

TABLE DES MATIERES

Modélisation des traducteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT) pour le contrôle non-destructif (CND) de milieux ferromagnétiques	1
Table des matières	5
INTRODUCTION.....	11
Le CND par EMAT en milieux ferromagnétiques	11
Contexte de la thèse.....	11
Étude bibliographique	13
Bilan bibliographique	17
Problématiques détaillées de la thèse	17
Présentation des travaux effectués.....	17
CHAPITRE 1	21
Revue des propriétés magnétiques et magnéto-élastiques des matériaux ferromagnétiques	21
1.1. Théorie des champs électromagnétiques macroscopiques en milieux magnétiques continus	23
1.1.1. Les champs électromagnétiques macroscopiques	23
1.1.2. Équations de Maxwell en milieux continus.....	25
1.1.3. Classification des comportements magnétiques des milieux.....	27
1.2. Description des propriétés magnétiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques	28
1.2.1. Comportements non-linéaires, cycles d'hystérésis et susceptibilités magnétiques caractéristiques	29
1.2.2. Milieux ferromagnétiques doux et durs.....	30
1.2.3. Susceptibilités intrinsèque et apparente : champ démagnétisant.....	31
1.2.4. Facteurs physiques affectant la qualité d'aimantation macroscopique.....	32
1.3. Description des mécanismes microscopiques à l'origine des propriétés magnétiques non-linéaires	34
1.3.1. Structure microscopique organisée en domaines magnétiques de Weiss	34
1.3.2. Réarrangements des domaines de Weiss et parois de Bloch sous l'effet d'une excitation magnétique	36
1.3.3. Composition chimique et déplacements irréversibles des parois de Bloch.....	37
1.3.4. Influence de la fréquence d'excitation	39
1.3.5. Anisotropie magnéto-cristalline	39
1.4. Description des propriétés magnéto-élastiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques	40

1.4.1.	Les phénomènes de couplage magnéto-élastique des milieux	40
1.4.2.	Description des déformations macroscopiques de magnétostriction	42
1.4.3.	Origine du couplage magnéto-élastique et anisotropie magnéto-cristalline	44
1.4.4.	Influence des contraintes mécaniques sur les courbes macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction	46
	Conclusions du chapitre	47
CHAPITRE 2		49
Modélisation des lois anhystérétiques d'aimantation et de magnétostriction des milieux ferromagnétiques		49
2.1.	Modèles micromagnétiques et interactions magnéto-élastiques	51
2.1.1.	Énergie d'échange W_{ex}	52
2.1.2.	Énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an}	52
2.1.3.	Énergie de Zeeman W_z	53
2.1.4.	Énergie magnétostatique W_{ma}	53
2.1.5.	Énergie élastique W_{σ}	54
2.1.6.	Champ effectif H_{eff} traduisant l'équilibre quasi-statique	55
2.2.	Approche phénoménologique de Sablik–Jiles–Atherton de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérétique	56
2.2.1.	Introduction historique aux approches phénoménologiques de modélisation du comportement magnétique des milieux	57
2.2.2.	Principe du modèle SJA du comportement magnéto-élastique anhystérétique	60
2.2.3.	Paramètres du modèle JA à contrainte mécanique nulle	62
2.2.4.	Définition de la loi anhystérétique de magnétostriction $\lambda^{ms}(H, \sigma)$	62
2.2.5.	Simulation de courbes magnéto-élastiques anhystérétiques avec le modèle SJA	63
2.2.6.	Limites de l'approche phénoménologique du modèle SJA	65
2.3.	Approches multi-échelles de Daniel <i>et al.</i> de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérétique	66
2.3.1.	Principe du MME complet du comportement magnéto-élastique réversible	67
2.3.2.	MME simplifié du comportement magnéto-élastique réversible	68
2.3.3.	Utilisation du MME simplifié à partir de mesures expérimentales	70
2.3.4.	Prise en compte de l'effet ΔE dans le MME simplifié	71
2.3.5.	Comparaisons entre le MME simplifié de Daniel et le modèle SJA	72
2.3.6.	Prédiction de l'effet des contraintes mécaniques multi-axiales sur les propriétés magnéto-élastiques	76
	Conclusion du chapitre	78

CHAPITRE 3	81
Modélisation des sources électromagnéto-élastiques de rayonnement ultrasonore en milieux ferromagnétiques.....	81
3.1. Modèle de sources électromagnétiques de transduction ultrasonore.....	83
3.1.1. Revue des modèles de sources électromagnétiques de la littérature	85
3.1.2. Définition énergétique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell en milieux ferromagnétiques.....	94
3.2. Modèle de densité de sources magnétostrictives.....	108
3.2.1. Tenseur des déformations macroscopiques de magnétostriction ϵ^{ms}	109
3.2.2. Modèle de densité volumique de force équivalente de magnétostriction f^{ms}	111
3.2.3. Modèle de densité volumique de forces piézomagnétiques équivalentes	113
3.3. Méthode de transformation des sources volumiques de transduction ultrasonore en contraintes surfaciques équivalentes.....	116
3.3.1. Origines, motivations, et principes de la méthode.....	117
3.3.2. Contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux en milieux élastiques de géométries complexes.....	119
3.3.3. Application théorique de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux.....	124
Conclusion du chapitre.....	130
 CHAPITRE 4	 133
Simulation des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieux ferromagnétiques	133
4.1. Présentation du logiciel CIVA pour la simulation de CND par EMAT.....	135
4.1.1. Le module de simulation CIVA CF.....	135
4.1.2. Le module de calcul CIVA US.....	137
4.1.3. Hypothèse de couplage magnéto-élastique faible	138
4.2. Simulation des sources et de leur rayonnement ultrasonore induits par une configuration EMAT donnée en milieux magnétiques linéaires	141
4.2.1. Description de la configuration d'inspection étudiée	142
4.2.2. Simulation des sources électromagnéto-élastiques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux magnétiques linéaires	145
4.2.3. Simulation du rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieux magnétiques linéaires	150
4.3. Efficacité de transduction ultrasonore d'un EMAT selon ses paramètres d'excitation et les propriétés du milieu inspecté.....	154
4.3.1. Influence des paramètres d'excitation de l'EMAT sur les sources de transduction ultrasonore	155

4.3.2. Influence des propriétés magnétiques et magnéto-élastiques du milieu sur les sources de transduction ultrasonore induites par EMAT	165
Conclusion du chapitre.....	174
 CHAPITRE 5	175
Caractérisation expérimentale du comportement ultrasonore d'un EMAT en milieu ferromagnétique	175
5.1. Caractérisation des paramètres de conception et d'excitation de l'EMAT étudié.....	177
5.1.1. Paramètres de conception de l'EMAT didactique étudié	177
5.1.2. Mesure du courant impulsionnel injecté dans la bobine de l'EMAT	178
5.2. Mesure du champ magnétique dynamique rayonné par la bobine de l'EMAT et comparaison aux prédictions numériques de CIVA CF	181
5.3. Mesures du champ ultrasonore transmis par EMAT en milieu ferromagnétique.....	185
5.3.1. Montage expérimental pour la mesure du champ ultrasonore en transmission par un transducteur piézoélectrique focalisé en immersion	186
5.3.2. Étude de l'influence du signal électrique d'excitation sur le rayonnement ultrasonore transmis par EMAT	190
5.3.3. Comparaisons simulation-expérience : A-scan et C-scan en fond de pièce	194
Conclusion du chapitre.....	199
 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	201
Conclusions	201
Perspectives.....	203
 ANNEXES	205
A. Formulaire de notations et analyse tensorielle différentielle.....	206
B. Étude comparative des différents modèles de sources électromagnétiques de la littérature ...	207
C. Modèle de contraintes surfaciques équivalentes en milieux élastiques isotropes de géométrie complexe : Publication Wave Motion	215
D. Extension de la méthode pour traiter le cas des milieux élastiques anisotropes et hétérogènes....	229
E. Modèle inertiel de sources magnétostrictives de Nagy et Ribichini.....	231
 RÉFÉRENCES.....	235

INTRODUCTION

LE CND PAR EMAT EN MILIEUX FERROMAGNETIQUES

Contexte de la thèse

Le contrôle non-destructif (CND) permet la caractérisation de l'état de santé d'une pièce mécanique sans en altérer les propriétés mécaniques. Il s'oppose ainsi aux méthodes dites destructives. Les contrôles sont utilisés dans l'industrie lors des phases de fabrication et de maintenance de pièces mécaniques avec divers objectifs d'inspection tels que la caractérisation de matériaux, la mesure d'épaisseur, les contrôles de serrage, les contrôles à chaud, la détection et la caractérisation de défauts. Il existe une grande variété de méthodes de CND capables de répondre à ces différents objectifs industriels, parmi lesquels on peut citer les contrôles ultrasonores, électromagnétiques, thermographiques et radiographiques. Les contrôles par ultrasons utilisent un ou plusieurs transducteurs capables d'émettre et/ou recevoir des ondes élastiques dans le matériau inspecté. Ces ondes se propagent et interagissent avec la pièce mécanique. Le signal ultrasonore mesuré en réception contient la signature d'éventuels défauts structurels internes (fissures, vides ou inclusions) ou surfaciques (pertes d'épaisseur, fissures débouchantes), ce qui permet leur localisation et caractérisation par comparaison à un état mécanique sain. Les outils de simulation des méthodes ultrasonores de CND jouent un rôle industriel fondamental en facilitant l'interprétation des mesures (maîtrise de la signature ultrasonore de la géométrie de la pièce et des défauts recherchés), et en offrant un moyen efficace pour optimiser la conception des transducteurs et les configurations de contrôle. Ce sont les enjeux du développement de la plate-forme logicielle CIVA [Civa_Extende] de simulation des méthodes de CND développée au CEA LIST, qui comporte en plus de la simulation des contrôles ultrasonores (CIVA US), des modules de simulation de contrôle par courants de Foucault (CIVA CF) et par radiographie (CIVA RX).

Il existe trois principales méthodes pour émettre – et être sensible à – des ondes ultrasonores en CND par ultrasons, reposant sur des mécanismes physiques différents. La première, qui est la plus répandue industriellement à ce jour, utilise des transducteurs piézoélectriques. Ils sont constitués de pastilles en céramiques piézoélectriques capables de convertir une excitation électrique impulsionnelle en une déformation élastique dynamique ; il s'agit d'un couplage électromécanique (actif). Cette déformation engendre une onde ultrasonore qui se propage dans la pièce à inspecter, la bonne transmission à l'interface entre la face avant du transducteur et la pièce étant assurée par un couplant mécanique (solide ou liquide). Une deuxième méthode exploite la génération d'ondes ultrasonores par l'intermédiaire d'un laser. Cette technique prend de l'importance dans certains secteurs industriels comme l'aéronautique, offrant la possibilité d'opérer le contrôle sans contact. Une intensité lumineuse est rayonnée par un laser dans la zone d'intérêt ; la dilation thermique dynamique engendrée se convertit en onde élastique dans le matériau par un couplage thermoélastique ; la réception est réalisée par mesure interférométrique laser. Enfin, une troisième méthode met en œuvre des transducteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT pour ElectroMagnetic Acoustic Transducer), qui font l'objet de cette étude. De plus en plus d'acteurs industriels s'intéressent à cette technique sans contact prometteuse. Ces transducteurs sont

constitués d'une ou plusieurs bobines inductrices et d'un ou plusieurs aimants permanents (ou électro-aimants). Ces éléments induisent des courants de Foucault et rayonnent des excitations électromagnétiques (dynamique et statique) qui interagissent avec la microstructure de la pièce inspectée (milieu conducteur, magnétique ou non). Ces interactions génèrent les sources dynamiques (volumiques et surfaciques) à l'origine de l'onde ultrasonore transmise par EMAT dans le milieu : il s'agit d'un couplage électromagnéto-élastique.

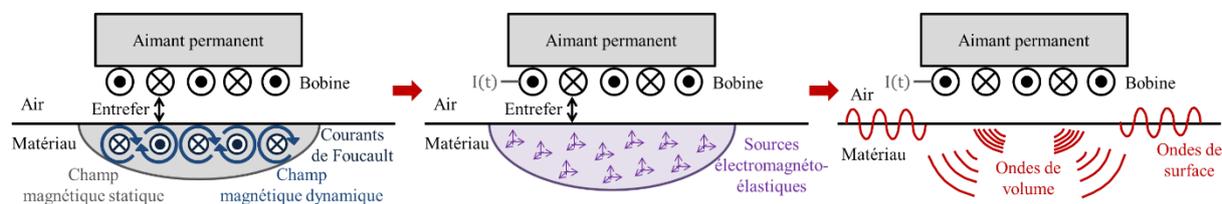


Figure 0.1 : Principe de fonctionnement d'un EMAT.

Les EMAT permettent la génération et la réception d'ondes ultrasonores sans contact, et donc sans couplant mécanique avec la pièce. Cet avantage présente l'intérêt d'assurer de bonnes performances en environnements hostiles, tels qu'en présence de forts gradients de pression et/ou de hautes températures. Le fonctionnement sans contact offre également la possibilité d'effectuer des contrôles plus rapides en chaîne de production industrielle. De plus, les EMAT sont peu sensibles à l'état de surface du matériau inspecté, à l'inverse des techniques par laser par exemple. Ces transducteurs sont également capables de générer et recevoir une grande variété de types d'ondes (surfaiques, volumiques et guidées) et de polarisations (y compris des ondes transversales horizontales SH et de torsion, difficiles ou impossibles à générer par transducteur piézoélectrique) selon la configuration géométrique des bobines et la polarisation des aimants permanents. Par exemple, la sonde EMAT 'bi-onde' (Figure 0.2) conçue par le CETIM, partenaire industriel de la thèse, utilise la génération simultanée d'ondes volumiques de compression et de cisaillement dans le matériau inspecté grâce à des paramètres de conception dédiés du transducteur (bobine spirale et aimantation permanente normale). Ces deux types d'onde ultrasonore ayant des sensibilités différentes à un état de contraintes mécaniques volumiques (par effet acousto-élastique), cette sonde permet la mesure absolue sur site de l'état de serrage d'un assemblage vis-écrou (boulon) déjà serré. La méthode 'bi-onde' se démarque des méthodes conventionnelles (clés dynamométriques) par une meilleure précision de mesure, et des méthodes 'mono-onde' en éliminant le besoin de connaître la longueur exacte de la vis à vide (sans contraintes).



Figure 0.2 : Sonde EMAT bi-onde conçue au CETIM et exemples d'applications.

Les EMAT présentent cependant quelques inconvénients d'utilisation. Exploitant un couplage électromagnéto-élastique, leur utilisation est naturellement réservée à l'inspection de matériaux métalliques (milieux conducteurs, magnétiques ou non). De plus, les performances de transduction

ultrasonore sont intimement liées aux comportements électromagnétiques et magnéto-élastiques du matériau inspecté, ces propriétés variant fortement d'un matériau à un autre. Lorsque le matériau est conducteur amagnétique, les sources induites sont d'origine inductive : il s'agit des forces de Lorentz issues des courants de Foucault induits, qui dépendent de la conductivité électrique du milieu. L'expression simple de ces forces de Lorentz facilite la prédiction de la polarisation de l'onde ultrasonore transmise selon la configuration de bobines et d'aimants permanents. Cependant lorsque le matériau est magnétique, des sources issues de phénomènes d'aimantation (susceptibilité magnétique) et de couplage magnéto-élastique (effets magnétostrictifs) se superposent aux sources inductives. Ces effets sont particulièrement importants dans les matériaux ferromagnétiques, ce qui rend la prédiction du comportement ultrasonore d'un EMAT dans de tels milieux très complexe à établir. Enfin, les amplitudes ultrasonores rayonnées par EMAT sont faibles comparées à celles rayonnée par des transducteurs piézoélectriques, conduisant à de faibles rapports signal sur bruit (RSB) et donc des résultats d'inspection plus difficiles à interpréter.

Ces inconvénients de sensibilité conduisent généralement les concepteurs de transducteurs EMAT à augmenter drastiquement les intensités d'excitation électrique et/ou magnétique – c'est-à-dire l'amplitude du courant électrique injecté dans la bobine et/ou l'intensité d'aimantation statique (par électro-aimants, par ajout d'aimants permanents, ou par optimisation de l'aimantation statique délivrée à l'aide de noyaux de ferrites) – afin d'atteindre l'efficacité de transduction ultrasonore souhaitée pour une application industrielle spécifique. Cependant cette pratique présente de nombreuses limites. En effet, l'augmentation du courant électrique requiert une électronique spécifique, souvent lourde voire inadaptée à de nombreuses applications. Une augmentation de l'induction statique complique également le contrôle sur site en bloquant le déplacement mécanique du transducteur par des forces d'attraction magnétique de forte amplitude en milieux ferromagnétiques. De plus, sans la maîtrise des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT dans ces milieux, la prédiction du comportement ultrasonore d'un même transducteur EMAT dans deux matériaux aux propriétés magnétiques et magnéto-élastiques différentes devient impossible. Les efforts expérimentaux déployés pour déterminer les paramètres du transducteur (bobine et aimant) qui optimisent les performances ultrasonores pour une application spécifique peuvent s'avérer obsolètes dès lors que le milieu ferromagnétique inspecté diffère de celui de l'application initiale. Cette conception expérimentale par « essais-erreur » d'un transducteur EMAT peut ainsi devenir incertaine, très fastidieuse et donc onéreuse.

Ceci justifie la mise en place d'outils de modélisation, validés par l'expérience, capables de simuler le rayonnement ultrasonore induit par EMAT en milieux ferromagnétiques, dans le but de fournir les moyens d'optimiser à moindre coût la conception d'un transducteur EMAT, les configurations de contrôle et l'interprétation des résultats de mesure. Ceci correspond spécifiquement aux attentes du CETIM qui souhaite profiter de tels outils pour améliorer la compréhension des phénomènes en jeu et notamment la précision de mesure en milieux ferromagnétiques de leur méthode EMAT 'bi-onde' pour la caractérisation de contraintes mécaniques de serrage.

Étude bibliographique

Les concepts physiques impliqués dans le couplage électro-magnéto-élastique des milieux magnétiques sont théoriquement discutés depuis les années 1850. Maxwell introduit le concept de sources de courant, d'aimantation et de forces électromagnétiques en 1861 en présentant la théorie fondamentale de l'électromagnétisme [Maxwell_1861]. Déjà, en 1847, la première mise en lumière expérimentale des

effets magnétostrictifs (variations des propriétés élastiques d'un milieu sous l'effet d'un champ magnétique extérieur) était décrite par Joule [Joule_1847]. Il observe notamment que l'amplitude de la déformation mesurée semble proportionnelle au carré de l'amplitude du champ magnétique appliqué et exprime déjà l'idée d'exploiter ces effets pour la conception de nouveaux transducteurs ultrasonores.

La technique de génération et détection de vibrations élastiques par effets électromagnétiques est mise en évidence expérimentalement pour la première fois par Randall [Randall_1939] en 1939. L'étude porte sur l'influence des sources thermiques microscopiques sur les frottements internes thermoélastiques dans des barreaux de laiton (polycristallins) ayant subi différents traitements thermiques. Une bobine enroulée à une extrémité du barreau et alimentée d'un courant alternatif (à des fréquences audibles) induit des courants de Foucault à cette extrémité qui interagissent avec le champ d'un aimant permanent pour générer les termes volumiques sources d'une onde de compression. Le même dispositif est utilisé en réception à l'autre extrémité du barreau pour mesurer de façon réciproque le courant électrique induit dans la bobine réceptrice en présence d'un champ magnétique permanent par le déplacement élastique au passage de l'onde. En 1960, Vinogradov et Ulyanov [Vinogradov-Ulyanov_1960] décrivent la première détection sans contact d'ondes de Rayleigh dans des échantillons métalliques par interactions électromagnétiques. Le même principe de réception que celui présenté par Randall est utilisé, à l'exception d'un entrefer introduit entre la bobine réceptrice et le matériau inspecté. Dans les années 1970, Gaertner [Gaertner_1971] étudie le principe de génération d'ultrasons par une excitation électromagnétique dans le cas des matériaux conducteurs (amagnétiques). Les sources du rayonnement ultrasonore sont les forces de Lorentz qu'il décrit comme des forces volumiques magnétiques agissant sur les courants de Foucault induits dans l'épaisseur de peau de l'échantillon. Il indique la possibilité de générer différentes polarisations d'ondes ultrasonores en fonction de l'orientation du champ magnétique permanent. Gaertner étudie également l'influence de la température et de la fréquence d'excitation sur l'amplitude ultrasonore transmise par ces sources [Gaertner-et-al_1969], avec un bon accord expérimental pour des échantillons d'aluminium et de tungstène.

Une des principales contributions de la littérature sur la modélisation théorique du rayonnement ultrasonore transmis et mesuré par EMAT en milieux ferromagnétiques revient à Thompson. Il décrit en 1973 la génération d'ondes de Rayleigh et de Lamb dans des plaques d'aluminium et d'acier par un EMAT composé d'une bobine serpentinière [Thompson_1973]. Le modèle analytique 2D proposé ne tient compte que des sources ultrasonores issues des forces de Lorentz. L'accord quantitatif entre ce modèle et des mesures expérimentales n'étant pas assuré dans le cas d'échantillons d'acier magnétique, Thompson s'intéresse en 1977 à l'impact des effets magnétostrictifs sur la génération d'ultrasons par EMAT dans des échantillons de fer-nickel [Thompson_1977]. Il trace notamment l'allure de l'amplitude du signal ultrasonore transmis en fonction du champ magnétique, indiquant la prédominance des sources magnétostrictives pour de faibles champs magnétiques et celle des forces de Lorentz pour de forts champs magnétiques (avec une dépendance linéaire de ces forces avec le champ magnétique). Thompson note également l'existence d'un troisième mécanisme de transduction mis en jeu dans le nickel, qu'il introduit en 1978 sous la forme de forces d'aimantation non locales [Thompson_1978]. Il propose également un modèle de sources surfaciques équivalentes [Thompson_1980] permettant de simuler rapidement le rayonnement acoustique induit par les sources volumiques magnétostrictives générées par EMAT en milieux ferromagnétiques, profitant de l'effet de peau des phénomènes magnétiques impliqués. Avec les travaux de Il'in et Kharitonov [Il'in-Kharitonov_1980] et de Wilbrand [Wilbrand_1983] dans les années 1980 sur le couplage magnéto-mécanique induit par EMAT et les relations constitutives magnétiques et élastiques, Thompson [Thompson_1990] résume en 1990

l'ensemble des phénomènes de transduction impliqués par EMAT en milieux ferromagnétiques, aussi bien en émission qu'en réception (en utilisant le théorème de réciprocité de Auld [Auld_1979]). Thompson décrit ces différentes sources ultrasonores comme les forces de Lorentz, les forces d'aimantation, les forces de magnétostriction et un terme de traction magnétique surfacique. Ce modèle analytique 2D ne permet pas la simulation de l'ensemble des configurations industrielles d'EMAT et fait l'hypothèse que les propriétés magnéto-élastiques des matériaux inspectés sont linéaires.

Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_1999, Ogi-et-al_1999, Ogi_1997] consacrent également dans les années 2000 de nombreuses études expérimentales et théoriques sur ce sujet de transduction ultrasonore par EMAT. Leur ouvrage [Hirao-Ogi_2003] offre une vision globale du comportement ultrasonore des EMAT en discutant des différents phénomènes physiques de transduction impliqués, en décrivant de nombreuses applications industrielles envisageables par des configurations judicieuses de bobines et d'aimants, et en proposant des moyens d'optimisation de ces configurations de traducteurs et de contrôle. Un modèle semi-analytique 2D de forces de magnétostriction induites par un EMAT composé d'une bobine serpentín est notamment exposé [Ogi_1997, Hirao-Ogi_2003]. Ce modèle prend en compte des courbes élémentaires expérimentales de déformation de magnétostriction. Cependant ces travaux prétendent que la magnétostriction est le mécanisme de transduction prédominant, indépendamment de l'intensité et l'orientation du champ magnétique statique, ce qui est en désaccord avec les découvertes précédentes de Thompson et Wilbrand. Par ailleurs, un certain nombre d'équations sur les mécanismes de transduction sont erronées dans [Hirao-Ogi_2003], conduisant les auteurs à négliger les sources magnétiques surfaciques et les effets magnétiques non linéaires. Enfin, les modèles théoriques proposés ne traitent que de configurations géométriques simples, 1D et 2D, avec une bobine unidirectionnelle ou en forme serpentín infinie, ce qui restreint fortement leur champ d'application.

Les conclusions différentes entre les modèles de Thompson et d'Ogi sur la prédominance des effets magnétostrictifs sur les forces de Lorentz interpellent Nagy, qui mène alors en collaboration avec une équipe de chercheurs de l'Imperial College de nombreux travaux sur ce sujet [Ribichini-et-al_2010, Ribichini-et-al_2011, Ribichini-et-al_2012a], principalement en lien avec le travail de thèse de Ribichini [Ribichini_2011] soutenue en 2011. À partir de mesures expérimentales des courbes de magnétostriction de différents échantillons d'acier et de nickel, Ribichini développe un modèle éléments finis permettant la comparaison du poids relatif des forces de Lorentz et de la magnétostriction dans les mécanismes de transduction d'un EMAT en milieux magnétiques. Une campagne d'essais expérimentaux est menée pour valider les outils de simulation développés, révélant un accord quantitatif acceptable dans des échantillons d'aciers (forces de Lorentz prédominantes) et de nickel (magnétostriction prédominante). À la lumière de ces résultats concluants, Ogi accepte de publier avec Nagy et Ribichini une étude [Ribichini-et-al_2012b] sur l'impact des phénomènes de forces de Lorentz et de magnétostriction induits par un EMAT à aimantation permanente normale dans des aciers ferritiques. Corrigéant ses précédentes conclusions erronées, Ogi publie également en 2012 un *erratum* [Ogi_2012] qui témoigne d'une mauvaise prise en compte des conditions limites magnétiques et élastiques à l'interface entre l'air et le matériau inspecté. Dans ce sens, les travaux de Ribichini clarifient les différents mécanismes de transduction induits par EMAT dans quelques milieux magnétiques (aciers et nickel) en donnant raison aux modèles développés par Thompson et Wilbrand. De plus, Ribichini obtient les premières validations expérimentales quantitatives de la littérature au sujet de la modélisation du rayonnement ultrasonore induit par effets magnétostrictifs. Mais un tel modèle éléments finis ne répond pas aux attentes des utilisateurs d'un logiciel industriel de simulation comme CIVA, les temps de calculs devenant prohibitifs pour des configurations 3D de sonde et des géométries complexes de pièces. Enfin, Ribichini

néglige l'influence des forces d'aimantation volumiques et surfaciques comme sources de transduction élastique. Cette hypothèse semble justifiée dans le cas des matériaux qu'il teste expérimentalement (aciers faiblement magnétiques) ; en revanche rien ne garantit que ces sources ne jouent pas un rôle ultrasonore non négligeable dans des matériaux ferromagnétiques aux propriétés différentes.

Rouge, en parallèle et indépendamment des travaux de Ribichini, travaille sur la mise en place et l'implémentation dans le logiciel CIVIA d'outils théoriques capables de simuler précisément et efficacement le rayonnement ultrasonore d'un EMAT en milieux ferromagnétiques pendant sa thèse [Rouge_2013] (collaboration entre le CEA LIST et le CETIM, thèse soutenue en 2013). Les objectifs de Rouge rejoignent ceux de la présente étude. Rouge reprend le formalisme semi-analytique proposé par Thompson en considérant trois sources de transduction (les forces de Lorentz, les forces d'aimantation et les effets magnétostrictifs), et en corrigeant la méthode de transformation de sources ultrasonores volumiques en contraintes surfaciques équivalentes [Rouge-et-al_2013]. Cette méthode permet l'utilisation de modèles semi-analytiques de rayonnement existants dans la plate-forme CIVIA, tout en assurant un temps de calcul raisonnable. Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2014] proposent un modèle de création d'harmoniques par effets électromagnétiques et magnétostrictifs dans le cas d'un champ magnétique dynamique de forte amplitude. Rouge [Rouge_2013] investigate également l'hypothèse de déformation de magnétostriction isotrope et isochore à partir de mesures expérimentales des propriétés magnétiques et magnétostrictives de quelques matériaux ferromagnétiques. Cependant, Rouge ne prend pas en compte les phénomènes de transduction induits par le terme de traction surfacique magnétique introduit par Thompson et Wilbrand, et les expressions des sources volumiques de rayonnement ne correspondent pas exactement à celles employées dans ces précédents modèles. De plus, le modèle de création d'harmoniques par effets magnétostrictifs de Rouge *et al.* est basé sur une représentation piézomagnétique (magnétostriction linéarisée) du milieu inspecté, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'une excitation dynamique de forte intensité. Par ailleurs, la méthode de contraintes surfaciques équivalentes n'est pas validée numériquement et ne permet pas la prise en compte de matériaux géométriquement complexes et élastiquement anisotropes. Enfin, les modèles de transduction par EMAT de Rouge ne sont pas validés expérimentalement, et font l'hypothèse que les propriétés magnétiques du milieu inspecté sont linéaires et indépendantes de son état de contraintes mécaniques.

Le principe de la méthode de caractérisation par EMAT de l'état de contraintes mécaniques d'un assemblage vis-écrou développée par le CETIM [Walaszek-Bouteille_2014] est discuté dans la littérature. Cette méthode repose sur l'effet acousto-élastique, qui désigne l'influence d'un état de contraintes mécaniques (statiques) sur la vitesse de propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu élastique donné, et met à profit la pluralité de polarisations d'ondes pouvant être générées par EMAT pour déterminer de manière absolue l'état de contraintes du matériau (sans état de référence). Thompson *et al.* [Thompson-et-al_1984a, Thompson-et-al_1984b, Thompson-et-al_1986] travaillent également dans les années 1985 sur une telle méthode de caractérisation de contraintes (bi-axiales). Les auteurs utilisent deux EMATs aux conceptions différentes (aimants périodiques et bobine en forme de serpent) afin de générer et détecter deux modes d'ondes guidées différents (modes SH0 et S0 respectivement) dans des plaques conductrices. Ils mesurent les vitesses de propagation de ces différentes ondes guidées et exploitent l'effet acousto-élastique d'un milieu (supposé orthorhombique) pour remonter à l'état de contraintes bi-axiales de la plaque inspectée. Les comparaisons entre la théorie développée par Thompson *et al.* et leurs essais expérimentaux sont favorables dans les pièces conductrices inspectées ; cependant cette méthode n'est pas testée en milieux ferromagnétiques. En effet, les propriétés

magnétiques et magnétostrictives de ces milieux dépendent également de l'état de contraintes mécaniques locales (couplage magnéto-mécanique), et il n'existe pas de modèle théorique capable de prendre en compte l'influence des contraintes mécaniques (résiduelles ou appliquées) sur les sources de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques.

Bilan bibliographique

En résumé, des travaux de recherche ont été menés dans la littérature pour améliorer la modélisation des traducteurs EMAT en milieux magnétiques. Ces études, à la fois théoriques et expérimentales, ont permis la mise en évidence des différents mécanismes de transduction ultrasonore intervenant dans les matériaux ferromagnétiques. Cependant, les modèles existants de sources de rayonnement créées par EMAT dans ces milieux sont multiples, les conclusions sur la prédominance des phénomènes en jeu diffèrent d'un cas d'application à l'autre, et aucun modèle semi-analytique formel ne permet la prise en compte des comportements magnétiques et magnétostrictifs non-linéaires des matériaux ferromagnétiques, ainsi que de la dépendance de ces propriétés magnéto-élastiques avec un état de contraintes mécaniques. Certaines études, validées expérimentalement dans certains matériaux magnétiques, développent des méthodes par éléments finis, méthodes coûteuses en temps de calcul et inadaptées à un logiciel industriel de simulation de CND comme CIVA. De plus, la théorie multi-physique et multi-échelle sous-jacente à la génération de sources électromagnétiques et magnéto-élastiques dynamiques en milieu ferromagnétique n'est pas clairement définie dans la littérature. Enfin, les modèles théoriques de sources surfaciques équivalentes capables de prédire efficacement le rayonnement ultrasonore des sources induites par EMAT sont limités à des géométries planes et des matériaux élastiquement isotropes.

Problématiques détaillées de la thèse

Ceci justifie cette étude qui a pour objectif la mise en place d'un modèle semi-analytique de référence capable de prédire l'ensemble des sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par un EMAT aux paramètres de conception et d'excitation quelconques dans une pièce ferromagnétique de géométrie potentiellement complexe. Le modèle formel développé doit permettre la prise en compte des non-linéarités et de l'influence d'un état de contraintes mécaniques sur les comportements magnétique et magnétostrictif de ces milieux, et être adapté à la simulation du rayonnement ultrasonore de ces sources dans le logiciel CIVA, en s'appuyant sur les modules électromagnétique (CIVA CF) et ultrasonore (CIVA US) existants.

Présentation des travaux effectués

Pour mener à bien cette étude, des développements théoriques, numériques et expérimentaux, en électromagnétisme et élastodynamisme, ont été effectués afin d'appréhender les phénomènes multi-physiques liés à l'alimentation et à la configuration électriques mises en jeu dans une application de CND par EMAT, aux propriétés électromagnétiques et magnéto-élastiques caractéristiques des milieux ferromagnétiques inspectés, aux mécanismes de génération des sources de transduction élastique et de propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu élastique. Pour faciliter la lecture de ces travaux, les différents axes d'étude décrits dans ce manuscrit sont rédigés de façon relativement indépendante dans chaque chapitre. Le niveau de détails et d'illustrations est volontairement (mais inhabituellement)

abondant, dans le but de fournir aux concepteurs et/ou utilisateurs de traducteurs ultrasonores un document qui détaille les différents phénomènes physiques impliqués lors d'une application de CND par EMAT en milieux ferromagnétiques ; de plus, les incohérences théoriques rencontrées dans la littérature sur ce sujet que nous pensons avoir levées avec ces études sont mises en lumière.

Dans un premier temps, nous décrivons les propriétés magnétiques et magnétostrictives macroscopiques des matériaux ferromagnétiques soumis à une excitation magnéto-élastique extérieure [Chapitre 1]. Après un bref rappel sur la théorie des champs électromagnétiques en milieux magnétiques continus, les différentes classes de comportement magnétiques sont introduites, pour focaliser ensuite l'étude sur les propriétés magnétiques non-linéaires (hystérétiques et anhystérétiques) des milieux ferromagnétiques, ainsi que des différents facteurs physiques qui les affectent. La structure et les mécanismes microscopiques élémentaires caractéristiques des milieux ferromagnétiques sont décrits afin de mettre en évidence l'origine des non-linéarités magnétiques rencontrées. Cette description permet également d'introduire les phénomènes de couplage magnéto-élastique de ces milieux, se manifestant à l'échelle macroscopique par les déformations de magnétostriction, et la dépendance des propriétés magnétiques et magnétostrictives de ces milieux avec un état de contraintes mécaniques.

La description des mécanismes élémentaires à l'origine des comportements magnétiques et magnétostrictifs des milieux ferromagnétiques propose un éclairage précieux pour décrire et comprendre les différentes approches de la littérature visant à modéliser les comportements magnéto-élastiques macroscopiques non-linéaires de ces milieux [Chapitre 2]. En limitant l'étude à la modélisation des lois de comportements anhystérétiques dépendant d'un état de contraintes mécaniques pour le modèle de sources induites par EMAT, les approches micromagnétiques, phénoménologiques et multi-échelles sont introduites. Les avantages et inconvénients de ces approches sont précisés. L'implémentation numérique et les champs d'application respectifs des approches phénoménologique et multi-échelle sont décrits et comparés pour la modélisation du comportement magnéto-élastique de différents milieux ferromagnétiques selon la problématique de cette étude.

Les lois macroscopiques de comportements magnétique et magnétostrictif du milieu ferromagnétique connues, l'objectif consiste ensuite à modéliser les sources dynamiques d'origine électromagnétique et magnétostrictive de transduction élastique induites, à l'origine du champ ultrasonore rayonné par EMAT dans ces milieux [Chapitre 3]. Ces sources sont de différentes natures. En premier lieu, les différentes méthodes de formulation des sources volumiques et surfaciques d'origine électromagnétique de la littérature sont présentées et comparées. La définition formelle et l'origine énergétique de la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell sont mises en avant. Cette méthode permet la prise en compte des lois de comportements magnétiques non-linéaires dans le modèle de sources électromagnétiques. De plus, elle intègre les conditions limites magnétiques à l'interface entre le milieu ferromagnétique inspecté et le milieu environnant sous la forme d'un terme de traction magnétique surfacique. Les liens théoriques entre la méthode du tenseur de Maxwell et les différentes méthodes de la littérature sont également établis. Dans un deuxième temps, la modélisation des sources volumiques d'origine magnétostrictive induites par EMAT en milieux ferromagnétiques est présentée. Ces effets sont représentés sous forme de forces équivalentes de magnétostriction, basées sur un formalisme de contraintes de magnétostriction selon le même raisonnement que celui développé pour les sources électromagnétiques. Le formalisme tensoriel du modèle des déformations piézo-magnétiques est également développé dans le cas de faibles excitations magnétiques dynamiques. Enfin, une méthode théorique formelle est développée dans le but de transformer de façon générique les sources

électromagnétiques et magnétostrictives volumiques en contraintes surfaciques équivalentes, c'est-à-dire approchant le plus précisément possible le rayonnement ultrasonore des termes sources volumiques de l'équation d'équilibre élastique par celui de sources surfaciques, adaptées au formalisme semi-analytique des modèles de rayonnement ultrasonore du module CIVA US. Ce formalisme tensoriel permet de traiter le cas des milieux de géométrie complexe et élastiquement anisotropes. La validation de cette méthode théorique et sa mise en œuvre pour représenter le rayonnement ultrasonore des sources magnétostrictives sont présentées. Les développements de ce chapitre permettent de représenter l'ensemble des phénomènes de transduction ultrasonore induits par EMAT dans une large gamme de milieux ferromagnétiques, aux propriétés magnéto-élastiques et aux géométries de surface variées, sous la forme de sources surfaciques, parfaitement adaptées à la simulation du champ ultrasonore qu'elles rayonnent par les modules de CIVA.

Les modèles théoriques développés sont ensuite exploités pour simuler les différentes sources surfaciques de transduction ainsi que le champ ultrasonore émis par EMAT en milieux ferromagnétiques [Chapitre 4]. Les modules de simulation CIVA CF et CIVA US sont présentés en précisant les différentes hypothèses de calcul adoptées. Ensuite, la configuration d'inspection par EMAT considérée est décrite, en insistant sur les paramètres de conception et d'excitation du traducteur, et en donnant les propriétés élastiques, magnétiques et magnétostrictives des milieux ferromagnétiques simulés. Ces différents éléments sont utilisés pour simuler, séparément et simultanément, les différentes sources induites par EMAT, puis leur rayonnement ultrasonore en ondes longitudinales et transversales. On quantifie ainsi le poids des différents mécanismes de transduction selon le milieu inspecté. Enfin, une étude paramétrique est menée pour évaluer l'influence sur les performances de transduction ultrasonore des paramètres d'excitation, des propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu, et d'un état de contraintes mécaniques multi-axiales.

Les expériences mises en œuvre pour caractériser le rayonnement ultrasonore transmis par un EMAT dans un milieu ferromagnétique sont finalement présentées [Chapitre 5]. Les paramètres de conception de l'EMAT didactique étudié sont décrits, et le signal de courant électrique d'excitation injecté dans la bobine est caractérisé à l'aide d'une sonde de Rogowski permettant la mesure de courants impulsionnels de fortes intensités et de hautes fréquences. Ensuite, le champ magnétique dynamique rayonné par l'EMAT dans l'entrefer le séparant du milieu inspecté est mesuré à l'aide d'un capteur de flux, et comparé avec succès aux simulations du module CIVA CF. Enfin, les essais de caractérisation du champ ultrasonore en ondes longitudinales et transversales émis par EMAT dans un milieu ferromagnétique sont présentés. Les variations spatiales (C-scan) et temporelles (A-scan) du champ ultrasonore transmis en ondes volumiques (longitudinales et transversales) dans une pièce ferromagnétique, ainsi que l'influence des paramètres d'excitation électrique sur les performances de rayonnement ultrasonore, sont en très bon accord avec les prédictions des modèles théoriques de sources de transduction induites par EMAT développés dans cette étude.

CHAPITRE 1

REVUE DES PROPRIETES MAGNETIQUES ET MAGNETO-ELASTIQUES DES MATERIAUX FERROMAGNETIQUES

De nombreux phénomènes multi-physiques, intervenant à des échelles spatiales différentes, sont impliqués lors de la sollicitation d'un milieu ferromagnétique par une excitation magnétique extérieure. Les propriétés macroscopiques d'aimantation et de déformations de magnétostriction de ces milieux, qui résultent d'un équilibre microscopique complexe, exhibent des comportements fortement non-linéaires, pouvant être affectés par de nombreux facteurs physiques de natures différentes. Parmi ces facteurs, l'état de contraintes mécaniques (appliquées ou résiduelles) joue un rôle important sur les mécanismes à l'origine du comportement magnéto-élastique d'un milieu ferromagnétique. Ce chapitre est une synthèse bibliographique détaillée relative aux propriétés magnétiques et magnétostrictives des matériaux ferromagnétiques, éventuellement sous contraintes mécaniques, à l'usage du concepteur ou de l'utilisateur 'ultrasoniste' d'un transducteur EMAT, pour faciliter l'introduction des approches théoriques permettant de modéliser la réponse magnéto-élastique des milieux ferromagnétiques généralement rencontrés en application du CND par EMAT. Cette revue est inspirée de nombreux ouvrages et manuscrits de thèse de la littérature, dont principalement [Lee_1955, Bozorth_1964, Chikazumi_1964, Cullity_1972, Couderchon_1979, Jiles_1998, Dapino_1999, Daniel_2011].

Dans ce chapitre, les quantités magnétiques macroscopiques et notations adoptées tout au long de ce manuscrit pour décrire les phénomènes d'aimantation et de magnétostriction des matériaux ferromagnétiques sont introduites. Les champs électromagnétiques macroscopiques et les équations de Maxwell régissant leur couplage sont présentés dans un premier temps, avant de décrire les différentes classes de comportements magnétiques des matériaux généralement rencontrés en industrie. L'étude se concentre ensuite sur la description des propriétés d'aimantation et de déformation de magnétostriction non-linéaires des milieux ferromagnétiques, en insistant sur la structure microscopique en domaines magnétiques spécifiques de ces milieux et sur les mécanismes multi-échelles caractéristiques à l'origine de leurs propriétés magnéto-élastiques.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1	
Revue des propriétés magnétiques et magnéto-élastiques des matériaux ferromagnétiques	21
1.1. Théorie des champs électromagnétiques macroscopiques en milieux magnétiques continus	23
1.1.1. Les champs électromagnétiques macroscopiques	23
1.1.2. Équations de Maxwell en milieux continus.....	25
1.1.3. Classification des comportements magnétiques des milieux.....	27
1.2. Description des propriétés magnétiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques	28
1.2.1. Comportements non-linéaires, cycles d'hystérésis et susceptibilités magnétiques caractéristiques	29
1.2.2. Milieux ferromagnétiques doux et durs.....	30
1.2.3. Susceptibilités intrinsèque et apparente : champ démagnétisant.....	31
1.2.4. Facteurs physiques affectant la qualité d'aimantation macroscopique.....	32
1.3. Description des mécanismes microscopiques à l'origine des propriétés magnétiques non-linéaires	34
1.3.1. Structure microscopique organisée en domaines magnétiques de Weiss	34
1.3.2. Réarrangements des domaines de Weiss et parois de Bloch sous l'effet d'une excitation magnétique	36
1.3.3. Composition chimique et déplacements irréversibles des parois de Bloch.....	37
1.3.4. Influence de la fréquence d'excitation	39
1.3.5. Anisotropie magnéto-cristalline	39
1.4. Description des propriétés magnéto-élastiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques	40
1.4.1. Les phénomènes de couplage magnéto-élastique des milieux	40
1.4.2. Description des déformations macroscopiques de magnétostriction.....	42
1.4.3. Origine du couplage magnéto-élastique et anisotropie magnéto-cristalline.....	44
1.4.4. Influence des contraintes mécaniques sur les courbes macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction	46
Conclusions du chapitre	47

1.1. Théorie des champs électromagnétiques macroscopiques en milieux magnétiques continus

Par choix de variable thermodynamique pour représenter l'état magnétique d'un milieu ou pour des raisons pratiques d'implémentation numérique, le champ d'excitation magnétique \mathbf{H} et le champ d'induction magnétique \mathbf{B} sont souvent confondus dans la littérature [Roche_2000]. Le formalisme adopté dans ce manuscrit interprète le champ d'excitation \mathbf{H} comme variable d'état. Les champs d'induction \mathbf{B} et d'aimantation \mathbf{M} découlent de cette excitation par la prise en compte des propriétés magnétiques du milieu étudié. Cette section introduit ces différents champs, présente les équations de Maxwell régissant leur couplage électromagnétique, et expose les différents comportements magnétiques des milieux généralement rencontrés industriellement.

1.1.1. Les champs électromagnétiques macroscopiques

La théorie des champs électromagnétiques traite des interactions physiques élémentaires qui s'exercent sur des porteurs de charge électrique microscopiques constituant la matière (électrons, ions). Le champ d'excitation électrique \mathbf{E} provient du déplacement de ces porteurs de charges dans un milieu, comme du courant électrique circulant dans une bobine électrique. Le champ d'excitation magnétique \mathbf{H} est quant à lui associé à des mouvements spécifiques de rotation et de circulation des charges électriques dans un milieu. Les matériaux magnétiques sont constitués à l'état microscopique d'une distribution locale de moments magnétiques élémentaires, les moments angulaires orbitaux (rotation des électrons selon une orbite autour d'un noyau atomique) et les moments quantiques de spins des électrons (rotation des électrons sur eux-mêmes), qui tendent à s'aligner dans la direction d'une excitation \mathbf{H} (Figure 1.3).

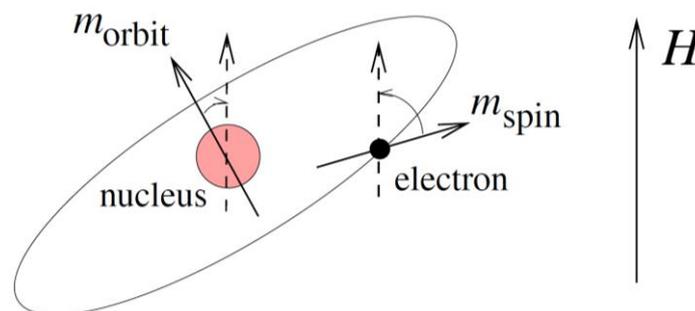


Figure 1.3 : Illustration de l'alignement d'un moment orbital m_{orbit} et d'un moment de spin m_{spin} selon une excitation magnétique H , tirée de [Dapino_1999].

Certains milieux comme les matériaux ferromagnétiques présentent la caractéristique d'être localement organisés en régions spontanément aimantées, même en absence de champ magnétique extérieur, dont l'arrangement microscopique permet l'apparition d'une aimantation macroscopique rémanente. Cette caractéristique, exploitée notamment dans la conception d'aimants permanents [Moskowitz_1986], repose sur un équilibre énergétique spécifique qui s'exerce sur les moments magnétiques microscopiques des milieux et tend à les aligner selon certaines directions cristallographiques privilégiées, contribuant à l'apparition d'un moment magnétique à l'échelle macroscopique. Cette propriété est utilisée très tôt dans le principe de la boussole : le moment magnétique d'une aiguille ferromagnétique interagit avec le champ magnétique terrestre et s'aligne dans la direction du pôle nord.

Les champs électrique et magnétique des milieux sont couplés. L'interaction entre électricité et magnétisme est découverte en 1820 par Ørsted [Ørsted_1820], qui démontre expérimentalement qu'un fil conducteur alimenté d'un courant électrique interagit avec une aiguille aimantée. Cette expérience révèle qu'un courant électrique est capable de rayonner un champ magnétique qui force l'alignement du moment magnétique de l'aiguille aimantée dans sa direction. Les lignes de champ magnétique issues d'une boucle de courant électrique ou d'un aimant permanent sont très similaires, et ce qui permet notamment de modéliser le champ magnétique d'un aimant permanent rayonné dans l'air par équivalence avec celui d'une bobine électrique [Ravaud-et-al_2010]. En revanche, le flux circulant à l'intérieur de l'aimant est de sens opposé à celui traversant l'intérieur d'une bobine (Figure 1.4).

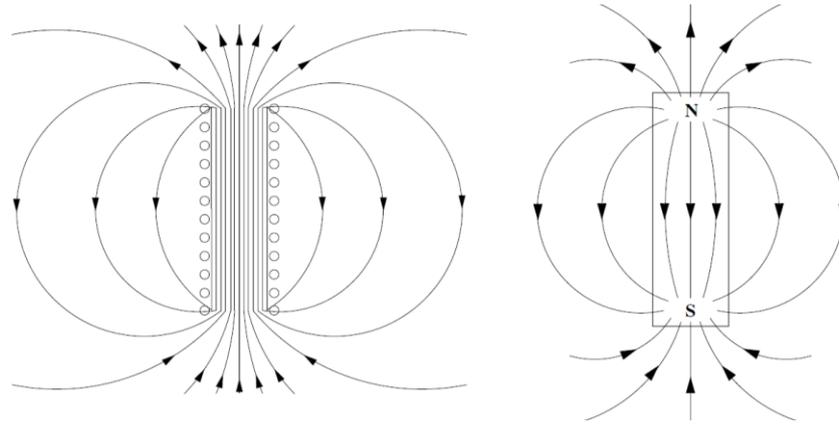


Figure 1.4 : Représentation des lignes de champ magnétique rayonnées par une bobine électrique (gauche) et un aimant permanent (droite), tirée de [Dapino_1999].

Les champs d'induction électrique et magnétique sont respectivement représentés par les variables \mathbf{D} et \mathbf{B} ; ils caractérisent les densités de flux des excitations électrique et magnétique dans un milieu. Ces champs vectoriels permettent de quantifier la variation du flux électromagnétique induite par la présence d'un milieu. Ils utilisent la définition des polarisations électrique \mathbf{P} et magnétique \mathbf{I} qui représentent la réponse du milieu à une sollicitation électromagnétique extérieure. Ces polarisations correspondent aux déviations, aux perturbations, des lignes de champs rayonnées dans l'air en présence d'un milieu électromagnétique. Les relations constitutives des milieux électromagnétiques, reliant les champs d'excitation, de polarisation et d'induction électromagnétiques, s'écrivent sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dans ces relations, ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide, et la polarisation magnétique s'écrit $\mathbf{I} = \mu_0 \mathbf{M}$, avec le champ vectoriel \mathbf{M} désignant l'aimantation magnétique du milieu (spontanée ou induite). Certains auteurs [Bozorth_1964, Couderchon_1979] (principalement électroniciens et producteurs de matériaux) préfèrent utiliser la notion de polarisation magnétique \mathbf{I} (ou \mathbf{J} en fonction des ouvrages), tandis que dans cette étude la notion physique de champ vectoriel d'aimantation \mathbf{M} est préférée. Dans le cas des matériaux magnétiques qui font l'objet de ces travaux, la polarisation électrique est supposée nulle ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$) et l'étude du comportement magnétique de ces milieux se concentre sur la relation constitutive magnétique suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.2)$$

Dans le système international d'unités (SI), la perméabilité magnétique du vide μ_0 vaut $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, l'intensité des champs d'excitation \mathbf{H} et d'aimantation \mathbf{M} s'exprime en ampères par mètre [$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$], et l'intensité de l'induction magnétique \mathbf{B} en teslas [T]. Toutefois, on peut trouver un certain nombre d'auteurs qui utilisent les unités centimètre-gramme-seconde (CGS) pour décrire le magnétisme des milieux. Dans le système CGS, les intensités des champs d'excitation et d'induction se mesurent respectivement en œrstedes [Oe] et en gauss [G]. Le système d'unités SI est utilisé tout au long de ce manuscrit ; les relations de conversion entre les unités SI et CGS sont données à titre indicatif :

$$1 \text{ Oe} = 10^3/4\pi \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}.$$

1.1.2. Équations de Maxwell en milieux continus

Le système d'équations couplées aux dérivées partielles qui unifie l'ensemble des principes de l'électromagnétisme et régit les variations spatio-temporelles des champs électromagnétiques macroscopiques dans les milieux continus est proposé par Maxwell en 1873 [Maxwell_1873]. En notant \mathbf{J} la densité de courants électriques et q la densité de charges électriques (électrons libres), la formulation différentielle des équations de Maxwell s'écrit :

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday :} \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\text{Équation de Gauss (électrique) :} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t), \quad (1.4)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère :} \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

$$\text{Conservation du flux magnétique :} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.6)$$

Dans la suite de la section, les variables spatio-temporelles (\mathbf{r}, t) des sources et champs électromagnétiques sont omises par souci de concision. Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère rendent compte du couplage entre les champs électromagnétiques et de l'influence des densités de courant électrique dans le milieu, tandis que les équations de Gauss électrique et de conservation du flux magnétique (aussi appelée équation de Gauss magnétique) sont des équations de conservation des champs d'induction électromagnétiques qui rendent compte de l'influence des densités de charges dans un milieu. En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, l'équation de conservation de la charge s'écrit simplement :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.7)$$

La densité de courant électrique \mathbf{J} de l'équation de Maxwell-Ampère peut être décrite selon différentes contributions élémentaires : $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{inc}} + \mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{conv}}$. Dans cette relation, \mathbf{J}_{inc} représente la densité de courants incidents, \mathbf{J}_{cond} représente la densité de courants de conduction (courants de Foucault induits dans le milieu), et \mathbf{J}_{conv} représente la densité de courants de convection. La loi d'Ohm pour un milieu électromagnétique de conductivité σ prédit la proportionnalité des courants de conduction avec le champ électrique selon la relation : $\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \mathbf{E}$. Les courants de convection correspondent à la mise en mouvement à une vitesse \mathbf{v} des charges électriques (électrons libres) ; cette distribution peut s'écrire : $\mathbf{J}_{\text{conv}} = q\mathbf{v}$. La densité de courants de convection est généralement négligée devant celle des courants de conduction induits lors d'une application de CND par EMAT. Ces courants induits (dans tout milieu

conducteur) par EMAT correspondent aux courants de Foucault, ils représentent les courants de conduction induits dans le milieu inspecté par le champ magnétique rayonné par la bobine de l'EMAT. Ces courants sont à l'origine des forces de Lorentz (Chapitre 3) produites par interaction avec l'excitation magnétique appliquée, ces forces étant les termes sources du rayonnement ultrasonore dans le milieu inspecté. Le comportement magnéto-élastique d'un milieu ferromagnétique est également à l'origine de sources de transduction ultrasonore par un EMAT, ces sources font l'objet du Chapitre 3. En phase de réception, les mécanismes sont réciproques : au passage d'une onde ultrasonore et en présence d'une induction magnétique \mathbf{B} , le déplacement élastique d'un milieu conducteur à une vitesse \mathbf{v} induit des courants de conduction $\sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ à l'origine du signal mesuré par la bobine réceptrice fixe [Woodson-Melcher_1968]. Lorsque le milieu inspecté est également ferromagnétique, des courants supplémentaires d'origine magnétique et magnétostrictive s'ajoutent aux mécanismes de réception impliqués par EMAT [Jafari Shapoorabadi-et-al_2005].

La dérivée temporelle de l'induction électrique \mathbf{D} dans l'équation (1.5) représente les courants de déplacement du milieu ; ces courants sont négligés dans cette étude. C'est l'approximation magnétique quasi-statique, qui suppose que les fréquences de collisions atomiques et retournement des spins des électrons sont très grandes devant les fréquences d'excitation généralement utilisées en application industrielle de CND. En l'absence de courant de convection et supposant un champ électrique harmonique donné, cette approximation reste valide si la fréquence d'excitation f vérifie :

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}_{\text{cond}}| \Leftrightarrow f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}, \quad (1.8)$$

soit $f \ll 10$ GHz pour une conductivité de l'ordre du MS.m^{-1} en milieu magnétique. Les fréquences d'inspection utilisées en applications de CND ne dépassant que très rarement la dizaine de mégahertz, l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell magnétiques est justifiée ici. En introduisant les concepts de densité de charges magnétiques équivalentes $\rho_M = -\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{M})$ et de densité de courants magnétiques équivalents $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$, aussi appelés charges et courants liés, la relation constitutive $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ permet d'écrire les équations de Maxwell magnétiques quasi-statiques en fonction du champ d'excitation magnétique \mathbf{H} ou de la densité de flux magnétique \mathbf{B} selon l'un des systèmes équivalents :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_M/\mu_0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.10)$$

Ces équations régissent les variations des champs magnétiques à l'intérieur d'un milieu. Les champs électromagnétiques subissent des discontinuités au passage d'une interface entre deux milieux, et leur description macroscopique continue doit tenir compte de conditions limites de passage. En notant \mathbf{n} la normale sortante à l'interface $\partial\Omega$ d'un milieu Ω plongé dans un milieu Ω_0 , ces conditions limites magnétiques sont données par les relations [Dapino_1999] :

$$\begin{cases} [\mathbf{B} - \mathbf{B}_0]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ [\mathbf{H} - \mathbf{H}_0]_{\partial\Omega} \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (1.11)$$

Ces relations traduisent la continuité des composantes normales des champs d'induction magnétique au passage de l'interface $\partial\Omega$, et la continuité des composantes tangentielles des champs d'excitation magnétique en fonction de l'existence d'une densité de courants surfaciques \mathbf{J}_s . À l'interface entre un milieu magnétique Ω et de l'air, les composantes tangentielles d'induction et normales d'excitation sont discontinues en raison du champ d'aimantation présent à la surface d'un milieu ferromagnétique.

Cette présentation des différents champs électromagnétiques macroscopiques et des équations régissant leurs variations spatio-temporelles a permis d'introduire les différentes quantités et notations adoptées dans ce manuscrit. La section suivante décrit l'aimantation macroscopique des milieux magnétiques en introduisant les notions de perméabilité et susceptibilité magnétiques et expose les caractéristiques principales des grandes familles de comportements magnétiques généralement rencontrés en industrie.

1.1.3. Classification des comportements magnétiques des milieux

Afin de décrire les principaux comportements magnétiques des matériaux, il est nécessaire d'introduire la notion de susceptibilité magnétique, notée χ (sans unité). Cette grandeur tensorielle d'ordre deux relie le champ d'aimantation \mathbf{M} à l'excitation magnétique \mathbf{H} du milieu, selon la relation constitutive M-H :

$$\mathbf{M} = \chi \cdot \mathbf{H}. \quad (1.12)$$

La relation constitutive B-H d'un milieu magnétique s'écrit de façon équivalente en introduisant le tenseur de perméabilité magnétique, noté $\boldsymbol{\mu}$ (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}, \quad \text{avec : } \boldsymbol{\mu} = \mu_0(\mathbf{1} + \chi) = \mu_0\boldsymbol{\mu}_r. \quad (1.13)$$

Dans la relation précédente, $\mathbf{1}$ désigne le tenseur identité d'ordre deux et la notion de perméabilité relative $\boldsymbol{\mu}_r = \mathbf{1} + \chi$ est introduite. De manière équivalente, les propriétés magnétiques d'un matériau sont décrites par leur susceptibilité magnétique χ ou leur perméabilité magnétique $\boldsymbol{\mu}$. Ces caractéristiques sont représentées par des scalaires χ et μ lorsque le milieu est magnétiquement isotrope (même comportement magnétique dans toutes les directions de l'espace). Enfin, ces grandeurs dépendent de nombreux paramètres physiques de l'environnement du matériau et peuvent exhiber des phénomènes non-linéaires dans certains matériaux magnétiques. Classiquement [Chikazumi_1964], les comportements magnétiques sont classés selon la distribution des moments magnétiques microscopiques du matériau au repos et selon l'évolution du champ aimantation du matériau lorsqu'il est soumis à une excitation magnétique extérieure (caractérisée par la susceptibilité magnétique). Selon la structure magnétique microscopique du milieu, aléatoire ou localement ordonnée, on distingue les propriétés magnétiques suivantes :

Structure microscopique aléatoire : moments atomiques isolés

Les matériaux diamagnétiques possèdent une susceptibilité magnétique négative et très faible, de l'ordre de -10^{-5} . Ces matériaux ont la faculté de s'aimanter destructivement en réponse à une excitation magnétique extérieure : ils génèrent un champ d'aimantation, d'amplitude très faible, et dans le sens contraire du champ magnétique appliqué. La relation de linéarité est valable même pour de fortes excitations magnétiques, et l'aimantation du milieu disparaît lorsque l'excitation magnétique est supprimée. La plupart des matériaux non-métalliques sont diamagnétiques, comme le sont aussi certains métaux tels le cuivre et l'or.

Les matériaux paramagnétiques s'aimantent constructivement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, avec des susceptibilités de faibles valeurs positives, généralement entre 10^{-5} et 10^{-3} . L'aimantation de ces milieux varie linéairement avec le champ magnétique extérieur ; elle sature pour de très fortes valeurs de champs (inatteignables industriellement à température ambiante), et elle disparaît lorsque l'excitation s'annule. Les moments atomiques des matériaux paramagnétiques sont répartis aléatoirement à l'état initial, sous la seule influence de l'énergie d'agitation thermique. L'application d'un champ magnétique perturbe l'équilibre énergétique initial et force l'alignement des moments atomiques selon la direction de l'excitation magnétique. Lorsque l'excitation est supprimée, ces moments magnétiques se désordonnent aléatoirement à nouveau sous l'effet de l'agitation thermique, et l'aimantation macroscopique du milieu disparaît. Ce phénomène d'aimantation est naturellement fortement dépendant de la température. La loi de Curie [Curie] décrit la variation de l'aimantation d'un milieu paramagnétique comme l'inverse de la température. Le sodium et l'aluminium sont des exemples de matériaux paramagnétiques fréquemment rencontrés.

Structure microscopique localement ordonnée : moments atomiques en domaines

Les moments magnétiques atomiques de certains milieux sont localement ordonnés en domaines magnétiques uniformément aimantés selon des directions caractéristiques, y compris en l'absence d'un champ magnétique extérieur. Ces moments ne sont pas isolés des interactions d'échange des moments atomiques voisins, et leur équilibre repose sur un bilan énergétique complexe. Cet ordre microscopique se traduit à l'échelle macroscopique par des susceptibilités magnétiques élevées (phénomène coopératif), par des mécanismes d'aimantation non-linéaires en fonction d'une excitation extérieure magnétique ou de nature différente (thermique ou élastique par exemple), et par l'apparition d'une aimantation rémanente en absence de champ extérieur. Différents comportements magnétiques de matériaux localement ordonnés à l'état microscopique sont distingués, dont trois principaux : le ferromagnétisme, l'antiferromagnétisme, le ferrimagnétisme. Les propriétés antiferromagnétique et ferrimagnétique peuvent être interprétées comme des cas particuliers du ferromagnétisme, avec un arrangement spécifique en domaines magnétiques au repos et en réponse à une excitation magnétique extérieure ; les propriétés macroscopiques des milieux ferromagnétiques qui concernent directement cette étude sont décrites en détail dans la section suivante.

1.2. Description des propriétés magnétiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques

Les matériaux ferromagnétiques sont décomposés en domaines élémentaires, appelés les domaines de Weiss (détaillés dans la section suivante), qui présentent un moment magnétique résultant uniforme (les moments magnétiques atomiques de chaque domaine sont alignés dans la même direction) appelé aimantation spontanée. Sollicités par une excitation magnétique, les milieux ferromagnétiques impliquent de très fortes susceptibilités magnétiques, pouvant atteindre 10^5 dans certains matériaux ; on parle de mécanismes coopératifs. De plus, l'aimantation macroscopique de ces milieux présente un comportement non-linéaire et hystérétique en fonction de l'intensité du champ magnétique extérieur.

1.2.1. Comportements non-linéaires, cycles d'hystérésis et susceptibilités magnétiques caractéristiques

À l'état désaimanté (magnétiquement ou thermiquement), les moments magnétiques résultant de chaque domaine d'un milieu ferromagnétique polycristallin se répartissent aléatoirement, annulant le champ d'aimantation macroscopique. L'application d'un champ magnétique perturbe cet état initial et engendre un champ d'aimantation macroscopique. L'aimantation du milieu décrit alors la courbe de première aimantation : comportement linéaire pour de faibles intensités de champ magnétique (domaine de Rayleigh), puis forte augmentation quasi-linéaire de l'aimantation jusqu'à atteindre une valeur d'aimantation à saturation M_S .

Lorsque que le champ magnétique extérieur décroît jusqu'à zéro à partir d'une valeur maximale H_m (appelée champ d'excursion maximale), l'aimantation du milieu ne suit plus la courbe de première aimantation mais décrit la branche descendante du cycle d'hystérésis. À champ magnétique nul, une aimantation macroscopique non nulle, appelée aimantation rémanente M_R , subsiste. Pour annihiler l'aimantation rémanente du matériau, il est nécessaire d'exciter le matériau dans la direction opposée à la direction initiale d'excitation à l'intensité du champ coercitif H_C : l'aimantation du milieu décrit la courbe de désaimantation (ou de démagnétisation). En cyclant la sollicitation magnétique du milieu entre des intensités de champ $-H_m$ et H_m (à de faibles fréquences de l'ordre du hertz), l'aimantation macroscopique du milieu ferromagnétique décrit ainsi une boucle caractéristique : le cycle majeur d'hystérésis. Si un champ magnétique alternatif d'intensité bien inférieure à celle du champ magnétique d'excursion est superposé à un champ magnétique continu, l'aimantation du milieu décrit alors un cycle mineur d'hystérésis. Les formes des cycles d'hystérésis majeur et mineur peuvent varier fortement d'un milieu ferromagnétique à un autre.

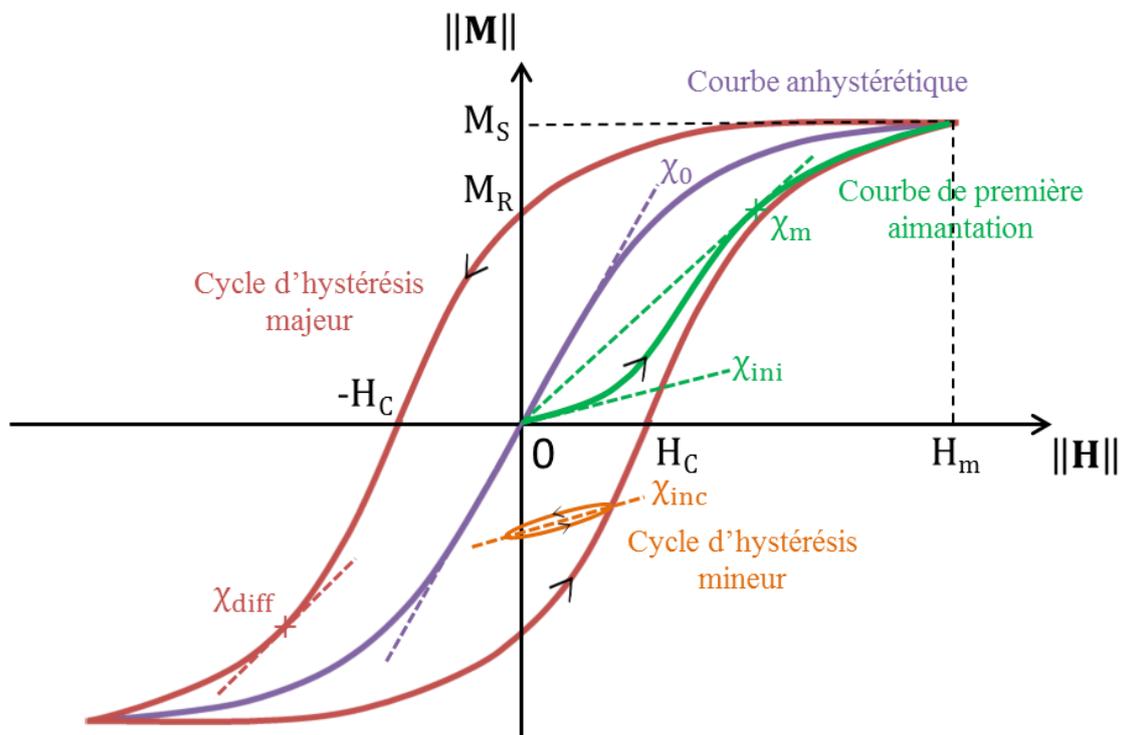


Figure 1.5 : Représentation des phénomènes d'aimantation non-linéaires des milieux ferromagnétiques et des différentes susceptibilités magnétiques caractéristiques.

La courbe anhystérétique est une courbe caractéristique du comportement ferromagnétique qui se construit point par point. L'abscisse de chaque valeur d'aimantation anhystérétique correspond à l'intensité du champ magnétique imposé auquel est superposé un champ alternatif évanescent de valeur moyenne nulle et d'amplitude initiale plus élevée que le champ d'excursion maximale. De cette façon, cette courbe quantifie les mécanismes d'aimantation réversibles (sans perte d'hystérésis) du matériau. Les différentes courbes de comportement magnétique des milieux sont illustrées sur la Figure 1.5.

Ces phénomènes d'aimantation non-linéaires spécifiques des milieux ferromagnétiques sont décrits par différentes susceptibilités magnétiques caractéristiques [Bozorth_1964] :

- La susceptibilité initiale, notée χ_{ini} , représente la pente à l'origine de la courbe de première aimantation du milieu. Elle est utilisée pour décrire le comportement linéaire de l'aimantation du milieu pour de faibles intensités de champ magnétique à partir d'un état désaimanté ;
- La susceptibilité maximale, notée χ_m , représente la valeur maximale du rapport des intensités des champs d'aimantation et d'excitation magnétique ;
- La susceptibilité anhystérétique, notée χ_0 , représente la pente à l'origine de la courbe anhystérétique d'aimantation du milieu ;
- La susceptibilité différentielle, notée χ_{diff} , représente la dérivée partielle de l'aimantation par rapport au champ magnétique. Cette susceptibilité décrit la pente locale de la courbe d'aimantation du milieu, sa valeur est maximale aux intensités $-H_C$ et H_C le long du cycle d'hystérésis majeur ;
- La susceptibilité incrémentale, notée χ_{inc} , représente le rapport des variations du champ d'aimantation du milieu sur les variations du champ magnétique des cycles d'hystérésis mineurs : $\chi_{inc} = \Delta M / \Delta H$.

1.2.2. Milieux ferromagnétiques doux et durs

Les différents paramètres décrivant les courbes hystérétiques et anhystérétiques sont des caractéristiques ferromagnétiques propres à chaque matériau, et peuvent varier fortement d'un matériau à un autre. Les principaux éléments ferromagnétiques sont le fer, le nickel et le cobalt. Ce sont les trois seuls éléments purs et ferromagnétiques dont l'usage est industriel. Certaines terres rares à basses températures sont aussi ferromagnétiques. De plus, les alliages de fer, nickel et cobalt peuvent être ferromagnétiques ou non, avec par exemple certains alliages fer-nickel qui ne sont pas ferromagnétiques. Autre élément de curiosité, des alliages de métaux non ferromagnétiques peuvent être ferromagnétiques comme certains alliages cuivre-manganèse-aluminium. Les matériaux ferromagnétiques sont généralement classés en deux principaux sous-groupes selon la forme de leur cycle majeur d'hystérésis (Figure 1.6) :

- Les matériaux doux, comme le fer ou les alliages fer-nickel et fer-cobalt, sont caractérisés par un cycle d'hystérésis étroit avec de faibles intensités de champ coercitif et une forte perméabilité. Ils sont généralement caractérisés par leur courbe anhystérétique. Ces matériaux sont très faciles à aimanter et à désaimanter, et ils présentent peu de pertes énergétiques par dissipation lors d'un cycle d'excitation magnétique (grâce à la faible surface du cycle

d'hystérésis). Ces caractéristiques rendent ces matériaux très utiles en fonctionnement alternatif : ils sont utilisés dans la conception de machines électriques ou d'électroaimants ;

- Les matériaux durs, comme la magnétite, les alliages AlNiCo, ou le NdFeB, ont un cycle d'hystérésis très large. L'aimantation rémanente de ces matériaux est importante (de l'ordre du tesla) et l'intensité du champ coercitif de ces milieux est très élevée, ce qui rend ces matériaux très difficiles à désaimanter. Ces caractéristiques spécifiques sont naturellement adaptées pour la conception industrielle d'aimants permanents.

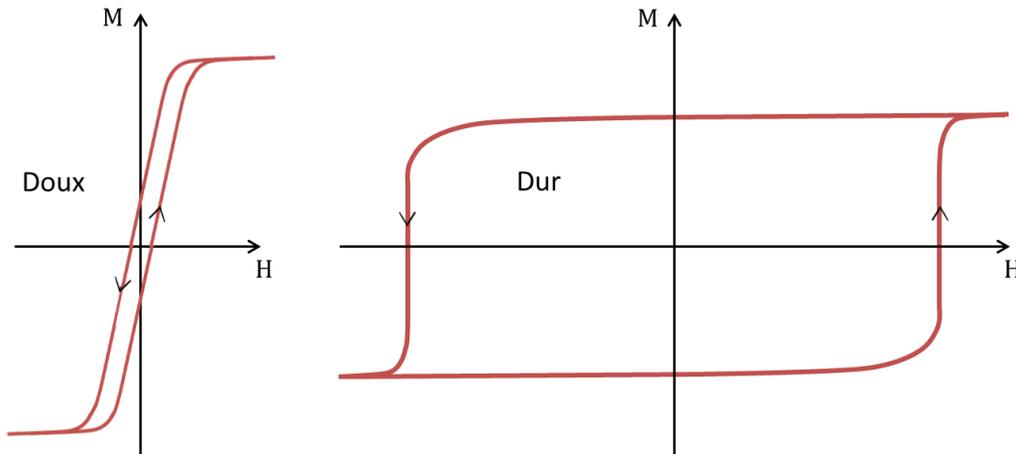


Figure 1.6 : Formes caractéristiques des cycles d'hystérésis de matériaux ferromagnétiques doux (gauche) et dur (droite)

Cette représentation en deux groupes illustre deux types de comportements ferromagnétiques extrêmes. Elle reste cependant théorique car en pratique les valeurs d'excitation coercitive H_C et d'aimantation rémanente M_R varient dans une très large gamme. Par exemple, les alliages fer-cobalt peuvent être considérés comme doux ou durs suivant la concentration de cobalt.

1.2.3. Susceptibilités intrinsèque et apparente : champ démagnétisant

Pour la caractérisation des propriétés magnétiques des milieux, on distingue généralement deux échelles différentes de mesure de la susceptibilité magnétique [Ledieu_2005] :

- La susceptibilité 'intrinsèque' : elle correspond aux propriétés magnétiques du matériau qui résultent de phénomènes microscopiques élémentaires à l'échelle de la matière, sans effets de bords, comme si les dimensions du milieu étaient infinies.
- La susceptibilité 'apparente' : elle représente les propriétés magnétiques d'un milieu à l'échelle de la pièce géométrique étudiée, c'est-à-dire en prenant en compte sa taille finie et sa forme.

Ces différentes échelles s'expliquent par la présence d'effets démagnétisants macroscopiques (Figure 1.7). Le champ magnétique d'un matériau ne correspond en effet pas exactement au champ magnétique externe imposé, mais comprend également l'influence d'un champ démagnétisant, noté H_{dm} . La discontinuité du champ d'aimantation aux interfaces d'un milieu ferromagnétique plongé dans un milieu amagnétique (de l'air) induit une migration de charges magnétiques équivalentes $q_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ sur la surface du matériau. Ces charges magnétiques surfaciques ne peuvent pas être isolées ; elles forment deux pôles d'attraction magnétique qui se compensent parfaitement. Ce 'dipôle' magnétique équivalent

est à l'origine de la création du champ démagnétisant selon l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{H}_{dm} = \rho_M$, qui vient se superposer au champ magnétique appliqué au milieu.

Les effets démagnétisants expliquent les effets d'anisotropie de forme (ou effets de forme) rencontrés dans les matériaux ferromagnétiques, qui se manifestent par des propriétés magnétiques anisotropes relatives à la forme géométrique du matériau (favorisant l'aimantation du matériau selon ses grandes dimensions). L'existence du champ démagnétisant est la raison pour laquelle la caractérisation des propriétés magnétiques d'un milieu est généralement effectuée sur des échantillons formant des circuits magnétiques fermés (éprouvettes en forme de tore par exemple). De cette façon, l'influence des effets démagnétisants est minimisée et la mesure correspond directement aux propriétés magnétiques intrinsèques du milieu étudié. Le champ \mathbf{H}_{dm} est défini par la forme géométrique et l'aimantation du matériau. Ce champ est complexe à modéliser sur une pièce de géométrie quelconque, y compris pour une aimantation uniforme. En considérant un ellipsoïde uniformément aimanté, le champ démagnétisant peut être représenté par l'intermédiaire du champ d'aimantation \mathbf{M} et d'un tenseur \mathbf{N}_{dm} de coefficients démagnétisants qui dépendent de la géométrie de l'échantillon étudié selon la relation [Brown_1962] :

$$\mathbf{H}_{dm} = -\mathbf{N}_{dm} \cdot \mathbf{M}. \quad (1.14)$$

Pour un matériau magnétique isotrope, N_{dm} est un scalaire dont la valeur dépend de la géométrie étudiée, comme indiqué dans la Table 1.1 tirée de [Jiles_1998]. À partir de l'écriture du champ démagnétisant, une relation entre les susceptibilités intrinsèque et apparente d'un matériau magnétique peut être établie [du-Trémolet-de-Lacheisserie_1999]. Dans la suite de cette étude, les différentes propriétés magnétiques décrites font référence aux propriétés intrinsèques du milieu magnétique étudié.

Géométrie	N_{dm}
Toroïde	0
Cylindre infini	0
Cylindre (hauteur/diamètre = 10)	0.0172
Cylindre (hauteur/diamètre = 1)	0.27
Sphère	0.333

Table 1.1 : Coefficient démagnétisant en fonction de la géométrie de l'échantillon.

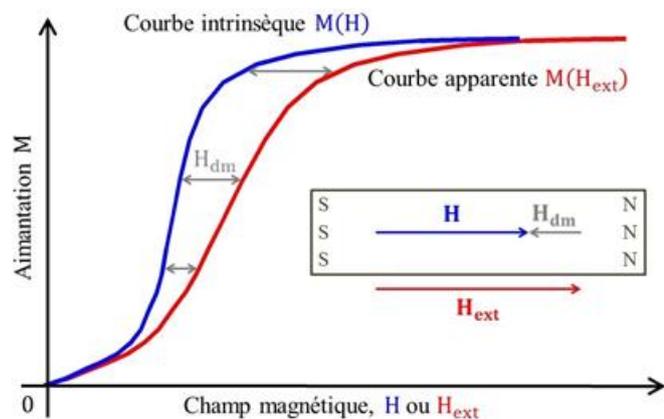


Figure 1.7 : Courbes d'aimantation intrinsèque et apparente en fonction du champ démagnétisant.

1.2.4. Facteurs physiques affectant la qualité d'aimantation macroscopique

Les facteurs affectant les propriétés magnétiques intrinsèques macroscopiques d'un milieu ferromagnétique sont multiples et de nature physique différente. Cette diversité de facteurs accentue la complexité de la description théorique du comportement magnétique de ces milieux.

Parmi ces facteurs physiques, la température joue un rôle fondamental sur les propriétés magnétiques d'un milieu ferromagnétique. En effet, une élévation significative de la température augmente l'énergie

d'agitation thermique exercée sur les moments magnétiques atomiques de chaque domaine, ce qui tend à isoler les moments magnétiques de l'influence des moments voisins, et donc détruit la structure en domaines magnétiques. À partir d'une température de transition appelée la température de Curie T_C , le matériau perd alors ses caractéristiques ferromagnétiques et exhibe un comportement paramagnétique (loi de Curie : susceptibilité magnétique qui dépend de l'inverse de la température). Lorsque la température redescend en dessous du point de Curie, le matériau retrouve ses propriétés ferromagnétiques originelles. De cette manière, une élévation suffisante de la température permet de désaimanter un matériau ferromagnétique. Pour $T < T_C$, la dépendance de la susceptibilité magnétique d'un milieu ferromagnétique avec la température suit la loi de Curie-Weiss [Weiss_1907] qui s'écrit :

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (1.15)$$

Dans cette relation, C désigne la constante de Curie. Cette relation et la définition physique de la constante C sont expliquées dans le Chapitre 2. Les évolutions de la forme des cycles d'hystérésis et de la polarisation magnétique à saturation $\mu_0 M_s$ des trois principaux éléments ferromagnétiques (fer, nickel et cobalt) en fonction de la température sont illustrées sur la [Figure 1.8](#).

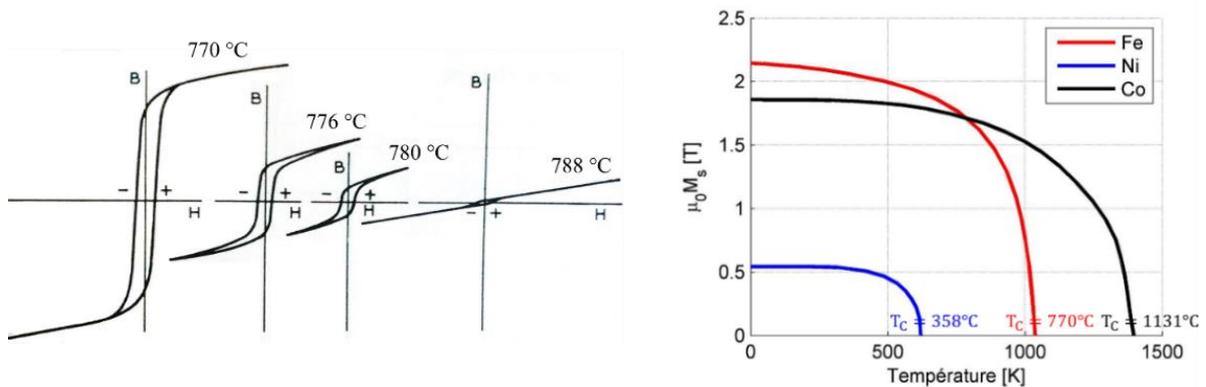


Figure 1.8 : Évolution du cycle d'hystérésis du fer au passage de la température de Curie (gauche [Bozorth_1964]) et variation de l'aimantation à saturation du fer, du nickel, et du cobalt en fonction de la température (droite [Couderschon_1979]).

La dépendance de l'aimantation d'un milieu ferromagnétique avec la température s'explique simplement et précisément à l'aide de la théorie du champ moléculaire de Weiss. Ensuite, les facteurs physiques qui affectent fortement les propriétés magnétiques de ces matériaux sont principalement :

- la composition chimique du matériau (son taux d'impuretés, et par suite leur nature) ;
- la présence de contraintes et déformations mécaniques, appliquées et/ou résiduelles ;
- la fréquence d'excitation magnétique ;
- la structure magnéto-cristalline du milieu ;
- son processus de fabrication ou le traitement thermique appliqué.

Cependant, les propriétés magnétiques d'un matériau ne sont pas toutes sensibles de la même manière à chacun de ces facteurs [Bozorth_1964]. Par exemple, la température de Curie et l'aimantation à saturation ne dépendent pas des changements de structure cristallographique du matériau contrairement à la perméabilité ou à la forme du cycle d'hystérésis. Pour expliquer ces dépendances, la section suivante

décrit la structure microscopique du matériau dans le but de comprendre l'origine des mécanismes d'aimantation des milieux ferromagnétiques et d'en déterminer les paramètres physiques influant.

1.3. Description des mécanismes microscopiques à l'origine des propriétés magnétiques non-linéaires

La structure microscopique ordonnée en domaines magnétiques est à l'origine des propriétés ferromagnétiques des milieux. L'analyse des mécanismes microscopiques s'exerçant sur cette distribution de domaines lors d'une excitation magnétique permet d'expliquer les phénomènes non-linéaires d'aimantation rencontrés dans ces milieux, et de comprendre l'influence de la microstructure, et des paramètres physiques qui l'impactent, sur la qualité d'aimantation d'un milieu ferromagnétique.

1.3.1. Structure microscopique organisée en domaines magnétiques de Weiss

L'existence d'une aimantation spontanée en l'absence d'excitation magnétique extérieure témoigne du fait que la distribution de moments magnétiques atomiques n'a rien d'aléatoire dans un matériau ferromagnétique mais présente un ordre microscopique caractéristique. En effet, au repos, en plus de sa structure élastique métallographique traditionnelle (grains, phases...), un matériau ferromagnétique massif se divise spontanément en un grand nombre de petites régions appelées domaines élémentaires de Weiss ou domaines magnétiques (Figure 1.9). Cette structure, à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique, a été introduite par Pierre Weiss [Weiss_1907] dans les années 1900 pour expliquer comment une substance localement aimantée à saturation apparaît désaimantée macroscopiquement. Elle n'a été observée expérimentalement que beaucoup plus tard grâce aux méthodes de microscopie à effet Kerr (magnéto-optique) ou à 'forces magnétiques' (MFM pour 'Magnetic Force Microscopy'). À l'intérieur de chaque domaine de Weiss, les moments magnétiques atomiques sont parallèles et pointent dans la même direction, chaque domaine étant aimanté à saturation M_S . Cette structure caractéristique en domaines de Weiss constitue un état d'équilibre métastable [D'Aquino_2004] des moments atomiques soumis à l'interaction mutuelle des moments atomiques voisins (énergie d'échange).

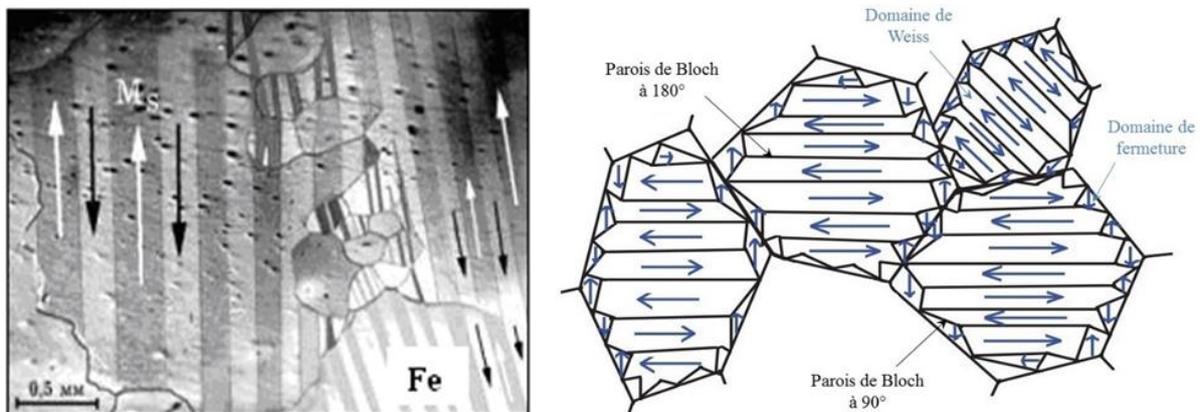


Figure 1.9 : Image par effet Kerr (gauche) et représentation schématisée (droite) des domaines de Weiss et parois de Bloch composant les grains élastiques d'un milieu ferromagnétique.

Une particularité des matériaux ferromagnétiques tient également à la présence apparente d'axes d'aimantation privilégiés, ou axes de facile aimantation. En effet, comme illustré sur la [Figure 1.9](#), les orientations de l'aimantation spontanée des domaines magnétiques ne prennent pas des directions aléatoires dans chaque grain élastique mais privilégient certains axes cristallographiques. Ces axes sont définis en fonction de la symétrie de la maille cristalline de chaque grain du matériau : on parle d'anisotropie magnéto-cristalline. Dans le cas idéal d'un monocristal ferromagnétique, l'anisotropie magnéto-cristalline se traduit macroscopiquement par une anisotropie magnétique, qui se forme généralement selon les axes cristallographiques du cristal de référence. Dans le cas de matériaux ferromagnétiques polycristallins, la répartition aléatoire des différentes symétries cristallines, et donc de l'aimantation spontanée de chaque domaine, restaure généralement l'isotropie magnétique à l'échelle macroscopique [[Weiss_1907](#)].

Entre deux domaines magnétiques adjacents, l'orientation des moments atomiques varie continûment (pour maintenir une faible énergie d'échange entre les moments) dans une région de transition appelée paroi de Bloch [[Bloch_1932](#)], comme illustrée par la [Figure 1.10](#). La largeur des parois de Bloch dépend de la structure cristallographique du milieu ; elle est généralement de l'ordre d'une centaine de mailles cristallines. Dans le cas idéal d'un monocristal ferromagnétique, deux types de parois de Bloch sont généralement distinguées : des parois de Bloch à 180° séparant les principaux domaines magnétiques, et des parois à 90° (plus complexes) qui assurent la séparation entre les principaux domaines et les domaines de fermeture (comme illustré sur le schéma de la [Figure 1.9](#)).

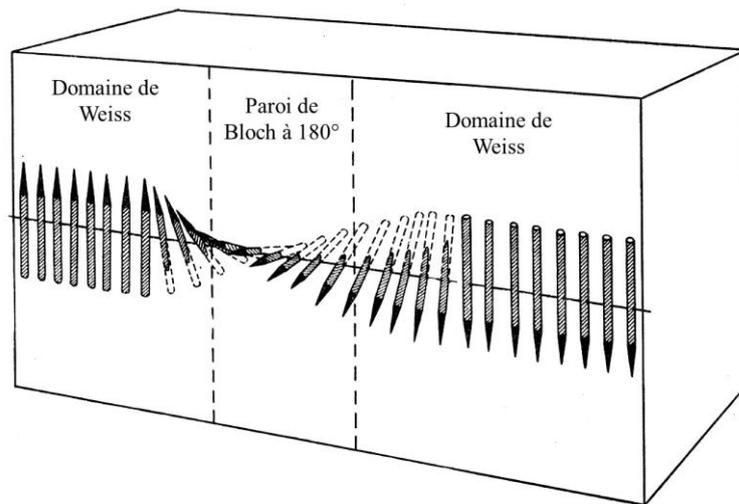


Figure 1.10 : Illustration du renversement progressif des moments magnétiques élémentaires d'une paroi de Bloch à 180° séparant deux domaines de Weiss [[Kittel_1949](#)]

Sollicitée par une excitation magnétique, cette structure microscopique évolue et se réordonne afin de minimiser l'énergie des moments atomiques selon l'énergie potentielle magnétique apportée par le champ magnétique appliqué. La succession d'états d'équilibre des moments élémentaires en fonction de l'intensité de cette excitation implique des mouvements spécifiques des domaines de Weiss et des parois de Bloch ; ces réarrangements structurels expliquent les non-linéarités magnétiques observées à l'échelle macroscopique.

1.3.2. Réarrangements des domaines de Weiss et parois de Bloch sous l'effet d'une excitation magnétique

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est soumis à une excitation magnétique extérieure, les moments magnétiques atomiques s'alignent selon la direction de l'excitation pour minimiser l'énergie potentielle magnétique apportée au milieu. Au début de la sollicitation magnétique, les domaines magnétiques pour lesquels l'aimantation spontanée est orientée dans la même direction que le champ magnétique appliqué sont dans un état énergétique stable. En augmentant l'intensité de l'excitation, les domaines énergétiquement favorables s'agrandissent, la propagation des parois de Bloch s'opérant par des renversements de proche en proche des moments atomiques des domaines magnétiques adjacents, énergétiquement défavorables. Les processus microscopiques d'aimantation d'un milieu ferromagnétique correspondent ainsi à des mouvements caractéristiques de propagation des parois de Bloch et de rotation de l'aimantation spontanée des domaines de Weiss. Cette réorganisation de la structure microscopique est à l'origine des phénomènes magnétiques macroscopiques non-linéaires des milieux ferromagnétiques. Ces mécanismes de réarrangement microscopique sont détaillés dans une configuration magnétique simplifiée pour expliquer les non-linéarités observées sur la courbe de première aimantation d'un matériau ferromagnétique en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique (Figure 1.11).

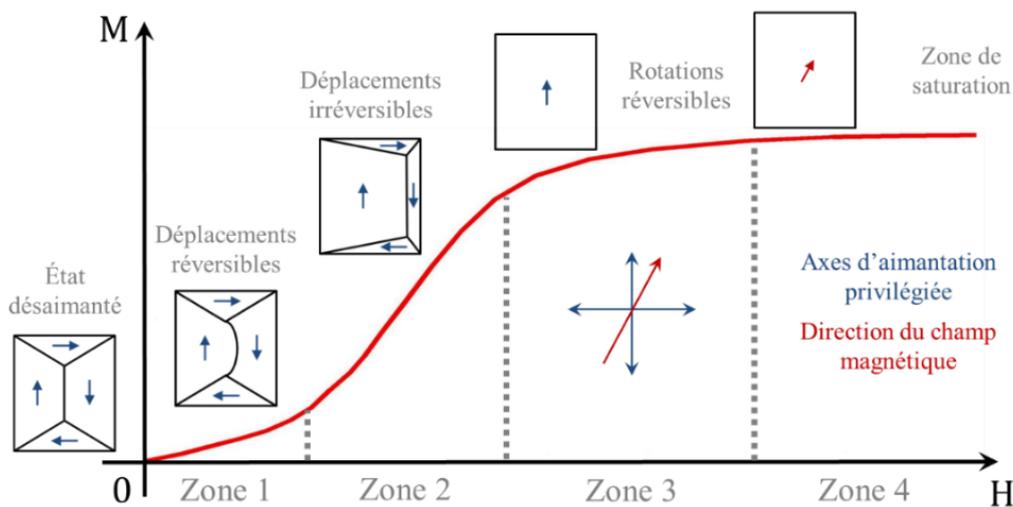


Figure 1.11 : Courbe de première aimantation et réarrangement de la structure microscopique en domaines de Weiss en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique extérieure

Considérons un milieu ferromagnétique à l'état désaimanté constitué de quatre domaines de Weiss (deux domaines principaux et deux domaines de fermeture), dont les aimantations spontanées résultantes sont orientées selon deux directions d'aimantation privilégiées. Ce milieu est soumis à une excitation magnétique extérieure d'intensité progressivement croissante et de direction quelconque contenue dans le plan formé des deux axes de facile aimantation. Cette simple représentation permet de distinguer différents mouvements caractéristiques des domaines de Weiss et parois de Bloch à l'origine des variations non-linéaires de la courbe de première aimantation selon l'intensité de l'excitation appliquée :

- Zone 0 : pour un champ magnétique nul, les moments magnétiques résultants des quatre domaines se compensent parfaitement et l'aimantation macroscopique du milieu est nulle ;

- **Zone 1** : pour de faibles intensités de champ magnétique, les variations d'aimantation avec le champ magnétique sont linéaires, selon la relation $M = \chi_{ini}H$. Ce comportement correspond à des effets de 'gonflements' réversibles des parois de Bloch, similaires aux faibles déformations d'une fine membrane élastique souple. La paroi de Bloch du domaine magnétique énergétiquement favorable se propage en se déformant légèrement sans rupture des points de liaison avec les domaines de fermeture. Ces déplacements des parois de Bloch sont réversibles : si le champ magnétique disparaît, l'aimantation macroscopique du milieu s'annule à nouveau ;
- **Zone 2** : l'intensité du champ magnétique augmentant, les points de liaison entre les différentes parois de Bloch vont finalement se rompre, l'énergie nécessaire à leur maintien étant insuffisante par rapport à l'énergie potentielle magnétique apportée au milieu. Les parois de Bloch des domaines privilégiés se déplacent alors librement (d'abord les parois à 180° puis celles à 90°), freinées uniquement par les impuretés et les défauts cristallins du milieu. Ces mouvements se manifestent par de brusques déplacements irréversibles associés à la partie de la courbe de première aimantation de pente maximale. Progressivement, l'alignement de l'ensemble des moments atomiques selon l'axe de facile aimantation favorisé énergétiquement est obtenu (configuration en mono-domaine) ;
- **Zone 3** : si l'intensité de l'excitation magnétique appliquée continue d'augmenter, l'énergie magnétique apportée au milieu devient suffisante pour rompre l'état d'équilibre de la zone 2 (moments alignés selon un axe de facile aimantation) et forcer les moments atomiques à s'orienter dans la direction de l'excitation extérieure. Ce phénomène de rotation des moments atomiques d'un domaine le long d'un axe cristallographique d'aimantation privilégié dans la direction de l'excitation extérieure est réversible. Cette zone coudée (Zone 3) de la courbe de première aimantation est appelée 'courbe de saturation' ou 'coude de saturation' ;
- **Zone 4** : finalement, tous les moments magnétiques atomiques du milieu sont alignés selon la direction du champ magnétique extérieur et l'aimantation du milieu ne peut plus évoluer, même en augmentant l'intensité de l'excitation : c'est le phénomène de saturation magnétique.

Dans cette configuration magnétique simplifiée (nombre limité de domaines magnétiques), les phénomènes d'aimantation non-linéaires des milieux ferromagnétiques peuvent être expliqués par des mécanismes caractéristiques de déplacements et de rotations des domaines de Weiss et des parois de Bloch intervenant à différentes intensités du champ magnétique appliqué. Naturellement, ces mécanismes sont complexes à décrire dans le cas de milieux ferromagnétiques présentant une grande variété de grains cristallographiques différents, et donc un grand nombre de domaines magnétiques et de directions de facile aimantation. De plus, ces mécanismes caractéristiques s'accompagnent de phénomènes de dissipation énergétique, principalement lors des déplacements irréversibles de parois de Bloch. Ces phénomènes sont à l'origine des cycles d'hystérésis magnétiques.

1.3.3. Composition chimique et déplacements irréversibles des parois de Bloch

L'irréversibilité des déplacements des parois de Bloch lors d'une excitation magnétique et l'ouverture du cycle d'hystérésis sont fortement corrélées à la microstructure du milieu ferromagnétique. En effet, les parois peuvent rencontrer lors de leurs déplacements des sites microscopiques d'ancrage qui bloquent leur progression dans le milieu. Ces sites d'ancrage, ou d'accroche, sont liés à la composition chimique et à la structure cristallographique du milieu ferromagnétique. Ils font par exemple référence à la présence d'impuretés physico-chimiques, à des inclusions amagnétiques, ou à des dislocations

cristallographiques (défauts de symétrie cristalline). Bloquée dans son déplacement, la paroi de Bloch ne peut se décrocher de cet ancrage microstructurel que si une énergie supplémentaire (un champ magnétique plus fort) est apportée.

Ainsi, l'aimantation des matériaux ferromagnétiques ne varie pas continûment avec l'intensité du champ magnétique appliqué, mais par sauts successifs : c'est le bruit de Barkhausen. Ce bruit a été mis en évidence par mesure acoustique par Barkhausen [Barkhausen_1919] en 1919. L'intensité et l'analyse spectrale de ce bruit ferromagnétique donne une indication directe sur la qualité de la microstructure du milieu étudié. Cet effet est largement utilisé dans des applications industrielles de caractérisation non-destructive des matériaux magnétiques, comme la détection des brûlures de rectification après usinage ou la mesure de la dégradation des propriétés mécaniques de matériaux magnétiques soumis à des chargements magnétiques cycliques.

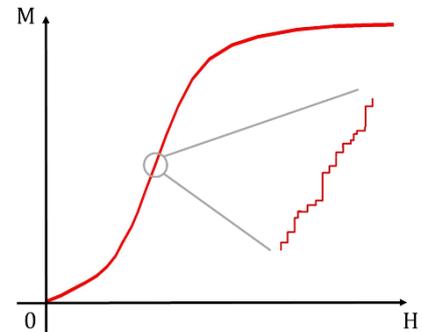


Figure 1.12 : Illustration du bruit ferromagnétique de Barkhausen

L'intensité d'excitation magnétique nécessaire pour que les parois de Bloch franchissent tous les sites microscopiques d'ancrage du milieu correspond finalement à la valeur du champ coercitif H_C du matériau. Ce champ permet le déplacement des parois sur des distances typiques de l'ordre de la largeur des domaines de Weiss, ce qui produit la plus grande variation d'aimantation dans le matériau (susceptibilité maximale) et caractérise l'ouverture du cycle d'hystérésis du milieu. Ainsi, en augmentant le niveau d'impuretés du milieu (par exemple par l'ajout d'éléments amagnétiques dans un alliage), les parois de Bloch sont davantage bloquées dans leur progression lors d'une sollicitation magnétique et requièrent alors une énergie plus importante pour franchir l'ensemble de ces obstacles. Ceci se traduit par une phase de déplacements irréversibles plus étendue (pendant laquelle l'aimantation du milieu se fait plus lentement) et un champ coercitif plus important (plus large ouverture du cycle d'hystérésis). L'influence de la composition chimique d'un milieu ferromagnétique sur la qualité de son aimantation est illustrée sur la Figure 1.13, adaptée de [Bozorth_1964]. Dans cet exemple, la teneur en carbone d'un alliage principalement à base de fer est progressivement réduite à l'aide de différents traitements de recuit, et les courbes d'aimantation des milieux magnétiques obtenus après traitement sont affichées. Naturellement, plus la teneur en carbone est faible, plus l'aimantation du milieu est facilitée (la susceptibilité magnétique du fer étant plus importante que celle du carbone).

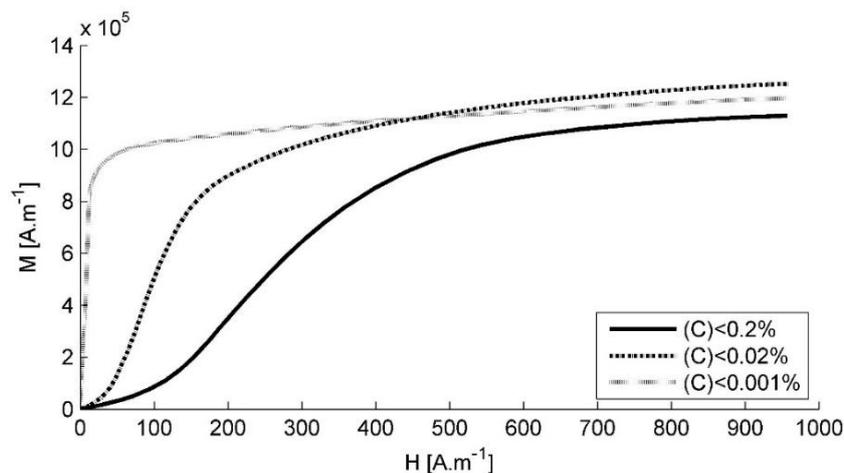


Figure 1.13 : Influence de la teneur en carbone sur la courbe de première aimantation du fer, adaptée de [Bozorth_1964]

1.3.4. Influence de la fréquence d'excitation

La connaissance des mécanismes microscopiques d'aimantation permet d'appréhender les effets de la fréquence d'excitation sur l'aimantation d'un milieu ferromagnétique. En effet, lors du déplacement des parois de Bloch sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, les moments magnétiques atomiques des domaines dans un état énergétique instable opèrent des rotations continues (de 90° ou 180° en fonction du type de parois de Bloch) pour s'aligner dans la direction d'aimantation privilégiée qui minimise leur énergie. Les retournements de proche en proche des moments magnétiques atomiques, d'autant plus brusques que l'excitation extérieure est brève, engendrent des (micro-)courants de Foucault le long de la propagation des parois de Bloch. Ces courants induisent un moment magnétique démagnétisant qui freine le retournement des moments atomiques et ainsi ralentit la progression des parois. On parle alors de phénomènes de freinage (ou traînage) magnétique pour qualifier l'inertie des parois de Bloch.

Ces phénomènes sont d'autant plus importants que la fréquence d'excitation magnétique est élevée. En effet, plus la vitesse de rotation des moments atomiques est grande, plus ces micro-courants ampériens sont puissants et plus le freinage est marqué (loi de Lenz). Ces phénomènes permettent de décrire les variations dynamiques de l'aimantation d'un milieu ferromagnétique en fonction de la fréquence de l'excitation magnétique appliquée. En pratique, le phénomène de freinage magnétique est bien connu [Couderechon_1979]. Il correspond à la diminution des susceptibilités magnétiques et à l'accroissement des pertes par effet d'hystérésis (aire du cycle d'hystérésis) du matériau quand la fréquence croît. Ce phénomène se retrouve également à l'échelle macroscopique lorsque des courants de Foucault sont induits dans le matériau par le rayonnement d'une excitation électrique dynamique extérieure, ce qui est aussi à l'origine d'effets de peau (plus la fréquence d'excitation est grande, plus la profondeur de pénétration des champs électromagnétiques dans le milieu est petite).

1.3.5. Anisotropie magnéto-cristalline

L'anisotropie magnéto-cristalline des milieux ferromagnétiques contribue à l'existence d'axes de facile aimantation au sein des domaines magnétiques. Elle explique l'influence de la direction de l'excitation magnétique extérieure sur la qualité d'aimantation d'un milieu ferromagnétique. Cette influence apparaît lors du processus d'aimantation décrit dans la zone 3 de la courbe de première aimantation, à savoir la rotation réversible dans la direction d'excitation magnétique extérieure des moments atomiques alignés selon un axe de facile aimantation. Si le champ magnétique est appliqué selon un axe d'aimantation privilégié, l'aimantation du milieu peut rapidement atteindre la zone de saturation, tandis que si le champ magnétique n'est pas aligné selon une direction cristallographique privilégiée, l'aimantation du milieu croît plus difficilement jusqu'à saturation.

Cette influence est illustrée sur la [Figure 1.14](#), adaptée de [Bozorth_1964], pour les monocristaux de fer (symétrie cubique centrée) et de nickel (symétrie cubique à faces centrées). On peut ainsi observer que le fer s'aimante plus facilement selon l'axe cristallographique $\langle 100 \rangle$, et plus difficilement selon les axes $\langle 110 \rangle$ et $\langle 111 \rangle$. Dans le cas du nickel, l'aimantation est cette fois-ci privilégiée selon l'axe cristallographique $\langle 111 \rangle$ par rapport aux axes $\langle 100 \rangle$ et $\langle 110 \rangle$. L'anisotropie magnéto-cristalline des monocristaux est très importante en génie des matériaux ferromagnétiques industriels car elle définit la direction d'application de la sollicitation magnétique qui facilite l'aimantation d'un milieu, et donc optimise ses performances.

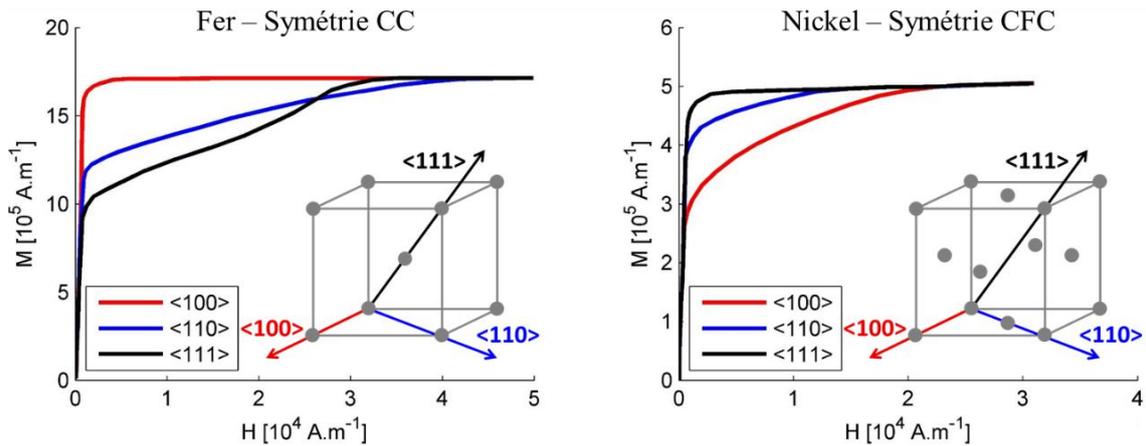


Figure 1.14 : Aimantation de monocristaux de fer (gauche) et de nickel (droite) selon l'orientation de l'excitation magnétique dans le repère cristallographique $\langle 100 \rangle$ (rouge), $\langle 110 \rangle$ (bleu) et $\langle 111 \rangle$ (noir) [Bozorth_1964].

L'anisotropie magnéto-cristalline des milieux ferromagnétiques joue également un rôle important sur la géométrie des parois de Bloch et donc sur leur capacité de réaction en réponse à une excitation magnétique extérieure. En effet, plus l'anisotropie magnéto-cristalline du milieu est forte, plus l'épaisseur des parois est fine et plus leur énergie superficielle est grande [Couderschon_1979]. Ainsi, un matériau à faible anisotropie possède des parois de Bloch larges et souples qui peuvent facilement négocier les différentes imperfections du milieu rencontrées au cours de leur propagation, conduisant à une grande facilité d'aimantation (forte susceptibilité et faible champ coercitif). À l'inverse, un alliage à forte anisotropie magnéto-cristalline s'aimante moins facilement.

