

# Table des matières

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction Générale</b>   | <b>1</b> |
| 1.1      | Contexte physique  | 1        |
| 1.2      | Présentation des différentes interactions entre l'écoulement fluide et le bouclier thermique | 2        |
| 1.2.1    | Effets de pyrolyse et couplage thermique entre les matériaux du composite résine-fibres      | 2        |
| 1.2.2    | Réactions d'ablation à l'interface entre la fibre de carbone et l'écoulement gazeux          | 3        |
| 1.2.3    | Changement de phase de la matrice (réaction de fusion)                                       | 3        |
| 1.2.4    | Interactions entre la phase liquide (issue de la fusion de la résine) et l'écoulement gazeux | 4        |
| 1.3      | Objectifs de la thèse  | 4        |
| 1.4      | Descriptif des travaux   | 5        |
| 1.5      | Publications et communications   | 7        |
| <b>2</b> | <b>Modèles mathématiques</b>   | <b>9</b> |
| 2.1      | Présentation des modèles diphasiques   | 10       |
| 2.1.1    | Modèle à sept équations de Baer-Nunziato [BN86]  | 10       |
| 2.1.2    | Modèle à six équations   | 11       |
| 2.1.3    | Modèle à cinq équations de Kapila [KMB <sup>+</sup> 01]                                      | 11       |
| 2.1.4    | Modèle à cinq équations réduit [ACK02, MSNA02]   | 12       |
| 2.1.5    | Prise en compte des termes de dissipation  | 13       |
| 2.2      | Fermeture des modèles diphasiques et lois d'état   | 14       |
| 2.2.1    | Rappels de thermodynamique   | 14       |
| 2.2.2    | Lois d'état retenues   | 16       |
| 2.2.3    | Fermeture isobare des modèles diphasiques  | 17       |
| 2.3      | Généralités sur les systèmes hyperboliques   | 19       |
| 2.4      | Propriétés mathématiques   | 20       |
| 2.4.1    | Vitesse du son de mélange  | 20       |
| 2.4.1.1  | Modèle à cinq équations réduit   | 22       |
| 2.4.1.2  | Modèle de Kapila   | 22       |
| 2.4.2    | Hyperbolicité  | 23       |
| 2.4.3    | Entropies  | 25       |
| 2.4.3.1  | Modèle à cinq équations réduit   | 26       |
| 2.4.3.2  | Modèle de Kapila   | 27       |
| 2.4.4    | Structure du problème de Riemann   | 28       |
| 2.4.4.1  | Problème de Riemann  | 28       |
| 2.4.4.2  | Invariants de Riemann  | 29       |
| 2.4.5    | Domaines de convexité  | 30       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.4.5.1  | Modèle à cinq équations réduit . . . . .   | 32        |
| 2.4.5.2  | Modèle de Kapila . . . . .   | 36        |
| 2.5      | Conclusion . . . . .   | 37        |
| <b>3</b> | <b>Méthodes Lagrange-Transport pour les écoulements diphasiques</b>                              | <b>39</b> |
| 3.1      | Étape acoustique . . . . .   | 43        |
| 3.1.1    | Étape acoustique pour le modèle à cinq équations réduit . . . . .                                | 43        |
| 3.1.1.1  | Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité                               | 46        |
| 3.1.1.2  | Stabilité du schéma explicite . . . . .  | 48        |
| 3.1.1.3  | Différentes versions implicites de l'étape acoustique . . . . .                                  | 48        |
| 3.1.1.4  | Passage à l'ordre 2 en espace . . . . .  | 55        |
| 3.1.1.5  | Extension au cas bidimensionnel . . . . .  | 56        |
| 3.1.2    | Étape acoustique pour le modèle de Kapila . . . . .  | 57        |
| 3.1.2.1  | Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité                               | 59        |
| 3.1.2.2  | Version implicite de l'étape acoustique . . . . .  | 60        |
| 3.2      | Étape de transport . . . . .   | 63        |
| 3.2.1    | Schéma décentré . . . . .  | 64        |
| 3.2.2    | Antidiffusion sur la fraction volumique . . . . .  | 65        |
| 3.2.3    | Méthode de Glimm . . . . .   | 68        |
| 3.3      | Propriétés du schéma global . . . . .  | 69        |
| 3.3.1    | Caractère conservatif du schéma global . . . . .   | 69        |
| 3.3.2    | Préservation des discontinuités de contact . . . . .   | 71        |
| 3.4      | Résultats numériques pour le modèle à cinq équations réduit . . . . .                            | 74        |
| 3.4.1    | Comparaison des schémas implicites . . . . .   | 74        |
| 3.4.2    | Tube à choc diphasique . . . . .   | 77        |
| 3.4.3    | Interaction liquide-gaz 2D . . . . .   | 79        |
| 3.5      | Résultats numériques pour le modèle de Kapila . . . . .  | 85        |
| 3.5.1    | Tube à choc avec un mélange air-eau . . . . .  | 85        |
| 3.5.2    | Cavitation . . . . .   | 85        |
| 3.6      | Comparaisons des modèles de Kapila et à cinq équations réduit sur des cas non mélangés . . . . . | 87        |
| 3.6.1    | Interaction air-hélium . . . . .   | 88        |
| 3.6.2    | Interaction air-R22 . . . . .  | 89        |
| 3.7      | Conclusion . . . . .   | 89        |
| <b>4</b> | <b>Extensions du modèle et de la méthode numérique</b>   | <b>95</b> |
| 4.1      | Prise en compte et résolution numérique des termes de dissipation . . . . .                      | 96        |
| 4.1.1    | Discrétisation des termes dissipatifs . . . . .  | 98        |
| 4.1.2    | Formulation explicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation .                     | 100       |
| 4.1.3    | Formulation implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation                       | 101       |
| 4.1.4    | Validation numérique . . . . .   | 104       |
| 4.1.4.1  | Tube à choc diphasique : choix de la température de mélange . .                                  | 104       |
| 4.1.4.2  | Écoulement monophasique de type Couette . . . . .  | 106       |
| 4.1.4.3  | Écoulement diphasique de type Couette . . . . .  | 108       |
| 4.2      | Correction bas Mach . . . . .  | 112       |
| 4.2.1    | Présentation de la correction . . . . .  | 113       |
| 4.2.2    | Comportement du schéma dans le régime bas Mach . . . . .   | 115       |
| 4.2.3    | Analyse asymptotique bas Mach . . . . .  | 116       |
| 4.2.4    | Validation numérique . . . . .   | 123       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.2.4.1  | Vortex dans une boîte . . . . .  | 123        |
| 4.2.4.2  | Écoulement dans une tuyère . . . . .   | 125        |
| 4.2.5    | Prise en compte des termes de dissipation . . . . .  | 127        |
| 4.2.6    | Validation numérique du schéma bas Mach avec les termes de dissipation . . . . .   | 131        |
| 4.2.6.1  | Cavité entraînée . . . . .   | 131        |
| 4.3      | Conclusion . . . . .   | 133        |
| <b>5</b> | <b>Application à la fusion d'un matériau</b>   | <b>135</b> |
| 5.1      | Présentation des équations de conservation dans chaque domaine et conditions de couplage . . . . .                           | 136        |
| 5.1.1    | Équations de conservation pour les domaines fluide et solide . . . . .   | 136        |
| 5.1.2    | Conditions à la paroi . . . . .  | 137        |
| 5.2      | Prise en compte du déplacement du maillage . . . . .   | 138        |
| 5.2.1    | Formulation et résolution des équations sur maillages mobiles . . . . .  | 138        |
| 5.2.2    | Déplacement du maillage . . . . .  | 141        |
| 5.3      | Algorithme de couplage . . . . .   | 142        |
| 5.4      | Résultats numériques . . . . .   | 145        |
| 5.4.1    | Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide . . . . .                 | 145        |
| 5.4.2    | Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'air . . . . .                               | 147        |
| 5.5      | Conclusion . . . . .   | 149        |
| <b>6</b> | <b>Écoulements supersoniques : phénomène de <i>carbuncle</i></b>   | <b>155</b> |
| 6.1      | Utilisation des schémas directs pour les écoulements supersoniques et suppression du phénomène de <i>carbuncle</i> . . . . . | 155        |
| 6.1.1    | Présentation du schéma HLL . . . . .   | 157        |
| 6.1.2    | Présentation du schéma EUCCLHYD . . . . .  | 159        |
| 6.2      | Résultats numériques . . . . .   | 161        |
| 6.2.1    | Écoulement à Mach 10 autour d'une sphère . . . . .   | 161        |
| 6.2.2    | Interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15 . . . . .  | 161        |
| 6.3      | Conclusion . . . . .   | 162        |
| <b>7</b> | <b>Conclusion et perspectives</b>  | <b>165</b> |
|          | <b>Annexes</b>   | <b>167</b> |
| <b>A</b> | <b>Présentation des outils numériques</b>  | <b>169</b> |
| A.1      | Présentation des notations utilisées . . . . .   | 169        |
| A.2      | Rappels sur les schémas de type Godunov et les solveurs de Riemann simples . . . . .   | 171        |
| A.3      | Rappels pour le non conservatif . . . . .  | 173        |
| <b>B</b> | <b>Preuves des conditions de positivité</b>  | <b>175</b> |
| <b>C</b> | <b>Coefficients de la matrice M</b>  | <b>179</b> |
| <b>D</b> | <b>Discrétisation des termes de dissipation sur maillages curvilignes</b>  | <b>181</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>E Solutions des problèmes de Couette monophasique et diphasique</b> | <b>185</b> |
| E.1 Écoulement monophasique de type Couette . . . . .                  | 185        |
| E.2 Écoulement diphasique de type Couette . . . . .                    | 186        |



# Nomenclature

## Notations mathématiques

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\nabla$          | gradient  |
| $\nabla \cdot$    | divergence                                      |
| $\tilde{\bullet}$ | grandeur adimensionnée                          |
| $\bar{\bullet}$   | grandeur définie à une interface du maillage    |
| $\bullet^{(p)}$   | terme d'ordre $p$ du développement asymptotique |
| $a$               | scalaire  |
| $\mathbf{a}$      | vecteur   |
| $A$               | matrice   |

## Indices

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $f$                   | indice représentant le domaine fluide                   |
| $g$                   | indice représentant la phase gazeuse                    |
| $i$                   | indice spatial 1D                                       |
| $\mathbf{i} = (l, m)$ | indice spatial 2D                                       |
| $k$                   | indice représentant la phase fluide 1 ou 2              |
| $k' = 3 - k$          | indice représentant l'autre phase                       |
| $l$                   | indice représentant la phase liquide                    |
| $s$                   | indice représentant le domaine solide                   |
| $0$                   | indice représentant l'état thermodynamique de référence |

## Exposants

|           |   |
|-----------|---|
| $n$       | exposant temporel                         |
| $\dagger$ | fin de l'étape acoustique                 |
| $\#$      | exposant temporel égal à $n$ ou $\dagger$ |
| $*$       | état intermédiaire du solveur de Riemann  |

## Lettres latines

|  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| $c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right _s}$ | vitesse du son                      |
| $C = \rho c$   | vitesse du son lagrangienne         |
| $\bar{C}$  | pente du solveur de Riemann         |
| $D$  | tenseur des taux de déformation     |
| $E = \varepsilon + \frac{ \mathbf{u} ^2}{2}$                   | énergie totale                      |
| $h = \varepsilon + p\vartheta$                                 | enthalpie par unité de masse        |
| $H = E + p\vartheta$   | enthalpie totale par unité de masse |
| $K = z_1 z_2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2}$  | terme de Kapila                     |
| $L$  | chaleur latente de fusion           |
| $\dot{m}$  | flux de masse par unité de surface  |

|              |  |
|--------------|--|
| $\mathbf{n}$ | vecteur normal à une face                              |
| $p$          | pression   |
| $q$          | énergie interne de référence (Loi d'état de gaz raide) |
| $\mathbf{q}$ | flux de chaleur  |
| $\mathbf{r}$ | vecteur propre à droite                                |
| $s$          | entropie   |
| $\mathbf{S}$ | tenseur des contraintes                                |
| $T$          | température  |
| $\mathbf{T}$ | tenseur des contraintes visqueuses                     |
| $\mathbf{u}$ | vitesse  |
| $\mathbf{U}$ | vecteur des inconnues eulériennes                      |
| $\mathbf{V}$ | vecteur des inconnues lagrangiennes                    |
| $w$          | vitesse de déplacement du maillage                     |
| $\mathbf{W}$ | approximation du problème de Riemann                   |
| $\mathbf{W}$ | vecteur des inconnues primitives                       |
| $y$          | fraction massique                                      |
| $z$          | fraction volumique                                     |

**Lettres grecques**

|   |   |
|---|---|
| $\alpha_p = \frac{1}{\vartheta} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right _p$ | coefficient de dilatation isobare                 |
| $\beta_T = -\frac{1}{\vartheta} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right _T$ | coefficient de compressibilité isotherme          |
| $\gamma$  | coefficient adiabatique (Loi d'état de gaz raide) |
| $\Gamma = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right _\rho$   | coefficient de Grüneisen                          |
| $\Gamma_{ij}$   | arête séparant les cellules $i$ et $j$            |
| $\Delta t$  | pas de temps                                      |
| $\Delta x$  | pas d'espace                                      |
| $\varepsilon$   | énergie interne                                   |
| $\eta$  | entropie mathématique                             |
| $\vartheta = \frac{1}{\rho}$  | volume spécifique                                 |
| $\kappa$  | conductivité thermique                            |
| $\mu$   | viscosité dynamique                               |
| $\pi$   | pression de référence (Loi d'état de gaz raide)   |
| $\rho$  | densité   |
| $\tau = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right _s$               | compressibilité isentropique                      |
| $\Omega_i$  | cellule d'indice $i$                              |

**Nombres sans dimension**

|                                      |                    |
|--------------------------------------|--------------------|
| $M = \frac{u_0}{c_0}$                | nombre de Mach     |
| $Pe = RePr$                          | nombre de Péclet   |
| $Pr = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\kappa_0}$ | nombre de Prandtl  |
| $Re = \frac{\rho_0 u_0 x_0}{\mu_0}$  | nombre de Reynolds |

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### 1.1 Contexte physique

Lors de sa rentrée dans l'atmosphère d'une planète, un engin spatial subit un freinage important dû aux frottements des gaz atmosphériques sur sa paroi. La conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique entraîne une élévation de la température de l'objet. Pour contenir l'échauffement de la structure et garantir l'intégrité de l'objet, la face de la capsule qui subit le freinage est recouverte d'une protection thermique réalisée en matériaux composites permettant d'absorber en grande quantité le flux thermique. Cette élévation de température conduit à une dégradation physico-chimique du bouclier thermique de l'objet.

Un composite est un assemblage de deux matériaux dont l'un assure la tenue mécanique, les fibres de carbone, et l'autre la cohésion de la structure, la matrice. L'architecture des fibres de carbone varie en fonction des applications visées. Cet arrangement de fibres de carbone, ou préforme, assure la rigidité mécanique dans des directions privilégiées ainsi que d'autres propriétés telles que l'anisotropie de la conduction thermique. La matrice, qui est infiltrée dans la préforme lors de la fabrication, rigidifie l'ensemble et crée une protection pour le renfort. Dans la phase de rentrée atmosphérique, compte tenu de la structure hétérogène du matériau, il va donc se créer une ablation différentielle à la surface du bouclier thermique. Sous l'effet de l'échauffement, la matrice se liquéfie et la structure en carbone s'ablate. On peut ainsi observer à la surface du matériau composite la formation de rugosités dans lesquelles s'écoulent la résine liquide ainsi que les gaz atmosphériques. La dynamique de ces écoulements de type diphasique peut être complexe. En effet, de nombreux phénomènes entrent en jeu, dont le changement de phase, la turbulence (ou non) de l'écoulement, l'apparition de points triples (interfaces solide-gaz-liquide) ou encore les effets de tension de surface par exemple.

Par ailleurs, notons que dans les conditions de rentrée atmosphérique, l'écoulement gazeux autour de l'objet se situe en régime hypersonique et une onde de choc détachée se crée en amont du véhicule. Dans la zone située derrière le choc détaché, la température de l'écoulement est à son maximum. Cette augmentation de température conduit à une augmentation de l'agitation moléculaire et à des réactions physico-chimiques dans l'écoulement. Ces réactions homogènes de dissociation ou de recombinaison dépendent de la composition en éléments de l'atmosphère considérée. Dans cette thèse, nous ne considérerons pas ces réactions homogènes dans l'écoulement et nous nous concentrerons sur les réactions hétérogènes, c'est-à-dire les interactions entre le bouclier thermique et l'écoulement fluide.

## 1.2 Présentation des différentes interactions entre l'écoulement fluide et le bouclier thermique

Ces réactions hétérogènes peuvent être regroupées en quatre grandes catégories et sont représentées schématiquement sur la figure 1.1. Nous pouvons considérer les réactions suivantes :

- les effets de pyrolyse et le couplage thermique entre les matériaux du composite résine-fibres,
- les processus d'ablation à l'interface entre la fibre de carbone et l'écoulement gazeux,
- le changement de phase de la matrice avec l'apparition d'une phase liquide,
- les interactions entre la phase liquide et l'écoulement gazeux.

Notons enfin que des réactions catalytiques où la paroi va favoriser la recombinaison des atomes gazeux à la surface sont aussi possibles, mais ce mécanisme ne sera pas détaillé dans ce manuscrit.

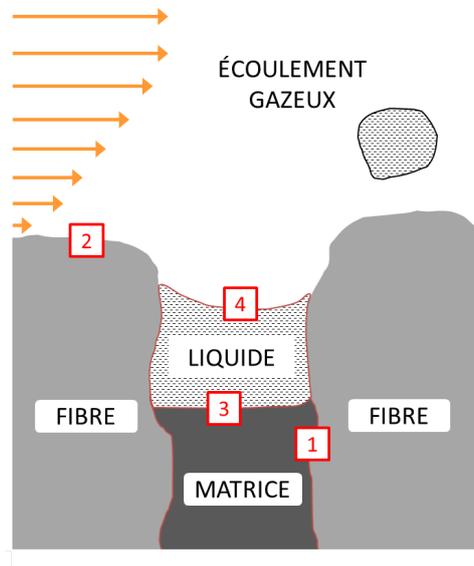


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de l'ablation d'un matériau composite [Lat13].

### 1.2.1 Effets de pyrolyse et couplage thermique entre les matériaux du composite résine-fibres

Le matériau composite du bouclier thermique est l'assemblage d'un tissage 3D de fibres de carbone et d'une matrice. Ces matériaux sont retenus en raison de leur tenue mécanique à haute température, de leur basse densité et de leur résistance à l'ablation. Comme le montre la figure 1.2, les fibres de carbone sont entrelacées et immergées dans la matrice. Le bouclier thermique lors de la rentrée atmosphérique reçoit un important flux thermique sur la paroi. Celui-ci va se propager dans le composite à travers les surfaces de contact entre les différents constituants (fibres et résine). De plus, le matériau peut pyrolyser sous l'effet de ce flux thermique : le matériau se décompose, des gaz chauds vont alors être créés et se propager jusqu'à la surface et où ils seront injectés dans la couche limite. Ce phénomène de pyrolyse modifie les propriétés physiques du matériau en profondeur.



FIGURE 1.2 – Structure d’un matériau composite C/C d’un bouclier thermique [YZX<sup>+</sup>08].

### 1.2.2 Réactions d’ablation à l’interface entre la fibre de carbone et l’écoulement gazeux

La détérioration du matériau de manière progressive et superficielle par un ensemble complexe de réactions physico-chimiques constitue ce que l’on appelle l’ablation. Les fibres de carbone du bouclier thermique interagissent avec les éléments de l’écoulement gazeux. Les modèles d’ablation tiennent compte de la diffusion des éléments dans la couche limite et la création de nouvelles espèces à la paroi. Pour le carbone, les principales réactions d’ablation sont l’oxydation et la sublimation. Le mécanisme d’oxydation entre le matériau et l’air conduit à la formation de monoxyde de carbone à partir du dioxygène présent dans l’atmosphère. La figure 1.3 représente le débit massique d’ablation réduit en fonction de la température pour des pressions différentes. Nous pouvons observer que pour des températures inférieures à 1000 K, l’oxydation est la réaction dominante de l’ablation. Entre 1000 K et 2500 K, le flux de masse induit par l’oxydation est quasiment constant car il est limité par la présence de l’oxygène dans la couche limite. L’intégralité de l’oxygène dans la couche limite est consommée immédiatement par le carbone. Au-delà de 2500 K, la réaction de sublimation est largement prépondérante. La fibre de carbone passe directement de l’état solide à l’état gazeux en injectant des espèces carbonées dans l’écoulement.

### 1.2.3 Changement de phase de la matrice (réaction de fusion)

La matrice assure la cohésion du matériau composite en liant les fibres de carbone entre elles. Cette matrice peut être constituée d’une résine, d’un alliage de métaux ou un matériau réfractaire contenant de la silice ou du carbone. Quand le bouclier thermique est soumis à un flux de chaleur intense, l’ablation différentielle peut conduire à la fusion de la matrice avant la dégradation des fibres de carbone. Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.4, la fusion de la matrice laisse à nu les fibres. La phase liquide issue de la fusion va dans un premier temps couler sous l’effet du cisaillement de la couche limite. Elle peut également s’accumuler dans les creux de la paroi. Ceci peut avoir des effets notables sur l’aérodynamique du corps. Le ruissellement de la phase liquide sur la paroi modifie la répartition du flux thermique et peut protéger certaines fibres de carbone. En effet, la phase liquide peut empêcher l’oxygène présent dans la couche limite d’atteindre la paroi, et donc limiter la réaction d’oxydation.

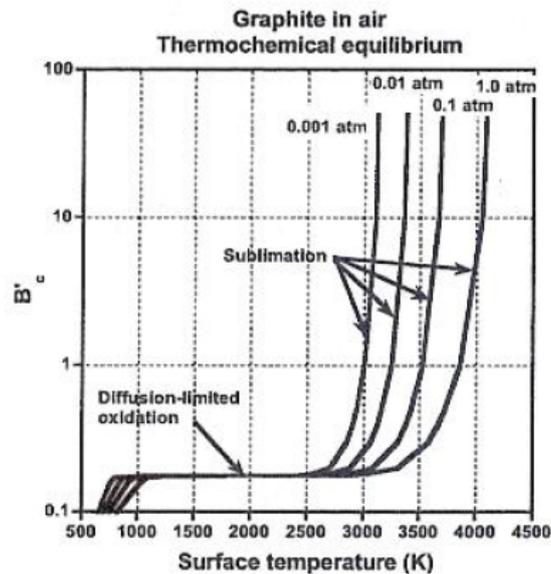


FIGURE 1.3 – Débit d’ablation en fonction de la température de surface pour le graphite [Vel07].

#### 1.2.4 Interactions entre la phase liquide (issue de la fusion de la résine) et l’écoulement gazeux

Les propriétés physiques (densité, viscosité, capacité calorifique, *etc.*) de l’écoulement gazeux et du métal fondu sont très différentes. La phase liquide est dense, extrêmement visqueuse et quasiment incompressible. L’écoulement gazeux est lui fortement compressible. Des points triples vont apparaître à l’interface entre le gaz, le solide et le liquide. De plus, les effets de la tension de surface au sein des coulées de liquide peuvent entraîner la formation de gouttes qui vont être emportées par l’écoulement gazeux. La topologie de l’interface entre la phase liquide et la phase gazeuse est donc très complexe et peut varier énormément au cours du processus.

### 1.3 Objectifs de la thèse

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la fusion d’un matériau durant sa phase de rentrée atmosphérique. Nous étudierons donc principalement le processus de changement de phase ainsi que les interactions entre la phase liquide et l’écoulement gazeux. Nous sommes donc en présence de trois phases : le bouclier thermique sous forme solide, la phase liquide issue de la fusion de la résine et l’écoulement gazeux. Rappelons que les deux phases fluides ont des propriétés physiques très différentes avec de grands rapports de densité. De plus, contrairement à l’écoulement gazeux fortement compressible, la phase liquide résultant du phénomène de fusion est quasi-incompressible. Dans le contexte de l’ablation multiphasique envisagé ici, les méthodes numériques développées pour simuler l’écoulement diphasique autour de l’objet doivent donc être très robustes. Elles doivent également être capables de retrouver le comportement compressible du gaz et la quasi-incompressibilité du liquide. De plus, compte tenu des maillages utilisés pour capturer les phénomènes de couches limites, les schémas numériques doivent être implicites pour pouvoir prendre de grands pas de temps. Enfin, pour simuler le processus de fusion d’un solide, il est nécessaire de développer une stratégie de couplage entre les domaines fluide et solide. Cela implique donc la gestion d’une interface mobile entre les deux domaines et la discrétisation des équations sur un maillage mobile.

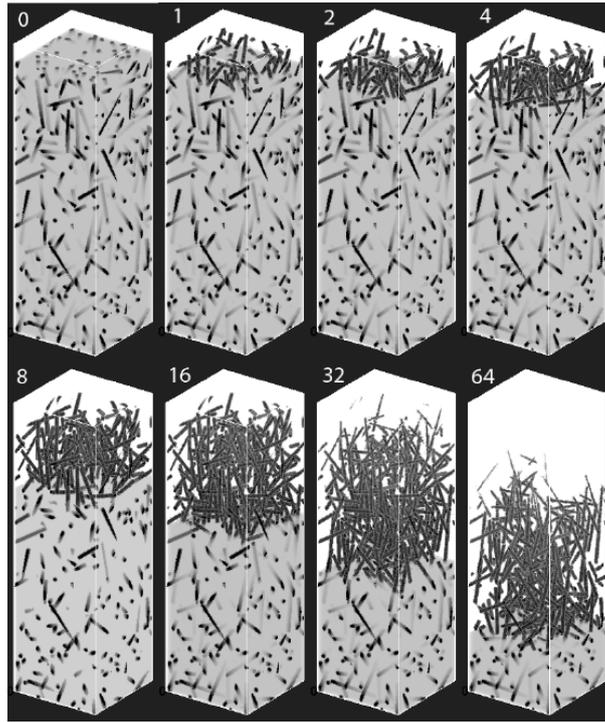


FIGURE 1.4 – Simulation 3D de l'ablation d'un matériau composite de type PICA [LCM]. L'ablation de la résine avant celle des fibres laisse à nu celles-ci.

L'objectif principal de cette thèse est donc de contribuer au développement de tels outils de simulation numérique permettant d'étudier et de comprendre les différents mécanismes de l'ablation multiphasique décrits brièvement dans les sections 1.2.3 et 1.2.4.

## 1.4 Descriptif des travaux

Les travaux présentés dans ce mémoire sont regroupés en 6 chapitres.

### Modèles mathématiques (chapitre 2)

Dans le chapitre 2, les différents modèles diphasiques et l'étude de leurs propriétés mathématiques sont présentés. Nous avons fait le choix des méthodes à interfaces diffuses dans la mesure où cela permet de traiter à la fois l'écoulement gazeux hypersonique amont et l'écoulement diphasique dans la couche limite. De plus, la gestion de nouvelles interfaces est naturelle, ce qui est important dans notre application puisque la phase liquide est injectée dans la phase gazeuse au niveau de la paroi. Les deux phases en présence sont considérées à l'équilibre en vitesse et en pression. Les modèles diphasiques de Kapila [KMB<sup>+</sup>01] ou celui proposé par [ACK00, ACK02, MSNA02] permettent de décrire de tels écoulements diphasiques. Le modèle de Kapila permet de décrire des écoulements diphasiques où les deux phases peuvent être mélangées mais possède l'inconvénient de faire intervenir un terme non conservatif dans les équations. Ce produit non conservatif complique la résolution numérique. *A contrario*, le modèle proposé par [ACK00, ACK02, MSNA02], que l'on désignera par modèle diphasique à cinq équations réduit dans la suite du document, est plus simple mais ne permet de décrire que des problèmes diphasiques à interface, c'est-à-dire avec deux phases ne se mélangeant pas. Dans la problématique considérée ici, les deux phases en présence sont très différentes, il est donc raisonnable de supposer qu'elles sont non miscibles. Ce modèle diphasique est complété avec l'ajout des termes

de diffusion pour tenir compte des effets visqueux et de dissipation thermique. Néanmoins, les effets de la tension de surface ne sont pas pris en compte dans cette thèse. Après avoir présenté les différents modèles diphasiques, des rappels de thermodynamique vont nous permettre d'introduire les lois d'état utilisées pour le liquide et pour le gaz. La phase liquide est modélisée à l'aide de l'équation d'état de type gaz raide (ou *stiffened gas* en anglais). Les paramètres de cette loi sont obtenus à partir des courbes d'Hugoniot qui caractérisent le comportement mécanique en tenue sous choc du liquide considéré [LMMS04]. La partie gazeuse est classiquement modélisée à l'aide d'une équation d'état de type gaz parfait. Nous présentons ensuite la fermeture isobare du système, puis nous détaillons les propriétés mathématiques des modèles à cinq équations. Les deux modèles diphasiques considérés ici sont très similaires mais ils possèdent des propriétés (vitesse du son, entropie, ...) très différentes. Finalement, nous concluons le chapitre 2 en montrant la convexité de certains domaines pour chaque modèle diphasique, en particulier le domaine des solutions physiquement admissibles. Ceci est d'une importance capitale pour la construction de schéma numérique robuste.

### Méthodes Lagrange-Transport pour les écoulements diphasiques (chapitre 3)

Dans l'application visée ici, les deux phases en présence ont des propriétés physiques complètement différentes avec des ratios de densité pouvant aller de 2000 à 10000 selon le métal liquide considéré. Le rapport des coefficients de compressibilité isotherme est d'environ  $10^{10}$ , tandis que celui des coefficients de dilatation thermique peut s'élever jusqu'à  $10^3$ . Ceci pose des problèmes de robustesse pour le schéma numérique permettant de simuler l'écoulement diphasique. De plus, compte tenu des maillages utilisés pour capturer les couches limites, il est nécessaire d'utiliser des méthodes implicites permettant de prendre des grands pas de temps. Nous souhaitons donc avoir un schéma numérique implicite et robuste pour simuler l'écoulement diphasique et le coupler avec la partie solide. Dans le chapitre 3, nous présentons des schémas numériques robustes pour les modèles diphasiques de Kapila et à cinq équations réduit. Pour simplifier la construction des schémas, nous ne considérons que la partie hyperbolique des équations dans un premier temps. La prise en compte des termes visqueux sera réalisée dans le chapitre 4. Les schémas numériques développés dans cette thèse sont basés sur un splitting d'opérateurs de type Lagrange-Transport inspiré de [CNPT10, CGK16, CGK17]. L'idée est de décomposer les équations en une étape acoustique et une étape liée au transport. L'étape acoustique est résolue implicitement ce qui permet de s'affranchir de la contrainte liée à la vitesse du son dans le fluide et de pouvoir prendre des grands pas de temps de simulation. La résolution numérique de l'étape de transport est commune aux deux modèles diphasiques considérés et sera explicite en temps. Dans cette étude, nous considérons essentiellement des écoulements diphasiques où les deux fluides en présence ne sont pas mélangés initialement. Cependant, le schéma numérique de l'étape de transport peut diffuser. Cela peut donc entraîner un étalement numérique de l'interface avec l'apparition d'une zone de mélange numérique. Plusieurs schémas de transport seront alors présentés pour limiter la diffusion numérique de l'interface. Finalement, le schéma global résultant de la stratégie de décomposition d'opérateurs est globalement conservatif, positif et préserve les discontinuités de contact. Les solutions obtenues avec les deux modèles diphasiques sont ensuite comparées sur des configurations où les phases fluides sont initialement non mélangées. Notons que la résolution de l'écoulement fluide a fait l'objet d'une parallélisation avec la librairie MPI pour diminuer le temps de calcul.

### Extensions du modèle et de la méthode numérique (chapitre 4)

Dans le chapitre 4, nous présentons la prise en compte des termes de dissipation ainsi qu'une modification du schéma numérique permettant de capturer correctement la limite incompressible

quand le nombre de Mach est faible. L'écoulement diphasique considéré est constitué d'une phase gazeuse compressible et d'une phase liquide quasi-incompressible non miscibles séparées par une interface mobile. Cependant, dans le modèle à interfaces diffuses utilisé pour modéliser l'écoulement air-métal fondu, les mêmes équations (compressibles) sont résolues dans tout le domaine. Cela impose donc de modéliser un écoulement incompressible en utilisant un modèle compressible à faible nombre de Mach. Il est alors nécessaire d'apporter une correction au schéma numérique pour calculer correctement ce type d'écoulement. Pour tenir compte du caractère incompressible de la partie liquide, nous avons choisi d'utiliser la correction proposée par Chalons et al. [CGK16]. L'analyse de l'erreur de troncature du schéma nous permettra de montrer la précision du schéma numérique à bas Mach. Nous étudierons la limite du schéma numérique dans le régime bas Mach sur un maillage cartésien, à l'aide d'une analyse asymptotique.

### Application à la fusion d'un matériau (chapitre 5)

Dans le chapitre 5, nous présentons le couplage entre les domaines fluide et solide pour simuler le phénomène de fusion. Les relations de couplage sont basées sur les bilans de masse et d'énergie à la paroi. La discrétisation des équations sur un maillage mobile et le déplacement de celui-ci sont ensuite présentés. Nous utilisons des maillages curvilignes conformes pour représenter les domaines fluide et solide. Cela permet d'imposer facilement les conditions de bord à la paroi, et de déplacer simplement la grille suivant les lignes de maillage. Une étude des temps caractéristiques des différents domaines montre que la partie fluide et la partie solide doivent être résolues de façon instationnaire. Un algorithme de couplage entre les deux domaines pour simuler la fusion d'un matériau métallique est finalement proposé. Des simulations numériques de la fusion d'un bloc d'aluminium solide permettent de démontrer la robustesse de notre schéma numérique implicite.

### Écoulements supersoniques : phénomène de *carbuncle* (chapitre 6)

Finalement, dans le chapitre 6, nous étudions le comportement des schémas numériques basés sur une décomposition d'opérateurs de type Lagrange-Transport pour des écoulements supersoniques. Dans ce type de configurations, nous verrons que des instabilités numériques connues sous le nom de *carbuncle* peuvent apparaître au niveau du choc détaché en amont de l'objet. Pour contrer l'apparition de ce phénomène, plusieurs méthodes existent dans le cas des schémas numériques classiques, c'est-à-dire en une seule étape. Nous appliquerons ces différentes corrections sur nos schémas utilisant une décomposition d'opérateurs. Nous constaterons alors que le phénomène de *carbuncle* semble apparaître avec toutes les méthodes de type Lagrange-Transport utilisant un schéma basé sur un solveur unidimensionnel à chaque interface dans l'étape acoustique. Néanmoins, l'utilisation du schéma numérique réellement bidimensionnel EUCCLHYD [MAB07] dans la phase acoustique permet de supprimer les instabilités et de retrouver une solution physiquement acceptable.

## 1.5 Publications et communications

Les travaux effectués durant cette thèse ont fait l'objet de publications et ont été présentés à plusieurs conférences internationales.

- Présentation orale à la conférence *5th International ARA Days* en Mai 2015. Titre : *Numerical simulation of ablation : study of fluid/solid coupling methods.*
- Présentation orale à la conférence *51st International Conference on Applied Aerodynamics* en Avril 2016. Titre : *Numerical simulation of ablation.*

- Publication dans les actes du congrès et présentation orale à ECCOMAS (*European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*) en Juin 2016. *Some acoustic-transport splitting schemes for two-phase compressible flows* [PGM16].
- Article publié au *Journal of Computational Physics*. Titre : *A robust implicit-explicit acoustic-transport splitting scheme for two-phase flows* [PGM17].
- Présentation orale au congrès USNCCM 14 (*14th U.S. National Congress on Computational Mechanics*) en Juillet 2017. Titre : *A Robust Lagrange-Projection Splitting Scheme for Compressible Multiphase Flows with Viscous and Heat Conduction Effects*.

# Chapitre 2

## Modèles mathématiques

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Présentation des modèles diphasiques</b>             | <b>10</b> |
| 2.1.1      | Modèle à sept équations de Baer-Nunziato [BN86]         | 10        |
| 2.1.2      | Modèle à six équations                                  | 11        |
| 2.1.3      | Modèle à cinq équations de Kapila [KMB <sup>+</sup> 01] | 11        |
| 2.1.4      | Modèle à cinq équations réduit [ACK02, MSNA02]          | 12        |
| 2.1.5      | Prise en compte des termes de dissipation               | 13        |
| <b>2.2</b> | <b>Fermeture des modèles diphasiques et lois d'état</b> | <b>14</b> |
| 2.2.1      | Rappels de thermodynamique                              | 14        |
| 2.2.2      | Lois d'état retenues                                    | 16        |
| 2.2.3      | Fermeture isobare des modèles diphasiques               | 17        |
| <b>2.3</b> | <b>Généralités sur les systèmes hyperboliques</b>       | <b>19</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Propriétés mathématiques</b>                         | <b>20</b> |
| 2.4.1      | Vitesse du son de mélange                               | 20        |
| 2.4.1.1    | Modèle à cinq équations réduit                          | 22        |
| 2.4.1.2    | Modèle de Kapila  | 22        |
| 2.4.2      | Hyperbolicité   | 23        |
| 2.4.3      | Entropies   | 25        |
| 2.4.3.1    | Modèle à cinq équations réduit                          | 26        |
| 2.4.3.2    | Modèle de Kapila  | 27        |
| 2.4.4      | Structure du problème de Riemann                        | 28        |
| 2.4.4.1    | Problème de Riemann                                     | 28        |
| 2.4.4.2    | Invariants de Riemann                                   | 29        |
| 2.4.5      | Domaines de convexité                                   | 30        |
| 2.4.5.1    | Modèle à cinq équations réduit                          | 32        |
| 2.4.5.2    | Modèle de Kapila  | 36        |
| <b>2.5</b> | <b>Conclusion</b>                                       | <b>37</b> |

---

Ce chapitre a pour but de présenter les différents modèles physiques permettant de simuler des écoulements diphasiques et leurs propriétés mathématiques. À partir du modèle le plus général développé par Baer et Nunziato [BN86], il est possible de construire des modèles réduits à l'aide de processus de relaxation. Tous les systèmes alors décrits sont composés d'une partie hyperbolique. C'est pourquoi de brefs rappels sur les systèmes hyperboliques sont effectués avant de détailler les propriétés mathématiques des systèmes considérés.

## 2.1 Présentation des modèles diphasiques

L'objectif de cette section est de rappeler les différents modèles utilisés pour représenter les écoulements diphasiques compressibles.

La modélisation et la simulation des écoulements diphasiques a fait l'objet de nombreux travaux durant les dernières années. Il existe deux approches principales pour simuler des écoulements compressibles comportant des interfaces : les méthodes à diffusion nulle ou quasi-nulle (*sharp interface methods* en anglais) et les méthodes à interfaces diffuses (*diffuse interface methods*). Dans la première approche, l'interface entre les deux fluides est suivie explicitement et chacune des deux phases peut être calculée avec un modèle différent. Dans les méthodes lagrangiennes ou ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*), le maillage se déplace pendant la simulation pour suivre le déplacement de l'interface. Dans ce cas, les grandes déformations et les changements topologiques de l'interface sont difficiles à prendre en compte. Dans les méthodes *Level Set* [OS88], l'interface est repérée comme le zéro d'une fonction implicite. Avec les méthodes *Volume Of Fluid* [HN81] ou *Moment Of Fluid* [AS07, DS08], l'interface est reconstruite à partir de la fraction volumique de chaque fluide.

Dans la seconde approche, les méthodes à interfaces diffuses [BN86, KMB<sup>+</sup>01, ACK02, MSNA02, FBC<sup>+</sup>11, KL10, SA99b] autorisent la diffusion numérique de l'interface. Dans ce cas, un maillage eulérien ne s'appuyant pas sur l'interface est utilisé. Les mêmes équations sont alors résolues dans tout le domaine. De plus, ces modèles permettent de prendre en compte la création de nouvelles interfaces et de forts changements de topologie pendant la simulation. Dans le contexte de notre étude, la fusion de la partie métallique entraîne un changement topologique important. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser les méthodes à interfaces diffuses pour simuler les écoulements diphasiques compressibles mis en jeu.

Dans la suite nous allons présenter différents modèles diphasiques en partant du modèle à 7 équations de Baer-Nunziato. Les autres modèles se déduisent comme limites asymptotiques d'une phase de relaxation. Nous renvoyons aux travaux de Flåtten et Lund [FL11, Lun12] pour une présentation plus complète d'une hiérarchie de modèles diphasiques issus de méthodes de relaxation.

### 2.1.1 Modèle à sept équations de Baer-Nunziato [BN86]

Le modèle plus complet présenté ici est un modèle de type Baer-Nunziato [BN86]. Il s'agit d'un modèle où les deux phases sont en déséquilibre de vitesse, de pression et de potentiel chimique. Chaque fluide  $k$  ( $k = 1$  ou  $2$ ) est caractérisé par sa densité  $\rho_k$ , sa vitesse  $\mathbf{u}_k$  et son énergie totale  $E_k$ . L'énergie interne de la phase  $k$  est définie par la relation  $\varepsilon_k = E_k - \frac{|\mathbf{u}_k|^2}{2}$  tandis que la pression thermodynamique  $p_k$  est définie par la loi d'état de chaque fluide  $p_k = p_k(\rho_k, \varepsilon_k)$  (voir la section 2.2.2 pour une discussion sur les lois d'état). À chacune des deux phases est associée une équation de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Des termes source traduisant le couplage entre les deux phases complètent ces équations. En plus de ces six équations, une équation d'évolution de la fraction volumique  $z_k$  de chaque phase est considérée. Dans la suite, le numéro de l'autre phase sera noté  $k' = 3 - k$ . Les modèles diphasiques de type Baer-Nunziato s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z_k + \mathbf{u}_I \cdot \nabla z_k = \mathcal{R}_p^{k'}, \\ \partial_t (z_k \rho_k) + \nabla \cdot (z_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \mathcal{R}_\mu^k, \\ \partial_t (z_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (z_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (z_k p_k) - p_I \nabla z_k = \mathcal{R}_u^k, \\ \partial_t (z_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot (z_k \rho_k E_k \mathbf{u}_k + z_k p_k \mathbf{u}_k) - p_I \mathbf{u}_I \cdot \nabla z_k = \mathbf{u}_I \cdot \mathcal{R}_u^k + p_I \mathcal{R}_p^k + \mu_I \mathcal{R}_\mu^k, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

pour  $k = 1, 2$ . Les termes  $\mathcal{R}_p^k = \Theta_p(p_{k'} - p_k)$ ,  $\mathcal{R}_u^k = \Theta_u(\mathbf{u}_{k'} - \mathbf{u}_k)$  et  $\mathcal{R}_\mu^k = \Theta_\mu(\mu_{k'} - \mu_k)$  au second membre sont les termes source traduisant les échanges entre les deux phases. Les termes  $\Theta_p$ ,  $\Theta_u$  et  $\Theta_\mu$  représentent les paramètres de relaxation en pression, vitesse et potentiel chimique.

Le système (2.1) est composé de huit équations. Cependant la relation de saturation sur les fractions volumiques

$$\sum_{k=1}^2 z_k = 1, \quad (2.2)$$

permet de se ramener à un système à sept équations.

Les coefficients  $p_I$  et  $\mathbf{u}_I$  représentent la pression et la vitesse à l'interface entre les deux fluides. Plusieurs choix sont possibles pour ces coefficients. Dans le modèle originel [BN86], la vitesse est donnée par le fluide le moins compressible tandis que la pression à l'interface provient du fluide le plus compressible. Dans la configuration classique air/eau liquide, le gaz va donner la pression et le liquide la vitesse. De nombreux auteurs [SA99a, CGHS02, GHS04, RH84, Gui07] modélisent la vitesse et la pression au niveau de l'interface par des combinaisons convexes des vitesses et des pressions phasiques. Cependant, dans le cadre de notre étude le choix de ces quantités n'est pas primordial puisque nous allons supposer que les deux phases ont une vitesse et une pression égale à l'interface. De plus, nous négligerons les effets des potentiels chimiques, *i.e.*  $\Theta_\mu = 0$ . Il est alors possible de construire des modèles diphasiques simplifiés en forçant l'équilibre mécanique entre les deux phases.

### 2.1.2 Modèle à six équations

Lorsque le paramètre de relaxation en vitesse  $\Theta_u$  du modèle à 7 équations de Baer-Nunziato tend vers l'infini, nous pouvons obtenir un modèle réduit à 6 équations ne faisant intervenir qu'une seule vitesse  $\mathbf{u}$  et deux pressions. Dans ce cas, nous avons toujours les deux équations sur les énergies internes de chaque phase, mais nous n'avons plus qu'une seule équation sur la quantité de mouvement. Le système à six équations s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 = \Theta_p(p_1 - p_2), \\ \partial_t (z_1 \rho_1) + \nabla \cdot (z_1 \rho_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (z_2 \rho_2) + \nabla \cdot (z_2 \rho_2 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla (z_1 p_1 + z_2 p_2) = 0, \\ \partial_t (z_1 \rho_1 \varepsilon_1) + \nabla \cdot (z_1 \rho_1 \varepsilon_1 \mathbf{u}) + z_1 p_1 \nabla \cdot \mathbf{u} = -p_I \Theta_p(p_1 - p_2), \\ \partial_t (z_2 \rho_2 \varepsilon_2) + \nabla \cdot (z_2 \rho_2 \varepsilon_2 \mathbf{u}) + z_2 p_2 \nabla \cdot \mathbf{u} = p_I \Theta_p(p_1 - p_2), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où la densité de mélange est définie par :

$$\rho = \sum_{k=1}^2 z_k \rho_k. \quad (2.4)$$

Ce système est utilisé en pratique d'un point de vue numérique. En effet, pour résoudre le modèle avec équilibre des vitesses et des pressions présenté ci-dessous, Saurel et al. [SPB09] utilisent ce modèle à six équations (et donc avec deux pressions). Une relaxation de la pression au niveau numérique est alors effectuée pour se ramener à l'équilibre des pressions.

### 2.1.3 Modèle à cinq équations de Kapila [KMB+01]

Il est possible de continuer à réduire le nombre d'inconnues en supposant l'équilibre des pressions. En effet, Murrone et Guillard ont démontré [MG05] que la relaxation en vitesse et

pression à partir du modèle à 7 équations de Baer-Nunziato permettait de retrouver le modèle à cinq équations de Kapila [KMB<sup>+</sup>01]. Ce modèle ne comporte plus qu'une seule vitesse  $\mathbf{u}$  et qu'une seule pression  $p$  et s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 & = -K \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \partial_t (z_1 \rho_1) + \nabla \cdot (z_1 \rho_1 \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (z_2 \rho_2) + \nabla \cdot (z_2 \rho_2 \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p & = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) & = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où le terme de Kapila  $K$  devant la divergence de la vitesse dans l'équation d'évolution de la fraction volumique du fluide 1 est défini par :

$$K = z_1 z_2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2}. \quad (2.6)$$

La notation

$$\tau_k = \frac{1}{\rho_k c_k^2}, \quad (2.7)$$

désigne la compressibilité isentropique du fluide  $k$  et  $c_k$  est la vitesse du son du fluide  $k$  (voir la section 2.2.1 pour des rappels de thermodynamique). Le terme de Kapila est lié à la différence de compressibilité des différentes phases et traduit les effets de compression ou de dilatation pour un mélange. Au passage des ondes de détente ou de compression, ce terme va entraîner une modification de la fraction volumique. Notons que ce terme n'a pas d'influence au niveau des discontinuités de contact où la divergence de la vitesse  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  est nulle.

Comme pour le modèle à six équations, la densité de mélange est définie par (2.4) tandis que l'énergie totale du mélange vérifie la relation

$$\rho E = \sum_{k=1}^2 z_k \rho_k E_k. \quad (2.8)$$

Kreeft et Koren [KK10] ont récemment obtenu une formulation équivalente du modèle à 5 équations de Kapila [KMB<sup>+</sup>01]. Cette formulation fait intervenir une équation sur l'énergie totale et une équation sur une énergie phasique, mais il ne comporte plus d'équation d'évolution de la fraction volumique.

#### 2.1.4 Modèle à cinq équations réduit [ACK02, MSNA02]

Dans cette étude, nous considérons essentiellement des configurations où la donnée initiale est non mélangée, *i.e.*  $z_k z_{k'} = 0$ . Dans ce cas, le terme  $K$  (2.6) dans l'équation sur la fraction volumique dans le modèle de Kapila (2.5) devient nul et la solution exacte reste non mélangée. Pour une telle donnée initiale, la solution exacte est donc solution du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 & = 0, \\ \partial_t (z_1 \rho_1) + \nabla \cdot (z_1 \rho_1 \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (z_2 \rho_2) + \nabla \cdot (z_2 \rho_2 \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p & = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) & = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce système a été proposé indépendamment par Massoni et al. [MSNA02] et par Allaire et al. [ACK02, ACK00]. Il conserve les masses de chacune des deux phases du mélange, la quantité de mouvement ainsi que l'énergie totale du mélange. Nous montrerons dans la suite qu'il est hyperbolique. Dans ce manuscrit, nous appellerons ce modèle le modèle à cinq équations réduit.

### Remarque 1

Il est possible de trouver une forme conservative de ce système. En effet, en sommant les équations sur les masses de chaque phase et en combinant avec l'équation d'évolution sur la fraction volumique, on obtient une équation conservative sur  $\rho z_1$ ,

$$\partial_t (\rho z_1) + \nabla \cdot (\rho z_1 \mathbf{u}) = 0.$$

Cependant une fois discrétisée, cette forme conservative engendre des oscillations de pression au niveau de l'interface entre les deux fluides [Abg96]. C'est pourquoi elle n'est généralement pas utilisée.

### 2.1.5 Prise en compte des termes de dissipation

Dans le processus d'ablation liquide que nous voulons étudier, il est nécessaire de prendre en compte les termes de dissipation dus aux effets visqueux et thermiques.

Braconnier et Nkonga [BN09] ont démontré qu'il est possible de mener une analyse asymptotique similaire à celle présentée précédemment en supposant que les deux phases sont régies par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $\mathbb{T} = -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}_d + 2\mu \mathbf{D}$  est le tenseur symétrique des contraintes visqueuses avec  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$  le tenseur des taux de déformation. Le terme  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  désigne quant à lui le flux thermique où  $\kappa$  est la conductivité thermique et  $T$  la température.

En écrivant un système à 7 équations de type Baer-Nunziato couplant les deux phases avec les termes de dissipation puis en relaxant sur les vitesses et les pressions, on obtient le système diphasique réduit à 5 équations [BN09] suivant

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 + K \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (z_1 \rho_1) + \nabla \cdot (z_1 \rho_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (z_2 \rho_2) + \nabla \cdot (z_2 \rho_2 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\mathbb{T} = -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}_d + 2\mu \mathbf{D}$  avec la viscosité du mélange  $\mu = \sum_{k=1}^2 z_k \mu_k$  et le flux de chaleur du mélange est défini par  $\mathbf{q} = -\sum_{k=1}^2 z_k \kappa_k \nabla T_k$ . Notons qu'une analyse similaire avait déjà été effectuée dans [Pér03] sans les effets de dissipation thermique.

Le terme non conservatif dans l'équation sur la fraction volumique peut encore être négligé puisque nous voulons traiter des cas où les deux fluides sont non miscibles. De plus, nous négligerons les termes de tension de surface entre les fluides. Ceux-ci ont été considérés par divers auteurs [BN09, Pér03, PS05, LMNS13, SPD<sup>+</sup>17].

Dans la suite, nous nous focaliserons sur l'étude des modèles à 5 équations, à savoir le modèle de Kapila (2.5) et son équivalent réduit pour deux fluides non mélangés (2.9) avec les termes de dissipation. Ces deux modèles peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (\rho_1 z_1) + \nabla \cdot (\rho_1 z_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho_2 z_2) + \nabla \cdot (\rho_2 z_2 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où  $\Xi = 0$  pour le modèle à cinq équations réduit, et  $\Xi = K$  pour le modèle de Kapila. Rappelons enfin que la densité et l'énergie totale de mélange vérifient les relations (2.4) et (2.8) :

$$\rho = \sum_{k=1}^2 z_k \rho_k \quad \text{et} \quad \rho E = \sum_{k=1}^2 z_k \rho_k E_k.$$

Ces deux modèles semblent très similaires surtout pour des problèmes à interfaces où le terme  $K$  sera proche de zéro. Cependant, nous verrons que leurs propriétés mathématiques sont différentes. Avant de détailler ces propriétés mathématiques, nous allons présenter la fermeture du système et les lois d'état que nous utiliserons dans la suite.

## 2.2 Fermeture des modèles diphasiques et lois d'état

### 2.2.1 Rappels de thermodynamique

En thermodynamique, une équation d'état fondamentale d'un système à l'équilibre thermodynamique est une relation entre différents paramètres physiques (appelés variables d'état) qui déterminent son état. Parmi ces variables d'état, on retrouve par exemple la température, la pression, le volume spécifique ou l'énergie interne. À partir de l'équation d'état fondamentale d'un système physique, il est possible de déterminer la totalité des quantités thermodynamiques décrivant ce système.

Dans la suite, nous rappelons les principales relations et définitions pour les quantités thermodynamiques pour un système composé d'une seule phase à l'équilibre. Nous renvoyons aux travaux de thèse de Polner [Pol05] pour plus de détails.

L'une des variables d'état fondamentales est l'entropie par unité de masse

$$s = s(\vartheta, \varepsilon),$$

exprimée en fonction des deux variables d'état indépendantes  $\vartheta = \frac{1}{\rho}$  et  $\varepsilon$  qui sont respectivement le volume spécifique et l'énergie interne. Si la fonction d'entropie est connue, toutes les variables thermodynamiques peuvent être déterminées en fonction des variables indépendantes  $\vartheta$  et  $\varepsilon$ . À chaque couple de variables indépendantes est associée une équation d'état fondamentale. Ainsi la relation fondamentale de Gibbs

$$T ds = d\varepsilon + p d\vartheta, \quad (2.13)$$

définit la température  $T = T(\vartheta, \varepsilon)$  telle que

$$T = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\vartheta}, \quad (2.14)$$

et la pression  $p = p(\vartheta, \varepsilon)$  telle que  $p = T \left. \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \right|_{\varepsilon}$ .

De la même manière, pour le couple de variables indépendantes volume spécifique et température  $(\vartheta, T)$ , on peut introduire l'énergie libre de Helmholtz

$$F(\vartheta, T) = \varepsilon - Ts. \quad (2.15)$$

Dans ce cas, la relation fondamentale de Gibbs (2.13) devient

$$dF = -pd\vartheta - sdT,$$

ce qui permet de définir la pression et l'entropie en fonction des variables indépendantes  $(\vartheta, T)$  :

$$p(\vartheta, T) = - \left. \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right|_T, \quad (2.16)$$

$$s(\vartheta, T) = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{\vartheta}. \quad (2.17)$$

Pour le couple de variables indépendantes densité et entropie  $(\rho, s)$ , nous avons la relation

$$dp = c^2 d\rho + \rho \Gamma T ds, \quad (2.18)$$

où  $c$  est la vitesse du son du fluide considéré définie par la relation

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}, \quad (2.19)$$

et  $\Gamma = \left. \frac{\vartheta}{T} \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\rho}$  le coefficient de Grüneisen. En utilisant la définition de la température (2.14), nous obtenons la définition classique du coefficient de Grüneisen

$$\Gamma = \vartheta \left. \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right|_{\vartheta}. \quad (2.20)$$

En considérant la pression  $p$  et la température  $T$  comme variables indépendantes, on définit le coefficient de dilatation isobare

$$\alpha_p = \frac{1}{\vartheta} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right|_p, \quad (2.21)$$

ainsi que le coefficient de compressibilité isotherme

$$\beta_T = - \frac{1}{\vartheta} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right|_T. \quad (2.22)$$

Nous allons maintenant introduire les notions de capacité thermique à volume constant  $c_v$  et de capacité thermique à pression constante  $c_p$ . La capacité thermique à volume constant est définie par

$$c_v = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right|_{\vartheta}. \quad (2.23)$$

La différentielle de l'énergie interne  $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta, T)$  donne alors

$$d\varepsilon = c_v dT + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right|_T d\vartheta,$$

pour le couple  $(\vartheta, T)$  de variables indépendantes. La capacité thermique à pression constante  $c_p$  est quant à elle définie par

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p, \quad (2.24)$$

où  $h = \varepsilon + p\vartheta$  est l'enthalpie par unité de masse. Le rapport entre les deux capacités thermiques est le coefficient adiabatique  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  du fluide considéré.

L'équation d'état fondamentale étant parfois difficile à déterminer, on peut se contenter de lois d'état partielles. Par exemple dans le cadre des équations d'Euler pour le fluide, seule la loi reliant les trois quantités  $p$ ,  $\rho$  (ou  $\vartheta$ ) et  $\varepsilon$  est utile. De même, dans le cadre des équations de Navier-Stokes, il faut relier quatre quantités  $p$ ,  $\rho$  (ou  $\vartheta$ ),  $\varepsilon$  et  $T$ . Dans ce cas, la loi d'état partielle reliant la pression, la densité et l'énergie interne n'est pas suffisante et il est nécessaire d'introduire une deuxième loi d'état partielle reliant l'énergie interne, la température et la densité. Dans la suite, nous détaillons les lois d'état utilisées dans notre étude.

## 2.2.2 Lois d'état retenues

### Loi d'état de type gaz parfait

Pour un fluide donné, l'équation d'état de type gaz parfait est entièrement déterminée par l'énergie libre de Helmholtz [Men07]

$$F_\gamma(\vartheta, T) = c_v T \left( 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - (\gamma - 1) \ln \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) \right) - s_0 T. \quad (2.25)$$

où le coefficient adiabatique  $\gamma > 1$  et la capacité thermique à volume constant  $c_v > 0$  sont des paramètres constants du fluide. Les paramètres  $T_0$ ,  $\vartheta_0$  et  $s_0$  sont respectivement une température, un volume spécifique et une entropie de référence. En utilisant les relations thermodynamiques (2.16), (2.15), (2.19) et (2.17) définies précédemment, nous en déduisons les lois d'état partielles, la vitesse du son et l'entropie pour un gaz parfait

$$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2.26)$$

$$\varepsilon(\rho, T) = c_v T, \quad (2.27)$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (2.28)$$

$$s(p, \vartheta) = c_v \ln \left( \frac{p\vartheta^\gamma}{p_0\vartheta_0^\gamma} \right) + s_0 = f(p\vartheta^\gamma), \quad (2.29)$$

où  $p_0$  est une pression de référence.

Pour l'équation d'état de type gaz parfait, le coefficient de Grüneisen (2.20) est donné par  $\Gamma = \gamma - 1$ . Les coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme définis par (2.21) et (2.22) deviennent

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \beta_T = \frac{1}{p}. \quad (2.30)$$

### Loi d'état de type gaz raide

La plupart du temps, pour la partie liquide nous nous limiterons aux équations de type gaz raide. Dans ce cas, l'énergie libre de Helmholtz est donnée par [Men07, MP89]

$$F(\vartheta, T) = F_\gamma(\vartheta, T) + \vartheta\pi + q, \quad (2.31)$$

où  $F_\gamma(\rho, T)$  est l'énergie libre de Helmholtz d'un gaz parfait,  $q$  est une énergie interne de référence et  $\pi$  une pression de référence. La valeur de  $q$  peut être utilisée pour ajuster le zéro de l'énergie interne et ne sera nécessaire que dans les applications avec du changement de phase pour tenir compte de l'enthalpie de formation. Nous pouvons directement noter que l'équation de type gaz

parfait est un cas particulier de l'équation de type gaz raide pour  $\pi = q = 0$ . De la même façon que pour la loi d'état de type gaz parfait, nous pouvons en déduire les lois d'état partielles

$$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho(\varepsilon - q) - \gamma\pi, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon(\rho, T) = q + c_v T + \frac{\pi}{\rho}. \quad (2.33)$$

Dans l'équation (2.32), le terme  $(\gamma - 1)\rho(\varepsilon - q)$  traduit des effets répulsifs tandis que le terme  $\gamma\pi$  traduit les effets d'attraction moléculaires garantissant la cohésion de la matière [LMMS04].

En inversant la relation (2.32), nous obtenons la relation pour l'énergie interne en fonction de la pression et de la densité

$$\rho\varepsilon = \rho q + \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1}. \quad (2.34)$$

La vitesse du son (2.19) pour un gaz raide est donnée par

$$c^2 = \gamma \frac{p + \pi}{\rho}. \quad (2.35)$$

Pour l'entropie, nous obtenons

$$s(p, \vartheta) = c_v \ln \left( \frac{(p + \pi)\vartheta^\gamma}{(p_0 + \pi)\vartheta_0^\gamma} \right) + s_0 = f((p + \pi)\vartheta^\gamma), \quad (2.36)$$

Comme dans le cas d'un gaz parfait, le coefficient de Grüneisen (2.20) est égal à  $\Gamma = \gamma - 1$ .

Les paramètres de la loi d'état de type gaz raide sont déterminés en ajustant les courbes d'Hugoniot théoriques et expérimentales [LMMS04]. Cette loi d'état permet de traiter des gaz, des liquides ainsi que des solides dans le domaine des grandes pressions. Latige [Lat13] montre qu'elle restitue bien le comportement mécanique grâce au paramètre  $\pi$  mais que la dilatation thermique de la phase liquide sera exagérément amplifiée. En effet, les coefficients de dilatation isobare (2.21) et de compressibilité isotherme (2.22) pour un gaz raide sont égaux à

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \beta_T = \frac{1}{p + \pi}. \quad (2.37)$$

Pour un liquide, le coefficient de dilatation isobare réel mesuré est de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Les expressions (2.37) montrent que les variations du volume en fonction de la température à pression constante seront exagérées.

### 2.2.3 Fermeture isobare des modèles diphasiques

Pour fermer le système (2.12), une relation supplémentaire est nécessaire. Nous devons définir la loi de mélange pour la pression. La fermeture isobare du modèle diphasique s'écrit [ACK02]

$$p_1(\rho_1, \varepsilon_1) - p_2(\rho_2, \varepsilon_2) = 0, \quad (2.38)$$

$$\rho\varepsilon = z_1\rho_1\varepsilon_1 + z_2\rho_2\varepsilon_2. \quad (2.39)$$

Dans le cas d'un mélange de deux gaz raides, en utilisant la relation (2.34) pour chaque phase, la fermeture isobare s'exprime alors par

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon &= z_1 \left( \frac{p + \gamma_1\pi_1}{\gamma_1 - 1} + \rho_1 q_1 \right) + z_2 \left( \frac{p + \gamma_2\pi_2}{\gamma_2 - 1} + \rho_2 q_2 \right), \\ &= \left( z_1 \frac{1}{\gamma_1 - 1} + z_2 \frac{1}{\gamma_2 - 1} \right) p + z_1 \frac{\gamma_1\pi_1}{\gamma_1 - 1} + z_2 \frac{\gamma_2\pi_2}{\gamma_2 - 1} + z_1\rho_1 q_1 + z_2\rho_2 q_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

On définit alors les paramètres du mélange  $\gamma(z)$ ,  $\pi(z)$  et  $q$  où  $z = z_1$  par

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma(z) - 1} &= \sum_{k=1}^2 z_k \frac{1}{\gamma_k - 1}, \\ \frac{\gamma(z)\pi(z)}{\gamma(z) - 1} &= \sum_{k=1}^2 z_k \frac{\gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1}, \\ \rho q &= z_1 \rho_1 q_1 + z_2 \rho_2 q_2.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Dans ce cas, la pression du mélange est donnée par :

$$p(\rho, \varepsilon, z) = (\gamma(z) - 1)\rho(\varepsilon - q) - \gamma(z)\pi(z).\tag{2.42}$$

Dans le cas d'un mélange de gaz raides, la pression du mélange est donc de la même forme que la pression de la phase pure avec les coefficients de mélange (2.41).

En introduisant la fraction massique  $y_k$  du fluide  $k$  telle que

$$y_k = \frac{\rho_k z_k}{\rho},\tag{2.43}$$

nous pouvons écrire les relations suivantes sur l'énergie interne et le volume spécifique de mélange

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^2 y_k \varepsilon_k,\tag{2.44}$$

$$\vartheta = \sum_{k=1}^2 y_k \vartheta_k.\tag{2.45}$$

Nous pouvons donc en déduire que l'enthalpie de mélange est donnée par

$$h = \varepsilon + p\vartheta = \sum_{k=1}^2 y_k h_k.\tag{2.46}$$

où l'on rappelle que l'enthalpie pour la phase  $k$  est définie par  $h_k = \varepsilon_k + p\vartheta_k$ .

Dans la suite, nous noterons  $z = z_1$  la fraction volumique de la phase 1 et  $y = y_1$  la fraction massique du fluide 1. Les quantités  $(1 - z)$ , respectivement  $(1 - y)$ , désigneront quant à elles la fraction volumique, respectivement massique, de la phase 2.

### Remarque 2

Dans le cas particulier d'un mélange de deux gaz raides avec  $q_k = 0$ , nous pouvons remarquer que la loi de pression (2.42) ne dépend pas des masses volumiques de chaque phase. Si de plus les effets dissipatifs ne sont pas pris en compte, la température n'intervient pas. Il n'est donc pas nécessaire de conserver les deux équations d'évolution des masses volumiques. En sommant les deux premières équations du système diphasique, nous nous ramenons alors à un système à 4 équations

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = 0. \end{cases}\tag{2.47}$$

Dans notre étude, nous serons amenés à considérer les effets de dissipation, ce qui nécessite la connaissance de la température de chaque phase et donc de leur masse volumique. C'est pourquoi nous ne retenons pas ce modèle à 4 équations.

## 2.3 Généralités sur les systèmes hyperboliques

Dans la section précédente, les modèles diphasiques pour les équations d'écoulements diphasiques ont été présentés, ainsi que les lois d'état thermodynamiques pour chacune des phases. Dans nos applications, les deux phases de l'écoulement diphasique ne vont pas se mélanger au niveau continu mais seulement au niveau numérique à cause de la diffusion de l'interface. C'est pourquoi nous avons retenu les modèles de Kapila et celui à cinq équations réduit qui ne possèdent qu'une seule vitesse et qu'une seule pression. Avant de détailler les propriétés mathématiques de ces modèles dans la section suivante, nous allons présenter de brefs rappels sur les systèmes hyperboliques. Nous renvoyons à [GR96, Bou04, Smo83] pour une présentation plus détaillée de ces systèmes hyperboliques de loi de conservation.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , où  $p$  est un entier positif. On considère  $\mathbf{F}_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , des fonctions régulières de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^p$ . L'entier  $d$  représente la dimension de l'espace physique considéré. Dans la suite, nous prendrons  $d = 1$  ou  $d = 2$ . La forme générale d'un système de lois de conservation est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = 0, \quad t > 0, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$  est un vecteur à  $p$  composantes.

Une forme non conservative du système précédent est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0, \quad (2.49)$$

où  $\mathbf{A}_i = \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_i(\mathbf{U})$  est la matrice Jacobienne de  $\mathbf{F}_i(\mathbf{U})$ .

Nous considérons maintenant  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^d$ . Nous pouvons définir la matrice de taille  $p \times p$ ,

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{U}) = \sum_{i=1}^d \omega_i \mathbf{A}_i(\mathbf{U}). \quad (2.50)$$

### Définition 1 (Hyperbolicité)

Le système (2.48) ou (2.49) est dit hyperbolique si et seulement si la matrice  $\mathbf{A}$  définie par (2.50) vérifie les propriétés suivantes pour tout vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  non nul :

- $\mathbf{A}$  est diagonalisable,
- toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont réelles.

Le système est dit strictement hyperbolique si de plus les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont distinctes.

On peut noter que cette propriété d'hyperbolicité est invariante par changement d'inconnues  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{U})$ .

