dans lequel on a remplacé le dernier* 0 *par* 1.

Démonstration. Le module P_I est combinatoire d'après la proposition théorème 3.21, avec pour base l'ensemble $\{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{lfix}(f) = I\}$.

- Si π_m « tue » P_I, alors toute fonction de parking croissante f de $\{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{lfix}(f) = I\}$ vérifie $f(m+1) = m+1$. La base du module combinatoire P_I est donc en bijection avec $\{f \in \mathrm{NDPF}_m : \mathrm{lfix}(f) = J\}$ avec J comme dans l'énoncé. De plus, pour $i, j \neq m+1$ alors les actions dans le module combinatoire P_I

$$f \xrightarrow{\pi_i} g \qquad , \qquad h \circlearrowright \pi_j$$

  sont également dans le module P_J.

- Si π_m agit trivialement sur P_I nous n'avons plus la bijection ci-haut. Nous pouvons cependant décomposer la base $B = \{f \in \mathrm{NDPF}_{m+1} : \mathrm{lfix}(m+1) = m+1\}$ en deux parties disjointes

$$B = \{f \in B : f(m+1) = f(m)\} \sqcup \{f \in B : f(m) \neq f(m+1)\} = B_J \sqcup B_K.$$

  On appelle e_J (respectivement e_K) l'élément maximal de B_J (respectivement M_K) pour le $\mathcal{J}$-ordre. Ces deux ensembles forment la base de deux $\mathcal{N}_m$-modules M_J et M_K.

  Pour $f \in B_J$ il est clair qu'il n'existe pas de π_i tel que $f \cdot \pi_i \in B_K$ car $f(m+1) > f(m)$ et une fonction de parking croissante h telle que $f \cdot h \in B_K$ devrait alors vérifier $h(m+1) = h(m) = m+1$, ce qui contredit le fait que $h \in \mathrm{NDPF}_{m+1}$. La seule action qui permet de passer de M_K à M_J est π_α où α est le rang du dernier 0 dans I. On a donc un module combinatoire $M_J + M_K$ que l'on peut schématiser comme suit (figure 5.3.7).

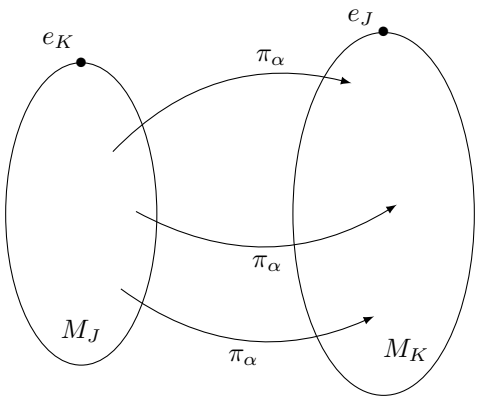
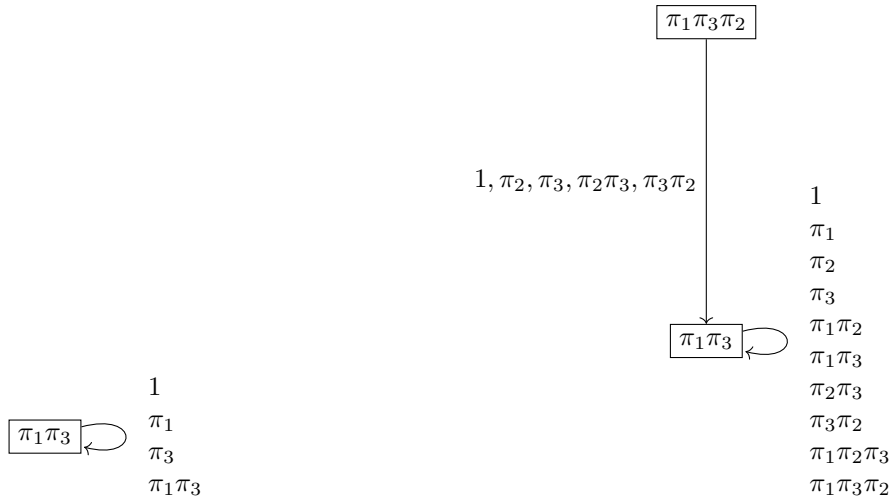


FIG. 5.3.7: Le module combinatoire $M_K + M_J$

On a une décomposition projective $P_I \supsetneq M_J \supsetneq 0$, et il reste à montrer que M_J et P_I/M_J est projectif. Il est clair que le module $M_J \simeq P_J$ car B_J est en bijection avec $\{f \in \mathrm{NDPF}_m : \mathrm{lfix}(f) = J\}$. De même il est facile de voir que $P_I/M_K \simeq P_J$. En particulier, la décomposition est projective et $P_I/M_J \simeq P_K$ ce qui conclut la démonstration du théorème. □

Exemple 5.27. Une description complète du module simple et du module projectif provenant de l'idempotent $\pi_1\pi_3$ de NDPF_4 est donnée figure 5.3.8. On remarque que le module simple $S_{\pi_1\pi_3}$ est de dimension 1 et sa couverture projective est de dimension 2.



(a) Module simple $S_{\pi_1\pi_3}$ (b) Module projectif $P_{\pi_1\pi_3}$

FIG. 5.3.8: Illustration de l'exemple 5.27

Exemple 5.28. Regardons en détail une application du théorème 5.24 d'un point de vue combinatoire. On considère le module simple de $\mathcal{N}_4 = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$ engendré par $\pi_3\pi_2$ et le module simple de $\mathcal{N}_3$ engendré par π_2. Avec les notations du théorème d'induction des modules simples, $S_{\pi_3\pi_2}$ s'écrit $(0,1,1) = 0^1 1^2$ car il est fixé par π_2 et π_3, mais π_1 agit comme 0. De la même façon, $S_{\pi_2} = (0,1)$ comme le résume le tableau ci-après

$$\begin{array}{cc} \pi_3\pi_2 = 1222 \in \mathcal{N}_4 & \pi_2 = 122 \in \mathcal{N}_3 \\ S_{\pi_3\pi_2} : (0,1,1) & S_{\pi_2} : (0,1) \end{array} .$$

Le théorème 5.24 permet de construire les termes induits par le module $\mathrm{Ind}(S_{\pi_3\pi_2} \otimes S_{\pi_2})$ dans $\mathcal{N}_7$ comme l'explicite le schéma suivant :

$0\boxed{1\,1\,.\,0}1$		$\sum$
$0\boxed{0\,1\,1\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5\pi_4\pi_3}$
$0\boxed{1\,0\,1\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5\pi_4}$
$0\boxed{1\,1\,0\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5}$
$0\boxed{1\,1\,1\,0}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6}$
$0\boxed{0\,0\,1\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6\pi_5\pi_4}$
$0\boxed{0\,1\,0\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6\pi_5}$
$0\boxed{0\,1\,1\,0}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6}$
$0\boxed{1\,0\,0\,1}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_6\pi_5}$
$0\boxed{1\,0\,1\,0}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_6}$
$0\boxed{1\,1\,0\,0}1$	$\longrightarrow$	$S_{\pi_3\pi_2\pi_6}$