La description de la structure et des mécanismes microscopiques spécifiques au comportement magnétique des milieux ferromagnétiques offre un éclairage précieux sur l'origine des variations non-linéaires du champ d'aimantation, et permet de comprendre l'impact de la microstructure d'un milieu sur sa capacité à s'aimanter. La section suivante décrit plus en détails l'influence d'une sollicitation mécanique sur la qualité d'aimantation des milieux ferromagnétiques, en mettant en lumière les phénomènes de couplage magnéto-élastique qui s'opèrent dans ces milieux.

1.4. Description des propriétés magnéto-élastiques macroscopiques des milieux ferromagnétiques

Les milieux ferromagnétiques sont le siège de phénomènes locaux de couplage magnéto-élastique, qui se traduisent à l'échelle macroscopique par une dépendance mutuelle des propriétés magnétiques et mécaniques du matériau. L'analyse de ce couplage fait naturellement intervenir la notion de déformation de magnétostriction et l'influence des contraintes mécaniques sur l'aimantation de ces milieux.

1.4.1. Les phénomènes de couplage magnéto-élastique des milieux

Un milieu ferromagnétique présente les spécificités de se déformer en réponse à une sollicitation magnétique (champ magnétique) et, de façon réciproque, de modifier sa qualité d'aimantation en réponse à une sollicitation mécanique (contraintes mécaniques). La preuve expérimentale de ces effets

de couplage est originalement fournie par Joule [Joule_1847]. Il montre que la longueur d'un barreau de fer change sous l'effet d'un champ magnétique. Il constate également que la variation de volume associée à cette déformation est très faible, ce qui indique qu'un allongement du barreau dans la direction de l'excitation s'accompagne nécessairement d'une contraction dans les deux directions orthogonales. De plus, Joule montre que la déformation engendrée par l'aimantation du barreau, mesurée par la variation relative de longueur $\Delta l/l$ par rapport à l'état désaimanté, peut fortement varier en amplitude et même de signe si ce dernier est mécaniquement contraint. Les résultats originaux des travaux de Joule, adaptés par Lee [Lee_1955], sont présentés sur la Figure 1.15.

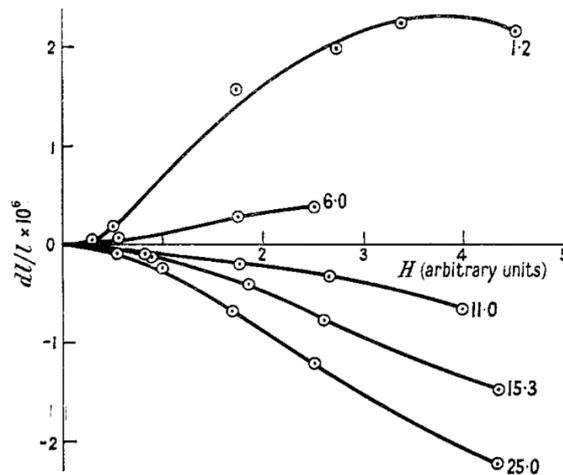


Figure 1.15 : Magnétostriction du fer soumise à différents chargements mécaniques [Lee_1955].

Depuis les travaux de Joule, de nombreux phénomènes de couplage magnéto-élastiques ont été répertoriés dans la littérature. De façon générale, le terme 'magnétostriction' fait référence à l'ensemble des variations des propriétés mécaniques d'un milieu soumis à une excitation magnétique extérieure. La déformation de magnétostriction, ou magnétostriction de Joule, est l'un des phénomènes prédominants [Joule_1847]. Cet effet quantifie la déformation isochore d'un matériau soumis à une sollicitation magnétique extérieure. De façon réciproque, on parle d'effet Villari [Villari_1865] (également appelé effet magnétostrictif inverse ou effet magnéto-mécanique) lorsque qu'un chargement mécanique (application de contraintes élastiques) modifie l'aimantation d'un milieu. Ces deux effets réciproques sont les plus fréquemment rencontrés en applications industrielles. Ils sont utilisés pour la caractérisation par courants de Foucault de l'état de contraintes résiduelles d'un milieu ferromagnétique [Dahia-et-al_2015] ou exploités dans la conception d'actionneurs mécaniques comme les patches magnétostrictifs [Dapino_1999]. Ils peuvent en revanche s'avérer nuisibles dans certaines applications. Par exemple, l'application (volontaire ou non) d'un champ magnétique sur une montre mécanique déforme le ressort spiral (ferromagnétique) de son balancier par couplage magnéto-mécanique, ce qui engendre un décalage temporel et détériore drastiquement la précision de la montre [Khairi-et-al_2016]. La magnétostriction est également source de bruits et de vibrations élastiques dans les machines électriques de haute puissance [Fonteyn_2010], les vibrations induites par magnétostriction pouvant sévèrement nuire à l'intégrité mécanique de la machine. De même, la présence de contraintes résiduelles entraîne une modification de l'aimantation d'une machine électrique tournante, ce qui réduit son couple et donc pénalise ses performances. Parmi les effets magnétostrictifs moins fréquents, on rencontre également l'effet Wiedemann [Lee_1955] (torsion d'un barreau soumis à un champ magnétique), l'effet Guillemin [Lee_1955] (modification de la courbure d'un barreau soumis à champ magnétique), les

effets de volume comme l'effet de forme ou de cristal [Bozorth_1964] (variations du volume d'un matériau soumis à un champ magnétique), et l'effet ΔE [Cullity_1972] (variations du module d'Young d'un matériau en fonction de son état d'aimantation).

L'effet ΔE se manifeste par une perte apparente de linéarité du comportement élastique d'un matériau à l'état désaimanté [Daniel-Hubert_2009], induite par la déformation (spontanée) de magnétostriction issue d'un chargement mécanique (sans excitation magnétique). Cet effet induit ainsi des variations des constantes d'élasticité du milieu ferromagnétique considéré selon son niveau d'aimantation. Ces variations, entre un état désaimanté et un état magnétique saturé, sont généralement faibles. Par exemple, Chen *et al.* [Chen-et-al_2001], Lee [Lee_1955] et Morales *et al.* [Morales-et-al_2010] indiquent que ces variations relatives ne sont que de quelques pourcents pour le nickel et de moins de un pourcent pour le fer et le cobalt à température ambiante. Suivant ces observations, l'effet ΔE ne sera pas pris en compte dans notre étude, qui s'intéresse principalement aux sources de rayonnement ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Cependant, il peut être judicieux de prendre en compte ce phénomène pour la modélisation de la propagation du champ ultrasonore transmis en milieu ferromagnétique, l'aimantation du milieu modifiant ses constantes d'élasticité, et donc directement les vitesses de propagation des ondes ultrasonores qui s'y propagent.

Dans le cadre des applications de CND par EMAT concernées par cette étude, on suppose que la déformation de magnétostriction et l'effet Villari (effet magnéto-mécanique) sont prédominants. Par abus, le terme 'magnétostriction' fera exclusivement référence à la déformation de magnétostriction de Joule dans la suite. Les deux effets de couplage magnéto-élastique sont réciproques ; leur connexion aux différentes variables magnétiques et mécaniques du milieu est schématisée sur la [Figure 1.16](#) :

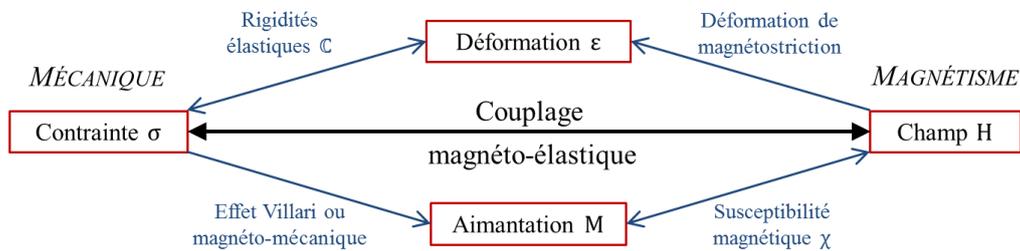


Figure 1.16 : Diagramme illustrant le couplage magnéto-élastique des milieux

1.4.2. Description des déformations macroscopiques de magnétostriction

La déformation de magnétostriction, notée ϵ^{MS} ou λ^{MS} (tenseur d'ordre deux), désigne la variation relative de longueur d'un matériau entre un état aimanté et un état désaimanté. Cette variation des dimensions du matériau est fortement non-linéaire (avec saturation et phénomènes hystérétiques) et dépend de la direction et de l'amplitude du champ magnétique d'excitation appliqué. On distingue généralement la magnétostriction longitudinale λ_{\parallel} ou $\epsilon_{\parallel}^{MS}$ (déformation dans la direction de l'excitation) de la magnétostriction transverse λ_{\perp} ou ϵ_{\perp}^{MS} (déformation dans une direction transverse de l'excitation). La déformation de magnétostriction maintient le volume du matériau constant (hypothèse isochore). Cette hypothèse se traduit naturellement par une trace nulle du tenseur de magnétostriction, et, dans le cas d'isotropie élastique par l'égalité : $\lambda_{\perp} = -\lambda_{\parallel}/2$. Le coefficient de magnétostriction à saturation, noté λ_S , est souvent utilisé pour décrire la magnétostriction des matériaux polycristallins ; il représente la variation relative de longueur d'un matériau entre un état désaimanté et un état magnétique saturé. Le

coefficient de magnétostriction à saturation peut prendre des valeurs positives (le milieu s'allonge dans la direction de l'excitation magnétique) ou négatives (le milieu se contracte dans la direction de l'excitation magnétique), et n'est généralement pas monotone en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique. La notion de modes positifs et négatifs de magnétostriction est illustrée sur la [Figure 1.17](#) qui décrit la déformation d'une sphère (isotrope) lors de son aimantation selon le signe de λ_S .

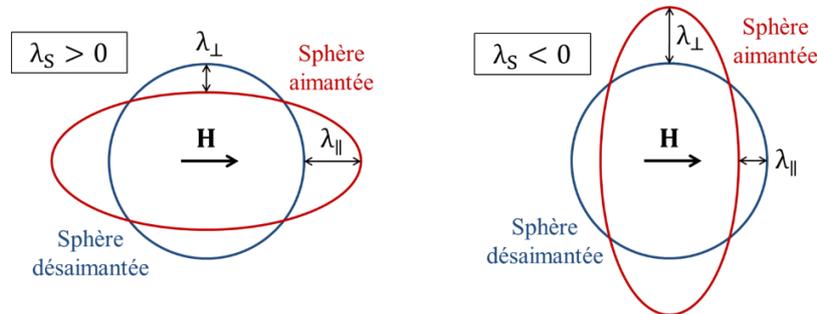


Figure 1.17 : Modes positif et négatif de magnétostriction sur l'aimantation à saturation d'une sphère

Les milieux ferromagnétiques présentent une très grande variété de comportements magnétostrictifs macroscopiques, tant en amplitude qu'en signe. Par exemple, certains matériaux comme la plupart des aciers s'allongent dans la direction d'une excitation magnétique ($\lambda_S > 0$), tandis que d'autres matériaux comme le nickel se contractent dans la direction du champ magnétique ($\lambda_S < 0$). De même, certains matériaux comme le fer présentent des comportements magnétostrictifs mixtes, et s'allongent ou se contractent en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique. La diversité des comportements magnétostrictifs des milieux ferromagnétiques est illustrée sur la [Figure 1.18](#), adaptée de Lee [[Lee_1955](#)] et de Bozorth [[Bozorth_1964](#)], regroupant les courbes macroscopiques de magnétostriction du fer, du cobalt, du nickel, et de quelques-uns de leurs alliages.

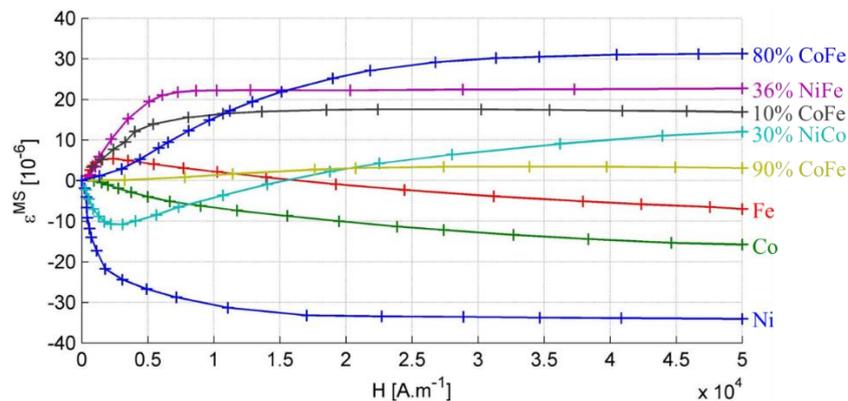


Figure 1.18 : Déformations de magnétostriction en fonction de l'excitation magnétique du fer, du nickel, du cobalt, et de quelques-uns de leurs alliages, adaptées de [[Lee_1955](#)] et [[Bozorth_1964](#)]

La déformation de magnétostriction à saturation d'un alliage ne varie pas forcément linéairement avec l'ajout ou le retrait d'un élément ferromagnétique. L'influence de la composition d'un alliage sur la magnétostriction est visible sur la [Figure 1.18](#) avec des alliages de fer-cobalt contenant 10%, 80% et 90% de cobalt. Les déformations de magnétostriction de la plupart des milieux ferromagnétiques affichent des ordres de grandeur de 10^{-6} à 10^{-5} . Cependant certains matériaux, principalement les alliages à base de terres rares comme le Terfenol-D ($Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$), présentent des magnétostrictions dites 'géantes' [[Engdahl_2000](#)] et exhibent des déformations à saturation très importantes, de l'ordre de 10^{-3} .

Les propriétés magnétostrictives de ces matériaux en font naturellement de très bons candidats pour la conception d'actionneurs mécaniques comme les patches magnétostrictifs [Dapino_1999].

Les déformations de magnétostriction d'un milieu ferromagnétique exhibent également un comportement hystérétique lors d'une sollicitation magnétique cyclique, comme représenté sur la [Figure 1.19](#) dans les cas d'éprouvettes d'acier inoxydable (Z20C13), d'alliage fer-cobalt (AFK502R) et de nickel pur [Rouge_2013]. De façon similaire aux courbes d'aimantation, une courbe de première magnétostriction, une courbe anhystérétique et un cycle d'hystérésis peuvent être définis.

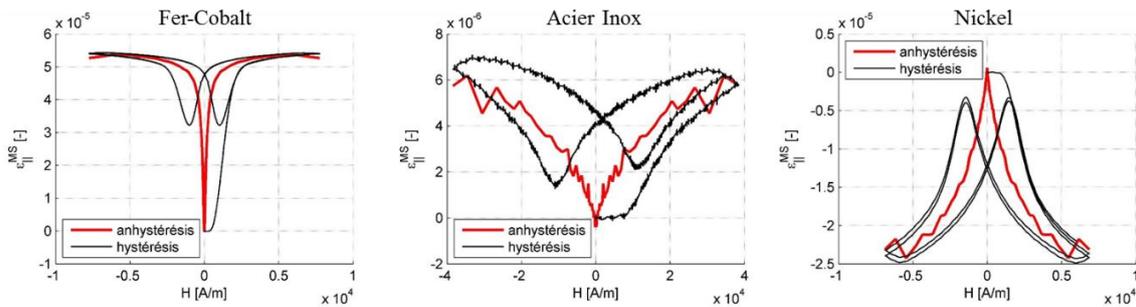


Figure 1.19 : Courbes hystérétiques et anhystérétiques de magnétostriction en fonction de l'excitation magnétique dans des échantillons de fer-cobalt (gauche), d'acier inoxydable (milieu), et de nickel (droite).

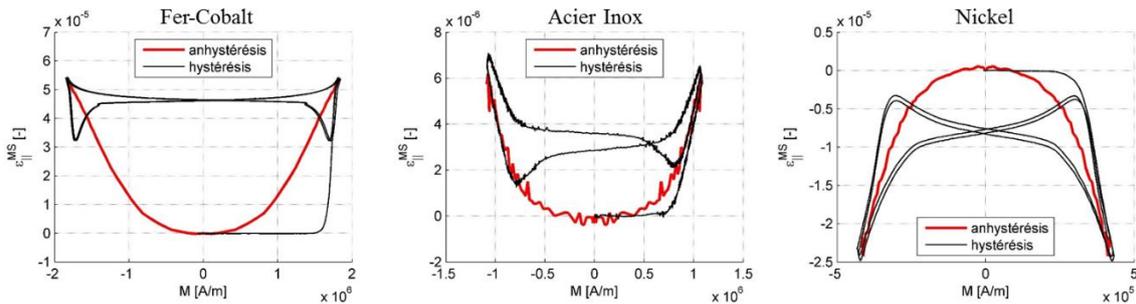


Figure 1.20 : Courbes hystérétiques et anhystérétiques de magnétostriction en fonction du champ d'aimantation dans des échantillons de fer-cobalt (gauche), d'acier inoxydable (milieu), et de nickel (droite)

Ces courbes expérimentales hystérétiques et anhystérétiques illustrent la potentielle difficulté de mesure de ces phénomènes selon le matériau étudié. Par exemple, l'acier inoxydable présente une faible magnétostriction, qu'il est difficile d'extraire du bruit des appareils de mesure (typiquement des jauges de déformation). L'apparition de phénomènes magnétostrictifs hystérétiques témoigne naturellement d'un lien étroit avec les phénomènes microscopiques d'aimantation des milieux ferromagnétiques. Avec les mesures de l'aimantation hystérétique et anhystérétique, il est également possible de représenter les déformations de magnétostriction en fonction du champ d'aimantation ([Figure 1.20](#)). Ces variations sont paraboliques (principalement sur les courbes anhystérétiques). C'est la raison pour laquelle les phénomènes magnétostrictifs sont souvent qualifiés de quadratiques ou d'ordre deux (Chapitre 2).

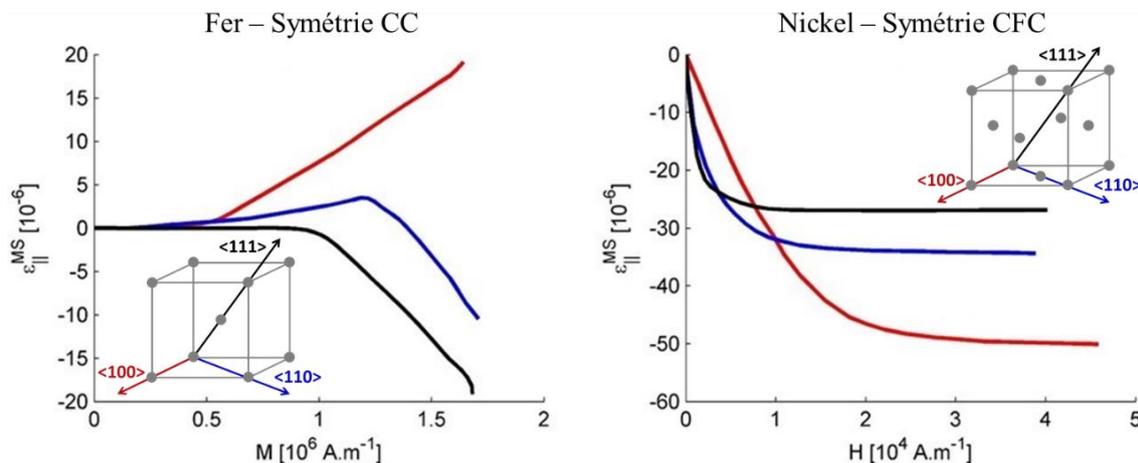
1.4.3. Origine du couplage magnéto-élastique et anisotropie magnéto-cristalline

D'après la discussion du paragraphe 1.2.4, en refroidissant une substance ferromagnétique en dessous de sa température de Curie, le milieu passe d'un état microscopique désordonné à un état microscopique ordonné, en l'absence d'excitation magnétique extérieure. Son arrangement microstructural original en domaines magnétiques engendre une déformation de magnétostriction, qui est qualifiée de

magnétostriction spontanée, qui s'accompagne généralement d'une variation de volume. Lorsqu'un milieu ferromagnétique est ensuite soumis à une sollicitation magnétique, son ordre microscopique se réarrange afin de constamment minimiser l'énergie des moments magnétiques élémentaires qui le composent. Ce réarrangement (déplacements des parois de Bloch et des rotations des domaines de Weiss) s'accompagne d'une déformation isochore (volume constant) de magnétostriction, qu'on qualifie dans ce cas de magnétostriction induite. Dans une application industrielle de CND par EMAT, les milieux ferromagnétiques sont généralement inspectés en dessous de leur température de Curie, et seule la magnétostriction induite est traitée dans cette étude.

L'origine microscopique des phénomènes de magnétostriction repose sur un couplage local entre les moments magnétiques élémentaires et la structure cristalline du milieu. Soumis à une excitation magnétique, les moments magnétiques orbitaux et de spins des électrons ([Figure 1.3](#)) tendent à s'aligner dans la direction d'excitation. Cependant, le moment orbital est fortement couplé à la structure cristallographique du milieu. Ainsi, l'alignement du moment magnétique orbital est fortement contraint, et engendre la déformation de l'ensemble du cristal par magnétostriction. On peut ainsi dire que la déformation de magnétostriction est d'origine inélastique ('eigenstrain' en anglais) car elle ne découle pas de forces mécaniques extérieures mais d'interactions microscopiques internes entre spins, moments orbitaux, et structure cristalline. Ce couplage fondamental spin-orbite-cristal est également à l'origine de l'anisotropie magnéto-cristalline (présence d'axes de facile aimantation) des milieux ferromagnétiques. Les deux phénomènes (magnétostriction et anisotropie magnéto-cristalline) sont en effet intimement liés [[Clark_1980](#)], et c'est la raison pour laquelle les déformations de magnétostriction sont généralement associées aux déplacements des parois de Bloch à 90° (autres que 180° plus précisément) et aux rotations de l'aimantation spontanée d'un domaine selon la direction imposée par l'excitation extérieure, mécanismes qui forcent les moments élémentaires à sortir des axes d'aimantation privilégiés régis par la structure cristalline du milieu.

Naturellement, l'origine microscopique des déformations de magnétostriction induit une forte dépendance de ces phénomènes avec la direction d'application de l'excitation magnétique. La [Figure 1.21](#) illustre les variations des courbes de magnétostriction de monocristaux de fer (en fonction de M tirée de [[Daniel-et-al_2008](#)]) et de nickel (en fonction de H tirée de [[Bozorth_1964](#)]) selon l'orientation de la sollicitation magnétique dans le repère d'axes cristallographiques. Cette figure est à mettre en relation directe avec les courbes d'aimantation de monocristaux de fer et de nickel de la [Figure 1.14](#).



[Figure 1.21](#) : Magnétostriction du fer (gauche, en fonction de M) et du nickel (droite, en fonction de H) selon l'orientation de l'excitation magnétique dans le repère d'axes cristallographiques. Courbes tirées de [[Daniel-et-al_2008](#)] et [[Bozorth_1964](#)].

1.4.4. Influence des contraintes mécaniques sur les courbes macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction

L'influence des contraintes mécaniques sur l'aimantation d'un milieu ferromagnétique est reliée à la magnétostriction et l'anisotropie magnéto-cristalline du milieu. En effet, la description de l'effet magnéto-mécanique passe nécessairement par celle des phénomènes de magnétostriction. La réversibilité de ces mécanismes est discutée par Cullity [Cullity_1972] en invoquant le principe de Le Châtelier. Pour de faibles variations réversibles magnétique et mécanique, la dépendance réciproque de ces effets est illustrée par la relation thermodynamique [Jiles_1995] :

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right)_H = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_H = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H}\right)_\sigma. \quad (1.16)$$

Cette relation, valable uniquement pour des comportements réversibles, démontre qu'une variation de l'aimantation d'un milieu sous l'effet de contraintes mécaniques (effet Villari) est nécessairement accompagnée d'une variation de la déformation de ce milieu sous l'effet d'une excitation magnétique (magnétostriction). Cette notion de réciprocity est notamment utilisée par Brown [Brown_1949] qui prédit les effets d'une contrainte élastique sur l'aimantation du milieu de façon équivalente à l'application d'un champ magnétique supplémentaire. Brown explique ces effets comme une pression exercée sur les parois des domaines magnétiques qui les force à se mettre en mouvement, ce qui contribue à favoriser ou non l'aimantation du matériau. Cependant cette théorie simplifiée prédit les mêmes comportements magnéto-mécaniques en traction et en compression, ce qui n'est pas vérifié par l'expérience [Craik-Wood_1971]. Birss [Birss_1971] montre que l'effet d'un chargement mécanique sur l'aimantation du milieu est en réalité associé à des changements irréversibles de la structure en domaines magnétiques (modification de l'état d'équilibre des moments magnétiques élémentaires), la sollicitation mécanique forçant l'orientation préférentielle des moments atomiques selon certains axes de facile aimantation. Dans ce sens, l'effet des contraintes mécaniques sur l'aimantation d'un milieu ferromagnétique est directement corrélé aux phénomènes de magnétostriction de ces milieux, également sensibles à un état de contraintes mécaniques.

Les directions d'aimantation privilégiées induite par l'application d'une contrainte mécanique sont déterminées par les signes respectifs de la contrainte et de la magnétostriction du milieu. On parle alors d'anisotropie magnétique induite par un chargement mécanique. Les effets d'une contrainte mécanique de compression ($\sigma < 0$) ou de traction ($\sigma > 0$) sur les directions d'aimantation privilégiées des domaines magnétiques sont schématisés en fonction du signe du coefficient de magnétostriction à saturation du matériau (Figure 1.22, tirée de [Galopin_2007]).

Ainsi, en fonction de la direction de la contrainte et de celle de l'excitation magnétique, les axes cristallographiques de facile aimantation du milieu se réorganisent par l'application d'une contrainte mécanique, ce qui perturbe à la fois le champ aimantation (effet Villari) et la déformation de magnétostriction du milieu lorsqu'il est soumis à une excitation magnétique. Des exemples extraits des travaux de Galopin *et al.* [Galopin_et_al_2007] illustrant les variations (non-monotones) des courbes hystériques d'induction et de déformation de magnétostriction d'un échantillon de Terfenol-D en fonction d'un état de contraintes uni-axiales sont proposées sur la Figure 1.23.

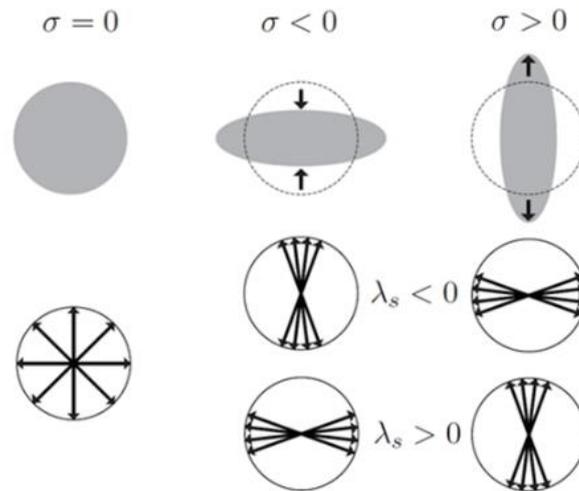


Figure 1.22 : Réorganisation des axes de facile aimantation en fonction d'un état de contrainte et du mode de magnétostriction [Galopin_2007].

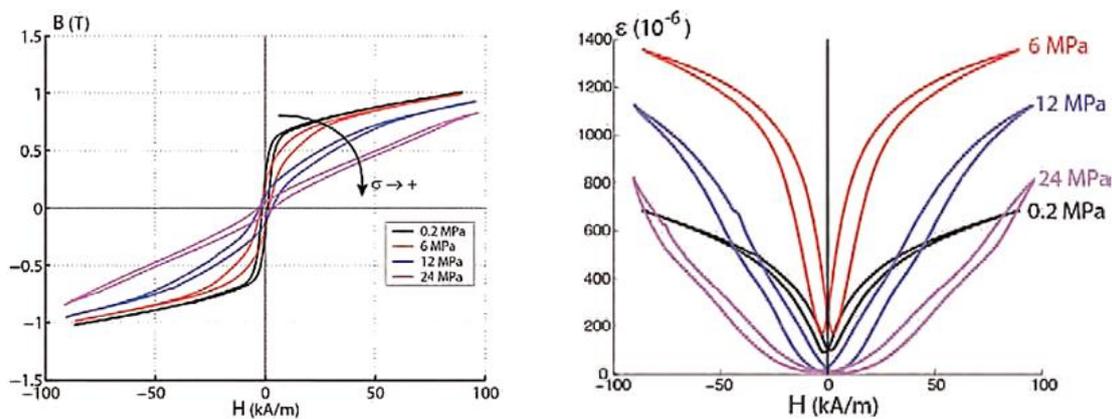


Figure 1.23 : Influence d'un état de contraintes mécaniques uniaxiales sur les cycles d'hystérésis d'aimantation (gauche) et de magnétostriction (droite) d'un échantillon de Terfenol-D, figures tirées de [Galopin_et_al_2007].

Ces courbes montrent la forte dépendance des comportements magnétique et magnétostrictif d'un milieu ferromagnétique avec un état de contraintes mécaniques. Les effets des contraintes mécaniques sur les propriétés magnéto-élastiques sont fortement variables, parfois non-monotones, en fonction du milieu ferromagnétique considéré. Dans l'exemple du Terfenol-D de la Figure 1.23, l'état de contraintes mécaniques du milieu est supposé uni-axial. Naturellement, ce cas est idéal et les contraintes mécaniques des milieux ferromagnétiques en environnement industriel sont généralement multi-axiales, ce qui engendre des comportements magnéto-mécaniques d'autant plus complexes à analyser et à prédire.

Conclusions du chapitre

La synthèse bibliographique proposée dans ce chapitre sur les propriétés magnétiques et magnéto-élastiques des milieux ferromagnétiques a été établie à l'usage des concepteurs de transducteurs ultrasonores. Les lois macroscopiques d'aimantation et de déformation de magnétostriction de ces milieux présentent des variations non-linéaires en fonction de l'intensité et de l'orientation de l'excitation magnétique appliquée, et sont affectées par une très large gamme de facteurs physiques. Ces

comportements sont caractéristiques de la structure microscopique en domaines magnétiques de Weiss et des phénomènes de couplage magnéto-élastique multi-échelles qui en résultent. La description des mécanismes multi-échelles mis en jeu lors d'une excitation magnéto-mécanique montre également la forte sensibilité des courbes d'aimantation et de magnétostriction à l'état de contraintes mécaniques (résiduelles ou appliquées, éventuellement multi-axiales) du matériau inspecté.

Les lois macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction doivent être prises en compte dans le modèle de transduction ultrasonore, pour représenter le plus fidèlement possible la réponse magnéto-élastique d'un milieu ferromagnétique, éventuellement contraint mécaniquement, lors d'une application de CND par EMAT. Les milieux magnétiques considérés dans notre étude sont supposés ferromagnétiques doux ; à notre connaissance, il n'y a pas d'enjeu industriel majeur à considérer l'inspection ultrasonore par EMAT de milieux ferromagnétiques durs, qui présenterait quelques inconvénients pratiques. Cette hypothèse nous permet de focaliser l'étude sur la modélisation théorique des lois anhystériques d'aimantation et de magnétostriction et sur l'influence des contraintes mécaniques sur ces propriétés. Enfin, le modèle de comportement magnéto-élastique couplé des milieux ferromagnétiques doit être adapté à une implémentation dans le logiciel CIVA de simulation des méthodes de CND. Dans cette optique, l'approche théorique développée doit permettre de traiter le plus grand nombre de configurations possible, en un temps de calcul réduit et en permettant la description du milieu ferromagnétique inspecté à partir du moins de paramètres d'entrée possible (données matériau pas toujours maîtrisées lors d'une application industrielle de CND par EMAT).

CHAPITRE 2

MODELISATION DES LOIS ANHYSTERETIQUES D'AIMANTATION ET DE MAGNETOSTRICTION DES MILIEUX FERROMAGNETIQUES

Pour simuler les mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieux ferromagnétiques doux, les lois anhystériques d'aimantation et de déformations de magnétostriction macroscopiques décrites dans le chapitre précédent doivent être modélisées ; c'est l'objet de ce chapitre. Dans l'optique d'une implémentation dans le logiciel industriel CIVA, une attention particulière est portée sur la capacité du modèle de comportement magnéto-élastique couplé mis en place à prédire les relations constitutives magnétiques et magnétostrictives du milieu inspecté dans une large gamme de sollicitations magnéto-mécaniques, en un temps de calcul raisonnable et à partir d'un nombre réduit de paramètres d'entrée, si possible facilement accessibles.

De nombreux modèles théoriques sont développés dans la littérature pour simuler la grande variété de comportements magnétiques (anhystériques et hystériques) des milieux ferromagnétiques, chacun étant basé sur des concepts et des hypothèses différents. De façon non-exhaustive, on retrouve des approches basées uniquement sur des procédures d'interpolation (loi de Rayleigh en champ faible, modèle de Fröhlich-Kenelly en champ fort, modèle de Melgii), des approches phénoménologiques basées sur des considérations physiques simplifiées (modèle de Stoner-Wohlfarth, modèle de Jiles-Atherton, modèle chimique, modèle VINCH), et des approches purement mathématiques comme le modèle de Preisach basé sur une distribution d'opérateurs élémentaires (les hystérons). En revanche, relativement peu de ces modèles de comportement magnétique sont étendus au traitement des propriétés magnéto-élastiques couplées du milieu étudié. Dans un premier temps, les concepts énergétiques de la théorie micromagnétique des interactions magnéto-élastiques microscopiques sont introduits dans la section 2.1. Cette approche fournit des prédictions de comportement d'une grande précision, mais elle implique des temps de calculs prohibitifs à l'échelle macroscopique et nécessite une connaissance précise de la microstructure du milieu inspecté, donnée inconnue dans une application de CND par EMAT. Pour répondre aux problématiques de cette étude, une approche phénoménologique et un modèle multi-échelle de la littérature sont décrits en détail, respectivement dans les sections 2.2 et 2.3. Leur principe de modélisation, leur champ d'application et leurs résultats de simulation de comportements anhystériques magnétique et magnétostrictif de milieux ferromagnétiques sont analysés et comparés dans le but de définir l'approche théorique la plus pertinente en vue d'une implémentation dans le logiciel industriel CIVA.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 2	
Modélisation des lois anhystériques de comportements magnétique et magnétostrictif des milieux ferromagnétiques.....	49
2.1. Modèles micromagnétiques et interactions magnéto-élastiques	51
2.1.1. Énergie d'échange W_{ex}	52
2.1.2. Énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an}	52
2.1.3. Énergie de Zeeman W_z	53
2.1.4. Énergie magnétostatique W_{ma}	53
2.1.5. Énergie élastique W_{σ}	54
2.1.6. Champ effectif H_{eff} traduisant l'équilibre quasi-statique.....	55
2.2. Approche phénoménologique de Sablik–Jiles–Atherton de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérique	56
2.2.1. Introduction historique aux approches phénoménologiques de modélisation du comportement magnétique des milieux.....	57
2.2.1.1. Le paramagnétisme de Langevin.....	57
2.2.1.2. La théorie du champ moléculaire de Weiss.....	58
2.2.2. Principe du modèle SJA du comportement magnéto-élastique anhystérique.....	60
2.2.3. Paramètres du modèle JA à contrainte mécanique nulle	62
2.2.4. Définition de la loi anhystérique de magnétostriction $\lambda^{ms}(H, \sigma)$	62
2.2.5. Simulation de courbes magnéto-élastiques anhystériques avec le modèle SJA	63
2.2.6. Limites de l'approche phénoménologique du modèle SJA	65
2.3. Approches multi-échelles de Daniel <i>et al.</i> de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérique	66
2.3.1. Principe du MME complet du comportement magnéto-élastique réversible	67
2.3.2. MME simplifié du comportement magnéto-élastique réversible	68
2.3.3. Utilisation du MME simplifié à partir de mesures expérimentales	70
2.3.4. Prise en compte de l'effet ΔE dans le MME simplifié	71
2.3.5. Comparaisons entre le MME simplifié de Daniel et le modèle SJA	72
2.3.5.1. Relations entre les paramètres d'entrée des deux modèles de comportement.....	72
2.3.5.2. Comparaisons des modèles pour les données de l'acier inoxydable (AISI 410)...	72
2.3.5.3. Comparaisons des modèles pour les données du nickel (recuit)	74
2.3.6. Prédiction de l'effet des contraintes mécaniques multi-axiales sur les propriétés magnéto-élastiques	76
Conclusion du chapitre	78

2.1. Modèles micromagnétiques et interactions magnéto-élastiques

La théorie du micromagnétisme et des interactions magnéto-élastiques a été largement discutée et étudiée par Brown [Brown_1966] dans les années 1960. La théorie conventionnelle micromagnétique des interactions magnéto-élastiques est construite à partir de l'écriture de l'énergie libre totale d'un milieu ferromagnétique à l'échelle (microscopique) des moments magnétiques atomiques sous l'influence de sollicitations magnétiques et mécaniques extérieures. Cette énergie libre se décompose généralement en un terme traduisant les interactions magnétiques du milieu (il est alors considéré rigide du point de vue élastique), en un terme traduisant le comportement élastique du milieu (il est alors considéré amagnétique du point de vue magnétique), et d'un terme supplémentaire traduisant les phénomènes de couplage magnéto-élastique caractéristiques des milieux ferromagnétiques. Ce dernier terme de couplage comprend les interactions entre la déformation de magnétostriction et l'état de contraintes mécaniques du milieu. Une fois que l'énergie libre totale de la distribution de moments atomiques du milieu est définie, des procédures de minimisation (exactes ou approchées), mettant généralement à profit des hypothèses d'élasticité linéaire, permettent ensuite de dériver sa structure en domaines magnétiques et ses propriétés d'aimantation et de magnétostriction aux échelles du monocristal (mésoscopique) et du milieu polycristallin (macroscopique) étudié (Chapitre 1). En plus des intensités d'aimantation et de magnétostriction macroscopiques du milieu, les approches micromagnétiques fournissent également des informations sur les aspects vectoriels de ces phénomènes, décrivant les directions privilégiées d'aimantation et de déformation d'un milieu ferromagnétique. Brown reporte dans [Brown_1966] que cette approche magnéto-élastique conventionnelle échoue cependant à reproduire certains phénomènes expérimentaux, comme l'effet de forme des milieux ferromagnétiques (dont l'origine est associée au terme de traction magnétique surfacique discuté dans le Chapitre 3), et que l'hypothèse d'élasticité linéaire peut négliger certains termes dans le développement de l'énergie libre. Ces hypothèses peuvent s'avérer nécessaires, tant elles facilitent la résolution numérique de ce problème 3D de minimisation comprenant de très nombreux degrés de liberté et des échelles d'hétérogénéités de structure magnéto-élastique très variées. Cependant, cette approche conventionnelle est construite à partir des interactions magnéto-élastiques impliquées à l'échelle de l'atome (Chapitre 1) et fournit de bonnes prédictions de comportements magnéto-élastiques macroscopiques. Elle est décrite dans cette section. Inspirés des travaux de Toupin [Toupin_1956] sur les milieux diélectriques, la théorie formelle complète de Brown introduit les concepts de forces et couple globaux d'origine magnéto-élastique (volumiques et surfaciques) ; elle sera abordée dans le Chapitre 3. À ce stade, un lecteur intéressé par la théorie formelle d'interaction magnéto-élastique de Brown, prenant en compte des termes de couplage d'ordres élevés est dirigé vers les articles [Tiersten_1964, Tiersten_1965, Brown_1965, Brown_1966].

On considère un milieu ferromagnétique monocristallin Ω soumis à des sollicitations magnétiques (champ magnétique \mathbf{H}_0) et mécaniques (contraintes mécaniques $\boldsymbol{\sigma}_0$) extérieures. En dessous de la température de Curie, on suppose que l'aimantation \mathbf{M} du milieu est de norme constante, égale à l'aimantation à saturation M_S , mais de vecteur unitaire $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ variable, de sorte que pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$: $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = M_S \mathbf{m}(\mathbf{x})$. L'enjeu principal des modèles micromagnétiques d'interactions magnéto-élastiques est de minimiser l'énergie libre (de Helmholtz) totale du milieu par rapport aux directions d'aimantation \mathbf{m} , afin de déterminer la configuration en domaines magnétiques favorisée énergétiquement en réponse aux sollicitations extérieures et donc de déterminer le comportement magnéto-élastique macroscopique du milieu.

L'énergie libre d'un monocristal ferromagnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W(\mathbf{m}) = \int_{\Omega} \{W_{\text{ex}}(\mathbf{m}) + W_{\text{an}}(\mathbf{m}) + W_z(\mathbf{m}) + W_{\text{ma}}(\mathbf{m}) + W_{\sigma}(\mathbf{m})\} d\Omega \quad (2.1)$$

Les densités d'énergie W_{ex} , W_{an} , W_{ma} , W_z , et W_{σ} sont les termes traduisant les interactions élémentaires d'origine magnéto-élastiques exercées sur la distribution de moments magnétiques atomiques \mathbf{m} d'un milieu ferromagnétique, et peuvent s'interpréter de la manière suivante :

2.1.1. Énergie d'échange W_{ex}

L'énergie d'échange W_{ex} représente les interactions élémentaires (de type Heisenberg) de couplage entre les moments atomiques voisins (interaction spin-spin) ; cette énergie tend à uniformiser l'aimantation du milieu en pénalisant les fortes variations de \mathbf{m} . Elle peut s'écrire sous la forme générale suivante [Brown_1962, Landau-Lifshitz_1969, Shu-et-al_2004] :

$$W_{\text{ex}}(\mathbf{m}) = \nabla \mathbf{m} : \underset{\substack{\text{iso} \\ \text{iso}}}{\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{m}} \equiv A (\nabla \mathbf{m} : \nabla \mathbf{m}) \quad (2.2)$$

Dans cette relation, \mathbf{A} représente le tenseur d'ordre deux des interactions d'échanges du matériau. Ce tenseur est défini à partir d'hypothèses sur le comportement des spins du milieu [d'Aquino_2004, Herpin_1971], comme leur tendance à s'aligner parallèlement (ordre ferromagnétique) ou antiparallèlement (ordre antiferromagnétique) entre eux et doit être déterminé selon la géométrie cristalline étudiée. Sous l'approximation d'interaction d'échange isotrope, $\mathbf{A} = A\mathbf{I}$ et les valeurs typiques de la constante d'échange A sont de l'ordre de $10^{-11} \text{J} \cdot \text{m}^{-1}$. Par définition, l'énergie d'échange W_{ex} est minimale si les variations spatiales de \mathbf{m} sont faibles, ce qui participe à la formation des domaines magnétiques de Weiss d'aimantation spontanée uniforme, et aux variations continues des moments magnétiques élémentaires à l'intérieur des parois de Bloch (un saut discontinu de moments à l'interface entre deux domaines est pénalisé par l'énergie d'échange).

2.1.2. Énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an}

L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an} témoigne de l'alignement préférentiel des moments magnétiques selon des directions particulières du monocristal : ce sont les axes d'aimantation privilégiés. Cette énergie pénalise en effet la déviation d'un moment magnétique par rapport aux axes de facile aimantation. Ces axes étant déterminés par la structure cristallographique du milieu, l'expression de l'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline dépend de la symétrie cristalline étudiée et des composantes du vecteur directeur \mathbf{m} . L'énergie W_{an} peut s'écrire selon la symétrie uni-axiale (axe directeur \mathbf{e}_{an}) ou cubique d'un monocristal par les relations suivantes [Shu-et-al_2004] :

$$W_{\text{an}}(\mathbf{m}) = \begin{cases} K_0^u + K_1^u [1 - (\mathbf{e}_{\text{an}} \cdot \mathbf{m})^2] & \{\text{uniaxiale}\}, \\ K_0^c + K_1^c (m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_1^2 m_3^2) + K_2^c (m_1^2 m_2^2 m_3^2) & \{\text{cubique}\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

avec K_0^u, K_0^c des constantes arbitraires, et K_1^u, K_1^c, K_2^c [$\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$] les constantes d'anisotropie magnéto-cristalline du milieu, selon sa structure cristallographique. Par exemple, l'anisotropie du milieu, relative à la distribution d'axes de facile aimantation, diffère selon le signe de la constante K_1 (Figure 2.24). Dans le cas élémentaire de la symétrie uni-axiale, le milieu présente un unique axe d'aimantation

privilegié (l'axe de symétrie du monocristal) si $K_1^u > 0$ et on parle alors d'anisotropie uniaxiale, tandis qu'il présente une infinité d'axes d'aimantation privilégiés dans le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie du monocristal si $K_1^u < 0$ et on parle d'anisotropie plane. Le cas du monocristal cubique est plus complexe, avec l'existence d'axes de facile, moyenne et difficile aimantation selon les signes des constantes K_1^c, K_2^c . Par définition, l'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an} du monocristal ferromagnétique est minimale si son aimantation est alignée selon un axe de facile aimantation.

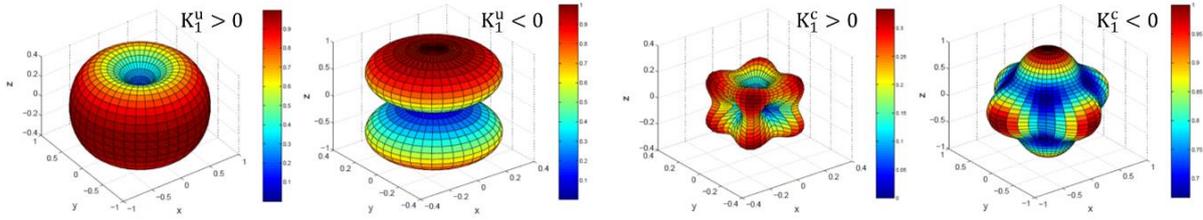


Figure 2.24 : Énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_{an} d'un monocristal ferromagnétique à symétrie uni-axiale (gauche) et cubique (droite). Figures tirées de [d'Aquino_2004].

2.1.3. Énergie de Zeeman W_z

L'énergie de Zeeman W_z représente l'énergie potentielle magnétique apportée à la distribution de moments magnétiques élémentaires par une excitation magnétique extérieure \mathbf{H}_0 (indépendante de \mathbf{m}). Son expression est donnée par la relation [d'Aquino_2004] :

$$W_z(\mathbf{m}) = -\mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M} = -\mu_0 M_S \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{m}. \quad (2.4)$$

Par définition, l'énergie de Zeeman W_z est minimale si l'aimantation du milieu est alignée dans la direction de l'excitation magnétique extérieure, favorisant ainsi le comportement coopératif du milieu sous l'effet d'une sollicitation magnétique.

2.1.4. Énergie magnétostatique W_{ma}

Les interactions magnétostatiques représentent la faculté des moments magnétiques élémentaires à interagir sur de longues distances dans le milieu. Ces interactions sont reliées au champ démagnétisant \mathbf{H}_{dm} du monocristal ferromagnétique Ω , qui satisfait les équations de Maxwell suivantes (Chapitre 1) :

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_{dm} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \text{ et } \nabla \times \mathbf{H}_{dm} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

avec les conditions limites magnétiques suivantes à l'interface $\partial\Omega$:

$$[\mathbf{H}_{dm}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \text{ et } [\mathbf{H}_{dm}]_{\partial\Omega} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Dans ces relations, \mathbf{n} désigne le vecteur normal sortant à l'interface $\partial\Omega$ du milieu ferromagnétique, et $[\mathbf{H}_{dm}]_{\partial\Omega}$ représente le saut du champ démagnétisant au passage de l'interface $\partial\Omega$. L'énergie magnétostatique W_{ma} , aussi appelée énergie démagnétisante, correspond à la contribution des interactions magnétostatiques à l'énergie libre totale du milieu ferromagnétique. Elle représente finalement l'énergie magnétique interne (ou self-energy) du milieu, due à l'interaction du champ démagnétisant \mathbf{H}_{dm} (dépendant par définition de \mathbf{M}) généré par le monocristal ferromagnétique en présence de son aimantation \mathbf{M} . L'énergie libre magnétostatique peut s'écrire [d'Aquino_2004] :

$$W_{\text{ma}}(\mathbf{m}) = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{dm}}(\mathbf{m}) = -\frac{\mu_0 M_S}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{\text{dm}}(\mathbf{m}). \quad (2.7)$$

Cette énergie est minimisée par la réduction de la longueur des boucles de lignes de champ magnétique en dehors du domaine, ce qui tend à encourager l'aimantation à s'aligner parallèlement aux surfaces de l'échantillon, de telle sorte que les lignes de champ ne sortent pas de l'échantillon. La minimisation de cette énergie est la raison principale de l'existence d'une structure ferromagnétique en plusieurs domaines de Weiss (structure multi-domaines).

2.1.5. Énergie élastique W_σ

L'énergie élastique W_σ est associée à la déformation élastique d'un milieu ferromagnétique. En élasticité linéaire, les tenseurs des contraintes mécaniques $\boldsymbol{\sigma}$, contenant la contribution du chargement mécanique extérieur $\boldsymbol{\sigma}_0$, et des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ élastiques du milieu sont reliés par la loi de Hooke qui fait intervenir le tenseur des rigidités élastiques \mathbb{C} , supposé uniforme à l'échelle du monocristal. En milieux ferromagnétiques, les déformations de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ conduisent à ce que la définition de la relation constitutive du comportement élastique soit modifiée (incompatibilité). Dans ce cadre, l'énergie élastique d'un milieu ferromagnétique peut s'écrire [Shu-et-al_2004] :

$$W_\sigma(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{m})] : \mathbb{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{m})]. \quad (2.8)$$

L'énergie élastique intègre donc également la contribution des interactions de couplage magnéto-élastique (magnétostriction), et un terme d'énergie magnéto-élastique (d'origine purement magnétique) peut être défini (ce terme est traité dans le Chapitre 3). On parle également d'énergie d'anisotropie magnétostrictive dans la littérature, car la description de $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ tient compte des directions préférentielles de déformation spontanée de magnétostriction selon la structure cristallographique du monocristal (section 1.4 du Chapitre 1). Dans un monocristal de symétrie cubique, le tenseur des déformations (isochores) de magnétostriction du milieu est défini à partir de deux constantes de magnétostriction indépendantes : λ_{100} et λ_{111} qui représentent les coefficients de magnétostriction à saturation le long des axes $\langle 100 \rangle$ et $\langle 111 \rangle$. Ce tenseur s'écrit classiquement comme une fonction paire du moment magnétique \mathbf{m} (forme quadratique reliée aux observations expérimentales du Chapitre 1), qui prend la forme suivante dans la base cristallographique [Daniel-et-al_2008] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{m}) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{100} \left[m_1^2 - \frac{1}{3} \right] & \lambda_{111} m_1 m_2 & \lambda_{111} m_1 m_3 \\ \lambda_{111} m_1 m_2 & \lambda_{100} \left[m_2^2 - \frac{1}{3} \right] & \lambda_{111} m_2 m_3 \\ \lambda_{111} m_1 m_3 & \lambda_{111} m_2 m_3 & \lambda_{100} \left[m_3^2 - \frac{1}{3} \right] \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Par exemple, les coefficients de magnétostriction d'un monocristal de fer pur (symétrie cubique centrée) sont : $\lambda_{100} = 21 \cdot 10^{-6}$ et $\lambda_{111} = -21 \cdot 10^{-6}$. Lorsque la symétrie cristalline du milieu se complexifie, le nombre de constantes indépendantes à prendre en compte dans le tenseur des déformations de magnétostriction peut augmenter significativement [Mason_1954]. Par exemple, quatre constantes indépendantes sont nécessaires pour définir la magnétostriction à saturation dans une maille cristalline à symétrie hexagonale (cas du cobalt).

2.1.6. Champ effectif \mathbf{H}_{eff} traduisant l'équilibre quasi-statique

L'approche micromagnétique conventionnelle revient finalement à déterminer les directions d'aimantation \mathbf{m} qui minimisent la fonctionnelle $W(\mathbf{m})$ (2.1) d'énergie libre totale du milieu, sous contrainte des équations d'équilibre élastique et magnétique (Maxwell) du milieu ferromagnétique et d'une norme unitaire constante. Cette minimisation détermine la configuration d'équilibre en domaines magnétiques du milieu, et par suite ses propriétés magnéto-élastiques macroscopiques sous sollicitations magnétique et/ou mécanique. Les méthodes variationnelles [Brown_1962] sont souvent employées pour résoudre ce problème de minimisation en considérant une faible variation $\delta\mathbf{m}$ de la direction \mathbf{m} d'aimantation du milieu vérifiant la contrainte $|\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}| = 1$ (de sorte que la norme de l'aimantation restant constante égale à M_S). Cette méthode, reprise par de nombreux auteurs, dérive les équations de Brown magnéto-élastiques qui traduisent l'état d'équilibre quasi-statique d'un milieu ferromagnétique :

$$\begin{cases} \mu_0 M_S \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans la première équation de Brown, le champ effectif \mathbf{H}_{eff} est défini par la dérivée variationnelle de l'énergie libre totale du milieu [d'Aquino_2004] et se décompose sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{m}) = -\frac{1}{\mu_0 M_S} \frac{\delta W(\mathbf{m})}{\delta \mathbf{m}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{dm}}(\mathbf{m}) + \mathbf{H}_{\text{ex}}(\mathbf{m}) + \mathbf{H}_{\text{an}}(\mathbf{m}) + \mathbf{H}_{\sigma}(\mathbf{m}). \quad (2.11)$$

Les champs \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_{dm} sont respectivement les champs magnétiques appliqué et démagnétisant discutés précédemment ; les autres termes composant le champ magnétique effectif proviennent des différentes contributions énergétiques dont on distingue :

- Le champ d'interaction échange : $\mathbf{H}_{\text{ex}}(\mathbf{m}) = \frac{2A}{\mu_0 M_S} \nabla^2 \mathbf{m}$;
- Le champ d'anisotropie magnéto-cristalline : $\mathbf{H}_{\text{an}}(\mathbf{m}) = \frac{-1}{\mu_0 M_S} \frac{\partial W_{\text{an}}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$;
- Le champ magnétique induit par la contrainte : $\mathbf{H}_{\sigma}(\mathbf{m}) = \frac{1}{\mu_0 M_S} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$.

La première équation de Brown magnéto-élastique postule que le couple exercé sur l'aimantation du milieu par le champ magnétique effectif s'annule à l'équilibre, tandis que la seconde annule la dérivée normale du moment magnétique \mathbf{m} sur la surface du milieu à l'équilibre. La résolution des équations de Brown (2.10) détermine la configuration en domaines magnétiques d'équilibre quasi-statique d'un monocristal ferromagnétique soumis à des sollicitations magnéto-mécaniques extérieures.

Pour rendre compte du comportement magnétique hystérique des milieux ferromagnétiques, un modèle micromagnétique dynamique (équations de Landau-Lifshitz ou Landau-Lifshitz-Gilbert) est également nécessaire afin de traduire les effets dissipatifs irréversibles qui se produisent lors du renversement de proche en proche des moments magnétiques pendant la propagation des parois de Bloch au cours de l'aimantation du milieu (section 1.3 du Chapitre 1). Définies à partir du champ magnétique effectif [d'Aquino_2004], ces équations différentielles dynamiques prédisent les phénomènes

caractéristiques de rotation des moments magnétiques du milieu en réponse à l'excitation magnétique extérieure (précession de Larmor) en prenant en compte un terme phénoménologique d'amortissement.

L'approche quasi-statique décrite dans cette section suffit cependant à caractériser les lois de comportements magnéto-élastiques anhystériques (réversibles) d'un monocristal ferromagnétique, en déterminant les intensités mais aussi les directions d'aimantation et de magnétostriction du milieu selon les directions d'application des sollicitations magnétiques et mécaniques. Il est important de rappeler que les équations de Brown magnéto-élastiques sont fortement non-linéaires étant donné que le champ effectif \mathbf{H}_{eff} dépend par définition de la direction d'aimantation \mathbf{m} . L'existence de solutions analytiques exactes de ces équations repose souvent sur de fortes hypothèses simplificatrices, et c'est la raison pour laquelle la résolution de ces équations à l'échelle des moments atomiques nécessite des méthodes numériques performantes dans la plupart des cas. Cependant, le nombre de degrés de liberté de la distribution des moments magnétiques atomiques nécessaire à la détermination des propriétés magnéto-élastiques macroscopiques d'un milieu est considérable, particulièrement s'il est polycristallin et si l'échelle spatiale des hétérogénéités magnéto-élastiques du milieu est bien plus petite que le volume d'intérêt. Cet aspect entraîne des coûts importants en temps de calcul numérique qui rendent prohibitive, et même obsolète, l'utilisation de modèles micromagnétiques dans des codes de calcul de structure pour des cas d'applications de pièces mécaniques réalistes.

C'est pourquoi de nombreuses approches phénoménologiques de comportement magnéto-élastique des milieux ferromagnétiques ont été développées afin de pallier le coût de résolution numérique des approches micromagnétiques. Ces approches reposent généralement sur une vision simplifiée des interactions magnéto-élastiques microscopiques présentées dans cette section, ce qui limite leur application à des excitations magnéto-mécaniques extérieures uni-axiales et fournit seulement des informations sur l'intensité des champs d'aimantation et de déformation de magnétostriction en réponse à ces excitations. La section suivante introduit le principe des modèles phénoménologiques avec l'idée initiale du champ moléculaire de Weiss pour les lois de comportement magnétique, puis décrit le modèle anhystérique de Jiles-Atherton, largement utilisé dans la littérature, ainsi que l'extension théorique apportée par Sablik pour traiter le cas du comportement magnétostrictif des milieux ferromagnétiques.

2.2. Approche phénoménologique de Sablik–Jiles–Atherton de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérique

Les modèles phénoménologiques de comportements magnéto-élastiques anhystériques sont basés sur une écriture simplifiée de l'équilibre thermodynamique des mécanismes élémentaires d'aimantation impliqués en milieux ferromagnétiques. Le modèle de Jiles-Atherton (JA) est l'une des approches phénoménologiques les plus répandues. Pour comprendre comment ce modèle est construit, la fonction de Langevin permettant de décrire le comportement paramagnétique d'un milieu est introduite. Ensuite, le principe du champ effectif (champ moléculaire de Weiss) est présenté pour introduire de façon approchée les interactions d'échange caractéristiques des milieux ferromagnétiques et de leur structure ordonnée en domaines magnétiques. Enfin, l'extension apportée par Sablik pour représenter le comportement magnéto-élastique est présentée, on parlera de modèle de Sablik-Jiles-Atherton (SJA).

2.2.1. Introduction historique aux approches phénoménologiques de modélisation du comportement magnétique des milieux

2.2.1.1. *Le paramagnétisme de Langevin*

Dans l'approche classique continue du paramagnétisme (appelée couramment paramagnétisme de Langevin [Langevin_1905]), le milieu paramagnétique est décrit par une assemblée de N moments magnétiques atomiques \mathbf{m} , tous de même norme m mais d'orientation continûment variable. On suppose que ces moments sont indépendants de la structure cristallographique et suffisamment éloignés les uns des autres pour ne pas subir d'interactions mutuelles. Dans ce cadre, seule l'énergie potentielle magnétique (de Zeeman) apportée au milieu par l'application d'une excitation magnétique extérieure \mathbf{H}_0 (de norme H_0) est considérée dans le bilan énergétique (2.1). En notant θ l'angle entre un moment élémentaire et le champ extérieur, l'énergie de Zeeman d'un moment \mathbf{m} indépendant s'écrit :

$$W_z(\theta) = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0 = -\mu_0 m H_0 \cos(\theta). \quad (2.12)$$

La minimisation de cette énergie force l'alignement du moment magnétique selon la direction de l'excitation extérieure ($\theta = 0$). L'approche de Langevin repose sur un équilibre s'établissant entre l'énergie d'agitation thermique du milieu, qui tend à désorienter les moments atomiques, et l'énergie potentielle de Zeeman, qui tend à aligner les moments dans la direction imposée par le champ extérieur. La conséquence de cet équilibre est la génération d'une aimantation macroscopique dans la direction du champ extérieur \mathbf{H}_0 .

On suppose que les moments élémentaires sont répartis aléatoirement dans le milieu avec des états d'énergie continus. Dans ce cadre, la fraction volumique f_θ de moments magnétiques à l'état d'énergie $W_z(\theta)$, orientés d'un angle θ par rapport au champ extérieur \mathbf{H}_0 , peut être définie par la loi statistique (continue) de Boltzmann, faisant intervenir la constante de Boltzmann k_B et la température T du milieu. En coordonnées sphériques et en supposant que \mathbf{H}_0 est selon l'axe \mathbf{e}_z , la fraction volumique f_θ peut ainsi s'écrire par invariance selon $\phi \in [0, 2\pi]$ comme :

$$f_\theta = \frac{\exp(-W_z(\theta)/k_B T)}{\int_0^\pi \exp(-W_z(\theta)/k_B T) \sin(\theta) d\theta}. \quad (2.13)$$

Par définition, les fractions volumiques vérifient : $\int_0^\pi f_\theta d\theta = 1$. L'aimantation macroscopique \mathbf{M} résultante étant supposée alignée avec l'excitation extérieure \mathbf{H}_0 , la contribution de chaque moment élémentaire à l'aimantation du milieu est donc de $m \cos(\theta)$, et on obtient l'aimantation macroscopique d'un milieu composé de N moments par une moyenne continue sur toutes les orientations θ possibles :

$$\mathbf{M} = N \langle m \cos(\theta) \rangle = N \int_0^\pi m \cos(\theta) f_\theta \sin(\theta) d\theta. \quad (2.14)$$

On définit naturellement l'aimantation à saturation par $M_S = Nm$ (tous les moments sont alignés dans la direction de l'excitation extérieure) et la résolution élémentaire (double intégration par parties) de cette intégrale fait directement intervenir la fonction de Langevin \mathcal{L} selon la relation :

$$M = M_S \mathcal{L}\left(\frac{H_0}{a}\right) = M_S \left[\coth\left(\frac{H_0}{a}\right) - \frac{a}{H_0} \right], \quad \text{avec : } a = \frac{Nk_B T}{\mu_0 M_S}. \quad (2.15)$$

Cette relation simple offre une représentation fidèle du comportement paramagnétique des milieux. Pour une excitation magnétique extérieure constante (non nulle), les variations de la fonction de Langevin indiquent que lorsque la température tend vers zéro, l'aimantation tend vers sa valeur à saturation M_S (les moments magnétiques microscopiques sont 'gelés' dans la direction du champ magnétique extérieur), tandis que lorsque la température tend vers l'infini, l'aimantation s'annule : l'agitation thermique prédomine sur l'équilibre magnétique et les moments magnétiques microscopiques se désordonnent de façon aléatoire dans le milieu. De plus, en supposant la température constante, le développement limité autour de zéro de la fonction de Langevin $\mathcal{L}(x) = x/3 + \mathcal{O}(x^2)$ permet d'écrire la relation constitutive à faibles champs des matériaux paramagnétiques :

$$M = \chi H_0, \quad \text{avec : } \chi = \frac{M_S}{3a} = \frac{\mu_0 M_S^2}{3Nk_B T}. \quad (2.16)$$

On retrouve la loi de Curie [Curie] avec la susceptibilité d'un matériau paramagnétique qui dépend linéairement de l'inverse de la température. Cette loi de comportement paramagnétique est validée par l'expérience pour une très large gamme de matériaux et donne également un bon point de départ pour l'analyse phénoménologique du comportement magnéto-élastique des milieux ferromagnétiques.

Remarque relative au paramagnétisme de Brillouin

L'approche classique continue définissant la fonction de Langevin est une simplification importante des phénomènes magnétiques élémentaires. En effet, l'orientation des moments atomiques ne varie pas de façon continue dans un milieu magnétique mais prend des valeurs discrètes qui doivent être analysées par la mécanique quantique (interaction spin-spin). L'intégrale (2.14) sur les orientations des moments magnétique du modèle continu de Langevin est alors remplacée par une somme discrète, on parle de paramagnétisme de Brillouin [Brillouin_1927] :

$$M = M_S B_J\left(\frac{g\mu_B J H_0}{k_B T}\right), \quad \text{avec : } B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right). \quad (2.17)$$

Dans cette relation, B_J représente la fonction de Brillouin, g le facteur de Landé, μ_B le magnéton de Bohr, J le moment cinétique électronique (somme du moment orbital et du moment de spin). Naturellement, les approches continue et discrète convergent lorsque le moment cinétique J tend vers l'infini (limite classique). On parle également de paramagnétisme de Pauli dans le cas particulier des métaux non-magnétiques. Seule l'approche continue de Langevin est considérée dans cette étude.

2.2.1.2. *La théorie du champ moléculaire de Weiss*

L'existence d'une aimantation spontanée dans un matériau ferromagnétique en l'absence d'excitation magnétique extérieure résulte du fait que la distribution de moments magnétiques atomiques n'a finalement rien d'aléatoire dans le milieu. Pour prendre en compte l'ordre de cette distribution, il est nécessaire d'introduire les interactions d'échange dans cette approche continue.

Décrites dans le paragraphe 2.1.1, les interactions d'échange ont tendance à former de petites régions uniformément aimantées au sein du matériau : ce sont les domaines magnétiques de Weiss (Chapitre 1).

L'existence de ces domaines a été postulée par Weiss en 1907 [Weiss_1907] afin de traduire les fortes interactions qui devaient exister entre les moments magnétiques atomiques pour produire la saturation de l'aimantation des matériaux ferromagnétiques à de faibles excitations. Weiss introduit alors un champ d'origine non-maxwellienne (ne respectant pas les équations de Maxwell) appelé le champ moléculaire, et explique l'apparition d'une aimantation rémanente et les variations caractéristiques de la susceptibilité magnétique des milieux ferromagnétiques en fonction de la température, étudiées à l'époque par Curie [Curie]. La théorie des domaines magnétiques a été validée en 1919 par les travaux de Barkhausen [Barkhausen_1919] faisant un lien entre les sauts irréversibles (bruit de Barkhausen) présents lors d'un processus d'aimantation et l'existence de domaines magnétiques. Finalement, les observations expérimentales par microscopie à effet Kerr ont définitivement confirmées l'existence des domaines magnétiques et il faut attendre les travaux d'Heisenberg [Heisenberg_1931] en 1931 décrivant un matériau magnétique selon des énergies d'interactions d'échange et l'avènement des approches micromagnétiques pour finalement démontrer la théorie de Weiss sur le champ moléculaire.

La théorie de Weiss est basée sur le principe qu'un moment magnétique atomique indépendant est soumis localement, à l'échelle microscopique, à un champ magnétique qui est la somme du champ appliqué H_0 et d'un champ moléculaire H_w , qui représente l'interaction d'échange globale des autres moments magnétiques du milieu. Probablement inspiré par les modèles diélectriques de Lorentz [Herpin_1971], Weiss fait l'hypothèse que ce champ moléculaire est proportionnel à l'aimantation macroscopique M du milieu selon la relation :

$$H = H_0 + H_w = H_0 + \alpha_w M. \quad (2.18)$$

Dans l'équation précédente, α_w est un paramètre sans dimension indépendant de la température qui caractérise les interactions d'échange entre les moments atomiques élémentaires du milieu. L'énergie des moments magnétiques atomiques s'écrit alors : $W_z(\theta) = -\mu_0 m \{H_0 + \alpha_w M\} \cos(\theta)$, et Weiss détermine la valeur moyenne de la projection du moment magnétique d'un atome en direction du champ appliqué selon une statistique de Boltzmann similaire au modèle de Langevin (2.13), ce qui définit la relation constitutive de Weiss-Langevin des milieux ferromagnétiques :

$$M = M_S \mathcal{L}\left(\frac{H_0 + \alpha_w M}{a}\right). \quad (2.19)$$

La résolution de cette équation implicite (M étant en argument de la fonction de Langevin) permet d'obtenir la loi de comportement $M(H_0)$ macroscopique d'un milieu ferromagnétique. Cette théorie intuitive a eu un impact important sur la communauté scientifique du magnétisme à l'époque. Elle permet par exemple de dériver la loi de Curie-Weiss décrivant les variations de la susceptibilité ferromagnétique à faible champ en fonction de la température (Chapitre 1) :

$$M = \chi H_0, \quad \text{avec : } \chi = \frac{C}{T - T_C}. \quad (2.20)$$

Dans l'équation précédente, C désigne la constante de Curie et T_C la température de Curie, définis par :

$$C = \frac{\mu_0 M_S m}{3k_B} \quad \text{et} \quad T_C = C \alpha_w. \quad (2.21)$$

Le comportement asymptotique de la susceptibilité ferromagnétique, avec un point critique correspondant à la température de Curie de transition de phase ferromagnétique-paramagnétique est en bon accord avec l'expérience [Aharoni_2001]. Par ailleurs l'approche simplifiée en champ fictif de la théorie de Weiss rend plus intuitives les interactions d'échange, ce qui a permis à l'époque la découverte des comportements ferrimagnétique, antiferromagnétique, héliamagnétique. Pour cela, le champ moléculaire est adapté aux différents comportements par l'introduction par Néel du champ moléculaire local [Herpin_1971]. Cette approche en champ fictif est reprise dans le modèle phénoménologique de Sablik-Jiles-Atherton de comportement magnéto-élastique anhystérique des milieux.

2.2.2. Principe du modèle SJA du comportement magnéto-élastique anhystérique

La théorie du champ moléculaire de Weiss est adaptée dans le modèle phénoménologique de Jiles-Atherton (modèle J-A) [Jiles-Atherton_1986] pour décrire la courbe d'aimantation anhystérique (réversible) d'un milieu ferromagnétique. La principale différence entre le modèle J-A et la théorie de Weiss repose sur un changement d'échelle : l'aimantation macroscopique du milieu n'est pas obtenue à partir de l'énergie des moments magnétiques atomiques mais par l'analyse de l'énergie des domaines magnétiques. Suivant le même raisonnement en champ effectif (ou champ moyen), Sablik [Sablik-Jiles_1993] apporte une extension au modèle J-A pour prédire l'influence d'une contrainte mécanique uni-axiale sur l'aimantation d'un milieu ferromagnétique (effet Villari) par l'intermédiaire d'un champ fictif couplé à la déformation de magnétostriction λ^{ms} du milieu. On parle de modèle magnéto-mécanique de Sablik-Jiles-Atherton (modèle SJA).

Ces modèles phénoménologiques conduisent à la détermination de la courbe anhystérique d'aimantation à partir de considérations thermodynamiques simplifiées sur un système de domaines magnétiques avec des parois de Bloch fixes. Cette hypothèse sur le système de départ est fondamentale : étant donné que les mouvements de translation des parois de Bloch sont associés aux mécanismes irréversibles d'aimantation (Chapitre 1), ces derniers ne doivent pas être pris en compte dans la loi de comportement anhystérique, associée aux mécanismes réversibles (équilibre thermodynamique). Ainsi, le modèle SJA traite des variations anhystériques de l'aimantation macroscopique d'un milieu dues aux rotations réversibles du moment magnétique de chaque domaine élémentaire qui le compose.

Par hypothèse, un milieu ferromagnétique (potentiellement polycristallin) est représenté par un assemblage de domaines magnétiques élémentaires de moment magnétique \mathbf{m} pouvant interagir entre eux et caractérisés par leur angle θ avec l'excitation magnétique extérieure \mathbf{H}_0 . À une température T , cette distribution de domaines magnétiques est supposée définir une aimantation macroscopique \mathbf{M} alignée avec l'excitation extérieure \mathbf{H}_0 et donnée par la statistique de Boltzmann suivante :

$$M = \int_0^\pi M_S \cos(\theta) f_d(\theta) \sin(\theta) d\theta, \quad (2.22)$$

$$\text{avec : } f_d(\theta) = \frac{\exp(-W_d(\theta)/k_B T)}{\int_0^\pi \exp(-W_d(\theta)/k_B T) \sin(\theta) d\theta}.$$

Dans cette relation, $W_d(\theta)$ représente l'énergie d'un domaine magnétique, et $f_d(\theta)$ la fraction volumique de domaines magnétiques à l'état d'énergie $W_d(\theta)$. Selon le raisonnement de Weiss, le

modèle SJA définit le champ effectif H_{eff} décrivant les interactions élémentaires qui s'exercent sur un domaine, dont l'influence des domaines magnétiques voisins, pour écrire l'énergie W_d comme :

$$W_d(\theta) = -\mu_0 m H_{\text{eff}} \cos(\theta). \quad (2.23)$$

La prise en compte des interactions de couplage entre les domaines et de l'influence d'un état de contraintes sur le comportement anhystérique est alors traitée par une définition appropriée de H_{eff} . Cette définition est obtenue par des considérations thermodynamiques simplifiées du bilan énergétique micromagnétique (2.1). En faisant les hypothèses d'une contrainte mécanique uni-axiale (alignée avec l'excitation extérieure) et d'un milieu isotrope, la densité d'énergie libre (de Helmholtz) F de ce système le long de la courbe d'aimantation anhystérique (réversible) peut se mettre sous la forme simplifiée [Jiles_1995, Sablik-Jiles_1993] :

$$F = \mu_0 H_0 M + \frac{\mu_0}{2} \alpha M^2 + \frac{3}{2} \sigma \lambda^{\text{ms}} + TS. \quad (2.24)$$

Dans cette relation, α quantifie l'interaction de couplage entre les domaines magnétiques, σ désigne une contrainte uni-axiale appliquée, λ^{ms} représente la déformation de magnétostriction du milieu (dans la direction du champ extérieur), T désigne la température et S l'entropie du système. Le champ effectif est alors obtenu par la dérivée de cette énergie libre selon l'aimantation macroscopique M du milieu. En négligeant les variations d'entropie par rapport à l'aimantation, le champ effectif H_{eff} est défini par :

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dF}{dM} = H_0 + \alpha M + H_\sigma, \quad \text{avec : } H_\sigma = \frac{3\sigma}{2\mu_0} \left(\frac{\partial \lambda^{\text{ms}}}{\partial M} \right)_\sigma. \quad (2.25)$$

L'obtention du champ effectif dans cette approche phénoménologique est très similaire au champ effectif de l'approche micromagnétique (2.11). Cette expression formule le fait que l'application d'une contrainte mécanique sur un milieu ferromagnétique peut se traduire de manière équivalente à l'introduction d'un champ magnétique fictif H_σ , idée initialement exploitée par Brown [Brown_1949]. La réciprocité de l'effet Villari et de la magnétostriction est également retrouvée dans cette relation : l'influence d'une contrainte mécanique sur l'aimantation est directement corrélée aux variations de la déformation de magnétostriction λ^{ms} en fonction de l'aimantation du milieu.

En injectant l'expression de ce champ effectif (indépendant de θ) dans la définition de l'énergie d'un domaine (2.23), la courbe anhystérique d'aimantation du modèle SJA, dépendant d'un état de contraintes mécaniques uni-axiales, est alors définie par l'intégrale (2.22) qui fait intervenir la fonction de Langevin selon la relation suivante (valable en milieu isotrope) :

$$M(H_0, \sigma) = M_S \mathcal{L} \left(\frac{H_{\text{eff}}}{a} \right) = M_S \mathcal{L} \left(\frac{H_0 + \alpha M + H_\sigma}{a} \right). \quad (2.26)$$

La résolution de cette équation implicite permet d'obtenir la courbe anhystérique (contrainte-dépendante) d'aimantation macroscopique $M(H_0, \sigma)$ d'un milieu ferromagnétique. Elle implique la connaissance de différents paramètres d'entrée et repose sur la définition d'un modèle de déformation de magnétostriction ; ce sont les objets des sections suivantes.

2.2.3. Paramètres du modèle JA à contrainte mécanique nulle

L'équation (2.26) se réduit au modèle anhystérique de Jiles-Atherton en absence de chargement mécanique. Ce modèle de comportement requiert la connaissance des paramètres M_s , α , et a en fonction du milieu ferromagnétique étudié. Ces paramètres sont déterminés à partir de mesures expérimentales (principe des approches phénoménologiques). Plus précisément, l'aimantation à saturation M_s s'obtient directement à partir d'une mesure magnétique à champ fort. En revanche, les paramètres α et a , qui affectent directement la pente de la courbe d'aimantation anhystérique, nécessitent des mesures expérimentales sur une plus large gamme d'excitations magnétiques. Les valeurs des paramètres d'entrée du modèle J-A, indépendants de la contrainte mécanique, ont été étudiées dans la littérature pour une large gamme de milieux ferromagnétiques. La Table 2.2, issue de [Li_2004], donne les valeurs de ces paramètres dans les cas d'échantillons de nickel (recuit) et d'acier inoxydable (AISI 410).

Matériau	M_s [A. m ⁻¹]	a [A. m ⁻¹]	α [-]
Nickel (recuit)	$5,3 \cdot 10^5$	400	$9 \cdot 10^{-5}$
Acier inox (AISI 410)	$1,65 \cdot 10^6$	7200	0.01

Table 2.2 : Paramètres du modèle anhystérique JA pour le nickel (recuit) et l'acier inoxydable (AISI 410) [Li_2004].

2.2.4. Définition de la loi anhystérique de magnétostriction $\lambda^{ms}(\mathbf{H}, \sigma)$

La définition (2.25) du champ fictif H_σ induit par la contrainte mécanique nécessite la description des variations de la déformation de magnétostriction avec l'aimantation et l'état de contraintes mécaniques du milieu. Comme décrit dans l'approche micromagnétique de la section précédente, la déformation de magnétostriction est fondamentalement définie à l'échelle du monocristal (et non à celle des domaines magnétiques) par des coefficients de magnétostriction à saturation le long d'axes cristallographiques principaux du réseau cristallin et sous des hypothèses faites sur la configuration du milieu en domaines magnétiques. Cependant une telle définition n'est pas envisageable à l'échelle macroscopique des applications industrielles de CND de milieux ferromagnétiques (souvent polycristallins), dans lesquels plusieurs familles de symétries cristallines peuvent coexister, et dont la configuration en domaines magnétiques est une donnée inaccessible. C'est pourquoi les déformations de magnétostriction sont généralement définies de manière empirique dans le modèle SJA. La magnétostriction étant symétrique par rapport à l'axe $M = 0$ (Chapitre 1), un développement en puissance paire de l'aimantation est naturellement proposé, avec des coefficients pondérateurs qui dépendent de l'état de contrainte mécanique selon un développement en série de Taylor [Jiles_1995] :

$$\lambda^{ms}(\mathbf{H}, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(\sigma) M(\mathbf{H}, \sigma)^{2i} \quad \text{avec :} \quad \gamma_i(\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{j!} \gamma_i^{(j)}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} \sigma^j. \quad (2.27)$$

Cette loi macroscopique de déformations de magnétostriction est purement empirique (ou phénoménologique), et l'ordre à partir duquel cette série est tronquée dépend systématiquement du matériau ferromagnétique inspecté. Par exemple, dans le cas particulier du Terfenol-D, matériau à effet magnétostrictif géant, une bonne représentation des effets magnéto-élastiques est obtenue en tronquant ces séries infinies respectivement au premier ordre en M^2 et à l'ordre zéro en σ , comme le démontrent les travaux de Dapino [Dapino-et-al_2000] sur la modélisation des patches magnétostrictifs (constitués

d'un élément actif en Terfenol-D). Dans son analyse structurelle, Dapino obtient en effet un bon accord simulation-expérience en utilisant une relation macroscopique approchée entre déformation de magnétostriction et aimantation en milieu isotrope de la forme :

$$\lambda^{\text{ms}}(H_0, \sigma) = \gamma_0 M(H_0, \sigma)^2, \quad \text{avec : } \gamma_0 = \frac{3\lambda_s}{2M_s^2}. \quad (2.28)$$

Dans cette représentation simplifiée, la dépendance de la déformation de magnétostriction avec un état de contraintes mécaniques est simplement décrite par les variations de l'aimantation avec cet état de contraintes (équation (2.26)). Cependant, pour traiter d'autres matériaux ferromagnétiques, typiquement les matériaux de structure (en opposition aux matériaux actifs comme le Terfenol-D), les séries en M^2 et en σ doivent nécessairement être étendues à des ordres supérieurs afin de décrire des comportements magnéto-élastiques en accord avec l'expérience. La définition des paramètres γ_{ij} décrivant la courbe anhystérique de magnétostriction en fonction de la contrainte n'est alors possible qu'à partir d'interpolations sur des mesures expérimentales. De telles mesures peuvent être coûteuses car les comportements magnétiques et magnétostrictifs doivent être caractérisés sous chargement mécanique à la fois en compression et en traction, ce qui complique les expériences à mettre en œuvre. Ces paramètres, et leur détermination dans le cas d'échantillons d'acier inoxydable et de nickel (à froid ou recuit), sont décrits dans la thèse de Li [Li_2004], menée sous la direction de Jiles. Dans ces milieux ferromagnétiques, Li montre à l'aide d'essais expérimentaux sous chargement mécanique que les fonctions $\gamma_i(\sigma)$ de l'équation (2.27) peuvent être approchées par des fonctions affines, et la loi anhystérique de déformation de magnétostriction peut alors être décrite par la relation :

$$\lambda^{\text{ms}}(H_0, \sigma) = (\gamma_{11} + \sigma\gamma_{12})M(H_0, \sigma)^2 + (\gamma_{21} + \sigma\gamma_{22})M(H_0, \sigma)^4, \quad (2.29)$$

dont les paramètres γ_{ij} (constants) sont déterminés expérimentalement et reportés dans la [Table 2.3](#) ci-dessous dans les cas d'échantillons ferromagnétiques de nickel (recuit) et d'acier inoxydable (AISI 410).

Matériau	γ_{11} (m^2A^{-2})	γ_{12} ($\text{m}^2\text{A}^{-2}\text{MPa}^{-1}$)	γ_{21} (m^4A^{-4})	γ_{22} ($\text{m}^4\text{A}^{-4}\text{MPa}^{-1}$)
Nickel (recuit)	$-7,21 \cdot 10^{-18}$	$-6,11 \cdot 10^{-18}$	$-5,01 \cdot 10^{-28}$	$-1,67 \cdot 10^{-29}$
Acier inox (410)	$1,88 \cdot 10^{-17}$	$-6,31 \cdot 10^{-20}$	$-2,57 \cdot 10^{-30}$	$1,27 \cdot 10^{-32}$

Table 2.3 : Définition des paramètres γ_{ij} pour des échantillons de nickel (recuit) et d'acier inoxydable (AISI 410) [Li_2004].

2.2.5. Simulation de courbes magnéto-élastiques anhystériques avec le modèle SJA

Les paramètres d'entrée, déterminés à l'aide de caractérisations expérimentales sous contrainte mécanique, complètent le modèle phénoménologique de Sablik-Jiles-Atherton du comportement magnéto-élastique anhystérique de milieux ferromagnétiques. Nous avons calculé les courbes anhystériques macroscopiques d'aimantation et de déformations de magnétostriction en fonction de l'excitation magnétique extérieure et d'un état de contraintes mécaniques uni-axiales (alignées avec l'excitation extérieure) à l'aide des paramètres fournis par Li ([Table 2.2](#) et [Table 2.3](#)), présentées dans les [Figure 2.25](#) et [Figure 2.26](#) pour des échantillons d'acier inoxydable (AISI 410) et de nickel (recuit).

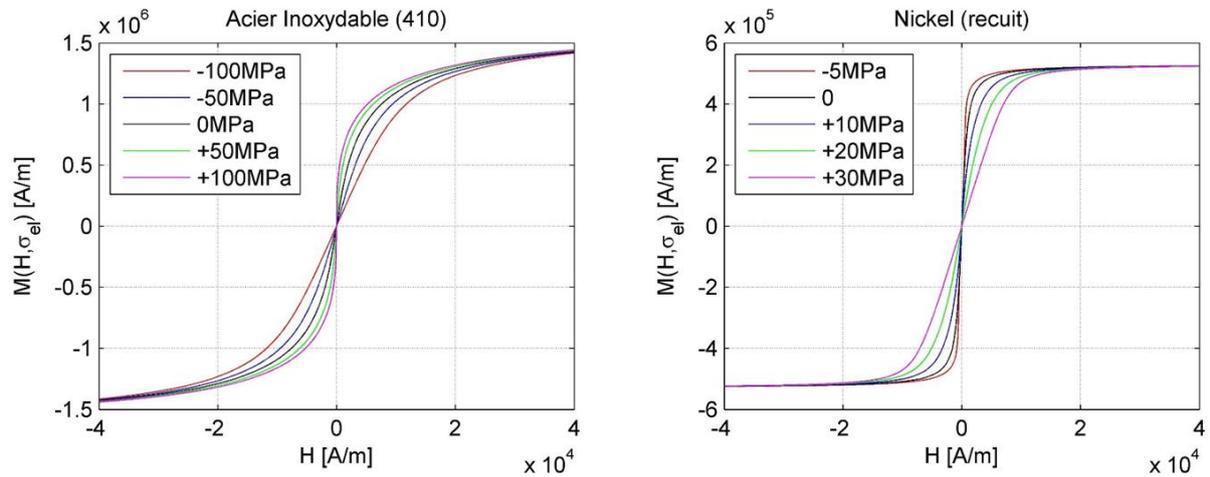


Figure 2.25 : Courbes anhystériques d'aimantation d'échantillons d'acier inoxydable (gauche) et de nickel (droite) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA.

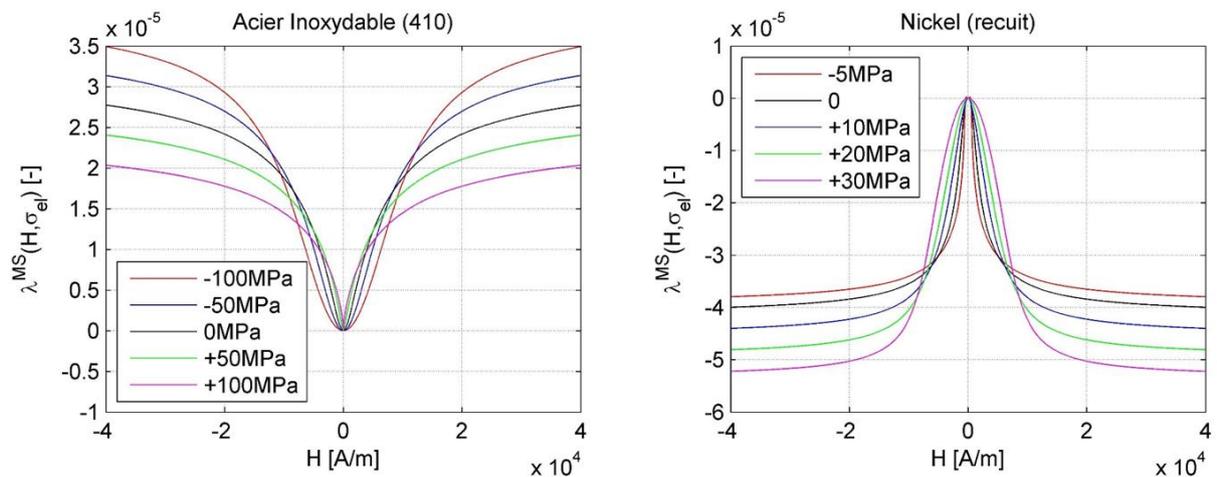


Figure 2.26 : Courbes anhystériques de déformation de magnétostriction d'échantillons d'acier inoxydable (gauche) et de nickel (droite) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA.

On remarque que les effets d'une contrainte mécanique uni-axiale (dirigée selon l'excitation magnétique) sur les propriétés d'aimantation et de magnétostriction anhystériques sont complémentaires pour ces deux exemples de milieux ferromagnétiques. En effet, l'acier inoxydable (AISI 410) s'aimante plus facilement s'il est mécaniquement contraint en traction ($\sigma > 0$) tandis que la susceptibilité (anhystérique) de ce milieu diminue dans le cas de contraintes de compression ($\sigma < 0$). Ce phénomène est symétrique dans le cas du nickel recuit, qui s'aimante plus facilement s'il est contraint en compression et moins facilement en traction. Ces effets magnéto-mécaniques sont naturellement à mettre en lien avec les modes de magnétostriction de ces deux milieux : l'acier inoxydable présente une magnétostriction positive alors que le nickel exhibe une magnétostriction négative. Le modèle SJA fournit également la dépendance des déformations de magnétostriction en fonction de l'état de contraintes mécaniques du milieu. Dans l'acier inoxydable, l'application d'une contrainte mécanique de compression augmente l'amplitude des déformations de magnétostriction (à saturation) tandis qu'une contrainte de traction la diminue. Pour le nickel (recuit), la situation est également inversée, avec la valeur absolue de la déformation de magnétostriction qui est augmentée par l'application d'une contrainte de traction, et réduite dans le cas de contraintes de compression.

2.2.6. Limites de l'approche phénoménologique du modèle SJA

Le modèle SJA décrit les propriétés magnéto-élastiques anhystériques d'un milieu sous sollicitations magnétiques et mécaniques par l'intermédiaire de seulement sept paramètres d'entrée pour des échantillons de nickel et d'acier inoxydable : M_s , a , α , γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} , γ_{22} . L'implémentation de ce modèle est très simple à mettre en œuvre (résolution de l'équation implicite (2.26)). Les paramètres d'entrée du modèle SJA étant définis par interpolation sur des essais expérimentaux, cette approche phénoménologique prédit efficacement le comportement magnéto-élastique anhystérique de milieux ferromagnétiques pour lesquels les paramètres ont été déterminés.

Mais le modèle SJA présente quelques limitations majeures. En effet, il est entièrement scalaire, ne fournissant que des informations sur les intensités d'aimantation et de magnétostriction anhystériques dans la direction de l'excitation magnétique extérieure. Aucune information sur les composantes vectorielles de l'aimantation et tensorielles de la déformation de magnétostriction ne peut être obtenue. De même, les effets d'un état de contraintes mécaniques sur le comportement magnéto-élastique du milieu ne peuvent être prédits que dans le cas de contraintes mécaniques uni-axiales, ce qui représente une forte simplification (les milieux étant généralement soumis à des contraintes multi-axiales en contexte industriel réel). De plus, le modèle SJA est purement isotrope et les effets d'anisotropie magnéto-cristalline sur l'aimantation et la déformation de magnétostriction ne peuvent être prédits en l'état. Une extension aux effets d'anisotropie est ajoutée empiriquement par Ramesh [[Ramesh-et-al_1996](#)] dans le modèle anhystérique JA en suivant la représentation énergétique micromagnétique décrite dans le paragraphe 2.1.2. Cependant, l'ajout d'une énergie d'anisotropie magnéto-cristalline (qui dépend de θ) dans la définition (2.23) de l'énergie d'un domaine magnétique modifie le calcul de l'intégrale (2.22), ce qui implique des fonctions caractéristiques différentes de celle de Langevin qu'il est nécessaire de déterminer au cas par cas suivant la symétrie cristalline étudiée [[Jiles_2002](#)]. De plus, dès lors qu'une anisotropie magnéto-cristalline est considérée, tous les paramètres d'entrée du modèle SJA doivent être obligatoirement re-déterminés par l'expérience.

Ces paramètres d'entrée du modèle SJA présentent ainsi quelques limites d'utilisation. En effet, les paramètres du modèle à contrainte nulle (M_s , α , a) doivent être systématiquement interpolés en fonction du comportement magnétique macroscopique du milieu étudié. Le traitement de la loi de comportement magnétostrictif dans le modèle SJA est également particulièrement restrictif. Notamment, la courbe de magnétostriction macroscopique dépendant de l'excitation magnétique et d'une contrainte mécanique est définie de façon purement empirique. Le nombre de paramètres γ_{ij} nécessaires à sa modélisation peut varier fortement d'un milieu ferromagnétique à un autre, et ce nombre ne peut être déterminé que par des essais expérimentaux de caractérisation de propriétés magnéto-élastiques d'un milieu soumis à différents niveaux de contraintes mécaniques. Les valeurs des paramètres γ_{ij} sont alors relatives à la gamme de contraintes mécaniques de traction et compression testée expérimentalement. En effet, en élargissant l'amplitude des contraintes dans l'expérience, que ce soit en traction ou en compression, ces paramètres d'entrée peuvent changer, et en particulier la dépendance affine décrite par Li peut être perdue. En ce sens, le modèle SJA est restreint à la gamme d'amplitude de contraintes mécaniques de traction et/ou compression utilisée dans le protocole expérimental ayant permis l'estimation des paramètres γ_{ij} . Une illustration pratique de cette restriction est donnée par la non-unicité de la solution de l'équation implicite (2.26) à partir d'un certain niveau de contrainte. Par exemple dans le cas du nickel recuit ([Figure 2.27](#)), on remarque que l'équation implicite à résoudre pour déterminer

l'aimantation anhystérique admet une unique solution jusqu'à un certain niveau de contrainte de compression (environ 5MPa) à partir duquel plusieurs solutions deviennent possibles.

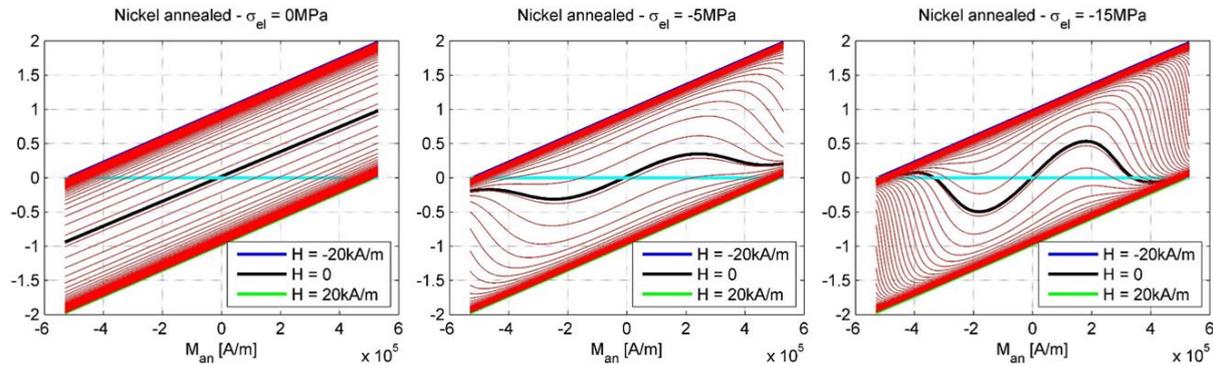


Figure 2.27 : Évaluation dans le cas du nickel (recuit) des zéros de $f(x) = M_S \mathcal{L}\left(\frac{H+ax+H_\sigma(x)}{a}\right) - x$, en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique (comprise entre -20kA/m et 20kA/m) et de l'amplitude des contraintes de compression appliquées.

Du fait des restrictions apportées par la détermination empirique de la loi de magnétostriction (2.27), Sablik propose un modèle analytique de loi de magnétostriction dans [Sablik-Jiles_1993] dérivé à partir de l'écriture de l'équilibre mécanique du milieu à l'échelle du monocristal. L'obtention d'une telle loi se fait au prix de nombreuses simplifications, notamment sur les directions respectives de l'excitation magnétique extérieure et de la contrainte mécanique, et nécessite la connaissance d'une constante de couplage magnéto-élastique, dont la définition doit être adaptée au cas par cas.

Pour s'affranchir des limites intrinsèques du modèle phénoménologique SJA, une approche multi-échelle des interactions magnéto-élastiques a été développée par Daniel et ses collaborateurs. Une version simplifiée de l'approche multi-échelle complète peut être facilement implémentée, et les prédictions du modèle multi-échelle simplifié sont comparées aux résultats obtenus par le modèle SJA.

2.3. Approches multi-échelles de Daniel *et al.* de modélisation du comportement magnéto-élastique anhystérique

Le modèle multi-échelle (qu'on notera MME dans la suite de ce manuscrit) du comportement magnéto-mécanique anhystérique présenté dans cette section est largement inspiré des travaux de recherche de Daniel [Daniel_2011]. Cette approche repose sur une description énergétique de l'équilibre magnéto-élastique à l'échelle des domaines magnétiques. Des règles de transition d'échelles permettent de relier l'échelle macroscopique, à laquelle les sollicitations magnéto-élastiques sont appliquées et les relations constitutives magnéto-élastiques du milieu sont recherchées, à l'échelle locale microscopique, à laquelle les mécanismes physiques fondamentaux se décrivent naturellement. Une telle approche prédit la réponse magnéto-élastique d'un milieu ferromagnétique sous l'effet de sollicitations magnétiques et mécaniques multi-axiales. Le MME complet du comportement magnéto-élastique réversible développé par Daniel *et al.* [Daniel-et-al_2008] est introduit dans un premier temps, avant de décrire un modèle multi-échelle simplifié [Daniel-et-al_2015] qui en découle. L'implémentation du MME simplifié est discutée, et les résultats qu'il permet de prédire sont comparés à ceux obtenus avec le modèle SJA.

2.3.1. Principe du MME complet du comportement magnéto-élastique réversible

Le modèle multi-échelle du comportement magnéto-élastique réversible des milieux ferromagnétiques de Daniel *et al.* [Daniel-et-al_2008] est introduit dans cette section. Cette approche est inspirée des méthodes d'homogénéisation développées en élasticité. En raison de l'hétérogénéité de la structure magnéto-élastique d'un milieu ferromagnétique (voir Chapitre 1), l'excitation magnétique et la contrainte mécanique ne sont pas réparties uniformément à l'échelle des grains monocristallins du milieu. Ces valeurs locales de sollicitations magnéto-mécanique sont déterminées à partir des sollicitations macroscopiques. Une fois ces valeurs locales connues, la configuration en domaines magnétiques à l'intérieur de chaque grain cristallographique est déterminée pour définir l'aimantation et la magnétostriction locales à l'échelle des domaines. La réponse magnéto-élastique macroscopique du milieu ferromagnétique est alors obtenue par des moyennes statistiques appropriées. Comme illustré dans la [Figure 2.28](#), ce modèle exploite trois échelles spatiales d'un milieu polycristallin.

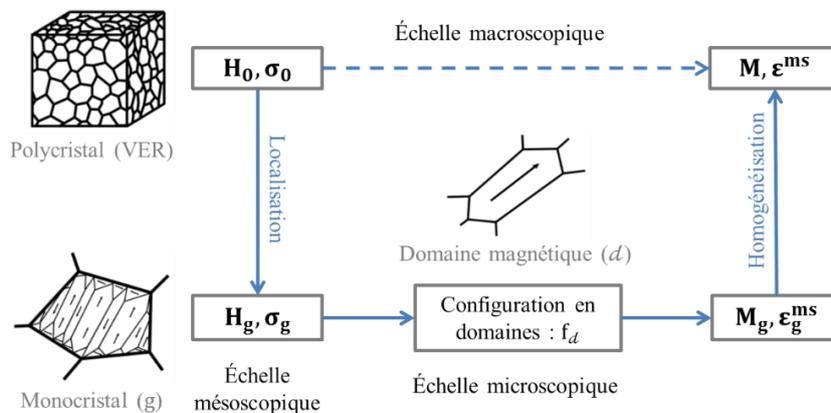


Figure 2.28 : Stratégie de modélisation multi-échelle du comportement magnéto-élastique de milieux ferromagnétiques polycristallins. Figure inspirée de [Bartok-et-al_2011].

L'échelle macroscopique considérée est un volume élémentaire représentatif (VER) du milieu polycristallin, décrit comme un agrégat de grains monocristallins d'orientations cristallines données. L'échelle mésoscopique correspond au grain monocristallin (g), décrit comme un ensemble de domaines magnétiques élémentaires d'orientation d'aimantation spécifique. L'échelle microscopique du modèle correspond au domaine magnétique (d), dans lequel l'aimantation et la déformation de magnétostriction sont supposées uniformes. Les principales étapes de calcul du MME impliquent des étapes de localisation, de modélisation magnéto-élastique microscopique, et d'homogénéisation :

- L'étape de localisation consiste à définir les valeurs locales des champs d'excitation magnétique et de contraintes mécaniques à l'échelle mésoscopique du grain ($\mathbf{H}_g, \boldsymbol{\sigma}_g$) et à l'échelle microscopique des domaines magnétiques ($\mathbf{H}_d, \boldsymbol{\sigma}_d$) à partir des sollicitations macroscopiques ($\mathbf{H}_0, \boldsymbol{\sigma}_0$). Cette opération dépend de la structure cristallographique du milieu inspecté et repose sur des règles de transition d'échelles. Les tenseurs de localisation traitant de ces transitions d'échelles sont déterminés à partir d'un problème élémentaire d'inclusions, dans lequel chaque grain monocristallin est considéré comme une inclusion au sein d'un milieu homogène équivalent [Daniel-Corcolle_2007, Corcolle-et-al_2008]. Ces tenseurs prennent en compte la présence d'un champ magnétique démagnétisant à l'échelle du grain, et ils sont entièrement définis à partir de la connaissance des orientations cristallines du milieu polycristallin étudié.

- L'étape de modélisation microscopique repose sur un modèle réversible d'interaction magnéto-élastique. Cette étape permet la définition d'une configuration statistique moyenne en domaines magnétiques selon les sollicitations magnéto-mécaniques locales par l'introduction d'une variable interne décrivant la fraction volumique f_d des domaines magnétiques présentant une orientation d'aimantation d à l'intérieur d'un grain. En fonction de cette orientation, l'aimantation \mathbf{M}_d et le tenseur des déformations de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}}$ sont définis à partir des constantes d'aimantation et de magnétostriction à saturation le long des axes cristallographiques du grain monocristallin considéré.
- L'étape d'homogénéisation permet finalement de déterminer les réponses magnéto-élastiques globales à l'échelle macroscopique à partir des valeurs locales d'aimantation \mathbf{M}_g et de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}_g^{\text{ms}}$ par l'intermédiaire de moyennes statistiques sur l'ensemble des grains monocristallins constituant le VER du milieu polycristallin étudié et mettant à profit des tenseurs d'homogénéisation en lien avec l'étape de localisation. Cette dernière étape fournit les propriétés effectives d'aimantation \mathbf{M} et de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ du milieu polycristallin en réponse aux sollicitations macroscopiques extérieures $(\mathbf{H}_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$.

Avec un bon accord simulation-expérience, cette approche multi-échelle prédit l'influence d'une excitation magnétique d'orientation quelconque et d'un état de contraintes mécaniques éventuellement multi-axiales sur les intensités et les composantes vectorielles du champ d'aimantation macroscopique et tensorielles des déformations macroscopiques de magnétostriction. Cet aspect vectoriel représente un avantage déterminant par rapport au modèle SJA. Cependant l'utilisation du MME complet requiert la connaissance des distributions d'orientations cristallines qui caractérisent la texture du milieu polycristallin étudié, et cette donnée expérimentale n'est en général pas disponible dans le cadre d'une application industrielle de CND par EMAT. En évitant les étapes de minimisation de la fonctionnelle d'interactions magnéto-élastiques microscopiques par l'utilisation d'une approche statistique de type Boltzmann [Buiron-et-al_1999] et en simplifiant les règles de transition d'échelles grâce à certaines hypothèses d'uniformité des champs et sollicitations selon l'échelle d'étude, les temps de calculs numériques du MME sont réduits par rapport aux modèles micromagnétiques, mais restent contraignants en vue d'une implémentation dans un logiciel comme CIVA. Ce sont les raisons pour lesquelles une approche simplifiée [Daniel-et-al_2015] du MME complet est préférée dans cette étude ; ce modèle simplifié est décrit dans le paragraphe suivant.

2.3.2. MME simplifié du comportement magnéto-élastique réversible

L'approche simplifiée du modèle multi-échelle complet est utilisée afin de réduire le temps de calcul, de faciliter l'implémentation, et de minimiser le nombre de paramètres nécessaires à l'estimation des lois anhystériques d'aimantation et de magnétostriction. Une telle simplification a d'abord été proposée pour des configurations 2D [Bernard-et-al_2011] avant d'être étendue à des cas 3D [Daniel-et-al_2015]. Dans cette approche, des hypothèses additionnelles sont faites afin de simplifier la représentation du milieu ferromagnétique étudié. En effet, le polycristal est décrit comme un monocristal fictif disposant d'une infinité d'axes d'aimantation privilégiés. Le milieu est ainsi constitué d'un ensemble de domaines magnétiques d'orientations aléatoires et les propriétés du monocristal fictif sont déterminées à partir des propriétés macroscopiques. L'énergie de cette distribution de domaines est définie comme la somme de trois contributions principales : une énergie magnétostatique W^{ma} , une énergie magnéto-élastique W^σ , et une énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W^{an} . L'aimantation

d'un domaine (d) est définie par $\mathbf{M}_d = M_s \mathbf{m}_d$, avec \mathbf{m}_d la direction d'aimantation du domaine (vecteur unitaire), et l'énergie locale W_d de ce domaine peut s'écrire :

$$W_d(\mathbf{m}_d) = W_d^{\text{ma}} + W_d^{\sigma} + W_d^{\text{an}}, \quad \text{avec : } \begin{cases} W_d^{\text{ma}}(\mathbf{m}_d) = -\mu_0 M_s \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{m}_d, \\ W_d^{\sigma}(\mathbf{m}_d) = -\boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}}(\mathbf{m}_d), \\ W_d^{\text{an}}(\mathbf{m}_d) = W_d^{\text{an}}(K_i, \mathbf{m}_d). \end{cases} \quad (2.30)$$

Dans cette relation, \mathbf{H}_0 et $\boldsymbol{\sigma}_0$ désignent les sollicitations magnétiques et mécaniques. L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline W_d^{an} du domaine (d) peut prendre différentes formes selon la structure cristalline considérée, et dépend des constantes d'anisotropie K_i et de la direction d'aimantation \mathbf{m}_d . Cette énergie permet la prise en compte d'effets d'anisotropie cristalline et de texture cristallographique. Le tenseur (d'ordre deux) de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}}$ du domaine magnétique (d) est défini à partir de la constante de magnétostriction à saturation λ_s du milieu selon la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}} = \frac{3\lambda_s}{2} \left(\mathbf{m}_d \otimes \mathbf{m}_d - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right). \quad (2.31)$$

En notant V le volume du milieu, la fraction volumique f_d de domaines magnétiques d'aimantation alignée dans la direction du vecteur unitaire \mathbf{m}_d est définie par une loi statistique de type Boltzmann :

$$f_d(\mathbf{m}_d) = \frac{\exp(-A_s W_d(\mathbf{m}_d))}{(1/V) \int_V \exp(-A_s W_d) dV}. \quad (2.32)$$

Dans cette relation, A_s est un paramètre matériau d'ajustement défini à partir de la pente à l'origine χ_0 de la courbe d'aimantation anhystérique (à contrainte mécanique nulle) et de l'aimantation à saturation M_s selon la relation : $A_s = 3\chi_0/\mu_0 M_s^2$. À partir des fractions volumique f_d , les lois anhystériques de comportements macroscopiques d'aimantation \mathbf{M} et de déformation de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ du milieu s'obtiennent par moyennes volumiques sur l'ensemble de la distribution de domaines magnétiques, et donc sur l'ensemble des directions locales d'aimantation \mathbf{m}_d :

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{M}_d \rangle = \frac{1}{V} \int_V f_d \mathbf{M}_d dV, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V f_d \boldsymbol{\varepsilon}_d^{\text{ms}} dV. \quad (2.33)$$

En pratique, ces intégrales sont calculées numériquement, en discrétisant la sphère unité pour décrire les orientations possibles des directions locales d'aimantation \mathbf{m}_d .

Naturellement, les simplifications apportées au MME complet sont fortes, et ne permettent pas de décrire avec précision la grande variété de propriétés magnéto-élastiques des milieux ferromagnétiques. Une surestimation des lois de comportement magnétique est par exemple observée dans [Dahia-et-al_2015]. Cependant, pour un milieu macroscopiquement isotrope, seuls trois paramètres (M_s, λ_s, χ_0) sont nécessaires pour prédire les lois anhystériques macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction par le MME simplifié. Le nombre réduit de paramètres d'entrée en fait un modèle très pratique. De plus, ces trois paramètres d'entrée sont directement mesurables dans des expériences réalisées à contrainte mécanique nulle. Cela simplifie considérablement l'utilisation de ce modèle, et le rend plus 'physique'. Enfin, le MME simplifié (comme le complet) présente l'avantage majeur d'être vectoriel et prédictif. Il n'est pas nécessaire de réaliser de nouveaux essais expérimentaux lorsque les conditions de sollicitations magnéto-mécaniques (orientation, multi-axialité) changent. Ainsi, ce modèle prédit l'influence d'une excitation magnétique vectorielle et d'un état de contraintes multi-axiales (d'orientations relatives

quelconques) sur les courbes magnéto-élastiques macroscopiques anhystériques d'un milieu ferromagnétique à partir de trois constantes physiques facilement mesurables.