### Définition 2 (Vecteur propre à droite)

Pour chaque valeur propre  $(\lambda_j(\mathbf{U}))_{j=1, \dots, p}$ , le vecteur propre à droite associé  $\mathbf{r}_j$  est défini par

$$\mathbf{A} \mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_j.$$

### Définition 3 (Nature des champs)

On dira que le vecteur propre, ou  $j$ -champ, associé à la valeur propre  $\lambda_j(\mathbf{U})$  est

- vraiment non linéaire si pour tout état  $\mathbf{U}$ ,

$$\nabla_{\mathbf{U}} \lambda_j(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_j \neq 0,$$

— linéairement dégénéré si pour tout état  $\mathbf{U}$ ,

$$\nabla_{\mathbf{U}} \lambda_j(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_j = 0.$$

#### Définition 4 (Couple entropie-flux)

Une fonction strictement convexe  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une entropie du système de lois de conservation (2.48) s'il existe  $d$  fonctions régulières  $q_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i \leq 1 \leq d$  appelées flux d'entropie, telles que :

$$(\nabla_{\mathbf{U}} \eta(\mathbf{U}))^T \nabla_{\mathbf{U}} F_i(\mathbf{U}) = (\nabla_{\mathbf{U}} q_i)^T, \quad i \leq 1 \leq d.$$

#### Définition 5 (Couple entropie-flux pour un système non conservatif)

Une fonction strictement convexe  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une entropie du système non conservatif (2.49) s'il existe  $d$  fonctions régulières  $q_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i \leq 1 \leq d$  appelées flux d'entropie, telles que :

$$(\nabla_{\mathbf{U}} \eta(\mathbf{U}))^T \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) = (\nabla_{\mathbf{U}} q_i)^T, \quad i \leq 1 \leq d.$$

#### Définition 6 (Solution entropique)

On dira qu'une solution  $\mathbf{U}$  est entropique si elle vérifie au sens des distributions l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} q_i \leq 0. \quad (2.51)$$

## 2.4 Propriétés mathématiques des modèles diphasiques à 5 équations

Les propriétés mathématiques des modèles considérés sont présentées dans cette section. Pour simplifier l'étude, nous ne conserverons que la partie hyperbolique des équations, c'est-à-dire le membre de gauche du système (2.12) et nous ne nous intéresserons pas aux termes dissipatifs.

### 2.4.1 Vitesse du son de mélange

L'objectif de cette partie est de déterminer l'équation vérifiée par la pression, pour ensuite définir une vitesse du son du mélange indépendamment du système diphasique considéré. Nous vérifierons par la suite que le système est bien hyperbolique avec cette définition de vitesse du son. Dans les modèles diphasiques considérés, la loi de pression du mélange est de la forme  $p = p(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, \rho \varepsilon, z)$ . On peut alors exprimer la différentielle de la pression

$$dp = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial p}{\partial \rho_k z_k} \Big|_{\rho_{k'}, z_{k'}, \rho \varepsilon, z} d(\rho_k z_k) + \frac{\partial p}{\partial \rho \varepsilon} \Big|_{\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, z} d(\rho \varepsilon) + \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, \rho \varepsilon} dz. \quad (2.52)$$

De la même façon que dans les travaux d'Allaire et al. [ACK02], nous pouvons exprimer les dérivées partielles de la pression.

#### Proposition 1 (Allaire et al. [ACK02])

Les dérivées partielles de la pression sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho \varepsilon} \Big|_{\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, z} &= \frac{1}{\xi}, \\ \frac{\partial p}{\partial \rho_k z_k} \Big|_{\rho_{k'}, z_{k'}, \rho \varepsilon, z} &= -\frac{\delta_k}{\xi}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, \rho \varepsilon} &= \frac{M}{\xi}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

où  $\xi = \sum_{k=1}^2 z_k \xi_k$ ,  $\xi_k = \left. \frac{\partial \rho_k \varepsilon_k}{\partial p} \right|_{\rho_k}$ ,  $\delta_k = \left. \frac{\partial \rho_k \varepsilon_k}{\partial \rho_k} \right|_p$ , et  $M = \rho_1(\delta_1 - \varepsilon_1) - \rho_2(\delta_2 - \varepsilon_2)$ .

*Démonstration.* On rappelle que l'énergie interne de mélange (2.44) s'écrit  $\rho\varepsilon = \sum_{k=1}^2 \rho_k z_k \varepsilon_k$ . Sa différentielle s'exprime donc de la façon suivante

$$d(\rho\varepsilon) = \sum_{k=1}^2 \rho_k \varepsilon_k dz_k + \sum_{k=1}^2 z_k d(\rho_k \varepsilon_k).$$

Or  $d(\rho_k \varepsilon_k) = \delta_k d\rho_k + \xi_k dp$ , et nous avons alors

$$dp = \frac{1}{\xi} d(\rho\varepsilon) - \sum_{k=1}^2 \frac{z_k \delta_k}{\xi} d\rho_k - \frac{\rho_1 \varepsilon_1 - \rho_2 \varepsilon_2}{\xi} dz.$$

En utilisant la relation  $z_k d\rho_k = d(\rho_k z_k) - \rho_k dz_k$ , on trouve les dérivées partielles de la pression données dans la proposition.  $\square$

On introduit maintenant la notion de dérivée particulaire d'une quantité  $f$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (2.54)$$

En partant du système (2.12) sans les termes dissipatifs, nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \frac{Dz}{Dt} &= -\Xi \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{D\rho_k z_k}{Dt} &= -\rho_k z_k \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

En combinant les équations de quantité de mouvement et d'énergie totale, nous obtenons aussi la relation

$$\frac{D\rho\varepsilon}{Dt} = -\rho h \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

où l'on rappelle que l'enthalpie de mélange (2.46) est définie par  $h = \sum_{k=1}^2 y_k h_k$ , où  $h_k = \varepsilon_k + \frac{p}{\rho_k}$ .

Ainsi, la dérivée particulaire de la pression vérifie

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho \frac{1}{\xi} \left( \sum_{k=1}^2 y_k (h_k - \delta_k) - \Xi \left( \frac{y_1}{z_1} (\varepsilon_1 - \delta_1) - \frac{y_2}{z_2} (\varepsilon_2 - \delta_2) \right) \right) \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Après simplifications, on trouve finalement

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2 \left( 1 + \frac{(-1)^k}{z_k} \Xi \right) \nabla \cdot \mathbf{u},$$

où la vitesse du son de la phase pure  $k$  est donnée par  $c_k^2 = \frac{h_k - \delta_k}{\xi_k}$ .

Par analogie avec le cas monophasique où l'équation d'évolution sur la pression est donnée par  $\frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , nous pouvons définir la vitesse du son du mélange pour le système (2.12). Nous synthétisons ici les résultats connus de [ACK02, KMB<sup>+</sup>01, MG05] dans la proposition suivante.

### Proposition 2

La vitesse du son du mélange pour le système diphasique à cinq équations (2.12) est donnée par

$$c^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2 \left( 1 + \frac{(-1)^k}{z_k} \Xi \right), \quad (2.55)$$

où  $\xi_k$  et  $c_k$  sont respectivement l'inverse du coefficient de Grüneisen et la vitesse du son de la phase pure  $k$ . Le terme  $\xi$  est égal à  $\xi = \sum_{k=1}^2 z_k \xi_k$ . Rappelons enfin que le paramètre  $\Xi$  est nul dans le cas du modèle à cinq équations réduit, tandis que pour le modèle de Kapila, nous avons  $\Xi = K = z_1 z_2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2}$ .

Par abus de langage, nous avons noté  $c^2$  le terme précédent. Nous montrerons dans la suite que sa positivité caractérise l'hyperbolicité du système. Nous allons maintenant expliciter la vitesse du son obtenue pour les deux modèles diphasiques considérés.

#### 2.4.1.1 Modèle à cinq équations réduit

Pour le modèle à cinq équations réduit, le terme  $\Xi$  est nul. Nous en déduisons donc que la vitesse du modèle est donnée par

$$c^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2. \quad (2.56)$$

La vitesse du son de mélange est donc une moyenne des vitesses du son de chaque phase prises séparément.

Si la phase  $k$  est modélisée par une loi d'état de type gaz raide, l'inverse du coefficient de Grüneisen  $\xi_k$  est égal à  $\frac{1}{\gamma_k - 1}$ . La vitesse du son de la phase pure (2.35) est donnée par  $c_k^2 = \gamma_k \frac{p + \pi_k}{\rho_k}$ . Ainsi, d'après la formule (2.56), la vitesse du son du mélange pour deux gaz raides est donc donnée par :

$$c^2 = \gamma(z) \frac{p + \pi(z)}{\rho}. \quad (2.57)$$

Pour un mélange de deux gaz raides, la vitesse du son du mélange est donc de la même forme que la vitesse du son de la phase pure avec les coefficients de mélange définis par (2.41).

#### 2.4.1.2 Modèle de Kapila

Pour le modèle diphasique de Kapila, le terme devant la divergence de la vitesse dans l'équation d'évolution de la fraction volumique de (2.12) est égal à  $\Xi = K = z_1 z_2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2}$ . On rappelle que la notation  $\tau_k = \frac{1}{\rho_k c_k^2}$  désigne la compressibilité isentropique du fluide  $k$ . Notons ensuite que

$$\sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2 \frac{(-1)^k}{z_k} K = \frac{1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2 z_{k'} (\tau_k - \tau_{k'}),$$

où  $k'$  est toujours égal à  $3 - k$ . En injectant la relation précédente dans la la formule de la vitesse du son (2.55), nous obtenons

$$c^2 = \frac{1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2} \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2 (z_k \tau_k + z_{k'} \tau_{k'} + z_{k'} (\tau_k - \tau_{k'})),$$

puis, en utilisant la relation entre les fractions volumiques et massiques  $\rho y_k = \rho_k z_k$ , nous avons

$$\rho c^2 = \frac{1}{z_1 \tau_1 + z_2 \tau_2} \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 z_k \xi_k \rho_k c_k^2 \tau_k (z_k + z_{k'}).$$

Finalement, d'après la relation de saturation (2.2) et la définition de la compressibilité isentropique du fluide  $k$ , on trouve

$$\rho c^2 = \left( \sum_{k=1}^2 z_k \tau_k \right)^{-1},$$

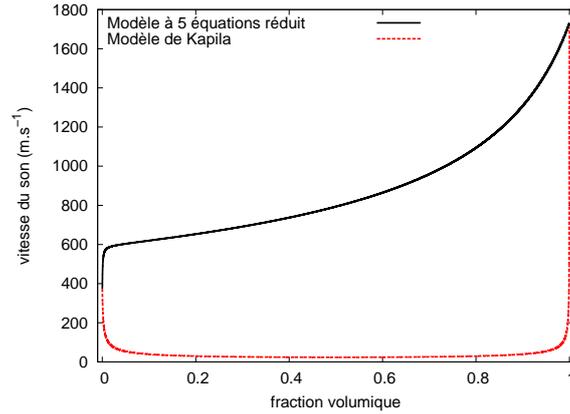


FIGURE 2.1 – Comparaison des vitesses du son pour le modèle à cinq équations réduit et celui de Kapila.

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{z_k}{\rho_k c_k^2}. \quad (2.58)$$

Cette vitesse du son est nommée vitesse du son de Wood [Woo30] dans la littérature.

Nous pouvons comparer les vitesses du son des deux modèles dans le cas d'un mélange air/eau à pression atmosphérique. Pour l'air nous prenons une densité égale à  $1 \text{ kg.m}^{-3}$  avec une loi d'état de type gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ , tandis que la densité de l'eau est 1000 fois plus grande. Pour l'eau, les paramètres des lois d'état sont  $\gamma = 4.4$  et  $\pi = 6.8 \times 10^8$ . Sur la figure 2.1, on voit que la vitesse du son du modèle de Kapila est toujours plus faible que celle du modèle à cinq équations réduit. Ces différences se situent au niveau de la zone de mélange. Cependant, dans notre étude nous considérons des problèmes où la condition initiale n'est pas mélangée. Ainsi, la zone de mélange est seulement due à la diffusion numérique des schémas utilisés, et devrait donc être limitée spatialement. Les différences de vitesses du son dans la zone de mélange ne devraient pas avoir d'impact au niveau de la solution globale. Nous vérifierons cela à l'aide des résultats numériques présentés dans le chapitre suivant.

Après avoir détaillé l'expression de la vitesse du son pour les deux modèles diphasiques considérés, nous allons montrer que le système diphasique à 5 équations est hyperbolique si la vitesse du son est bien définie.

## 2.4.2 Hyperbolicité

Pour démontrer l'hyperbolicité du système (2.12) sans les termes de dissipation, nous allons le réécrire sous une forme non conservative (2.49). Pour cela, nous définissons le vecteur des variables primitives

$$\mathbf{W} = (\rho, y, \mathbf{u}, p, z)^T,$$

où le vecteur vitesse  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ . Rappelons que  $z = z_1$  désigne la fraction volumique de la phase 1 et  $y = \frac{\rho_1 z_1}{\rho}$  la fraction massique de la phase 1. Le système diphasique considéré (2.12)

s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u_1 \partial_{x_1} \rho + \rho \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_2} \rho + \rho \partial_{x_2} u_2 = 0, \\ \partial_t y + u_1 \partial_{x_1} y + u_2 \partial_{x_2} y = 0, \\ \partial_t u + u_1 \partial_{x_1} u + \frac{1}{\rho} \partial_{x_1} p + u_2 \partial_{x_2} u = 0, \\ \partial_t v + u_1 \partial_{x_1} v + u_2 \partial_{x_2} v + \frac{1}{\rho} \partial_{x_2} p = 0, \\ \partial_t p + u_1 \partial_{x_1} p + \rho c^2 \partial_{x_1} u + u_2 \partial_{x_2} p + \rho c^2 \partial_{x_2} u = 0, \\ \partial_t z + u_1 \partial_{x_1} z + \Xi \partial_{x_1} u + u_2 \partial_{x_2} z + \Xi \partial_{x_2} u = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme plus compacte

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{A}_1(\mathbf{W}) \partial_{x_1} \mathbf{W} + \mathbf{A}_2(\mathbf{W}) \partial_{x_2} \mathbf{W} = 0$$

où  $\mathbf{W} = (\rho, y, u_1, u_2, p, z)^T$  est le vecteur des variables primitives, et

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Xi & 0 & u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

On peut montrer que si le carré de la vitesse du son (2.55) est strictement positif, le système (2.12) est hyperbolique.

En effet, soit  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$  un vecteur unitaire. Définissons la matrice  $\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{A}_1 + \omega_2 \mathbf{A}_2$  telle que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 & \rho \omega_1 & \rho \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 & \frac{\omega_1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & \frac{\omega_2}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 \omega_1 & \rho c^2 \omega_2 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \Xi \omega_1 & \Xi \omega_2 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda$  un réel, nous pouvons calculer le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$ . Nous trouvons alors

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_d) = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - \lambda)^4 ((\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - \lambda)^2 - c^2).$$

Ainsi, si le carré de la vitesse du son est strictement positif, la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonalisable, et ses valeurs propres sont égales à  $\lambda_1 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - c$ ,  $\lambda_{2,\dots,5} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$  (avec une multiplicité égale à 4) et  $\lambda_6 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + c$ . Dans ce cas, d'après la définition 1, le système (2.12) est hyperbolique.

### Remarque 3

Pour le modèle à cinq équations réduit, la vitesse du son est définie par la relation

$$c^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 y_k \xi_k c_k^2.$$

Étant donné que les fractions volumiques et massiques ainsi que les vitesses du son de chaque phase sont positives, la positivité du carré de la vitesse du son est déterminée par le signe des coefficients  $\xi_k$ . D'un point de vue thermodynamique, ces coefficients possèdent le même signe que le coefficient de dilatation isobare défini par

$$\alpha_p = \frac{1}{\vartheta} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right|_p.$$

Nous nous limiterons donc à des matériaux dont le coefficient de dilatation isobare, et donc le coefficient  $\xi_k$ , est positif pour assurer que le carré de la vitesse du son du mélange soit positif. En d'autres termes, nous ne considérerons que des matériaux dont le volume augmente avec la température, à pression constante. Ce choix exclut notamment l'eau liquide entre son point de fusion et 277 K. En effet lors de sa solidification, l'eau augmente de volume alors que la température diminue.

D'après la définition 2, les vecteurs propres à droite associés sont donnés par  $\mathbf{A}\mathbf{r}_j = \lambda_j\mathbf{r}_j$ . Ici, nous en déduisons les vecteurs propres suivants

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ -c\omega_1 \\ -c\omega_2 \\ \rho c^2 \\ \Xi \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \\ -\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r}_6 = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ c\omega_1 \\ c\omega_2 \\ \rho c^2 \\ \Xi \end{pmatrix}.$$

### 2.4.3 Entropies

Pour déterminer l'entropie mathématique du système diphasique à cinq équations, nous réutilisons les variables primitives  $\mathbf{W} = (\rho, y, u_1, u_2, p, z)^T$  définies dans la section précédente. Le système diphasique (2.12) sans les termes de dissipation se réécrit alors

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{A}_1 \partial_{x_1} \mathbf{W} + \mathbf{A}_2 \partial_{x_2} \mathbf{W} = 0, \quad (2.61)$$

avec les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  définies par (2.60).

Classiquement, on cherche l'entropie du système sous la forme  $\eta = \rho s$ , l'entropie spécifique  $s$  étant transportée le long des lignes de courant pour des écoulements réguliers. D'après la définition 5, voir section 2.3, l'entropie  $\eta$  du système doit vérifier les relations

$$(\nabla_{\mathbf{W}} \eta)^T \mathbf{A}_i = (\nabla_{\mathbf{W}} q_i)^T, \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (2.62)$$

avec  $\nabla_{\mathbf{W}} \eta = (\partial_\rho \eta, \partial_y \eta, \partial_{u_1} \eta, \partial_{u_2} \eta, \partial_p \eta, \partial_z \eta)^T$ .

Les fonctions  $q_1$  et  $q_2$  sont les flux d'entropies associés. Ici nous cherchons à déterminer les entropies du système pour lesquelles l'entropie spécifique  $s$  sera transportée par les lignes de courant. Pour cela, nous considérons des flux d'entropie  $q_i = \eta u_i$ . En effet, pour ce choix de flux d'entropie, le cas d'égalité de (2.51) devient

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) = 0. \quad (2.63)$$

D'après les définitions des matrices  $\mathbf{A}_i$  (2.60), nous pouvons voir que les vecteurs lignes  $(\nabla_{\mathbf{W}} \rho)^T \mathbf{A}_i$  et  $(\nabla_{\mathbf{W}} (\rho u_i))^T$  sont égaux. Les relations (2.62) sont donc équivalentes à

$$(\nabla_{\mathbf{W}} s)^T \mathbf{A}_i = u_i (\nabla_{\mathbf{W}} s)^T, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (2.64)$$

En développant (2.64), nous obtenons alors les relations suivantes pour l'entropie du système

$$s_{u_1} = s_{u_2} = 0, \quad (2.65a)$$

$$\rho s_\rho + \rho c^2 s_p + \Xi s_z = 0, \quad (2.65b)$$

où, pour alléger les notations, nous avons noté  $\phi_\alpha$  la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à l'une de ses variables  $\alpha$ . D'après la première relation (2.65a) nous en déduisons que l'entropie est une fonction de quatre variables, soit  $s = s(\rho, y, p, z)$ . De plus, l'entropie  $s$  est solution de l'équation (2.65b).

Dans la suite, nous détaillons les entropies mathématiques pour les deux systèmes diphasiques suivant la valeur du terme  $\Xi$ .

### 2.4.3.1 Modèle à cinq équations réduit

Dans [ACK02], les auteurs n'ont pas réussi à définir les entropies du système diphasique sauf dans le cas d'un mélange de deux gaz parfaits. Néanmoins, Périgaud et Saurel [PS05, Pér03] ont réussi à déterminer des entropies du système à cinq équations réduit dans le cas particulier d'un mélange de deux gaz raides. En effet, ils considèrent l'entropie du mélange

$$s = ys_1 + (1 - y)s_2, \quad (2.66)$$

où

$$s_k(p, \rho_k, z_k) = \frac{p + \pi}{\rho_k^\gamma} \quad k = 1, 2.$$

Notons que  $s_1$  et  $s_2$  ne sont pas les entropies physiques de chaque phase prise séparément (2.36). En effet, elles dépendent des paramètres du mélange  $\gamma$  et  $\pi$ . Nous pouvons facilement vérifier que ce choix définit bien une entropie pour le système. En effet, en utilisant la relation entre la densité de mélange, la densité de la phase  $k$  et les fractions massiques et volumiques, *i.e.*  $\rho y_k = \rho_k z_k$ , nous pouvons transformer (2.66) en une expression qui ne dépend que de  $z$ ,  $y$ ,  $\rho$  et  $p$  :

$$s = \frac{p + \pi}{\rho^\gamma} \left( \frac{z^\gamma}{y^{\gamma-1}} + \frac{(1-z)^\gamma}{(1-y)^{\gamma-1}} \right). \quad (2.67)$$

Nous voyons directement que  $s_{u_1} = s_{u_2} = 0$ . De plus, sachant que la vitesse du son pour ce modèle est donnée par (2.57) nous avons

$$\begin{aligned} \rho s_\rho + \rho c^2 s_p &= \rho \left( -\gamma \frac{p + \pi}{\rho^{\gamma+1}} + \frac{c^2}{\rho^\gamma} \right) \left( \frac{z^\gamma}{y^{\gamma-1}} + \frac{(1-z)^\gamma}{(1-y)^{\gamma-1}} \right) \\ &= \rho \left( -\gamma \frac{p + \pi}{\rho^{\gamma+1}} + \gamma \frac{p + \pi}{\rho^{\gamma+1}} \right) \left( \frac{z^\gamma}{y^{\gamma-1}} + \frac{(1-z)^\gamma}{(1-y)^{\gamma-1}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'entropie considérée est donc bien une entropie du système.

#### Remarque 4

Pour un mélange de gaz raides, les entropies définies par

$$s(p, \rho, z, y) = s_0 \left( \frac{p + \pi}{\rho^\gamma}, z, y \right), \quad (2.68)$$

vérifient la relation (2.65b) et sont donc bien des entropies mathématiques pour le modèle diphasique à cinq équations réduit.

Plus récemment, Latige [Lat13] a déterminé la forme générale des entropies mathématiques du modèle diphasique à cinq équations réduit pour une loi d'état plus générale.

#### Proposition 3 (Latige [Lat13])

Pour une loi d'état du mélange du type,

$$p = \Gamma(\vartheta, z, y)\rho\varepsilon + p_\infty(\vartheta, z, y), \quad (2.69)$$

les entropies mathématiques du système diphasique à cinq équations réduit sont les fonctions convexes de la forme

$$s(\vartheta, \varepsilon, z, y) = s_0 \left( e^{a(\vartheta)} \left[ \varepsilon + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} p_\infty(\tau, z, y) e^{a(\tau) - a(\vartheta)} d\tau \right], z, y \right), \quad (2.70)$$

où la fonction  $a(\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\Gamma(\tau, z, y)}{\tau} d\tau$  dépend de  $\vartheta$ ,  $z$  et  $y$ .

Notons que les entropies définies par (2.70) sont bien cohérentes avec celles trouvées par Périgaud et Saurel dans le cas d'un mélange de gaz raides.

**Remarque 5**

Murrone et Guillard [MG05] ont démontré que les entropies de chaque phase prises séparément ne sont pas des entropies pour le système à cinq équations réduit. Elles ne sont donc pas transportées sur les lignes de courant, contrairement au modèle de Kapila, comme cela est redémontré ci-dessous.

**2.4.3.2 Modèle de Kapila**

Pour le modèle de Kapila, les entropies de chaque phase prises séparément sont des entropies du système diphasique [KMB<sup>+</sup>01, MG05]. Nous allons redémontrer ce résultat avec une preuve différente, en utilisant les relations (2.64) déterminées auparavant.

**Proposition 4**

Soit l'entropie phasique de la phase  $k = 1, 2$

$$s_k = s_k(p, \rho_k) = s_k\left(p, \frac{\rho y_k}{z_k}\right),$$

où  $s_k$  est une fonction vérifiant la relation (2.18)

$$\rho_k T_k \Gamma_k ds_k = dp - c_k^2 d\rho_k, \tag{2.71}$$

où l'on rappelle que  $\Gamma_k = \vartheta_k \left. \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right|_{\vartheta_k}$  est le coefficient de Grüneisen du fluide  $k$ . Cette entropie phasique est une entropie du système de Kapila.

*Démonstration.* Par souci de clarté, dans la suite nous considérons l'entropie de la phase 1. Les calculs pour la phase 2 sont identiques.

Nous pouvons directement noter que l'entropie phasique ne dépend pas de la vitesse  $\mathbf{u}$ . Ainsi, pour montrer que  $s_1$  est une entropie du système, nous devons vérifier la relation (2.65b). En notant  $D_1$  (respectivement  $D_2$ ) la dérivée partielle de la fonction  $s_1$  par rapport à sa première (respectivement deuxième) variable, nous pouvons exprimer les dérivées partielles de l'entropie phasique :

$$\begin{aligned} s_p &= D_1 s_1\left(p, \frac{\rho y}{z}\right), \\ s_z &= -\frac{\rho y}{z^2} D_2 s_1\left(p, \frac{\rho y}{z}\right), \\ s_\rho &= \frac{y}{z} D_2 s_1\left(p, \frac{\rho y}{z}\right). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Pour le modèle de Kapila, la relation (2.65b) à prouver s'écrit

$$\rho s_\rho + \rho c^2 s_p + K s_z = 0.$$

Les dérivées partielles (2.72) donnent alors la relation équivalente

$$\frac{\rho y}{z} D_2 s_1 + \rho c^2 D_1 s_1 - \frac{\rho y}{z^2} K D_2 s_1 = 0. \tag{2.73}$$

Nous avons déjà montré que la vitesse du son pour le modèle de Kapila est donnée par

$$\rho c^2 = \frac{1}{z\tau_1 + (1-z)\tau_2},$$

où  $\tau_k = \frac{1}{\rho_k c_k^2}$ . De plus, d'après la définition (2.6) du terme de Kapila  $K$  nous avons

$$z - K = z - z(1 - z) \frac{\tau_2 - \tau_1}{z\tau_1 + (1 - z)\tau_2} = \frac{z\tau_1}{z\tau_1 + (1 - z)\tau_2} = z\tau_1 \rho c^2.$$

Ainsi, la relation (2.65b) devient

$$\begin{aligned} \rho s_\rho + \rho c^2 s_p + K s_z &= \rho c^2 \left( \frac{\rho y}{z^2} z \tau_1 D_2 s_1 + D_1 s_1 \right) \\ &= \rho c^2 \left( \frac{1}{c_1^2} D_2 s_1 + D_1 s_1 \right), \end{aligned}$$

car  $\frac{\rho y}{z} = \rho_1$  d'après la définition de la fraction massique (2.43). Sachant que la fonction  $s_1$  vérifie la relation (2.71), nous avons bien

$$D_1 s_1(p, \rho_1) = -\frac{1}{c_1^2} D_2 s_1(p, \rho_1).$$

Nous avons donc bien démontré que l'entropie phasique vérifie l'équation (2.65b), et donc qu'elle est bien une entropie du système de Kapila.  $\square$

Après avoir vérifié que les entropies phasiques sont bien des entropies du système de Kapila, nous en déduisons donc directement le corollaire suivant.

### Corollaire 1

*Les entropies de mélange définies par*

$$s = \sum_{k=1}^2 f_k(y_k) s_k,$$

*sont des entropies pour le système diphasique de Kapila. En particulier, nous pouvons définir l'entropie de mélange*

$$s = y s_1 + (1 - y) s_2.$$

### Remarque 6

Notons que dans le cas d'un mélange de deux gaz raides, les entropies phasiques s'expriment

$$s_k(p, \rho_k) = s \left( \frac{p + \pi_k}{\rho_k^{\gamma_k}} \right) \quad k = 1, 2. \quad (2.74)$$

## 2.4.4 Structure du problème de Riemann

### 2.4.4.1 Problème de Riemann

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème unidimensionnel

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (2.75)$$

avec la condition initiale suivante

$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.76)$$

La donnée initiale est constituée de deux états constants séparés par une discontinuité en  $x = 0$ .

Le système (2.75)-(2.76) est appelé problème de Riemann [Tor97, Smo83]. Cette notion est très importante dans la mesure où la résolution numérique du système considéré repose sur une

solution exacte ou approchée du problème de Riemann. Le problème de Riemann est invariant par des transformations du type  $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$  avec  $\lambda > 0$ . La solution du problème de Riemann ne dépend donc que du rapport  $x/t$ . On dit qu'elle possède un caractère auto-semblable. Pour un système de lois de conservation hyperbolique, la structure générale de la solution du problème de Riemann se présente sous la forme d'une succession d'états constants  $\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{U}_d$  séparés par une onde émanant de l'origine.

Dans le cas des systèmes diphasiques étudiés ici, la solution se décompose en quatre régions dans l'espace  $(x, t)$ . Les états  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_g^*$ , ainsi que les états  $\mathbf{U}_d$  et  $\mathbf{U}_d^*$ , sont séparés par une onde non linéaire (choc ou détente). *A contrario*, les états  $\mathbf{U}_g^*$  et  $\mathbf{U}_d^*$  sont séparés par une onde linéairement dégénérée (discontinuité de contact).

Dans le cas d'un mélange de deux gaz raides, la résolution du problème de Riemann peut être détaillée. Pour le système diphasique à cinq équations réduit, cela est effectué dans la thèse de Périgaud [Pér03], tandis que Franquet et al. [Fra06, PFSLM07] présentent la résolution pour le modèle diphasique de Kapila. Dans le chapitre suivant, nous donnerons un solveur de Riemann approché pour la résolution numérique des systèmes diphasiques.

Pour définir la solution exacte d'un problème, la notion d'invariants de Riemann est utilisée. Par souci d'exhaustivité, nous rappelons dans la suite la forme de ces invariants de Riemann pour les systèmes diphasiques à cinq équations.

#### 2.4.4.2 Invariants de Riemann

Les invariants de Riemann, notés  $\Phi$ , sont définis par la relation

$$\nabla_{\mathbf{w}} \Phi \cdot \mathbf{r}_j = 0, \quad (2.77)$$

où  $\mathbf{r}_j$  sont les vecteurs propres à droite du système diphasique à 5 équations détaillés dans la section 2.4.2.

#### Modèle à cinq équations réduit

Pour le modèle à cinq équations réduit, le calcul des invariants de Riemann est détaillé dans [Pér03]. Les invariants associés à la valeur propre  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$  sont

$$\Phi_{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}, p\}, \quad (2.78)$$

tandis que ceux associés aux valeurs propres  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \pm c$ , sont définis par (dans le cadre d'un mélange de gaz raides)

$$\Phi_{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \pm c} = \left\{ z, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \mp \frac{2c}{\gamma(z) - 1}, s_1, s_2 \right\}, \quad (2.79)$$

où  $s_k = \frac{p + \pi(z)}{\rho_k^{\gamma(z)}}$  est une entropie pour la phase  $k$  et  $c$  la vitesse du son du modèle à cinq équations réduit (2.56).

#### Modèle de Kapila

Muronne et Guillard [MG05] détaillent le calcul des invariants de Riemann pour le modèle de Kapila. Les invariants de Riemann associés à la valeur propre  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$  sont

$$\Phi_{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}, p\}. \quad (2.80)$$

Les invariants de Riemann associés aux valeurs propres  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \pm c$ , sont définis par

$$\Phi_{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \pm c} = \left\{ z, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \mp \int_p \frac{dp}{\rho c}, s_1, s_2 \right\}. \quad (2.81)$$

où  $s_k = \frac{p + \pi_k}{\rho_k^{\gamma_k}}$  est l'entropie phasique de la phase  $k$ . Dans le cas du modèle de Kapila, la vitesse du son  $c$  est la vitesse du son donnée par (2.58).

### 2.4.5 Domaines de convexité

Dans la partie numérique nous utiliserons des schémas de type Godunov. Les solutions de ces schémas peuvent s'écrire comme une combinaison convexe entre les états intermédiaires des problèmes de Riemann. C'est pourquoi nous cherchons à déterminer les ensembles convexes contenus dans le domaine d'hyperbolicité de chaque système.

Pour les modèles à cinq équations considérés, le domaine d'hyperbolicité est donné par

$$\mathcal{D}^E = \{(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^T \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, c^2 > 0\},$$

où la vitesse du son  $c$  est donnée par (2.56) dans le cas du modèle à cinq équations réduit, et par (2.58) pour le modèle diphasique de Kapila. Rappelons que  $y$  et  $z$  sont respectivement les fractions massiques et volumiques du fluide 1.

Pour simplifier les calculs, nous allons utiliser les variables lagrangiennes  $\vartheta = \frac{1}{\rho}$ ,  $y$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $E$  et  $z$ . Soit

$$\mathcal{D}^L = \{(\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)^T \in \mathbb{R}^6 / \vartheta > 0, c^2 > 0\},$$

le domaine d'hyperbolicité du système à cinq équations écrit en variables lagrangiennes.

Nous allons démontrer que la transformation Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{D}^E &\rightarrow \mathcal{D}^L \\ \mathbf{U} = (\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^T &\mapsto \mathbf{V} = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)^T, \end{aligned}$$

conserve les ensembles convexes.

#### Proposition 5

Soit  $\mathcal{A}^E \subset \mathcal{D}^E$  un ensemble d'états fluides pour le système diphasique eulérien. Cet ensemble est convexe si et seulement si son image par la transformation Euler-Lagrange  $\mathcal{A}^L = \mathcal{L}(\mathcal{A}^E) \subset \mathcal{D}^L$  l'est aussi.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{U}_a = (\rho_a, \rho_a y_a, \rho_a \mathbf{u}_a, \rho_a E_a, z_a)^T$  et  $\mathbf{U}_b = (\rho_b, \rho_b y_b, \rho_b \mathbf{u}_b, \rho_b E_b, z_b)^T$  deux états fluides inclus dans  $\mathcal{A}^E$ . On suppose que l'ensemble  $\mathcal{A}^E$  est convexe. Ainsi, pour tout nombres positifs  $x$  et  $y$  tels que  $x + y = 1$ , la combinaison convexe  $\mathbf{U} = x\mathbf{U}_a + y\mathbf{U}_b$  est aussi dans le domaine  $\mathcal{A}^E$ . Montrons que son image par la transformation Euler-Lagrange  $\mathcal{A}^L = \mathcal{L}(\mathcal{A}^E)$  est aussi convexe.

Nous avons

$$\rho = x\rho_a + y\rho_b,$$

et donc

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{x\rho_a + y\rho_b} = \frac{x}{x\rho_a + y\rho_b} + \frac{y}{x\rho_a + y\rho_b}, \\ &= \frac{x\rho_a}{x\rho_a + y\rho_b} \vartheta_a + \frac{y\rho_b}{x\rho_a + y\rho_b} \vartheta_b, \\ &= \lambda \vartheta_a + \mu \vartheta_b. \end{aligned}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux nombres positifs dont la somme est égale à 1.

Soit  $\phi \in \{y, \mathbf{u}, E, \vartheta z\}$ . Par hypothèse

$$\rho\phi = x\rho_a\phi_a + y\rho_b\phi_b,$$

et nous avons alors

$$\phi = \lambda\phi_a + \mu\phi_b,$$

avec  $\lambda = \frac{x\rho_a}{\rho}$  et  $\mu = \frac{y\rho_b}{\rho}$ .

Ainsi,  $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{U}) = \lambda\mathcal{L}(\mathbf{U}_a) + \mu\mathcal{L}(\mathbf{U}_b)$  avec  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  et  $\lambda + \mu = 1$ . L'ensemble  $\mathcal{A}^L$  est donc bien convexe.

La réciproque se démontre de manière analogue.  $\square$

En plus de la contrainte d'hyperbolicité du système, nous souhaitons aussi rajouter des contraintes physiques. En effet, les fractions volumiques et massiques doivent être comprises entre 0 et 1 et l'énergie interne doit être supérieure à l'énergie interne de référence  $q$ . Nous définissons alors les domaines des solutions physiquement admissibles écrits en variables eulériennes

$$\mathcal{A}^E = \{(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^T \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, y \in (0, 1), \varepsilon > q, z \in (0, 1), c^2 > 0\},$$

et en variables lagrangiennes

$$\mathcal{A}^L = \{(\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)^T \in \mathbb{R}^6 / \vartheta > 0, y \in (0, 1), \varepsilon > q, z \in (0, 1), c^2 > 0\}.$$

Dans la suite, nous allons seulement considérer la convexité du domaine des solutions physiquement admissibles écrit en variables lagrangiennes  $\mathcal{A}^L$ . La convexité pour les variables eulériennes est déduite de la proposition 5. Pour démontrer la convexité de ces ensembles dans le cas des modèles diphasiques à cinq équations réduit et de Kapila, nous considérons deux solutions admissibles  $\mathbf{V}_a = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)_a^T$  et  $\mathbf{V}_b = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)_b^T$ . Nous souhaitons montrer que pour tous nombres positifs  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ , la combinaison convexe  $\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}_a + \mu\mathbf{V}_b$  est aussi dans le domaine des solutions physiquement admissibles  $\mathcal{A}^L$ .

Dans la suite, nous nous limitons à un mélange de deux gaz raides. Rappelons que la loi d'état pour un gaz raide (2.32) est de la forme  $p = (\gamma_k - 1)\rho_k(\varepsilon_k - q_k) - \gamma_k\pi_k$ . Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les notations suivantes. Pour chaque fluide  $k = 1$  ou 2, on note

$$\xi_k = \frac{1}{\gamma_k - 1} \quad \text{et} \quad \omega_k = \frac{\gamma_k\pi_k}{\gamma_k - 1}, \quad (2.82)$$

où  $\xi_k$  est l'inverse du coefficient de Grüneisen. En utilisant la définition des paramètres de mélange (2.41), nous introduisons aussi les notations

$$\xi(z) = \frac{1}{\gamma(z) - 1} = z\xi_1 + (1 - z)\xi_2 \quad \text{et} \quad \omega(z) = \frac{\gamma(z)\pi(z)}{\gamma(z) - 1} = z\omega_1 + (1 - z)\omega_2. \quad (2.83)$$

Avec ces notations, la pression de mélange (2.42) s'écrit

$$\vartheta\xi(z)p = \varepsilon - q(y) - \vartheta\omega(z),$$

où l'on rappelle que l'énergie interne de référence est définie par  $q(y) = yq_1 + (1 - y)q_2$ .

Nous pouvons alors démontrer le lemme suivant qui sera utile dans la suite.

**Lemme 1**

Pour un mélange de gaz raides, nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \vartheta\xi(z) &= \lambda\vartheta_a\xi(z_a) + \mu\vartheta_b\xi(z_b), \\
 \vartheta\omega(z) &= \lambda\vartheta_a\omega(z_a) + \mu\vartheta_b\omega(z_b), \\
 q(y) &= \lambda q(y_a) + \mu q(y_b).
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

*Démonstration.* Pour le terme  $\vartheta\xi(z)$ , nous utilisons la définition du paramètre de mélange  $\xi(z)$  (2.83) et le fait que l'état fluide  $\mathbf{V}$  est la combinaison convexe entre les états  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \vartheta\xi(z) &= \vartheta z\xi_1 + \vartheta(1-z)\xi_2 = (\lambda(\vartheta z)_a + \mu(\vartheta z)_b)\xi_1 + (\lambda(\vartheta_a - (\vartheta z)_a) + \mu(\vartheta_b - (\vartheta z)_b))\xi_2 \\
 &= \lambda\vartheta_a(z_a\xi_1 + (1-z_a)\xi_2) + \mu\vartheta_b(z_b\xi_1 + (1-z_b)\xi_2) \\
 &= \lambda\vartheta_a\xi(z_a) + \mu\vartheta_b\xi(z_b).
 \end{aligned}$$

La relation sur le terme  $\vartheta\omega(z)$  se démontre de la même façon. Pour l'énergie interne de référence définie par (2.41), nous avons

$$\begin{aligned}
 q(y) &= yq_1 + (1-y)q_2 = (\lambda y_a + \mu y_b)q_1 + (\lambda(1-y_a) + \mu(1-y_b))q_2 \\
 &= \lambda(y_a q_1 + (1-y_a)q_2) + \mu(y_b q_1 + (1-y_b)q_2) \\
 &= \lambda q(y_a) + \mu q(y_b). \quad \square
 \end{aligned}$$

Dans la suite, pour alléger les notations nous noterons  $\xi_a = \xi(z_a)$  et  $\xi_b = \xi(z_b)$  les paramètres de mélange pour les états  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$ . Nous utiliserons les mêmes notations pour les autres paramètres de mélange  $\omega$  et  $q$  ainsi que pour la pression.

Nous allons maintenant déterminer les domaines de convexité pour les deux modèles diphasiques considérés.

### 2.4.5.1 Modèle à cinq équations réduit

Dans le cas d'un mélange de deux gaz raides, rappelons que le carré de la vitesse du son pour le modèle à cinq équations réduit (2.57) est donné par

$$c^2 = \gamma(z) \frac{p + \pi(z)}{\rho}.$$

Dans ce cas, la condition  $c^2 > 0$  garantissant l'hyperbolicité du système est équivalente à  $p + \pi(z) > 0$  et  $\rho > 0$ . Si la pression de référence du fluide est non nulle, on peut avoir des zones où la pression est négative mais la vitesse du son reste bien définie.

**Proposition 6**

Si on considère un mélange de deux gaz raides vérifiant

$$(\gamma_2 - \gamma_1)(\pi_2 - \pi_1) \geq 0, \tag{2.85}$$

les ensembles

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\pi^L &= \{(\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z) \in \mathbb{R}^6 / \vartheta > 0, y \in (0, 1), \varepsilon > q, z \in (0, 1), p + \pi(z) > 0\}, \\
 \mathcal{A}_\pi^E &= \{(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z) \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, y \in (0, 1), \varepsilon > q, z \in (0, 1), p + \pi(z) > 0\},
 \end{aligned}$$

sont convexes.

*Démonstration.* Comme expliqué précédemment, nous allons seulement considérer la convexité du domaine  $\mathcal{A}_\pi^L$ . La convexité pour les variables eulériennes est déduite de la proposition 5. Soient  $\mathbf{V}_a = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)_a^T$  et  $\mathbf{V}_b = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)_b^T$  deux solutions admissibles. On veut montrer que pour tous nombres positifs  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ , la combinaison convexe  $\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}_a + \mu\mathbf{V}_b$  est aussi dans le domaine  $\mathcal{A}_\pi^L$ .

**Positivité du volume spécifique.** Par définition, nous avons

$$\vartheta = \lambda\vartheta_a + \mu\vartheta_b.$$

Puisque  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$  sont des solutions admissibles, leurs volumes spécifiques sont positifs. Ainsi, le volume spécifique de la combinaison convexe  $\vartheta$  est aussi positif.

**Encadrement sur la fraction massique.** Par définition, nous avons la fraction massique  $y = \lambda y_a + \mu y_b$  qui est une combinaison convexe de  $y_a$  et  $y_b$ . Ces deux valeurs étant comprises entre 0 et 1, la fraction massique  $y$  l'est aussi.

**Positivité de l'énergie interne  $\varepsilon - q$ .** On peut exprimer l'énergie totale de  $\mathbf{V}$  de deux manières,

$$E = \lambda E_a + \mu E_b = \lambda \varepsilon_a + \mu \varepsilon_b + \frac{1}{2} \left( \lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2 \right),$$

et

$$E = \varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2,$$

où  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}_a + \mu \mathbf{u}_b$ . Ainsi, l'énergie interne est donnée par

$$\varepsilon = \lambda \varepsilon_a + \mu \varepsilon_b + \frac{1}{2} \left( \lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2 - |\mathbf{u}|^2 \right).$$

Notons  $L$ , le terme en vitesse. Nous avons alors

$$\begin{aligned} L &= \lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2 - |\lambda \mathbf{u}_a + \mu \mathbf{u}_b|^2 \\ &= \lambda \mu |\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, nous avons

$$\varepsilon - q = \lambda(\varepsilon_a - q_a) + \mu(\varepsilon_b - q_b) + \frac{L}{2}.$$

Le terme en vitesse est positif, ainsi que les énergies internes  $\varepsilon_a - q_a$  et  $\varepsilon_b - q_b$ . Nous avons donc démontré que l'énergie interne de la combinaison convexe est bien supérieure à l'énergie interne de référence  $q$ .

**Encadrement sur la fraction volumique.** Par définition, on a  $\vartheta z = \lambda \vartheta_a z_a + \mu \vartheta_b z_b$ , d'où

$$z = \lambda \frac{\vartheta_a}{\vartheta} z_a + \mu \frac{\vartheta_b}{\vartheta} z_b.$$

On a déjà montré que  $\frac{\vartheta_a}{\vartheta} > 0$  et  $\frac{\vartheta_b}{\vartheta} > 0$ . De plus,  $\lambda \frac{\vartheta_a}{\vartheta} + \mu \frac{\vartheta_b}{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\vartheta} = 1$ . Donc  $z$  est une combinaison convexe de  $z_a$  et  $z_b$ . Comme ces deux valeurs sont comprises entre 0 et 1,  $z$  l'est aussi.

**Positivité de  $p + \pi(z)$ .** Dans un premier temps, nous allons exprimer  $\pi(z)$  en fonction de  $\pi_a$  et  $\pi_b$ . En utilisant les notations définies précédemment, on remarque que  $\pi(z) = \frac{\omega(z)}{1+\xi(z)}$ . En utilisant le lemme 1, il vient

$$\begin{aligned}\pi(z) &= \frac{\omega(z)}{1+\xi(z)} = \frac{\vartheta\omega(z)}{\vartheta(1+\xi(z))} \\ &= \frac{\lambda\vartheta_a\omega_a + \mu\vartheta_b\omega_b}{\vartheta(1+\xi(z))} \\ &= x\pi_a + y\pi_b.\end{aligned}\tag{2.86}$$

où  $x = \frac{\lambda\vartheta_a(1+\xi_a)}{\vartheta(1+\xi)}$  et  $y = \frac{\mu\vartheta_b(1+\xi_b)}{\vartheta(1+\xi)} = 1 - x$ .

Nous considérons ici un mélange constitué de deux gaz raides. La pression du mélange (2.42) est alors donnée par  $p = (\gamma(z) - 1)\rho(\varepsilon - q(y)) - \gamma(z)\pi(z)$ . Nous avons donc la relation

$$\varepsilon = q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1}.$$

De la même manière que pour la positivité de l'énergie interne, on va exprimer l'énergie totale de deux façons :

$$\begin{aligned}E &= \lambda E_a + \mu E_b = \lambda\varepsilon_a + \mu\varepsilon_b + \frac{1}{2} \left( \lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2 \right) \\ &= \lambda \left( q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1} \right)_a + \mu \left( q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1} \right)_b + \frac{1}{2} \left( \lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2 \right),\end{aligned}$$

et

$$E = q(y) + \vartheta \frac{p + \gamma(z)\pi(z)}{\gamma(z) - 1} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2.$$

En utilisant les notations définies précédemment, on trouve

$$\vartheta\xi p = \lambda\vartheta_a\xi_a p_a + \mu\vartheta_b\xi_b p_b + \lambda\vartheta_a\omega_a + \mu\vartheta_b\omega_b - \vartheta\omega + \lambda q_a + \mu q_b - q + \frac{1}{2}L.$$

D'après le lemme 1, les termes  $\lambda\vartheta_a\omega_a + \mu\vartheta_b\omega_b - \vartheta\omega$  et  $\lambda q_a + \mu q_b - q$  sont nuls. On a donc une expression pour la pression

$$p = \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} p_a + \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} p_b + \frac{L}{2\vartheta\xi}.\tag{2.87}$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.86) nous obtenons

$$\begin{aligned}p + \pi(z) &= \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} p_a + \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} p_b + \frac{L}{2\vartheta\xi} + \pi(z) \\ &= \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} (p_a + \pi_a) + \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} (p_b + \pi_b) + \frac{L}{2\vartheta\xi} + \left( x - \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} \right) \pi_a + \left( y - \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} \right) \pi_b.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}x - \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} &= \lambda \frac{\vartheta_a}{\vartheta} \left( \frac{1 + \xi_a}{1 + \xi} - \frac{\xi_a}{\xi} \right), \\ &= \lambda \mu \frac{\vartheta_a\vartheta_b}{\vartheta^2\xi(1 + \xi)} (\xi_b - \xi_a).\end{aligned}$$

En remarquant que  $y - \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} = -(x - \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi})$ , on trouve finalement :

$$p + \pi(z) = \lambda \frac{\vartheta_a\xi_a}{\vartheta\xi} (p_a + \pi_a) + \mu \frac{\vartheta_b\xi_b}{\vartheta\xi} (p_b + \pi_b) + \frac{L}{2\vartheta\xi} + \lambda \mu \frac{\vartheta_a\vartheta_b}{\vartheta^2\xi(1 + \xi)} (\xi_b - \xi_a) (\pi_a - \pi_b).$$

Nous savons que les coefficients  $\gamma_k$  des deux fluides sont supérieurs à 1, ce qui implique  $\xi_k > 0$ . Comme les fractions volumiques de  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$  sont positives, on a  $\xi_{a,b} > 0$ . Ainsi  $\vartheta\xi$  est positif. Par hypothèse,  $p_a + \pi_a$  et  $p_b + \pi_b$  sont positifs. Ainsi, les deux premiers termes sont positifs. On a déjà démontré que le terme de vitesse était positif. Ainsi, il ne reste plus qu'à étudier le signe de  $(\xi_b - \xi_a)(\pi_a - \pi_b)$ .

— Tout d'abord, nous avons

$$\xi_{a,b} = z_{a,b}\xi_1 + (1 - z_{a,b})\xi_2.$$

Alors, le terme  $\xi_b - \xi_a$  devient

$$\begin{aligned}\xi_b - \xi_a &= (z_b - z_a)(\xi_1 - \xi_2) \\ &= \frac{z_b - z_a}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}(\gamma_2 - \gamma_1).\end{aligned}$$

— Le deuxième terme peut se réécrire :

$$\pi_a - \pi_b = \frac{\omega_a - \omega_b + \xi_b\omega_a - \xi_a\omega_b}{(1 + \xi_a)(1 + \xi_b)},$$

où

$$\begin{aligned}\omega_a - \omega_b &= (z_b - z_a)(\omega_2 - \omega_1), \\ \xi_b\omega_a - \xi_a\omega_b &= (z_b - z_a)(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1).\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\pi_a - \pi_b &= \frac{z_b - z_a}{(1 + \xi_a)(1 + \xi_b)} (\omega_2(1 + \xi_1) - \omega_1(1 + \xi_2)) \\ &= \frac{(z_b - z_a)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)}{(1 + \xi_a)(1 + \xi_b)} (\pi_2 - \pi_1).\end{aligned}$$

On a donc montré que le terme  $(\xi_b - \xi_a)(\pi_a - \pi_b)$  est du même signe que  $(\gamma_2 - \gamma_1)(\pi_2 - \pi_1)$  qui est positif par hypothèse. Le terme  $p + \pi(z)$  est donc bien positif, et nous avons donc démontré que l'ensemble  $\mathcal{A}_\pi^L$  est convexe si la condition (2.85) est vérifiée.  $\square$

### Remarque 7

Dans sa thèse, Jung [Jun13] considère le système diphasique suivant

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_1} \mathbf{F} + \partial_{x_2} \mathbf{G} = 0$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E, \rho z)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, (\rho E + p)u_1, \rho u_1 z)^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho u_2, \rho u_1 u_2, \rho u_2^2 + p, (\rho E + p)u_2, \rho u_2 z)^T.\end{aligned}$$

Dans le cas d'un mélange de deux gaz raides avec  $\pi_1 \neq \pi_2$ , il démontre que si l'interpolation des paramètres de la loi d'état  $z \mapsto \pi(z)$  est continue en 0 et 1 alors l'ensemble

$$\{(\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E, \rho z) \in \mathbb{R}^5 / \rho > 0, z \in [0, 1], p(\rho, \varepsilon, z) + \pi(z) > 0\}$$

n'est pas convexe.

Pour le modèle à cinq équations réduit (2.9), nous venons de démontrer que l'ensemble

$$\{(\rho, \rho y, \rho u_1, \rho u_2, \rho E, z) \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, y > 0, \varepsilon > q, z \in (0, 1), p + \pi(z) > 0\}$$

est convexe sous condition pour un mélange de deux gaz raides. Il est donc préférable de prendre la fraction volumique  $z$  comme dernière inconnue et non  $\rho z$ .

### 2.4.5.2 Modèle de Kapila

Pour le modèle diphasique de Kapila, la vitesse du son est définie par la formule (2.58) :

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{z_k}{\rho_k c_k^2}. \quad (2.88)$$

Ainsi pour assurer l'hyperbolicité du système, une condition suffisante est d'imposer  $\rho_k c_k^2 > 0$  pour chaque fluide. Dans le cas d'un gaz raide cela se traduit par  $p + \pi_k$  positif. Ainsi, pour un mélange de gaz raides, nous souhaitons imposer que la pression plus le minimum des pressions de référence de chaque fluide soit positif, *i.e.*  $p + \min(\pi_1, \pi_2) > 0$ .

#### Proposition 7

Soit  $p_0$  une constante positive. Pour un mélange de deux gaz raides, les ensembles de solutions admissibles

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_0}^L &= \{(\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z) \in \mathbb{R}^6 / \vartheta > 0, y > 0, \varepsilon > q, z \in (0, 1), p + p_0 > 0\}, \\ \mathcal{A}_{p_0}^E &= \{(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z) \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, y > 0, \varepsilon > q, z \in (0, 1), p + p_0 > 0\}, \end{aligned}$$

sont convexes.

*Démonstration.* La positivité de la densité et de l'énergie interne ainsi que les encadrements sur les fractions volumiques et massiques se démontrent de façon analogue au cas du système à cinq équations réduit.

**Positivité de la pression.** Dans le cas du modèle de Kapila, la pression du mélange (2.42) est aussi donnée par  $p = (\gamma(z) - 1)\rho(\varepsilon - q(y)) - \gamma(z)\pi(z)$ . Nous avons donc encore la relation

$$\varepsilon = q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1}.$$

De la même manière que pour le système à cinq équations réduit, nous allons exprimer l'énergie totale de deux façons :

$$\begin{aligned} E &= \lambda E_a + \mu E_b = \lambda \varepsilon_a + \mu \varepsilon_b + \frac{1}{2} (\lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2) \\ &= \lambda \left( q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1} \right)_a + \mu \left( q + \vartheta \frac{p + \gamma\pi}{\gamma - 1} \right)_b + \frac{1}{2} (\lambda |\mathbf{u}_a|^2 + \mu |\mathbf{u}_b|^2), \end{aligned}$$

et

$$E = q(y) + \vartheta \frac{p + \gamma(z)\pi(z)}{\gamma(z) - 1} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2.$$

En utilisant les notations définies précédemment et le lemme 1, on trouve

$$p + p_0 = \lambda \frac{\vartheta_a \xi_a}{\vartheta \xi} (p_a + p_0) + \mu \frac{\vartheta_b \xi_b}{\vartheta \xi} (p_b + p_0) + \frac{L}{2\vartheta \xi}.$$

On sait que les coefficients  $\gamma_k$  des deux fluides sont supérieurs à 1, ce qui implique  $\xi_k > 0$ . Comme les fractions volumiques de  $\mathbf{V}_a$  et  $\mathbf{V}_b$  sont positives, on a  $\xi_{a,b} > 0$ . Ainsi  $\vartheta \xi$  est positif. Par hypothèse,  $p_a + p_0$  et  $p_b + p_0$  sont positifs. Ainsi la pression de la combinaison convexe plus une constante positive  $p_0$  est une somme de termes positifs.

On a donc bien démontré que l'ensemble  $\mathcal{A}_{p_0}$  est convexe.  $\square$

Pour assurer que la solution numérique du modèle de Kapila reste dans le domaine d'hyperbolicité nous allons considérer les ensembles convexes  $\mathcal{A}_{p_0}^L$  et  $\mathcal{A}_{p_0}^E$  où  $p_0$  est égal à la plus faible pression de référence des deux phases  $\min(\pi_1, \pi_2)$ , c'est-à-dire  $p_0 = \min(\pi_1, \pi_2)$ . Ce choix est très restrictif dans le cas d'un mélange entre un gaz parfait, typiquement un gaz comme l'air, et un gaz raide, l'eau liquide par exemple. En effet, cela impose que la pression doit rester positive dans tout le domaine, même dans les zones où il n'y a que du liquide. On peut donc se demander s'il n'existe pas un domaine convexe plus grand dans le domaine d'hyperbolicité du modèle de Kapila.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différents modèles physiques à interfaces diffuses utilisés pour modéliser des écoulements diphasiques. Pour nos applications, nous avons retenu deux modèles à cinq équations : le modèle de Kapila (2.5) et le modèle à cinq équations réduit (2.9). Après avoir présenté les propriétés thermodynamiques d'une phase pure à l'aide de l'équation d'état de type gaz raide, nous avons détaillé la fermeture isobare de ces modèles diphasiques. Les propriétés mathématiques des deux modèles diphasiques retenus ont ensuite été étudiées et comparées. Finalement, nous avons déterminé les domaines de convexité pour chaque modèle diphasique.

Dans le chapitre suivant, la résolution numérique des systèmes diphasiques sera abordée.



# Chapitre 3

## Méthodes Lagrange-Transport pour les écoulements diphasiques

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Étape acoustique</b> . . . . .   | <b>43</b> |
| 3.1.1      | Étape acoustique pour le modèle à cinq équations réduit . . . . .                                       | 43        |
| 3.1.1.1    | Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité . . . . .                            | 46        |
| 3.1.1.2    | Stabilité du schéma explicite . . . . .   | 48        |
| 3.1.1.3    | Différentes versions implicites de l'étape acoustique . . . . .   | 48        |
| 3.1.1.4    | Passage à l'ordre 2 en espace . . . . .   | 55        |
| 3.1.1.5    | Extension au cas bidimensionnel . . . . .   | 56        |
| 3.1.2      | Étape acoustique pour le modèle de Kapila . . . . .   | 57        |
| 3.1.2.1    | Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité . . . . .                            | 59        |
| 3.1.2.2    | Version implicite de l'étape acoustique . . . . .   | 60        |
| <b>3.2</b> | <b>Étape de transport</b> . . . . .   | <b>63</b> |
| 3.2.1      | Schéma décentré . . . . .   | 64        |
| 3.2.2      | Antidiffusion sur la fraction volumique . . . . .   | 65        |
| 3.2.3      | Méthode de Glimm . . . . .  | 68        |
| <b>3.3</b> | <b>Propriétés du schéma global</b> . . . . .  | <b>69</b> |
| 3.3.1      | Caractère conservatif du schéma global . . . . .  | 69        |
| 3.3.2      | Préservation des discontinuités de contact . . . . .  | 71        |
| <b>3.4</b> | <b>Résultats numériques pour le modèle à cinq équations réduit</b> . . . . .                            | <b>74</b> |
| 3.4.1      | Comparaison des schémas implicites . . . . .  | 74        |
| 3.4.2      | Tube à choc diphasique . . . . .  | 77        |
| 3.4.3      | Interaction liquide-gaz 2D . . . . .  | 79        |
| <b>3.5</b> | <b>Résultats numériques pour le modèle de Kapila</b> . . . . .  | <b>85</b> |
| 3.5.1      | Tube à choc avec un mélange air-eau . . . . .   | 85        |
| 3.5.2      | Cavitation . . . . .  | 85        |
| <b>3.6</b> | <b>Comparaisons des modèles de Kapila et à cinq équations réduit sur des cas non mélangés</b> . . . . . | <b>87</b> |
| 3.6.1      | Interaction air-hélium . . . . .  | 88        |
| 3.6.2      | Interaction air-R22 . . . . .   | 89        |
| <b>3.7</b> | <b>Conclusion</b> . . . . .   | <b>89</b> |

---

---

Dans ce chapitre, nous allons détailler la résolution numérique des systèmes diphasiques présentés au chapitre précédent. Ce champ de recherche a fait l'objet d'un développement très important ces dernières années avec de nombreuses publications sur le sujet. Un panorama, non exhaustif, de ces travaux est présenté ci-dessous.

Le modèle à cinq équations réduit a été initialement proposé par [ACK00, ACK02] et de façon indépendante par [MSNA02]. Pour la résolution numérique du système, Allaire et al. [ACK02] proposent un schéma de Roe tandis qu'un schéma de type Godunov avec des flux de Rusanov est utilisé par Massoni et al. [MSNA02]. Par la suite, Périgaud et Saurel [PS05] ont étendu le modèle en ajoutant les termes de viscosité ainsi que la tension de surface. Kokh et Lagoutière [KL10] présentent un schéma numérique robuste en explicite pour le modèle à cinq équations réduit. Celui-ci est basé sur une approche *Lagrange Remap* décomposant la résolution en deux étapes. Une approche directe basée sur un solveur de Riemann positif et entropique est présentée dans [Lat13]. La formulation implicite de l'approche s'avère cependant peu robuste.

Pour le modèle de Kapila [KMB<sup>+</sup>01], la présence du terme non conservatif dans l'équation sur la fraction volumique pose des problèmes pour la construction d'un schéma numérique. Dans [MG05, DGGB14], l'équation non conservative sur  $z$  est réécrite en un terme conservatif moins un terme proportionnel à la divergence de la vitesse. Pour calculer les flux numériques, Murrone et Guillard [MG05] utilisent un schéma VFROE tandis que Daude et al. [DGGB14] se basent sur un solveur de type HLLC. Petitpas et al. [PFSLM07] utilisent une méthode Lagrange projection pour résoudre le système de Kapila. Eikelder et al. [EDKT17] utilisent une formulation explicite basée sur un splitting d'opérateurs Lagrange-transport permettant de séparer la partie acoustique de la partie transport. De leur côté, Kreeft et Koren [KK10] développent une nouvelle écriture du modèle de Kapila basée sur une équation d'énergie phasique à la place de l'équation d'évolution sur la fraction volumique et un schéma numérique de type Osher. Enfin, Saurel, Petitpas et Berry [SPB09] proposent quant à eux un modèle à 6 équations avec deux pressions plus une étape de relaxation en pression pour simuler numériquement le modèle de Kapila. Plusieurs travaux récents sont basés sur cette approche [SPD<sup>+</sup>17, LMNS13, CBS17] ou des variantes [PS14]. De multiples extensions au modèle de Kapila ont été développées durant ces dernières années comme par exemple pour résoudre la transition de phase [SPA08] ou le problème de cavitation [PMS<sup>+</sup>09].

Dans les applications visées dans cette thèse, les deux phases fluides possèdent des propriétés physiques très différentes. En effet, la densité du métal fondu peut être 2000 à 10000 fois plus grande que la densité du gaz environnant. Ceci pose des problèmes de robustesse pour le schéma numérique. De plus, compte tenu des maillages employés pour capturer les couches limites, il est nécessaire d'utiliser des méthodes implicites permettant de prendre des grands pas de temps. C'est pourquoi dans ce chapitre nous présentons un schéma numérique implicite et robuste pour le modèle à cinq équations réduit et celui de Kapila basé sur un splitting d'opérateurs inspiré de [CNPT10, CGK16, CGK17]. L'idée est de décomposer les équations en une étape acoustique et une étape liée au transport. Dans un premier temps nous présentons le splitting d'opérateurs, puis le schéma numérique pour l'étape acoustique du modèle à cinq équations réduit. La partie acoustique du modèle de Kapila est aussi étudiée. Une formulation implicite de cette étape est développée pour permettre de prendre des grands pas de temps indépendants de la vitesse du son dans le fluide. Dans un deuxième temps, nous nous focalisons sur l'étape de transport dont la résolution numérique ne dépendra pas du modèle diphasique choisi. Ensuite nous présenterons les différentes propriétés du schéma global. Enfin, des résultats numériques pour les différents modèles diphasiques seront présentés. Une comparaison des deux modèles sur des cas tests initialement non mélangés sera aussi effectuée. Notons que seule la partie hyperbolique des équations sera traitée ici. La discrétisation des termes dissipatifs sera abordée dans le chapitre 4.

Avant de détailler le schéma numérique, nous allons procéder à une réécriture du système diphasique (2.12) sans les termes dissipatifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (\rho_1 z_1) + \nabla \cdot (\rho_1 z_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho_2 z_2) + \nabla \cdot (\rho_2 z_2 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = 0. \\ \partial_t z_1 + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla z_1 = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Nous pouvons noter que l'équation d'évolution de la quantité  $\rho_2 z_2$  dans (3.1) peut être remplacée par l'équation d'évolution sur la densité de mélange  $\rho$  qui s'écrit  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ . Cette forme du système sera utilisée dans l'étape acoustique du splitting, où nous combinerons cette équation sur la densité de mélange avec les autres équations. De plus, rappelons que la fraction volumique du fluide 1 est notée  $z = z_1$  tandis que sa fraction massique est donnée par  $y = y_1 = \frac{\rho_1 z}{\rho}$ . Cela nous permet de réécrire l'équation d'évolution de  $\rho_1 z_1$ . Ainsi, le système (3.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \nabla \cdot (\rho y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t z + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $\Xi = 0$  pour le modèle à cinq équations réduit et  $\Xi = K$  pour le modèle de Kapila.

De la même manière que dans [GR96, CGK16, KL10], l'idée est de séparer les phénomènes acoustiques et ceux liés au transport en fonction de leur propre vitesse de propagation. Le système diphasique à 5 équations (3.2) peut se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \rho y \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho y) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \rho E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho E) = 0, \\ \partial_t z + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ce système est découpé en deux sous-systèmes. Le premier sous-système, appelé système acoustique dans la suite, ne tient compte que de la propagation des ondes acoustiques. Il est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \rho y \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \rho E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t z + \Xi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Ce système est hyperbolique et les vitesses de propagation associées sont 0 et  $\pm c$ , où  $c$  correspond à la vitesse du son du modèle à cinq équations réduit (2.56) ou celle de Kapila (2.58) selon la valeur de  $\Xi$ .

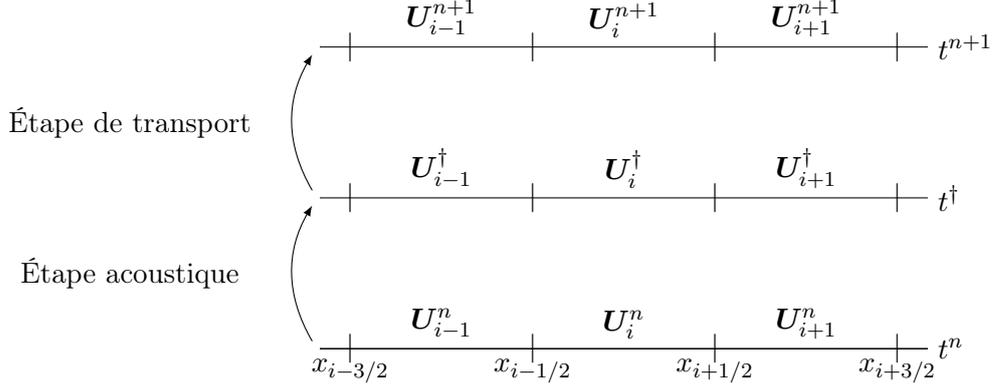


FIGURE 3.1 – Illustration de la procédure de splitting. L'étape acoustique revient à résoudre le système (3.4) de manière explicite ou implicite. Le système (3.5) est résolu explicitement dans la phase de transport.

Le second sous-système ne tient compte uniquement que de la propagation des ondes matérielles à travers le fluide. Ce système de transport s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho y) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho E) = 0, \\ \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

La vitesse de propagation de ce système est la vitesse matérielle du fluide  $\mathbf{u}$ .

Nous pouvons déjà remarquer que l'étape de transport ne dépendra pas du modèle diphasique choisi.

L'algorithme global de la méthode des pas fractionnaires ou de splitting pour un pas de temps entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  se décompose comme ceci (voir figure 3.1) :

**Étape 1 :** À partir de l'état  $(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^n$ , calculer une approximation de la solution du système acoustique (3.4)  $(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^\dagger$ .

**Étape 2 :** Trouver la solution du système diphasique  $(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^{n+1}$  en résolvant le système de transport (3.5) à partir de l'état initial  $(\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^\dagger$ .

Ce type d'algorithme a déjà été utilisé dans [FBC<sup>+</sup>11, KL10] dans une version explicite du modèle à cinq équations réduit. Chalons et al. [CGK16, CGK17] utilisent aussi une approche de splitting avec un traitement implicite de la première étape pour la dynamique des gaz et pour un système diphasique régi par les modèles homogénéisés HEM ou HRM [BK90]. Récemment, Eikelder et al. [EDKT17] ont développé un schéma numérique explicite pour le modèle de Kapila basé sur la même stratégie de splitting.

Les schémas numériques pour chaque étape sont décrits dans les sections suivantes. Dans un premier temps nous étudions la construction d'un solveur de Riemann approché pour la résolution numérique de l'étape acoustique pour le modèle à cinq équations réduit et celui de Kapila. Ensuite, nous présenterons les différents schémas numériques pour résoudre l'étape de transport en essayant de limiter la diffusion numérique de l'interface. Une présentation des outils numériques utilisés dans les sections suivantes est donnée en Annexe A.