Finalement le produit dans $G_0(\mathcal{N})$ est alors

$$\begin{aligned}[S_{\pi_3\pi_2}][S_{\pi_2}] =&[S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5\pi_4\pi_3}] + [S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5\pi_4}] + [S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6\pi_5}]+\\ &[S_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6}] + [S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6\pi_5\pi_4}] + [S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6\pi_5}] + [S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_3\pi_6}]+\\ &[S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_6\pi_5}] + [S_{\pi_3\pi_2\pi_4\pi_6}] + [S_{\pi_3\pi_2\pi_6}].\end{aligned}$$

L'induction du module projectif $P_{\pi_3\pi_2} \otimes P_{\pi_2}$ est également décrit par le théorème 5.24. On obtient une somme de deux modules projectifs de dimensions quatre et six. Dans $K_0(\mathcal{N})$ on obtient

$$[P_{\pi_3\pi_2}][P_{\pi_2}] = [P_{\pi_3\pi_2\pi_6}] + [P_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6}],$$

plus visuellement :

011.01		$\sum$	dim
011101	$\longrightarrow$	$P_{\pi_4\pi_3\pi_2\pi_6}$	4
011001	$\longrightarrow$	$P_{\pi_3\pi_2\pi_6}$	6

.

5.4 Fonctions de parking généralisées

Les fonctions de parking généralisées ont été définies par Stanley et Pitman [SP02]. Soit $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ une fonction croissante, une fonction $f : [n] \to \mathbb{N}$ est une *χ-fonction de parking* si $\forall k \in [n]$, $|f^{-1}([\chi(k)])| \geqslant k$. On note $\mathrm{PF}(\chi)_n$ l'ensemble des χ-fonctions de parking de taille n. De façon équivalente une fonction de parking $v_1v_2\cdots v_n$ est une χ-fonction de parking si $(v\uparrow)_i \leqslant \chi(i)$ pour tout i où $v\uparrow$ est le mot v trié pour l'ordre croissant. Pour $\chi = \mathrm{id}$ on retrouve la définition des fonctions de parking classiques.

Pour toute fonction de parking usuelle $f_1\cdots f_n$ on peut construire une χ-fonction de parking de la façon suivante. Chaque image f_i est remplacée par un entier v_i de l'intervalle $[\chi(f_i), \chi(f_{i+1})]$ pour obtenir un χ-fonction $v_1\cdots v_n$. En comptant le nombre de choix, on déduit la formule suivante.

Théorème 5.29 ([SP02, Théorème 11])**.**

$$|\mathrm{PF}(\chi)_n| = \sum_{f\in \mathrm{PF}_n} \chi(f_1)\chi(f_2)\cdots\chi(f_n)$$

Cette formule est néanmoins très inefficace à mettre en œuvre pour une application numérique : il faut parcourir l'ensemble des fonctions de parking croissantes (soit Catalan) ce qui est exponentiel.

Plus surprenante est la connexion entre les polynômes de Gončarov et les fonctions de parking généralisées exploitées par Joseph Kung et Catherine Yan [KY03]. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la formule suivante dont nous allons donner deux preuves, une combinatoire et une algébrique ; sans utiliser les polynômes de Gončarov.

Proposition 5.30 ([KY03, Théorème 4.2])**.** *Le nombre de χ-fonctions de parking est*

$$|\mathrm{PF}(\chi)_n| = \sum_{\rho} (-1)^{\rho} \prod_{i=1}^{n} \chi(\rho(i)),$$

où la sommation se fait sur chaque χ-fonction de parking primitive ρ.

La notion de fonction de parking primitive sera introduite définition 5.31. Notons que la formule précédente permet un calcul en temps linéaire en n de la cardinalité $\mathfrak{f}(\chi, n)$, ce qui est meilleur que l'algorithme qui provient directement du théorème 5.29.

Fonctions de parking et mots tassés

On peut alternativement définir les fonctions de parking comme *suite d'ensembles disjoints*. En effet, on peut associer à toute fonction de parking f une suite d'ensembles $(Q_i)_{i\in[n]}$ en posant $Q_i = f^{-1}(i)$.

Réciproquement, à partir d'une suite d'ensembles disjoints *valide* (voir définition ci-après) $(Q_i)_{i\in[n]}$ on retrouve f en posant $f(n)$ l'unique indice i tel que $n \in Q_i$. On définit les χ-fonctions de parking de la même façon comme une suite d'ensemble $(Q_i)_{i\in[\chi(n)]}$.

Considérons par exemple $\chi = 2, 3, 5, 6, 9$ et f la χ-fonction de parking $[5, 1, 3, 3, 7]$. La suite d'ensembles associée à f est

$$\{2\}|\{\varnothing\}|\{3,4\}|\{\varnothing\}|\{1\}|\{\varnothing\}|\{5\}|\{\varnothing\}|\{\varnothing\}.$$

Définition 5.31. Une χ-fonction de parking f de taille n est une suite de sous ensembles de $[n]$ disjoints $(Q_i)_{i\in[\chi(n)]}$ telle que $\sum_{i\leqslant\chi(n)} |Q_i| = n$ et pour tout $k \leqslant n$, $\sum_{i\leqslant\chi(k)} |Q_i| \geqslant k$; elle est *primitive* si

$$Q_i \neq \varnothing \iff i = \chi\left(1 + \sum_{j<\chi(i)} |Q_j|\right).$$

On note $\mathcal{P}_{n-1}$ l'ensemble des fonctions de parking primitives de longueur n.

En d'autres termes, une χ-fonction de parking est primitive si et seulement si tous les chemins verticaux rejoignent χ. Dans la représentation en suite d'ensembles, cela correspond à des séquences d'ensembles vides de longueurs maximales. Les fonctions de parking sont en bijection avec les *partitions ordonnées d'ensemble* P_i. En effet, chaque P_i donne l'indice des éléments $\chi(\sum_{k<i} |Q_k|)$.

L'ensemble d'*inversions* d'une fonction de parking primitive f est défini similairement aux permutations, c'est l'ensemble $\mathrm{Inv}(f) = \{(i, j) : i < j \text{ and } f(i) \geqslant f(j)\}$.

Prenons par exemple χ la suite des nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ (A000040), alors $f = [13, 2, 3, 11, 3, 3]$ est une χ-fonction de parking *primitive* de longueur six dont la représentation comme partition ordonnée d'ensembles est $\{2\}|\{3, 5, 6\}|\{4\}|\{1\}$. Son ensemble d'inversions est

$$\mathrm{Inv}(f) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}.$$

De la même façon que pour les permutations, on peut définir le χ-standardisé d'une fonction de parking généralisé. Pour une χ-fonction de parking f, on définit $\mathrm{Std}^\chi(f)$ en appliquant le même algorithme vu en 2.1 mais en ré-étiquetant par $\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(n)$.