2.3.3. Utilisation du MME simplifié à partir de mesures expérimentales

Le MME simplifié a été implémenté afin d'étudier les prédictions de comportement qu'il permet. Lors de la thèse de Rouge [Rouge_2013], des mesures anhystériques d'aimantation et de magnétostriction de différents échantillons ferromagnétiques ont été effectuées (Chapitre 1). Ces courbes expérimentales sont utilisées pour déterminer les paramètres (M_s, λ_s, A_s) d'entrée du modèle. Les valeurs de ces paramètres pour des échantillons d'acier inoxydable (Z20C13) et de nickel (pur) sont fournies dans la Table 2.4. Les courbes anhystériques d'aimantation et de magnétostriction prédites par le MME simplifié, ainsi que leurs variations sous l'effet d'une contrainte mécanique (ici uni-axiale et alignée dans la direction d'excitation magnétique) sont illustrées sur les Figure 2.29 et Figure 2.30.

Matériau	M_s [$A \cdot m^{-1}$]	λ_s [-]	A_s [$m^3 \cdot J^{-1}$]
Nickel (pur)	$4,2 \cdot 10^5$	$-2,4 \cdot 10^{-5}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$
Acier inox (Z20C13)	$1,1 \cdot 10^6$	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$

Table 2.4 : Paramètres du MME simplifié dans du nickel (pur) et de l'acier inoxydable (Z20C13).

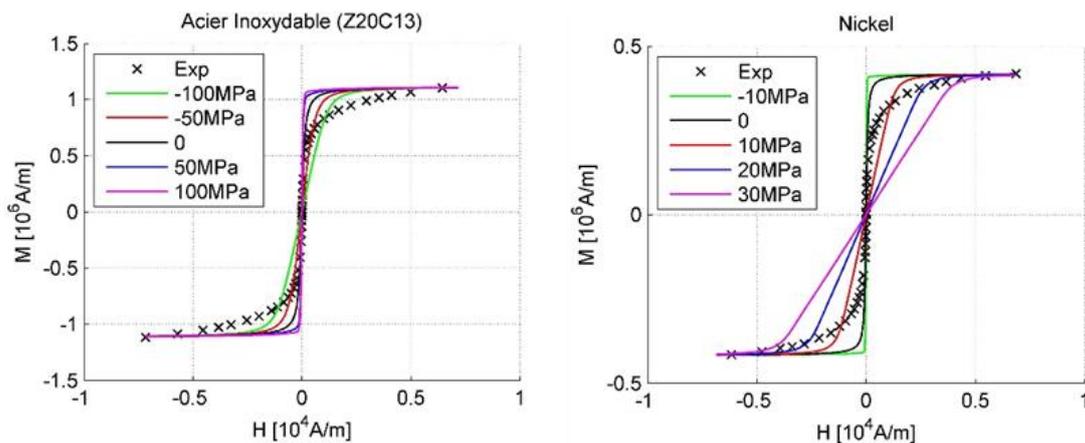


Figure 2.29 : Courbes anhystériques d'aimantation d'un acier inoxydable (gauche) et du nickel (droite) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le MME simplifié.

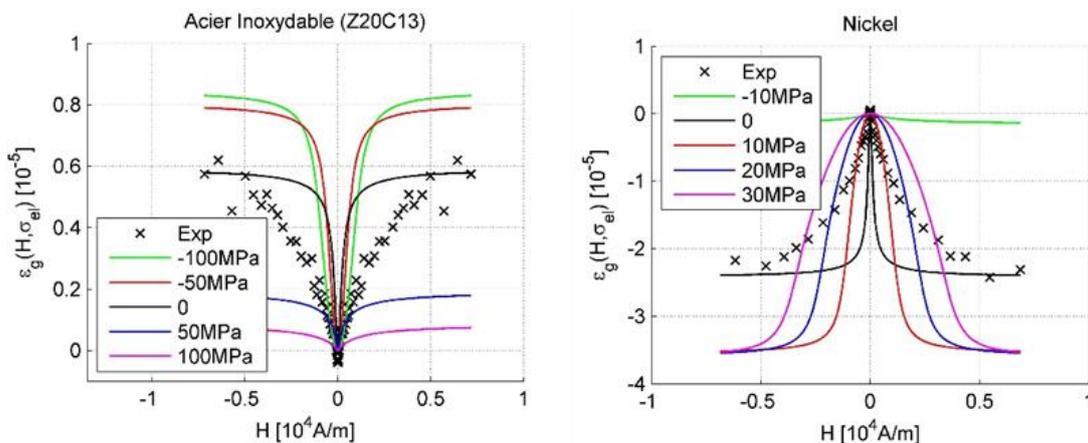


Figure 2.30 : Courbes anhystériques de magnétostriction d'un acier inoxydable (gauche) et du nickel (droite) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le MME simplifié.

Le MME simplifié surestime les coudes de saturation (tels que définis par la zone 3 sur la [Figure 1.11](#)) des courbes anhystériques expérimentales d'aimantation et de magnétostriction à contrainte nulle : les courbes prédites saturent à des intensités d'excitation magnétiques plus faibles que celles mesurées. Cet effet pourrait être associé à l'influence du champ démagnétisant de l'échantillon testé (section 1.2.3 du Chapitre 1). Il est également important de remarquer que les conditions expérimentales des essais de Rouge [\[Rouge_2013\]](#) ne sont pas pleinement maîtrisées, notamment les orientations des champs, l'anisotropie des milieux, la présence de contraintes résiduelles. En effet, les contraintes mécaniques ont un fort impact sur ces courbes anhystériques, comme le montre l'influence d'une contrainte uni-axiale sur les [Figure 2.29](#) et [Figure 2.30](#). Ainsi, la présence de contraintes résiduelles, potentiellement multi-axiales, issues du processus de fabrication des éprouvettes testées fausserait l'estimation des paramètres d'entrée du MME simplifié. Cette remarque permet d'insister sur la préparation des échantillons ferromagnétiques en vue de leur caractérisation magnéto-élastique.

2.3.4. Prise en compte de l'effet ΔE dans le MME simplifié

Les courbes anhystériques de magnétostriction de la [Figure 2.30](#) sont représentées sous leur forme conventionnelle, à savoir une déformation de magnétostriction nulle à excitation magnétique nulle, comme dans la [Figure 2.26](#). Cette représentation implique que la magnétostriction à saturation dépend du niveau de contraintes mécaniques, ce qui n'est théoriquement pas le cas. En réalité, la déformation de magnétostriction à champ magnétique nul n'est pas systématiquement nulle selon le niveau de contraintes mécaniques. Ce phénomène est associé à la déformation spontanée de magnétostriction qui apparaît lors de l'application d'une contrainte mécanique sur le milieu en absence de champ magnétique, ce qui est l'origine à l'effet ΔE mentionné dans le Chapitre 1. En effet, l'existence d'une déformation spontanée de magnétostriction explique les variations relatives de module d'Young d'un milieu ferromagnétique entre un état désaimanté et un état magnétique saturé [\[Daniel-Hubert_2009\]](#). Le MME simplifié rend compte de cet effet ΔE , et les courbes de magnétostriction de la [Figure 2.30](#) ont en réalité subi un traitement pour ôter cet effet et les rendre comparable aux courbes classiquement représentées dans la littérature. Le comportement anhystérique réel des déformations de magnétostriction soumis à différents chargements mécaniques est représenté dans le cas du nickel sur la [Figure 2.31](#), avec en parallèle les variations de la déformation de magnétostriction $\varepsilon_g^{ms}(0, \sigma)$ à champ magnétique nul en fonction du niveau de contraintes mécaniques, illustrant l'effet ΔE du matériau inspecté.

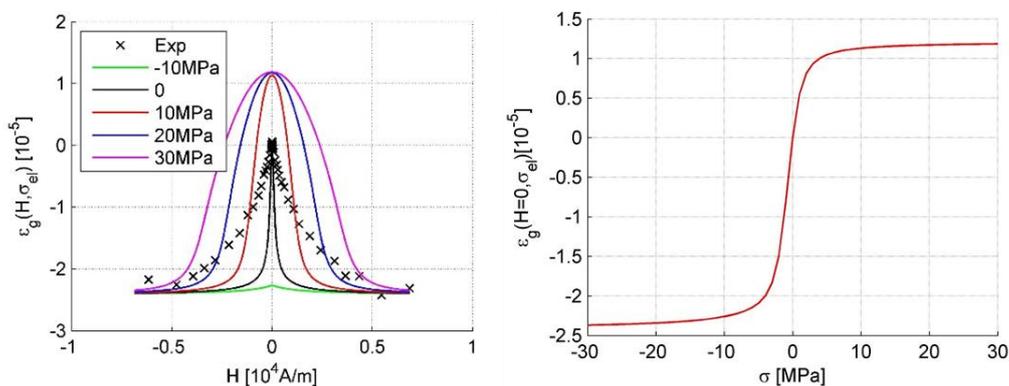


Figure 2.31 : Effet ΔE dans du nickel. Déformations anhystériques de magnétostriction non traitées (gauche) et variations de la magnétostriction à champ magnétique nul en fonction d'une contrainte mécanique uni-axiale (droite).

Dans la suite, cet effet est systématiquement retiré des courbes de magnétostriction simulées. Pour vérifier la précision des prédictions de comportement magnéto-élastique du MME simplifié, ses

prédictions sont comparées à celles obtenues avec le modèle SJA décrit précédemment, pour lequel les courbes anhystériques d'aimantation et de magnétostriction des milieux testés ont été caractérisées par l'expérience en fonction d'un état de contraintes uni-axiales pour déterminer ses paramètres d'entrée.

2.3.5. Comparaisons entre le MME simplifié de Daniel et le modèle SJA

Pour comparer les résultats prédits par les modèles SJA et MME simplifié, il est nécessaire dans un premier temps d'établir les relations entre les différents paramètres d'entrée de ces modèles.

2.3.5.1. Relations entre les paramètres d'entrée des deux modèles de comportement

Les deux modèles de comportement présentés ont pour paramètre d'entrée commun l'aimantation à saturation M_s . On peut ensuite définir les relations entre les paramètres (λ_s, A_s) du MME simplifié et ($a, \alpha, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$) du modèle SJA en comparant à contrainte mécanique nulle les pentes à l'origine χ_0 des courbes anhystériques d'aimantation et les déformations de magnétostriction à saturation (lorsque le matériau est aimanté à saturation M_s) selon les deux modèles de comportement :

$$\chi_0 = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0, \sigma=0} = \begin{cases} \frac{M_s}{3a - \alpha} & \text{[SJA]}, \\ \frac{\mu_0 M_s^2 A_s}{3} & \text{[MME]}, \end{cases} \quad \text{d'où : } A_s = \frac{3}{\mu_0 M_s (3a - \alpha)}. \quad (2.34)$$

$$\lambda_s \underset{\text{MME}}{=} \varepsilon^{\text{ms}}(M = M_s, \sigma = 0) \underset{\text{SJA}}{=} \gamma_{11} M_s^2 + \gamma_{21} M_s^4 \quad (2.35)$$

Les paramètres d'entrée du modèle SJA de l'acier inoxydable (AISI 410) et du nickel (recuit) (Table 2.2 et Table 2.3) définissent ainsi des paramètres d'entrée pour le MME simplifié (Table 2.5). On peut donc comparer directement les prédictions des comportements anhystériques d'aimantation et de magnétostriction sous sollicitations magnétiques et mécaniques uni-axiales et colinéaires des deux modèles pour des échantillons d'acier inoxydable (AISI410) et de nickel (recuit).

Matériau	M_s [$A \cdot m^{-1}$]	λ_s [-]	A_s [$m^3 \cdot J^{-1}$]
Nickel (recuit)	$5,3 \cdot 10^5$	$-4,2 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Acier inox (AISI 410)	$1,65 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$

Table 2.5 : Paramètres d'entrée du MME simplifié du nickel et de l'acier inoxydable d'après les paramètres du modèle SJA.

2.3.5.2. Comparaisons des modèles pour les données de l'acier inoxydable (AISI 410)

Les figures Figure 2.32 et Figure 2.33 comparent les courbes anhystériques d'aimantation, prédites par les modèles SJA et MME simplifié, en fonction du champ magnétique appliqué et d'un état de contrainte mécanique uni-axiale d'un échantillon d'acier inoxydable (AISI 410). L'influence des contraintes sur l'aimantation de cet acier est prédite de façon similaire par ces deux modèles selon la nature de la sollicitation mécanique : une contrainte de traction ($\sigma > 0$) améliore la qualité d'aimantation du milieu, tandis qu'une contrainte de compression ($\sigma < 0$) la détériore. Les prédictions obtenues des variations d'aimantation lorsque l'acier considéré est soumis à une contrainte de traction sont très proches, tandis que des différences entre ces deux modèles apparaissent dans le cas d'une contrainte de compression. De manière générale, on observe que la saturation des courbes d'aimantation apparaît à des intensités d'excitation magnétique plus faibles dans le MME simplifié que dans le modèle SJA.

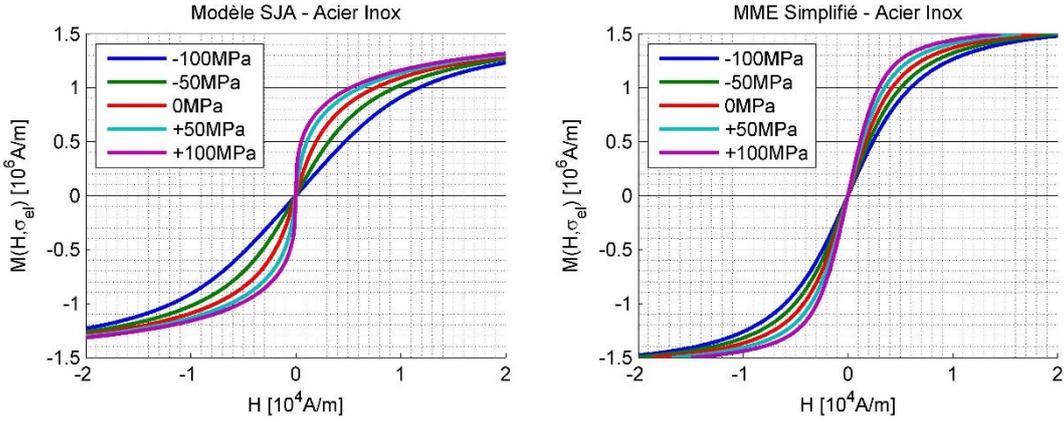


Figure 2.32 : Courbes anhystériques d'aimantation d'un acier inoxydable (AISI410) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

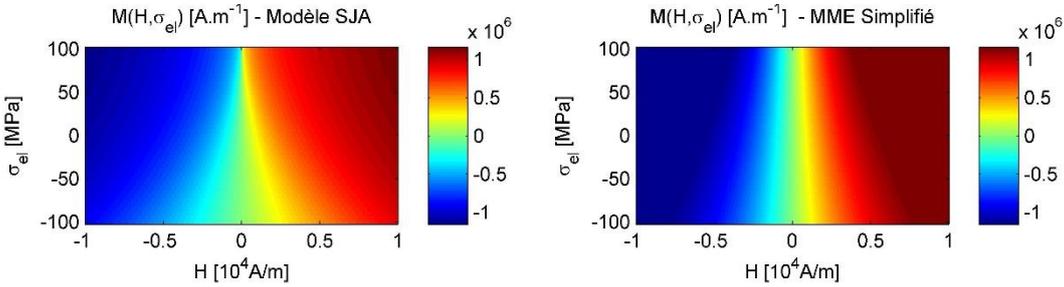


Figure 2.33 : Cartographies des courbes anhystériques d'aimantation d'un acier inoxydable (AISI410) en fonction du champ magnétique et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

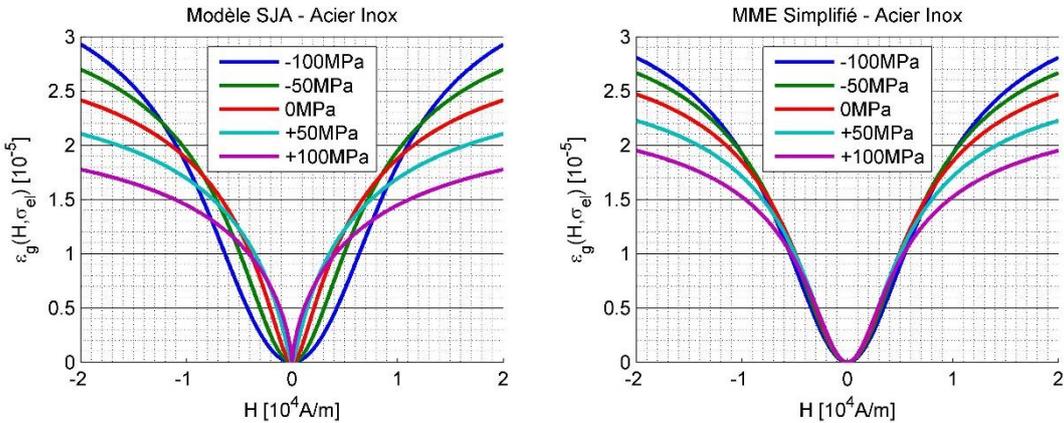


Figure 2.34 : Courbes anhystériques de magnétostriction d'un acier inoxydable (AISI410) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

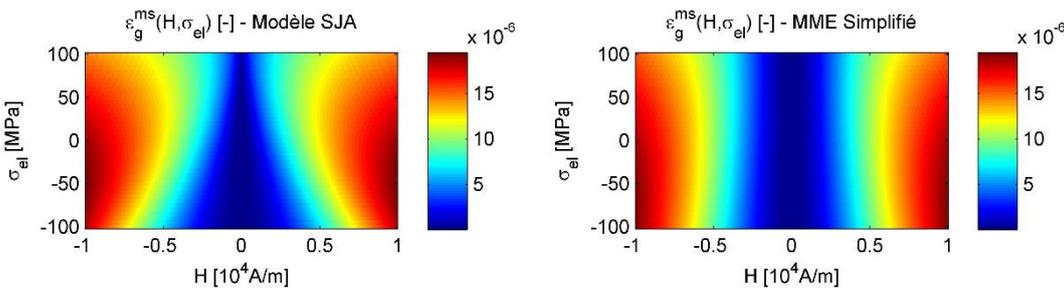


Figure 2.35 : Cartographies des courbes anhystériques de magnétostriction d'un acier inoxydable (AISI410) en fonction du champ magnétique et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

Les figures [Figure 2.34](#) et [Figure 2.35](#) comparent les courbes anhystériques de déformation de magnétostriction de l'acier inoxydable (AISI 410) en fonction de sollicitations magnéto-mécaniques dans la même gamme que celle considérée pour les courbes d'aimantation. L'influence d'une contrainte mécanique sur la magnétostriction anhystérique de ce milieu est quantitativement très bien reproduite par le modèle multi-échelle simplifié, à la fois pour des chargements mécaniques en traction et en compression. On peut remarquer que la courbe anhystérique de magnétostriction sature pour des intensités d'excitation magnétique plus faibles dans le MME simplifié que dans le modèle SJA, tout en respectant l'ordre des points d'intersection des différentes courbes et les valeurs à saturation en fonction du niveau de contraintes mécaniques appliquées.

Les variations de la susceptibilité anhystérique initiale χ_0 et de la déformation de magnétostriction à saturation $\varepsilon_{\text{sat}}^{\text{ms}}$ en fonction d'un état de contraintes uni-axiales (en compression et en traction) sont extraites des précédentes figures, et sont comparées sur la [Figure 2.36](#) selon le modèle de comportement utilisé. Cette figure atteste d'un écart significatif entre les deux modèles sur l'estimation de la susceptibilité χ_0 lorsque le milieu est soumis à une contrainte de traction, le modèle SJA indiquant une forte augmentation de cette caractéristique comparée aux prédictions du MME simplifié. En revanche, les variations de la déformation de magnétostriction à saturation issues des deux modèles sont quantitativement très similaires, que ce soit dans le cas de contraintes de compression ou de traction.

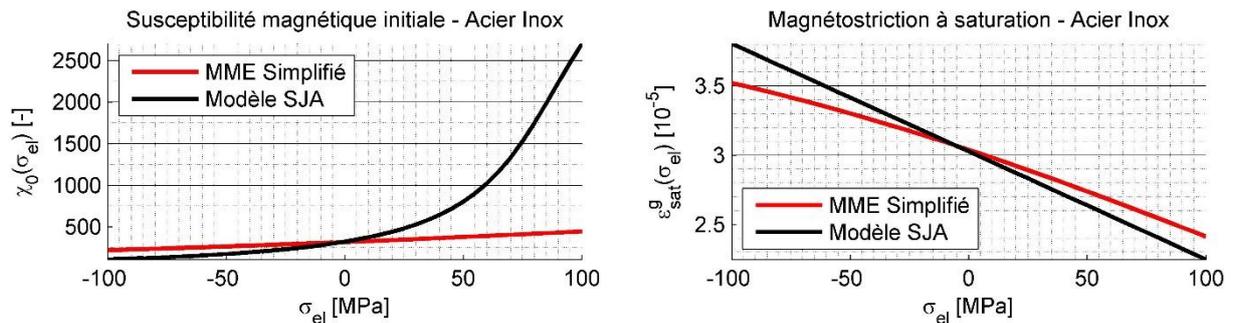


Figure 2.36 : Comparaisons des variations de la susceptibilité anhystérique initiale (gauche) et de la magnétostriction à saturation (droite) d'un acier inoxydable (AISI410) en fonction d'un niveau de contraintes mécaniques uni-axiales.

Ces écarts de prédiction entre les deux modèles, notamment la saturation du comportement magnéto-élastique est prédite par le MME simplifié à des intensités d'excitation magnétique plus faibles que celle décrite par le modèle SJA, peuvent venir d'une mauvaise maîtrise des champs démagnétisants dans le modèle de comportement (section 1.2.3 du Chapitre 1). De plus, le paramètre η introduit dans le MME simplifié [Daniel-et-al_2015] pour traduire les effets non-monotones des contraintes mécaniques sur les courbes de comportements magnétique et magnétostrictif n'est pas considéré dans cette étude (car difficilement identifiable). Néanmoins, les prédictions de lois anhystériques d'aimantation et de déformations de magnétostriction obtenues par ces deux modèles restent similaires.

2.3.5.3. Comparaisons des modèles pour les données du nickel (recuit)

Les figures [Figure 2.37](#) - [Figure 2.41](#) reproduisent la même étude comparative entre le modèle SJA et le MME simplifié dans le cas d'un échantillon de nickel (recuit) que celle effectuée au paragraphe précédent pour l'acier inoxydable (AISI410). On peut observer sur ces figures un très bon accord entre les prédictions obtenues par ces deux modèles de comportement magnéto-élastique.

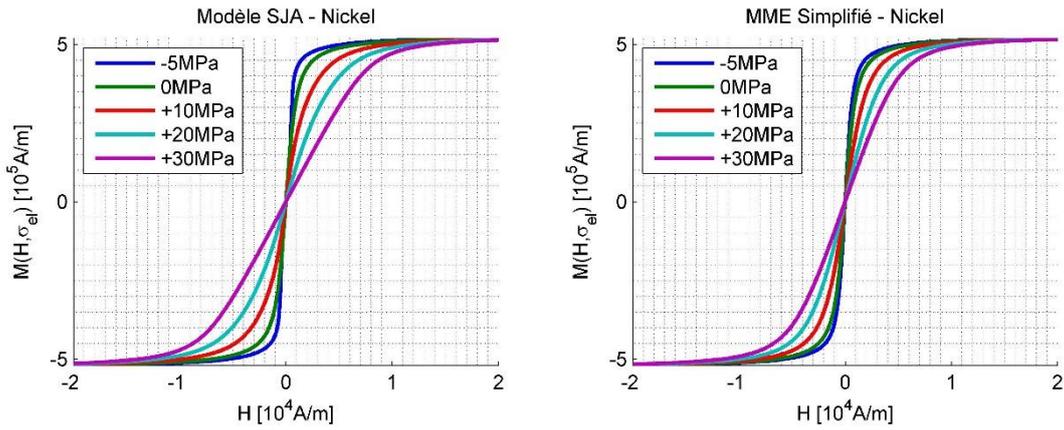


Figure 2.37 : Courbes anhystériques d'aimantation d'un nickel (recuit) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

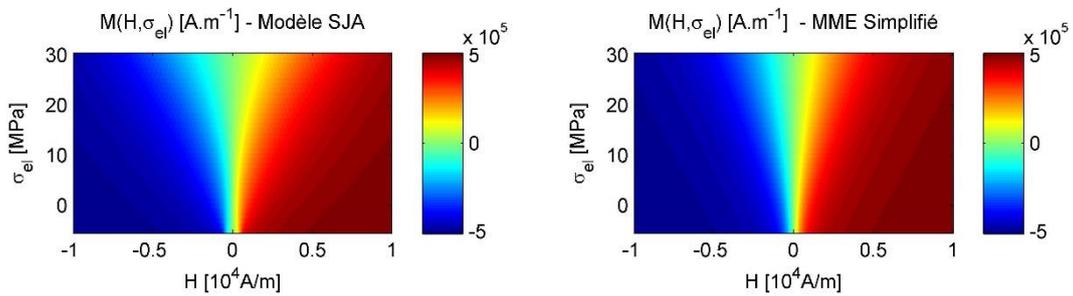


Figure 2.38 : Cartographies des courbes anhystériques d'aimantation d'un nickel (recuit) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

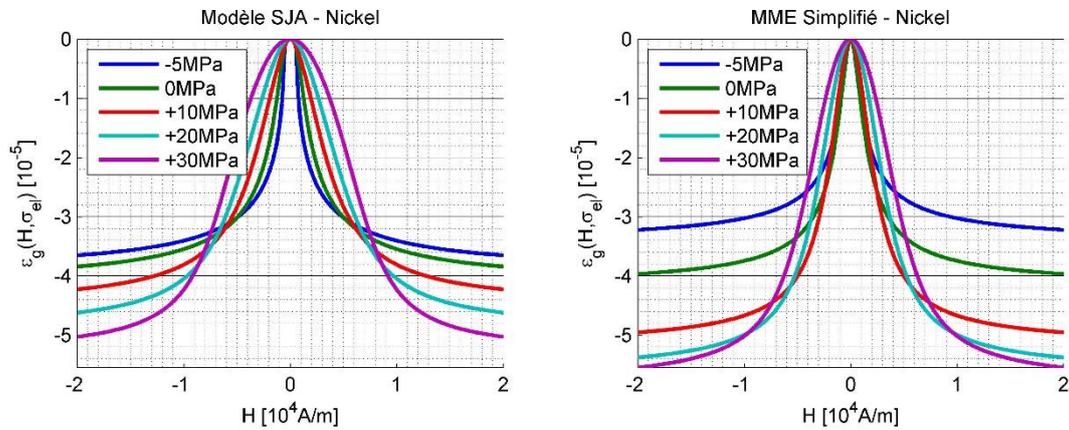


Figure 2.39 : Courbes anhystériques de magnétostriction d'un nickel (recuit) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

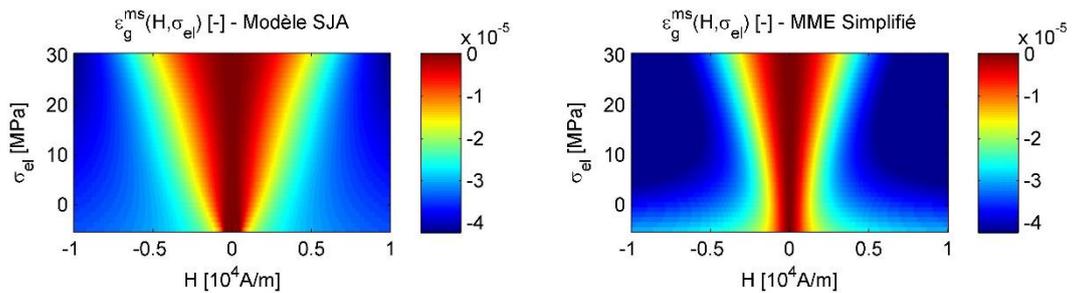


Figure 2.40 : Cartographies des courbes anhystériques de magnétostriction d'un nickel (recuit) en fonction du champ magnétique appliqué et d'une contrainte mécanique uni-axiale d'après le modèle SJA (gauche) et le MME simplifié (droite).

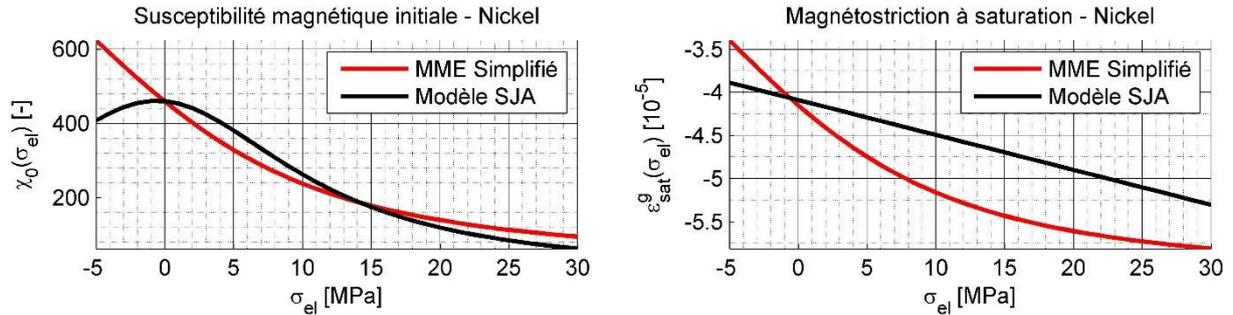


Figure 2.41 : Comparaisons des variations de la susceptibilité anhystérique initiale (gauche) et de la magnétostriction à saturation (droite) d'un nickel (recuit) en fonction d'un niveau de contrainte mécanique uni-axiale.

Bien que les coudes de saturation de l'aimantation et de la magnétostriction soient une nouvelle fois prédits pour des champs magnétiques d'intensités légèrement plus faibles avec le MME simplifié, les courbes anhystériques d'aimantation et de magnétostriction déterminées par le modèle SJA sont quantitativement très bien reproduites par le MME simplifié pour ce milieu. Un écart entre les deux modèles apparaît dans le cas de contraintes de compression sur les susceptibilités anhystériques initiales. Bien que l'effet des contraintes mécaniques sur les propriétés magnétiques peut être non-monotone dans certains milieux, cet écart est à prendre avec du recul car le modèle SJA a une validité moindre dans cette gamme de contraintes (Figure 2.27).

2.3.6. Prédiction de l'effet des contraintes mécaniques multi-axiales sur les propriétés magnéto-élastiques

Un des avantages majeurs du modèle multi-échelle simplifié tient à sa capacité à prédire l'influence d'un état de contraintes mécaniques multi-axiales sur les propriétés magnéto-élastiques anhystériques d'un milieu ferromagnétique. Pour illustrer cette capacité, on considère ici la situation où l'excitation magnétique extérieure est dirigée selon l'axe z et où la sollicitation mécanique est multi-axiale :

$$\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Une telle configuration de sollicitations magnéto-mécaniques n'est bien entendu pas traitable par le modèle SJA décrit dans la section 2.2. Les variations prédites par le MME simplifié de la susceptibilité anhystérique initiale χ_0 et de la déformation de magnétostriction à saturation $\varepsilon_{\text{sat}}^{\text{ms}}$ en fonction de ces sollicitations magnéto-mécaniques multi-axiales sont représentées sur les figures Figure 2.42 et Figure 2.43, pour des échantillons d'acier inoxydable AISI 410 et de nickel recuit, avec les paramètres d'entrée listés dans la Table 2.5. Ces figures mettent en évidence la grande variabilité des propriétés magnétiques et magnétostrictives d'un milieu ferromagnétique en fonction des différentes composantes tensorielles des contraintes mécaniques du milieu, et prouvent l'importance de prendre en compte la multi-axialité des sollicitations mécaniques dans le modèle de comportement magnéto-élastique.

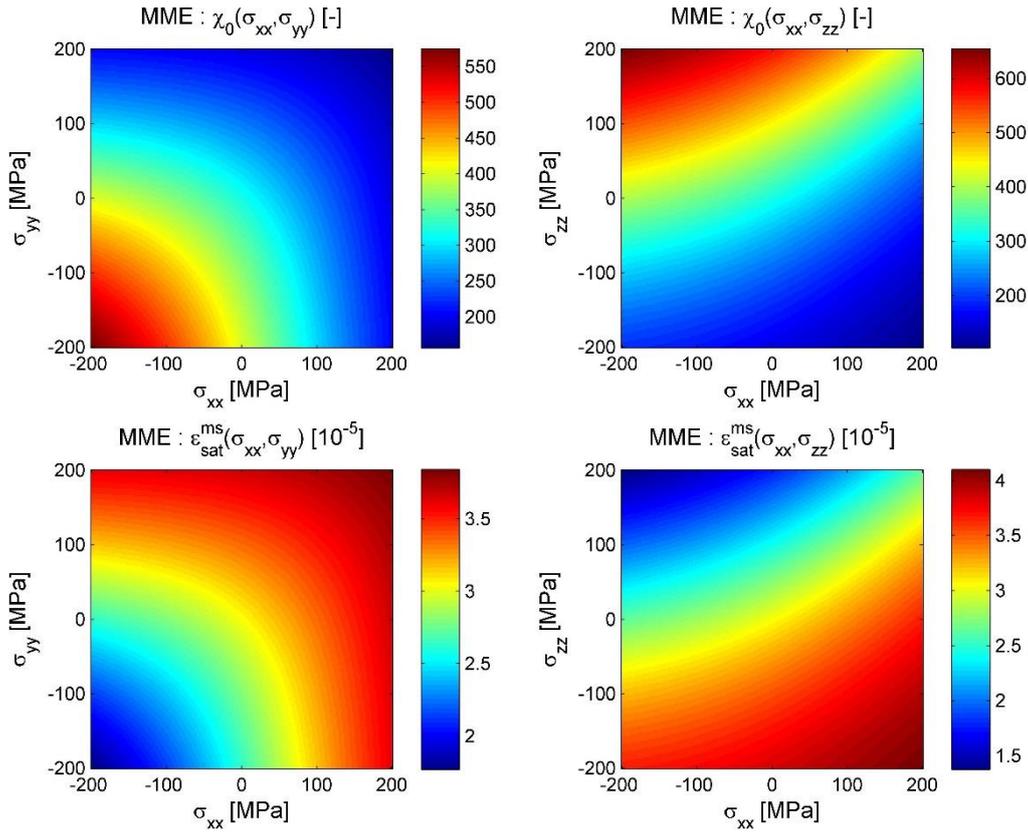


Figure 2.42 : Influence des contraintes bi-axiales $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, 0)$ (gauche) et $(\sigma_{xx}, 0, \sigma_{zz})$ (droite) sur la susceptibilité anhystérique initiale (haut) et la magnétostriction à saturation (bas) d'un échantillon d'acier inoxydable (AISI 410).

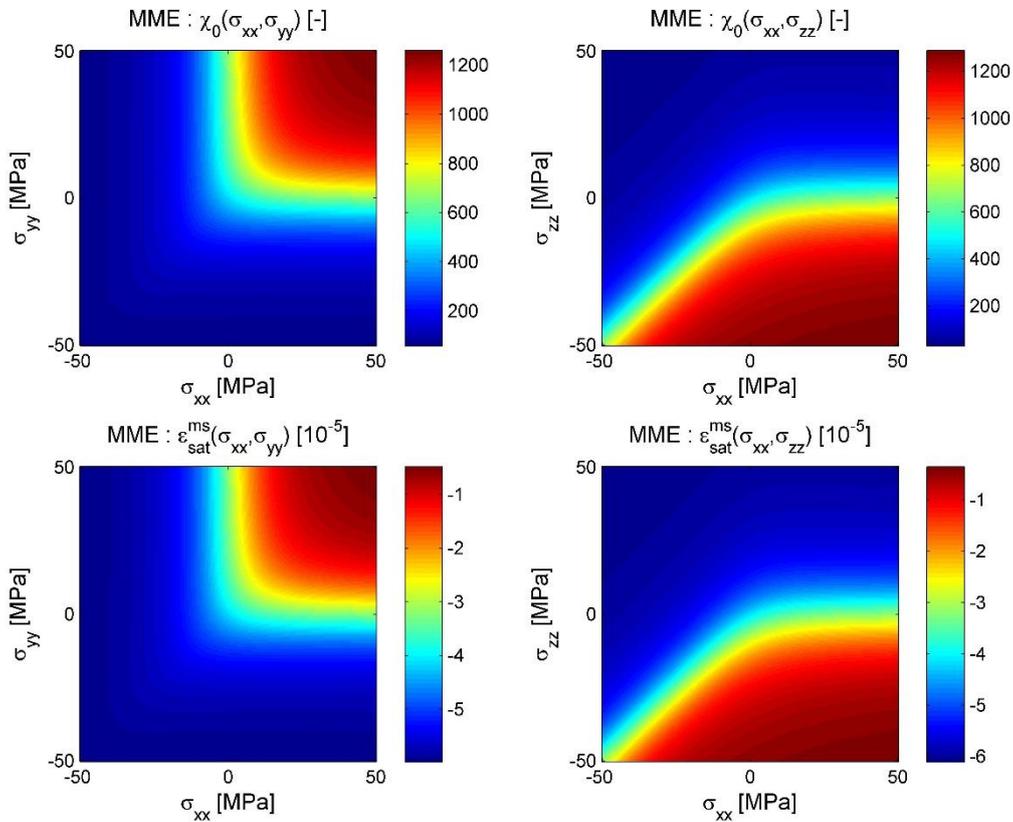


Figure 2.43 : Influence des contraintes bi-axiales $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, 0)$ (gauche) et $(\sigma_{xx}, 0, \sigma_{zz})$ (droite) sur la susceptibilité anhystérique initiale (haut) et la magnétostriction à saturation (bas) d'un échantillon de nickel (recuit).

Pour les deux matériaux, les variations de χ_0 et $\varepsilon_{\text{sat}}^{\text{ms}}$ sont symétriques par rapport aux contraintes lorsque l'excitation magnétique est contenue dans le plan perpendiculaire aux contraintes mécaniques (cas $\sigma_{zz} = 0$ avec $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$, représenté sur les figures de gauche). Dans le cas où l'excitation magnétique est contenue dans le plan des contraintes (cas $\sigma_{yy} = 0$, illustré sur les figures de droite), l'anisotropie magnéto-élastique induite par cet état de contraintes mécaniques est flagrante (discutée dans la section 1.4 du Chapitre 1).

Dans les exemples de cette section, les milieux ferromagnétiques testés sont supposés isotropes. Cette hypothèse peut être simplement levée par l'ajout d'une anisotropie magnéto-cristalline dans le MME simplifié, dès lors que les constantes d'anisotropie K_i sont connues. Cette facilité de prise en compte de l'anisotropie du milieu étudié tranche avec l'extension anisotrope du modèle SJA qui nécessite de nouveaux essais expérimentaux pour re-calibrer les paramètres d'entrée du modèle dans ce contexte anisotrope. Cette remarque permet d'insister une nouvelle sur l'aspect pratique prédictif très avantageux du modèle MME simplifié.

Conclusion du chapitre

Trois stratégies différentes de la littérature permettant de modéliser les lois macroscopiques de comportements magnéto-élastiques anhystérétiques couplés d'un milieu ferromagnétique ont été étudiées dans ce chapitre.

Malgré la précision des prédictions obtenues, l'approche micromagnétique ne répond pas aux problématiques de cette étude, impliquant des temps de calculs importants à l'échelle macroscopique d'intérêt et nécessitant une connaissance précise de la microstructure du milieu étudié. Sa description offre cependant un éclairage précieux sur les différents termes d'énergie qui permettent de représenter les interactions magnéto-élastiques à l'échelle microscopique d'un milieu ferromagnétique, ce qui permet d'introduire naturellement les principes de construction théorique des approches phénoménologiques et multi-échelles de la littérature. Le modèle phénoménologique de Sablik-Jiles-Atherton est une extension magnéto-mécanique du modèle de comportement magnétique de Jiles-Atherton largement répandu dans la littérature. Sa mise en œuvre numérique est simple (résolution d'une équation implicite) et il garantit de bonnes prédictions de comportements magnétique et magnétostrictif anhystérétiques en un temps de calcul raisonnable et à partir d'un nombre relativement restreint de paramètres d'entrée. En revanche, ces paramètres ne sont pas tous facilement accessibles et doivent être identifiés à partir d'essais expérimentaux de caractérisation magnéto-élastique sous contrainte mécanique. L'approche phénoménologique est ainsi pertinente pour prédire les lois de comportement magnéto-élastique de milieux ferromagnétiques qui ont dues être mesurées pour déterminer les paramètres d'entrée de ces prédictions (aspect non-prédictif). Le nombre de paramètres d'entrée peut en effet varier d'un milieu à un autre, et les paramètres établis dans une configuration magnéto-mécanique donnée doivent être systématiquement re-déterminés dès lors qu'un élément de cette configuration évolue (orientation différente de l'excitation magnétique, gamme d'amplitude différente de sollicitations mécaniques). Enfin, ce modèle phénoménologique est scalaire et restreint à des contraintes mécaniques uni-axiales (traction et compression simples). Cette dernière restriction est un obstacle majeur pour rendre fidèlement compte des sollicitations mécaniques complexes que subissent les milieux ferromagnétiques en environnement industriel réel. Pour lever ces limites, le modèle multi-échelle

simplifié de Daniel *et al.* a été développé suivant une approche inspirée de celle utilisée pour établir des modèles d'homogénéisation mécanique. Il est très simple à mettre en œuvre numériquement. Les trois paramètres d'entrée de ce modèle correspondent à des constantes magnétiques et magnétostrictives classiques, généralement décrites dans des tables matériaux ou facilement mesurables à partir d'essais à contrainte mécanique nulle. Les prédictions de ce modèle multi-échelle ont été comparées à celles du modèle phénoménologique SJA et sont en bon accord. Un avantage majeur de l'approche multi-échelle tient au fait qu'elle permet de prédire les lois anhystériques de comportement magnétique et magnétostrictif macroscopiques dans une très large gamme de sollicitations magnétiques vectorielles et mécaniques multi-axiales.

Les lois anhystériques de comportements magnéto-élastiques couplées ainsi prédites sont exploitées au chapitre suivant pour modéliser le point de fonctionnement magnéto-mécanique statique (imposé par l'excitation magnétique de l'aimant permanent) d'un milieu ferromagnétique lors d'un contrôle par EMAT. L'enjeu de ce chapitre est de modéliser les différentes sources de rayonnement ultrasonore induites par EMAT par l'interaction de l'excitation magnétique dynamique rayonnée avec le milieu ferromagnétique inspecté.

CHAPITRE 3

MODELISATION DES SOURCES ELECTROMAGNETO-ELASTIQUES DE RAYONNEMENT ULTRASONORE EN MILIEUX FERROMAGNETIQUES

La simulation précise d'une application de contrôle non-destructif par EMAT en milieux ferromagnétiques repose sur la modélisation rigoureuse des densités de sources électromagnéto-élastiques de transduction élastique induites dans un matériau ferromagnétique. Ces sources, d'origine électromagnétique et magnétostrictive, sont responsables du rayonnement ultrasonore transmis dans un milieu lors d'une opération de contrôle.

Différentes méthodes de formulation des densités volumiques et/ou surfaciques de sources électromagnétiques induites en milieux ferromagnétiques coexistent dans la littérature. Cette diversité de formulations est naturellement accentuée par la grande variété d'applications qui les exploitent, et chaque application ne repose pas nécessairement sur les mêmes efforts électromagnétiques exercés sur un milieu. En effet, les études macroscopiques de déplacements mécaniques de corps ferromagnétiques (supposés rigides) mettent en jeu la résultante globale de forces électromagnétiques, tandis que les études vibratoires de pièces ferromagnétiques font appel aux densités volumiques et surfaciques locales de sources électromagnétiques qui composent cette résultante globale. Chaque modèle de la littérature repose ainsi sur différentes échelles d'étude et différentes hypothèses simplificatrices qu'il est important de maîtriser dans le but de construire un modèle rigoureux de sources électromagnétiques. La modélisation des sources électromagnétiques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques fait l'objet de la section 3.1. Cette section est volontairement détaillée pour insister sur la diversité de méthodes de formulation de ces sources, pour mettre en lumière les modèles erronés rencontrés dans la littérature EMAT, et pour définir formellement une méthode théorique de référence adaptée à notre problématique industrielle et à la prise en compte des propriétés magnétiques non-linéaires caractéristiques des milieux ferromagnétiques. La section 3.2 montre que le cadre théorique formel mis en place pour la modélisation des sources électromagnétiques est également adapté à la prise en compte des sources magnétostrictives de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Finalement, ces deux sections construisent un modèle théorique de référence capable de formuler rigoureusement les densités volumiques et surfaciques de sources électromagnéto-élastiques induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. La section 3.3 détaille une méthode mathématique permettant de transformer les sources volumiques de rayonnement induites sans contact en contraintes surfaciques équivalentes, c'est-à-dire, qui approchent avec la meilleure précision possible le champ ultrasonore rayonné par les sources de volume avec un coût de calcul réduit. Cette transformation traite des matériaux élastiquement et géométriquement complexes dans le but de couvrir efficacement la plupart des configurations industrielles d'inspection ultrasonore par EMAT. Elle établit un lien direct entre les modules électromagnétique et ultrasonore disponibles dans le logiciel CIVA et en permet la réutilisation pour le calcul des champs ultrasonores rayonnés par un EMAT.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 3	81
Modélisation des sources électromagnéto-élastiques de rayonnement ultrasonore en milieux ferromagnétiques.....	81
3.1. Modèle de sources électromagnétiques de transduction ultrasonore.....	83
3.1.1. Revue des modèles de sources électromagnétiques de la littérature	85
3.1.1.1. Méthodes des sources magnétiques équivalentes.....	85
3.1.1.2. Méthode de la densité de force de Kelvin	86
3.1.1.3. Méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell.....	87
3.1.1.4. Méthode énergétique de Korteweg-Helmholtz.....	89
3.1.1.5. Densités de forces électromagnétiques dans la littérature EMAT.....	90
3.1.2. Définition énergétique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell en milieux ferromagnétiques	94
3.1.2.1. Définition des densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques.....	95
3.1.2.2. Obtention du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell par application du principe des travaux virtuels	98
3.1.2.3. Densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques.....	103
3.1.2.4. Discussions relatives aux modèles de sources électromagnétiques volumiques et surfaciques en milieux ferromagnétiques de la littérature.....	106
3.2. Modèle de densité de sources magnétostrictives.....	108
3.2.1. Tenseur des déformations macroscopiques de magnétostriction e^{ms}	109
3.2.2. Modèle de densité volumique de force équivalente de magnétostriction f^{ms}	111
3.2.3. Modèle de densité volumique de forces piézomagnétiques équivalentes	113
3.3. Méthode de transformation des sources volumiques de transduction ultrasonore en contraintes surfaciques équivalentes.....	116
3.3.1. Origines, motivations, et principes de la méthode	117
3.3.2. Contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux en milieux élastiques de géométries complexes	119
3.3.3. Application théorique de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux	124
3.3.3.1. Cas élémentaire de Thompson de sources magnétostrictives induites par EMAT	124
3.3.3.2. Validations numériques de la méthode sur le champ ultrasonore prédit	127
Conclusion du chapitre.....	130

3.1. Modèle de sources électromagnétiques de transduction ultrasonore

On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation des sources de rayonnement ultrasonore d'origine électromagnétique induites par EMAT dans un milieu ferromagnétique. Dans un premier temps, il est important d'insister sur la distinction entre les forces électromagnétiques microscopiques qui s'exercent ponctuellement sur des porteurs de charges (en mouvement), et les forces électromagnétiques macroscopiques qui s'exercent globalement à l'échelle du milieu, à l'intérieur duquel les porteurs de charges atomiques sont distribués et exercent entre eux des interactions, locales et globales. Les forces et couples élémentaires s'exerçant sur des porteurs de charge microscopiques (électrons et leurs moments) sous l'effet d'un champ électromagnétique représentent les interactions fondamentales de couplage électromagnéto-mécanique des milieux. Dans ce cadre microscopique, la force de Lorentz \mathbf{f}^L désigne la force électromagnétique (ponctuelle) qui s'exerce sur une particule chargée en mouvement (typiquement un électron). Le déplacement d'un électron, de charge e et de vitesse \mathbf{v}_e , dans l'air sous l'influence d'un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , est soumis à la force de Lorentz élémentaire qui s'exprime classiquement à l'échelle microscopique sous la forme [Maxwell_1861] :

$$\mathbf{f}^L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}). \quad (3.1)$$

L'ensemble des porteurs de charge du milieu subissent cette force élémentaire ce qui engendre une force résultante (sommée sur tous les porteurs de charges) transmise au milieu par l'intermédiaire des collisions des électrons avec sa structure cristalline [Ribichini_2011]. Cependant à l'échelle macroscopique, le milieu ferromagnétique est considéré continu et sa susceptibilité magnétique caractérise l'ensemble des dépendances physiques liées aux interactions des moments magnétiques atomiques avec la microstructure du milieu. Ainsi, dans une approche macroscopique continue, les sources électromagnétiques ponctuelles (charges, courants électriques, moments magnétiques) du milieu doivent être transformées en densités de sources électromagnétiques (volumiques et/ou surfaciques), et les forces macroscopiques (aussi appelées sources de transduction) électromagnétiques doivent être exprimées en fonction de ces densités. Cette opération est intuitivement effectuée en remplaçant les charges et courants élémentaires par leurs densités volumiques respectives. La densité volumique de force de Lorentz s'exprime alors à l'échelle macroscopique d'un milieu ferromagnétique continu à l'aide des densités de charges électriques ρ_e et de courant électrique \mathbf{J} du milieu selon la relation classique :

$$\mathbf{f}^L = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un milieu magnétique ne présentant pas de charge électrique, seule la partie magnétique de cette densité de force de Lorentz sera considérée, à savoir : $\mathbf{f}^L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Cependant, par simple sommation des contributions microscopiques, une telle approche continue néglige les interactions du champ électromagnétique avec les moments magnétiques atomiques à l'origine de l'aimantation macroscopique du milieu, ignore la géométrie de la pièce inspectée, et ne donne aucune information sur les densités surfaciques de forces pouvant intervenir à l'interface entre deux milieux de susceptibilités magnétiques différentes (par exemple un milieu ferromagnétique plongé dans l'air). C'est la raison pour laquelle les forces macroscopiques d'origine électromagnétique doivent être déterminées directement à partir de la représentation continue du milieu ferromagnétique inspecté [Henrotte-Hameyer_2004], c'est-à-dire, connaissant sa loi de comportement magnétique (sa susceptibilité) et la répartition volumique des courants induits. Il existe dans la littérature plusieurs méthodes théoriques pour formuler

les densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques exercées sur un milieu ferromagnétique. Ces méthodes reposent sur des représentations physiques ou mathématiques différentes du milieu. Comme démontré en Annexe B, elles ont en commun une même résultante globale \mathbf{F}^{em} exercée sur l'ensemble du milieu ferromagnétique Ω (de frontière $\partial\Omega$), mais postulent en revanche des densités volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} de forces électromagnétiques différentes.

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{em}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}^{\text{em}} d\Gamma. \quad (3.3)$$

Afin de prédire rigoureusement le rayonnement ultrasonore induit par un EMAT en milieu ferromagnétique, cette étude requiert la maîtrise théorique des densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques (pouvant se composer différemment dans le volume et à la surface d'un point de vue acoustique), et la connaissance de la résultante globale de forces n'est pas suffisante dans cette optique. Dans ce but, la variété de méthodes pour formuler un même phénomène physique est déroutante à appréhender d'un point de vue théorique, et de nombreux auteurs mettent en avant des éléments théoriques [Bossavit_1992, Henrotte-et-al_2004], numériques [Lee-et-al_2005], et expérimentaux [Barré_2003] pour tenter d'unifier ou de discréditer ces différentes méthodes de littérature. Cependant, les études théoriques aboutissent souvent à des conclusions mathématiques complexes à appréhender et difficilement exploitables dans l'expérience, et les études expérimentales sont difficiles à mettre en place (incertitudes relatives aux faibles déformations mécaniques généralement engendrées par des sources électromagnétiques) et permettent seulement de discriminer certaines méthodes sans pour autant conclure de manière universelle sur la bonne méthode à adopter selon l'application concernée.

La confusion théorique apportée par cette variété de modèles de forces s'illustre parfaitement dans la littérature relative à la modélisation des traducteurs EMAT en milieux ferromagnétiques. En effet, Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] identifient dans un travail récent les différences flagrantes de modèles de sources électromagnétiques exploités dans la communauté EMAT, en montrant que l'amplitude ultrasonore induite par ces sources peut différer dans de larges mesures selon le modèle utilisé et les propriétés magnétiques du milieu inspecté. L'existence de ces différents modèles de sources de transduction induites par EMAT est la conséquence directe des différentes méthodes de formulation des densités de forces magnétiques de la littérature. Les auteurs somment les contributions d'un modèle de forces de Lorentz d'une méthode donnée avec celles d'un modèle de forces magnétiques d'une autre méthode, et considèrent ou non la présence d'une densité surfacique de forces magnétiques, dont l'influence sur le comportement mécanique d'un milieu a pourtant été mise en évidence par Brown [Brown_1953] dans les années 1950. Seher et Nagy dénoncent ainsi les mauvaises pratiques (trop généralement) rencontrées dans la littérature EMAT, sans pour autant proposer d'analyse théorique des différents modèles de forces électromagnétiques de la littérature, ni définir la méthode adaptée à la prise en compte des phénomènes magnétiques non-linéaires caractéristiques des milieux ferromagnétiques.

Les principales méthodes de formulation des densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques de la littérature sont présentées dans la section 3.1.1. Cette revue est largement inspirée des travaux de [Melcher_1981], Coulomb [Coulomb_1983], Reyne *et al.* [Reyne-et-al_1987], Maugin et Trimarco [Maugin-Trimarco_2000], Lee *et al.* [Lee-et-al_2000, Lee-et-al_2005], Vandeveldé et Melkebeek [Vandeveldé-Melkebeek_2001], Barré [Barré_2003], et Sanchez-Grandia *et al.* [Sanchez-Grandia-et-al_2008]. Les travaux de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] relatifs aux bonnes et mauvaises

pratiques sont également discutés dans cette section. Ensuite, la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est rigoureusement dérivée dans la section 3.1.2 à partir d'un équilibre énergétique macroscopique du milieu inspecté en suivant les travaux de Henrotte *et al.* [Henrotte-et-al_2004, Henrotte-Hameyer_2004], et Sanchez-Grandia *et al.* [Sanchez-Grandia-et-al_2006]. Ce développement formel permet d'insister sur les fondements théoriques énergétiques de la méthode du tenseur de Maxwell, considérée comme méthode de référence dans la suite de ces travaux. Cette étude n'a pas pour objectif de remettre en cause les fondements théoriques à l'origine de la formulation des différentes méthodes, mais davantage de mettre en garde la communauté EMAT au sujet de cette diversité de modèles, d'analyser les interconnexions théoriques entre ces différentes approches, et de proposer une méthode de référence permettant la prise en compte des lois de comportements magnétiques non-linéaires caractéristiques des milieux ferromagnétiques.

3.1.1. Revue des modèles de sources électromagnétiques de la littérature

On suppose que le milieu ferromagnétique étudié est continu incompressible et on se place dans l'approximation magnétique quasi-statique (Chapitre 1). Les différentes méthodes de formulation des densités de forces électromagnétiques exercées en milieu ferromagnétique sont présentées. Pour chaque méthode, le principe de formulation et les densités volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} de forces sont décrits. Cette revue introduit également les travaux de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] mettant en garde la communauté EMAT sur les conséquences d'une utilisation inadaptée des modèles de densités de sources électromagnétiques induites en milieux ferromagnétiques.

3.1.1.1. Méthodes des sources magnétiques équivalentes

Les méthodes des sources magnétiques équivalentes sont inspirées des mécanismes microscopiques élémentaires qui s'exercent sur les électrons et leurs moments magnétiques à l'échelle atomique. Elles mettent en œuvre des distributions (fictives) de sources magnétiques qui témoignent de la présence de l'aimantation du milieu. On distingue le modèle des charges magnétiques équivalentes $\varrho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, et le modèle des courants magnétiques équivalents $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$. On parle respectivement de modèle de Chu (ou modèle de Coulomb) et de modèle d'Ampère par analogie avec leurs équivalents électriques [Vandeveld-Melkebeek_2001].

Dans le modèle des charges magnétiques équivalentes, les forces électromagnétiques volumiques $\mathbf{f}_{\varrho_m}^{\text{em}}$ et surfaciques $\mathbf{t}_{\varrho_m}^{\text{em}}$ s'écrivent [Sanchez-Grandia-et-al_2008] :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varrho_m}^{\text{em}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\varrho_m}^{\text{em}} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \{ \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \varrho_m \mathbf{H} \} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varrho_m^S \left(\mathbf{H} + \frac{1}{2} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \varrho_m = -\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{M}), \\ \varrho_m^S = \mu_0 [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}]. \end{cases}$$

Dans le modèle des courants magnétiques équivalents, les forces électromagnétiques volumiques $\mathbf{f}_{\mathbf{J}_m}^{\text{em}}$ et surfaciques $\mathbf{t}_{\mathbf{J}_m}^{\text{em}}$ s'écrivent [Sanchez-Grandia-et-al_2008] :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{j}_m}^{\text{em}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\text{j}_m}^{\text{em}} d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \} \times \mathbf{B} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{j}_m^{\text{S}} \times \left(\mathbf{B} + \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right) d\Gamma, \\
 &\quad \text{avec : } \begin{cases} \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}, \\ \mathbf{j}_m^{\text{S}} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Comme décrit en Annexe B, ces deux modèles de sources magnétiques équivalentes dérivent des formules très différentes de densités de forces électromagnétiques volumiques et surfaciques. Ils reposent en réalité sur un choix de variable pour représenter l'état magnétique du milieu étudié : le modèle des charges magnétiques est associé à la variable d'état \mathbf{H} , tandis que le modèle des courants magnétiques implique la variable d'état \mathbf{B} (Chapitre 1).

3.1.1.2. *Méthode de la densité de force de Kelvin*

Le modèle de la densité de force de Kelvin généralise à l'échelle macroscopique l'interaction élémentaire d'un moment magnétique avec le champ magnétique d'un milieu ferromagnétique. Il est notamment exploité en microscopie par forces magnétiques (MFM pour 'Magnetic Force Microscope'), où la surface d'un milieu ferromagnétique est scannée avec une aiguille ferromagnétique aimantée, permettant de former des images avec des résolutions pouvant atteindre 30 nanomètres. Le modèle d'interaction microscopique est défini par analogie avec le modèle des dipôles électriques, en représentant le moment magnétique de l'aiguille ferromagnétique comme un dipôle magnétique fictif, avec un pôle nord et un pôle sud. La force magnétique élémentaire exercée par le champ magnétique \mathbf{H} du milieu sur le dipôle magnétique ponctuel \mathbf{m} s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{\text{m}} &= \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{m}. \\
 f_{\mathbf{K}i}^{\text{m}} &= \mu_0 m_j H_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La seconde relation de (3.6) précise la notation indicielle de la définition de $\mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{\text{m}}$ (selon la convention de sommation d'Einstein). En effet, certaines erreurs de notations tensorielles ont contribué à l'élaboration de modèles erronés de transduction par EMAT en milieux ferromagnétiques dans la littérature (voir la section 3.1.1.5 sur les travaux de [Seher-Nagy_2016]). Ici, la notation indicielle de l'équation considérée sera systématiquement introduite dès lors que la notation tensorielle peut s'avérer difficile à interpréter, afin d'éviter que de telles erreurs de notations se reproduisent par la suite. Dans ce même but, un formulaire d'analyse tensorielle différentielle est proposé en Annexe A ; il recense l'ensemble des notations et identités (vectorielles et tensorielles) exploitées tout au long de ce manuscrit.

À partir de la définition de densité de force magnétique ponctuelle, la force magnétique macroscopique résultante de l'interaction d'une excitation magnétique avec l'ensemble des dipôles magnétiques du milieu ferromagnétique s'obtient en remplaçant dans (3.6) le dipôle ponctuel \mathbf{m} par l'aimantation macroscopique \mathbf{M} du milieu. Dans sa formulation initiale, ce modèle n'implique pas la densité de courants électriques du milieu. La prise en compte des courants introduit une densité de forces de Lorentz dans le modèle magnétique initial, pour définir les densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques dérivées de la méthode de Kelvin selon les relations [Melcher_1981] :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{K}}^{\text{em}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\text{K}}^{\text{em}} d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \{ \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}]^2 \mathbf{n} d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les expressions de densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques décrites par cette méthode diffèrent de celles dérivées dans le paragraphe précédent à l'aide des méthodes de sources magnétiques équivalentes (relations (3.4) et (3.5)). Notamment, la densité surfacique \mathbf{t}^{em} de la méthode de Kelvin est normale à la surface du milieu étudié (on parle de traction magnétique surfacique), tandis qu'elle comporte également des composantes tangentielles selon les méthodes des charges et courants magnétiques équivalents.

3.1.1.3. Méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell

La méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est généralement décrite dans la littérature à partir de l'expression élémentaire de la densité de force de Lorentz (3.2) en milieux amagnétiques (soumis à des courants électriques). En effet, cette densité de force peut simplement s'écrire comme la divergence d'un tenseur $\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}}$ (d'ordre deux), appelé le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, par analogie avec le tenseur des contraintes de Cauchy en mécanique. À l'aide des équations de Maxwell magnétiques quasi-statiques et de la relation constitutive $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en milieu amagnétique (Chapitre 1), la partie magnétique de la relation (3.2) se développe sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^{\text{L}} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (B^2) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} [\nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}] - \frac{1}{2\mu_0} \nabla \cdot (B^2 \mathbf{I}) \\
 &= \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right\} \\
 &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce simple développement permet de définir le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell d'un milieu amagnétique, qui peut s'écrire sous une des formes équivalentes suivantes (en notant simplement $H^2 = \|\mathbf{H}\|^2$ et $B^2 = \|\mathbf{B}\|^2$) :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0 H^2}{2} \mathbf{I} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \mathbf{I}, \\
 \sigma_{0ij}^{\text{em}} &= \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij} = \mu_0 H_i H_j - \frac{\mu_0 H^2}{2} \delta_{ij} = B_i H_j - \frac{B_k H_k}{2} \delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Selon cette représentation, la résultante macroscopique des forces de Lorentz peut s'écrire entièrement sous la forme d'une densité de forces surfaciques selon le théorème de flux-divergence :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{L}} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \tag{3.10}$$

En milieu amagnétique, cette méthode exprime ainsi la résultante macroscopique de forces électromagnétiques exclusivement à partir de forces surfaciques distribuées sur l'interface entre le milieu étudié et son milieu environnant (typiquement de l'air). Il n'est alors pas nécessaire de connaître les variations spatiales des champs magnétiques dans le volume du matériau mais uniquement sur sa surface, ce qui est très avantageux. Ce raisonnement en milieu amagnétique est très simple ; cependant, la définition formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est plus confuse dans le cas des milieux magnétiques (l'existence d'un champ d'aimantation modifie la première ligne du développement (3.8)). En faisant l'hypothèse d'un comportement magnétique linéaire et isotrope ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, avec μ constante), un raisonnement similaire permet tout-de-même d'aboutir aux expressions équivalentes suivantes du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu} \mathbf{I} = \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu H^2}{2} \mathbf{I}. \\ \sigma_{ij}^{\text{em}} &= \frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij} = \mu H_i H_j - \frac{\mu H^2}{2} \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Il faut prendre ensuite des précautions en milieu magnétique quant à l'expression formelle des densités de forces électromagnétiques par la méthode du tenseur des contraintes de Maxwell. En effet, bien que la perméabilité magnétique soit supposée constante dans le milieu dans (3.11), elle est discontinue à son interface avec un milieu environnant. Cette discontinuité est à l'origine d'une densité de forces magnétiques surfaciques (voir paragraphe 3.1.2.3). En notant $\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}}$ les contraintes de Maxwell du milieu environnant supposé amagnétique ($\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$), cette méthode formule en milieux magnétiques les densités volumique et surfacique de forces électromagnétiques suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Cependant, dès lors que le milieu magnétique n'est plus linéaire et isotrope, la définition formelle du tenseur des contraintes de Maxwell n'est pas bien maîtrisée dans la littérature. En effet, différentes expressions de ce tenseur coexistent pour traiter le cas des milieux ferromagnétiques. Ces expressions sont basées sur des produits tensoriels $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ ou $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$, qui définissent des tenseurs de Maxwell différents et asymétriques en présence d'une aimantation anisotrope (non colinéaire avec l'excitation) : $B_i H_j - H_i B_j = \mu_0 (M_i H_j - H_i M_j) \neq 0$. À titre d'exemple, la Table 3.6 liste de façon non-exhaustive des définitions divergentes du tenseur $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ en milieux ferromagnétiques rencontrées dans la littérature.

Référence de la littérature	Tenseur des contraintes de Maxwell
Pao et Yeh [Pao-Yeh_1973]	$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - (\mu_0 H^2/2)\mathbf{I}$.
Coulomb [Coulomb_1983]	$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - (\mu_0 H^2/2)\mathbf{I}$.
Billardon et Hirsinger [Billardon-Hirsinger_1995]	$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - (B^2/2\mu_0 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B})\mathbf{I}$.
Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016]	$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}/\mu_0 - (B^2/2\mu_0)\mathbf{I}$.

Table 3.6 : Exemples de la littérature de tenseurs des contraintes électromagnétiques de Maxwell en milieux magnétiques.

Pour clarifier ces divergences de définitions, la section 3.1.2 est dédiée à la définition énergétique formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell dans tout milieu ferromagnétique, et explique comment rigoureusement manipuler ce tenseur afin de modéliser les densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques induites dans ce milieu.

3.1.1.4. *Méthode énergétique de Korteweg-Helmholtz*

La méthode de Korteweg-Helmholtz fait partie des méthodes énergétiques de formulation des densités de forces électromagnétiques induites en milieu magnétique. Elle repose sur le principe des travaux virtuels appliqué à un équilibre thermodynamique défini à partir de la connaissance empirique de la susceptibilité magnétique du milieu [Melcher_1981]. Dans sa formulation générale, la méthode de Korteweg-Helmholtz exploite les relations constitutives $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\alpha_i, \mathbf{H})$ ou $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\alpha_i, \mathbf{B})$, les paramètres α_i décrivant les propriétés, éventuellement hétérogènes, du milieu étudié (comme sa susceptibilité magnétique, sa masse volumique, la concentration d'inclusions amagnétiques, etc...). La densité volumique d'énergie magnétique W d'un milieu magnétique peut alors être définie par :

$$W(\alpha_i, \mathbf{B}) = - \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\alpha_i, \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{b}. \quad (3.13)$$

La méthode suppose ensuite que le milieu subit sous l'effet des forces électromagnétiques un faible déplacement mécanique $\delta \mathbf{l}$ qui modifie sa configuration d'équilibre mécanique. À partir de critères de conservation d'énergie, la variation d'énergie magnétique δW induite par le déplacement mécanique du milieu est assimilée au travail de la densité de forces électromagnétiques $\mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}}$ induites dans le milieu :

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \delta \mathbf{B} = - \mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}} \cdot \delta \mathbf{l}. \quad (3.14)$$

Il est important de noter qu'assimiler une variation d'énergie au travail d'une force est un choix formel et non une égalité vérifiée dans tous les cas [Barré_2003]. Selon les équations de Maxwell sous l'approximation magnétique quasi-statique, des manipulations élémentaires [Melcher_1981] définissent la densité volumique de forces électromagnétiques selon la méthode de Korteweg-Helmholtz par :

$$\mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \alpha_i \nabla \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \nabla \alpha_i - \nabla \left(\alpha_i \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right). \quad (3.15)$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette expression illustre le fait que la densité de forces magnétiques se concentre principalement dans les régions du milieu qui présentent de forts gradients de propriétés α_i . En supposant que ces propriétés sont homogènes à l'intérieur du milieu (ce qui n'est jamais le cas), ce terme s'annule dans le volume. Cependant, il en dérive une densité surfacique de forces en raison du saut de propriétés du milieu à son interface avec un milieu environnant (de propriétés différentes) [Lee-et-al_2000].

En suivant le raisonnement de Barré [Barré_2003], les forces surfaciques dérivées de l'énergie magnétique du milieu sont normales à la surface et s'expriment directement comme le saut d'énergie à l'interface. On définit alors les densités de forces électromagnétiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\text{KH}}^{\text{em}} d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \alpha_i \nabla \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right) \right\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} [W(\alpha_i, \mathbf{B})]_{\partial\Omega} \mathbf{n} d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

En supposant que le milieu magnétique est homogène et linéaire, la susceptibilité magnétique χ (constante dans le matériau) représente un des paramètres α_i du milieu (propriété d'aimantation). L'énergie magnétique du milieu s'écrit alors : $W(\chi, \mathbf{B}) = B^2/2\mu_0(1 + \chi)$ et la méthode de Korteweg-Helmholtz conduit à une densité volumique de forces électromagnétiques identique à celle définie par la méthode de la densité de force de Kelvin (équation (3.7)) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \chi \nabla (-\mu_0 H^2/2) \\
 &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 \chi [(\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] \\
 &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \\
 &= \mathbf{f}_{\text{K}}^{\text{em}}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

La discontinuité de susceptibilité magnétique au passage de l'interface entre le milieu magnétique linéaire et son milieu amagnétique environnant (de l'air) induit une densité surfacique de forces magnétiques. En notant \mathbf{H}_0 le champ magnétique dans l'air, cette densité prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{\text{KH}}^{\text{em}} &= [W(0, \mathbf{B}_0) - W(\chi, \mathbf{B})] \mathbf{n} \\
 &= \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0(1 + \chi)} \right) \mathbf{n} = \left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2} - \frac{\mu_0(1 + \chi)H^2}{2} \right) \mathbf{n}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

D'après les travaux de Barré [Barré_2003], la densité surfacique de forces magnétiques est à l'origine d'une déformation élastique du milieu très proche de celle mesurée expérimentalement dans le cas d'un matériau (élastiquement mou et de faible perméabilité relative) spécifiquement conçu pour la confrontation des déformations induites par les différents modèles de forces magnétiques surfaciques. Ainsi, la méthode énergétique de formulation des densités de forces électromagnétiques implique la définition de l'énergie magnétique du milieu inspecté, et n'impose pas la linéarité du milieu magnétique. Cette méthode semble donc constituer un bon candidat pour déterminer les densités de forces électromagnétiques induites en milieux magnétiques potentiellement non linéaires.

3.1.1.5. Densités de forces électromagnétiques dans la littérature EMAT

La maîtrise des densités de forces électromagnétiques est nécessaire pour la prédiction du rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieux ferromagnétiques, et des précautions doivent être prises face à la diversité de méthodes établissant ces densités de forces présentée dans les paragraphes précédents. Au fil des années (voir Introduction), différents auteurs ont étudié la modélisation du comportement ultrasonore d'un EMAT, d'abord en milieux seulement conducteurs (amagnétiques) puis en milieux ferromagnétiques. Cependant, différents modèles de sources électromagnétiques de transduction élastique coexistent, séparant classiquement les contributions des forces de Lorentz et celles des forces d'origine purement magnétique. Il est important de noter ici que lorsque le milieu est conducteur amagnétiques ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$), les champs magnétiques sont continus au passage de l'interface entre le milieu et l'air, et toutes les formulations de la section précédente se réduisent formellement à la même densité de forces électromagnétiques, celle des forces de Lorentz magnétiques :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{L}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} d\Omega. \quad (3.19)$$

Dès lors que le milieu présente un comportement magnétique, les différentes formulations associées aux forces de Lorentz ne sont plus équivalentes ($\mathbf{J} \times \mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H}$). De plus, la présence du champ d'aimantation macroscopique induit des discontinuités magnétiques à la surface du milieu. Ces discontinuités sont à l'origine d'une densité surfacique de forces magnétiques qu'il est nécessaire de prendre en compte dans les mécanismes de transduction ultrasonore impliqués par EMAT. De même, en l'absence de courant électrique, les différentes formulations des densités de forces magnétiques sont toutes équivalentes (car le champ magnétique \mathbf{H} est alors irrotationnel). Cependant, des courants de Foucault sont induits dans le milieu lors d'une application EMAT. Il est donc essentiel d'avoir conscience de quels cadres théoriques sont issues les différentes formulations de forces électromagnétiques. En effet, de manière générale, chaque méthode exprime une contribution relative à la densité de courants \mathbf{J} pouvant être associée aux forces de Lorentz et une contribution relative à l'aimantation \mathbf{M} pouvant être associée aux forces magnétiques. Cependant, ces contributions ne sont pas identiques d'une méthode à l'autre. Ainsi, construire un modèle de transduction par EMAT basé sur une densité de force de Lorentz d'une méthode et une densité de forces magnétiques d'une autre méthode conduit naturellement à des modèles erronés de sources, et par suite à des prédictions erronées de rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieu ferromagnétique.

Le travail récent de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] a précisément pour objectif de clarifier cette situation en étudiant les différents modèles de sources électromagnétiques induites par EMAT en milieux ferromagnétiques rencontrés dans la littérature. Ils insistent sur la nature arbitraire et confuse de la séparation en forces de Lorentz et forces magnétiques, séparation communément admise par de nombreux auteurs pour traiter des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT dans ces milieux. Seher et Nagy distinguent quatre méthodes de référence de la littérature formulant les densités de forces électromagnétiques induites par EMAT en milieux magnétiques, basées principalement sur les travaux théoriques de Brown [Brown_1953, Brown_1966].

La méthode 1 (densités notées $\mathbf{f}_{\mathbf{m}1}^{\text{em}} = \mathbf{f}_{\mathbf{m}1}^{\text{L}} + \mathbf{f}_{\mathbf{m}1}^{\text{M}}$) considère simplement les interactions dites 'extérieures' du champ magnétique \mathbf{H}_0 de l'air (vérifiant $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$) avec les courants \mathbf{J} et l'aimantation \mathbf{M} du milieu inspecté sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{m}1}^{\text{em}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{ \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H}_0 + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 \} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ce modèle représente les actions extérieures exercées par l'excitation magnétique extérieure sur le milieu magnétique. Il ne prend donc pas en compte les interactions dites 'intérieures' relatives au champ magnétique interne du milieu (induit notamment par la circulation des courants et l'aimantation du milieu). Cette méthode correspond au modèle de la densité de force de Kelvin appliqué uniquement au champ magnétique extérieur. Un terme surfacique n'est donc pas considéré par continuité des composantes du champ magnétique extérieur au passage de l'interface (le champ d'aimantation interne

ne contribue pas au champ magnétique extérieur). Mais comme Brown l'explique [Brown_1966], il est nécessaire de prendre en compte l'influence du champ magnétique local (ou interne) d'un milieu ferromagnétique dans certaines applications. Pour une application EMAT, les interactions locales du champ magnétique interne avec les courants de Foucault et l'aimantation du milieu constituent également des sources de rayonnement ultrasonore à prendre en compte dans un modèle de transduction. Cette approche est qualifiée d'approche en champ total par Brown. En notant \mathbf{H} le champ magnétique total à l'intérieur du milieu, l'approche de Brown correspond en réalité à la méthode de la densité de force de Kelvin (paragraphe 3.1.1.2). C'est la méthode 2 référencée par Seher et Nagy, qui définit les densités volumiques ($\mathbf{f}_{m2}^{em} = \mathbf{f}_{m2}^L + \mathbf{f}_{m2}^M$) et surfaciques (\mathbf{t}_{m2}^{em}) de forces électromagnétiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{em} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{m2}^{em} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{m2}^{em} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \{ \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}]^2 \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Une variante de la méthode de la densité de force de Kelvin est également discutée dans [Seher-Nagy_2016]. Cette méthode, référencée méthode 3, adopte l'expression de la force de Lorentz en fonction de l'induction magnétique \mathbf{B} du milieu. Ce choix a naturellement un impact sur la densité de force magnétique du milieu, qui doit désormais être corrigée d'un terme $-\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{M}$. En exploitant l'équation de Maxwell-Ampère en quasi-statique $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ et la relation tensorielle $(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$, cette méthode formule des densités volumiques ($\mathbf{f}_{m3}^{em} = \mathbf{f}_{m3}^L + \mathbf{f}_{m3}^M$) et surfaciques (\mathbf{t}_{m3}^{em}) de forces électromagnétiques selon les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{em} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{m3}^{em} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{m3}^{em} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot (\nabla \mathbf{H}) \} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}]^2 \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La quatrième méthode décrite par Seher et Nagy correspond à la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell. Comme présenté dans le paragraphe 3.1.1.3, les auteurs dérivent l'expression du tenseur de Maxwell à partir de la densité volumique de force de Lorentz magnétiques, sans prendre garde à l'influence des propriétés magnétiques du milieu dans son établissement ($\nabla \times \mathbf{H} \neq (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$ en milieu ferromagnétiques). Sous la forme présentée dans [Seher-Nagy_2016], la densité de forces électromagnétiques de la méthode 4 se réduit à une contribution surfacique (\mathbf{t}_{m4}^{em}) qui s'écrit :

$$\mathbf{F}^{em} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{m4}^{em} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0^{em} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.23)$$

Par la suite, Seher et Nagy simulent par éléments finis (COMSOL Multiphysics) le rayonnement ultrasonore induit par deux géométries différentes d'EMAT en milieux magnétiques linéaires selon ces modèles de sources électromagnétiques de la littérature. Leur travail permet ainsi de comparer entre elles les amplitudes ultrasonores en ondes longitudinales (L) et transversales (T), selon la géométrie d'EMAT étudiée, qui résultent de l'implémentation des quatre méthodes décrites précédemment en fonction de la perméabilité magnétique relative (constante) du milieu inspecté (Figure 3.44).

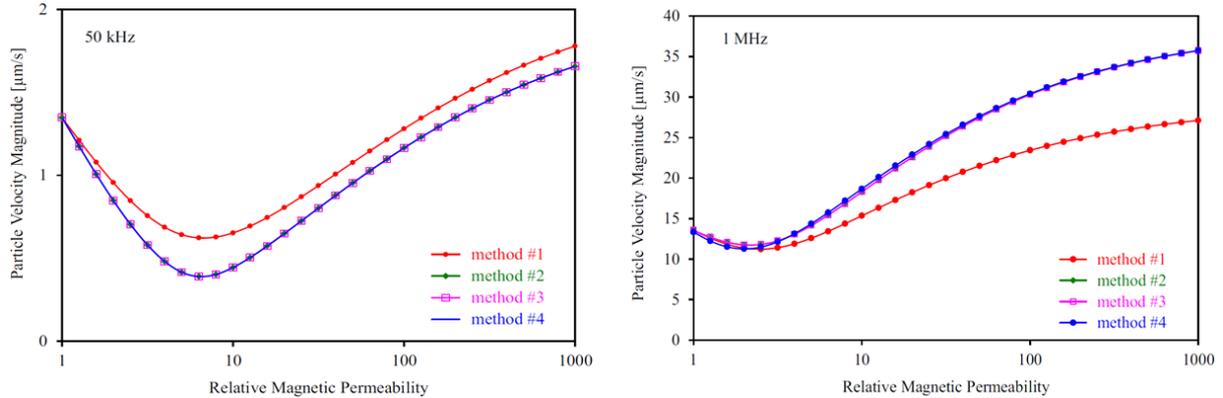


Figure 3.44 : Comparaisons des amplitudes ultrasonores en ondes L (gauche, à 50kHz) et T (droite, à 1MHz) simulées à partir des modèles de référence de sources électromagnétiques de la littérature en fonction de la perméabilité magnétique relative du milieu linéaire inspecté (figures extraites de [Seher-Nagy_2016]).

Seher et Nagy démontrent que les quatre méthodes étudiées sont essentiellement équivalentes dans le cadre d'un contrôle ultrasonore par EMAT, à l'exception de la méthode 1 pour laquelle les sources induisent une amplitude ultrasonore (en ondes L et T) différente de celle transmise par les sources dérivées des trois autres. Ces écarts sont davantage marqués en augmentant la fréquence d'excitation. Pour rappel, la méthode 1 exploite uniquement l'interaction du champ magnétique extérieur avec les densités de courants électriques et d'aimantation du milieu. Ce travail permet alors d'insister sur la nécessité de prendre en compte les interactions locales dans un modèle de transduction ultrasonore par EMAT en milieux ferromagnétiques (influence du terme magnétique surfacique).

Ils listent ensuite différents modèles de sources électromagnétiques de transduction ultrasonore rencontrés dans la littérature EMAT. Quelques auteurs, comme Thompson [Thompson_1978, Thompson_1990] et Ogi [Ogi_1997], décrivent rigoureusement les sources électromagnétiques de transduction par EMAT en respectant la formulation référencée par la méthode 2 (densité de force de Kelvin). Cependant, certains auteurs construisent des modèles inexacts en mélangeant les contributions des forces de Lorentz et magnétiques de différentes méthodes et en négligeant l'influence de la densité surfacique de forces magnétiques. Ce dernier terme disparaît par exemple des sources de transduction EMAT dans le travail commun d'Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_2003]. De même, Wilbrand [Wilbrand_1983] reprend les travaux de Thompson, mais en sommant la densité de forces de Lorentz \mathbf{f}_{m3}^L avec la densité de forces magnétiques \mathbf{f}_{m2}^M . Jafari Shapoorabadi *et al.* [Jafari Shapoorabadi-et-al_2005a] et Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2014a, Rouge_2013] exploitent également les sources de Lorentz \mathbf{f}_{m3}^L et magnétiques \mathbf{f}_{m2}^M et omettent l'existence du terme magnétique surfacique. Ludwig [Ludwig_1992] et Ashigwuike *et al.* [Ashigwuike-et-al_2015] combinent quant à eux les densités de forces de Lorentz \mathbf{f}_{m2}^L et magnétiques \mathbf{f}_{m3}^M et ne considèrent pas de terme surfacique. Enfin, Seher *et al.* [Seher-et-al_2015] proposent dans un travail plus récent un modèle de sources électromagnétiques basé sur les densités de forces de Lorentz \mathbf{f}_{m3}^L , de forces magnétiques \mathbf{f}_{m2}^M , et prennent en compte l'influence d'un terme magnétique surfacique \mathbf{t}_{m2}^{em} ($= \mathbf{t}_{m3}^{em}$). Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] étudient les écarts d'amplitude ultrasonore prédits par implémentation des modèles erronés de sources électromagnétiques de la littérature EMAT en fonction de la perméabilité magnétique relative du milieu inspecté (Figure 3.45). Évidemment, ce travail confirme que les amplitudes ultrasonores transmises par EMAT en ondes de compression/dilatation et en ondes de cisaillement diffèrent largement selon les sources électromagnétiques considérées.

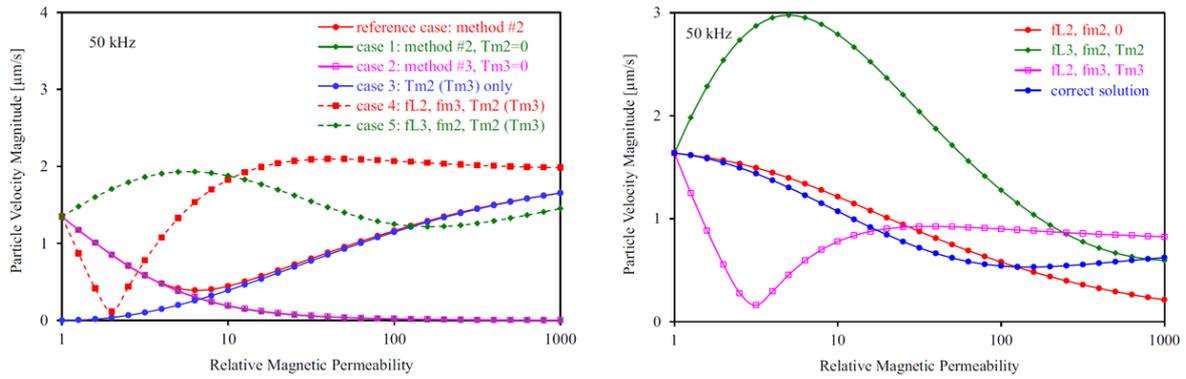


Figure 3.45 : Comparaisons des amplitudes ultrasonores en ondes L (gauche, à 50kHz) et T (droite, à 50kHz) simulées à partir des modèles erronés de sources électromagnétiques de la littérature EMAT en fonction de la perméabilité magnétique relative du milieu linéaire inspecté (figures extraites de [Seher-Nagy_2016]).

Seher et Nagy mettent ainsi en garde la communauté EMAT sur les mauvais usages de modèles de sources électromagnétiques et sur les erreurs de prédictions ultrasonores selon les propriétés magnétiques du milieu inspecté découlant de ces mauvaises pratiques. Ces pratiques résultent d'une distinction hasardeuse entre des sources associées aux forces de Lorentz et des sources associées aux forces d'origine magnétique. Les phénomènes électromagnétiques de transduction ultrasonore en milieu ferromagnétique doivent ainsi être considérés de façon globale pour éviter cet écueil.

Cependant, les travaux de Seher et Nagy ne mentionnent pas les méthodes des densités de charges et de courants magnétiques équivalents et les méthodes énergétiques de formulation des sources électromagnétiques. De plus, leur étude est restreinte aux milieux magnétiques linéaires et l'influence des non-linéarités magnétiques caractéristiques des milieux ferromagnétiques n'est pas abordée. L'étude des sources électromagnétiques induites par EMAT en milieux ferromagnétiques présentée dans la section suivante se positionne ainsi sur ces problématiques, en prenant pour référence une définition 'énergétique' formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell.

3.1.2. Définition énergétique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell en milieux ferromagnétiques

Cette section présente une contribution théorique à la formulation des densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Elle a pour objectif de mettre en lumière les liens théoriques entre les différentes méthodes de référence de la littérature (section 3.1.1) sous différentes hypothèses de comportement magnétique du milieu ferromagnétique inspecté. Une attention particulière est portée sur la définition d'un modèle de sources électromagnétiques induites par EMAT permettant la prise en compte des lois de comportements magnétiques anhystériques décrites dans le Chapitre 2.

Le raisonnement proposé dans cette étude découle des conclusions de Barré [Barré_2003], selon lesquelles la méthode de la dérivée de l'énergie définit la distribution de forces magnétiques surfaciques à l'origine d'une déformation mécanique la plus proche de celle mesurée expérimentalement. Pour rappel, les caractérisations expérimentales de Barré ont été menées sur un matériau synthétique (milieu mou et de faible perméabilité relative) conçu spécifiquement pour la confrontation des résultats prédits par différents modèles de sources surfaciques avec des résultats de mesures. À partir de cette méthode énergétique de référence, on peut montrer grâce aux travaux de Henrotte *et al.* [Henrotte-et-al_2004] et

de Sanchez-Grandia *et al.* [Sanchez-Grandia-et-al_2006] que le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell découle d'une analyse sur la variation d'énergie ou de co-énergie libre macroscopique du milieu. Ces développements établissent naturellement l'équivalence théorique des deux modèles de sources électromagnétiques et conduisent à une définition énergétique formelle du tenseur des contraintes de Maxwell en milieux ferromagnétiques. De plus, cette définition énergétique permet la prise en compte des lois anhystérétiques d'aimantation dérivées des modèles de comportement magnéto-mécanique du Chapitre 2. Selon le choix de variable d'état magnétique et selon des critères de symétrie du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, les différences théoriques entre les modèles de sources électromagnétiques rencontrés dans la littérature sont ensuite mises en lumière dans le cadre de cette méthode énergétique de référence. Cette étude aboutit à la proposition d'un modèle de référence de sources électromagnétiques volumiques et surfaciques de transduction ultrasonore induites dans les milieux ferromagnétiques généralement rencontrés dans une application de CND par EMAT.

3.1.2.1. Définition des densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques

Les sources de transduction d'origine électromagnétique, et particulièrement la partie magnétique de ces sources, sont associées aux interactions dites de longue portée (ou 'long-range') dans le matériau. Les interactions dites de courte portée (ou 'short range') correspondent aux interactions d'échange et d'anisotropie magnéto-cristalline. Comme discuté par Reyne *et al.* [Reyne-et-al_1987, Reyne-et-al_1988], on fait l'hypothèse que ces interactions microscopiques sont prises en compte dans la définition de la loi de comportement magnétique du milieu inspecté mais qu'elles ne contribuent pas à la génération de sources électromagnétiques de transduction ultrasonore à l'échelle macroscopique. Dans ce cadre, l'énergie libre magnétique totale W_F^m d'un milieu ferromagnétique peut s'écrire comme la somme d'une contribution magnéto-statique locale W^{ma} et d'une contribution du champ magnétique extérieur W^z (énergie potentielle de Zeeman) :

$$W_F^m = W^{ma} + W^z. \quad (3.24)$$

Les densités de sources électromagnétiques induites en milieux ferromagnétiques doux découlent de la minimisation de cette énergie W_F^m . Le premier terme de (3.24) résulte de l'aimantation du milieu ; le second traduit l'application du champ magnétique extérieur. En exploitant le principe du champ magnétique effectif, on suppose que la densité d'énergie libre magnétique (ou énergie libre de Helmholtz) d'un milieu s'écrit à partir des variables magnétiques \mathbf{H} et \mathbf{B} totales du milieu, contenant les contributions des champs magnétiques appliqué et local. Les champs magnétiques \mathbf{H} et \mathbf{B} vérifient les équations de Maxwell magnétiques quasi-statiques décrites au Chapitre 1 : $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$. Dans le cas d'un milieu ferromagnétique polycristallin, la densité volumique d'énergie libre peut s'écrire [Henrotte-et-al_2004, Sanchez-Grandia-et-al_2006] :

$$w_F^m = \int_{\mathbf{b}=0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{b} \quad \text{et} \quad W_F^m = \int_{\Omega} w_F^m d\Omega. \quad (3.25)$$

L'énergie libre magnétique s'écrit en fonction de la variable d'état magnétique \mathbf{B} et intègre les propriétés magnétiques du milieu inspecté par la loi de comportement $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ (ou de manière équivalente $\mathbf{M}(\mathbf{B})$), mesurée ou modélisée. En exploitant la relation constitutive générale $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ d'un milieu ferromagnétique (sans hypothèse simplificatrice sur son comportement), la densité volumique d'énergie libre magnétique w_F^m peut aussi s'écrire :

$$w_F^m = \int_{\mathbf{b}=0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{b} = \int_{\mathbf{b}=0}^{\mathbf{B}} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{M}(\mathbf{b}) \right) \cdot d\mathbf{b} = \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 - \int_{\mathbf{b}=0}^{\mathbf{B}} \mathbf{M}(\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{b}. \quad (3.26)$$

De façon équivalente, on définit la densité de co-énergie libre magnétique (ou enthalpie libre ou énergie libre de Gibbs) d'un milieu ferromagnétique, notée w_G^m , par les relations :

$$w_G^m = w_F^m - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad \text{et} \quad W_G^m = \int_{\Omega} w_G^m d\Omega. \quad (3.27)$$

En différenciant la première équation de (3.27) [Sanchez-Grandia-et-al_2006], on montre que la densité w_G^m de co-énergie libre d'un milieu dépend de la variable d'état magnétique \mathbf{H} et intègre les lois macroscopiques de comportements magnétiques $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ et $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ du milieu selon la relation :

$$w_G^m = - \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} = - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 - \mu_0 \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h}. \quad (3.28)$$

La densité volumique de co-énergie libre magnétique d'un milieu ferromagnétique est ainsi directement adaptée à la prise en compte des lois macroscopiques de comportement magnétique $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ décrites dans le Chapitre 2. Henrotte *et al.* [Henrotte-et-al_2004] mettent en garde sur les conditions d'intégrabilité des intégrales volumiques des relations (3.26) et (3.28). Une version simplifiant la définition univoque du terme d'énergie w_G^m est introduite dans [Henrotte-et-al_2004] (équation (3.29)), impliquant la colinéarité de l'aimantation avec la direction du champ magnétique et la dépendance de la susceptibilité magnétique du milieu avec l'intensité du champ magnétique (autorisant la prise en compte de phénomènes non-linéaires à travers la relation $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi(\|\mathbf{H}\|)\mathbf{H}$). Ainsi,

$$w_G^m = - \int_{h=0}^{\|\mathbf{H}\|} \mu_0 (1 + \chi(h)) h dh. \quad (3.29)$$

Les définitions (3.26) et (3.28) des densités volumiques d'énergie et de co-énergie libres magnétiques d'un milieu ferromagnétique permettent la prise en compte de lois macroscopiques de comportements magnétiques complexes (non-linéaires et anisotropes), et en particulier les courbes d'aimantation anhystériques décrites dans le Chapitre 2. Le principe de base des approches énergétiques macroscopiques repose en effet sur l'hypothèse que la loi de comportement magnétique macroscopique contient toute l'information sur la microstructure du milieu ferromagnétique étudié. Ainsi, la meilleure description énergétique du milieu repose sur la meilleure précision des mesures expérimentales ou des données simulées à partir d'un modèle (phénoménologique ou non) qui déterminent la courbe d'aimantation de ce milieu. Ce besoin renforce l'intérêt des travaux présentés dans le Chapitre 2.

Naturellement, les expressions générales (3.26) et (3.28) se réduisent aux expressions conventionnelles de densité d'énergie et de co-énergie libres magnétiques régulièrement rencontrées dans la littérature selon certaines hypothèses simplificatrices sur les propriétés magnétiques du milieu inspecté. On peut notamment distinguer deux comportements magnétiques simplifiés :

- Si le milieu étudié présente un comportement magnétique linéaire et une aimantation rémanente nulle (approximation pour de faibles excitations magnétiques), sa loi de comportement

magnétique peut s'écrire $\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}$ avec χ constante. Les densités d'énergie libre $w_{\text{F-lin}}^m$ et de co-énergie libre $w_{\text{G-lin}}^m$ d'un milieu linéaire s'écrivent alors simplement :

$$w_{\text{F-lin}}^m = \int_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{b} = \int_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}^{\mathbf{B}} \frac{1}{\mu_0(1 + \chi)} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{b} = \frac{1}{2\mu_0(1 + \chi)} \|\mathbf{B}\|^2, \quad (3.30)$$

$$w_{\text{G-lin}}^m = - \int_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} = - \int_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mu_0(1 + \chi) \mathbf{h} \cdot d\mathbf{h} = - \frac{\mu_0(1 + \chi)}{2} \|\mathbf{H}\|^2. \quad (3.31)$$

- Dans le cas d'un aimant permanent (cycle d'hystérésis très large et un champ magnétique coercitif important), on peut faire l'hypothèse d'une aimantation rémanente (ou permanente) \mathbf{m}_p uniforme et une susceptibilité magnétique nulle. La loi de comportement magnétique d'un tel milieu se met alors sous la forme $\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{m}_p)$. En présence d'une aimantation rémanente, il est nécessaire d'adapter les bornes des intégrales (3.26) et (3.28) pour assurer que les densités d'énergie libre $w_{\text{F-mp}}^m$ et de co-énergie libre $w_{\text{G-mp}}^m$ vérifient la relation (3.27). Deux choix équivalents de convention sont alors possibles selon la variable d'état magnétique adoptée. La première convention impose que l'excitation magnétique du milieu varie entre $\mathbf{0}$ et \mathbf{H} , ce qui implique que l'induction magnétique du milieu évolue entre $\mu_0\mathbf{m}_p$ et \mathbf{B} . Cette convention définit ainsi les densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques suivantes :

$$\begin{aligned} w_{\text{F-mp1}}^m &= \int_{\mathbf{b}=\mu_0\mathbf{m}_p}^{\mathbf{B}} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m}_p \right) \cdot d\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 - \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{B} + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{m}_p\|^2 = \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} w_{\text{G-mp1}}^m &= - \int_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mu_0(\mathbf{h} + \mathbf{m}_p) \cdot d\mathbf{h} \\ &= - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 - \mu_0 \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H} = - \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu_0^2} - \|\mathbf{m}_p\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le deuxième choix consiste à imposer que l'induction magnétique du milieu varie entre $\mathbf{0}$ et \mathbf{B} , ce qui implique alors que le champ magnétique du milieu évolue entre $-\mathbf{m}_p$ et \mathbf{H} , et définit les densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques suivantes :

$$\begin{aligned} w_{\text{F-mp2}}^m &= \int_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}^{\mathbf{B}} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m}_p \right) \cdot d\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 - \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \left(\|\mathbf{H}\|^2 - \|\mathbf{m}_p\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} w_{\text{G-mp2}}^m &= - \int_{\mathbf{h}=-\mathbf{m}_p}^{\mathbf{H}} \mu_0(\mathbf{h} + \mathbf{m}_p) \cdot d\mathbf{h} \\ &= - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 - \mu_0 \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{m}_p\|^2 = - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ces deux conventions sont rigoureusement équivalentes d'un point de vue théorique. Pour faciliter la prise en compte des lois d'aimantation anhystérique décrites dans le Chapitre 2, la première convention est plus naturelle à manipuler dans le cadre de notre étude.

Dans le cas d'un milieu ferromagnétique au comportement non-linéaire, il n'est pas possible d'établir d'expressions analytiques des densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques. Ces quantités doivent être définies et manipulées sous leur forme intégrale (3.26) et (3.28). À partir des expressions de ces densités d'énergie magnétique, la section suivante détaille le formalisme théorique qui permet la définition formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell d'un milieu ferromagnétique. L'expression de ce tenseur intègre alors naturellement les comportements magnétiques non-linéaires caractéristiques de ces milieux.

3.1.2.2. Obtention du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell par application du principe des travaux virtuels

Les densités volumiques d'énergie et de co-énergie libres magnétiques d'un milieu ferromagnétique ont été définies dans le paragraphe précédent (équations (3.26) et (3.28)). Ces densités interviennent dans la détermination rigoureuse du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell et des densités de forces électromagnétiques induites par EMAT dans tout milieu ferromagnétique. Le principe énergétique conventionnel qui permet de déterminer une densité de force à partir d'une densité d'énergie est le principe des travaux virtuels. À mettre en parallèle avec la méthode énergétique de Korteweg-Helmholtz du paragraphe 3.1.1.4, ce principe postule que la variation (virtuelle) d'énergie magnétique macroscopique du milieu est assimilable au travail des forces électromagnétiques exercées sur ce milieu. Pour conserver la généralité de la méthode et permettre la prise en compte de comportements magnétiques non-linéaires, des principes de conservation d'énergie adaptés au cas d'un milieu ferromagnétique capable de se déformer (selon un champ de déplacement \mathbf{u}) sont nécessaires. Les outils théoriques permettant d'exploiter de tels principes sont les p-formes différentielles [Bossavit_1992, Henrotte-et-al_2004]. En particulier, l'écriture de la variation d'énergie ou de co-énergie libres magnétiques repose sur la définition des dérivées particulières (ou 'material derivatives') d'une forme différentielle. L'opérateur de dérivée particulière, noté $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$, se décompose selon : $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} = \partial_t + \mathfrak{L}_{\mathbf{u}}$, avec ∂_t la dérivée partielle temporelle, et $\mathfrak{L}_{\mathbf{u}}$ la dérivée de Lie qui témoigne du transport de matière dans le milieu. Les expressions de ces opérateurs différentiels peuvent être très complexes à dériver, et même plus généralement à comprendre, selon l'ordre des formes différentielles du problème étudié [Schutz_1980, Bossavit_1992]. Aucejo-Galindo [Aucejo-Galindo_2010] détaille dans sa thèse une procédure simplifiée permettant de dériver l'expression du tenseur des contraintes de Maxwell sans passer par un formalisme d'analyse différentielle, mais en étudiant directement les propriétés géométriques des variables magnétiques régies par les équations de Maxwell. La mise en œuvre du raisonnement d'Aucejo-Galindo est technique et conduit à certaines incohérences qui seront soulevées en fin de section. Selon une approche similaire, Henrotte [Henrotte-Hameyer_2004] décrit l'obtention des dérivées particulières des variables magnétiques d'un milieu ferromagnétique libre de se déformer élastiquement. Cette approche tient compte des propriétés géométriques de ces variables selon leur nature (champ d'excitation ou d'induction) sans faire appel à des arguments théoriques complexes de géométrie différentielle difficilement appréhendables en pratique. Selon les travaux de Henrotte *et al.* [Henrotte-Hameyer_2004, Henrotte-et-al_2004], on considère les définitions suivantes des dérivées particulières d'une forme différentielle d'ordre un (notée \mathbf{h} , comme le champ magnétique), d'ordre deux (notée \mathbf{b} , comme l'induction magnétique), et d'ordre trois (notée ρ , comme une densité volumique) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{h} &= \frac{d\mathbf{h}}{dt} + (\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, & \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{b} &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \mathbf{b} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{b}, & \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\rho &= \frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\rho. \\ (\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{h})_i &= d_t h_i + u_{i,j} h_j, & (\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{b})_i &= d_t b_i - b_j u_{j,i} + u_{k,k} b_i, & \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\rho &= d_t \rho + u_{k,k} \rho.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Par souci de clarté, ces relations tensorielles sont admises et un lecteur intéressé par la définition formelle de ces opérateurs différentiels sur des variétés riemanniennes est dirigé vers les travaux de Bossavit [Bossavit_1992]. Dans ce cadre formel et selon les relations (3.25) et (3.27), les variations d'énergie et de co-énergie libres magnétiques d'un milieu ferromagnétique de volume Ω peuvent alors s'écrire sous la forme suivante ($w_{F,G}^m$ sont des formes différentielles d'ordre 3) :

$$\begin{aligned}\frac{dW_F^m}{dt} &\equiv \int_{\Omega} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} w_F^m d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{dw_F^m}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_F^m \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_F^m \right) d\Omega,\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\frac{dW_G^m}{dt} &\equiv \int_{\Omega} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} w_G^m d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{dw_G^m}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_G^m \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(-\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{H}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_G^m \right) d\Omega.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Les variations de (co-)énergie libre magnétique du milieu sont associées au travail mécanique des forces électromagnétiques exercées sur ce milieu. Selon la variable d'état magnétique \mathbf{B} , l'application du principe des travaux virtuels à induction constante s'exprime dans ce formalisme comme la variation d'énergie libre magnétique du milieu, en maintenant la dérivée particulière de l'induction magnétique nulle. En exploitant les opérateurs définis par (3.36) et l'équation (3.37), l'application formelle du principe des travaux virtuels sur le terme d'énergie libre magnétique fait naturellement apparaître le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{em}$ du milieu ferromagnétique étudié :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW_F^m}{dt} \right)_{\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}=0} &= \int_{\Omega} (\mathbf{H} \cdot \{\mathbf{B} \cdot (\nabla\mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}\} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_F^m) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} ([\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + (w_F^m - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\mathbf{I}] : \nabla\mathbf{u}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{em} : \nabla\mathbf{u} d\Omega.\end{aligned}\quad (3.39)$$

L'application du principe des travaux virtuels sur le terme d'énergie libre magnétique, et donc selon la variable d'état magnétique \mathbf{B} , dérive une expression du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell. Pour la variable d'état magnétique \mathbf{H} , le principe des travaux virtuels s'écrit comme la variation de co-énergie libre magnétique du milieu sous la contrainte $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{H} = 0$. À l'aide des relations (3.36) et $w_G^m = w_F^m - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ (3.27), on retrouve la précédente définition du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{em}$ en manipulant la co-énergie libre magnétique du milieu étudié :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dW_G^m}{dt} \right)_{\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{H}=0} &= \int_{\Omega} (\mathbf{B} \cdot \{(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}\} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) w_G^m) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} ([\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + w_G^m \mathbf{I}] : \nabla \mathbf{u}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} : \nabla \mathbf{u} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ainsi, on montre que le principe des travaux virtuels définit rigoureusement et de manière univoque l'expression formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ valable dans tout milieu ferromagnétique, en fonction des données de comportement $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ ou $\mathbf{M}(\mathbf{H})$:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} &= \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + (w_F^m - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{I} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + w_G^m \mathbf{I}. \\
 \sigma_{ij}^{\text{em}} &= B_i H_j + (w_F^m - H_k B_k) \delta_{ij} = B_i H_j + w_G^m \delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Cette unique définition du tenseur des contraintes de Maxwell selon les deux variables d'état magnétique corrige la confusion apportée par les travaux de Sanchez-Grandia *et al.* [Sanchez-Grandia-et-al_2006] et de Aucejo-Galindo [Aucejo-Galindo_2010]. Selon ces auteurs, le tenseur des contraintes de Maxwell dérivé selon l'énergie libre magnétique du milieu est le symétrique de celui déterminé en manipulant la co-énergie libre magnétique. Cette différence de définition selon le choix de variable d'état magnétique n'est pas acceptable d'un point de vue théorique. Dans ce sens, Aucejo-Galindo [Aucejo-Galindo_2010] propose une expression unique de ce tenseur en indiquant (à raison) que seule sa partie symétrique est 'utile' dans la double contraction avec les déformations élastiques (symétriques) du milieu étudié. Cette remarque n'est pas nécessaire dans cette étude qui dérive une unique expression du tenseur des contraintes de Maxwell par application du principe des travaux virtuels sur l'énergie ou la co-énergie libres magnétiques du milieu. Cependant le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell défini par (3.41) n'est pas symétrique, ce qui est perturbant par analogie mécanique avec le tenseur des contraintes de Cauchy [Rinaldi-Brenner_2002]. En effet, la partie antisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}$ du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ d'un milieu ferromagnétique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}} = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} - {}^T \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} \} = \frac{\mu_0}{2} \{ \mathbf{M} \otimes \mathbf{H} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{M} \} \neq \mathbf{0}. \tag{3.42}$$

Cette asymétrie résulte finalement de l'existence d'un couple électromagnétique induit en milieu ferromagnétique par l'application d'une excitation magnétique. Ce couple est défini par la relation : $\mathbf{c}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \times \mathbf{M}$. En détaillant les composantes de $\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}$ dans une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, on peut facilement mettre en évidence l'influence des composantes vectorielles du couple \mathbf{c}^{em} :

$$\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -c_3^{\text{em}} & c_2^{\text{em}} \\ c_3^{\text{em}} & 0 & -c_1^{\text{em}} \\ -c_2^{\text{em}} & c_1^{\text{em}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Selon le comportement magnétique du milieu inspecté, ce couple électromagnétique peut naturellement disparaître. En effet, dans le cas d'une aimantation entièrement induite par l'excitation magnétique (pas d'aimantation rémanente) et colinéaire à la direction d'excitation, de sorte que $\mathbf{M} = \chi(\mathbf{H})\mathbf{H}$, on montre aisément que le couple \mathbf{c}^{em} s'annule et que l'expression (3.41) du tenseur des contraintes de Maxwell est symétrique par définition. En revanche, dans le cas général d'une aimantation induite anisotrope et

d'une aimantation permanente du milieu, le couple électromagnétique \mathbf{c}^{em} existe et contribue à l'asymétrie du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$.

Ce couple est également discuté dans la littérature [Brown_1966]. À l'échelle microscopique, il exprime la rotation des moments magnétiques atomiques dans la direction du champ magnétique et son annulation définit les états d'équilibre métastables du milieu [d'Aquino_2004] selon la première équation de Brown en champ magnétique effectif (section 2.1.6 du Chapitre 2). À l'échelle macroscopique, ce couple électromagnétique est également exploité, notamment pour les études mécaniques des machines électriques tournantes [Billardon-Hirsinger_1995]. Cependant, ce couple ne doit pas intervenir dans la conservation de la quantité de mouvement du milieu qui définit l'équilibre élastique d'un milieu continu sous l'effet de forces (électromagnétiques) extérieures [Auld_1973], mais plutôt dans la conservation du moment cinétique du système. La présence du couple électromagnétique dans l'expression du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est donc suspecte. Vandeveldel [Vandeveldel-Melkebeek_2003] met en avant la même incohérence, et fait alors le choix de le retirer artificiellement de la définition du tenseur des contraintes de Maxwell et donc des efforts d'origine électromagnétique exercés sur le milieu. Plutôt que de passer par un tel artifice, une analyse de l'équation (3.39) (ou de manière équivalente (3.40)) permet de comprendre comment les densités de quantité de mouvement et de moment angulaire se répartissent et interagissent avec les sources électromagnétiques induites en milieu ferromagnétique. On considère la décomposition classique de $\nabla \mathbf{u}$ en une partie symétrique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}$, désignant le tenseur des déformations élastiques, et une partie antisymétrique $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{u}}$, désignant le tenseur de rotation. De même, on décompose le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ en une partie symétrique $\boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}}$ et une partie antisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}$.