## 3.1 Étape acoustique

### 3.1.1 Étape acoustique pour le modèle à cinq équations réduit

Par souci de clarté, la version unidimensionnelle du problème est détaillée dans un premier temps. L’extension au cas multidimensionnel est abordée dans la section 3.1.1.5. Tout d’abord, nous allons écrire le système non conservatif (3.4) sous une autre forme. Les dernières équations sont combinées avec l’équation d’évolution de la densité de mélange. Ensuite, nous divisons la première équation par le carré de la densité de mélange pour obtenir une équation sur le volume spécifique  $\vartheta = \frac{1}{\rho}$ . Finalement, le système acoustique pour le modèle à cinq équations réduit s’écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta - \vartheta \partial_x u & = 0, \\ \partial_t y & = 0, \\ \partial_t u + \vartheta \partial_x p & = 0, \\ \partial_t E + \vartheta \partial_x (pu) & = 0, \\ \partial_t (\vartheta z) - z \vartheta \partial_x u & = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Bien que ce ne soit pas cette forme qui nous intéresse en tant que telle, c’est celle-ci qui va nous permettre de contruire un schéma pour le système acoustique (3.4) et un schéma global conservatif pour le système à cinq équations réduit (3.3). Le système (3.6) peut se réécrire sous la forme plus compacte :

$$\partial_t \mathbf{V} + \vartheta \partial_x \mathbf{G} + \mathbf{P} \vartheta \partial_x \mathbf{B}(\mathbf{V}) = 0, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{V} = (\vartheta, y, u, E, \vartheta z)^T$ ,  $\mathbf{G} = (-u, 0, p, pu, 0)^T$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, 0, 0, u)^T$  et  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -z \end{pmatrix}$ .

Notons que ce système est très proche du système de la dynamique des gaz lagrangienne.

Ce système est écrit sous une forme non conservative, ce qui rend délicat la construction d’un schéma numérique adéquat. La définition des produits non conservatifs  $\vartheta \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{V})$  et  $\mathbf{P} \vartheta \partial_x \mathbf{B}(\mathbf{V})$  ne sera pas détaillée ici. Nous renvoyons à [DMFM95] pour les détails de la définition des produits non conservatifs.

Ce système est strictement hyperbolique et les cinq valeurs propres sont égales à  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (-C\vartheta, 0, 0, 0, C\vartheta)$ , où  $C = \rho c$  est la “vitesse” du son lagrangienne. Le premier et le cinquième champs caractéristiques sont vraiment non linéaires tandis que les champs associés aux valeurs propres  $\lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont linéairement dégénérés.

Des schémas numériques pour des systèmes hyperboliques non conservatifs appelés *path-conservative schemes* ont été introduit par Parés [Par06]. De tels schémas ont été étudié plus récemment par Abgrall et Karni [AK10] et par Chalons et Coquel [CC17] pour la dynamique des gaz lagrangienne. Une approche classique pour résoudre un système de lois de conservation hyperbolique repose sur l’utilisation de schéma de type Godunov [HLL83]. Plus précisément, nous utilisons ici la notion de solveur de Riemann simple [Gal00, Gal03, Bou04] : un solveur de Riemann simple  $\mathbf{W}$  est composé de  $(m+1)$  états constants  $(\mathbf{V}_k)_{k=1}^{m+1}$  séparés par  $m$  discontinuités (voir Annexe A).

Dans [Gal02], cette notion est utilisée pour construire des schémas de type Godunov pour des systèmes non conservatifs de la forme (3.7). La solution obtenue après un pas de temps est

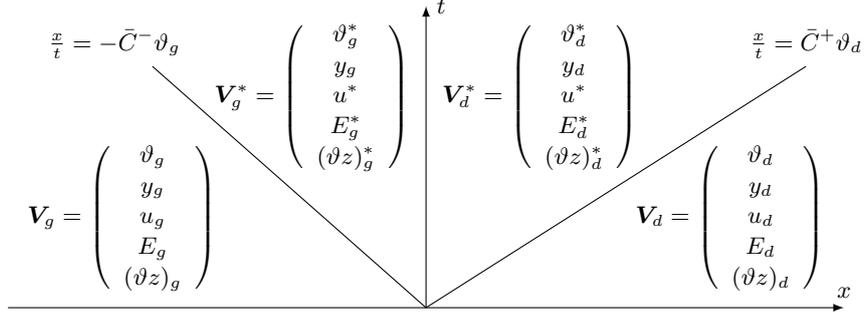


FIGURE 3.2 – Solvateur de Riemann pour le système (3.7).

donnée par :

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \mathbf{W} \left( \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_{i-1}^n, \mathbf{V}_i^n \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} \left( \frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n \right) dx \right). \quad (3.8)$$

Ici, nous présentons un schéma numérique pour le système non conservatif (3.7) basé sur les travaux de Gallice [Gal02]. Soit  $\mathbf{W}(x/t; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d)$ , une approximation du problème de Riemann défini par le système (3.7) à chaque interface entre l'état gauche  $\mathbf{V}_g$  et l'état droit  $\mathbf{V}_d$ . Cette fonction auto-similaire  $\mathbf{W}$  est constituée de quatre états constants (voir Fig. 3.2) séparés par des discontinuités se propageant à la vitesse  $-\bar{C}^- v_g$  et  $\bar{C}^+ v_d$ . Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{W}(x/t; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_g & \text{si } x/t \leq -\bar{C}^- v_g, \\ \mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \delta \mathbf{V}_g & \text{si } -\bar{C}^- v_g < x/t \leq 0, \\ \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \delta \mathbf{V}_d & \text{si } 0 < x/t \leq \bar{C}^+ v_d, \\ \mathbf{V}_d & \text{si } \bar{C}^+ v_d < x/t, \end{cases} \quad (3.9)$$

où de façon analogue au traitement de la dynamique des gaz [Gal03], nous prenons  $\delta \mathbf{V}_g = \phi_- \mathbf{R}_-$  et  $\delta \mathbf{V}_d = \phi_+ \mathbf{R}_+$  avec

$$\mathbf{R}_\pm = (-1, 0, \pm \bar{C}^\pm, p_{1-\alpha} \pm u_\alpha \bar{C}^\pm, -z^\pm)^T, \\ \phi_\pm = \frac{\Delta p \pm \bar{C}^\mp \Delta u}{\bar{C}^- \bar{C}^+ + (\bar{C}^\pm)^2}.$$

Nous avons utilisé ci-dessus les notations  $p_{1-\alpha} = (1 - \alpha)p_g + \alpha p_d$ ,  $u_\alpha = \alpha u_g + (1 - \alpha)u_d$ , où le coefficient  $\alpha$  sera défini plus tard. Nous définissons  $z^- = z_g$  et  $z^+ = z_d$ . De façon classique,  $\Delta p = p_d - p_g$  et  $\Delta u = u_d - u_g$ . Nous pouvons noter que les vitesses des états intermédiaires  $u_g^*$  et  $u_d^*$  sont égales. Néanmoins, les pressions des états intermédiaires  $p_g^* = p(\rho_g^*, \varepsilon_g^*)$  et  $p_d^* = p(\rho_d^*, \varepsilon_d^*)$  sont différentes. Le choix des quantités positives  $\bar{C}^-$  et  $\bar{C}^+$ , qui représentent les pentes du solvateur de Riemann sera détaillé dans la section 3.1.1.1. Le choix de ces pentes du solvateur de Riemann permettra d'assurer que les états intermédiaires conservent de bonnes propriétés de positivité et d'hyperbolicité.

Le solvateur de Riemann simple (3.9) que nous venons de définir induit un schéma de type Godunov. D'après la formule (3.8), nous avons

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ v_i^n \Delta t \mathbf{V}_{d,i-\frac{1}{2}}^* + \left( \Delta x - \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) v_i^n \Delta t \right) \mathbf{V}_i^n + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- v_i^n \Delta t \mathbf{V}_{g,i+\frac{1}{2}}^* \right), \quad (3.10)$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ \left( \mathbf{V}_i^n - \mathbf{V}_{d,i-\frac{1}{2}}^* \right) - \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- \left( \mathbf{V}_{g,i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{V}_i^n \right) \right).$$

En utilisant les définitions des états intermédiaires du solveur de Riemann (3.9), le schéma numérique (3.10) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n z_i^n \left( \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{B}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (3.11)$$

où le “flux” numérique  $\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{H}(\mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n)$  est défini ci-dessous. Le terme en  $\mathbf{B}_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  correspond à l'équation non conservative sur la fraction volumique. Le choix usuel du paramètre  $\alpha = \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}$  conduit à un flux numérique égal au flux continu évalué en un certain état intermédiaire. En effet, dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) &= (-\bar{u}, 0, \bar{p}, \bar{p}\bar{u}, 0)^T, \\ \mathbf{B}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) &= (0, 0, 0, 0, -\bar{u})^T, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où la vitesse et la pression à l'interface entre les états  $\mathbf{V}_g$  et  $\mathbf{V}_d$  sont données par

$$\bar{u} = \frac{\bar{C}^- u_g + \bar{C}^+ u_d - \Delta p}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{\bar{C}^+ p_g + \bar{C}^- p_d - \bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta u}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}. \quad (3.13)$$

Notons que la vitesse  $\bar{u}$  utilisée dans le flux est égale à la vitesse des états intermédiaires du solveur de Riemann  $u_g^* = u_d^*$ . *A contrario*, la pression  $\bar{p}$  n'est égale ni à  $p_g^*$  ni à  $p_d^*$ .

En développant le schéma numérique (3.11), nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ y_i^\dagger &= y_i^n, \\ u_i^\dagger &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ \vartheta_i^\dagger z_i^\dagger &= \vartheta_i^n z_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n z_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

### Remarque 8

Le solveur de Riemann (3.9) et le schéma de type Godunov associé (3.14) sont des extensions naturelles pour le système non-conservatif (3.7) de ceux obtenus dans [Gal03] pour le système conservatif de la dynamique des gaz.

Le schéma que nous venons d'introduire peut être implicite en prenant le flux numérique aux temps  $t^\dagger$ . Les versions explicite et implicite du schéma numérique pour le système acoustique (3.7) peuvent alors s'écrire :

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n z_i^n \left( \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \mathbf{B}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \quad (3.15)$$

avec la notation  $\# = n$  ou  $\# = \dagger$ . Dans le cas explicite, nous avons

$$\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^\# = \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{H}(\mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^\# = \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{B}(\mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n),$$

tandis que dans le cas implicite

$$\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^\# = \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \mathbf{H} \left( \mathbf{V}_i^\dagger, \mathbf{V}_{i+1}^\dagger \right) \text{ et } \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^\# = \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \mathbf{B} \left( \mathbf{V}_i^\dagger, \mathbf{V}_{i+1}^\dagger \right).$$

Les formulations explicite et implicite seront respectivement analysées dans les sections 3.1.1.2 et 3.1.1.3.

### Remarque 9

Comme dans [CGK16], le terme non conservatif  $\vartheta$  est toujours traité explicitement.

Finalement, le schéma numérique pour les variables eulériennes  $\rho, \rho y, \rho u, \rho E$  et  $z$  du système acoustique (3.4) pour le modèle à cinq équations réduit se déduit de la façon suivante. En notant  $\rho_i^\dagger = \frac{1}{\vartheta_i^\dagger}$  la densité au temps  $t^\dagger$ , la première composante du schéma (3.15) donne l'évolution de la densité durant l'étape acoustique :

$$L_i \rho_i^\dagger = \rho_i^n, \quad (3.16)$$

avec  $L_i = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right)$ . En utilisant les autres équations de (3.15), les équations d'évolution des variables eulériennes  $(\rho y)_i^\dagger = \rho_i^\dagger y_i^\dagger$ ,  $(\rho u)_i^\dagger = \rho_i^\dagger u_i^\dagger$ ,  $(\rho E)_i^\dagger = \rho_i^\dagger E_i^\dagger$  et  $z_i^\dagger = \rho_i^\dagger (\vartheta z)_i^\dagger$  sont données par

$$\begin{cases} L_i \rho_i^\dagger &= \rho_i^n, \\ L_i (\rho y)_i^\dagger &= (\rho y)_i^n \\ L_i (\rho u)_i^\dagger &= (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \\ L_i (\rho E)_i^\dagger &= (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \\ z_i^\dagger &= z_i^n. \end{cases} \quad (3.17)$$

À l'aide de la deuxième et de la dernière équation de (3.17), on note que les fractions volumiques et massiques ne sont pas modifiées par le schéma numérique de l'étape acoustique.

#### 3.1.1.1 Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité

Dans cette section, nous détaillons le choix des pentes du solveur de Riemann. Ce choix est basé sur un critère de positivité de la solution. Sous condition de stabilité, le schéma de type Godunov pour l'étape acoustique (3.10) est une combinaison convexe de la solution à l'instant  $n$  et des états intermédiaires. Ainsi, pour assurer que la solution reste dans l'ensemble convexe des solutions admissibles, il est suffisant de prouver la positivité des états intermédiaires.

Dans la section 2.4.5.1 du chapitre 2, nous avons étudié les domaines de convexité pour le modèle à cinq équations réduit. Pour définir l'ensemble des solutions admissibles nous imposons que certaines variables telles que la densité ou l'énergie interne doivent rester positives. De plus il est nécessaire que la vitesse du son soit réelle pour assurer l'hyperbolicité du système. La convexité, sous condition (2.85) sur les paramètres de loi d'état des deux fluides, de l'ensemble des solutions admissibles

$$\mathcal{A}_\pi^L = \{ \mathbf{V} = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)^T \mid \vartheta > 0, y \in (0, 1), \varepsilon > q, z \in (0, 1) \text{ et } p + \pi(z) > 0 \}$$

a déjà été démontrée dans la section 2.4.5.1. La condition (2.85) sur les paramètres de l'équation d'état n'est pas restrictive en général, voir par exemple [LMMS04, Shy04], et sera toujours vérifiée dans les cas tests.

Comme le schéma (3.14) ne modifie pas les fractions volumiques  $z$  et massiques  $y$ , ces variables restent comprises entre 0 et 1. De plus, pour un mélange de deux gaz raides, les conditions de positivité sur la densité et  $p + \pi$  impliquent directement que l'énergie interne est supérieure à l'énergie interne de référence  $q$ . En effet, la pression de mélange (2.42) est donnée par

$$p = (\gamma - 1)\rho(\varepsilon - q) - \gamma\pi.$$

Nous avons alors

$$p + \pi > 0 \Leftrightarrow \rho(\varepsilon - q) - \pi > 0 \Leftrightarrow \varepsilon - q > \vartheta\pi > 0.$$

Il ne reste donc qu'à étudier les conditions de positivité du volume spécifique  $\vartheta$  et de la quantité  $p + \pi$ .

L'analyse suivante s'inspire de celle menée pour le système conservatif de la dynamique des gaz dans [Gal03]. Soit  $r = \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^-}$  le rapport entre les pentes du solveur de Riemann. Le résultat suivant donne les conditions exactes pour garantir que les états intermédiaires restent dans le domaine des solutions admissibles dans le cas explicite.

### Proposition 8

Pour  $r$  fixé, nous avons les conditions de positivité exactes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_g^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\vartheta_g} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\vartheta_g} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-r\Delta u + \sqrt{d_{\vartheta_g}}}{2(1+r)\vartheta_g}, \\ \vartheta_d^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\vartheta_d} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\vartheta_d} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-\Delta u + \sqrt{d_{\vartheta_d}}}{2r(1+r)\vartheta_d}, \\ (p + \pi)_g^* \geq 0 \quad \text{si } d_{c_g^2} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{c_g^2} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{r\Delta u(\Pi_g + \Delta p + 2r(1+r)\pi_g) + \sqrt{d_{c_g^2}}}{4(1+r)^2\hat{\varepsilon}_g + 2r^2(\Delta u)^2}, \\ (p + \pi)_d^* \geq 0 \quad \text{si } d_{c_d^2} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{c_d^2} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{\Delta u(\Pi_d - r\Delta p + 2(1+r)\pi_d) + \sqrt{d_{c_d^2}}}{4(1+r)^2\hat{\varepsilon}_d + 2r(\Delta u)^2}, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

où,

$$\begin{aligned} d_{\vartheta_g} &= r^2(\Delta u)^2 + 4\vartheta_g(1+r)\Delta p, \\ d_{\vartheta_d} &= 2(\Delta u)^2 - 4r\vartheta_d(1+r)\Delta p, \\ \Pi_g &= 2(rp_g + p_d) - \Delta p, \quad \hat{\varepsilon}_g = \varepsilon_g - \vartheta_g\pi_g, \\ \Pi_d &= 2(rp_g + p_d) + r\Delta p, \quad \hat{\varepsilon}_d = \varepsilon_d - \vartheta_d\pi_d, \\ d_{c_g^2} &= r^2(\Delta u)^2(\Delta p + \Pi_g + 2r(1+r)\pi_g)^2 - 4\Delta p(\Pi_g + 2(1+r)\pi_g)(2(1+r)^2\hat{\varepsilon}_g + r^2(\Delta u)^2), \\ d_{c_d^2} &= (\Delta u)^2(r\Delta p - \Pi_d - 2(1+r)\pi_d)^2 + 4\Delta p(\Pi_d + 2(1+r)\pi_d)(2r(1+r)^2\hat{\varepsilon}_d + r(\Delta u)^2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* En utilisant les relations  $\mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \phi_- \mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+ \mathbf{R}_+$  (voir (3.9)), la positivité de  $\vartheta$  et  $p + \pi$  conduit à des inégalités quadratiques en  $\bar{C}^-$  et aux conditions de la proposition. Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe B.  $\square$

La proposition précédente donne, pour un  $r$  fixé, la valeur minimale de la pente  $\bar{C}^-$  notée  $\bar{C}^-(r)$  qui assure la positivité des états intermédiaires. En pratique, nous pouvons prendre  $r = 1$  ou  $r = \frac{\rho_d c_d}{\rho_g c_g}$  et nous avons alors

$$\bar{C}^- = k \max(\bar{C}^-(r), \rho_g c_g), \quad (3.19)$$

où  $k \geq 1$  est une constante. En général, nous avons  $k = 1.01$ . Ensuite, l'autre pente du solveur de Riemann est égale à  $\bar{C}^+ = r\bar{C}^-$ . Avec le choix  $r = \frac{\rho_d c_d}{\rho_g c_g}$ , nous avons directement la relation :

$$\bar{C}^+ = k \max(\bar{C}^+(r), \rho_d c_d), \quad (3.20)$$

avec  $\bar{C}^+(r) = r\bar{C}^-(r)$ .

### 3.1.1.2 Stabilité du schéma explicite

Les formules explicites pour les variables eulériennes sont directement données par (3.17) où le flux est calculé au temps  $t^n$ . Dans ce cas, la vitesse et la pression aux interfaces (3.13) sont directement calculées en utilisant l'état fluide au temps  $t^n$  :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\bar{C}^- u_i^n + \bar{C}^+ u_{i+1}^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}, \\ \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\bar{C}^+ p_i^n + \bar{C}^- p_{i+1}^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} (u_{i+1}^n - u_i^n). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour assurer que le schéma numérique (3.10) pour l'étape acoustique est bien une combinaison convexe, nous devons assurer la positivité du terme

$$1 - \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \vartheta_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

pour tout  $i$ . Ainsi, l'étape acoustique est stable, *i.e.* la solution numérique reste dans le domaine de convexité, sous la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- + \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+}{\rho_i^n} \right) \leq 1. \quad (3.22)$$

Dans les résultats numériques (voir section 3.4), nous montrons que le choix  $r_0 = \frac{\rho_d c_d}{\rho_g c_g}$  pour les pentes du solveur de Riemann permet de réduire cette contrainte sur le pas de temps.

### 3.1.1.3 Différentes versions implicites de l'étape acoustique

Plus la vitesse matérielle  $u$  est faible, plus la condition CFL (3.56) de transport permet de prendre des grands pas de temps tandis que la condition de stabilité (3.22) de l'étape acoustique reste inchangée. Ainsi, dans le cas où la vitesse du fluide est faible, la condition CFL (3.22) de l'étape acoustique peut être très restrictive par rapport à celle de l'étape de transport (3.56) basée sur la vitesse matérielle. Pour surmonter cette difficulté, l'idée est d'utiliser un schéma implicite pour calculer l'étape acoustique dans le but d'avoir de grands pas de simulations qui ne soient pas contraints par la vitesse du son du fluide. Dans cette partie, nous proposons différentes méthodes pour construire une formulation implicite pour le système acoustique.

Dans la mesure où les fractions massiques et volumiques ne sont pas modifiées pendant l'étape acoustique, nous allons nous focaliser sur l'évolution du volume spécifique, de la vitesse et de l'énergie dans cette section. Soit  $\mathbf{V}^{\vartheta u E} = (\vartheta_i, u_i, E_i)_i^T$  le vecteur des inconnues et

$$\llbracket \mathbf{H}^{\vartheta u E} \rrbracket = \left( -(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}), \bar{p}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \right)_i^T$$

les sauts du flux numérique pour ces variables.

La première version de ce schéma implicite est donnée par la formule (3.15) où  $\# = \dagger$ . Cette formulation est plus simple que la formulation équivalente en variables eulériennes (3.17). Cela revient à déterminer l'état fluide  $\mathbf{V}^\dagger$  qui est solution du système non linéaire :

$$\mathbf{V}^{\vartheta uE} - \left(\mathbf{V}^{\vartheta uE}\right)^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta^n [\mathbf{H}^{\vartheta uE}] = 0. \quad (3.23)$$

Pour résoudre le système non linéaire (3.23), la première idée est d'utiliser une méthode de Newton avec les inconnues classiques  $\mathbf{V}^{\vartheta uE}$  du système. Néanmoins, sachant que le flux numérique ne dépend que de la vitesse et de la pression, il semble naturel de prendre la vitesse et la pression comme inconnues. Le choix de la troisième inconnue n'est quant à lui pas évident. En effet, le volume spécifique, l'entropie ou encore la température peuvent être utilisés. On notera  $X$  cette troisième inconnue non précisée pour le moment. Cela conduit à considérer un autre jeu d'inconnues  $\mathbf{W} = (u_i, p_i, X_i)_i^T$  pour résoudre le système non linéaire (3.23), qui peut s'écrire sous la forme plus compacte  $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = 0$ . Enfin, nous remarquons que le produit non conservatif peut s'écrire  $\vartheta^n [\mathbf{H}^{\vartheta uE}] = \mathbf{M}\mathbf{W}$ , où la matrice tridiagonale  $\mathbf{M}$  est donnée par :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

avec

$$\mathbf{A}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} & \frac{1}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i-\frac{1}{2}}} & 0 \\ \left( \frac{-\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} & \left( \frac{-\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} & 0 \\ \mathbf{A}_i^{3,1} & \mathbf{A}_i^{3,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{-\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \left( \frac{-1}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{-1}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & 0 \\ \left( \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \left( \frac{-\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & 0 \\ \mathbf{B}_i^{3,1} & \mathbf{B}_i^{3,2} & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{C}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{-\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \frac{1}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i+\frac{1}{2}}} & 0 \\ \left( \frac{-\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \left( \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & 0 \\ \mathbf{C}_i^{3,1} & \mathbf{C}_i^{3,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les coefficients de la troisième ligne de chaque bloc sont détaillés dans l'annexe C.

Pour déterminer la solution du système non linéaire (3.23) nous utilisons la méthode de Newton définie par

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} \left( \mathbf{W}^{k+1} - \mathbf{W}^k \right) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}^k), \quad (3.25)$$

où

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{W}} \mathbf{W} \right). \quad (3.26)$$

Dans la suite, cette première méthode implicite pour l'étape acoustique sera notée IMN. La résolution de l'algorithme de Newton peut être coûteux en termes de temps CPU. Il peut être plus efficace d'utiliser une approximation de la matrice  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}}$  (3.26). Dans la suite, deux approximations différentes sont proposées. La première est basée sur l'idée suivante.

Dans la mesure où le flux numérique ne dépend que de la vitesse et de la pression, l'idée est de résoudre un sous-système plus simple afin de déterminer une prédiction de ces deux quantités. Ensuite, le flux numérique pourra être calculé. Cette prédiction est basée sur l'observation suivante. Pour des solutions régulières, *i.e.* en absence de choc, l'entropie est constante c'est-à-dire  $\partial_t s = 0$  et l'équation d'évolution du volume spécifique peut être remplacée par une équation sur la pression. Dans ce cas, nous obtenons le système suivant en vitesse-pression :

$$\begin{cases} \partial_t u + \vartheta \partial_x p = 0, \\ \partial_t p + C^2 \vartheta \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Puisque  $\partial_t s = 0$  nous en déduisons que l'entropie  $s = s(x)$ , la vitesse du son lagrangienne  $C = C(p, x)$  et le volume spécifique  $\vartheta = \vartheta(p, x)$  ne dépendent que de  $(p, x)$ . Ainsi, la pression et la vitesse peuvent être calculées avec le système  $(p, u)$  (3.27). L'idée est donc de résoudre les deux premières équations du système non linéaire (3.23) avec la méthode de Newton pour obtenir une prédiction du flux numérique. Ensuite, la troisième équation sera directement résolue dans sa forme non linéaire.

Pour cela, la méthode de Newton (3.25) est encore utilisée et nous choisissons l'entropie comme troisième inconnue  $X$  du vecteur  $\mathbf{W}$ . Tout d'abord, le vecteur d'inconnues  $\mathbf{W}$  est ré-agencé en séparant l'entropie des inconnues de vitesse et de pression. Soit  $\mathbf{W}^{up} = (u_i, p_i)_i^T$  et  $\mathbf{W}^s = (s_i)_i^T$  les différents sous-vecteurs d'inconnues. De même, nous introduisons le vecteur  $\mathbf{V}^{\vartheta u} = (\vartheta_i, u_i)_i^T$  et la matrice  $\mathbf{M}_{up}^{\vartheta u}$  définie par  $\vartheta^n[\mathbf{H}^{\vartheta u}] = \mathbf{M}_{up}^{\vartheta u} \mathbf{W}^{up}$ . En utilisant ces notations, nous pouvons écrire la méthode de Newton (3.25) pour les deux premières lignes du système non linéaire  $(F_1, F_2) = 0$ , soit

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}}{\partial \mathbf{W}^{up}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{M}_{up}^{\vartheta u} + \frac{\partial \mathbf{M}_{up}^{\vartheta u}}{\partial \mathbf{W}^{up}} \mathbf{W}^{up} \right) \quad \frac{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}}{\partial \mathbf{W}^s} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{up^{k+1}} - \mathbf{W}^{up^k} \\ \mathbf{W}^{s^{k+1}} - \mathbf{W}^{s^k} \end{pmatrix} = -F_{1,2}(\mathbf{W}^k).$$

Premièrement, nous fixons la valeur des pentes du solveur de Riemann au temps  $t^n$ . Sous cette hypothèse, la matrice  $\mathbf{M}_{up}^{\vartheta u}$  ne dépend plus de  $\mathbf{W}$ . De plus, si l'on considère que les variations d'entropie sont faibles, le terme  $\mathbf{W}^{s^{k+1}} - \mathbf{W}^{s^k}$  peut être négligé. Dans ce cas, la méthode de Newton pour le sous-système en vitesse-pression s'écrit :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}}{\partial \mathbf{W}^{up}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{M}_{up}^{\vartheta u} \right) (\mathbf{W}^{up^{k+1}} - \mathbf{W}^{up^k}) = -F_{1,2}(\mathbf{W}^k),$$

ou de manière équivalente,

$$\left( \mathbf{I}_d + \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{\mathbf{M}} \right) (\mathbf{W}^{up^{k+1}} - \mathbf{W}^{up^k}) = -\frac{\partial \mathbf{W}^{up^k}}{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}} (\mathbf{V}^{\vartheta u^k} - \mathbf{V}^{\vartheta u^n}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{W}^{up^k}$$

où  $\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{W}^{up}}{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}} \mathbf{M}_{up}^{\vartheta u}$  et  $\frac{\partial \mathbf{W}^{up}}{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}}$  est une matrice définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{W}^{up}}{\partial \mathbf{V}^{\vartheta u}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C_i^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons remarquer que la matrice  $\frac{\partial \mathbf{W}^{up}}{\partial \mathbf{V}^{up}}$  ne dépend que de la vitesse du son. La matrice  $\tilde{\mathbf{M}}$  a la même structure que la matrice  $\mathbf{M}$ , cf. (3.24), mais avec

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{-\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} & \left( \frac{-\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} \\ C_i^2 \left( \frac{-\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} & \frac{-C_i^2}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i-\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \left( \frac{-\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ C_i^2 \left( \left( \frac{-\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right) & \frac{C_i^2}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{C_i^2}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},$$

et

$$\tilde{\mathbf{C}}_i = \vartheta_i^n \begin{bmatrix} \left( \frac{-\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \left( \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ C_i^2 \left( \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} & \frac{-C_i^2}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},$$

où l'on rappelle que les valeurs de pentes du solveur de Riemann  $\bar{C}^-$  et  $\bar{C}^+$  sont figées au temps  $t^n$ . Dans la mesure où nous cherchons une prédiction du flux numérique, la valeur de la vitesse du son lagrangienne  $C_i$  est aussi figée au temps  $t^n$ , ce qui permet de ne garder que la première itération de la méthode de Newton. Finalement, pour effectuer une prédiction de la vitesse et de la pression, nous résolvons le système linéaire suivant :

$$\left( \text{Id} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{\mathbf{M}} \right) \mathbf{W}^{up^\dagger} = \mathbf{W}^{up^n}. \quad (3.28)$$

Les nouvelles valeurs de la vitesse et de la pression sont déterminées en résolvant ce système linéaire. Grâce à cette prédiction de pression, le flux numérique  $\mathbf{H}^\dagger$  de l'étape acoustique peut être calculé en utilisant la formule (3.12). Ensuite, les valeurs du volume spécifique  $\vartheta^\dagger$  et de l'énergie  $E^\dagger$  sont mises à jour avec les formules (3.15). Comme dans la formulation explicite de la phase acoustique, les fractions massiques et volumiques ne sont pas modifiées. Après avoir calculé toutes les variables conservatives, la véritable pression est déterminée à l'aide de l'équation d'état. Cette seconde approche pour dériver une formulation implicite de l'étape acoustique, notée IM1 dans la suite, est résumée dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 1** Formulation implicite pour la phase acoustique : version IM1.

- calcul des pentes du solveur de Riemann  $\bar{C}^+(\vartheta^n, y^n, u^n, \varepsilon^n, z^n, p^n)$  et  $\bar{C}^-(\vartheta^n, y^n, u^n, \varepsilon^n, z^n, p^n)$ ,
- résolution du système linéaire (3.28),

$$\begin{aligned} u_i^\dagger &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{\mathbf{p}}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{\mathbf{p}}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \\ \mathbf{p}_i^\dagger &= p_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_i^n)^2 \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger &= \frac{\bar{C}^- u_i^\dagger + \bar{C}^+ u_{i+1}^\dagger}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{\mathbf{p}_{i+1}^\dagger - \mathbf{p}_i^\dagger}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}, \\ \bar{\mathbf{p}}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger &= \frac{\bar{C}^+ \mathbf{p}_i^\dagger + \bar{C}^- \mathbf{p}_{i+1}^\dagger}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \left( u_{i+1}^\dagger - u_i^\dagger \right), \end{aligned}$$

- calcul du flux numérique  $\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \left( -\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger, 0, \bar{\mathbf{p}}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger, \bar{\mathbf{p}}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger, 0 \right)^T$  à l'aide des nouvelles valeurs de vitesse et de pression,
- mise à jour du volume spécifique et de l'énergie avec les formules (3.15),

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{\mathbf{p}}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{\mathbf{p}}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \end{aligned}$$

- calcul de la pression cohérente avec l'équation d'état  $p_i^\dagger = p(\vartheta_i^\dagger, E_i^\dagger)$ .
- 

Pour éviter toute confusion, nous avons noté  $\mathbf{p}$  la prédiction de la pression au temps  $t^\dagger$  dans l'algorithme précédent. Cette quantité n'est *a priori* pas égale à la valeur de la pression calculée à partir de l'équation d'état.

### Remarque 10

La résolution du système linéaire (3.28) est consistante avec le système vitesse-pression (3.27) pour des solutions régulières.

### Remarque 11

Quand les pentes du solveur de Riemann sont égales, la formulation implicite IM1 coïncide avec le schéma proposé par [CGK16] basé sur une méthode de relaxation de type Suliciu.

Finalement, une troisième formulation implicite peut être obtenue si on itère sur l'algorithme 1. Dans ce cas, à convergence, la vitesse du son lagrangienne et les pentes du solveur de Riemann sont évaluées au temps  $t^\dagger$ . La pression obtenue à convergence de l'algorithme n'est toutefois pas égale à la pression calculée à partir de l'équation d'état. Ainsi, la solution de ce troisième algorithme, noté IM2 dans la suite, n'est pas égale à la solution du système non linéaire. Cette dernière formulation implicite est détaillée dans l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Formulation implicite pour la phase acoustique : version IM2.
 

---

 Initialisation :  $r = +\infty$ ,  $k = 0$  et  $\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^n$ ,

**Tant que**  $r > tol$  **faire**

- calcul des pentes du solveur de Riemann  $\bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)$  et  $\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k)$ ,
- résolution du système linéaire (3.28),

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \right), \\ \bar{p}_i^{k+1} &= p_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_i^k)^2 \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} &= \frac{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) u_i^{k+1} + \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k) u_{i+1}^{k+1}}{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) + \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)} - \frac{\bar{p}_{i+1}^{k+1} - \bar{p}_i^{k+1}}{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) + \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)}, \\ \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} &= \frac{\bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k) \bar{p}_i^{k+1} + \bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) \bar{p}_{i+1}^{k+1}}{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) + \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)} - \frac{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)}{\bar{C}^-(\mathbf{V}^k, p^k) + \bar{C}^+(\mathbf{V}^k, p^k)} \left( u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1} \right), \end{aligned}$$

- calcul du flux numérique  $\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} = \left( -\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}, 0, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}, 0 \right)^T$  à l'aide des nouvelles valeurs de vitesse et de pression,
- mise à jour du volume spécifique et de l'énergie avec les formules (3.15),

$$\begin{aligned} \vartheta_i^{k+1} &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \right), \\ E_i^{k+1} &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \right), \end{aligned}$$

- calcul de la pression cohérente avec l'équation d'état  $p_i^{k+1} = p(\vartheta_i^{k+1}, E_i^{k+1})$ ,
- calcul du résidu

$$r = \frac{\|\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k\|}{\|\mathbf{V}^n\|}. \quad (3.29)$$

**fin Tant que**

 Mise à jour des inconnues au temps  $t^\dagger$  :  $\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^{k+1}$ .
 

---

### Remarque 12

Si un schéma implicite est utilisé dans l'étape acoustique, la condition CFL (3.56) pour l'étape de transport devient implicite. Dans ce cas, il est nécessaire de vérifier *a posteriori* que la condition (3.56) est vérifiée avec la nouvelle vitesse d'interface  $\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}$ . Le cas échéant, l'étape acoustique est recalculée avec un pas de temps plus petit.

Avant de conclure ce volet sur les différentes formulations implicites de l'étape acoustique, montrons que le système linéaire (3.28) est inversible. Ce résultat est une extension immédiate d'un résultat de Chalons et al. [CGK16] au cas d'un schéma avec des pentes du solveur de Riemann différentes.

### Proposition 9

Nous considérons des conditions aux limites de type périodique sur le bord du domaine. Nous supposons que le volume spécifique  $\vartheta_i^n$  est positif pour tout  $i$ . Dans ce cas, le système linéaire (3.28) admet une unique solution pour tout  $\Delta t > 0$ .

*Démonstration.* Pour simplifier les notations, l'exposant † ne sera pas indiqué dans la suite. Le système linéaire (3.28) s'écrit

$$\begin{aligned} u_i + \vartheta_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}) &= u_i^n, \\ p_i + (C_i^n)^2 \vartheta_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) &= p_i^n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le système est inversible et admet une unique solution si et seulement si la solution  $u = p = 0$  est la seule solution du système linéaire (3.30) pour un second membre nul. Supposons alors que la vitesse et la pression sont nulles à l'instant  $n$ . Pour démontrer l'unicité de la solution, nous utilisons une preuve basée sur une estimation de l'énergie. La première équation est multipliée par  $\frac{\Delta x}{\vartheta_i^n \Delta t} u_i$  tandis que la seconde est multipliée par  $\frac{\Delta x}{\vartheta_i^n (C_i^n)^2 \Delta t} p_i$ . On additionne les deux équations et on somme sur toutes les cellules  $i$ . Ainsi, on trouve

$$\sum_i \frac{\Delta x}{\vartheta_i^n \Delta t} \left( u_i^2 + \frac{p_i^2}{(C_i^n)^2} \right) + \sum_i u_i (p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}) + p_i (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) = 0. \quad (3.31)$$

Notons qu'il n'y a pas de termes de bord car nous avons utilisé des conditions aux limites périodiques. Rappelons maintenant l'expression des vitesses et des pressions sur une interface (3.13) :

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}} &= \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_i + \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} - \left( \frac{1}{(1+r)\bar{C}^-} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i), \\ p_{i+\frac{1}{2}} &= \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_i + \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1} - \left( \frac{r\bar{C}^-}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i). \end{aligned}$$

Nous décomposons ces quantités en une partie centrée

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^c &= \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_i + \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1}, \\ p_{i+\frac{1}{2}}^c &= \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_i + \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1}, \end{aligned}$$

et un terme de dissipation

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^d &= - \left( \frac{1}{(1+r)\bar{C}^-} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i), \\ p_{i+\frac{1}{2}}^d &= - \left( \frac{r\bar{C}^-}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i). \end{aligned}$$

Montrons que les termes provenant des parties centrées s'annulent dans (3.31). En effet, nous avons

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^c - u_{i-\frac{1}{2}}^c &= \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} + \left( \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right) u_i - \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}, \\ p_{i+\frac{1}{2}}^c - p_{i-\frac{1}{2}}^c &= \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1} + \left( \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right) p_i - \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} p_{i-1}. \end{aligned}$$

Ce qui donne alors

$$\begin{aligned} \sum_i u_i \left( p_{i+\frac{1}{2}}^c - p_{i-\frac{1}{2}}^c \right) + p_i \left( u_{i+\frac{1}{2}}^c - u_{i-\frac{1}{2}}^c \right) &= \sum_i \left( \left( \frac{1+r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{1+r}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right) u_i p_i \\ &\quad + \sum_i \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_i p_{i+1} - \sum_i \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} p_i \\ &\quad - \sum_i \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} u_i p_{i-1} + \sum_i \left( \frac{r}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} p_i, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour les termes de dissipation de la pression, nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_i u_i \left( p_{i+\frac{1}{2}}^d - p_{i-\frac{1}{2}}^d \right) &= - \sum_i \left( \frac{r\bar{C}^-}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} u_i (u_{i+1} - u_i) + \sum_i \left( \frac{r\bar{C}^-}{1+r} \right)_{i-\frac{1}{2}} u_i (u_i - u_{i-1}), \\ &= \sum_i \left( \frac{r\bar{C}^-}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \left( u_{i+\frac{1}{2}}^d - u_{i-\frac{1}{2}}^d \right) &= - \sum_i \left( \frac{1}{(1+r)\bar{C}^-} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_i (p_{i+1} - p_i) + \sum_i \left( \frac{1}{(1+r)\bar{C}^-} \right)_{i-\frac{1}{2}} p_i (p_i - p_{i-1}), \\ &= \sum_i \left( \frac{1}{(1+r)\bar{C}^-} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les différents termes dans l'équation (3.31), nous obtenons :

$$\sum_i \frac{\Delta x}{\vartheta_i^n \Delta t} \left( u_i^2 + \frac{p_i^2}{(C_i^m)^2} \right) + \sum_i \left( \frac{1}{1+r} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left( (r\bar{C}^-)_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)^2 + \frac{1}{\bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^-} (p_{i+1} - p_i)^2 \right) = 0.$$

Étant donné que la densité  $\vartheta_i^n$ , le pas de temps  $\Delta t$ , les pentes du solveurs de Riemann  $\bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^-$  et leur rapport  $r_{i+\frac{1}{2}}$  sont positifs, on en déduit que  $u_i = p_i = 0$  pour tout  $i$ .  $\square$

### 3.1.1.4 Passage à l'ordre 2 en espace

Le schéma défini précédemment (3.17) est d'ordre 1 en temps et en espace. Il induit naturellement de la diffusion numérique. Pour améliorer la précision numérique, il est alors nécessaire d'utiliser un schéma d'ordre deux en espace.

La méthode choisie ici consiste à utiliser le limiteur de pente MUSCL (*Monotone Ustream-centred Scheme for Conservation Laws*) [Tor97, GR91]. Il permet de limiter l'écart de valeur d'une même variable entre deux cellules voisines par des méthodes de reconstructions. Contrairement au schéma d'ordre 1 où les valeurs sont constantes par maille, les variables sont ici reconstruites linéairement, voir figure 3.3.

Le limiteur de pente est appliqué sur les variables  $(\rho, \mathbf{u}, p)$  [FBC<sup>+</sup>11]. Il est possible de retrouver les autres variables à partir de celles-ci.

Pour une variable  $\phi$ , on définit deux états  $\phi_{g,i+\frac{1}{2}}$  et  $\phi_{d,i+\frac{1}{2}}$  à chaque interface  $i + \frac{1}{2}$  par

$$\phi_{d,i+\frac{1}{2}} = \phi_{i+1} - \frac{1}{2} \min\text{mod}(\phi_{i+2} - \phi_{i+1}, \phi_{i+1} - \phi_i), \quad (3.32)$$

$$\phi_{g,i+\frac{1}{2}} = \phi_i + \frac{1}{2} \min\text{mod}(\phi_{i+1} - \phi_i, \phi_i - \phi_{i-1}), \quad (3.33)$$

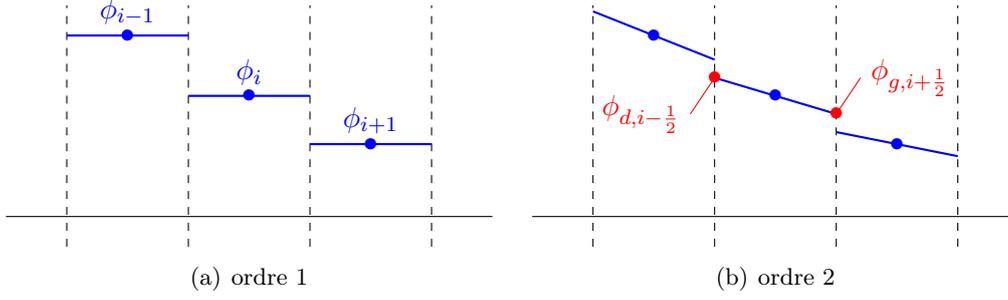


FIGURE 3.3 – Schéma d'ordre 1 à gauche, reconstruction MUSCL à droite.

où la fonction minmod est définie par

$$\text{minmod}(x, y) = \max(0, \min(x, y)) + \min(0, \max(x, y)).$$

Les propriétés du schéma d'ordre 1, à savoir positivité et stabilité, ne sont pas nécessairement préservées par son extension à l'ordre 2. Cependant, des techniques existent pour cela [Ber06].

### 3.1.1.5 Extension au cas bidimensionnel

Les notations relatives aux maillages bidimensionnels sont celles définies dans l'annexe A. Dans la mesure où nous utilisons des maillages structurés curvilignes, l'extension à la dimension 2 se fait naturellement. En effet, comme pour le cas unidimensionnel, le schéma numérique pour l'étape acoustique avec le modèle à cinq équations réduit s'écrit

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{H}_{ij}^\# + z_i^\# \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{B}_{ij}^\# \right), \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{V} = (\vartheta, y, \mathbf{u}, E, \vartheta z)^T$ ,  $\mathbf{H}_{ij} = (-\bar{u}_{ij}, 0, \bar{p}_{ij} \mathbf{n}_{ij}, \bar{p}_{ij} \bar{u}_{ij}, 0)^T$  et  $\mathbf{B}_{ij} = (0, 0, 0, 0, -\bar{u}_{ij})^T$ , La pression et la vitesse normale sur la face  $\Gamma_{ij}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij} &= \frac{\bar{C}_{ij}^- \mathbf{u}_i + \bar{C}_{ij}^+ \mathbf{u}_j}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{p_j - p_i}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+}, \\ \bar{p}_{ij} &= \frac{\bar{C}_{ij}^+ p_i + \bar{C}_{ij}^- p_j}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} - \frac{\bar{C}_{ij}^- \bar{C}_{ij}^+}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}. \end{aligned}$$

où les pentes du solveur de Riemann sont calculées en utilisant les formules (3.19) et (3.20) à chaque interface. Le système non linéaire induit par la version implicite du schéma numérique de l'étape acoustique est résolu de la même manière que dans le cas unidimensionnel, voir section 3.1.1.3. De plus, il est aussi possible de démontrer que le sous système linéaire en vitesse et pression admet une unique solution pour tout  $\Delta t > 0$  dans le cas de conditions aux limites périodiques [CGK16].

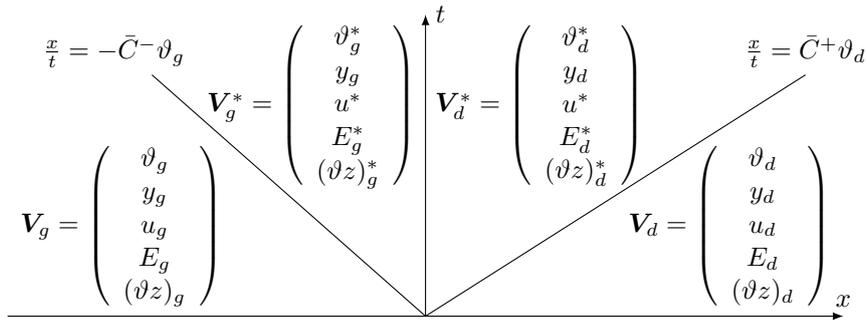


FIGURE 3.4 – Solvateur de Riemann pour le système de Kapila.

### 3.1.2 Étape acoustique pour le modèle de Kapila

Pour le modèle de Kapila, nous allons suivre la même démarche que pour le modèle à cinq équations réduit. Le système acoustique (3.6) s'écrit dans le cas du modèle de Kapila :

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta - \vartheta \partial_x u & = 0, \\ \partial_t y & = 0, \\ \partial_t u + \vartheta \partial_x p & = 0, \\ \partial_t E + \vartheta \partial_x (pu) & = 0, \\ \partial_t (\vartheta z) + (K - z) \vartheta \partial_x u & = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Ce système non conservatif peut aussi s'écrire sous la forme plus compacte

$$\partial_t \mathbf{V} + \vartheta \partial_x \mathbf{G} + P \vartheta \partial_x \mathbf{B}(\mathbf{V}) = 0,$$

où  $\mathbf{V} = (\vartheta, y, u, E, \vartheta z)^T$ ,  $\mathbf{G} = (-u, 0, p, pu, 0)^T$ ,  $\mathbf{B} = (0, \dots, 0, u)^T$  et  $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K - z \end{pmatrix}$ .

De la même façon que pour le modèle à cinq équations réduit, nous considérons le solvateur de Riemann approché suivant, (cf. Fig. 3.4)

$$W(x/t; \mathbf{V}_g; \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_g & \text{si } x/t \leq -\bar{C}^- \vartheta_g, \\ \mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \phi_- \mathbf{R}_- & \text{si } -\bar{C}^- \vartheta_g < x/t \leq 0, \\ \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+ \mathbf{R}_+ & \text{si } 0 < x/t \leq \bar{C}^+ \vartheta_d, \\ \mathbf{V}_d & \text{si } \bar{C}^+ \vartheta_d < x/t, \end{cases} \quad (3.36)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_{\pm} &= \frac{\Delta p \pm \bar{C}^{\mp} \Delta u}{\bar{C}^- \bar{C}^+ + (\bar{C}^{\pm})^2}, \\ \mathbf{R}_{\pm} &= (-1, 0, \pm \bar{C}^{\pm}, p_{1-\alpha} \pm u_{\alpha} \bar{C}^{\pm}, (K - z)^{\pm})^T. \end{aligned}$$

Plusieurs choix sont possibles pour définir le terme  $(K - z)^{\pm}$ . Ici, nous faisons le choix le plus simple et nous définissons  $(K - z)^+ = K_d - z_d$  et  $(K - z)^- = K_g - z_g$ . Ainsi, les états intermédiaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\vartheta z)_g^* &= (\vartheta z)_g + \phi_- (K_g - z_g), \\ (\vartheta z)_d^* &= (\vartheta z)_d - \phi_+ (K_d - z_d). \end{aligned}$$

On définit un schéma de type Godunov à partir du solveur de Riemann (3.36)

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} W \left( \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_{i-1}^n, \mathbf{V}_i^n \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W \left( \frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n \right) dx \right). \quad (3.37)$$

Après intégration, on trouve,

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ \vartheta_i^n \Delta t \mathbf{V}_{d,i-\frac{1}{2}}^* + \left( \Delta x - \left( \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+ + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \vartheta_i^n \Delta t \right) \mathbf{V}_i^n + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- \vartheta_i^n \Delta t \mathbf{V}_{g,i+\frac{1}{2}}^* \right). \quad (3.38)$$

Les équations sur le volume spécifique, la fraction massique, la vitesse et l'énergie sont inchangées par rapport au modèle à cinq équations réduit

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \\ y_i^\dagger &= y_i^n, \\ u_i^\dagger &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right). \end{aligned}$$

où la vitesse et la pression sur une interface sont encore données par

$$\bar{u}^\# = \frac{\bar{C}^- u_g^\# + \bar{C}^+ u_d^\# - \Delta p^\#}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{\bar{C}^+ p_g^\# + \bar{C}^- p_d^\# - \bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta u^\#}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}. \quad (3.39)$$

Comme pour le modèle à cinq équations réduit, l'exposant # est égal à  $n$  dans le cas explicite et  $\# = \dagger$  pour le schéma implicite. Pour la quantité  $\vartheta z$ , le schéma numérique explicite donne

$$(\vartheta z)_i^\dagger = (\vartheta z)_i^n - \vartheta_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (K_i^n - z_i^n) \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (3.40)$$

Dans le cas implicite, le schéma numérique pour la quantité  $\vartheta z$  est obtenu d'une façon différente et nous renvoyons à la section 3.1.2.2 pour cela.

### Remarque 13

Dans les zones où le terme  $K$  est nul, en combinant les équations sur le volume spécifique et sur  $\vartheta z$ , nous retrouvons bien le fait que la fraction volumique ne varie pas dans la phase acoustique, i.e.  $z_i^\dagger = z_i^n$ .

### Remarque 14

Le schéma proposé par [EDKT17] pour le modèle de Kapila peut se voir comme un solveur de type Godunov qui découle d'un solveur de Riemann simple. En effet, en prenant la fraction volumique  $z$  comme dernière variable du système acoustique (3.35) et en définissant les états intermédiaires pour la fraction volumique par :

$$\begin{aligned} z_g^* &= z_g + \phi_- K_g, \\ z_d^* &= z_d - \phi_+ K_d. \end{aligned}$$

nous retrouvons le schéma proposé par Eikelder et al [EDKT17]. Néanmoins, l'utilisation de la fraction volumique comme dernière variable ne permet pas de trouver des conditions sur les pentes pour rester dans le domaine convexe des solutions admissibles du modèle de Kapila.

Le schéma numérique en variables eulériennes  $\rho, \rho y, \rho u, \rho E$  et  $z$  pour l'étape acoustique du modèle de Kapila se déduit de la même façon que pour le modèle à cinq équations réduit. Les équations d'évolution pour l'étape acoustique sont alors données par :

$$\begin{cases} L_i \rho_i^\dagger = \rho_i^n, \\ L_i (\rho y)_i^\dagger = (\rho y)_i^n \\ L_i (\rho u)_i^\dagger = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \\ L_i (\rho E)_i^\dagger = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{p}_{i-\frac{1}{2}}^\# \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right), \end{cases} \quad (3.41)$$

où le terme  $L_i$  est toujours égal à  $1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right)$ . Pour la fraction volumique, le schéma explicite donne

$$L_i z_i^\dagger = L_i z_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} K_i^n \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\# - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\# \right).$$

Le schéma implicite pour la fraction volumique est détaillé dans la section 3.1.2.2.

### 3.1.2.1 Choix des pentes du solveur de Riemann et conditions de positivité

La solution obtenue à l'aide du schéma numérique (3.38) est une combinaison convexe entre les états intermédiaires gauche et droit et la solution à l'instant  $t^n$ . Ainsi, pour que la solution au temps  $n + 1$  soit toujours dans le domaine des solutions admissibles qui est convexe (voir la section 2.4.5.2 du chapitre 2), il faut s'assurer que les états intermédiaires sont aussi positifs. On peut trouver des conditions exactes sur la pente  $\bar{C}^-$  pour assurer la positivité du volume spécifique et de l'énergie interne. On peut aussi assurer que les fractions volumiques seront comprises entre 0 et 1. Les différentes conditions sur les pentes du solveur de Riemann sont données dans la proposition suivante :

#### Proposition 10

Notons  $r = \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^-}$  le rapport entre les pentes du solveur de Riemann, nous avons les conditions

exactes de positivité :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \vartheta_g^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\vartheta_g} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\vartheta_g} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-r\Delta u + \sqrt{d_{\vartheta_g}}}{2(1+r)\vartheta_g}, \\
 \vartheta_d^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\vartheta_d} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\vartheta_d} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-\Delta u + \sqrt{d_{\vartheta_d}}}{2r(1+r)\vartheta_d}, \\
 \varepsilon_g^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\varepsilon_g} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\varepsilon_g} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{r\Delta u(\Delta p + \Pi_g) + \sqrt{d_{\varepsilon_g}}}{4(1+r)^2\varepsilon_g + 2r^2(\Delta u)^2}, \\
 \varepsilon_d^* \geq 0 \quad \text{si } d_{\varepsilon_d} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{\varepsilon_d} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{\Delta u(\Pi_d - r\Delta p) + \sqrt{d_{\varepsilon_d}}}{4r(1+r)^2\varepsilon_d + 2r(\Delta u)^2}, \\
 z_g^* \geq 0 \quad \text{si } d_{z_g} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{z_g} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-r\Delta u + \sqrt{d_{z_g}}}{2(1+r)\vartheta_g \left( z_g + (1-z_g) \frac{\gamma_1(p_g + \pi_1)}{\gamma_2(p_g + \pi_2)} \right)}, \\
 z_g^* \leq 1 \quad \text{si } d_{1-z_g} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{1-z_g} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-r\Delta u + \sqrt{d_{1-z_g}}}{2(1+r)\vartheta_g \left( z_g \frac{\gamma_2(p_g + \pi_2)}{\gamma_1(p_g + \pi_1)} + 1 - z_g \right)}, \\
 z_d^* \geq 0 \quad \text{si } d_{z_d} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{z_d} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-\Delta u + \sqrt{d_{z_d}}}{2r(1+r)\vartheta_d \left( z_d + (1-z_d) \frac{\gamma_1(p_d + \pi_1)}{\gamma_2(p_d + \pi_2)} \right)}, \\
 z_d^* \leq 1 \quad \text{si } d_{1-z_d} \leq 0, \quad \text{ou si } d_{1-z_d} > 0 \text{ et } \bar{C}^- \geq \frac{-\Delta u + \sqrt{d_{1-z_d}}}{2r(1+r)\vartheta_d \left( z_d \frac{\gamma_2(p_d + \pi_2)}{\gamma_1(p_d + \pi_1)} + 1 - z_d \right)},
 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

où  $d_{\vartheta_g}$ ,  $d_{\vartheta_d}$ ,  $\Pi_g$  et  $\Pi_d$  sont définis dans la proposition 8, et les discriminants sont donnés par

$$\begin{aligned}
 d_{\varepsilon_g} &= r^2(\Delta u)^2(\Delta p + \Pi_g)^2 - 4\Pi_g\Delta p(2(1+r)^2\varepsilon_g + r^2(\Delta u)^2), \\
 d_{\varepsilon_d} &= (\Delta u)^2(r\Delta p - \Pi_d)^2 + 4\Pi_d\Delta p(2r(1+r)^2\varepsilon_d + r(\Delta u)^2), \\
 d_{z_g} &= r^2(\Delta u)^2 + 4\vartheta_g(1+r)\Delta p \left( z_g + (1-z_g) \frac{\gamma_1(p_g + \pi_1)}{\gamma_2(p_g + \pi_2)} \right), \\
 d_{z_d} &= (\Delta u)^2 - 4r\vartheta_d(1+r)\Delta p \left( z_d + (1-z_d) \frac{\gamma_1(p_d + \pi_1)}{\gamma_2(p_d + \pi_2)} \right), \\
 d_{1-z_g} &= r^2(\Delta u)^2 + 4\vartheta_g(1+r)\Delta p \left( z_g \frac{\gamma_2(p_g + \pi_2)}{\gamma_1(p_g + \pi_1)} + 1 - z_g \right), \\
 d_{1-z_d} &= (\Delta u)^2 - 4r\vartheta_d(1+r)\Delta p \left( z_d \frac{\gamma_2(p_d + \pi_2)}{\gamma_1(p_d + \pi_1)} + 1 - z_d \right).
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* La démonstration est basée sur les mêmes arguments que dans le cas du modèle à cinq équations réduit. Les détails des calculs sont aussi donnés en annexe B.  $\square$

Nous n'avons pas réussi à exprimer les conditions exactes pour assurer que les pressions des états intermédiaires gauche et droit  $p(\vartheta_{g,d}^*, \varepsilon_{g,d}^*, z_{g,d}^*)$  soient supérieures à  $\min(\pi_1, \pi_2)$ . Il est néanmoins possible de calculer les pentes à partir des conditions exactes de la proposition précédente, puis de vérifier si les pressions des états intermédiaires ont les bonnes propriétés. Si ce n'est pas le cas, nous augmentons les pentes jusqu'à ce que la vitesse du son du modèle de Kapila soit bien définie.

### 3.1.2.2 Version implicite de l'étape acoustique

Comme pour le modèle à cinq équations réduit, nous allons dériver un schéma numérique implicite pour résoudre l'étape acoustique du modèle de Kapila. Nous réutilisons la formulation IM1 détaillée dans l'algorithme 1 pour calculer de façon implicite le volumique spécifique, la vitesse et l'énergie interne. Ainsi, il ne reste plus qu'à impliciter la fraction volumique. Pour cela,

nous considérons l'équation sur la fraction volumique sous la forme

$$\partial_t z + K \partial_x u = 0, \quad (3.43)$$

où  $K = z(1-z) \frac{\rho_1 c_1^2 - \rho_2 c_2^2}{(1-z)\rho_1 c_1^2 + z\rho_2 c_2^2} = z(1-z) \frac{\tau_2 - \tau_1}{z\tau_1 + (1-z)\tau_2}$ . Pour rappel, la compressibilité du fluide  $k$  est égale à  $\tau_k = \frac{1}{\rho_k c_k^2}$ .

Dans la formulation implicite du schéma 3.43, nous cherchons à résoudre :

$$z_i^\dagger - z_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} z_i^\dagger \left(1 - z_i^\dagger\right) \frac{\tau_2 - \tau_1}{z_i^\dagger \tau_1 + \left(1 - z_i^\dagger\right) \tau_2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right) = 0,$$

ou de façon équivalente

$$(\tau_1 - \tau_2) \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right)\right) \left(z_i^\dagger\right)^2 + \left(\tau_2 - (\tau_1 - \tau_2) \left(z_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right)\right)\right) z_i^\dagger - \tau_2 z_i^n = 0. \quad (3.44)$$

Ainsi le schéma implicite pour la fraction volumique peut s'écrire comme une relation quadratique en  $z_i^\dagger$ . Il est alors possible de résoudre cette équation de façon exacte comme le montre la proposition suivante, tout en garantissant des bornes sur la solution.

### Proposition 11

*Sous la condition*

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right) > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.45)$$

le schéma implicite (3.44) a pour solution

$$z_i^\dagger = \frac{-b + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2a},$$

avec

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad (3.46)$$

$$a = (\tau_1 - \tau_2) \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right)\right), \quad (3.47)$$

$$b = \tau_2 - (\tau_1 - \tau_2) \left(z_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger\right)\right), \quad (3.48)$$

$$c = -\tau_2 z_i^n. \quad (3.49)$$

Ce schéma assure que la fraction volumique  $z_i^\dagger$  reste comprise entre 0 et 1.

### Remarque 15

Nous retrouverons la condition (3.45) dans l'étape de transport où elle apparaîtra comme une condition CFL (voir sections 3.2 et 3.3.1).

Avant de démontrer la proposition 11, nous démontrons le lemme suivant.

### Lemme 2

*Avec les notations définies précédemment, si la fraction volumique à l'instant  $n$  est inférieure à 1, nous avons l'inégalité suivante :*

$$a + b + c > 0. \quad (3.50)$$

*Démonstration.* Pour alléger les notations, on pose  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right)$ . Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 & a + b + c > 0, \\
 \Leftrightarrow & (\tau_1 - \tau_2)(1 + \lambda) + \tau_2 - (\tau_1 - \tau_2)(z_i^n + \lambda) - \tau_2 z_i^n > 0, \\
 \Leftrightarrow & (\tau_1 - \tau_2)(1 - z_i^n) + \tau_2(1 - z_i^n) > 0, \\
 \Leftrightarrow & \tau_1(1 - z_i^n) > 0,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

ce qui est vrai car  $z_i^n < 1$  et  $\tau_1 > 0$ .  $\square$

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 11.

*Démonstration.* Par souci de clarté, l'exposant  $\dagger$  ne sera pas indiqué dans la démonstration. Dans la première partie de la preuve, nous supposons que le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  de la forme quadratique (3.44) est positif. Nous voulons donc vérifier que la racine  $z_+$  est toujours comprise entre 0 et 1. Les deux racines de l'équation sont données par

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

Nous allons distinguer les cas  $a$  positif et  $a$  négatif. Si  $a > 0$ , nous savons que  $z_+ z_- = c/a < 0$  car  $c$  est négatif (voir (3.49)) et donc  $z_+$  et  $z_-$  sont de signes distincts. De plus, on sait que  $z_+ > z_-$ , donc nécessairement  $z_+$  est positif. Ainsi, il reste à montrer que  $z_+ < 1$ .

$$z_+ < 1 \Leftrightarrow \frac{-b + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2a} > 1 \Leftrightarrow \Delta^{\frac{1}{2}} < 2a + b \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 4a^2 + b^2 + 4ab \Leftrightarrow a + b + c > 0,$$

ce qui est vrai d'après le lemme 2. Ainsi, nous avons bien  $z_+$  entre 0 et 1 si  $a > 0$ .

Si  $a$  est négatif, nous savons que  $z_+ < z_-$  et que les deux racines sont du même signe. On veut montrer que  $z_+$  est compris entre 0 et 1. Tout d'abord, montrons que  $z_+$  est positif.  $z_+$  est positif si et seulement si

$$0 < \Delta^{\frac{1}{2}} < b \Leftrightarrow b^2 - 4ac < b^2 \Leftrightarrow -4ac < 0,$$

ce qui est vrai dans le cas  $a$  négatif,  $c$  étant toujours négatif.

Pour montrer que la racine  $z_+$  est inférieure à 1, nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde. Supposons que  $1 < z_+$ , nous avons alors

$$1 < z_+ \Leftrightarrow -b + \Delta^{\frac{1}{2}} < 2a \Leftrightarrow 0 < \Delta^{\frac{1}{2}} < 2a + b \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 4a^2 + b^2 + 4ab \Leftrightarrow a + b + c < 0,$$

ce qui est en contradiction avec le lemme précédent. Ainsi la racine  $z_+$  est bien comprise entre 0 et 1.

Nous voulons maintenant démontrer que le discriminant de la forme quadratique (3.44) est positif. Pour alléger les notations, on note  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \right)$ ,  $\Delta\tau = (\tau_1 - \tau_2)$  et  $\tau = \tau_2$ . L'équation (3.44) peut ainsi s'écrire :

$$\Delta\tau(1 + \lambda)z^2 + (\tau - \Delta\tau(z_i^n + \lambda))z - \tau z_i^n = 0. \tag{3.52}$$

On peut calculer le discriminant de (3.52) :

$$\Delta = (\tau - \Delta\tau(z_i^n + \lambda))^2 + 4\tau\Delta\tau(1 + \lambda)z_i^n.$$

Nous cherchons à montrer que ce discriminant est positif pour tout  $z_i^n$  compris entre 0 et 1. Tout d'abord, on remarque que la fonction  $\Delta : z_i^n \mapsto \Delta(z_i^n)$  est quadratique. On peut ensuite vérifier que la fonction est positive sur les bords du domaine de définition :

$$\begin{aligned}\Delta(z_i^n = 0) &= (\tau - \Delta\tau\lambda)^2 > 0, \\ \Delta(z_i^n = 1) &= (\tau + \Delta\tau(1 + \lambda))^2 > 0.\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que le discriminant ne s'annule pas sur le domaine  $[0, 1]$ . Pour cela, nous dérivons le discriminant par rapport à  $z_i^n$

$$\begin{aligned}\Delta'(z_i^n) &= 2\Delta\tau(\Delta\tau(\lambda + z_i^n) - \tau) + 4\tau\Delta\tau(1 + \lambda), \\ &= 2\Delta\tau(\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau + z_i^n\Delta\tau).\end{aligned}$$

Nous pouvons noter que

$$\begin{aligned}\Delta'(z_i^n = 0) &= 2\Delta\tau(\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau_2), \\ \Delta'(z_i^n = 1) &= 2\Delta\tau(\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta'(0)\Delta'(1) = 2(\Delta\tau)^2(\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau_2)(\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1).$$

Si  $\lambda$  est positif, le produit des dérivées du discriminant en  $z_i^n = 0$  et  $z_i^n = 1$  est positif. Dans ce cas, le discriminant ne peut pas être négatif sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Plaçons nous dans le cas  $\lambda$  négatif. Dans ce cas, il peut exister un extremum à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ . Soit  $z_e = -\frac{\lambda(\tau_1 + \tau_2) + \tau}{\Delta\tau}$  tel que  $\Delta'(z_e) = 0$ . Nous voulons vérifier le signe du discriminant pour l'extremum  $z_i^n = z_e$ . Après calculs, on trouve

$$\Delta(z_e) = -4\lambda(1 + \lambda)\tau_1\tau_2.$$

Si la condition CFL (3.56) de la partie transport est respectée, nous avons  $1 + \lambda > 0$ . Ainsi, on trouve bien que  $\Delta(z_e) > 0$ . Le discriminant de l'équation du second degré (3.52) est donc bien positif pour tout  $z_i^n$  compris entre 0 et 1.  $\square$

Dans cette section, nous avons présenté les schémas numériques pour l'étape acoustique avec les modèles à cinq équations réduit et de Kapila. Dans les deux cas, le schéma numérique repose sur l'utilisation d'un solveur de Riemann simple induisant un schéma de type Godunov. Ce formalisme nous permet d'assurer la positivité de la solution via des conditions sur les pentes du solveur de Riemann. De plus, des formulations implicites ont aussi été dérivées pour les deux modèles.

## 3.2 Étape de transport

Dans cette section, nous présentons la résolution numérique de l'étape de transport (3.5) de la méthode de splitting. La discrétisation retenue va permettre d'avoir un schéma globalement conservatif. Pour cela, les équations de transport sont réécrites avec un terme conservatif et un terme non conservatif proportionnel à la divergence de la vitesse. En utilisant la même discrétisation pour ce terme en vitesse que dans l'étape acoustique, le schéma global aura les bonnes propriétés. Notons que la résolution numérique de l'étape de transport ne dépend pas du modèle diphasique considéré.

L'étape de transport (3.5) consiste à résoudre le système d'advection des inconnues à la vitesse matérielle du fluide

$$\partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \tag{3.53}$$

où  $\phi$  peut représenter  $\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E$  ou  $z$ . Il peut se réécrire sous la forme suivante, avec un terme conservatif moins un terme non conservatif proportionnel à la divergence de la vitesse :

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.54)$$

La version unidimensionnelle de l'équation (3.54) est alors discrétisée par le schéma volumes finis suivant :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \frac{\Delta t}{\Delta x} \phi_i^\dagger (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \phi_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \quad (3.55)$$

Le choix de la vitesse de propagation de la phase de transport  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}$  est défini dans la suite pour assurer le caractère conservatif du schéma global qui sera démontré dans la section 3.3.1.

Notons que la condition de stabilité associée à l'étape de transport s'écrit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) < 1. \quad (3.56)$$

avec la notation classique  $\mathbf{u}^\pm = \frac{\mathbf{u} \pm |\mathbf{u}|}{2}$ . Sous cette condition de stabilité, la solution reste dans le domaine convexe des solutions admissibles pour les modèles à cinq équations réduit et de Kapila. En effet, toutes les inconnues  $\phi_i^{n+1}$  s'écrivent comme une combinaison convexe des valeurs de  $\phi^\dagger$  dans les mailles voisines.