Exemple 5.32. Soit χ la suite de Catalan $1, 1, 2, 5, 14, 42, \cdots$ on a,

$$\mathrm{Std}^\chi(1, 4, 11, 1, 31, 1) = (1, 5, 14, 1, 42, 2).$$

Définition 5.33. La *dimension* d'une χ-fonction de parking de longueur f de longueur n est l'entier $n - |\,\mathrm{Img}(f)|$.

Soient f et g deux χ-fonctions de parking, on dit que $f \leqslant g$ si pour tout i on a $f(i) \leqslant g(i)$. Cet ordre permet de munir l'ensemble PF d'un ordre partiel.

A toute χ-fonction de parking primitive p, on peut associer un ensemble de fonctions de parking par $\Lambda(p) = \{f \in \mathrm{PF}_n(\chi) : f \leqslant p\}$. On notera également $d(f) = n - |\,\mathrm{Img}(f)|$.

5.4.1 Formule de Kung et Yan

L'objectif est de montrer la formule suivante qui fait penser à une formule d'inclusion-exclusion.

Théorème 5.34. *Dans l'espace vectoriel* $\Bbbk\,\mathrm{PF}_n(\chi)$ *on a*

$$\sum_{f\in\mathrm{PF}_n(\chi)} f = \sum_{f\in\mathcal{P}_{n-1}} (-1)^{d(f)} \sum_{p\leqslant f} p\,.$$

Nous allons montrer que pour tout $f \in \mathrm{PF}_n(\chi)$ on a

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P}_{n-1} \\ p \geqslant f}} (-1)^{d(p)} = 1, \tag{5.4}$$

ce qui impliquera directement le théorème 5.34. Nous allons filtrer par les inversions et appliquer la méthode de l'involution dans son cadre le plus élémentaire. Notre première étape est de décrire la structure des fonctions de parking primitive au-dessus de d'une fonction de parking f.

Lemme 5.35. *Soit f une fonction de parking et I un ensemble d'inversion tel que $I \subseteq \mathrm{Inv}(f)$. La série génératrice $G_{f,I}$ qui compte le nombre de fonctions de parking par dimension est*

$$G_{f,I}(t) = \sum_{\substack{\mathrm{Inv}(p)=I \\ p \geqslant f}} t^{d(p)} = (1+t)^{d(h)},$$

où h une fonction de parking de dimension maximale vérifiant $\mathrm{Inv}(h) = I$.

Démonstration. La dimension étant invariante par permutation des indices, on peut donc supposer sans perte de généralité que f est croissante. Ainsi, les inversions de h correspondent à des intervalles d'indices avec même image. La clef de la construction consiste à remarquer que l'on peut construire l'ensemble

$$\mathrm{Inv}_h = \{p \in \mathcal{P}_{n-1} : \mathrm{Inv}(q) = \mathrm{Inv}(p) \text{ et } q \geqslant p\}$$

à partir de h en rajoutant des marches aux parties constantes de h (on rappelle que h est croissante). Si on force la croissance en $k \leqslant d(h)$ indices, on construit $\binom{d(h)}{k}$ fonctions de parking primitives distinctes, chacune de dimension $d(h) - k$. □

Fin de la preuve du théorème 5.34. Soit f une fonction de parking, on pose

$$\begin{aligned} X^+ &= \{p \in \mathcal{P}_{n-1} : d(p) \text{ est pair}\} \\ X^- &= \{p \in \mathcal{P}_{n-1} : d(p) \text{ est impair}\}, \end{aligned}$$

que l'on raffine pour un ensemble d'inversions I en

$$\begin{aligned} X_I^+ &= \{p \in \mathcal{P}_{n-1} : \mathrm{Inv}(p) = I \text{ et } d(p) \text{ est pair}\}, \\ X_I^- &= \{p \in \mathcal{P}_{n-1} : \mathrm{Inv}(p) = I \text{ et } d(p) \text{ est impair}\}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $|X^+| = |X^-| + 1$ pour en déduire la formule (5.4). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer f croissante. Soit $\{I_1, \ldots, I_k\}$ les ensembles d'inversions des fonctions primitives $\{p \geqslant f\}$. L'ensemble vide apparaît comment ensemble d'inversion de la fonction de parking primitive associée à la partition ordonnée $\{1\}|\cdots|\{n\}$. Pour chaque ensemble d'inversions $I_i \neq \{\varnothing\}$ on a $|X_I^+| = |X_I^-|$: en effet le lemme 5.35 assure que pour $I \neq \{\varnothing\}$, le cardinal de $|X_I^+|$ est $\sum_{2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $|X_I^-| = \sum_{2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$. Or si $n > 0$, le développement de Newton donne $\sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$. Comme pour $I = \{\varnothing\}$ on a bien $|X_{\{\varnothing\}}^+| = 1$ et $|X_{\{\varnothing\}}^-| = 0$, on en déduit la formule (5.4) et le théorème 5.34. Pour un exemple de telle association, voir la figure 5.4.1. □

5.5 Action de $H_n(0)$ sur les fonctions de parking

Considérons un alphabet ordonné $\mathcal{A} = [k]$ et l'ensemble des mots de longueur n sur $[k]$ que l'on note $[k]^n$.

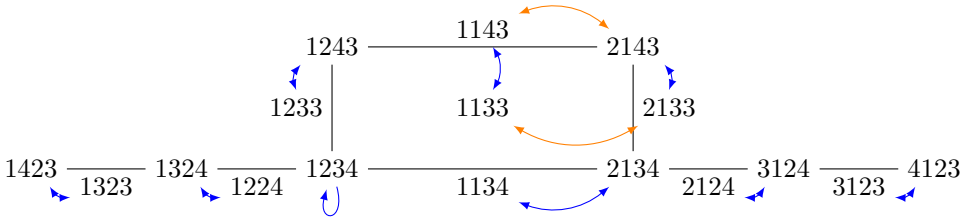


FIG. 5.4.1: L'ensemble $\{p \in \mathcal{P}_4\}$ pour $\chi = \mathrm{id}$ et $f = 1123$. En bleu et orange les deux affectations possibles.

5.5.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur les mots

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $[k]^n$ par permutations des lettres. Ainsi à partir d'un mot w, on obtient, sous l'action de $\mathfrak{S}_n$, tous ses réarrangements. On forment ainsi un module projectif M qui est induit de la représentation triviale de $\mathfrak{S}_{\pi_1} \times \mathfrak{S}_{\pi_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\pi_m}$ où π est l'évaluation tassée de w. Son caractère est alors $ch(M) = h_\pi \in \Lambda$.