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T(\nabla \mathbf{u})}{2} + \frac{\nabla \mathbf{u} - {}^T(\nabla \mathbf{u})}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{u}}, \quad (3.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} + {}^T\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} - {}^T\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}}{2} = \boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}} + \boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}. \quad (3.45)$$

Sachant que la double contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nulle, ces décompositions permettent de réécrire les équations (3.39) et (3.40) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW_F^m}{dt} \right)_{\mathcal{L}_u \mathbf{B}=0} &= \left(\frac{dW_G^m}{dt} \right)_{\mathcal{L}_u \mathbf{H}=0} \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}} : \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{u}} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dans cette dernière équation, on identifie un premier terme qui dépend de la partie symétrique du tenseur des contraintes de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}}$ et du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}$, et un second terme qui dépend de la partie antisymétrique du tenseur de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}$ et du tenseur de rotation $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{u}}$. Ainsi, le premier terme est associé au travail mécanique des forces électromagnétiques lors de la déformation du milieu, tandis que le second terme correspond au travail du couple électromagnétique lors de la rotation du milieu. La cohérence de cette décomposition est renforcée par la dépendance (3.43) explicite du tenseur $\boldsymbol{\sigma}_a^{\text{em}}$ avec le couple \mathbf{c}^{em} . Ce raisonnement exprime donc que seule la partie symétrique $\boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}}$ du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell intervient dans la définition des forces électromagnétiques

exercées sur un milieu ferromagnétique, ce qui rejoint les conclusions de Aucejo-Galindo [Aucejo-Galindo_2010] discutées précédemment et exploitées pour obtenir une expression unique de $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$.

Finalement, les travaux présentés proposent un cadre théorique précis dans lequel la définition formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est naturelle et univoque pour le calcul des densités de forces électromagnétiques exercées sur un milieu ferromagnétique. Dans la suite de ce manuscrit, le terme ‘tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell’ fera systématiquement référence à sa partie symétrique. Ainsi, sans aucune hypothèse sur le comportement magnétique du milieu inspecté, ce tenseur est rigoureusement défini pour tout milieu ferromagnétique par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \boldsymbol{\sigma}_s^{\text{em}} = \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}}{2} + w_G^m \mathbf{I}. \quad (3.47)$$

L’avantage principal de cette formulation énergétique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est qu’elle fait directement intervenir la loi macroscopique de comportement magnétique du milieu ferromagnétique inspecté dans la définition (3.28) de la densité de co-énergie libre magnétique, sans faire d’hypothèses simplificatrices particulières sur les propriétés magnétiques du milieu. L’écriture (3.47) de $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ faisant apparaître la densité de co-énergie w_G^m est privilégiée dans la suite de ce manuscrit, car les mesures expérimentales ou les modèles de comportement magnétique définissent naturellement la relation constitutive $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ du milieu inspecté (Chapitre 2).

Pour illustration, l’expression de référence (3.47) du tenseur de Maxwell peut être spécifiée selon les hypothèses prises sur le comportement magnétique du milieu inspecté. Les cas des milieux magnétiques, magnétiques linéaires et isotropes, d’un aimant permanent, et finalement d’un milieu ferromagnétique isotrope caractérisé par une courbe d’aimantation anhystérétique sont présentés :

- En milieu amagnétique, la loi de comportement magnétique s’écrit $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. La densité de co-énergie libre d’un tel milieu s’écrit $w_G^m = -\mu_0 \|\mathbf{H}\|^2 / 2$. Enfin, l’expression (3.47) s’identifie à l’expression classique de la littérature du tenseur des contraintes de Maxwell dans l’air :

$$\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}. \quad (3.48)$$

- En milieu magnétique linéaire et isotrope, la relation constitutive s’écrit $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ avec χ, μ constantes. La densité de co-énergie est définie par (3.31), et la définition (3.47) s’identifie à l’expression classique du tenseur des contraintes de Maxwell de ces milieux :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{\text{em}} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0 (1 + \chi)}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} = \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}. \quad (3.49)$$

- On considère maintenant le cas d’un aimant permanent qui présente une aimantation rémanente, notée \mathbf{m}_p , et un champ coercitif de fortes intensités. Pour une faible excitation magnétique \mathbf{H} , on suppose alors que l’aimantation induite est négligeable devant \mathbf{m}_p et la loi de comportement magnétique d’un tel aimant peut s’écrire $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}_p)$. Selon le choix de conventions discuté précédemment dans la section 3.1.2.1, les densités de co-énergie libre magnétique sont définies par les relations (3.33) et (3.35). La définition formelle (3.47) du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell se réduit ensuite aux expressions suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mp1}}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_p \otimes \mathbf{H}) - \left(\frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 + \mu_0 \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{H} \right) \mathbf{I}. \quad (3.50)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mp2}}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_p \otimes \mathbf{H}) - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \mathbf{I}. \quad (3.51)$$

On peut remarquer que le choix de convention, qui correspond à la définition des zéros des densités d'énergie et de co-énergie libres magnétiques à variables d'état magnétiques nulles, engendre une définition différente des tenseurs des contraintes de Maxwell associés :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mp1}}^{\text{em}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{mp2}}^{\text{em}} = \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{m}_p\|^2 \mathbf{I}. \quad (3.52)$$

Ce choix de convention impacte ainsi la définition du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell d'un aimant permanent. Henrotte *et al.* [Henrotte-et-al_2004] précisent qu'un choix sur la nature géométrique de l'aimantation permanente (forme différentielle d'ordre un ou deux) peut également affecter son expression. Bossavit [Bossavit_1992], Henrotte et Hameyer [Henrotte-Hameyer_2004] indiquent qu'il est nécessaire de se tourner vers l'expérience pour définir ces conventions selon l'application concernée. L'inspection ultrasonore par EMAT d'un aimant permanent est complexe à mettre en œuvre expérimentalement et ne correspond pas à un besoin industriel général ; les aspects théoriques de ces conventions ne sont pas développés davantage.

- Cette étude concerne principalement l'inspection de matériaux ferromagnétiques doux (décrits dans le Chapitre 1) pour lesquels l'aimantation permanente peut être négligée devant l'aimantation induite. Ces milieux exhibent des phénomènes magnétiques non-linéaires en fonction de l'intensité $\|\mathbf{H}\|$ de l'excitation magnétique. Ces phénomènes sont décrits par la courbe d'aimantation anhystérétique du milieu, notée $\chi(\|\mathbf{H}\|)$. En supposant que le milieu est isotrope (généralement le cas d'aciers magnétiques polycristallins), la relation constitutive magnétique est donnée par $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi(\|\mathbf{H}\|))\mathbf{H}$. Enfin, l'expression formelle (3.47) du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell de ces milieux s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mu_0(1 + \chi(\|\mathbf{H}\|))\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \mu_0 \left(\frac{\|\mathbf{H}\|^2}{2} + \int_{h=0}^{\|\mathbf{H}\|} \chi(h)h \, dh \right) \mathbf{I}. \quad (3.53)$$

Ainsi, cette étude met en lumière l'origine énergétique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell et conduit à sa définition formelle (3.47) dans tout milieu ferromagnétique. Dans cette étude, l'expression (3.53), adaptée pour le traitement des milieux ferromagnétiques doux et isotropes, sera préférée. La section suivante détaille le raisonnement qui permet de formuler les densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques induites par EMAT en milieu ferromagnétique à partir de l'expression du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell.

3.1.2.3. Densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques

L'objectif est de formuler les densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques qui s'exercent sur un milieu ferromagnétique sous l'effet d'une excitation magnétique. Par analogie avec les contraintes de Cauchy à l'équilibre mécanique, l'intégrale sur une surface fermée S du tenseur des

contraintes électromagnétiques de Maxwell d'un milieu ferromagnétique définit la résultante globale de forces électromagnétiques \mathbf{F}^{em} exercée sur le volume contenu dans cette surface :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \oint_S \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.54)$$

Dans cette relation, \mathbf{n} désigne la normale extérieure à Ω et $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ représente les tenseurs des contraintes électromagnétiques de Maxwell du milieu contenu dans S . Cette définition de \mathbf{F}^{em} modélise l'ensemble des efforts extérieurs exercés sur un milieu à partir de l'expression du tenseur des contraintes de Maxwell de ce milieu. Comme discuté dans la section 3.1.1.5, Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] démontrent que cette information n'est pas suffisante pour prédire le rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieu ferromagnétique et que les sources électromagnétiques induites par les efforts internes dans le milieu doivent être prises en compte dans le modèle de transduction. En suivant le raisonnement de Brown [Brown_1966], repris dans un cas similaire à celui de notre étude par Sanchez-Grandia *et al.* [Sanchez-Grandia-et-al_2008], on considère un matériau de volume Ω (de surface $\partial\Omega$) entièrement plongé dans l'air et une surface fermée S délimitant un volume V contenant le matériau (Figure 3.46).

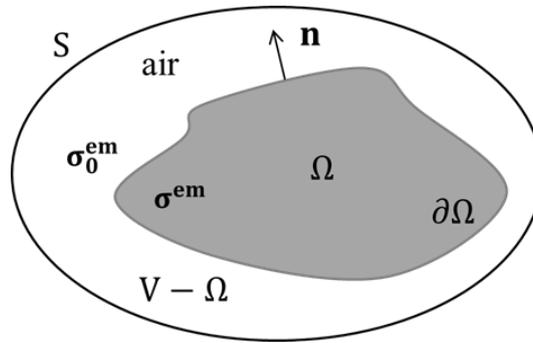


Figure 3.46 : Configuration d'étude des sources électromagnétiques

La discontinuité des variables magnétiques à l'interface entre l'air et le milieu ferromagnétique étudié (conditions limites magnétiques discutées au Chapitre 1) se manifeste par la discontinuité du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell sur $\partial\Omega$. En utilisant le théorème de flux-divergence, la résultante \mathbf{F}^{em} exercée dans le volume V peut alors se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \oint_S \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{V-\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} d\Omega. \quad (3.55)$$

Dans cette relation, $\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{em}}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ représentent respectivement les tenseurs des contraintes de Maxwell dans l'air et dans le milieu ferromagnétique inspecté. De plus, l'opérateur $[\cdot]_{\partial\Omega}$ de saut à la surface du milieu est défini pour toute quantité Σ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) par : $[\Sigma]_{\partial\Omega} = \Sigma_0 - \Sigma$, avec Σ_0 et Σ les quantités évaluées respectivement dans l'air et dans le matériau. L'absence de sources de courants électriques et d'aimantation dans l'air annule le premier terme du développement. Ainsi, on définit les densités volumique \mathbf{f}^{em} et surfacique \mathbf{t}^{em} de forces électromagnétiques selon la relation :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.56)$$

Ainsi, les densités de forces électromagnétiques qui s'exercent dans tout milieu ferromagnétique à l'équilibre magnétique quasi-statique peuvent être déterminées à partir de la connaissance du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell du milieu inspecté. La densité volumique \mathbf{f}^{em} de sources électromagnétiques s'écrit comme la divergence du tenseur des contraintes de Maxwell :

$$\mathbf{f}^{\text{em}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}}{2} + w_G^{\text{m}} \mathbf{I} \right). \quad (3.57)$$

En exploitant $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, quelques manipulations tensorielles [Sanchez-Grandia-et-al_2006] permettent de développer cette densité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{em}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} &= \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{H} + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{B} + (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B}] + \nabla w_G^{\text{m}}. \\ f_i^{\text{em}} = \sigma_{ij,i}^{\text{em}} &= \frac{1}{2} [B_{i,j} H_j + H_{k,k} B_i + H_{i,j} B_j] + w_{G,i}^{\text{m}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

La densité surfacique \mathbf{t}^{em} de sources électromagnétiques exercées sur la surface d'un milieu ferromagnétique est formellement définie par le saut $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ à l'interface entre l'air et le milieu :

$$\mathbf{t}^{\text{em}} = [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = \frac{[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}]_{\partial\Omega} + [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}]_{\partial\Omega}}{2} + [w_G^{\text{m}}]_{\partial\Omega} \mathbf{n}. \quad (3.59)$$

Elle est ainsi directement définie par les conditions limites magnétiques à l'interface et par les sources de courant et d'aimantation considérées [Sanchez-Grandia-et-al_2006]. Les densités de forces électromagnétiques volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} définies par les relations (3.58) et (3.59) constituent une formulation générique des sources électromagnétiques induites par EMAT dans tout milieu ferromagnétique. Sa généralité autorise la prise en compte de lois de comportements magnétiques complexes (non-linéaires et anisotropes) dans la définition de la densité de co-énergie libre magnétique du milieu, et donc dans la définition du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell.

La méthode formelle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, dont l'origine commune avec le principe énergétique des travaux virtuels est établie dans les précédents paragraphes, permet l'obtention des termes sources d'origine électromagnétique classiquement associés aux forces de Lorentz et aux forces magnétiques dans la littérature EMAT. Le principe même de formulation de ces sources à partir d'un unique tenseur de contraintes électromagnétiques confirme les conclusions de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] sur l'indissociabilité des forces de Lorentz et magnétiques, arbitrairement séparées en deux phénomènes distincts dans la littérature EMAT (ce qui a entraîné des erreurs de modèles) alors que leur origine est commune. Cette étude justifie également l'existence d'un terme surfacique de forces électromagnétiques à prendre en compte dans les mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieu ferromagnétique, comme discuté dans [Seher-Nagy_2016]. L'expression de cette densité de forces surfaciques est directement reliée à la discontinuité des variables magnétiques à l'interface entre l'air et le milieu ferromagnétique étudié.

La méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est considérée dans cette étude comme la méthode de référence pour la formulation des sources d'origine électromagnétique d'un milieu ferromagnétique. Le paragraphe suivant se propose d'étudier les interconnexions entre les différentes méthodes de formulation des densités de forces électromagnétiques présentées dans la

section 3.1.1. Des développements techniques permettent en effet de définir un tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell spécifiques à chaque méthode et de mettre en évidence le modèle de sources électromagnétiques le plus adapté pour traiter des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieux ferromagnétiques non-linéaires.

3.1.2.4. *Discussions relatives aux modèles de sources électromagnétiques volumiques et surfaciques en milieux ferromagnétiques de la littérature*

Formellement dérivée dans la section précédente à partir de principes énergétiques, la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est mise à profit dans cette étude pour modéliser les sources électromagnétiques de rayonnement ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. La définition formelle (3.47) de ce tenseur noté $\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}$ permet de traiter les cas de milieux aux comportements magnétiques variés, linéaires et non-linéaires, à partir d'une représentation adaptée de l'énergie (ou co-énergie) libre magnétique du milieu selon sa loi macroscopique d'aimantation. Cette méthode permet d'établir de façon générique les expressions des densités volumiques (3.58) et surfaciques (3.59) de sources électromagnétiques valables dans tout milieu ferromagnétique. Les expressions obtenues par cette méthode sont comparées à celles obtenues par les différentes méthodes de référence de la littérature (listées dans la section 3.1.1).

Comme Henrotte et Hameyer [Henrotte-Hameyer_2004] le rapportent déjà, la confrontation (aussi bien théorique qu'expérimentale) des différentes méthodes de formulation des densités de forces électromagnétiques entre elles est récurrente dans la littérature [Ren-Razek_1992, Reyne-et-al_1987, Vandeveld-Melkebeek_2001, Vandeveld-Melkebeek_2002, Lee_2000, Lee-et-al_2005, Zahn_2006, Barré-et-al_2006, Sanchez-Grandia-et-al_2008]. Toutes formulent la même résultante globale \mathbf{F}^{em} de forces électromagnétiques exercées sur un solide ferromagnétique, mais définissent des densités volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} différentes. Pour comparer directement les différentes densités de sources entre elles, on montre ici que chacune peut s'interpréter dans le formalisme du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, en tenant compte d'une définition des contraintes électromagnétiques spécifique à chaque modèle de sources. Pour ne pas alourdir davantage ce chapitre, les manipulations tensorielles menées pour cette analyse comparative sont détaillées en Annexe B, sous l'hypothèse d'un milieu ferromagnétique isotrope caractérisé par sa loi d'aimantation non-linéaire $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi(\mathbf{H})\mathbf{H}$. Comme décrit en Annexe B, les expressions des contraintes électromagnétiques associées à chaque modèle de sources électromagnétiques sont reportées ci-dessous :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \text{ et selon la méthode :}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} - \mu_0 \left(\int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \right) \mathbf{I}, \quad (3.60)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}, \quad (3.61)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{e}_m}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}, \quad (3.62)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{j}_m}^{\text{em}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 \mathbf{I}. \quad (3.63)$$

Ces développements confirment que chaque méthode décrit exactement la même résultante globale de forces électromagnétiques, mais avec des densités volumiques et surfaciques différentes d'une méthode à l'autre. L'utilisation de densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques issues de différentes méthodes ne peut ainsi conduire qu'à des modèles erronés de sources de transduction. Cette analyse démontre que toutes les méthodes de la littérature peuvent être retrouvées à partir du formalisme unique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, par le biais de transferts de termes dépendant de l'aimantation entre l'intégrale de volume et celle de surface. Elle permet ainsi de comparer directement les différents modèles de sources électromagnétiques par l'analyse des différentes expressions des contraintes électromagnétiques associées à chaque méthode.

Cette étude met en évidence la définition microscopique (voir l'introduction de la section 3.1 au sujet des forces de Lorentz) des méthodes des sources magnétiques équivalentes et le fait que ces méthodes soient définies respectivement en fonction des variables d'état magnétique \mathbf{H} et \mathbf{B} . En effet, le tenseur (3.62) des contraintes électromagnétiques associées à la méthode des charges magnétiques équivalentes s'identifie à celui dérivé dans l'air en fonction de l'excitation magnétique \mathbf{H} . De même, le tenseur (3.63) des contraintes électromagnétiques correspondant à la méthode des courants magnétiques équivalents s'écrit comme celui défini dans l'air selon l'induction magnétique \mathbf{B} . Cependant, la présence d'un champ d'aimantation \mathbf{M} en milieux ferromagnétiques induit une différence majeure de définition avec le tenseur de Maxwell décrit dans l'air, ce qui rejoint les écarts de prédiction relevés par Lee *et al.* [Lee-et-al_2005]. Ces différences expliquent les écarts visibles à fréquence élevée sur la Figure 3.44 au sujet des prédictions de champ ultrasonore induit par EMAT de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016], qui comparent finalement le modèle de la densité de Kelvin avec la méthode du tenseur des contraintes de Maxwell défini selon (3.63). Ainsi, ces méthodes, dont la définition est microscopique, permettent le calcul de la force globale exercée sur une assemblée de sources (charges ou courants) magnétiques équivalentes, considérées indépendantes (dans l'air), sous l'effet du champ magnétique. En revanche, elles ne permettent pas de traduire les densités de forces électromagnétiques induites par les interactions globales de ces charges et courants magnétiques équivalents exercés sur le milieu (supposé continu).

La méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, lorsque ce tenseur est rigoureusement défini selon les propriétés magnétiques du milieu considéré, dérive formellement de principes énergétiques à la base de la méthode de Korteweg-Helmholtz. L'équivalence entre ces deux méthodes est directe. En comparant les expressions (3.60) et (3.61), on retrouve de façon originale les conclusions des travaux de Zahn [Zahn_2006] selon lesquelles les densités de forces électromagnétiques dérivées des méthodes de la densité de force de Kelvin et de Korteweg-Helmholtz sont identiques, au gradient d'un terme de 'pression magnétique' près (associé à un terme d'énergie magnétique interne (3.64)). En effet, les développements décrits en Annexe B démontrent que :

$$\mathbf{f}^{\text{em}} - \mathbf{f}_{\text{K}}^{\text{em}} = \nabla \cdot \{ \boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{K}}^{\text{em}} \} = -\mu_0 \nabla \left(\int_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \right), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{t}^{\text{em}} - \mathbf{t}_{\text{K}}^{\text{em}} = [\boldsymbol{\sigma}^{\text{em}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{K}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = \mu_0 \left(\int_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \right) \mathbf{n}. \quad (3.65)$$

Ces équations montrent le lien direct entre les densités de sources électromagnétiques dérivées des méthodes du tenseur des contraintes de Maxwell et de la densité de force de Kelvin. En utilisant le théorème de flux-divergence, on constate en réalité que le transfert de ce terme d'énergie magnétique interne distinguant les deux modèles de sources volumiques à la surface du milieu compense exactement

la différence de densités surfaciques de sources. Ces développements forment une démonstration des conclusions de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] (discutées en 3.1.1.5) sur la capacité de la méthode de la densité de force Kelvin à prédire rigoureusement les sources électromagnétiques induites par EMAT et montrent qu'elle est adaptée à la prise en compte du comportement magnétique non-linéaire des milieux ferromagnétiques, ce qui rejoint les remarques de Lee *et al.* [Lee-et-al_2005].

La méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est préférée dans cette étude car sa définition formelle dérivée de principes énergétiques est naturelle et facilite son extension à des cas de comportements magnétiques plus complexes (notamment par ajout d'un terme d'énergie représentant les pertes par hystérésis). Ceci la rend facilement adaptable selon les configurations d'inspection par EMAT rencontrées. La section suivante montre que ce formalisme est également adapté à la prise en compte des effets magnétostrictifs dans les mécanismes de transduction induits par EMAT en milieux ferromagnétiques par la définition d'un tenseur des contraintes de magnétostriction. Cette méthode constitue ainsi un cadre formel de référence pour le calcul des densités volumiques et surfaciques de l'ensemble des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT dans ces milieux.

3.2. Modèle de densité de sources magnétostrictives

L'attention se porte maintenant sur les sources de transduction ultrasonore d'origine magnéto-élastique induites par EMAT en milieux ferromagnétiques : les déformations de magnétostriction. Comme présenté dans le Chapitre 1, cet effet volumique de couplage magnéto-élastique induit une déformation locale de la structure magnéto-cristalline du milieu sous l'effet d'une excitation magnétique extérieure. Par nature, les effets magnétostrictifs ne constituent pas des densités de forces appliquées au milieu inspecté, mais perturbent directement la relation constitutive élastique du milieu (on parle de 'eigenstrain' dans la littérature anglo-saxonne) et induisent des contraintes d'origine magnétostrictive distribuées dans le volume du milieu ferromagnétique inspecté (profondeur de pénétration régie l'épaisseur de peau). On parle ainsi de 'forces équivalentes' de magnétostriction dans la littérature. En effet, à l'inverse des sources de contraintes surfaciques induites par traducteur piézoélectrique directement au contact de la surface inspectée, les contraintes de magnétostriction induites sans contact par EMAT constituent des termes sources, de natures volumique et surfacique, dans l'équation d'équilibre élastique du milieu. Finalement, à partir d'un modèle macroscopique cohérent de tenseurs des déformations et contraintes de magnétostriction, la démarche de modélisation des densités de forces électromagnétiques présentée dans la section précédente permet de modéliser naturellement une densité volumique de forces équivalentes de magnétostriction. La prise en compte d'une condition limite élastique de surface libre dans les codes de calcul existant dans le module CIVA US de simulation ultrasonore annule artificiellement le terme surfacique de sources magnétostrictives. Cette conséquence a été le sujet de quelques prédictions erronées de l'influence des effets magnétostrictifs dans les mécanismes de transduction, comme discuté en Introduction. Pour répondre à ces incohérences, un modèle de contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux est mis en place dans cette étude, il est présenté dans la section 3.3. L'équivalence de ce modèle de transduction avec le modèle inertiel de sources magnétostrictives développé par Ribichini *et al.* [Ribichini-et-al_2012b, Nagy-Ribichini_2015], dont les prédictions de rayonnement ultrasonore simulées par la méthode des éléments-finis ont été validées par l'expérience, est discutée.

3.2.1. Tenseur des déformations macroscopiques de magnétostriction ϵ^{ms}

L'enjeu d'un modèle théorique capable de traiter les effets magnétostrictifs induits par EMAT en milieux ferromagnétiques repose sur une représentation pertinente des déformations macroscopiques de magnétostriction induites par l'application d'un champ magnétique \mathbf{H} sur le milieu. En effet, comme cela a été décrit dans le Chapitre 1, les différents phénomènes responsables des effets magnétostrictifs interviennent à des échelles spatiales très différentes. De plus, la grande variété de propriétés magnétostrictives rencontrées dans l'expérience ajoute une complexité supplémentaire à l'établissement d'un modèle théorique complet permettant la description de ces phénomènes de manière systématique. En effet, on ne peut pas demander à un utilisateur d'un logiciel de simulation comme CIVA de connaître parfaitement la microstructure du matériau testé car les techniques expérimentales à mettre en œuvre pour de telles caractérisations magnétiques sont complexes. De plus, en imaginant que cette donnée soit maîtrisée, les temps de calculs impliqués seraient prohibitifs si l'échantillonnage spatial devait tenir compte des distances interatomiques et du grand nombre de degrés de liberté rencontré au niveau d'un monocristal constituant le matériau à tester. C'est la raison pour laquelle les modèles macroscopiques de lois de comportement magnéto-élastique des milieux ont été introduites dans le Chapitre 2.

Les hypothèses de déformations macroscopiques de magnétostriction isotropes (identiques dans toutes les directions du milieu) et isochores (qui conservent le volume du matériau inspecté) sont généralement admises à l'échelle macroscopique [Hirao-Ogi_2003, Bozorth_1964, Chikazumi_1964]. Rouge [Rouge_2013] a notamment mené pendant sa thèse des études expérimentales pour quantifier la véracité de ces hypothèses, qui s'avèrent être vérifiées pour de nombreux matériaux (avec quelques écarts dans certains alliages à base de fer). Par exemple, les comparaisons des déformations anhystérétiques de magnétostriction longitudinales et transversales dans les cas d'échantillon de nickel et d'acier inoxydable sont illustrées sur la Figure 3.47 issue des travaux de Rouge [Rouge_2013].

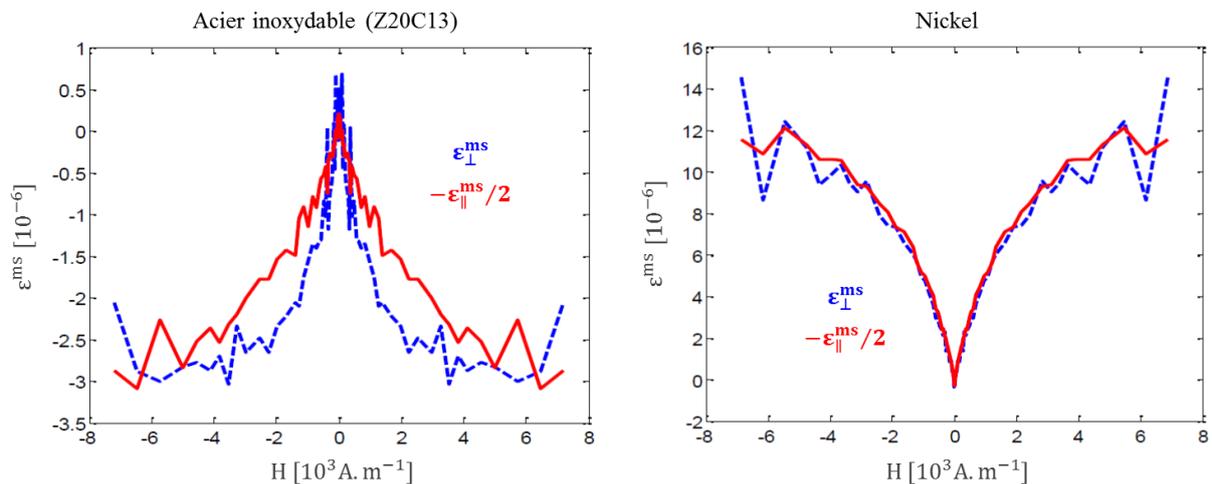


Figure 3.47 : Étude de l'hypothèse de magnétostriction isotrope et isochore : comparaisons des déformations expérimentales de magnétostriction ϵ_{\perp}^{ms} (bleu) et $-\epsilon_{\parallel}^{ms}/2$ (rouge) d'échantillons d'acier inoxydable Z20C13 (gauche) et de nickel (droite).

On considère ainsi à ce stade que la donnée d'une loi macroscopique λ^{ms} de comportement magnétostrictif du milieu inspecté est connue, soit par des mesures expérimentales, soit par les modèles théoriques discutés dans le Chapitre 2. Cette courbe caractéristique représente la déformation de magnétostriction d'un milieu dans la direction d'application d'un champ magnétique ($\lambda^{ms} = \epsilon_{\parallel}^{ms}$). On

fait l'hypothèse que cette loi de comportement englobe l'ensemble des interactions physiques multi-échelles à l'origine des phénomènes magnétostrictifs, qu'elle dépend de l'intensité de ce champ magnétique (et non de sa direction), et également de l'ensemble des paramètres physiques spécifiques ayant une influence sur la déformation de magnétostriction, comme typiquement un état $\boldsymbol{\sigma}_0$ de contraintes mécaniques (éventuellement multi-axiales). On note ainsi $\lambda^{\text{ms}} = \lambda^{\text{ms}}(\|\mathbf{H}\|, \boldsymbol{\sigma}_0, \dots)$. En exploitant cette loi macroscopique, qui sera qualifiée de loi élémentaire de magnétostriction dans la suite de ce manuscrit, un modèle tensoriel macroscopique de déformation de magnétostriction peut être construit en mettant à profit les hypothèses d'isotropie et d'isochorie magnétostrictives. Ce modèle s'inspire des modèles de magnétostriction à l'échelle d'un monocristal [Daniel-et-al_2008, Shu-et-al_2004] et des modèles de contraintes mécaniques isochores. Le tenseur macroscopique de déformations de magnétostriction peut s'écrire sous la forme suivante [Clausse-et-al_2017] :

$$\varepsilon_{ij}^{\text{ms}}(\mathbf{H} = \|\mathbf{H}\|\mathbf{h}) = \lambda^{\text{ms}}(\|\mathbf{H}\|, \boldsymbol{\sigma}_{\text{el}}, \dots) S_{ij}(\mathbf{h}). \quad (3.66)$$

Dans cette relation, λ^{ms} représente donc la déformation élémentaire de magnétostriction (scalaire dans le cas isotrope), et le tenseur \mathbf{S} représente le tenseur déviateur (en dimension 3). Ce tenseur symétrique d'ordre deux dépend uniquement de la direction du champ magnétique $\mathbf{h} = \mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$. Il est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{h} = \mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|) &= \frac{3}{2} \left[\mathbf{h} \otimes \mathbf{h} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right] = \frac{3}{2\|\mathbf{H}\|^2} \left[\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\|\mathbf{H}\|^2}{3} \mathbf{I} \right]. \\ S_{ij}(\mathbf{h} = \mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|) &= \frac{3}{2} \left[h_i h_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] = \frac{3}{2H_k^2} \left[H_i H_j - \frac{H_k^2}{3} \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Inspiré de la mécanique, ce tenseur permet d'assurer l'hypothèse de déformations magnétostrictives isochores (sa trace est toujours nulle), en repérant la direction principale de l'excitation magnétique associée à une déformation de magnétostriction d'amplitude λ^{ms} , et en assignant des déformations magnétostrictives d'amplitude $-\lambda^{\text{ms}}/2$ dans les deux directions transverses. Par exemple, en supposant que l'excitation magnétique est dirigée dans la direction normale ($\mathbf{h} = \mathbf{e}_z$) ou contenue dans le plan transverse ($\mathbf{h} = [\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y]/\sqrt{2}$), ce tenseur \mathbf{S} peut s'écrire simplement :

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_z) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Cette écriture tensorielle formelle permet de traiter des configurations tridimensionnelles complexes de traducteur EMAT sans hypothèse *a priori* sur l'orientation du champ magnétique (statique et dynamique) dans le volume du matériau inspecté. Le tenseur déviateur peut en effet 'suivre' à chaque instant les variations d'orientation du champ magnétique dans le milieu inspecté. Cette écriture tensorielle formalise la démarche de formulation des déformations de magnétostriction induites par EMAT en milieux ferromagnétiques décrite par Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_2003] et Ribichini [Ribichini_2011] à partir de la connaissance d'une loi élémentaire de déformation de magnétostriction (expérimentale dans leurs travaux). Comme discuté dans la section 3.2.3, ce modèle généralise également des résultats de la littérature EMAT sur les déformations piézo-magnétiques, lorsque l'intensité du champ magnétique dynamique (induit par la bobine) est faible devant celle du champ statique (induit par l'aimant permanent).

3.2.2. Modèle de densité volumique de force équivalente de magnétostriction \mathbf{f}^{ms}

À l'échelle macroscopique, le terme d'énergie qui représente les effets magnétostrictifs d'un matériau ferromagnétique est l'énergie de couplage magnéto-élastique $W^{\text{ma-el}}$. Cette énergie de couplage comprend les interactions entre l'aimantation \mathbf{M} du milieu inspecté et sa déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$. Comme introduit dans la description des modèles micromagnétiques (Section 2.1), le terme d'énergie mécanique d'un milieu ferromagnétique est modifié par la prise en compte des déformations d'origine magnétostrictives, dépendant de l'aimantation \mathbf{M} du milieu inspecté, et donc de l'excitation \mathbf{H} . Ainsi l'énergie mécanique macroscopique W^σ du milieu peut se décomposer en une contribution purement élastique W^{el} reliant les contraintes mécaniques et déformations 'élastiques' du milieu, et une contribution magnéto-élastique $W^{\text{ma-el}}$ reliant les contraintes aux déformations de magnétostriction, et donc à l'excitation magnétique du milieu. Cette décomposition s'écrit formellement :

$$W^\sigma = W^{\text{ma-el}}(\mathbf{H}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}) + W^{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}). \quad (3.69)$$

L'expression de l'énergie purement élastique est simplement décrite par la loi de Hooke en milieu élastique linéaire, avec le tenseur des rigidités élastiques \mathbb{C} du milieu considéré :

$$W^{\text{el}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}. \quad (3.70)$$

L'expression de l'énergie de couplage magnéto-élastique $W^{\text{ma-el}}$ à l'échelle macroscopique est inspirée de l'expression de Daniel [Daniel-et-al_2008], introduite équation (2.31) au Chapitre 2, à l'échelle de la structure cristalline. En exploitant le modèle macroscopique de déformations de magnétostriction du paragraphe précédent et la relation constitutive élastique du milieu, on peut naturellement établir l'expression macroscopique d'un tenseur des contraintes de magnétostriction $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}$:

$$\begin{aligned} W^{\text{ma-el}}(\mathbf{H}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}) &= - \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) \\ &= - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Comme le montre ce développement, le passage des déformations macroscopiques de magnétostriction aux contraintes macroscopiques de magnétostriction s'obtient par double-contraction avec le tenseur des rigidités élastiques du matériau étudié :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) = -\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{H}). \quad (3.72)$$

La prise en compte d'éventuelles anisotropies élastiques du milieu est ainsi assurée par les constantes élastiques qui définissent le tenseur \mathbb{C} . Dans le cas d'un milieu élastiquement isotrope caractérisé par les coefficients de Lamé (λ_L, μ_L) , l'hypothèse de déformations de magnétostriction isochores ($\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}) = 0$) permet de simplifier l'écriture du tenseur des contraintes de magnétostriction de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}} = -\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}} \stackrel{\mathbb{C} \text{ isotrope}}{\cong} -\lambda_L \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}) \mathbf{I} - 2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}} = -2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}. \quad (3.73)$$

À partir de la définition macroscopique (3.72) du tenseur des contraintes de magnétostriction, la densité de forces équivalentes de magnétostriction s'obtient naturellement par le formalisme de la méthode des contraintes électromagnétiques de Maxwell détaillé dans la section 3.1.2 pour le calcul des densités de sources électromagnétiques. Ainsi, la résultante globale \mathbf{F}^{ms} de forces équivalentes de magnétostriction, exercée sur l'ensemble du matériau inspecté, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}^{\text{ms}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{ms}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}^{\text{ms}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3.74)$$

avec : $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}} = -\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$.

À ce stade, l'absence de déformations magnétostrictives dans l'air et la condition limite élastique de surface libre impliquent directement l'absence de densité surfacique de sources magnétostrictives :

$$\mathbf{t}^{\text{ms}} = [\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{ms}}(\mathbf{H}) - \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{H})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (3.75)$$

La prise en compte d'une condition limite élastique de surface libre pour la modélisation du rayonnement ultrasonore induit par effets magnétostrictifs est à l'origine d'un débat dans la littérature EMAT (décrit en Introduction) sur le régime de prédominance des sources de magnétostriction dans les mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieux ferromagnétiques. En effet, la surface du milieu élastique inspecté n'est pas supposée libre dans le modèle de transduction de Hirao et Ogi [Ogi_1997, Hirao-Ogi_2003], ce qui engendre une nette surestimation du champ ultrasonore induit par effets magnétostrictifs. La prédominance des sources magnétostrictives décrites par Hirao et Ogi est en désaccord avec les précédentes conclusions de Thompson [Thompson_1980, Thompson_1990], qui ajoute artificiellement un terme en Dirac dans l'expression des forces équivalentes de magnétostriction pour vérifier *a posteriori* la condition limite élastique de surface libre (paragraphe 3.3.3.1). Cette incohérence a été soulevée par Ribichini [Ribichini_2011] pendant sa thèse, qui a montré la nécessité de supposer libre la surface d'un milieu élastique inspecté par EMAT pour décrire correctement le champ ultrasonore induit par magnétostriction en développant un modèle de couplage électromagnéto-élastique par éléments finis. Ces résultats de simulation sont validés par l'expérience, et Ogi accepte de publier avec Nagy et Ribichini [Ribichini-et-al_2012b] une étude qui statue sur les régimes de prédominance des sources de Lorentz et de magnétostriction induites par une configuration particulière d'EMAT (nappe de courant et aimantation permanente normale) dans le cas d'échantillons d'aciers ferritiques. Comme le montre les résultats de simulation décrits dans le Chapitre 4, ces régimes sont en réalité très dépendants des paramètres de conception et d'excitation du traducteur, et des propriétés magnéto-élastiques du milieu inspecté. Finalement, Ogi publie un *erratum* [Ogi_2012] qui témoigne d'une mauvaise prise en compte des conditions limites magnétiques et élastiques à l'interface entre l'air et le matériau inspecté dans ses travaux antérieurs [Ogi_1997] sur les sources de magnétostriction.

Le modèle de sources de magnétostriction développé dans cette étude s'inscrit dans ce contexte et suppose une condition limite élastique de surface libre : $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ sans l'investiguer davantage. Il est important d'insister sur le fait que la prise en compte de cette condition limite élastique n'est pas naturelle dans cette démarche de modélisation, et aboutit à une incohérence entre la définition (3.72) du tenseur des contraintes de magnétostriction proposée dans le volume du matériau inspecté et la condition limite élastique imposée à sa surface. Cette incohérence peut se justifier par la différence de nature des sources magnétostrictives. En effet, à l'inverse des densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques, directement induites dans le volume et à la surface du milieu, la nature de

la magnétostriction est une déformation élastique, transformée pour les besoins du modèle de transduction par EMAT en force équivalente de magnétostriction puis en contrainte surfacique équivalente de magnétostriction (section 3.3). La source dynamique de déformation élastique, indépendamment de sa cause magnétique, en tant que telle est régie par l'élasticité dynamique du volume, limité par la surface du milieu élastiquement libre de se déformer. La condition de surface libre implique directement à travers (3.75) que le saut du tenseur des contraintes de magnétostriction sur la surface du milieu est nul, ce qui annule la densité surfacique \mathbf{t}^{ms} de sources de magnétostriction dans le modèle de transduction.

La densité volumique de forces équivalentes de magnétostriction s'écrit ainsi formellement dans tout matériau ferromagnétique selon la relation tensorielle suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{\text{ms}} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}} = \nabla \cdot \{-\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}\}. \\ f_i^{\text{ms}} &= \sigma_{ij,j}^{\text{ms}} = -(\mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{\text{ms}})_{,j}.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Le modèle présenté de densité volumique de sources de magnétostriction induites en milieux ferromagnétiques est générique. Il permet de traiter une très large gamme de configuration d'inspection par EMAT. En particulier, ce modèle couvre des configurations 3D arbitraires de traducteurs EMAT, alimentés d'une intensité arbitraire de signal d'excitation dynamique, qui opèrent sur des géométries arbitraires de pièces ferromagnétiques, aux lois de comportements magnétostrictives régies par (3.66) et aux propriétés élastiques éventuellement anisotropes et hétérogènes.

3.2.3. Modèle de densité volumique de forces piézomagnétiques équivalentes

Un EMAT exerce dans le milieu inspecté une excitation magnétique qui est la somme d'une contribution statique, induite par l'aimant permanent, et une contribution dynamique, induite par la bobine électrique. Dans la plupart des applications EMAT, l'intensité du courant électrique injectée dans la bobine du traducteur est suffisamment faible pour assurer que l'intensité de l'excitation magnétique dynamique rayonnée est très faible devant celle de l'excitation magnétique statique :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_d(\mathbf{x}, t), \text{ avec : } \|\mathbf{H}_d\| \ll \|\mathbf{H}_s\|. \quad (3.77)$$

L'approximation piézomagnétique ($\|\mathbf{H}_d\| \ll \|\mathbf{H}_s\|$) se traduit par des équations de couplage linéarisées autour du point de fonctionnement statique du milieu, similaires aux relations de comportement piézoélectrique (linéarisation des phénomènes électrostrictifs), et pour lesquelles les effets réciproques peuvent être facilement mis en évidence [Ribichini_2011]. Le modèle macroscopique (3.66) de tenseur des déformations de magnétostriction peut être simplifié en mettant à profit cette approximation piézomagnétique. En effet, en considérant ce tenseur comme une fonction de la variable vectorielle \mathbf{H} , le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'expression (3.66) autour de la variable magnétique statique pour de faibles intensités d'excitation dynamique s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{\text{ms}}(\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d) = \varepsilon_{ij}^{\text{ms}}(\mathbf{H}_s) + \left. \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{ms}}}{\partial H_k} \right|_{\mathbf{H}_s} H_{dk} + o(\|\mathbf{H}_d\|^2). \quad (3.78)$$

Ce simple développement offre un cadre mathématique rigoureux permettant l'interprétation physique des phénomènes magnétostrictifs sous l'hypothèse d'une forte excitation magnétique statique. En effet, cette écriture fait ressortir un terme de magnétostriction statique $\varepsilon_{ij}^{ms}(\mathbf{H}_S) = \lambda^{ms}(\|\mathbf{H}_S\|)S_{ij}(\mathbf{H}_S)$ qui dépend uniquement du champ magnétique statique \mathbf{H}_S rayonné par l'aimant permanent. Ce terme représente l'état initial de déformation du milieu imposé par l'aimant permanent. Statique par nature, ce terme ne contribue pas à la génération d'onde ultrasonore ; il est par la suite négligé dans le modèle de sources de transduction ultrasonore. Le deuxième terme de ce développement représente la déformation dynamique de magnétostriction à l'origine de la génération d'onde ultrasonore dans le milieu inspecté. Sous l'hypothèse piézomagnétique, ce terme, par construction, est linéaire avec l'intensité de l'excitation dynamique. Il fait intervenir le tenseur (d'ordre 3) des déformations piézomagnétiques, défini par $d_{ijk}^{ms} = \partial \varepsilon_{ij}^{ms} / \partial H_k$ et évalué à l'intensité magnétique statique. Ce tenseur est largement exploité dans la littérature EMAT, par exemple dans [Hirao-Ogi_2003, Thompson_1990, Ribichini-et-al_2012b], pour étudier les phénomènes de couplage magnéto-élastique linéarisé (piézomagnétisme) rencontrés en milieux ferromagnétiques.

En bénéficiant de l'expression tensorielle (3.66) des déformations macroscopiques de magnétostriction, il est possible de dériver une expression tensorielle analytique du tenseur des déformations piézomagnétiques. En notant $\partial_x \{ \cdot \} = \partial \{ \cdot \} / \partial x$ l'opérateur de dérivée partielle selon la quantité x et en définissant $\varphi^{ms} = \partial_{\|\mathbf{H}\|} \{ \lambda^{ms} \}$, on peut développer la relation (3.78) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 d_{ijk}^{ms} &= \partial_{H_k} \{ \varepsilon_{ij}^{ms} \} \\
 &= \partial_{H_k} \{ \lambda^{ms}(\|\mathbf{H}\|) S_{ij}(\mathbf{H}) \} \\
 &= \partial_{H_k} \{ \lambda^{ms} \} S_{ij} + \lambda^{ms} \partial_{H_k} \{ S_{ij} \} \\
 &= \partial_{\|\mathbf{H}\|} \{ \lambda^{ms} \} \partial_{H_k} \{ \|\mathbf{H}\| \} S_{ij}(\mathbf{H}) + \frac{3\lambda^{ms}}{2} \partial_{H_k} \left\{ \frac{H_i H_j}{\|\mathbf{H}\|^2} \right\} \\
 &= \varphi^{ms} \frac{H_k}{\|\mathbf{H}\|} S_{ij} + \frac{3\lambda^{ms}}{2} \frac{\|\mathbf{H}\|^2 \partial_{H_k} \{ H_i H_j \} - H_i H_j \partial_{H_k} \{ \|\mathbf{H}\|^2 \}}{\|\mathbf{H}\|^4} \\
 &= \frac{\varphi^{ms}}{\|\mathbf{H}\|} S_{ij} H_k + \frac{3\lambda^{ms}}{\|\mathbf{H}\|^2} \left\{ \frac{(H_i \delta_{jk} + H_j \delta_{ik})}{2} - \frac{H_i H_j H_k}{\|\mathbf{H}\|^4} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Ainsi, en introduisant l'opérateur tensoriel $\overline{\otimes}$ défini pour un vecteur \mathbf{v} et un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 par l'identité : $[\mathbf{v} \overline{\otimes} \mathbf{T}]_{ijk} = v_i T_{jk} + v_j T_{ik}$, le développement (3.79) justifie la définition tensorielle formelle et analytique du tenseur macroscopique des déformations piézomagnétiques suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}^{ms}(\mathbf{H}) &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{ms}}{\partial \mathbf{H}} = \frac{\varphi^{ms}(\|\mathbf{H}\|)}{\|\mathbf{H}\|} \mathbf{S}(\mathbf{H}) \otimes \mathbf{H} + \frac{3\lambda^{ms}(\|\mathbf{H}\|)}{\|\mathbf{H}\|^2} \left[\frac{\mathbf{H} \overline{\otimes} \mathbf{I}}{2} - \frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|^2} \right], \\
 \text{avec : } \varphi^{ms} &= \frac{\partial \lambda^{ms}}{\partial \|\mathbf{H}\|}.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

L'expression formelle (3.79) des déformations piézomagnétiques est dérivée sans hypothèse *a priori* sur la configuration du traducteur EMAT utilisé et sur la géométrie de la pièce ferromagnétique inspectée.

Ces aspects sont fondamentaux pour permettre l'intégration dans un logiciel industriel comme CIVA d'un modèle piézomagnétique générique capable de traiter n'importe quel scénario d'inspection par EMAT. Finalement, l'écriture tensorielle proposée de \mathbf{d}^{ms} formalise les considérations géométriques discutées par Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_2003] sur les orientations relatives des excitations magnétiques dynamique et statique. Dans cet ouvrage, ces considérations sont menées au cas par cas pour définir les différentes composantes du tenseur des déformations piézomagnétiques selon les paramètres de conception du traducteur EMAT étudié, ce qui restreint fortement l'applicabilité de cette approche.

Sous l'approximation piézomagnétique et en ne considérant que la partie dynamique des sources, la définition formelle (3.76) de la densité de force dynamique équivalente de magnétostriction s'écrit :

$$\mathbf{f}^{\text{ms}} = \nabla \cdot \{-\mathbb{C} : [\mathbf{d}^{\text{ms}}(\mathbf{H}_s), \mathbf{H}_d]\}. \quad (3.81)$$

Le formalisme tensoriel décrit dans ce document permet d'obtenir facilement les modèles de forces équivalentes de magnétostriction dans les cas simplifiés d'inspection rencontrés de la littérature EMAT (sous l'approximation piézomagnétique). Par exemple, on considère le cas d'un EMAT dans le plan x - y qui rayonne une excitation magnétique statique normale et uniforme $\mathbf{H}_s(\mathbf{x}, t) = H_s \mathbf{e}_z$ et une excitation dynamique quelconque $\mathbf{H}_d(\mathbf{x}, t) = H_{dx}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x + H_{dy}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_y + H_{dz}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z$ dans un milieu plan, homogène et élastiquement isotrope. Le comportement magnéto-élastique du milieu est caractérisé par la loi de magnétostriction λ^{ms} , et son comportement élastique est décrit par ses coefficients de Lamé (λ_L, μ_L). Dans cette configuration, l'expression (3.81) des sources piézomagnétiques dynamiques équivalentes se réduit à l'expression des forces équivalentes de magnétostriction de la littérature, notamment discutée dans [Thompson_1990, Hirao-Ogi_2003] :

$$\mathbf{f}^{\text{ms}} = \begin{pmatrix} \mu_L \varphi^{\text{ms}}(H_s) \frac{\partial H_{dz}}{\partial x} - \frac{3\mu_L \lambda^{\text{ms}}(H_s)}{H_s} \frac{\partial H_{dx}}{\partial z} \\ \mu_L \varphi^{\text{ms}}(H_s) \frac{\partial H_{dz}}{\partial y} - \frac{3\mu_L \lambda^{\text{ms}}(H_s)}{H_s} \frac{\partial H_{dy}}{\partial z} \\ -2\mu_L \varphi^{\text{ms}}(H_s) \frac{\partial H_{dz}}{\partial z} - \frac{3\mu_L \lambda^{\text{ms}}(H_s)}{H_s} \left[\frac{\partial H_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{dy}}{\partial y} \right] \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Remarque relative à la prise en compte d'excitations magnétiques dynamiques de fortes intensités

L'expression (3.81) de la densité de sources équivalentes de magnétostriction faisant intervenir le tenseur des déformations piézomagnétiques \mathbf{d}^{ms} n'est valable que sous l'approximation piézomagnétique d'un champ magnétique dynamique de faible intensité devant celle du champ statique. Ce formalisme consiste à linéariser le tenseur des déformations de magnétostriction (3.66) autour du point de fonctionnement statique du matériau inspecté, et le tenseur des déformations piézomagnétiques est évalué à l'excitation magnétique statique \mathbf{H}_s . Inspirée des considérations géométriques de Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_2003], Rouge [Rouge_2013, Rouge-et-al_2014b] propose pendant sa thèse un modèle de forces équivalentes de magnétostriction valable pour n'importe quelle intensité de champ magnétique dynamique. Cependant le modèle est basé sur une extension du tenseur des déformations piézomagnétiques à de fortes intensités de champ magnétique dynamique, ce qui est incohérent, revenant à modéliser des phénomènes magnétostrictifs non-linéaires à partir d'une expression linéarisée de la déformation de magnétostriction. Les effets magnétostrictifs non-linéaires qui apparaissent pour de fortes intensités d'excitation magnétique dynamique peuvent en revanche être naturellement

modélisés par l'expression formelle (3.76) de la densité de forces équivalentes de magnétostriction : $\mathbf{f}^{\text{ms}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{x}, t)\}$. En effet, cette expression n'implique pas d'hypothèse *a priori* sur les intensités relatives des excitations magnétique statique et dynamique. Bien que séduisant sur le plan formel, un tel modèle requiert cependant la connaissance du comportement magnétostrictif du milieu inspecté dans des cas d'excitation dynamique de fortes amplitudes. Comme discuté dans le Chapitre 1, les matériaux ferromagnétiques exhibent des phénomènes magnétostrictifs hystérétiques, et l'usage d'une forte excitation dynamique excite des phénomènes de cycles d'hystérésis mineurs de magnétostriction, complexes à mesurer par l'expérience et à modéliser théoriquement.

3.3. Méthode de transformation des sources volumiques de transduction ultrasonore en contraintes surfaciques équivalentes

Dans les applications de CND par ultrasons, la connaissance précise du champ ultrasonore rayonné par les sources de transduction revêt une importance capitale dès lors que des informations quantitatives de résultats d'inspection sont recherchées, par exemple concernant la localisation et la caractérisation de défauts dans un matériau. C'est la raison pour laquelle de nombreux modèles ont été développés dans la littérature pour simuler le rayonnement ultrasonore de différentes distributions de sources. Parmi eux, de nombreux modèles traitent de la prédiction du champ ultrasonore rayonné par des sources mécaniques opérant à la surface d'un milieu élastique, simulant ainsi le rayonnement des sources induites par des transducteurs piézoélectriques au contact direct (passant par un produit de couplage en pratique) avec la pièce inspectée. La simulation de l'onde élastique transmise par un point source de contrainte normale et tangentielle à la surface d'un milieu élastique semi-infini, c'est-à-dire la fonction de Green du célèbre problème de Lamb, fait l'objet de nombreux articles dans la littérature depuis la contribution originale de Lamb [Lamb_1904], proposant des méthodes exactes ou approchées permettant de traiter une grande variété de milieux élastiques. Dans le cas de sources de transduction de taille finie, une simple intégrale de convolution surfacique et temporelle de la distribution de contraintes surfaciques dynamiques avec la solution élémentaire exacte ou approchée du problème de Lamb pour un point source (fonction de Green élastodynamique) permet la simulation des effets de diffraction engendrés par l'ouverture spatiale de ces sources [Lhémercy_1994, Lhémercy_2000, Amory_2007]. L'objectif de cette section consiste à expliquer comment ces modèles de convolution surfacique et temporelle, historiquement développés dans le logiciel CIVA pour simuler le rayonnement ultrasonore induits par des transducteurs piézoélectriques au contact, peuvent être également mis à profit pour simuler le rayonnement ultrasonore induit par des sources volumiques sans contact, comme celles engendrées par les transducteurs EMAT en milieux ferromagnétiques. En effet, comme cela a été décrit dans les sections 3.1 et 3.2, un transducteur EMAT induit dans ces milieux des sources volumiques et des sources surfaciques de transduction ultrasonore (électromagnétiques et magnétostrictives). Ainsi, pour utiliser directement les modèles de rayonnement développés dans le logiciel CIVA, une méthode mathématique formelle capable de rigoureusement transformer les sources volumiques de transduction ultrasonore en contraintes surfaciques équivalentes, c'est-à-dire rayonnant le même champ ultrasonore que les sources volumiques physiques, est nécessaire. Les sources électromagnétiques surfaciques sont quant à elles directement prises en compte comme des contraintes surfaciques en entrée du modèle de calcul ultrasonore.

3.3.1. Origines, motivations, et principes de la méthode

La problématique de cette section consiste à définir la meilleure représentation (en vue d'une implémentation dans CIVIA) du déplacement particulaire $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ induit en un point d'observation $\mathbf{x} \in \Omega$ (le milieu élastique inspecté) par une distribution volumique de sources dynamiques harmoniques $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)e^{i\omega t}$, avec ω la fréquence angulaire et $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ un point source. La nature des sources volumiques est volontairement arbitraire, afin de définir une méthode générique qui établit rigoureusement les hypothèses nécessaires à sa formulation. Pour simplifier l'écriture des équations, le terme $e^{i\omega t}$ est omis dans la suite de la présentation de la méthode. La solution exacte du champ de déplacement particulaire est classiquement obtenue par une intégrale volumique de convolution spatiale des sources $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ avec le tenseur de Green $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, solution élémentaire de l'équation d'onde élastique dans Ω . Cependant, cette opération est généralement coûteuse en temps de calcul et la connaissance théorique du tenseur de Green peut également s'avérer incomplète dans des configurations complexes d'inspection. Ces aspects sont défavorables en vue d'une implémentation de l'intégrale volumique de convolution dans un logiciel comme CIVIA. Ainsi, l'objectif de cette section est de déterminer la meilleure distribution de contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\sigma}^f$ des sources volumiques \mathbf{f} qui prédit le plus fidèlement le déplacement particulaire \mathbf{u} à l'aide d'une convolution surfacique avec la solution de Green à la surface du milieu inspecté. En notant \mathbf{X}_0 les points sources à la surface du milieu inspecté, le principe de la méthode se résume à la recherche de $\tilde{\sigma}^f$ tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0 \in \Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) d\Omega \cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\sigma}^f(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad (3.83)$$

Cette idée est relativement classique. Une telle méthode est par exemple exploitée par Kawashima [Kawashima_1984] qui représente la densité volumique de forces de Lorentz induites par EMAT par des contraintes surfaciques équivalentes définies simplement par l'intégrale des sources volumiques selon leur profondeur de pénétration dans le milieu inspecté. Cette méthode correspond à une approximation d'ordre zéro de l'intégrale volumique de rayonnement : c'est le moment d'ordre 0 des sources volumiques. En considérant un milieu de surface plane (de normale z) et en notant β la profondeur de pénétration des sources dans Ω , la contrainte surfacique équivalente d'ordre zéro s'écrit :

$$\tilde{\sigma}^f(x, y) = \mathbf{M}_f^{(0)}(x, y) = \int_{z=0}^{\beta} \mathbf{f}(x, y, z) dz. \quad (3.84)$$

Dans l'optique d'un gain en précision de la représentation, il est naturel de vouloir étendre cette approximation à un ordre supérieur. Une telle idée est originalement proposée par Thompson [Thompson_1978, Thompson_1980] qui décrit le formalisme des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux pour permettre la prise en compte des effets magnétostrictifs induits par EMAT en milieux ferromagnétiques. En effet, Thompson [Thompson_1978] démontre dans un cas académique (décrit dans le paragraphe 3.3.3.1) que la composante normale du moment d'ordre zéro des forces équivalentes de magnétostriction est systématiquement nulle en raison de la condition limite élastique de surface libre, ce qui se traduit dans ce formalisme approché par l'impossibilité de générer une onde de compression par effets magnétostrictifs et ne rejoint évidemment pas les observations expérimentales. C'est la raison pour laquelle Thompson [Thompson_1980] propose un modèle de contraintes surfaciques équivalentes prenant en compte l'influence des moments d'ordres élevés. La

méthode originale de Thompson est basée sur le développement en série de Taylor du tenseur de Green élastodynamique à l'ordre deux dans la direction normale à la surface élastique excitée. En notant $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$ les points sources à la surface du milieu et $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la coordonnée dans la profondeur des sources volumiques, ce développement s'écrit en géométrie plane de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{x}_0 \in \Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) d\Omega \\ &\cong \iiint_{(x_0, y_0, z_0) \in \Omega} \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) + z_0 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) + z_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \right] \cdot \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (3.85) \\ &\cong \iint_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(0)}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(1)}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(2)}(\mathbf{X}_0) \right] d\mathbf{X}_0, \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \mathbf{M}_f^{(p)}(\mathbf{X}_0) = \int_{z_0} z_0^p \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) dz_0. \quad (3.86)$$

À partir de ce développement, l'idée consiste à transférer les dérivées normales du tenseur de Green sur les moments des sources volumiques en utilisant l'équation d'onde élastique dont \mathbf{G} est la solution élémentaire. Une telle opération est technique. C'est la raison pour laquelle la méthode originale de Thompson, dont certaines erreurs ont été corrigées par Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2013], est uniquement réservée aux milieux élastiquement isotropes et de géométrie plane. En notant (λ_L, μ_L) les coefficients de Lamé et ρ la densité volumique du milieu élastique isotrope inspecté, l'expression des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &\cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \text{ avec :} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f &= \begin{pmatrix} M_{fx}^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_{fx}^{(2)} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_{fz}^{(1)}}{\partial x} - \frac{3\lambda_L + 4\mu_L}{2\lambda_L + 4\mu_L} \frac{\partial^2 M_{fx}^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_{fx}^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{\lambda_L + \mu_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_{fy}^{(2)}}{\partial x \partial y} \\ M_{fy}^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_{fy}^{(2)} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_{fz}^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_{fy}^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{3\lambda_L + 4\mu_L}{2\lambda_L + 4\mu_L} \frac{\partial^2 M_{fy}^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{\lambda_L + \mu_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_{fx}^{(2)}}{\partial x \partial y} \\ M_{fz}^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_{fz}^{(2)} + \frac{\partial M_{fx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{fy}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} \left(\frac{\partial^2 M_{fz}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{fz}^{(2)}}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.87) \end{aligned}$$

Cependant, si les hypothèses adoptées simplifient l'obtention et les expressions des contraintes surfaciques équivalentes, elles en restreignent fortement le champ d'application. La présente section détaille l'extension de la méthode de transformation au cas de milieux élastiques de géométries complexes. Une telle extension met en œuvre des développements techniques d'analyse tensorielle différentielle dans un système de coordonnées arbitraires, dont les détails ont été décrits dans [Clausse-Lhémercy_2016]. La validation numérique du gain en précision sur la représentation du champ de déplacement particulière apportée par le développement à l'ordre deux des contraintes surfaciques équivalentes est également présentée dans [Clausse-Lhémercy_2016]. Les deux sections suivantes décrivent succinctement le modèle de contraintes surfaciques développées à l'ordre deux en géométrie complexe, les résultats de validations numériques de la méthode et sa mise en œuvre pour représenter les sources magnétostrictives. Pour ne pas alourdir ce document, ces paragraphes font volontairement

l'impasse sur un certain nombre de détails théoriques, un lecteur intéressé par ces développements techniques est invité à consulter l'article [Clause-Lhémercy_2016], inséré en Annexe C.

3.3.2. Contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux en milieux élastiques de géométries complexes

Le développement formel à l'ordre deux des contraintes surfaciques équivalentes d'une densité volumique de sources de transduction ultrasonore réparties sous la surface libre d'un milieu élastique de géométrie complexe est présenté. L'objectif de ces travaux est d'étendre le développement de Thompson [Thompson_1980] et Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2013] pour permettre l'application de la méthode à davantage de cas d'inspection que l'on peut rencontrer industriellement. Dans ce but, des développements d'analyses différentielle et tensorielle sont mis en œuvre afin de pouvoir traiter la représentation géométrique d'une surface complexe. Le présent paragraphe résume les outils et manipulations mathématiques nécessaires, le détail des développements étant décrit dans [Clause-Lhémercy_2016] en Annexe C. Pour permettre la prise en compte de la géométrie de la surface élastique excitée, une représentation paramétrique \mathbf{M}_s , d'un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^3 , de la surface extérieure $\partial\Omega$ du milieu élastique Ω inspecté est considérée. Dans ce formalisme paramétrique, la normale extérieure à la surface $\partial\Omega$ en un point $(u, v) \in U$ et l'élément de surface $d\Gamma$ sont définis par :

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial_u \mathbf{M}_s(u, v) \times \partial_v \mathbf{M}_s(u, v)}{\|\partial_u \mathbf{M}_s(u, v) \times \partial_v \mathbf{M}_s(u, v)\|} \quad (3.88)$$

$$d\Gamma = \|\partial_u \mathbf{M}_s(u, v) \times \partial_v \mathbf{M}_s(u, v)\| dudv. \quad (3.89)$$

On désigne par $\Omega_\beta \subset \Omega$ le voisinage proche de la surface $\partial\Omega$ excitée, dont la profondeur dans la direction normale à la surface est définie par le paramètre $\beta > 0$ qui représente la profondeur de pénétration des sources dans le volume inspecté. Ce paramètre est volontairement arbitraire dans le raisonnement mis en place, pour traiter de cas génériques de sources volumiques de transduction. Comme illustré dans la Figure 3.48, ce domaine Ω_β est défini par l'expression paramétrique suivante :

$$(\Omega_\beta) : \forall (u, v, w) \in U \times]0, \beta[, \quad \mathbf{M}(u, v, w) = \mathbf{M}_s(u, v) - w\mathbf{n}(\mathbf{M}_s(u, v)). \quad (3.90)$$

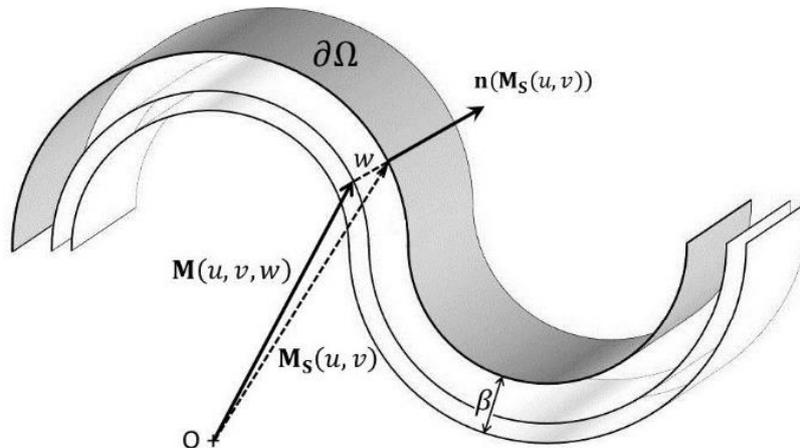


Figure 3.48 : Définition paramétrique du domaine Ω_β étudié.

Cette représentation paramétrique du voisinage Ω_β permet la définition formelle de l'élément de volume $d\Omega = \det(\partial_u \mathbf{M}, \partial_v \mathbf{M}, \partial_w \mathbf{M}) du dv dw$ selon certaines hypothèses sur le paramètre β . En notant k_1 et k_2 les deux courbures principales en un point $(u, v) \in U$ de la surface $\partial\Omega$, ces conditions géométriques de validité de la représentation paramétrique s'écrivent :

$$\det(\partial_u \mathbf{M}, \partial_v \mathbf{M}, \partial_w \mathbf{M}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 : \forall \beta > 0, \\ k_1 \leq 0, k_2 \geq 0 : 0 < \beta < \min(|k_1|^{-1}), \\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0 : 0 < \beta < \min(|k_1|^{-1}, |k_2|^{-1}). \end{cases} \quad (3.91)$$

Ces conditions d'applicabilité expriment que, plus les courbures de la surface inspectée sont marquées, plus la profondeur de pénétration β des sources doit être petite pour assurer la validité de la description paramétrique proposée. Ces conditions ne sont généralement pas restrictives dans une configuration industrielle d'inspection par EMAT, la profondeur de pénétration des sources de transduction étant très faible devant les rayons de courbures des pièces mécaniques industrielles inspectées. En introduisant $H = (k_1 + k_2)/2$ la courbure locale moyenne de la surface $\partial\Omega$ et $K = k_1 k_2$ la courbure locale de Gauss de la surface $\partial\Omega$, l'expression du déplacement particulière \mathbf{u} par la convolution volumique du tenseur de Green élastodynamique avec les sources volumiques de transduction s'écrit dans ce cadre :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) [1 + 2Hw + Kw^2] dw d\Gamma. \quad (3.92)$$

Selon la définition de Ω_β : $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \exists (\mathbf{X}_0, w) \in \partial\Omega$ tels que : $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0 - w\mathbf{n}(\mathbf{X}_0)$, le développement de Taylor à l'ordre N du tenseur de Green dans la direction normale \mathbf{n} à la surface $\partial\Omega$ s'écrit :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cong \sum_{p=0}^N \frac{(-w)^p}{p!} \frac{\partial^p \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}^p}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0), \quad (3.93)$$

On fait alors l'hypothèse que les variations du tenseur de Green dans la profondeur, définies par l'inverse de la longueur d'onde élastique λ , sont faibles devant celles des sources de rayonnement, définies comme l'inverse de la profondeur de pénétration β . Cette hypothèse restreint le champ d'application de la méthode à des sources de profondeur de pénétration faible devant la longueur d'onde d'inspection : $\beta \ll \lambda$. Elle est généralement vérifiée dans le cas d'une inspection par EMAT en milieux ferromagnétiques. En effet, la longueur d'onde ultrasonore est classiquement définie par la relation : $\lambda = c_{el}/f$, avec c_{el} la vitesse de propagation élastique du milieu inspecté et f la fréquence d'excitation. La profondeur de pénétration des sources électromagnétiques et magnétostrictives est de l'ordre de quelques épaisseurs de peau δ_p . L'épaisseur de peau est définie selon les propriétés électromagnétiques (perméabilité magnétique relative μ_r et conductivité électrique σ) du milieu inspecté et de la fréquence d'excitation f selon la relation : $\delta_p = 1/\sqrt{\pi\mu_0\mu_r\sigma f}$. Généralement, l'hypothèse $\beta \sim 5\delta_p$ est suffisante dans une application EMAT, sachant qu'à cette profondeur, l'amplitude des sources électromagnéto-élastiques induites dans le volume est inférieure à 1% de l'amplitude à la surface (variations typiques des sources dans la profondeur en e^{-z/δ_p}). Ainsi, la condition d'application $\beta \ll \lambda$ se traduit par une inégalité sur la fréquence d'inspection : $f \ll \pi\mu_0\mu_r\sigma c_{el}^2/25$. Cette inégalité est très largement vérifiée dans les cas industriels d'application de CND par EMAT (avec des fréquences d'inspection

généralement comprises entre 100 kHz et 10 MHz), d'autant plus si le milieu inspecté est ferromagnétique ($\mu_r \gg 1$). Par exemple, la fréquence limite d'application du développement est de l'ordre de 50 MHz dans le cas de l'aluminium, et de 2 GHz dans le cas du nickel.

La condition $\beta \ll \lambda$ permet d'approcher le tenseur de Green élastodynamique par son développement asymptotique en $o((\beta/\lambda)^N)$, ce qui fait naturellement intervenir les moments des sources volumiques d'ordres élevés dans l'approximation de l'intégrale volumique de rayonnement ultrasonore :

$$\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \int_{\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}^p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(p)}(\mathbf{x}_0) d\Gamma, \quad \text{avec :} \quad (3.94)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{M}_f^{(p)}(\mathbf{x}_0) = \int_{w=0}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 - w\mathbf{n})(-w)^p [1 + 2Hw + Kw^2] dw. \quad (3.95)$$

En pratique, ce développement est exploité jusqu'à l'ordre deux. Dans le but de dériver une distribution de contraintes surfaciques équivalentes en accord avec (3.83), il est nécessaire de convertir les dérivées normales première et seconde du tenseur de Green en dérivées surfaciques, pour ensuite les transférer sur les moments des sources. Cette opération est réalisée à l'aide d'opérateurs différentiels normal ∇_n et surfacique (tangentielle) ∇_s . En introduisant les projections dans la direction normale $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et tangentielle $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ à la surface inspectée, ces opérateurs sont définis $\forall \mathbf{v} \in \Omega$ par les relations :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \nabla_n \mathbf{v} + \nabla_s \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}^\perp + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}. \\ v_{i,j} &= (\nabla_n \mathbf{v})_{ij} + (\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = v_{i,k} P_{kj}^\perp + v_{i,k} P_{kj}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla_n \cdot \mathbf{v} + \nabla_s \cdot \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} : \mathbf{P}^\perp + \nabla \mathbf{v} : \mathbf{P}. \\ v_{i,i} &= (\nabla_n \cdot \mathbf{v}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{v}) = v_{i,k} P_{ki}^\perp + v_{i,k} P_{ki}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Ce formalisme différentiel est complété par le théorème de la divergence surfacique, qui s'énonce pour tout vecteur \mathbf{U} de \mathbb{R}^3 et pour toute surface S plongée dans \mathbb{R}^3 de normale extérieure \mathbf{n} par l'intégrale :

$$\int_S (\nabla_s \cdot \mathbf{U}) d\Gamma = \int_{\partial S} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} + \int_S [\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) d\Gamma. \quad (3.98)$$

Ces outils permettent la décomposition des dérivées normales du tenseur de Green en fonction de ses dérivées partielles surfaciques et assurent leur transfert sur les moments de sources d'ordre un et deux dans le but de dériver l'expression formelle des contraintes surfaciques équivalentes dans le cas de surface de géométrie complexe. Ces manipulations exploitent les propriétés de la solution élémentaire de Green \mathbf{G} de l'équation d'onde élastique (3.99) et la condition limite élastique de surface libre (3.100) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^G(\mathbf{x}_0) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta_{\mathbf{x}_0}, \quad (3.99)$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \quad \boldsymbol{\sigma}^G(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = [\mathbb{C} : \nabla \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (3.100)$$

À partir de ces relations et en mettant à profit le formalisme tensoriel des opérateurs différentiels surfaciques, les contraintes surfaciques équivalentes peuvent être développées jusqu'à l'ordre deux dans

le cas général. Ces développements techniques et fastidieux sont détaillés dans [Clausse-Lhémercy_2016] (reproduit en Annexe C) dans le cas d'un milieu élastique homogène et isotrope ; ils ne sont pas décrits davantage dans cette section pour ne pas trop alourdir la présentation générale de la méthode. L'expression finale des contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{iso}}^{\text{f}}$ de sources volumiques \mathbf{f} développées à l'ordre deux induites à la surface d'une pièce de géométrie complexe, de normale extérieure \mathbf{n} , d'un milieu élastique homogène et isotrope, caractérisé par ses coefficients de Lamé (λ_L, μ_L) , est donnée par l'équation (3.101).

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_{\beta}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{iso}}^{\text{f}}(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{iso}}^{\text{f}} = & \mathbf{M}_{\text{f}}^{(0)} - \frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} + \alpha_1 \nabla_{\text{s}} (\mathbf{M}_{\text{f}}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) + (\nabla_{\text{s}} \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(1)}) \mathbf{n} + (\nabla_{\text{s}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(1)} \\ & - \alpha_2 (\mathbf{M}_{\text{f}}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) (\nabla_{\text{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\alpha_1}{2} \nabla_{\text{s}} \left[\nabla_{\text{s}} \cdot (\mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} - 2\mu_L \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)}) \right] \\ & - \mu_L (\nabla_{\text{s}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{S}} [\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)}]) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \nabla_{\text{s}} \left[(\nabla_{\text{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \right] \\ & + \frac{\alpha_1}{2} (\mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) [\alpha_2 (\nabla_{\text{s}} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \nabla_{\text{s}} \cdot (\nabla_{\text{s}} \mathbf{n})] \\ & + \frac{\alpha_1}{2} (\nabla_{\text{s}} \cdot [2\mu_L \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} - \mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)}]) (\nabla_{\text{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ & + \frac{\alpha_1}{2} (\nabla_{\text{s}} \cdot [\nabla_{\text{s}} (\mathbf{M}_{\text{f}}^{(2)} \cdot \mathbf{n})]) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\text{et : } \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}, \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 1, \\ \tilde{P}_{ij} = \frac{1}{\lambda_L + 2\mu_L} P_{ij}^{\perp} + \frac{1}{\mu_L} P_{ij}, \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{S}}[\mathbf{v}])_{ij} = \frac{1}{2} v_{k,l} \{ P_{ik} P_{lj} + P_{li} P_{kj} \}. \end{cases}$$

Naturellement, le nombre important de termes à prendre en compte dans ce développement est lié à la non-uniformité du vecteur normal \mathbf{n} dans le cas général d'une surface complexe, et l'expression formelle (3.101) se réduit aux expressions développées dans les travaux de Thompson [Thompson_1980] et Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2013] en supposant une surface inspectée de géométrie plane (normale constante).

Dans le cas général d'un milieu élastique potentiellement anisotrope et hétérogène, l'établissement de l'expression formelle des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux est théoriquement plus complexe à dériver et implique des manipulations techniques de tenseurs d'ordre élevé, définis à partir du tenseur (d'ordre quatre) des rigidités élastiques \mathbb{C} du milieu inspecté. À partir des différentes étapes théoriques du développement de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{iso}}^{\text{f}}$ (Annexe C), une extension de la méthode détaillée dans [Clausse-Lhémercy_2016] au cas des milieux hétérogènes et anisotropes est développée en Annexe D. L'expression formelle, la plus générale possible, des contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{f}}$ de sources volumiques \mathbf{f} développées à l'ordre deux et adaptées au traitement des milieux élastiquement et géométriquement complexes est ainsi donnée par la relation suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f = & \mathbf{M}_f^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2} \mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \mathcal{F}^n \left[\mathbf{M}_f^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \right] \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{F}^n \left[\mathcal{F}^n \left[\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \right] \cdot \boldsymbol{\Lambda} - {}^T \nabla_s \left(\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \right) : \mathbb{A} - \nabla_s \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \right) + \mathbf{M}_f^{(2)} \cdot (\nabla \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{n}) \right], \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\text{et : } \begin{cases} \Gamma_{ij} = \mathbb{C}_{kijl} n_k n_l, \\ \Lambda_{ijk} = (\boldsymbol{\Gamma}^{-1})_{il} n_m \mathbb{C}_{mljk}, \\ \mathbb{A}_{ijkl} = \mathbb{C}_{ijkl} - \mathbb{C}_{ijmn} n_n \Lambda_{mkl}, \\ \mathcal{F}_i^n[\mathbf{T}] = T_{ji,k} P_{jk} - n_{k,l} P_{kl} n_j T_{ji}. \end{cases}$$

La prise en compte de l'hétérogénéité élastique du milieu inspecté se traduit par la présence du terme en $\nabla \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{n}$ qui est reliée au saut de constantes élastiques du tenseur des rigidités à l'interface de domaines élastiques différents. En restreignant les expressions (3.101) et (3.102) à l'ordre zéro comme première approximation, on retrouve $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f = \mathbf{M}_f^{(0)}$ qui correspond à la méthode conventionnelle de simple intégration des sources volumiques dans la profondeur décrite dans le paragraphe précédent. En étendant le développement des contraintes équivalentes à l'ordre deux, un terme inertiel $(\rho_L \omega^2 / 2) \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_f^{(2)}$ apparaît dans l'expression, dont l'influence est proportionnelle au carré de la fréquence d'inspection. De plus, de nombreux termes apparaissent dans le développement en raison de la non-uniformité du vecteur normal \mathbf{n} dans le cas de surfaces de géométrie complexe.

L'intérêt principal de modéliser les sources volumiques de rayonnement ultrasonore sous la forme de contraintes surfaciques équivalentes réside dans le fait que le tenseur de Green élastodynamique doit être implémenté uniquement dans le cas de points sources à la surface du milieu inspecté. La convolution surfacique ainsi déduite réduit le coût en temps de calcul numérique du champ de déplacement élastique induit par les sources volumiques de transduction. De plus, les expressions théoriques du tenseur de Green pour des points sources à la surface d'un milieu (semi-infini) sont à la fois plus simples et mieux maîtrisées dans des configurations élastodynamiques complexes que les expressions du tenseur de Green dans le cas de points sources dans le volume inspecté. Enfin, l'implémentation numérique de ce modèle de contraintes surfaciques équivalentes dans le logiciel CIVA de simulation des méthodes de CND permet de coupler naturellement ses modules de calcul électromagnétique CIVA CF et ultrasonore CIVA US dans le cas d'une inspection par EMAT.

Dans cette optique, il est naturel de s'interroger sur la précision du calcul des moments d'ordres élevés des sources volumiques, ainsi que des nombreuses dérivées surfaciques numériques impliquées dans les expressions obtenues. Une première précaution numérique consiste à s'assurer de prendre suffisamment de points de calcul dans la profondeur de pénétration β du matériau inspecté, de façon à fidèlement approcher les variations spatiales des sources volumiques de transduction, et donc déterminer avec précision les moments des sources d'ordres élevés. Dans le cas de sources volumiques qui varient fortement dans la profondeur, des schémas numériques d'ordres élevés (notamment à l'interface entre l'air et le milieu inspecté) peuvent également être mis à profit en complément d'une fine discrétisation dans la profondeur, pour assurer la stabilité et la précision du calcul des dérivées surfaciques impliquées.

Pour démontrer le gain en précision dans la représentation du champ de déplacement élastique apporté par la prise en compte des moments des sources volumiques d'ordres élevés par rapport à la méthode conventionnelle à l'ordre zéro, un exemple d'application de la méthode est décrit dans le paragraphe suivant traitant le cas d'un milieu élastique de géométrie cylindrique. Le cas particulier des contraintes surfaciques équivalentes des sources magnétostrictives induites par EMAT en milieux ferromagnétiques est également décrit dans le cadre de la configuration idéale étudiée par Thompson [Thompson_1978].

3.3.3. Application théorique de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux

Avant d'implémenter la méthode théorique formelle des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux dans le logiciel CIVA, les deux paragraphes suivants discutent du gain en précision apporté par ce développement asymptotique, dans le cas élémentaire de Thompson pour la prise en compte des sources magnétostrictives de transduction ultrasonore et dans un exemple de sources volumiques arbitraires dans une configuration cylindrique d'inspection ultrasonore.

3.3.3.1. Cas élémentaire de Thompson de sources magnétostrictives induites par EMAT

Le cas élémentaire analytique 2D, originalement étudié par Thompson [Thompson_1978], est décrit dans ce paragraphe. Cet exemple permet d'appréhender l'influence de la prise en compte des moments d'ordres élevés dans le développement des contraintes surfaciques équivalentes des sources volumiques de magnétostriction induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Le transducteur étudié est composée d'une bobine électrique en forme de serpentín (infini), alimentée d'un courant harmonique $I_0 e^{i\omega t}$ d'amplitude I_0 et de fréquence angulaire ω , et d'un aimant permanent délivrant une excitation magnétique statique uniforme d'intensité H_s et de polarisation selon x : $\mathbf{H}_s = H_s \mathbf{e}_x$. Le milieu ferromagnétique inspecté (de perméabilité magnétique relative μ_R et de conductivité électrique σ) est supposé plan, et élastiquement isotrope et homogène. En plus de l'hypothèse d'un champ magnétique statique uniforme, cette configuration est théoriquement idéale puisqu'elle suppose également une dimension infinie dans la direction y (problème 2D en fonction des variables x et z), et un champ magnétique dynamique induit par la bobine uniquement polarisé dans la direction \mathbf{e}_x (et donc aligné avec le champ statique) : $\mathbf{H}_d = H_d(x, z, t) \mathbf{e}_x$. La configuration idéale étudiée par Thompson [Thompson_1978] est illustrée par la Figure 3.49.

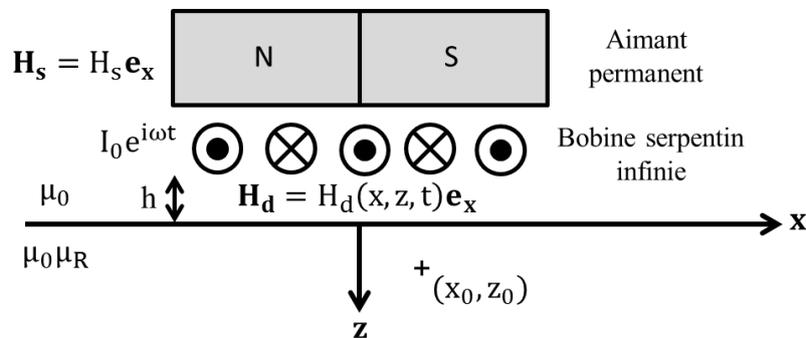


Figure 3.49 : Configuration EMAT élémentaire 2D de Thompson.

En suivant le raisonnement de Thompson [Thompson_1980], une telle configuration d'EMAT, avec une dimension infinie selon y et des champs magnétiques (statiques et dynamiques) alignés selon x ,

engendre une densité volumique de sources magnétostrictives en milieu ferromagnétique (avec une profondeur de pénétration β , multiple de l'épaisseur de peau δ_p), dont la composante normale f_z^{ms} peut s'écrire à un instant t en un point source (x_0, z_0) du milieu selon l'expression :

$$f_z^{ms}(x_0, z_0, t) = \mu_L \varphi^{ms}(H_S) [ik - \delta_D(z_0)] H_{dx}(x_0, z_0, t), \quad (3.103)$$

avec : $H_{dx}(x_0, z_0, t) = \tilde{H}_{dx}(x_0) e^{-ikz_0} e^{i\omega t}$.

Dans cette relation, le paramètre k est défini par $(1 - i)/\delta_p$, et δ_D représente la distribution de Dirac à la surface du milieu inspecté. Naturellement, le modèle formel (3.76) de forces volumiques équivalentes de magnétostriction présenté dans la section 3.2 se réduit bien à l'expression (3.103) dans ce cas idéal d'inspection, à l'exception du terme en δ_D . Ce terme non-physique est artificiellement ajouté au modèle de forces de magnétostriction par Thompson afin d'assurer la condition limite de surface libre, non vérifiée en l'absence de ce terme. Le modèle formel de sources équivalentes de magnétostriction tient également compte de la condition limite élastique de surface libre, mais directement dans la définition (3.75) des contraintes de magnétostriction à la surface du milieu (section 3.2). Par définition des moments de source d'ordres élevés en géométrie plane (équation (3.86)), la composante normale du moment d'ordre zéro des sources magnétostrictives (équation (3.103)) s'annule systématiquement en tout point d'observation x_0 à la surface de cette configuration simplifiée, à l'inverse de celle du moment d'ordre deux de ces sources qui prédit une valeur finie. En suivant la démarche de Thompson, il vient :

$$M_{f_z^{ms}}^{(0)}(x_0, t) = \int_{z_0=0}^{+\infty} f_z^{ms}(x_0, z_0, t) dz_0 = 0, \quad (3.104)$$

$$M_{f_z^{ms}}^{(2)}(x_0, t) = \int_{z_0=0}^{+\infty} z_0^2 f_z^{ms}(x_0, z_0, t) dz_0 = -\frac{2\mu_L \varphi^{ms}(H_S)}{k^2} \tilde{H}_{dx}(x_0) e^{i\omega t}. \quad (3.105)$$

Thompson [Thompson_1980] fait deux observations expérimentales indépendantes pour témoigner de l'incohérence de modéliser des contraintes normales surfaciques de magnétostriction nulles par la méthode du moment d'ordre zéro dans cette configuration. Ces incohérences ont motivé son idée originale d'étendre le développement des contraintes surfaciques équivalentes jusqu'à l'ordre deux (uniquement valable pour des milieux élastiques plans isotropes et homogènes), ce développement ayant été récemment corrigé par Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2013], puis étendu à des milieux élastiques anisotropes et hétérogènes de géométrie complexe dans l'étude présente (équation (3.102)). Dans le cas particulier analytique de Thompson, les contraintes surfaciques équivalentes normales de magnétostriction développées à l'ordre deux se réduisent en géométrie cartésienne à l'expression :

$$\tilde{\sigma}_z^{fms}(x_0, t) = M_{f_z^{ms}}^{(0)}(x_0, t) - \frac{\rho_L \omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_{f_z^{ms}}^{(2)}(x_0, t) = \frac{\rho_L \omega^2 \mu_L \varphi^{ms}(H_S)}{(\lambda_L + 2\mu_L) k^2} \tilde{H}_{dx}(x_0) e^{i\omega t}. \quad (3.106)$$

Les contraintes surfaciques équivalentes normales de magnétostriction développées à l'ordre deux sont donc non-nulles, et contribuent ainsi à la génération d'onde ultrasonore dans cette configuration EMAT, ce qui lève l'incohérence de prédire des sources de transduction nulles par la méthode d'ordre zéro. En complément des commentaires proposés par Thompson dans [Thompson_1980], ce résultat théorique a également été confirmé par Ribichini *et al.* [Ribichini-et-al_2012b] qui introduisent les sources de magnétostriction en milieux ferromagnétiques dans les mécanismes de transduction ultrasonore d'un EMAT d'induction statique normale sous la forme de sources purement inertielles. Les prédictions

ultrasonores issues de l'implémentation d'un tel modèle inertiel sont simulées par méthode des éléments-finis et ont été validées par l'expérience. Le lien théorique entre ce modèle inertiel et la méthode proposée dans cette étude des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux a été récemment soulevé par Nagy et Ribichini dans [Nagy-Ribichini_2015] pour la prise en compte des sources magnétostrictives dans les mécanismes de transduction induits par un EMAT à polarisation statique tangentielle. Ces deux méthodes sont en effet intimement liées, la démonstration rigoureuse de ce lien dans la configuration géométrique simplifiée de [Nagy-Ribichini_2015] est proposée en Annexe E. Cependant, cette approche inertielle ne peut être étendue à des configurations géométriques plus complexes en vue de l'utilisation des modèles semi-analytiques de rayonnement ultrasonore de CIVA US. De plus, le modèle de contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux proposé dans cette étude est numériquement validé et traite également de l'ouverture spatiale (surfacique) des sources de magnétostriction induites par EMAT dans une très large gamme de milieux.

Ainsi, même si l'ordre de grandeur de la contribution des moments des sources volumiques (3.95) dans le développement formel (3.94) décroît avec leur ordre p (développement asymptotique en $(\delta/\lambda)^p$), l'amplitude du terme d'ordre deux de $\tilde{\sigma}^f$ n'est pas nulle, varie notamment avec la fréquence d'inspection (prise en compte des phénomènes inertiels), et contribue ainsi à la génération d'onde ultrasonore dans le milieu ferromagnétique inspecté. Dans ce sens, les travaux historiques de Thompson [Thompson_1980] et ceux plus récents de Ribichini *et al.* [Ribichini-et-al_2012b] permettent de mettre en lumière l'intérêt d'un tel développement asymptotique des contraintes surfaciques équivalentes, notamment dans le but précis de prendre en compte le plus rigoureusement possible la contribution des sources magnétostrictives (même si leur amplitude est faible) dans les mécanismes de transduction ultrasonore mis en jeu dans une application de CND par EMAT en milieux ferromagnétiques. Ces raisons ont motivé l'extension d'un tel développement asymptotique à des cas génériques d'inspection (matériaux élastiquement et géométriquement complexes) afin de rendre applicable une telle méthode théorique à de plus nombreuses configurations d'inspection rencontrées industriellement.

Le modèle théorique mis en place ne fait aucune hypothèse sur la configuration EMAT étudiée (aimant permanent et bobine électrique quelconques), et donc sur les variations spatiales des champs électromagnétiques induits dans le milieu ferromagnétique inspecté, ce qui permet l'étude de configurations complexes prenant en compte l'ouverture finie des sources électromagnéto-élastiques induites à la surface d'un milieu ferromagnétique par EMAT. L'application de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes au cas de sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par une configuration complexe d'EMAT est proposée dans [Clausse-et-al_2017]. Cette étude montre l'importance du développement d'ordre deux dans la formulation des contraintes équivalentes de magnétostriction, ce qui étend les travaux de Thompson (décrits dans ce paragraphe) à des géométries arbitraires (3D) de traducteur EMAT.

S'inscrivant dans la suite logique des travaux des Thompson, Rouge, Nagy et Ribichini, la validation numérique du gain en précision apporté dans la représentation du champ ultrasonore selon la méthode des contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux est menée dans cette étude. Le cas traité est celui d'une densité volumique de sources aux variations spatiales arbitraires induites dans un milieu élastique isotrope de géométrie cylindrique (pour tester l'extension formelle aux géométries complexes). Ces résultats numériques entérinent l'intérêt du développement asymptotique d'ordre deux des contraintes équivalentes, en proposant une analyse de l'erreur numérique induite sur le champ ultrasonore par les approximations d'ordres zéro et deux en fonction de la fréquence d'inspection et du matériau inspecté.

3.3.3.2. *Validations numériques de la méthode sur le champ ultrasonore prédit*

On considère le cas d'un volume cylindrique (supposé vide) de rayon R au sein d'un milieu élastique Ω isotrope homogène, à la surface duquel une source est appliquée. On fait l'hypothèse d'une dimension infinie selon z et on se place en coordonnées polaires (r, θ) . Les points sources et d'observation sont respectivement notés $\mathbf{M}_0(r_0, \theta_0)$ et $\mathbf{M}_R(r, \theta)$, la scène géométrique est illustrée sur la [Figure 3.50](#).

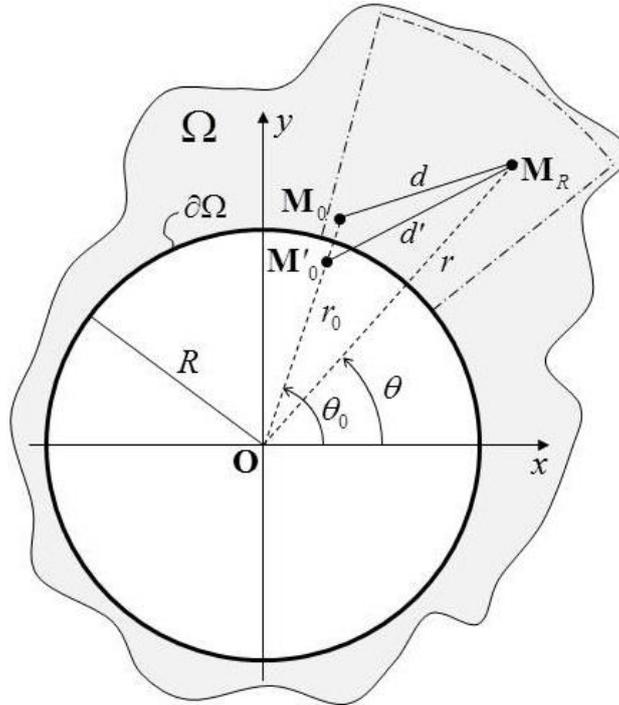


Figure 3.50 : Représentation de la configuration cylindrique étudiée.

On étudie le champ de déplacement élastique induit dans Ω par une distribution volumique de ligne source $\mathbf{f} = f_z(r_0, \theta_0)\mathbf{e}_z$ (infinie selon z) harmonique (de pulsation ω) d'ondes transverses polarisées selon z (ondes SH 2D). Pour reproduire les variations typiques des sources induites par EMAT, elles sont modélisées pour $(r_0, \theta_0) \in [R, R + \beta] \times \mathbb{R}$ par la fonction analytique aux variables séparées : $f_z(r_0, \theta_0) = g(\theta_0)e^{-(r_0-R)/\delta_p}$, avec δ_p l'épaisseur de peau du milieu inspecté et $g(\theta_0)$ un fenêtrage de Hann représentant l'ouverture angulaire des sources volumiques, supposées centrées en $\theta_0 = 45^\circ$. Les variations spatiales des sources \mathbf{f} sont illustrées sur la [Figure 3.51](#) dans le cas d'un volume cylindrique de rayon $R = 50$ mm rempli d'air dans un échantillon d'aluminium.

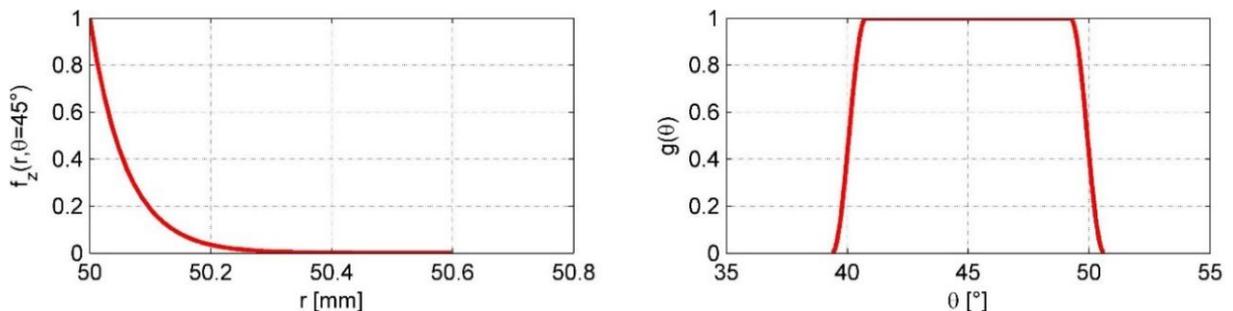


Figure 3.51 : Variations spatiales des sources $\mathbf{f} = g(\theta_0)e^{-(r_0-R)/\delta_p}\mathbf{e}_z$ dans un cylindre d'aluminium ($R = 50$ mm).

Le problème élastique étudié est relativement simple puisque qu'aucune conversion de mode ne peut intervenir pour des raisons de symétrie, ce qui permet de focaliser la validation uniquement sur la précision et le gain de performances apportés par la méthode des contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux. La solution exacte de ce problème élastodynamique pour les ondes SH [Sánchez-Sesma-et-al_2008] fait intervenir une série infinie permettant la prise en compte d'ondes rampantes dans la zone d'ombre du volume cylindrique (zone d'ombre due à l'ouverture finie des sources à la surface). Ici, une solution approchée de ce problème est considérée, basée sur les développements asymptotiques de Pathak [Pathak-et-al_1980] dans la zone éclairée. La fonction de Green est approchée en pratique par la méthode du point image, qui prédit le champ en onde SH en un point d'observation \mathbf{M}_R du milieu comme la superposition des contributions d'une ligne source \mathbf{M}_0 et de son image \mathbf{M}'_0 par rapport à la surface inspectée. En notant $H_0^{(2)}$ la fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre zéro, (d, d') les distances représentées sur la [Figure 3.50](#), c_T la vitesse des ondes transverses dans le milieu élastique, et μ_L le second coefficient de Lamé (module de cisaillement) du milieu, le développement asymptotique de la solution de Green G_{zz} de ce problème élastique s'écrit dans la zone éclairée selon la relation :

$$G_{zz}(\mathbf{M}_R; \mathbf{M}_0) = \frac{1}{4i\mu_L} \left\{ H_0^{(2)}(\omega d/c_T) + H_0^{(2)}(\omega d'/c_T) \right\}. \quad (3.107)$$

Dans cette configuration 2D, la solution exacte du déplacement élastique $u_z^{(vol)}$ rayonné en un point d'observation $\mathbf{M}_R(r, \theta)$ est obtenue par la convolution volumique des sources f_{zz} avec la solution G_{zz} :

$$u_z^{(vol)}(r, \theta) = \iint_{r_0, \theta_0} G_{zz}(r, \theta; r_0, \theta_0) f_z(r_0, \theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0. \quad (3.108)$$

La précision des représentations approchées $u_z^{(0)}$ et $u_z^{(2)}$, respectivement obtenues par les méthodes du moment d'ordre zéro et des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux, sont alors numériquement comparées par rapport à la solution exacte $u_z^{(vol)}$. Ces représentations approchées sont définies dans cette configuration géométrique simplifiée par les intégrales surfaciques suivantes :

$$u_z^{(0)}(r, \theta) = \int_{\theta_0} G_{zz}(r, \theta; R, \theta_0) M_z^{(0)}(\theta_0) R d\theta_0, \quad (3.109)$$

$$u_z^{(2)}(r, \theta) = \int_{\theta_0} G_{zz}(r, \theta; R, \theta_0) \left\{ M_z^{(0)}(\theta_0) - \frac{\rho_L \omega^2}{2\mu_L} M_z^{(2)}(\theta_0) - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}(\theta_0)}{\partial \theta^2} \right\} R d\theta_0. \quad (3.110)$$

À une fréquence typique d'inspection de 2 MHz, la profondeur de pénétration des sources \mathbf{f} est de l'ordre de $\beta = 5\delta_p \sim 0,3$ mm ([Figure 3.51](#)), pour une longueur d'onde transverse de 1,5 mm, de sorte que le développement à l'ordre deux des contraintes surfaciques équivalentes soit valide selon la condition $\beta \ll \lambda$. Les cartographies des variations spatiales (normalisées) du maximum d'amplitude des déplacements élastiques $u_z^{(vol)}$, $u_z^{(0)}$, et $u_z^{(2)}$ calculés numériquement par les intégrales (3.108), (3.109) et (3.110) dans le domaine Ω défini par $(r, \theta) \in [51 \text{ mm}, 100 \text{ mm}] \times [22.5^\circ, 67.5^\circ]$ sont illustrées sur la [Figure 3.52](#). La [Figure 3.53](#) représente les courbes extraites de ces variations de maximum d'amplitude d'ondes SH selon des directions d'observations particulières : $\theta = 45^\circ$ et $r = 60$ mm.

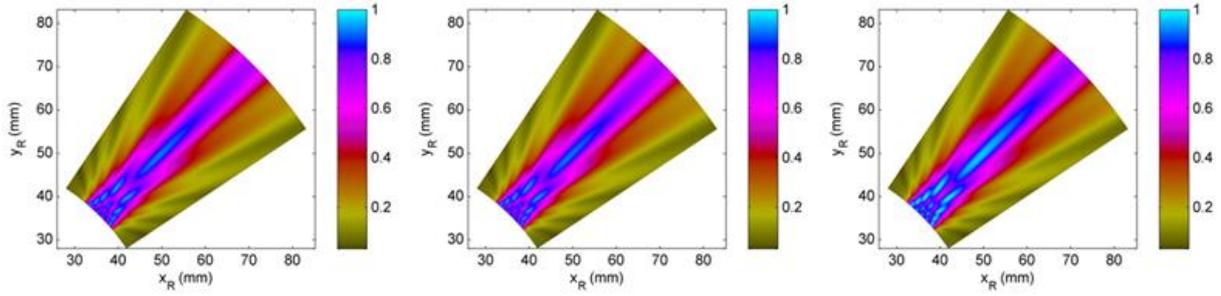


Figure 3.52 : Cartographies des maxima d'amplitude ultrasonore (normalisés) en ondes SH prédits par les trois formulations intégrales dans Ω : $|u_z^{(vol)}|$ (gauche), $|u_z^{(2)}|$ (milieu), et $|u_z^{(0)}|$ (droite).

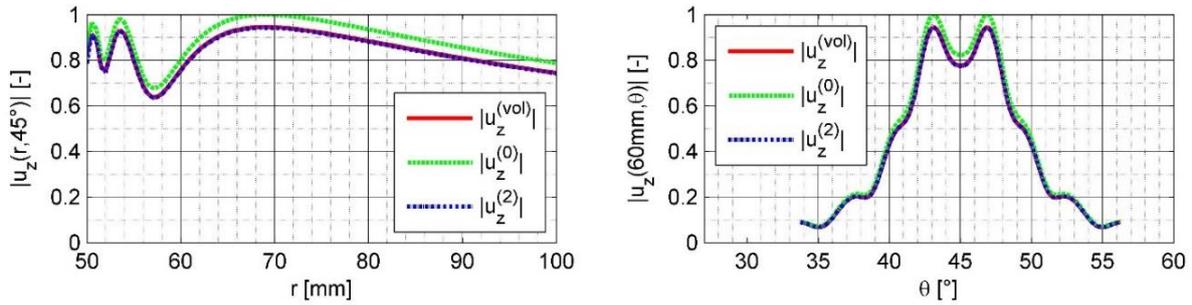


Figure 3.53 : Courbes extraites de la Figure 3.52 dans les directions d'observation $\theta = 45^\circ$ (gauche) et $r = 60$ mm (droite) selon les formulations intégrales : $|u_z^{(vol)}|$ (courbe rouge), $|u_z^{(2)}|$ (courbe bleue), et $|u_z^{(0)}|$ (courbe verte).

À cette fréquence d'inspection, l'analyse des Figure 3.52 et Figure 3.53 révèle des erreurs en norme L^2 sur l'ensemble du domaine d'observation d'intérêt respectivement de 7% pour la méthode du moment d'ordre zéro et de moins de 1% pour celle développée à l'ordre deux. Ces erreurs sont déterminées par rapport à la solution exacte obtenue par l'intégrale volumique analytique (3.108).

La Figure 3.54 trace l'évolution en fonction de la fréquence d'inspection des erreurs L^2 des représentations approchées d'ordre zéro $u_z^{(0)}$ (3.109) et étendues à l'ordre deux $u_z^{(2)}$ (3.110) par rapport au calcul exact défini par l'intégrale volumique $u_z^{(vol)}$ (3.108). Ces variations sont traitées pour des milieux linéaires, isotropes et homogènes (élastiquement et magnétiquement) d'aluminium (milieu conducteur amagnétique : $\mu_R = 1$) et de nickel (milieu ferromagnétique : $\mu_R = 110$).

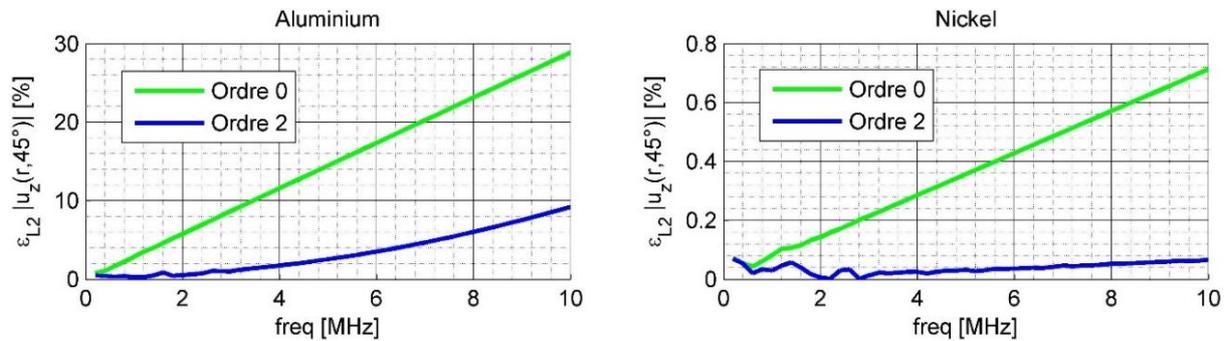


Figure 3.54 : Évolution de l'erreur L^2 des approximations $|u_z^{(2)}|$ (courbe bleue), et $|u_z^{(0)}|$ (courbe verte) par rapport à l'intégrale volumique $|u_z^{(vol)}|$ en fonction de la fréquence d'inspection et du milieu inspecté.

Naturellement, en augmentant la fréquence d'inspection, l'hypothèse $\beta \ll \lambda$ d'application du développement asymptotique à l'ordre deux de la méthode de contraintes surfaciques équivalentes est de moins en moins bien satisfaite, et l'erreur L^2 des deux méthodes approchées de calcul du champ ultrasonore se détériore progressivement. La [Figure 3.54](#) permet d'illustrer le gain en précision apporté par le développement asymptotique à l'ordre deux proposé dans cette étude par rapport au simple moment d'ordre zéro en fonction de la fréquence d'inspection. Elle confirme l'importance d'un tel développement pour le traitement de milieux conducteurs, avec des erreurs de l'ordre de 30 % à une fréquence de 10 MHz pour le modèle d'ordre zéro contre une erreur de l'ordre de 10 % pour la méthode proposée, ces milieux représentant le cas plus défavorable vis-à-vis de l'hypothèse $\beta \ll \lambda$. On observe également le gain en précision dans la représentation du champ ultrasonore par le développement d'ordre deux des contraintes surfaciques équivalentes dans le cas de milieux ferromagnétiques comme le nickel. Néanmoins ces erreurs restent très faibles aux fréquences typiquement utilisées en application industrielle de CND par EMAT. De plus, elles sont d'autant plus faibles que la perméabilité magnétique relative du milieu inspectée est forte (dépendance de l'épaisseur de peau avec l'inverse de $\sqrt{\mu_R}$). Bien que ces erreurs restent faibles en milieux ferromagnétiques, l'approche de modélisation proposée de contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux permet le traitement des effets magnétostrictifs caractéristiques de ces milieux dans les mécanismes de transduction ultrasonore d'un EMAT comme discuté précédemment, à l'inverse de l'approche à l'ordre zéro.

Ce simple exemple numérique permet d'illustrer la mise en œuvre de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes en géométrie cylindrique et confirme le gain en précision apporté par la prise en compte des moments d'ordres élevés des sources volumiques de transduction ultrasonore dans le développement des contraintes surfaciques équivalentes, définies formellement par (3.102). Ces validations numériques sont obtenues à partir d'une représentation de sources volumiques de transduction de nature arbitraire, pour rendre compte de la généralité de la méthode développée.

Conclusion du chapitre

Un modèle théorique de référence a été proposé dans ce chapitre permettant de traiter l'ensemble des sources électromagnéto-élastiques volumiques et surfaciques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Le cadre énergétique formel adopté pour traiter de la modélisation des sources d'origine électromagnétique est la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell. L'étude détaille la formulation des densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques à partir de ce tenseur, dont l'expression formelle dans le cas d'un milieu ferromagnétique aux propriétés magnétiques non-linéaires découle de l'application du principe des travaux virtuels sur un terme d'énergie magnétique macroscopique approprié. Les développements de ce chapitre montrent que l'ensemble des méthodes de la littérature peuvent en réalité s'inscrire dans ce formalisme en considérant un tenseur des contraintes électromagnétiques spécifique à chaque modèle théorique de sources électromagnétiques. Ils permettent ainsi de comparer directement les différentes méthodes de la littérature entre elles et de définir la méthode la mieux adaptée pour répondre à notre problématique industrielle. Notamment, l'origine énergétique de la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell permet d'étendre simplement son principe à la modélisation des sources magnétostrictives induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. À partir de la définition d'un modèle macroscopique de déformations de magnétostriction, le tenseur des contraintes de magnétostriction et

la densité volumique de forces équivalentes de magnétostriction sont formellement définis. La linéarisation de ce modèle autour du point de fonctionnement statique du milieu magnétique inspecté aboutit à l'expression d'un modèle piézomagnétique générique. Ainsi, le formalisme théorique adopté permet la modélisation de l'ensemble des sources de rayonnement ultrasonore induites par EMAT à partir de la connaissance des lois macroscopiques anhystériques d'aimantation et de magnétostriction du milieu ferromagnétique inspecté comme décrites dans le Chapitre 2. Enfin, une méthode théorique a été développée capable de transformer les sources volumiques de transduction dans un milieu élastique de surface libre en contraintes surfaciques équivalentes, en prenant en compte l'influence des moments des sources volumiques d'ordres élevés. Cette méthode formelle repose sur le développement en série de Taylor dans la direction normale à la surface inspectée du tenseur de Green élastodynamique de la configuration d'inspection et traite le cas de milieux aux propriétés élastiques et aux géométries de surface complexes. Cet outil permet ainsi la simulation précise et efficace du rayonnement ultrasonore transmis par les sources de volume d'origines électromagnétique et magnétostrictive induites par EMAT en milieux ferromagnétiques par l'intermédiaire des modèles semi-analytiques disponibles dans le module CIVA US.