### Remarque 16

Par définition, nous avons  $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^+ \geq \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^- \leq \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}$ . Si la condition de stabilité de l'étape de transport est vérifiée, nous avons la relation

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \right) > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

#### 3.2.1 Schéma décentré

Plusieurs choix sont possibles pour le flux  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ . Le choix le plus naturel consiste à prendre le flux décentré ou *upwind* défini par

$$\begin{cases} \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \phi_i^\dagger & \text{si } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \phi_{i+1}^\dagger & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.57)$$

Le schéma décentré se généralise naturellement dans le cas bidimensionnel sous la forme

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \phi_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} \phi_{ij}^\dagger, \quad (3.58)$$

où  $\mathbf{u}_{ij}$  est la vitesse à l'interface entre les cellules  $i$  et  $j$ . Le terme  $\phi_{ij}^\dagger$  est quant à lui défini par

$$\begin{cases} \phi_{ij}^\dagger = \phi_i^\dagger & \text{si } \mathbf{u}_{ij} > 0, \\ \phi_{ij}^\dagger = \phi_j^\dagger & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est aussi possible de dériver une version à l'ordre deux du schéma décentré pour l'étape de transport. Pour cela, en dimension 1, nous allons encore reconstruire des états gauche  $\phi_{g,i+\frac{1}{2}}$  et droit  $\phi_{d,i+\frac{1}{2}}$  pour chaque interface. Dans ce cas, le flux *upwind* devient

$$\begin{cases} \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \phi_{g,i+\frac{1}{2}}^\dagger & \text{si } \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \phi_{d,i+\frac{1}{2}}^\dagger & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le passage à l'ordre deux du schéma décentré permet d'augmenter la précision du schéma mais ne fait pas totalement disparaître la diffusion sur la fraction volumique.

Dans cette étude, nous sommes essentiellement concernés par des écoulements diphasiques où les fluides en présence ne sont pas mélangés initialement. Pour de telles conditions initiales, nous avons vu que l'étape acoustique ne faisait pas varier les fractions volumiques et massiques. Cependant, le schéma décentré pour l'étape de transport va naturellement diffuser et notamment sur la fraction volumique. Ceci va donc entraîner un étalement numérique de l'interface avec l'apparition d'une zone de mélange.

Plusieurs approches existent dans la littérature pour limiter la diffusion numérique lors de la résolution d'une équation de transport. Nous pouvons notamment citer les méthodes de reconstruction d'interface *Volume of Fluid* [HN81], *Moment of Fluid* [AS07, DS08, BHMS13] ou *Simple Line Interface Calculation* [NW76] et le schéma *Vofire* [DLL07, FK13]. Nous pouvons aussi mentionner la méthode antidiffusive détaillée dans les travaux de thèse de Lagoutière [Lag00, DL99]. Cette technique est basée sur un décentrement aval de la solution, ce qui est équivalent à l'utilisation du limiteur *UltraBee* [Tor97]. Cette approche d'antidiffusion a été étendue au modèle à cinq équations réduit par Kokh et Lagoutière [KL10] dans le cadre d'une méthode Lagrange-Projection explicite. Une extension aux écoulements multiphasiques a aussi été proposée [FK14]. Chiapolino et al. [CSN17] ont récemment proposé une méthode pour limiter la diffusion de l'interface matérielle entre deux fluides. Une autre approche consiste à utiliser le schéma de Glimm [Gli65] pour éviter totalement la diffusion numérique de l'interface. Cette méthode a été utilisée en 2D sur grilles cartésiennes pour la simulation d'écoulements compressibles diphasiques [Jun13, HJ13]. Pour plus de détails sur les méthodes garantissant la préservation des profils raides, nous renvoyons à [DKL16].

Pour limiter la diffusion numérique des interfaces matérielles, nous avons choisi d'utiliser les méthodes d'antidiffusion de [KL10] et la méthode de Glimm proposée par Jung [Jun13].

### 3.2.2 Antidiffusion sur la fraction volumique

Dans cette section, nous détaillons brièvement le schéma d'antidiffusion proposé par Kokh et Lagoutière [KL10] pour l'étape de transport. L'objectif est de déterminer les flux  $\rho_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ ,  $(\rho y)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ ,  $(\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ ,  $(\rho E)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$  et  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$  pour le schéma (3.55) de l'étape de transport.

L'idée consiste essentiellement à construire une valeur d'interface adéquate pour la fraction volumique  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ . Les autres valeurs d'interface pour  $\rho$ ,  $\rho y$ ,  $\rho u$ ,  $\rho E$  sont calculées en utilisant les valeurs décentrés aux interfaces des quantités  $\rho_k^\dagger$  et  $(\rho_k \varepsilon_k)^\dagger$  de chaque phase :

$$\begin{aligned} \rho_{i+\frac{1}{2}}^\dagger &= z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger (\rho_1)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger + (1 - z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger) (\rho_2)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger, \\ \rho_{i+\frac{1}{2}}^\dagger y_{i+\frac{1}{2}}^\dagger &= z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger (\rho_1)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger y_{i+\frac{1}{2}}^\dagger, \\ \rho_{i+\frac{1}{2}}^\dagger \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^\dagger &= z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger (\rho_1 \varepsilon_1)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger + (1 - z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger) (\rho_2 \varepsilon_2)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pour les variables  $\rho_1^\dagger$ ,  $\rho_2^\dagger$ ,  $(\rho_1 \varepsilon_1)^\dagger$  et  $(\rho_2 \varepsilon_2)^\dagger$ , nous avons choisi la valeur décentrée suivant le signe de  $u_{i+\frac{1}{2}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho_k)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = (\rho_k)_i^\dagger & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ (\rho_k)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = (\rho_k)_{i+1}^\dagger & \text{sinon.} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\rho_k \varepsilon_k)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = (\rho_k \varepsilon_k)_i^\dagger & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ (\rho_k \varepsilon_k)_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = (\rho_k \varepsilon_k)_{i+1}^\dagger & \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Il reste donc à définir le flux  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ . L'idée est de déterminer l'intervalle  $I_{i+\frac{1}{2}}$  qui assure la stabilité et la consistance pour la fraction volumique puis de prendre la valeur la plus décentrée en aval.

Pour assurer la consistance du flux  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$ , nous cherchons à imposer que la fraction volumique reste comprise entre les valeurs minimales et maximales de la fraction volumique à l'instant  $n$ . Dans la suite, nous notons

$$m_{i+\frac{1}{2}} = \min(z_i^n, z_{i+1}^n) \text{ et } M_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i^n, z_{i+1}^n),$$

les valeurs minimales et maximales.

La deuxième condition à respecter consiste à assurer la stabilité de la solution  $z_i^{n+1}$ . Dans le cas où les vitesses  $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}$  sont positives, une condition suffisante de stabilité pour  $z_i^{n+1}$  est donnée par

$$m_{i-\frac{1}{2}} \leq z_i^{n+1} \leq M_{i-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la forme du schéma (3.55), on peut déduire que le flux  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$  doit être contenu dans l'intervalle  $[a_{i+\frac{1}{2}}, A_{i+\frac{1}{2}}]$ , où

$$a_{i+\frac{1}{2}} = z_i^n + (M_{i-\frac{1}{2}} - z_i^n) \left( \frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.61)$$

$$A_{i+\frac{1}{2}} = z_i^n + (m_{i-\frac{1}{2}} - z_i^n) \left( \frac{\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.62)$$

De la même façon, dans le cas où  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} < 0$  et  $\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}} < 0$ , l'intervalle de stabilité est défini par  $[a_{i+\frac{1}{2}}, A_{i+\frac{1}{2}}]$ , où

$$a_{i+\frac{1}{2}} = z_{i+1}^n + (M_{i+\frac{3}{2}} - z_{i+1}^n) \left( \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}}}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.63)$$

$$A_{i+\frac{1}{2}} = z_{i+1}^n + (m_{i+\frac{3}{2}} - z_{i+1}^n) \left( \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}}}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.64)$$

Nous pouvons ainsi définir l'intervalle  $I_{i+\frac{1}{2}} = [m_{i+\frac{1}{2}}, M_{i+\frac{1}{2}}] \cap [a_{i+\frac{1}{2}}, A_{i+\frac{1}{2}}]$  qui assure la stabilité et la consistance pour la fraction volumique. La valeur du flux  $z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger$  est alors choisie en prenant la valeur la plus décentrée en aval :

— Si  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} > 0$

— si  $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} > 0$ , on calcule les bornes de l'intervalle  $I_{i+\frac{1}{2}} = [\omega_{i+\frac{1}{2}}, \Omega_{i+\frac{1}{2}}]$ , puis

$$\begin{cases} \text{si } z_{i+1}^n \leq \omega_{i+\frac{1}{2}} & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \omega_{i+\frac{1}{2}}, \\ \text{si } \omega_{i+\frac{1}{2}} < z_{i+1}^n < \Omega_{i+\frac{1}{2}} & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = z_{i+1}^n, \\ \text{si } \Omega_{i+\frac{1}{2}} \leq z_{i+1}^n & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \Omega_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

— si  $\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \leq 0$ , on prend la valeur *upwind*

$$z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = z_i^n.$$

— Si  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} < 0$

— si  $\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}} \geq 0$ , on prend la valeur *upwind*

$$z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = z_{i+1}^n.$$

— Si  $\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2}} < 0$ , on calcule les bornes de l'intervalle  $I_{i+\frac{1}{2}} = [\omega_{i+\frac{1}{2}}, \Omega_{i+\frac{1}{2}}]$ , puis

$$\begin{cases} \text{si } z_i^n \leq \omega_{i+\frac{1}{2}} & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \omega_{i+\frac{1}{2}}, \\ \text{si } \omega_{i+\frac{1}{2}} < z_i^n < \Omega_{i+\frac{1}{2}} & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = z_i^n, \\ \text{si } \Omega_{i+\frac{1}{2}} \leq z_i^n & \text{alors } z_{i+\frac{1}{2}}^\dagger = \Omega_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Pour l'extension à l'ordre deux du schéma d'antidiffusion, nous utilisons la méthode décrite dans [FBC<sup>+</sup>11]. L'idée est de reconstruire des états gauche et droit pour toutes les variables apparaissant dans la définition du flux, sauf la fraction volumique  $z$  pour laquelle le flux antidiffusif est utilisé.

Pour traiter des configurations bidimensionnelles, Kokh et Lagoutière [KL10] utilisent un splitting directionnel. Si l'on note  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  la vitesse du fluide, le système à cinq équation (3.2) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_1} \mathbf{F} & + \partial_{x_2} \mathbf{G} & = 0, \\ \partial_t z + \Xi \partial_{x_1} u_1 + u_1 \partial_{x_1} z + \Xi \partial_{x_2} u_2 + u_2 \partial_{x_2} z & = 0, \end{cases} \quad (3.65)$$

avec  $\mathbf{U} = (\rho, \rho y, \rho u_1, \rho u_2, \rho E)^T$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\rho u_1, \rho y u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, (\rho E + p) u_1)^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho u_2, \rho y u_2, \rho u_2^2 + p, \rho u_1 u_2, (\rho E + p) u_2)^T. \end{aligned}$$

L'utilisation du splitting directionnel revient à résoudre successivement les problèmes unidimensionnels

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_1} \mathbf{F} & = 0, \\ \partial_t z + \Xi \partial_{x_1} u_1 + u_1 \partial_{x_1} z & = 0, \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_2} \mathbf{G} & = 0, \\ \partial_t z + \Xi \partial_{x_2} u_2 + u_2 \partial_{x_2} z & = 0, \end{cases}$$

dans chaque direction d'espace. Cette méthode n'est valable que pour des maillages cartésiens. Cependant, dans le problème d'ablation multiphasique considéré ici, la fusion de la partie solide va entraîner une déformation de nos maillages structurés. Nous proposons une approche légèrement différente pour résoudre l'équation de transport

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{où } \phi \in \{\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z\}, \quad (3.66)$$

sur des maillages 2D cartésiens peu déformés. Une discrétisation bidimensionnelle de l'équation (3.66) est donnée par

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \phi_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} \phi_{ij}^\dagger. \quad (3.67)$$

Nous allons décomposer le schéma précédent suivant les deux directions d'espace. Dans la suite, nous utilisons la notation à deux indices  $\mathbf{i} = (l, m)$  pour plus de clarté. Soit  $\phi_{x_1}$  et  $\phi_{x_2}$  tels que

$$\begin{aligned} (\phi_{x_1})_{l,m}^{n+1} &= \phi_{l,m}^\dagger + 2 \frac{\Delta t}{|\Omega_{l,m}|} \phi_{l,m}^\dagger \left( |\Gamma_{l+\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m} - |\Gamma_{l-\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l-\frac{1}{2},m} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\Delta t}{|\Omega_{l,m}|} \left( |\Gamma_{l+\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m} \phi_{l+\frac{1}{2},m}^\dagger - |\Gamma_{l-\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l-\frac{1}{2},m} \phi_{l-\frac{1}{2},m}^\dagger \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (\phi_{x_2})_{l,m}^{n+1} &= \phi_{l,m}^\dagger + 2 \frac{\Delta t}{|\Omega_{l,m}|} \phi_{l,m}^\dagger \left( |\Gamma_{l,m+\frac{1}{2}}| \mathbf{u}_{l,m+\frac{1}{2}} - |\Gamma_{l,m-\frac{1}{2}}| \mathbf{u}_{l,m-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad - 2 \frac{\Delta t}{|\Omega_{l,m}|} \left( |\Gamma_{l,m+\frac{1}{2}}| \mathbf{u}_{l,m+\frac{1}{2}} \phi_{l,m+\frac{1}{2}}^\dagger - |\Gamma_{l,m-\frac{1}{2}}| \mathbf{u}_{l,m-\frac{1}{2}} \phi_{l,m-\frac{1}{2}}^\dagger \right).
 \end{aligned}$$

Les deux composantes  $\phi_{x_1}$  et  $\phi_{x_2}$  vérifient alors

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( (\phi_{x_1})_i^{n+1} + (\phi_{x_2})_i^{n+1} \right).$$

Nous utilisons alors la méthode proposée par Kokh et Lagoutière sur chaque composante pour déterminer les flux. Pour la première direction d'espace, nous prenons la valeur décentrée suivant le signe de  $\mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m}$  pour les variables  $\rho_1^\dagger, \rho_2^\dagger, (\rho_1 \varepsilon_1)^\dagger$  et  $(\rho_2 \varepsilon_2)^\dagger$ . Pour le flux sur la fraction volumique  $z_{l+\frac{1}{2},m}^\dagger$ , nous cherchons à déterminer l'intervalle  $I_{l+\frac{1}{2},m}$  qui assure la stabilité et la consistance pour la fraction volumique puis de prendre la valeur la plus décentrée en aval. Pour assurer la consistance, nous voulons assurer que le flux  $z_{l+\frac{1}{2},m}^\dagger$  soit contenu dans l'intervalle  $[m_{l+\frac{1}{2},m}, M_{l+\frac{1}{2},m}]$ , où

$$m_{l+\frac{1}{2},m} = \min(z_{l,m}^n, z_{l+1,m}^n), \quad (3.68)$$

$$M_{l+\frac{1}{2},m} = \max(z_{l,m}^n, z_{l+1,m}^n). \quad (3.69)$$

Dans le cas où les vitesses  $\mathbf{u}_{l-\frac{1}{2},m}$  et  $\mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m}$  sont positives, pour assurer la stabilité de la solution, le flux  $z_{l+\frac{1}{2},m}^\dagger$  doit être contenu dans l'intervalle  $[a_{l+\frac{1}{2},m}, A_{l+\frac{1}{2},m}]$ , où

$$a_{l+\frac{1}{2},m} = z_{l,m}^n + \frac{M_{l-\frac{1}{2},m} - z_{l,m}^n}{|\Gamma_{l+\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m}} \left( |\Gamma_{l-\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l-\frac{1}{2},m} - \frac{|\Omega_{l,m}|}{2\Delta t} \right), \quad (3.70)$$

$$A_{l+\frac{1}{2},m} = z_{l,m}^n + \frac{m_{l+\frac{1}{2},m} - z_{l,m}^n}{|\Gamma_{l+\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l+\frac{1}{2},m}} \left( |\Gamma_{l-\frac{1}{2},m}| \mathbf{u}_{l-\frac{1}{2},m} - \frac{|\Omega_{l,m}|}{2\Delta t} \right). \quad (3.71)$$

Les autres cas suivant le signe de la vitesse peuvent être calculés de façon analogue. Après avoir déterminé les différents intervalles, la valeur du flux  $z_{l+\frac{1}{2},m}^\dagger$  est calculée de la même façon que dans le cas 1D.

Cette approche basée sur une décomposition de la solution suivant les directions de maillage n'est valable que pour des maillages cartésiens peu déformés. L'utilisation d'un schéma vraiment bidimensionnel pour empêcher la diffusion de l'interface matérielle permettrait de surmonter cette limitation.

### 3.2.3 Méthode de Glimm

La dernière méthode de résolution pour l'étape de transport n'est pas basée sur un schéma volumes finis mais sur la méthode de la projection aléatoire de Glimm [Jun13]. Pour cette méthode, nous avons besoin de définir un nombre aléatoire  $\omega$  compris strictement entre 0 et 1. La projection aléatoire associée au nombre aléatoire  $\omega$  est définie par

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \phi_{i-1}^\dagger & \text{si } \omega < \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}, \\ \phi_i^\dagger & \text{si } \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \leq \omega \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}, \\ \phi_{i+1}^\dagger & \text{si } \omega > 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.72)$$

Notons que le nombre aléatoire  $\omega$  ne dépend pas de la maille considérée mais seulement de l'itération en temps. Pour déterminer ce nombre aléatoire, nous utilisons la (5,3) suite de Van der Corput à chaque itération. Une illustration de la méthode est fournie en figure 3.5.

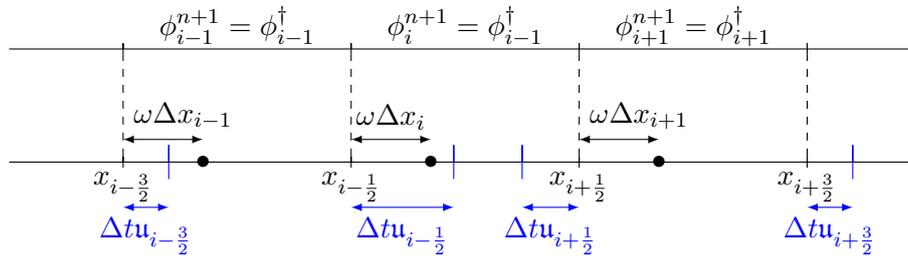


FIGURE 3.5 – Calcul de la solution dans les mailles  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$  pour la méthode de Glimm.

Si cette méthode de projection aléatoire est appliquée dans tout le domaine de calcul, Jung [Jun13] montre que la méthode introduit des instabilités pour des chocs forts. Il propose alors de n'utiliser la projection de Glimm qu'au niveau des interfaces matérielles entre les deux phases. Dans les zones de phase pure, le schéma décentré sera utilisé. Dans la suite et par souci de simplicité, nous appellerons la méthode de Glimm cette méthode mixte entre le schéma décentré pour les zones pures et la projection aléatoire de Glimm pour les zones de mélange. Dans le cas bidimensionnel, nous utiliserons un splitting directionnel. Cette méthode de projection ne pourra donc être utilisée que sur des maillages cartésiens dans les configurations 2D.

### Remarque 17

Les méthodes d'antidiffusion et de Glimm présentées précédemment n'ont de sens que pour des problèmes à interface. Nous ne les utiliserons pas avec le modèle de Kapila pour traiter des véritables mélanges physiques.

## 3.3 Propriétés du schéma global

Après avoir présenté la résolution numérique de l'étape acoustique pour les deux modèles diphasiques et de l'étape de transport, l'objectif de cette section est de détailler les propriétés du schéma global. Ce schéma global est défini par les relations (3.17) et (3.55) pour le modèle à cinq équations réduit. Pour le modèle de Kapila, l'étape acoustique est remplacée par les relations (3.41).

### 3.3.1 Caractère conservatif du schéma global

Tout d'abord, nous pouvons montrer que le schéma est conservatif si la même vitesse d'interface discrète est utilisée dans les étapes acoustique et de transport. En effet, nous avons la proposition suivante :

#### Proposition 12

*Le schéma global obtenu à partir de la méthode de splitting pour les deux modèles diphasiques considérés est conservatif pour les variables  $\rho, \rho y, \rho u, \rho E$  si la vitesse de la phase de transport est égale à l'opposée de la première composante du flux numérique  $H_{i+1/2}^\#$  de l'étape acoustique, i.e.  $u = \bar{u}^\#$ . Ceci est vrai indépendamment du traitement explicite ou implicite de l'étape acoustique.*

*Démonstration.* Le schéma numérique pour l'étape de transport (3.55) s'écrit dans le cas des flux décentré ou antidiffusif

$$\phi_i^{n+1} = \left( 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \phi_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \phi_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right).$$

Comme pour l'étape acoustique, notons  $\mathfrak{L}_i$  le terme  $1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}} \right)$ . Dans la suite, nous utiliserons la notation  $\llbracket F \rrbracket_i = F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}$ , pour désigner la différence de toute quantité  $F$  définie aux interfaces. Ainsi, le schéma (3.55) pour l'étape de transport s'écrit

$$\phi_i^{n+1} = \mathfrak{L}_i \phi_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \mathbf{u} \phi^\dagger \rrbracket_i, \quad (3.73)$$

où  $\phi$  vaut  $\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E$  ou  $z$ .

En combinant le schéma numérique (3.73) pour l'étape de transport avec les formules de l'étape acoustique (3.17) ou (3.41), nous pouvons écrire le schéma global qui permet de calculer l'état au temps  $t^{n+1}$  à partir de celui au temps  $n$ . En effet, nous avons

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} &= \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \mathbf{u} \rho^\dagger \rrbracket_i, \\ (\rho y)_i^{n+1} &= \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} (\rho y)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \mathbf{u} (\rho y)^\dagger \rrbracket_i, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \llbracket \mathbf{u} (\rho u)^\dagger \rrbracket_i + \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} \llbracket \bar{p}^\# \rrbracket_i \right), \\ (\rho E)_i^{n+1} &= \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \llbracket \mathbf{u} (\rho E)^\dagger \rrbracket_i + \frac{\mathfrak{L}_i}{L_i} \llbracket \bar{p}^\# \bar{u}^\# \rrbracket_i \right). \end{cases} \quad (3.74)$$

Nous pouvons voir que le schéma global (3.74) est conservatif si nous avons  $\mathfrak{L}_i = L_i$ . Ce choix détermine la vitesse de propagation à une interface comme l'opposée de la première composante du flux numérique  $H_{i+1/2}^\#$  du schéma acoustique. En effet,  $\mathfrak{L}_i = L_i$  équivaut à  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_i = \llbracket \bar{u}^\# \rrbracket_i$ , ce qui est vrai si  $\mathbf{u}_{i+1/2} = \bar{u}_{i+1/2}^\#$  à chaque interface, où l'on rappelle que  $\bar{u}_{i+1/2}^\#$  est définie par (3.13), soit

$$\mathbf{u}_{i+1/2} = \bar{u}_{i+1/2}^\# = \frac{\bar{C}^- u_i^\# + \bar{C}^+ u_{i+1}^\#}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{p_{i+1}^\# - p_i^\#}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}. \quad (3.75)$$

Finalement, avec ce choix de vitesse de propagation (3.75), le schéma global pour la version 1D du système (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \bar{u}^\# \rho^\dagger \rrbracket_i, \\ (\rho y)_i^{n+1} &= (\rho y)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \bar{u}^\# (\rho y)^\dagger \rrbracket_i, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \bar{u}^\# (\rho u)^\dagger + \bar{p}^\# \rrbracket_i, \\ (\rho E)_i^{n+1} &= (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \llbracket \bar{u}^\# (\rho E)^\dagger + \bar{p}^\# \bar{u}^\# \rrbracket_i. \end{cases} \quad (3.76)$$

où les quantités au temps  $t^\dagger$  sont définies par (3.17) et  $\# = n$  ou  $\dagger$ . Ce schéma global est clairement conservatif pour les variables  $\rho, \rho y, \rho u, \rho E$  indépendamment du traitement implicite ou explicite de la phase acoustique.  $\square$

**Remarque 18**

Dans le cas bidimensionnel, la proposition reste vraie. En utilisant la vitesse de face issue de l'étape acoustique dans la phase de transport, le schéma global 2D est conservatif. En effet, le schéma global résultant de la stratégie de splitting s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^\# \rho_{ij}^\dagger, \\ (\rho y)_i^{n+1} = (\rho y)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^\# (\rho y)_{ij}^\dagger, \\ (\rho \mathbf{u})_i^{n+1} = (\rho \mathbf{u})_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \left( \bar{u}_{ij}^\# (\rho \mathbf{u})_{ij}^\dagger + \bar{p}_{ij}^\# \mathbf{n}_{ij} \right), \\ (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \left( \bar{u}_{ij}^\# (\rho E)_{ij}^\dagger + \bar{p}_{ij}^\# \bar{u}_{ij}^\# \right). \end{array} \right. \quad (3.77)$$

Le schéma est clairement conservatif pour les masses de chaque fluide, la quantité de mouvement et l'énergie totale.

Si la méthode mixte entre le schéma décentré et la projection de Glimm est utilisé dans l'étape de transport, le schéma global dépend de la variable aléatoire  $\omega$ . Jung démontre que dans ce cas, le schéma global est conservatif en moyenne [Jun13].

### 3.3.2 Préservation des discontinuités de contact

Une autre propriété importante d'un schéma numérique consiste à ne pas créer d'oscillations à l'interface entre les deux fluides. Nous avons vu dans le chapitre précédent que la vitesse et la pression étaient les invariants de Riemann pour la discontinuité de contact. Ainsi, nous souhaitons vérifier que les schémas présentés préservent bien des profils de vitesse et de pression constants au travers des interfaces matérielles.

**Définition 7**

On dira qu'un schéma préserve les discontinuités de contact si en partant d'un état tel que

$$p_i^n = p_0, \quad u_i^n = u_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

où  $p_0$  et  $u_0$  sont des constantes, le schéma numérique conserve les profils de pression et de vitesse constants

$$p_i^{n+1} = p_0, \quad u_i^{n+1} = u_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Dans un premier temps, nous montrons que les schémas proposés pour l'étape acoustique préservent les discontinuités de contact.

**Proposition 13**

Pour le modèle diphasique à cinq équations réduit et celui de Kapila, les schémas (3.17) ou (3.41) de l'étape acoustique préservent les discontinuités de contact.

*Démonstration.* En effet, d'après la formule (3.13), nous avons en explicite

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1/2}^n &= \frac{\bar{C}^- u_i^n + \bar{C}^+ u_{i+1}^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} = u_0, \\ \bar{p}_{i+1/2}^n &= \frac{\bar{C}^+ p_i^n + \bar{C}^- p_{i+1}^n}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} - \frac{\bar{C}^- \bar{C}^+}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} (u_{i+1}^n - u_i^n) = p_0. \end{aligned}$$

Dans la formulation implicite IM1, la résolution du système linéaire (3.30) nous donne  $u_i^\dagger = u_0$  et  $p_i^\dagger = p_0$  pour tout  $i$ . Par conséquent, les vitesses et pressions sur l'interface  $\bar{u}_{i+1/2}^\dagger = u_0$  et  $\bar{p}_{i+1/2}^\dagger = p_0$  d'après la relation (3.13). Donc, nous avons bien  $\bar{u}_{i+1/2}^\# = u_0$  et  $\bar{p}_{i+1/2}^\# = p_0$  en explicite et en implicite avec la formulation IM1.

Rappelons que l'étape acoustique (3.17) ou (3.41) s'écrit

$$\begin{aligned} L_i \rho_i^\dagger &= \rho_i^n, \\ L_i (\rho y)_i^\dagger &= (\rho y)_i^n, \\ L_i (\rho u)_i^\dagger &= (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{p}_{i+1/2}^\# - \bar{p}_{i-1/2}^\#), \\ L_i (\rho E)_i^\dagger &= (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{p}_{i+1/2}^\# \bar{u}_{i+1/2}^\# - \bar{p}_{i+1/2}^\# \bar{u}_{i-1/2}^\#), \\ L_i z_i^\dagger &= z_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Xi_i^n - z_i^n) (\bar{u}_{i+1/2}^\# - \bar{u}_{i-1/2}^\#), \end{aligned}$$

où  $L_i = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{u}_{i+1/2}^\# - \bar{u}_{i-1/2}^\#)$ .

Ainsi, le fait que  $\bar{u}_{i+1/2}^\#$  et  $\bar{p}_{i+1/2}^\#$  soient constants implique directement que  $L_i = 1$  et  $(\rho, \rho y, \rho u, \rho E, z)_i^\dagger = (\rho, \rho y, \rho u, \rho E, z)_i^n$ . Par conséquent, la densité, la vitesse, l'énergie totale et les fractions volumiques et massiques restent constantes durant l'étape acoustique. Nous en déduisons directement que l'énergie interne n'est pas modifiée par l'étape acoustique ce qui implique que la pression  $p_i^\dagger = p(\rho_i^\dagger, \varepsilon_i^\dagger, z_i^\dagger) = p(\rho_i^n, \varepsilon_i^n, z_i^n)$  est égale à  $p_0$ .

Ainsi, les schémas numériques de l'étape acoustique préservent bien les discontinuités de contact.  $\square$

#### Proposition 14

Le schéma décentré (3.55)-(3.57) pour l'étape de transport préserve aussi les discontinuités de contact.

*Démonstration.* L'étape de transport s'écrit

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger L_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} [[\bar{u} \phi^\dagger]]_i,$$

Dans le cas d'une discontinuité de contact, nous avons  $\bar{u} = u_0$  et  $L_i = 1$ , et donc

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - \phi_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right),$$

Dans la suite, nous supposons sans perte de généralité que la vitesse de référence  $u_0$  est positive. Dans ce cas, le schéma de transport décentré pour la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} (\rho u)_i^{n+1} &= (\rho u)_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( (\rho u)_i^\dagger - (\rho u)_{i-1}^\dagger \right) \\ &= u_0 \left( \rho_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \rho_i^\dagger - \rho_{i-1}^\dagger \right) \right) \\ &= u_0 \rho_i^{n+1}, \end{aligned}$$

ainsi  $u_i^{n+1} = u_0$  pour tout  $i$  : le profil de vitesse constant est bien préservé. De la même façon, nous pouvons écrire le schéma pour la fraction volumique :

$$z_i^{n+1} = z_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( z_i^\dagger - z_{i-1}^\dagger \right). \quad (3.78)$$

Pour une loi d'état de type gaz raide avec une énergie interne de référence nulle, rappelons que la pression de mélange (2.42) s'écrit

$$p\xi = \rho\varepsilon - \omega,$$

où  $\xi = \frac{1}{\gamma-1}$  et  $\omega = \frac{\gamma\pi}{\gamma-1}$  sont les paramètres de mélange (2.41). Dans le cas d'un mélange de gaz raides, les paramètres du mélange pour la cellule  $i$ ,  $\xi(z_i) = \sum_{k=1}^2 (z_k)_i \xi_k$  et  $\omega(z_i) = \sum_k (z_k)_i \omega_k$ , sont des combinaisons linéaires de la fraction volumique. Ainsi  $\xi(z_i^{n+1})$  et  $\omega(z_i^{n+1})$  vérifient des relations du type (3.78) :

$$\begin{aligned}\xi(z_i^{n+1}) &= \xi(z_i^\dagger) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \xi(z_i^\dagger) - \xi(z_{i-1}^\dagger) \right), \\ \omega(z_i^{n+1}) &= \omega(z_i^\dagger) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \omega(z_i^\dagger) - \omega(z_{i-1}^\dagger) \right).\end{aligned}\tag{3.79}$$

Nous allons maintenant déterminer l'évolution de la pression à partir de la relation sur l'énergie. L'équation (3.55) implique

$$(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( (\rho E)_i^\dagger - (\rho E)_{i-1}^\dagger \right).$$

Comme  $\rho E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}$ , on a

$$\left( \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2} \right)_i^{n+1} = \left( \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2} \right)_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \left( \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2} \right)_i^\dagger - \left( \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2} \right)_{i-1}^\dagger \right),$$

soit

$$(\rho\varepsilon)_i^{n+1} = (\rho\varepsilon)_i^\dagger - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( (\rho\varepsilon)_i^\dagger - (\rho\varepsilon)_{i-1}^\dagger \right).$$

Sachant que nous avons  $\rho\varepsilon = \frac{p+\gamma(z)\pi(z)}{\gamma(z)-1} = p\xi(z) + \omega(z)$ , l'équation d'évolution de la pression est alors donnée par

$$\begin{aligned}p_i^{n+1}\xi(z_i^{n+1}) &= p_0 \left( \xi(z_i^\dagger) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \xi(z_i^\dagger) - \xi(z_{i-1}^\dagger) \right) \right), \\ &\quad - \omega(z_i^{n+1}) + \omega(z_i^\dagger) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left( \omega(z_i^\dagger) - \omega(z_{i-1}^\dagger) \right).\end{aligned}$$

D'après (3.79), on a donc  $p_i^{n+1} = p_0$  pour tout  $i$ . Les profils de pression constants sont donc aussi conservés par le schéma décentré pour l'étape de transport.  $\square$

Pour le schéma antidiffusif, Kokh et Lagoutière ont démontré qu'il préserve aussi les discontinuités de contact :

**Proposition 15 (Kokh et Lagoutière [KL10])**

*Le schéma antidiffusif préserve les états suivants. Si*

$$p_i^n = p_0, \quad u_i^n = u_0, \quad (\rho_1)_i^n = (\rho_1)_0, \quad (\rho_2)_i^n = (\rho_2)_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

*alors, la solution de l'étape de transport vérifie*

$$p_i^{n+1} = p_0, \quad u_i^{n+1} = u_0, \quad (\rho_1)_i^{n+1} = (\rho_1)_0, \quad (\rho_2)_i^{n+1} = (\rho_2)_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Pour la méthode mixte entre le schéma décentré et la projection de Glimm présentée dans la section 3.2.3, Jung [Jun13] démontre que les états  $u$  et  $p$  constants sont conservés. De plus, le schéma préserve les discontinuités sur la vitesse transverse à l'interface entre deux fluides.

**Proposition 16 (Jung [Jun13])**

Le schéma de Glimm préserve les états suivants. Si

$$p_i^n = p_0, \quad u_i^n = u_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

avec éventuellement une discontinuité sur la vitesse transverse telle que

$$v_i^n = \begin{cases} v_0 & \text{si } z_i^n = 0, \\ v_1 & \text{si } z_i^n = 1, \end{cases}$$

alors, la solution de l'étape de transport vérifie

$$p_i^{n+1} = p_0, \quad u_i^{n+1} = u_0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

De plus, la solution préserve le saut sur la vitesse transverse

$$v_i^{n+1} = \begin{cases} v_0 & \text{si } z_i^{n+1} = 0, \\ v_1 & \text{si } z_i^{n+1} = 1. \end{cases}$$

### 3.4 Résultats numériques pour le modèle à cinq équations réduit

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques obtenus sur des cas tests mono et bi-dimensionnels avec le schéma basé sur l'approche Lagrange-Projection présentée précédemment. Dans la suite, on note EXEX le schéma explicite pour l'étape acoustique et l'étape de transport. Dans ce schéma, notons que les pentes du solveur de Riemann sont identiques,  $\bar{C}^- = \bar{C}^+$ . On désignera par EXEX( $r \neq 1$ ) le schéma explicite-explicite avec des pentes du solveur de Riemann différentes, voir section 3.1.1.1. Dans ce cas, le ratio entre les pentes est égal à  $r_0 = \frac{\rho_d c_d}{\rho_g c_g}$ . Rappelons que nous avons présenté dans la section 3.1.1.3 trois versions implicites du schéma de l'étape acoustique : IMN et IM1 et IM2. Dans la suite, sauf mention contraire, le schéma IMEX désignera la version implicite IM1 du schéma pour l'étape acoustique et le schéma explicite pour l'étape de transport.

Les résultats obtenus avec les schémas basés sur l'approche splittée présentés précédemment sont comparés avec les schémas directs reposants sur des schémas de type Roe [ACK02]. La version explicite est notée EX dans la suite, et la formulation implicite est désignée par IM.

#### 3.4.1 Comparaison des schémas implicites

Les différents schémas implicites présentés dans la section 3.1.1.3 sont comparés sur des cas tests classiques de tube à choc. Ces cas tests sont caractérisés par un domaine de un mètre de long rempli avec deux gaz parfaits. À l'instant initial, l'interface entre les deux gaz est située au milieu du tube à choc, en  $x = 0.5\text{m}$ . Les conditions initiales des trois cas tests sont données dans le tableau 3.1. Pour le premier cas test, les ratios de pression et de densité sont faibles. Le ratio de pression entre les deux gaz est de  $10^6$  pour le second cas. Finalement, pour le dernier cas test, il y a un ratio de densité de 100 et un ratio de pression de  $10^6$ .

Dans les formulations implicites, le pas de temps est calculé avec seulement la condition de stabilité de l'étape de transport (3.56) avec une CFL de 0.5. Dans les résultats présentés ci-dessous, pour la version IMN du schéma implicite basée sur une méthode de Newton, nous prenons l'entropie comme troisième inconnue  $X$  du schéma (voir section 3.1.1.3).

Le premier tube à choc est calculé sur un maillage comportant seulement 300 cellules. On peut voir sur la figure 3.6 que toutes les formulations implicites de l'étape acoustique donnent le même résultat sur ce premier cas. Les courbes sont relativement proches de la solution exacte. En effet,

| Cas | $\rho_g$ | $u_g$ | $p_g$  | $\gamma_g$ | $\rho_d$ | $u_d$ | $p_d$ | $\gamma_d$ | $T_{fin}$         |
|-----|----------|-------|--------|------------|----------|-------|-------|------------|-------------------|
| 1   | 1        | 0     | 1      | 1.4        | 0.125    | 0     | 0.1   | 1.6        | 0.1               |
| 2   | 1        | 0     | $10^5$ | 1.4        | 0.125    | 0     | 0.1   | 1.6        | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| 3   | 12.5     | 0     | $10^5$ | 1.4        | 0.125    | 0     | 0.1   | 1.6        | $1 \cdot 10^{-3}$ |

TABLE 3.1 – Comparaison des schémas implicites : données initiales. Les valeurs des densités sont données en  $\text{kg.m}^{-3}$ , les vitesses en  $\text{m.s}^{-1}$ , les pressions en Pa et le temps final en secondes.

la vitesse de choc est bien calculée et la pression reste constante au travers de la discontinuité de contact.

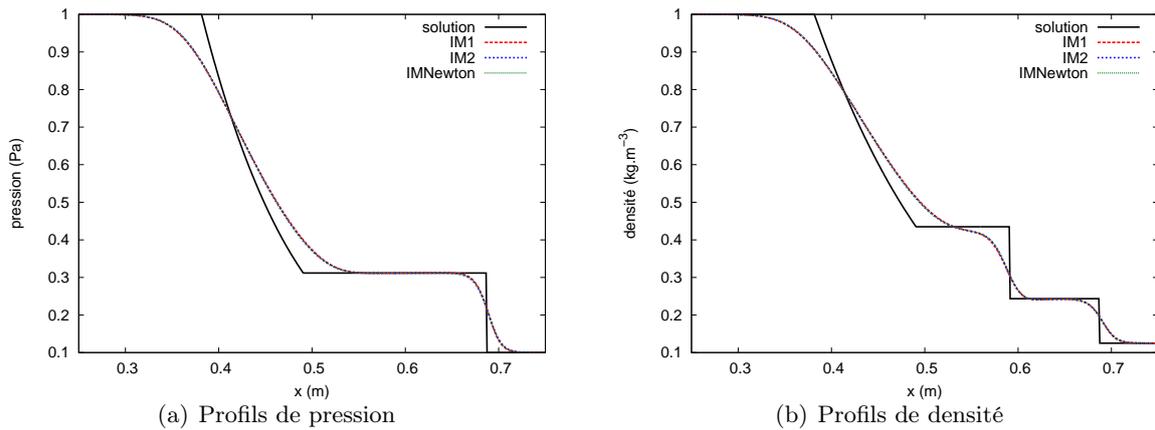


FIGURE 3.6 – Comparaison des schémas implicites : cas 1.

Quand le rapport de pression est grand, comme dans le cas du deuxième cas test, le schéma implicite IMN basé sur la méthode de Newton s'arrête avant le temps final. Néanmoins, la figure 3.7 montre que les autres approches IM1 et IM2 présentent un bon accord avec la solution exacte. La simulation a été réalisée sur un maillage de 500 cellules. Les résultats de la convergence en maillage pour le schéma IM1 sont donnés sur la figure 3.9(a). Avec un maillages de 1000 points, la bonne valeur du plateau de densité est calculée avec le schéma implicite.

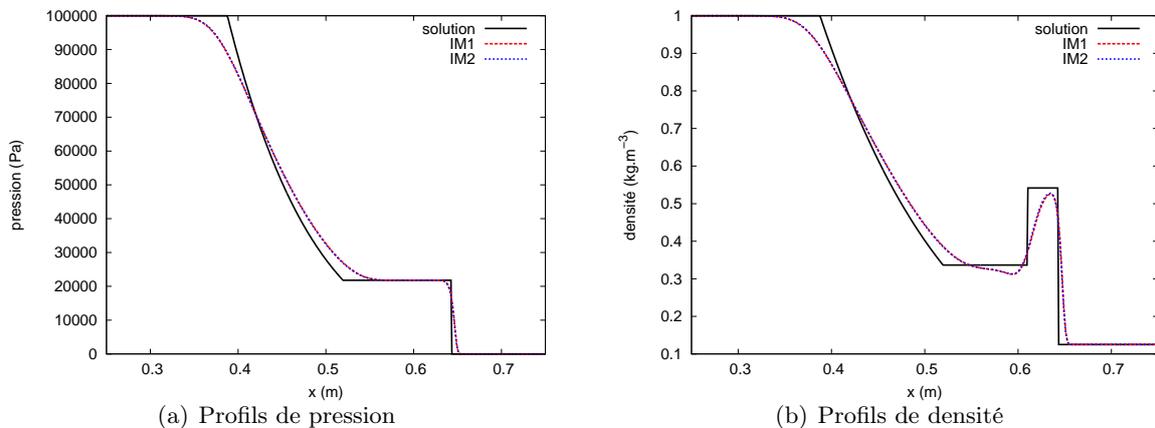


FIGURE 3.7 – Comparaison des schémas implicites : cas 2.

Pour le dernier tube à choc, un maillage composé de 1000 points a été utilisé. Pour de grands ratios de densité et de pression, les approches itératives IMN et IM2 ne fonctionnent pas. Dans

ce cas, seule la variante IM1 du schéma implicite donne une solution numérique, voir figure 3.8. On remarque que le schéma, malgré le fait qu'il soit conservatif, ne semble pas retrouver la bonne vitesse de choc sur ce maillage. En réalité, ce n'est pas le cas et ceci est dû à un sous-échantillonnage de la solution. En effet, sur un maillage plus fin, les résultats sont beaucoup plus précis, voir figure 3.9(b). Notons que ce cas est très raide et que le schéma utilisé ici n'est qu'à l'ordre 1. Sur la figure 3.10, nous pouvons voir que le passage à l'ordre 2 améliore la précision du calcul. Notons par ailleurs que le schéma direct (non splitté) implicite s'arrête avant la fin du temps de simulation sur ce cas test.

Étant donné que nous sommes intéressés par des simulations faisant intervenir de forts ratios de densité et de pression, nous conservons donc l'approche la plus robuste et la plus simple, à savoir le schéma implicite IM1.

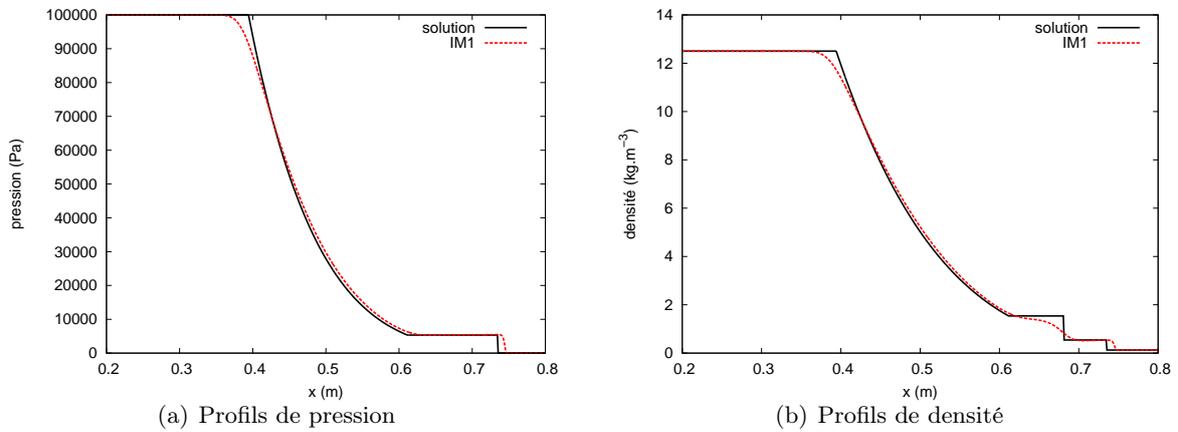


FIGURE 3.8 – Comparaison des schémas implicites : cas 3.

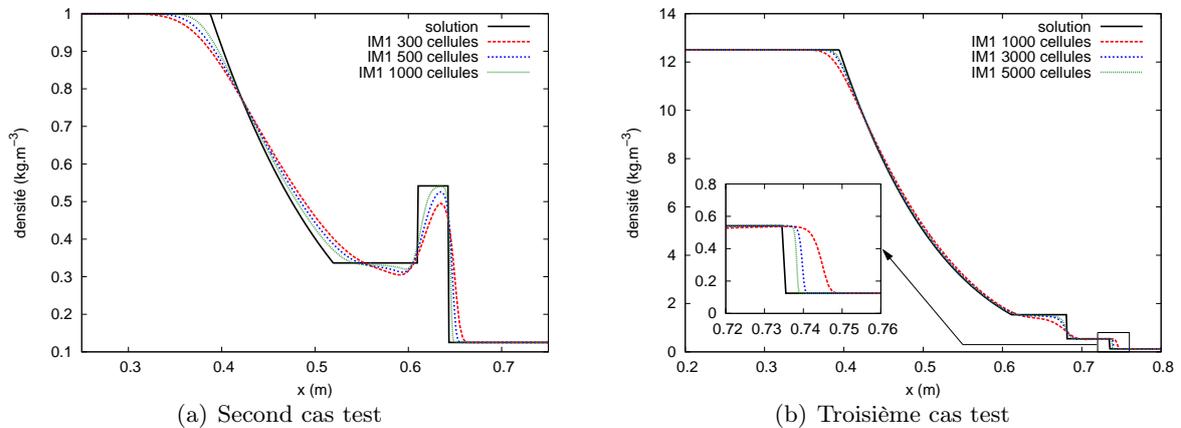


FIGURE 3.9 – Comparaison des schémas implicites : convergence en maillage pour les profils de densité.

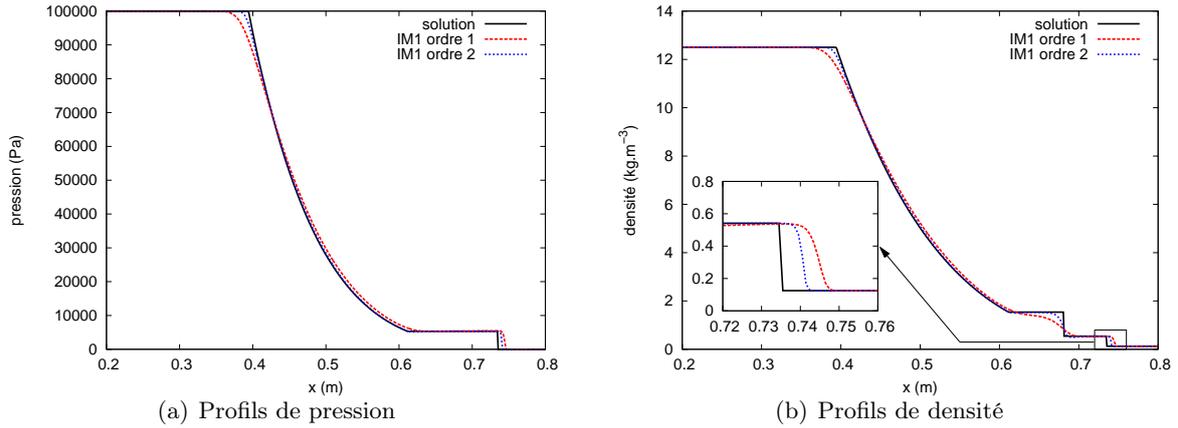


FIGURE 3.10 – Comparaison des schémas implicites : comparaison schéma IM1 à l'ordre 1 et 2 avec 1000 cellules pour le cas 3.

### 3.4.2 Tube à choc diphasique

Dans cette section, on considère un cas classique de tube à choc diphasique faisant intervenir de l'air et de l'eau. Une équation d'état de type gaz raide est utilisée pour le liquide tandis que l'air est modélisé par un gaz parfait. À l'instant initial, l'interface entre les deux fluides au repos est positionnée en  $x = 0.7\text{m}$ . Les conditions initiales de l'air et de l'eau sont données par

$$\begin{cases} (\rho, p, u, \gamma, \pi) = (1000 \text{ kg.m}^{-3}, 10^9 \text{ Pa}, 0 \text{ m.s}^{-1}, 4.4, 6 \times 10^8 \text{ Pa}) & \text{pour } 0\text{m} \leq x < 0.7\text{m}, \\ (\rho, p, u, \gamma, \pi) = (50 \text{ kg.m}^{-3}, 10^5 \text{ Pa}, 0 \text{ m.s}^{-1}, 1.4, 0 \text{ Pa}) & \text{pour } 0.7\text{m} \leq x \leq 1\text{m}. \end{cases}$$

Notons que l'hypothèse (2.85) de la proposition 6 est vérifiée. En effet, nous avons bien  $(\gamma_2 - \gamma_1)(\pi_2 - \pi_1) \geq 0$ . Cela assure que le domaine d'admissibilité de la solution est convexe et que le schéma est positif.

Le domaine de calcul est discrétisé sur 1000 mailles et des conditions aux limites transparentes sont utilisées de chaque côté. Pour le schéma implicite-explicite, le pas de temps est calculé grâce à la condition (3.56) avec un nombre de Courant égal à 0.9. Pour le schéma EXEX, le pas de temps est donné par les conditions (3.22) et (3.56), toujours avec un nombre de Courant égal à 0.9. La figure 3.11 détaille les résultats de notre simulation et la solution exacte du problème obtenue après  $t = 240 \mu\text{s}$ .

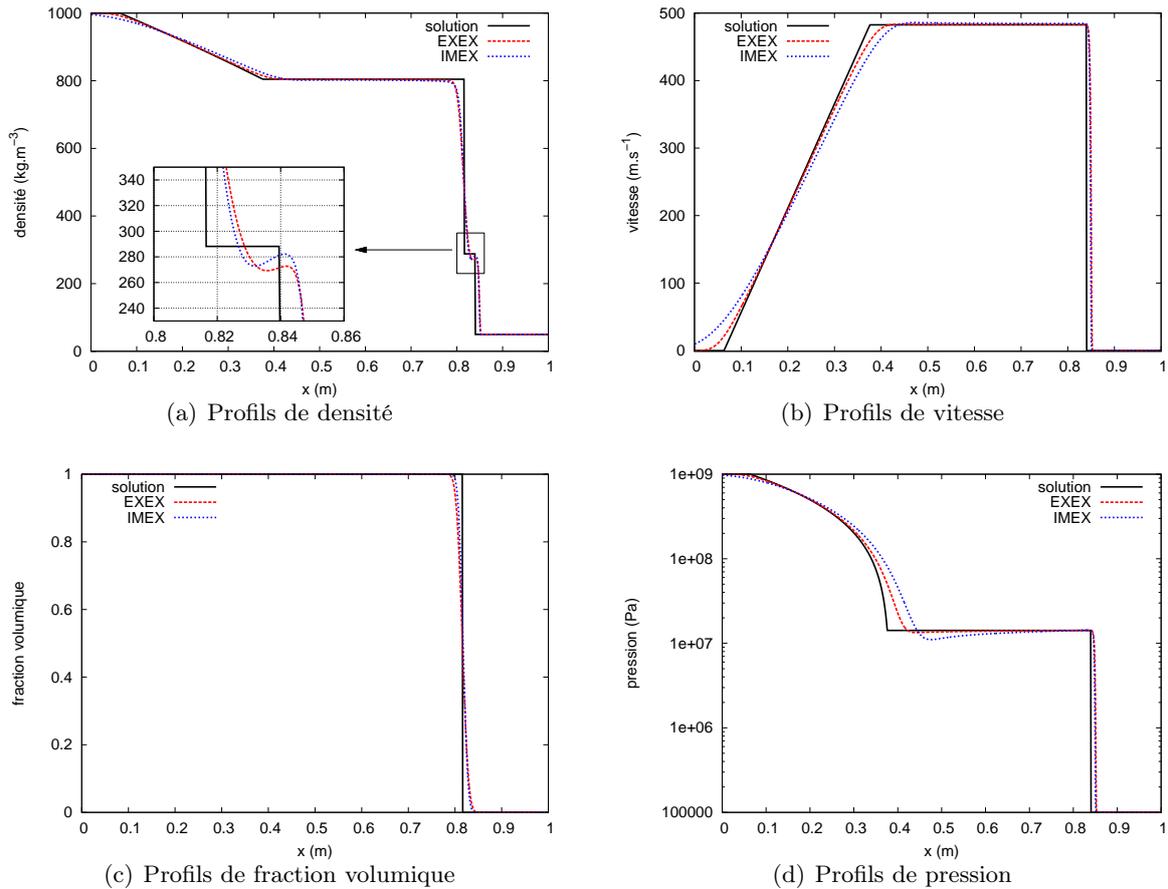


FIGURE 3.11 – Tube à choc diphasique : solution exacte et résultats numériques pour l’approche splittée avec les schémas explicite EXEX et semi-implicite IMEX. Les profils de pression sont tracés en échelle logarithmique.

On peut voir que le gradient de pression entre les deux fluides crée une onde de choc qui se propage dans le gaz. Une onde de détente est aussi générée au niveau de la discontinuité initiale et se propage à travers le liquide. Il y a un bon accord entre la solution numérique et la solution exacte en dépit de la diffusion numérique importante due à notre schéma d’ordre 1. Le profil de densité montre que l’onde de choc et la discontinuité de contact sont bien distincts.

Nous comparons les résultats obtenus précédemment avec un schéma numérique de Roe [ACK02] basé sur une formulation directe des équations, c’est-à-dire un schéma sans splitting. Une condition de stabilité de 0.9 est également utilisée pour la version explicite. Pour la version implicite du schéma de Roe, nous avons pris des pas de temps du même ordre de grandeur que pour le schéma implicite-explicite IMEX. Nous pouvons voir sur la figure 3.12 que les résultats obtenus avec l’approche directe et l’approche splittée sont très proches à la fois pour les versions explicite et implicite.

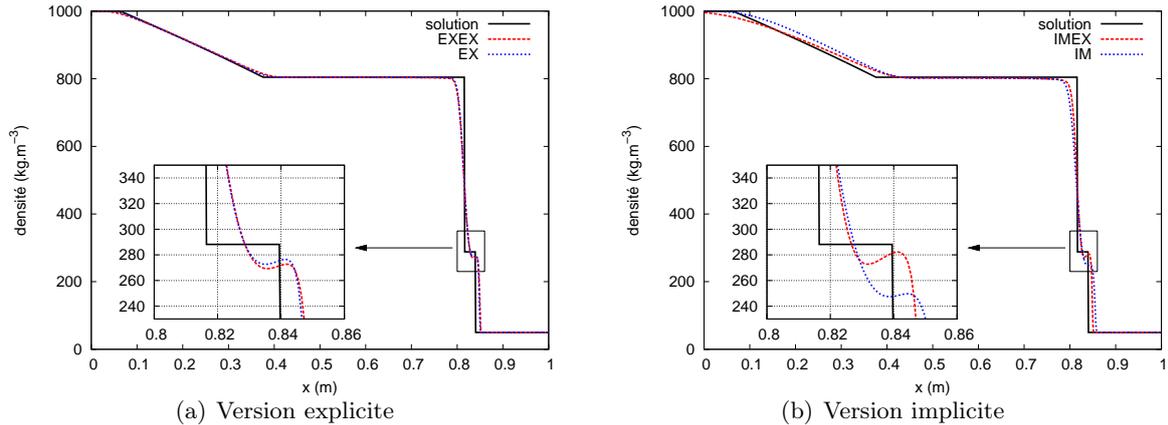


FIGURE 3.12 – Tube à choc diphasique : comparaison des profils de densité pour l’approche splittée et l’approche directe, en explicite et en implicite.

**Convergence en maillage** L’ordre de convergence du schéma basé sur le splitting est obtenu en calculant l’erreur relative entre la solution numérique et la solution exacte en norme  $L^1$  pour plusieurs maillages. Pour l’inconnue  $\phi \in \{\rho, u, z, p\}$ , l’erreur relative est donnée par

$$E_{L^1}(\phi) = \|\phi - \phi_{exacte}\|_{L^1} / \|\phi_{exact}\|_{L^1},$$

où  $\phi_{exacte}$  est la solution exacte au temps  $t = 240 \mu s$ . Sur la figure 3.13, l’erreur relative pour  $\rho, u, z$  est  $p$  est tracée en échelle log-log en fonction du pas d’espace. Les ordres de convergence obtenus par une simple régression linéaire sont détaillés dans le tableau 3.2. On peut remarquer que les ordres de convergence pour le schéma explicite-explicite et implicite-explicite sont très proches. Par ailleurs, les résultats du schéma explicite sont en excellent accord avec les résultats de la littérature sur ces cas de tube à choc [KL10, FBC<sup>+</sup>11].

| Variable               | Taux de convergence, EXEX | Taux de convergence, IMEX |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Densité $\rho$         | 0.603                     | 0.657                     |
| Vitesse $u$            | 0.883                     | 0.795                     |
| Fraction volumique $z$ | 0.494                     | 0.507                     |
| Pression $p$           | 0.810                     | 0.747                     |

TABLE 3.2 – Tube à choc diphasique : taux de convergence pour différents schémas par rapport à la densité, la vitesse, la fraction volumique et la pression en norme  $L^1$ .

### 3.4.3 Interaction liquide-gaz 2D

Nous considérons ensuite le cas bidimensionnel de l’interaction entre une bulle de gaz et un choc se propageant dans un liquide. Ce cas test a déjà été étudié dans la littérature [SA99b, KL10, Jun13]. Le domaine de calcul  $\Omega = [0, 2]m \times [0, 1]m$  est détaillé dans la figure 3.14. Le gaz est contenu dans un cylindre de rayon 0.4m centré sur la position (0.5m, 0.5m). La zone de choc est délimitée par l’abscisse  $x < 0.04m$ . Les conditions initiales sont fournies dans le tableau 3.5. Ce cas test présente de forts ratios de densité et de pression entre les deux fluides.

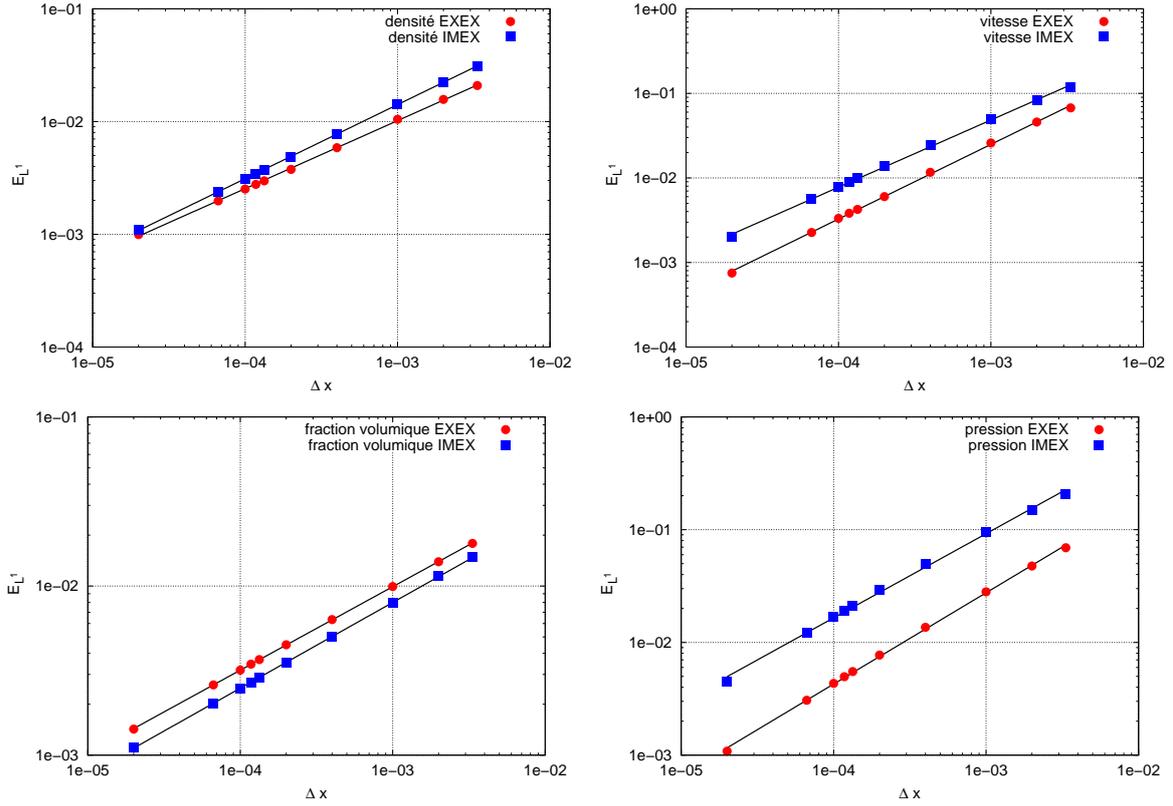


FIGURE 3.13 – Tube à choc diphasique : erreur relative en échelle Log-Log.

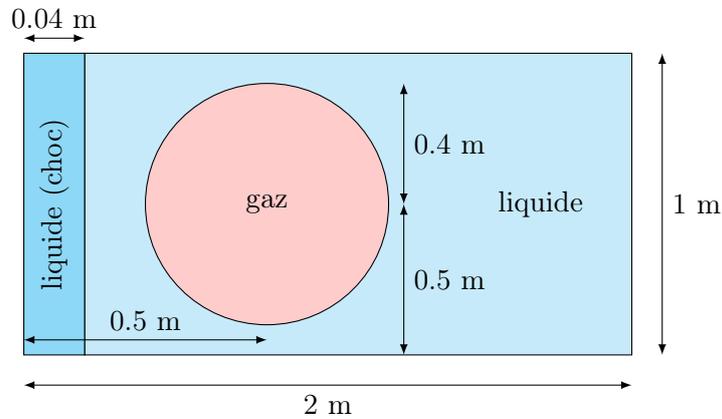


FIGURE 3.14 – Interaction liquide-gaz 2D : description géométrique du cas test.

|                | Densité ( $\text{kg.m}^{-3}$ ) | Pression (Pa)   | Vitesse ( $\text{m.s}^{-1}$ ) | $\gamma$ | $\pi$ (Pa)        |
|----------------|--------------------------------|-----------------|-------------------------------|----------|-------------------|
| Liquide (choc) | 1030.9                         | $3 \times 10^9$ | (300, 0)                      | 4.4      | $6.8 \times 10^8$ |
| Liquide        | 1000.                          | $10^5$          | (0, 0)                        | 4.4      | $6.8 \times 10^8$ |
| Gaz            | 1.                             | $10^5$          | (0, 0)                        | 1.4      | 0                 |

TABLE 3.3 – Interaction liquide-gaz 2D : données initiales.

Pour cette simulation, un maillage régulier composé de  $600 \times 300$  cellules est utilisé. Des conditions aux limites de type paroi sont imposées pour les frontières supérieure et inférieure. Des conditions d'entrée et de sortie sont imposées sur les autres frontières. Pour le schéma

explicite EXEX, le pas de temps est calculé à partir de la condition de stabilité de l'étape acoustique (3.22) et de celle de l'étape de transport (3.56) avec un nombre de Courant de 0.5. Pour le schéma IMEX, le pas de temps est uniquement déterminé par la condition de l'étape de transport (3.56), où la CFL est toujours égale à 1/2.

Sur ce cas test bidimensionnel, nous souhaitons tout d'abord comparer les schémas EXEX et IMEX présentés précédemment. Pour cela, la fraction volumique du gaz est tracée à différents instants sur la figure 3.15. Le choc qui se propage de la gauche vers la droite vient percuter la bulle (cylindrique) de gaz. Celle-ci est alors comprimée et nous pouvons voir apparaître deux poches de gaz symétriques. La topologie de l'interface est fortement modifiée au cours du calcul.

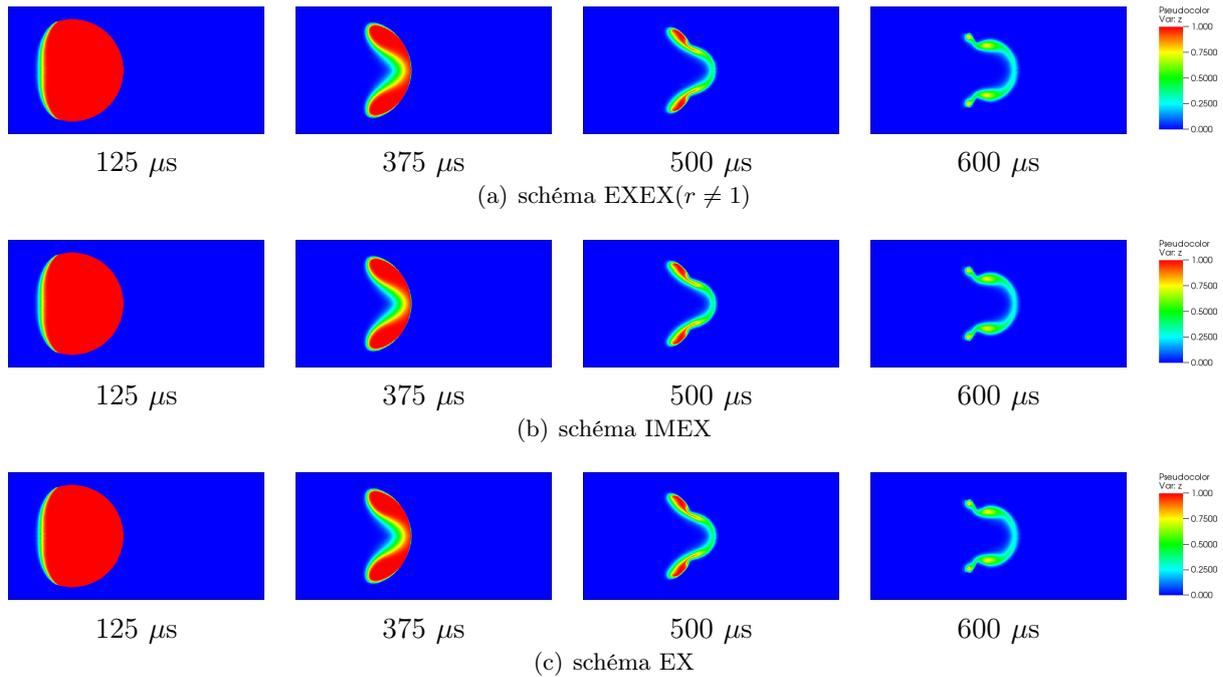


FIGURE 3.15 – Interaction liquide-gaz 2D : fraction volumique du gaz à différents instants, schémas EXEX( $r \neq 1$ ), IMEX et EX.