Le $\mathfrak{S}_n$-module $\Bbbk[k]$ a pour caractère

$$ch(\Bbbk[k]^n) = \sum_{\pi \models n} C_\pi h_\pi,$$

où C_π est le nombre de mots dont l'évaluation tassée est π. Nous donnerons une forme explicite de C_π dans la prochaine section.

5.5.2 Action de $H_n(0)$ sur les mots

On peut raffiner la construction précédente et faire agir $H_n(0)$ sur l'algèbre $W_n(k) = \Bbbk[k]^n$. L'action dépend d'un ordre : on choisit l'ordre usuel sur les entiers naturels. Pour w un mot de longueur n sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on a

$$w \cdot T_i = \begin{cases} w \cdot \sigma_i & \text{si } a_i < a_{i+1}, \\ 0 & \text{si } a_i = a_{i+1}, \\ -w & \text{si } a_i > a_{i+1}. \end{cases}$$

Chaque mot croissant w engendre un $H_n(0)$ projectif module M_w dont le caractère est $\mathbf{ch}(M_w) = \mathbf{S}^\pi \in \mathbf{NCSF}$ avec π l'évaluation tassée de w. Le nombre de mot a évaluation tassée π s'exprime bien dans QSym: il s'agit de $M_\pi(k) = M_\pi(1^k)$. Comme remarqué dans [NT08], le caractère de $\Bbbk[k]^n$ relevé dans les fonctions symétriques non commutatives est

$$\mathbf{ch}(W_n(k)) = \sum_{\pi \models n} M_\pi(k) \mathbf{S}^\pi(\mathcal{A}) = \mathbf{S}_n(k\mathcal{A}). \tag{5.5}$$

La deuxième égalité provient directement de la formule de Cauchy . La théorie des fonctions symétriques non commutatives assure alors que

$$\mathbf{ch}(W_n(k)) = \sum_{\pi \models n} \binom{k}{\ell(\pi)} \mathbf{S}^\pi.$$

On retrouve par spécialisation des formules de combinatoire classique. La spécialisation $S^\pi \mapsto 1$ donne le nombre de types d'isomorphismes sur $[k]^n$.

$$\sum_{\pi \models n} \binom{k}{\ell(\pi)} = \binom{n+k-1}{k-1},$$

qui compte le nombre de mots croissants de longueur n sur un alphabet ordonné de k lettres. Le nombre de structures s'obtient par spécialisation en un multinomial $S^\pi \mapsto \binom{n}{i_1,\dots,i_j}$ ce qui permet de retrouver la formule

$$\sum_{\substack{\pi\models n\\ \pi=i_1,\dots,i_j}} \binom{k}{j}\binom{n}{i_1,\dots,i_j} = k^n.$$

On peut aussi exprimer ce caractère dans différentes bases de **NCSF**, ce qui mène à différentes interprétations combinatoires :

$$\begin{aligned}\mathbf{ch}(W_n(k)) =& \mathbf{S}_n(k\cdot\mathcal{A}) = \sum_{\pi\models n}\binom{k}{\ell(\pi)}\mathbf{S}^\pi,\\ =& \mathbf{R}_n(k\cdot\mathcal{A}) = \sum_{\pi\models n} F_\pi(k)\mathbf{R}_\pi = \sum_{\pi\models n}\binom{k-1+\ell(\widetilde{\pi})}{n}\mathbf{R}_\pi,\\ =& \sum_{\pi\models n}(-1)^{n-\ell(\pi)}\Lambda^\pi(k\cdot\mathcal{A}) = \sum_{\pi\models n}(-1)^{n-\ell(\pi)}\binom{k-1+\ell(\pi)}{\ell(\pi)}\Lambda^\pi.\end{aligned}$$

Toujours dans [NT08], les auteurs affinent la caractéristique précédente en remarquant que la somme des lettres est préservée par l'action de $\mathfrak{S}_n$ ou $H_n(0)$. Après renormalisation $\|w\| = \sum_{i=1}^n (w_i - 1)$, on a l'égalité

$$\sum_{\substack{w\in[k]^n\\ \pi=\mathrm{pEv}(w)}} q^{\|w\|} = M_\pi(1,q,\dots,q^{k-1}) = M_\pi([k]_q),$$

qui permet d'exprimer un q-caractère de $W_n(k)$:

$$\mathbf{ch}_q(W_n(k)) = \sum_{\pi\models n} M_\pi([k]_q)\mathbf{S}^\pi = \mathbf{S}_n([k]_q\mathcal{A}). \tag{5.6}$$

5.5.3 Espèce des fonctions de parking

Cette partie décrit un travail en commun avec Jean-Baptiste Priez [PV14].

On rappelle (cf. 5.1) qu'une fonction de parking sur un ensemble U est une fonction $f : U \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \leqslant n$, on a $f^{-1}([k])| \geqslant k$. Afin de construire les fonctions de parking (généralisées) comme une espèce, il sera plus facile de considérer la définition équivalente en terme de partitions ordonnées d'ensembles $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ avec $Q_i = f^{-1}(i)$.

Définition 5.36. L'espèce des fonctions de parking PF est définie comme

- PF$[U]$ est l'ensemble des partitions ordonnées d'ensembles (Q_i) de U telles que

$$\sum_{i=1}^{k}|Q_i| \geqslant k \qquad \text{pour tout } 1\leqslant k\leqslant |U|;$$

- pour une bijection $\sigma : U \to V$, l'image PF$[\sigma]$ est l'action de ré-étiquetage est $(Q_i)_i \mapsto (\sigma(Q_i))_i$.

Notons que la définition s'adapte immédiatement aux fonctions de parking généralisées dont on peut décrire l'espèce PF(χ). Dans ce cas, (Q_i) est une suite infinie d'ensembles disjoints telle que $Q_j = \{\varnothing\}$ pour tout $j > \chi(|U|)$. L'action de ré étiquetage est la même et PF$(\chi)[U]$ est l'ensemble des partitions ordonnées d'ensembles telles que

$$\sum_{i=1}^{\chi(k)}|Q_i| \geqslant k\,, \qquad \text{pour tout } 1\leqslant k\leqslant |U|. \tag{5.7}$$

On voir une fonction de parking comme un escalier étiqueté par les éléments de la partition (Q_i) dans le même ordre incluant les ensembles vides qui correspondent exactement aux marches verticales.