Les modèles théoriques développés ont été implémentés et testés afin de prédire l'ensemble des sources de transduction EMAT et les ondes ultrasonores qu'elles rayonnent, dans le cas d'une configuration arbitraire de traducteur et pour l'inspection de milieux ferromagnétiques aux propriétés magnétiques, magnétostrictives et élastiques variées. Les résultats de simulation sont présentés dans le Chapitre 4.

CHAPITRE 4

SIMULATION DES MECANISMES DE TRANSDUCTION ULTRASONORE INDUITS PAR EMAT EN MILIEUX FERROMAGNETIQUES

Les développements du chapitre précédent établissent de façon générique un modèle théorique de sources surfaciques de transduction élastique induites par EMAT en milieux ferromagnétiques adaptées au calcul de leur rayonnement ultrasonore dans le logiciel CIVA de simulation de CND. Le modèle développé exprime formellement les sources de transduction traduisant les effets électromagnétiques et magnétostrictifs, volumiques et surfaciques, dans une très large gamme de configurations d'inspection par EMAT et de propriétés magnéto-élastiques des milieux ferromagnétiques. Les résultats de simulation des différents mécanismes de transduction dans une configuration EMAT donnée sont présentés dans ce chapitre. L'objectif de cette étude est la mise en lumière des régimes de prédominance des différents mécanismes de transduction selon les paramètres de conception et d'excitation d'un EMAT, et selon les propriétés magnéto-élastiques du milieu inspecté, pour assister la conception de ces traducteurs par des outils de simulation appropriés. Dans ce but, la section 4.1 décrit en premier lieu les modules de calcul électromagnétique et ultrasonore disponibles dans le logiciel CIVA, ainsi que l'hypothèse de couplage magnéto-élastique faible adoptée pour lier ces deux modules dans le cadre de la simulation d'un scénario d'inspection par EMAT. Ensuite, la section 4.2 détaille les paramètres de conception de l'EMAT étudié et référence les propriétés magnétiques, magnétostrictives et élastiques des milieux testés. Cette section présente les résultats de simulation des variations spatiales et temporelles des différentes sources de transduction induites par cette configuration d'EMAT selon le milieu inspecté, ainsi que les prédictions de champ ultrasonore rayonné en ondes longitudinales et transversales par ces sources. Enfin, la section 4.3 se concentre sur l'étude des variations d'amplitude des sources surfaciques induites par EMAT en fonction des paramètres d'excitation du traducteur et en fonction des propriétés magnéto-élastiques (linéaires ou anhystérétiques) du milieu ferromagnétique inspecté, éventuellement contraint mécaniquement.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 4	133
Simulation des mécanismes de transduction induits par EMAT en milieux ferromagnétiques	133
4.1. Présentation du logiciel CIVA pour la simulation de CND par EMAT	135
4.1.1. Le module de simulation CIVA CF	135
4.1.2. Le module de calcul CIVA US	137
4.1.3. Hypothèse de couplage magnéto-élastique faible	138
4.2. Simulation des sources et de leur rayonnement ultrasonore induits par une configuration EMAT donnée en milieux magnétiques linéaires	141
4.2.1. Description de la configuration d'inspection étudiée	142
4.2.1.1. Paramètres de conception EMAT	142
4.2.1.2. Propriétés magnétiques, magnétostrictives et élastiques des milieux inspectés..	143
4.2.2. Simulation des sources électromagnéto-élastiques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux magnétiques linéaires	145
4.2.3. Simulation du rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieux magnétiques linéaires	150
4.3. Efficacité de transduction ultrasonore d'un EMAT selon ses paramètres d'excitation et les propriétés du milieu inspecté.....	154
4.3.1. Influence des paramètres d'excitation de l'EMAT sur les sources de transduction ultrasonore	155
4.3.1.1. Variations d'amplitude des sources selon les paramètres d'excitation (I_e , f , B_s)	155
4.3.1.2. Cartographies des performances ultrasonores d'un EMAT dans le plan (I_e , B_s).	158
4.3.1.3. Phénomène de génération d'harmoniques.....	161
4.3.2. Influence des propriétés magnétiques et magnéto-élastiques du milieu sur les sources de transduction ultrasonore induites par EMAT	165
4.3.2.1. Influence des paramètres (σ , μ_r) en milieu linéaire	165
4.3.2.2. Prise en compte du comportement magnétique anhystérétique.....	167
4.3.2.3. Variations des paramètres anhystérétiques (M_s , χ_0 , λ_s) du MME simplifié.....	169
4.3.2.4. Effets des contraintes mécaniques sur les sources de rayonnement ultrasonore .	170
Conclusion du chapitre.....	174

4.1. Présentation du logiciel CIVA pour la simulation de CND par EMAT

Comme indiqué en Introduction, ces travaux de thèse ont pour vocation à être implémentés dans la plateforme logicielle CIVA dédiée à la simulation des méthodes de CND et développée par le CEA LIST depuis plus de 20 ans. L'objectif est de nourrir CIVA de nouveaux outils théoriques afin d'offrir aux utilisateurs (industriels mais aussi académiques) de nouvelles fonctionnalités permettant la simulation la plus fidèle possible de l'inspection ultrasonore de milieux ferromagnétiques par EMAT. Ces fonctionnalités doivent permettre d'optimiser la conception des EMAT et de faciliter l'interprétation des résultats d'inspection en milieux ferromagnétiques par la simulation, afin de réduire le plus possible les incertitudes et le coût liés à la conception expérimentale par essais-erreurs d'un transducteur pour une application industrielle de CND donnée. Pour ce faire, il est important de définir rigoureusement les données d'entrée nécessaire à ce calcul, les différents modules de calculs disponibles dans CIVA, et les hypothèses de calculs inhérentes à l'utilisation du logiciel CIVA. La simulation du champ ultrasonore transmis et reçu par un EMAT en milieux ferromagnétiques fait appel à deux modules distincts de CIVA : le module de simulation du contrôle par courants de Foucault (CIVA CF) et le module de simulation de contrôle ultrasonore (CIVA US) ; ces deux modules doivent ainsi être couplés dans un cas d'inspection par EMAT. La Figure 4.55 ci-dessous propose un diagramme illustrant les principales étapes de calcul nécessaires à la simulation d'un contrôle par EMAT en milieux ferromagnétiques dans CIVA. Les paragraphes suivants détaillent chacun des modules de simulation et précisent les hypothèses faites relativement à leur couplage pour l'application EMAT.

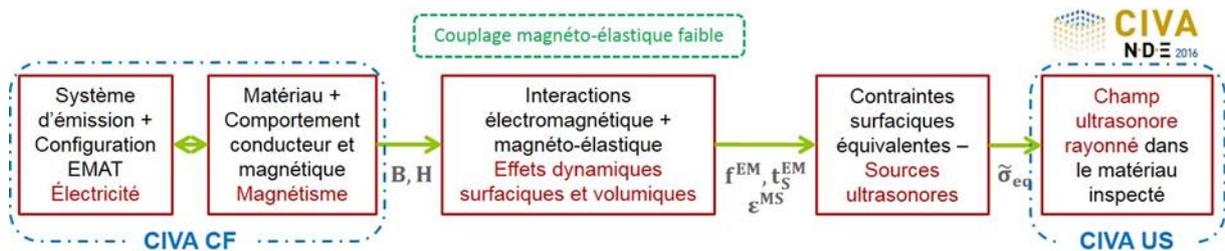


Figure 4.55 : Démarche de simulation d'un contrôle ultrasonore de milieux magnétiques par EMAT dans CIVA.

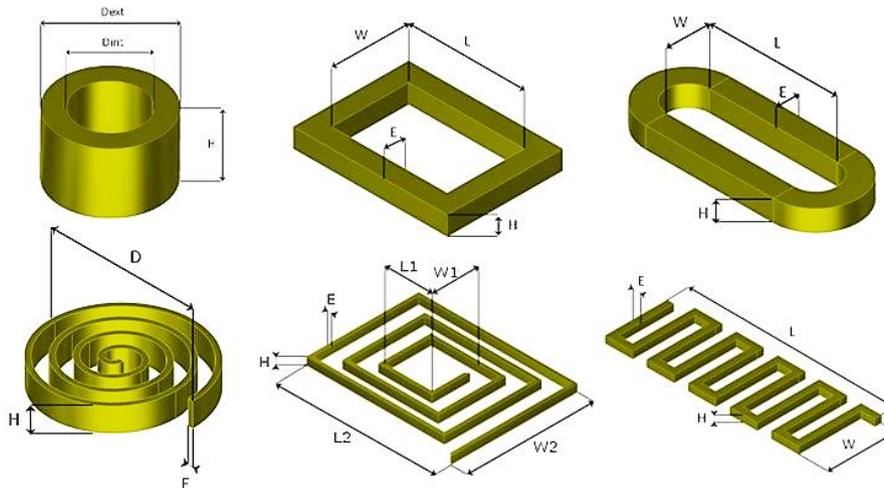
4.1.1. Le module de simulation CIVA CF

Le module de simulation CIVA CF permet la simulation des variations spatiales et temporelles des différentes composantes vectorielles de champs électromagnétiques (statiques et dynamiques) induits par une géométrie donnée de bobine électrique et d'aimant permanent dans un milieu magnétique donné.

L'application principale de ce module consiste à simuler l'interaction des courants de Foucault induits par une bobine électrique émettrice dans un milieu conducteur, magnétique ou non, avec un défaut mécanique (principalement surfacique en raison de la faible profondeur de pénétration des champs électromagnétiques régie par l'épaisseur de peau). En effet, la présence d'un défaut structurel induit une variation d'impédance électrique qui peut être mesurée par une bobine réceptrice (bobine émettrice et réceptrice pouvant être confondues). Ce module permet de déterminer la signature électrique d'un défaut selon sa nature et sa géométrie, simulant ainsi le résultat d'un contrôle par courants de Foucault [Reboud-et-al_2009]. Les variations spatiales et temporelles des champs électromagnétiques dynamiques E_d et H_d induits par une bobine électrique de géométrie donnée sont déterminées par la méthode de décomposition modale [Theodoulidis_2005]. Ce calcul s'opère dans le domaine fréquentiel,

les fréquences de calcul étant déterminées à partir de la donnée des variations temporelles (et de l'intensité) du courant électrique injecté dans la bobine. Cette donnée électrique n'étant pas systématiquement accessible en application industrielle, il est également possible de renseigner dans le module CIVA CF directement le signal en tension délivré par le générateur utilisé, à condition de connaître les paramètres élémentaires du circuit électrique équivalent de la configuration d'inspection étudiée (en particulier en fonction de la fréquence d'étude). Dans le cas du contrôle par EMAT d'un milieu ferromagnétique, la définition des paramètres du circuit électrique équivalent fait l'objet de quelques études théoriques et expérimentales, avec notamment les travaux de Jian *et al.* [Jian-et-al_2006a, Jian-et-al_2006b], Seher et Challis [Seher-Challis_2016]. Ces études permettent par exemple de déterminer la fréquence de résonance du circuit électrique équivalent à la configuration d'inspection étudiée (comprenant le transducteur EMAT, son système d'alimentation et le milieu inspecté), ce qui détermine notamment la fréquence optimale de fonctionnement du capteur étudié et permet de contrôler le niveau de bruit électrique induit dans la bobine réceptrice. Ces travaux ne statuent cependant pas de façon définitive sur un circuit électrique équivalent typique d'une inspection par EMAT selon la fréquence d'excitation du courant. Ainsi, pour utiliser directement la tension électrique en entrée du module CIVA CF, le circuit électrique équivalent de la configuration spécifique d'inspection doit être systématiquement adapté à l'application industrielle considérée, et il peut parfois être plus simple et plus précis de mesurer directement le courant électrique circulant dans la bobine que de déterminer ces paramètres électriques selon la complexité du montage électrique de l'application étudiée. C'est la raison pour laquelle le signal en courant électrique est considéré dans cette étude, sa mesure expérimentale étant étudiée au Chapitre 5 (Section 5.1.2).

Le module CIVA CF permet de traiter de nombreuses géométries de bobines inductrices, avec un temps de calcul des champs électromagnétiques très faible (de l'ordre de la seconde par fréquence de calcul) qui dépend de la complexité géométrique de la bobine et du milieu inspecté. Les géométries de bobines disponibles dans le module de simulation CIVA CF sont illustrées sur la [Figure 4.56](#).



[Figure 4.56](#) : Géométries de bobine inductrice disponibles dans le module CIVA CF.

La densité volumique de courants de Foucault \mathbf{J}_d induits dans le milieu inspecté par cette excitation électromagnétique est ensuite déterminée selon la loi d'Ohm $\mathbf{J}_d = \sigma \mathbf{E}_d$, avec σ la conductivité électrique du milieu conducteur inspecté. Des travaux récents de Caire [Caire_2014] permettent de traiter le cas de milieux inhomogènes de géométrie complexe, qui présentent une conductivité continûment variable (spatialement), à l'aide de développements tensoriels impliquant le tenseur métrique.

Pour l'inspection d'un milieu ferromagnétique, la simulation des variations spatiales des champs d'excitation statique et dynamique, notamment dans la profondeur, implique naturellement la connaissance de la loi macroscopique de comportement magnétique $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ du milieu inspecté (Chapitre 2). Des travaux sont menés au CEA LIST dans le cadre de projets européens sur la définition de méthodes numériques permettant la simulation rapide des champs magnétiques dynamiques induits en milieux ferromagnétiques en prenant en compte une loi de comportement magnétique non-linéaire [Skarlatos-Theodoulidis_2016], notamment dans le but de caractériser la microstructure inspectée. Dans cette étude, le modèle magnétodynamique adopté est linéaire étant donné les faibles intensités d'excitation magnétique dynamique couramment considérées dans une application de CND par EMAT. Cette approximation est notamment utilisée dans les travaux de Dahia *et al.* [Dahia-et-al_2015] pour la modélisation d'une configuration d'inspection par courants de Foucault en milieu ferromagnétique.

Le module CIVA CF permet également la prise en compte d'un aimant permanent dans la conception de capteurs (par exemple dans l'optique de simuler un contrôle par flux de fuite). Les variations spatiales du champ d'induction magnétique \mathbf{B}_s sont déterminées analytiquement à partir de la connaissance de l'intensité et de la polarisation du vecteur d'aimantation permanente délivrée au centre de l'aimant et selon sa géométrie, parallélépipédique [Gou-et-al_2004] ou cylindrique [Ravaud-et-al_2010]. Ces deux géométries d'aimants couvrent une très large gamme d'applications industrielles en pratique.

Ainsi, les champs électromagnétiques statiques et dynamiques calculés par le module de simulation CIVA CF sont les excitations à l'origine des phénomènes de transduction ultrasonore induit par un transducteur EMAT en milieux ferromagnétiques. Ces champs constituent naturellement les données d'entrée d'un module de simulation EMAT dédié à la modélisation des phénomènes de couplage électromagnéto-élastique qui interviennent en milieux ferromagnétiques.

4.1.2. Le module de calcul CIVA US

L'objectif du module de simulation CIVA US est de simuler la propagation et l'interaction d'ondes élastiques générées par un transducteur ultrasonore avec des défauts structurels de nature et géométrie définies, ce qui permet ainsi la simulation d'une méthode de CND par ultrasons.

Ce module permet la simulation de la génération d'ondes élastiques ultrasonores, guidées ou de volume, rayonnées dans un milieu élastique, potentiellement hétérogène et anisotrope et de géométrie éventuellement complexe, par des sources de contraintes mécaniques surfaciques (par exemple celles générées par un transducteur piézoélectrique au contact) ou des sources rayonnant par réfraction depuis un milieu couplant (par exemple, les transducteurs utilisés pour des contrôles en immersion). Les ondes de volume rayonnées par une source au contact de la pièce (comme les contraintes surfaciques équivalentes induites par EMAT et décrites dans le Chapitre 3) sont décrites par des modèles temporels semi-analytiques élaborés notamment par Lhémerly [Lhémerly_2000] et basés sur la convolution des sources avec le tenseur de Green, solution élémentaire du problème élastodynamique considéré. Pour les ondes guidées, les amplitudes modales (temps de vols et figures de diffraction des différents modes guidés) sont calculées en un temps de calcul réduit par la méthode SAFE (Semi Analytical Finite Element) basé sur les travaux de Jezzine [Jezzine_2006], et prenant en donnée d'entrée l'état de sources de contrainte à la surface du matériau inspecté. Les effets de diffraction liés à la taille finie des sources se traduisent dans le cas des ondes guidées par une distribution de l'énergie rayonnée sur les différents modes pouvant se propager sous la forme d'une combinaison linéaire des modes. Les coefficients de cette combinaison sont calculés par exemple par Jezzine et Lhémerly [Jezzine-Lhémerly_2006] dans le cas de guides unidirectionnels, et par Stévenin *et al.* [Stévenin-et-al_2016] dans le cas d'une structure

quelconque de type plaque. Pour les ondes de volumes, différents modèles de diffraction par un défaut (Kirchhoff, GTD Born, UTD, etc.) sont implémentés dans le module CIVA US pour simuler l'interaction d'une onde élastique incidente de polarisation connue avec un défaut de nature (trou débouchant ou non, fissure, corrosion) et de géométrie (arrêtes, dièdres) données. De même, des modèles hybrides permettent de calculer l'interaction des ondes calculées de façon semi-analytiques avec des défauts quelconques (sans approximation), par leur couplage local dans une région entourant le défaut avec des calculs numériques par éléments finis. Différents modèles semi-analytiques de propagation, de réflexion/transmission, de conversion de modes aux interfaces et sur les éventuels défauts permettent la description du trajet ultrasonore dans la pièce inspectée. Pour les ondes guidées, les modèles semi-analytiques approchés de diffraction sont inapplicables et le calcul de la diffraction par un défaut est systématiquement réalisé suivant une approche hybride. Les différentes fonctionnalités de ce module de simulation ultrasonore permettent de couvrir un très large spectre d'applications industrielles et académiques. La [Figure 4.57](#) illustre la visualisation dans CIVA US des prédictions de rayonnement ultrasonore en ondes de volume transmis dans une pièce plane par une source de contraintes surfaciques équivalentes induite par EMAT.

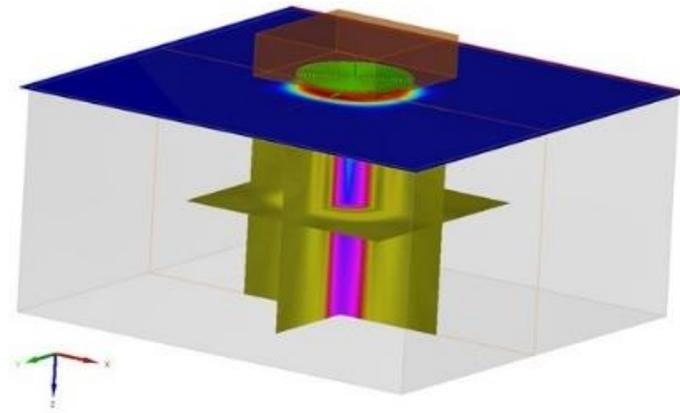


Figure 4.57 : Simulation des ondes volumiques ultrasonores rayonnées par une source surfacique EMAT dans CIVA US.

4.1.3. Hypothèse de couplage magnéto-élastique faible

Ces deux modules de simulation du logiciel CIVA doivent naturellement être couplés pour simuler une configuration d'inspection ultrasonore par EMAT. Des phénomènes dynamiques de couplage électro-magnéto-élastique de deux natures différentes interviennent lors d'un contrôle par EMAT en milieux ferromagnétiques : les couplages électro-mécanique et magnéto-élastique.

Les phénomènes de couplage électro-mécanique interviennent dans tous les milieux conducteurs. En notant σ la conductivité électrique du milieu, la présence d'un champ électrique \mathbf{E} induit des courants électriques $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ à l'origine de la création des forces de Lorentz $\mathbf{f}^L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Ces forces correspondent aux sources volumiques à l'origine du déplacement ultrasonore \mathbf{u} induit dans le milieu inspecté selon l'équation d'équilibre élastique dans le milieu Ω et la condition limite élastique d'une surface $\partial\Omega$ libre :

$$(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^L = \rho_L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

$$(\partial\Omega) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Dans ce sens, on parle de couplage direct entre le champ électrique \mathbf{E} rayonné dans le milieu et le déplacement élastique \mathbf{u} induit par les sources de Lorentz. Cet effet est exploité dans les mécanismes de

génération ultrasonore par EMAT. L'effet réciproque du couplage électro-mécanique des milieux conducteurs est exploité dans les mécanismes de réception par un EMAT d'une onde ultrasonore. En effet, la densité de courant électrique \mathbf{J} est reliée au champ \mathbf{E} et au déplacement \mathbf{u} du milieu selon :

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right). \quad (4.3)$$

Ainsi, la variation de courant électrique $\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}$ induite par le passage d'une onde ultrasonore à la surface du milieu inspecté peut être mesurée par induction dans la bobine réceptrice de l'EMAT en présence d'un champ d'induction magnétique, par exemple le champ magnétique statique délivré par l'aimant permanent de l'EMAT. La mesure de différentes polarisations d'ondes ultrasonores est ainsi rendue possible selon une configuration adaptée de polarisations magnétiques du ou des aimants permanents en phase de mesure. Selon l'équation de Maxwell-Ampère et en prenant en compte les conditions limites élastiques et électromagnétiques à la surface du milieu inspecté, le couplage électro-mécanique s'écrit dans le milieu Ω selon les équations couplées suivantes :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^L = \rho_L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right). \quad (4.5)$$

Lorsque le milieu inspecté n'est pas seulement conducteur mais présente également des propriétés ferromagnétiques, des phénomènes supplémentaires de couplage magnéto-mécaniques sont induits lors de la génération et réception d'ondes ultrasonores par un traducteur EMAT. En effet, la présence d'un champ d'aimantation \mathbf{M} génère également des sources de transduction élastique s'ajoutant aux forces de Lorentz régies par les propriétés électriques du milieu. D'après les résultats théoriques de la section 3.1 du Chapitre 3, les interactions des champs électromagnétiques en milieux magnétiques induisent des sources électromagnétiques volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} intervenant dans l'équilibre élastique :

$$(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^{em} = \rho_L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.6)$$

$$(\partial\Omega) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{em}. \quad (4.7)$$

De plus, comme décrit dans la section 3.2 du Chapitre 3, des déformations de magnétostriction peuvent apparaître en milieux ferromagnétiques, ces effets magnétostrictifs résultant de phénomènes de couplage magnéto-élastique. Les équations de couplage magnéto-élastique, notamment décrites par Berlincourt *et al.* [Berlincourt-et-al_1964], définissent la dépendance du tenseur des contraintes mécaniques et du champ vectoriel d'aimantation \mathbf{M} (ou d'induction \mathbf{B}) magnétique avec les variables d'état de champ d'excitation magnétique \mathbf{H} et de déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, relié au déplacement ultrasonore \mathbf{u} , sous la forme linéarisée suivante, en notant $\mathbf{e}^{ms} = \mathbb{C} : \mathbf{d}^{ms}$ (Chapitre 3) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{H}, \mathbf{u}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}^{ms} \cdot \mathbf{H}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{T} \mathbf{e}^{ms} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}(\mathbf{u}). \quad (4.9)$$

Ce formalisme piézomagnétique est équivalent au modèle piézoélectrique décrit notamment par Royer et Dieulesaint [Royer-Dieulesaint_2000]. Les déformations de magnétostriction modifient ainsi le tenseur des contraintes du milieu ferromagnétique inspecté, ce qui génère des sources de magnétostriction [Ribichini_2011]. Ce mécanisme de transduction élastique est traduit sous la forme de

forces équivalentes de magnétostriction selon la relation : $\mathbf{f}^{\text{ms}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{H}) = -\nabla \cdot \{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{H})\}$. Ces termes sources de magnétostriction peuvent directement être pris en compte dans l'équation d'équilibre élastique du milieu inspecté (sections 3.1 et 3.2 du Chapitre 3).

$$(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^{\text{em}} + \mathbf{f}^{\text{ms}} = \rho_L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.10)$$

$$(\partial\Omega) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{\text{em}}. \quad (4.11)$$

Il existe également des modèles traduisant l'influence de l'aimantation et des effets magnétostrictifs sur les courants électriques induits dans le milieu ferromagnétique inspecté. Ces effets se manifestent notamment dans l'équation de Maxwell-Faraday selon la relation (4.12), avec $\mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{u})$ défini par (4.9) :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{u})}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Ces effets électromagnéto-élastiques, direct et réciproque, induits en milieux ferromagnétiques interviennent de façon simultanée et la résolution des équations couplées (4.8) et (4.9) correspond à un couplage fort. Garcia-Rodriguez *et al.* [[Garcia-Rodriguez-et-al_2014](#), [Garcia-Rodriguez-et-al_2016](#)] ont notamment étudié (par éléments finis) les mécanismes de génération et réception d'un traducteur EMAT en milieux conducteurs en mettant en œuvre un couplage électro-mécanique fort. Les auteurs mettent en lumière certains effets sur le champ ultrasonore rayonné et mesuré par EMAT issus de la prise en compte de l'influence du déplacement élastique sur les variables électromagnétiques. Ces effets de couplage fort restent relativement faibles comparés aux intensités de champs électromagnétiques induits pendant la phase de génération ultrasonore. En milieux ferromagnétiques, certains auteurs comme Jafari-Shapoorabadi *et al.* [[Jafari-Shapoorabadi-et-al_2005](#)] traitent également de l'influence du champ d'aimantation et des déformations de magnétostriction de ces milieux sur les mécanismes de réception d'une onde ultrasonore par EMAT, en ajoutant à la définition de la densité de courants électriques des termes qui témoignent de l'existence de ces deux phénomènes.

Dans la plupart des modèles de transduction EMAT de la littérature, l'hypothèse de couplage faible est utilisée. Pendant la phase de génération d'ultrasons par EMAT, cette hypothèse autorise à résoudre dans un premier temps les équations de Maxwell quasi-statiques du problème électromagnétique considéré, en l'absence d'onde élastique. Ensuite, les densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques et magnétostrictives modélisées à partir des variables électromagnétiques ainsi calculées sont les termes sources de rayonnement ultrasonore dans l'équation d'équilibre élastique, sans que le déplacement élastique induit par ces sources n'interagisse avec les champs électromagnétiques d'excitation du milieu. Cette hypothèse est naturellement renforcée en milieux ferromagnétiques, pour lesquels la profondeur de pénétration des sources volumiques est généralement très inférieure à la longueur d'onde ultrasonore d'inspection. Dans ce sens, la zone de potentielle forte interaction entre les champs électromagnétiques et le déplacement élastique est fortement réduite. La différence entre les vitesses des ondes électromagnétiques et élastiques permet également de considérer que les phénomènes électromagnétiques s'équilibrent instantanément comparés aux phénomènes élastodynamiques ultrasonores mis en jeu dans une application de CND. De plus, les amplitudes ultrasonores induites sont généralement suffisamment faibles pour ne pas avoir d'influence notable sur les variables de champ magnétique. En revanche, les développements théoriques du Chapitre 2 permettent la prise en compte de l'influence des contraintes mécaniques statiques, appliquées ou résiduelles, sur les propriétés d'aimantation et de magnétostriction du milieu. Cette influence se répercute alors naturellement sur les sources de transduction élastique. Puisqu'elles sont statiques, ces contraintes ne participent pas à la

génération d'onde ultrasonore ; leur influence sur les sources électromagnétiques et magnétostrictives de rayonnement ultrasonore peut être quantifiée dans le modèle de transduction EMAT proposé dans cette étude, tout en conservant l'hypothèse d'un couplage faible.

L'hypothèse de couplage faible présente certains avantages majeurs en vue de l'implémentation d'un modèle de transduction EMAT dans le logiciel CIVA. En effet, elle permet notamment de réduire fortement le temps de calcul numérique du rayonnement ultrasonore d'un EMAT par l'intermédiaire de solutions semi-analytiques (voire totalement analytiques dans des cas de géométrie simplifiée à deux dimensions), tandis que les outils numériques qui traitent du couplage fort requièrent généralement l'usage de la méthode des éléments finis, coûteuse en temps de calcul. De plus, cette hypothèse est particulièrement adaptée au formalisme du logiciel CIVA, en ce qu'elle permet d'exploiter directement les variables électromagnétiques issues du module de simulation CIVA CF (découplé du comportement élastique du milieu) comme des données d'entrée du module CIVA US (découplé du comportement électromagnétique du milieu), sans que ces modules soient algorithmiquement (fortement) couplés. Cette simple passerelle entre les deux modules de simulation de CIVA est rendue possible grâce au modèle théorique de transformation des sources volumiques de transduction ultrasonore en contraintes surfaciques équivalentes (section 3.3 du Chapitre 3). Après définition des sources de rayonnement ultrasonore à partir des variables électromagnétiques obtenues par CIVA CF et en considérant une loi macroscopique de comportement magnéto-élastique, cette méthode permet d'adapter les sources volumiques induites par EMAT aux données d'entrée de CIVA US, à savoir des sources de contraintes au contact de la surface du milieu inspecté.

La section suivante illustre les prédictions obtenues dans CIVA des variations spatiales et temporelles des sources surfaciques équivalentes électromagnétiques et magnétostrictives, et du rayonnement d'ondes ultrasonores qu'elles induisent, à partir d'un traducteur EMAT de conception donnée et pour l'inspection de milieux ferromagnétiques aux propriétés magnéto-élastiques variées.

4.2. Simulation des sources et de leur rayonnement ultrasonore induits par une configuration EMAT donnée en milieux magnétiques linéaires

Cette section a pour objectif d'illustrer par des exemples choisis de simulation les différents mécanismes de transduction ultrasonore définis rigoureusement dans le Chapitre 3. Ces développements théoriques permettent la modélisation des contraintes surfaciques équivalentes qui représentent fidèlement les sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par un EMAT de conception donnée (bobine électrique et aimant permanent) dans un milieu ferromagnétique aux propriétés électromagnétiques et magnétostrictives potentiellement complexes. Il est important d'insister sur la généralité des modèles développés dans cette thèse, permettant la simulation d'inspections par EMAT dans une très large gamme d'application industrielle. Dans le but d'analyser quantitativement l'importance des différents mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT selon le milieu inspecté, une configuration EMAT de référence et quatre matériaux ferromagnétiques aux propriétés magnétiques et magnétostrictives variées sont considérés dans cette section. L'objectif de cette étude est de simuler, dans une configuration d'inspection simplifiée, chaque mécanisme de transduction ultrasonore séparément avant de les combiner, pour mettre en évidence les régimes de prédominance de chaque phénomène selon la polarisation de l'onde ultrasonore générée et les propriétés magnéto-élastiques du

milieu ferromagnétique inspecté. Cette étude illustre la nécessité de modéliser l'ensemble des sources électromagnéto-élastiques induites par EMAT pour le CND de milieux ferromagnétiques.

4.2.1. Description de la configuration d'inspection étudiée

4.2.1.1. Paramètres de conception EMAT

Les modèles théoriques présentés dans les chapitres précédents ont été développés de façon générique, sans hypothèse relative à la géométrie et aux paramètres de conception d'un transducteur EMAT. Cette généralité est indispensable en vue de l'implémentation d'un tel modèle de comportement ultrasonore d'un transducteur EMAT dans le logiciel CIVA de simulation des méthodes de CND, qui doit proposer aux utilisateurs académiques et industriels la possibilité de couvrir la simulation d'une très large gamme de configurations d'inspection. Néanmoins, pour cette étude qui traite des résultats de simulation des différents modèles théoriques de sources électromagnéto-élastiques, le choix a été fait de se focaliser sur une unique configuration d'EMAT pour analyser ses performances de transduction ultrasonore en fonction des propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu ferromagnétique inspecté (paragraphes suivants) et des différents paramètres de sa conception (section 4.3). Nous tenterons cependant de commenter les résultats obtenus de la manière la plus générale qui soit, quand c'est possible, de façon à ce que certaines discussions de portée générale puissent être consignées.

En accord avec les besoins industriels du CETIM, partenaire de cette thèse, la configuration EMAT étudiée est proche de celle mise en œuvre dans la conception de la sonde EMAT bi-onde du CETIM pour la mesure de contraintes mécaniques de serrage d'assemblages vis-écrous (sonde présentée en Introduction). Cette configuration simplifiée est constituée d'un aimant permanent cylindrique et d'une bobine électrique en forme de spirale circulaire. Les paramètres élémentaires de ces éléments (nombre de spires, dimensions, etc...) seront spécifiés dans le Chapitre 5 au moment des validations expérimentales des travaux en modélisation et simulation engagés. Cette configuration est généralement référencée par 'spiral coil' EMAT dans la littérature, elle est illustrée sur la [Figure 4.58](#).

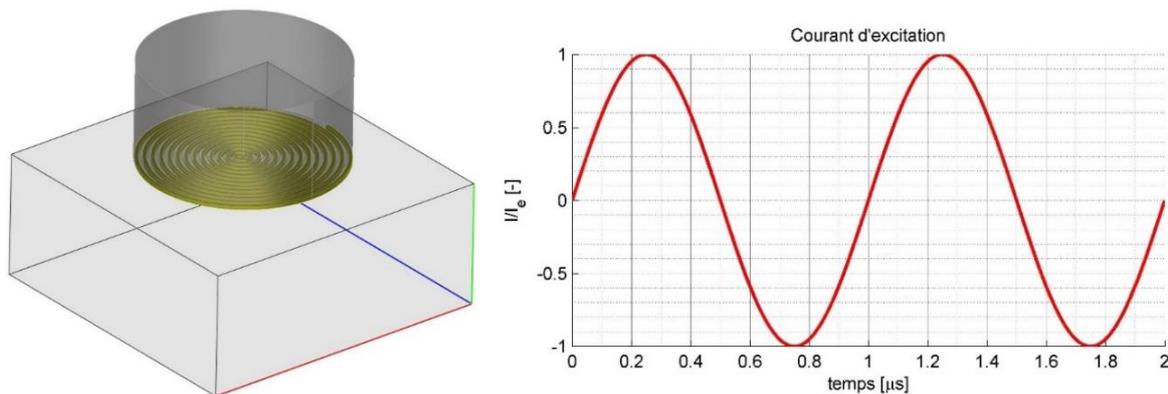


Figure 4.58 : Configuration EMAT étudiée (gauche), composée d'une bobine spirale circulaire alimentée du courant électrique variable $I(t)$ (droite) et d'un aimant permanent cylindrique de polarisation normale B_{sz} .

Afin d'éclairer le lecteur sur le poids des différentes sources de rayonnement selon le milieu inspecté, un signal temporel simple de courant $I(t)$ injecté dans la bobine de l'EMAT est considéré. Ce signal est supposé harmonique, de fréquence f et d'amplitude I_e ; il est défini par : $I(t) = I_e \sin(2\pi ft)$, et limité dans le temps à la durée de deux périodes, si bien que son spectre n'est pas constitué d'une unique composante à la fréquence f . L'aimant considéré présente une polarisation statique orientée dans la

direction normale à la surface excitée, définie par la relation : $\mathbf{B}_s = B_{sz}\mathbf{e}_z$. Les paramètres d'excitation de cette configuration d'EMAT simplifiée, à savoir les trois paramètres (I_e, f, B_{sz}) , sont fixés dans la section 4.2.2 suivante à des valeurs classiquement rencontrées en application industrielle : $(I_e = 0.1 \text{ A}, f = 1 \text{ MHz}, B_{sz} = 1.5 \text{ T})$. L'étude de l'influence de ces paramètres d'excitation sur l'amplitude des sources électromagnétiques et magnétostrictives induites, et donc sur le champ ultrasonore transmis, par ce transducteur en milieux ferromagnétiques est menée dans la section 4.3.

4.2.1.2. *Propriétés magnétiques, magnétostrictives et élastiques des milieux inspectés*

Lorsque le milieu inspecté est simplement conducteur, cette configuration d'étude est réputée dans la littérature EMAT pour la génération d'ondes transversales de volume, polarisées dans la direction radiale. En revanche, lorsque le milieu inspecté présente également des propriétés magnétiques et magnétostrictives, ce transducteur peut générer des ondes longitudinales de volume grâce aux effets magnétostrictifs et à la traction magnétique surfacique [Ribichini_2011, Seher-Nagy_2016]. Les mécanismes de génération d'ondes longitudinales et transversales transmises dans cette configuration EMAT selon le milieu ferromagnétique inspecté sont étudiés dans la section suivante.

Pour simplifier l'analyse des résultats de simulation présentés, la surface excitée du milieu inspecté est supposée plane, la distance entre le transducteur EMAT et la surface excitée étant fixée par l'entrefer (supposé de 1.5mm dans cette étude). De plus, les propriétés élastiques du milieu ferromagnétique inspecté sont supposées homogènes et isotropes ; elles sont représentées par les données de la masse volumique ρ_L et les vitesses des ondes élastiques de compression et cisaillement (c_L, c_T) , reliées aux coefficients de Lamé (λ_L, μ_L) selon les formules : $c_L^2 = (\lambda_L + 2\mu_L)/\rho_L$ et $c_T^2 = \mu_L/\rho_L$. Une nouvelle fois, ces limitations n'ont pour objectif que de faciliter la discussion des résultats en la concentrant sur les éléments les plus fondamentaux développés dans cette thèse relatifs aux mécanismes de transduction, et les différents modèles théoriques de transduction ultrasonore par EMAT développés dans ce manuscrit autorisent la prise en compte de milieux géométriquement et élastiquement complexes.

Selon le même raisonnement, les propriétés électriques et magnétiques du milieu ferromagnétique étudié sont dans un premier temps supposées linéaires, quantifiées par la conductivité électrique σ et la perméabilité magnétique initiale μ_i . Cette hypothèse de linéarité est souvent employée dans la littérature EMAT, et elle est mise à profit dans cette section dans le double but d'illustrer simplement les étapes de calcul des sources électromagnéto-élastiques et du champ d'ondes ultrasonores associé, et de simplifier la mise en évidence des contributions relatives des différents mécanismes de transduction impliqués par EMAT selon le milieu ferromagnétique inspecté. Une fois de plus, cette hypothèse de linéarité magnétique sert uniquement à simplifier et à concentrer la discussion sur la mise en évidence des différents phénomènes de transduction ; les modèles théoriques décrits dans ce manuscrit permettent la prise en compte de comportements magnétiques non-linéaires. La section 4.3 propose notamment une étude sur l'influence du comportement magnétique anhystérétique d'un milieu ferromagnétique sur l'amplitude des différentes sources électromagnétiques et magnétostrictives de transduction ultrasonore induites par cette même configuration EMAT d'étude.

On suppose par ailleurs que la loi de comportement anhystérétique de magnétostriction du milieu ferromagnétique inspecté est connue, dans le but d'exploiter le modèle de force piézo-magnétique équivalente décrit dans la section 3.2.3 du Chapitre 3. La loi élémentaire de magnétostriction permet la définition des coefficients du tenseur des déformations piézo-magnétiques \mathbf{d}^{ms} évalués à l'intensité de l'excitation magnétique statique délivrée par l'aimant permanent. Différentes méthodes peuvent être

prises en œuvre pour déterminer ces courbes de magnétostriction, soit par la mesure, soit par la simulation (en exploitant par exemple les approches phénoménologiques [Jiles_1995] ou multi-échelles [Daniel-et-al_2015] discutées dans le Chapitre 2).

Pour illustrer la forte dépendance du comportement ultrasonore d'un EMAT avec les propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu inspecté, les mécanismes de transduction induits par EMAT sont étudiés pour quatre matériaux aux propriétés variées et référencées dans la littérature : l'acier bas carbone (à faible teneur en carbone : 'low carbon steel'), deux nuances d'aciers inoxydables (Z20C13 et AISI 410), et du nickel (recuit). Les propriétés élastiques et magnétiques linéaires de ces différents milieux ferromagnétiques étudiés dans les simulations numériques des paragraphes suivants sont listées dans la [Table 4.7](#). Ces quatre matériaux présentent des propriétés élastiques assez similaires ; en revanche leurs propriétés électromagnétiques varient dans une large gamme.

Matériau	ρ_L [g. cm ⁻³]	c_L [m. s ⁻¹]	c_T [m. s ⁻¹]	σ [MS. m ⁻¹]	μ_i [-]
Acier bas carbone	7.8	5900	3230	1.39	2
Inox Z0C13	7.89	5790	3100	2	15
Inox AISI 410	7.67	5590	3000	2	10
Nickel	8.88	5630	2960	15.4	110

Table 4.7 : Propriétés élastiques et magnétiques linéaires des milieux ferromagnétiques étudiés

Les courbes anhystérétiques de magnétostriction de ces matériaux sont obtenues par des approches différentes, ce qui permet d'illustrer les possibilités variées d'implémentation des effets magnétostrictifs apportées par les modèles théoriques décrits dans cette étude. La courbe de magnétostriction de l'acier bas carbone est déterminée par les interpolations expérimentales de Hirao et Ogi [Hirao-Ogi_2003]. Les déformations de magnétostriction d'un échantillon d'acier inoxydable Z20C13 ont été mesurées expérimentalement pendant la thèse de Rouge [Rouge_2013]. La courbe élémentaire de magnétostriction d'un échantillon d'acier inoxydable AISI 410 est déterminée théoriquement à partir de l'approche phénoménologique de Jiles [Jiles_1995], nourrie des paramètres définis dans la thèse de Li [Li_2004] (Section 2.2.4 du Chapitre 2). Enfin, la courbe de magnétostriction du nickel recuit est déterminée en exploitant l'approche multi-échelle simplifiée de Daniel *et al.* [Daniel-et-al_2015], avec les paramètres d'entrée définis à partir des paramètres de Li (Section 2.3.5 du Chapitre 2). Ces courbes de magnétostriction sont tracées sur la [Figure 4.59](#) en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique.

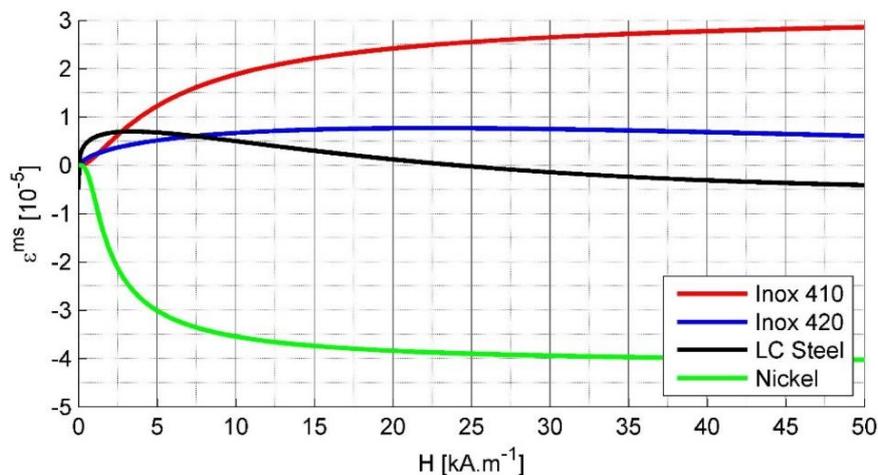


Figure 4.59 : Courbes élémentaires de magnétostriction des quatre milieux ferromagnétiques inspectés

La configuration d'inspection est maintenant caractérisée selon les paramètres de conception et d'excitation du transducteur EMAT utilisé et selon les propriétés élastique, magnétique et magnétostrictive de quatre milieux différents. La section suivante présente les résultats de simulation des variations spatiales et temporelles des sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par cet EMAT, et du rayonnement ultrasonore de ces sources en ondes longitudinales et transversales de volume.

4.2.2. Simulation des sources électromagnéto-élastiques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux magnétiques linéaires

Cette section a pour objectif de simuler l'amplitude et les variations spatio-temporelles des sources d'origines électromagnétique et magnétostrictive induites sur la surface excitée, et du rayonnement ultrasonore en ondes longitudinales et transversales qu'elles induisent dans le volume inspecté, par un transducteur EMAT et pour des milieux ferromagnétiques caractérisés (paragraphe 4.2.1.1 et 4.2.1.2).

Le modèle théorique complet des sources électromagnétiques et magnétostrictives décrit dans le Chapitre 3 prédit l'ensemble des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT en milieux ferromagnétiques sous la forme d'une distribution de contraintes surfaciques totales σ^{tot} , qui se décompose comme la somme d'une contrainte surfacique équivalente $\tilde{\sigma}^{\text{em}}$ représentant la contribution des sources électromagnétiques volumiques, d'une contrainte surfacique équivalente $\tilde{\sigma}^{\text{ms}}$ représentant la contribution des sources magnétostrictives volumiques, et d'un terme de traction magnétique surfacique \mathbf{t}^{em} issu des discontinuités des composantes de champs magnétiques à l'interface entre le milieu inspecté et le milieu environnant. Les différentes sources de transduction induites par EMAT en milieux ferromagnétiques se décomposent ainsi à un instant t en tout point $\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega$ selon la relation :

$$\sigma^{\text{tot}}(\mathbf{X}_0, t) = \tilde{\sigma}^{\text{em}}(\mathbf{X}_0, t) + \tilde{\sigma}^{\text{ms}}(\mathbf{X}_0, t) + \mathbf{t}^{\text{em}}(\mathbf{X}_0, t). \quad (4.13)$$

Par abus, les symboles 'tildes' seront omis dans la notation des contraintes surfaciques équivalentes des sources volumiques électromagnétiques et magnétostrictive dans les légendes des différentes figures présentées tout au long de ce chapitre.

Les expressions théoriques de $\tilde{\sigma}^{\text{em}}$, $\tilde{\sigma}^{\text{ms}}$, et \mathbf{t}^{em} dérivées formellement dans le Chapitre 3 sont calculées à partir des paramètres de la configuration d'inspection étudiée et du champ électromagnétique calculé par le module CIVA CF. Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures [Figure 4.60](#) - [Figure 4.63](#), qui décrivent les variations spatiales des sources de transduction ultrasonore induites respectivement à la surface (dans le plan X, Y) d'échantillons d'acier bas carbone, d'aciers inoxydables Z20C13 et AISI 410, et de nickel recuit. Les deux premières lignes de chaque figure correspondent aux composantes tangentielles (respectivement selon X et Y), tandis que la troisième ligne décrit les variations spatiales des composantes normales (selon Z) des différentes sources de contraintes surfaciques. Les colonnes de chaque figure traitent des mécanismes de transduction ultrasonore implémentés séparément : la première représente les variations spatiales des contraintes surfaciques équivalentes des sources électromagnétiques volumiques $\tilde{\sigma}^{\text{em}}$, la deuxième celles des contraintes surfaciques équivalentes des sources magnétostrictives volumiques $\tilde{\sigma}^{\text{ms}}$, la troisième celles du terme surfacique de traction magnétique \mathbf{t}^{em} . Finalement, les variations spatiales de la contrainte surfacique totale, résultat de la superposition de ces trois mécanismes de transduction ultrasonore, induite par EMAT à la surface de chaque échantillon ferromagnétique sont représentées sur la dernière colonne de chaque figure. Sur ces figures, les amplitudes des composantes vectorielles σ_x^{tot} , σ_y^{tot} , et σ_z^{tot} des contraintes surfaciques totales sont normalisées par rapport à la valeur maximale des maxima d'amplitude de chaque composante.

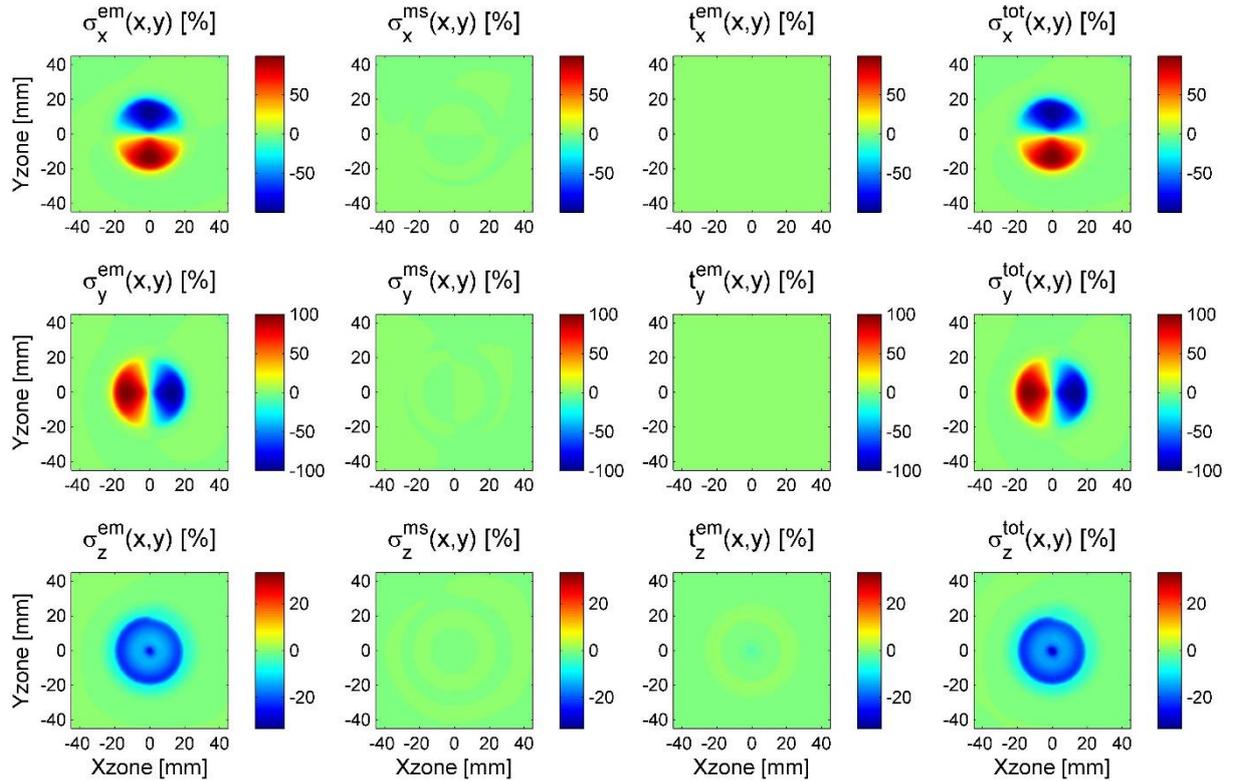


Figure 4.60 : Variations spatiales des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT en acier bas carbone.

De gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} . De haut en bas : composantes vectorielles selon X, Y et Z.

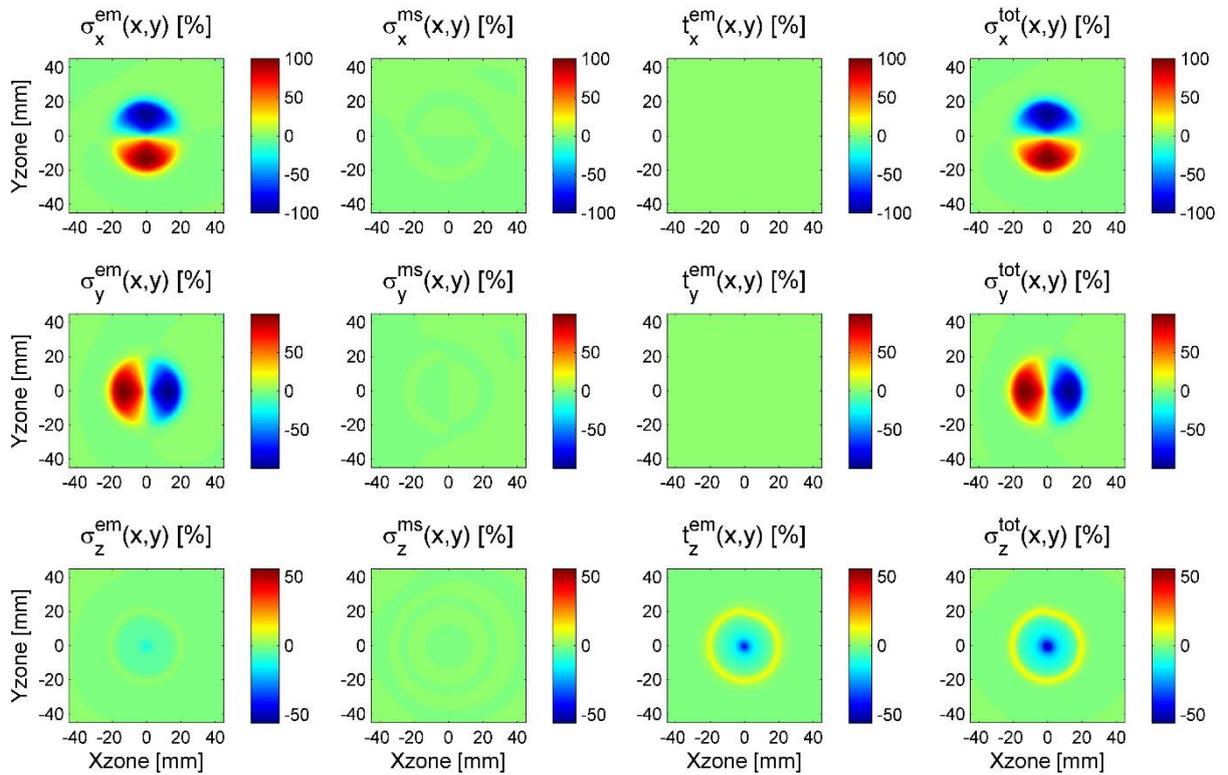


Figure 4.61 : Variations spatiales des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT en acier inoxydable Z20C13.

De gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} . De haut en bas : composantes vectorielles selon X, Y et Z.

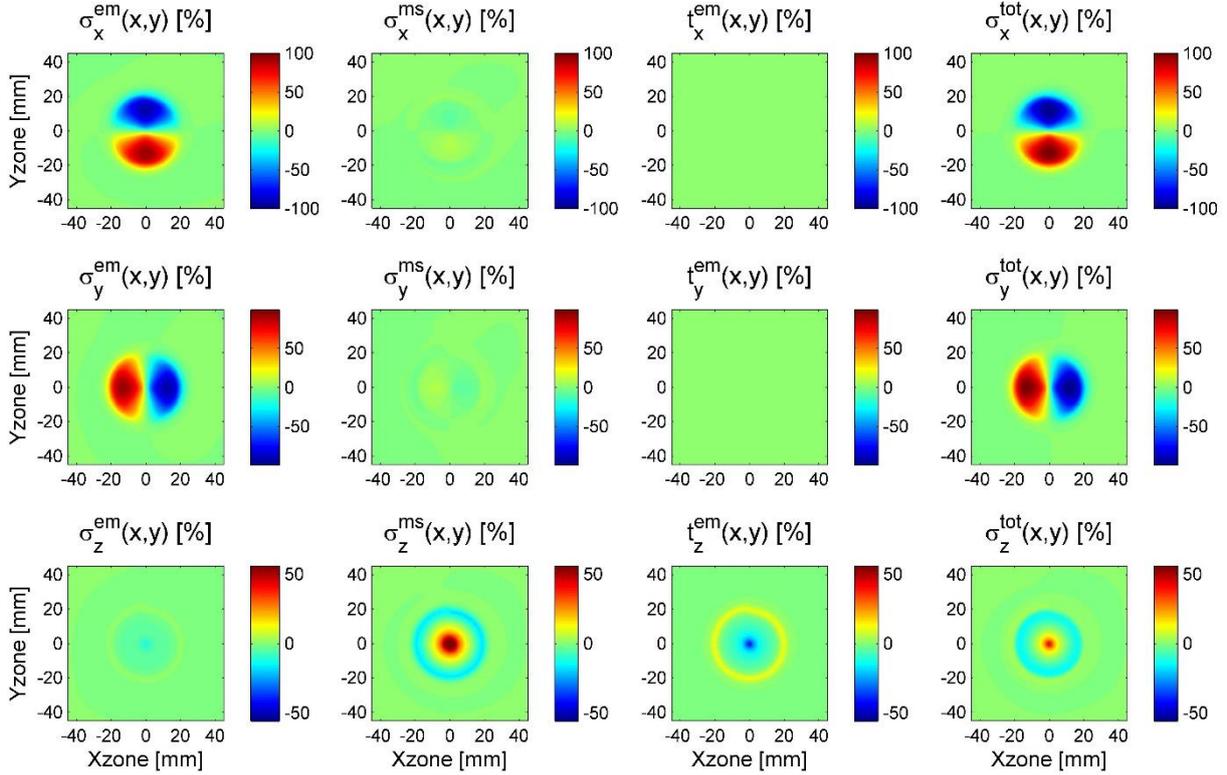


Figure 4.62 : Variations spatiales des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT en acier inoxydable AISI410.

De gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} . De haut en bas : composantes vectorielles selon X, Y et Z.

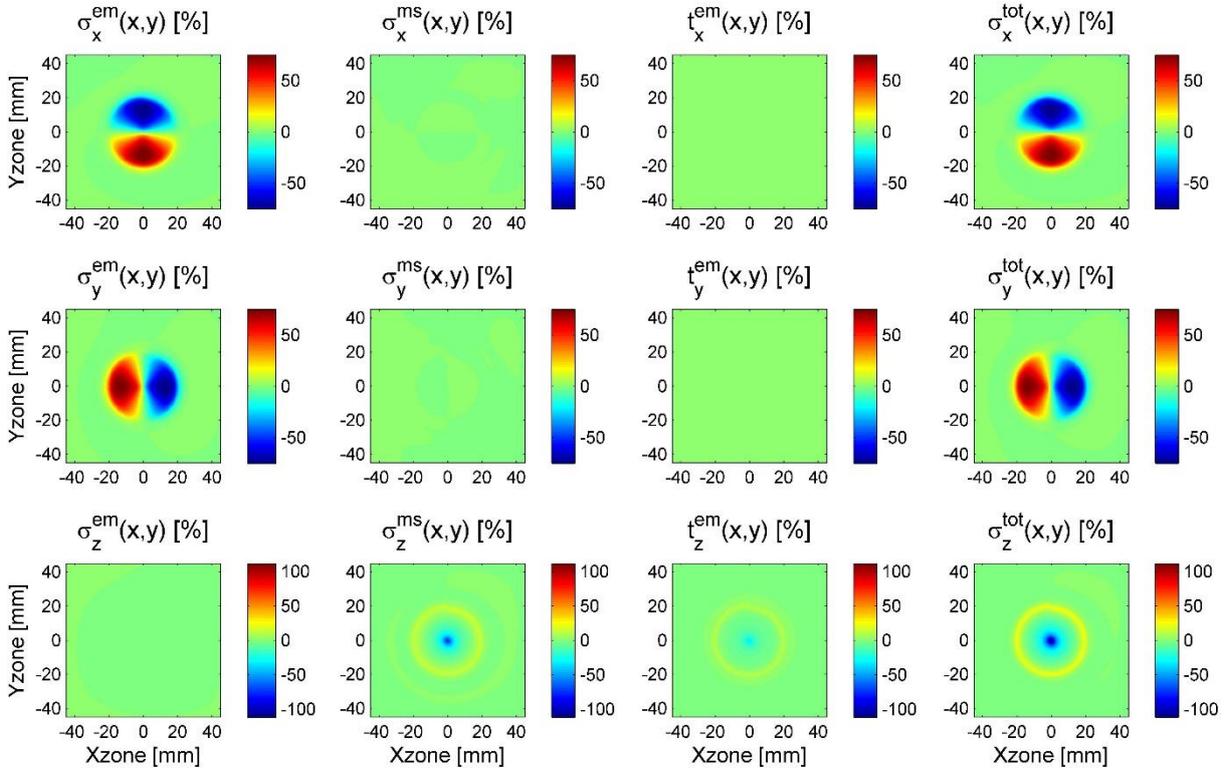


Figure 4.63 : Variations spatiales des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT en nickel recuit.

De gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} . De haut en bas : composantes vectorielles selon X, Y et Z.

Cette normalisation permet de comparer directement les amplitudes relatives des composantes tangentielle et normale de la contrainte surfacique totale induite, variables d'un milieu à l'autre. Ces amplitudes sont respectivement corrélées aux amplitudes des ondes ultrasonores transversales et longitudinales rayonnées par cette configuration d'EMAT. On observe que les amplitudes maximales des sources surfaciques normales pour les échantillons d'acier bas carbone, d'aciers inoxydables Z20C13 et AISI410, sont respectivement de 35%, 50% et 40% du maximum d'amplitude des sources surfaciques tangentielles. Ces valeurs indiquent que la géométrie d'EMAT considérée rayonne de façon privilégiée des ondes transversales dans ces trois matériaux. En revanche, si la même configuration d'EMAT est utilisée pour l'inspection d'un échantillon de nickel recuit, les sources surfaciques normales présentent une plus forte amplitude que celle des sources tangentielles (60% de $\max(\sigma_z^{\text{tot}})$), et la conclusion précédemment établie sur la prédominance des composantes tangentielles de sources dans les trois autres matériaux ne tient plus dans le cas du nickel.

Pour analyser l'influence des différents phénomènes de transduction sur les sources surfaciques totales induites par EMAT, les variations spatiales de chaque composante vectorielle des sources électromagnétiques et magnétostrictives sont normalisées par rapport au maximum d'amplitude de la composante vectorielle des contraintes surfaciques totales associée. On peut ainsi directement quantifier le poids respectif de chaque phénomène de transduction ultrasonore sur les composantes tangentielles et normales des sources surfaciques totales selon le milieu inspecté.

On peut remarquer que, pour les quatre milieux ferromagnétiques testés, les sources surfaciques tangentielles induites par cette configuration d'EMAT (notamment par une polarisation permanente normale de l'aimant) sont presque entièrement déterminées par les sources électromagnétiques volumiques (communément les forces de Lorentz et d'aimantation), les sources surfaciques tangentielles de magnétostriction et de traction magnétique présentant de très faibles amplitudes. En revanche, les sources surfaciques normales induites par ce traducteur varient très fortement d'un milieu ferromagnétique à un autre, mettant en lumière un régime de contribution mixte entre les différents mécanismes de transduction ultrasonore selon le milieu inspecté. Dans l'acier bas carbone, on remarque que les sources normales totales σ_z^{tot} proviennent presque exclusivement des sources électromagnétiques volumiques normales $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$. Dans le cas d'un échantillon d'acier inoxydable Z20C13, les sources normales de rayonnement résultent de l'interaction des composantes normales des sources électromagnétiques volumiques $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$ et surfaciques t_z^{em} . En étudiant une nuance différente d'acier inoxydable (AISI410), on remarque que les variations de σ_z^{tot} résultent dans ce cas principalement des sources magnétostrictives normales $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$, avec une faible correction apportée par les sources $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$ et t_z^{em} . Enfin, dans le cas d'un échantillon de nickel recuit, les sources normales σ_z^{tot} de induites par cette configuration d'EMAT résultent désormais de l'interaction des sources volumiques normales de magnétostriction $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$ et du terme de traction magnétique t_z^{em} .

Les figures [Figure 4.60](#) – [Figure 4.63](#) mettent ainsi en lumière la forte dépendance des mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT selon le milieu ferromagnétique inspecté. Dans la géométrie d'EMAT considérée, la variabilité de performance de transduction ultrasonore selon le milieu est particulièrement marquée sur les amplitudes des sources normales, cette variabilité étant naturellement corrélée aux propriétés magnétiques et magnétostrictives variées des milieux ferromagnétiques étudiés (paragraphe 4.2.1.2) et à mettre en lien avec le rayonnement en ondes longitudinales. Ces figures sont associées aux variations spatiales (dans le plan X, Y) des différentes sources de rayonnement ultrasonore. À partir du signal temporel injecté dans la bobine, il est également possible de tracer la signature

temporelle des composantes vectorielles de sources surfaciques comme l'illustre la [Figure 4.64](#). Les variations temporelles présentées sont naturellement pondérées par les amplitudes des sources discutées précédemment. Cette figure met en lumière les déphasages entre les différents mécanismes de transduction par rapport au signal d'excitation électrique (traits rouges) et par rapport aux contraintes surfaciques totales (traits noirs) qui somment l'ensemble des sources électromagnétiques et magnétostrictives. On observe par exemple l'opposition de phase entre les contraintes surfaciques normales de magnétostriction et de traction magnétique pour les deux nuances d'acier inoxydable (AISI 410 et Z20C13).

Les outils théoriques mis en place dans cette étude et les outils de simulation associés permettent ainsi d'étudier quantitativement l'influence des différents mécanismes de transduction ultrasonore sur les contraintes surfaciques totales induites par un EMAT donné dans un milieu ferromagnétique aux propriétés caractérisées. De plus, les simulations effectuées pour quatre milieux ferromagnétiques différents permettent d'illustrer la grande variabilité d'influence des différents mécanismes de transduction en fonction des propriétés magnétiques et magnétostrictives des milieux inspectés. La section suivante a pour objectif la visualisation du rayonnement ultrasonore, en ondes transversales et longitudinales, transmis par ces différentes sources de transduction calculées à partir du module CIVA CF. La simulation du champ ultrasonore transmis est obtenue grâce au module de simulation CIVA US.

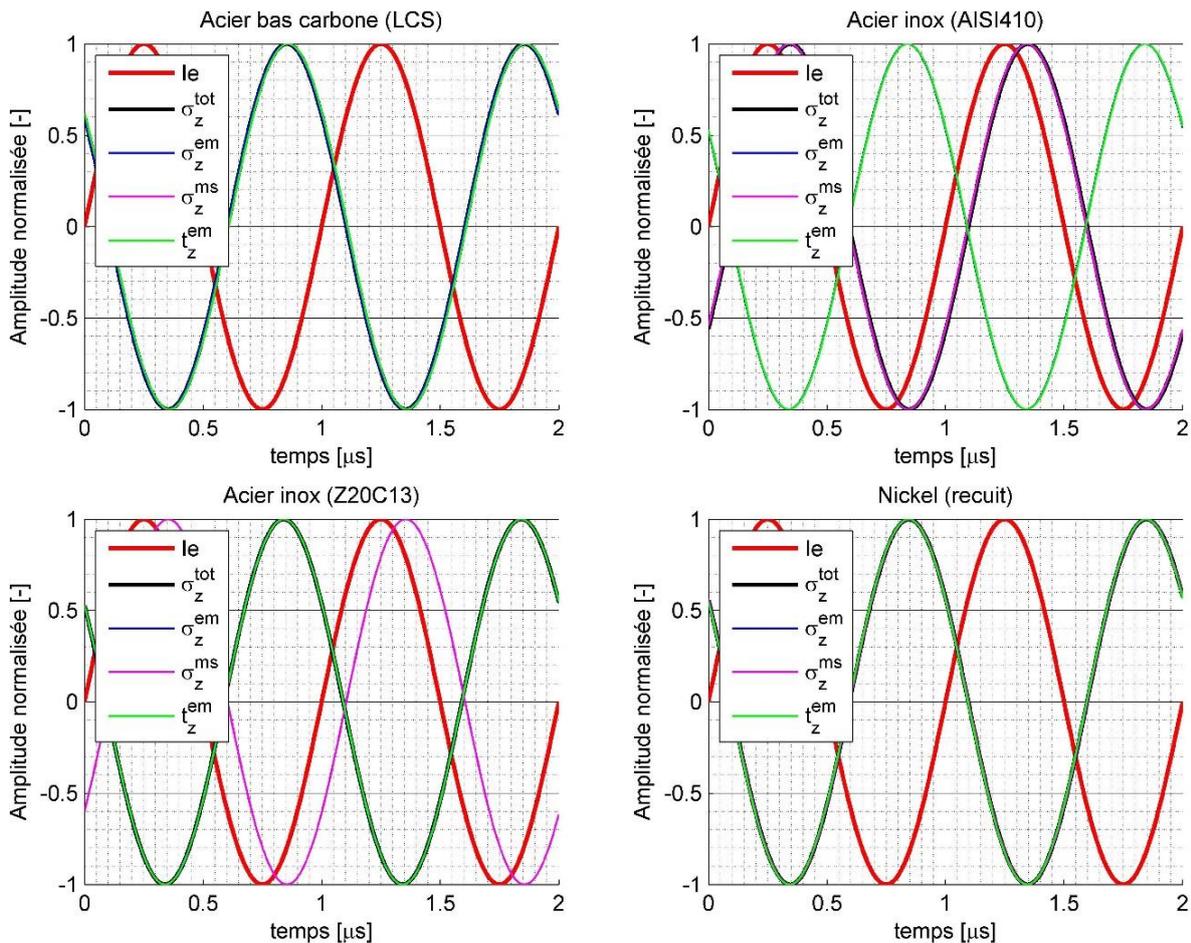


Figure 4.64 : Variations temporelles des sources de transduction induites par EMAT dans de l'acier bas carbone (haut à gauche), des aciers inoxydables AISI 410 (haut à droite) et Z20C13 (bas à gauche), et du nickel recuit (bas à droite).

4.2.3. Simulation du rayonnement ultrasonore transmis par EMAT en milieux magnétiques linéaires

Les variations spatiales et temporelles des différentes sources surfaciques de transduction élastique induites par EMAT sont directement injectées dans le module de simulation CIVA US dans le but de simuler le rayonnement ultrasonore en ondes longitudinales et transversales transmis dans les quatre milieux ferromagnétiques inspectés. On calcule l'amplitude de ces ondes rayonnées en chaque point d'observation d'une zone de calcul rectangulaire $X_{Zone} \times Z_{Zone}$, avec : $X_{Zone} = 80\text{mm}$ et $Z_{Zone} = 150\text{mm}$ (dans la profondeur du milieu inspecté). On fait également l'hypothèse qu'il n'y a ni rebond ni conversion de modes aux différentes interfaces de la zone de calcul ultrasonore, comme si le champ ultrasonore était rayonné dans un milieu semi-infini.

L'EMAT considéré rayonne à la fois des ondes volumiques transversales (T) et longitudinales (L) en milieux ferromagnétiques, et l'amplitude relative de ces deux ondes élastiques peut varier fortement d'un milieu à un autre. En injectant directement dans CIVA US les contraintes surfaciques totales σ^{tot} calculées à partir du modèle de transduction développé dans ce manuscrit, les différences d'amplitudes relatives L/T sont directement visibles sur les signaux ultrasonores temporels (Figure 4.65), appelés A-scans, simulés en un point d'observation situé au centre sous l'EMAT et à une profondeur de 75mm ($X = 0\text{mm}, Z = 75\text{mm}$) dans les différents milieux ferromagnétiques précédemment caractérisés.

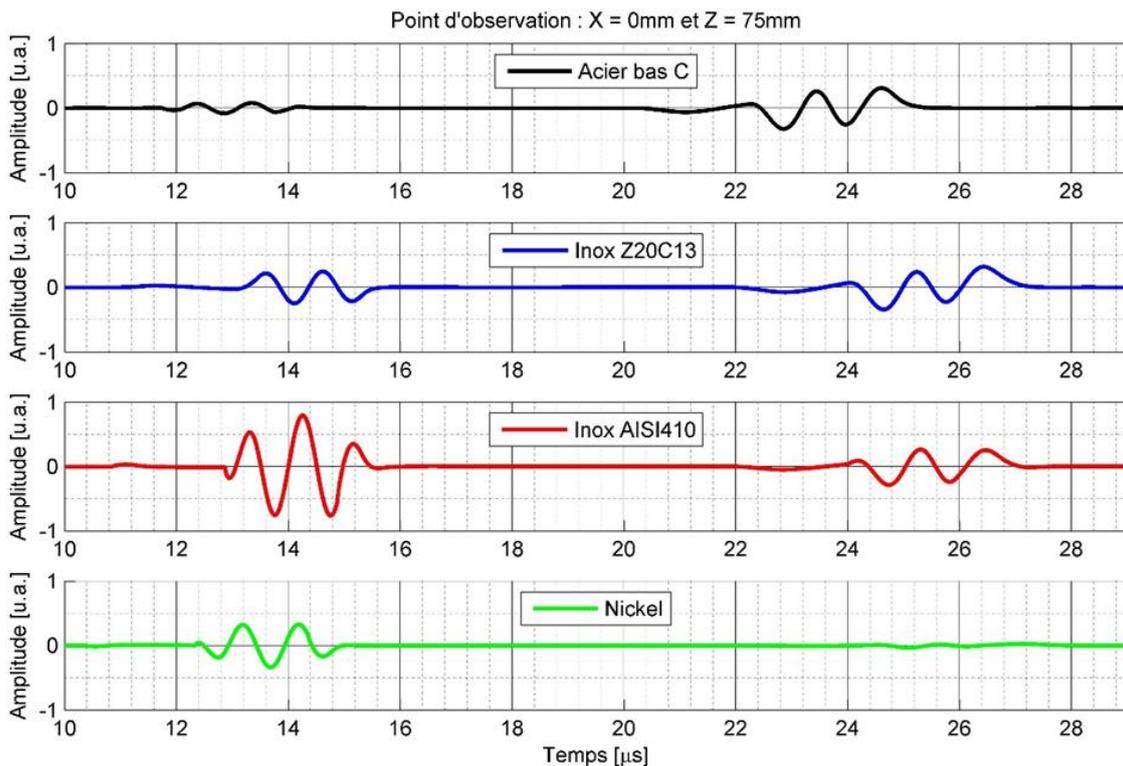


Figure 4.65 : A-scans en champ total (L+T) simulés à partir des sources surfaciques σ^{tot} induites par EMAT dans quatre milieux ferromagnétiques différents : acier bas carbone, aciers inoxydables Z20C13 et AISI 410, et nickel (recuit).

Sur chaque A-scan de la Figure 4.65, le premier paquet d'onde simulé correspond au passage de l'onde L et le second paquet à l'onde T. Les temps d'arrivée (appelés temps de vol) de ces signaux selon le milieu inspecté résultent des différentes vitesses de propagation listées dans la Table 4.7. Ces A-scans illustrent qu'une même configuration d'EMAT génère un contenu ultrasonore très différent d'un milieu ferromagnétique à un autre. Par exemple, l'EMAT étudié génère principalement des ondes T dans une

pièce d'acier bas carbone, tandis qu'il rayonne majoritairement des ondes L dans une pièce de nickel. On remarque également sur cette figure que les amplitudes relatives entre les ondes L et T sont différentes dans les deux nuances d'acier inoxydable testées. En effet, la génération d'ondes longitudinales est favorisée dans la nuance AISI 410 par rapport à la nuance Z20C13, pour une amplitude similaire rayonnée en ondes transversales. En étudiant les variations temporelles des différents signaux ultrasonores, on peut noter que les A-scans en onde L présentent des signatures temporelles différentes selon le milieu inspecté (pour des vitesses d'onde L similaires). En revanche les A-scans en ondes T présentent une forme temporelle très similaire pour les quatre milieux testés. Ces signatures temporelles suggèrent que, pour cette configuration d'EMAT, des sources différentes sont impliquées dans la génération d'ondes longitudinales selon le milieu ferromagnétique inspecté, tandis qu'une même source doit être impliquée dans la génération d'ondes transversales dans ces milieux.

Naturellement, la grande variabilité de comportement ultrasonore observée selon le milieu inspecté est intimement liée aux différents poids des mécanismes de transduction décrits et simulés dans le paragraphe 4.2.2. Ainsi, pour analyser le signal ultrasonore induit par l'EMAT, il est intéressant d'observer le champ ultrasonore induit par chacune des sources de transduction prises séparément, pour comprendre comment les ondes élastiques générées par chaque source se composent (constructivement ou destructivement) entre elles, selon le milieu ferromagnétique inspecté. Il faut rappeler que les A-scans présentés sont évidemment fortement dépendants de la position du point d'observation. De plus, l'analyse des variations spatiales des maxima d'amplitudes ultrasonores transmis dans le volume du milieu inspecté permet d'observer le trajet emprunté par l'onde dans la pièce inspectée, et ainsi de piloter la directivité des sources de transduction dans le but de contrôler une zone spécifique contenant potentiellement des défauts à détecter. De telles études sont du type de celles couramment réalisées par les utilisateurs du module CIVA US lorsqu'ils doivent optimiser la conception d'un traducteur piézoélectrique, qu'il soit mono- ou multi-éléments.

Les figures [Figure 4.66](#) – [Figure 4.15](#) décrivent les cartographies de maximum d'amplitude ultrasonore (module du déplacement élastique) en ondes transversales, tandis que les figures [Figure 4.70](#) – [Figure 4.73](#) décrivent les cartographies de maximum d'amplitude en ondes longitudinales, générées par les différentes sources de rayonnement induites par l'EMAT dans le cas des quatre milieux considérés précédemment. Ces figures sont appelées des C-scan dans la communauté ultrasoniste. Sur chacune d'elles, les trois premières cartographies correspondent au champ ultrasonore, soit en ondes L soit en ondes T, induit par les différents mécanismes de transduction considérés séparément. Elles sont normalisées par rapport au maximum d'amplitude ultrasonore totale induit par le traducteur, le champ total rayonné étant représenté par la cartographie de droite sur chaque figure. Naturellement, les amplitudes ultrasonores des C-scans simulés dans chaque matériau sont corrélées aux variations spatiales et temporelles des sources électromagnétiques (volumiques et surfaciques) et magnétostrictives de leur rayonnement simulées dans le paragraphe 4.2.2 et représentées [Figure 4.60](#) – [Figure 4.63](#). Ces simulations confirment que le champ ultrasonore en ondes transversales émis par cette géométrie d'EMAT provient presque exclusivement des sources électromagnétiques volumiques pour l'ensemble des milieux ferromagnétiques inspectés, ce qui se traduit par des amplitudes relatives de champ ultrasonore très faibles sur les C-scans simulées à partir des sources de magnétostriction et de traction magnétique. De même, la grande variabilité des sources surfaciques normales en fonction du milieu ferromagnétique inspecté se retrouve dans les prédictions de rayonnement en ondes longitudinales. On constate en effet que selon les propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu inspecté, différents mécanismes de transduction prédominent dans la génération d'onde L dans le milieu.

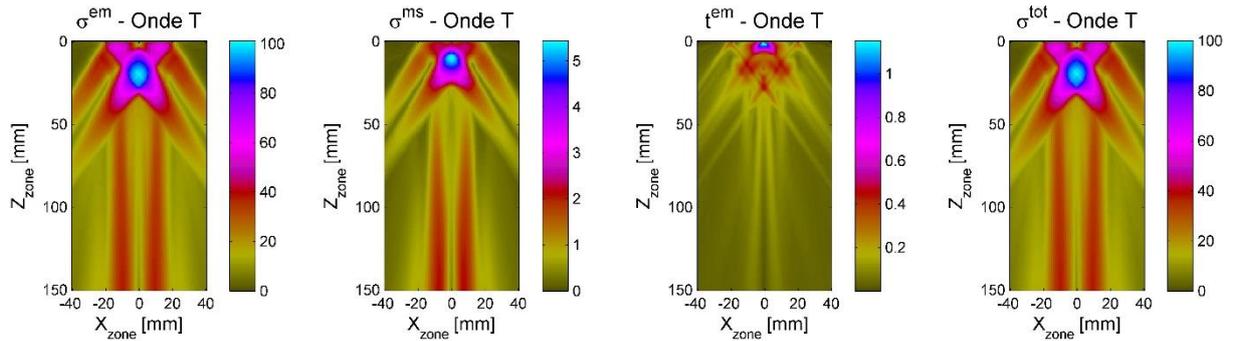


Figure 4.66 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde T rayonnée par EMAT dans un échantillon d'acier bas carbone. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

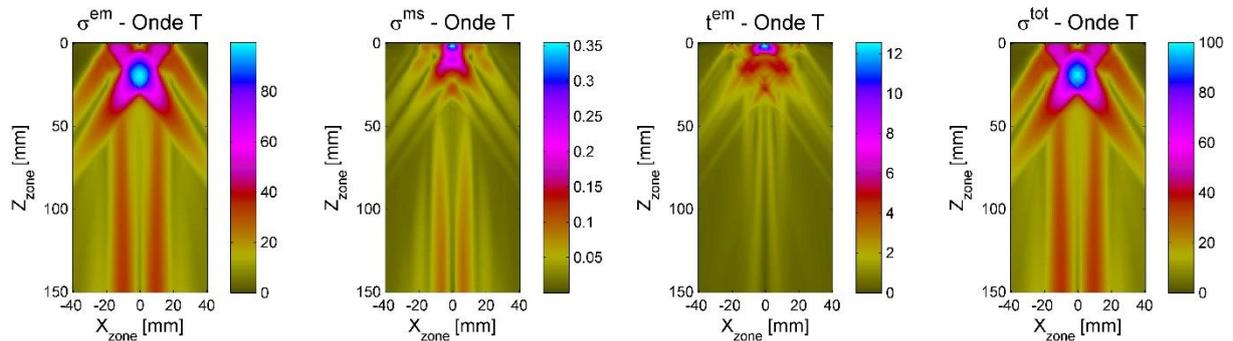


Figure 4.67 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde T rayonnée par EMAT dans un échantillon d'acier inoxydable Z20C13. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

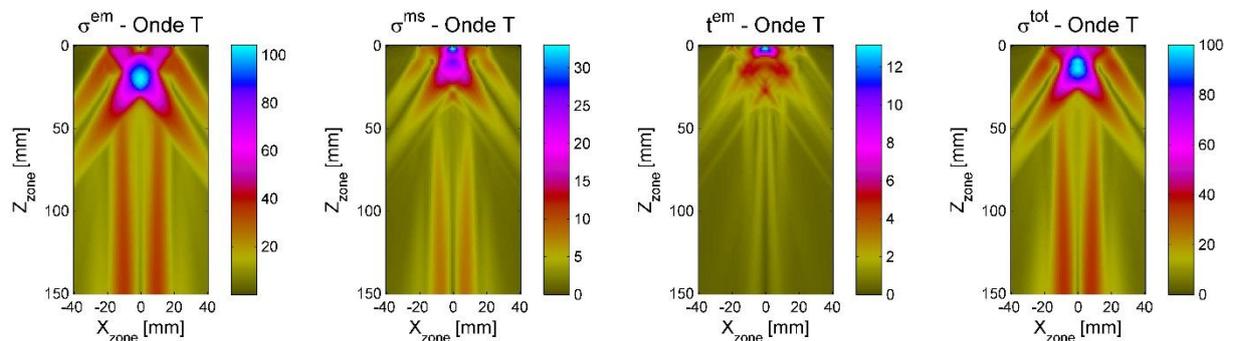


Figure 4.68 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde T rayonnée par EMAT dans un échantillon d'acier inoxydable AISI410. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

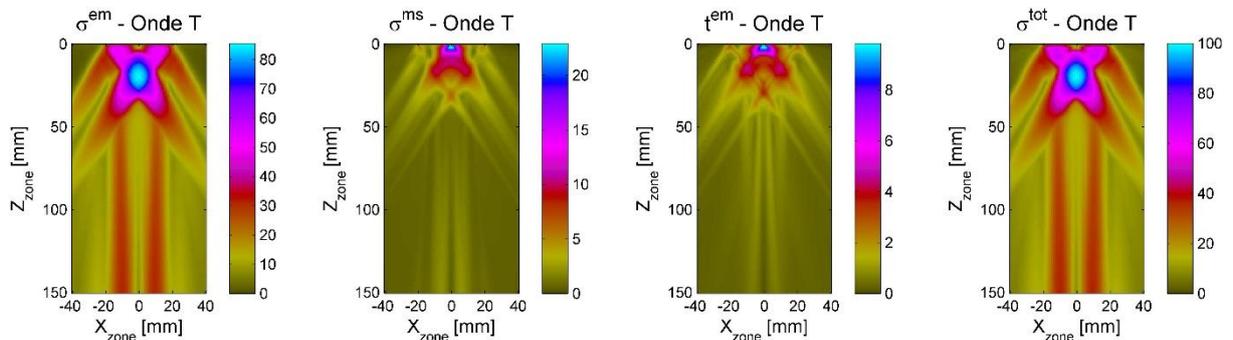


Figure 4.69 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde T rayonnée par EMAT dans un échantillon de nickel recuit. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

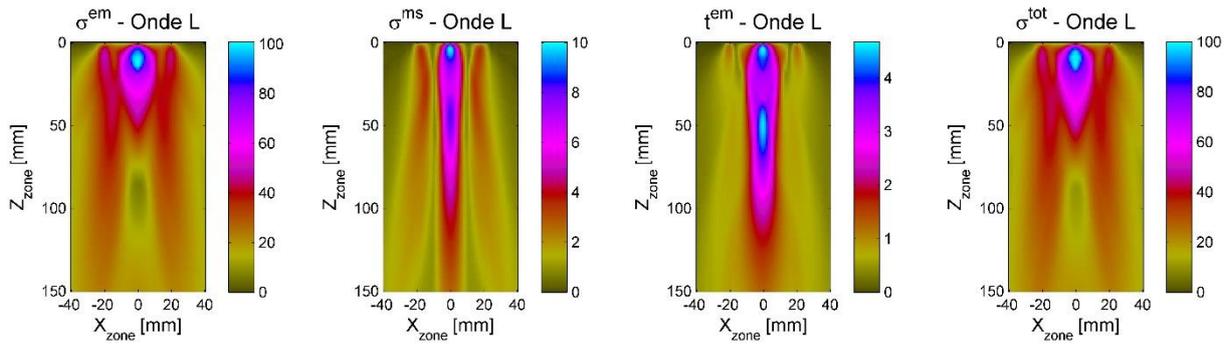


Figure 4.70 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde L rayonnée par EMAT dans une pièce d'acier bas carbone. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

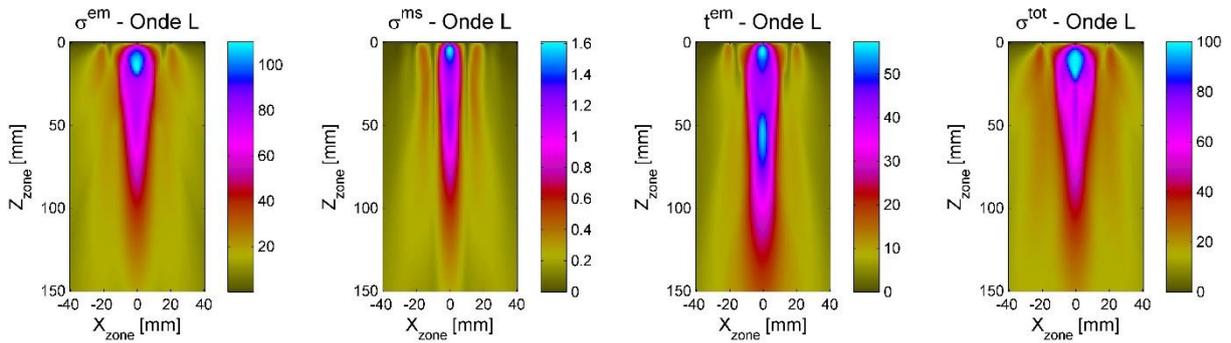


Figure 4.71 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde L rayonnée par EMAT dans une pièce d'acier inoxydable Z20C13. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

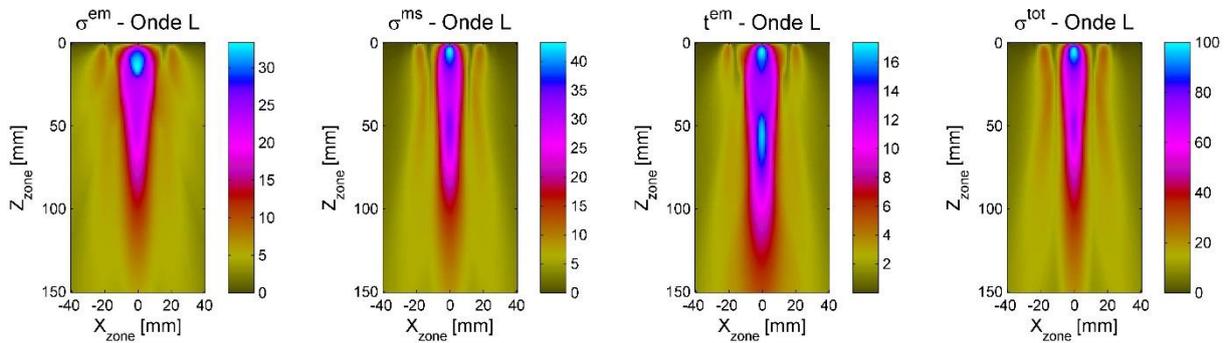


Figure 4.72 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde L rayonnée par EMAT dans une pièce d'acier inoxydable AISI410. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

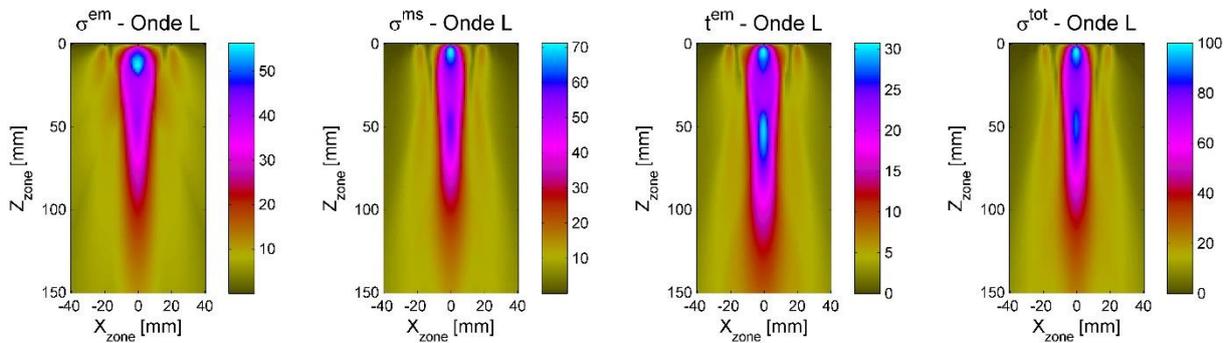


Figure 4.73 : Cartographies dans le plan (X, Z) du maximum d'amplitude ultrasonore en onde L rayonnée par EMAT dans une pièce de nickel recuit. Les sources de rayonnement sont de gauche à droite : $\tilde{\sigma}^{em}$, $\tilde{\sigma}^{ms}$, t^{em} , et σ^{tot} .

La [Table 4.8](#) liste les écarts (en dB) entre les amplitudes maximales en ondes transversales et longitudinales rayonnées par les sources électromagnétiques, magnétostrictives et de traction magnétique par rapport au champ ultrasonore rayonné par la somme de ces sources électromagnéto-élastiques. Cette table illustre quels mécanismes de transduction prédominent (cases vertes) selon la polarisation de l'onde rayonnée et le milieu inspecté, pour l'EMAT décrit dans le paragraphe 4.2.1.1.

US	Matériau	$20 \log_{10} \tilde{\sigma}^{em} / \sigma^{tot} $ [dB]	$20 \log_{10} \tilde{\sigma}^{ms} / \sigma^{tot} $ [dB]	$20 \log_{10} t^{em} / \sigma^{tot} $ [dB]
Onde T	Acier bas carbone	0.1	-25.3	-38.8
	Inox ZOC13	-0.0	-48.1	-18.0
	Inox AISI 410	0.4	-9.6	-17.6
	Nickel	-0.3	-12.8	-20.1
Onde L	Acier bas carbone	0.1	-20.0	-26.6
	Inox ZOC13	0.9	-35.9	-4.8
	Inox AISI 410	-9.5	-7.3	-15.2
	Nickel	-4.1	-3.0	-10.2

Table 4.8 : Amplitudes relatives (en dB) des champs ultrasonores d'ondes longitudinales et transversales induits par les différentes sources de transduction par rapport au champ ultrasonore total et selon le milieu ferromagnétique inspecté.

Il est important de rappeler que ces conclusions sont uniquement valables pour la configuration d'EMAT à bobine spirale et induction permanente normale étudiée. Le changement d'un des paramètres de conception de l'EMAT ou, pour ce même EMAT, la prise en compte d'un milieu différent, peuvent modifier fortement ces prédictions ultrasonores. Ces modifications sont naturellement renforcées par la grande variabilité de propriétés électromagnétiques et magnétostrictives des milieux ferromagnétiques et par les conceptions de plus en plus complexes de traducteur EMAT exploitant des géométries de bobines et des polarisations d'induction statique très diverses selon l'application visée.

Les modèles développés dans cette étude permettent la prédiction des amplitudes ultrasonores relatives des différents mécanismes de transduction dans une gamme très large de paramètres de conception de traducteur (différentes géométries de bobines, polarisations et intensités d'aimants permanents, formes et intensité de courant électrique injecté, etc.) et de propriétés magnétiques et magnétostrictives (linéaires ou non-linéaires selon la connaissance du milieu ferromagnétique inspecté). Les résultats présentés dans ce paragraphe illustrent comment peut être envisagée l'optimisation assistée par le logiciel CIVA de la conception industrielle des EMAT en vue d'une application de CND en milieux ferromagnétiques. La section 4.3 décrit l'usage pouvant en être fait pour mener à bien différentes études paramétriques sur les performances de transduction d'un EMAT dans le cadre des modèles développés.

4.3. Efficacité de transduction ultrasonore d'un EMAT selon ses paramètres d'excitation et les propriétés du milieu inspecté

La simulation des différentes sources de transduction et du rayonnement ultrasonore qu'elles induisent dans différents milieux ferromagnétiques a été présentée dans la section précédente. Cette section se propose de comparer le poids relatif des différents mécanismes de transduction (sources surfaciques électromagnétiques, magnétostrictives et de traction magnétique) selon les paramètres d'excitation

(intensité et fréquence du courant électrique injecté, intensité de l'induction permanente) du traducteur EMAT décrit au paragraphe 4.2.1.1, et selon les propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu ferromagnétique inspecté (linéaires ou anhystériques). Cette étude permet d'analyser les phénomènes de transduction prédominants selon la configuration d'inspection et le contenu ultrasonore rayonné (ondes longitudinales ou transversales). Elle illustre ainsi l'utilisation des différents outils numériques développés pendant cette thèse, permettant d'assister la conception d'un EMAT par la simulation.

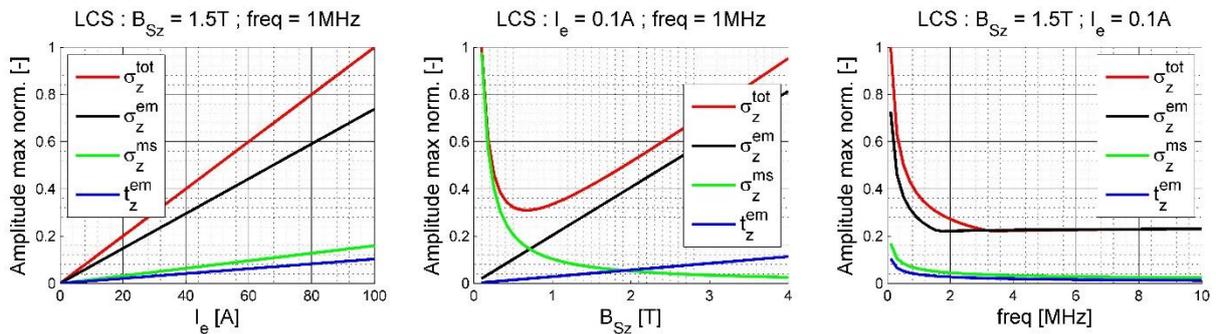
4.3.1. Influence des paramètres d'excitation de l'EMAT sur les sources de transduction ultrasonore

Cette section décrit l'influence des paramètres d'excitation sur les performances de transduction ultrasonore d'un EMAT en milieux ferromagnétiques. La simulation du champ ultrasonore rayonné selon les différents paramètres de la configuration étudiée peut être menée par l'intermédiaire des modèles théoriques mis en place dans cette étude, qui permettent de couvrir une très large gamme d'applications de CND. Les sources électromagnétiques, volumiques $\tilde{\sigma}^{em}$ et surfaciques t^{em} , et magnétostrictives $\tilde{\sigma}^{ms}$ peuvent être calculées à partir du module de simulation CIVA CF, ce qui détermine la contrainte surfacique totale σ^{tot} adaptée aux modèles semi-analytiques de rayonnement ultrasonore du module de simulation CIVA US. L'étape d'exportation/importation des sources surfaciques de rayonnement entre les modules CF et US de CIVA représente en l'état actuel de son implémentation un coût pratique contraignant en vue d'une étude paramétrique couvrant la grande variété de paramètres, de natures différentes, nécessaires à la prédiction du comportement ultrasonore d'un EMAT. Pour cette raison, les études paramétriques de cette section se concentrent sur les variations des différentes sources de transduction, dont les amplitudes sont naturellement reliées aux amplitudes ultrasonores transmises dans un milieu ferromagnétique donné (comme discuté en 4.2.3), et non directement sur les variations d'amplitude ultrasonore transmise. Cette démarche est une approximation de l'étude de l'efficacité de transduction ultrasonore d'un EMAT, qui néglige notamment les effets de diffraction liés à l'ouverture de taille finie des sources surfaciques. Elle permet tout de même d'étudier la prédominance des phénomènes de transduction mis en jeu, et de déterminer les moyens de conception permettant de les optimiser, cela en un temps de calcul numérique raisonnable. De même, les propriétés magnétiques des milieux ferromagnétiques simulés sont supposées linéaires (Table 4.7) pour simplifier et focaliser la discussion sur l'influence des paramètres d'excitation sur les mécanismes de transduction. Ensuite, la section 4.3.2 discute plus en détails de l'introduction des lois d'aimantation anhystérique dans le modèle de sources électromagnétiques et focalise l'étude sur l'influence des paramètres d'entrée des modèles de comportement magnéto-élastique couplé décrits dans le Chapitre 2.

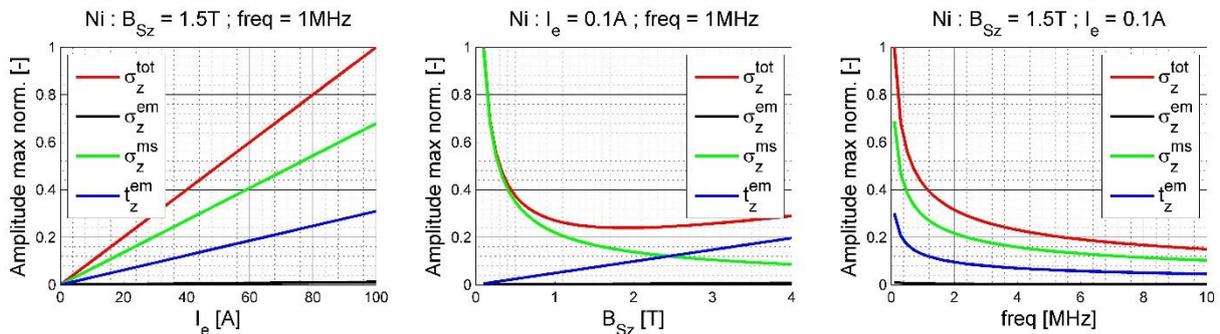
4.3.1.1. *Variations d'amplitude des sources selon les paramètres d'excitation (I_e , f , B_s)*

Cette étude simule les variations d'amplitude maximale des différentes sources (électromagnétiques $\tilde{\sigma}^{em}$, magnétostrictives $\tilde{\sigma}^{ms}$ et traction magnétique t^{em}) de transduction qui composent le terme source total σ^{tot} induit par EMAT pour différentes valeurs d'intensité I_e et de fréquence f du courant injecté dans la bobine, et d'intensité B_s d'induction statique générée par l'aimant, dans le but d'optimiser les performances de l'EMAT par un choix judicieux de ces paramètres. La section précédente a mis en évidence une forte variabilité du champ d'ondes longitudinales suivant le milieu ferromagnétique inspecté. Les concepteurs d'EMAT sont souvent contraints d'augmenter drastiquement les paramètres d'excitation, soit en intensité de courant (voir Section 5.3.2 du Chapitre 5) soit en induction permanente [Isla-Cegla_2016], afin d'obtenir une amplitude en ondes L adaptée à l'application de CND visée. La conception des EMAT par essai-erreur est fastidieuse et coûteuse, pouvant impliquer des systèmes

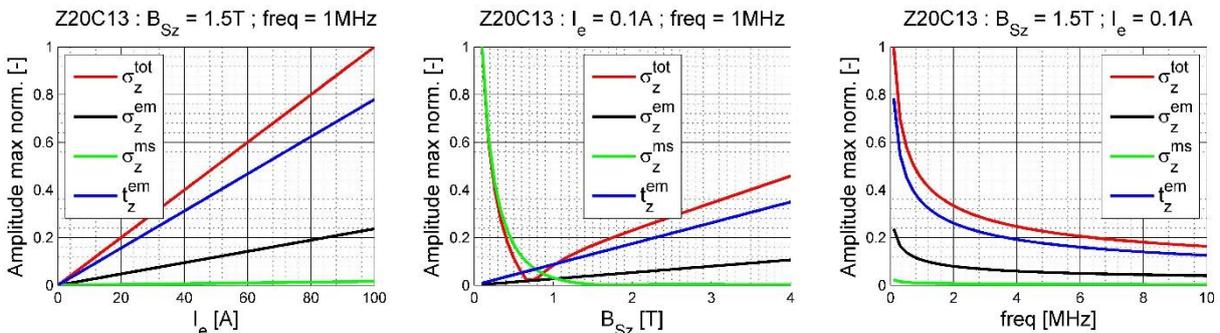
complexes d'excitation électrique (comme le système d'excitation de la sonde 'bi-onde' du CETIM décrit au Chapitre 5). Les études paramétriques présentées ici sont principalement dédiées à faciliter ce travail d'optimisation de l'amplitude des ondes L rayonnées dans la configuration étudiée. Les figures [Figure 4.74](#) – [Figure 4.76](#) tracent les variations de l'amplitude maximale des sources normales $\tilde{\sigma}_z^{em}$, $\tilde{\sigma}_z^{ms}$, t_z^{em} , et σ_z^{tot} induites à la surface de trois différents milieux ferromagnétiques, selon différentes combinaisons de paramètres d'excitation (I_e , f , B_{Sz}). Les amplitudes tracées sont normalisées par rapport au maximum d'amplitude des sources surfaciques normales totales σ_z^{tot} sur la gamme de paramètres d'excitation testée pour ces simulations, à savoir : $I_e \in [0.1 \text{ A} ; 200 \text{ A}]$ (gauche), $B_{Sz} \in [0.1 \text{ T} ; 4 \text{ T}]$ (centre), et $f \in [100 \text{ kHz} ; 10 \text{ MHz}]$ (droite). Les paramètres d'excitation fixés dans chaque cas sont systématiquement indiqués au-dessus de chaque figure, et représentent des valeurs courantes : ($I_e = 0.1 \text{ A}$, $B_{Sz} = 1.5 \text{ T}$, $f = 1 \text{ MHz}$).



[Figure 4.74](#) : Variations de l'amplitude maximale des contraintes normales $\tilde{\sigma}_z^{em}$ (noir), $\tilde{\sigma}_z^{ms}$ (vert), t_z^{em} (bleu), σ_z^{tot} (rouge) induites à la surface d'acier bas carbone selon les paramètres d'excitation : I_e (gauche), B_{Sz} (milieu), f (droite).



[Figure 4.75](#) : Variations de l'amplitude maximale des contraintes normales $\tilde{\sigma}_z^{em}$ (noir), $\tilde{\sigma}_z^{ms}$ (vert), t_z^{em} (bleu), σ_z^{tot} (rouge) induites à la surface de nickel recuit selon les paramètres d'excitation : I_e (gauche), B_{Sz} (milieu), f (droite).



[Figure 4.76](#) : Variations de l'amplitude maximale des contraintes normales $\tilde{\sigma}_z^{em}$ (noir), $\tilde{\sigma}_z^{ms}$ (vert), t_z^{em} (bleu), σ_z^{tot} (rouge) induites à la surface d'acier inoxydable Z20C13 selon les paramètres d'excitation : I_e (gauche), B_{Sz} (milieu), f (droite).

En séparant les contributions des différents mécanismes de transduction, on peut observer quelles sources surfaciques normales prédominent selon les paramètres d'excitation et selon le milieu inspecté. Les dépendances des différentes sources avec ces paramètres sont très proches d'un milieu à un autre ; en revanche, l'amplitude relative des différents phénomènes par rapport à la source surfacique totale σ^{tot} peut varier dans une large proportion d'un milieu à l'autre, comme observé dans la section 4.2. On observe sur ces figures que l'amplitude des contraintes surfaciques normales varie linéairement avec l'intensité du courant injecté pour les trois milieux testés. Ceci rejoint les observations expérimentales sur la proportionnalité de l'amplitude de l'onde longitudinale induite par EMAT avec l'intensité du courant (illustrée dans [Ribichini_2011] et dans les essais expérimentaux du Chapitre 5). C'est la raison pour laquelle l'augmentation de l'intensité du courant est souvent privilégiée dans l'optique d'un gain de performances ultrasonores.

Les variations des sources normales en fonction de l'intensité de l'induction statique sont similaires à celles décrites dans les travaux de Thompson [Thompson_1978], comparant les amplitudes ultrasonores générées par les forces de Lorentz et par magnétostriction. Dans ce papier fondateur sur la mise en évidence de l'impact des effets magnétostrictifs sur la transduction ultrasonore en milieux ferromagnétiques, Thompson décrit schématiquement (Figure 4.77) une évolution linéaire de l'amplitude ultrasonore induite par les forces de Lorentz avec B_s , et prédit une extinction de rayonnement des sources magnétostrictives à partir d'une certaine induction B_s .

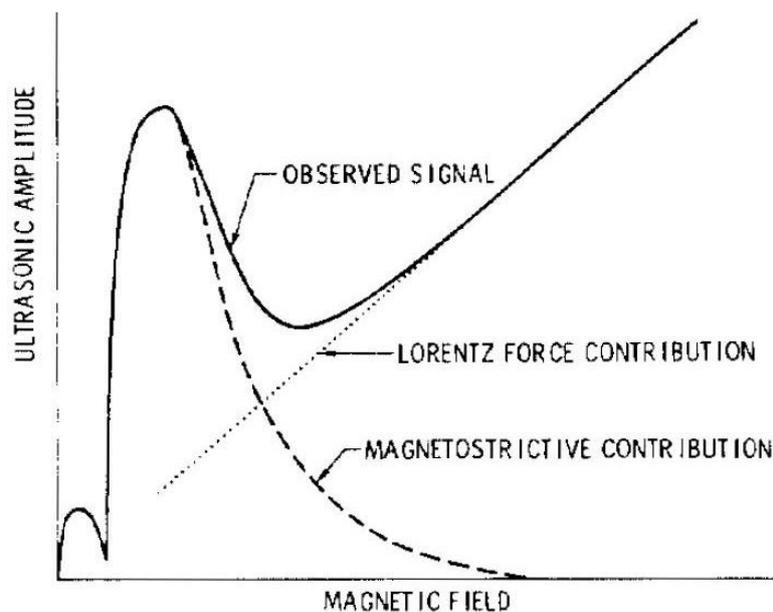


Figure 4.77 : Dépendance schématique de la transduction ultrasonore d'un EMAT dans du fer en fonction de l'induction statique selon les mécanismes de génération (d'après [Thompson_1978]).

Thompson illustre la prédominance des effets magnétostrictifs pour de faibles intensités d'excitation statique, puis celle des forces de Lorentz à forts champs. Ces deux régimes sont également prédits sur les figures précédentes, bien que l'amplitude des sources totales à champ nul diverge.