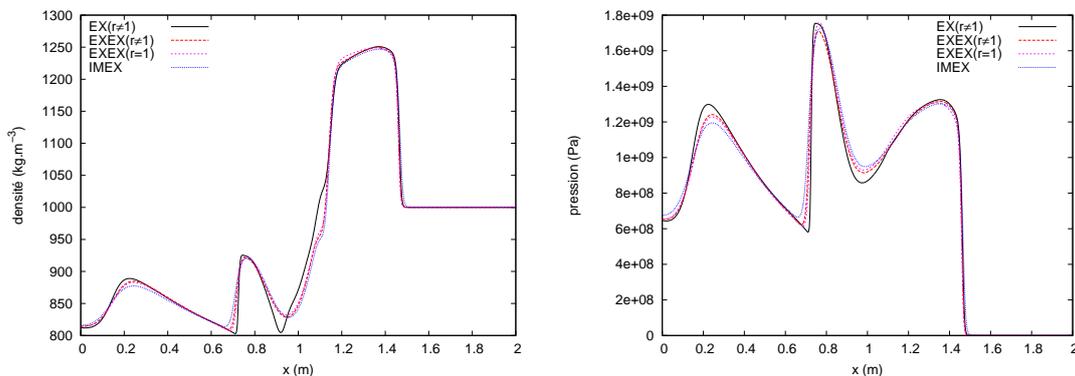


FIGURE 3.16 – Interaction liquide-gaz 2D : coupe de la densité et de la pression à  $t = 600\mu s$  le long de l'axe de symétrie  $x_2 = 0$  pour les schémas EX, EXEX( $r \neq 1$ ), EXEX( $r = 1$ ) et IMEX.

Le champ de fraction volumique du gaz est similaire aux résultats présentés dans [SA99b] ou [KL10]. Les résultats des versions explicite et semi-implicite du schéma basé sur le splitting sont en excellent accord. Nous avons aussi confronté le schéma splitté avec le schéma numérique basé

sur une approche directe. Sur ce cas test très raide, le schéma de Roe n'est pas assez robuste. En effet, le code s'arrête après quelques pas de simulation. Nous utilisons à la place un schéma de type Godunov basé sur un solveur de Riemann à 2 états intermédiaires [Lat13]. Ceci montre bien que les contraintes sur les pentes du solveur de Riemann pour garantir la positivité et l'hyperbolicité assurent la robustesse du schéma. Les résultats de la version directe du schéma sont donnés dans la figure 3.15(c). Les schémas présentés ici et le schéma explicite basé sur la formulation directe présentent des résultats très similaires. Sur la figure 3.16, nous avons tracé des coupes de la pression et de la densité au niveau de l'ordonnée  $x_2 = 0$ . Nous pouvons voir que les différents schémas fournissent des résultats relativement proches, même si les profils obtenus avec le schéma direct semblent plus raides. La version implicite du schéma direct n'est pas capable de fournir une solution sur ce cas test très raide. Cela démontre la robustesse du schéma IMEX en présence de forts ratios de densité et de pression sur la condition initiale.

Sur ce type de cas test, un bon moyen pour visualiser les ondes se propageant dans le liquide et dans l'air consiste à calculer numériquement des images de strioscopie (*schlieren* en anglais). Ces images, présentées sur la figure 3.17, sont calculées comme dans le papier de Quirk et Karni [QK96]. En effet, nous traçons la quantité  $\exp(-k \frac{|\nabla \rho|}{\max|\nabla \rho|})$  dans tout le domaine de calcul. Nous pouvons remarquer que les résultats sont très proches entre les schémas explicites et le schéma semi-implicite. En effet, on retrouve les vitesses de propagation des ondes avec les différents schémas. Nous pouvons toutefois noter que le schéma explicite direct semble un peu moins diffusif que l'approche splittée.

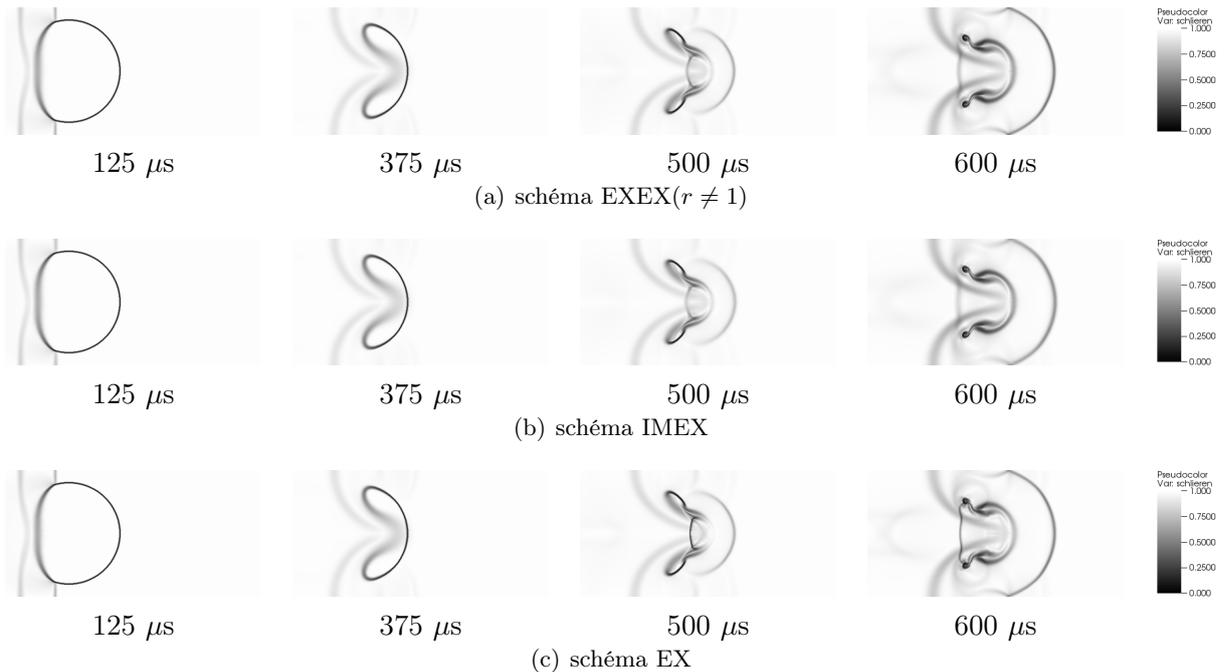


FIGURE 3.17 – Interaction liquide-gaz 2D : strioscopie à différents instants, schémas EXEX( $r \neq 1$ ), IMEX et EX.

L'évolution du pas de temps au cours de la simulation pour les différents schémas est tracée sur la figure 3.18. On remarque qu'il y a un facteur  $10^3$  entre le pas de temps du schéma semi-implicite IMEX et le schéma splitté explicite avec des pentes du solveur de Riemann égales. En effet, le pas de temps du schéma implicite ne dépend pas des ondes acoustiques. Cependant, quand on choisit des pentes différentes, la contrainte sur le pas de temps acoustique est fortement réduite.

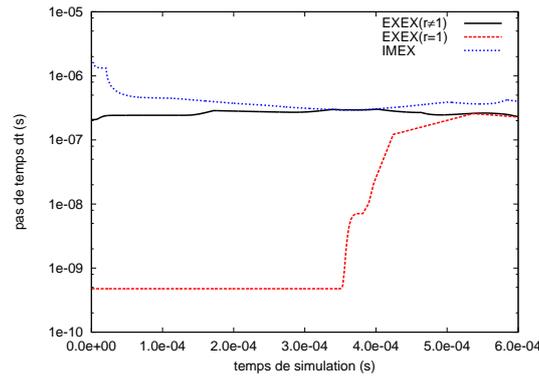


FIGURE 3.18 – Interaction liquide-gaz 2D : variation du pas de temps au cours de la simulation pour les schémas  $\text{EXEX}(r \neq 1)$ ,  $\text{EXEX}(r = 1)$  et IMEX.

**Comparaison des différents schémas pour l'étape de transport** Sur les simulations précédentes, nous avons utilisé le schéma décentré (*upwind*) dans l'étape de transport. Sur la figure 3.15 nous pouvons remarquer que l'interface entre le liquide et le gaz est fortement diffusée au cours du calcul. À la fin de la simulation, il y a un nombre très important de mailles mixtes, représentées en vert sur la figure 3.15, et presque plus de cellules ne contenant que du gaz pur, c'est-à-dire telles que  $z = 1$ . Pour limiter cette diffusion, nous avons introduit différents schémas pour l'étape de transport dans la section 3.2. Sur les figures 3.19 et 3.20 la fraction volumique du gaz et les images de strioscopie au cours de la simulation sont tracées pour le schéma semi-implicite couplé avec les schémas d'antidiffusion et de Glimm pour l'étape de transport.

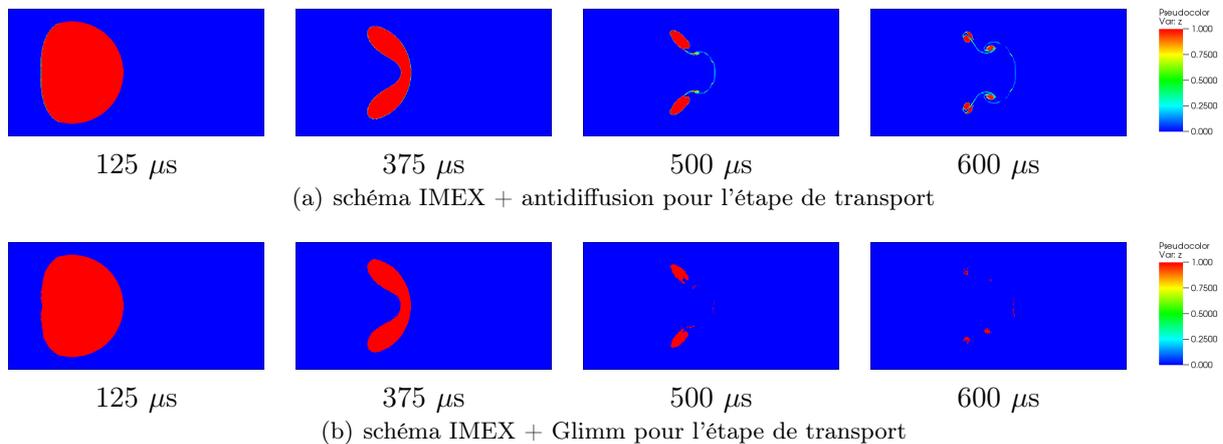


FIGURE 3.19 – Interaction liquide-gaz 2D : fraction volumique du gaz à différents instants, schémas antidiffusion et de Glimm pour l'étape de transport.

Il est clair que la diffusion de l'interface est fortement diminuée avec les deux schémas. Les résultats sont en bon accord avec les travaux de Kokh et Lagoutière [KL10] pour le schéma d'antidiffusion et ceux de Jung [Jun13] pour le schéma de Glimm. Nous pouvons noter que du fait du caractère aléatoire de la projection dans le schéma de Glimm, la solution n'est plus parfaitement symétrique par rapport à l'axe  $x_2 = 0$ .

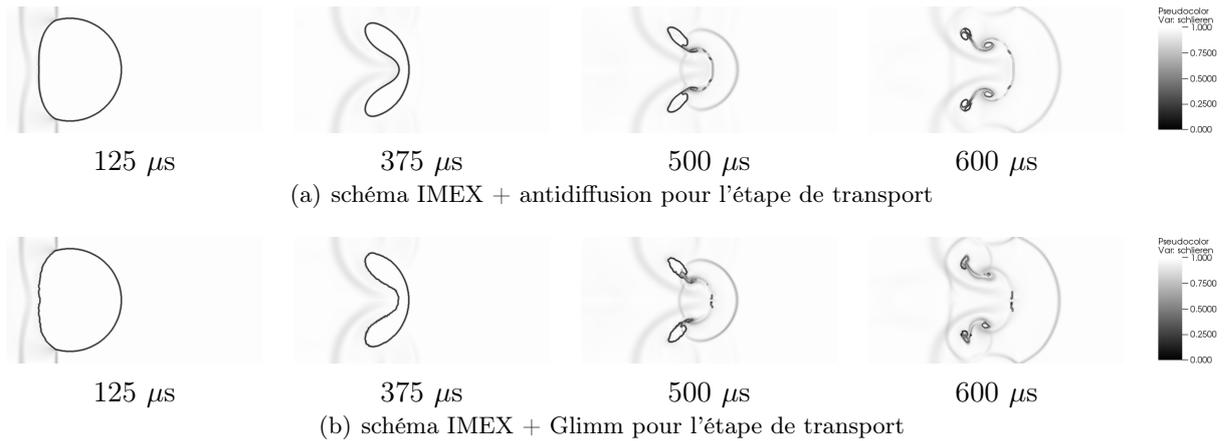


FIGURE 3.20 – Interaction liquide-gaz 2D : strioscopie à différents instants, schémas antidiffusion et de Glimm pour l'étape de transport.

**Comparaison ordre 1 et ordre 2** Le passage à l'ordre 2 en espace est un autre moyen de réduire la diffusion numérique et d'augmenter la précision. Dans les résultats présentés dans la suite, les CFL acoustique et de transport ont été abaissées à 0.25. Sur la figure 3.21, on peut voir que le schéma numérique diffuse moins à l'ordre 2 qu'avec la version à l'ordre 1. De plus, la figure 3.22 permet de voir que les ondes se propageant dans le liquide sont plus marquées que dans les simulations à l'ordre 1.

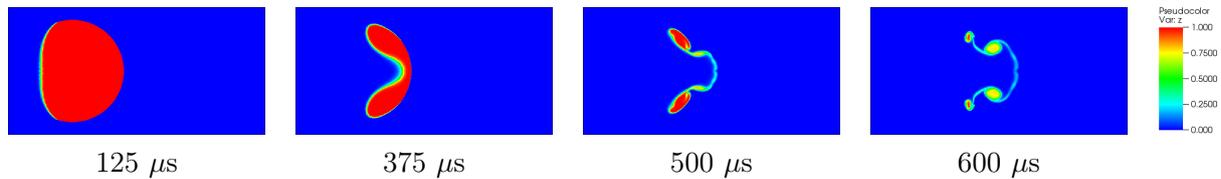


FIGURE 3.21 – Interaction liquide-gaz 2D : fraction volumique du gaz à différents instants, schéma EXEX( $r \neq 1$ ) à l'ordre 2 avec le schéma décentré pour l'étape de transport.

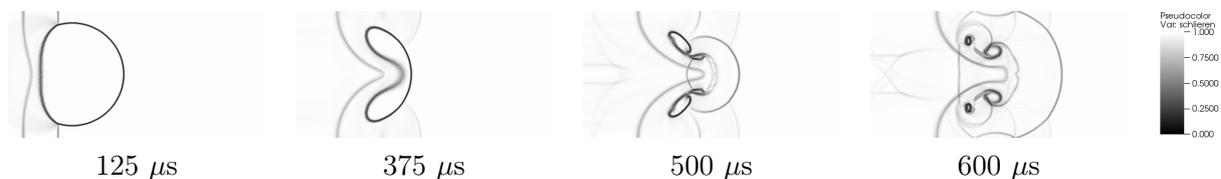


FIGURE 3.22 – Interaction liquide-gaz 2D : strioscopie à différents instants, schéma EXEX( $r \neq 1$ ) à l'ordre 2 avec le schéma décentré pour l'étape de transport.

Ce cas test diphasique très raide nous a permis de valider plusieurs aspects de notre méthode numérique. En effet, nous avons démontré que les critères de positivité sur les pentes permettent d'assurer la robustesse du schéma. De plus, la version implicite du schéma retenue est plus robuste que l'approche implicite directe qui ne fonctionne pas sur ce cas test. Nous avons ensuite démontré qu'un choix judicieux sur le rapport des pentes du solveur de Riemann permettait de réduire drastiquement la contrainte sur le pas de temps acoustique. Les différents schémas pour l'étape de transport ont été comparés et ils permettent de limiter la diffusion numérique de l'interface. Enfin, l'extension du schéma à l'ordre 2 a aussi été validée sur ce cas test. D'un point

de vue informatique, nous avons validé l’aspect parallélisme du code grâce à ces simulations. En effet, les simulations présentées ici ont été effectuées sur 16 processeurs.

### Remarque 19

Dans ce cas test, des pressions négatives apparaissent dans des zones qui ne contiennent que du liquide pur. Ceci n’est pas un problème pour un mélange de gaz raides décrit par le modèle à cinq équations réduit dans la mesure où le domaine de validité des solutions est tel que  $p + \pi(z) > 0$ . Sachant que la pression de référence du liquide est égale à  $\pi = 6.8 \times 10^8$ , la solution reste dans le domaine d’admissibilité et la vitesse du son est bien définie.

## 3.5 Résultats numériques pour le modèle de Kapila

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques obtenus avec le schéma exposé précédemment pour le modèle de Kapila (2.5). Ici, nous considérons uniquement des cas tests où la donnée initiale est constituée d’un mélange entre les deux fluides. En effet, contrairement au modèle à cinq équations réduit, le modèle de Kapila est aussi capable de simuler de vrais mélanges physiques.

### 3.5.1 Tube à choc avec un mélange air-eau

Le premier cas test que nous considérons est un tube à choc avec un mélange d’air et d’eau. Ce cas test a été étudié par Murrone et Guillard [MG05] pour comparer le modèle de Baer Nunziato et le modèle de Kapila. Kreeft et Koren [KK10] ont aussi étudié ce problème pour valider leur nouvelle formulation du modèle de Kapila. Plus récemment, Eikelder et al. [EDKT17] ont considéré ce cas test avec leur stratégie de splitting pour le modèle de Kapila. Ici, le tube à choc est rempli d’un mélange entre de l’air et de l’eau modélisés par des équations d’état de type gaz parfaits et raides. Dans la suite, le fluide 1 représentera l’air ( $\gamma = 1.4$ ) et l’eau sera le fluide 2 ( $\gamma = 4.4, \pi = 6 \times 10^8$ ). Les données initiales du cas test sont regroupées dans le tableau 3.4.

|             | $\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> ) | $p$ (Pa) | $u$ (m.s <sup>-1</sup> ) | $\rho_1$ (kg.m <sup>-3</sup> ) | $z_1$ |
|-------------|------------------------------|----------|--------------------------|--------------------------------|-------|
| État gauche | 525                          | $10^9$   | 0                        | 50                             | 0.5   |
| État droit  | 525                          | $10^5$   | 0                        | 1000                           | 0.5   |

TABLE 3.4 – Tube à choc avec un mélange air-eau : données initiales.

Les résultats numériques présentés en figure 3.23 sont en bon accord avec ceux obtenus dans la littérature [MG05, EDKT17]. Si l’on regarde la courbe de la fraction volumique de gaz, nous pouvons observer que nous retrouvons la même valeur pour  $z$  sur le plateau compris entre  $x_1 = 0.65$  m et  $x_1 = 0.76$  m. Notons que si le modèle à cinq équations réduit est utilisé pour simuler ce cas test, la fraction volumique du gaz reste constante et égale à 0.5.

### 3.5.2 Cavitation

Pour ce deuxième cas test, nous reprenons un cas de cavitation étudié par Saurel et al. [SPB09]. Un tube unidimensionnel d’un mètre de long est rempli d’eau liquide à la pression atmosphérique  $p = 10^5$  Pa. De plus, une petite quantité d’air avec  $z = 10^{-2}$  est présente au début de la simulation dans tout le liquide. Dans la partie gauche du tube, la vitesse du mélange est égale à  $100$  m.s<sup>-1</sup>. Dans l’autre partie du tube, la vitesse est opposée. Pour cette simulation, nous utilisons un nombre de Courant de 0.5 et un maillage constitué de 1000 mailles. Les solutions numériques obtenues à l’instant  $t = 1.85$  ms avec les schémas explicite et implicite sont présentées en figure 3.24

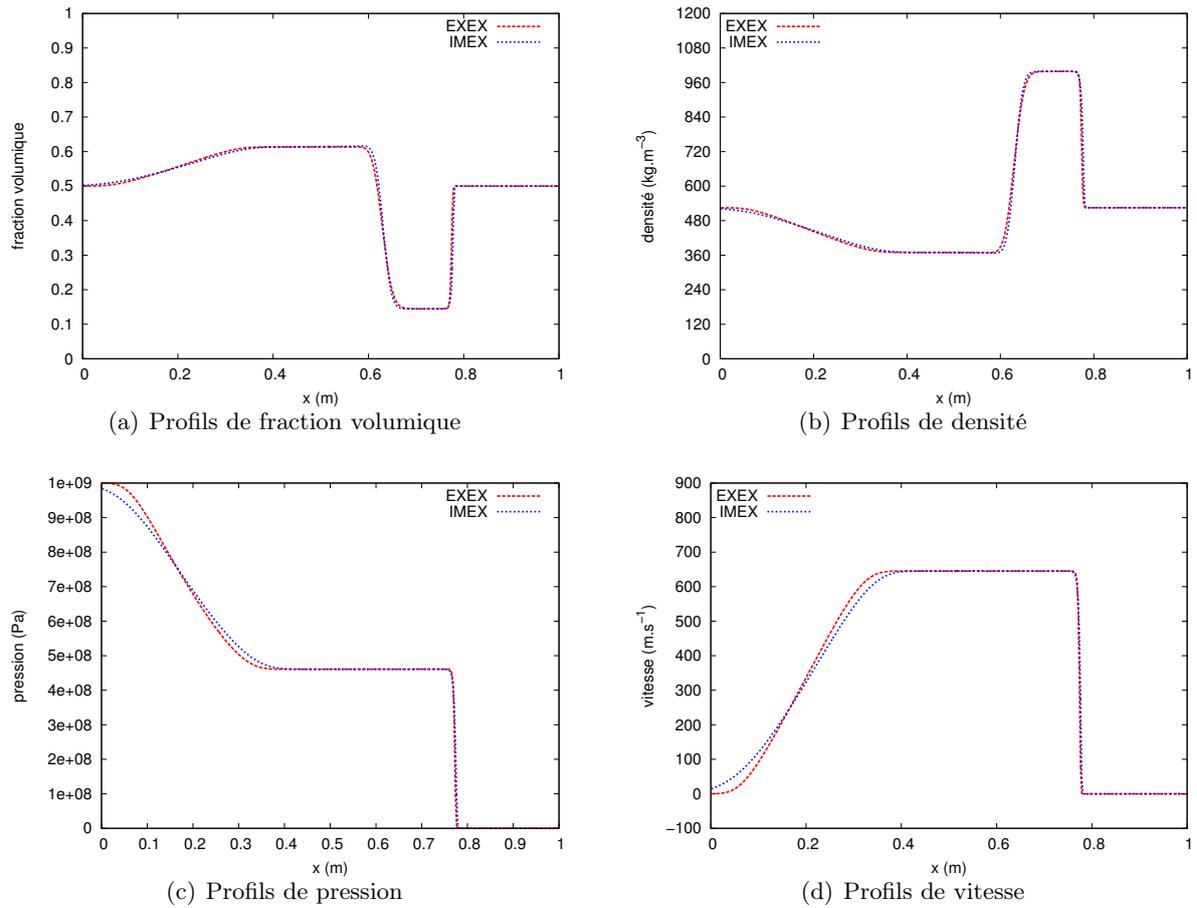


FIGURE 3.23 – Tube à choc avec un mélange air-eau : profils de fraction volumique, de densité, de pression et de vitesse à l’instant  $t = 200 \mu\text{s}$  obtenus avec les schémas explicite EXEX et implicite IMEX pour le modèle de Kapila.

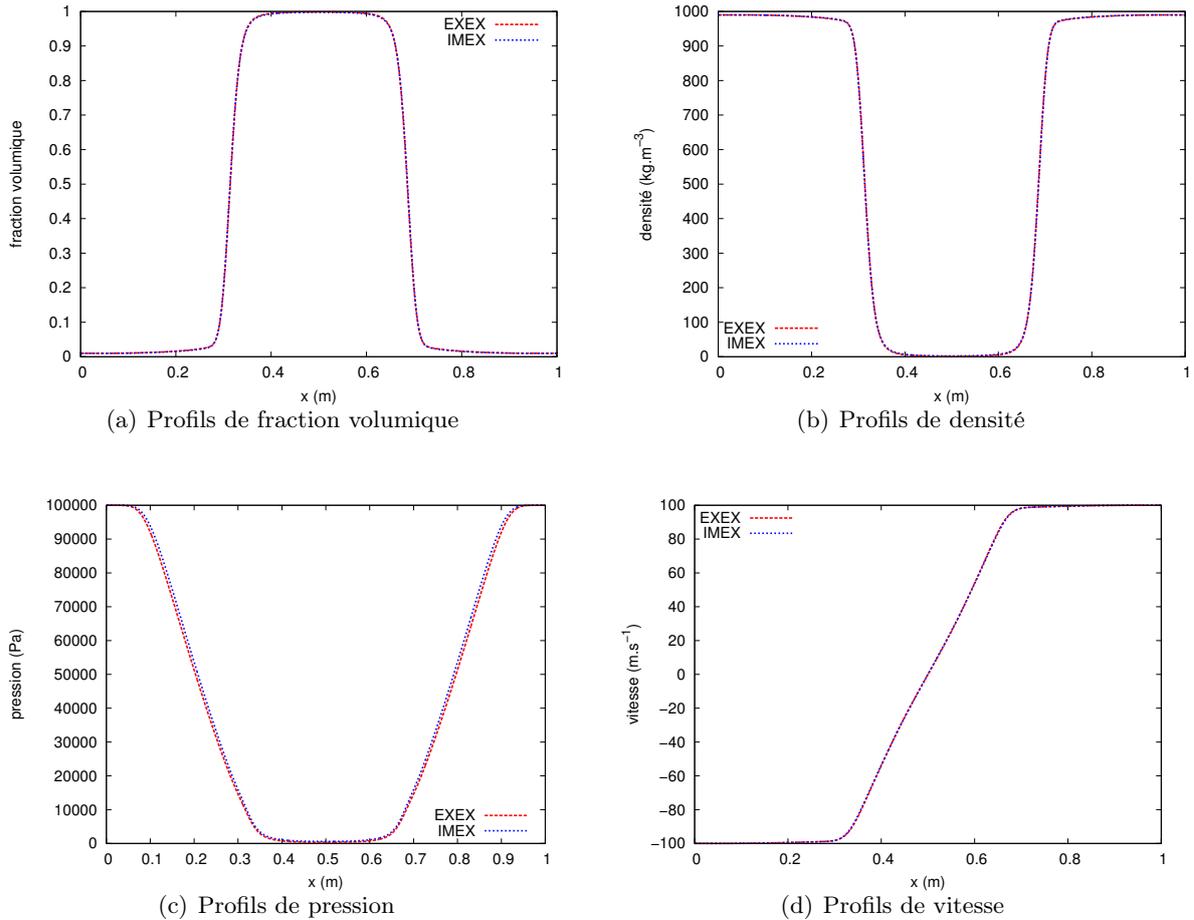


FIGURE 3.24 – Cavitation : profils de fraction volumique, de densité, de pression et de vitesse obtenus avec les schémas explicite EXEX et implicite IMEX pour le modèle de Kapila.

Les deux ondes de détente se propagent dans le tube à choc entraînant une diminution de la pression au centre du domaine. Ceci entraîne l'apparition d'une poche de gaz dans la zone centrale comme nous pouvons le voir sur la figure 3.24(a). En effet, dans la mesure où du gaz était initialement présent dans le domaine, la pression du mélange ne peut pas devenir négative. L'apparition de la phase gazeuse permet de maintenir la pression positive. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux présentés dans [SPB09].

### Remarque 20

Si l'on choisit de prendre le rapport des pentes du solveur de Riemann  $r_0 = \frac{\rho_d c_d}{\rho_g c_g}$ , et donc d'avoir des pentes  $\bar{C}^-$  et  $\bar{C}^+$  différentes (voir section 3.1.1.1 où cette notion est définie), la solution numérique n'est pas parfaitement symétrique. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où le choix du  $r_0$  n'est pas symétrique.

## 3.6 Comparaisons des modèles de Kapila et à cinq équations réduit sur des cas non mélangés

Nous concluons cette partie en comparant les modèles de Kapila et à cinq équations réduit sur deux cas tests classiques de la littérature : les interactions entre un choc et une bulle (cylindrique) d'hélium ou de R22. Nous allons comparer nos résultats de simulations numériques avec les

résultats des expériences menées par Haas et Sturtevant [HS87]. Il existe de nombreuses études sur ce cas test qui sert de validation pour l'étude des écoulements diphasiques compressibles [QK96, DGGB14, KL10, KK10, BHMS13]. Dans ce cas test, une onde de choc plane se propageant à Mach 1.22 dans de l'air va percuter une bulle cylindrique de gaz. La configuration géométrique du cas test est présentée sur la figure 3.25. Étant donnée la forte vitesse du choc et la taille relativement petite de la bulle, les deux fluides ne se mélangent quasiment pas. Il est donc possible de simuler ce cas test avec les modèles diphasiques de Kapila et celui à cinq équations réduit. Deux types de gaz sont étudiés dans [HS87] : l'hélium et le réfrigérant R22. Le premier possède une vitesse du son plus grande que l'air environnant, tandis que le R22 a une vitesse du son plus faible que l'air. Cette différence de vitesse du son va avoir une incidence forte sur la propagation des ondes acoustiques et sur la forme finale de la bulle.

Pour simuler ce cas test, nous avons utilisé  $1600 \times 712$  cellules. Nous utilisons le schéma à l'ordre 2 et le schéma décentré pour l'étape de transport. Les seules différences devraient se trouver dans les zones de mélange numérique. Nous voulons voir si cela a un impact sur la solution globale. Les données initiales sont regroupées dans le tableau suivant :

|            | Densité ( $\text{kg.m}^{-3}$ ) | Pression (Pa)        | Vitesse ( $\text{m.s}^{-1}$ ) | $\gamma$ | $\pi$ (Pa) |
|------------|--------------------------------|----------------------|-------------------------------|----------|------------|
| Air (choc) | 1.92691                        | $1.5698 \times 10^5$ | $(-114.42, 0)$                | 1.4      | 0          |
| Air        | 1.4                            | $10^5$               | $(0, 0)$                      | 1.4      | 0          |
| He         | 0.25463                        | $10^5$               | $(0, 0)$                      | 1.648    | 0          |
| R22        | 4.41540                        | $10^5$               | $(0, 0)$                      | 1.249    | 0          |

TABLE 3.5 – Interaction choc bulle : données initiales.

Dans les sections suivantes nous détaillons les résultats numériques obtenus pour les bulles d'hélium et de R22.

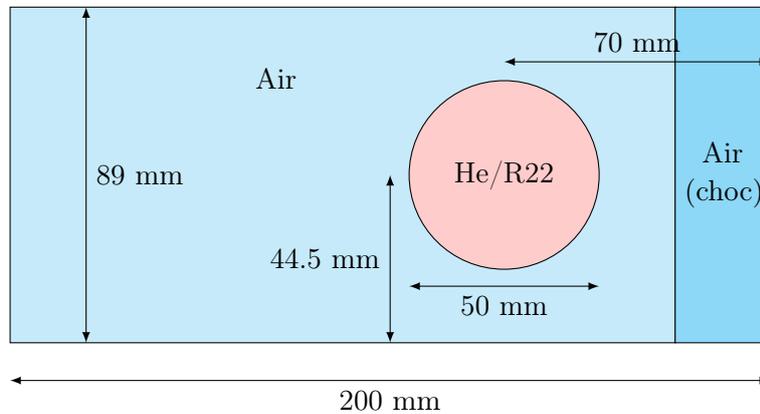


FIGURE 3.25 – Interaction choc bulle : description géométrique des cas tests.

### 3.6.1 Interaction air-hélium

Sur les figures 3.26 et 3.27, nous avons tracé les images de strioscopie. La colonne de gauche correspond au schéma numérique pour le modèle à cinq équations réduit. Au centre, nous avons indiqué les résultats obtenus pour le modèle de Kapila. Sur la colonne de droite, nous avons placé les images de strioscopie tirées des expériences de Haas et Sturtevant [HS87]. Pour faciliter la comparaison avec les résultats expérimentaux, nous avons indiqué la position initiale de la bulle en pointillé sur nos résultats numériques.

Étant donné que la vitesse du son de l'hélium est plus grande que celle de l'air, la bulle d'hélium se comporte comme un milieu convergent pour les ondes acoustiques. En effet, nous

voyons que le choc incident se propage moins vite que le choc à l'intérieur de la bulle cylindrique, voir figure 3.26(a). Les résultats obtenus avec les deux modèles diphasiques, le modèle à cinq équations réduit et celui de Kapila sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux comme le montrent les figures 3.26 et 3.27. L'évolution du choc incident, des différentes réflexions et de la forme de la bulle sont quasiment identiques.

### 3.6.2 Interaction air-R22

Sur les figures 3.28 et 3.29, nous avons tracé les résultats obtenus dans le cas de la bulle de R22 avec les schémas numériques pour le modèle à cinq équations réduit (colonne de gauche), de Kapila (au centre) et les résultats expérimentaux (colonne de droite). Contrairement à l'hélium, le réfrigérant R22 a une vitesse du son plus faible que l'air. Comme nous pouvons le voir sur les figures 3.28(a), 3.28(b) et 3.28(c), l'onde transmise dans la bulle se propage moins vite que le choc incident. Les instabilités de type Kelvin-Helmholtz qui se développent à l'interface sont bien capturées par les deux schémas numériques. Pour une description plus détaillée de la physique de l'écoulement, nous renvoyons à [HS87, QK96, KK10].

Dans les deux cas, et malgré l'apparition d'une zone de mélange numérique liée à la diffusion de l'interface, les solutions obtenues pour les deux modèles diphasiques sont quasiment identiques. Cela semble donc indiquer que le terme de Kapila dans l'équation de la fraction volumique n'a pas d'impact sur la solution macroscopique. Ainsi, pour des configurations où les données initiales ne sont pas mélangées, le modèle à cinq équations réduit est suffisant.

#### Remarque 21

Nous avons voulu comparer les solutions obtenues avec les modèles diphasiques de Kapila et à cinq équations réduit sur le cas test présenté dans la section 3.4.3. Rappelons que ce cas test représente l'interaction entre un choc se propageant dans un liquide et une bulle cylindrique de gaz. Avec le schéma numérique développé pour le modèle à cinq équations réduit, nous obtenons des résultats similaires à ceux présentés dans la littérature [SA99b, KL10, Jun13]. Comme expliqué dans la remarque 19, des pressions négatives apparaissent dans des zones qui ne contiennent que du liquide pur. Ceci n'est pas un problème pour un mélange de gaz raides décrit par le modèle à cinq équations réduit dans la mesure où le domaine de validité des solutions est tel que  $p + \pi(z) > 0$ . Cependant, le schéma numérique développé pour le modèle de Kapila ne fonctionne pas sur ce cas test. En effet, pour le modèle de Kapila, nous avons défini le domaine d'admissibilité des solutions de telle sorte que la pression soit supérieure à  $\min(\pi_1, \pi_2) = 0$ . Ce choix empêche l'apparition de zone de pression négative, même dans les zones où seule la phase liquide est présente.

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des schémas numériques pour les modèles diphasiques à cinq équations réduit et de Kapila. Ces schémas numériques sont basés sur une décomposition d'opérateurs de type Lagrange-Transport inspirée des travaux de Chalons et al. [CGK16, CGK17], voir aussi [CNPT10]. L'idée consiste à séparer les phénomènes acoustiques des phénomènes liés au transport.

L'étape acoustique est résolue sous une forme non conservative grâce à l'utilisation d'un schéma de type Godunov basé sur un solveur de Riemann simple. Cette résolution est une application des travaux de Gallice [Gal02] sur les schémas non conservatifs. Les pentes des solveurs de Riemann sont calculées pour assurer la positivité de la solution. Dans le cas du modèle diphasique à cinq équations réduit, nous avons réussi à exprimer des conditions sur les pentes du solveur pour assurer que la solution reste bien dans le domaine des solutions admissibles. Pour le modèle de Kapila, des conditions sur les pentes permettent d'assurer la positivité du volume

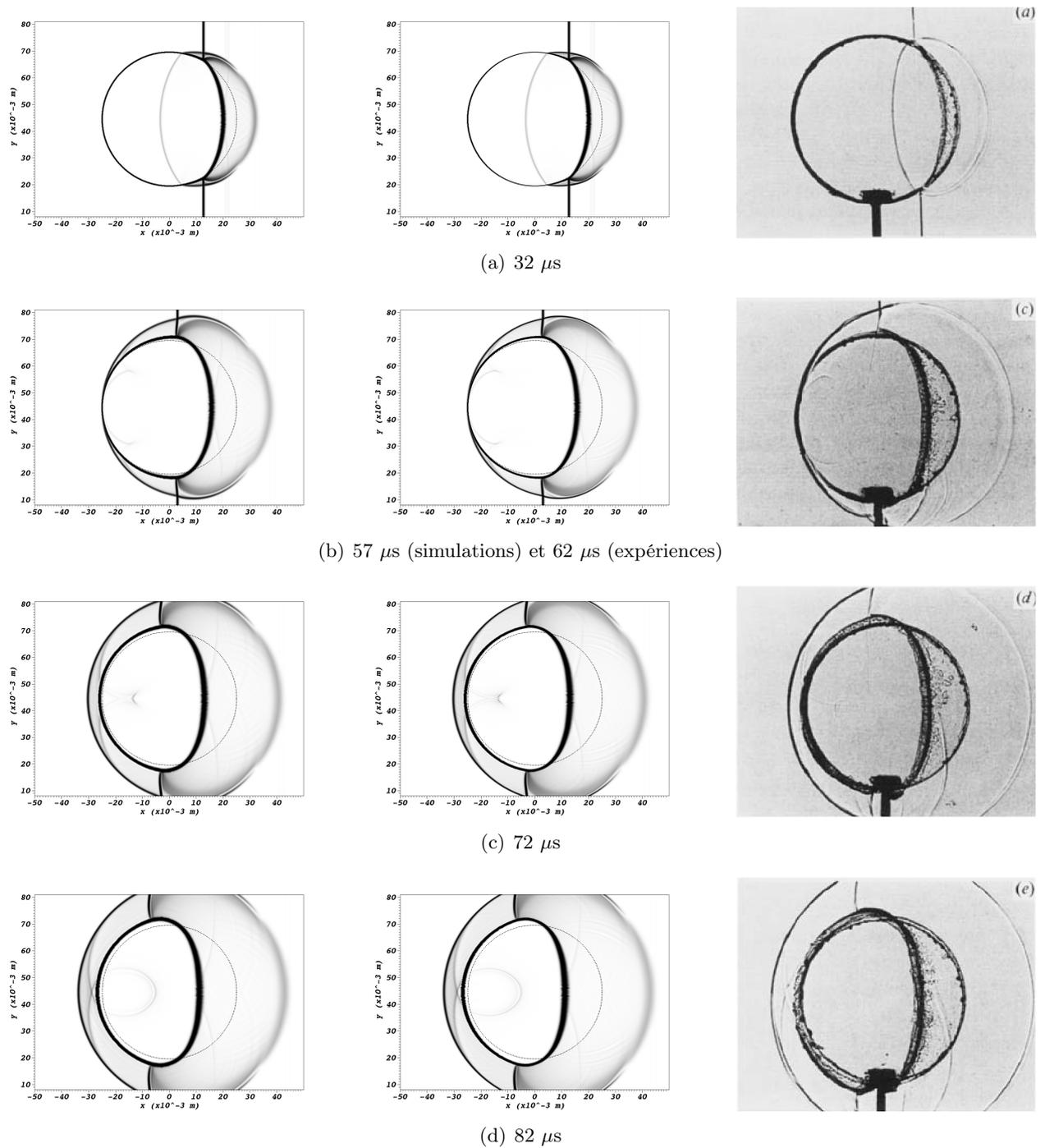


FIGURE 3.26 – Interaction cylindre Hélium-air : strioscopie pour les modèles à cinq équations réduit (à gauche) et de Kapila (au centre). Photographies des résultats expérimentaux de Haas et Sturtevant [HS87] (à droite).

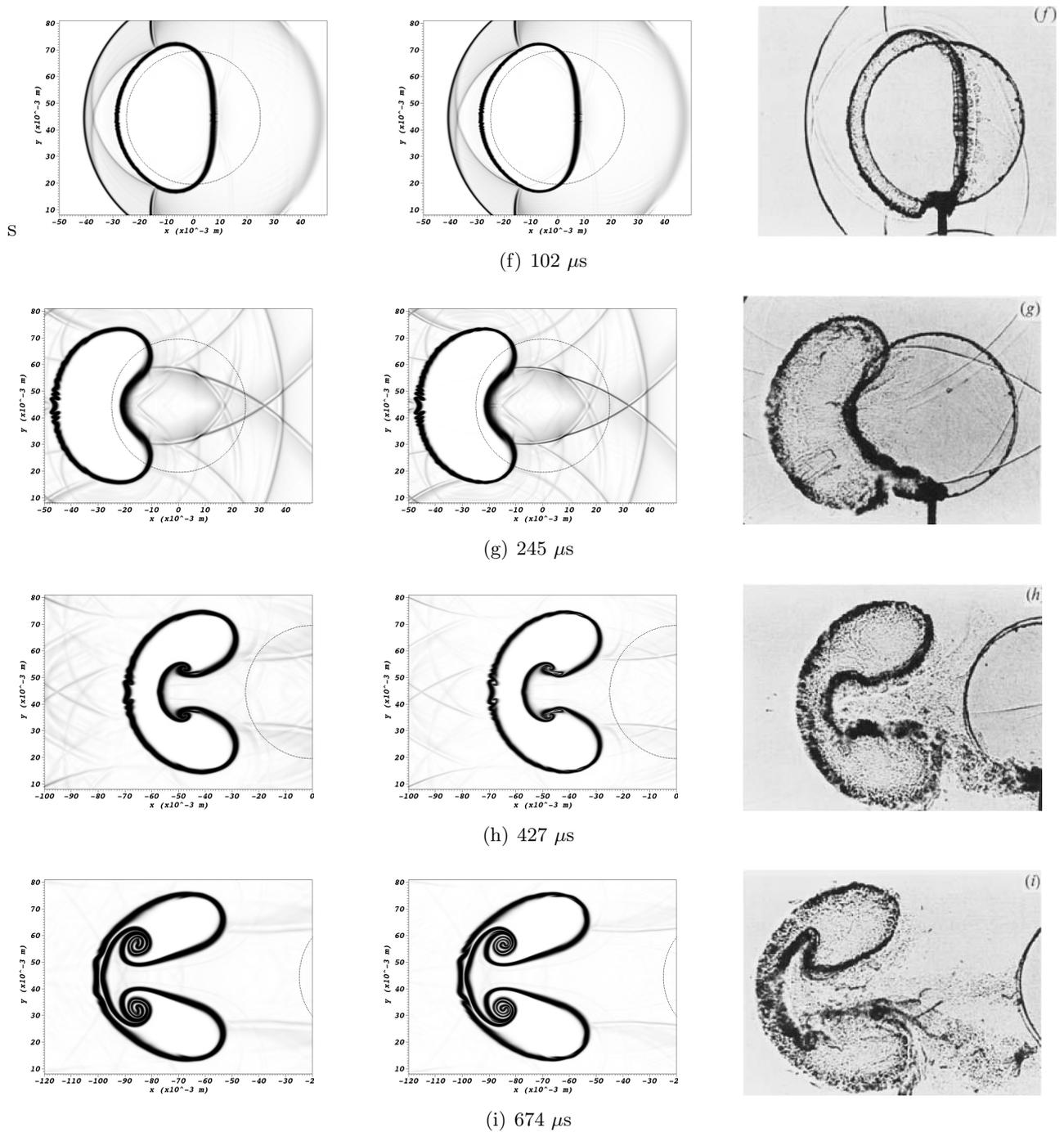


FIGURE 3.27 – Interaction cylindre Hélium-air : strioscopie pour les modèles à cinq équations réduit (à gauche) et de Kapila (au centre). Photographies des résultats expérimentaux de Haas et Sturtevant [HS87] (à droite). (suite)

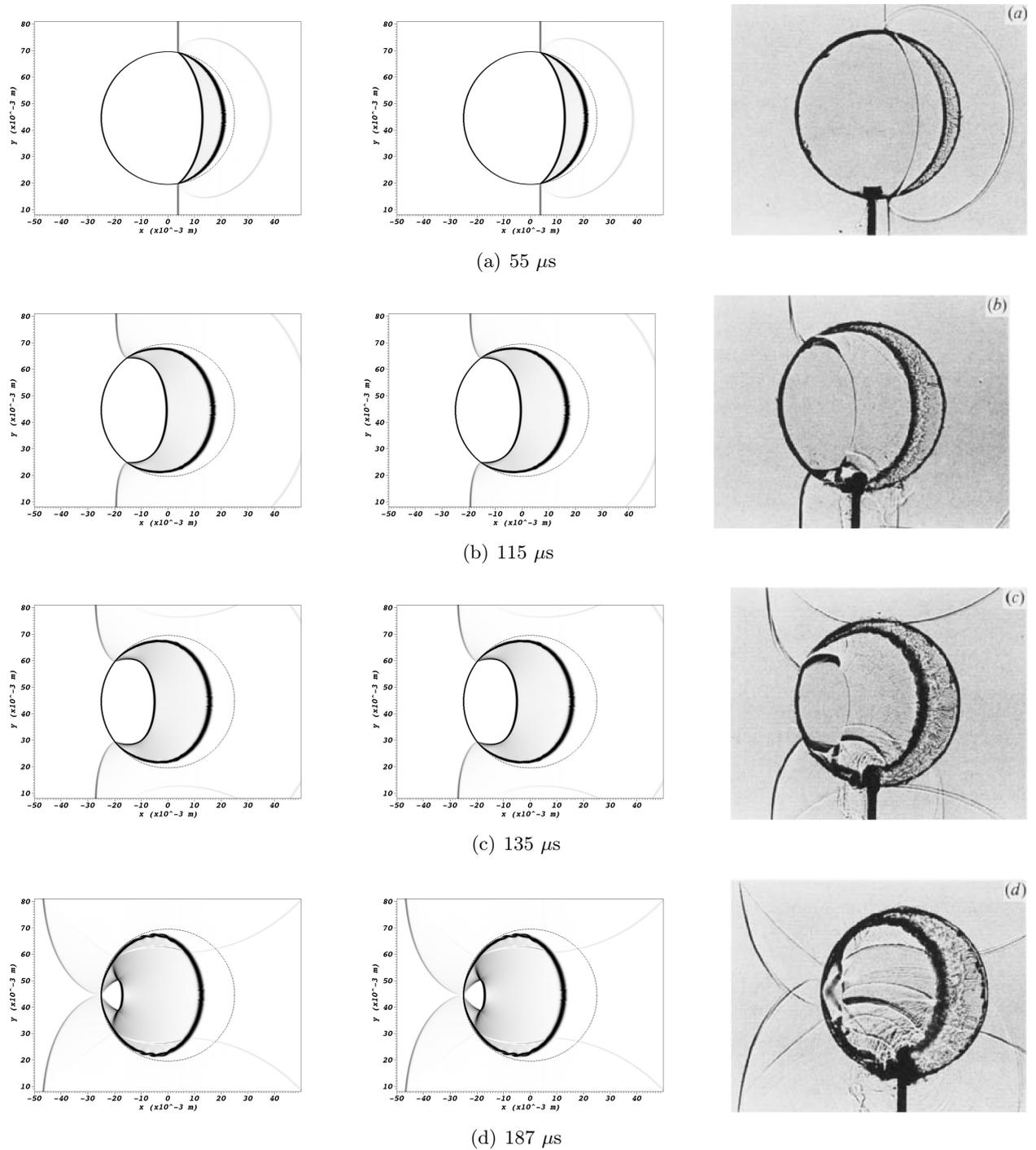


FIGURE 3.28 – Interaction cylindre R22-air : strioscopie pour les modèles à cinq équations réduit(à gauche) et de Kapila (au centre). Photographies des résultats expérimentaux de Haas et Sturtevant [HS87] (à droite).

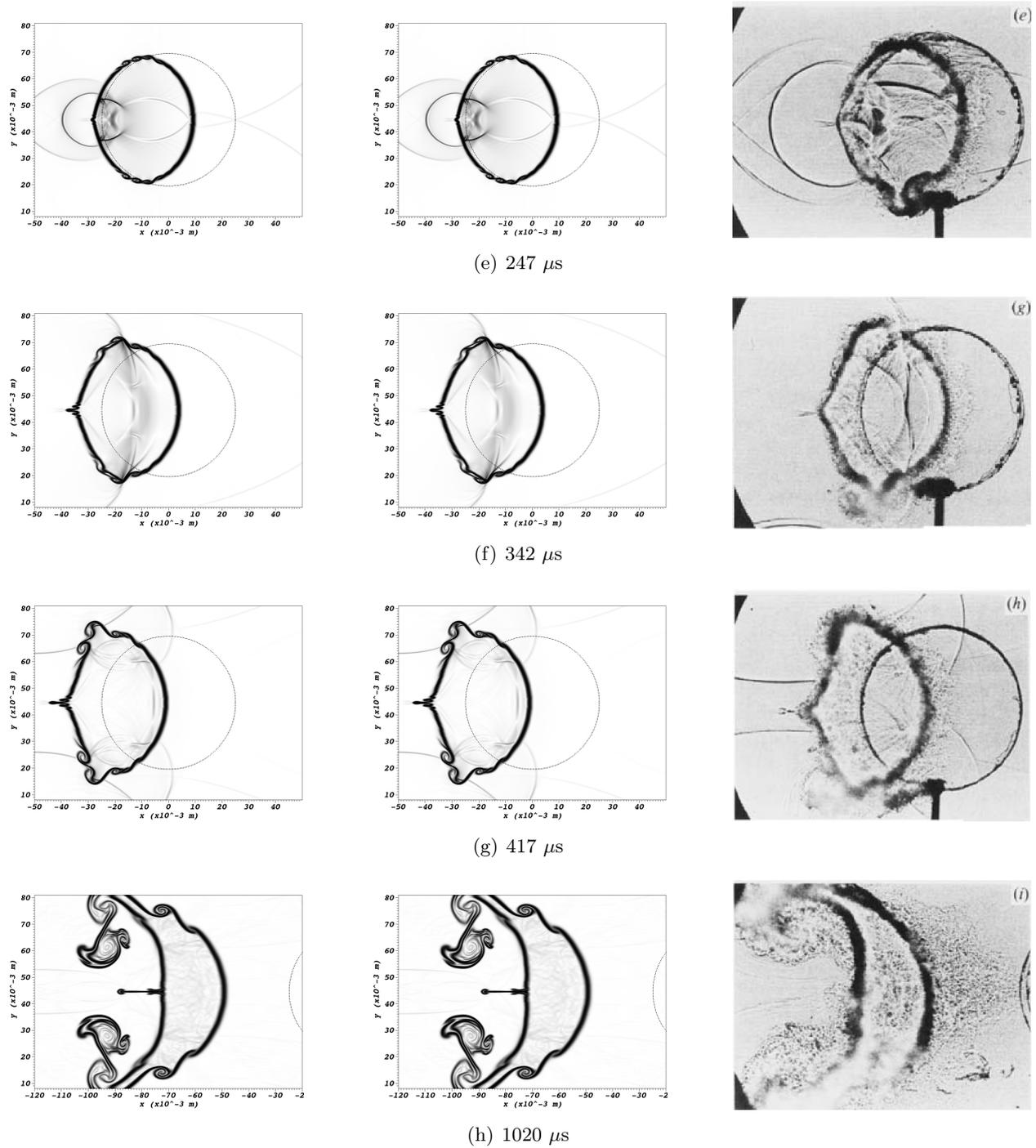


FIGURE 3.29 – Interaction cylindre R22-air : strioscopie pour les modèles à cinq équations réduit (à gauche) et de Kapila (au centre). Photographies des résultats expérimentaux de Haas et Sturtevant [HS87] (à droite). (suite)

spécifique et de l'énergie interne. Notons que pour ce modèle diphasique, la fraction volumique peut être modifiée durant l'étape acoustique. Nous avons donc déterminé les pentes minimales permettant d'assurer que la fraction volumique reste bien comprise en 0 et 1. Néanmoins, nous n'avons pas réussi à exprimer les conditions exactes pour garantir la positivité de la pression (et donc l'hyperbolicité du système). Une correction *a posteriori* est utilisée pour assurer que la vitesse du son est bien définie.

Pour chaque modèle diphasique, nous avons développé des formulations implicites de l'étape acoustique. La formulation finalement retenue pour le modèle à cinq équations réduit peut être interprétée comme une prédiction de la pression dans le but de calculer, de façon implicite, le flux numérique de l'étape acoustique. Cette méthode s'avère être très robuste et ne nécessite qu'une seule inversion de matrice à chaque pas de temps. Pour le modèle de Kapila, nous utilisons la même approche sauf pour la fraction volumique où un schéma *ad hoc* a été développé. Ce schéma implicite permet de garantir que la fraction volumique reste bien comprise en 0 et 1.

L'étape de transport est quant à elle résolue de façon explicite. Pour limiter la diffusion numérique de l'interface entre les deux fluides, nous avons utilisé les schémas d'antidiffusion de Kokh et Lagoutière [KL10] et une méthode basée sur la projection aléatoire de Glimm [Jun13].

Nous avons ensuite montré que le schéma global obtenu à partir de cette stratégie de splitting est conservatif si la discrétisation de la vitesse utilisée dans le schéma de transport décentré ou antidiffusif est cohérente avec celle utilisée dans l'étape acoustique. De plus, le schéma global préserve les discontinuités de contact.

La robustesse du schéma numérique pour le modèle à cinq équations réduit a pu être illustrée sur diverses expériences numériques 1D et 2D. La formulation semi-implicite est plus efficace que le schéma totalement explicite au niveau du temps de calcul. Néanmoins, nous avons constaté qu'un choix judicieux sur le rapport des pentes du solveur de Riemann permettait de réduire drastiquement la contrainte sur le pas de temps acoustique quand le rapport des densités entre les deux phases était grand. Nous avons montré que les différents schémas de l'étape de transport permettent bien de limiter la diffusion de l'interface et la taille de la zone de mélange numérique. Pour le modèle de Kapila, nous avons considéré des configurations initiales où les deux phases sont mélangés. Les résultats obtenus avec les formulations explicite et semi-implicite du schéma sont en accord avec ceux de la littérature, notamment sur la fraction volumique. Rappelons néanmoins que dans l'application visée, les deux phases fluides sont supposées non miscibles. Nous avons donc comparé les deux modèles diphasiques sur des configurations où les deux fluides sont initialement non mélangés. Dans ce cas, et malgré l'apparition d'une zone de mélange numérique liée à la diffusion de l'interface, les solutions obtenues pour les deux modèles diphasiques sont quasiment identiques. Cela semble donc indiquer que le modèle à cinq équations réduit est suffisant pour ce type de configurations.

Dans le chapitre suivant, nous allons enrichir notre modèle grâce à la prise en compte des termes dissipatifs. Une correction du schéma numérique pour les écoulements à faible nombre de Mach sera aussi présentée et analysée.

# Chapitre 4

## Extensions du modèle et de la méthode numérique

### Sommaire

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Prise en compte et résolution numérique des termes de dissipation</b>   | <b>96</b>  |
| 4.1.1      | Discrétisation des termes dissipatifs                                      | 98         |
| 4.1.2      | Formulation explicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation | 100        |
| 4.1.3      | Formulation implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation | 101        |
| 4.1.4      | Validation numérique   | 104        |
| 4.1.4.1    | Tube à choc diphasique : choix de la température de mélange                | 104        |
| 4.1.4.2    | Écoulement monophasique de type Couette                                    | 106        |
| 4.1.4.3    | Écoulement diphasique de type Couette                                      | 108        |
| <b>4.2</b> | <b>Correction bas Mach</b>   | <b>112</b> |
| 4.2.1      | Présentation de la correction  | 113        |
| 4.2.2      | Comportement du schéma dans le régime bas Mach                             | 115        |
| 4.2.3      | Analyse asymptotique bas Mach  | 116        |
| 4.2.4      | Validation numérique   | 123        |
| 4.2.4.1    | Vortex dans une boîte  | 123        |
| 4.2.4.2    | Écoulement dans une tuyère   | 125        |
| 4.2.5      | Prise en compte des termes de dissipation                                  | 127        |
| 4.2.6      | Validation numérique du schéma bas Mach avec les termes de dissipation     | 131        |
| 4.2.6.1    | Cavité entraînée   | 131        |
| <b>4.3</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>133</b> |

---

Dans le chapitre précédent, la méthode de résolution numérique pour les modèles diphasiques de Kapila et à cinq équations réduit a été présentée. Dans le cas particulier où les deux phases fluides ne sont pas mélangées initialement, nous avons vu que les deux modèles donnent des résultats similaires. Dans le problème d'ablation liquide que nous voulons traiter, la phase liquide n'est pas présente initialement. En effet, rappelons qu'au niveau de la paroi du solide, l'énergie cinétique est transformée en énergie thermique par friction. Sous l'effet de cet échauffement, la partie métallique de la protection thermique de l'objet se liquéfie. La phase liquide va donc être injectée dans la phase gazeuse environnante au cours du processus. L'air et le métal fondu sont des fluides très différents que nous considérons comme non miscibles. Il ne va donc pas apparaître de zone de mélange dans l'écoulement. C'est pourquoi dans la suite nous ne retenons que le modèle diphasique à cinq équations réduit qui permet de traiter convenablement les problèmes à interfaces. Il est cependant nécessaire de compléter le modèle diphasique en ajoutant les termes

de dissipation pour tenir compte des effets visqueux et de la diffusion de la chaleur à travers le fluide.

L'écoulement diphasique considéré est constitué d'une phase gazeuse compressible et d'une phase liquide quasi-incompressible non miscibles séparées par une interface mobile. Cependant, dans le modèle à interfaces diffuses utilisé pour modéliser l'écoulement air-métal fondu, les mêmes équations (compressibles) sont résolues dans tout le domaine. Cela impose donc de modéliser un écoulement incompressible en utilisant un modèle compressible à faible nombre de Mach. Il est alors nécessaire d'apporter une correction au schéma numérique pour calculer correctement ce type d'écoulement. En effet, la solution discrète d'un modèle compressible ne tend pas forcément vers celle du modèle incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers 0.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la prise en compte des termes de dissipation dans le modèle diphasique à cinq équations réduit, puis nous étudierons une correction du schéma numérique permettant de capturer correctement la limite incompressible quand le nombre de Mach est faible.

## 4.1 Prise en compte et résolution numérique des termes de dissipation dans le modèle diphasique

Le modèle à cinq équations réduit avec les termes de dissipation peut s'écrire [BN09] :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \nabla \cdot (\rho y \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, & \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) & = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \\ \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \nabla z & = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'énergie totale de mélange est donnée par  $E = \varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ , avec  $\varepsilon$  l'énergie interne de mélange. Les densités de chaque phase fluide sont définies par

$$\rho_1 = \rho \frac{y}{z} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho \frac{1-y}{1-z}. \quad (4.2)$$

Rappelons enfin que la densité et l'énergie interne de mélange vérifient les relations

$$\rho = z\rho_1 + (1-z)\rho_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2. \quad (4.3)$$

Les effets visqueux sont pris en compte grâce au tenseur symétrique des contraintes visqueuses  $\mathbb{T}$  dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie. En supposant que les deux phases sont des fluides Newtoniens, le tenseur de viscosité s'exprime

$$\mathbb{T} = -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1}_d + 2\mu \mathbb{D},$$

avec la viscosité du mélange  $\mu = \sum_{k=1}^2 z_k \mu_k$  et  $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$  le tenseur des taux de déformation.

Le flux de chaleur  $\mathbf{q} = \sum_{k=1}^2 z_k \mathbf{q}_k$  dans l'équation sur l'énergie traduit les effets de la dissipation thermique. Nous supposons que la diffusion de la chaleur dans la phase  $k$  est isotrope et que son flux de chaleur  $\mathbf{q}_k$  est défini par la loi de Fourier  $\mathbf{q}_k = -\kappa_k \nabla T_k$  où  $\kappa_k$  est la conductivité thermique du fluide. Cependant, les termes  $\nabla T_k$  ne sont pas clairement définis au niveau de l'interface pour des écoulements diphasiques où les deux phases sont non mélangées. C'est pourquoi

nous allons supposer que le flux de chaleur de mélange suit une loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  avec une conductivité de mélange définie par  $\kappa = z\kappa_1 + (1 - z)\kappa_2$  et  $T$  une température de mélange. Nous pouvons remarquer que les deux définitions du flux de chaleur de mélange coïncident pour des solutions continues non mélangées. Comme pour le terme de Kapila, les différences sont seulement situées dans la zone de mélange. Dans cette étude, nous considérons principalement des configurations où la condition initiale est non mélangée. Par conséquent, si l'interface entre les deux phases n'est pas diffusée numériquement, grâce à l'utilisation de la méthode de Glimm dans l'étape de transport par exemple, le choix de la définition du flux de chaleur de mélange n'aura aucun impact. Si l'interface est numériquement diffusée, comme c'est le cas avec les autres schémas pour l'étape de transport, l'écart sur la solution globale devrait rester faible.

Pour définir la température de mélange  $T$  qui apparaît dans le flux de chaleur  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , nous utilisons la relation vérifiée par l'énergie interne de mélange

$$\varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2. \quad (4.4)$$

Avec les lois d'état considérées, voir la section 2.2.2 du chapitre 2, nous avons la relation suivante entre l'énergie interne d'une phase  $k$  et sa température :

$$\varepsilon_k(T_k, \vartheta_k) = q_k + c_{v_k}T_k + f_k(\vartheta_k),$$

où  $f_k(\vartheta_k) = \pi_k \vartheta_k$  pour un gaz raide. En définissant  $c_v = \sum_k y_k c_{v_k}$ , et la température de mélange

$$T = \frac{1}{c_v} \sum_{k=1}^2 y_k c_{v_k} T_k, \quad (4.5)$$

l'énergie interne (4.4) du mélange s'écrit

$$\varepsilon(T, \vartheta, z, y) = q(y) + c_v T + \sum_{k=1}^2 y_k f_k(\vartheta_k), \quad (4.6)$$

où  $q(y) = yq_1 + (1 - y)q_2$  est le paramètre de mélange défini via la fermeture isobare du système (2.41).

### Remarque 22

Nous aurions pu définir une autre température de mélange basée sur l'entropie de mélange du modèle diphasique à cinq équations réduit. Nous verrons cependant dans les illustrations numériques que ce choix conduit à des artefacts numériques sur la température dans la zone de mélange.

Dans ce travail, nous avons supposé que les coefficients de viscosité  $\mu_k$  et de conductivité thermique  $\kappa_k$  de chaque phase fluide sont constants. Il n'est sans doute pas difficile de s'affranchir de cette hypothèse même si ce n'est pas fait ici.

De la même façon que pour la partie hyperbolique présentée dans le chapitre 3, nous allons utiliser une décomposition d'opérateurs pour résoudre numériquement le modèle à cinq équations réduit avec les termes de dissipation. Pour pouvoir calculer précisément les termes de dissipation, des maillages raffinés doivent être utilisés le long des parois. Les temps caractéristiques de diffusion thermique et visqueuse étant proportionnels au carré de la longueur caractéristique, cela induit des contraintes sur le pas de temps explicite très grandes et inconcevables en pratique. C'est pourquoi nous avons fait le choix de mettre les termes de dissipation dans l'étape acoustique du splitting présenté précédemment. Le premier système regroupant les effets acoustiques

et de dissipation s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \rho y \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \rho E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \\ \partial_t z = 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Une résolution implicite de cette étape sera réalisée dans le but de s'affranchir des contraintes liées au pas de temps explicite.

Le second système est inchangé et ne tient compte que de la propagation des ondes matérielles à travers le fluide.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho y) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho E) = 0, \\ \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Finalement, la prise en compte des termes dissipatifs dans le modèle diphasique n'impacte que l'étape acoustique du splitting. Dans la suite nous présentons la discrétisation des termes dissipatifs sur un maillage curviligne, puis nous détaillerons les formulations explicite et implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation. Enfin, des simulations numériques nous permettront de valider les schémas retenus.

#### 4.1.1 Discrétisation des termes dissipatifs

Pour présenter la discrétisation des termes de dissipation, nous allons seulement considérer l'équation de diffusion de la quantité  $\theta$

$$\partial_t \theta = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta), \quad (4.9)$$

où le paramètre de diffusion  $\lambda$  peut varier spatialement. Le principe sera le même pour les équations de Navier-Stokes.

La construction d'un schéma numérique pour l'équation de diffusion (4.9) est détaillée en annexe D. Sa construction est basée sur une transformation entre un maillage structuré curviligne et un maillage cartésien régulier. Le schéma obtenu s'écrit alors

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} \left( \frac{\lambda}{|\Omega|} \right)_{ij} \left( (\mathbf{n} | \Gamma|)_{ij} (\theta_j - \theta_i) + (\mathbf{t} | \Gamma|)_{ij} (\theta_{ij}^A - \theta_{ij}^B) \right) \cdot (\mathbf{n} | \Gamma|)_{ij}. \quad (4.10)$$

Dans la suite, nous allons détailler les différents termes du flux numérique. Notons que ce flux peut être décomposé en deux contributions : une contribution normale faisant intervenir les valeurs  $\theta_i$  et  $\theta_j$  des cellules de part et d'autre de l'interface et une contribution transverse où apparaissent les valeurs des points auxiliaires  $A$  et  $B$ , voir figure 4.1.

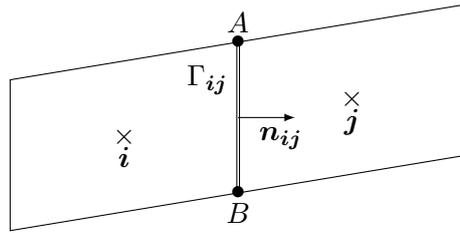


FIGURE 4.1 – Notations utilisées pour la discrétisation des termes de dissipation sur la face  $\Gamma_{ij}$  entre les mailles  $i$  et  $j$ .

Pour calculer le terme  $\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)_{ij}$ , nous utilisons une moyenne harmonique entre les valeurs de part et d'autre de l'interface, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)_{ij} = 2 \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i |\Omega_j| + \lambda_j |\Omega_i|}.$$

Contrairement à la moyenne arithmétique, l'utilisation d'une moyenne harmonique permet de conserver les champs linéaires par morceaux [Cha04].

Pour la contribution normale, le terme  $(\mathbf{n}|\Gamma|)_{ij}$  est égal à la normale (unitaire) à la face  $\mathbf{n}_{ij}$  multipliée par la longueur de la face  $|\Gamma_{ij}|$ .

Le terme  $(\mathbf{t}|\Gamma|)_{ij}$  correspond quant à lui à la contribution transverse. Pour la définir, il est plus simple d'utiliser la notation à deux indices, voir figure D.2 en annexe D. Ainsi, si les cellules  $i$  et  $j$  sont respectivement notées  $(l, m)$  et  $(l+1, m)$ , nous avons

$$(\mathbf{t}|\Gamma|)_{ij} = (\mathbf{t}|\Gamma|)_{l+1/2, m} = \frac{1}{4} \left( (\mathbf{n}|\Gamma|)_{l, m+1/2} + (\mathbf{n}|\Gamma|)_{l+1, m+1/2} + (\mathbf{n}|\Gamma|)_{l, m-1/2} + (\mathbf{n}|\Gamma|)_{l+1, m-1/2} \right).$$

Notons que le vecteur  $\mathbf{t}$  n'est pas nécessairement orthogonal à la normale  $\mathbf{n}$ . Finalement, pour déterminer complètement le flux du schéma numérique (4.10), il est nécessaire de calculer les valeurs de points auxiliaires  $A$  et  $B$ . Dans le schéma numérique proposé, les valeurs des points auxiliaires sont calculées comme la somme des valeurs des quatre sommets adjacents pondérées par un poids de 0.25. Toujours pour la face  $\Gamma_{l+1/2, m}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta_{l+1/2, m}^A &= \frac{1}{4} (\theta_{l, m} + \theta_{l+1, m} + \theta_{l, m+1} + \theta_{l+1, m+1}), \\ \theta_{l+1/2, m}^B &= \frac{1}{4} (\theta_{l, m-1} + \theta_{l+1, m-1} + \theta_{l, m} + \theta_{l+1, m}). \end{aligned}$$

Le schéma numérique proposé ici pour les termes de diffusion (4.10) peut s'écrire avec le même formalisme que le schéma linéaire de diffusion proposé par Sheng et Yuan [SY08]. Néanmoins, dans le cas du schéma de Sheng et Yuan [SY08] l'interpolation des valeurs des points auxiliaires tient aussi compte de la géométrie.