Exemple 5.37. Considérons comme ensemble U les dix premières lettres de l'alphabet grec muni de l'ordre alphabétique usuel. On choisit χ la suite commençant par $2, 3, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 10$. La partition ordonnée de U suivante :

$$\{\delta, \iota\}, \{\zeta\}, \{\varnothing\}, \{\alpha, \eta\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing\}, \{\gamma, \varepsilon, \kappa\}, \{\beta, \theta\}$$

vérifie bien la propriété 5.7. On peut représenter la fonction de parking comme le chemin croissant décoré de la figure 5.5.1. Le nombre de structures correspond au nombre total d'étiquetages sur tous les chemins

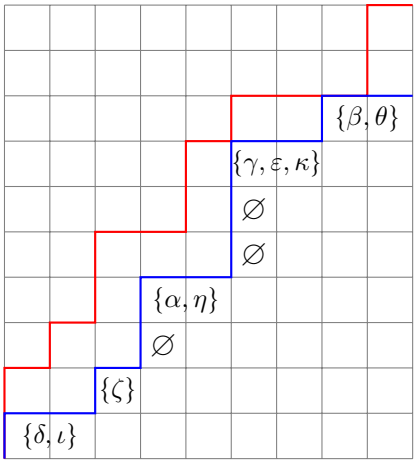


FIG. 5.5.1: En bleu : fonction de parking vue comme un chemin décoré.

croissants, alors que le nombre d'isomorphismes donne le nombre de chemins croissants sous la courbe rouge.

Dans le cadre des fonctions de parking usuelles, où $\chi = \mathrm{id}$, on retrouve la bijection entre les chemins de Dyck décorés et les fonctions de parking. Au niveau des types d'isomorphisme, on retrouve une bijection entre les fonctions de parking croissantes et les chemins de Dyck.

Une fonction de parking généralisée $(Q_i)_{i\in I}$ peut se décomposer en deux parties contigües $S \sqcup U = \pi$ de tailles respectives s et u. La restriction à S est toujours une χ-fonction de parking, alors que la restriction à U est une ψ_U-fonction de parking avec $\psi_U(i) = \chi(i+u) - \chi(1)$. On peut appliquer le même raisonnement en terme d'espèces et ainsi obtenir le théorème suivant. Rappelons que E est l'espèce des ensembles. On note $(E)_n$ l'espèce des ensembles restreinte aux ensembles de cardinalité n ou moins.

Théorème 5.38. *L'espèce des χ-fonctions de parking est isomorphe à l'espèce* $\mathrm{PF}(\chi)$ *définie récursivement par*

$$\mathrm{PF}(\chi) = (E^{\chi(1)})_0 + \sum_{n\geqslant 1} (E^{\chi(1)})_n \cdot \mathrm{PF}(\psi_n), \tag{5.8}$$

où $\psi_n : s \mapsto \chi(n+s) - \chi(1)$.

Soit $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_k$ une composition de n. On définit l'application Υ par

$$\Upsilon(\chi, \pi, i) = \begin{cases} \chi(1) & \text{si } i = 1 \\ \chi(1+\pi(i-1)) - \chi(1+\pi(i-2)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\pi(i) = \sum_{k\leqslant i} \pi_k$ est la somme partielle des parts de la composition π. Lorsqu'on développe la formule 5.8 on obtient

$$\mathrm{PF}(\chi) = \left(E^{\chi(1)}\right)_0 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{\pi\models n} \prod_{i=1}^{\ell(\pi)} \left(E^{\Upsilon(\chi,\pi,i)}\right)_{\pi_i} \right) \cdot \left(E^{\chi(n+1)-\chi(n)}\right)_0 .$$

En simplifiant la formule précédente en remplaçant tous les ensembles vides terminaux par l'élément neutre **1** du produit d'espèces **1**, on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.39.

$$\mathrm{PF}(\chi) = \mathbf{1} + \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{PF}(\chi_n) \qquad \textit{avec} \qquad \mathrm{PF}_n(\chi) = \sum_{\pi\models n} \prod_{i=1}^{\ell(\pi)} \left(E^{\Upsilon(\chi,\pi,i)}\right).$$

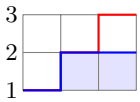
5.5.4 Caractère non-commutatif

L'action du monoïde de 0-Hecke sur l'espèce des fonctions de parking donne des caractères que l'on peut relever dans les fonctions symétriques non-commutatives. Des formules 5.8 et 5.5 on obtient un q-caractère des fonctions de parking généralisées

$$\begin{aligned}\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\chi)) &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{ch}_q(W_n(\chi(1)))q^{\chi(1)(n-k)}\,\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\psi)),\\ &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{S}_n([\chi(1)]_q\mathcal{A})q^{\chi(1)(n-k)}\,\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\psi)).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Le coefficient $q^{\chi(1)(n-k)}$ correspond à l'aire sous la courbe de la première translation.

Exemple 5.40. Considérons pour commencer les fonctions de parking usuelles avec $\chi = \mathrm{id}$. On a $\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\mathrm{id}), 3) = q^3\mathbf{S}^{111} + q^2\mathbf{S}^{12} + q\mathbf{S}^{21} + \mathbf{S}^3$. Le coefficient q^2 de $\mathbf{S}^{12}$ correspond à l'aire sous l'unique courbe avec un premier *pas* de longueur 1 et le second de longueur 2:

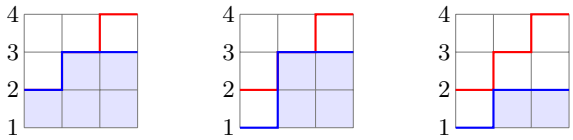


Le coefficient de $\mathbf{S}^{211}$ du q-caractère $\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\mathrm{id}), 4)$ est $(q^5 + q^4 + q^3)$, ce qui donne un contre-exemple à la dangereuse généralisation qui peut-être intuitée de l'exemple précédent.

Exemple 5.41. Si on calcule le q-caractère non-commutatif des fonctions de parking généralisées $\chi = 2, 3, 4, \ldots$ on trouve :

$$\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\chi), 3) = (q^6 + q^5 + q^4 + q^3)\mathbf{S}^{111} + (q^5 + q^4 + q^2)\mathbf{S}^{12} + (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)\mathbf{S}^{21} + (q+1)\mathbf{S}^3.$$

Le coefficient $(q^5 + q^4 + q^2)$ de $\mathbf{S}^{12}$ correspond aux aires sous les courbes des trois chemins suivants.



En injectant la formule du q-caractère dans la formule de la proposition 5.39 on obtient directement la proposition suivante.