D'après la décomposition des mécanismes de transduction dans les figures Figure 4.74 – Figure 4.76, cette divergence est associée à celle de l'amplitude des sources normales de magnétostriction $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$ pour de faibles intensités de champ statique. Pour la prise en compte des effets magnétostrictifs dans notre modèle de transduction par EMAT, les résultats de simulation présentés exploitent l'approximation

piézomagnétique, qui suppose spécifiquement $H_s \gg H_d$. Ces résultats sont donc à analyser avec précaution dans la zone de faible intensité d'induction permanente. De plus, les figures précédentes concernent uniquement les variations des sources de transduction ultrasonore d'un EMAT qui oscillent à la fréquence fondamentale du courant. Un modèle de transduction valable pour des intensités arbitraires de champ magnétique (statique et dynamique) doit tenir compte des phénomènes de créations d'harmoniques (paragraphe 4.3.1.3). Ainsi, le cas des champs magnétiques statiques d'intensité très faible (voire nulle) n'est donc pas rigoureusement traité ici, ce qui explique les écarts de prédiction avec la dépendance schématisée de Thompson basée sur des mesures expérimentales. Cette restriction n'est pas contraignante en pratique car la plupart des traducteurs EMAT du commerce sont conçus avec un aimant permanent et sont alimentés de courant de faible intensité. Il est cependant important de préciser ici que le modèle de transduction présenté doit être adapté pour permettre la simulation du comportement ultrasonore d'un EMAT composé uniquement d'une bobine inductrice (et donc sans aimant permanent). Ce cas particulier peu courant de configuration EMAT est appelé 'coil only EMAT' dans la littérature anglo-saxonne [Rueter-Morgenstern_2014], et exploite généralement de très fortes intensités de courant électrique d'excitation de la bobine.

Thompson [Thompson_1978] néglige la contribution ultrasonore des sources de traction magnétique t^{em} dans ses travaux, concentrés uniquement sur les mécanismes associés aux forces de Lorentz et déformations de magnétostriction. Des figures [Figure 4.74](#) – [Figure 4.76](#), on constate que l'approximation de Thompson n'est valide que dans le cas de milieux faiblement magnétiques comme l'acier bas carbone. En effet, les sources de traction magnétique ne peuvent être négligées dans le cas de milieux de perméabilité magnétique relative plus élevée, comme le nickel ou l'acier inoxydable, ce qui rejoint les observations de [Seher-Nagy_2016].

Enfin, la dépendance des différents mécanismes de transduction avec la fréquence d'excitation du courant est également tracée sur les figures précédentes. Les variations avec la fréquence simulées sont uniquement liées aux variations des champs magnétiques dynamiques dans la profondeur régies par l'épaisseur de peau δ_p du milieu inspecté selon : $\delta_p \propto 1/\sqrt{f}$. Il est important de rappeler à ce stade que les propriétés magnétiques et magnétostrictives du milieu inspecté sont considérées indépendantes de la fréquence d'excitation dans le modèle de sources de transduction EMAT décrit dans ce manuscrit. Cependant, comme introduit dans le Chapitre 1, des phénomènes de relaxation (freinage) magnétique dépendant de la fréquence interviennent en milieux ferromagnétiques et ont une influence nécessairement sur la dépendance fréquentielle des sources de transduction induites par EMAT dans ces milieux. Ainsi, l'hypothèse adoptée dans cette étude est forte et mérite d'être approfondie dans de futurs développements ; c'est une des raisons pour lesquelles la fréquence du signal d'excitation est fixée dans la suite des études paramétriques de cette section.

4.3.1.2. Cartographies des performances ultrasonores d'un EMAT dans le plan (I_e, B_s)

Ici, les mécanismes de transduction ultrasonore d'un EMAT sont étudiés à fréquence d'excitation fixée. En effet, dans une certaine gamme d'intensité de courant et d'induction magnétique statique (assurant une faible génération d'harmonique, paragraphe 4.3.1.3), la fréquence du courant injecté correspond directement à la fréquence fondamentale d'inspection ultrasonore. Cette fréquence est alors généralement fixée en amont du contrôle selon l'application de CND visée ; elle peut être par exemple calibrée pour une résolution recherchée, ou pour sélectionner un mode d'ondes élastiques guidées. De plus, la fréquence d'excitation influence non seulement l'amplitude des sources (courbes à droite sur

Figure 4.74 – Figure 4.76), mais aussi les propriétés magnéto-élastiques du milieu inspecté et les phénomènes de diffraction associés à la non-uniformité des sources de dimensions finies, et donc le champ ultrasonore transmis dans le milieu. En étudiant les performances de transduction ultrasonore d'un EMAT à fréquence fixée, on s'assure d'une correspondance naturelle entre l'amplitude des sources, et l'amplitude et la polarisation ultrasonores qu'elles génèrent selon le milieu ferromagnétique inspecté.

La fréquence d'excitation de l'EMAT est fixée à 1 MHz dans cette étude. Les outils de simulation développés sont exploités pour prédire les cartographies de performances de transduction d'un EMAT de géométrie donnée, opérant sur un milieu ferromagnétique donné, en fonction de l'intensité du courant électrique et de l'induction permanente. Ces cartographies sont présentées sur les figures Figure 4.78 – Figure 4.80 simulées à partir de l'EMAT précédemment décrit et dans les cas d'échantillons d'acier bas carbone, de nickel recuit et d'acier inoxydable Z20C13. La gamme d'intensité de courant électrique testée est comprise entre de 0 à 200 A, pour une intensité d'induction statique normale comprise entre 0.5 T et 4 T. Comme discuté dans le paragraphe précédent, le modèle de transduction développé exploite l'approximation piézomagnétique, qui est de plus en plus mise à défaut au voisinage d'une induction statique nulle. Pour chaque matériau, la première cartographie représente les variations d'amplitude maximale des sources normales totales σ_z^{tot} en fonction des paramètres d'excitation (B_s, I_e). Ces variations d'amplitude sont reliées à celles des différentes sources de transduction ($\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}, \tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}, t_z^{\text{em}}$), et représentées par trois cartographies séparées afin d'en comparer l'importance relative. Ces figures offrent un moyen efficace, à la manière des abaques, pour établir les performances ultrasonores d'un EMAT selon ses paramètres d'excitation. Cet aspect est illustré par les courbes iso-amplitudes (représentées en noir) qui tracent l'ensemble des couples de paramètres (B_s, I_e) garantissant un niveau d'amplitude des sources de rayonnement donné.

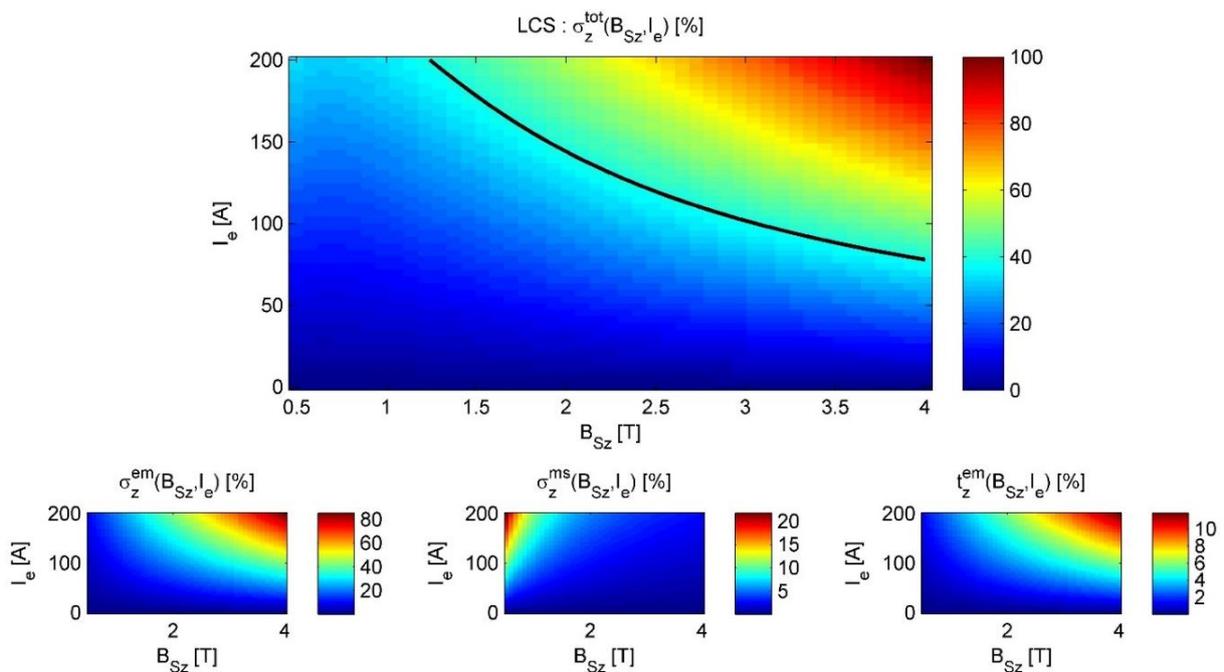


Figure 4.78 : Variations d'amplitude maximale de la source normale totale σ_z^{tot} (haut), composée des sources $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$ (centre), t_z^{em} (droite), induites par EMAT sur une pièce d'**acier bas carbone** selon les paramètres d'excitation (I_e, B_s). La courbe noire trace l'iso-amplitude des sources normales totales définies à partir des paramètres (175A, 1.5T).

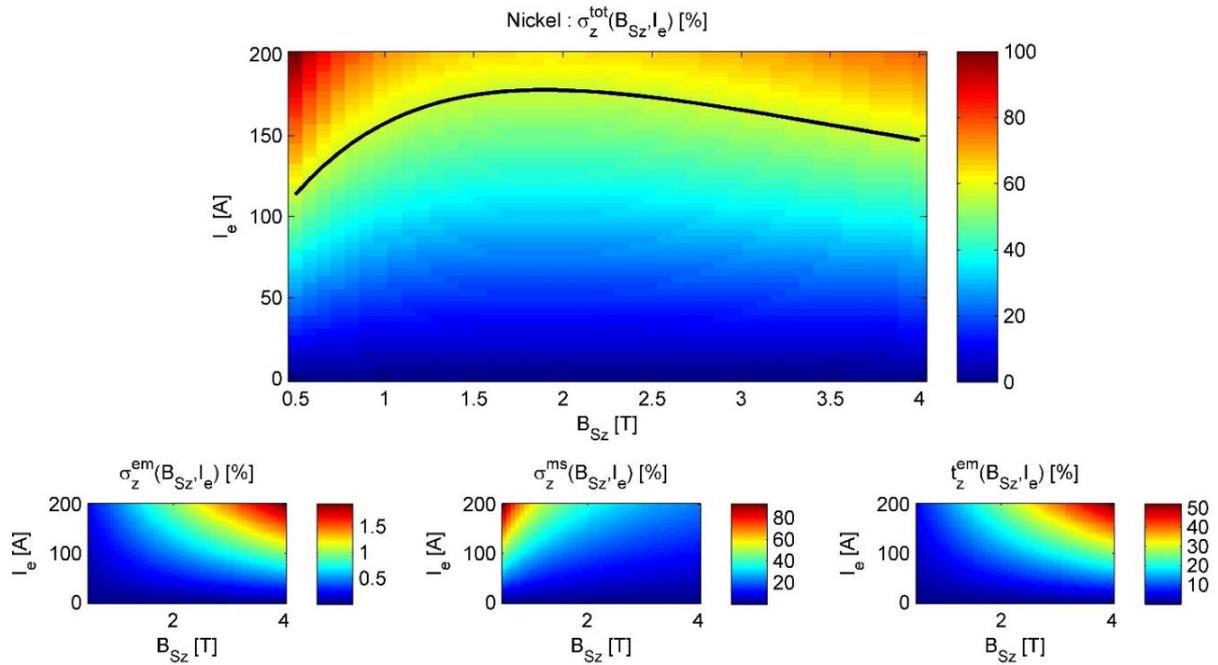


Figure 4.79 : Variations d'amplitude maximale de la source normale totale σ_z^{tot} (haut), composée des sources $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$ (centre), t_z^{em} (droite), induites par EMAT sur une pièce de **nickel recuit** selon les paramètres d'excitation (I_e, B_s). La courbe noire trace l'iso-amplitude des sources normales totales définies à partir des paramètres (175A, 1.5T).

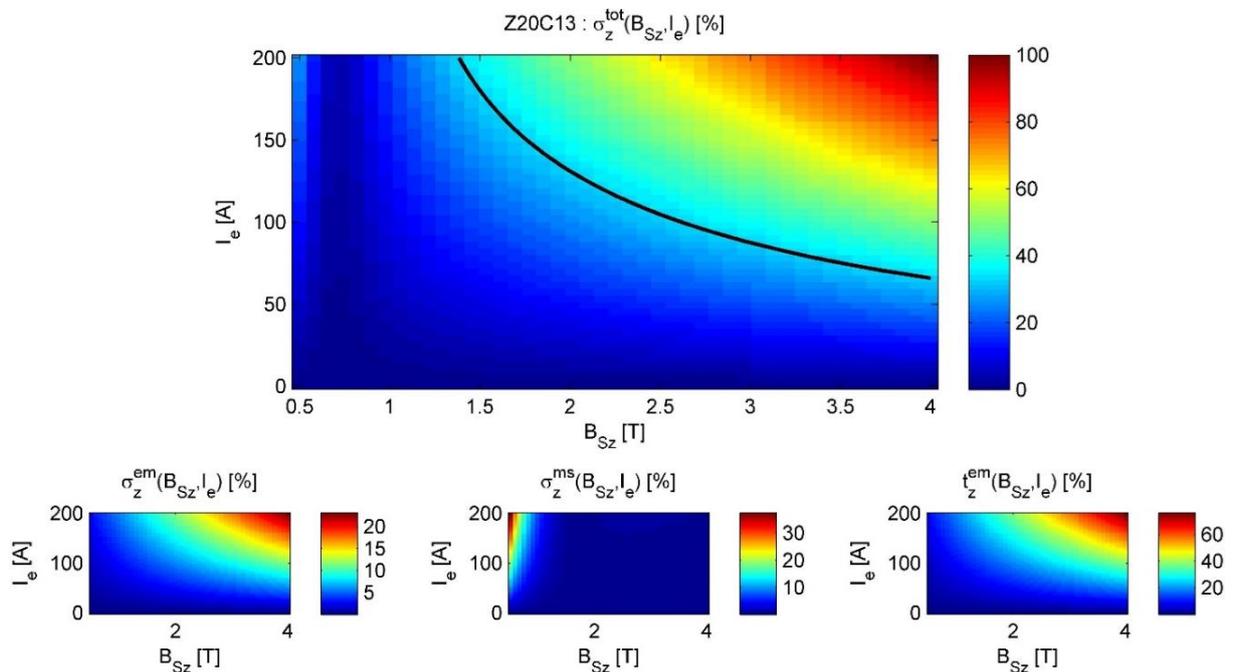


Figure 4.80 : Variations d'amplitude maximale de la source normale totale σ_z^{tot} (haut), composée des sources $\tilde{\sigma}_z^{\text{em}}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_z^{\text{ms}}$ (centre), t_z^{em} (droite), induites par EMAT sur une pièce d'**acier inoxydable Z20C13** selon les paramètres d'excitation (I_e, B_s). La courbe noire trace l'iso-amplitude des sources normales totales définies à partir des paramètres (175A, 1.5T).

Les courbes iso-amplitudes tracées sont associées au niveau d'amplitude maximale des sources totales σ_z^{tot} simulées pour une intensité de courant de 175 A et d'induction permanente de 1,5 T, correspondant aux paramètres d'excitation utilisés par le CETIM pour alimenter la sonde EMAT 'bi-onde'. Durant la phase de conception de cette sonde, la difficulté de générer des ondes longitudinales en aciers

ferromagnétiques avait été soulevée dans le cas habituel de faibles intensités d'excitation électrique. C'est la raison pour laquelle un système électrique délivrant des courants de très fortes intensités (de l'ordre de 175 A, voir Section 5.1.2) a été déployé par le CETIM pour garantir la mesure d'échos ultrasonores en ondes L. Leurs temps de vol sont ensuite comparés à ceux des ondes T (beaucoup plus faciles à générer dans cette configuration comme discuté dans la section 4.2) pour remonter par effet acousto-élastique au niveau de contraintes mécaniques de serrage d'un assemblage vis-écrou. Ainsi, la sonde 'bi-onde' est alimentée d'une excitation ($I_e = 175 \text{ A}$, $B_s = 1.5 \text{ T}$) qui garantit les performances ultrasonores optimales pour la méthode d'estimation de contraintes mécaniques. Ces paramètres définissent une amplitude de sources de transduction, et les courbes iso-amplitude simulées fournissent aux concepteurs d'EMAT comme le CETIM les combinaisons de paramètres d'excitation qui garantissent la même amplitude de sources, et donc de rayonnement ultrasonore dans le milieu inspecté. Par exemple, ces courbes indiquent dans le cas des aciers bas carbone et inoxydable Z20C13 que la même amplitude de sources que celle simulée pour la sonde 'bi-onde' peut être maintenue en diminuant l'intensité du courant, tout en maîtrisant l'augmentation de l'intensité d'induction permanente nécessaire. Générer de très forts courants électriques n'est pas simple et met en jeu des systèmes électriques complexes et encombrants, mais augmenter l'intensité du champ statique délivré par l'aimant peut également contraindre le déplacement du traducteur à la surface du milieu ferromagnétique inspecté en raison des forces d'attraction magnétique. L'optimisation de ces paramètres doit alors répondre à différents compromis technologiques selon l'application de CND visée. Les outils développés dans cette étude permettent de comprendre l'influence de chaque paramètre de conception sur l'intensité des ondes générées selon le milieu inspecté, et donc facilitent la conception d'un EMAT par la simulation.

4.3.1.3. Phénomène de génération d'harmoniques

Les résultats numériques présentés dans cette étude concernent uniquement des sources de transduction ultrasonore de mêmes variations temporelles (à des déphasages près) que celle du signal d'injection (en courant, ou en tension), c'est-à-dire au fondamental du signal d'excitation. L'intérêt de restreindre les variations temporelles des sources au fondamental est principalement numérique, assurant la séparation des variables spatiales et temporelles exploitée par le module de simulation CIVA US. Cependant un phénomène de génération d'harmoniques est observé en application EMAT, discuté par exemple par Laguerre *et al.* [Laguerre-et-al_2002], dans certains milieux ferromagnétiques pour de faibles intensités de champ magnétique statique et de fortes intensités de champ dynamique (un courant électrique de forte amplitude). Ces phénomènes se manifestent par l'apparition d'harmoniques des fréquences d'excitation dans les signaux ultrasonores transmis dans le milieu ; ils sont intrinsèques aux sources électromagnétiques et magnétostrictives induites en milieux ferromagnétiques.

Les sources électromagnétiques induisent des effets de doublement de fréquence, notamment décrits dans la littérature par Jian *et al.* [Jian-et-al_2006c], Ribichini [Ribichini_2011] et Rouge [Rouge_2013] dans le cas des milieux magnétiques linéaires. Ces auteurs décomposent classiquement les champs magnétiques du milieu en contributions statique et dynamique et isolent analytiquement, selon la méthode de formulation des sources électromagnétiques employée, des termes qui oscillent au fondamental et au premier harmonique du signal d'excitation. Cependant les modèles de sources électromagnétiques de ces auteurs présentent des incohérences comme soulevées dans la Section 3.1.1 du Chapitre 3, et l'étude du phénomène de doublement de fréquence qui en découle est par suite erronée.

Sous l'hypothèse d'un milieu magnétique linéaire (de perméabilité magnétique μ constante), cet effet s'explique simplement à partir du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\sigma_{\text{lin}}^{\text{em}}$ défini par (3.49) au Chapitre 3 pour le calcul des sources d'origine électromagnétique. En considérant une excitation magnétique \mathbf{H} sous la forme : $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_d(\mathbf{x})e^{j\omega t}$, il est simple d'isoler dans le développement de $\sigma_{\text{lin}}^{\text{em}}$ un terme d'amplitude statique $\sigma_s^{\text{em}}(\mathbf{x})$, une amplitude $\sigma_\omega^{\text{em}}(\mathbf{x})$ oscillant au fondamental $e^{j\omega t}$, et une amplitude $\sigma_{2\omega}^{\text{em}}(\mathbf{x})$ associée au premier harmonique $e^{2j\omega t}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{lin}}^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) &= \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\|^2 \mathbf{I} \\
 &= \sigma_s^{\text{em}}(\mathbf{x}) + \sigma_\omega^{\text{em}}(\mathbf{x})e^{j\omega t} + \sigma_{2\omega}^{\text{em}}(\mathbf{x})e^{2j\omega t} \\
 &= \mu \left[\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\|\mathbf{H}_s(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{H}_d(\mathbf{x})\|^2) \mathbf{I} \right] \\
 &\quad + \mu [\mathbf{H}_d(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{H}_d(\mathbf{x}) - (\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}_d(\mathbf{x})) \mathbf{I}] e^{j\omega t} \\
 &\quad + \mu [\mathbf{H}_d(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{H}_d(\mathbf{x})] e^{2j\omega t}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Selon la méthode du tenseur des contraintes de Maxwell, les différentes contributions harmoniques des sources d'origine électromagnétique peuvent être modélisées. Pour les sources volumiques, il vient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot \sigma_{\text{lin}}^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) \\
 &= \mathbf{f}_s^{\text{em}} + \mathbf{f}_\omega^{\text{em}} e^{j\omega t} + \mathbf{f}_{2\omega}^{\text{em}} e^{2j\omega t} \\
 &= [\nabla \cdot \sigma_s^{\text{em}}(\mathbf{x})] + [\nabla \cdot \sigma_\omega^{\text{em}}(\mathbf{x})] e^{j\omega t} + [\nabla \cdot \sigma_{2\omega}^{\text{em}}(\mathbf{x})] e^{2j\omega t}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

À partir de l'expression formelle (3.47) du tenseur σ^{em} des contraintes électromagnétiques de Maxwell en milieux ferromagnétiques définie dans le Chapitre 3, l'hypothèse de linéarité peut être levée dans cette étude et le formalisme mis en place autorise la prise en compte d'une loi macroscopique $\chi(H)$ d'aimantation anhystérétique dans la modélisation des sources électromagnétiques induites par EMAT dans ces milieux. En posant $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \chi(\|\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\|)\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, on montre que la densité de sources \mathbf{f}^{em} peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot \sigma^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) \\
 &= \nabla \cdot \sigma_0^{\text{em}}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \nabla \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)] - \mu_0 \nabla \cdot \left(\int_{h=0}^{\|\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\|} \mathbf{M}(h) dh \right).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Les sources électromagnétiques modélisées à partir de la divergence du tenseur σ_0^{em} des contraintes électromagnétiques de Maxwell dans l'air (défini à partir de μ_0) présentent naturellement des composantes qui oscillent au premier harmonique comme décrit précédemment en milieux magnétiques linéaires. En revanche, la prise en compte d'une loi de comportement magnétique non-linéaire dans les deux termes supplémentaires de la décomposition (4.16) implique la création de sources qui oscillent à des harmoniques du signal d'excitation d'ordres supérieurs selon l'amplitude des composantes spectrales de l'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, et donc selon les variations de la loi $\chi(H)$, en fonction du milieu ferromagnétique inspecté.

En suivant un raisonnement similaire, un modèle formel de création d'harmoniques d'ordres élevés des sources de magnétostriction peut également être mis en place dans le formalisme générique de cette étude. Comme mentionné dans la section 3.2.3 du Chapitre 3, l'approximation piézomagnétique généralement adoptée dans la littérature EMAT ne permet pas d'étudier les phénomènes de génération d'harmoniques. Notamment, le modèle de création d'harmoniques d'ordres élevés de Rouge et al.

[Rouge-et-al_2014b] est erroné car il est basé sur une extension du tenseur des déformations piézomagnétiques à de fortes intensités de champ dynamique, ce qui est met à défaut l'hypothèse piézomagnétique à l'origine de sa formulation théorique. En effet, le modèle de déformations de magnétostriction étant linéarisé autour de l'excitation statique pour de faibles intensités de champ magnétique dynamique, les composantes spectrales des sources piézomagnétiques se résument à un terme statique \mathbf{f}_s^{ms} et un terme $\mathbf{f}_\omega^{\text{ms}}$ qui oscille à la fréquence fondamentale du signal d'excitation :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{ms}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}_s^{\text{ms}}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_\omega^{\text{ms}}(\mathbf{x})e^{j\omega t} \\ &= [\nabla \cdot \{-\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{H}_s(\mathbf{x}))\}] + [\nabla \cdot \{-\mathbb{C} : [\mathbf{d}^{\text{ms}}(\mathbf{H}_s(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{H}_d(\mathbf{x})]\}]e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dans le but d'étudier le phénomène de création d'harmoniques des sources magnétostrictives, il est nécessaire de s'affranchir de cette hypothèse piézomagnétique. À partir de l'expression (3.66) du Chapitre 3 du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ des déformations macroscopiques de magnétostriction d'un milieu caractérisé par sa loi élémentaire de magnétostriction $\lambda^{\text{ms}}(\mathbf{H})$, ces sources peuvent s'écrire dans le cas d'une excitation dynamique arbitraire selon la relation général :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{ms}}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \cdot \{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(\mathbf{x}, t)\} \\ &= -\nabla \cdot \left\{ \mathbb{C} : \left[\lambda^{\text{ms}}(\|\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\|) S_{ij} \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\|\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\|} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comme dans le cas des sources électromagnétiques de l'équation (4.16), le modèle présenté de sources de magnétostriction permet la description des phénomènes de génération d'harmoniques d'ordres élevés par analyse spectrale de l'équation (4.18), selon les variations de la loi $\lambda^{\text{ms}}(\mathbf{H})$ et du tenseur déviateur $S_{ij}(\mathbf{h})$ décrites par l'excitation magnétique (statique et dynamique) du milieu ferromagnétique inspecté, ce qui corrige l'idée originale de Rouge *et al.* [Rouge-et-al_2014b].

Le modèle de sources électromagnéto-élastiques décrites par les équations (4.16) et (4.18) est valable pour une intensité arbitraire d'excitation magnétique dynamique. Les amplitudes spectrales des termes sources associées à chaque harmonique ne peuvent pas être déterminées analytiquement dans le cas non-linéaire. En effet, il est nécessaire d'implémenter numériquement les lois d'aimantation et de magnétostriction du milieu ferromagnétique inspecté pour prédire le contenu spectral des sources de transduction ultrasonore induites selon la configuration EMAT étudiée. Pour illustration, on restreint l'étude à la génération de termes sources qui oscillent au premier harmonique du signal d'excitation (phénomène de doublement de fréquence). En effet, selon les paramètres d'excitation (I_e, B_s) de l'EMAT, l'amplitude des composantes spectrales des sources au premier harmonique (2ω) n'est pas toujours négligeable, et le contenu spectral des ondes ultrasonores émises dans le milieu inspecté ne se limite alors plus uniquement à celui du courant d'excitation. Il peut donc s'avérer nécessaire dans certaines gammes de paramètres d'excitation de prendre en compte ce phénomène de doublement de fréquence. Pour quantifier les niveaux d'intensités des paramètres (I_e, B_s) à partir desquels l'excitation du premier harmonique doit être prise en compte dans le modèle de rayonnement, les coefficients de Fourier des sources électromagnétiques (4.16) et magnétostrictives (4.18) induites par l'EMAT décrit dans ce chapitre à la surface d'échantillons d'acier bas carbone et de nickel sont calculés pour différentes excitations (I_e, B_s). Les variations d'amplitude des coefficients $c_1(\sigma_z^{\text{tot}})$ et $c_2(\sigma_z^{\text{tot}})$ sont illustrées sur la [Figure 4.81](#). Ces courbes sont normalisées par rapport au maximum d'amplitude de ces coefficients. Elles illustrent la forte dépendance des amplitudes relatives des termes sources au fondamental et au premier harmonique selon les paramètres d'excitation et les propriétés magnétiques du milieu.

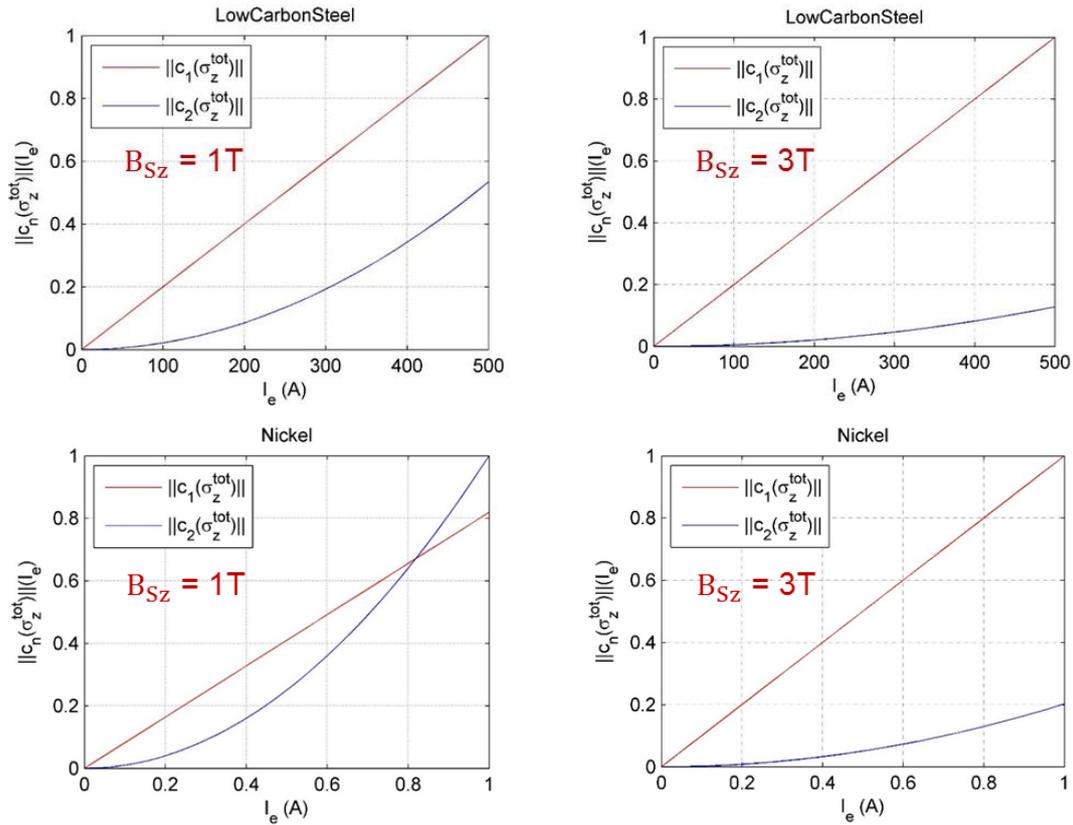


Figure 4.81 : Variations des coefficients de Fourier au fondamental (rouge) et premier harmonique (noir) des sources surfaciques normales induites par EMAT en acier bas carbone (haut) et nickel (bas) selon différentes excitations (I_e , B_S).

Cette étude permet d'assurer que le terme oscillant au premier harmonique peut être négligé dans les mécanismes de transduction EMAT d'un échantillon d'acier bas carbone, l'amplitude de $c_2(\sigma_z^{\text{tot}})$ étant très faible devant celle de $c_1(\sigma_z^{\text{tot}})$ dans toute la gamme de paramètres d'excitation pour ce milieu. En revanche, pour un milieu plus fortement magnétique et magnétostrictif comme le nickel, le terme $c_2(\sigma_z^{\text{tot}})$ croît beaucoup plus rapidement avec le courant d'excitation, pour atteindre une valeur équivalente à celle de $c_1(\sigma_z^{\text{tot}})$ aux alentours de 800 mA (avec une induction statique de 1 T). Une augmentation de l'induction permanente décale naturellement ce point d'intersection à des intensités de courant plus élevées. Cette analyse indique ainsi que les phénomènes de doublement de fréquence peuvent être négligés pour la simulation des sources induites dans les trois différentes nuances d'aciers (bas carbone, AISI 410, et Z20C13) dans une très large gamme de paramètres d'excitation, tandis qu'ils ont rapidement une influence significative sur le champ ultrasonore rayonné dans du nickel par exemple.

Il est donc important d'avoir conscience de l'existence de ces phénomènes, et de vérifier leur impact sur les mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT selon la configuration étudiée et le milieu ferromagnétique inspecté. Les phénomènes de doublement de fréquence se décrivent très simplement dans le cas d'un milieu magnétique linéaire. En revanche, si le milieu magnétique inspecté présente des propriétés non-linéaires, le contenu spectral des différentes sources de transduction est beaucoup plus complexe à analyser (création d'harmoniques d'ordres supérieures), et nécessite une description rigoureuse des lois de comportements magnétique et magnétostrictif dynamiques non-linéaires des milieux ferromagnétiques. Cette étude doit être approfondie dans de prochains développements pour rigoureusement étudier la génération d'harmoniques d'ordres plus élevés et définir précisément des cartographies d'amplitude des différentes composantes spectrales de sources induites par EMAT selon

son signal d'excitation. En effet, comme mentionné dans les paragraphes précédents, les lois de comportement magnéto-élastiques utilisées dans le modèle de transduction présenté sont supposées indépendantes de la fréquence d'excitation, ce qui néglige les phénomènes de distorsion et de freinage magnétiques caractéristiques des milieux ferromagnétiques et constitue une forte approximation pour l'étude des mécanismes de création d'harmoniques d'ordre élevé. C'est la raison pour laquelle les résultats de ce paragraphe sont restreints au premier harmonique du signal d'excitation de l'EMAT.

4.3.2. Influence des propriétés magnétiques et magnéto-élastiques du milieu sur les sources de transduction ultrasonore induites par EMAT

Dans ce paragraphe, les paramètres d'excitation et de conception EMAT sont fixés et l'influence des propriétés électromagnétiques et magnétostrictives du milieu ferromagnétique inspecté est étudiée. Dans un premier temps, les modèles théoriques développés dans cette thèse permettent la prédiction de l'influence des paramètres de comportement magnétique linéaire sur les sources surfaciques d'origine électromagnétique induites par EMAT. Les résultats de cette étude sont comparés aux travaux récents de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016], discutés dans la Section (3.1.1) du Chapitre 3. Ensuite, les modèles macroscopiques de comportement magnéto-élastique couplé détaillés dans le Chapitre 2 sont exploités pour simuler l'influence de la prise en compte des lois d'aimantation et de magnétostriction anhystérétiques du milieu inspecté, et des contraintes mécaniques affectant ces propriétés, sur l'amplitude des sources de transduction ultrasonore induites par EMAT.

4.3.2.1. Influence des paramètres (σ , μ_r) en milieu linéaire

Comme discuté dans le Chapitre 3, Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016] ont mené des travaux de modélisation du champ ultrasonore (d'ondes L et T) rayonné par deux configurations différentes d'EMAT en milieux magnétiques linéaires. La contribution des effets magnétostrictifs sur le rayonnement est négligée par les auteurs ; ils étudient l'influence de la perméabilité magnétique relative sur l'amplitude ultrasonore induite par les sources électromagnétiques volumiques et surfaciques (selon la méthode de la densité de Kelvin, voir Section (3.1.1)). Ici, l'influence de la perméabilité magnétique relative sur l'amplitude maximale des sources normales $\tilde{\sigma}_z^{em}$ et t_z^{em} est tracée sur la Figure 4.82 d'après le modèle théorique de sources électromagnétiques développé dans cette étude et appliqué à l'EMAT du paragraphe 4.2.1.1 alimenté des paramètres d'excitation : ($I_e = 0.1$ A, $f = 2$ MHz, $B_s = 1.5$ T).

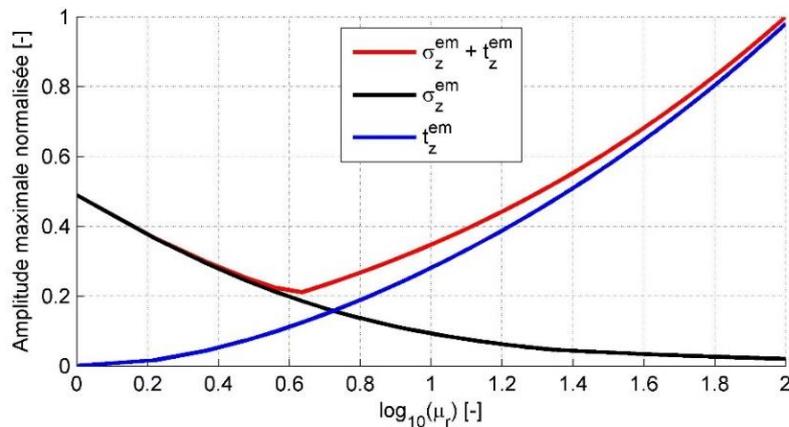


Figure 4.82 : Variations d'amplitude maximale des sources électromagnétiques normales $\tilde{\sigma}_z^{em} + t_z^{em}$ (rouge), $\tilde{\sigma}_z^{em}$ (noir) et t_z^{em} (bleu) induites par EMAT en fonction de la perméabilité magnétique relative μ_r du milieu inspecté.

Pour cette géométrie d'EMAT et ces paramètres d'excitation, les tendances de variations d'amplitude maximale des sources électromagnétiques normales en fonction de la perméabilité magnétique relative correspondent bien à celles du déplacement ultrasonore maximal en onde L rayonné par les sources électromagnétiques de Seher et Nagy (Section 3.1.1.5 du Chapitre 3). En effet, on observe sur la [Figure 4.82](#) la prédominance des effets électromagnétiques volumiques pour de faibles valeurs de perméabilité relative, tandis qu'une augmentation de la perméabilité éteint progressivement ces effets et augmente l'influence du terme de traction magnétique surfacique. Finalement, à partir d'une certaine valeur de perméabilité magnétique relative (valeur inhérente aux paramètres de conception et d'excitation de l'EMAT utilisé), seuls les termes sources surfaciques contribuent à la génération d'onde ultrasonore par EMAT, ce qui rejoint les conclusions de Seher et Nagy sur la nécessité de les prendre en compte dans les mécanismes de transduction, d'autant plus que le milieu inspecté présente une forte perméabilité magnétique relative. Cette comparaison qualitative avec les travaux de Seher et Nagy permet de vérifier la validité du modèle théorique de sources surfaciques équivalentes de rayonnement ultrasonore proposé ici. De plus, elle confirme la légitimité de l'étude paramétrique proposée sur les variations d'amplitude des sources surfaciques de transduction, les variations d'amplitude des sources étant naturellement corrélées aux variations d'amplitude ultrasonore rayonnée dans le milieu.

Pour compléter cette étude sur l'influence des propriétés électromagnétiques linéaires du milieu, les variations des sources électromagnétiques surfaciques $\tilde{\sigma}_z^{em}$ et t_z^{em} sont également tracées en fonction de la conductivité électrique (linéaire) du milieu inspecté. Cette analyse définit des cartographies de variations d'amplitudes de ces sources dans un plan (σ, μ_r) . Ces cartographies sont illustrées sur la [Figure 4.83](#) ; elles mettent une nouvelle fois en évidence la prédominance des effets électromagnétiques volumiques pour de faibles perméabilités magnétiques relatives et l'influence d'autant plus forte des sources de traction magnétique surfacique que le milieu inspecté est plus fortement magnétique.

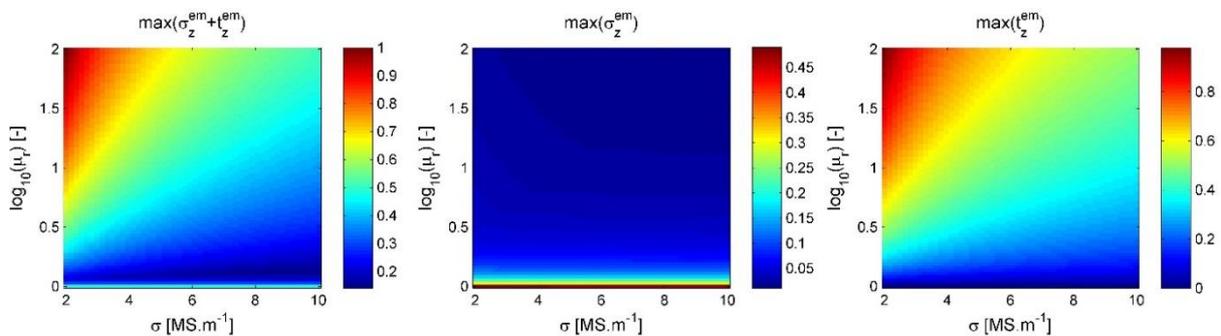


Figure 4.83 : Variations d'amplitude maximale des sources électromagnétiques normales $\tilde{\sigma}_z^{em} + t_z^{em}$ (gauche), $\tilde{\sigma}_z^{em}$ (centre) et t_z^{em} (droite) induites par EMAT selon la conductivité électrique σ et la perméabilité magnétique relative μ_r du milieu.

Ce paragraphe illustre les variations d'amplitude des sources électromagnétiques surfaciques formellement dérivées à partir des modèles théoriques du Chapitre 3 en fonction des propriétés électromagnétiques d'un milieu magnétique linéaire, décrit par sa conductivité électrique σ et sa perméabilité magnétique relative μ_r . Cependant, comme présenté dans le Chapitre 1, les propriétés magnétiques des milieux ferromagnétiques sont non-linéaires et dépendent de nombreux facteurs, comme l'état de contraintes mécaniques (résiduelles ou appliquées). Les paragraphes suivants traitent des variations d'amplitude des sources de transduction EMAT simulées en tenant compte des lois de comportements anhystérétiques magnétique et magnétostrictif d'un milieu ferromagnétique.

4.3.2.2. Prise en compte du comportement magnétique anhystérétique

Comme présenté dans le Chapitre 1, les milieux ferromagnétiques exhibent des propriétés macroscopiques magnétiques et magnétostrictives fortement non-linéaires. Dans le but d'établir un modèle formel de sources de transduction induites par EMAT capable de prendre en compte les non-linéarités magnétiques et magnétostrictives du milieu inspecté, différentes approches de modélisation des lois macroscopiques anhystérétiques d'aimantation et de déformations de magnétostriction sont décrites et comparées dans le Chapitre 2. Le comportement magnéto-élastique anhystérétique décrit l'évolution des phénomènes réversibles d'aimantation et de magnétostriction d'un milieu en fonction de l'intensité de l'excitation magnétique appliquée. Ces lois de comportement introduisent les phénomènes de saturation magnétique et constituent une bonne approximation du comportement magnétique des milieux ferromagnétiques doux, qui représentent la plupart des cas d'intérêt du CND par EMAT.

Le modèle formel de sources surfaciques de rayonnement ultrasonore mis en place dans le Chapitre 3 permet la prise en compte des lois anhystérétiques magnétiques et magnétostrictives. Connaissant la loi anhystérétique χ du milieu inspecté, qui dépend de l'intensité de l'excitation magnétique extérieure mais aussi des différents facteurs physiques ayant un impact sur l'aimantation du milieu, un modèle vectoriel d'aimantation isotrope $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = (\chi(\|\mathbf{H}\|)/\|\mathbf{H}\|)\mathbf{H}$ est considéré dans le but de simplifier les prochains développements. Ce champ d'aimantation est linéarisé pour de faibles intensités d'excitation magnétique dynamique, selon un raisonnement similaire à celui décrivant le modèle tensoriel des déformations piézomagnétiques (Section 3.2.3 du Chapitre 3). En notant $\partial_{\mathbf{H}}$ la dérivée partielle selon le champ vectoriel \mathbf{H} , les aimantations statique \mathbf{M}_s et dynamique \mathbf{M}_d induites en milieux ferromagnétiques sont décrites sous l'hypothèse $\|\mathbf{H}_d\| \ll \|\mathbf{H}_s\|$ par la linéarisation suivante de la loi $\mathbf{M}(\mathbf{H})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d) &= \mathbf{M}(\mathbf{H}_s) + \partial_{\mathbf{H}}\mathbf{M}|_{\mathbf{H}_s} \cdot \mathbf{H}_d + o(\|\mathbf{H}_d\|^2) \\ &\cong (\chi(\|\mathbf{H}_s\|)/\|\mathbf{H}_s\|)\mathbf{H}_s + \chi^D(\mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{H}_d \\ &\cong \mathbf{M}_s(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_d(\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

À l'aide de résultats d'analyse différentielle, le tenseur d'ordre deux de susceptibilité magnétique différentielle χ^D est obtenu analytiquement sans hypothèse *a priori* sur la géométrie du milieu inspecté, ni sur la polarisation et l'intensité de l'excitation magnétique, selon l'expression suivante :

$$\chi^D(\mathbf{H}) = \partial_{\mathbf{H}}\mathbf{M} = \left[\frac{1}{\|\mathbf{H}\|^2} \frac{\partial \chi}{\partial \|\mathbf{H}\|} - \frac{\chi}{\|\mathbf{H}\|^3} \right] \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \frac{\chi}{\|\mathbf{H}\|} \mathbf{I}. \quad (4.20)$$

Cette linéarisation est une approximation du comportement magnétique dynamique non-linéaire d'un milieu ferromagnétique qui s'affranchit de la connaissance des cycles d'hystérésis mineurs caractéristiques de l'aimantation dynamique des milieux ferromagnétiques (Chapitre 1). Des lois de comportements magnéto-dynamiques non-linéaires plus complexes peuvent être prises en compte dans le modèle de sources de transduction du Chapitre 3, à condition de mesurer ou modéliser ces comportements en amont du contrôle. Naturellement, ce modèle vectoriel linéarisé d'aimantation dynamique non-linéaire se réduit au comportement linéaire lorsque la susceptibilité magnétique χ est supposée constante : $\chi^D(\mathbf{H}) = \partial_{\mathbf{H}}\mathbf{M} = \chi$, et $\mathbf{M}(\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d) = \chi\mathbf{H} = \chi\mathbf{H}_s + \chi\mathbf{H}_d$.

Le modèle formel de sources surfaciques de rayonnement ultrasonore développé dans cette thèse permet d'étudier l'influence de la prise en compte d'une loi anhystérétique dans la définition (4.20) du tenseur

χ^D (évalué à l'excitation statique) du modèle linéarisé (4.19) d'aimantation dynamique sur l'amplitude des mécanismes de transduction induits par EMAT. L'ajout des propriétés magnétiques anhystériques du milieu modélise plus précisément le point de fonctionnement magnétique statique du milieu, imposé par le champ magnétique délivré par l'aimant permanent de l'EMAT. La comparaison des variations spatiales (selon Y_{zone}) des sources surfaciques totales σ^{tot} suivant que le milieu ferromagnétique est linéaire ou anhystérique est illustrée par les figures [Figure 4.84](#) - [Figure 4.86](#) pour des échantillons d'aciers inoxydables (AISI 410 et Z20C13) et de nickel recuit. Pour rappel, les lois anhystériques d'aimantation de ces milieux sont déterminées par des moyens différents (Chapitre 2) : approche phénoménologique de Jiles (avec les paramètres décrits par Li) pour l'acier inoxydable AISI 410, mesure expérimentale pour l'acier inoxydable Z20C13, et approche multi-échelle simplifiée de Daniel pour le nickel recuit (à partir des paramètres de Li). Les courbes d'aimantation anhystérique des matériaux simulés sont détaillées dans le Chapitre 2.

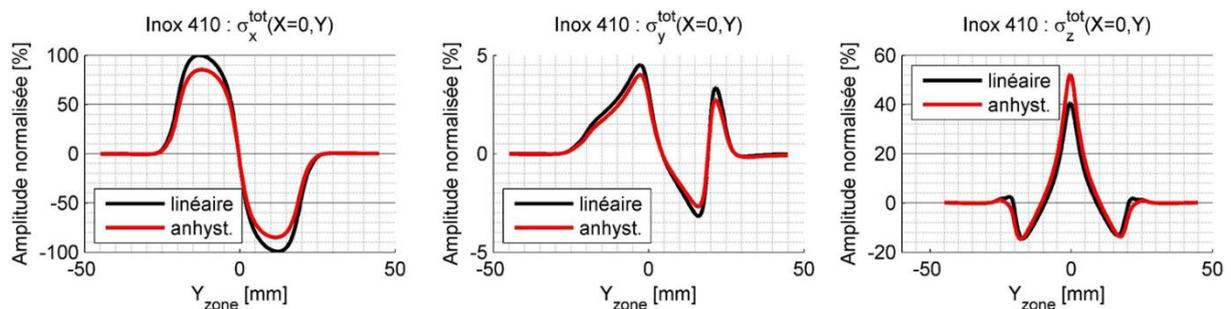


Figure 4.84 : Variations selon X_{zone} des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre), σ_z^{tot} (droite) des sources totales de transduction induites par EMAT pour un **acier inoxydable AISI 410** supposé linéaire (noir) ou anhystérique (rouge).

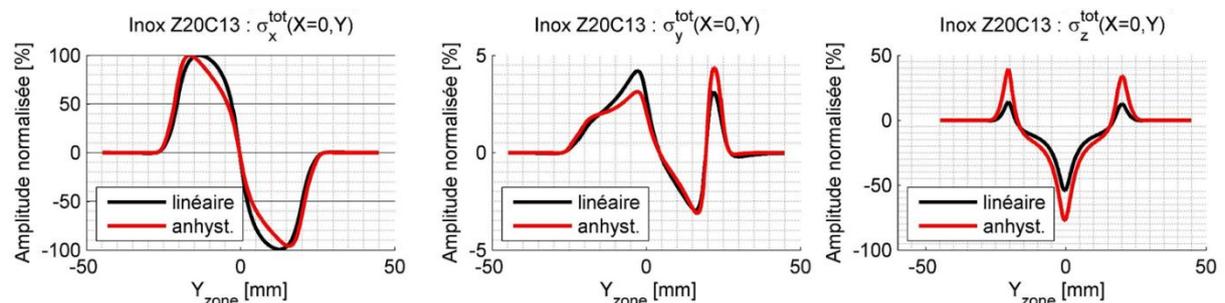


Figure 4.85 : Variations selon X_{zone} des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre), σ_z^{tot} (droite) des sources totales de transduction induites par EMAT pour un **acier inoxydable Z20C13** supposé linéaire (noir) ou anhystérique (rouge).

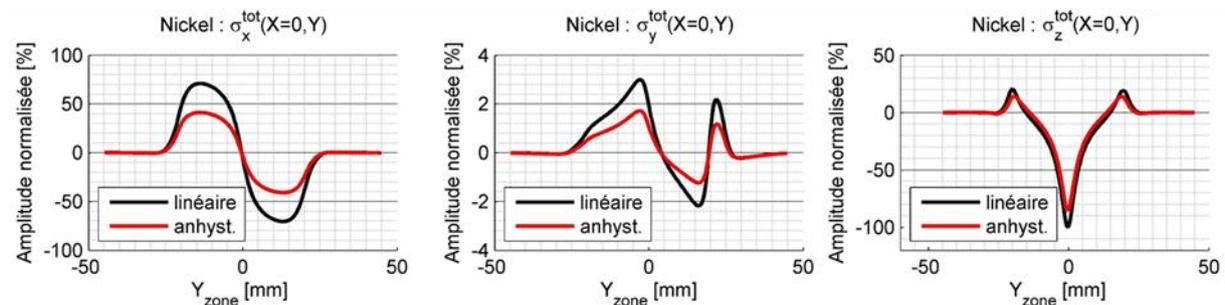


Figure 4.86 : Variations selon X_{zone} des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre), σ_z^{tot} (droite) des sources totales de transduction induites par EMAT pour un **nickel recuit** supposé linéaire (noir) ou anhystérique (rouge).

Sur chaque figure, l'amplitude des variations spatiales des trois composantes vectorielles de la source surfacique totale (somme des sources électromagnétiques, magnétostrictives et de traction magnétique) est normalisée par rapport à l'amplitude de la composante vectorielle d'amplitude maximale. Pour rappel, les cartographies selon (X_{zone}, Y_{zone}) d'amplitude des sources surfaciques induites par ce traducteur sous l'approximation d'un milieu magnétique linéaire sont illustrées [Figure 4.61](#) - [Figure 4.63](#) du paragraphe 4.2.2. Par argument de symétrie de la configuration, les variations spatiales des sources doivent être symétriques. Cet argument se retrouve sur les variations symétriques selon Y_{zone} des composantes σ_x^{tot} et σ_z^{tot} , mais implique théoriquement l'annulation (totale) de la composante σ_y^{tot} selon Y_{zone} pour une position $X_{zone} = 0$ au centre du traducteur. Les faibles variations asymétriques des sources σ_y^{tot} des figures précédentes proviennent en réalité de la légère dissymétrie du traducteur au niveau du fil d'entrée de la bobine de l'EMAT ([Figure 4.58](#)), sans pour autant que les variations engendrées n'aient d'influence forte sur la symétrie spatiale globale des sources de transduction induites.

On remarque sur les figures [Figure 4.84](#) - [Figure 4.86](#) que la prise en compte d'une loi anhystérétique d'aimantation dans la définition du point de fonctionnement statique du milieu modifie les variations spatiales des sources surfaciques induites. En effet, l'amplitude des sources surfaciques tangentielles ($\sigma_x^{tot}, \sigma_y^{tot}$) est plus faible dans le cas anhystérétique que dans le cas linéaire pour les trois matériaux testés. Pour la composante normale σ_z^{tot} , l'amplitude (absolue) est augmentée dans le cas anhystérétique par rapport au cas linéaire pour les deux échantillons d'aciers inoxydables, mais est diminuée pour le nickel recuit. De plus, l'amplitude maximale relative des composantes tangentielles et normales des sources est modifiée par la prise en compte du comportement magnétique anhystérétique, qui se traduit par une modification de l'amplitude relative des ondes ultrasonores transversales et longitudinales. Cette différence d'amplitude relative selon que les propriétés du milieu sont considérées linéaires ou anhystérétiques est discuté dans le Chapitre 5 qui détaille les essais de caractérisation menés au CETIM dans le but de valider les éléments théoriques développés.

Les modèles théoriques de lois macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction étudiés dans le Chapitre 2 sont exploités dans les paragraphes suivants pour étudier l'influence des paramètres caractéristiques de ces comportements non-linéaires, ainsi que d'un état de contraintes mécaniques (qui influence fortement ces propriétés), sur l'amplitude des sources induites par EMAT. Cette étude permet notamment de prendre en compte une marge d'erreur sur l'estimation des paramètres décrivant les propriétés magnétiques et magnéto-élastiques du milieu inspecté, et de propager cette erreur sur l'amplitude des sources. Ceci offre la possibilité de définir des intervalles de confiance ou d'envisager de caractériser un matériau par un processus d'inversion basé sur la simulation du problème direct.

4.3.2.3. *Variations des paramètres anhystérétiques (M_s, χ_0, λ_s) du MME simplifié*

Ce paragraphe se concentre sur l'influence des paramètres décrivant le modèle de comportement magnéto-élastique couplé exploité dans le modèle de transduction par EMAT sur l'amplitude des sources surfaciques induites en milieux ferromagnétiques.

Comme décrit dans le Chapitre 2, les modèles SJA et MME simplifié reposent sur différents paramètres d'entrée afin de prédire les lois anhystérétiques d'aimantation et de magnétostriction d'un milieu ferromagnétique. Le MME simplifié est préféré pour cette étude paramétrique car il exploite un nombre réduit de paramètres 'physiques' pour caractériser le comportement magnéto-élastique du milieu inspecté, à savoir sa susceptibilité anhystérétique initiale χ_0 , l'aimantation à saturation M_s et la

magnétostriction à saturation λ_s . Ainsi, en considérant un intervalle d'erreur sur l'estimation d'un ou plusieurs paramètres du MME simplifié pour un milieu ferromagnétique, le modèle de transduction décrit dans ce manuscrit permet de quantifier l'influence d'un intervalle d'erreur sur l'estimation d'un ou plusieurs paramètres du MME simplifié pour un milieu ferromagnétique donné sur les prédictions de sources de rayonnement induites par EMAT dans ce milieu. On considère par exemple le cas de l'acier inoxydable AISI 410, dont les paramètres d'entrée du MME simplifié sont listés dans la Section 2.3.5.1 du Chapitre 2. La [Figure 4.87](#) illustre ainsi les variations d'amplitude maximale des composantes (σ_x^{tot} , σ_y^{tot} , σ_z^{tot}) de sources surfaciques totales induites par EMAT dans ce milieu en admettant $\pm 15\%$ d'erreur sur l'estimation des paramètres (M_s, λ_s) d'entrée du MME simplifié. Les cartographies d'amplitude présentées sont centrées autour de l'amplitude de chaque composante vectorielle de source pour les paramètres d'entrée ($M_s = 1,65 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-1}, \lambda_s = 3,2 \cdot 10^{-5}$) qui correspondent aux valeurs référencées dans la Section 2.3.5.1 pour l'acier inoxydable AISI 410.

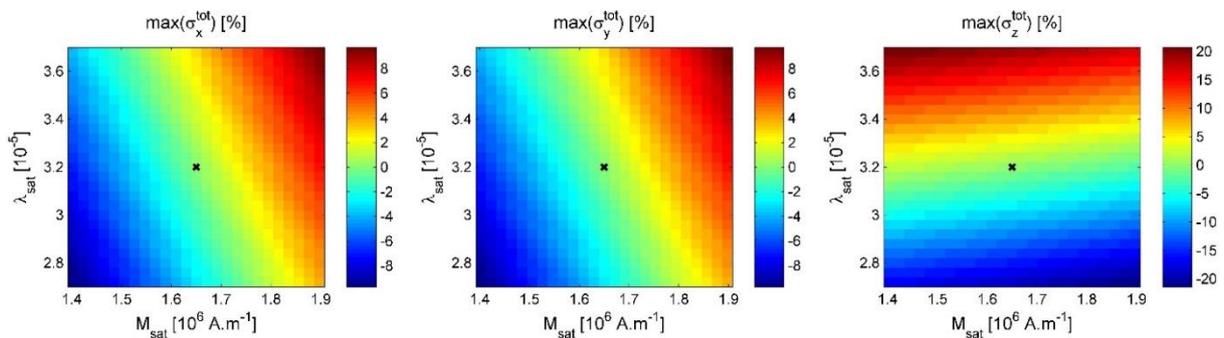


Figure 4.87 : Cartographies de variations d'amplitude maximale des sources σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre) et σ_z^{tot} (droite) en fonction des paramètres d'entrée (M_{sat}, λ_{sat}). Les croix noires représentent les paramètres de l'acier inoxydable AISI 410.

Cette figure indique ainsi qu'un écart de $\pm 15\%$ sur les valeurs des paramètres (M_s, λ_s) de cet échantillon d'acier inoxydable résulte en un écart de $\pm 10\%$ sur l'amplitude maximale des composantes tangentielles ($\sigma_x^{tot}, \sigma_y^{tot}$) de sources de rayonnement ultrasonore induites par la configuration d'EMAT étudiée, avec des variations davantage marquées sur l'amplitude de la composante normale σ_z^{tot} , de l'ordre de $\pm 20\%$. Naturellement, les résultats présentés sont propres à la configuration de bobine et d'aimant permanent du traducteur EMAT considéré. Ils permettent d'envisager la mise en place de méta-modèles et de modèles d'inversion permettant de caractériser les paramètres d'entrée d'un milieu ferromagnétique à partir de mesures ultrasonores par EMAT en exploitant la simulation du problème direct (influence de ces paramètres sur les sources de rayonnement d'un EMAT) présenté dans ce paragraphe. Selon la même idée, le paragraphe suivant décrit l'influence d'un état de contraintes mécaniques sur l'amplitude des sources surfaciques de transduction ultrasonore induites par EMAT dans un milieu ferromagnétique.

4.3.2.4. Effets des contraintes mécaniques sur les sources de rayonnement ultrasonore

La sonde EMAT 'bi-onde' du CETIM a été développée pour la mesure de contraintes mécaniques de serrage d'assemblages vis-écrous en exploitant l'effet acousto-élastique (influence des contraintes mécaniques sur les vitesses de propagation et donc sur les temps de vol des ondes L et T). La méthode développée permet une estimation sans état de référence de l'état de serrage d'un boulon pendant une opération de maintenance. Pour simuler avec précision les performances de la sonde 'bi-onde', l'influence des contraintes mécaniques sur les mécanismes de transduction d'un EMAT doit être étudiée.

La présence de contraintes mécaniques modifie fortement les propriétés macroscopiques anhystériques d'aimantation et de magnétostriction d'un milieu ferromagnétique, et cet effet se répercute naturellement sur les sources créées par un EMAT et donc sur son rayonnement ultrasonore. Ainsi, en injectant un modèle de comportement magnéto-élastique couplé qui décrit la dépendance de ces propriétés avec un état de contraintes mécaniques, le modèle formel de transduction permet d'étudier directement les variations d'amplitude des sources en fonction du niveau de contraintes mécaniques (appliquées ou résiduelles). Le Chapitre 2 a mis en avant deux approches différentes pour modéliser les effets d'une contrainte mécanique sur le comportement magnéto-élastique d'un milieu : l'approche phénoménologique de Sablik-Jiles-Atherton (SJA) [Jiles_1995] et le modèle multi-échelle (MME) simplifié de Daniel *et al.* [Daniel-et-al_2015]. Ces deux modèles décrivent les effets magnéto-mécaniques par l'intermédiaire de paramètres d'entrée différents. Le modèle SJA est restreint à l'étude d'un état de contraintes mécaniques uni-axiales, tandis que le MME de Daniel *et al.* rend compte des effets associés à des états de contraintes multi-axiales.

Dans le cas uni-axial, on peut donc comparer les prédictions de sources réalisées en tenant compte de lois de comportements magnétiques et magnétostrictives issues du modèle SJA ou du MME simplifié. L'influence d'un état de contraintes mécaniques uni-axiales sur les variations spatiales des sources de transduction induites par EMAT est illustrée sur les Figure 4.88 et Figure 4.89 dans le cas d'un échantillon d'acier inoxydable AISI 410 selon ces deux modèles de comportement magnéto-mécanique. Comme pour les figures Figure 4.84 - Figure 4.86, les amplitudes des trois composantes vectorielles ($\sigma_x^{tot}, \sigma_y^{tot}, \sigma_z^{tot}$) de la source surfacique totale sont normalisées par rapport à l'amplitude de la composante vectorielle d'amplitude maximale (composante tangentielle σ_x^{tot} dans cette configuration).

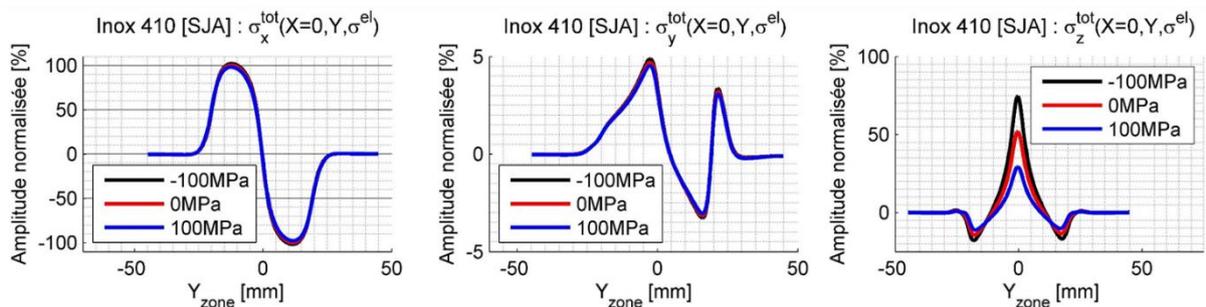


Figure 4.88 : Influence des contraintes mécaniques uni-axiales sur les variations spatiales des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre) et σ_z^{tot} (droite) de sources induites par EMAT à la surface d'un acier inoxydable AISI 410 selon le modèle SJA.

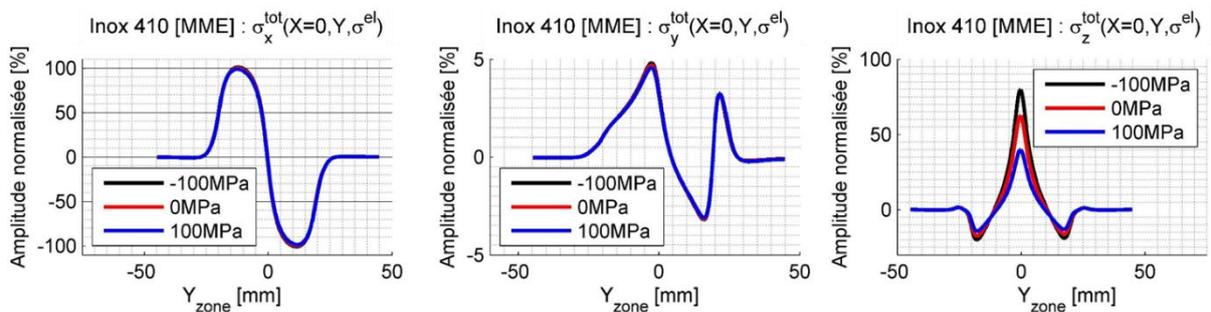


Figure 4.89 : Influence des contraintes mécaniques uni-axiales sur les variations spatiales des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre) et σ_z^{tot} (droite) de sources induites par EMAT à la surface d'un acier inox AISI 410 selon le MME simplifié.

On remarque sur ces figures que les contraintes mécaniques uni-axiales influencent fortement les sources normales de transduction induites dans cette configuration d'EMAT, les écarts sur les composantes tangentielle des sources étant par contre très faibles. Ainsi, les amplitudes relatives des sources normales et tangentielles sont modifiées sous l'effet des contraintes mécaniques, ce qui se traduit par des écarts notables d'amplitudes relatives des ondes L et T rayonnées selon l'état de contraintes du milieu inspecté. Les prédictions de sources obtenues en utilisant les lois de comportement magnéto-mécanique issues du modèle SJA et du MME simplifié sont presque identiques sur ces figures, ce qui n'est pas étonnant étant donné que les courbes d'aimantation et de magnétostriction anhystériques prédites par ces deux modèles sont très proches pour ce matériau (Section 2.3.5 du Chapitre 2). Pour mesurer quantitativement les écarts de prédictions selon la prise en compte du modèle SJA ou du MME simplifié sur une plus large gamme de contraintes mécaniques, la [Figure 4.90](#) compare les deux types de prédiction en représentant les variations d'amplitude maximale des sources tangentielle σ_x^{tot} et normale σ_z^{tot} en fonction de contraintes mécaniques uni-axiales σ_{zz}^{el} d'amplitude comprises entre -100MPa (compression) et 100MPa (traction), toujours dans un échantillon d'acier inoxydable AISI 410. Les variations d'amplitude des sources sont centrées par rapport à l'amplitude maximale de chaque composante de source calculée en l'absence de contrainte mécanique (constituant un état de référence).

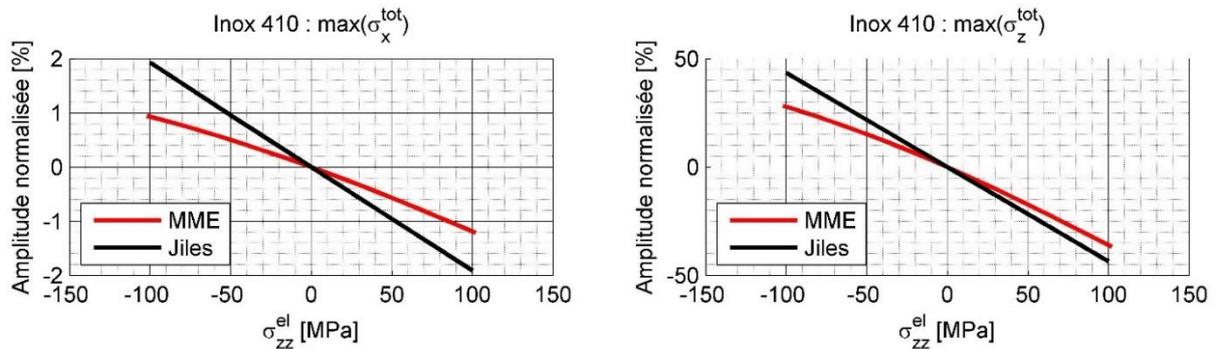


Figure 4.90 : Variations d'amplitude maximale des sources tangentielle σ_x^{tot} (gauche) et normale σ_z^{tot} (droite) dans le cas d'un acier inoxydable AISI 410 en fonction des contraintes uni-axiales σ_{zz}^{el} et selon le modèle SJA (noir) ou MME (rouge).

Les deux modèles de comportement magnéto-mécanique prédisent une influence (quasi-linéaire) similaire d'un état de contraintes mécaniques uni-axiales sur les sources tangentielles et normales de rayonnement ultrasonore induites par EMAT. Comme discuté à propos des résultats des [Figure 4.88](#) et [Figure 4.89](#), les variations des sources selon le niveau de contraintes sont davantage marquées sur la composante normale σ_z^{tot} , avec des écarts de $\pm 50\%$ par rapport à son amplitude en milieu non-contraint, que sur les composantes tangentielles σ_x^{tot} , pour lesquels les écarts sont environ de $\pm 2\%$ d'après les deux modèles de comportement. Cette analyse indique ainsi que l'amplitude des ondes L est beaucoup plus sensible à un état de contraintes mécaniques que celle des ondes T, cette sensibilité restant relative à cette configuration spécifique d'EMAT et à cet exemple spécifique d'échantillon ferromagnétique.

Levant la restriction d'uni-axialité des contraintes mécaniques de l'approche phénoménologique de Jiles, le modèle multi-échelle simplifié de Daniel *et al.* permet de prendre en compte dans le modèle de transduction EMAT une dépendance avec un état de contraintes multi-axiales. Les [Figure 4.91](#) et [Figure 4.92](#) cartographient les variations d'amplitude maximale des différentes composantes des sources totales σ^{tot} , induites par l'EMAT à la surface d'un échantillon d'acier inoxydable AISI 410, en fonction de contraintes bi-axiales contenues dans les plans parallèle ($\sigma_{xx}^{\text{el}}, \sigma_{yy}^{\text{el}}$) et perpendiculaire ($\sigma_{xx}^{\text{el}}, \sigma_{zz}^{\text{el}}$) à la

surface inspectée, d'amplitudes comprises entre -150MPa (compression) et 150MPa (traction). Ces figures sont centrées par rapport à l'amplitude maximale de chaque composante vectorielle de sources en l'absence de contraintes (état de référence). Ces prédictions confirment la tendance observée précédemment dans le cas uni-axial, avec des variations d'amplitude plus importantes sur les sources normales (donc sur l'amplitude des ondes L) que sur les sources tangentielles (donc sur l'amplitude des ondes T) pour la configuration EMAT étudiée.

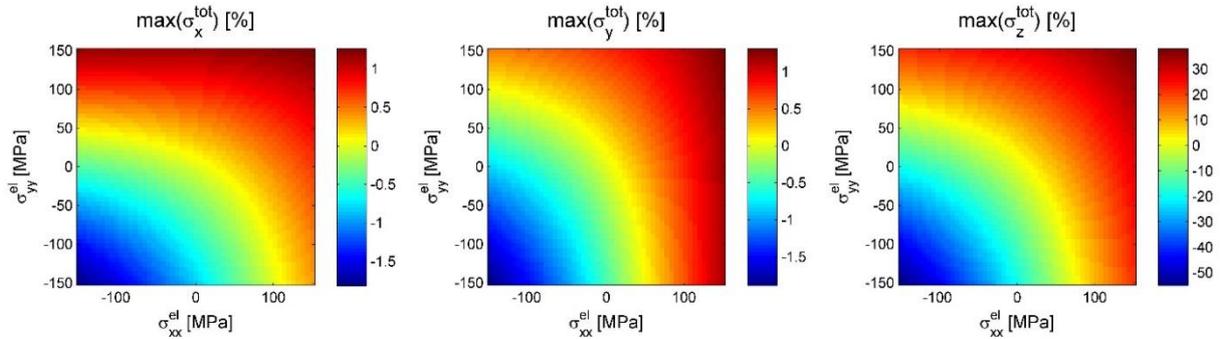


Figure 4.91 : Cartographie des variations d'amplitude maximale des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre) et σ_z^{tot} (droite) de sources induites par EMAT à la surface d'un acier inoxydable AISI 410 en fonction de contraintes bi-axiales (σ_{xx}^{el} , σ_{yy}^{el}).

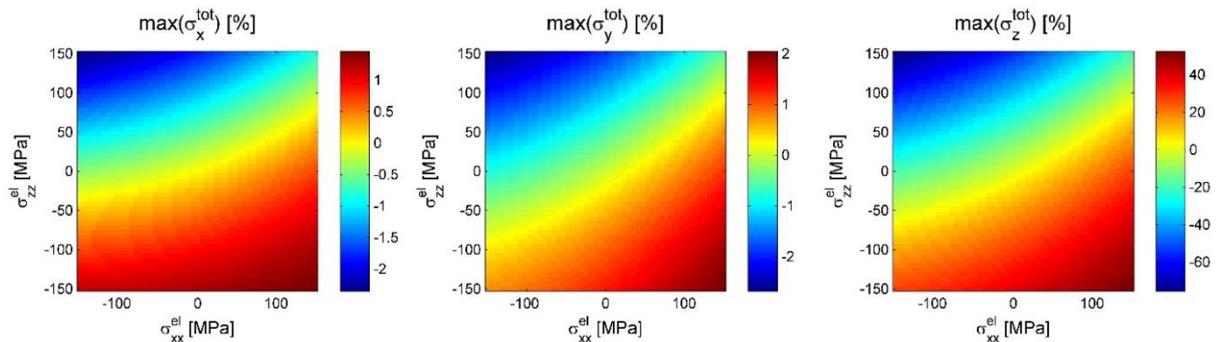


Figure 4.92 : Cartographie des variations d'amplitude maximale des composantes σ_x^{tot} (gauche), σ_y^{tot} (centre) et σ_z^{tot} (droite) de sources induites par EMAT à la surface d'un acier inoxydable AISI 410 en fonction de contraintes bi-axiales (σ_{xx}^{el} , σ_{zz}^{el}).

Ces cartographies illustrent les effets d'anisotropie induits en présence de contraintes mécaniques (Chapitre 1). Dans cette configuration EMAT (avec un aimant polarisé dans la direction normale), ces effets sont visibles sur la Figure 4.92 dans le plan de contraintes (σ_{xx}^{el} , σ_{zz}^{el}).

Ces prédictions permettent d'envisager des techniques d'inversion pour remonter à l'état de contraintes mécaniques en exploitant la sensibilité de l'amplitude des sources de transduction d'un EMAT à ces effets locaux, sensibilité pouvant être combinée au fait que la propagation elle-même des ondes rayonnées dans le milieu contraint diffère de celle en milieu non-contraint. Cet effet (acousto-élastique) non-local au traducteur ajoute aux variations d'amplitude de sources des variations de temps de vol que mettent les ondes élastiques rayonnées à atteindre un récepteur placé en une autre position, ou à revenir après s'être réfléchies sur une frontière vers le même EMAT fonctionnant comme récepteur. Une thèse a débuté sur ce sujet en collaboration entre le CEA LIST et le GeePs, dont les enjeux industriels sont importants, afin de développer une méthode d'inversion des effets magnéto-élastiques locaux et acousto-élastiques non-locaux mesurés in situ, basée sur des résultats de simulation (model-based inversion dans la terminologie anglo-saxonne).

Conclusion du chapitre

Les résultats de simulation du modèle formel de sources électromagnéto-élastiques de transduction ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques sont illustrés et analysés dans ce chapitre. Ces résultats exploitent un couplage faible des modules de calcul électromagnétique (CIVA CF) et ultrasonore (CIVA US) du logiciel CIVA de simulation de méthodes de CND. Les paramètres d'entrée des outils numériques développés sont détaillés ; ils concernent les paramètres de conception (dimensionnement, positionnement et géométrie des éléments constitutifs du traducteur) et d'excitation (intensité et fréquence du courant électrique injecté dans la bobine, et intensité de polarisation magnétique de l'aimant permanent) de la configuration EMAT étudiée, ainsi que les propriétés magnétiques, magnétostrictives, et élastiques du milieu ferromagnétique inspecté. Une fois la configuration d'inspection renseignée, les sources surfaciques équivalentes de l'ensemble des mécanismes (volumiques et surfaciques) de rayonnement ultrasonore sont simulées et le poids relatif de chaque phénomène par rapport à la source surfacique totale induite par l'EMAT est mis en lumière selon la composante de source et selon le milieu inspecté. Le rayonnement ultrasonore en ondes longitudinales et transversales généré par ces sources est ensuite prédit, en considérant les sources individuellement puis collectivement, dans le but d'observer les régimes de prédominance de chaque mécanisme selon le milieu inspecté et selon la polarisation d'onde élastique rayonnée dans ce milieu. Cette étude insiste sur la nécessité de développer un modèle de transduction par EMAT qui prend en compte l'ensemble des sources électromagnétiques et magnétostrictives induites, chaque phénomène pouvant présenter une influence notable selon la configuration d'inspection concernée. Pour illustrer l'aide à la conception de traducteurs EMAT apportée par les outils théoriques développés dans la thèse, différentes études paramétriques sur les performances ultrasonores d'un EMAT en milieux ferromagnétiques sont menées. Elles décrivent les variations d'amplitude des sources équivalentes surfaciques induites par EMAT en fonction des caractéristiques physiques de l'excitation électromagnétique du traducteur et en fonction des propriétés magnéto-élastiques, linéaires ou anhystérétiques, du milieu inspecté. Cette étude permet enfin d'analyser l'influence d'un état de contraintes mécaniques (résiduelles ou appliquées), éventuellement multi-axiales, sur les mécanismes de transduction ultrasonore induits par EMAT. Les outils numériques présentés peuvent être facilement mis à profit dans le but d'optimiser les performances de transduction d'un EMAT selon l'application d'inspection ultrasonore visée, et permettent d'envisager de nouvelles perspectives d'applications industrielles comme la caractérisation *in situ* des contraintes mécaniques d'un milieu ferromagnétique par des mesures EMAT, par l'intermédiaire de méthodes d'inversion basées sur la simulation du problème direct décrite dans ce manuscrit.

Les essais expérimentaux menés au CETIM pour la caractérisation du rayonnement ultrasonore d'un EMAT en milieu ferromagnétique sont décrits dans le chapitre suivant. Les différentes mesures physiques effectuées ont pour objectif la validation par l'expérience du modèle théorique formel de transduction par EMAT détaillé dans ce manuscrit.

CHAPITRE 5

CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT ULTRASONORE D'UN EMAT EN MILIEU FERROMAGNETIQUE

Les mesures physiques effectuées dans le but de valider par l'expérience le modèle de transduction ultrasonore par EMAT en milieu ferromagnétique développé dans ce manuscrit sont présentées dans ce chapitre. Les essais de caractérisation ont été menés au CETIM de Senlis. La section 5.1 précise les différents paramètres de conception de l'EMAT « didactique » étudié, et décrit une méthode de mesure de courant impulsionnel basée sur le principe de la bobine de Rogowski. À partir de ces paramètres de conception et d'excitation, le champ magnétique dynamique rayonné par la bobine de l'EMAT est simulé dans le module CIVA CF, et les résultats de simulation obtenus sont comparés à des mesures de flux magnétique dynamique induit dans l'entrefer (espace d'air séparant le traducteur du milieu inspecté) dans la section 5.2. Enfin, les mesures de champ ultrasonore transmis en fond de pièce ferromagnétique par EMAT sont présentées dans la section 5.3. Ces résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les résultats de simulation décrits dans le Chapitre 4 ; ils contribuent à la validation du modèle développé. Le synoptique des mesures physiques décrites dans ce chapitre est donné sur la [Figure 5.93](#).

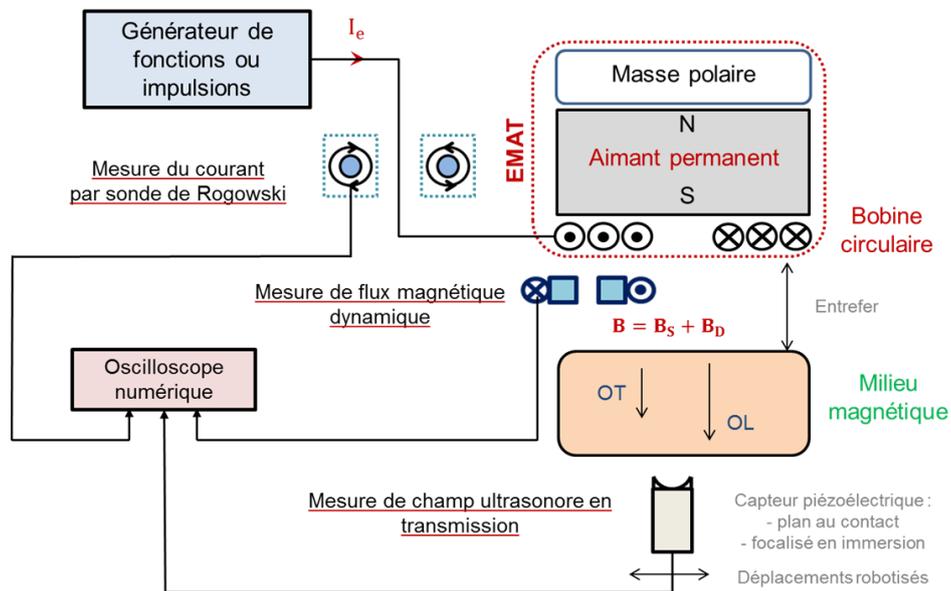


Figure 5.93 : Synoptique des mesures physiques menées au CETIM dans le but de caractériser le rayonnement ultrasonore d'un EMAT en milieu ferromagnétique.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 5	
Caractérisation expérimentale du comportement ultrasonore d'un EMAT en milieu ferromagnétique	175
5.1. Caractérisation des paramètres de conception et d'excitation de l'EMAT étudié.....	177
5.1.1. Paramètres de conception de l'EMAT didactique étudié	177
5.1.2. Mesure du courant impulsionnel injecté dans la bobine de l'EMAT	178
5.2. Mesure du champ magnétique dynamique rayonné par la bobine de l'EMAT et comparaison aux prédictions numériques de CIVA CF	181
5.3. Mesures du champ ultrasonore transmis par EMAT en milieu ferromagnétique.....	185
5.3.1. Montage expérimental pour la mesure du champ ultrasonore en transmission par un transducteur piézoélectrique focalisé en immersion	186
5.3.2. Étude de l'influence du signal électrique d'excitation sur le rayonnement ultrasonore transmis par EMAT	190
5.3.3. Comparaisons simulation-expérience : A-scan et C-scan en fond de pièce	194
Conclusion du chapitre.....	199

5.1. Caractérisation des paramètres de conception et d'excitation de l'EMAT étudié

Dans cette section, les différents paramètres de conception de l'EMAT étudié sont introduits dans le paragraphe 5.1.1. La géométrie d'EMAT considérée est proche de celle de la sonde EMAT bi-onde développée par le CETIM. Ensuite, comme décrit dans le Chapitre 4, une donnée d'entrée nécessaire au module de simulation CIVA CF pour le calcul de l'excitation magnétique dynamique rayonnée dans la pièce inspectée est le signal temporel de courant électrique injecté dans la bobine de l'EMAT. Pour faciliter le pilotage de ce courant lors de mesures ultrasonores et permettre la mesure d'un courant impulsionnel de forte intensité et hautes fréquences (comme celui délivré par le système d'émission de la sonde bi-onde), une sonde de Rogowski a été utilisée. Le principe et les résultats de mesure de cette sonde de courant sont présentés dans la section 5.1.2. La mesure du champ magnétique statique induit par la superposition des deux aimants permanents de l'EMAT n'est pas présentée dans ce document ; ce champ a été estimé lors de précédentes caractérisations pendant la thèse de Rouge [Rouge_2013] (induction statique normale de 1.33T au centre de la face active du traducteur). De même, les lois anhystériques de comportements magnétique et magnétostrictif du milieu ferromagnétique testé ont été mesurées par Rouge en collaboration avec le LMT Cachan ; ces courbes sont discutées dans le Chapitre 1. Ces informations préalablement déterminées, cette section complète ainsi la description de l'ensemble des paramètres de conception et d'excitation de l'EMAT didactique nécessaires pour la simulation dans le logiciel CIVA de ses performances ultrasonores à l'aide du modèle théorique de transduction détaillé dans le Chapitre 3 de ce manuscrit.

5.1.1. Paramètres de conception de l'EMAT didactique étudié

Pour le développement et la validation des modèles théoriques de transduction développés pendant la thèse, un traducteur EMAT a été fabriqué au CETIM de Senlis. Ce traducteur, dont la conception se rapproche de celle de la sonde 'bi-onde' développée antérieurement par le CETIM, sera qualifié de 'didactique' dans la suite de ce chapitre. Sa conception est volontairement simplifiée dans le but de facilement accéder et modifier ses paramètres caractéristiques pour en observer l'influence directe sur les performances du traducteur selon le milieu inspecté. Les principaux éléments constitutifs de l'EMAT didactique étudié sont : une bobine spirale circulaire, deux aimants permanents cylindriques d'induction normale, et une masse polaire.



Figure 5.94 : EMAT didactique : Éléments constitutifs (gauche) ; Vue de profil (centre) ; Vue de dessus (droite).

La masse polaire utilisée dans la conception de l'EMAT est constituée d'un milieu ferromagnétique (acier doux) dont le rôle est d'orienter les lignes de champ magnétique sortant de la face arrière du bloc d'aimants permanents afin d'optimiser l'intensité de l'induction statique délivrée sur la face active du traducteur au regard du milieu inspecté. Le détail des différents paramètres de conception de la géométrie EMAT étudiée est donné dans la [Table 5.9](#).

Bobine spirale	Masse polaire	2 aimants permanents
Diamètre externe : 40 mm Diamètre interne : 3 mm Nombre de spires : 13 Section fil : 0,34 mm ² Diamètre ext. fil multibrin : 1,23 mm	Cylindre en acier doux Diamètre : 50 mm Hauteur : 45 mm	Cylindres en néodyme-fer bore Diamètre : 50 mm Hauteur : 2 x 6 mm Induction normale : 1,33 T

Table 5.9 : Description des paramètres de conception de l'EMAT didactique.

De nombreuses pistes d'amélioration de ce traducteur sont naturellement envisageables dans le but d'en optimiser les performances ultrasonores et assurer leur reproductibilité. Ces améliorations pourraient par exemple porter sur l'ajout d'une plaque de cuivre entre la bobine et le premier aimant permanent (pour empêcher la production d'ondes ultrasonores dans le corps de l'aimant grâce à ce blindage et optimiser l'intensité d'excitation magnétique dynamique rayonnée), sur une meilleure précision de la symétrie de la bobine inductrice et de son intégrité géométrique après usages et démontages répétés, et notamment en évitant que le fil conducteur de sortie ne traverse la face active du traducteur. Néanmoins, la configuration simplifiée étudiée dans ces essais laisse chaque élément de conception du traducteur accessible et modifiable si besoin. Elle permet ainsi de focaliser l'étude expérimentale sur les mécanismes fondamentaux mis en jeu lors d'un contrôle par EMAT.

Les paramètres de conception de l'EMAT didactique ayant été introduits, le paragraphe suivant traite de la mesure du courant électrique injecté dans la bobine qui le compose.

5.1.2. Mesure du courant impulsionnel injecté dans la bobine de l'EMAT

La simulation par le module CIVA CF du champ magnétique dynamique rayonné par la bobine de l'EMAT nécessite la connaissance du courant électrique qui l'alimente. Le système permettant la mesure de courant doit être le moins intrusif possible pour faciliter son utilisation pratique, mais surtout doit permettre la mesure de courants impulsionnels de haute intensité et hautes fréquences, comme celui délivré par le système d'émission du CETIM pour l'alimentation de la sonde bi-onde. Cependant, les méthodes conventionnelles de mesure de courant ne répondent pas à ces problématiques expérimentales. Par exemple, la présence d'un noyau de ferrite dans les pinces ampèremétriques classiques génère des comportements non-linéaires (phénomènes de saturation et de résonance) perturbant la mesure dans les gammes d'intensité et de fréquence souhaitées. Dans cette optique, une méthode non conventionnelle de mesure de courant impulsionnel a été mise à profit dans ces travaux de caractérisations expérimentales, basée sur le principe de la bobine de Rogowski. Cette sonde de courant est formée d'un fil conducteur enroulé en spires et dont le retour se fait par le centre de ces spires, ce qui forme un enroulement secondaire (système ouvert) permettant de mesurer un courant sans contact galvanique. Le principe de cette méthode de mesure (peu connue bien que très ancienne) est illustré sur la [Figure 5.95](#).

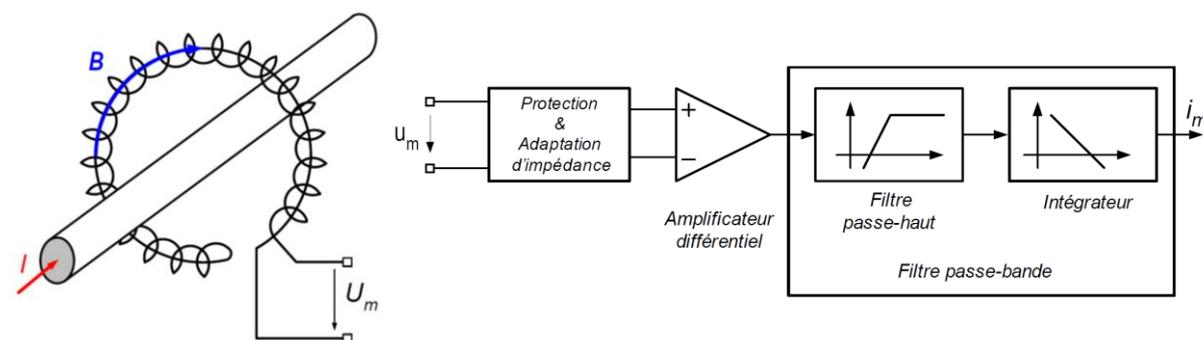


Figure 5.95 : Principe de la mesure de courant par sonde de Rogowski.

La tension U_m mesurée aux bornes de la sonde de Rogowski correspond à la tension induite par la variation du flux mutuel entre les enroulements primaires (le fil conducteur traversé par le courant $I(t)$ à mesurer) et secondaire (la bobine de Rogowski mesurant les variations de tension induites par le flux magnétique rayonné par la circulation du courant $I(t)$ dans le fil conducteur). Cette tension est directement proportionnelle à la dérivée temporelle du courant recherché, selon la relation : $U_m(t) = \partial_t \phi(t) \propto \partial_t I(t)$, avec ϕ le flux magnétique induit par le courant $I(t)$. Il est alors nécessaire d'intégrer cette tension pour remonter au courant injecté. L'intégration est effectuée en pratique à l'aide d'un intégrateur couplé à un filtre passe-haut, dont le but est de découpler les offsets du signal de mesure en amont de l'intégrateur, comme illustré sur la Figure 5.95. Le principe de mesure de la sonde de Rogowski est relativement simple ; c'est pourquoi différentes sondes de Rogowski 'artisanales' ont dans un premier temps été conçues au CETIM (Figure 5.96) pour s'assurer de la faisabilité de mesure d'un courant impulsionnel haute intensité et hautes fréquences par cette méthode.

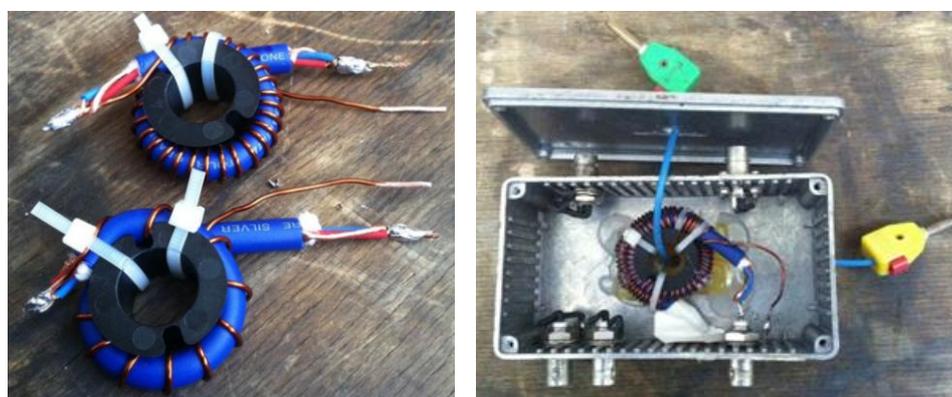


Figure 5.96 : Sondes de Rogowski fabriquées au CETIM avec différents enroulements secondaires.

La mise en œuvre du principe de sonde de Rogowski a permis d'observer directement l'impact de chacun des éléments qui composent ce dispositif de mesure de courant. Par exemple, différents enroulements ont été conçus avec des nombres de spires adaptés afin de maîtriser la fréquence de résonance des sondes construites (sur la Figure 5.96, la bobine avec un plus faible nombre de spire résonne vers 35.5 MHz tandis que la seconde bobine avec un nombre de spires plus important présente une fréquence de résonance de l'ordre de 17.3 MHz). Les premiers résultats obtenus ont démontré la faisabilité de la mesure dans les gammes d'intensité et de fréquence recherchées, tout en assurant un comportement linéaire idéal. Cependant, des difficultés ont été rencontrées dans la phase d'étalonnage des sondes artisanales, conduisant à de fortes incertitudes sur la mesure précise de l'intensité. Une sonde de Rogowski commerciale, la RCWT (Rogowski Current Waveform Transducer) Mini HF6, a finalement

été commandée par le CETIM. Cette sonde est commercialisée par PEM (Power Electronic Measurements), société spécialisée dans la conception de capteurs de courant large bande basés sur le principe de l'enroulement de Rogowski. Elle permet la mesure de courants impulsionnels pouvant atteindre 1.2 kA d'intensité pic, avec une sensibilité de 5.0 mV/A et une bande passante à -3 dB de [6 Hz - 30 MHz]. Ses caractéristiques complètes sont disponibles sur le site du constructeur [PEM_CWT]. La sonde RCWT Mini HF6 et le système d'émission du CETIM sont illustrés sur la [Figure 5.97](#).



Figure 5.97 : Sonde RCWT Mini HF6 (gauche) et son utilisation sur le système d'émission du CETIM (droite).

L'enroulement secondaire de la sonde RCWT est intégré dans une boucle flexible (en jaune sur la [Figure 5.97](#)) qui s'ouvre et se referme simplement à l'aide d'un clip autour du fil conducteur primaire, ce qui facilite la mesure de courant dans des configurations potentiellement contraignantes. La sonde est calibrée avec une précision de $\pm 0.2\%$ avec le fil conducteur (traversé par le courant à mesurer) placé au centre de la boucle de Rogowski, avec des variations typiques de $\pm 2\%$ selon le décentrage du fil conducteur dans cette boucle. Le signal de courant électrique mesuré par la boucle de courant est ensuite amplifié, filtré, puis intégré électroniquement dans le boîtier de la sonde.

L'utilisation d'une telle sonde est particulièrement adaptée à la mesure du courant délivré le système d'émission de la sonde EMAT bi-onde du CETIM, les caractéristiques physiques de ce courant rendant inapplicables les méthodes de mesure conventionnelles. Le système d'émission de la sonde EMAT bi-onde du CETIM est un générateur d'impulsions qui délivre un courant impulsionnel hautes fréquences de très forte intensité, par salves successives de décharges de condensateur sous haute tension. Selon les salves d'émission, ce courant ne présente pas exactement la même intensité d'une décharge à la suivante. Un résultat de mesure de ce courant impulsionnel obtenu par la sonde RCWT, moyenné ou non, est donné sur la [Figure 5.98](#) accompagné de son spectre.

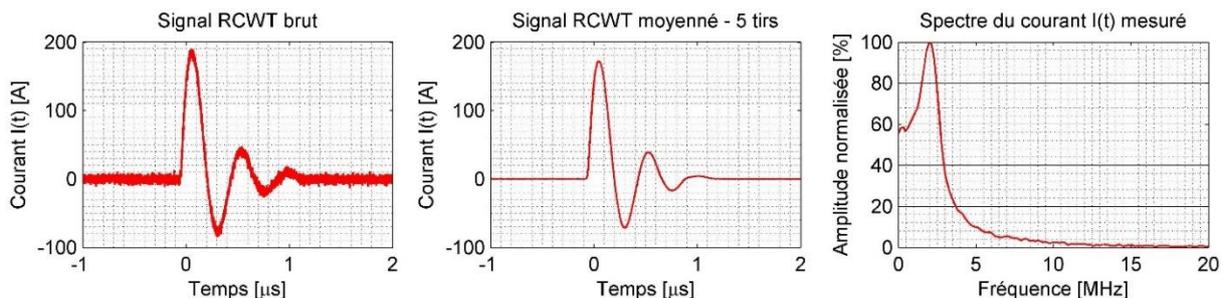


Figure 5.98 : Mesure par la sonde RCWT Mini HF6 du courant impulsionnel délivré par le système d'émission du CETIM. Gauche : Signal temporel brut. Centre : Signal temporel moyenné sur 5 tirs. Droite : Spectre du courant mesuré.

Le signal mesuré est de bonne qualité et très peu bruité (une moyenne sur 5 tirs est utilisée). Le bilan des mesures électriques indique une intensité de courant I_e comprise entre 165 A et 195 A selon les salves d'émission, avec une valeur moyenne autour de 175 A. La fréquence fondamentale se situe autour de 2 MHz, cette valeur étant indépendante des salves d'émission.

La haute tension délivrée par le système d'émission est également une grandeur physique intéressante à visualiser. En raison de sa forte amplitude, des sondes d'oscilloscope de très haute tension et disposant de diviseurs adéquats ont été utilisées. Ainsi, cette tension a pu être mesurée et son contenu spectral a été analysé et comparé à celui du courant impulsionnel mesuré par la sonde de Rogowski (Figure 5.99).

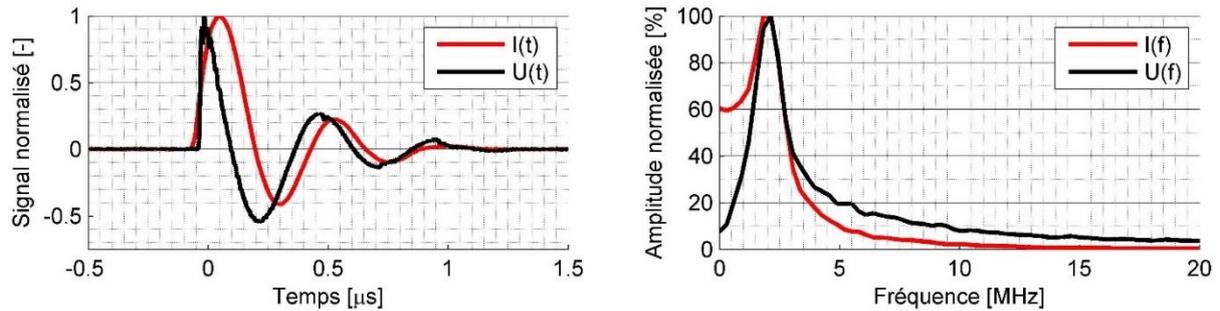


Figure 5.99 : Mesures normalisées du courant (rouge) et de la tension (noir) délivrés par le système d'émission du CETIM.

Les deux signaux mesurés présentent une fréquence centrale autour de 2 MHz ; le temps de montée de 10 % à 90 % du maximum en tension est de l'ordre de $\tau \sim 10$ ns, ce qui donne des indications sur la potentialité de générer des sources de fréquences très élevées. Ces mesures et analyses permettent de quantifier l'efficacité de génération et les caractéristiques physiques de l'excitation électrique délivrée par le système d'émission développé par le CETIM pour l'alimentation de la sonde bi-onde.

Les mesures de courant impulsionnel effectuées déterminent ainsi les différents paramètres d'excitation électrique utilisés pour alimenter le transducteur EMAT étudié, et complètent les données d'entrée nécessaires à la simulation de son rayonnement ultrasonore. La section suivante porte sur la comparaison entre simulation et expérience du champ magnétique dynamique rayonné dans l'air par la bobine de l'EMAT didactique alimentée d'un courant impulsionnel mesuré par la sonde de Rogowski.

5.2. Mesure du champ magnétique dynamique rayonné par la bobine de l'EMAT et comparaison aux prédictions numériques de CIVA CF

La mesure du courant impulsionnel délivré par le système d'émission dans la bobine de l'EMAT par la sonde de Rogowski étant maîtrisée, il est intéressant de mesurer l'induction magnétique dynamique rayonnée par la bobine dans l'entrefer d'air séparant l'EMAT du milieu inspecté, pour comparer ses variations spatiales et temporelles aux résultats de simulation obtenus par CIVA CF. Cette mesure de champ magnétique est effectuée à l'aide d'un capteur de flux magnétique conçu au CETIM (Figure 5.100). Ce capteur est conceptuellement très simple, il est composé de deux spires de fil conducteur enroulées autour d'une gaine plastique. Les fils conducteurs sont torsadés de façon à opposer leurs effets inductifs pour réduire leur sensibilité aux parasites et aux phénomènes résonants liés à son inductance 'self'.

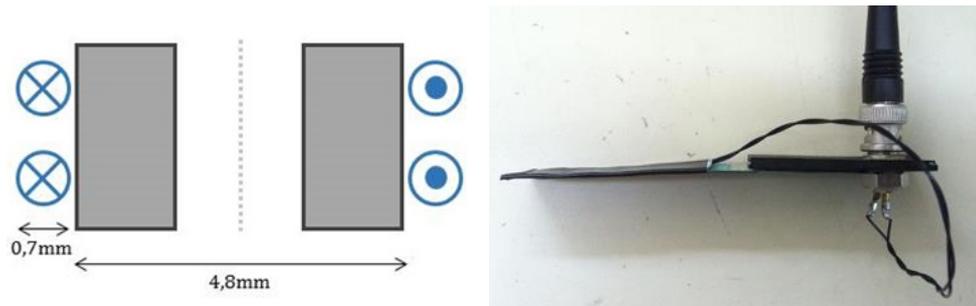


Figure 5.100 : Schéma (gauche) et photo (droite) du capteur de flux magnétique fabriqué au CETIM.

Le signal temporel mesuré par cette sonde obéit à la loi de Faraday. Pour une hauteur donnée dans l'entrefer et une position spatiale connue relative à la bobine de l'EMAT, le capteur mesure la dérivée temporelle du flux magnétique $\Phi(\mathbf{x}, t)$ traversant la surface S formée par les deux spires de mesure en une position \mathbf{x} et un instant t . La surface S étant très petite devant celle de la bobine de l'EMAT ($S = 23.8 \text{ mm}^2$ et $S_{\text{bobine}} = 1260 \text{ mm}^2$), la mesure est directement reliée à la dérivée temporelle de la composante normale (selon z) de l'induction dynamique $\mathbf{B}_d(\mathbf{x}, t)$ rayonnée par la bobine de l'EMAT :

$$\frac{d\Phi(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{d}{dt} \left[\iint_S \mathbf{B}_d(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \right] \approx S \cdot \frac{dB_{dz}(\mathbf{x}, t)}{dt}. \quad (5.1)$$

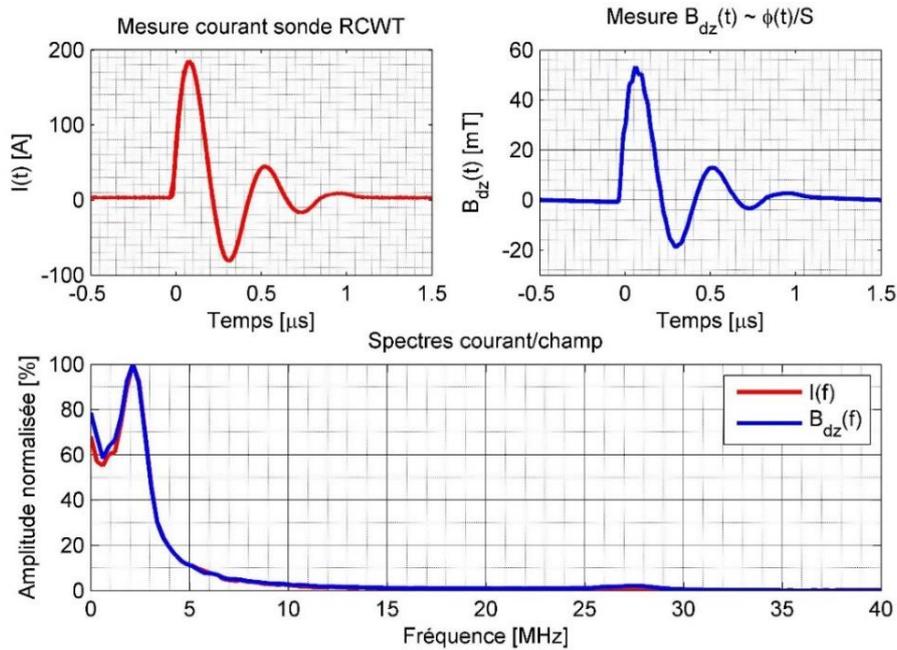
Les mesures du flux magnétique sont réalisées à une hauteur fixe dans l'entrefer, en différentes positions spatiales sous la bobine de l'EMAT alimentée par le courant impulsionnel, mesuré en parallèle par la sonde de Rogowski, pour accéder aux variations spatiales et temporelles de la composante normale de l'induction magnétique dynamique rayonnée. Elles ont été menées dans deux configurations ne différant que par le milieu testé, conducteur amagnétique (aluminium) ou ferromagnétique (acier doux), afin d'observer l'influence des propriétés magnétiques du milieu inspecté sur l'induction magnétique dynamique induite par l'EMAT. Le dispositif de mesures magnétiques est illustré sur la Figure 5.101.



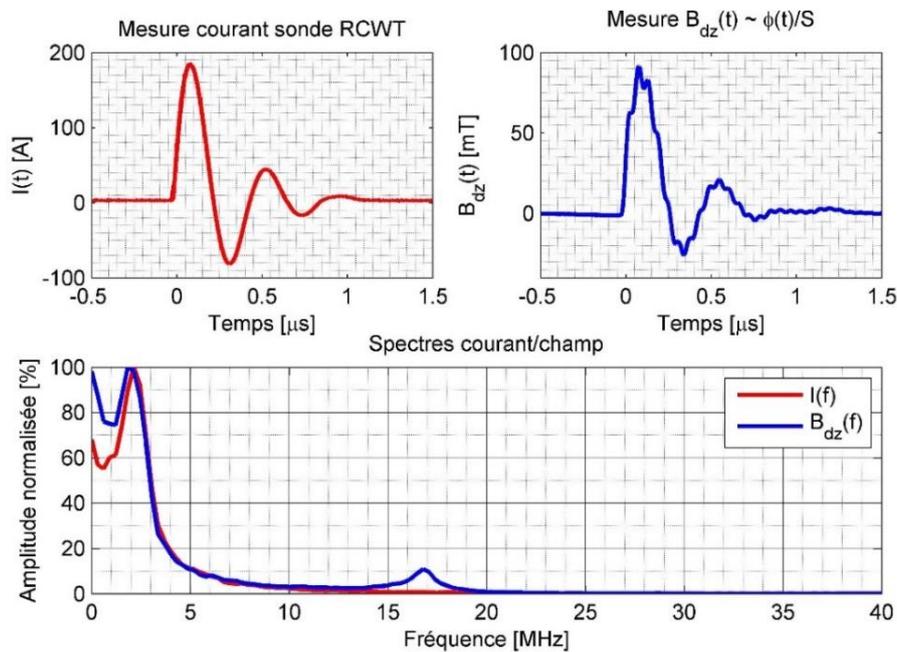
Figure 5.101 : Montage expérimental de la mesure de flux magnétique dynamique rayonné dans l'entrefer (visible au centre) par l'EMAT didactique placé sur un bloc d'acier doux (gauche et centre) et sur un bloc d'aluminium (droite).

L'EMAT est alimenté par le système d'émission du CETIM et placé sur la pièce inspectée. La sonde RCWT mesure le courant injecté dans la bobine, qui sert de déclencheur à l'oscilloscope pour la mesure de flux. L'entrefer entre l'EMAT et le bloc matériau est maintenu constant à 4 mm à l'aide de deux plaques de plastique qui guident le déplacement du capteur de flux (au centre de la Figure 5.101). De cette façon, les positions verticale et horizontale du capteur de flux sont maîtrisées, et une position verticale de 2.5 mm dans l'entrefer est maintenue. La dérivée temporelle du flux magnétique dynamique

est ainsi mesurée à différents incréments spatiaux sous la bobine, à hauteur fixe dans l'entrefer. Les [Figure 5.102](#) et [Figure 5.103](#) présentent les résultats de mesures lorsque l'EMAT est en regard d'un bloc d'aluminium, puis d'acier doux. Elles comprennent les mesures du courant injecté (en haut à gauche), des variations temporelles de la composante normale d'induction dynamique (estimée en intégrant l'équation (5.1)) dans l'entrefer à une position centrale sous la bobine (en haut à droite), et comparent les spectres (normalisés) des signaux temporels mesurés (en bas).



[Figure 5.102](#) : Mesure de l'induction dynamique normale (en haut à droite) rayonnée au centre de la bobine alimentée d'un courant impulsionnel (en haut à gauche) dans le cas du bloc d'aluminium, et comparaison des spectres (en bas).



[Figure 5.103](#) : Mesure de l'induction dynamique normale (en haut à droite) rayonnée au centre de la bobine alimentée d'un courant impulsionnel (en haut à gauche) dans le cas du bloc d'acier doux, et comparaison des spectres (en bas).