Pour un maillage structuré non cartésien, le schéma proposé (4.10) conduit à un stencil de neuf points. Cependant, dans le cas d'un maillage cartésien le schéma dégénère vers le schéma à cinq points, voir figure 4.2. En effet, pour un maillage cartésien le terme  $(\mathbf{n}|\Gamma|)_{ij} \cdot (\mathbf{t}|\Gamma|)_{ij}$  dans le flux numérique du schéma (4.10) est nul. Si en plus, le maillage cartésien est régulier, *i.e.*  $|\Omega_i| = |\Omega_j| = (\Delta x)^2$  pour toutes les cellules, nous retrouvons le schéma classique à cinq points

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \sum_{j \in v(i)} \lambda_{ij} (\theta_j - \theta_i).$$

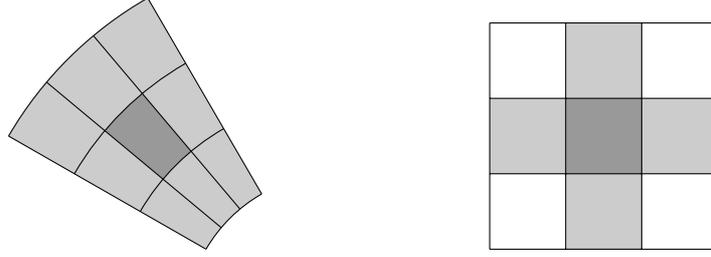


FIGURE 4.2 – Discretisation des termes de diffusion. Stencil à neuf points pour un maillage curviligne (à gauche), à cinq points pour un maillage cartésien (à droite).

### Remarque 23

La discrétisation des termes de diffusion que nous venons de présenter sera d'ordre 2 sur des maillages curvilignes peu déformés. Elle ne respecte cependant pas le principe du maximum. Des travaux récents [LP09, BL15, Wu17, ZSW17] sur les schémas de diffusion utilisant des méthodes non linéaires permettent d'assurer la positivité de la solution.

### 4.1.2 Formulation explicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation

Dans un premier temps et de la même façon que dans le chapitre 3, nous réécrivons le système non conservatif (4.7) sous une forme qui va nous permettre de construire un schéma numérique. Les dernières équations sont combinées avec l'équation d'évolution de la densité. La première équation est quant à elle divisée par le carré de la densité de mélange. Nous obtenons alors

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta - \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0, \\ \partial_t y & = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \vartheta \nabla p & = \vartheta \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t E + \vartheta \nabla \cdot (p\mathbf{u}) & = \vartheta \nabla \cdot (\mathbb{T}\mathbf{u}) - \vartheta \nabla \cdot \mathbf{q}, \\ \partial_t (\vartheta z) - z\vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

En utilisant le schéma de type Godunov (3.34) pour la partie hyperbolique et la discrétisation des termes de dissipation présentée dans la section précédente, nous avons le schéma suivant

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^n, \\ y_i^\dagger &= y_i^n, \\ \mathbf{u}_i^\dagger &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{p}_{ij}^n - \nabla_i \cdot \mathbb{T}^n \right), \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{p}_{ij}^n \bar{u}_{ij}^n - \nabla_i \cdot (\mathbb{T}^n \mathbf{u}^n) + \nabla_i \cdot \mathbf{q}^n \right), \\ z_i^\dagger &= z_i^n, \end{aligned}$$

où la notation  $\nabla_i \bullet$  désigne la discrétisation des termes dissipatifs présentée dans la section 4.1.1. Nous rappelons que la pression et la vitesse normale sur la face  $\Gamma_{ij}$  sont données par :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ij}^n &= \frac{\bar{C}_{ij}^- \mathbf{u}_i^n + \bar{C}_{ij}^+ \mathbf{u}_j^n}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{p_j^n - p_i^n}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+}, \\ \bar{p}_{ij}^n &= \frac{\bar{C}_{ij}^+ p_i^n + \bar{C}_{ij}^- p_j^n}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} - \frac{\bar{C}_{ij}^- \bar{C}_{ij}^+}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n) \cdot \mathbf{n}_{ij}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Pour le flux de chaleur de mélange  $\mathbf{q}$ , nous avons supposé qu'il suit une loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  avec  $\kappa = z\kappa_1 + (1-z)\kappa_2$  et  $T$  la température de mélange définie par

$$T = \frac{1}{c_v} \sum_{k=1}^2 y_k c_{v_k} T_k. \quad (4.13)$$

Pour la version unidimensionnelle du schéma, la contrainte de stabilité explicite sur le pas de temps dépend des trois contributions suivantes :

— condition liée à l'acoustique

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\bar{C}_{i+\frac{1}{2}}^- + \bar{C}_{i-\frac{1}{2}}^+}{\rho_i^n} \right) \leq 1,$$

— condition liée à la diffusion visqueuse

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\mu_i}{\rho_i^n} \right) \leq \frac{1}{2},$$

— condition liée à la diffusion thermique

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\kappa_i}{\rho_i^n c_{v_i}} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Ces conditions sur le pas de temps sont très restrictives en pratique, surtout avec des maillages raffinés en proche paroi pour capter les phénomènes de couche limite visqueuse et thermique. C'est pourquoi nous souhaitons construire une formulation implicite pour le schéma de l'étape acoustique.

### 4.1.3 Formulation implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation

Pour la formulation implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation, nous allons nous appuyer sur la formulation IM1 pour la partie hyperbolique présentée dans l'algorithme 1 du chapitre 3. Nous allons cependant effectuer une hypothèse supplémentaire en négligeant des termes dans l'équation d'évolution de la pression utilisée pour la résolution du système vitesse-pression. Ceci nous permettra d'avoir un système en vitesse et pression linéaire et autonome. Après avoir inversé ce système linéaire nous pourrons mettre à jour le volume spécifique du mélange. Enfin, pour résoudre implicitement l'équation d'énergie nous allons encore supposer que le flux de chaleur du mélange suit une loi de Fourier avec une conductivité thermique moyenne et une température de mélange compatible avec la définition de l'énergie interne de mélange. Cela nous permettra de résoudre l'équation d'énergie grâce à une méthode de Newton en utilisant comme variable la température de mélange.

Dans un premier temps, nous allons préciser la résolution implicite du système vitesse pression.

### Résolution du système vitesse-pression

Pour calculer les flux de la partie hyperbolique, nous voulons résoudre le sous-système en vitesse et en pression. L'équation d'évolution de la vitesse est donnée par

$$\partial_t \mathbf{u} + \vartheta \nabla p = \vartheta \nabla \cdot \mathbb{T}. \quad (4.14)$$

Pour la pression, nous avons

$$\partial_t p + C^2 \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\mathbb{T} : \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q}}{\rho \sum_k y_k \left. \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial p} \right|_{\rho_k}}. \quad (4.15)$$

Nous allons détailler les termes du second membre de l'équation d'évolution de la pression. Pour un mélange de gaz raides, le dénominateur est égal à

$$\rho \sum_{k=1}^2 y_k \left. \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial p} \right|_{\rho_k} = \rho \sum_{k=1}^2 y_k \frac{\vartheta_k}{\gamma_k - 1} = \sum_{k=1}^2 \frac{z_k}{\gamma_k - 1} = \frac{1}{\gamma(z) - 1}.$$

Pour rappel, le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est le scalaire noté  $\mathbf{A} : \mathbf{B}$  défini par  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A})$ . En explicitant les composantes du tenseur symétrique des contraintes

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \tau_{x_1 x_1} & \tau_{x_1 x_2} \\ \tau_{x_1 x_2} & \tau_{x_2 x_2} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

nous avons  $\mathbb{T} : \mathbb{D} = \tau_{x_1 x_1} \partial_{x_1} u_1 + \tau_{x_1 x_2} (\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2) + \tau_{x_2 x_2} \partial_{x_2} u_2$ . Ainsi, le premier terme du second membre rajoute des non linéarités au système vitesse-pression. Bien que sa prise en compte soit possible de façon non linéaire, nous négligerons ce terme dans la suite.

Le deuxième terme du second membre de l'équation d'évolution de la pression relie l'équation d'énergie au système en vitesse-pression. Dans ce cas, il n'est plus possible de déterminer une prédiction du flux numérique de la partie hyperbolique avec seulement le sous-système en vitesse et pression. C'est pourquoi nous négligerons ce terme dans la formulation implicite. Nous verrons dans la suite que ce terme est lié à la dilatation thermique du fluide dans le régime bas Mach. Néanmoins, dans les applications visées, la variation de température du liquide (incompressible) est faible comparée à celle du gaz environnant.

Finalement, pour prédire les flux de la partie hyperbolique, nous considérons le système vitesse-pression suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \vartheta \nabla p & = \vartheta \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t p + C^2 \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Cette simplification est importante d'un point de vue pratique et numérique dans la mesure où elle permet de garder un système linéaire à deux inconnues et nous verrons qu'elle est acceptable dans les illustrations numériques. En effet, nous pourrions estimer l'impact de ces simplifications en comparant les résultats numériques obtenus avec les formulations explicite et implicite.

Une discrétisation implicite de ce système (4.17) est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^\dagger &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{p}_{ij}^\dagger - \nabla_i \cdot \mathbb{T}^\dagger \right), \\ p_i^\dagger &= p_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n (C_i^n)^2 \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^\dagger, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ij}^\dagger &= \frac{\bar{C}_{ij}^- \mathbf{u}_i^\dagger + \bar{C}_{ij}^+ \mathbf{u}_j^\dagger}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{p_j^\dagger - p_i^\dagger}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+}, \\ \bar{p}_{ij}^\dagger &= \frac{\bar{C}_{ij}^+ p_i^\dagger + \bar{C}_{ij}^- p_j^\dagger}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} - \frac{\bar{C}_{ij}^- \bar{C}_{ij}^+}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} (\mathbf{u}_j^\dagger - \mathbf{u}_i^\dagger) \cdot \mathbf{n}_{ij}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Notons que comme dans le cas non visqueux, les pentes du solveur de Riemann ainsi que la vitesse du son lagrangienne sont figées au temps  $n$ . Nous avons donc à résoudre un système linéaire de la forme

$$\left( \text{Id} + \frac{\Delta t}{|\Omega|} \mathbf{M} \right) \mathbf{W}^{up^\dagger} = \mathbf{W}^{up^n}, \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{W}^{up} = (\mathbf{u}_i, p_i)_i^T$  est le vecteur des inconnues de vitesse et de pression. La matrice  $\mathbf{M}$  est une matrice avec neuf blocs diagonaux sur un maillage curviligne en deux dimensions.

### Mise à jour du volume spécifique

Après avoir résolu le système en vitesse-pression, on peut déterminer les flux  $\bar{u}_{ij}^\dagger$  et  $\bar{p}_{ij}^\dagger$  grâce à la relation (4.18). L'équation d'évolution sur le volume spécifique est alors donnée explicitement par

$$\vartheta_i^\dagger = \vartheta_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i^n|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^\dagger.$$

### Résolution de l'équation sur l'énergie

À ce stade de la résolution implicite de l'étape acoustique, le volume spécifique  $\vartheta^\dagger$ , le champ de vitesse  $\mathbf{u}^\dagger$  et les flux de pression  $\bar{p}_{ij}^\dagger$  sont connus à l'instant  $t^\dagger$ . Dans la mesure où l'étape acoustique ne modifie pas les fractions volumiques et massiques, il nous reste seulement à déterminer la nouvelle énergie totale. Dans la partie acoustique, l'équation sur l'énergie totale s'écrit

$$\partial_t E + \vartheta \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = \vartheta \nabla \cdot (\mathbb{T}\mathbf{u}) - \vartheta \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (4.20)$$

A cause du terme lié à la dissipation thermique, nous ne pouvons pas directement mettre à jour l'énergie du mélange. Pour résoudre implicitement cette équation, nous allons changer d'inconnue. Nous savons que l'énergie totale du mélange vaut  $E = \varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ , où  $\varepsilon$  est l'énergie interne du mélange (4.4). Nous pouvons alors réécrire l'équation d'évolution de l'énergie totale (4.20) en fonction de l'énergie interne

$$\partial_t \varepsilon + \vartheta \nabla \cdot \mathbf{q} = \vartheta \nabla \cdot (\mathbb{T}\mathbf{u}) - \vartheta \nabla \cdot (p\mathbf{u}) - \partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}. \quad (4.21)$$

Une discrétisation implicite de cette équation donne

$$\varepsilon_i^\dagger - \varepsilon_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \nabla_i \cdot \mathbf{q}^\dagger = \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \nabla_i \cdot (\mathbb{T}^\dagger \mathbf{u}^\dagger) - \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| (\bar{p}_{ij}^\dagger \bar{u}_{ij}^\dagger) \right) - \frac{1}{2} \left( |\mathbf{u}_i^\dagger|^2 - |\mathbf{u}_i^n|^2 \right). \quad (4.22)$$

Tous les termes du second membre du schéma numérique sont déjà connus grâce à la résolution du système en vitesse et pression. Dans la suite, nous noterons ce second membre  $SM_i^\dagger$ .

De la même façon que pour la formulation explicite, nous allons supposer que le flux de chaleur du mélange suit une loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  avec une conductivité de mélange définie

par  $\kappa = z\kappa_1 + (1 - z)\kappa_2$  et  $T$  la température de mélange définie par

$$T = \frac{1}{c_v} \sum_{k=1}^2 y_k c_{v_k} T_k,$$

où la température de la phase est donnée par la loi d'état  $T_k(p, \vartheta_k) = \vartheta_k \frac{p + \pi_k}{c_{v_k}(\gamma_k - 1)}$ . Cela va nous permettre d'écrire l'équation d'évolution de l'énergie dans la variable température de mélange. En effet, la discrétisation implicite en temps de l'équation sur l'énergie (4.22) s'écrit

$$\varepsilon(T_i^\dagger, \vartheta_i^\dagger, z_i^\dagger, y_i^\dagger) - \varepsilon_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^\dagger) = SM_i^\dagger. \quad (4.23)$$

L'équation précédente est résolue avec une méthode de Newton en température de mélange. À convergence, nous pouvons en déduire la nouvelle énergie interne via la relation (4.6) et l'énergie totale via

$$E_i^\dagger = \varepsilon_i^\dagger + \frac{|\mathbf{u}_i^\dagger|^2}{2}.$$

En conclusion, contrairement au cas non visqueux où il n'y avait qu'une seule inversion d'un système linéaire penta-diagonal pour le schéma implicite, ici nous avons besoin de résoudre un système linéaire à 9 blocs pour le système vitesse-pression et un processus itératif pour déterminer la nouvelle énergie du mélange.

#### 4.1.4 Validation numérique

L'objectif de cette section est de valider le schéma numérique proposé précédemment pour prendre en compte les termes de diffusion dans le modèle diphasique. Tout d'abord nous allons étudier le choix de la température de mélange basée sur la forme de l'énergie interne. Pour cela, nous allons utiliser le cas test présenté dans la section 3.4.2. Afin de valider la discrétisation des termes de dissipation, nous regarderons le cas test classique d'un écoulement de type Couette monophasique. Nous pourrons aussi déterminer l'impact des termes négligés dans l'équation d'évolution sur la pression (4.15) pour la formulation implicite. Finalement, nous validerons la discrétisation des termes de dissipation pour un mélange de deux fluides et l'implication de l'équation sur l'énergie à l'aide d'un écoulement de type Couette diphasique.

##### 4.1.4.1 Tube à choc diphasique : choix de la température de mélange

Pour illustrer le choix de la température de mélange, nous allons reprendre le cas test du tube à choc diphasique présenté dans la section 3.4.2. Nous rappelons que les conditions initiales pour ce cas test sont données par

$$\begin{cases} (\rho, p, u, \gamma, \pi) = (1000 \text{ kg.m}^{-3}, 10^9 \text{ Pa}, 0 \text{ m.s}^{-1}, 4.4, 6 \times 10^8 \text{ Pa}) & \text{pour } 0\text{m} \leq x < 0.7\text{m}, \\ (\rho, p, u, \gamma, \pi) = (50 \text{ kg.m}^{-3}, 10^5 \text{ Pa}, 0 \text{ m.s}^{-1}, 1.4, 0 \text{ Pa}) & \text{pour } 0.7\text{m} \leq x \leq 1\text{m}. \end{cases}$$

Pour calculer la température, nous devons en plus nous donner la capacité thermique à volume constant  $c_v$  de chaque phase. Pour le liquide, nous prenons  $c_v = 4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Pour le gaz, nous avons  $c_v = 1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Le domaine de calcul est discrétisé sur 1000 mailles et des conditions aux limites transparentes sont utilisées de chaque côté. Nous utilisons ici le schéma explicite à l'ordre 2 et le pas de temps est calculé grâce aux conditions (3.22) et (3.56) avec un nombre de Courant égal à 0.2.

Dans ce cas test où les termes dissipatifs ne sont pas pris en compte, la température est un sous-produit de la simulation. Le choix de la définition de la température de mélange n'influencera

donc pas le calcul des autres variables physiques. En partant de la définition de l'énergie interne de mélange, nous avons pu définir une température de mélange

$$T_\varepsilon(p, \vartheta, z, y) = \frac{1}{c_v(y)} \sum_{k=1}^2 y_k c_{v_k} T_k, \quad (4.24)$$

qui est une combinaison convexe des températures de chaque phase  $T_k(p, \vartheta_k) = \vartheta_k \frac{p + \pi_k}{c_{v_k}(\gamma_k - 1)}$ . Néanmoins, il est aussi possible de définir une température de mélange en considérant l'entropie de mélange pour deux gaz raides

$$s = c_v(y) \ln \left( (p + \pi(z)) \vartheta^{\gamma(z)} \right).$$

En effet, d'après la relation de Gibbs  $T ds = d\varepsilon + p d\vartheta + f dz + g dy$ , nous obtenons que la température est égale à  $T = \left( \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\vartheta, z, y} \right)^{-1}$ . Nous en déduisons alors que la température  $T_s$  liée à l'entropie est donnée par

$$T_s(p, \vartheta, z, y) = \vartheta \frac{p + \pi(z)}{c_v(y)(\gamma(z) - 1)}. \quad (4.25)$$

#### Remarque 24

Dans le cas où les deux pressions de référence  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont égales, les deux définitions de température coïncident. Ceci n'est plus vrai si les pressions de référence sont différentes comme dans le cas d'un mélange air-eau.

Sur la figure 4.3, nous avons tracé les deux températures de mélange définies par (4.24) et (4.25) pour un maillage de 1000 mailles. Nous pouvons constater que les deux courbes sont bien superposées et très proches de la solution de référence dans les zones de fluide pur. Cependant, un pic de température apparaît dans la zone de mélange avec la température liée à l'entropie. De plus, cette surestimation de la température ne disparaît pas si l'on raffine le maillage comme nous pouvons le voir sur la figure 4.4 où un maillage dix fois plus fin a été utilisé. C'est pourquoi dans la suite, nous utiliserons la température de mélange calculée en utilisant la formule (4.24) déduite de la forme de l'énergie interne de mélange.

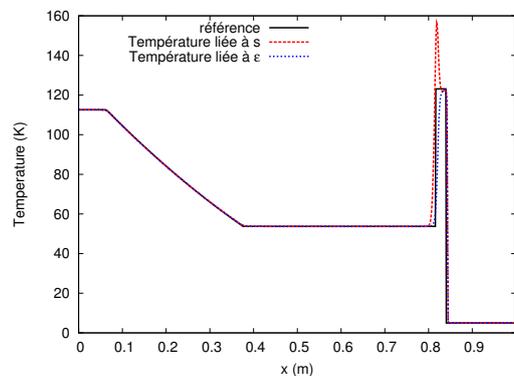


FIGURE 4.3 – Tube à choc diphasique pour 1 000 mailles : comparaison entre la température de mélange déduite de l'énergie interne de mélange et celle déduite de l'entropie de mélange.

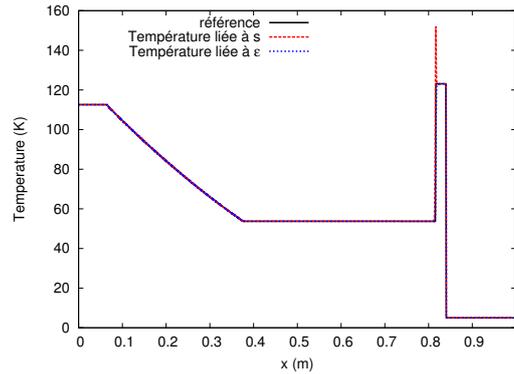


FIGURE 4.4 – Tube à choc diphasique pour 10 000 mailles : comparaison entre la température de mélange déduite de l'énergie interne de mélange et celle déduite de l'entropie de mélange sur un maillage dix fois plus fin.

#### 4.1.4.2 Écoulement monophasique de type Couette

Dans les sections 4.1.4.2 et 4.1.4.3, par souci de lisibilité, nous noterons  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  la variable spatiale et  $\mathbf{u} = (u, v)^T$  le vecteur vitesse. Pour ce cas test, nous considérons un écoulement laminaire entre deux parois horizontales infinies séparées par une distance  $y_e - y_w$ . La paroi supérieure se déplace à la vitesse constante  $u_e$  tandis que la paroi inférieure est fixe. De plus, la paroi supérieure est chauffée à la température  $T_e$  et la paroi inférieure à la température  $T_w$  avec  $T_e > T_w$ . La géométrie du cas test est schématisée sur la figure 4.5.

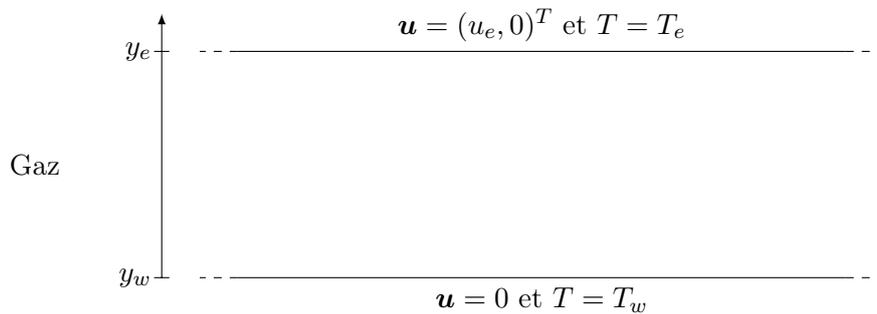


FIGURE 4.5 – Écoulement monophasique de type Couette : représentation schématique de la géométrie du cas test et des conditions de bord.

La résolution exacte de ce problème est détaillée dans la section E.1 de l'annexe E. Le profil de vitesse est donné par

$$u(y) = u_e \frac{y - y_w}{y_e - y_w}, \quad (4.26)$$

tandis que le profil de température est donné par

$$T(y) = T_w + \left( T_e - T_w + \frac{\mu u_e^2}{2\kappa} \left( 1 - \frac{y - y_w}{y_e - y_w} \right) \right) \frac{y - y_w}{y_e - y_w}. \quad (4.27)$$

Il est possible de simplifier l'écriture précédente en introduisant la longueur adimensionnée  $\tilde{y} = \frac{y - y_w}{y_e - y_w}$  et la température adimensionnée  $\tilde{T} = \frac{T - T_w}{\Delta T}$  où  $\Delta T = T_e - T_w$ . Le profil de température se réécrit alors

$$\tilde{T}(\tilde{y}) = \left( 1 + \frac{1}{2} Pr Ec (1 - \tilde{y}) \right) \tilde{y}.$$

avec les nombres sans dimension de Prandtl  $Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$  et d'Eckert  $Ec = \frac{u_e^2}{c_p \Delta T}$ , Nous pouvons remarquer que pour des situations telles que  $PrEc > 2$ , le maximum de température est atteint à l'intérieur du domaine.

Pour ce cas test, nous considérons que la plaque située en  $y_w = 0$  m est chauffée à la température  $T_w = 280$  K. Pour la plaque supérieure située en  $y_e = 0.2$  m, nous prenons les conditions limites suivantes :  $T_e = 330$  K et  $u_e = 10$  m.s<sup>-1</sup>. Le fluide entre les deux plaques est assimilé à un gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$  et un nombre de Prandtl égal à 0.72. Le gaz est initialisé à la pression atmosphérique et avec  $\rho_{ini} = 1$  kg.m<sup>-3</sup>. Nous fixons la viscosité du fluide à  $\mu = 1$  Pa.s. En imposant que le produit  $PrEc = 5$ , nous en déduisons les autres propriétés du gaz. Nous trouvons alors :  $\kappa = 0.4$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $c_p = 0.288$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et  $c_v = 0.206$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

Le nombre de Courant utilisé pour ce cas test est égal à 0.8. Nous avons utilisé 25 mailles dans la direction  $y$ . Pour déterminer la solution stationnaire du problème, nous effectuons un processus instationnaire et la solution sera obtenue à convergence en temps. Pour caractériser cette convergence, nous calculons le résidu  $r$  en comparant la norme  $L^2$  de la différence des vecteurs des inconnues conservatives aux pseudo-temps  $n+1$  et  $n$ . Nous normalisons cette différence par la norme du vecteur conservatif à l'instant initial  $t^0$ . Ainsi, le résidu est donné par

$$r = \frac{\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\|}{\|\mathbf{U}^0\|},$$

où  $\mathbf{U} = (\rho, \rho y, \rho u, \rho E, z)^T$ . Nous considérons que nous avons atteint la solution stationnaire lorsque le résidu est inférieur à un critère de convergence. Pour ce calcul, nous avons pris un critère de convergence égal à  $10^{-10}$ .

Sur la figure 4.6, nous avons tracé les profils de température et de vitesse obtenus avec les formulations explicite et implicite du schéma. Nous pouvons voir que les deux courbes sont superposées et très proches de la solution théorique. Ce cas test simple permet de valider la discrétisation des termes visqueux en monophasique. L'excellent accord entre les schémas EXEX et IMEX montre que la contribution du terme lié au flux de chaleur dans l'équation d'évolution de la pression (4.15) est faible.

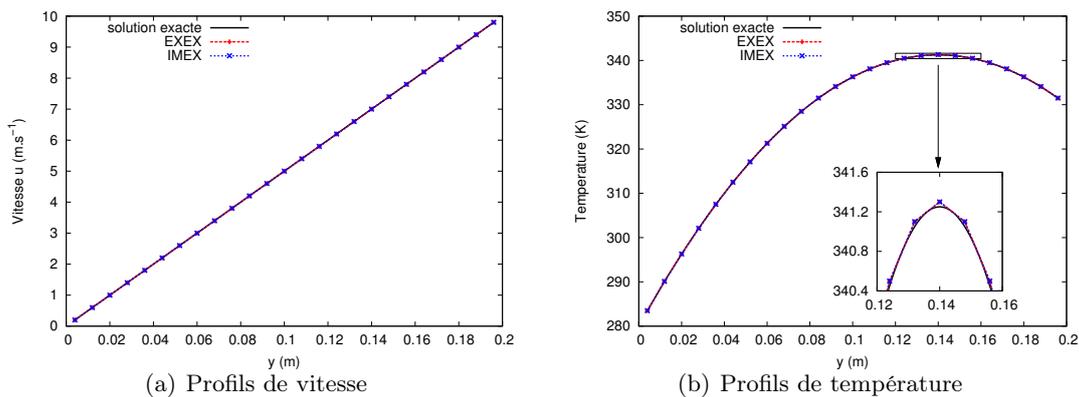


FIGURE 4.6 – Écoulement monophasique de type Couette : profils de vitesse et de température pour les schémas EXEX et IMEX pour un maillage comportant 25 mailles.

Dans le tableau 4.1, nous avons calculé l'erreur relative en norme  $L^2$  entre la température obtenue par le schéma IMEX et la solution exacte (4.27). Nous pouvons alors vérifier que la discrétisation des termes de dissipation est bien d'ordre 2.

| Nombre de mailles | Erreur relative       | ordre de convergence |
|-------------------|-----------------------|----------------------|
| 10                | $9.57 \times 10^{-4}$ | 2.00                 |
| 25                | $1.53 \times 10^{-4}$ | 2.00                 |
| 50                | $3.83 \times 10^{-5}$ | 2.00                 |
| 100               | $9.57 \times 10^{-6}$ |                      |

TABLE 4.1 – Écoulement monophasique de type Couette : erreur relative en norme  $L^2$  et ordre de convergence pour le champ de température obtenu avec le schéma IMEX.

### Remarque 25

Avec la méthode de splitting présentée précédemment, il est possible de montrer que, à convergence, la solution stationnaire du schéma global dépend toujours du pas de temps. Cependant, nous n'avons pas vu l'impact de cette dépendance dans nos essais numériques.

#### 4.1.4.3 Écoulement diphasique de type Couette

Comme pour le cas test précédent, nous considérons un domaine physique délimité par deux parois horizontales infinies séparées par une distance  $y_e - y_w$ . La paroi supérieure se déplace à la vitesse constante  $u_e$  tandis que la paroi inférieure est fixe. De plus, la paroi supérieure est chauffée à la température  $T_e$  et la paroi inférieure à la température  $T_w$  avec  $T_e > T_w$ . Pour ce cas test, nous considérons un écoulement diphasique entre les deux parois. La position de l'interface entre les deux fluides est située en  $y = y_0$ . Durant la phase transitoire, l'interface entre les deux fluides va se déplacer. La géométrie du cas test est schématisée sur la figure 4.7.

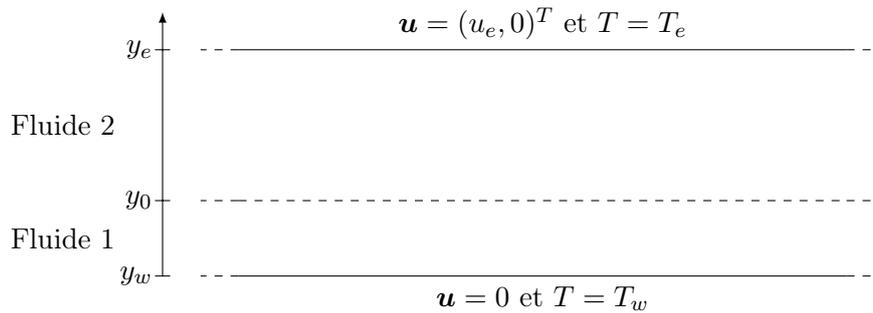


FIGURE 4.7 – Écoulement diphasique de type Couette : représentation schématique de la géométrie du cas test et des conditions de bord.

L'étude théorique de ce problème est détaillée dans la section E.2 de l'annexe E. Il est possible d'exprimer les profils de vitesse, de température et de pression en fonction de la position de l'interface  $y_0$  entre les deux fluides. En effet, en notant  $L_1 = y_0 - y_w$  et  $L_2 = y_e - y_0$ , nous avons le profil de vitesse suivant

$$u(y) = \begin{cases} u_0 \frac{y - y_w}{L_1} & y_w < y < y_0, \\ u_0 + (u_e - u_0) \frac{y - y_0}{L_2} & y_0 < y < y_e, \end{cases} \quad (4.28)$$

avec  $u_0$  la vitesse à l'interface entre les deux fluides

$$u_0 = \frac{\frac{\mu_2}{L_2} u_e}{\frac{\mu_1}{L_1} + \frac{\mu_2}{L_2}}.$$

Le profil de température est parabolique dans chaque zone. Il s'exprime

$$T(y) = \begin{cases} -\frac{\mu_1 u_0^2}{2\kappa_1} \left( \frac{y - y_w}{L_1} \right)^2 + \left( T_0 - T_w + \frac{\mu_1 u_0^2}{2\kappa_1} \right) \frac{y - y_w}{L_1} + T_w & y_w < y < y_0, \\ -\frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2\kappa_2} \left( \frac{y - y_0}{L_2} \right)^2 + \left( T_e - T_0 + \frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2\kappa_2} \right) \frac{y - y_0}{L_2} + T_0 & y_0 < y < y_e, \end{cases} \quad (4.29)$$

où  $T_0$  est la température à l'interface entre les deux fluides

$$T_0 = \frac{1}{\frac{\kappa_1}{L_1} + \frac{\kappa_2}{L_2}} \left( \frac{\kappa_1}{L_1} T_w + \frac{\kappa_2}{L_2} T_e + \frac{\mu_1 u_0^2}{2L_1} + \frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2L_2} \right).$$

La pression est constante dans tout le domaine, et sa valeur est donnée par

$$P = \frac{M_{ini} - \frac{\pi_1 I_1}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}} - \frac{\pi_2 I_2}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}}}{\frac{I_1}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}} + \frac{I_2}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}}}. \quad (4.30)$$

avec  $M_{ini}$  la masse initiale,  $I_1 = \int_{y_w}^{y_0} \frac{dy}{T(y)}$  et  $I_2 = \int_{y_0}^{y_e} \frac{dy}{T(y)}$  les intégrales de l'inverse de la température dans les deux zones.

Finalement, nous avons pu déterminer le profil de vitesse (4.28), de température (4.29) et la valeur de la pression  $P$  (4.30) en fonction de la position  $y_0$  de l'interface fluide. Il nous manque cependant une relation pour pouvoir déterminer complètement l'état stationnaire. Nous ne pouvons pas utiliser le principe de conservation de l'énergie dans la mesure où nous apportons de l'énergie en imposant des températures sur les parois du domaine. Pour valider ce cas test, nous allons donc utiliser la position de l'interface à l'état stationnaire calculée numériquement pour ensuite en déduire les profils de température et de vitesse. La valeur de la pression théorique sera calculée à partir de la relation (4.30) et comparée avec la valeur de la pression obtenue par le schéma numérique.

Pour ce cas test diphasique, nous considérons que la plaque située en  $y_w = 0$  m est chauffée à la température  $T_w = 310$  K. Pour la plaque supérieure située en  $y_e = 0.2$  m, nous prenons les conditions limites suivantes :  $T_e = 330$  K et  $u_e = 10$  m.s<sup>-1</sup>. Nous considérons que le fluide 1, situé en bas du domaine, est un liquide avec une équation d'état de type gaz raide tandis que le fluide 2 est un gaz parfait. Les paramètres pour les deux fluides sont donnés dans le tableau 4.2.

|                                  | fluide 1 | fluide 2 |
|----------------------------------|----------|----------|
| viscosité $\mu$                  | 10       | 1        |
| conductivité thermique $\kappa$  | 10       | 1.376    |
| capacité thermique $c_v$         | 3.229    | 0.708    |
| coefficient adiabatique $\gamma$ | 3        | 1.4      |
| pression de référence $\pi$      | $10^5$   | 0        |

TABLE 4.2 – Écoulement diphasique de type Couette : paramètres des deux fluides.

Dans un premier temps, nous fixons l'interface entre les deux fluides à l'instant initial au milieu du domaine, *i.e.*  $y_{0,ini} = 0.1$  m. Pour les densités de l'état initial, nous prenons  $\rho_{1,ini} = 25$  kg.m<sup>-3</sup> pour le liquide et  $\rho_{2,ini} = 1.7085$  kg.m<sup>-3</sup> pour le gaz. La masse initiale dans le domaine est donc égale à

$$M_{ini} = \rho_{1,ini}(y_{0,ini} - y_w) + \rho_{2,ini}(y_e - y_{0,ini}) = 2.67085 \text{ kg.}$$

Nous avons réussi à exprimer la valeur de la pression ainsi que l'expression de la température et de la vitesse en fonction de la position de l'interface entre les deux fluides  $y_0$ . Nous voulons maintenant calculer une valeur de référence pour la position de l'interface. Pour cela, nous utilisons dans l'étape de transport la méthode de Glimm qui ne crée pas de zone de mélange. Rappelons que cette méthode est en fait une méthode mixte avec l'utilisation du schéma décentré dans les zones de fluide pur et la projection aléatoire de Glimm à l'interface (voir la section 3.2.3 du chapitre 3). Nous utilisons un maillage très raffiné avec 4000 mailles et nous trouvons numériquement que la position de l'interface entre les deux fluides est située en  $y_0 = 0.050194$  m à l'état stationnaire. Grâce à cette valeur de référence, nous pouvons en déduire les profils de température, de vitesse et de pression théoriques.

Comme pour la version monophasique de l'écoulement de type Couette, nous cherchons la solution stationnaire avec un critère de convergence égal à  $10^{-10}$ .

Tout d'abord, nous souhaitons comparer les formulations explicite et implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation. Sur la figure 4.8, nous avons tracé les profils de vitesse et de température obtenus avec les schémas EXEX et IMEX. Dans l'étape de transport, nous avons utilisé le schéma décentré. Nous verrons dans la suite que le choix du schéma de transport a un impact sur la solution. Les solutions obtenues avec les formulations implicite et explicite sont très proches ce qui permet de valider la discrétisation implicite proposée pour l'étape acoustique. L'intérêt du schéma IMEX peut être mis en évidence si nous comparons le nombre d'itérations nécessaires pour converger vers l'état stationnaire. En effet, la formulation implicite ne nécessite que 236 itérations tandis que 2 108 056 itérations sont nécessaires dans le cas totalement explicite. Dans la suite, nous n'utiliserons plus que le schéma IMEX et nous allons étudier l'impact du schéma de transport sur la solution.

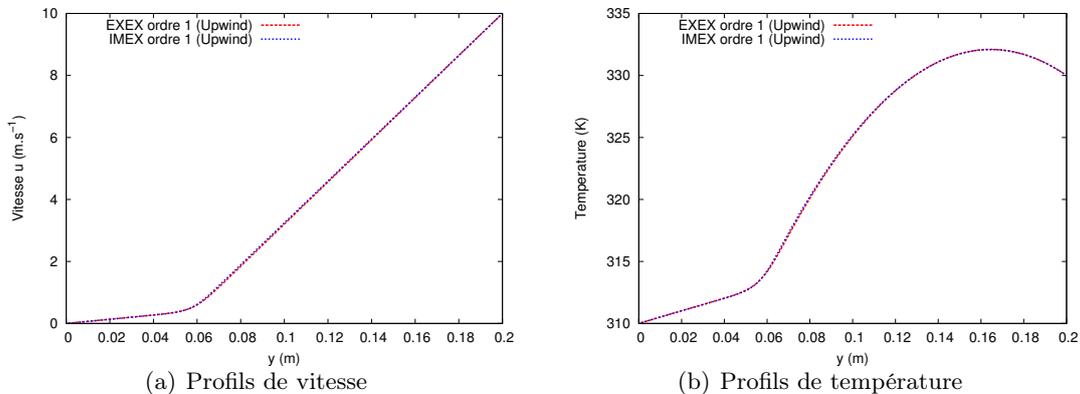


FIGURE 4.8 – Écoulement diphasique de type Couette : profils de vitesse et de température pour les schémas EXEX et IMEX.

Sur la figure 4.9, nous avons tracé les profils de vitesse, de température, de fraction volumique et de pression pour le schéma IMEX. Nous avons utilisé les schémas *upwind* à l'ordre 1 et 2 et la méthode de Glimm pour l'étape de transport. Nous n'avons pas tracé les résultats obtenus avec le schéma d'antidiffusion [KL10] pour l'étape de transport car ils étaient superposés avec ceux du schéma de Glimm. Nous pouvons voir qu'avec la méthode de Glimm nous retrouvons parfaitement la solution de référence avec seulement 100 mailles. Si le schéma décentré est utilisé dans l'étape de transport, nous voyons que la diffusion numérique de l'interface impacte les profils de vitesse et de température. Le passage à l'ordre deux de l'étape acoustique et de transport permet de réduire la diffusion numérique de l'interface et de se rapprocher de la solution de référence non mélangée. Pour comparer quantitativement les différents schémas, nous pouvons regarder l'erreur relative entre la pression calculée par le schéma et la pression de référence calculée avec la formule (4.30),

voir tableau 4.3. Nous retrouvons bien le fait que les schémas d'antidiffusion et Glimm donnent la solution de référence avec seulement 100 mailles.

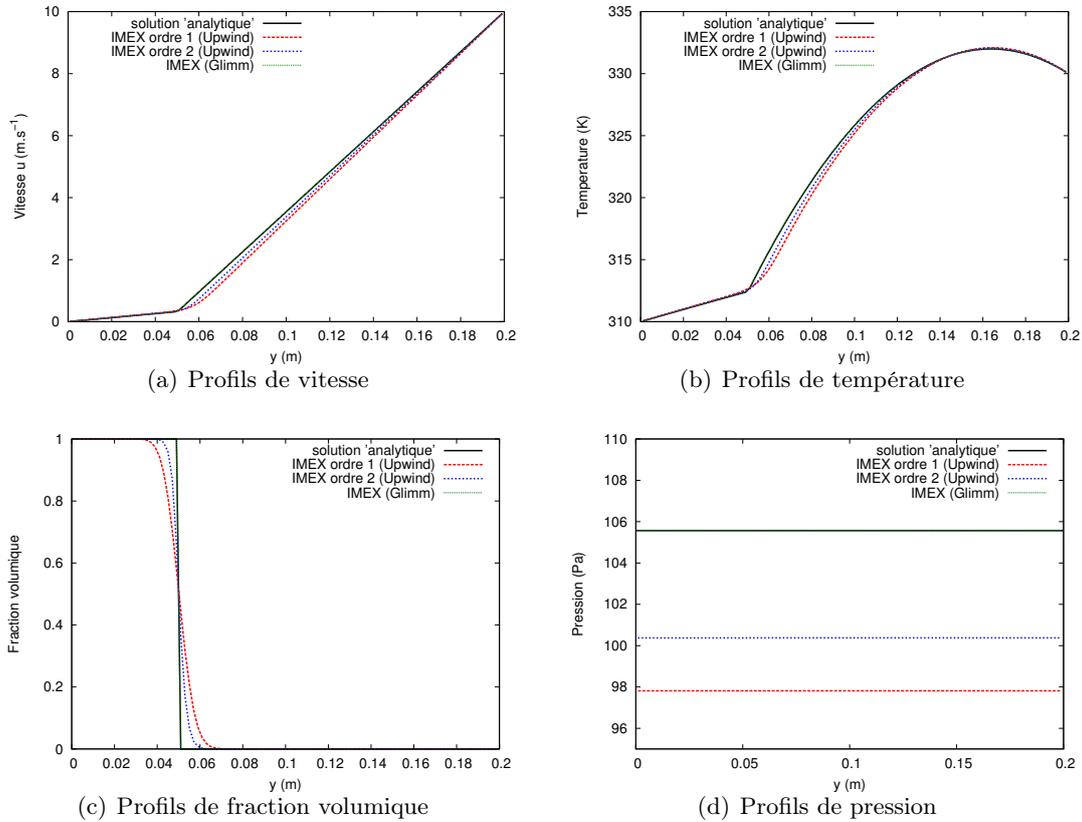


FIGURE 4.9 – Écoulement diphasique de type Couette : profils de vitesse, de température, de fraction volumique (pour le fluide 1) et de pression pour le schéma IMEX avec les schémas *upwind* à l'ordre 1 et 2 et la méthode de Glimm pour l'étape de transport.

| schema                | Erreur relative (%) |
|-----------------------|---------------------|
| IMEX ordre 1 (Upwind) | 7.33                |
| IMEX ordre 2 (Upwind) | 4.91                |
| IMEX (Antidiffusion)  | 0.122               |
| IMEX (GLIMM)          | 0.160               |

TABLE 4.3 – Écoulement diphasique de type Couette : erreur relative sur la pression pour les différents schémas.

Il n'est pas évident que la solution stationnaire continue soit indépendante de la position initiale de l'interface entre les deux fluides. Nous faisons donc un autre test, avec une condition initiale telle que l'interface entre les deux fluides est proche de la valeur stationnaire,  $y_{0,ini} = 0.05$ . Pour avoir la même masse initiale dans le domaine de calcul, nous prenons  $\rho_{1,ini} = 50 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_{2,ini} = 1.1390 \text{ kg.m}^{-3}$ . Sur la figure 4.10 nous pouvons voir que nous retrouvons bien le même état stationnaire. De plus, avec ce choix de condition initiale, l'interface entre les deux fluides ne varie presque pas durant la phase transitoire de la simulation. Ainsi, cette configuration initiale diminue la durée de la phase transitoire et donc la diffusion numérique de l'interface par le schéma. Le choix de la méthode numérique pour l'étape de transport impacte beaucoup moins la

solution obtenue : toutes les courbes sur la figure 4.10 sont superposées. Cela met en évidence le fait que la solution stationnaire numérique obtenue avec le schéma décentré dépend de la position initiale de l'interface entre les deux fluides.

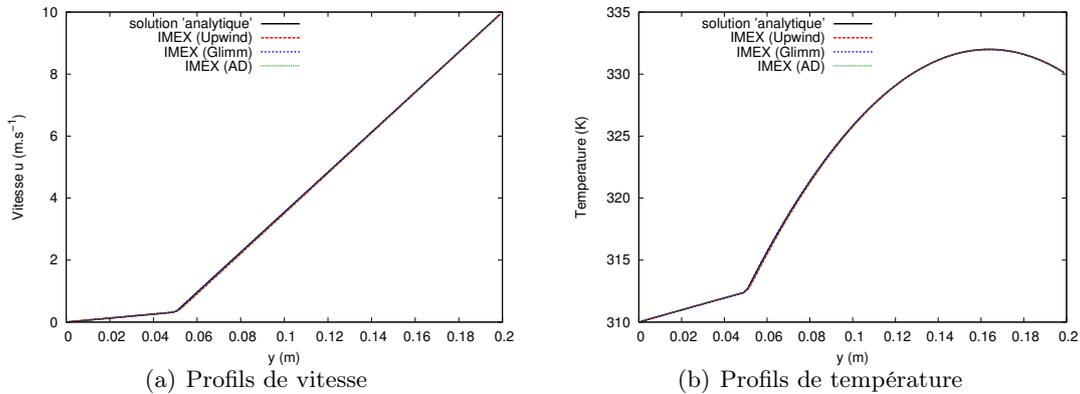


FIGURE 4.10 – Écoulement diphasique de type Couette : profils de vitesse et de température pour le schéma IMEX avec les schémas *upwind* à l'ordre 1 et 2 et la méthode de Glimm pour l'étape de transport. L'interface entre les deux fluides est initialement proche de la valeur stationnaire.

Finalement, ces différents cas test nous ont permis de valider la discrétisation des termes dissipatifs dans le modèle diphasique. Nous avons pu vérifier que la contribution des termes négligés dans la prédiction de la pression pour la formulation implicite était faible. Pour des écoulements diphasiques, le choix du schéma numérique utilisé dans l'étape de transport joue un rôle important sur la solution. Nous avons vu que la diffusion numérique de l'interface engendrée par le schéma décentré impacte les profils de température et de vitesse. L'utilisation d'un maillage plus raffiné ou le passage à l'ordre deux du schéma permettent de limiter cette diffusion numérique et de retrouver la solution non mélangée. Les schémas limitant la diffusion numérique de l'interface entre les deux fluides tels que le schéma d'antidiffusion et la méthode de Glimm seront donc à privilégier dans ce genre de configurations.

Dans la suite du chapitre, nous allons présenter et étudier une correction du schéma numérique dans le régime bas Mach.

## 4.2 Correction bas Mach

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'un modèle à interfaces diffuses est utilisé pour modéliser l'écoulement diphasique gaz-liquide. Cela implique que les mêmes équations sont résolues pour les deux phases fluides. Dans le contexte de l'ablation liquide traitée ici, l'écoulement diphasique est composé d'un gaz compressible et d'un métal fondu pour la partie liquide. C'est pourquoi nous avons opté pour un modèle diphasique à cinq équations qui traite les deux phases comme un fluide compressible. Pour résoudre ce système diphasique nous utilisons des schémas de type Godunov qui sont très bien adaptés pour simuler des problèmes de propagation d'ondes acoustiques ou de chocs comme nous avons pu le démontrer dans le chapitre 3. Cependant, ce type de schémas possède d'importantes limitations dans le régime bas Mach à savoir une contrainte très forte sur le pas de temps pour un schéma explicite (qui est du même ordre que le nombre de Mach), un manque de précision et la non consistance avec le problème limite incompressible. Dans notre cas, la contrainte sur le pas de temps pour un schéma explicite ne sera pas gênante dans la mesure où l'étape acoustique de l'approche Lagrange-Transport est résolue implicitement. Nous allons nous concentrer essentiellement sur la précision du schéma numérique pour un nombre de Mach faible ainsi que sur sa limite asymptotique dans le régime bas Mach. De plus, pour un problème

diphase de type gaz-liquide, les variations du nombre de Mach peuvent être très importantes dans le domaine de calcul. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une correction pour tout nombre de Mach (*all regime*, *all speed* ou *all Mach correction* en anglais) qui permet de résoudre les problèmes listés auparavant dans le régime bas Mach et de retrouver le schéma classique pour un nombre de Mach de l'ordre de l'unité. Le solveur doit être à la fois capable de capturer les ondes de choc et d'être précis dans les zones faiblement compressibles.

La problématique de la limite bas Mach des équations compressibles a fait l'objet de nombreuses publications. Des études théoriques sur la limite des équations compressibles dans le régime bas Mach ont été réalisées pour les équations d'Euler [Sch86, KM81] et de Navier-Stokes [Ala06, JO11]. Sur le plan numérique, une analyse asymptotique [GV99, GM04, Rie11, Del10, DJOR16] de divers schémas permet de montrer que la perte de précision dans le régime bas Mach est liée à la création de fluctuations de pression à une puissance du nombre de Mach trop élevée. En effet, pour des données initiales bien préparées c'est-à-dire un champ de pression initial possédant des fluctuations de l'ordre du nombre de Mach au carré, le schéma numérique génère des fluctuations de pression à l'ordre un en nombre de Mach. Cette imprécision sur la pression empêche le champ de vitesse d'être à divergence nulle. Un moyen efficace pour réduire cette imprécision des schémas de type Godunov consiste à utiliser une technique de préconditionnement initialement introduite par Turkel [Tur87, Tur93, TFL94]. Une autre approche consiste à introduire une modification du flux numérique permettant de réduire la diffusion numérique dans le régime bas Mach [Rie11, TMD<sup>+</sup>08, CGK16]. Notons que même si la majorité des études sur le régime bas Mach ont été faites pour les équations monophasiques d'Euler, quelques travaux ont étendu ces corrections bas Mach aux modèles diphasiques [MG08, BN09, LMNS13, CGK17, Pel17].

Pour tenir compte du caractère incompressible de la partie liquide, nous avons choisi d'utiliser la correction proposée par Chalons et al. [CGK16]. En effet, celle-ci a été développée et validée dans le cadre des méthodes basées sur une décomposition Lagrange-Transport des équations. De plus, comme nous le montrerons dans la suite, cette correction est très simple à mettre en œuvre et ne revient qu'à modifier la partie décentrée du flux numérique de la pression. Pour montrer la précision du schéma numérique à bas Mach, nous rappellerons un résultat important démontré par Chalons et al. [CGK16] sur l'erreur de troncature du schéma numérique. Ensuite, à l'aide d'une analyse asymptotique, nous étudierons la limite du schéma numérique dans le régime bas Mach sur un maillage cartésien. Soulignons que le type de maillage utilisé est important pour la problématique bas Mach. En effet, sur les maillages triangulaires les schémas numériques ne présentent pas de problème de précision dans la limite bas Mach [RB09, Del10, DJOR16].

### 4.2.1 Présentation de la correction

La correction bas Mach proposée par Chalons et al. [CGK16, CGK17] se traduit par une modification du solveur de Riemann pour l'étape acoustique (3.9) sans les termes visqueux. La prise en compte des termes dissipatifs sera faite dans la section 4.2.5. L'étape de transport n'est pas impactée par la correction bas Mach. Pour rappel, la forme unidimensionnelle de l'étape acoustique pour le modèle diphasique à cinq équations réduit s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \vartheta \partial_x \mathbf{G} + P \vartheta \partial_x \mathbf{B}(\mathbf{V}) = 0, \quad (4.31)$$

où  $\mathbf{V} = (\vartheta, y, u, E, \vartheta z)^T$ ,  $\mathbf{G} = (-u, 0, p, pu, 0)^T$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, 0, 0, u)^T$  et  $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -z \end{pmatrix}$ .

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé le schéma de type Godunov (3.11) utilisé pour résoudre l'étape acoustique. Ce schéma est basé sur un solveur de Riemann unidimensionnel (3.9)

pour chaque face du maillage. Ici, le solveur de Riemann pour la correction bas Mach s'écrit :

$$\mathbf{W}^\theta(x/t; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_g & \text{si } x/t \leq -\bar{C}^- \vartheta_g, \\ \mathbf{V}_g^{*,\theta} = \mathbf{V}_g + \phi_- \mathbf{R}_- + \mathbf{LM}_- & \text{si } -\bar{C}^- \vartheta_g < x/t \leq 0, \\ \mathbf{V}_d^{*,\theta} = \mathbf{V}_d - \phi_+ \mathbf{R}_+ - \mathbf{LM}_+ & \text{si } 0 < x/t \leq \bar{C}^+ \vartheta_d, \\ \mathbf{V}_d & \text{si } \bar{C}^+ \vartheta_d < x/t, \end{cases} \quad (4.32)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\pm &= (-1, 0, \pm \bar{C}^\pm, p_{1-\alpha} \pm u_\alpha \bar{C}^\pm, -z^\pm)^T, \\ \mathbf{LM}_\pm &= \frac{\bar{C}^\mp (\theta - 1) \Delta u}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} (0, 0, 1, \bar{u}, 0)^T, \\ \phi_\pm &= \frac{\Delta p \pm \bar{C}^\mp \Delta u}{\bar{C}^- \bar{C}^+ + (\bar{C}^\pm)^2}. \end{aligned}$$

Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans la section 3.1.1. Le coefficient  $\alpha$  est toujours égal à  $\frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}$ . La correction que nous proposons ici est une extension naturelle au système diphasique à cinq équations réduit de celle proposée par Chalons et al. dans le cas monophasique [CGK16].

En pratique, le paramètre  $\theta$  de la correction bas Mach est égal au nombre de Mach local si nous sommes dans une zone subsonique

$$\theta = \min \left( \frac{|\bar{u}|}{\max(c_g, c_d)}, 1 \right). \quad (4.33)$$

La modification du solveur de Riemann simple (4.32) induit aussi un schéma de type Godunov. En procédant de la même manière que dans la section 3.1.1, le schéma numérique pour l'étape acoustique (4.31) s'écrit :

$$\mathbf{V}_i^\dagger = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n,\theta} - \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^{n,\theta} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n z_i^n \left( \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{B}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (4.34)$$

où le "flux" numérique  $\mathbf{H}_{i+1/2}^{n,\theta} = \mathbf{H}^\theta(\mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n)$  est donné par :

$$\mathbf{H}^\theta(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \left( -\bar{u}, 0, \bar{p}^\theta, \bar{p}^\theta \bar{u}, 0 \right)^T,$$

avec

$$\bar{u} = \frac{\bar{C}^- u_g + \bar{C}^+ u_d - \Delta p}{\bar{C}^- + \bar{C}^+} \quad \text{et} \quad \bar{p}^\theta = \frac{\bar{C}^+ p_g + \bar{C}^- p_d - \bar{C}^- \bar{C}^+ \theta \Delta u}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}.$$

La correction bas Mach correspond finalement à une simple modification du flux numérique. En effet, seul le terme décentré du flux de pression est modifié.

### Remarque 26

La correction bas Mach proposée par Rieper [Rie11] pour le solveur de Riemann approché de Roe est basée sur une idée similaire. Le saut de vitesse est aussi multiplié par un nombre de Mach local.

### Remarque 27

Les conditions sur les pentes du solveur de Riemann pour assurer la positivité des états intermédiaires (*cf.* section 3.1.1.1) peuvent être naturellement étendues au cas bas Mach.

Nous pouvons noter que dans les zones où le nombre de Mach est élevé, le paramètre  $\theta$  défini par (4.33) est égal à un et nous retrouvons bien le schéma que nous avons étudié dans le chapitre précédent. La correction utilisée est donc bien une correction valable pour tout nombre de Mach. Il nous reste donc à étudier la précision du schéma numérique dans le régime bas Mach ainsi que sa limite quand le nombre de Mach tend vers 0.

## 4.2.2 Comportement du schéma dans le régime bas Mach

Dans cette partie, nous souhaitons étudier le comportement du schéma numérique en fonction du nombre de Mach. Pour cela, nous allons nous appuyer sur les travaux de Chalons et al. [CGK16, CGK17] basés sur une analyse de l'erreur de troncature du schéma.

Introduisons les grandeurs de référence suivantes :  $x_0$ ,  $u_0$ ,  $\rho_0$  et  $c_0$  qui sont respectivement une longueur, une vitesse, une densité et une vitesse du son de référence. Notons que les fractions massiques et volumiques sont déjà sans dimension. Toutes les variables dimensionnées  $\phi$  sont remplacées par le produit entre la variable adimensionnée  $\tilde{\phi}$  et la grandeur de référence associée :

$$t = \tilde{t} \frac{x_0}{u_0}, \quad (x, y) = (\tilde{x}_1 x_0, \tilde{x}_2 x_0), \quad \rho = \tilde{\rho} \rho_0, \quad \mathbf{u} = (\tilde{u}_1 u_0, \tilde{u}_2 u_0), \quad p = \tilde{p} \rho_0 c_0^2, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} c_0^2. \quad (4.35)$$

Le système diphasique à cinq équations réduit adimensionné s'écrit alors

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} y + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} y \tilde{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{M^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{E}) + \tilde{\nabla} \cdot \left( (\tilde{\rho} \tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{u}} \right) &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} z + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} z &= 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec  $\tilde{E} = \tilde{\varepsilon} + \frac{M^2}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2$  et  $M = \frac{u_0}{c_0}$  est le nombre de Mach.

De la même façon, il est possible d'adimensionner la version bidimensionnelle du schéma numérique pour l'étape acoustique (4.34). Par souci de simplicité, nous supposons que les pentes  $\tilde{C}^-$  et  $\tilde{C}^+$  du solveur de Riemann sont égales. Les variables définies à une interface entre deux cellules sont aussi remplacées par le produit entre la variable adimensionnée et la grandeur de référence associée :  $\tilde{u} = \tilde{u} u_0$ ,  $\tilde{p} = \tilde{p} \rho_0 c_0^2$  et  $\tilde{C} = \tilde{C} \rho_0 c_0$ . Pour plus de lisibilité, nous omettrons la notation  $\bullet$  sur ces quantités dans la suite. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_i^\dagger &= \tilde{\vartheta}_i^n + \frac{\Delta \tilde{t}}{|\tilde{\Omega}_i|} \tilde{\vartheta}_i^n \sum_{j \in v(i)} |\tilde{\Gamma}_{ij}| \tilde{u}_{ij}, \\ y_i^\dagger &= y_i^n, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i^\dagger &= \tilde{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta \tilde{t}}{|\tilde{\Omega}_i|} \tilde{\vartheta}_i^n \frac{1}{M^2} \sum_{j \in v(i)} |\tilde{\Gamma}_{ij}| \tilde{p}_{ij}^\theta \tilde{\mathbf{n}}_{ij}, \\ \tilde{E}_i^\dagger &= \tilde{E}_i^n - \frac{\Delta \tilde{t}}{|\tilde{\Omega}_i|} \tilde{\vartheta}_i^n \sum_{j \in v(i)} |\tilde{\Gamma}_{ij}| \tilde{p}_{ij}^\theta \tilde{u}_{ij}, \\ z_i^\dagger &= z_i^n, \end{aligned} \quad (4.37)$$

où

$$\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_j}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{M} \frac{\tilde{p}_j - \tilde{p}_i}{2\tilde{C}} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_{ij}^\theta = \frac{\tilde{p}_i + \tilde{p}_j}{2} - \theta M \tilde{C} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{u}}_i}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij}.$$

L'adimensionnement du schéma numérique pour l'étape de transport (3.58) donne

$$\tilde{\phi}_i^{n+1} = \tilde{\phi}_i^\dagger + \frac{\Delta \tilde{t}}{|\tilde{\Omega}_i|} \tilde{\phi}_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} |\tilde{\Gamma}_{ij}| \tilde{u}_{ij} - \frac{\Delta \tilde{t}}{|\tilde{\Omega}_i|} \sum_{j \in v(i)} |\tilde{\Gamma}_{ij}| \tilde{u}_{ij} \tilde{\phi}_{ij}^\dagger, \quad (4.38)$$

pour  $\tilde{\phi} \in \{\tilde{\rho}, \tilde{\rho}y, \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}\tilde{E}, z\}$ .

En suivant la même démarche que [CGK16, CGK17], nous allons regarder l'équation équivalente des schémas numériques pour les étapes acoustique et de transport. Nous supposons que la solution adimensionnée est une fonction régulière. Par abus de notation, nous considérons que  $\tilde{\phi}(x_l, y_m, t) = \tilde{\phi}_{l,m}$  pour  $\tilde{\phi} \in \{\tilde{\rho}, \tilde{\rho}y, \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}\tilde{E}, z, \tilde{p}\}$  et nous substituons ces fonctions dans les relations précédentes. L'objectif étant de déterminer l'erreur de troncature du schéma définie par l'écart entre l'équation équivalente et l'équation aux dérivées partielles. Nous étendons ici le résultat de Chalons et al. [CGK16, CGK17] au cas du système diphasique à cinq équations réduit.

### Proposition 17

Dans le régime bas Mach, c'est-à-dire pour un nombre de Mach  $M \ll 1$  et une fluctuation de pression  $\tilde{\nabla}\tilde{p} = \mathcal{O}(M^2)$ , la discrétisation adimensionnée (4.37) de la partie acoustique est consistante avec

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\vartheta} - \tilde{\vartheta}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}), \\ \partial_{\tilde{t}}y &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{\tilde{\vartheta}}{M^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}\left(\frac{\theta\Delta\tilde{x}}{M}\right), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{E} + \tilde{\vartheta}\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{p}\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\theta\Delta\tilde{x}), \\ \partial_{\tilde{t}}z &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}). \end{aligned}$$

La discrétisation adimensionnée de la partie transport (4.38) est consistante avec

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{\phi} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\phi} = \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}) \quad \text{pour } \tilde{\phi} \in \{\tilde{\rho}, \tilde{\rho}y, \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}\tilde{E}, z\},$$

et l'équation équivalente vérifiée par le schéma adimensionné complet est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}y + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}y\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}), \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{M^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{\theta\Delta\tilde{x}}{M}\right), \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{E}) + \tilde{\nabla} \cdot \left( (\tilde{\rho}\tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{u}} \right) &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\theta\Delta\tilde{x}), \\ \partial_{\tilde{t}}z + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}z &= \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}) + \mathcal{O}(\Delta\tilde{x}) + \mathcal{O}(M\Delta\tilde{x}). \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on impose  $\theta = \mathcal{O}(M)$ , l'erreur de troncature du schéma est uniforme par rapport au nombre de Mach  $M$ .

La démonstration de cette proposition est la même que dans [CGK16].

### Remarque 28

L'analyse précédente ne dépend pas du traitement implicite ou explicite de l'étape acoustique.

### 4.2.3 Analyse asymptotique bas Mach

L'analyse précédente a permis de montrer que l'erreur de troncature du schéma avec la correction bas Mach reste bornée quand le nombre de Mach tend vers 0. Néanmoins, cela ne permet pas de conclure quant à la consistance asymptotique vis-à-vis de la limite incompressible des équations.

Au niveau continu, Murrone et Guillard [MG08] ont démontré que la limite asymptotique quand le nombre de Mach tend vers 0 du système de Kapila (cela reste vrai pour le modèle à cinq équations réduit) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0, \\ \rho_1 = \text{constante}, \\ \rho_2 = \text{constante}, \\ \rho(z) [\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Ce système limite ressemble fortement aux équations d'Euler incompressible monophasique. De plus, lors du développement asymptotique, il est possible d'obtenir les fluctuations du champ de pression. En effet, Murrone et Guillard montrent que les fluctuations d'ordre 0 et 1 sont constantes en espace. En se plaçant dans un domaine ouvert où la pression extérieure est aussi constante en temps, on peut démontrer que le terme d'ordre 0 ne dépend pas du temps. Ainsi, la pression s'écrit

$$p(x, t) = p^{(0)} + M^2 p^{(2)}(x, t).$$

Ce type de champ de pression est caractéristique d'un écoulement incompressible. Finalement, au niveau continu, les solutions du modèle compressible à cinq équations réduit tendent vers les solutions du modèle incompressible.

L'objectif de cette partie est de montrer que la limite asymptotique du schéma numérique est une discrétisation de la limite incompressible (4.39). Ce type de schémas est appelé *Asymptotic Preserving (AP) schemes* dans la littérature [Jin99]. De tels schémas AP ont été étudiés par [DJY07, CDK12, HJL12, Zak17] pour les systèmes monophasiques. Dans [Zak17], l'auteur étudie le comportement AP du schéma Lagrange-Projection présenté par Coquel et al. [CNPT10] pour les équations d'Euler isentropique en 1D.

Moyennant quelques hypothèses, nous souhaitons savoir si, sur un maillage cartésien uniforme, le schéma Lagrange-Transport IMEX( $\theta$ ) défini par la formulation implicite de l'étape acoustique (4.34) et le schéma (3.58) pour l'étape de transport avec des données initiales bien préparées donne une discrétisation consistante avec la version incompressible du modèle à cinq équations réduit dans la limite bas Mach. Nous ne considérons que la formulation implicite de l'étape acoustique dans la mesure où le pas de temps explicite de cette phase dépend du nombre de Mach, et va donc tendre vers 0 lorsque le nombre de Mach diminue. Nous considérons la formulation IM1 détaillée dans l'algorithme 1, voir la section 3.1.1.3 du chapitre 3, pour calculer de façon implicite l'étape acoustique du schéma. Pour éviter toute confusion, nous noterons  $\mathbf{p}$  la prédiction de la pression au temps  $t^\dagger$ . Cette quantité n'est *a priori* pas égale à la valeur de la pression calculée à partir de l'équation d'état. De plus, nous nous plaçons sur un maillage cartésien régulier où l'on rappelle que  $v(\mathbf{i}) = \{(l-1, m), (l+1, m), (l, m-1), (l, m+1)\}$  est l'ensemble des indices des cellules voisines de la cellule  $\mathbf{i} = (l, m)$ . Dans la suite, nous noterons  $\sigma_{ij} = \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_{\mathbf{i}}|}$ .

Rappelons que la formulation IM1 revient à résoudre dans un premier temps le système linéaire vitesse-pression (adimensionné)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{i}}^\dagger &= \mathbf{u}_{\mathbf{i}}^n - \Delta t \vartheta_{\mathbf{i}}^n \frac{1}{M^2} \sum_{j \in v(\mathbf{i})} \sigma_{ij} \mathbf{p}_{ij}^{\theta, \dagger} \mathbf{n}_{ij}, \\ \mathbf{p}_{\mathbf{i}}^\dagger &= p_{\mathbf{i}}^n - \Delta t (C_{\mathbf{i}}^n)^2 \vartheta_{\mathbf{i}}^n \sum_{j \in v(\mathbf{i})} \sigma_{ij} u_{ij}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.40)$$

où l'on rappelle que la quantité  $C_i$  correspond à la vitesse du son lagrangienne dans la maille  $i$ , *i.e.*  $C_i = \rho_i c_i$ . Nous rappelons aussi que les vitesses et les pressions à l'interface sont données par

$$u_{ij}^\dagger = \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} - \frac{1}{M} \frac{(\Delta p^\dagger)_{ij}}{C_{ij}} \quad \text{et} \quad p_{ij}^{\theta, \dagger} = \left( \Sigma p^\dagger \right)_{ij} - M\theta C_{ij} \left( \Delta u_n^\dagger \right)_{ij}.$$

La notation  $(\Sigma \bullet)_{ij}$  désigne la moyenne arithmétique  $\frac{\bullet_{i+} + \bullet_{j-}}{2}$ , tandis que  $(\Delta \bullet)_{ij} = \frac{\bullet_{i-} - \bullet_{j+}}{2}$ . Pour simplifier l'écriture, nous avons aussi introduit la notation  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Dans la mesure où les fractions volumiques et massiques ne varient pas durant l'étape acoustique, *i.e.*  $y_i^\dagger = y_i^n$  et  $z_i^\dagger = z_i^n$ , nous nous focalisons sur les équations d'évolution du volume spécifique, de la vitesse et de l'énergie. Après avoir inversé le système linéaire en vitesse et pression (4.40), les équations d'évolution du volume spécifique et de l'énergie sont ensuite résolues de la façon suivante

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} u_{ij}^\dagger, \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} p_{ij}^{\theta, \dagger} u_{ij}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Nous pouvons regrouper les différents termes du système (4.40) et des relations sur le volume spécifique et l'énergie en fonction des puissances du nombre de Mach.