Proposition 5.42. *Soit χ une suite croissante et n un entier, alors le q-caractère non-commutative de* $\mathrm{PF}(\chi)$ *est*

$$\mathbf{ch}_q(\mathrm{PF}(\chi), n) = \sum_{\pi\models n} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{\ell(\pi)}} q^{\chi(1+\pi(i-1))\pi_i} \cdot \mathbf{S}_{\pi_i}\left([\Upsilon(\chi,\pi,i)]_q\mathcal{A}\right).$$

La spécialisation à $q = 1$ donne

$$\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_n(\chi)) = \sum_{\pi \models n} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{\ell(\pi)}} S^{\pi_i}(\Upsilon(\chi, \pi, i)\mathcal{A}).$$

On peut en donner une expression dans d'autres bases des fonctions symétriques non commutatives. Dans la base des rubans de Schur :

Proposition 5.43.

$$\mathbf{ch}(\mathrm{PF}(\chi), n) = \sum_{\pi \models n} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{\ell(\pi)}} \cdot \mathbf{R}_{\pi_i}(\Upsilon(\chi, \pi, i)\mathcal{A}).$$

Exemple 5.44. Les premiers caractères non-commutatifs de $\mathrm{PF}(2m-1)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_1(2m-1)) = \mathbf{R}_1\,, \qquad \mathbf{ch}(\mathrm{PF}_2(2m-1)) = 2\mathbf{R}_{11} + 3\mathbf{R}_2\,,\\
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_3(2m-1)) = 5\mathbf{R}_{111} + 7\mathbf{R}_{12} + 9\mathbf{R}_{21} + 12\mathbf{R}_3\,,\\
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_4(2m-1)) = 14\mathbf{R}_{1111} + 19\mathbf{R}_{112} + 23\mathbf{R}_{121} + 30\mathbf{R}_{13} + 28\mathbf{R}_{211} + 37\mathbf{R}_{22} + 43\mathbf{R}_{31} + 55\mathbf{R}_4\,.
\end{aligned}$$

Les coefficients de $\mathbf{R}_{1^n}$ sont les nombres de Catalan (A000108), et les coefficients de $\mathbf{R}_n$ comptent le nombre d'arbres ternaires à n nœuds internes.

Dans la base des fonctions symétriques non-commutatives Λ:

Proposition 5.45.

$$\mathbf{ch}(\mathrm{PF}(\chi, n)) = \sum_{\pi \models n} \left(\sum_{\tau \models \ell(\pi)} (-1)^{n-\ell(\tau)} \prod_{i=1}^{\ell(\tau)} \binom{\chi 1 + \pi(\tau(i-1))}{\tau_i} \right) \Lambda^\pi\,.$$

Exemple 5.46. Les premières caractéristiques non-commutatives de $\mathrm{PF}(2m-1)$ dans la base $(\Lambda^I)_I$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_1(m^2-m+1)) = \Lambda^1, \qquad \mathbf{ch}(\mathrm{PF}_2(m^2-m+1)) = 3\Lambda^{11} - \Lambda^2\,,\\
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_3(m^2-m+1)) = 18\Lambda^{111} - 3\Lambda^{12} - 7\Lambda^{21} + \Lambda^3\,,\\
&\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_4(m^2-m+1)) = 172\Lambda^{1111} - 18\Lambda^{112} - 36\Lambda^{121} + 3\Lambda^{13} - 70\Lambda^{211} + 7\Lambda^{22} + 13\Lambda^{31} - \Lambda^4\,.
\end{aligned}$$

Les coefficients admettent là encore une interprétation combinatoire.

Proposition 5.47. *Soit π une composition de n. Le coefficient de Λ^π est le nombre de χ-fonctions de parking croissantes sur chaque part de π, de signe positif si la composition est de longueur paire et négatif sinon.*

Exemple 5.48. Le coefficient de $[\Lambda^\pi]\mathbf{ch}(\mathrm{PF}_4(m^2-m+1))$ de l'exemple précédent est 7 ; c'est le nombre de fonctions de parking croissantes qui sont constantes sur chaque part de la composition 22: $(1234|\cdot|\cdot|\cdots)$, $(12|34|\cdot|\cdots)$, ..., $(12|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|34|\cdots)$.

5.5.5 Application à l'énumération

Dans cette partie, on notera $\mathfrak{f}(\chi, n)$ le nombre de structures pour l'espèce $\mathrm{PF}(\chi)[n]$ et $\widetilde{\mathfrak{f}}(\chi, n)$ le nombre de type d'isomorphismes de cette même espèce. On peut directement déduire de 5.9 deux formules d'énumérations récursives :

$$\mathfrak{f}(\chi, n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \chi(1)^k \mathfrak{f}(\psi, n-k)$$

avec $\mathfrak{f}(\chi,0)=1$; on en tire aussi le nombre de types d'isomorphismes

$$\widetilde{\mathfrak{f}}(\chi,n)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-\chi(1)-1}{\chi(1)-1}\widetilde{\mathfrak{f}}(\psi,n-k)$$

avec $\widetilde{\mathfrak{f}}(\chi,0)=1$. Notons que ces formules sont aisément programmables et donnent des algorithmes très efficaces.

5.5.5.1 Énumération de types d'isomorphismes

$\chi\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*OEIS*
m	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	*A000108*
$m+2$	1	3	9	28	90	297	1001	3432	11934	*A000245*
$2m$	1	2	7	30	143	728	3876	21318	120175	*A006013*
$3m$	1	3	15	91	612	4389	32890	254475	2017356	*A006632*
m^2	1	1	4	30	340	5235	102756	2464898	70120020	*A209440*
$\lceil\frac{m+1}{2}\rceil$	1	1	2	3	7	12	30	55	143	*A047749*
$\lceil\frac{m+1}{3}\rceil$	1	1	1	2	3	4	9	15	22	*A124753*

5.5.5.2 Énumération de structures

$\chi\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	*OEIS*
m	1	1	3	16	125	1296	16807	262144	*A000272*
$m+1$	1	2	8	50	432	4802	65536	1062882	*A089104*
$2m$	1	2	12	128	2000	41472	1075648	33554432	*A097629*
$3m$	1	3	27	432	10125	314928	12252303	573308928	*A136719*
m^2	1	1	7	142	5941	428856	47885899	7685040448	*A082157*
m^2+m	1	2	20	512	25392	2093472	260555392	45819233280	*A103353*
m^3	1	1	15	1024	198581	85102056	68999174203	95264160938080	*A082158*

Bibliographie

[AMSV09] Jorge Almeida, Stuart Margolis, Benjamin Steinberg, and Mikhail Volkov. Representation theory of finite semigroups, semigroup radicals and formal language theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(3) :1429–1461, 2009.

[BB05] Anders Björner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005.

[BBC92] Danièle Beauquier, Jean Berstel, and Philippe Chrétienne. *Élements d'algorithmique*. Masson, 1992.

[Ber09] François Bergeron. *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*. CMS Treatises in Mathematics. Canadian Mathematical Society, Ottawa, ON ; A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2009.

[BHRZ06] N. Bergeron, C. Hohlweg, M. Rosas, and M. Zabrocki. Grothendieck bialgebras, partition lattices, and symmetric functions in noncommutative variables. *Electron. J. Combin.*, 13(1) :Research Paper 75, 19 pp. (electronic), 2006.

[BL09] Nantel Bergeron and Huilan Li. Algebraic structures on Grothendieck groups of a tower of algebras. *J. Algebra*, 321(8) :2068–2084, 2009.