L'induction dynamique normale est maximale au centre de la bobine. En cette position, on relève une valeur pic d'induction dynamique de l'ordre de 50 mT dans le cas de l'aluminium, et de 100 mT dans le cas de l'acier doux. L'augmentation dans le cas de l'acier doux est naturellement associée à ses propriétés magnétiques. Ces intensités restent faibles comparées à celle de l'induction statique délivrée par le bloc d'aimants permanents de l'EMAT, malgré la très forte intensité d'excitation électrique injectée (environ 185 A pour les impulsions visualisées). On observe la proportionnalité entre l'induction magnétique dynamique et le courant électrique qui lui a donné naissance, notamment visible sur leurs spectres respectifs. Elle est flagrante dans le cas de l'aluminium (amagnétique), les deux signaux temporels présentant un contenu spectral quasiment identique avec une fréquence centrale de 2 MHz, fréquence fondamentale du courant $I(t)$ injecté (voir section 5.1.2). Cette linéarité est également observée dans le cas de l'acier doux (ferromagnétique), bien qu'une composante continue et un phénomène résonant (de fréquence de l'ordre de 17 MHz) s'ajoutent au contenu fréquentiel de l'excitation électrique initiale. Ces écarts ne correspondent pas à la fréquence de résonance du capteur de flux (estimée à 1.2 MHz) et pourraient provenir du comportement magnétique de l'acier doux.

La mesure est ensuite répétée pour différents incréments horizontaux de la sonde sous l'EMAT afin d'étudier les variations spatiales de l'induction dynamique normale rayonnée par la bobine émettrice et les comparer aux simulations CIVA CF. L'EMAT didactique est décrit dans la simulation avec une attention particulière portée sur la modélisation précise de la bobine inductrice, les paramètres de conception étant donnés au paragraphe 5.1.1. Le signal temporel numérisé du courant impulsionnel mesuré par la sonde de Rogowski est injecté en entrée de la simulation. Les comparaisons des résultats mesurés et simulés d'induction normale maximale en fonction de la position du capteur de flux sont illustrées par les figures [Figure 5.104](#) et [Figure 5.105](#), pour l'aluminium et l'acier doux, révélant un très bon accord, à la fois qualitatif et quantitatif. Pour les deux milieux testés, la valeur d'induction maximale est mesurée et prédite au centre de la bobine (autour de 27 mm) ; les positions d'induction nulle correspondent sur les courbes simulées et mesurées aux positions extrêmes de la bobine (autour de 10 mm et 42 mm), et enfin les pics secondaires d'induction magnétique sont prédits et mesurés en dehors de la face excitatrice de la bobine (zones [0 mm, 10 mm] et [45 mm, 55 mm]) avec une intensité similaire, de l'ordre de 20 % de celle du champ au centre de la bobine.

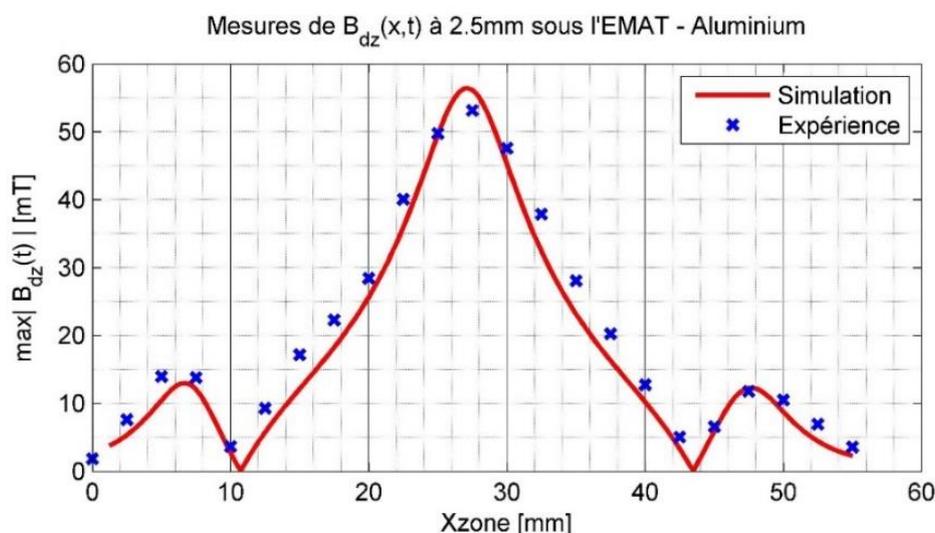


Figure 5.104 : Comparaison entre simulation et mesures des variations spatiales du maximum d'intensité de l'induction magnétique dynamique (normale) rayonnée à 2.5 mm dans l'entrefer entre l'EMAT et un échantillon d'aluminium.

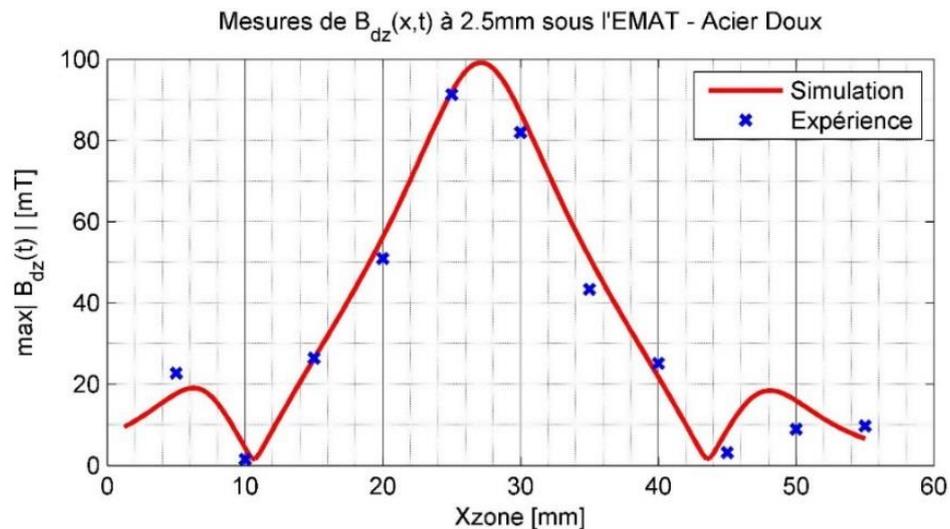


Figure 5.105 : Comparaison entre simulation et mesures des variations spatiales du maximum d'intensité de l'induction magnétique dynamique (normale) rayonnée à 2.5 mm dans l'entrefer entre l'EMAT et un échantillon d'acier doux.

Les courbes sont affichées en valeur absolue ; on peut indiquer que le signe de l'induction dynamique normale dans ces zones est opposé à celui de l'induction au centre de la bobine, ce qui correspond au retour des lignes de champ magnétique à l'extérieur de la bobine de l'EMAT. Ces résultats de mesure sont très satisfaisants. Ils confirment la précision de la prédiction du champ d'induction magnétique dynamique par le module CIVA CF, y compris dans le cas de courant électrique de forte intensité et hautes fréquences. On constate tout de même dans l'acier doux un léger écart entre mesure et simulation pour les positions du capteur de flux dans la zone entre 45 mm et 55 mm, écart beaucoup moins visible dans le cas de l'aluminium. Cette légère différence pourrait s'expliquer par le retour du fil conducteur de la bobine à ce niveau de la sonde (Figure 5.94), engendrant une dissymétrie magnétique locale accentuée dans le cas de l'acier doux ferromagnétique. Cette dissymétrie n'affecte qu'un très faible angle solide, elle est également discutée dans le paragraphe 5.3.3.

5.3. Mesures du champ ultrasonore transmis par EMAT en milieu ferromagnétique

Les différents paramètres de conception (géométries de bobine et d'aimants permanents) et d'excitation (courant électrique et induction statique) de la configuration d'inspection par l'EMAT didactique ont été caractérisés dans les sections précédentes. Ils sont nécessaires à la prédiction du champ ultrasonore rayonné par EMAT à l'aide des modèles de transduction développés. Cette section présente les différentes mesures expérimentales permettant de caractériser le champ ultrasonore transmis par EMAT dans un milieu aux propriétés magnétiques et magnétostrictives connues. Dans un premier temps, le paragraphe 5.3.1 décrit le montage expérimental adopté pour ces essais. Ensuite, les études paramétriques de l'influence du signal d'excitation de l'EMAT sur ses performances sont présentées dans le paragraphe 5.3.2. Enfin, les variations spatiales et temporelles du champ ultrasonore mesuré en fond de pièce ferromagnétique sont comparées dans le paragraphe 5.3.3 aux résultats de simulation dans CIVA. Dans cette configuration et pour le milieu ferromagnétique testé, ces comparaisons contribuent à la validation des modèles théoriques de transduction développés.

5.3.1. Montage expérimental pour la mesure du champ ultrasonore en transmission par un transducteur piézoélectrique focalisé en immersion

Ce paragraphe décrit la démarche et les choix de montage expérimental associés mis en place au CETIM de Senlis pour les essais de caractérisation du champ ultrasonore rayonné par EMAT.

Pour découpler les mécanismes de génération et de réception, l'utilisation d'un transducteur piézoélectrique du commerce en réception a été privilégiée pour mesurer le champ ultrasonore rayonné par l'EMAT dans la pièce. Ceci permet de focaliser l'attention sur les différents mécanismes induits par EMAT à l'origine de son rayonnement ultrasonore en milieu ferromagnétique, les mécanismes en réception étant bien connus pour les transducteurs piézoélectriques du commerce.

Le système d'émission du CETIM conçu pour l'alimentation de la sonde EMAT bi-onde est relativement complexe à manipuler dans le cadre des études paramétriques souhaitées. En effet, ses caractéristiques (intensité, fréquence, forme temporelle) sont fixes et ne peuvent pas simplement être modifiées de façon maîtrisée dans le but d'observer directement leur influence. De plus, ce système n'est pas actuellement synchronisable avec le système d'acquisition des mesures ultrasonores du transducteur piézoélectrique en réception. Enfin, pour de fortes excitations dynamiques, la génération d'harmoniques peut apparaître dans les sources de transduction élastique induites par EMAT selon le milieu ferromagnétique inspecté (Chapitre 4, Section 4.3.1.3). Ces phénomènes complexifiant la transduction élastique, il est dans un premier temps important de s'assurer de la précision des prédictions issues des différents modèles théoriques de transduction pour des intensités électriques plus faibles, assurant que les sources induites oscillent à la fréquence fondamentale du courant injecté. Une observation expérimentale des phénomènes de génération d'harmoniques sur le champ ultrasonore transmis en milieu magnétique par EMAT est proposée en fin de paragraphe 5.3.3.

Pour l'ensemble de ces raisons, un générateur de fonctions standard a été utilisé ici, permettant de changer facilement l'intensité, la fréquence et la forme du signal injecté. Cependant, l'intensité de courant délivrée doit être suffisante pour que l'EMAT génère un champ ultrasonore d'amplitude supérieure au niveau de bruit de mesure habituellement rencontré dans les milieux ferromagnétiques. De plus, les amplitudes des ondes longitudinales rayonnées par EMAT en milieu ferromagnétique sont généralement plus faibles qu'en milieu conducteur amagnétique, notamment en raison des différents mécanismes de transduction intervenant en milieux magnétiques (Chapitre 3). Cette difficulté de génération (et par suite de mesure) d'ondes L par EMAT est d'ailleurs la raison principale qui a conduit le CETIM à développer un système d'émission capable de générer de très forts courants. Dans ce même objectif, un amplificateur de puissance (hautes fréquences) a été utilisé en sortie du générateur de fonctions. Pour optimiser l'intensité de courant délivrée par cet amplificateur (tout en maintenant son comportement linéaire), son impédance de sortie (50Ω) est adaptée à celle de l'EMAT (estimée à 27Ω) à l'aide d'un transformateur de courant, simplement réalisé par deux enroulements de fil conducteur (en regard) liés par un circuit magnétique (noyau de ferrite) et aux nombres de spires adaptés (illustré sur la [Figure 5.108](#)). Après optimisation, l'intensité maximale injectable dans la bobine de l'EMAT vaut environ 2.42 A à une fréquence de 1 MHz. Dans un premier temps, pour s'assurer que les niveaux d'amplitudes des ondes L et T transmises dans cette gamme d'intensité sont suffisants pour être détectés, de simples mesures ultrasonores avec un transducteur piézoélectrique plan (de fréquence centrale 2 MHz) ont été effectuées au contact d'une pièce d'acier inoxydable Z20C13 (géométrie cylindrique avec un diamètre de 70 mm et une hauteur de 147 mm). Cette mesure est illustrée sur la [Figure 5.106](#).

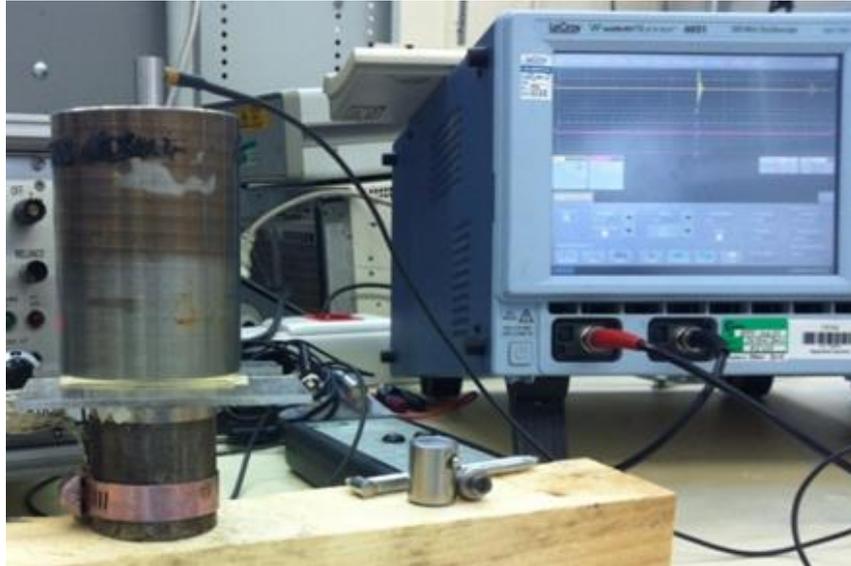


Figure 5.106 : Montage pour la caractérisation expérimentale du champ ultrasonore transmis par EMAT mesuré à l'aide d'un transducteur piézoélectrique plan au contact de la pièce inspectée (par un produit de couplant).

Dans cette configuration, le champ ultrasonore est généré par EMAT sur une face de l'échantillon inspecté ; le transducteur piézoélectrique est couplé mécaniquement sur la face opposée par un gel de couplage du commerce. Pour comparaison, ces mêmes essais ont également été menés dans le cas d'un échantillon d'aluminium (de même géométrie) afin d'observer la différence de comportement ultrasonore de l'EMAT selon qu'il opère sur un milieu conducteur amagnétique ou magnétique. Ces résultats sont illustrés sur la [Figure 5.107](#), qui présente les signaux acquis après moyenne sur 15 tirs à l'émission, pour un signal de courant d'excitation composé de deux cycles à 1 MHz et d'intensité variant entre 0.2 A et 2.42 A. Sur chaque acquisition de cette figure, les signaux correspondant à la zone morte de l'EMAT, au premier paquet ultrasonore des ondes longitudinales, et à celui des ondes transversales sont indiqués. La zone morte de l'EMAT est engendrée par le bruit électrique transmis directement de manière radio-électrique de la partie émission du système à la réception. Sa durée (pendant laquelle aucun signal ultrasonore ne peut être mesuré) dépend du montage électrique et de l'intensité d'excitation électrique injectée (on observe par exemple sur la [Figure 5.107](#) que la durée de la zone morte augmente avec l'intensité du courant injecté).

Le transducteur piézoélectrique standard utilisé est sensible au déplacement particulaire normal à la surface sur laquelle il est appliqué, quel que soit le type d'onde à l'origine de ce déplacement. Dans la configuration de mesure, s'il est évident que les ondes L générées par l'EMAT sur la face opposée vont contribuer significativement au déplacement normal au niveau du transducteur piézoélectrique, cela l'est moins pour ce qui concerne les ondes T. Cependant, les ondes T générées ne parviennent pas au transducteur piézoélectrique sous la seule incidence normale (ce qui se traduirait par un mouvement particulaire tangentiel seulement auquel le transducteur piézoélectrique serait peu ou pas sensible), mais sous des incidences variées ce qui conduit à ce qu'une composante normale non-nulle (dont l'amplitude est proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence) d'onde T existe et soit mesurée. Ici, l'ouverture spatiale importante des sources non-uniformes de contraintes tangentielles (de forme annulaire d'après les simulations du Chapitre 4) induites par EMAT relativement à la hauteur des pièces considérées implique des angles d'incidence significatifs et contribue à une sensibilité de mesure de la composante normale d'onde T par transducteur piézoélectrique.

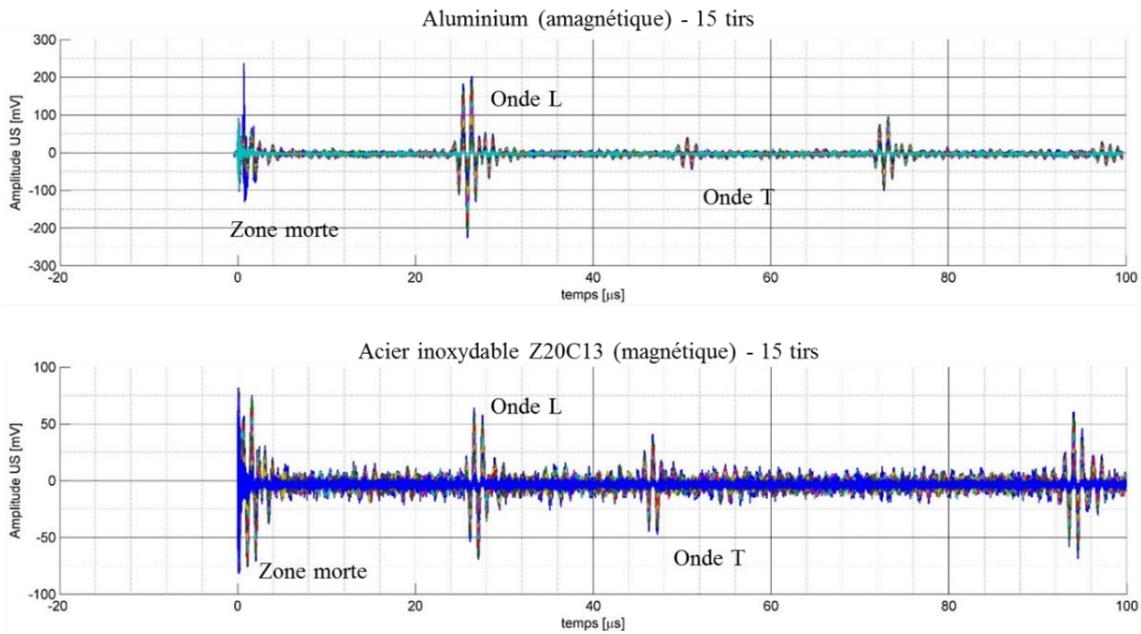


Figure 5.107 : Mesure par un transducteur piézoélectrique plan au contact du champ ultrasonore transmis par EMAT dans des pièces d'aluminium (haut) et d'acier inoxydable Z20C13 (bas) en fonction de l'intensité du courant d'excitation.

Ces courbes permettent d'illustrer différents retours d'expérience du CETIM précédemment discutés, à savoir un bruit électronique d'amplitude plus importante et une onde longitudinale rayonnée d'amplitude plus faible en milieu magnétique qu'en milieu conducteur amagnétique (pour un même gain du signal ultrasonore mesuré). De plus, les amplitudes rayonnées en ondes transversales sont très similaires pour les deux milieux. Ces observations semblent indiquer que les sources de transduction induites par EMAT à l'origine du rayonnement en ondes T sont identiques dans les deux milieux, tandis que les mécanismes de rayonnement en ondes L sont très différents, ce qui rejoint naturellement les prédictions numériques discutées dans le Chapitre 4. Ces premiers essais au contact, très simples comparés aux essais en immersion, ont permis de confirmer que les niveaux d'amplitudes ultrasonores générés par l'EMAT en ondes L et T sont suffisants dans cette gamme d'intensité de courant pour être mesurés. Les mesures de la Figure 5.107 ne sont moyennées que sur 15 tirs, ce qui est relativement faible en pratique. Dans la suite, les moyennes sont effectuées sur 256 tirs, ce qui augmente le temps d'acquisition mais réduit encore l'influence du bruit électronique superposé à la mesure ultrasonore.

Dans le but d'effectuer une mesure spatialement bien définie, les essais ultrasonores décrits dans la suite de ce chapitre mettent en œuvre un transducteur piézoélectrique focalisé (de focale 2'' et de fréquence centrale 5 MHz) en immersion. L'emploi d'un tel transducteur en réception implique des essais en cuve (le couplage ultrasonore est assuré par l'eau), ce qui est plus contraignant à mettre en place et rend plus difficile l'accès aux différents éléments de la configuration (raison pour laquelle les essais initiaux de 'calibration' de l'amplitude ultrasonore rayonnée par EMAT ont été effectués au contact). L'utilisation d'un transducteur focalisé a pour objectif de s'affranchir partiellement des effets de moyennage spatial du champ reçu opérés par la face active du transducteur piézoélectrique plan, et de garantir une meilleure résolution spatiale sur les cartographies de champ ultrasonore transmis en fond de pièce (la position du récepteur étant pilotée avec précision). Cependant, la résolution spatiale de la mesure effectuée par un transducteur focalisé dépend du diamètre de sa tache focale de sensibilité, lui-même proportionnel aux longueurs d'onde dans l'eau (égal à $\lambda F/D$ où λ est la longueur d'onde, F la distance focale géométrique du transducteur et D son diamètre). Ainsi, les contributions des hautes fréquences rayonnées par l'EMAT

seront mieux résolues que celles des basses fréquences. Les images de ces essais en cuve à l'aide d'un transducteur piézoélectrique focalisé en immersion sont présentées sur la [Figure 5.108](#).



Figure 5.108 : Montage expérimental pour la caractérisation en cuve du champ ultrasonore transmis par EMAT dans une pièce ferromagnétique à l'aide d'un transducteur piézoélectrique focalisé en immersion.

Les déplacements horizontaux et verticaux du transducteur focalisé sont pilotés à l'aide d'un bras robotisé. La pièce ferromagnétique inspectée est cylindrique, de diamètre $d = 70$ mm et hauteur $h = 147$ mm en acier inoxydable Z20C13. L'EMAT est placé sur la face émergée de la pièce, et le récepteur focalisé scanne sa face immergée. Les lois de comportements magnétique et magnétostrictif non-linéaires du milieu ferromagnétique inspecté lors de ces essais expérimentaux ont été caractérisées pendant la thèse de Rouge [[Rouge_2013](#)] en collaboration avec le LMT Cachan. Ces courbes ont été discutées dans le Chapitre 1 ; elles sont rappelées sur la [Figure 5.109](#) ci-dessous (en rappelant que seules les courbes anhystériques sont exploitées dans le modèle de transduction EMAT décrits dans ce manuscrit).

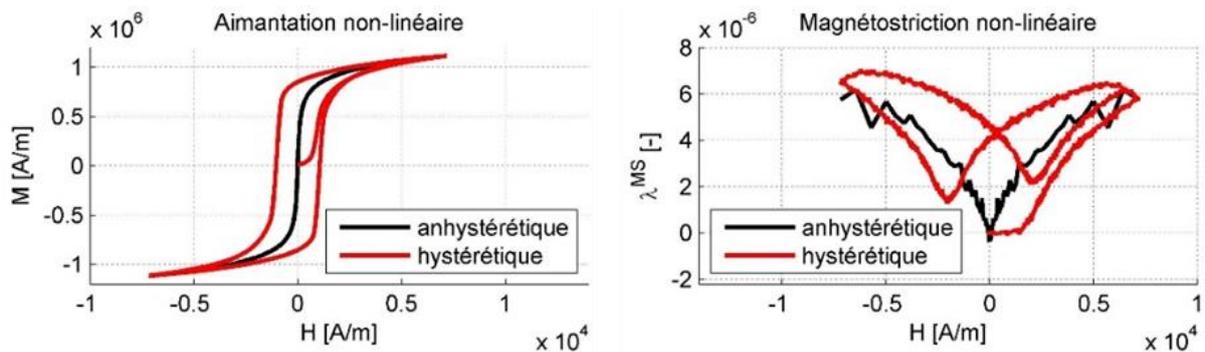


Figure 5.109 : Mesure expérimentale des lois macroscopiques de comportements magnétique et magnétostrictif non-linéaires d'un échantillon d'acier inoxydable Z20C13 (d'après [[Rouge_2013](#)]).

En raison de faibles amplitudes dans ce milieu, la mesure expérimentale de la loi anhystérique de déformations de magnétostriction est très bruitée. Ces résultats de mesure sont interpolés selon des lois analytiques décrites par Rouge [[Rouge_2013](#)] (inspirées de [[Hirao-Ogi_2003](#)]).

Le montage expérimental a été détaillé dans ce paragraphe, les paragraphes suivants présentent les différents résultats de mesure du champ ultrasonore transmis dans cette configuration en faisant varier les caractéristiques physiques du courant électrique d'excitation de l'EMAT étudié.

5.3.2. Étude de l'influence du signal électrique d'excitation sur le rayonnement ultrasonore transmis par EMAT

La première étude porte sur l'analyse de l'influence des caractéristiques élémentaires (intensité, fréquence, forme temporelle) du courant électrique injecté dans la bobine de l'EMAT didactique sur l'amplitude des ondes L et T transmises à travers la pièce. Le récepteur focalisé est maintenu à une position fixe sous la pièce, proche du centre de la face arrière de la pièce et à une distance normale de cette face de 50mm correspondant à sa focale géométrique. Différents signaux d'excitation sont délivrés par le générateur de fonction et injectés dans la bobine. La sonde de Rogowski est également utilisée pour mesurer à chaque salve d'émission les variations temporelles du courant électrique excitateur.

On étudie tout d'abord l'influence des variations de l'intensité d'un courant de référence, construit sur la base de 5 cycles de fréquence 1 MHz, sur le comportement ultrasonore de l'EMAT didactique opérant sur la pièce d'acier inoxydable. La [Figure 5.110](#) présente l'acquisition expérimentale du signal (courbe bleue) mesuré par le traducteur piézoélectrique focalisé pour un courant d'intensité 2.42 A, le signal de courant mesuré par la sonde RCWT (sensibilité de 5 mV/A) étant superposé (courbe rouge).

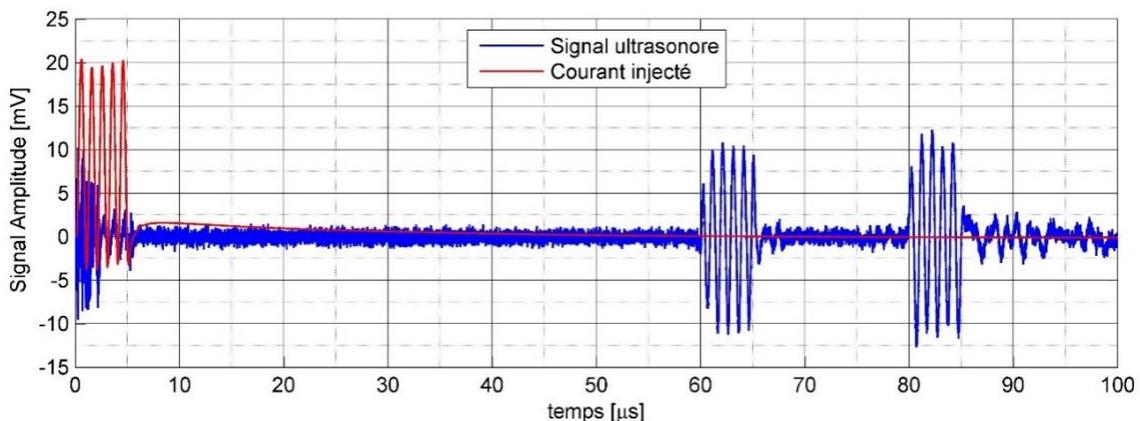


Figure 5.110 : Mesure par un traducteur piézoélectrique focalisé en immersion du champ ultrasonore transmis par EMAT dans une pièce d'acier inoxydable Z20C13 pour une intensité de courant électrique de 2.42A.

Sur cette figure, on peut identifier de nouveau la zone morte de l'EMAT, le premier signal ultrasonore transmis en onde L, et le second paquet transmis en onde T. On peut observer sur le signal de courant mesuré par la sonde de Rogowski la présence d'une composante continue qui rompt la symétrie des cycles injectés en tension par le générateur de fonction. Une composante continue était également observable sur la mesure du courant délivré par le système d'émission du CETIM ([Figure 5.98](#) de la section 5.1.2). Ce phénomène de dissymétrie du courant injecté a également été observé (par un système de mesure de courant différent de la sonde RCWT) dans le cadre d'essais ultrasonores par EMAT menés au CEA LIST en milieux conducteurs. Ces observations semblent indiquer que l'origine du phénomène est décorrélée du système de mesure employé et des propriétés magnétiques de l'acier inoxydable inspecté dans ces travaux, mais qu'il serait inhérent au montage électrique associé à une application de CND par EMAT (effet intégrateur). La valeur d'intensité retenue dans cette étude paramétrique correspond alors à la moitié de l'intensité pic à pic du signal mesuré.

En faisant varier l'amplitude de la tension délivrée par le générateur, on fait varier l'intensité du courant injecté dans l'EMAT. On peut alors directement observer l'influence de l'intensité sur la forme et

l'amplitude maximale (moitié de l'amplitude pic à pic) des signaux en ondes L et T rayonnées par l'EMAT, comme illustré sur la [Figure 5.111](#).

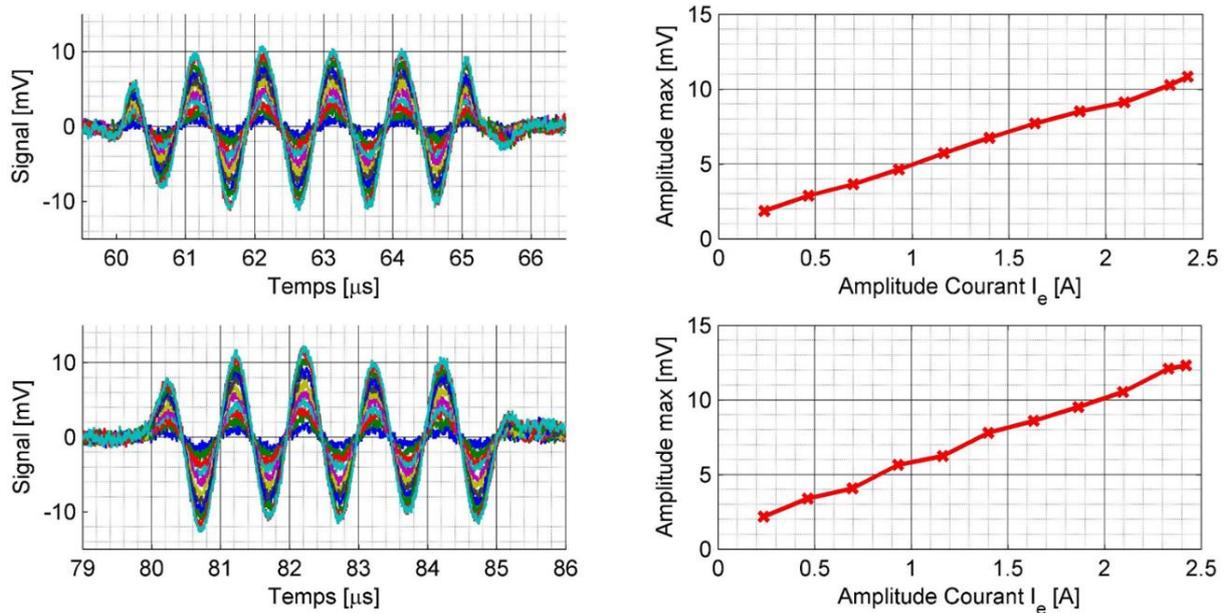


Figure 5.111 : Mesure de l'influence de l'intensité du courant injecté sur les signaux ultrasonores (gauche) et leur amplitude maximale (droite) transmis par EMAT en ondes L (haut) et T (bas) dans un échantillon d'acier inoxydable Z20C13.

L'intensité du courant n'affecte pas la forme temporelle des signaux ultrasonores dans cette gamme d'intensité (pas de génération d'harmoniques). La dépendance linéaire de l'amplitude maximale des ondes L et T avec l'intensité du courant d'excitation est mise en évidence. Ces observations rejoignent celles de Ribichini [\[Ribichini_2011\]](#) et valident les prédictions numériques ([Figure 4.76](#) en Section 4.3.1) des variations d'amplitude maximale des sources de transduction élastique induites par EMAT en milieu ferromagnétique en fonction de l'intensité du courant injecté.

On étudie ensuite l'effet sur les amplitudes des ondes L (et T) de la variation de la fréquence d'excitation, l'amplitude de la tension délivrée par le générateur étant maintenue constante (correspondant à un courant de 2.42 A à la fréquence 1 MHz). En parallèle des acquisitions ultrasonores, la sonde RCWT mesure à chaque fréquence le courant injecté dans la bobine. La [Figure 5.112](#) présente les variations de l'intensité du courant injecté dans l'EMAT et les variations de l'amplitude maximale (moyenne pic à pic) des ondes L (résultat similaire en ondes T) transmises en fonction de la fréquence d'excitation. Cette figure illustre qu'une augmentation de la fréquence s'accompagne à tension fixée d'une diminution de l'intensité du courant injecté dans l'EMAT (dépendance fréquentielle de la fonction de transfert du circuit électrique équivalent de la configuration d'inspection), ce qui induit naturellement une chute de l'amplitude ultrasonore transmise par l'EMAT compte tenu des résultats présentés précédemment sur l'influence de l'intensité du courant sur le champ transmis ([Figure 5.111](#)). Les variations de l'amplitude ultrasonore en ondes L en fonction de la fréquence d'excitation (en rouge à droite sur la [Figure 5.112](#)) doivent être analysées avec précaution. En effet, le transducteur piézoélectrique utilisé en réception présente une fréquence centrale de 5 MHz et une large bande passante à -6 dB allant de 1,6 MHz à 8,6 MHz autour de cette fréquence, soit 140 % de bande passante relative (spectre en noir à droite sur la [Figure 5.113](#)).

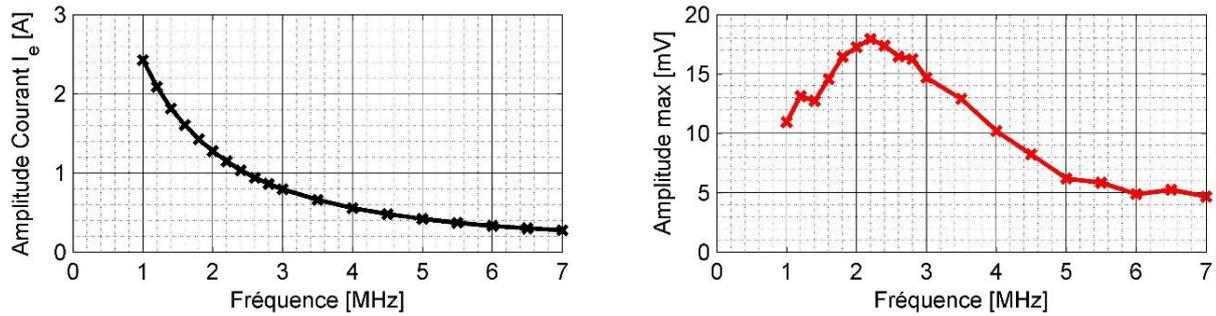


Figure 5.112 : Variations de l'intensité du courant (gauche) injecté dans l'EMAT et de l'amplitude maximale du signal transmis en ondes longitudinales (droite) dans un acier inoxydable Z20C13 en fonction de la fréquence d'excitation.

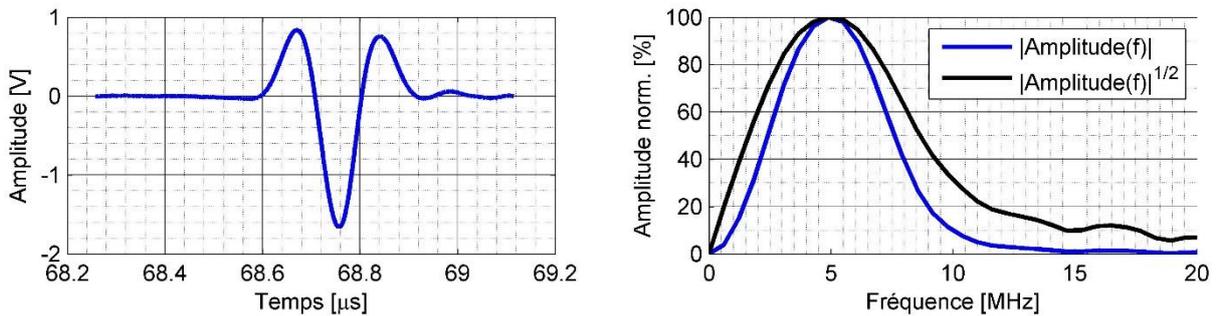


Figure 5.113 : Signal temporel (gauche) de l'écho de surface mesuré par le transducteur piézoélectrique focalisé, son spectre (droite, bleu) et la racine carrée de son spectre (droite, noir).

L'allure temporelle de cet écho 5 (Figure 5.113) est proportionnelle au produit de convolution de l'excitation électrique qui peut être assimilée à un Dirac en temps (dans les systèmes ultrasonores de CND standards), avec la réponse impulsionnelle électro-acoustique $h_{ea}(t)$ du transducteur (en émission), la réponse impulsionnelle acoustique $H(t)$ (liant la vitesse particulaire à la surface du transducteur en émission à la pression acoustique moyenne à cette même surface en réception) et la réponse impulsionnelle acousto-électrique $h_{ae}(t)$ du transducteur (en réception). La réponse impulsionnelle acoustique dans le cas d'un aller-retour entre le transducteur focalisé et une surface réfléchissante placée à sa distance focale géométrique est également approximativement proportionnelle à un Dirac en temps [Kube-et-al_2016]. Le signal mesuré est donc proportionnel à la convolution des réponses acousto-électrique et électro-acoustique du transducteur.

Dans les mesures de champ rayonné par l'EMAT par le transducteur focalisé piézoélectrique, seule la réponse acousto-électrique du transducteur piézoélectrique est concernée. Considérant en première approximation que les réponses acousto-électrique et électro-acoustique sont identiques, l'écho revenant de la surface dans la mesure est alors proportionnel à l'auto-convolution de cette réponse. Son spectre est donc le carré du spectre de la réponse électro-acoustique qu'il faut prendre en compte pour évaluer l'effet du système de mesure du champ rayonné par l'EMAT en fonction de la fréquence. Le signal temporel de l'écho, son spectre et la racine carrée de son spectre sont montrés sur la Figure 5.113. La racine carrée de ce spectre multipliée par le spectre d'amplitude de la source (proportionnel à celui de l'intensité du courant, à gauche sur la Figure 5.112) est comparable alors aux variations avec la fréquence de l'amplitude maximale du champ rayonné par l'EMAT en fond de pièce tel que mesuré par le transducteur focalisé. Les deux spectres sont superposés sur la Figure 5.114.

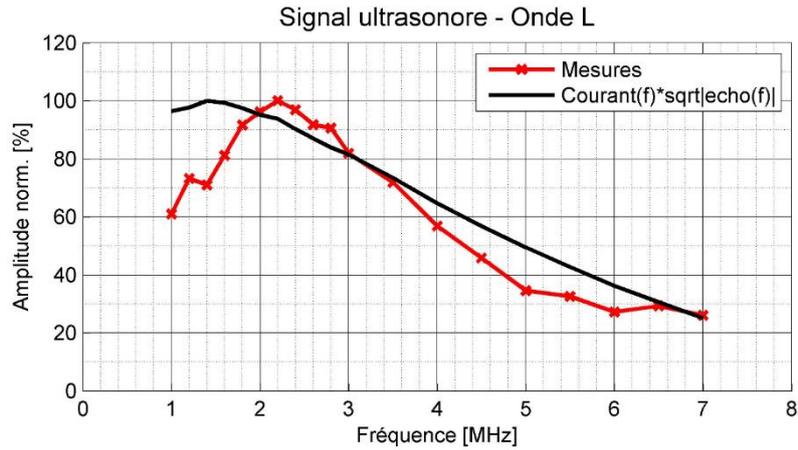


Figure 5.114 : Comparaison entre la racine carrée du spectre de l'écho de surface multipliée par le spectre d'amplitude de la source (courbe noire) et les variations avec la fréquence de l'amplitude maximale du champ ultrasonore rayonné par l'EMAT en fond de pièce telles que mesurées par le traducteur focalisé.

Pour être parfaitement quantitatif dans cette discussion, il faudrait prendre en compte les effets de diffraction du champ rayonné par l'EMAT. Les deux cartographies simulées du champ rayonné par l'EMAT excité à 1 MHz et à 5 MHz à partir du modèle de transduction développé dans cette étude (Figure 5.115) montrent qu'à la plus basse fréquence, le faisceau rayonné à la surface de la pièce opposée à la source est situé dans le champ lointain de la source ; l'amplitude sur l'axe décroît de façon régulière aux plus grandes profondeurs. En revanche, à 5 MHz, les variations du champ sur l'axe montrent qu'aux plus grandes profondeurs, le champ lointain n'est pas encore atteint. Nous ne pouvons pas ici faire référence aux formules simples de limite de champ proche - champ lointain qui sont établies dans le cas de sources circulaires uniformes de contrainte normale. En effet, dans le cas présent, la source surfacique de contraintes normales peut être assimilée à la superposition d'une source de petit diamètre et apodisée avec une source annulaire de signe opposé (Figure 4.61 dans la Section 4.2.2). Compte tenu de cette discussion, il est clair que la mesure de l'amplitude maximale sur l'axe de symétrie du champ mesurée sur la surface opposée de la pièce n'est pas simplement proportionnelle à l'amplitude maximale de la source ultrasonore induite par l'EMAT. Ceci explique pourquoi les deux spectres de la Figure 5.114 ne sont pas parfaitement superposés.

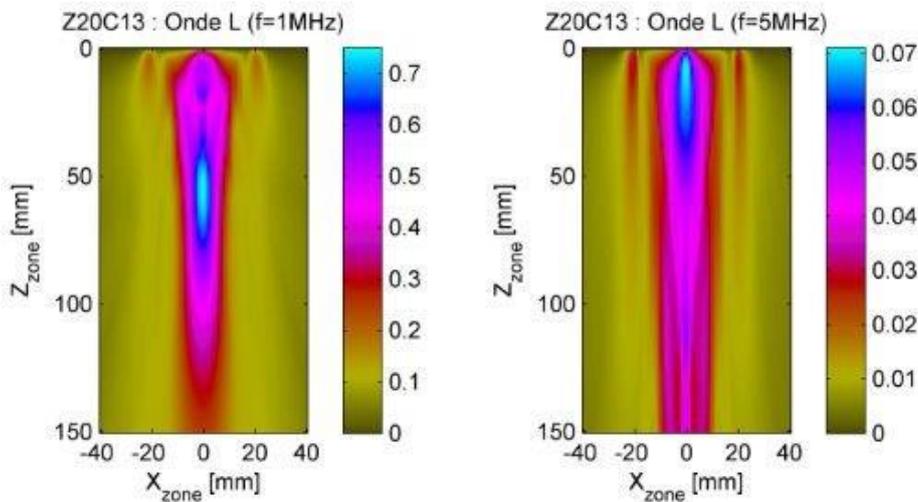


Figure 5.115 : Simulation du champ ultrasonore rayonné par l'EMAT excité à 1 MHz (gauche) et à 5 MHz (droite) dans un échantillon cylindrique d'acier inoxydable Z20C13) à partir du modèle de transduction développé dans cette étude.

Les études paramétriques présentées dans ce paragraphe ont mis en évidence l'influence des caractéristiques élémentaires du courant injecté dans la bobine de l'EMAT sur son comportement ultrasonore. Ces résultats sont en très bon accord avec les simulations effectuées. Les caractérisations du paragraphe suivant fixent désormais le signal de courant d'excitation de l'EMAT didactique, et pilotent le déplacement du traducteur piézoélectrique focalisé en réception immergé dans la cuve à l'aide d'un bras robotisé, afin de mesurer le champ ultrasonore transmis en différents points d'observation sur la face arrière de la pièce. Ces essais ont pour objectif de valider par l'expérience les simulations des variations spatiales (C-scan) et temporelles (A-scan) du champ ultrasonore transmis (en ondes L et T).

5.3.3. Comparaisons simulation-expérience : A-scan et C-scan en fond de pièce

Pour cette étude expérimentale, le courant électrique injecté dans la bobine est fixé, composé de 5 cycles, d'intensité 2.42 A à la fréquence de 1 MHz. L'objectif de ces essais est de cartographier le champ ultrasonore transmis par l'EMAT alimenté par ce signal, mesuré sur la face arrière du cylindre. Le déplacement du capteur piézoélectrique dans la cuve est piloté par un codeur de positions et synchronisé avec un système d'acquisition ultrasonore (TD Handi-Scan, Profile CI), qui permet d'enregistrer le signal reçu (moyenné sur 256 tirs) en chaque point d'observation. Les mesures sont ensuite analysées afin d'observer les variations temporelles des signaux et la répartition spatiale de leur amplitude.

La [Figure 5.116](#) présente les cartographies du maximum d'amplitude ultrasonore mesurée (C-scans) en ondes longitudinales (entre les instants 57 μ s et 67 μ s) et transversales (entre les instants 76 μ s et 86 μ s) transmises par l'EMAT à travers la pièce d'acier. Les C-scans expérimentaux sont normalisés par rapport à l'amplitude ultrasonore maximale mesurée sur l'ensemble des points d'observation, correspondant à l'amplitude en ondes transversales transmise au centre de la face immergée de la pièce. On remarque sur cette figure que les acquisitions sont relativement perturbées et bruitées. Malgré cela, on peut observer que la génération d'ondes T est prédominante dans cette configuration par rapport à celle des ondes L, au voisinage du centre de la face inspectée, sur une tache focale d'environ 10 mm de diamètre. En dehors de la tache focale, l'amplitude des ondes L prédomine, malgré l'apparition d'un lobe secondaire d'ondes T d'un diamètre d'environ 50 mm autour du centre de la face inspectée.

Les simulations correspondantes sont réalisées grâce à l'implémentation des modèles développés dans le logiciel CIVA, sous les hypothèses que la pièce est élastiquement et magnétiquement isotrope, et qu'elle ne présente ni défaut structurel ni état de contraintes résiduelles. Les données d'entrée permettent le calcul en sortie du module CIVA CF des sources surfaciques de transduction élastique induites par l'EMAT, prenant en compte le comportement magnéto-élastique anhystérétique du milieu ; ces sources sont injectées dans le module CIVA US afin de prédire le champ ultrasonore qu'elles rayonnent dans le cylindre testé. On trace la répartition spatiale simulée sur le fond du cylindre des maxima d'amplitude ultrasonore (C-scans) en ondes L et T transmises par EMAT ([Figure 5.117](#)). Un bon accord est observable entre les résultats mesurés et simulés des variations spatiales des maxima d'amplitude des ondes L comme des ondes T. Ces comparaisons satisfaisantes constituent un élément de validation expérimentale des modèles théoriques développés. Pour mettre en évidence le gain en précision apporté par la prise en compte dans le modèle de sources des lois de comportements magnétiques anhystérétiques plutôt que simplement linéaires, sur le champ ultrasonore transmis par EMAT, la [Figure 5.118](#) compare sur un diamètre de la face arrière du cylindre inspecté les profils de maximum de champ ultrasonore en ondes L et T déterminés par l'expérience, par un modèle de sources basé sur des propriétés magnétiques linéaires, et par un modèle de sources prenant en compte le comportement magnétique anhystérétique de l'échantillon ferromagnétique inspecté.

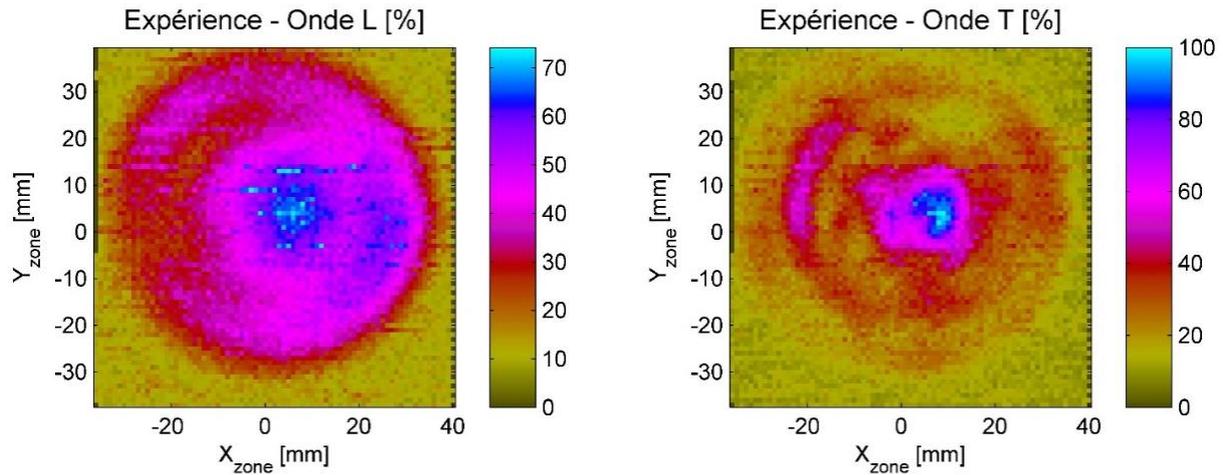


Figure 5.116 : C-scans mesurés du champ ultrasonore rayonné en ondes longitudinales (gauche) et transversales (droite) par EMAT sur le fond d'une pièce cylindrique d'acier inoxydable Z20C13.

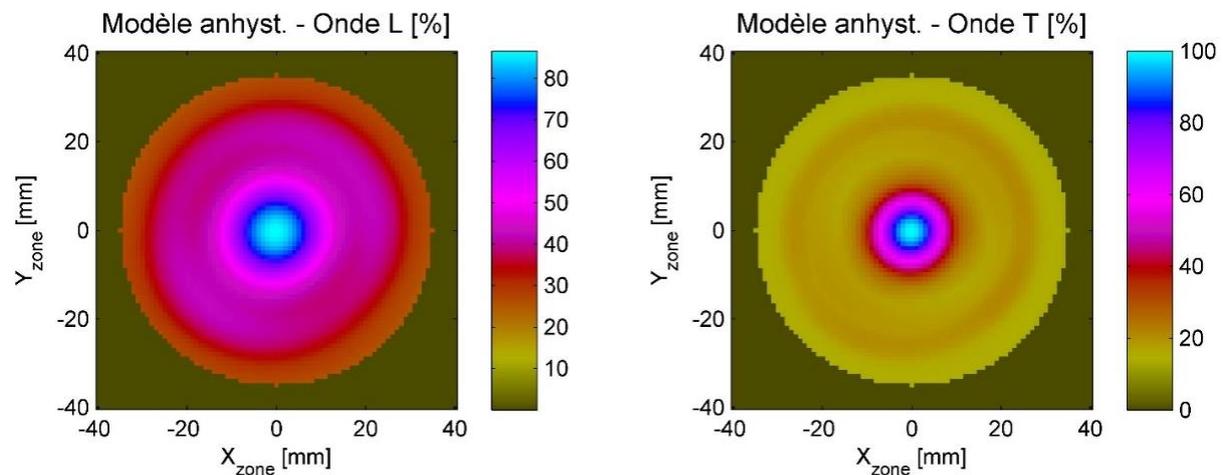


Figure 5.117 : C-scans simulés du champ ultrasonore rayonné en ondes longitudinales (gauche) et transversales (droite) par EMAT sur le fond d'un cylindre d'acier inoxydable Z20C13.

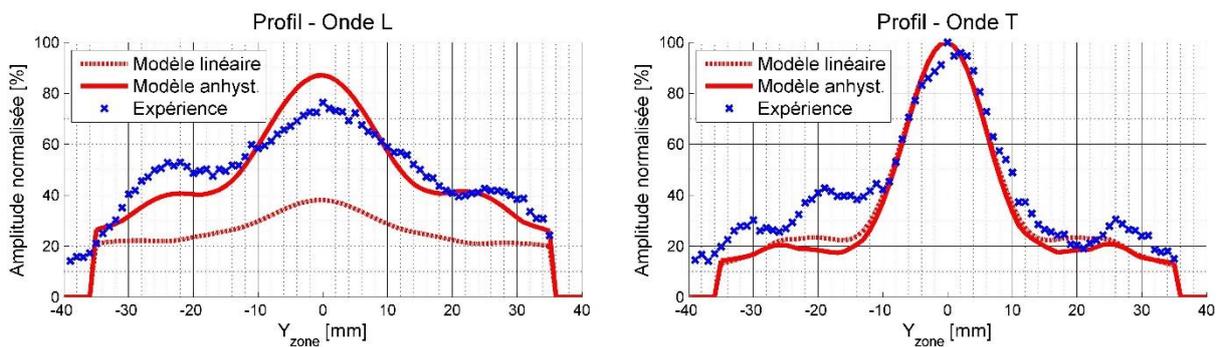


Figure 5.118 : Profils des maxima d'amplitude en ondes L (gauche) et T (droite) induits par EMAT sur un diamètre du cylindre d'acier inoxydable. Trait pointillé : modèle linéaire ; Trait plein : modèle anhystérique ; Croix : expérience.

Les courbes issues des mesures de champ sont lissées à l'aide d'une moyenne glissante dans le but de séparer le bruit de mesure des amplitudes visualisées. La prise en compte des lois de comportements anhystériques permet de prédire plus fidèlement l'amplitude ultrasonore en ondes L. En effet, comme décrit dans le Chapitre 4, l'influence du comportement anhystérique sur le champ transmis est

davantage marquée sur le rayonnement des ondes L que sur celui des ondes T, spécifiquement dans cette configuration d'étude. La [Table 5.10](#) donne les amplitudes relatives maximales (en dB) entre le champ ultrasonore en ondes L et celui en ondes T dans cette configuration d'étude, extraits des résultats de mesure et de ceux simulés par un modèle linéaire et anhystérique.

	Expérience	Modèle linéaire	Modèle anhyst.
Amplitude L/T (dB)	-2.3 dB	-8.4 dB	-1.2 dB

Table 5.10 : Amplitudes relatives (en dB) en ondes L et T calculées à partir de la [Figure 5.118](#).

Cette table confirme le gain en précision apparent sur la [Figure 5.118](#) apporté par le modèle de sources anhystériques. On remarque également que les lobes secondaires d'amplitude ultrasonore présents autour des taches focales centrales en ondes L et T sont visibles sur les résultats simulés pour des sources anhystériques, bien que leur amplitude soit sous-estimée par rapport à celle des mesures. Ces observations contribuent à la validation du modèle de sources anhystériques de rayonnement ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques.

En revanche, certaines différences persistent entre les C-scans mesurés ([Figure 5.116](#)) et simulés ([Figure 5.117](#)). La première d'entre elles concerne la dissymétrie apparente des C-scans mesurés, en ondes L comme en T. Cette dissymétrie est surprenante à première vue étant donnée la symétrie supposée de la configuration d'inspection étudiée et de la conception de l'EMAT didactique, cette symétrie étant évidente pour les résultats de simulation. Elle peut provenir de différents facteurs. La première hypothèse est qu'elle peut être liée à une potentielle inclinaison parasite de l'EMAT sur la face d'excitation du cylindre. Cependant lors d'essais complémentaires, le positionnement du traducteur a été retravaillé et la même dissymétrie était de nouveau observable expérimentalement. Elle semble davantage résulter de la conception de l'EMAT plutôt que de son positionnement sur le matériau inspecté. En effet, comme on peut le constater sur la [Figure 5.119](#), le retour du fil conducteur sur la face active de l'EMAT didactique engendre une rupture de symétrie de l'enroulement en spirales, rupture à laquelle s'ajoute une différence d'entrefer au niveau de cette zone de la face du traducteur.



Figure 5.119 : Face active de l'EMAT didactique étudié après usage répété.

De même, l'enroulement en spirales n'est plus rigoureusement parfait après un usage répété du traducteur, de légères dissymétries étant notamment engendrées à chaque placage de l'EMAT sur le milieu magnétique à inspecter (pouvant être plus ou moins brutal selon le comportement magnétique du milieu). Des essais expérimentaux supplémentaires seraient nécessaires pour vérifier l'hypothèse et envisager de déplacer le fil de sortie de l'autre côté de la bobine sous la forme d'une bande conductrice.

De plus, l'amplitude des ondes L simulée par les modèles de sources de transduction EMAT ne correspond pas parfaitement à celle mesurée expérimentalement. Plusieurs raisons peuvent expliquer cet écart d'amplitude. En effet, d'après les études paramétriques discutées dans le Chapitre 4, la génération d'ondes longitudinales par cette géométrie d'EMAT dans un milieu ferromagnétique est très sensible à ses propriétés magnétiques et magnétostrictives. Ainsi, compte tenu du grand nombre d'incertitudes de mesure autour de ces lois de comportement pour la pièce d'acier étudiée (notamment en ce qui concerne l'absence supposée d'un état de contraintes mécaniques résiduelles), une légère erreur sur la représentation des propriétés du milieu se répercute principalement sur l'amplitude des ondes L rayonnées et peut expliquer les différences d'amplitude relatives observées entre les résultats simulés et mesurés. De plus, la fonction de transfert du capteur piézoélectrique focalisé utilisé en réception (Section 5.3.2) n'est pas prise en compte dans les simulations effectuées, ce qui peut également induire un léger écart entre les amplitudes mesurées et simulées (en ondes L et T).

Pour compléter la validation expérimentale des modèles développés, les variations temporelles des signaux ultrasonores mesurés et simulés en un point d'observation précis de la face inspectée peuvent être comparées. Ces comparaisons auraient évidemment pu être effectuées à partir des mesures expérimentales de la Section 5.3.2 ; cependant la position du capteur piézoélectrique focalisé parfaitement au centre de la face arrière de la pièce inspectée ne pouvait être garantie (on peut d'ailleurs constater en comparant les amplitudes mesurées dans ce paragraphe que le capteur n'était pas positionné au centre mais certainement excentré d'environ 5 mm). À partir des cartographies expérimentales de champ ultrasonore (Figure 5.116), la position du centre du cylindre peut être visualisée et on peut extraire les signaux temporels (A-scans) en ondes L et T mesurés et les comparer aux A-scans simulés correspondants. Les signaux simulés présentent des temps de vol d'arrivée des ondes L et T différents de ceux mesurés. Les signaux simulés en ondes L et T arrivent respectivement en avance de 2.7 μs et 0.2 μs par rapport au signal ultrasonore mesuré. L'hypothèse naturelle sur l'origine de ces déviations en temps de vol est celle d'une (légère) surestimation des vitesses de propagation dans le milieu inspecté. En tenant compte de ces décalages en temps de vol, la Figure 5.120 trace les variations temporelles (normalisées) des signaux ultrasonores (A-scans) en ondes L et T mesurés et simulés.

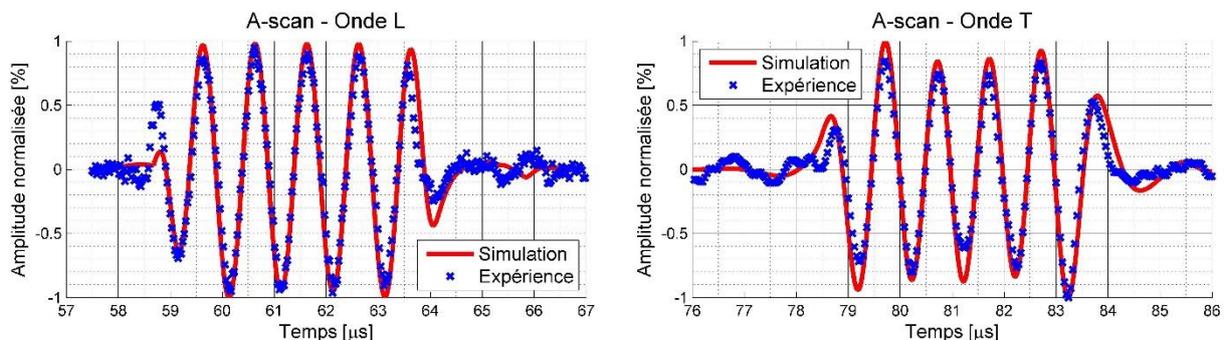


Figure 5.120 : A-scans (normalisés) des signaux en ondes longitudinales (gauche) et transversales (droite) transmis par EMAT au centre de la face arrière du cylindre d'acier inoxydable Z20C13. Traits pleins : Simulation ; Croix : Expérience.

Malgré quelques écarts (notamment sur le premier signal transitoire en ondes L), on peut observer sur la [Figure 5.120](#) un très bon accord entre les signaux simulés et mesurés. Notamment, les signaux transitoires de début et de fin de paquet en onde T sont très bien reproduits. Une nouvelle fois, ces observations contribuent à la validation du modèle théorique développé.

Remarque relative à l'influence des contraintes mécaniques résiduelles

D'après les études numériques du Chapitre 4, la présence d'un état de contraintes mécaniques dans la pièce inspectée influence fortement l'amplitude des sources de rayonnement ultrasonore induites par EMAT, et même plus précisément dans cette configuration d'étude, influence les sources normales de rayonnement. Ainsi, si le matériau inspecté présente de légers niveaux de contraintes résiduelles (à la suite de son usinage par exemple), ces contraintes induisent principalement une variation d'amplitude du champ transmis en ondes L par cet EMAT. La présence de contraintes résiduelles dans le milieu inspecté pourrait alors expliquer les écarts d'amplitude des ondes L observés entre simulation et expérience. De plus, les contraintes mécaniques ayant également une influence sur les vitesses de propagation élastique par l'effet acousto-élastique, et donc finalement sur les temps de vols mesurés en ondes L et T, la présence de contraintes résiduelles dans le milieu inspecté pourrait également expliquer les légers décalages en temps de vol observés entre simulation et expérience. Ce raisonnement est bien évidemment purement conceptuel et spéculatif, étant donné le grand nombre de paramètres expérimentaux pouvant expliquer ces écarts, comme l'influence de la température sur la vitesse de l'eau dans la cuve. De plus, des essais expérimentaux supplémentaires (sous contraintes) sont requis pour valider les prédictions numériques de l'influence des contraintes mécaniques (multi-axiales) sur les sources induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Néanmoins, ce raisonnement permet d'introduire l'idée théorique d'une méthode d'estimation de l'état de contraintes mécaniques résiduelles d'un milieu par des mesures EMAT, basée sur des techniques d'inversion à partir du modèle direct développé dans ce manuscrit.

Remarque relative à l'utilisation du système d'émission du CETIM en essais de caractérisation EMAT

Du fait de difficultés de synchronisation, le système d'émission dédié à l'alimentation de la sonde EMAT bi-onde du CETIM n'a pas été utilisé dans ces travaux de validations expérimentales. Les mesures physiques des sections 5.1 et 5.2 ont néanmoins permis la détermination des caractéristiques physiques du courant impulsif haute intensité et hautes fréquences délivré par ce système. Des essais de caractérisation expérimentale, similaires à ceux décrits ici, du champ ultrasonore transmis par un EMAT alimenté de ce courant électrique doivent être effectués. Avant de mener ces essais, le champ ultrasonore transmis en fond de pièce par l'EMAT didactique excité par le courant délivré par le système d'émission du CETIM a été mesuré par un transducteur piézoélectrique plan au contact. Deux pièces différentes, composées respectivement d'un milieu conducteur amagnétique (aluminium) et d'un milieu ferromagnétique (acier doux) ont été testées ; ces mesures sont similaires aux essais de calibration décrits dans le paragraphe 5.3.1. Un agrandissement des signaux ultrasonores correspondant aux ondes L transmises dans cette configuration pour une position centrale du récepteur piézoélectrique plan est montré sur la [Figure 5.121](#) dans les pièces d'aluminium et d'acier doux. Les spectres de ces signaux sont également tracés. Pour rappel, le courant électrique délivré par le système d'émission de la sonde bi-onde présente une intensité moyenne de 175 A et une fréquence centrale de 2 MHz.

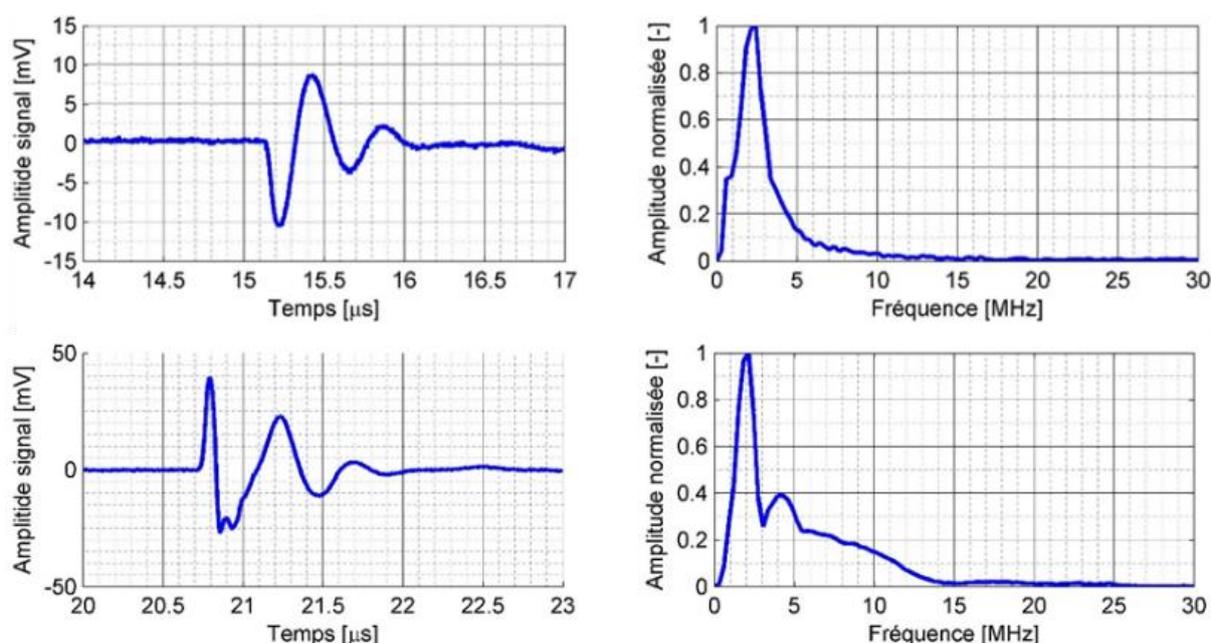


Figure 5.121 : Mesures par un capteur piézoélectrique plan du signal en ondes L (gauche), et du spectre associé (droite), transmis par un EMAT excité d'un courant de forte intensité dans des pièces d'aluminium (haut) et d'acier doux (bas).

La génération d'harmoniques d'ordres élevés est clairement mise en évidence sur cette figure. En effet, le spectre du signal mesuré dans l'aluminium correspond rigoureusement au spectre du courant précédemment caractérisé à l'aide d'une sonde de Rogowski, tandis qu'on observe l'apparition d'harmoniques de la fréquence d'excitation dans le cas de l'acier doux. Ces harmoniques témoignent de la mise à défaut de l'hypothèse d'aimantation et de magnétostriction linéarisées décrite dans le Chapitre 4 et mettent en évidence les effets d'aimantation et de magnétostriction (principaux responsables de la création d'harmoniques d'ordres élevés) dans les mécanismes de transduction ultrasonore d'un EMAT en milieux ferromagnétiques.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre décrit l'ensemble des mesures effectuées au CETIM de Senlis dans le but de valider par l'expérience le modèle théorique (à contrainte mécanique nulle) de sources surfaciques de transduction élastique induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Ces essais caractérisent le courant électrique injecté dans la bobine de l'EMAT, le flux magnétique dynamique rayonné dans l'entrefer séparant le traducteur du milieu inspecté, le champ ultrasonore en ondes longitudinales et transversales rayonné par cet EMAT dans un milieu ferromagnétique donné, ainsi que l'influence des paramètres d'excitation du traducteur sur ses performances de génération. Ces caractérisations expérimentales sont confrontées avec succès aux résultats de simulation obtenus avec le logiciel CIVA. Quelques écarts entre simulation et expérience subsistent, et de nombreux paramètres (dans l'expérience et la simulation) pourraient être améliorés. Cependant résultats constituent à notre connaissance les premières validations expérimentales de A-scans et C-scans simulés du champ ultrasonore transmis par EMAT dans un milieu ferromagnétique de la littérature, ce qui est prometteur tant le nombre d'incertitudes dans l'expérience (notamment sur les propriétés magnéto-élastiques du milieu inspecté) est important. Ces essais illustrent

ainsi le fort potentiel des outils de simulation développés dans cette thèse, pour l'optimisation de la conception et des paramètres d'excitation d'un EMAT, et l'interprétation des résultats de mesures ultrasonores selon les propriétés magnéto-élastiques du milieu inspecté.

Finalement, seule l'influence notable du terme de traction surfacique est particulièrement mise en avant dans ces travaux de validation, les déformations de magnétostriction de l'échantillon d'acier inoxydable Z20C13 testé étant de faibles amplitudes comparées aux autres mécanismes de transduction impliqués. De nombreuses études expérimentales pourraient être envisagées pour vérifier davantage les prédictions numériques obtenues par le modèle de transduction EMAT développé, en investiguant par exemple :

- des milieux ferromagnétiques différents (avec un comportement magnétostrictif plus marqué comme le nickel, même si ce matériau est peu rencontré en industrie),
- des régimes d'excitation électrique plus forts (avec le système d'émission du CETIM),
- des géométries d'EMAT différentes,
- des milieux ferromagnétiques présentant des contraintes mécaniques d'amplitude et d'orientation maîtrisées, etc.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Conclusions

La littérature sur la modélisation du comportement ultrasonore d'un EMAT est généralement limitée au traitement des sources de Lorentz induites dans tout milieu conducteur amagnétique. Pour traiter le cas des milieux magnétiques, différents modèles ont été proposés par la communauté EMAT dont les incohérences ou insuffisances théoriques ont été récemment soulevées. Dans le but de simuler de façon semi-analytique le rayonnement ultrasonore d'un EMAT en milieux ferromagnétiques, la description précise des phénomènes multi-physiques mis en jeu et des différentes théories qui les modélisent s'est avérée nécessaire pour traiter de manière cohérente et consistante la complexité des mécanismes de transduction impliqués. En conséquence, le niveau de détails théoriques discutés et le nombre de références à la littérature fournies sont volontairement élevés. La synthèse effectuée des concepts multi-physiques inhérents à la problématique posée constitue une base rigoureuse pour le développement des modèles de sources électromagnéto-élastiques mis en place dans ce mémoire. En particulier, la revue des propriétés magnétiques et magnétostrictives des milieux ferromagnétiques proposée ne présente pas d'originalité en l'état, mais permet de faciliter la prise en main des effets de transduction ultrasonore associés par un concepteur de traducteurs EMAT de formation 'ultrasoniste'. De même, les différents chapitres de ce manuscrit sont rédigés de façon indépendante pour permettre au lecteur de facilement passer de l'un à l'autre selon ses besoins et attentes.

Ce document établit un modèle semi-analytique capable de prédire l'ensemble des sources électromagnéto-élastiques de transduction induites par un EMAT de conception et d'excitation arbitraires, dans le but de simuler le champ d'ondes ultrasonores qu'elles rayonnent en milieux ferromagnétiques doux, aux propriétés élastiques, magnétiques et magnétostrictives variées et aux surfaces de géométrie complexe. Le modèle de transduction développé repose sur les définitions formelles des tenseurs des contraintes électromagnétiques de Maxwell et des contraintes de magnétostriction dérivées par application de concepts énergétiques. Ces outils tensoriels permettent de modéliser les densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques et magnétostrictives de rayonnement ultrasonore induites dans une large gamme de milieux ferromagnétiques. Ce formalisme générique met en évidence les points communs et différences théoriques entre les différents modèles de sources électromagnétiques de la littérature EMAT. Il permet de généraliser le modèle de sources piézomagnétiques classiquement employé à des configurations d'EMAT et des géométries de surface inspectée plus complexes. Enfin, le modèle de transduction EMAT développé permet la prise en compte des lois anhystériques macroscopiques d'aimantation et de magnétostriction du milieu ferromagnétique inspecté, ce qui représente plus fidèlement les phénomènes magnéto-élastiques non-linéaires caractéristiques de ces milieux.

Pour rendre prédictif le modèle développé, cette étude propose une revue de trois approches différentes de la littérature sur la modélisation lois macroscopiques de comportement magnéto-élastique couplé des milieux ferromagnétiques : les approches micromagnétiques, phénoménologiques et multi-échelles. Cette revue met en avant les avantages d'utilisation d'un modèle multi-échelle simplifié, prédictif et particulièrement adapté à notre problématique, pour modéliser les courbes d'aimantation et de

magnétostriction anhystérétiques à partir d'un nombre restreint de paramètres facilement mesurables et en un temps de calcul réduit. Les lois de comportement modélisées constituent alors des entrées des calculs des sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par l'EMAT. Ce modèle permet facilement de rendre compte quantitativement de l'influence des non-linéarités magnétiques et de la présence de contraintes mécaniques résiduelles (éventuellement multi-axiales) dans le milieu inspecté sur les sources induites par EMAT.

Sous l'hypothèse d'un couplage magnéto-élastique faible, une méthode de transformation des sources volumiques de transduction en contraintes surfaciques équivalentes est développée. Elle permet de coupler et de réutiliser les modules existants de calcul électromagnétique et ultrasonore du logiciel CIVA de simulation des méthodes de CND dans le cas d'une inspection par EMAT. Inspirée d'un modèle de la littérature valable en milieu élastique plan, isotrope et homogène, un modèle de contraintes surfaciques équivalentes prenant en compte la contribution des moments des sources d'ordres élevés est formellement dérivé dans le cas de milieux élastiquement et géométriquement complexes. Ce modèle assure le couplage des modules CIVA CF et CIVA US et permet le calcul du rayonnement ultrasonore transmis par EMAT dans des configurations géométriques plus complexes et en un temps de calcul adapté à un logiciel industriel comme CIVA. Enfin, cette méthode formelle se réduit bien au modèle original de la littérature en simplifiant les hypothèses de la configuration étudiée, et le gain en précision dans la représentation du champ d'ondes ultrasonores apporté par le développement des contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux a été validé numériquement dans le cas d'une géométrie cylindrique et d'une source volumiques d'ondes SH de nature arbitraire.

Le modèle de transduction développé dans ce document permet finalement de décrire l'ensemble des sources de rayonnement induites EMAT en milieux ferromagnétiques sous la forme d'une distribution non-uniforme surfacique de contraintes normales et tangentielles, cette description étant compatible avec de nombreux modèles de rayonnement ultrasonore développés dans CIVA US ou ailleurs. De nombreuses études paramétriques peuvent alors être menées pour illustrer les régimes de prédominance des différents mécanismes de transduction ultrasonore selon les paramètres de conception et d'excitation électromagnétique de l'EMAT étudié, selon les propriétés magnétiques et magnétostrictives (linéaires ou anhystérétiques) caractéristiques du milieu, selon un niveau de contraintes mécaniques (appliquées ou résiduelles) éventuellement multi-axiales, et selon la polarisation d'onde ultrasonore rayonnée dans le milieu inspecté. Ces résultats de simulation indiquent que l'ensemble des sources électromagnéto-élastiques induites par EMAT doivent être prises en compte simultanément dans le cas des milieux ferromagnétiques, chaque mécanisme pouvant jouer un rôle ultrasonore selon la configuration d'inspection considérée et aucune règle générique et systématique ne peut être établie comme pour le traitement des sources de Lorentz dans le cas conducteur amagnétique. Ainsi, les développements théoriques permettent la mise en œuvre d'outils numériques efficaces qui permettent de quantifier précisément le poids respectif de chaque source de transduction selon la configuration d'étude, et ainsi d'assister par la simulation l'optimisation de la conception de traducteur EMAT et l'interprétation d'un résultat de mesure dans le cas d'un milieu ferromagnétique.

Les essais de caractérisations expérimentales menés au CETIM de Senlis sont décrits. Des mesures électromagnétiques permettent de renseigner les différentes données d'entrée du modèle de transduction développé, comme les caractéristiques physiques du courant électrique injecté dans la bobine de l'EMAT, et de valider quantitativement les prédictions numériques issues du module CIVA CF du champ magnétique dynamique rayonné dans l'entrefer entre le traducteur et des milieux amagnétique et

magnétique. Des mesures par traducteur piézoélectrique, au contact et en immersion, du rayonnement ultrasonore transmis par une configuration EMAT donnée dans un milieu ferromagnétique aux propriétés magnéto-élastiques caractérisées sont détaillées. Malgré un nombre important d'incertitudes dans l'expérience, notamment sur les lois de comportement magnéto-élastique du milieu inspecté, les caractérisations ultrasonores menées sont en très bon accord avec les prédictions numériques obtenues dans CIVA US, ce qui valide partiellement le modèle théorique de sources électromagnétiques et magnétostrictives induites par EMAT en milieux ferromagnétiques.

Perspectives

On constate dans la littérature récente une croissance significative du nombre d'applications industrielles qui exploitent la technologie EMAT. Toutes sortes de précautions sont prises pour éviter d'avoir à traiter de façon complète les phénomènes de transduction dès lors que les matériaux inspectés sont ferromagnétiques. La mise en œuvre complète dans CIVA des modèles développés devrait permettre de répondre mieux à toute la problématique de mise en œuvre pratique des EMAT pour le CND. En particulier, on sait que la conception des traducteurs piézoélectriques majoritairement utilisés dans la pratique du CND est très largement réalisée sur la base de calculs prédisant les champs ultrasonores rayonnés dans les pièces à contrôler. Le modèle EMAT complet développé doit permettre d'assister la conception d'EMAT optimisés par la simulation efficace et quantitative des phénomènes multi-physiques impliqués et conduire à une amélioration significative des méthodes de CND susceptibles de les utiliser.

Certaines extensions théoriques du modèle de sources électromagnéto-élastiques de transduction ultrasonore peuvent être étudiées, tout en restant dans le formalisme décrit dans ce document. En particulier, la prise en compte des phénomènes d'hystérésis magnétiques, l'ajout de la dépendance fréquentielle des lois d'aimantation et de magnétostriction, et l'utilisation d'un modèle magnéto-dynamique non-linéaire doivent être approfondis pour étendre les modèles développés à la simulation de l'inspection ultrasonore de milieux ferromagnétiques durs par un EMAT alimenté d'une excitation électromagnétique (statique et dynamique) arbitraire. De plus, une analyse rigoureuse doit également être menée pour quantifier les conséquences de l'hypothèse de couplage électromagnéto-élastique faible sur les prédictions de sources et champ ultrasonore induits dans une application de CND par EMAT. Enfin, les travaux de modélisation engagés dans ce document traitent majoritairement de la génération d'ultrasons par EMAT en milieux ferromagnétiques ; cette étude doit ainsi être complétée d'une analyse précise des mécanismes physiques impliqués dans la réception par EMAT d'ondes ultrasonores transmises dans ces milieux.

Les validations expérimentales des modèles développés doit être poursuivie. L'un des objectifs est de mettre en évidence expérimentalement les différents effets prédits par la théorie. De manière générale, la validation expérimentale des modèles développés dans le cadre de CIVA est un travail pratiqué comme une tâche de fond. Les utilisateurs sont bien sûr demandeurs de validations des modules qu'ils utilisent pour exploiter en confiance les prédictions fournies par le logiciel dans le cadre de leurs études de conception des configurations de contrôle et d'interprétation des résultats. Compte tenu de toutes les possibilités d'études à l'aide des fonctionnalités offertes par les modèles développés dans la thèse, les expériences permettant de les valider plus complètement vont être menées sur une longue période.

En particulier, l'utilisation des modèles développés doit permettre d'optimiser la conception d'une configuration de CND par EMAT en travaillant simultanément sur les paramètres de base du traducteur (géométrie de ou des bobines et du ou des aimants permanents) et les paramètres de son excitation (intensité du ou des champs statiques, fréquence et amplitude du courant injecté) tout en tenant compte de la variabilité expérimentale des propriétés des matériaux inspectés. De telles études, strictement impossibles à mener expérimentalement, étaient pratiquement impossibles à mener numériquement à l'aide des méthodes numériques préexistantes, car trop coûteuses en temps de calcul pour prédire quantitativement les effets combinés de la variation des différents paramètres. Avec les modèles semi-analytiques désormais disponibles, de telles études vont pouvoir rapidement être menées à l'aide de simulations réalisées sur un ordinateur personnel.

Spécifiquement, la variation des sources de transduction créées par un EMAT en présence de contraintes résiduelles va être exploitée. Une thèse a débuté pour utiliser la sensibilité des mécanismes de transduction à l'état local (sous l'EMAT) de contraintes résiduelles multiaxiales d'une part, et utiliser l'effet acousto-élastique non-local sur les ondes ultrasonores rayonnées d'autre part, afin de remonter à une cartographie des contraintes mécaniques du milieu ferromagnétique inspecté par EMAT par résolution de ce problème inverse et multi-physique.

ANNEXES

TABLE DES MATIERES

Annexes.....	
A. Formulaire de notations et analyse tensorielle différentielle.....	206
B. Étude comparative des différents modèles de sources électromagnétiques de la littérature ...	207
C. Modèle de contraintes surfaciques équivalentes en milieux élastiques isotropes de géométrie complexe : Publication Wave Motion	215
D. Extension de la méthode pour traiter le cas des milieux élastiques anisotropes et hétérogènes....	229
E. Modèle inertiel de sources magnétostrictives de Nagy et Ribichini.....	231

A. Formulaire de notations et analyse tensorielle différentielle

Dans ce formulaire, les quantités p , \mathbf{v} , \mathbf{T} désignent respectivement des fonctions scalaire, vectorielle et tensorielle. De même, \mathbf{I} représente le tenseur identité d'ordre deux, et \mathbb{C} désigne le tenseur symétrique d'ordre quatre des rigidités élastiques d'un milieu (symétries $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk} = \mathbb{C}_{jilk}$).

Notations indicielles (Convention de sommation de Einstein)

- $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (v_1)_i (v_2)_i$
- $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})_i = T_{ij} v_j$
- $(\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2)_{ij} = (T_1)_{ik} (T_2)_{kj}$
- $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)_{ij} = (v_1)_i (v_2)_j$
- $\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_2 = (T_1)_{ik} (T_2)_{ki}$
- $(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2)_{ijkl} = (T_1)_{ij} (T_2)_{kl}$
- $(\mathbf{T}_1 \underline{\otimes} \mathbf{T}_2)_{ijkl} = \frac{1}{2} [(T_1)_{ik} (T_2)_{jl} + (T_1)_{il} (T_2)_{jk}]$

Relations entre vecteurs et tenseurs

- ${}^T(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$
- $\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 : \mathbf{T}_1$
- $\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_2 = {}^T\mathbf{T}_1 : {}^T\mathbf{T}_2$
- $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v}_1$
- $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1$
- $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{v}_2 \otimes (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_1)$
- $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) : \mathbf{T} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$
- $\mathbb{C} : \mathbf{T} = \mathbb{C} : {}^T\mathbf{T}$
- $\mathbb{C} : (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = (\mathbb{C} \cdot \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1$
- $(\mathbb{C} : \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbb{C}) : \mathbf{T}$
- $[\mathbb{C} : (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)] \cdot \mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_3 \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{v}_2] \cdot \mathbf{v}_1$

Relations d'opérateurs différentiels

- $\nabla(p\mathbf{v}) = p(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v} \otimes (\nabla p)$
- $\nabla(\|\mathbf{v}\|^2/2) = (\nabla\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - [\nabla \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v}$
- $\nabla(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot (\nabla\mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_2 \cdot (\nabla\mathbf{v}_1)$
- $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$
- $\nabla \cdot (p\mathbf{v}) = p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla p)$
- $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot {}^T\mathbf{T}) + \mathbf{T} : (\nabla\mathbf{v})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) + {}^T\mathbf{T} : (\nabla\mathbf{v})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = (\nabla \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1 + (\nabla\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$
- $[\nabla \times \mathbf{v}_1] \times \mathbf{v}_2 = (\nabla\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot (\nabla\mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot (\nabla\mathbf{v}_1)$
- $\nabla(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = (\nabla\mathbf{T}) : (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + \mathbf{T} \cdot ((\nabla\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2)$

B. Étude comparative des différents modèles de sources électromagnétiques de la littérature

Formellement dérivée dans la Section 3.1.2 du Chapitre 3 à partir de principes énergétiques, la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell est mise à profit dans ce manuscrit pour modéliser les sources électromagnétiques de rayonnement ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. La définition formelle de ce tenseur, noté ici $\sigma_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}$ pour la clarté de l'étude comparative, permet de traiter les cas de milieux aux comportements magnétiques variés, linéaires et non-linéaires, à partir d'une représentation adaptée de la co-énergie libre magnétique w_G^m du milieu selon sa loi macroscopique d'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{H})$. Cette méthode permet d'établir de façon générique les expressions des densités volumiques et surfaciques de sources électromagnétiques valables dans tout milieu ferromagnétique. Les expressions obtenues par cette méthode sont comparées à celles obtenues par les différentes méthodes de référence de la littérature (listées dans la Section 3.1.1 du Chapitre 3). Toutes ces méthodes formulent en effet la même résultante globale \mathbf{F}^{em} de forces électromagnétiques exercées sur un solide ferromagnétique, mais définissent des densités volumiques \mathbf{f}^{em} et surfaciques \mathbf{t}^{em} différentes. Pour comparer directement les différentes densités de sources entre elles, on montre dans cette annexe que chacune peut s'interpréter dans le formalisme unique du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell, en tenant compte d'une définition spécifique des contraintes électromagnétiques adaptée à chaque modèle de sources.

On considère un milieu ferromagnétique Ω , plongé dans l'air et caractérisé par sa loi de comportement magnétique $\chi(\mathbf{H})$. Cette loi n'est pas spécifiée ici dans le but de traiter également le cas de comportements magnétiques non-linéaires. Pour simplifier les manipulations tensorielles impliquées et par souci de clarté, les propriétés magnétiques du milieu sont supposées isotropes (aimantation alignée dans la direction de l'excitation magnétique) et la relation constitutive magnétique du milieu s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})) = \mu_0(1 + \chi(\mathbf{H}))\mathbf{H}.$$

En notant $(\mathbf{B}_0, \mathbf{H}_0)$ les variables magnétiques dans l'air (vérifiant la relation constitutive $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0$, et (\mathbf{B}, \mathbf{H}) celles dans le milieu magnétique inspecté, les conditions limites magnétiques (introduites au Chapitre 1) à sa surface $\partial\Omega$ peuvent s'écrire sous la forme suivante [Sanchez-Grandia-et_al_2008] :

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} + \mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Enfin, en notant \mathbf{J} la densité de courants électriques du milieu, les équations de Maxwell s'écrivent sous l'approximation magnétique quasi-statique (discutée dans le Chapitre 1) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Ces équations complètent la description des champs magnétiques du milieu inspecté, ces variables magnétiques étant exploitées par l'ensemble des méthodes de formulation des sources électromagnétiques. Dans un premier temps, les expressions formelles des densités volumique et surfacique de sources électromagnétiques prédites selon la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell sont développées en exploitant les équations d'équilibre magnétique précédentes et le formulaire d'analyse tensorielle de l'Annexe A.

- Développement de la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell

Par définition, la densité de co-énergie libre magnétique w_G^m du milieu ferromagnétique étudié s'écrit :

$$w_G^m = - \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} = -\frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 + w_{G_{\text{int}}}^m, \quad \text{avec : } w_{G_{\text{int}}}^m = -\mu_0 \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h}.$$

Dans cette expression, $w_{G_{\text{int}}}^m$ identifie la densité de co-énergie libre magnétique interne du milieu, ce terme d'énergie est calculé directement à partir de la loi de comportement magnétique $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ du milieu inspecté (linéaire ou non). Sous l'hypothèse de comportement magnétique isotrope et selon la définition précédente de la co-énergie libre magnétique w_G^m du milieu, les produits tensoriels $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ et $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$ sont égaux et le tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell σ_{Mx}^{em} s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{Mx}^{\text{em}} = \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}}{2} + w_G^m \mathbf{I} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I}.$$

Par définition de la méthode, la résultante globale de forces électromagnétiques exercées sur le milieu se décompose sous la forme de densités volumique $\mathbf{f}_{Mx}^{\text{em}}$ et surfacique $\mathbf{t}_{Mx}^{\text{em}}$ définies par :

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{Mx}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{Mx}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_{Mx}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\sigma_{Mx}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

En exploitant le formulaire d'analyse tensorielle de l'Annexe A et la relation constitutive magnétique du matériau, on peut développer la densité volumique de sources électromagnétiques sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Mx}^{\text{em}} &= \nabla \cdot \sigma^{\text{em}} \\ &= \nabla \cdot \left\{ \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I} \right\} \\ &= (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \nabla (\|\mathbf{H}\|^2) + \nabla w_{G_{\text{int}}}^m \\ &= \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} + \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M} - \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} + \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \nabla w_{G_{\text{int}}}^m \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \nabla w_{G_{\text{int}}}^m. \end{aligned}$$

De plus, en exploitant la définition $\sigma_0^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H}_0 \otimes \mathbf{H}_0 - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}_0\|^2 \mathbf{I}$ du tenseur des contraintes de Maxwell dans l'air et les conditions limites magnétiques à la surface $\partial\Omega$ du milieu, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{Mx}^{\text{em}} &= [\sigma_{Mx}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = [\sigma_0^{\text{em}} - \sigma_{Mx}^{\text{em}}] \cdot \mathbf{n} \\ &= \mu_0 (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_0 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}_0\|^2 \mathbf{n} + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{n} - w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} \\ &= \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}\|^2 \mathbf{n} + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{n} - w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} \\ &= \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{2} [\|\mathbf{H}\|^2 + 2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2] \mathbf{n} + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{n} - w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} \\ &= \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, on montre finalement que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{Mx}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\text{Mx}}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{Mx}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\text{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} [\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \nabla w_{\text{Gint}}^{\text{m}}] d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{n} \right] d\Gamma. \end{aligned}$$

Cette expression ne peut pas être développée davantage en conservant une loi d'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ arbitraire dans l'expression de la co-énergie libre magnétique interne du milieu étudié.

Remarque relative aux milieux magnétiques linéaires et homogènes :

En faisant l'hypothèse supplémentaire d'un milieu magnétique linéaire, décrit par $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi \mathbf{H}$, avec χ constante, la densité de co-énergie libre magnétique interne $w_{\text{Gint}}^{\text{m-lin}}$ se réduit à l'expression suivante :

$$w_{\text{Gint}}^{\text{m-lin}} = -\mu_0 \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} = -\mu_0 \chi \int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{h} = -\frac{\mu_0 \chi \|\mathbf{H}\|^2}{2} = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}.$$

En tenant compte de cette définition et du formulaire d'analyse tensorielle de l'Annexe A, la densité $\mathbf{f}_{\text{Mx-lin}}^{\text{em}}$ peut se développer dans le cas d'un milieu magnétique linéaire et homogène sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{Mx-lin}}^{\text{em}} &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \nabla w_{\text{Gint}}^{\text{m-lin}} \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 \chi (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - \mu_0 \nabla (\chi \|\mathbf{H}\|^2 / 2) \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 \chi (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - \mu_0 \chi [(\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - [\nabla \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}] \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 \chi \mathbf{J} \times \mathbf{H} \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

On retrouve l'expression classique de la densité de force de Lorentz. Ainsi, on montre que la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell appliquée en milieu magnétique linéaire prédit les densités volumique et surfacique de sources électromagnétiques suivantes :

$$\mathbf{F}_{\text{lin}}^{\text{em}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{Mx-lin}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\text{Mx-lin}}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mu_0}{2} [(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}] \mathbf{n} d\Gamma.$$

Remarque relative aux milieux magnétiques linéaires et hétérogènes :

Dans le développement précédent de $\mathbf{f}_{\text{Mx-lin}}^{\text{em}}$ (deuxième ligne), un terme supplémentaire apparaît naturellement pour témoigner de l'hétérogénéité du milieu inspecté. En effet, la prise en compte du gradient de la susceptibilité magnétique du milieu $\nabla \chi$ conduit directement à l'expression de la densité volumique de forces électromagnétiques issue de la méthode de Korteweg-Helmholtz [Melcher_1981].

$$\mathbf{f}_{\text{Mx}}^{\text{em}} = \mathbf{f}_{\text{KH}}^{\text{em}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mu_0 \chi}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \nabla \chi.$$

La définition des contraintes électromagnétiques de Maxwell étant formulée exclusivement à partir de principes énergétiques sur l'équilibre d'un milieu ferromagnétique, le lien fort entre la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode énergétique de Korteweg-Helmholtz apparaît naturellement.

- Comparaison avec la méthode de la densité de force de Kelvin

À partir des développements précédents des densités volumique $\mathbf{f}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}}$ et surfacique $\mathbf{t}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}}$ de sources électromagnétiques obtenues par la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell dans le cas d'un milieu magnétique isotrope de comportement potentiellement non-linéaire, on remarque directement que la méthode de la densité de force de Kelvin s'obtient simplement en transférant le terme dépendant de la co-énergie magnétique interne (due à l'existence du champ d'aimantation) de l'intégrale volumique à l'intégrale de surface par le théorème de flux-divergence. En effet, il vient simplement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} [\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \nabla w_{\text{Gint}}^m] d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{\text{Gint}}^m \mathbf{n} \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} [\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}] d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot [w_{\text{Gint}}^m \mathbf{I}] d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{\text{Gint}}^m \mathbf{n} \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} [\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}] d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} d\Gamma.
\end{aligned}$$

On montre alors directement que la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell et celle de la densité de force de Kelvin prédisent une même résultante de force \mathbf{F}^{em} mais des densités volumiques et surfaciques différentes. Les deux méthodes sont donc intimement liées ; elles échangent simplement un terme de surface sous la forme d'un gradient dans le volume. Cet échange de termes sources entre surface et volume peut finalement être illustré par la prise en compte de contraintes électromagnétiques $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}}$ modifiées dans le but de dériver directement la méthode de la densité de force Kelvin. En effet, toujours sous l'hypothèse d'isotropie magnétique, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \\
&\text{avec : } \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

La différence entre le tenseur formel des contraintes électromagnétiques de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}}$ et celui de la méthode de Kelvin $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}}$ fait donc directement apparaître un terme de pression magnétique qui correspond à la co-énergie libre magnétique interne du milieu ferromagnétique inspecté :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}_x}^{\text{em}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}}^{\text{em}} = w_{\text{Gint}}^m \mathbf{I} = -\mu_0 \left(\int_{\mathbf{h}=0}^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \right) \mathbf{I}.$$

La méthode de Kelvin exploite donc simplement le transfert de cette énergie interne de l'intégrale volumique vers l'intégrale de surface du milieu ferromagnétique inspecté.

Remarque sur la méthode 3 de Seher et Nagy (Section 3.1.1.5 du Chapitre 3) :

La méthode de la densité de force de Kelvin correspond à la méthode 2 telle que référencée dans le travail de Seher et Nagy [Seher-Nagy_2016]. Il est très facile de constater que la méthode 3 de ce même papier est directement équivalente à la méthode de Kelvin. Dans un premier temps, les expressions des densités surfaciques de sources électromagnétiques décrites par ces deux méthodes sont identiques :

$$\mathbf{t}_K^{\text{em}} = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} = \mathbf{t}_{m3}^{\text{em}}$$

De plus, en exploitant le formulaire d'analyse tensorielle de l'Annexe A, on montre très simplement que les termes sources volumiques \mathbf{f}_K^{em} et $\mathbf{f}_{m3}^{\text{em}}$ sont équivalents :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_K^{\text{em}} &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{M} - \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{M} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot (\nabla \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{f}_{m3}^{\text{em}}. \end{aligned}$$

Cela montre alors directement que la méthode 3 de Seher et Nagy est strictement équivalente à la méthode de la densité de force de Kelvin, dont le lien avec la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell a été établi précédemment.

- Comparaison avec la méthode des charges magnétiques équivalentes

On étudie maintenant le lien entre la méthode du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell et la méthode des charges magnétiques équivalentes, sous l'hypothèse d'un milieu magnétique isotrope (et éventuellement non-linéaire). Cette dernière méthode repose en réalité uniquement sur la variable d'état magnétique \mathbf{H} . En effet, le transfert de l'ensemble des termes du tenseur $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}$ qui dépendent de l'aimantation \mathbf{M} du milieu de l'intégrale volumique à l'intégrale de surface permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{H} \otimes \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{M} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left\{ [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} \right\} d\Gamma. \end{aligned}$$

En exploitant le formulaire d'analyse tensorielle de l'Annexe A, le développement du terme $[\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M}\mathbf{x}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega}$, et l'équation de Maxwell de conservation du flux magnétique ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, et donc $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$), on

montre en introduisant la densité volumique $q_m = -\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{M})$ et surfacique $q_m^S = \mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})$ de charges magnétiques équivalentes que les précédents termes volumiques et surfaciques peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} \right\} &= \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{H})\mathbf{H} + \mu_0(\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - \mu_0 \nabla(\|\mathbf{H}\|^2/2) \\ &= -\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{M})\mathbf{H} + \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + q_m \mathbf{H} \\ &= \mathbf{f}_{q_m}^{\text{em}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{H} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} &= \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{H} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{n} \\ &= \mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \left[\mathbf{H} + \frac{1}{2}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} \\ &= \mathbf{t}_{q_m}^{\text{em}}. \end{aligned}$$

Ainsi, ces développements conduisent à l'expression des densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques prédites par la méthode des charges magnétiques équivalentes, ce qui met en évidence le lien théorique de cette méthode avec la méthode du tenseur des contraintes de Maxwell.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{q_m}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{q_m}^{\text{em}} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \{ \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + q_m \mathbf{H} \} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} q_m^S \left(\mathbf{H} + \frac{1}{2} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \right) d\Gamma, \\ &\text{avec : } \begin{cases} q_m = -\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{M}), \\ q_m^S = \mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}). \end{cases} \end{aligned}$$

Comme pour la méthode de la densité de force de Kelvin et selon le raisonnement présenté, on peut naturellement identifier un tenseur des contraintes électromagnétiques $\sigma_{q_m}^{\text{em}}$ modifié qui permet de dériver directement la méthode des charges magnétiques équivalentes, ce qui permet ainsi de confronter les deux méthodes de formulation des densités de forces électromagnétiques par simple comparaison de leur tenseur respectif des contraintes électromagnétiques. En effet, on démontre que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{q_m}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{q_m}^{\text{em}} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_{q_m}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\sigma_{q_m}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \\ &\text{avec : } \sigma_{q_m}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur $\sigma_{q_m}^{\text{em}}$ adapté à la méthode des charges magnétiques équivalentes ne dépend pas de l'aimantation du milieu, mais uniquement de son excitation magnétique. La différence entre ce tenseur et le tenseur original $\sigma_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}$ des contraintes électromagnétiques de Maxwell s'écrit :

$$\sigma_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} - \sigma_{q_m}^{\text{em}} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{M} + w_{G_{\text{int}}}^m \mathbf{I}.$$

- Comparaison avec la méthode des courants magnétiques équivalents

Enfin, la méthode des courants magnétiques équivalents est comparée à la méthode du tenseur de contraintes électromagnétiques de Maxwell. Cette méthode est formulée uniquement à partir de la variable d'état magnétique \mathbf{B} . En suivant un raisonnement similaire à celui adopté précédemment pour le traitement de la méthode des charges magnétiques équivalentes, on peut en effet montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{\text{em}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \mathbf{I} + w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right\|^2 \mathbf{I} + w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{I} \right\} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{M} \otimes \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{I} + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{I} - w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{I} \right\} d\Omega \\
&\quad + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right\} d\Omega \\
&\quad + \oint_{\partial\Omega} \left\{ [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{M} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{n} + w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{n} \right\} d\Gamma
\end{aligned}$$

À l'aide du formulaire d'analyse tensorielle et des équations de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M})$, on montre en introduisant la densité volumique $\mathbf{J}_{\text{m}} = \nabla \times \mathbf{M}$ de courants magnétiques équivalents que le terme volumique dérivé précédemment peut se développer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 \mathbf{I} \right\} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
&= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{J}_{\text{m}} \times \mathbf{B} \\
&= \mathbf{f}_{\text{j}_m}^{\text{em}}.
\end{aligned}$$

En exploitant l'identité vectorielle $(\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$ et en introduisant la densité surfacique $\mathbf{j}_{\text{m}}^{\text{S}} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ de courants magnétiques équivalents, le terme surfacique obtenu peut également se développer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Mx}}^{\text{em}}]_{\partial\Omega} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{M} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{n} + w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{n} \\
&= \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{n} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{M} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{n} + w_{\text{Gint}}^{\text{m}} \mathbf{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B})\mathbf{n} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{M} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{n} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \\
 &= (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B})\mathbf{n} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{M} - \frac{\mu_0}{2} \{ \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{M} \} + \frac{\mu_0}{2} \{ (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{M} \} \\
 &= (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times [(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \\
 &= \mathbf{j}_m^S \times \left(\mathbf{B} + \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right) \\
 &= \mathbf{t}_{jm}^{em}.
 \end{aligned}$$

Les développements précédents définissent donc les densités volumiques et surfaciques de forces électromagnétiques de la méthode des courants magnétiques équivalents, soit donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{em} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{Mx}^{em} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{Mx}^{em} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{jm}^{em} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{jm}^{em} d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{J}_m \times \mathbf{B} \} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j}_m^S \times \left(\mathbf{B} + \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{M} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right) d\Gamma, \\
 &\quad \text{avec : } \begin{cases} \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}, \\ \mathbf{j}_m^S = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

De manière équivalente aux comparaisons de méthodes précédentes, la méthode des courants magnétiques équivalents repose également sur sa propre expression du tenseur des contraintes électromagnétiques σ_{jm}^{em} , ce qui permet de simplement établir les liens théoriques entre cette méthode et celle du tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell. En effet, il vient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{em} &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_{jm}^{em} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{jm}^{em} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_{jm}^{em} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\sigma_{jm}^{em}]_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \\
 &\quad \text{avec : } \sigma_{jm}^{em} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 \mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

Comme pour les contraintes électromagnétiques associées à la méthode des charges magnétiques équivalentes, le tenseur modifié σ_{jm}^{em} correspondant à la méthode des courants magnétiques équivalents ne dépend plus de l'aimantation du milieu, mais cette fois-ci uniquement de l'induction magnétique du milieu inspecté. On peut montrer que la différence entre ce tenseur et le tenseur formel σ_{Mx}^{em} des contraintes électromagnétiques de Maxwell a pour expression :

$$\sigma_{Mx}^{em} - \sigma_{jm}^{em} = -\mathbf{M} \otimes \mathbf{B} + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{I} - \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{I} + w_{G_{int}}^m \mathbf{I}.$$

C. Modèle de contraintes surfaciques équivalentes en milieux élastiques isotropes de géométrie complexe : Publication Wave Motion

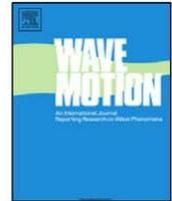
Wave Motion 60 (2016) 135–147



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Wave Motion

journal homepage: www.elsevier.com/locate/wavemoti



Transformation of body force generated by non-contact sources of ultrasound in an isotropic solid of complex shape into equivalent surface stresses



Bastien Clause, Alain Lhémy*

CEA, LIST, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

HIGHLIGHTS

- We develop a method to simulate dynamic body forces as equivalent surface stresses.
- Body forces are assumed to be confined at depths smaller than elastic wavelengths.
- The method handles arbitrary shaped surface through surface differential operators.
- Explicit formula of equivalent stress includes first and second order force moments.
- Formulas provide inputs to wave radiation models for non-contact ultrasonic sources.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 6 February 2015

Received in revised form 2 September 2015

Accepted 21 September 2015

Available online 1 October 2015

Keywords:

Ultrasonic NDE

Non-contact sources

Elastic wave radiation

Equivalent surface stress

Differential and tensorial analyses

ABSTRACT

Non-contact techniques in ultrasonic nondestructive evaluation use external non-mechanical excitation (electromagnetic, heat) which interacts with the mechanical part to be tested. The part itself becomes the source of ultrasounds by transforming the non-mechanical energy into a mechanical one. This process involves the generation of dynamic body forces or of an eigenstrain that can be modeled as equivalent body forces, these forces being confined in the vicinity of the part surface. Many models developed for predicting ultrasonic field radiation in solids assume source terms given as surface distributions of stress. In order to predict ultrasonic fields radiated by non-contact sources by means of these radiation models, we developed a method to transform dynamic body forces into equivalent surface stress distributions, irrespective of the nature of the excitation. The approximate transformation relies on a second order expansion of Green's integral formulation of the elastic wave equation. To make this transformation applicable broadly, the geometry of the surface considered herein is of complex shape, implying thorough differential and tensorial analyses to achieve our aim. Some assumptions, notably isotropic elasticity, are made in deriving the transformation method, which are discussed in detail to clearly define its applicability. Numerical examples of radiated fields are given for illustration and validation.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

In ultrasonic Non-Destructive Evaluation (NDE), elastic waves are generated into the solid under examination by transducers. In most cases, piezoelectric transducers are used, operating from outside through a medium which mechanically

couples them to the solid. When the use of such coupling must be avoided or if piezoelectric transducers cannot be used, alternative non-contact solutions must be implemented. For this, the part under examination is excited by an external source of a physical field of non-mechanical nature. The interaction of this field with the part converts the non-mechanical energy involved into dynamic mechanical effects within the material, which in turn becomes a source of elastic waves. Electro-Magnetic Acoustic Transducers (EMAT) [1,2] and lasers in the thermoelastic regime [3] are the two main non-contact sources currently used in Ultrasonic Testing (UT). The dynamic mechanical effects they generate are produced in the former case by electromagnetic phenomena and in the latter case by material heating. In both cases, mechanical sources are generated in a thin layer below the solid free (of coupling medium) surface. The layer thickness depends both on characteristics of the excitation fields involved and on the ability of the solid medium to transform them into dynamic mechanical energy.

It is not our purpose to describe further the underlying physical phenomena involved in these transduction processes which are still the subjects of researches in complex cases, even though the basic principles are well known and documented elsewhere [1–3]. For what follows, we only assume that this kind of transduction by non-contact sources can be modeled and that, as a result, the dynamic source of elastic waves can be written as a distribution of body forces. Note that the very nature of the mechanical excitation may be an actual body force or an eigenstrain (elastic or inelastic). In the latter case, some classical manipulations in continuum mechanics allow one to convert such strains into artificial body forces distribution. In our target applications for which the present work has been developed, namely EMAT generation of ultrasonic waves in ferromagnetic materials, both kinds of mechanical excitation coexist: the Lorentz and magnetization transduction processes are actual dynamic body forces, whereas magnetostrictive one is a pure inelastic eigenstrain, for which the conversion into artificial body force distribution has been proposed in the literature (see for example [1,4]). Regardless of its physical nature, this distribution of body forces is generally confined in the vicinity of the part surface. The notion of vicinity will be explicitly indicated by a thickness denoted by β , subsequently. In EMAT applications, β is related to the skin depth of the involved dynamic electromagnetic fields.

In ultrasonic nondestructive evaluation, accurate knowledge of the ultrasonic field radiated by the source is of paramount importance as soon as quantitative results are expected, that is to say, if the method of examination is designed to go as far as defect characterization and sizing. For this reason, in the vast literature, many models have been developed to compute field radiation by ultrasonic sources. Among them, many models were developed to predict fields radiated by mechanical sources operating at the surface of the solid. The calculation of the elastic wave field radiated by a point-source of normal or tangential stress in an elastic half-space, that is to say, the Green's function of the so-called Lamb's problem, is the subject of hundreds of papers in the literature, including exact, approximate or numerical solutions and dealing with a variety of elastic media, after Lamb's pioneering contribution [5]. For finite-size sources, a simple surface and time convolution of the time-dependent surface stress distribution with one such solution for a point source leads to predict source diffraction effects [6]. It is our aim to develop a mathematical method allowing us to use this kind of time and surface convolution models to predict the field radiated by non-contact sources.