Pour l'équation d'évolution de la vitesse, nous avons

$$M^{-2} \left( \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma p^\dagger \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} \right) + \theta M^{-1} \left( -\Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} C_{ij} \left( \Delta u_n^\dagger \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} \right) + M^0 \left( \mathbf{u}_i^\dagger - \mathbf{u}_i \right) = 0. \quad (4.42)$$

Pour l'équation sur la pression  $\mathbf{p}$ , nous avons

$$M^{-1} \left( -\Delta t (C_i^n)^2 \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Delta p^\dagger)_{ij}}{C_{ij}} \right) + M^0 \left( p_i^\dagger - p_i^n + \Delta t (C_i^n)^2 \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} \right) = 0. \quad (4.43)$$

Pour l'équation d'évolution du volume spécifique nous avons

$$M^{-1} \left( \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Delta p^\dagger)_{ij}}{C_{ij}} \right) + M^0 \left( \vartheta_i^\dagger - \vartheta_i^n - \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} \right) = 0. \quad (4.44)$$

Enfin, pour l'équation d'évolution de l'énergie, nous avons

$$\begin{aligned} M^{-1} \left( -\Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Sigma p^\dagger)_{ij} (\Delta p^\dagger)_{ij}}{C_{ij}} \right) + M^0 \left( E_i^\dagger - E_i^n + \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma p^\dagger \right)_{ij} \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} \right) \\ + \theta \left( \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Delta p^\dagger \right)_{ij} \left( \Delta u_n^\dagger \right)_{ij} \right) + \theta M \left( -\Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} C_{ij} \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} \left( \Delta u_n^\dagger \right)_{ij} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous supposons que la correction bas Mach est activée, *i.e.*  $\theta = M$ . Nous effectuons alors un développement asymptotique en fonction du nombre de Mach pour les

variables suivantes :

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= \vartheta^{(0)} + M\vartheta^{(1)} + M^2\vartheta^{(2)} + \mathcal{O}(M^2), \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(0)} + M\mathbf{u}^{(1)} + M^2\mathbf{u}^{(2)} + \mathcal{O}(M^2), \\
 E &= E^{(0)} + ME^{(1)} + M^2E^{(2)} + \mathcal{O}(M^2), \\
 p &= p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} + \mathcal{O}(M^2), \\
 \mathbf{p} &= \mathbf{p}^{(0)} + M\mathbf{p}^{(1)} + M^2\mathbf{p}^{(2)} + \mathcal{O}(M^2), \\
 C &= C^{(0)} + MC^{(1)} + M^2C^{(2)} + \mathcal{O}(M^2).
 \end{aligned}$$

En injectant ces développements asymptotiques dans l'équation sur la vitesse, nous trouvons

— à l'ordre  $M^{-2}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (4.45)$$

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(1), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} + \cancel{\vartheta_i^{(1), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij}} = 0, \quad (4.46)$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i^{(0), \dagger} - \mathbf{u}_i^{(0), n} + \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} - C_{ij}^{(0)} \left( \Delta u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} \right] \\
 + \cancel{\Delta t \vartheta_i^{(1), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(1), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij}} + \cancel{\Delta t \vartheta_{ij}^{(2), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij}} = 0.
 \end{aligned}$$

Pour l'équation sur la pression  $\mathbf{p}$  (4.43), nous obtenons

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} = 0, \quad (4.47)$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^{(0), \dagger} - p_i^{(0), n} + \Delta t \left( C_i^{(0), n} \right)^2 \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} + \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(1), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} - \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij} C_{ij}^{(1)}}{\left( C_{ij}^{(0)} \right)^2} \right] \\
 + \Delta t \left( \left( C_i^m \right)^2 \vartheta_i^n \right)^{(1)} \sum_{j \in v(i)} \cancel{\sigma_{ij} \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}}} = 0.
 \end{aligned}$$

Pour l'équation sur le volume spécifique (4.44), nous trouvons

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} = 0, \quad (4.48)$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\begin{aligned}
 \vartheta_i^{(0), \dagger} - \vartheta_i^{(0), n} - \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} + \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(1), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} - \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij} C_{ij}^{(1)}}{\left( C_{ij}^{(0)} \right)^2} \right] \\
 + \Delta t \vartheta_i^{(1), n} \sum_{j \in v(i)} \cancel{\sigma_{ij} \frac{(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}}} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Enfin, pour l'équation sur l'énergie (4.45), nous avons

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Sigma \mathbf{p}^{(0),\dagger})_{ij} (\Delta \mathbf{p}^{(0),\dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} = 0,$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\begin{aligned} E_i^{(0),\dagger} - E_i^{(0),n} + \Delta t \vartheta_i^{(0),n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} (\Sigma p^{(0),\dagger})_{ij} (\Sigma \mathbf{u}^{(0),\dagger})_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} \\ + \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( (\Sigma \mathbf{p}^\dagger)_{ij} (\Delta \mathbf{p}^\dagger)_{ij} \vartheta_i^n \right)^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Guillard et Viozat [GV99] ont démontré que les relations (4.45) et (4.47) assurent que le terme à l'ordre 0 de la pression  $\mathbf{p}^{(0),\dagger}$  est constant en espace. En effet, sur un maillage cartésien uniforme, l'équation (4.45) pour la cellule  $\mathbf{i} = (l, m)$  implique

$$\mathbf{p}_{l,m+1}^{(0),\dagger} - \mathbf{p}_{l,m-1}^{(0),\dagger} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{l+1,m}^{(0),\dagger} - \mathbf{p}_{l-1,m}^{(0),\dagger} = 0.$$

Le terme d'ordre 0 pour la pression  $\mathbf{p}$  ne peut donc être qu'une solution en damier à quatre états représentée sur la figure 4.11.

|  |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|
|  | C | D | C | D | C |
|  | A | B | A | B | A |
|  | C | D | C | D | C |
|  | A | B | A | B | A |
|  |   |   |   |   |   |

FIGURE 4.11 – Solution en damier à quatre états.

En remarquant que les termes devant  $(\Delta \mathbf{p}^{(0),\dagger})_{ij}$  dans l'équation (4.47) sont positifs (les pentes du solveur de Riemann  $C_{ij}^{(0)}$  sont positives), le principe du maximum discret s'applique. Le terme à l'ordre 0 en nombre de Mach du champ de pression  $\mathbf{p}^{(0),\dagger}$  est donc constant en espace. Dans la suite, nous noterons  $\mathbf{p}_i^{(0),\dagger} = \mathbf{p}^{(0),\dagger}$  pour tout  $\mathbf{i}$ . Notons enfin que cela implique que les termes  $(\Delta \mathbf{p}^{(0),\dagger})_{ij}$  sont nuls.

Pour le terme à l'ordre 1 du champ de pression nous avons seulement l'équation (4.46) à notre disposition. Cela autorise encore une solution en damier. Cependant, en effectuant une analyse similaire pour le schéma de Roe, Rieper [Rie11] montre que ces solutions en damier doivent disparaître après un certain temps. Ainsi nous supposons que le terme d'ordre 1 de la pression  $\mathbf{p}^{(1),\dagger}$  est aussi constant en espace. Les termes  $(\Delta p^{(1),\dagger})_{ij}$  sont donc nuls.

Sachant que les deux premiers termes du développement asymptotique de la pression  $\mathbf{p}$  sont constants en espace, les équations d'évolution de la vitesse, de la pression, du volume spécifique

et de l'énergie à l'ordre 0 en nombre de Mach vérifient alors

$$\mathbf{u}_i^{(0),\dagger} - \mathbf{u}_i^{(0),n} + \Delta t \vartheta_i^{(0),n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2),\dagger} \right)_{ij} - C_{ij}^{(0)} \left( \Delta u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (4.50a)$$

$$\mathbf{p}^{(0),\dagger} - p_i^{(0),n} + \Delta t \left( C_i^{(0)} \right)^2 \vartheta_i^{(0),n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0, \quad (4.50b)$$

$$\vartheta_i^{(0),\dagger} - \vartheta_i^{(0),n} - \Delta t \vartheta_i^{(0),n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0, \quad (4.50c)$$

$$E_i^{(0),\dagger} - E_i^{(0),n} + \Delta t \vartheta_i^{(0),n} \mathbf{p}^{(0),\dagger} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0. \quad (4.50d)$$

Le schéma numérique (4.50a) sur la vitesse est consistant avec la partie acoustique du système incompressible (4.39).

De plus, dans le cas d'un mélange de deux gaz raides, le carré de la vitesse du son lagrangienne est égal à  $C^2 = \rho^2 \gamma \frac{p+\pi}{\rho}$ . Nous pouvons donc remarquer que le terme  $\left( C_i^{(0)} \right)^2 \vartheta_i^{(0),n} = \gamma_i \left( p_i^{(0),n} + \pi_i \right)$ . Ainsi, si nous supposons que les conditions initiales sont bien préparées, à savoir que les termes d'ordre 0 en nombre de Mach de la pression  $p^{(0),n}$  et de la fraction volumique  $z^{(0),n}$  sont des constantes, le terme d'ordre  $M^0$  de l'équation sur la pression (4.50b) devient

$$\mathbf{p}^{(0),\dagger} - p^{(0),n} + \Delta t \gamma (p^{(0),n} + \pi) \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0.$$

En sommant sur toutes les mailles, et si les conditions limites imposent  $\left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0$  sur les faces  $ij$  du bord (condition de type paroi par exemple), nous en déduisons que

$$\mathbf{p}^{(0),\dagger} = p^{(0),n}. \quad (4.51)$$

En réinjectant la relation précédente dans l'équation (4.50b), nous en concluons que la divergence discrète de la composante à l'ordre  $M^0$  de la nouvelle vitesse est nulle

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0. \quad (4.52)$$

D'après l'équation (4.50c), nous en déduisons aussi que le schéma numérique ne fait pas varier les termes d'ordre 0 du volume spécifique, c'est-à-dire  $\vartheta_i^{(0),\dagger} = \vartheta_i^{(0),n}$  pour tout  $i$ . En rappelant que les fractions massiques et volumiques ne sont pas modifiées par l'étape acoustique et utilisant les définitions (4.2) des densités de chaque phase, nous avons aussi  $\rho_{k,i}^{(0),\dagger} = \rho_{k,i}^{(0),n}$ . De la même façon, en utilisant la relation (4.50d), nous obtenons que le terme d'ordre 0 de l'énergie ne varie pas durant l'étape acoustique :  $E_i^{(0),\dagger} = E_i^{(0),n}$  pour tout  $i$ . De plus, rappelons que l'énergie totale s'écrit  $E = \varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$  en variables dimensionnées. Cela se traduit par  $E = \varepsilon + \frac{1}{2} M^2 |\mathbf{u}|^2$  après adimensionnement. Ainsi, le terme d'ordre 0 de l'énergie interne  $\varepsilon^{(0)}$  n'est pas modifié par le schéma de la phase acoustique.

Pour résumer, avec le schéma implicite, nous avons à la fin de l'étape acoustique

$$z_i^{(0),\dagger} = z_i^{(0),n}, \quad (4.53a)$$

$$\rho_{1,i}^{(0),\dagger} = \rho_{1,i}^{(0),n}, \quad (4.53b)$$

$$\rho_{2,i}^{(0),\dagger} = \rho_{2,i}^{(0),n}, \quad (4.53c)$$

$$\mathbf{u}_i^{(0),\dagger} - \mathbf{u}_i^{(0),n} + \Delta t \vartheta_i^{(0),n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2),\dagger} \right)_{ij} - C_{ij}^{(0),n} \left( \Delta u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (4.53d)$$

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0. \quad (4.53e)$$

Ce schéma numérique est consistant avec la partie acoustique du système incompressible (4.39). En effet, en appliquant le schéma de Rusanov [Tor97] sur l'équation

$$\partial_t \mathbf{u}^{(0)} + \vartheta^{(0)} \nabla p^{(2)} = 0,$$

nous retrouvons la formule (4.53d).

Pour l'étape de transport, nous allons nous concentrer sur le schéma décentré présenté dans la section 3.2. Dans ce cas, le schéma numérique adimensionné (4.38) pour l'étape de transport s'écrit

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \Delta t \phi_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} u_{ij}^\dagger - \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} u_{ij}^\dagger \phi_{ij}^\dagger, \quad (4.54)$$

pour  $\phi \in \{\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z\}$  et où l'on rappelle que

$$u_{ij}^\dagger = \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} - \frac{1}{M} \frac{(\Delta \mathbf{p}^\dagger)_{ij}}{C_{ij}}.$$

En rappelant que les termes  $(\Delta \mathbf{p}^{(0),\dagger})_{ij}$  et  $(\Delta \mathbf{p}^{(1),\dagger})_{ij}$  sont nuls et en utilisant la relation (4.53e), le terme d'ordre 0 en nombre de Mach se simplifie alors en

$$\phi_i^{(0),n+1} = \phi_i^{(0),\dagger} - \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \phi_{ij}^{(0),\dagger}. \quad (4.55)$$

En supposant que les densités de chaque fluide sont constantes à l'instant initial, nous trouvons que le terme dominant de la densité vaut

$$\begin{aligned} \rho_i^{(0),n+1} &= \rho_i^{(0),\dagger} - \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \rho_i^{(0),\dagger} \\ &= \rho_i^{(0),n}, \end{aligned}$$

et est donc constant en temps et en espace.

Pour la fraction volumique, nous avons

$$\frac{z_i^{(0),n+1} - z_i^{(0),n}}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} z_{ij}^{(0),\dagger} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} = 0, \quad (4.56)$$

ce qui est une discrétisation implicite de l'équation  $\partial_t z + \nabla \cdot (z \mathbf{u}) = 0$ . Cela est équivalent à une équation de transport sur la fraction volumique  $\partial_t z + \mathbf{u} \cdot \nabla z = 0$  dans le cas où la divergence de la vitesse est nulle.

En utilisant la relation (4.53d), le schéma de l'étape de transport (4.54) pour la vitesse  $\mathbf{u}$  donne

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} \mathbf{u}_i^{(0),n+1} &= \rho^{(0)} \mathbf{u}_i^{(0),n} - \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2),\dagger} \right)_{ij} - C_{ij}^{(0),n} \left( \Delta u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} \\ &\quad - \Delta t \rho^{(0)} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \mathbf{u}_{ij}^{(0),\dagger}, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\rho^{(0)} \left[ \frac{\mathbf{u}_i^{(0),n+1} - \mathbf{u}_i^{(0),n}}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \mathbf{u}_{ij}^{(0),\dagger} \right] + \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2),\dagger} \right)_{ij} - C_{ij}^{(0)} \left( \Delta u_n^{(0),\dagger} \right)_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (4.57)$$

qui est une discrétisation consistante de l'équation

$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] + \nabla p = 0.$$

Malheureusement, nous ne sommes pas capables, pour le moment, de démontrer que la divergence discrète du terme d'ordre 0 de la vitesse au temps  $t^{n+1}$  est nulle. Nous avons donc montré que le schéma limite est consistant avec toutes les équations du système incompressible (4.39) sauf peut-être la contrainte de divergence nulle.

## 4.2.4 Validation numérique

### 4.2.4.1 Vortex dans une boîte

Pour cette première illustration du comportement bas Mach du schéma, nous considérons un cas test classique de la littérature [CP99, DJOR16, CGK16]. Le domaine considéré  $\Omega = [0, 1]^2$  m est une boîte carrée initialement remplie d'un gaz parfait avec un coefficient  $\gamma = 1.4$ . La condition initiale est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_0(x_1, x_2) &= 1 - \frac{1}{2} \tanh(x_2 - \frac{1}{2}), \\ u_{10}(x_1, x_2) &= 2 \sin^2(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_2), \\ u_{20}(x_1, x_2) &= -2 \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2), \\ p_0(x_1, x_2) &= 1000. \end{aligned}$$

Des conditions de type paroi sont imposées sur la frontière du domaine. Pour ce cas test, le nombre de Mach est de l'ordre de  $2.6 \times 10^{-2}$ . Comme solution de référence, nous considérons la solution obtenue par le schéma explicite sans correction bas Mach sur un maillage cartésien régulier composé de  $400 \times 400$  cellules. Ainsi, le pas d'espace  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2.5 \times 10^{-3}$  m est environ 10 fois plus petit que le nombre de Mach. D'après la proposition 17, l'erreur de troncature du schéma est donc petite : le schéma de type Godunov (avec  $\theta = 1$ ) est précis dans le régime bas Mach quand le pas d'espace est inférieur au nombre de Mach. Nous pouvons vérifier cela sur la figure 4.12. Sur ce maillage, la solution numérique est très peu diffusée par le schéma.

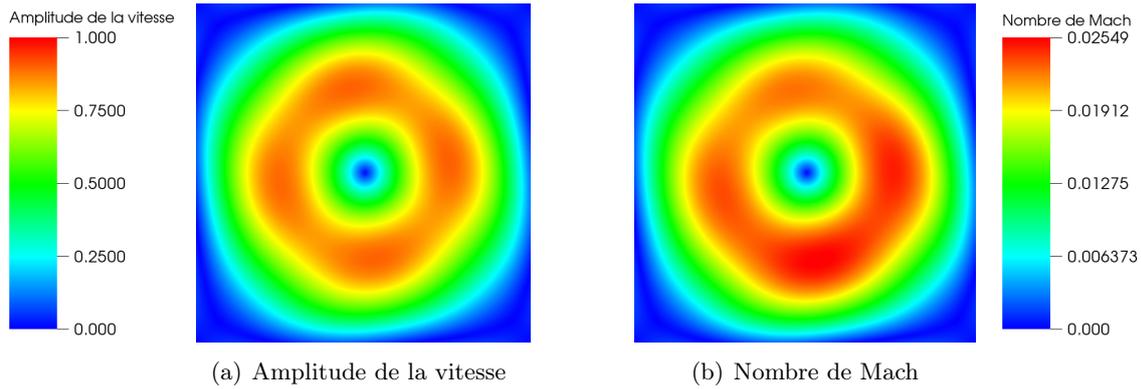


FIGURE 4.12 – Vortex dans une boîte : amplitude de la vitesse et nombre de Mach au temps  $t = 0.125$  s pour le schéma explicite EXEX( $\theta = 1$ ) sans correction bas Mach sur maillage cartésien  $400 \times 400$  (Solution de référence).

Sur la figure 4.13(a), nous avons tracé le nombre de Mach et l’amplitude de la vitesse obtenus par le schéma numérique EXEX( $\theta = 1$ ) sans correction bas Mach sur un maillage plus grossier composé de  $50 \times 50$  cellules. Pour ce maillage où le pas d’espace est de l’ordre de 10 fois le nombre de Mach, nous pouvons remarquer que le schéma numérique n’est pas précis. En effet, la solution numérique est fortement diffusée au cours de la simulation. *A contrario*, pour le même maillage, la solution du schéma EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) avec la correction bas Mach présentée précédemment est très proche de la solution de référence, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.13(b). Ainsi, comme énoncé dans la proposition 17, la précision du schéma EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) est uniforme par rapport au nombre de Mach et ne dépend que de la taille du maillage. Sans la correction bas Mach, la précision du schéma de type Godunov dépend de la taille des mailles et du nombre de Mach.

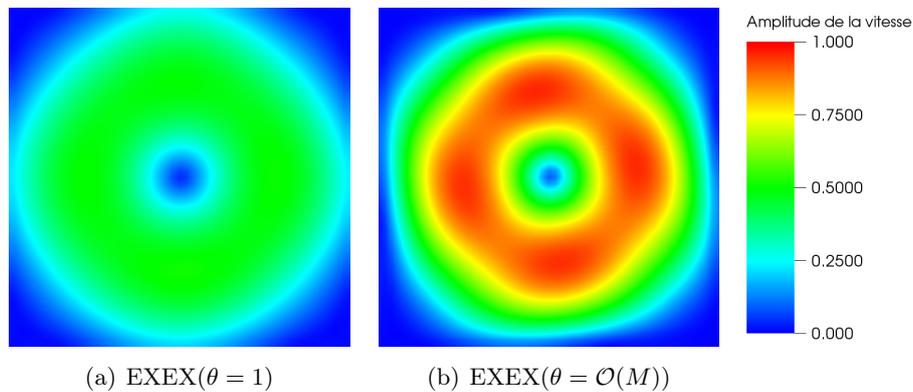


FIGURE 4.13 – Vortex dans une boîte : amplitude de la vitesse au temps  $t = 0.125$  s pour le schéma explicite EXEX( $\theta = 1$ ) sans correction bas Mach (a) et le schéma explicite EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) avec correction bas Mach (b) sur maillage cartésien  $50 \times 50$ . La solution du schéma EXEX( $\theta = 1$ ) est fortement diffusée au cours de la simulation. Avec la correction bas Mach, le schéma reste précis même sur un maillage grossier.

Des résultats similaires peuvent être obtenus en utilisant la formulation implicite du schéma. Sur la figure 4.14 nous pouvons remarquer que la solution numérique obtenue avec le schéma semi-implicite sans correction IMEX est fortement altérée par la diffusion numérique sur le maillage grossier. Pour le schéma IMEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ), les résultats obtenus sont très proches de la version explicite avec correction bas Mach et de la solution de référence.

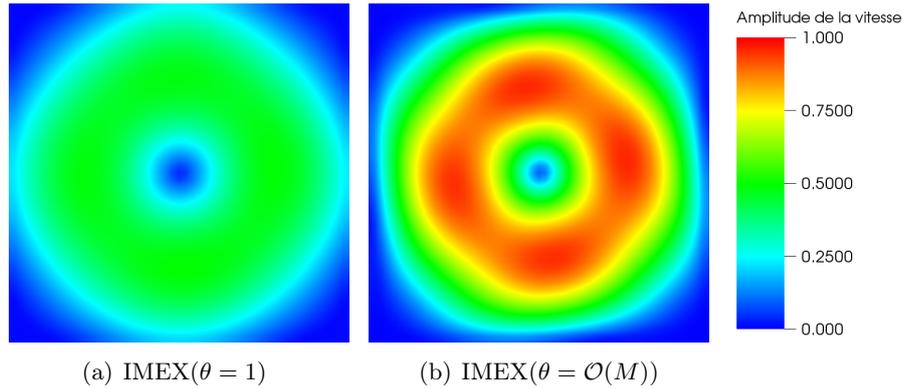


FIGURE 4.14 – Vortex dans une boîte : amplitude de la vitesse au temps  $t = 0.125$  s pour le schéma IMEX( $\theta = 1$ ) sans correction bas Mach (a) et le schéma IMEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) avec correction bas Mach (b) sur maillage cartésien  $50 \times 50$ . La solution du schéma IMEX( $\theta = 1$ ) est fortement diffusée au cours de la simulation. Avec la correction bas Mach, le schéma reste précis même sur un maillage grossier.

Dans le tableau 4.4, nous avons rassemblé le nombre d'itérations et le temps de calcul nécessaires pour obtenir les différents résultats présentés auparavant. La condition de stabilité de l'étape acoustique dépend du nombre de Mach. Ainsi, dans ce type de cas test où le nombre de Mach est faible, la contrainte sur le pas de temps pour la formulation explicite du schéma est très grande. Pour la formulation implicite, la contrainte sur le pas de temps ne dépend que de la condition CFL de l'étape de transport et non du nombre de Mach. Nous pouvons ainsi voir que le schéma IMEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) est quatre fois plus rapide que le schéma EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ).

| Schéma              | EXEX             | EXEX           | EXEX           | IMEX           | IMEX           |
|---------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Correction bas Mach | non              | non            | oui            | non            | oui            |
| Maillage            | $400 \times 400$ | $50 \times 50$ | $50 \times 50$ | $50 \times 50$ | $50 \times 50$ |
| Nombre d'itérations | 5386             | 672            | 672            | 16             | 20             |
| Temps CPU (s)       | 688.8            | 1.40           | 1.42           | 0.29           | 0.35           |

TABLE 4.4 – Vortex dans une boîte : nombre d'itérations et temps CPU.

#### 4.2.4.2 Écoulement dans une tuyère

Pour le prochain cas test, nous considérons la configuration classique d'un écoulement bas Mach dans une tuyère [Del10]. Le domaine de calcul est inclus dans le domaine  $\Omega = [0, 4] \text{ m} \times [0, 1] \text{ m}$ . La frontière inférieure est définie par :

$$x_2(x_1) = \begin{cases} 0.1 (1 - \cos((x_1 - 1) \pi)) & \text{si } x_1 \in [1, 3] \text{ m,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le fluide considéré est un gaz parfait avec un coefficient  $\gamma = 1.48$ . L'état amont du domaine est défini par la pression  $p_\infty = 10^5$  Pa, les densités  $\rho_\infty = \rho_{1,\infty} = \rho_{2,\infty} = 14.8 \text{ kg.m}^{-3}$  et la vitesse  $(u_\infty, 0)$ . La vitesse  $u_\infty$  est choisie de sorte que le nombre de Mach  $\text{Ma} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}}}$  soit égal à  $10^{-2}$ .

Dans notre cas, la vitesse d'entrée est égale à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ .

À l'entrée de la tuyère, en  $x_1 = 0 \text{ m}$ , une condition d'entrée subsonique est imposée. Ainsi, la vitesse et la densité sont données par les valeurs à l'infini amont  $(u_\infty, \rho_\infty)$ . La pression est quant à elle calculée en remontant la caractéristique. Pour la condition de sortie en  $x_1 = 4$ , nous

imposons la pression  $p = p_\infty$ , tandis que la vitesse est déduite de l'autre équation caractéristique. Les conditions limites pour les parois supérieure et inférieure sont des conditions de type paroi. L'état initial du fluide est donné par  $(\rho, u, p) = (\rho_\infty, u_\infty, p_\infty)$ .

Les premiers calculs sont effectués sur un maillage structuré comportant  $40 \times 10$  cellules. Un critère basé sur l'erreur relative des variables conservatives est utilisé pour juger de la convergence vers la solution stationnaire. Notons que tous les résultats présentés ici ont été obtenus avec le schéma implicite-explicite IMEX.

Sans la correction bas Mach présentée précédemment, la solution incompressible [Del10] n'est pas capturée par le schéma numérique comme le montre la figure 4.15. La pression normalisée que nous avons tracé sur la figure 4.15(b) est définie par  $\frac{p-p_\infty}{p_\infty}$ . Nous pouvons voir sur la figure 4.16 que le schéma numérique converge vers un état stationnaire mais il ne capte pas la solution de l'état incompressible que nous cherchons à calculer.

Avec la correction bas Mach de [CGK16], nous pouvons voir sur la figure 4.17 que le schéma numérique converge vers une approximation raisonnable de la solution incompressible. En effet, les fluctuations de pression sont de l'ordre du nombre de Mach au carré et sont quasi symétriques.

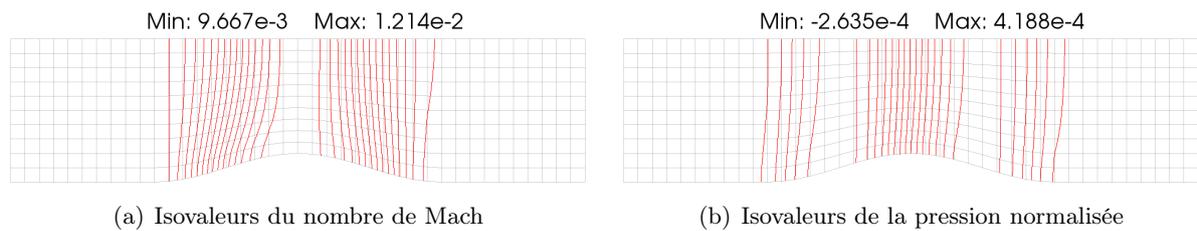


FIGURE 4.15 – Écoulement dans une tuyère : isovaleurs du nombre de Mach et de la pression normalisée (schéma sans correction bas Mach,  $M = 10^{-2}$ ).

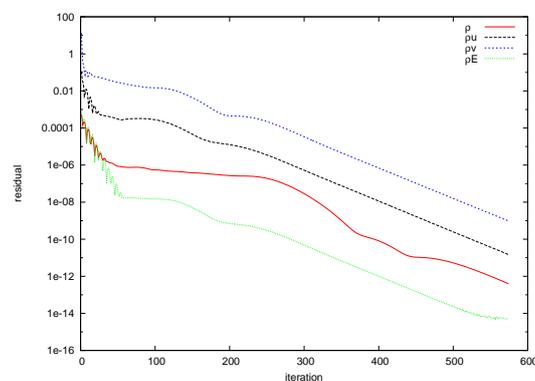


FIGURE 4.16 – Écoulement dans une tuyère : convergence des résidus (schéma sans correction bas Mach,  $M = 10^{-2}$ ).

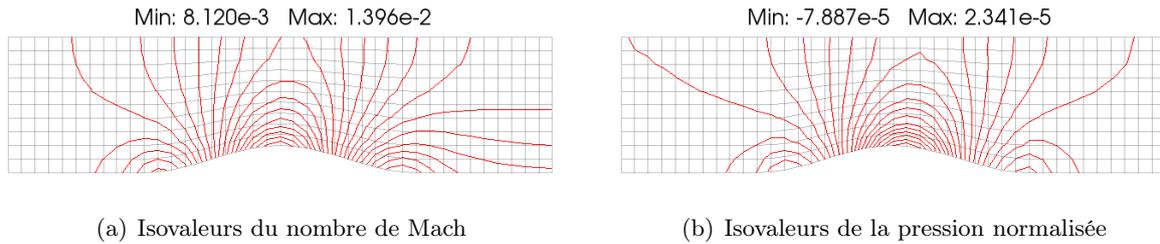


FIGURE 4.17 – Écoulement dans une tuyère : isovaleurs du nombre de Mach et de la pression normalisée (schéma avec correction bas Mach,  $M = 10^{-2}$ ).

Dans cette configuration bas Mach, la condition de stabilité sur le pas de temps basée sur les ondes acoustiques est très restrictive. Sur ce cas test, nous pouvons voir dans le tableau 4.5 que la version semi-implicite du schéma est 35 fois plus rapide pour ce qui est du temps CPU que la formulation explicite. Notons que dans ce cas, le schéma explicite EXEX( $r \neq 1$ ) avec des pentes de Riemann différentes donne des temps de calcul identiques à ceux du schéma EXEX dans la mesure où le ratio des vitesses lagrangiennes entre deux mailles est proche de 1.

|                     | EXEX    | IMEX |
|---------------------|---------|------|
| Nombre d'itérations | 222 476 | 574  |
| Temps CPU (s)       | 85.67   | 2.39 |

TABLE 4.5 – Écoulement dans une tuyère : nombre d'itérations et temps CPU.

Une comparaison avec un solveur direct de type Roe a aussi été réalisée. Nous avons utilisé la version implicite IM du schéma direct avec différentes corrections bas Mach. Les corrections proposées par Rieper [Rie11], Dellacherie [Del10] et Thornber et al. [TMD<sup>+</sup>08] sont comparées sur ce cas test.

Avec le schéma direct, nous retrouvons des résultats semblables vis-à-vis de la pression normalisée (figure 4.18). La condition CFL pour le schéma IM est de 500. Cependant, la formulation directe nécessite un nombre plus important d'itérations (plus de 1600 itérations) pour converger vers un état stationnaire. Nous ne comparons pas les temps de calcul dans la mesure où les deux schémas ne sont pas implémentés dans le même code. Notons toutefois qu'un processus itératif est utilisé à chaque itération en temps dans la version directe du schéma pour calculer la solution implicite. Dans le cas du schéma Lagrange-Transport présenté auparavant, une seule inversion est nécessaire pour calculer l'étape acoustique de façon implicite. Ce schéma est donc *a priori* moins coûteux.

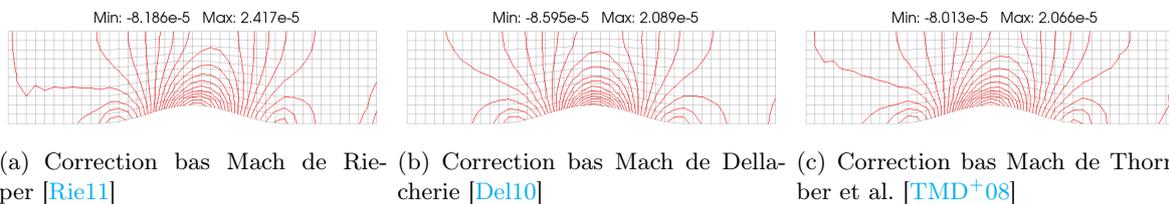


FIGURE 4.18 – Écoulement dans une tuyère : isovaleurs de la pression normalisée, schéma direct avec plusieurs corrections bas Mach,  $Ma=10^{-2}$ , maillage  $40 \times 10$ .

#### 4.2.5 Prise en compte des termes de dissipation

Dans les sections précédentes, nous avons considéré le système diphasique à cinq équations réduit non visqueux. Dans cette section, nous détaillons la prise en compte des termes de dissipa-

tion dans le cas bas Mach. Nous présentons dans un premier temps la correction bas Mach avec les termes dissipatifs puis nous analyserons la limite asymptotique du schéma numérique avec les termes de dissipation. Comme dans le cas non visqueux, la correction bas Mach n'impacte pas l'étape de transport du schéma. Le schéma numérique avec la correction bas Mach pour l'étape acoustique du système diphasique avec les termes visqueux est donné par

$$\begin{aligned}
 \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \bar{u}_{ij}^\#, \\
 y_i^\dagger &= y_i^n, \\
 \mathbf{u}_i^\dagger &= \mathbf{u}_i^n - \Delta t \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \bar{p}_{ij}^{\theta, \#} - \nabla_i \cdot \mathbb{T}^\# \right), \\
 E_i^\dagger &= E_i^n - \Delta t \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \bar{p}_{ij}^{\theta, \#} \bar{u}_{ij}^\# - \nabla_i \cdot (\mathbb{T}^\# \mathbf{u}^\#) - \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^\#) \right), \\
 z_i^\dagger &= z_i^n,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

où l'exposant  $\# = n$  pour le schéma explicite et  $\# = \dagger$  pour la formulation implicite, voir sections 4.1.2 et 4.1.3. La notation  $\nabla_i \cdot \bullet$  désigne la discrétisation des termes dissipatifs présentée dans la section 4.1.1. Nous rappelons enfin que la pression et la vitesse normale sur la face  $\Gamma_{ij}$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{ij}^\# &= \frac{\bar{C}_{ij}^- \mathbf{u}_i^\# + \bar{C}_{ij}^+ \mathbf{u}_j^\#}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{p_j^\# - p_i^\#}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+}, \\
 \bar{p}_{ij}^{\theta, \#} &= \frac{\bar{C}_{ij}^+ p_i^\# + \bar{C}_{ij}^- p_j^\#}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} - \theta \frac{\bar{C}_{ij}^- \bar{C}_{ij}^+}{\bar{C}_{ij}^- + \bar{C}_{ij}^+} (\mathbf{u}_j^\# - \mathbf{u}_i^\#) \cdot \mathbf{n}_{ij}.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Comme dans le cas non visqueux, le paramètre  $\theta$  (4.33) de la correction bas Mach est égal au nombre de Mach local si nous sommes dans une zone subsonique.

Afin de compléter notre étude, nous allons maintenant analyser le comportement en régime bas Mach du schéma numérique avec les termes de dissipation. Dans cette section, nous nous plaçons dans un cadre monophasique pour simplifier l'analyse et nous considérons une équation d'état de type gaz parfait. Nous voulons étudier la limite bas Mach des équations de Navier-Stokes compressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) &= \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \end{cases} \tag{4.60}$$

où  $\mathbb{T} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1}_d)$ .

Pour cela, nous réutilisons les variables adimensionnées définies précédemment (4.35) et nous introduisons en plus une viscosité  $\mu_0$ , une conductivité  $\kappa_0$  et une capacité thermique  $c_{p_0}$  de référence telles que

$$\tilde{\mathbb{T}} = \frac{\mathbb{T}}{\mu_0 u_0} \quad \text{et} \quad \tilde{T} = T \frac{c_{p_0}}{c_0^2}.$$

Le système adimensionné s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \\
 \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{M^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} &= \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbb{T}}, \\
 \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{E}) + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{p} \tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{M^2}{Re} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbb{T}} \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{Pe} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\kappa} \tilde{\nabla} \tilde{T}),
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

avec  $Re = \frac{\rho_0 u_0 x_0}{\mu_0}$  le nombre de Reynolds,  $Pr = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\kappa_0}$  le nombre de Prandtl et  $Pe = Re Pr$  le nombre de Péclet.

Au niveau continu, la limite bas Mach du système de Navier-Stokes sur un domaine ouvert est donnée par [Ala06, Del12, KM81]

$$\begin{aligned}
 \gamma \underline{P} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{(\gamma - 1)}{Pe} \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\
 \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \pi &= \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbb{T}, \\
 \rho c_p (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) &= \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\kappa \nabla T),
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

où  $\rho = \frac{P}{c_v(\gamma-1)T}$ . Le terme  $\underline{P}$  est la valeur de la pression à l'infini supposée constante en temps. Nous pouvons noter que la limite bas Mach usuelle est un cas particulier de cette limite où le nombre de Mach tend vers 0. En effet, la divergence de la vitesse n'est pas nulle en général et dépend du flux de chaleur  $\kappa \nabla T$ .

Nous souhaitons étudier la limite bas Mach du schéma numérique et vérifier si elle est compatible avec une discrétisation du système (4.62). Nous avons vu précédemment que la prise en compte de termes dissipatifs n'impactait pas l'étape de transport. Nous allons donc nous concentrer sur l'étape acoustique avec les termes de dissipation. Pour rappel, l'étape acoustique avec les termes de dissipation s'écrit

$$\begin{aligned}
 \partial_t \vartheta - \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\
 \partial_t \mathbf{u} + \vartheta \nabla p &= \vartheta \nabla \cdot \mathbb{T}, \\
 \partial_t E + \vartheta \nabla \cdot (p \mathbf{u}) &= \vartheta \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \vartheta \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}),
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

où  $\mathbb{T} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}_d)$ . Le système adimensionné pour l'étape acoustique s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \partial_{\tilde{t}} \tilde{\vartheta} - \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \\
 \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{M^2} \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \tilde{p} &= \frac{1}{Re} \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbb{T}}, \\
 \partial_{\tilde{t}} \tilde{E} + \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{p} \tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{Pe} \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\kappa} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \frac{M^2}{Re} \tilde{\vartheta} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbb{T}} \tilde{\mathbf{u}}).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Dans la suite, nous omettrons la notation  $\tilde{\bullet}$  pour les variables adimensionnées.

Nous souhaitons montrer que la limite asymptotique du schéma numérique utilisé pour l'étape acoustique donne une discrétisation de la partie acoustique du système (4.62).

Nous considérons encore une fois la formulation IM1 pour le schéma implicite dans l'étape acoustique. Le schéma adimensionné consiste donc à résoudre le sous système en vitesse et pression

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i^\dagger - \mathbf{u}_i^n + \Delta t \frac{1}{M^2} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \tilde{p}_{ij}^{\theta, \dagger} \mathbf{n}_{ij} &= \Delta t \frac{1}{Re} \vartheta_i^n \nabla_i \cdot (\mathbb{T}^\dagger), \\
 p_i^\dagger - p_i^n + \Delta t (C_i^n)^2 \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \tilde{u}_{ij}^\dagger &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

avec

$$\bar{u}_{ij}^\dagger = \left( \Sigma u_n^\dagger \right)_{ij} - \frac{1}{M} \frac{(\Delta p^\dagger)_{ij}}{C_{ij}} \quad \text{et} \quad \bar{p}_{ij}^{\theta, \dagger} = \left( \Sigma p^\dagger \right)_{ij} - M\theta C_{ij} \left( \Delta u_n^\dagger \right)_{ij}.$$

Nous pouvons ensuite utiliser les relations sur le volume spécifique et l'énergie

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger - \vartheta_i^n - \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \bar{u}_{ij}^\dagger &= 0, \\ E_i^\dagger - E_i^n + \Delta t \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \bar{p}_{ij}^{\theta, \dagger} \bar{u}_{ij}^\dagger &= \Delta t \frac{1}{Pe} \vartheta_i^n \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^\dagger) + \Delta t \frac{M^2}{Re} \vartheta_i^n \nabla_i \cdot (\Gamma^\dagger \mathbf{u}^\dagger). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Comme dans le cas non visqueux, on effectue un développement asymptotique en fonction du nombre de Mach. L'équation sur la vitesse donne alors

— à l'ordre  $M^{-2}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (4.67)$$

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(1), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} + \cancel{\vartheta_i^{(1), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij}} = 0, \quad (4.68)$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\mathbf{u}_i^{(0), \dagger} - \mathbf{u}_i^{(0), n} + \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2), \dagger} \right)_{ij} \mathbf{n}_{ij} - C_{ij}^{(0)} \left( \Delta \mathbf{u}^{(0), \dagger} \right)_{ij} \right] = \Delta t \frac{\vartheta_i^{(0), n}}{Re} \nabla_i \cdot \Gamma^{(0), \dagger}.$$

Dans la mesure où nous avons négligé le second membre de l'équation d'évolution de la pression (4.15), nous trouvons que  $\mathbf{p}^{(0), \dagger}$  et  $\mathbf{p}^{(1), \dagger}$  sont constants en espace de la même façon que dans le cas non visqueux. L'équation sur le volume spécifique n'est pas modifiée par les termes visqueux (*cf.* les relations (4.48) et (4.49)). L'équation sur l'énergie donne quant à elle

— à l'ordre  $M^{-1}$  :

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \frac{(\Sigma \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij} (\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}}{C_{ij}^{(0)}} = 0,$$

— à l'ordre  $M^0$  :

$$\begin{aligned} E_i^{(0), \dagger} - E_i^{(0), n} + \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma p^{(0), \dagger} \right)_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} \\ + \Delta t \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \frac{(\Sigma \mathbf{p}^\dagger)_{ij} (\Delta \mathbf{p}^\dagger)_{ij} \vartheta_i^n}{C_{ij}} \right)^{(1)} &= \Delta t \frac{\vartheta_i^{(0), n}}{Pe} \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^{(0), \dagger}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que les termes  $(\Delta \mathbf{p}^{(0), \dagger})_{ij}$  et  $(\Delta \mathbf{p}^{(1), \dagger})_{ij}$  sont nuls, les équations à l'ordre  $M^0$  pour la vitesse, la pression, le volume spécifique et l'énergie se simplifient alors en

$$\mathbf{u}_i^{(0), \dagger} - \mathbf{u}_i^{(0), n} + \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ \left( \Sigma \mathbf{p}^{(2), \dagger} \right)_{ij} - C_{ij}^{(0)} \left( \Delta \mathbf{u}_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} = \Delta t \frac{\vartheta_i^{(0), n}}{Re} \nabla_i \cdot \Gamma^{(0), \dagger},$$

$$\mathbf{p}^{(0), \dagger} - p_i^{(0), n} + \Delta t \left( C_i^{(0), n} \right)^2 \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} = 0, \quad (4.69a)$$

$$\vartheta_i^{(0), \dagger} - \vartheta_i^{(0), n} - \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} = 0, \quad (4.69b)$$

$$E_i^{(0), \dagger} - E_i^{(0), n} + \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \mathbf{p}^{(0), \dagger} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left( \Sigma u_n^{(0), \dagger} \right)_{ij} = \Delta t \vartheta_i^{(0), n} \frac{1}{Pe} \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^{(0), \dagger}). \quad (4.69c)$$

Pour un gaz parfait, nous avons la relation  $(C_i^{(0),n})^2 \vartheta_i^{(0),n} = \gamma p_i^{(0),n}$ . Nous supposons, comme dans le cas non visqueux, que le terme d'ordre 0 en nombre de Mach de la pression au temps  $t^n$  est constant. En sommant sur toutes les mailles la relation (4.69a), et si les conditions aux limites imposent que  $(\Sigma u_n^{(0),\dagger})_{ij} = 0$  sur le bord du domaine, on montre que la composante d'ordre 0 de la pression est constante en temps  $\mathbf{p}^{(0),\dagger} = p^{(0)}$ . Il en résulte donc que la divergence de la vitesse à l'ordre 0 est nulle

$$\sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} (\Sigma u_n^{(0),\dagger})_{ij} = 0.$$

En réinjectant cette condition de divergence nulle dans l'équation d'énergie (4.69c) et en utilisant la relation  $E^{(0)} = \varepsilon^{(0)} = c_v T^{(0)}$ , nous obtenons

$$\rho_i^{(0),n} c_v (T_i^{(0),\dagger} - T_i^{(0),n}) = \Delta t \frac{1}{Pe} \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^{(0),\dagger}). \quad (4.70)$$

Finalement, la limite bas Mach du schéma implicite pour l'étape acoustique est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} (\Sigma u_n^{(0),\dagger})_{ij} &= 0, \\ \vartheta_i^{(0),\dagger} &= \vartheta_i^{(0),n}, \\ \rho_i^{(0),n} \frac{\mathbf{u}_i^{(0),\dagger} - \mathbf{u}_i^{(0),n}}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \sigma_{ij} \left[ (\Sigma \mathbf{p}^{(2),\dagger})_{ij} - C_{ij}^{(0)} (\Delta u_n^{(0),\dagger})_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} &= \frac{1}{Re} \nabla_i \cdot \mathbf{T}^{(0),\dagger}, \\ \rho_i^{(0),n} c_v \frac{T_i^{(0),\dagger} - T_i^{(0),n}}{\Delta t} &= \frac{1}{Pe} \nabla_i \cdot (\kappa \nabla T^{(0),\dagger}), \end{aligned} \quad (4.71)$$

Notre version implicite de l'étape acoustique tend donc vers la limite incompressible du système et ne rend donc pas compte du terme au second membre de l'équation sur la divergence de la vitesse du système (4.62). Dans les applications visées, la partie bas Mach correspond au liquide résultant de la fusion. Il n'est donc pas problématique de retrouver une divergence nulle pour le liquide. De plus, nous verrons que la température varie peu dans la zone liquide dans les cas tests de fusion. Pour des applications avec des fluides compressibles en régime bas Mach et des gradients de température non négligeables, des problématiques de combustion par exemple [Ala06], les termes négligés peuvent jouer un rôle important. Pour retrouver la bonne dilatation thermique dans le cas implicite, nous aurions dû considérer l'équation d'évolution pour la pression (en variables dimensionnées) suivante

$$\partial_t \mathbf{p} + C^2 \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} = (\gamma - 1) \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

## 4.2.6 Validation numérique du schéma bas Mach avec les termes de dissipation

### 4.2.6.1 Cavité entraînée

Pour illustrer le comportement bas Mach du schéma avec les termes de dissipation, nous considérons le cas classique d'une cavité entraînée. Le domaine de calcul est une boîte carrée  $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$  qui est initialisée avec un fluide de densité  $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ , une vitesse nulle et une pression  $p = 10^5 \text{ Pa}$  égale à la pression atmosphérique. Le fluide est modélisé par une loi d'état de type gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ . La viscosité dynamique du fluide est prise à  $\mu = 10^{-2} \text{ Pa.s}$  tandis que la conductivité thermique est négligée  $\kappa = 0$  dans ce cas test. Une condition limite d'entraînement à la vitesse  $\mathbf{u} = (1, 0) \text{ m.s}^{-1}$  est imposée sur la partie supérieure du domaine. Pour les autres côtés du domaine, une condition aux limites de type paroi est appliquée. Le nombre

de Mach correspondant à la vitesse d'entraînement de la paroi est égal à  $M = 2.67 \times 10^{-3}$  tandis que le nombre de Reynolds est égal à  $Re = 100$ . Un maillage composé de  $100 \times 100$  cellules est utilisé et nous cherchons une solution stationnaire.

Nous allons regarder l'effet de la correction bas Mach et comparer les formulations explicite et semi-implicite de notre schéma avec les résultats obtenus par Ghia et al. [GGS82]. Sur la figure 4.19, nous avons tracé l'amplitude la vitesse pour les schémas IMEX avec et sans la correction bas Mach. Nous pouvons remarquer que, sans modification pour le régime bas Mach, le schéma numérique ne capte pas la recirculation à l'intérieur de la cavité. En activant la correction bas Mach, la recirculation induite par la condition d'entraînement sur la partie supérieure est bien calculée.

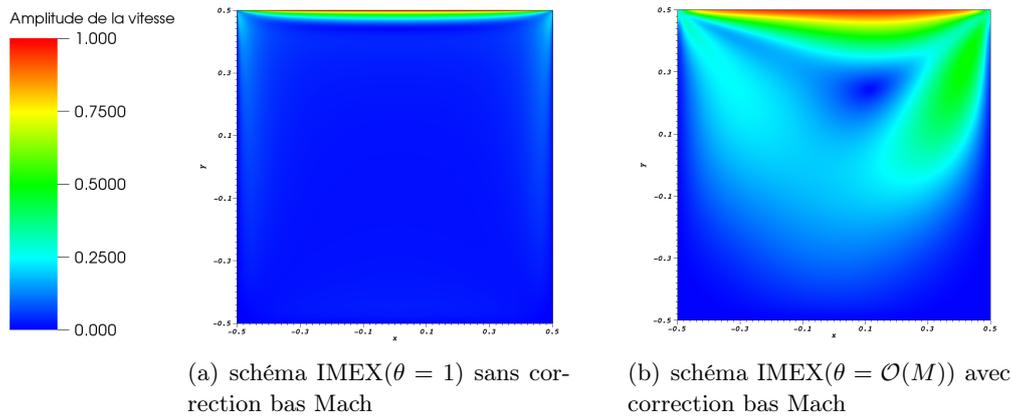


FIGURE 4.19 – Cavité entraînée : amplitude de la vitesse pour le schéma semi-implicite avec et sans correction bas Mach.

Sur la figure 4.20, nous comparons les résultats obtenus avec les schémas explicite EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) et semi-implicite IMEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) avec les résultats présentés dans l'article de Ghia et al. [GGS82]. Nous pouvons voir que les résultats des versions explicite et implicite sont superposés et sont en excellent accord avec la solution de référence de [GGS82], qui est calculée par un schéma discrétisant les équations de Navier-Stokes incompressible.

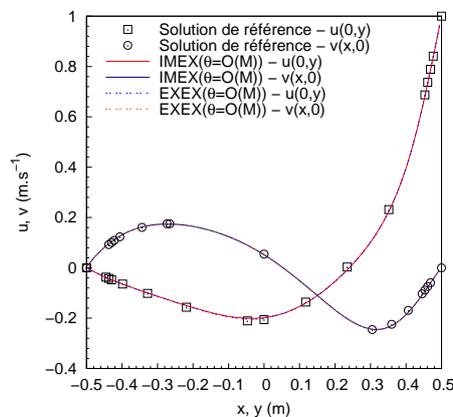


FIGURE 4.20 – Cavité entraînée : comparaison entre les coupes des vitesses calculées avec les schémas EXEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) et IMEX( $\theta = \mathcal{O}(M)$ ) et les solutions obtenues par Ghia et al. [GGS82].

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux extensions du modèle et de la méthode numérique : l'extension du modèle diphasique à cinq équations réduit pour prendre en compte les termes de dissipation et l'extension du schéma numérique permettant de capturer correctement la limite incompressible quand le nombre de Mach est faible.

Pour la prise en compte des termes de diffusion, la méthode numérique est encore basée sur une décomposition des équations en deux étapes. La première étape regroupe les effets acoustiques, visqueux et ceux liés à la diffusion de la chaleur tandis que la seconde étape de la résolution numérique est liée au transport. L'ajout des termes diffusifs n'impacte donc que la première étape de la méthode Lagrange-Transport présentée au chapitre 3. Nous avons ensuite détaillé la discrétisation des termes de diffusion sur un maillage curviligne. Les formulations explicite et implicite de l'étape acoustique+diffusion ont ensuite été présentées et validées sur des cas tests académiques.

Concernant la modification du schéma numérique pour améliorer la précision dans la zone bas Mach, nous avons utilisé la correction proposée par Chalons et al. [CGK16]. Cette correction est très simple à mettre en œuvre dans la mesure où la modification du solveur de Riemann ne conduit qu'à modifier la partie décentrée du flux numérique de la pression dans l'étape acoustique. Nous avons ensuite rappelé que l'erreur de troncature du schéma avec la correction bas Mach est uniforme par rapport au nombre de Mach, puis nous avons étudié la limite du schéma numérique avec et sans les termes de dissipation dans le régime bas Mach sur un maillage cartésien. Finalement, différents cas tests nous ont permis de valider la correction pour le régime bas Mach. Notons que dans cette étude, nous n'avons pas testé numériquement de problème bas Mach diphasique. En effet, la plupart des cas test de la littérature sur le sujet sont monophasique. Cependant, l'application de notre schéma avec la correction bas Mach sur un problème diphasique sera faite dans le prochain chapitre.

Dans le chapitre suivant, nous présentons le couplage entre la partie fluide et le solide pour pouvoir appréhender le phénomène de fusion d'un matériau.



## Chapitre 5

# Application à la fusion d'un matériau

### Sommaire

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Présentation des équations de conservation dans chaque domaine et conditions de couplage</b>    | <b>136</b> |
| 5.1.1      | Équations de conservation pour les domaines fluide et solide                                       | 136        |
| 5.1.2      | Conditions à la paroi  | 137        |
| <b>5.2</b> | <b>Prise en compte du déplacement du maillage</b>  | <b>138</b> |
| 5.2.1      | Formulation et résolution des équations sur maillages mobiles                                      | 138        |
| 5.2.2      | Déplacement du maillage  | 141        |
| <b>5.3</b> | <b>Algorithme de couplage</b>  | <b>142</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Résultats numériques</b>  | <b>145</b> |
| 5.4.1      | Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide | 145        |
| 5.4.2      | Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'air               | 147        |
| <b>5.5</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>149</b> |

---

Lors de la rentrée atmosphérique d'un objet métallique ou partiellement métallique, un débris de satellite par exemple, la paroi de l'objet subit un échauffement important dû à la friction des gaz atmosphériques environnants. La conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique entraîne une forte augmentation de la température de l'objet et conduit à la dégradation physico-chimique de la protection thermique de l'engin et à un recul de la paroi. Les deux principales causes de l'ablation d'un solide durant sa phase de rentrée atmosphérique sont la sublimation, avec l'injection de nouvelles espèces gazeuses dans l'atmosphère, et la fusion de la partie métallique, avec la création d'une phase liquide dans le gaz. L'air et le métal fondu sont des fluides très différents que l'on peut supposer non miscibles. Pour traiter ce problème très complexe, une approche zonale est envisagée, voir figure 5.1. Dans la zone de l'écoulement gazeux, c'est-à-dire loin de l'objet ou proche d'une partie de la paroi constituée de carbone où le processus d'ablation est régi par le phénomène de sublimation, des schémas classiques peuvent être utilisés. Des simulations numériques du processus de sublimation ont déjà été étudiées dans [MB14, MC13, BNM10, Mul10, Lat13, Tur13]. Dans la région proche d'une paroi métallique, la vitesse du gaz est faible et avec l'apparition de la phase liquide, la dynamique de l'écoulement est fortement modifiée. De notre propre expérience, les schémas numériques classiques utilisés pour simuler le phénomène de sublimation ne sont pas très robustes pour calculer de tels écoulements diphasiques de façon implicite avec de grand pas de temps.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le phénomène d'ablation d'un matériau métallique par un processus de fusion. De plus, pour simplifier le problème, nous nous limiterons principalement au cas d'une cavité entraînée qui peut résulter de la présence d'un défaut dans le matériau.

Pour cela, nous devons donc coupler un domaine fluide, constitué d'un écoulement diphasique, et un domaine solide séparés par une interface mobile. Après avoir écrit les équations de conservation dans chaque domaine, nous détaillerons les conditions de couplage, à savoir les bilans de masse et d'énergie. La discrétisation des équations sur un maillage mobile et le déplacement de celui-ci seront ensuite présentés. Un algorithme de couplage entre les deux domaines fluide et solide pour simuler la fusion d'un matériau métallique sera finalement proposé.

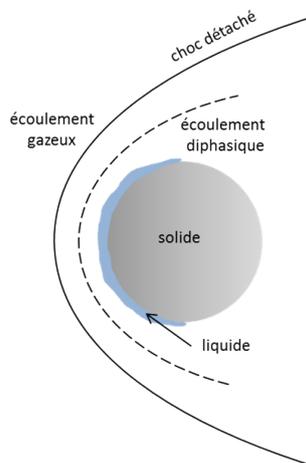


FIGURE 5.1 – Illustration de l'approche zonale utilisée pour décrire la phase de rentrée d'un matériau métallique.

## 5.1 Présentation des équations de conservation dans chaque domaine et conditions de couplage

### 5.1.1 Équations de conservation pour les domaines fluide et solide

Dans le domaine fluide nous considérons le modèle diphasique à cinq équations réduit avec les termes de dissipation présenté au chapitre 2 :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_g z_g) + \nabla \cdot (\rho_g z_g \mathbf{u}_f) & = 0, \\ \partial_t (\rho_l z_l) + \nabla \cdot (\rho_l z_l \mathbf{u}_f) & = 0, \\ \partial_t (\rho_f \mathbf{u}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f \otimes \mathbf{u}_f) & = \nabla \cdot \mathbf{S}_f, \\ \partial_t (\rho_f E_f) + \nabla \cdot (\rho_f E_f \mathbf{u}_f) & = \nabla \cdot (\mathbf{S}_f \mathbf{u}_f) + \nabla \cdot (\kappa_f \nabla T_f), \\ \partial_t z_l + \mathbf{u}_f \cdot \nabla z_l & = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où nous rappelons que la densité et l'énergie interne de mélange vérifient les relations

$$\rho_f = z_g \rho_g + z_l \rho_l \quad \text{et} \quad \varepsilon_f = y_g \varepsilon_g + y_l \varepsilon_l. \quad (5.2)$$

Pour faciliter l'écriture, nous avons introduit le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}_f = \mathbf{T}_f - p_f \mathbf{I}_d$ . L'indice  $\bullet_f$  indique les quantités du domaine fluide et pour plus de clarté nous avons considéré que la phase 1 était associée à la phase liquide notée  $\bullet_l$  et la phase 2 à la phase gazeuse notée  $\bullet_g$ .

Nous avons présenté aux chapitres 3 et 4 une approximation numérique de ce modèle diphasique permettant de simuler convenablement des écoulements diphasiques avec deux phases non miscibles ayant de grands ratios de densité.

Pour le domaine solide, nous supposons que sa densité  $\rho_s$ , sa capacité thermique  $c_v$  et sa conductivité thermique  $\kappa_s$  sont constantes. De plus, il n'y a pas de déplacement de matière dans le solide. L'équation d'énergie dans le solide donne alors

$$\partial_t (\rho_s E_s) = \nabla \cdot (\kappa_s \nabla T_s). \quad (5.3)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons un schéma direct implicite, où les flux numériques sont de la même forme que ceux utilisés dans la discrétisation des termes de dissipation pour le fluide, voir section 4.1.1.

### 5.1.2 Conditions à la paroi

Pour déterminer les conditions de couplage à la paroi entre les domaines fluide et solide, nous allons écrire les bilans à l'interface comme des relations de saut. Pour cela, nous allons assimiler le solide à un fluide compressible avec une vitesse et un tenseur de contrainte nuls. Nous avons donc deux fluides compressibles séparés par une interface mobile. La normale espace-temps à l'interface est égale à  $(n_t, \mathbf{n}_X)$ .

À partir de ces relations de conservation, nous allons définir les relations de saut à la paroi pour les équations de masse et d'énergie. Dans la suite, la notation  $[\phi]$  représente le saut  $\phi_f - \phi_s$ .

#### Bilan de masse

En sommant les deux premières équations du modèle diphasique fluide (5.1), nous obtenons l'équation de conservation de la masse fluide :  $\partial_t \rho_f + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) = 0$ . Pour le solide, nous avons supposé que sa densité  $\rho_s$  était constante et sa vitesse nulle. Ainsi, la conservation de la masse globale s'écrit

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.4)$$

La relation de Rankine-Hugoniot donne alors :

$$[\rho n_t] + [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_X] = 0.$$

Le vecteur vitesse de déplacement normal de l'interface est donné par  $\mathbf{w}_{itf} = w_{itf} \frac{\mathbf{n}_X}{\|\mathbf{n}_X\|}$  avec  $w_{itf} = -\frac{n_t}{\|\mathbf{n}_X\|}$ . Ainsi, nous avons la relation  $n_t = -\mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n}_X$ . Nous obtenons alors

$$\rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}_{itf}) \cdot \mathbf{n}_X + \rho_s \mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n}_X = 0.$$

Dans la suite, on notera  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_X}{\|\mathbf{n}_X\|}$  la normale spatiale à l'interface. Le flux de masse à travers la paroi est alors donné par

$$\dot{m} = \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}_{itf}) \cdot \mathbf{n} = -\rho_s \mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.5)$$

Nous pouvons donc en déduire les deux relations suivantes à la paroi

$$\mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\dot{m}}{\rho_s}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_f}\right) \mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.7)$$

Le bilan de masse nous permet donc de déterminer la vitesse normale de récession de la paroi  $\mathbf{w}_{itf} \cdot \mathbf{n} = w_{itf}$  ainsi que la vitesse d'injection de liquide dans la partie fluide  $\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}$  à l'aide du

flux de masse  $\dot{m}$ . Dans la suite, nous supposons qu'il n'y a pas de glissement et que l'injection de la phase liquide dans le fluide se produit suivant la normale à l'interface, *i.e.*  $\mathbf{u}_f = u_f \mathbf{n}$ .

Dans les applications numériques de ce chapitre, nous étudierons la fusion d'un bloc d'aluminium. Dans ce cas, le ratio entre les densités du solide et du métal fondu est égal à 1.08. Ainsi, nous pouvons en déduire que la vitesse d'injection  $u_f$  (5.7) et de récession de la paroi  $w_{itf}$  sont de signe opposé. Notons que dans le cas particulier où  $\rho_s = \rho_f$ , la vitesse d'injection est nulle : il y a donc adhérence du liquide sur la paroi mobile.

## Bilan d'énergie

Pour le bilan d'énergie, nous allons utiliser la relation de Stefan [Ste91] qui permet donc de déterminer le flux de masse  $\dot{m}$  à partir des flux de chaleur à la paroi du fluide et du solide. Le bilan d'énergie s'écrit alors

$$\dot{m}L = \left[ \kappa \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right]. \quad (5.8)$$

où  $L$  est la chaleur latente de fusion.

Nous avons déterminé les équations du problème dans les deux domaines (fluide et solide) ainsi que la condition de couplage sur l'interface. Nous allons maintenant présenter la prise en compte du déplacement de maillage dans la résolution numérique des équations.

## 5.2 Prise en compte du déplacement du maillage

Dans cette section, nous présentons la prise en compte du déplacement du maillage dans la résolution numérique. Nous avons opté pour une approche *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE), équivalente à une méthode volumes finis espace-temps.

Dans cette thèse, nous considérons des maillages structurés curvilignes et le déplacement des nœuds se fait sur les lignes de maillage. Pour simplifier la gestion des bilans de masse et d'énergie, nous supposons que les maillages fluide et solide sont conformes : les mailles fluides sont en vis-à-vis des mailles solides.

### 5.2.1 Formulation et résolution des équations sur maillages mobiles

Pour la partie fluide, le modèle diphasique à cinq équations réduit (5.1) peut s'écrire sous la forme plus compacte

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{H} \nabla z = 0, \quad (5.9)$$

avec  $\mathbf{U} = (\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z)^T$  et  $\mathbf{F} = (\rho \mathbf{u}, \rho y \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{S}, \rho E \mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{q}, 0)^T$ . Le vecteur  $\mathbf{H} = (0, 0, 0, 0, \mathbf{u})^T$ . Rappelons aussi les définitions de la fraction massique  $y_k = \frac{\rho_k z_k}{\rho}$  de la phase  $k$ , du tenseur des contraintes  $\mathbf{S} = \mathbb{T} - p \mathbf{I}_d$  et du flux de chaleur  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ . Par souci de clarté, nous n'avons pas noté l'indice  $\bullet_f$  pour la partie fluide, ni l'indice  $\bullet_l$  pour les fractions volumiques et massiques de la phase 1.

Nous intégrons le système précédent (5.9) sur le volume de contrôle  $\omega(t)$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{w}$  pour trouver

$$\int_{\omega(t)} (\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{H} \nabla z) dv = 0.$$

En remarquant que le flux  $\mathbf{F}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{u} \mathbf{U} + \mathbf{G}^0$  avec  $\mathbf{G}^0 = (0, 0, -\mathbf{S}, -\mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{q}, -\mathbf{u} z)^T$ , nous avons

$$\int_{\omega(t)} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{G}^0 + \mathbf{H} \nabla z + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}) dv = 0. \quad (5.10)$$

Lorsque des maillages mobiles ou déformables sont considérés, nous devons assurer que la loi de conservation géométrique (*Geometric Conservation Law* ou GCL en anglais) est bien vérifiée au niveau discret pour garantir la préservation des champs constants malgré la déformation du maillage [LF96]. Au niveau continu la GCL s'exprime

$$\frac{d}{dt} (|\omega(t)|) - \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, \quad (5.11)$$

où  $\partial\omega(t)$  désigne la frontière du volume de contrôle et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante.

De la même façon que dans la cas où le maillage reste fixe, voir chapitre 3, nous allons utiliser une décomposition d'opérateurs pour résoudre numériquement le modèle diphasique à cinq équations réduit sur maillage mobile tout en assurant la loi de conservation géométrique. Pour cela, nous allons encore décomposer les équations précédentes en deux parties : une étape acoustique regroupant les effets acoustiques et les termes de dissipation

$$\begin{cases} \int_{\omega(t)} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{G}^0 + \mathbf{H} \nabla z) \, dv = 0, \\ \frac{d}{dt} (|\omega(t)|) = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

et une étape de transport

$$\begin{cases} \int_{\omega(t)} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}) \, dv = 0, \\ \frac{d}{dt} (|\omega(t)|) - \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

### Étape acoustique avec les termes de dissipation

Dans la première étape du splitting, nous allons résoudre le système diphasique sur un maillage fixe. Nous fixons  $\omega(t) = \omega(t^n) = \omega^n$ . Ainsi, les équations de la partie fluide pour l'étape acoustique s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega^n} \rho \, dv + \int_{\omega^n} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega^n} \rho y \, dv + \int_{\omega^n} \rho y \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega^n} \rho \mathbf{u} \, dv + \int_{\omega^n} (\rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{S}) \, dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega^n} \rho E \, dv + \int_{\omega^n} (\rho E \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{q})) \, dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega^n} z \, dv &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans le chapitre 3, nous pouvons discrétiser le système précédent. Les dernières équations sont alors combinées avec la première relation sur la densité au niveau discret. De plus, la première équation est multipliée par  $\frac{1}{\rho^2}$ . Pour la cellule  $\Omega_i$ , le schéma numérique explicite pour l'étape

acoustique avec les termes de dissipation est donné par

$$\begin{aligned}
 \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}^n, \\
 y_i^\dagger &= y_i^n, \\
 \mathbf{u}_i^\dagger &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{p}_{ij}^n - \nabla_i \cdot \mathbb{T}^n \right), \\
 E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \left( \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{p}_{ij}^n \bar{u}_{ij}^n - \nabla_i \cdot (\mathbb{T}^n \mathbf{u}^n) + \nabla_i \cdot \mathbf{q}^n \right), \\
 z_i^\dagger &= z_i^n,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

où la pression et la vitesse normale sur la face  $\Gamma_{ij}$  sont données par le solveur de Riemann développé pour la partie hyperbolique du modèle à cinq équations réduit dans la section 3.1.1 du chapitre 3. La notation  $\nabla_i \cdot \bullet$  désigne quant à elle la discrétisation des termes dissipatifs présentée dans le chapitre 4 à la section 4.1.1.

La formulation implicite de l'étape acoustique avec les termes de dissipation reste identique à celle présentée dans les sections 3.1.1.3 et 4.1.3 dans la mesure où le maillage reste fixe.

### Étape de transport

En notant que  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{U}) - \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{u}$ , le système de l'étape de transport (5.13) s'écrit sous la forme

$$\int_{\omega(t)} (\partial_t \phi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) - \phi \nabla \cdot \mathbf{u}) \, dv = 0, \tag{5.15}$$

où  $\phi$  peut valloir  $\rho$ ,  $\rho y$ ,  $\rho \mathbf{u}$ ,  $\rho E$  ou  $z$ .