[BLL12] Nantel Bergeron, Thomas Lam, and Huilan Li. Combinatorial Hopf algebras and towers of algebras—dimension, quantization and functorality. *Algebr. Represent. Theory*, 15(4) :675–696, 2012.

[Bou62] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Première partie. Fascicule VI. Livre II: Algèbre. Chapitre 2 : Algèbre linéaire*. Troisième édition, entièrement refondue. Actualités Sci. Indust., No. 1236. Hermann, Paris, 1962.

[Bou70] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.

[Bro00] Kenneth S. Brown. Semigroups, rings, and Markov chains. *J. Theoret. Probab.*, 13(3) :871–938, 2000.

[CF94] Louis Crane and Igor B. Frenkel. Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases. *J. Math. Phys.*, 35(10) :5136–5154, 1994. Topology and physics.

[CP61] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The algebraic theory of semigroups. Vol. I.* Mathematical Surveys, No. 7. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[CR62] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Cra95] Louis Crane. Clock and category : is quantum gravity algebraic ? *J. Math. Phys.*, 36(11) :6180–6193, 1995.

[DHST11] Tom Denton, Florent Hivert, Anne Schilling, and Nicolas M. Thiéry. On the representation theory of finite $\mathcal{J}$-trivial monoids. *Sém. Lothar. Combin.*, 64 :Art. B64d, 44, 2010/11.

[DHT02] Gérard Duchamp, Florent Hivert, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. VI. Free quasi-symmetric functions and related algebras. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(5) :671–717, 2002.

[EGH+11] Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[Foa68] Dominique Foata. On the Netto inversion number of a sequence. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 :236–240, 1968.

[FR07] Sergey Fomin and Nathan Reading. Root systems and generalized associahedra. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 63–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[FS78] Dominique Foata and Marcel-Paul Schützenberger. Major index and inversion number of permutations. *Math. Nachr.*, 83 :143–159, 1978.

[FT67] Haya Friedman and Dov Tamari. Problèmes d'associativité: Une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative. *J. Combinatorial Theory*, 2 :215–242, 1967.

[GdOLV12] António Guedes de Oliveira and Michel Las Vergnas. Parking functions and labeled trees. *Sém. Lothar. Combin.*, 65 :Art. B65e, 10, 2010/12.

[GKL+95] Israel M. Gelfand, Daniel Krob, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Vladimir S. Retakh, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. *Adv. Math.*, 112(2) :218–348, 1995.

[GMS09] Olexandr Ganyushkin, Volodymyr Mazorchuk, and Benjamin Steinberg. On the irreducible representations of a finite semigroup. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11) :3585–3592, 2009.

[GR14] D. Grinberg and V. Reiner. Hopf Algebras in Combinatorics. *ArXiv e-prints*, September 2014, 1409.8356.

[Gre51] J. A. Green. On the structure of semigroups. *Ann. of Math. (2)*, 54 :163–172, 1951.

[Hai01] Mark Haiman. Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4) :941–1006 (electronic), 2001.

[HNT05] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. The algebra of binary search trees. *Theoret. Comput. Sci.*, 339(1) :129–165, 2005.

[HR17] G. H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis. *Proc. London Math. Soc.*, S2-17(1) :75, 1917.

[HST13] Florent Hivert, Anne Schilling, and Nicolas Thiéry. The biHecke monoid of a finite Coxeter group and its representations. *Algebra Number Theory*, 7(3) :595–671, 2013.

[HT09] Florent Hivert and Nicolas M. Thiéry. The Hecke group algebra of a Coxeter group and its representation theory. *J. Algebra*, 321(8) :2230–2258, 2009.

[Ibr97] Assem Ibrahim. *Algèbres et modules : cours et exercices*. Enseignement des mathématiques. Presses Université Ottawa, 1997.

[Inc15] OEIS Foundation Inc. The on-line encyclopedia of integer sequences. http ://oeis.org, 2015.

[Kho00] Mikhail Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101(3) :359–426, 2000.

[KT97] Daniel Krob and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. IV. Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$. *J. Algebraic Combin.*, 6(4) :339–376, 1997.

[KW66] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(6) :pp. 1266–1274, 1966.

[KY03] Joseph P. S. Kung and Catherine Yan. Gončarov polynomials and parking functions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 102(1) :16–37, 2003.

[Lam98a] T. Y. Lam. Representations of finite groups : a hundred years. I. *Notices Amer. Math. Soc.*, 45(3) :361–372, 1998.

[Lam98b] T. Y. Lam. Representations of finite groups : a hundred years. II. *Notices Amer. Math. Soc.*, 45(4) :465–474, 1998.

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[LP69] Gérard Lallement and Mario Petrich. Irreducible matrix representations of finite semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139 :393–412, 1969.

[LR98] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math.*, 139(2) :293–309, 1998.

[Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[Mas98] Heinrich Maschke. Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. *Math. Ann.*, 50(4) :492–498, 1898.

[Maz12] Volodymyr Mazorchuk. *Lectures on algebraic categorification*. QGM Master Class Series. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MS12] Stuart Margolis and Benjamin Steinberg. Quivers of monoids with basic algebras. *Compos. Math.*, 148(5) :1516–1560, 2012.

[NS43] C. Nesbitt and W. M. Scott. Some remarks on algebras over an algebraically closed field. *Ann. of Math. (2)*, 44 :534–553, 1943.

[NT07] Jean-Christophe Novelli and Jean-Yves Thibon. Hopf algebras and dendriform structures arising from parking functions. *Fund. Math.*, 193(3) :189–241, 2007.

[NT08] Jean-Christophe Novelli and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions and Lagrange inversion. *Adv. in Appl. Math.*, 40(1) :8–35, 2008.

[Pin15] Jean-Éric Pin. Mathematical foundations of automata theory, October 2015. Notes de cours MPRI.

[Put96] Mohan S. Putcha. Complex representations of finite monoids. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 73(3) :623–641, 1996.

[PV14] J.-B. Priez and A. Virmaux. Non-commutative Frobenius characteristic of generalized parking functions – Application to enumeration. *ArXiv e-prints*, November 2014, 1411.4161.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[S+15] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version x.y.z)*. The Sage Development Team, 2015. `http ://www.sagemath.org`.

[Sav14] Alistair Savage. Introduction to categorification. *arXiv :1401.6037*, 2014.

[Sch11] J. Schur. Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 139 :155–250, 1911.

[Sch58] Marcel-Paul Schützenberger. Sur la représentation monomiale des demi-groupes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 246 :865–867, 1958.

[Ser78] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[Shi86] Jian Yi Shi. *The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups*, volume 1179 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Shi08] H. Shin. A New Bijection Between Forests and Parking Functions. *ArXiv e-prints*, October 2008, 0810.0427.