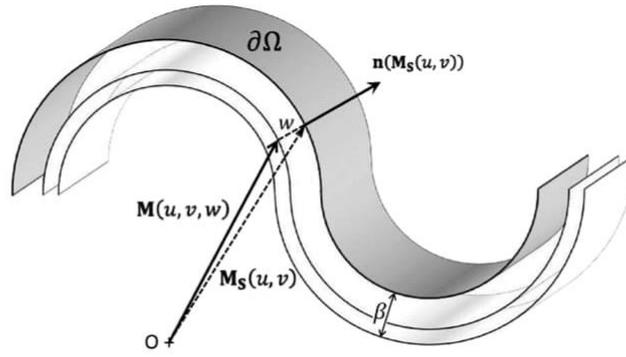
The present work demonstrates the possibility of deriving a systematic way of transforming body forces associated to a non-contact source into equivalent sources of surface stress that can be readily used in radiation models. The basic idea is rather classical and has been used by Kawashima [7] to transform Lorentz's force generated by an EMAT into equivalent surface stress by simply integrating the force over the depth. The approximation made corresponds to a zeroth order expansion of the radiation integral of a body force distribution. The possibility to derive a higher order approximation was pioneered by Thompson [8] who derived an expression of equivalent surface stress to model magnetostriction effects produced by an EMAT in a ferromagnetic planar part. In this work, a second order expansion was worked out. However, mathematical details were not given in this paper and some final expressions were misprint. Recently, following Thompson's steps, Rouge et al. [9] published the necessary mathematical details to derive the second order expansion in terms of equivalent surface stress for a distribution of body forces at the vicinity of a planar surface. The assumption made of a planar part leads to significant simplifications (though many of them are not explicitly identified) so much so that final formulas of equivalent surface stress are rather simple.

Here, the second order expansion is derived in the case of body forces located below a free surface of complex shape. The aim is to make this transformation suitable to deal with the actual shape of parts typically tested in the industrial practice. Some tensorial and differential analyses are carried out to deal with the geometrical representation of an arbitrary surface. The present paper details the mathematical steps which allow the derivation of a first order expansion to model body force distributions as equivalent surface stresses. Then, an explicit formulation of the second order expansion is also given. It is obtained using similar mathematical calculations not fully reproduced in the paper for conciseness. The underlying assumptions and approximations made in deriving the formulas are pointed out throughout the paper to clearly discuss their applicability. The final formulation for complex shaped surfaces is readily usable. Its improved accuracy is illustrated by some numerical validations in the cylindrical case.

2. Mathematical formulation of the problem

2.1. Geometric layout definition

There are many ways to define a surface. Here, our choice, motivated by computation needs, has been made to represent the exterior surface $\partial\Omega$ of an inspected component Ω by a parametric surface description in \mathbb{R}^3 . Thus, $\partial\Omega$ is depicted by


 Fig. 1. Definition of the domain Ω_β .

the diffeomorphism $\mathbf{M}_S : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, where $U \subset \mathbb{R}^2$ is an open subset, which is formally written as:

$$(\partial\Omega) : \forall (u, v) \in U, \quad \mathbf{M}_S(u, v) = (M_{S1}(u, v), M_{S2}(u, v), M_{S3}(u, v)). \quad (1)$$

Moreover, we assume that \mathbf{M}_S is an immersion, which means that its total differential $d_{(u,v)}\mathbf{M}_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is injective for all $(u, v) \in U$. From such an application, the tangent plane of \mathbf{M}_S at $(u, v) \in U$ is defined as:

$$T_{(u,v)}\mathbf{M}_S := \text{Im}(d_{(u,v)}\mathbf{M}_S) = \text{Vect}(\partial_u\mathbf{M}_S(u, v), \partial_v\mathbf{M}_S(u, v)), \quad (2)$$

where $\partial_u\mathbf{M}_S = \frac{\partial\mathbf{M}_S}{\partial u}$ and $\partial_v\mathbf{M}_S = \frac{\partial\mathbf{M}_S}{\partial v}$. Using this parametric description, all the geometric parameters of the surface $\partial\Omega$ can be determined. For instance, the outer-pointing normal \mathbf{n} to $\partial\Omega$ at a point $(u, v) \in U$ and the surface element $d\Gamma$ are particularly valuable in the subsequent developments. They are defined by:

$$\forall (u, v) \in U, \quad \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}(\mathbf{M}_S(u, v)) := \frac{\partial_u\mathbf{M}_S(u, v) \times \partial_v\mathbf{M}_S(u, v)}{\|\partial_u\mathbf{M}_S(u, v) \times \partial_v\mathbf{M}_S(u, v)\|}, \quad \text{and} \quad d\Gamma := \|\partial_u\mathbf{M}_S \times \partial_v\mathbf{M}_S\| dudv. \quad (3)$$

Due to the tangent plane definition given in Eq. (2) and to the properties of the cross product denoted by \times in previous equations, it is straightforward to see that for all $(u, v) \in U$, the vector $\mathbf{n}(\mathbf{M}_S(u, v))$ is normal to the tangent plane $T_{(u,v)}\mathbf{M}_S$. The vector field $\mathbf{n} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ is the so-called Gauss' unitary normal field to the parametric surface $\partial\Omega$ and the triplet $(\partial_u\mathbf{M}_S, \partial_v\mathbf{M}_S, \mathbf{n}) : U \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$ forms the Gauss' mobile coordinates system of $\partial\Omega$.

Remark 1. Generally, the Gauss' mobile coordinates system $(\partial_u\mathbf{M}_S, \partial_v\mathbf{M}_S, \mathbf{n})$ is not orthonormal. Indeed for all $(u, v) \in U$, it comes easily that $\|\mathbf{n}(u, v)\| = 1$ and $\mathbf{n}(u, v) \perp T_{(u,v)}\mathbf{M}_S$, but the basis $(\partial_u\mathbf{M}_S, \partial_v\mathbf{M}_S)$ itself is not an orthonormal basis of the tangent plane $T_{(u,v)}\mathbf{M}_S$.

Let us now focus on the description of the three-dimensional domain of study Ω which embodies the part under test. In fact, only a parametric description of a close vicinity to the surface $\partial\Omega$ will be needed in what follows. This aforementioned close neighborhood to $\partial\Omega$ will be called Ω_β and is defined by a parameter $\beta > 0$ denoting the normal depth from $\partial\Omega$. The parameter β has a physical meaning, related to variations along depth of the studied body forces distribution and will be more precisely explained in the next section. As represented in Fig. 1, the sub-domain $\Omega_\beta \subset \Omega$ is defined by the following parametric expression:

$$(\Omega_\beta) : \forall (u, v, w) \in U \times]0, \beta[, \quad \mathbf{M}(u, v, w) = \mathbf{M}_S(u, v) - w\mathbf{n}(\mathbf{M}_S(u, v)). \quad (4)$$

Depending on k_1 and k_2 the two main curvatures at a point $(u, v) \in U$ of $\partial\Omega$, this parametric description of Ω_β is relevant as long as the parameter $\beta > 0$ verifies the conditions of applicability listed below:

$$\begin{cases} k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 : \forall \beta > 0, \\ k_1 \leq 0, k_2 \leq 0 : 0 < \beta < \min(|k_1|^{-1}, |k_2|^{-1}), \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 : 0 < \beta < |k_1|^{-1}. \end{cases} \quad (5)$$

These conditions are necessary to formally define Ω_β by the parametric representation given by Eq. (4). They are related to the formal definition of the involved volume element $d\Omega$, leading to the inequality: $\det(\partial_u\mathbf{M}, \partial_v\mathbf{M}, \partial_w\mathbf{M}) > 0$. Assuming that β satisfies these conditions, the change of coordinates able to deal with volume integral over Ω_β of an arbitrary function ϕ using the curvilinear coordinates $(u, v, w) \in U \times]0, \beta[$ can be written as:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\beta} \phi d\Omega &= \iiint_{U \times]0, \beta[} \phi(\mathbf{M}(u, v, w)) |\det(\partial_u\mathbf{M}, \partial_v\mathbf{M}, \partial_w\mathbf{M})| dudvdw \\ &= \iiint_{U \times]0, \beta[} \phi(\mathbf{M}(u, v, w)) [1 + 2Hw + Kw^2] dw d\Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

where $H = (k_1 + k_2)/2$ is the mean curvature of $\partial\Omega$ and $K = k_1k_2$ refers to the Gauss' curvature of $\partial\Omega$. This separation of variables allows us to consider two separate integrals, the first one on the parametric description of the surface $\partial\Omega$, and the second one along the normal distance of a point $(u, v) \in U$ from the studied surface.

2.2. Particle displacement field expansion

Let us consider an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ embodying the elastic domain of the part under test. We want to study the particle displacement field $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ radiated at an observation point $\mathbf{x} \in \Omega$ by a distribution of time-harmonic body force $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)e^{i\omega t}$, where ω denotes the angular frequency. As introduced in the previous section, we assume that the source points $\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta$ with β denoting the characteristic length of the body forces variations along depth, that is to say, β is chosen so that the body forces distribution \mathbf{f} vanishes outside the domain Ω_β . The goal of this paper is to present a mathematical approach leading to the transformation of these body forces into equivalent surface stresses through a second order expansion. We assume that body forces are known analytically. Moreover, under the definition of Ω_β , we further assume that for each $(u, v) \in U$, the function $w \mapsto \mathbf{f}(u, v, w)$ is Lebesgue integrable on $]0, \beta[$ and that, for each $w \in]0, \beta[$, the function $(u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v, w)$ is in $H^2(U) \cap \mathcal{C}^2(U)$. The body force distributions in our targeted applications, namely, the ultrasonic generation by an EMAT, generally fulfill such assumptions in typical configurations of coils and permanent magnet (see for example the analytic expression of the Lorentz force in cases of unidirectionally aligned coils and of a meander-line coil given in [2]). However, less restrictive assumptions on \mathbf{f} smoothness could possibly be made if necessary, but this possibility depends on the involved configuration, so that this particular point is not further discussed herein.

Then, the displacement field $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ can be expressed as a spatial convolution integral of body forces $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ with the Green's tensor $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ for elastic waves in Ω . Note that in what follows, the Green's tensor is formally used in the equations but that there is no need for expliciting it. Following the summation convention for repeated subscripts and assuming that β verifies the conditions of applicability of the representation of Ω_β given in Eq. (5) towards the main curvatures of $\partial\Omega$, the convolution integral is given by:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta} G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}_0) d\Omega. \quad (7)$$

This index-based equation leads us to consider the Green's vector, denoted by \mathbf{G}_k and defined by the elements of the k th row of the Green's tensor \mathbf{G} . This mathematical object includes all the Green's information required to calculate u_k , that is to say, to obtain the k th element of the particle displacement field \mathbf{u} . Eq. (7) can be re-written as:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta} \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) d\Omega, \quad \text{with } \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} G_{k1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ G_{k2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ G_{k3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Hence, this choice of mathematical representation permits us to simply handle some classical vectors and tensors properties, by stating that, from now, the index k refers to the calculation of u_k . Our goal in the present paper is then to find an equivalent surface stress distribution $\tilde{\sigma}_f$ defined for $\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega$ to transform the previous relation into a simpler convolution integral over the surface $\partial\Omega$ of the domain, which can be formally written as:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u_k(\mathbf{x}) \simeq \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\sigma}_f(\mathbf{X}_0) d\Gamma. \quad (9)$$

Then, the more accurately the equivalent surface stress distribution $\tilde{\sigma}_f$ is modeled, the more reliably the wave field radiated by the initial body forces \mathbf{f} will be simulated. In order to give some clues to start the derivation of the equivalent surface stress distribution, let us first remark that the sub-domain Ω_β of Ω given in Eq. (4) and illustrated in Fig. 1 can also be characterized by:

$$\Omega_\beta := \{\mathbf{x} \in \Omega / \exists (\mathbf{X}, w) \in \partial\Omega \times]0, \beta[, \mathbf{x} = \mathbf{X} - w\mathbf{n}(\mathbf{X})\}. \quad (10)$$

This is true as long as β satisfies the conditions listed in Eq. (5). This allows us to decompose the vector $\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta$ into a vector $\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega$ and a normal distance $w \in]0, \beta[$ from $\partial\Omega$ as: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0 - w\mathbf{n}(\mathbf{X}_0)$. Then, a decisive mathematical step consists in expanding the vector function $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ as a Taylor's series at the surface point \mathbf{X}_0 . Since the Green's vector \mathbf{G}_k is singular at $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, the observation points \mathbf{x} are then taken in $\Omega \setminus \Omega_\beta$. This expansion at the N th order is formally given by:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \quad \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \simeq \sum_{p=0}^N \frac{(-w)^p}{p!} \frac{\partial^p \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^p}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0). \quad (11)$$

We assume that variations of the Green's vector along depth are weak compared to those of the body forces. The former variations are related to the inverse of the ultrasonic wavelength $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, a few millimeters for typical frequencies used in nondestructive evaluation. The latter ones are related to the inverse of the parameter β , which has different definitions

depending on the physical nature of body forces involved. This leads us to assume that $\beta \ll \lambda$, ensuring that the normal distance w is small enough to faithfully approximate the particle displacement by the N th order expansion that follows:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad u_k(\mathbf{x}) \simeq \int_{\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^p}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}^{(p)}(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad (12)$$

where $\mathbf{M}^{(p)}$ denotes the p th order moment of the body force \mathbf{f} with respect to depth defined as:

$$\forall \mathbf{X}_0 \in \partial\Omega, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{M}^{(p)}(\mathbf{X}_0) = \int_0^\beta \mathbf{f}(\mathbf{X}_0 - w\mathbf{n}) (-w)^p [1 + 2Hw + Kw^2] dw. \quad (13)$$

Remark 2. The whole information concerning variations along the surface normal to $\partial\Omega$ as well as the curvatures is contained into the definition of the force moments. Computing only the zeroth order $\mathbf{M}^{(0)}$ represents actually the simple scheme mentioned in the introduction which consists in modeling the equivalent surface stresses of body forces as an integration over depth, as done in some modeling of non-contact sources [7]. The present paper aims at using this expansion up to the second order to improve accuracy of the field computation. The particle displacement is therefore approximated by:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad u_k(\mathbf{x}) \simeq \int_{\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} & \left[\mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{X}_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{X}_0) \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Remark 3. The above-stated condition of applicability $\beta \ll \lambda$ must be carefully addressed. With electromagnetic acoustic transducers (EMAT), the parameter β can be defined as a certain number of times the skin depth δ which depends both on electromagnetic properties of the part material and on the excitation frequency. At typical frequencies used in NDE, δ is generally smaller by at least one order of magnitude than the ultrasonic wavelength.

Remark 4. The main interest in modeling the body forces distribution as equivalent surface stresses and using Eq. (9) lies in the fact that the Green's tensor must be computed only for source points at the surface and not over the whole three-dimensional source domain Ω_β . This clearly reduces the computation costs. Moreover, Green's tensor expressions for surface source points are both better known and simpler, this leading to even better efficiency.

3. First order expansion of equivalent surface stresses transformation

3.1. Expression of the first normal derivative of G_k

This section aims at establishing an explicit formulation of the first normal derivative of the Green's vector \mathbf{G}_k . The approach presented in this section is inspired by the work of Gu and He [10] for modeling imperfect elastic interfaces. Let us consider source points which belong to Ω_β . Hooke's law gives us some information about the normal stresses using the fourth order elastic stiffness tensor \mathbf{C} and the definition of the second order strain tensor ϵ of \mathbf{G}_k . Due to the symmetries of \mathbf{C} , one has:

$$\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{G}_k)] \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{G}_k] \cdot \mathbf{n}, \quad (15)$$

where $\sigma^{\mathbf{G}_k}$ stands for the second order stress tensor associated to the elementary displacement \mathbf{G}_k .

At this stage, we decompose the differential operators into their normal ∇_n and tangential ∇_s components by introducing the normal projector $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ and the tangential one $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ (see for example Nédélec [11]). Given a vector function \mathbf{v} in Ω , these differential operators decompose the gradient as $\nabla \mathbf{v} = \nabla_n \mathbf{v} + \nabla_s \mathbf{v}$, with: $\nabla_n \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^\perp$ and $\nabla_s \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}$. Similarly, the divergence is decomposed as $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla_n \cdot \mathbf{v} + \nabla_s \cdot \mathbf{v}$, with: $\nabla_n \cdot \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} : \mathbf{P}^\perp$ and $\nabla_s \cdot \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} : \mathbf{P}$. Eq. (15) is rewritten as:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n} &= [\mathbf{C} : (\nabla_n \mathbf{G}_k + \nabla_s \mathbf{G}_k)] \cdot \mathbf{n} \\ &= \left[\mathbf{C} : \left(\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} \right) \right] \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{C} : \nabla_s \mathbf{G}_k] \cdot \mathbf{n} \\ &= [\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}] \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} + [\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}] : \nabla_s \mathbf{G}_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Let us name the second order tensor $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$. This tensor can be found in the literature under the Christoffel's tensor denomination associated to the local normal direction \mathbf{n} (see for example Royer and Dieulesaint [12]); it is invertible due

to the positive-definite character of \mathbf{C} . Hence, by defining the second order tensor $\mathbf{F} = \mathbf{\Gamma}^{-1}$, and the third order tensor $\mathbf{A} = \mathbf{F} \cdot [\mathbf{n}, \mathbf{C}]$, the first normal derivative of the Green's vector can be extracted from previous equations. This leads us to the intrinsic expression:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{F} \cdot [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}] - \mathbf{A} : \nabla_s \mathbf{G}_k \quad \text{in } \Omega_\beta. \quad (17)$$

Then, the next steps of our first order transformation process will consist in observing how the expression of the first normal derivative of \mathbf{G}_k behaves for source points that belong to the tested surface $\partial\Omega$. A way to move the surface derivatives of \mathbf{G}_k contained in the surface gradient operator to the first order force moment $\mathbf{M}^{(1)}$ is now sought in order to achieve the first order manipulations of our equivalent surface stresses expansion.

3.2. Free surface boundary condition and material isotropy assumption

The main reason for using non-contact ultrasonic sources is to avoid the use of a coupling medium. Thus, in most NDE configurations concerned by these sources, the part under examination stands in the air. The acoustic impedance of air is generally at least four orders of magnitude smaller than that of solids. One can therefore model boundary conditions as free surface boundary conditions. As the Green's tensor is an elementary solution of the elastodynamic problem considered, the Green's vector shall satisfy the same boundary condition. This remark allows a simplification in the expression of the \mathbf{G}_k first normal derivative since the considered source points \mathbf{X}_0 belong to the surface $\partial\Omega$ in our transformation:

$$\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \implies \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{A} : \nabla_s \mathbf{G}_k \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (18)$$

Remark 5. The expression of the first normal derivative of the Green's vector \mathbf{G}_k given by Eq. (18) is of general applicability, whatever the symmetry of the material elastic properties. The next steps of this paper will however assume elastic isotropy in order to successfully transfer the surface derivatives of \mathbf{G}_k to the first order force moment. Eq. (18) can be particularly suitable when considering guided wave propagation rather than bulk waves, still assuming that the conditions of applicability given in Eq. (5) and in Remark 3 are fulfilled. Indeed, for guided waves, these surface derivatives are directly proportional to the wavenumbers of the guided modes, which are analytically known in case of shear horizontal wave (see [13]) and numerically determined in case of Lamb waves (see [14]). In these two papers, a transformation method was derived for planar parts based on such a formula.

The assumption of elastic isotropy allows us to express the stiffness elastic tensor as: $\mathbf{C} := \lambda_L(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu_L(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$, with λ_L and μ_L the two Lamé coefficients, and \otimes the operator defined for two given second order tensors \mathbf{T}_1 and \mathbf{T}_2 by: $(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2)_{ijkl} = \frac{1}{2} [(T_1)_{ik}(T_2)_{jl} + (T_1)_{il}(T_2)_{jk}]$. This definition allows us to determine all the tensors expressions needed to express the first normal derivative of the Green's vector. The first order term of our expansion is now given on $\partial\Omega$ by:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}^{(1)} = \left\{ -\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} (\nabla_s \cdot \mathbf{G}_k) \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{G}_k \right\} \cdot \mathbf{M}^{(1)} \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (19)$$

3.3. Transferring surface derivatives to force moments

The transfer of the surface derivatives from the Green's vector \mathbf{G}_k to the force moments, in order to model equivalent surface stress defined by Eq. (9), makes use of the surface divergence theorem:

Theorem 1. Under the assumptions that \mathbf{U} represents a vector function of \mathbb{R}^3 , that S is an arbitrary surface of \mathbb{R}^3 with its outer-pointing normal denoted by \mathbf{n} , the surface divergence theorem can be expressed by:

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{U} dS = \int_{\partial S} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} + \int_S [\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (20)$$

To start with, the second term in Eq. (19) can be developed as follows:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{G}_k\} \cdot \mathbf{M}^{(1)} &= \{\nabla_s \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{M}^{(1)}\} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{M}^{(1)} \otimes \mathbf{n}] : \nabla_s \mathbf{G}_k \\ &= \nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{G}_k) - \mathbf{G}_k \cdot (\nabla_s \cdot [\mathbf{n} \otimes \mathbf{M}^{(1)}]) \\ &= \nabla_s \cdot ([\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}] \mathbf{M}^{(1)}) - \{(\nabla_s \cdot \mathbf{M}^{(1)}) \mathbf{n} + \nabla_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(1)}\} \cdot \mathbf{G}_k. \end{aligned} \quad (21)$$

In switching the roles of \mathbf{G}_k and $\mathbf{M}^{(1)}$, the same manipulations allow us to write the first term in Eq. (19) as:

$$\begin{aligned} \{(\nabla_s \cdot \mathbf{G}_k) \cdot \mathbf{n}\} \cdot \mathbf{M}^{(1)} &= \nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{G}_k) - (\mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{M}^{(1)}) \cdot \mathbf{G}_k - (\nabla_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_k) \cdot \mathbf{M}^{(1)} \\ &= \nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{G}_k) - \{\mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \nabla_s \mathbf{n}\} \cdot \mathbf{G}_k \\ &= \nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{G}_k) - \nabla_s (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{G}_k. \end{aligned} \quad (22)$$

At this point, the surface divergence theorem helps dealing with the two terms $\nabla_s \cdot ([\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}] \mathbf{M}^{(1)})$ and $\nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{G}_k)$ which are still dependent on surface derivatives of \mathbf{G}_k . Considering that $\partial\Omega$ is a closed surface, and that the force moments are differentiable over the whole surface (due to the smoothness assumptions on the force field made in Section 2.2), no edge terms appear. As a result one has:

$$\int_{\partial\Omega} \nabla_s \cdot ([\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}] \mathbf{M}^{(1)}) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \nabla_s \cdot ([\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{G}_k) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}] [\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) d\Gamma, \quad (23)$$

Remark 6. In practice, in most industrial cases of our knowledge, non-contact sources are not only confined close to the surface but also have a finite effective aperture S_E over it, the body forces vanishing outside this finite part of $\partial\Omega$. In this case, $\partial\Omega$ is replaced by S_E in the previous development and edge terms appear since S_E is not a closed surface. However, assuming that the body forces distribution vanishes outside S_E implies that the force moments also vanish on its edge ∂S_E , so that the same results hold.

The right-hand side term in Eq. (23) does not include derivatives of the Green's vector. The transfer of all the surface derivatives of \mathbf{G}_k to the first order force moment $\mathbf{M}^{(1)}$ is now achieved. The first order expansion of the equivalent surface stress distribution is finalized in the next section.

3.4. Equivalent surface stresses formulation at the first order

The substitution of formal results obtained in Sections 3.2 and 3.3 into Eq. (14) reduced to the first two terms (first order expansion) is straightforward. The equivalent stress distribution at the first-order is readily identified from the integral expression of the k th component of the radiated displacement field. One has:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta, \quad u_k(\mathbf{x}) &\simeq \int_{\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\sigma}_f(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad \text{where :} \\ \tilde{\sigma}_f(\mathbf{X}_0) &= \mathbf{M}^{(0)} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \nabla_s (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{M}^{(1)}) \mathbf{n} + \nabla_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(1)} - \frac{2(\lambda_L + \mu_L)}{\lambda_L + 2\mu_L} (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (24)$$

We chose to detail the procedure concerning the first order expansion of the equivalent surface stress distribution to give the reader a clear overview of the mathematical steps involved. The next section aims at handling the second order expansion, which contains the second normal derivative of the Green's vector \mathbf{G}_k and the second order force moment $\mathbf{M}^{(2)}$. As one can expect after the first order development, several calculations intervene and weigh down the demonstration. For this reason, the next section only gives the main clues to derive the second order formulation.

4. Second order expansion of equivalent surface stresses transformation

4.1. Second normal derivative of G_k

By definition, the second normal derivative of the Green's vector \mathbf{G}_k simply embodies the normal derivative of the first normal derivative of \mathbf{G}_k , which can be formally written as:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^2} = \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (25)$$

This definition enables us to use the expression of $\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}}$ in Ω_β given by Eq. (17). At this stage, a last assumption is made to ease the derivation of this first normal derivative, which consists in considering that Ω is made of a homogeneous material:

Proposition 2. Under the assumption that the inspected material Ω is elastically homogeneous, one has:

$$\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (26)$$

This proposition is proved in [Appendix](#). It is based on the fact that the two tensors \mathbf{F} and $\mathbf{\Lambda}$ are defined from the elastic stiffness tensor \mathbf{C} , which is constant for a homogeneous material. After introducing Eq. (17) into Eq. (25), simplifications resulting from [Proposition 2](#) allow one to obtain:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^2} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}]}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{\Lambda} : [\nabla (\nabla_s \mathbf{G}_k) \cdot \mathbf{n}] \quad \text{in } \Omega_\beta. \quad (27)$$

At this stage, some manipulations are required to calculate the two right-hand side terms of Eq. (27). For this, the two following relations are introduced:

- (i) The first one refers directly to the definition of the Green's tensor, which is an elementary solution of the time-harmonic local equilibrium law in Ω . As so, it is a solution of the wave equation:

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \Omega \times \Omega_\beta, \quad \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{e}_k, \quad (28)$$

where $\delta^3(\cdot)$ denotes the three-dimensional Dirac's distribution and ρ_L the material density. The decomposition of differential operators provides us with:

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}, \quad \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k} = \nabla_{\mathbf{n}} \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k} + \nabla_s \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k} = -\rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k. \quad (29)$$

- (ii) The second one is related to the formal definition of a directional derivative in the normal direction. According to [Fig. 1](#) and taking $\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega$, it is straightforward to see that $\mathbf{n}(\mathbf{X}_0 - w\mathbf{n}(\mathbf{X}_0)) = \mathbf{n}(\mathbf{X}_0)$, for w fulfilling requirements given in (5), which leads to:

$$\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{n}(\mathbf{X} - d\mathbf{n}(\mathbf{X}))}{d} \right] = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega. \quad (30)$$

Proposition 3. Owing to Eqs. (29) and (30), the second normal derivative of \mathbf{G}_k takes the following intrinsic expression considering source points $\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta$ and observation points $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}^2} = -\mathbf{F} \cdot [\nabla_s \cdot (\mathbf{B} \cdot [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}] + \mathbf{A} : \nabla_s \mathbf{G}_k) + \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k] - \mathbf{\Lambda} : \left[\nabla_s \left(\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \right) - \nabla_s \mathbf{G}_k \cdot \nabla_s \mathbf{n} \right], \quad (31)$$

where the fourth order tensor \mathbf{A} and the third order tensor \mathbf{B} are defined by:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{\Lambda} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}.$$

Proof. We start this proof with the expression of the second normal derivative of the Green's vector given in Eq. (27) and manipulate its two terms separately:

- (i) First, using Eq. (30) and the definition of the projector \mathbf{P} , one has:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \nabla (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = -(\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes (\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0 \\ \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla_s \mathbf{n} = \mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{n}) = \mathbf{n} \otimes (\nabla_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \otimes (\nabla \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}]) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Then, the second right-hand side term of Eq. (27) is handled by some standard differential and tensorial relationships as follows:

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla_s \mathbf{G}_k) \cdot \mathbf{n} &= \nabla (\nabla \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \\ &= [\nabla (\nabla \mathbf{G}_k) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{P} + \nabla \mathbf{G}_k \cdot \underbrace{[\nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}]}_{=0} \\ &= [\nabla (\nabla \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}) - \nabla \mathbf{G}_k \cdot \nabla \mathbf{n}] \cdot \mathbf{P} \\ &= \nabla_s (\nabla \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{n}) - \nabla \mathbf{G}_k \cdot \nabla_s \mathbf{n} \\ &= \nabla_s \left(\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \right) - \nabla_s \mathbf{G}_k \cdot \nabla_s \mathbf{n} - \nabla \mathbf{G}_k \cdot \underbrace{\mathbf{P}^\perp \cdot \nabla_s \mathbf{n}}_{=0} \\ &= \nabla_s \left(\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \right) - \nabla_s \mathbf{G}_k \cdot \nabla_s \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (33)$$

- (ii) On the other hand, the time-harmonic local equilibrium law given by Eq. (29), taking $\mathbf{x}_0 \in \Omega_\beta$ and $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta$, helps us to derive the following relations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}]}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla (\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \nabla \sigma^{\mathbf{G}_k} : \underbrace{[\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]}_{=\mathbf{P}^\perp} + \sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \underbrace{[\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}]}_{=0 \text{ Eq. (30)}} \\ &= \nabla_{\mathbf{n}} \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k} = -\nabla_s \cdot \sigma^{\mathbf{G}_k} - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k = -\nabla_s \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{G}_k) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \left(\mathbf{C} : \left[\frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} \right] \right) - \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{G}_k) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k \\
&= -\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \left([\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}] \cdot \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \mathbf{n}} \right) - \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{G}_k) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k \\
&= -\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \left([\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}] \cdot \left\{ \mathbf{F} \cdot [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}] - \mathbf{A} : \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{G}_k \right\} \right) \\
&\quad - \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{G}_k) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k \\
&= -\nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{B} \cdot [\sigma^{\mathbf{G}_k} \cdot \mathbf{n}]) - \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{A} : \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{G}_k) - \rho_L \omega^2 \mathbf{G}_k, \tag{34}
\end{aligned}$$

where \mathbf{A} and \mathbf{B} are the above-defined tensors.

Finally, by substituting Eqs. (33) and (34) into Eq. (27), we complete the proof of Proposition 3.

This final expression of the second normal derivative of \mathbf{G}_k must be read as a combination of the tangential derivatives of the Green vector, which will offer the opportunity to transfer these derivatives to the second order force moment. At this stage, we can make the same comment as that made previously in Remark 5 towards our ability to generate a second order expansion model of equivalent surface stresses when dealing with guided wave propagation into an elastically anisotropic material.

4.2. Equivalent surface stresses formulation at the second order

From now on, in accordance with what was done to derive the first order expansion of the equivalent surface stresses, the part under examination is assumed to be made of an isotropic homogeneous material and to be bounded by free surfaces. Combining these assumptions with Proposition 3, the transfer of all the surface derivatives from the Green's vector \mathbf{G}_k to the second order force moment $\mathbf{M}^{(2)}$ can be obtained. Its full derivation relies fundamentally on the same kind of mathematical techniques as those used in Section 3.3 to derive the first order expansion. To lighten the paper, we chose not to explicitly write it. We believe that readers interested in it can work it out with the previously given details.

The final equivalent surface stress distribution with a second order expansion is formally given by:

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_{\beta}, \quad u_k(\mathbf{x}) &\simeq \int_{\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\sigma}_f(\mathbf{X}_0) d\Gamma, \quad \text{with :} \\
\tilde{\sigma}_f(\mathbf{X}_0) &= \mathbf{M}^{(0)} - \frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}^{(2)} + \alpha_0 \nabla_{\mathbf{s}} (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{M}^{(1)}) \mathbf{n} + \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(1)} \\
&\quad - \alpha_1 (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) (\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\alpha_0}{2} \nabla_{\mathbf{s}} \left[\nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{M}^{(2)} - 2\mu_L \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) \right] - \mu_L \nabla_{\mathbf{s}} \cdot \epsilon_{\mathbf{S}} (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}^{(2)}) \\
&\quad + \frac{\alpha_0}{2} \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (2\mu_L \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(2)}) (\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\alpha_0}{2} (\mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) [\alpha_1 (\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n})] + \frac{\alpha_0}{2} \nabla_{\mathbf{s}} \cdot (\nabla_{\mathbf{s}} (\mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{n})) \mathbf{n} \\
&\quad - \frac{\alpha_0 \alpha_1}{2} \nabla_{\mathbf{s}} \cdot [(\nabla_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{n}], \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\text{where: } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}, & \alpha_1 = \alpha_0 + 1 \\ \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{F} = \frac{1}{\lambda_L + 2\mu_L} \mathbf{P}^{\perp} + \frac{1}{\mu_L} \mathbf{P} \\ \epsilon_{\mathbf{S}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P} \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{v} + {}^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}]. \end{cases}$$

Remark 7. Some notations have been introduced in Eq. (35) to shorten its writing. Let us first note that for all vector function \mathbf{v} , $\epsilon_{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$ can be interpreted as a surface strain tensor, that is to say, the projection of a strain tensor $\epsilon(\mathbf{v})$ onto the tangent plane of $\partial\Omega$. One can then remark that $\tilde{\mathbf{P}}$ is a linear combination of projectors \mathbf{P}^{\perp} , along the normal direction, and \mathbf{P} , onto the tangent plane, respectively weighted by the compression wave modulus $\lambda_L + 2\mu_L$ and by the shear wave modulus μ_L .

Remark 8. The second-order equivalent surface stress formulation brings several new complex terms. Let us for example comment the appearance of the inertial term $\frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}^{(2)}$, which reveals that the higher the inspection frequency is, the more the second order moment impacts the equivalent surface stress calculation, as long as the hypothesis $\beta \ll \lambda$ remains verified.

Remark 9. Our primary objectives given in Section 2.2 are achieved: the equivalent surface stress formulation based on radiating body forces is extended to a second order expansion. Moreover, the derived formulation is obtained regardless of the surface geometry; thus, it is readily usable for non-planar configurations.

Remark 10. In practice, computing Eq. (35) only requires the knowledge of the inspected material elastic properties (ρ_L , λ_L , μ_L) and of the outer-pointing normal \mathbf{n} to the surface $\partial\Omega$. The comprehensive information on the body forces lies in the definitions of zeroth, first and second order force moments, which can be easily calculated as soon as the testing configuration (type of non-contact source, its position over the part under test) is chosen. Finally, the equivalent surface stress distribution can be directly used in existing models of ultrasonic radiation from applied surface stress.

Remark 11. Since the purpose is to implement Eq. (35) numerically, the accuracy of the involved numerical differentiations of the force moments must be addressed. The body force distribution may either be known analytically or result from numerical calculations. In the former case, the sampling step defining the grid over which the body force is evaluated can be easily chosen to accurately approximate the first and second order tangential derivatives of the moments. An example is given in the next section to illustrate the use of our formulation. Its tested accuracy gives credit to the proposed model. In the latter case, if the body force distribution was affected by sampling errors, numerical derivatives would be even more affected. A cautious preliminary study is thus needed to quantify potential numerical errors. Determining dominant terms in Eq. (35) which depend on both the body force distribution and the surface geometry can help one to identify the main source of numerical errors and to find adapted solutions.

5. Application examples to different surface geometries

5.1. Comment on the planar case: comparison with the model of Rouge et al. [9]

The first case considered is that of an elastic half-space with a planar surface. The study of second order expansion to transform body forces into equivalent surface stresses at a planar surface was pioneered by Thompson [8], and further developed recently by Rouge et al. [9]. Several terms in Eq. (35) vanish due to a constant surface normal and the present model reduces to the explicit formulas given in Ref. [9].

These Cartesian formulas derived from the second order expansion were first designed to improve the overall accuracy of the equivalent surface stresses transformation as compared to the classical use of zeroth order force moment. Moreover, as far as our target application to model ultrasonic generation by EMAT in ferromagnetic materials is concerned, this second order expansion is a necessary step toward the modeling of magnetostrictive equivalent surface stresses starting from the artificial body forces of magnetostriction mentioned in introduction. Indeed, the way adopted to build this equivalent body force, following Thompson's model [15] as generalized by Rouge et al. [16], automatically predicts a null zeroth order force moment due to the free surface boundary condition. Truncating the expansion at this order would therefore impede predicting any magnetostrictive effects under this overall approach. Once the second order expansion is calculated, non vanishing terms appear which perfectly agree, as shown by Nagy and Ribichini [17], with equivalent surface stresses derived from Ribichini et al. [4] model of equivalent magnetostrictive body force.

5.2. Numerical validations of the method in a cylindrical case

The main purpose of this paper was to provide an accurate method able to transform a distribution of body forces into equivalent surface stresses when dealing with non-planar cases. To validate this transformation, results predicted by means of Eq. (8) (volume integral over body force distribution) are compared to those predicted by means of Eq. (9) (surface integral over equivalent stress distribution). For the latter results, calculations are made using both the classical zeroth order force moment and the present second order expansion. A cylindrical configuration is considered for illustration.

5.2.1. General approach and definition of the elastodynamic configuration

Let us consider an isotropic elastic infinite space Ω containing a cylindrical void of radius R . In this configuration, the so-called $\partial\Omega$ surface introduced in Section 2 is the void surface. We assume an infinite dimension along the z -direction and then study this problem with the polar coordinates (r, θ) , as depicted by Fig. 2, where $\mathbf{M}_0(r_0, \theta_0)$ and $\mathbf{M}_R(r, \theta)$ respectively denote source and observation points.

An elastodynamic 2D-problem is now considered where an infinite (along z) source of shear waves polarized along the z -direction is confined at the vicinity of the void. This distribution of body forces fulfills the various assumptions of applicability of our method. Here, no mode conversion occurs at the void surface for obvious symmetry reasons. This allows us to focus our comments only on the interest and validity of the transformation method since elastic wave phenomena involved are relatively simple.

The following results aim at validating the method by comparing radiated fields predicted by means of various integral formulations. These formulations all assume the 2D Greens function for a medium with a cylindrical inhomogeneity to be known. The exact Greens function (see Sánchez-Sesma et al. [18] in the geophysics literature) contains a series to deal with creeping waves in the shadow region of the void (the notion of shadow is due to the limited angular extent of the source). The same Greens function for an equivalent problem in electromagnetism however simplifies in the lit region (as shown by Pathak [19] who developed very accurate and efficient asymptotics to deal with this problem). In practice, for the calculation points considered hereafter, the Greens function is very accurately approximated by a simple expression obtained by the

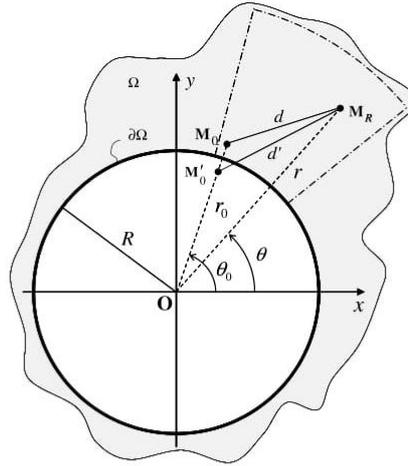


Fig. 2. Sketch of the cylindrical configuration. The area bounded by a dashed–dotted line represents the field computation zone.

method of images where the direct contribution from a source line \mathbf{M}_0 superimposes with the contribution from its image \mathbf{M}_0' across the interface, given by:

$$G_{zz}(\mathbf{M}_R | \mathbf{M}_0) = \frac{1}{4i\mu_L} \left\{ H_0^{(2)}(kd) + H_0^{(2)}(kd') \right\}, \quad (36)$$

where d and d' are shown in Fig. 2, k denotes the shear wave number, and $H_0^{(2)}$ stands for the Hankel function of the second kind and zero order.

For the problem in hands, Eq. (8) (volume integral over body forces) reduces to:

$$u_z^{(vol)}(r, \theta) = \iint_{r_0, \theta_0} G_{zz}(r, \theta | r_0, \theta_0) f_z(r_0, \theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0. \quad (37)$$

This radiated field will constitute the reference result for our numerical validations.

Similarly, Eq. (9) (surface integral over equivalent stresses according to the present study) reduces to:

$$u_z^{(2)}(r, \theta) = \int_{\theta_0} G_{zz}(r, \theta | R, \theta_0) \tilde{\sigma}_{fz}(\theta_0) R d\theta_0. \quad (38)$$

To demonstrate the improved accuracy obtained thanks to the previous formulation, we further compute a similar integral where the equivalent surface stresses are classically modeled as the zeroth order force moment, given by:

$$u_z^{(0)}(r, \theta) = \int_{\theta_0} G_{zz}(r, \theta | R, \theta_0) M_z^{(0)}(\theta_0) R d\theta_0. \quad (39)$$

An analytic expression for the body force distribution with separate variables r_0 and θ_0 is defined to mimic typical source terms generated in electromagnetic acoustic transduction processes. Particularly, the radial dependency is expressed by an exponential decreasing from the void interface related to the skin depth δ :

$$\mathbf{f}(r_0, \theta_0) = g(\theta_0) \exp\left(-\frac{r_0 - R}{\delta}\right) \mathbf{e}_z, \quad \text{for } r_0 \in [R, R + \beta]. \quad (40)$$

The parameter β introduced in Section 2 equals 5δ , a depth at which the body force distribution is assumed to vanish (less than 1% of the maximum). The θ_0 -dependency $g(\theta_0)$ is shown in Fig. 3 and stands for the overall finite aperture of the source, a constant function apodized at its edges by a Hanning function.

According to Eq. (35) and considering the symmetries of the present configuration, this body force is transformed into an equivalent surface stress, expressed as the sum of the classical zeroth order force moment and two corrective terms involving the second order moment:

$$\tilde{\sigma}_f(\theta_0) = \left\{ M_z^{(0)} - \frac{\rho_L \omega^2}{2\mu_L} M_z^{(2)} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial \theta^2} \right\} \mathbf{e}_z. \quad (41)$$

In practice, Ω is assumed to be made of aluminum, the void radius equals 50 mm, and a 2 MHz excitation frequency is considered, typical of NDE applications. As so, β equals 0.3 mm and the ultrasonic wavelength λ equals 1.5 mm, so that the condition of applicability $\beta \ll \lambda$ is satisfied.

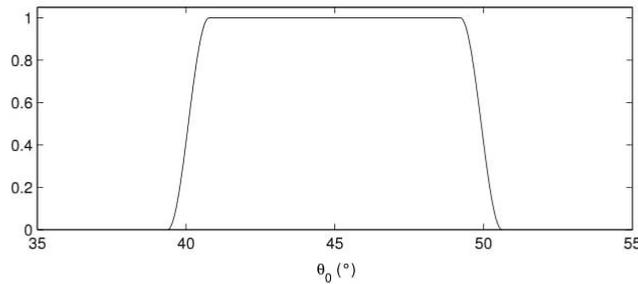


Fig. 3. Angular dependency $g(\theta_0)$ of the body force distribution.

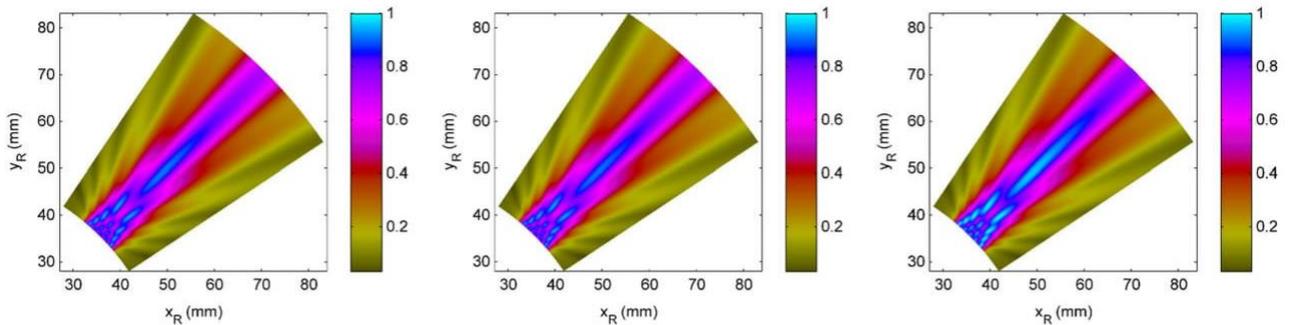


Fig. 4. Fields predicted by the three integral formulations in the computation zone of interest. Left: $|u_z^{(vol)}|$. Middle: $|u_z^{(2)}|$. Right: $|u_z^{(0)}|$.

Field predictions using Eqs. (37)–(39) are numerically computed, implying to discretize the source domain in (r_0, θ_0) . Here, it is not our purpose to rigorously address the question of accuracy related to the discretization grid, nor to minimize the computation time for the examples of the next section. Rather, our results are given to show the accuracy improvement gained by the use of our method relatively to that of the more classical integration process. In practice, the integration variables are meshed by 200 source points per wavelength, far over what is usually needed.

5.2.2. Numerical results

Observation points \mathbf{M}_R are taken in a computation zone defined by: $(r, \theta) \in [51 \text{ mm}, 100 \text{ mm}] \times [22.5^\circ, 67.5^\circ]$. Fig. 4 represents the modulus of the particle displacement field u_z calculated by the three different manners described in the previous section.

The three bitmaps are normalized by the highest field amplitude, which is observed on the field predicted by means of the zeroth order force moment integration. The bitmaps qualitatively show that our second order method better fits the reference results, whereas the zeroth order force moment overestimates them in some observation regions. To be more quantitative, curves are extracted from these first sets of results. The first curves extract the r -dependency of the field amplitude at the angular center of the source. The second ones extract the θ -dependency of the field amplitude at the radial distance 60 mm. These curves are displayed on Fig. 5.

Reference results (solid line) and the ones predicted by our transformation method (dotted line) perfectly superimpose, whereas the integration by the zeroth order force moment (dashed line) leads to discrepancies. The improved accuracy gained by the two corrective terms in Eq. (41) brought by the second order expansion method is clearly seen.

The errors over the computation zone made by the two stress integration formulations relatively to the reference body force integration are shown in two separate maps in Fig. 6.

In the configuration considered, the second order expansion method leads to relative errors everywhere less than 1%, whereas the zeroth order force moment varies almost everywhere between 4 and 7%.

This simple numerical example illustrates the higher accuracy brought by our second order expansion, even though it does not constitute a full validation. Interestingly, despite its simplicity, it involves all the calculation steps which would be involved in the more complex three-dimensional configurations of our target applications.

6. Discussions

A second order formulation has been proposed to transform a distribution of body forces generated by a non-contact ultrasonic source into an equivalent surface stress distribution readily usable as a source term in many models of ultrasonic radiation. This result is given by Eq. (35) of the paper. It applies to general elastic wave propagation problems into a part made of an isotropic homogeneous material and of almost arbitrary geometry, regardless of the nature of the body forces involved. Actually, two conditions must necessarily be fulfilled to apply the formulation, both being related to the local depth β along

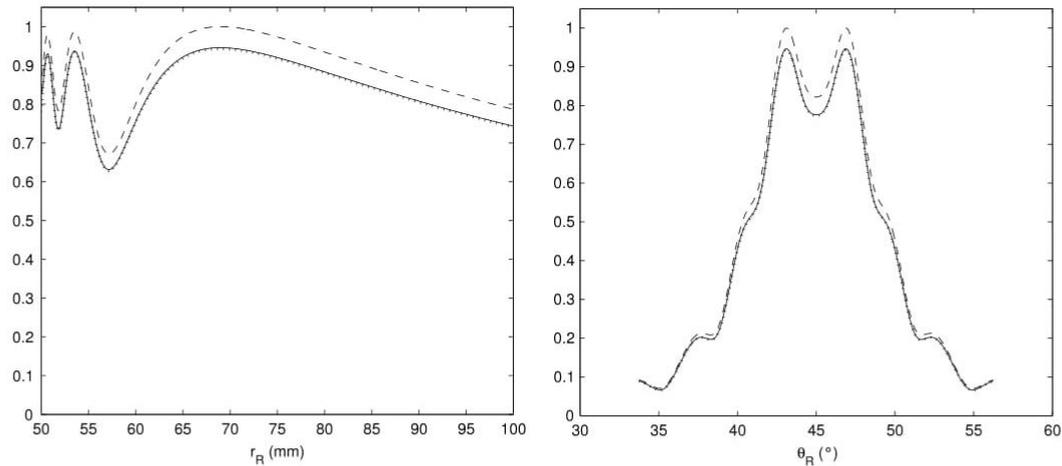


Fig. 5. Curves extracted from Fig. 4, at $\theta = 45^\circ$ (left) and $r = 60$ mm (right). Solid line: $|u_z^{(vol)}|$; Dotted line: $|u_z^{(2)}|$; Dashed line: $|u_z^{(0)}|$.

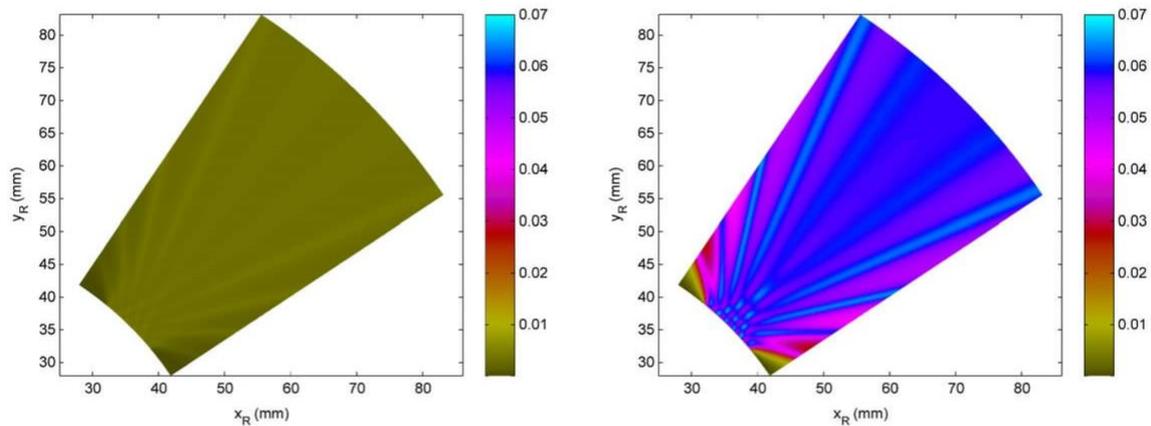


Fig. 6. Error maps of the two equivalent stress formulations relatively to the body force formulation. Left: second order expansion (Eq. (38)). Right: zeroth order force moment (Eq. (39)).

which the force sources exist. The first condition relates β to local curvatures of the part surface and is explicitly given in Eq. (5). Typical non-contact sources used to test typical parts in the NDE practice generally satisfy it. The second condition relates β to the ultrasonic wavelength, the former being assumed to be significantly smaller than the latter; this is a crucial condition to derive the second order expansion leading to Eq. (35). This condition is easily fulfilled in NDE configurations using EMAT.

A numerical example in the cylindrical case has been given to illustrate the interest of the second order expansion method proposed in this paper. In this example, the improved accuracy brought by our formulation is obvious, as its predictions perfectly match those obtained by the full Green's convolution integral over body forces. Even though this example is quite simple both geometrically and elastodynamically, all the calculation processes it involves are representative of those in complex cases. If needed, the general formulation of Eq. (35) can be explicitly established in any kind of geometric coordinate system, requiring some differential analyses to be done based on the use of the metric tensor g_{ij} and the Christoffel's symbols Γ_{ij}^k (see for example [20,21]). Hopefully, getting explicit expressions of the equivalent surface stresses in complex cases is not the very purpose of our method. Rather, our work was motivated by computational needs for an implementation within the CIVA NDE simulation platform [22], so that Eq. (35) is numerically estimated in practice.

Among the assumptions made throughout this paper, some could be avoided to get a formulation of extended applicability. First, a time-harmonic excitation was assumed, but a transient formulation by formal Fourier synthesis can be easily obtained. However, the condition of applicability $\beta \ll \lambda$ discussed in Remark 3 must be carefully addressed since the wavelength λ , and even the force variations with depth β in general, are frequency-dependent. On the other hand, the assumption of elastic isotropy also simplifies the calculation of the equivalent surface stresses, leaving the anisotropic problem unsolved. To be more specific, only the transfer of surface derivatives from the Green's vector \mathbf{G}_k to the various force moments $\mathbf{M}^{(p)}$ remains to be studied starting from Eqs. (17) and (31). Nevertheless, these previous equations help addressing the issues of an ultrasonic guided waves propagation in an anisotropic material as it is discussed in Remark 5.

Acknowledgment

The authors wish to thank the *Centre Technique des Industries Mécaniques* (CETIM, 60300 Senlis, France) for financial support in this study.

Appendix. Proof of Proposition 2

Proof. The tensors needed to derive this proof are defined by: $\Gamma = \mathbf{n.C.n}$, $\mathbf{F} = \Gamma^{-1}$, $\Lambda = \mathbf{F}[\mathbf{n.C}]$.

(i) By definition of \mathbf{F} and using some tensorial analysis, one has first:

$$\mathbf{F}\Gamma = \mathbf{I} \implies \nabla(\mathbf{F}\Gamma) \cdot \mathbf{n} = [\nabla\mathbf{F}\mathbf{n}] \cdot \Gamma + \mathbf{F} \cdot [\nabla\Gamma \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Using the summation convention for repeated subscripts and the definition of Γ , we can write that:

$$\begin{aligned} (\nabla\Gamma \cdot \mathbf{n})_{ij} &= (\mathbf{n.C.n})_{ij,k} n_k = (n_l C_{lijp} n_p)_{,k} n_k \\ &= n_{l,k} n_k C_{lijp} n_p + n_l C_{lijp,k} n_k n_p + n_l C_{lijp} n_{p,k} n_k. \end{aligned}$$

So, under the assumption that Ω is made of a homogeneous medium and using Eq. (30), one has:

$$\nabla\Gamma \cdot \mathbf{n} = \underbrace{(\nabla\mathbf{n.n})}_{=0} \cdot \mathbf{C.n} + \mathbf{n} \cdot \underbrace{(\nabla\mathbf{C.n})}_{=0} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n.C} \cdot \underbrace{(\nabla\mathbf{n.n})}_{=0} = 0.$$

Then, due to this previous equation and to Eq. (A.1), we have: $\nabla\mathbf{F}\mathbf{n} = 0$.

(ii) The definition of Λ and the summation convention for repeated subscripts help us to formally write:

$$(\nabla\Lambda \cdot \mathbf{n})_{ijk} = (\mathbf{F}[\mathbf{n.C}])_{ijk,l} n_l = (F_{ip} n_q C_{qijk})_{,l} n_l = F_{ip,l} n_l n_q C_{qijk} + F_{ip} n_{q,l} n_l C_{qijk} + F_{ip} n_q C_{qijk,l} n_l.$$

Thus, above written arguments can be used again to prove that:

$$\nabla\Lambda \cdot \mathbf{n} = \underbrace{(\nabla\mathbf{F}\mathbf{n})}_{=0} \cdot \mathbf{n.C} + \mathbf{F} \cdot \underbrace{(\nabla\mathbf{n.n})}_{=0} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{F.n} \cdot \underbrace{(\nabla\mathbf{C.n})}_{=0} = 0.$$

References

- [1] R.B. Thompson, Physical principles of measurements with EMAT transducers, in: *Physical Acoustics*, Vol. 19, Academic Press, New York, 1990, pp. 157–200.
- [2] M. Hirao, H. Ogi, *EMATs for Science and Industry: Noncontacting Ultrasonic Measurements*, first ed., Kluwer Academic, Dordrecht, 2003.
- [3] C.B. Scruby, L.E. Drain, *Laser Ultrasonics: Techniques and Applications*, first ed., Adam Higler, New York, 1990.
- [4] R. Ribichini, P.B. Nagy, H. Ogi, The impact of magnetostriction on the transduction of normal bias field EMATs, *NDT & E* 51 (2012) 8–15.
- [5] H. Lamb, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 203 (1904) 1–42.
- [6] A. Lhémery, A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid, *J. Acoust. Soc. Am.* 96 (1994) 3776–3786.
- [7] K. Kawashima, Quantitative calculation and measurement of longitudinal and transverse ultrasonic wave pulses in solid, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-31 (1984) 83–94.
- [8] R.B. Thompson, The relationship between radiating body forces and equivalent surface stresses: analysis and application to EMAT design, *J. Nondestruct. Eval.* 1 (1980) 79–85.
- [9] C. Rouge, A. Lhémery, D. Ségur, Transformation of body force localized near the surface of a half-space into equivalent surface stresses, *J. Acoust. Soc. Am.* 134 (2013) 2639–2646.
- [10] S.T. Gu, Q.C. He, Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphases as imperfect interfaces, *J. Mech. Phys. Solids* 59 (2011) 1413–1426.
- [11] J.C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*, in: *Applied Mathematical Sciences*, vol. 144, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [12] D. Royer, E. Dieulesaint, *Elastic Waves in Solids—Volume 1: Free and Guided Propagation*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [13] C. Rouge, A. Lhémery, D. Ségur, Modal solutions for SH guided waves radiated by an EMAT in a ferromagnetic plate, *J. Phys.: Conf. Ser.* 353 (2012) 012014.
- [14] C. Rouge, A. Lhémery, C. Aristégui, EMAT generation of bulk forces in a ferromagnetic plate and their equivalent stresses, *J. Phys.: Conf. Ser.* 498 (2013) 012013.
- [15] R.B. Thompson, A model for the electromagnetic generation of ultrasonic guided waves in ferromagnetic metal polycrystals, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* SU-25 (1978) 7–15.
- [16] C. Rouge, A. Lhémery, C. Aristégui, Frequency spectra of magnetostrictive and Lorentz forces generated in ferromagnetic materials by a CW excited EMAT, *J. Phys.: Conf. Ser.* 498 (2014) 012014.
- [17] P.B. Nagy, R. Ribichini, Equivalent body-force model for magnetostrictive transduction in EMATs, in: *Review of Progress in QNDE*, vol. 1650 (2015) 1316–1325.
- [18] F.J. Sánchez-Sesma, J.A. Pérez-Ruiz, F. Luzón, M. Campillo, A. Rodríguez-Castellanos, Diffuse fields in dynamic elasticity, *Wave Motion* 45 (2008) 641–654.
- [19] P.H. Pathak, W.D. Burnside, R.J. Marhefka, A uniform GTD analysis of the diffraction of electromagnetic waves by a smooth convex surface, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 28 (1980) 631–642.
- [20] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, first ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [21] C.T.J. Dodson, T. Poston, *Tensor Geometry: The Geometric Viewpoint and its Uses*, second ed., in: *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [22] For detailed description of the platform, see <http://www-civa.cea.fr>.

D. Extension de la méthode pour traiter le cas des milieux élastiques anisotropes et hétérogènes

Cette annexe donne les éléments de démonstration de l'extension ((3.102) du Chapitre 3) de la méthode des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux de [Clausse-Lhémy_2016] dans le cas de milieux élastiques anisotropes et hétérogènes. En notant \mathbf{G} le tenseur de Green solution élémentaire du problème élastodynamique considéré, l'objectif consiste à déterminer la distribution de contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f$ des sources volumiques \mathbf{f} tel que $\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\beta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &\cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(0)}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(1)}(\mathbf{X}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{M}_f^{(2)}(\mathbf{X}_0) d\Gamma \\ &\cong \int_{\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f(\mathbf{X}_0) d\Gamma. \end{aligned}$$

Le principe de la méthode repose sur les expressions des dérivées normales première et seconde du tenseur de Green \mathbf{G} , solution élémentaire du problème élastodynamique considéré, en fonction de ses dérivées surfaciques premières et secondes. Ensuite, ces dérivées surfaciques peuvent être transférées sur les moments $\mathbf{M}_f^{(p)}$ des sources volumiques d'ordres un et deux. Comme détaillé dans l'article, les manipulations impliquées mettent en jeu des tenseurs d'ordres élevés dans le cas d'un milieu anisotrope :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n}, & \boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}], & \mathbb{A} &= \mathbb{C} - (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}. \\ \Gamma_{ij} &= \mathbb{C}_{kijl} n_k n_l, & \Lambda_{ijk} &= (\boldsymbol{\Gamma}^{-1})_{il} n_m \mathbb{C}_{mljk}, & A_{ijkl} &= \mathbb{C}_{ijkl} - \mathbb{C}_{ijmn} n_n \Lambda_{mkl}. \end{aligned}$$

Ces tenseurs sont définis à partir du tenseur des rigidités élastiques \mathbb{C} du milieu et de la normale \mathbf{n} extérieure à sa surface inspectée. Pour un point source situé au niveau d'une surface libre, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} &= -\boldsymbol{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{G}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}^2} &= -\mathbf{F} \cdot [\nabla_s \cdot (\boldsymbol{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{G}) + \rho_L \omega^2 \mathbf{G}] - \boldsymbol{\Lambda} : \left[\nabla_s \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \right) - \nabla_s \mathbf{G} \cdot \nabla_s \mathbf{n} \right]. \end{aligned}$$

À partir de ces expressions, les transferts des dérivées surfaciques du tenseur de Green sur les moments des sources d'ordres un et deux sont menés en manipulant le formalisme d'opérateurs différentiels normaux et surfaciques introduits dans [Clausse-Lhémy_2016] et le théorème de la divergence surfacique, qui s'énonce pour tout vecteur \mathbf{U} de \mathbb{R}^3 et pour toute surface S plongée dans \mathbb{R}^3 de normale extérieure \mathbf{n} par l'intégrale :

$$\int_S (\nabla_s \cdot \mathbf{U}) d\Gamma = \int_{\partial S} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} + \int_S [\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) d\Gamma.$$

Pour tout $\mathbf{X}_0 \in \partial\Omega$ et en se plaçant dans un système de coordonnées orthonormées, ces outils permettent de développer le premier ordre du développement asymptotique de la représentation du déplacement particulière par une intégrale de surface de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}_f^{(1)} &= \{-\boldsymbol{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{G}\} \cdot \mathbf{M}_f^{(1)} \\
&= -\Lambda_{ijk} M_i G_{k,l} P_{lj} \\
&= -(\Lambda_{ijk} M_i G_k)_{,l} P_{lj} + (\Lambda_{ijk} M_i)_{,l} P_{lj} G_k \\
&= -([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G})_{j,l} P_{lj} + ({}^T[\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}])_{kj,l} P_{lj} G_k \\
&= -\nabla_s \cdot ([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G}) + (\nabla_s \cdot {}^T[\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}]) \cdot \mathbf{G}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\partial(\partial\Omega) = \emptyset$, on montre par le théorème de la divergence surfacique que l'intégrale surfacique du premier terme du développement précédent peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \nabla_s \cdot ([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G}) d\Gamma &= \int_{\partial(\partial\Omega)} ([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{\partial\Omega} (\nabla_s \cdot \mathbf{n})([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&= \int_{\partial\Omega} (\nabla_s \cdot \mathbf{n})([\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma.
\end{aligned}$$

On peut remarquer qu'il est maintenant possible d'isoler le tenseur de Green des deux termes restants, ce qui conclue le traitement du terme d'ordre un. En effet, en posant pour \mathbf{T} un tenseur d'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^n[\mathbf{T}] &= \nabla_s \cdot ({}^T\mathbf{T}) - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \\
\mathcal{F}_i^n[\mathbf{T}] &= T_{j,k} P_{jk} - n_{k,l} P_{kl} n_j T_{ji},
\end{aligned}$$

on montre finalement que :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}_f^{(1)} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathcal{F}^n[\mathbf{M}_f^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] d\Gamma.$$

Le traitement du terme d'ordre deux dans le développement asymptotique de la représentation du déplacement particulière répète le même raisonnement selon les éléments donnés dans [Clause-Lhémercy_2016]. Les manipulations deviennent cependant rapidement techniques et très fastidieuses dans le cas d'un milieu élastique complexe. Nous avons fait le choix de ne pas les reproduire ici, les éléments décrits ci-dessus fournissant l'ensemble des outils qui permettent de mener à bien le transfert de la dérivée normale seconde du tenseur de Green sur le moment de source d'ordre deux.

Après traitement de l'ordre deux, on montre finalement que l'expression des contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux s'écrit dans le cas de milieux élastiquement et géométriquement complexes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^f &= \mathbf{M}_f^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2} \mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \mathcal{F}^n[\mathbf{M}_f^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{F}^n \left[\mathcal{F}^n[\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}] \cdot \boldsymbol{\Lambda} - {}^T \nabla_s (\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{-1}) : \mathbb{A} - \nabla_s \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_f^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{M}_f^{(2)} \cdot (\nabla \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{n}) \right],
\end{aligned}$$

On peut ensuite vérifier que cette expression se réduit bien à celle décrite dans [Clause-Lhémercy_2016] dans le cas de milieux élastiques isotropes et homogènes ($\mathbb{C} = \lambda_L \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_L \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}$).

E. Modèle inertiel de sources magnétostrictives de Nagy et Ribichini

Le modèle de contraintes surfaciques équivalentes développées à l'ordre deux est décrit dans la Section 3.3 du Chapitre 3. Il permet la modélisation rigoureuse des sources magnétostrictives de rayonnement ultrasonore induites par EMAT en milieux ferromagnétiques. Les résultats théoriques qui découlent de ce développement asymptotique à l'ordre deux sont comparés au modèle analytique de sources inertielles de Ribichini *et al.* [Ribichini-et-al_2012b], qui introduisent les effets magnétostrictifs des milieux ferromagnétiques dans les mécanismes de transduction élastique sous la forme de sources purement inertielles. Ces auteurs traitent du cas d'un EMAT composé d'un aimant permanent d'induction statique normale, et cette méthode est étendue dans [Nagy-Ribichini_2015] au cas d'EMAT à polarisation statique tangentielle. L'approche inertielle mise en œuvre par ces auteurs implique de nombreuses hypothèses simplificatrices, et ces prédictions sont comparées aux développements des contraintes surfaciques équivalentes à l'ordre deux dans [Nagy-Ribichini_2015]. Nagy et Ribichini montrent que les deux modèles de sources de magnétostriction sont analytiquement équivalents dans une configuration simplifiée d'EMAT et de géométrie du matériau inspecté. Ces deux méthodes sont en effet intimement liées, et cette annexe démontre formellement leur équivalence théorique dans le cas d'une surface d'inspection plane, dès lors que l'invariance des sources induites par EMAT en fonction des coordonnées spatiales tangentielles à cette surface est supposée.

On suppose un milieu ferromagnétique de géométrie plane aux propriétés élastiques homogènes et isotropes (de masse volumique ρ_L). On se place en coordonnées cartésiennes et on considère la surface inspectée par EMAT infinie dans les directions x et y (milieu semi-infini dans le plan $z > 0$) de sorte que la seule variable spatiale d'étude est la coordonnée normale z . Dans cette configuration d'étude, le modèle de sources inertielles de Ribichini *et al.* [Ribichini-et-al_2012b] et [Nagy-Ribichini_2015] dérive la densité volumique de sources de magnétostriction, notée $\mathbf{f}_{\text{inert}}^{\text{ms}}$, selon la relation :

$$\mathbf{f}_{\text{inert}}^{\text{ms}}(z, t) = -\rho_L \omega^2 \mathbf{u}^{\text{ms}}(z, t).$$

Dans cette définition, ω représente la fréquence angulaire d'inspection et \mathbf{u}^{ms} désigne le déplacement élastique engendré par la déformation de magnétostriction. L'objectif de cette démonstration est d'établir l'équivalence entre notre approche de modélisation de contraintes surfaciques équivalentes de magnétostriction développée à l'ordre deux et celle des sources surfaciques prédites à l'ordre zéro par le modèle de Nagy et Ribichini. Le modèle de sources volumiques de magnétostriction \mathbf{f}^{ms} proposé dans ce manuscrit est défini comme la divergence du tenseur des contraintes de magnétostriction $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}$ défini à partir des déformations macroscopiques de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ selon la relation :

$$\mathbf{f}^{\text{ms}}(z, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(z, t) = \nabla \cdot (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(z, t)).$$

En géométrie plane et par invariance selon x et y , l'expression des contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{fms}}$ développées à l'ordre deux selon [Clause-Lhémy_2016] se réduit aux termes suivants :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{fms}}(t) = \mathbf{M}_{\text{fms}}^{(0)}(t) - \frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{fms}}^{(2)}(t),$$

avec : $(\tilde{\mathbf{P}}_{ij}) = (\tilde{p}_i I_{ij}) = \frac{1}{\mu_L} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{\mu_L} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{\lambda_L + 2\mu_L} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$

Dans cette relation, $\mathbf{M}_{\mathbf{f}^{\text{ms}}}^{(p)}$ désigne le moment des sources \mathbf{f}^{ms} d'ordre $p = 0$ ou 2 , et (λ_L, μ_L) représentent les coefficients de Lamé du milieu élastique inspecté. Toujours par invariance des sources en fonction de x et y , le moment d'ordre zéro des sources \mathbf{f}^{ms} s'écrit dans cette configuration simplifiée :

$$\begin{aligned} M_i^{(0)}(t) &= \mathbf{M}_{\mathbf{f}^{\text{ms}}}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \int_z f_i^{\text{ms}}(z, t) dz \\ &= \int_z \left[\frac{\partial \sigma_{ix}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial z} \right] dz \\ &= \int_z \frac{\partial \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Ainsi, la prise en compte d'une condition limite élastique de surface libre (positionnée à $z = 0$, le milieu se situant dans le demi plan infini $z > 0$), qui se traduit dans cette configuration d'étude par $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ms}}(z = 0, t) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z = 0, t) = 0$, annule formellement la contribution du moment d'ordre zéro :

$$M_i^{(0)}(t) = \int_z \frac{\partial \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial z} dz = [\sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)]_{z=0}^{+\infty} = 0.$$

Finalement, la contrainte surfacique équivalente des sources \mathbf{f}^{ms} comprend uniquement l'influence du moment d'ordre deux, qui s'écrit dans cette configuration géométrique simplifiée sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^{\text{ms}} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{f}^{\text{ms}}}(t) \cdot \mathbf{e}_i \\ &= -\frac{\rho_L \omega^2}{2} [\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}^{\text{ms}}}^{(2)}(t)] \cdot \mathbf{e}_i \\ &= -\frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{p}_i [\mathbf{M}_{\mathbf{f}^{\text{ms}}}^{(2)}(t) \cdot \mathbf{e}_i] \\ &= -\frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{p}_i \int_z z^2 f_i^{\text{ms}}(z, t) dz \\ &= -\frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{p}_i \int_z z^2 \left[\frac{\partial \sigma_{ix}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial z} \right] dz \\ &= -\frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{p}_i \int_z z^2 \frac{\partial \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

En exploitant à nouveau la condition limite élastique de surface libre, on montre ensuite par intégration par parties que la contrainte surfacique équivalente $\tilde{\sigma}_i^{\text{ms}}$ peut s'écrire :

$$\tilde{\sigma}_i^{\text{ms}} = -\frac{\rho_L \omega^2 \tilde{p}_i}{2} \left\{ [z^2 \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t)]_{z=0}^{+\infty} - 2 \int_z z \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t) dz \right\} = \rho_L \omega^2 \tilde{p}_i \int_z z \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t) dz.$$

Par hypothèse géométrique, les seules composantes non nulles du tenseur des déformations de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}(z, t)$ sont : $(\varepsilon_{xz}^{\text{ms}}, \varepsilon_{yz}^{\text{ms}}, \varepsilon_{zz}^{\text{ms}})$. Ainsi, par définition du tenseur des contraintes de magnétostriction, il vient par symétrie du tenseur des rigidités élastiques \mathbb{C} ($c_{\alpha\beta}$ en notation de Voigt) :

$$\sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t) = \mathbb{C}_{i3i3} \varepsilon_{iz}^{\text{ms}}(z, t) = c_{(i3)3} \varepsilon_{iz}^{\text{ms}}(z, t).$$

Les constantes d'élasticité du milieu sont indépendantes de z par hypothèse (milieu homogène). De plus, on peut facilement remarquer que, dans le cas d'un milieu élastique isotrope, les coefficients $\tilde{\rho}_i$ sont les inverses des constantes élastiques $c_{(i3)3}$, soit :

$$\forall i \in [1,2,3], \quad \tilde{\rho}_i c_{(i3)3} = 1.$$

De plus, les hypothèses prises sur la configuration géométrique étudiée permettent de définir le déplacement élastique particulière u_z^{ms} induit par effets magnétostrictifs directement comme l'intégrale dans la profondeur des déformations de magnétostriction $\varepsilon_{iz}^{\text{ms}}$ du milieu inspecté selon la relation :

$$u_z^{\text{ms}}(z, t) = \int_{x_3=z}^{+\infty} \varepsilon_{iz}^{\text{ms}}(x_3, t) dx_3.$$

Ainsi, par intégration par parties, ces trois dernières identités permettent d'écrire la contrainte surfacique équivalente $\tilde{\sigma}^{\text{fms}}$ des sources de magnétostriction \mathbf{f}^{ms} sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^{\text{ms}}(t) &= \rho_L \omega^2 \tilde{\rho}_i \int_z z \sigma_{iz}^{\text{ms}}(z, t) dz \\ &= \rho_L \omega^2 (\tilde{\rho}_i c_{(i3)3}) \int_z z \varepsilon_{iz}^{\text{ms}}(z, t) dz \\ &= \rho_L \omega^2 \left\{ [z u_z^{\text{ms}}(z, t)]_{z=0}^{+\infty} - \int_z u_z^{\text{ms}}(z, t) dz \right\} \\ &= -\rho_L \omega^2 \int_z u_z^{\text{ms}}(z, t) dz. \end{aligned}$$

Finalement, on reconnaît dans cette dernière équation la définition du moment d'ordre zéro des sources inertielles de magnétostriction proposées par Nagy et Ribichini. On a donc montré que, dans cette configuration géométrique et élastique simplifiée, les deux modèles de sources surfaciques de magnétostriction sont formellement équivalents :

$$\tilde{\sigma}^{\text{fms}}(t) = \mathbf{M}_{\text{fms}}^{(0)}(t) - \frac{\rho_L \omega^2}{2} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}_{\text{fms}}^{(2)}(t) = \mathbf{M}_{\text{fms}}^{(0)}(t).$$

Cependant, l'approche inertielle repose sur l'invariance des sources par rapport aux composantes spatiales tangentielles. En effet, sans cette invariance, il n'est pas possible de définir le déplacement élastique \mathbf{u}^{ms} en fonction des composantes du tenseur de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ms}}$ qui a donné naissance à ce déplacement. Cette approche inertielle ne peut donc pas être étendue à des configurations géométriques plus complexes en vue de son utilisation en entrée des modèles semi-analytiques de rayonnement ultrasonore développés dans CIVA US. Dans ce sens, le modèle de contraintes surfaciques équivalentes de magnétostriction développées à l'ordre deux proposé dans cette étude répond à cette problématique. Cette approche permet la prise en compte de milieux élastiquement et géométriquement complexes, et traite également de l'ouverture spatiale (surfacique) des sources de magnétostriction induites par EMAT dans une très large gamme de milieux inspectés par EMAT.

RÉFÉRENCES

- [Aharoni_2001] A. Aharoni, Introduction to the Theory of Ferromagnetism, Oxford University Press, 2001.
- [Amory_2007] V. Amory, Études du comportement complexe de source et du rayonnement ultrasonore des traducteurs multi-éléments flexibles au contact, thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2007.
- [Ashigwuike-et-al_2015] E. C. Ashigwuike, O. J. Ushie, R. Mackay, W. Balachandran, A study of the transduction mechanisms of electromagnetic acoustic transducers (EMATs) on pipe steel materials, *Sens. Actuators A: Phys.*, **229** (2015) 154.
- [Aucejo-Galindo_2010] V. Aucejo-Galindo, Méthode tensorielle générale pour une modélisation multiphysique de dispositifs magnétomécaniques rapides, thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 2010.
- [Auld_1973] B. A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids II, Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [Auld_1979] B. A. Auld, General electromechanical reciprocity relations applied to the calculation of elastic wave scattering coefficients, *Wave Motion*, **1** (1979) 3.
- [Barkhausen_1919] H. Barkhausen, Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen (Two phenomena, discovered with the help of the new amplifiers), *Z. Physik*, **20** (1919) 401.
- [Barré_2003] O. Barré, Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille I, 2003.
- [Barré-et-al_2006] O. Barré, P. Brochet, M. Hecquet, Experimental Validation of Magnetic and Electric Local Force Formulations Associated to Energy Principle, *IEEE Trans. Magn.*, **42-4** (2006) 1475.
- [Bartok-et-al_2011] A. Bartok, L. Daniel, A. Razek, Micro–macro modelling of stress-dependent anisotropic magnetoresistance, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **44** (2011) 135001.
- [Berlincourt-et-al_1964] D. A. Berlincourt, D. R. Curran, H. Jaffe, Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers, *Physical Acoustics*, **1A** (1964) 169.
- [Bernard-et-al_2011] L. Bernard, X. Mininger, L. Daniel, G. Krebs, F. Bouillault, M. Gabsi, Effect of stress on switched reluctance motors: a magneto-elastic finite-element approach based on multiscale constitutive laws, *IEEE Trans. Magn.*, **47** (2011) 2171.
- [Billardon-Hirsinger_1995] L. Hirsinger, R. Billardon, Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects, *IEEE Trans. Magn.*, **31-3** (1995) 1877.
- [Birss_1971] R. R. Birss, Magnetomechanical effects in the Rayleigh region, *IEEE Trans. Magn.*, **7** (1971) 113.
- [Bloch_1932] F. Bloch, Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Vol. 74, No. 4-5, pp. 295-335, 1932.
- [Bossavit_1992] A. Bossavit, On Local Computation of the Electromagnetic Force Field in Deformable Bodies, *Int. J. Appl. Elect. Mat.*, **2, 4** (1992) 333.
- [Bozorth_1964] R. M. Bozorth, Ferromagnetism, Hoboken: Wiley-Interscience, 1964.
- [Brillouin_1927] M. L. Brillouin, Les moments de rotation et le magnétisme dans la mécanique ondulatoire, *J. Phys. Radium*, **8(2)** (1927) 74.
- [Brown_1949] W. F. Brown, Irreversible magnetic effects of stress, *Phys. Rev.*, **75** (1949) 147.

- [Brown_1953] W. F. Brown, Magnetic Energy Formulas and their Relation to Magnetization Theory, *Rev. Mod. Phys.*, **25-1** (1953) 131.
- [Brown_1962] W. F. Brown, Magnetostatic Principles in Ferromagnetism, North-Holland Publishing Company, 1962.
- [Brown_1965] W. F. Brown, Theory of magnetoelastic effects in ferromagnetism, *J. Appl. Phys.*, **36** (1965) 994.
- [Brown_1966] W. F. Brown, Magnetoelastic Interactions, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [Buiron-et-al_1999] N. Buiron, L. Hirsinger, R. Billardon, A multiscale model for magneto-elastic couplings, *J. Phys. IV*, **9** (1999) 187.
- [Caire_2014] F. Caire, Les équations de Maxwell covariantes pour le calcul rapide des champs diffractés par des conducteurs complexes. Application au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault, thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2014.
- [Chen-et-al_2001] Y. Chen, B. Kriegermeier-Suiton, J. Snyder, K. Ddenis, R. McCallum, D. C. Jiles, Magnetomechanical effects and torsional strain in iron, cobalt and nickel, *J. Magn. Magn. Mater.*, **236** (2001) 131.
- [Chikazumi_1964] S. Chikazumi, Physics of Magnetism, D. Van Nostrand Company Inc., United States of America, 1964.
- [Civa_Extende] Description détaillée du logiciel CIVA sur www.extende.com.
- [Clark_1980] A. E. Clark, Ferromagnetic materials, Vol. 1, Ch. 7, pp. 531-589, Ed. E. P. Wohlfarth, North Holland Publishing, Co., Amsterdam, 1980.
- [Clause-et-al_2017] B. Clause, A. Lhémy, H. Walaszek, A model to predict the ultrasonic field radiated by magnetostrictive effects induced by EMAT in ferromagnetic parts, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **797** (2017) 012004.
- [Clause-Lhémy_2016] B. Clause, A. Lhémy, Transformation of body force generated by non-contact sources of ultrasound in an isotropic solid of complex shape into equivalent surface stresses, *Wave Motion*, **60** (2016) 135.
- [Corcolle-et-al_2008] R. Corcolle, L. Daniel, F. Bouillault, Generic formalism for homogenization of coupled behaviors: application to magneto-electroelastic behavior, *Phys. Rev. B*, **78-21** (2008) 214110.
- [Couderechon_1979] G. Couderechon_1979, Alliages fer-nickel et fer-cobalt, Propriétés magnétiques, Techniques de l'Ingénieur, D 200, (1979).
- [Coulomb_1983] J. L. Coulomb, A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness, *IEEE Trans. Magn.*, **19-6** (1983) 2514.
- [Craik-Wood_1971] D. J. Craik, M. J. Wood, Magnetization changes induced by stress in a constant applied field, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **4** (1971) 1009.
- [Cullity_1972] B. D. Cullity, Introduction to magnetic materials, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1972.
- [Curie] P. Curie, « Œuvres de Pierre Curie » publiées par les soins de la Société française de physique, Paris, Éd. des Archives Contemporaines, 1984.
- [d'Aquino_2004] M. d'Aquino, Nonlinear magnetization dynamics in thin-films and nanoparticles, thèse de doctorat, Università degli Studi di Napoli Federico II, 2004.
- [Dahia-et-al_2015] A. Dahia, E. Berthelot, Y. Le Bihan, L. Daniel, A model-based method for the characterization of stress in magnetic materials using eddy current non-destructive evaluation, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **48** (2015) 195002.

- [Daniel_2011] L. Daniel, Approche multi-échelle du comportement électro-magnéto-mécanique, Mémoire d'HDR, Université Paris-Sud 11, 2011.
- [Daniel-Corcolle_2007] L. Daniel, R. Corcolle, A note on the effective magnetic permeability of polycrystals, *IEEE Trans. Magn.*, **43-7** (2007) 3153.
- [Daniel-et-al_2008] L. Daniel, O. Hubert, N. Buiron, R. Billardon, Reversible magneto-elastic behavior: A multiscale approach, *J. Mech. Phys. Solids*, **56** (2008) 1018.
- [Daniel-et-al_2015] L. Daniel, O. Hubert, M. Rekik, A Simplified 3-D Constitutive Law for Magnetomechanical Behavior, *IEEE Trans. Magn.*, **51** (2015) 7300704.
- [Daniel-Hubert_2009] L. Daniel, O. Hubert, An analytical model for the ΔE effect in magnetic materials, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, **45** (2009) 31101.
- [Dapino_1999] M. J. Dapino, Nonlinear and hysteretic magnetomechanical model for magnetostrictive transducers, thèse de doctorat, Iowa State University, 1999.
- [Dapino-et-al_2000] M. J. Dapino, R. C. Smith, A. B. Flatau, Structural Magnetic Strain Model for Magnetostrictive Transducers, *IEEE Trans. Magn.*, **36-3** (2000) 545.
- [du-Trémolet-de-Lacheisserie_1999] E. du Trémolet de Lacheisserie, Magnétisme Vol. 1 - Fondements, EDP Science, Grenoble, 1999.
- [Engdahl_2000] G. Engdahl, Handbook of Giant Magnetostrictive Materials, Academic Press, 2000.
- [Fonteyn_2010] K. A. Fonteyn, Energy-based magneto-mechanical model for electrical steel sheets, thèse de doctorat, Aalto University, 2010.
- [Gaerttner-et-al_1969] M. R. Gaerttner, W. D. Wallace, B. W. Maxfield, Experiments relating to the theory of magnetic direct generation of ultrasound in metals, *Phys. Rev. B*, **184** (1969) 702.
- [Gaerttner_1971] M. R. Gaerttner, Direct Generation of Acoustic Waves in Conducting Materials, Thèse de doctorat, Dept. of Physics, Cornell University, 1971.
- [Galopin_2007] N. Galopin. Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques, Université Paris Sud - Paris 11, 2007.
- [Galopin_et_al_2007] N. Galopin, L. Daniel, F. Bouillault, M. Besbes, Numerical analysis for the design of a magneto-elastic characterization device, *Przegląd Elektrotechniczny*, ISSN 0033-2097, **83(6)** (2007) 44.
- [Garcia-Rodriguez-et-al_2014] D. Garcia-Rodriguez, O. Mihalache, M. Ueda, EMAT simulations based on a two-dimensional FEM coupled electromechanical formulation, *Int. J. Appl. Electrom.*, **45** (2014) 543.
- [Garcia-Rodriguez-et-al_2016] D. Garcia-Rodriguez, O. Mihalache, T. Yamamoto, W. Cheng, Validation of an EMAT Code based on a Two-Dimensional FEM Coupled Electromechanical Formulation, *Proc. 11th ICNDE, JRC Conference and Workshop Reports*, pp. 147-161 (2016).
- [Gou-et-al_2004] X.-F. Gou, Y. Yang, X. J. Zheng, Analytic expression of magnetic field distribution of rectangular permanent magnet, *Appl. Math. Mech.*, **25** (2004) 297.
- [Heisenberg_1931] W. Heisenberg, Zur Theorie der Magnetostriktion und der Magnetisierungskurve (On the theory of magnetostriction and the magnetization curve), *Z. Physik*, **69** (1931) 287.
- [Henrotte-et-al_2004] F. Henrotte, H. Vande Sande, G. Deliège, K. Hameyer, Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material, *IEEE Trans. Magn.*, **40-2** (2004) 553.
- [Henrotte-Hameyer_2004] F. Henrotte, K. Hameyer, Computation of Electromagnetic Force Densities: Maxwell Stress Tensor vs. Virtual Work Principle, *J. Comput. Appl. Math.*, **168** (2004) 235.
- [Herpin_1971] A. Herpin, Le champ moléculaire, *J. Phys. Colloque C1*, **32** (1971) C1-4.
- [Hirao-Ogi_1999] M. Hirao, H. Ogi, An SH-wave EMAT technique for gas pipeline inspection, *NDT&E Int.*, **32** (1999) 127.

- [Hirao-Ogi_2003] M. Hirao, H. Ogi, EMATs for Science and Industry: Noncontacting Ultrasonic Measurements, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [Il'in-Kharitonov_1980] I. V. Il'in, A. V. Kharitonov, *Soviet Journal of Nondestructive Testing*, **16**, 1980.
- [Isla-Cegla_2016] J. Isla, F. Cegla, Optimisation of the Bias Magnetic Field of Shear Wave EMATs, *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.*, **63**(8) (2016) 1148.
- [Jafari Shapoorabadi-et-al_2005] R. Jafari Shapoorabadi, A. Konrad, A. N. Sinclair, Computation of current densities in the receiving mode of electromagnetic acoustic transducers, *J. App. Phys.*, **97** (2005) 10Q106.
- [Jafari Shapoorabadi-et-al_2005a] R. Jafari Shapoorabadi, A. Konrad, A. N. Sinclair, The governing electrodynamic equations of electromagnetic acoustic transducers, *J. Appl. Phys.*, **97** (2005) 10E102.
- [Jezzine_2006] K. Jezzine, Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées, thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2006.
- [Jezzine-Lhémercy_2006] K. Jezzine, A. Lhémercy, Diffraction effects on ultrasonic guided waves radiated or received by transducers mounted on the section of the guide, *Rev. Prog. QNDE*, **25** (2006) 134.
- [Jian-et-al_2006a] X. Jian, S. Dixon, R. S. Edwards, J. Reed, Coupling mechanism of electromagnetic acoustical transducers for ultrasonic generation, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119-5** (2006) 2693.
- [Jian-et-al_2006b] X. Jian, S. Dixon, R. S. Edwards, J. Morrison, Coupling mechanism of an EMAT, *Ultrasonics* **44** (2006) e653.
- [Jian-et-al_2006c] X. Jian, S. Dixon, K. T. V. Grattan, R. S. Edwards, A model for pulsed Rayleigh wave and optimal EMAT design, *Sens. Actuators A*, **128** (2006) 296.
- [Jiles_1995] D. C. Jiles, Theory of the magnetomechanical effect, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **28** (1995) 1537.
- [Jiles_1998] D. C. Jiles, Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Chapman & Hall, London, 2nd ed., 1998.
- [Jiles_2002] D. C. Jiles, Hysteresis models: non-linear magnetism on length scales from the atomistic to the macroscopic, *J. Magn. Magn. Mater.*, **242-245** (2002) 116.
- [Jiles-Atherton_1986] D. C. Jiles, D. L. Atherton, Theory of ferromagnetic hysteresis, *J. Magn. Magn. Mater.*, **61** (1986) 48.
- [Joule_1847] J. P. Joule, On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars, *Philos. Mag. A*, **30(199)** (1847) pp. 76-87, pp. 225-241.
- [Kawashima_1984] K. Kawashima, Quantitative calculation and measurement of longitudinal and transverse ultrasonic wave pulses in solid, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, **SU-31** (1984) 83.
- [Khairi-et-al_2016] R. Khairi, X. Mininger, R. Corcolle, L. Pichon, L. Bernard, Modeling of Magnetic Field Perturbations on the Balance Spring of a Mechanical Watch, *IEEE Trans. Magn.*, **52(3)** (2016) 7002604.
- [Kittel_1949] C. Kittel, Physical theory of ferromagnetic domains, *Rev. Mod. Phys.*, **21(4)** (1949) 541.
- [Kube-et-al_2016] M. Kube, Yongfeng Song, Xiongbing Li, A self-reciprocity calibration method for broadband focused transducers, *J. Acoust. Soc. Am.* **140** (2016) EL236.
- [Laguerre-et-al_2002] L. Laguerre, J.-C. Aime, M. Brissaud, Magnetostrictive pulse-echo device for non-destructive evaluation of cylindrical steel materials using longitudinal guided waves, *Ultrasonics*, **39** (2002) 503.
- [Lamb_1904] H. Lamb, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **203** (1904) 1.

- [Landau-Lifshitz_1969] L. Landau, E. Lifshitz, *Électrodynamique des milieux continus*, MIR, Moscou, 1969.
- [Langevin_1905] P. Langevin, Magnétisme et théorie des électrons, *Ann. Chim. Phys.* (8), **5** (1905) 70.
- [Ledieu_2005] M. Ledieu, Contribution à la Caractérisation Hyperfréquence des Matériaux, thèse de doctorat, Université de Tours, 2005.
- [Lee_1955] E. W. Lee, Magnetostriction and magnetomechanical effects, *Rep. Prog. Phys.*, **18** (1955) 184.
- [Lee-et-al_2000] S.-H. Lee, I.-H. Park, K. Lee, Comparison of Mechanical Deformations Due to Different Force Distributions of Two Equivalent Magnetization Models, *IEEE Trans. Magn.*, **34-4** (2000) 1368.
- [Lee-et-al_2005] S.-H. Lee, X. He, D. Kim, S. Elborai, Evaluation of the Mechanical Deformation in Incompressible Linear and Nonlinear Magnetic Materials Using Various Electromagnetic Force Density Methods, *J. Appl. Phys.*, **97** (2005) 10E108.
- [Lhémercy_1994] A. Lhémercy, A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid, *J. Acoust. Soc. Am.*, **96** (1994) 3776.
- [Lhémercy_2000] A. Lhémercy, Modèles théoriques et études pratiques en imagerie ultrasonore large-bande. Applications au contrôle non-destructif des matériaux, Mémoire d'HDR, Université Paris 7 Denis Diderot, 2000.
- [Li_2004] L. Li, Stress effects on ferromagnetic materials: investigation of stainless steel and nickel, thèse de doctorat, Iowa State University, 2004.
- [Ludwig_1992] R. Ludwig, Numerical implementation and model predictions of a unified conservation law description of the electromagnetic acoustic transduction process, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, **39** (1992) 481.
- [Mason_1954] W. P. Mason, Derivation of Magnetostriction and Anisotropic Energies for Hexagonal, Tetragonal, and Orthorhombic Crystals, *Phys. Rev.*, **96-2** (1954) 302.
- [Maugin-Trimarco_2000] G. A. Maugin, C. Trimarco, Material Mechanics of Electromagnetic Solids, CISM Lecture Notes, 427, Springer Verlag, pp.129-171, 2000.
- [Maxwell_1861] J. C. Maxwell, *On Physical Lines of Force*, **21**, 1861.
- [Maxwell_1873] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, London, 1873.
- [Melcher_1981] J. R. Melcher, *Continuum Electromechanics*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- [Morales-et-al_2010] A. Morales, A. Nieto, J. Chicharro, P. Pintado, Field-dependent elastic modulus and damping in pure iron, nickel and cobalt, *J. Magn. Magn. Mater.*, **322** (2010) 1952.
- [Moskowitz_1986] L. R. Moskowitz, *Permanent magnet design and application handbook*, Krieger Publishing Co., Malabar, Florida, 1986.
- [Nagy-Ribichini_2015] P.B. Nagy, R. Ribichini, Equivalent body-force model for magnetostrictive transduction in EMATs, *Review of Progress in QNDE*, **1650** (2015) 1316.
- [Ersted_1820] H. C. (Ersted), Expériences sur l'effet du conflit électrique sur l'aiguille aimantée, *Annales de chimie et de physique*, **14** (1820) 417.
- [Ogi_1997] H. Ogi, Field dependence of coupling efficiency between electromagnetic field and ultrasonic bulk waves, *J. Appl. Phys.*, **82** (1997) 3940.
- [Ogi_2012] H. Ogi, Erratum: "Field dependence of coupling efficiency between electromagnetic field and ultrasonic bulk waves" [*J. Appl. Phys.* 82, 3940 (1997)], *J. Appl. Phys.*, **112** (2012) 059901.
- [Ogi-et-al_1999] H. Ogi, M. Hirao, T. Ohtani, Line-Focusing Electromagnetic Acoustic Transducers for the Detection of Slit Defects, *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.*, **46(2)** (1999) 341.

- [Pao-Yeh_1973] Y.-H. Pao, C.-S. Yeh, A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **11** (1973) 415.
- [Pathak-et-al_1980] P.H. Pathak, W.D. Burnside, R.J. Marhefka, A uniform GTD analysis of the diffraction of electromagnetic waves by a smooth convex surface, *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, **28** (1980) 631.
- [PEM_CWT] <http://www.pemuk.com/products/cwt-current-probe/cwt-minihf.aspx>.
- [Ramesh-et-al_1996] A. Ramesh, D.C. Jiles, J. Roderick, A model of anisotropic anhysteretic magnetization, *IEEE Trans. Magn.*, **32-5** (1996) 4234.
- [Randall_1939] R. H. Randall, F. C. Rose, C. Zener, Intercrystalline Thermal Currents as a Source of Internal Friction, *Phys. Rev.* **56** (1939) 343.
- [Ravaud-et-al_2010] R. Ravaud, G. Lemarquand, S. Babic, V. Lemarquand, C. Akyel, Cylindrical Magnets and Coils: Fields, Forces, and Inductances, *IEEE Trans. Magn.*, **46(9)** (2010) 3585.
- [Reboud-et-al_2009] C. Reboud, G. Pichenot, T. Theodoulidis, ECT simulation of coil tilt effect on 3D flaws responses in planar geometries, *Rev. Prog. QNDE*, **28A** (2009) 295.
- [Ren-Razek_1992] Z. Ren, A. Razek, Local force computation in deformable bodies using edge element", *IEEE Trans. Magn.*, **28** (1992) 1212.
- [Reyne-et-al_1987] G. Reyne, J. C. Sabonnadière, J. L. Coulomb, P. Brissonneau, A Survey of the Main Aspects of Magnetic Forces and Mechanical Behaviour of Ferromagnetic Materials under Magnetization, *IEEE Trans. Magn.*, **23-5** (1987) 3765.
- [Reyne-et-al_1988] G. Reyne, G. Meunier, J. H. Imhoff, E. Euxibie, Magnetic Forces and Mechanical Behaviour of Ferromagnetic Materials. Presentation and Results on the Theoretical, Experimental and Numerical Approaches, *IEEE Trans. Magn.*, **24-1** (1988) 234.
- [Ribichini-et-al_2010] R. Ribichini, F. Cegla, P. B. Nagy, P. Cawley, Quantitative Modeling of the Transduction of Electromagnetic Acoustic Transducers Operating on Ferromagnetic Media, *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.*, **57(12)** (2010) 2808.
- [Ribichini_2011] R. Ribichini, Modelling of Electromagnetic Acoustic Transducer, thèse de doctorat, Imperial College London, 2011.
- [Ribichini-et-al_2011] R. Ribichini, F. Cegla, P. B. Nagy, P. Cawley, Study and Comparison of Different EMAT Configurations for SH Wave Inspection, *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.*, **58(12)** (2011) 2571.
- [Ribichini-et-al_2012a] R. Ribichini, F. Cegla, P. B. Nagy, P. Cawley, Experimental and numerical evaluation of electromagnetic acoustic transducer performance on steel materials, *NDT&E Int.*, **45** (2012) 32.
- [Ribichini-et-al_2012b] R. Ribichini, P. B. Nagy, H. Ogi, The impact of magnetostriction on the transduction of normal bias field EMATs, *NDT&E Int.*, **51** (2012) 8.
- [Rinaldi-Brenner_2002] C. Rinaldi, H. Brenner, Body versus surface forces in continuum mechanics: Is the Maxwell stress tensor a physically objective Cauchy stress?, *Phys. Rev. E.*, **65** (2002) 036615.
- [Roche_2000] J. J. Roche, B and H, the intensity vectors of magnetism: A new approach to resolving a century-old controversy, *Am. J. Phys.*, **68(5)** (2000) 438.
- [Rouge_2013] C. Rouge, Modélisation du rayonnement ultrasonore par un transducteur EMAT dans une pièce ferromagnétique, thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2013.
- [Rouge-et-al_2013] C. Rouge, A. Lhémy, D. Ségur, Transformation of body force localized near the surface of a half-space into equivalent surface stresses, *J. Acoust. Soc. Am.*, **134** (2013) 2639.

- [Rouge-et-al_2014] C. Rouge, A. Lhémy, C. Aristégui, H. Walaszek, Calculation of Ultrasonic Fields Radiated in a Ferromagnetic Medium by an EMAT of Arbitrary Bias Field Driven by a Current of Arbitrary Intensity, *Review of Progress in QNDE, AIP Conf. Proc.*, **1581** (2014) 450.
- [Rouge-et-al_2014a] C. Rouge, A. Lhémy, C. Aristégui, EMAT generation of bulk forces in a ferromagnetic plate and their equivalent surface stresses, *J. Phys. Conf. Ser.*, **498** (2014) 012013.
- [Rouge-et-al_2014b] C. Rouge, A. Lhémy, C. Aristégui, Frequency spectra of magnetostrictive and Lorentz forces generated in ferromagnetic materials by a CW excited EMAT, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **498** (2014) 012014.
- [Royer-Dieulesaint_2000] D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic Waves in Solids. Volume 1: Free and Guided Propagation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [Rueter-Morgenstern_2014] D. Rueter, T. Morgenstern, Ultrasound generation with high power and coil only EMAT concepts, *Ultrasonics*, **54** (2014) 2141.
- [Sablík-Jiles_1993] M. J. Sablík, D. C. Jiles, Coupled Magnetoelastic Theory of Magnetic and Magnetostrictive Hysteresis, *IEEE Trans. Magn.*, **29-3** (1993) 2113.
- [Sanchez-Grandia-et-al_2006] R. Sanchez-Grandia, R. Vives-Fos, V. Aucejo-Galindo, Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, **35** (2006) 61.
- [Sanchez-Grandia-et-al_2008] R. Sanchez-Grandia, V. Aucejo-Galindo, A. Usieto-Galve, R. Vives-Fos, General Formulation for Magnetic Forces in Linear Materials and Permanent Magnets, *IEEE Trans. Magn.*, **44-9** (2008) 2134.
- [Sánchez-Sesma-et-al_2008] F.J. Sánchez-Sesma, J.A. Pérez-Ruiz, F. Luzón, M. Campillo, A. Rodríguez-Castellanos, Diffuse fields in dynamic elasticity, *Wave Motion*, **45** (2008) 641.
- [Seher-Challis_2016] M. Seher, R. Challis, The electrical properties of a planar coil electromagnetic acoustic transducer and their implications for noise performance, *Meas. Sci. Technol.*, **27** (2016) 025102.
- [Seher-et-al_2015] M. Seher, P. Huthwaite, M. J. S. Lowe, P. B. Nagy. Model-based design of low frequency Lamb wave EMATs for mode selectivity, *J. Nondestruct. Eval.*, **34** (2015) 22.
- [Seher-Nagy_2016] M. Seher, P. B. Nagy, On the Separation of Lorentz and Magnetization Forces in the Transduction Mechanism of Electromagnetic Acoustic Transducers (EMATs), *NDT&E Int.*, **84** (2016) 1.
- [Shu-et-al_2004] Y. C. Shu, M. P. Lin, K. C. Wu, Micromagnetic modeling of magnetostrictive materials under intrinsic stress, *Mech. Mater.*, **36** (2004) 975.
- [Schutz_1980] B. Schutz, Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1980.
- [Skarlatos-Theodoulidis_2016] A. Skarlatos, T. Theodoulidis, A Modal Approach for the Solution of the Non-Linear Induction Problem in Ferromagnetic Media, *IEEE Trans. Magn.*, **52-2** (2016) 7000211.
- [Stévenin-et-al_2016] M. Stévenin, A. Lhémy, S. Grondel, An efficient model to predict guided wave radiation by finite-sized sources in multilayered anisotropic plates with account of caustics, *J. Phys.: Conf. Series.*, **684** (2016) 012004.
- [Theodoulidis_2005] T. P. Theodoulidis, Analytical model for tilted coils in Eddy-current nondestructive inspection, *IEEE Trans. Magn.*, **41** (2005) 2447.
- [Thompson_1973] R. B. Thompson, A model for the electromagnetic generation and detection of Rayleigh and Lamb waves, *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, **20** (1973) 340.
- [Thompson_1977] R. B. Thompson, Mechanisms of electromagnetic generation and detection of ultrasonic lamb waves in iron-nickel alloy polycrystals, *J. Appl. Phys.*, **48** (1977) 4942.

- [Thompson_1978] R. B. Thompson, A Model for the Electromagnetic Generation of Ultrasonic Guided Waves in Ferromagnetic Metal Polycrystals, *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, **25** (1) (1978) 7.
- [Thompson_1980] R. B. Thompson, The relationship between radiating body forces and equivalent surface stresses: analysis and application to EMAT design, *J. Nondestruct. Eval.*, **1** (1980) 79.
- [Thompson_1990] R. B. Thompson, Physical principles of measurements with EMAT transducers, *Physical Acoustics*, vol. 19, New York, Academic Press, p. 157–200, 1990.
- [Thompson-et-al_1984a] R. B. Thompson, S. S. Lee, J. F. Smith, Absolute measurement of stress in textured plates from angular dependence of SH0 velocity, *Review of Progress in QNDE*, edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti (Plenum, New York), **3** (1984) 1311.
- [Thompson-et-al_1984b] R. B. Thompson, S. S. Lee, J. F. Smith, Microstructure independent acoustoelastic measurement of stress, *Appl. Phys. Lett.*, **44** (1984) 296.
- [Thompson-et-al_1986] R. B. Thompson, S. S. Lee, J. F. Smith, Angular dependence of ultrasonic wave propagation in a stressed, orthorhombic continuum: Theory and application to the measurement of stress and texture, *J. Acoust. Soc. Am.*, **80** (1986) 921.
- [Tiersten_1964] H. F. Tiersten, Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators, *J. Math. Phys.*, **5-9** (1964) 1298.
- [Tiersten_1965] H. F. Tiersten, Variational principle for saturated magnetoelastic insulators, *J. Math. Phys.*, **6** (1965) 779.
- [Toupin_1956] R. A. Toupin, The elastic dielectric, *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956) 849.
- [Vandevelde-Melkebeek_2001] L. Vandevelde, J. A. A. Melkebeek, A Survey of Magnetic Force Distributions Based on Different Magnetization Models and on the Virtual Work Principle, *IEEE Trans. Magn.*, **37-5** (2001) 3405.
- [Vandevelde-Melkebeek_2002] L. Vandevelde, J. A. A. Melkebeek, Modeling of Magnetoelastic Material, *IEEE Trans. Magn.*, **38-2** (2002) 993.
- [Vandevelde-Melkebeek_2003] L. Vandevelde, J. A. A. Melkebeek, Magnetic Forces and Magnetostriction in Electrical Machines and Transformer Cores, *IEEE Trans. Magn.*, **39-3** (2003) 1618.
- [Villari_1865] E. Villari, Change of magnetization by tension and by electric current, *Annalen der Physik und Chemie*, **128**, 1865.
- [Vinogradov-Ulyanov_1960] K. N. Vinogradov, G. K. Ulyanov, Measurement of the Velocity and Attenuation of Ultrasonic Surface Waves in Hard Materials, *Sov. Phys. Acoustics*, **5** (1960) 296.
- [Walaszek-Bouteille_2014] H. Walaszek, P. Bouteille, Application of ultrasonic measurements to stress assessment on already tightened bolts, *2014 ECNDT*, proceedings published on-line, www.ndt.net/events/ECNDT2014/app/content/Paper/505_Walaszek.pdf.
- [Weiss_1907] P. Weiss, L'hypothèse du champ moléculaire et de la propriété ferromagnétique, *J. de Phys.*, **6** (1907) 661.
- [Wilbrand_1983] A. Wilbrand, EMUS-probes for bulk waves and Rayleigh waves, Model for sound field and efficiency calculations, *New Procedures in NDT*, Springer, pp. 71–80, 1983.
- [Woodson-Melcher_1968] H. H. Woodson, J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Part I (Discrete Systems) and Part II (Fields, Forces, and Motion), John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [Zahn_2006] M. Zahn, Derivation of the Korteweg-Helmholtz Electric and Magnetic Force Densities Including Electrostriction and Magnetostriction from the Quasistatic Poynting's Theorems, *Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 2006, pp.186-189.

Titre : Modélisation des transducteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT) pour le contrôle non-destructif (CND) de milieux ferromagnétiques

Mots clés : EMAT, CND, ferromagnétisme, couplage électromagnéto-élastique, magnétostriction

Résumé : Un transducteur électromagnétique acoustique (EMAT) induit sans contact des sources dynamiques responsables du rayonnement ultrasonore transmis dans une pièce pour son contrôle non-destructif (CND).

Un modèle de sources de transduction induites par EMAT en milieux ferromagnétiques est développé. Il prend en compte des courbes anhystérétiques d'aimantation et de déformation de magnétostriction prédites par une approche multi-échelle simplifiée, et dérive formellement les tenseurs des contraintes électromagnétiques et magnétostrictives adaptés à la formulation des sources électromagnéto-élastiques induites par EMAT dans une très large gamme de configurations d'inspection.

Pour simuler efficacement le rayonnement ultrasonore de sources volumiques en utilisant

les modèles semi-analytiques du logiciel CIVA, une méthode capable de les transformer en contraintes surfaciques équivalentes est développée. Ainsi, le modèle formule une source de contraintes surfaciques décrivant l'ensemble des phénomènes de transduction impliqués par EMAT en milieux magnétiques. Ce modèle permet de quantifier le poids relatif de chaque source de transduction, d'illustrer l'influence de la prise en compte des lois magnéto-élastiques anhystérétiques, et de mettre en évidence les variations des sources avec un état de contraintes mécaniques. Il est appliqué dans une configuration EMAT donnée pour illustrer l'apport des outils mis en place dans la conception d'EMAT pour le CND, et ses prédictions sont comparées avec succès à des résultats de mesure.

Title: Modelling of Electromagnetic Acoustic Transducers (EMAT) for the Non-Destructive Evaluation (NDE) of Ferromagnetic Materials.

Keywords: EMAT, NDE, Ferromagnetism, Electromagnetic Acoustic Coupling, Magnetostriction

Abstract: An electromagnetic acoustic transducer (EMAT) induces without contact dynamic sources in a ferromagnetic material which radiate ultrasonic waves used for its nondestructive evaluation (NDE).

Taking account of the anhysteretic magnetic and magnetostrictive constitutive laws predicted by a simplified multiscale approach, the transduction model derives the electro-magnetic and magnetostrictive stresses tensors, well-fitted for the definition of electromagnetic and magnetostrictive sources induced by EMAT, irrespective of the piece geometry, of the material properties and of the transducer design.

To efficiently predict ultrasonic field radiation with the CIVA platform, a method to transform body sources into equivalent surface stresses is developed. As a result, an equivalent surface source is derived to accurately depict all the transduction processes induced by EMAT in nonlinear magnetic material. The model is used to quantify the weight of each transduction mechanism, to illustrate effects of nonlinear magnetoelastic behaviors of materials, to enlighten the impact of elastic residual stresses on transduction sources. It is applied in a given EMAT NDE configuration to illustrate how the developed tools can help optimizing EMAT design, and its predictions are successfully compared to experimental measurements.