[SP02] Richard P. Stanley and Jim Pitman. A polytope related to empirical distributions, plane trees, parking functions, and the associahedron. *Discrete Comput. Geom.*, 27(4) :603–634, 2002.

[Sta97] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[Sta15] Richard Stanley. *Catalan Number*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[Tam62] Dov Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 10 :131–146, 1962.

[Thi12] Nicolas M Thiéry. Cartan invariant matrices for finite monoids. *DMTCS Proceedings*, (01) :887–898, 2012.

[Vir14] Aladin Virmaux. Partial categorification of hopf algebras and representation theory of towers of j-trivial monoids. *DMTCS Proceedings*, 0(01), 2014.

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)

Titre : Théorie des représentations combinatoire de tours de monoïdes ; Application à la catégorification et aux fonctions de parking
Mots-clefs : combinatoire algébrique, théorie des représentations, monoïdes, tours d'algèbres, algèbres de Hopf, fonctions de parking

Résumé : Cette thèse se situe en combinatoire algébrique, et plus particulièrement en théorie combinatoire des représentations linéaires des monoïdes finis.

Rappelons qu'un monoïde est un ensemble fini M muni d'une multiplication et d'un élément neutre, et qu'une représentation de M est un morphisme de M dans le monoïde des matrices $M_n(\Bbbk)$ où $\Bbbk$ est un corps, typiquement $\Bbbk = \mathbb{C}$. Les résultats des dernières décennies donnent un contrôle assez fin sur les représentations des monoïdes, permettant souvent de se ramener à de la théorie des représentations des groupes et de la combinatoire sur des préordres.

En 1996, Krob et Thibon ont montré que l'induction et la restriction des représentations irréductibles et projectives de la tour des 0-algèbres de Hecke $H_n(0)$ permet de munir l'ensemble de ses caractères d'une structure d'algèbre de Hopf, isomorphe a l'algèbre de Hopf **NCSF** des fonctions symétriques non commutatives. Cela donne une *catégorification* de **NCSF**, c'est-à-dire une interprétation de celle-ci en terme de théorie des représentations. Ils prolongent ainsi un résultat dû à Frobenius établissant l'isomorphisme entre l'algèbre de Hopf des caractères de la tour des groupes symétriques et les fonctions symétriques. Un problème naturel depuis lors est d'essayer de catégorifier d'autres algèbres de Hopf – par exemple l'algèbre **PBT** des arbres binaires de Loday et Ronco – par des tours d'algèbres.

Deviner une telle tour d'algèbres est difficile en général. Dans le cadre de ce manuscrit on restreint le champ de recherche aux tours de monoïdes, afin de mieux contrôler leurs représentations. C'est naturel car ce cadre couvre en fait les deux exemples fondamentaux ci-dessus, tandis qu'il est impossible de catégorifier **NCSF** avec seulement une tour de groupes.

Nous commençons par donner quelques résultats sur les représentations des tours de monoïdes. Nous nous intéressons ensuite à la catégorification par des tours de semi-treillis, et en particulier de quotients du permutoèdre. Avec ceux-ci, nous catégorifions la structure de cogèbre de **FQSym** sur la base **G** et celle d'algèbre de **FQSym** sur la base **F**. Cela ne permet cependant pas de catégorifier simultanément toute la structure de Hopf de ces algèbres. Dans un second temps, nous menons une recherche exhaustive des catégorifications de **PBT**. Nous montrons que, sous des hypothèses naturelles, il n'existe pas de catégorification de **PBT** par une tour de monoïdes apériodiques. Enfin, nous démontrons que, dans un certain sens, la tour des monoïdes 0-Hecke est la tour de monoïdes la plus simple catégorifiant **NCSF**.

La seconde partie porte sur les fonctions de parking, par application des résultats de la première partie. D'une part, nous étudions la théorie des représentations de la tour des fonctions de parking croissantes. D'autre part, dans un travail commun avec Jean-Baptiste Priez, nous reprenons une généralisation des fonctions de parking due à Stanley et Pitman. Afin d'obtenir des formules d'énumérations, nous utilisons une variante – plus efficace dans le cas présent – de la théorie des espèces. Nous donnons une action de $H_n(0)$ (et non du groupe symétrique) sur les fonctions de parking généralisées, et utilisons le théorème de catégorification de Krob et Thibon, pour relever dans les fonctions symétriques non commutatives le caractère de cette action.

Title : Combinatorial representation theory of tower of monoids ; application to categorification and to parking functions
Keywords : algebraic combinatorics, representation theory, monoids, tower of algebras, Hopf algebras, parking functions

Abstract : This thesis is focused on combinatorical representation theory of finite monoids within the field of algebraic combinatorics.

A monoid M is a finite set endowed with a multiplication and a neutral element. A representation of M is a morphism from M into the monoid of matrices $M_n(\Bbbk)$ where $\Bbbk$ is a field ; in this work it will typically be referred to as $\Bbbk = \mathbb{C}$. The results obtained in the last decades allows us to use representation theory of groups, and combinatorics on preorders in order to explore representation theory of finite monoides.

In 1996, Krob and Thibon proved that the induction and restriction rules of irreducible and projective representations of the tower of 0-Hecke monoids endows its ring of caracters with a Hopf algebra structure, isomorph to the non-commutative symmetric functions Hopf algebra **NCSF**. This gives a categorification of **NCSF**, which is an interpretation of the non-commutative symmetruc functions in the language of representation theory. This extends a theorem of Frobenius endowing the character ring of symmetric groups to the Hopf algebra of symmetric functions. Since then a natural problem is to categorify other Hopf algebras – for instance the Planar Binary Tree algebra of Loday and Ronco – by a tower of algebras.

Guessing such a tower of algebra is a difficult problem in general. In this thesis we restrict ourselves to towers of monoids in order to have a better control on its representations. This is quite natural as on one hand, this setup covers both previous fundamental examples, whereas **NCSF** cannot be categorified in the restricted set of tower of group algebras.

In the first part of this work, we start with some results about representation theory of towers of monoids. We then focus on categorification with towers of semilatices, for example the tower of permutohedrons. We categorify the algebra, and cogebra structure of **FQSym**, but not the full Hopf algebra structure with its dual. We then make a comprehensive search in order to categorify **PBT** with a tower of monoids. We show that under natural hypothesis, there exists no tower of monoids satisfying the categorification axioms. Finally we show that in some sense, the tower of 0-Hecke monoids is the simplest tower categorifying **NCSF**.

The second part of this work deals with parking functions, applying results from the first part. We first study the representation theory of non decreasing parking functions. We then present a joint work with Jean-Baptiste Priez on a generalization of parking functions from Pitman and Stanley. To obtain enumeration formulas, we use a variant of the species theory which was more efficient in our case. We used an action of $H_n(0)$ instead of the symmetric group and use the Krob-Thibon theorem to lift the character of this action into the Hopf algebra of non-commutative symmetric functions.