Pour calculer le terme  $\int_{\omega(t)} \partial_t \phi \, dv$ , nous allons utiliser la formule de transport de Reynolds. Soit  $\omega(t)$  un volume arbitraire se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{w}$ , c'est-à-dire que pour tout point  $x(t)$  de  $\omega(t)$ , on a  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{w}(x(t))$ . Soit  $f : (\mathbf{x}, t) \mapsto f(\mathbf{x}, t)$  une fonction scalaire que l'on supposera de classe  $\mathcal{C}^1$ . D'après la formule de transport de Reynolds, nous avons la relation

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f \, dv = \int_{\omega(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{w}) \right) \, dv,$$

ce qui donne en appliquant la formule de Green

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f \, dv - \int_{\partial \omega(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \tag{5.16}$$

En utilisant la relation précédente (5.16), le système pour l'étape de transport (5.15) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \phi \, dv - \int_{\partial \omega(t)} \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\omega(t)} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) - \phi \nabla \cdot \mathbf{u}) \, dv = 0,$$

pour  $\phi \in \{\rho, \rho y, \rho \mathbf{u}, \rho E, z\}$ . Ce qui s'écrit de façon équivalente

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \phi \, dv + \int_{\partial \omega(t)} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\omega(t)} \phi \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv = 0.$$

Pour la cellule  $\Omega_i(t)$ , une approximation de la formule précédente donne

$$\frac{d}{dt} (|\Omega_i| \phi_i) + \int_{\partial \Omega_i(t)} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \phi_i \int_{\partial \Omega_i(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

Nous avons donc le schéma explicite suivant pour l'étape de transport si le maillage bouge à la vitesse  $\mathbf{w}$  :

$$|\Omega_i^{n+1}| \phi_i^{n+1} = |\Omega_i^n| \phi_i^\dagger - \Delta t \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \phi_{ij} (\bar{u}_{ij} - \bar{w}_{ij}) + \Delta t \phi_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \bar{u}_{ij}, \quad (5.17)$$

où  $\bar{w}_{ij}$  est la vitesse de déplacement du maillage sur la face  $\Gamma_{ij}$ . Dans le cas où le maillage reste fixe, la vitesse matérielle  $\bar{u}_{ij}$  est donnée par le solveur de Riemann de l'étape acoustique pour assurer le caractère conservatif du schéma global (voir la section 3.3.1 du chapitre 3). Nous conserverons ce choix de vitesse matérielle sur la face lorsque le maillage se déplace. Le flux  $\phi_{ij}$  dépend quant à lui du choix du schéma dans la phase de transport. Pour le schéma décentré, le flux est donné par

$$\begin{cases} \phi_{ij}^\dagger = \phi_i^\dagger & \text{si } \bar{u}_{ij} - \bar{w}_{ij} > 0, \\ \phi_{ij}^\dagger = \phi_j^\dagger & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le schéma d'antidiffusion sur la fraction volumique, sa construction est analogue à celle présentée dans la section 3.2.2 du chapitre 3.

## 5.2.2 Déplacement du maillage

Dans cette partie nous détaillons le déplacement du maillage. Pour simplifier le problème, nous nous limiterons au cas où le déplacement se fait suivant des lignes de maillage qui sont supposées être des droites. Les différentes étapes de la stratégie de déplacement du maillage sont illustrées sur la figure 5.2.

À partir des flux de chaleur calculés aux centres des faces, le bilan d'énergie (5.8) permet de déterminer le flux de masse aux centres des faces de l'interface. Le bilan de masse (5.6) nous donne ensuite une vitesse de maillage aux centres des faces de la paroi entre la partie fluide et le solide, voir figure 5.2(a). À partir de ces vitesses de déplacement aux centres des faces, nous en déduisons une vitesse de déplacement de maillage pour tous les nœuds de l'interface fluide solide par une méthode d'interpolation, cf. figure 5.2(b). Pour chaque nœud  $p$  du maillage, sa vitesse de déplacement  $\mathbf{w}_p$  est calculée à partir d'une interpolation linéaire entre la vitesse nodale située sur l'interface fluide solide et la vitesse de la face que l'on suppose fixe (figure 5.2(c)). Après avoir déterminé les vitesses nodales de tous les sommets, nous pouvons calculer la position de tous les nouveaux points du maillage à partir de la relation explicite

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \Delta t \mathbf{w}_p. \quad (5.18)$$

Pour résoudre l'étape de transport (5.17) dans la cellule  $\Omega_i$ , nous avons besoin de connaître la vitesse du maillage  $\bar{w}_{ij}$  sur toutes les faces de la cellule. La vitesse du maillage au centre de la face  $\Gamma_{ij}$  est calculée avec la formule [LF96]

$$\bar{w}_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\mathbf{x}_A^{n+1} + \mathbf{x}_B^{n+1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_A^n + \mathbf{x}_B^n}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (5.19)$$

où  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$  sont les coordonnées des sommets de la face  $\Gamma_{ij}$ . La normale au temps  $n + \frac{1}{2}$  est calculée en construisant le maillage au temps  $n + \frac{1}{2}$  tel que

$$\mathbf{x}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^n + \mathbf{x}^{n+1}). \quad (5.20)$$

Finalement, la nouvelle aire de la cellule est recalculée avec la loi conservation géométrique (5.11)

$$|\Omega_i^{n+1}| = |\Omega_i^n| + \Delta t \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| w_{ij}. \quad (5.21)$$

Ce choix permet d'assurer que les constantes sont bien préservées même sur un maillage mobile, ce qui est particulièrement important pour la fraction volumique par exemple.

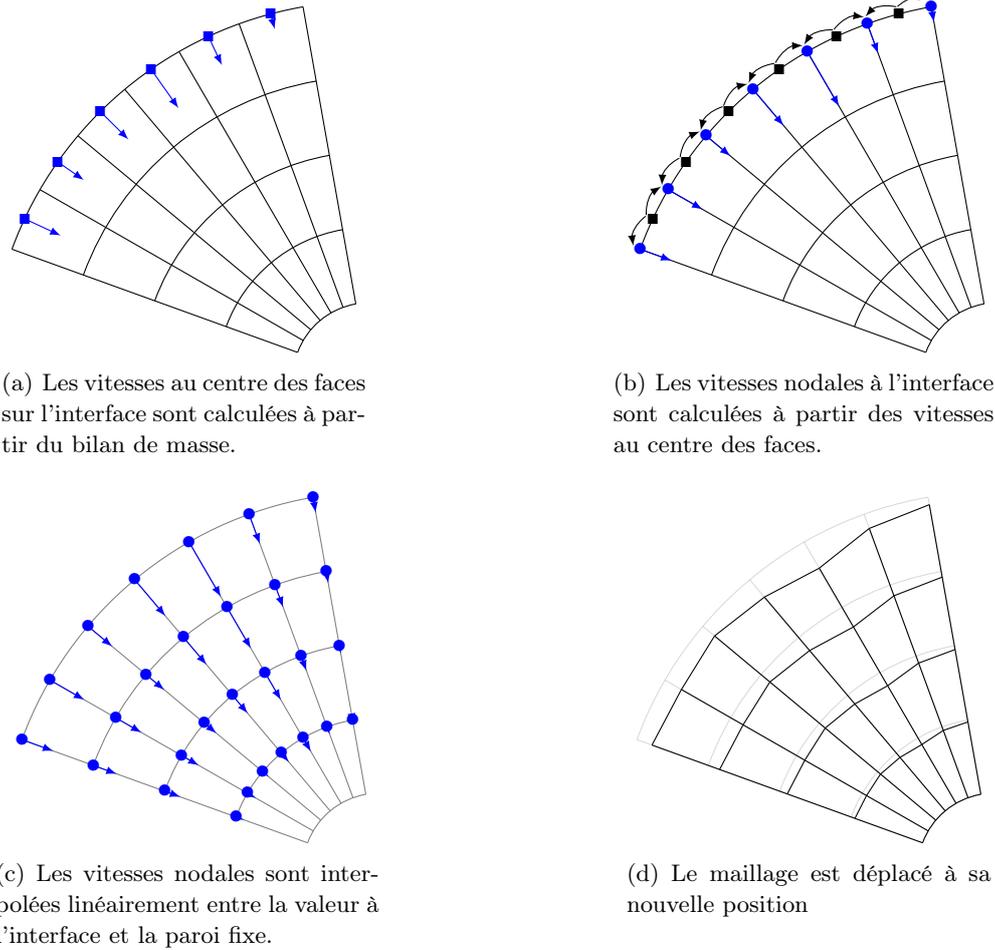


FIGURE 5.2 – Illustration de la méthode de déplacement du maillage.

### 5.3 Algorithme de couplage

Après avoir présenté la prise en compte du mouvement de maillage dans la résolution des équations, nous allons détailler l'algorithme de couplage entre les deux domaines. Dans un premier temps, une analyse dimensionnelle nous permettra de comparer les temps caractéristiques des domaines fluide et solide ainsi que du déplacement de l'interface.

#### Analyse dimensionnelle

Pour effectuer cette analyse dimensionnelle, nous allons introduire des grandeurs de référence pour les différentes variables de notre système. Pour le domaine fluide, nous introduisons  $x_0$ ,  $u_{f,0}$ ,  $\rho_{f,0}$ ,  $c_{f,0}$ ,  $\mu_{f,0}$ ,  $\kappa_{f,0}$  et  $c_{p,f,0}$  les grandeurs de référence de la longueur caractéristique, de la vitesse  $\mathbf{u}_f$ , de la masse volumique  $\rho_f$ , de la vitesse du son  $c_f$ , de la viscosité  $\mu_f$ , de la conductivité thermique  $\kappa_f$  et de la capacité calorifique à pression constante  $c_{p,f}$  du fluide. Les variables adimensionnées sont données par

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left( \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right), \quad \tilde{\rho}_f = \frac{\rho_f}{\rho_{f,0}}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_f = \left( \frac{u_{1,f}}{u_{f,0}}, \frac{u_{2,f}}{u_{f,0}} \right). \quad (5.22)$$

La pression, l'énergie interne, le tenseur de viscosité et la température du fluide sont adimensionnés par :

$$\tilde{p}_f = \frac{p_f}{\rho_{f,0} c_{f,0}^2}, \quad \tilde{\varepsilon}_f = \frac{\varepsilon_f}{c_{f,0}^2}, \quad \tilde{\mathbb{T}}_f = \frac{\mathbb{T}_f}{\mu_{f,0} u_{f,0}} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_f = T_f \frac{c_{p,f,0}}{c_{f,0}^2}. \quad (5.23)$$

Pour le domaine fluide, le temps caractéristique de l'écoulement est donné par

$$t_{f,0} = \frac{x_0}{u_{f,0}}. \quad (5.24)$$

Au niveau de l'interface entre les domaines fluide et solide, nous introduisons la vitesse de référence  $w_{itf,0}$  liée au déplacement de la paroi. Le temps caractéristique de l'interface est

$$t_{itf,0} = \frac{x_0}{w_{itf,0}}. \quad (5.25)$$

De même pour le domaine solide, nous définissons le temps caractéristique pour le processus thermique

$$t_{s,0} = \frac{x_0^2 \rho_{s,0} c_{p,s,0}}{\kappa_{s,0}}, \quad (5.26)$$

où  $\rho_{s,0}$ ,  $c_{p,s,0}$  et  $\kappa_{s,0}$  sont respectivement la densité, la capacité thermique et la conductivité de référence pour le solide.

Le temps caractéristique du système complet (fluide+interface+solide) est égal au temps de référence de l'interface  $t_{itf,0}$ . Nous choisissons ce temps de référence pour effectuer l'adimensionnement du système couplé. Pour le domaine fluide, nous obtenons

$$\frac{t_{f,0}}{t_{itf,0}} \frac{\partial \tilde{\rho}_f}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{u}}_f) = 0, \quad (5.27)$$

$$\frac{t_{f,0}}{t_{itf,0}} \frac{\partial \tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{u}}_f}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{u}}_f \otimes \tilde{\mathbf{u}}_f) + \frac{1}{Ma^2} \tilde{\nabla} \tilde{p}_f = \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbb{T}}_f, \quad (5.28)$$

$$\frac{t_{f,0}}{t_{itf,0}} \frac{\partial \tilde{\rho}_f \tilde{E}_f}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_f \tilde{E}_f \tilde{\mathbf{u}}_f + \tilde{p}_f \tilde{\mathbf{u}}_f) = \frac{1}{Pe} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\kappa}_f \tilde{\nabla} \tilde{T}_f) + \frac{Ma^2}{Re} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbb{T}}_f \tilde{\mathbf{u}}_f). \quad (5.29)$$

où nous avons introduit, comme pour l'analyse dimensionnelle à faible nombre de Mach (voir la section 4.2 du chapitre 4), les nombres sans dimension suivants : le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_{f,0} x_0 u_{f,0}}{\mu_{f,0}}$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\mu_{f,0} c_{p,f,0}}{\kappa_{f,0}}$ , le nombre de Péclet  $Pe = Re Pr$  et le nombre de Mach  $Ma = \frac{u_{f,0}}{c_{f,0}}$ .

Pour le domaine solide, nous obtenons

$$\frac{t_{s,0}}{t_{itf,0}} \frac{\partial \tilde{\rho}_s \tilde{E}_s}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\kappa}_s \tilde{\nabla} \tilde{T}_s) = 0. \quad (5.30)$$

Pour le processus de fusion d'un matériau métallique, nous nous concentrons sur l'écoulement en proche paroi qui possède une vitesse de référence beaucoup plus faible que la vitesse de l'écoulement amont. De plus, dans les simulations numériques, nous nous restreignons à la configuration plus simple d'une cavité entraînée. Ainsi, pour simuler le phénomène d'ablation multiphasique, nous considérons la vitesse d'entraînement de la cavité comme vitesse de référence. Cette vitesse caractéristique est proche de la vitesse d'interface. Le rapport des temps caractéristiques du domaine fluide et de l'interface

$$\frac{t_{f,0}}{t_{itf,0}} = \frac{w_{itf,0}}{u_{f,0}}, \quad (5.31)$$

est alors proche de 1. Nous pouvons donc en conclure que le calcul dans le domaine fluide doit être mené en instationnaire pour simuler le phénomène d'ablation multiphasique.

Pour le domaine solide, le rapport entre les temps caractéristiques

$$\frac{t_{s,0}}{t_{itf,0}} = \frac{x_0 \rho_{s,0} c_{p,s,0} w_{itf,0}}{\kappa_{s,0}},$$

n'est pas négligeable. En effet, si l'on considère un bloc d'aluminium de largeur 1 mm avec les propriétés suivantes :  $\rho_{s,0} = 2550 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c_{p,s,0} = 1240 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\kappa_{s,0} = 208 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  [Dev], nous trouvons numériquement que la vitesse de fusion est de l'ordre de  $2 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$ . Dans ce cas, le rapport des temps caractéristiques est égal à 0.30. Le calcul de la thermique du domaine solide sera donc traité en instationnaire.

### Algorithme de couplage entre la partie fluide et le solide

Nous pouvons maintenant définir un algorithme de couplage entre les domaines fluide et solide pour simuler le processus de fusion d'un matériau métallique. Nous proposons l'algorithme de couplage suivant :

---

**Algorithme 3** Algorithme de couplage entre les domaines fluide et solide pour simuler la fusion d'un matériau métallique.

---

1. La première étape consiste à initialiser les domaines fluide et solide en tout point. La position de la paroi est connue.
  2. Le flux de masse  $\dot{m}$  est calculé à partir du bilan d'énergie (5.8).
  3. À partir du bilan de masse (5.5) et du flux de masse  $\dot{m}$ , la vitesse de l'interface  $w_{itf}$  (5.6) et la vitesse d'injection  $\mathbf{u}_f$  (5.7) sont calculées.
  4. Les pas de temps pour les domaines fluide et solide sont calculés en tenant compte de la vitesse de déplacement de l'interface. Le pas de temps du processus global sera le minimum des deux pas de temps.
  5. L'interface est déplacée vers sa nouvelle position. Les maillages des deux domaines sont reconstruits de part et d'autre de l'interface.
  6. La solution instationnaire dans le domaine fluide est calculée à partir de la solution du pas de temps de couplage précédent. L'étape acoustique avec les termes de dissipation du domaine fluide est résolue sur le maillage au temps  $n$ . L'étape de transport (5.17) est quant à elle résolue sur le nouveau maillage. Pour les conditions aux limites, il y a une condition de Dirichlet pour imposer la température de fusion  $T_w$  à la paroi. La vitesse du fluide à l'interface entre le fluide et le solide est donnée par la vitesse d'injection  $\mathbf{u}_f$  (5.7).
  7. La solution instationnaire de l'équation de la chaleur (5.3) dans le domaine solide est calculée à partir de la solution du pas de temps de couplage précédent. Une condition aux limites de type Dirichlet à la température de fusion  $T_w$  est imposée à l'interface fluide solide.
  8. La solution du pas de temps de couplage actuel est déterminée : on connaît la position de la paroi ainsi que les champs de variables respectifs des domaines fluide et solide. On passe au pas de temps de couplage suivant en démarrant à l'étape 2 de l'algorithme.
- 

Dans le cas de l'ablation multiphasique traitée ici, nous pouvons noter que les étapes de résolution des parties fluide 6 et solide 7 de l'algorithme proposé ci-dessus peuvent être résolues en même temps. De plus, une condition de type Dirichlet est imposée pour les deux domaines.

Le bilan d'énergie permet ici de déterminer le flux de masse lié au changement de phase solide-liquide.

### Remarque 29

Dans le cas classique de l'ablation d'un matériau par le processus de sublimation, la vitesse de référence du domaine fluide est égale à la vitesse de l'écoulement amont. Cette vitesse est de l'ordre de plusieurs milliers de mètres par seconde. Pour simuler le phénomène de sublimation d'un matériau, le rapport entre les temps de référence du domaine fluide et de l'interface (5.31) est donc très petit. Ainsi, l'écoulement gazeux est souvent considéré comme stationnaire dans les simulations d'ablation classiques [BNM10, Tur13, Lat13].

De plus, notons que l'algorithme 3 proposé pour coupler les domaines fluide et solide dans le cas de la fusion d'un matériau est différent de l'algorithme classique utilisé pour le processus de sublimation. En effet, pour simuler l'ablation d'un solide par sublimation, la solution stationnaire dans le domaine fluide est tout d'abord calculée grâce à une condition aux limites de type Dirichlet imposée à la paroi. Le bilan d'énergie (5.8) permet ensuite de déterminer le flux à imposer du côté du solide. Ainsi la résolution de la partie fluide et du solide est réalisée de façon séquentielle en imposant successivement une condition de type Dirichlet pour le fluide et de type Neumann pour le solide.

## 5.4 Résultats numériques

### 5.4.1 Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide

Le cas test proposé dans cette partie concerne la simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium solide par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide. Le domaine initial est un rectangle de  $[0, 1]$  mm  $\times$   $[-1, 1]$  mm séparé par la paroi en  $x_2 = 0$ . La partie fluide est située dans le sous-domaine  $[0, 1]^2$  mm. Le bloc solide correspond au sous-domaine caractérisé par  $x_2 < 0$ . Nous considérons que les parois latérales de la cavité sont des parois adiabatiques. La paroi supérieure se déplace de la gauche vers la droite à une vitesse d'entraînement de  $u_e = 10$  m.s<sup>-1</sup> et elle est chauffée à une température de 2000 K.

Dans ce cas test, nous supposons que la température à l'intérieur du solide est égale à la température de fusion de l'aluminium  $T = 933$  K. Pour déterminer les données physiques de l'aluminium solide et liquide, nous nous sommes basés sur le formulaire de Develay [Dev] regroupant les valeurs numériques de l'aluminium non allié. La masse volumique de l'aluminium solide proche de son point de fusion est égale à  $\rho_s = 2550$  kg.m<sup>-3</sup>. Il possède une conductivité thermique de  $\kappa_s = 208$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et une capacité calorifique égale à  $c_{p,s} = 1240$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

Pour l'aluminium liquide, la conductivité thermique est égale à  $\kappa = 90$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> [Dev]. La viscosité de la zone liquide est donnée par  $\mu = 1.235 \times 10^{-3}$  Pa.s. À l'instant initial, nous supposons que la partie fluide, entièrement constituée d'aluminium liquide, est au repos, à la température de fusion et à la pression atmosphérique  $p = 10^5$  Pa. L'enthalpie latente de la transformation solide-liquide à la température de fusion est égale à  $h_0 = 3.97 \times 10^5$  J.kg<sup>-1</sup> [Dev]. Le nombre de Reynolds pour ce cas test est de l'ordre de  $Re \approx 20\ 000$ .

Dans ce cas test, la plage de variation de la température de l'aluminium liquide est très grande. Nous avons vu dans le chapitre 2 que l'équation d'état de type gaz raide amplifie la dilatation thermique. En effet, pour une équation d'état de type gaz raide (2.32) définie via les relations

$$p(\rho, \varepsilon) = \Gamma \rho (\varepsilon - q) - (\Gamma + 1) \pi, \quad (5.32)$$

$$\varepsilon(\rho, T) = q + c_v T + \frac{\pi}{\rho}, \quad (5.33)$$

le coefficient de dilatation thermique est donné par  $\alpha_p = \frac{1}{T}$ . Rappelons enfin que le coefficient de Grüneisen (2.20) est donné par  $\Gamma = \gamma - 1$  dans le cas d'un gaz raide.

Pour ce cas test, nous utiliserons la loi d'état élaborée par Latige [Lat13] pour retrouver la bonne dilatation thermique. Il s'agit d'une loi d'état de type Mie Grüneisen définie par les relations

$$p(\rho, \varepsilon) = \Gamma\rho(\varepsilon - q) - (\Gamma + 1)\pi, \quad (5.34)$$

$$\varepsilon(\rho, T) = q + c_v T + f(\rho). \quad (5.35)$$

avec  $f : \rho \mapsto \frac{\pi}{\rho} + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\Gamma \left(\frac{p_0 + \pi}{\rho_0 \Gamma} - c_v T_0\right)$ . Les paramètres  $\varepsilon_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$  et  $\rho_0$  correspondent à un état de référence pour le fluide. Les données de l'aluminium autour de son point de fusion sont fournies dans le tableau 5.1.

| coefficients   | valeurs                | unités                              |
|----------------|------------------------|-------------------------------------|
| $p_0$          | $10^5$                 | Pa                                  |
| $\rho_0$       | 2368                   | kg.m <sup>-3</sup>                  |
| $c_v$          | 970                    | J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> |
| $\beta_{T,0}$  | $2.38 \times 10^{-11}$ | Pa <sup>-1</sup>                    |
| $\alpha_{p,0}$ | $1.17 \times 10^{-4}$  | K <sup>-1</sup>                     |
| $h_0$          | 397000                 | J.kg <sup>-1</sup>                  |
| $T_0$          | 933                    | K                                   |

TABLE 5.1 – Propriétés physiques de l'aluminium liquide près de son point de fusion à la pression atmosphérique [AH75, Dev].

Dans la loi d'état de type Mie Grüneisen (5.35), les coefficients  $\Gamma$  et  $\pi$  sont supposés constants. Pour déterminer leurs valeurs, Latige utilise les relations thermodynamiques pour définir les constantes de la loi d'état en fonction des paramètres de dilatation isobare  $\alpha_{p,0}$  et de compressibilité isotherme  $\beta_{T,0}$  liés à l'état de référence. Il trouve alors

$$\Gamma = \frac{\alpha_{p,0}}{\rho_0 c_v \beta_{T,0}}, \quad (5.36)$$

$$(\Gamma + 1)\pi = \frac{1}{\beta_{T,0}} - (\Gamma + 1)p_0 + \Gamma^2 \rho_0 c_v T_0. \quad (5.37)$$

En utilisant les propriétés physiques de l'aluminium liquide près de son point de fusion regroupées dans le tableau 5.1, nous en déduisons les paramètres de la loi d'état de type Mie Grüneisen (5.35) :  $\Gamma = 2.14$  et  $\pi = 1.651 \times 10^{10}$  Pa.

Dans un premier temps, nous allons comparer les formulations explicite et semi-implicite sur un maillage grossier constitué de  $50 \times 50$  cellules. Pour le schéma explicite, le pas de temps est calculé à partir de la condition de stabilité de la partie acoustique (3.22) et de celle de la partie transport (3.56) avec un nombre de Courant de 0.5. Pour le schéma IMEX, le pas de temps est uniquement déterminé par la condition de la partie transport (3.56), où la CFL est toujours égale à 0.5. La correction bas Mach présentée au chapitre 4 est utilisée dans ce calcul. Sur la figure 5.3, nous avons tracé l'évolution du flux à la paroi en fonction du temps. Le flux est évalué au point de l'interface entre le fluide et le solide situé en  $x_1 = 0.8$  mm. Nous pouvons remarquer que les courbes obtenues avec le schéma totalement explicite EXEX et le schéma semi-implicite IMEX sont confondues. Cependant au niveau du temps de calcul, le schéma EXEX nécessite plus de 11 600 secondes de simulation tandis que le même calcul avec le schéma IMEX ne dure que 381 secondes. Nous avons donc un gain d'un facteur 30 au niveau du temps CPU grâce à

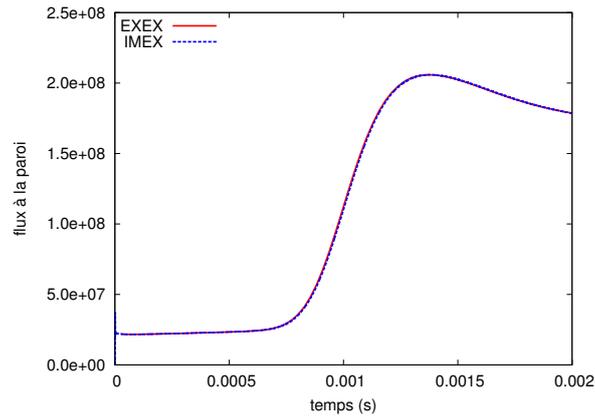


FIGURE 5.3 – Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide : comparaison du flux à la paroi en fonction du temps pour les schéma EXEX et IMEX pour un maillage de  $50 \times 50$  cellules.

l'implication de l'étape acoustique. Dans la suite, nous n'utiliserons que la formulation implicite du schéma.

Sur la figure 5.4, nous avons tracé l'évolution du champ de température et de l'amplitude de la vitesse dans le domaine fluide au cours du temps pour un maillage constitué de  $400 \times 400$  cellules. Dans cette configuration, le fluide est chauffé par la paroi supérieure puis entraîné par adhérence vers la droite du domaine. Le liquide chaud se déplace alors vers le bloc d'aluminium solide guidé par le bord adiabatique droit du domaine. Il apporte un flux de chaleur important à l'interface fluide-solide ce qui enclenche le processus de fusion. Une recirculation à l'intérieur de la phase liquide se forme principalement du côté droit ce qui explique pourquoi la réaction de fusion est préférentiellement accentuée sur la droite du domaine.

La figure 5.6 montre le champ de masse volumique à l'instant  $t = 2. \times 10^{-3}$  s pour différentes équations d'état sur un maillage grossier. La variation spatiale de la masse volumique est due à la répartition du champ de température, il y a un écart de plus 1000 K entre les températures extrêmes. Pour la loi d'état de type Mie Grüneisen, voir figure 5.6(b), la variation relative de la densité est de l'ordre de 10%. Ceci témoigne de la bonne prise en compte du coefficient de dilatation thermique par la loi d'état élaborée par Latige [Lat13]. Avec une équation d'état de type gaz raide, la variation spatiale de densité est de l'ordre de 72%, ce qui confirme que la dilatation thermique dans le liquide est amplifiée.

#### 5.4.2 Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'air

Pour ce dernier cas test, nous considérons la fusion d'un bloc d'aluminium solide par une cavité entraînée remplie d'air. Un mouvement de convection va permettre à l'écoulement gazeux d'apporter un flux de chaleur important à la paroi du solide. Ce flux de chaleur va entraîner la fusion du bloc d'aluminium solide et l'injection d'une phase liquide dans l'écoulement fluide.

Pour ce cas d'ablation liquide, le domaine initial est un rectangle de  $[0, 10]$  mm  $\times$   $[-10, 10]$  mm séparé par la paroi en  $x_2 = 0$ . Comme dans le cas test précédent, la partie fluide est située dans la partie supérieure du domaine, c.-à-d.  $x_2 > 0$ , tandis que le bloc solide correspond au sous-domaine caractérisé par  $x_2 < 0$ . Nous considérons encore une fois que les parois latérales de la cavité sont des parois adiabatiques. La paroi supérieure se déplace à une vitesse d'entraînement de  $u_e = 1$  m.s<sup>-1</sup> dirigée de la gauche vers la droite. Pour accélérer le processus d'ablation, la paroi supérieure est chauffée à une température de 8000 K.

Comme pour le cas précédent, nous supposons que la température à l'intérieur du solide est égale à la température de fusion de l'aluminium  $T = 933$  K. Pour la partie solide nous gardons les mêmes valeurs pour les paramètres physiques : une densité égale à  $\rho_s = 2550$  kg.m<sup>-3</sup>, une conductivité thermique de  $\kappa_s = 208$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et une capacité calorifique égale à  $c_{p,s} = 1240$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

La partie fluide est initialisée avec un écoulement gazeux assimilé à un gaz parfait (2.26) avec  $\gamma = 1.4$  à la pression atmosphérique  $p = 10^5$  Pa et avec une densité initiale égale à  $\rho_g = 0.296$  kg.m<sup>-3</sup>. La viscosité de l'air est prise égale à  $\mu_g = 1.8 \times 10^{-5}$  Pa.s, sa conductivité thermique est fixée à  $\kappa_g = 2 \times 10^{-2}$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. La capacité thermique à volume constant de la phase gazeuse est égale à  $c_{v,g} = 905$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

L'aluminium liquide résultant de la fusion de la partie solide possède une densité égale à  $\rho_l = 2368$  kg.m<sup>-3</sup> pour une température proche du point de fusion et une pression atmosphérique, une viscosité  $\mu_l = 1.235 \times 10^{-3}$  Pa.s, une conductivité thermique égale à  $\kappa_l = 90$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et une capacité thermique prise à  $c_{v,l} = 970$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

Nous avons vu que la loi d'état de type Mie Grüneisen (5.35) permet de retrouver la bonne dilatation thermique dans la phase liquide quand la température varie fortement. Cependant, dans la configuration envisagée, la température de la phase liquide restera proche de la température de fusion. Ainsi, la variation spatiale de la densité dans la phase liquide sera faible. Par ailleurs, pour ce cas test où nous considérons un écoulement diphasique dans le domaine fluide, des mailles de mélange vont apparaître. Dans ces mailles mixtes, la densité de la phase liquide varie énormément et il s'avère que la loi d'état de type Mie Grüneisen (5.35), qui est une linéarisation autour du point de fusion de l'aluminium liquide, possède une plage de validité assez restreinte. Nous allons donc utiliser la loi d'état de type gaz raide (5.33) qui se trouve être plus robuste pour ce cas test. Pour limiter la diffusion numérique de l'interface entre la phase gazeuse et le liquide résultant de la fusion, nous utilisons le schéma antidiffusif sur la fraction volumique [KL10] dans l'étape de transport.

Pour la simulation numérique, nous avons utilisé un maillage composé de  $300 \times 300$  cellules. Pour diminuer le temps de calcul, nous utilisons 100 processeurs en parallèle de telle sorte que chaque processeur calcule un bloc de taille  $30 \times 30$  cellules. Pour de tels maillages, et dans le cas où les trois phases (solide, liquide et gaz) sont présentes, le schéma explicite n'est pas viable. En effet, le pas de temps explicite (limité par les termes de diffusion) est de l'ordre de  $\Delta t_{EXEX} \sim 2 \times 10^{-11}$  s. Avec le schéma semi-implicite IMEX, la contrainte de pas de temps liée à la vitesse matérielle est de l'ordre de  $\Delta t_{IMEX} \sim 10^{-6}$  s. Nous avons donc un facteur 50 000 entre le schéma semi-implicite IMEX et le schéma totalement explicite EXEX. La correction bas Mach présentée au chapitre 4 est utilisée dans ce calcul pour tenir compte du caractère incompressible de la phase liquide.

L'évolution de la fraction volumique de liquide, de la température, du champ de vitesse ainsi que la déformation du maillage à différents instants sont représentés sur les figures 5.7 et 5.8. L'air est chauffé par la paroi supérieure puis entraîné vers la droite. Une recirculation se crée au centre du domaine ce qui va permettre à l'écoulement gazeux d'apporter un flux de chaleur important au bloc solide situé en dessous. Cet apport d'énergie fait fondre le solide. La phase liquide, représentée par la couleur rouge sur la colonne de gauche sur les figures 5.7 et 5.8, est alors injectée dans l'écoulement gazeux. La diffusion numérique de l'interface entre les deux phases fluides (liquide et gaz) est limitée grâce à l'utilisation du schéma antidiffusif sur la fraction volumique [KL10] dans l'étape de transport. Nous pouvons remarquer que l'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse dans l'écoulement diphasique reste horizontale.

Le schéma semi-implicite avec la prise en compte des termes de diffusion développé dans cette thèse est assez robuste pour traiter des configurations impliquant un écoulement diphasique avec de forts rapports de densité entre les deux phases et une partie solide. La parallélisation du code

a permis d'utiliser des maillages raffinés tout en limitant l'impact sur le temps de calcul.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de couplage entre un écoulement fluide diphasique et un solide pour la simulation de la fusion d'un matériau métallique. Les bilans de masse et d'énergie ont permis de déterminer le flux de masse, la vitesse de récession ainsi que la vitesse d'injection de liquide à la paroi. Une formulation ALE des équations a été présentée pour tenir compte du déplacement du maillage dans la résolution numérique. Une analyse dimensionnelle des différents temps caractéristiques nous a permis de conclure que, contrairement au cas d'ablation classique où l'on cherche à obtenir un écoulement stationnaire dans le fluide, les deux domaines fluide et solide doivent être traités en instationnaire pour simuler le phénomène d'ablation liquide. Le dernier cas test suggère que les méthodes numériques développées durant cette thèse sont capables de simuler efficacement des configurations triphasiques où un écoulement diphasique est couplé avec la fusion d'un solide.

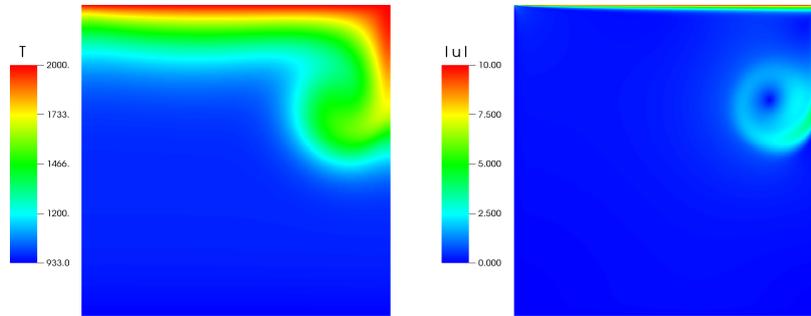
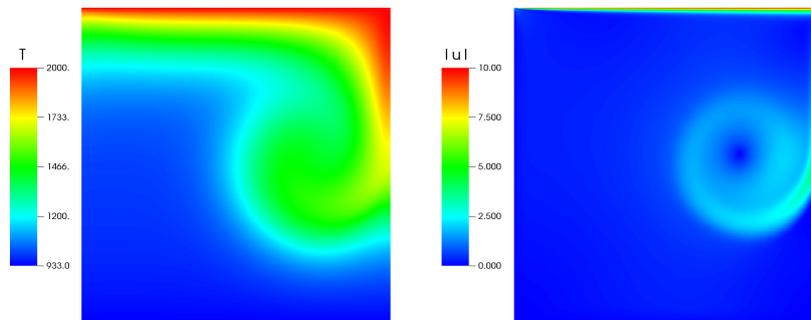
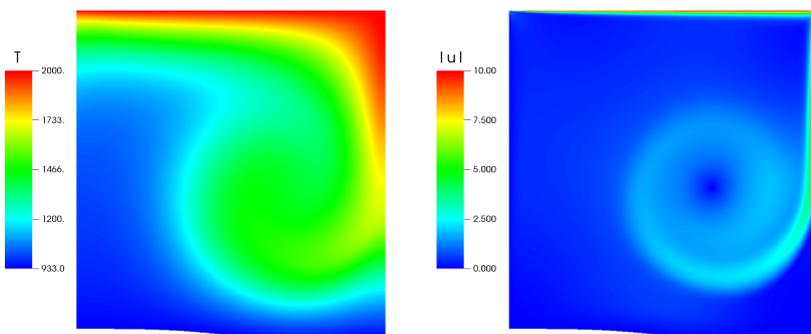
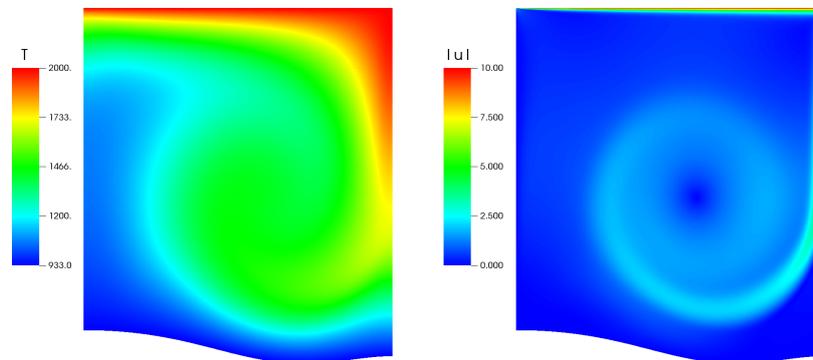
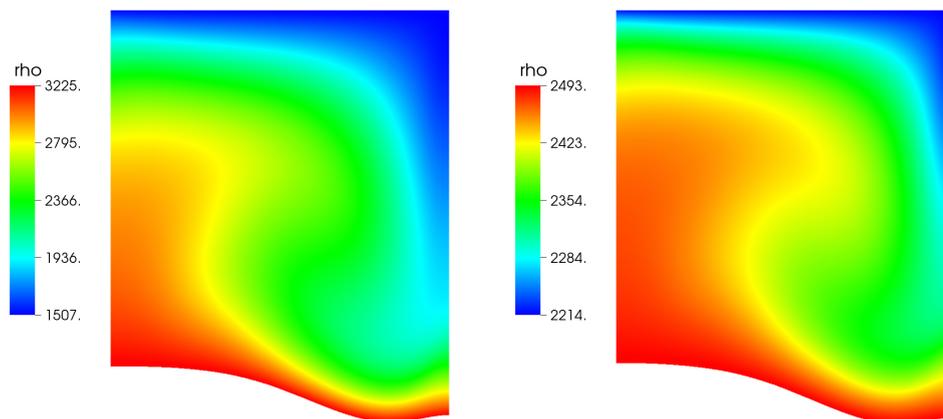
(a)  $t = 5 \times 10^{-4}$  s(b)  $t = 1 \times 10^{-3}$  s(c)  $t = 1.5 \times 10^{-3}$  s

FIGURE 5.4 – Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide : évolution de l'interface, du champ de température et de l'amplitude de la vitesse dans le domaine fluide pour quatre temps différents  $5 \times 10^{-4}$  s,  $1 \times 10^{-3}$  s,  $1.5 \times 10^{-3}$  s et  $2 \times 10^{-3}$  s pour un maillage de  $400 \times 400$  cellules.



(d)  $t = 2 \times 10^{-3}$  s

FIGURE 5.5 – Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'aluminium liquide : évolution de l'interface, du champ de température et de l'amplitude de la vitesse dans le domaine fluide pour quatre temps différents  $5 \times 10^{-4}$  s,  $1 \times 10^{-3}$  s,  $1.5 \times 10^{-3}$  s et  $2 \times 10^{-3}$  s pour un maillage de  $400 \times 400$  cellules (suite).



(a) Équation d'état de type gaz raide

(b) Équation d'état de type Mie Grüneisen

FIGURE 5.6 – Champs de masse volumique dans le domaine fluide à l'instant  $2 \times 10^{-3}$  s pour les lois d'état de type gaz raide (5.33) et Mie Grüneisen (5.35) pour un maillage composé de  $50 \times 50$  cellules.

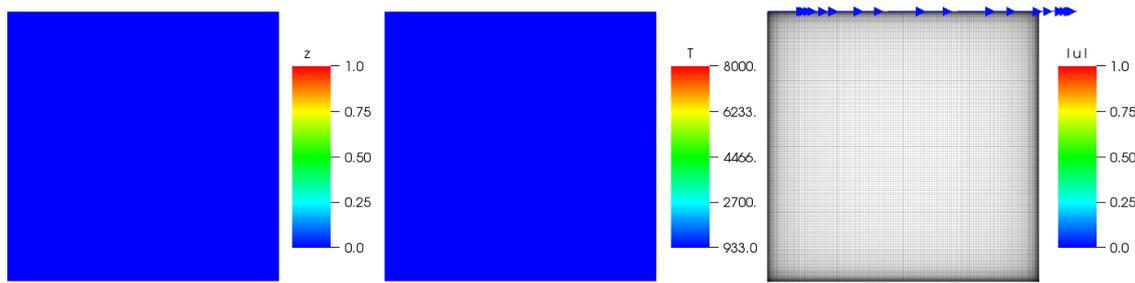
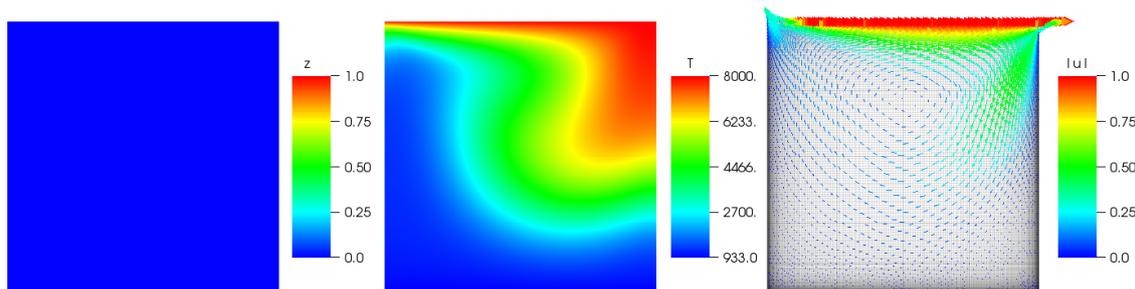
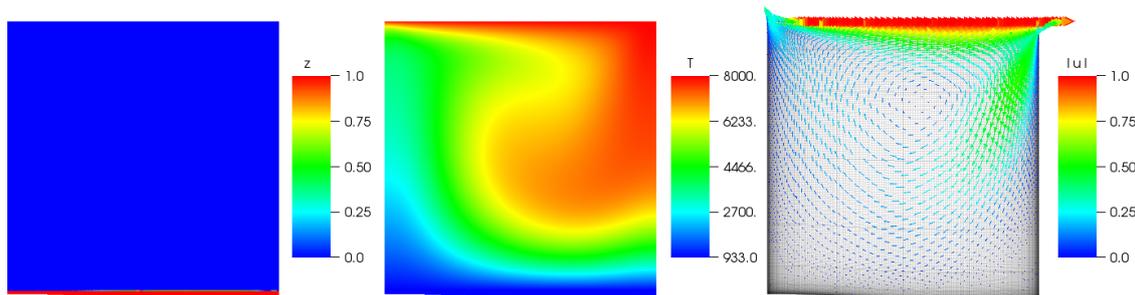
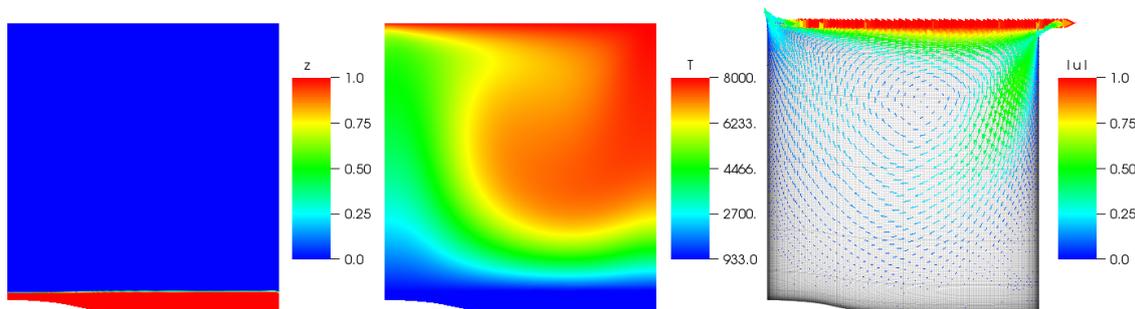
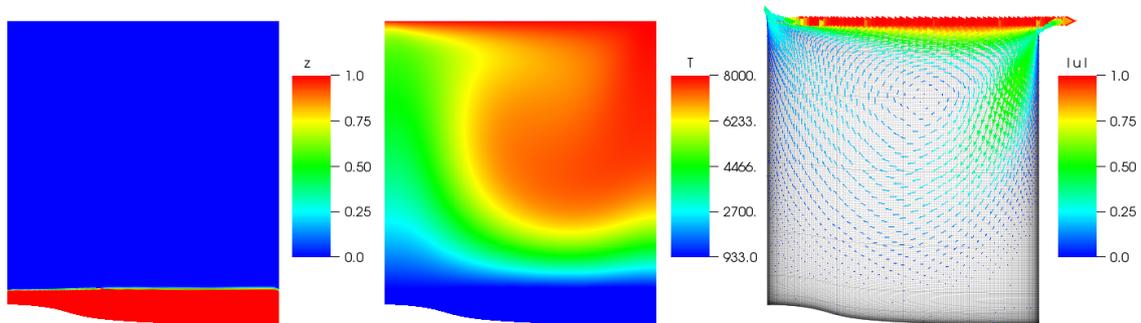
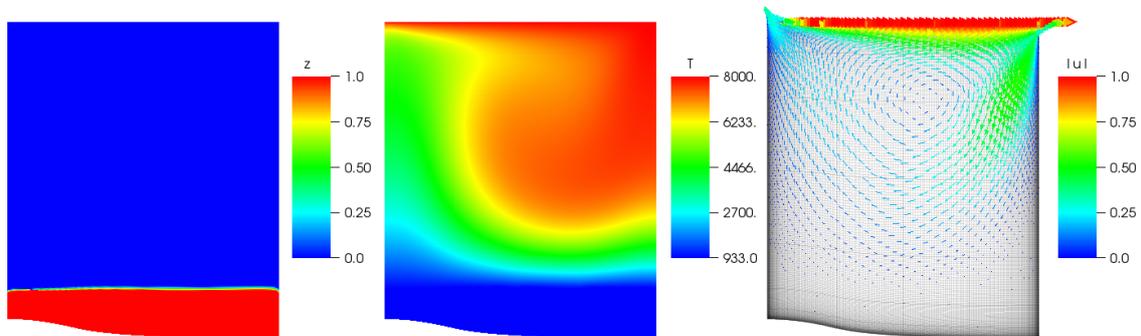
(a)  $t = 0$  s(b)  $t = 0.053$  s(c)  $t = 0.15$  s(d)  $t = 0.25$  s

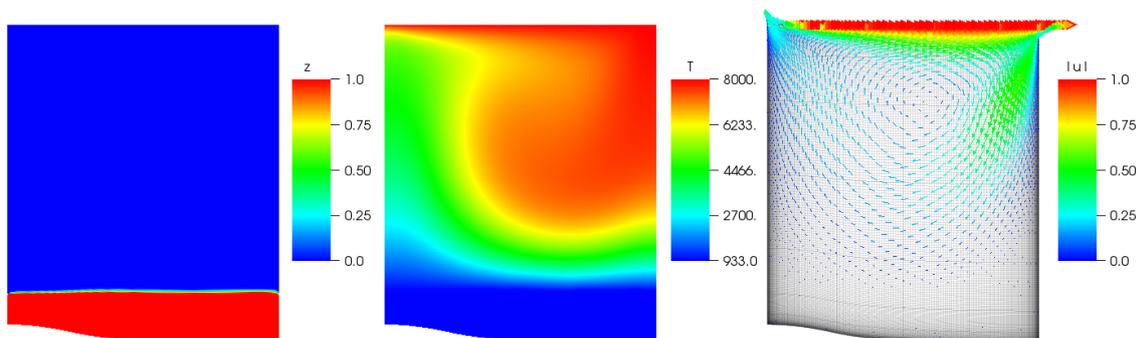
FIGURE 5.7 – Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'air : évolution de la fraction volumique de liquide (à gauche), de la température (au milieu) et du champ de vitesse ainsi que le maillage (à droite) pour le domaine fluide à différents instants.



(e)  $t = 0.347$  s



(f)  $t = 0.445$  s



(g)  $t = 0.5$  s

FIGURE 5.8 – Simulation de la fusion d'un bloc d'aluminium par une cavité entraînée remplie d'air : évolution de la fraction volumique de liquide (à gauche), de la température (au milieu) et du champ de vitesse ainsi que le maillage (à droite) pour le domaine fluide à différents instants (suite).



## Chapitre 6

# Écoulements supersoniques : phénomène de *carbuncle*

### Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>6.1 Utilisation des schémas directs pour les écoulements supersoniques et suppression du phénomène de <i>carbuncle</i></b> . . . . . | <b>155</b> |
| 6.1.1 Présentation du schéma HLL . . . . .  | 157        |
| 6.1.2 Présentation du schéma EUCCLHYD . . . . .   | 159        |
| <b>6.2 Résultats numériques</b> . . . . .   | <b>161</b> |
| 6.2.1 Écoulement à Mach 10 autour d'une sphère . . . . .  | 161        |
| 6.2.2 Interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15 . . . . .   | 161        |
| <b>6.3 Conclusion</b> . . . . .   | <b>162</b> |

---

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement des schémas du type Lagrange-Transport pour des écoulements supersoniques. Nous verrons que pour ce type d'écoulement, nous sommes confrontés au phénomène de *carbuncle*. Dans un premier temps, nous allons rappeler le comportement des schémas directs, c'est-à-dire sans splitting, vis-à-vis du phénomène de *carbuncle*. Nous présenterons ensuite des corrections classiques pour contrer l'apparition de ce phénomène, que nous appliquerons ensuite sur nos schémas utilisant une décomposition d'opérateurs.

## 6.1 Utilisation des schémas directs pour les écoulements supersoniques et suppression du phénomène de *carbuncle*

Les méthodes de capture de choc (*shock-capturing methods* en anglais) sont maintenant très utilisées pour calculer des écoulements supersoniques ou hypersoniques. Ces méthodes sont généralement basées sur des solveurs de Riemann approchés. Cependant, ce type de schéma conduit à des solutions anormales et présente des instabilités numériques au niveau des chocs pour des écoulements à très grandes vitesses comme cela a pu être observé par Peery et Imlay [PI88]. Par la suite, Quirk [Qui94] a recensé les principaux défauts des solveurs de Riemann approchés parmi lesquels figurent ces instabilités numériques au niveau du choc connues sous le nom de *carbuncle*. Ce phénomène représenté sur la figure 6.1(b) engendre une perturbation dans la zone du choc détaché au niveau de l'axe et entraîne une perte de symétrie de la solution numérique. De très nombreuses publications traitent de ce phénomène de *carbuncle* en proposant de possibles corrections [IRN06, NK08, SYY16, Rod17] ou au travers d'analyses de stabilité [CMG05, SYY16, AS17] pour déterminer l'origine du phénomène. Avant de poursuivre et de détailler les principales méthodes pour supprimer le *carbuncle*, notons que ce phénomène n'est pas limité aux solveurs

résolvant les équations d'Euler et peut apparaître dans des solutions visqueuses [PD01] sur un maillage raffiné en proche paroi.

La méthode la plus populaire pour résoudre le problème numérique lié à l'apparition du *carbuncle* consiste à utiliser un schéma numérique plus dissipatif dans l'ensemble du domaine de calcul ou localement via une méthode d'hybridation. En effet, Quirk [Qui94] remarque que le phénomène de *carbuncle* apparaît avec les schémas qui résolvent exactement la discontinuité de contact. Ce type de solveurs tels que le schéma de Roe [Roe81] ou HLLC [Tor97] donne une excellente résolution de l'écoulement mais le *carbuncle* peut apparaître dans la zone du choc. *A contrario*, les schémas plus dissipatifs comme HLL [HLL83] ou HLLC [Ein88] ne présentent pas ce problème mais sont trop dissipatifs pour être utilisés dans le reste du domaine. Sur la figure 6.1, issue de [CMG05], représentant les isovaleurs de la densité pour un écoulement à Mach 10 autour d'une sphère, nous pouvons remarquer que le schéma direct très dissipatif HLL ne présente pas de problème au niveau du choc. Au contraire, l'utilisation du schéma de Roe, résolvant exactement la discontinuité de contact, fait apparaître des instabilités au niveau du choc détaché. Une solution pour remédier au phénomène de *carbuncle* consisterait donc à utiliser une combinaison de ces deux types de schéma [NK08, SYY16, Rod17] pour rajouter de la dissipation dans le schéma numérique au niveau du choc.

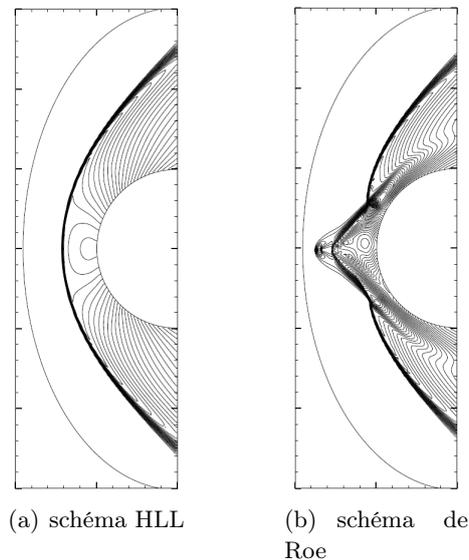


FIGURE 6.1 – Écoulement à Mach 10 autour d'une sphère : isovaleurs de la densité pour différents schémas directs. Images tirées de [CMG05].

Par ailleurs, pour résoudre les équations d'Euler bidimensionnelles, la majorité des schémas classiques s'appuie sur un solveur de Riemann approché unidimensionnel à chaque interface. Cependant, il semble que le phénomène de *carbuncle* soit un mécanisme vraiment bidimensionnel. En effet, Dumbser et al. [DMG04] remarque que les instabilités sont liées à la valeur propre correspondante à la vorticité. Cette onde de vorticité n'existant que dans le cas bidimensionnel, cela indique que le *carbuncle* est un mécanisme réellement 2D. Une deuxième possibilité présentée dans la littérature pour supprimer le phénomène de *carbuncle* consiste donc à utiliser un schéma vraiment multidimensionnel tel qu'un solveur de Riemann pivot  (*rotated Riemann solver* en anglais) [Ren03, NK08] ou un solveur de Riemann approché vraiment bidimensionnel [SYY14, CHRZ17].

Dans notre approche utilisant une décomposition d'opérateurs, nous allons étudier les deux principaux types de correction pour le phénomène de *carbuncle*. Pour cela, nous allons remplacer le schéma développé dans la section 3.1.1 du chapitre 3 pour l'étape acoustique par le schéma HLL

qui est très dissipatif ou par un schéma vraiment multidimensionnel : EUCCLHYD [MAB07, Mai09].

Par souci de simplicité, nous ne considérerons pas les termes de dissipation dans la suite de ce chapitre. Rappelons que le système acoustique pour le modèle à cinq équations réduit est donné par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0, \\ \partial_t (\rho y) + \rho y \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p & = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \rho E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t z & = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Comme dans le chapitre 3, le système précédent est réécrit sous une autre forme qui nous permettra de construire des schémas numériques pour l'étape acoustique. Ainsi, nous récrivons le système de l'étape acoustique sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta - \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0, \\ \partial_t y & = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \vartheta \nabla p & = 0, \\ \partial_t E + \vartheta \nabla \cdot (p \mathbf{u}) & = 0, \\ \partial_t (\vartheta z) - z \vartheta \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

En combinant la dernière équation et l'équation sur le volume spécifique  $\vartheta = \frac{1}{\rho}$ , nous remarquons que les fractions volumique  $z$  et massique  $y$  ne sont pas modifiées par l'étape acoustique. Par conséquent, nous considérons uniquement le système suivant

$$\partial_t \mathbf{V} + \vartheta \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0, \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{V} = (\vartheta, \mathbf{u}, E)^T$  et  $\mathbf{G} = (-\mathbf{u}, p\mathbf{1}_d, p\mathbf{u})^T$ .

Dans la suite, nous rappelons les schémas HLL et EUCCLHYD que nous souhaitons utiliser dans l'étape acoustique pour discrétiser le système (6.3).

### 6.1.1 Présentation du schéma HLL

Par souci de simplicité, nous présentons la formulation unidimensionnelle du schéma. La résolution des équations bidimensionnelles s'appuie sur une résolution 1D à chaque interface du maillage comme pour le schéma présenté dans le chapitre 3, voir section 3.1.1.5. Le schéma HLL [HLL83] développé par Harten, Lax et van Leer est un schéma de type Godunov. L'idée de base est de considérer que la solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes. Le solveur de Riemann approché associé à ce schéma est représenté sur la figure 6.2. Notons qu'avec ce schéma la discontinuité de contact ne peut être capturée. Nous n'utiliserons donc ce schéma que dans des configurations monophasiques.

Pour déterminer la forme de l'état intermédiaire, nous utilisons le fait que le solveur de Riemann simple est de type Godunov. Ainsi, nous avons

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{V}_g) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (\mathbf{V}_{j+1} - \mathbf{V}_j), \quad (6.4)$$

où  $\lambda_j$  sont les vitesses des  $m$  interfaces (avec  $m = 2$  ici) entre les états intermédiaires  $\mathbf{V}_j$  du solveur de Riemann simple. Dans la suite, nous considérerons que les deux pentes du solveur de

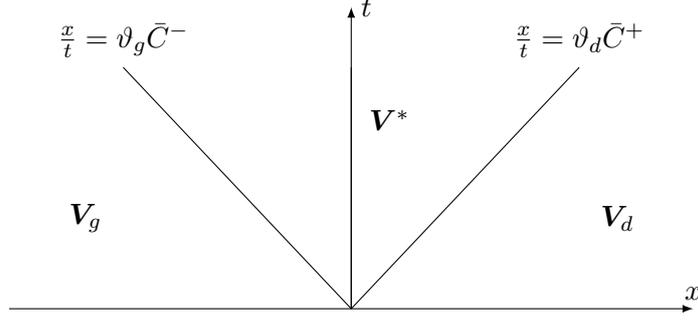


FIGURE 6.2 – Structure du solveur de Riemann pour le schéma HLL.

Riemann sont égales  $\bar{C}^- = \bar{C}^+ = \bar{C}$ . La relation précédente nous permet de déterminer la forme de l'état intermédiaire

$$\mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}_g + \mathbf{V}_d}{2} - \frac{\mathbf{G}(\mathbf{V}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{V}_g)}{2\bar{C}}. \quad (6.5)$$

Le flux numérique associé est alors donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}(\mathbf{V}_g) + \mathbf{G}(\mathbf{V}_d) - \sum_{j=1}^m |\lambda_j| (\mathbf{V}_{j+1} - \mathbf{V}_j) \right) \\ &= \frac{\mathbf{G}(\mathbf{V}_g) + \mathbf{G}(\mathbf{V}_d)}{2} - \bar{C} \frac{\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_g}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'utilisation du schéma HLL dans l'étape acoustique donne

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( H_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} - H_{i-\frac{1}{2}}^{(1)} \right), \\ u_i^\dagger &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( H_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} - H_{i-\frac{1}{2}}^{(2)} \right), \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \vartheta_i^n \left( H_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} - H_{i-\frac{1}{2}}^{(3)} \right), \end{aligned}$$

avec le flux numérique

$$\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{u_{i+1} + u_i}{2} - \bar{C}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{2} \\ \frac{p_{i+1} + p_i}{2} - \bar{C}_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \\ \frac{p_{i+1} u_{i+1} + p_i u_i}{2} - \bar{C}_{i+\frac{1}{2}} \frac{E_{i+1} - E_i}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

D'après la proposition 12 du chapitre 3, la vitesse d'interface  $u$  utilisée dans l'étape de transport doit être égale à l'opposée de la première composante du flux numérique pour assurer le caractère conservatif du schéma global. Ainsi, nous choisissons de prendre la vitesse

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -H_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2} + \bar{C}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{2}, \quad (6.7)$$

dans l'étape de transport

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \frac{\Delta t}{\Delta x} \phi_i^\dagger \left( u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}^\dagger - u_{i-\frac{1}{2}} \phi_{i-\frac{1}{2}}^\dagger \right), \quad (6.8)$$

où  $\phi$  peut représenter  $\rho, \rho y, \rho u, \rho E$  ou  $z$ .

### 6.1.2 Présentation du schéma EUCCLHYD

Un autre choix possible pour le schéma de l'étape acoustique consiste à utiliser le schéma Lagrangien EUCCLHYD (*Explicit Unstructured Cell-Centered Lagrangian HYDrodynamics*) développé par Maire et al. dans [MABO07, Mai09] pour la dynamique des gaz. Dans la suite, nous ne donnerons que les éléments principaux du schéma et nous renvoyons à [MABO07, Mai09] pour une présentation plus complète. Pour le schéma EUCCLHYD, le calcul de flux est basé sur l'utilisation d'un solveur nodal. En effet, le flux numérique sur la face  $\Gamma_{ij} = [A, B]$  pour la cellule  $\Omega_i$  est défini par

$$\mathbf{H}_{ij} = (-\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}, p_{ij} \mathbf{n}_{ij}, (p\mathbf{u})_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij})^T, \quad (6.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B), \\ p_{ij} &= \frac{1}{2}(p_i^A + p_i^{\bar{B}}), \\ (p\mathbf{u})_{ij} &= \frac{1}{2}(p_i^A \mathbf{u}_A + p_i^{\bar{B}} \mathbf{u}_B), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}^A$  et  $\mathbf{u}^B$  sont des vitesses nodales et  $p_i^A$  et  $p_i^{\bar{B}}$  des pressions nodales, voir figure 6.3. Nous pouvons directement remarquer que contrairement au schéma présenté dans le chapitre 3, le flux numérique associé à l'équation d'énergie  $(p\mathbf{u})_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}$  n'est pas égal à l'opposé du produit des flux numériques associés aux équations de volume spécifique et de la vitesse. Par ailleurs, notons que les pressions  $p_{ij}$  et  $p_{ji}$  ne sont pas égales dans ce schéma. Ainsi, pour une face  $\Gamma_{ij}$ , le flux du côté de la cellule  $\Omega_i$  ne sera pas égal au flux du côté de la cellule voisine  $\Omega_j$ . Néanmoins, le schéma EUCCLHYD est globalement conservatif.

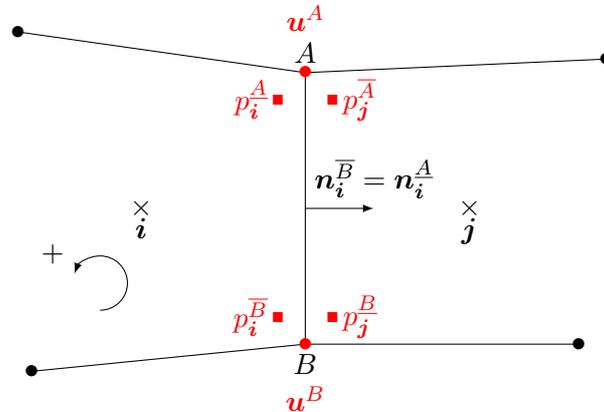


FIGURE 6.3 – Schéma EUCCLHYD : notations concernant les vitesses et pressions nodales pour la face  $\Gamma_{ij}$ .

Les vitesses et les pressions sur la face  $\Gamma_{ij}$  sont définies via des vitesses nodales  $\mathbf{u}^A$  et  $\mathbf{u}^B$  et des pressions nodales  $p_i^A$  et  $p_i^{\bar{B}}$ . L'évaluation de ces quantités repose sur des arguments de conservation. Les pressions nodales sont calculées à partir des vitesses nodales grâce à des demi problèmes de Riemann :

$$\begin{aligned} p_i - p_i^{\bar{A}} &= \rho_i c_i (\mathbf{u}^A - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i^{\bar{A}}, \\ p_i - p_i^A &= \rho_i c_i (\mathbf{u}^A - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i^A. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Les normales  $\mathbf{n}_i^{\bar{A}}$  et  $\mathbf{n}_i^A$  qui apparaissent dans le calcul des pressions nodales sont les normales des arêtes de la cellule  $\Omega_i$  contenant le point  $A$ , voir figure 6.4.

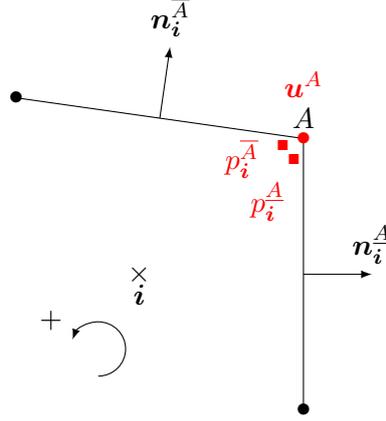


FIGURE 6.4 – Schéma EUCCLHYD : position des pressions nodales calculées à partir des demi problèmes de Riemann pour un point  $A$  vu de la cellule  $\Omega_i$ .

La construction du solveur nodal permettant de calculer les vitesses nodales repose sur un argument de conservation de la quantité de mouvement et d'énergie autour du nœud considéré. En notant  $\mathcal{C}(A)$  l'ensemble des cellules contenant le sommet  $A$ , le solveur nodal d'EUCCLHYD s'exprime

$$\mathbf{M}^A \mathbf{u}^A = \sum_{j \in \mathcal{C}(A)} ((\mathbf{n}|\Gamma|)_j^A p_j + \mathbf{M}_j^A \mathbf{u}_j), \quad (6.11)$$

où  $(\mathbf{n}|\Gamma|)_i^A = \mathbf{n}_i^{\bar{A}} |\Gamma_i|^{\bar{A}} + \mathbf{n}_i^A |\Gamma_i|^A$  est la normale de coin relative au point  $A$  et la matrice  $\mathbf{M}_i^A = \rho_i c_i \left( |\Gamma_i|^{\bar{A}} \mathbf{n}_i^{\bar{A}} \otimes \mathbf{n}_i^{\bar{A}} + |\Gamma_i|^A \mathbf{n}_i^A \otimes \mathbf{n}_i^A \right)$  est une matrice  $2 \times 2$  symétrique définie positive. La matrice  $\mathbf{M}^A = \sum_{j \in \mathcal{C}(A)} \mathbf{M}_j^A$  est symétrique définie positive par construction. Elle est donc bien inversible, ce qui permet de calculer les vitesses nodales en inversant la relation (6.11).

Dans la mesure où la vitesse nodale  $\mathbf{u}^A$  dépend de toutes les cellules autour du point  $A$ , le schéma ainsi obtenu est basé sur un stencil à neuf points pour des maillages structurés bidimensionnels.

Finalement, si le schéma EUCCLHYD est utilisé dans l'étape acoustique, les équations d'évolution pour les variables lagrangiennes s'écrivent

$$\begin{aligned} \vartheta_i^\dagger &= \vartheta_i^n + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| H_{ij}^{(1)}, \\ \mathbf{u}_i^\dagger &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| H_{ij}^{(2)}, \\ E_i^\dagger &= E_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \vartheta_i^n \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| H_{ij}^{(3)}, \end{aligned}$$

où le flux numérique est donné par les relations (6.9) avec les vitesses nodales (6.11) et les pressions nodales (6.10)

Comme pour le schéma HLL, si nous voulons utiliser le schéma EUCCLHYD dans la phase acoustique, nous devons adapter la vitesse  $\mathbf{u}_{ij}$  dans le schéma de l'étape de transport

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^\dagger + \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \phi_i^\dagger \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{u}_{ij} \phi_{ij}^\dagger, \quad (6.12)$$

en prenant  $\mathbf{u}_{ij}$  égal à l'opposé de la première composante du flux numérique  $\mathbf{H}_{ij}$  (6.9).

## 6.2 Résultats numériques

### 6.2.1 Écoulement à Mach 10 autour d'une sphère

Pour ce premier cas test hypersonique, nous étudions le cas test classique d'un écoulement gazeux à Mach 10 autour d'un cylindre. Le rayon du cylindre est égal à 1 m. Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage structuré comportant  $100 \times 200$  mailles. L'écoulement amont est modélisé par un gaz parfait où  $\gamma = 1.4$ , avec une pression  $p = 1$  Pa et une densité  $\rho = 1.4 \text{ kg.m}^{-3}$ . Nous prenons une vitesse  $\mathbf{u} = (10, 0) \text{ m.s}^{-1}$  pour l'écoulement amont, ce qui correspond bien à un nombre de Mach égal à 10. Pour trouver la solution stationnaire de l'écoulement, la version explicite des schémas est utilisée.

L'objectif de ce cas test est d'étudier le comportement du schéma présenté dans le chapitre 3 et basé sur une méthode Lagrange-Projection sur un cas test hypersonique. Sur la figure 6.5(a), nous pouvons remarquer que des instabilités apparaissent au niveau du point d'arrêt et que la solution n'est plus symétrique.

Habituellement, ces simulations hypersoniques sont réalisées à l'aide de schémas volumes finis directs en formulation eulérienne. Comme expliqué au début de ce chapitre, une correction possible pour le phénomène de *carbuncle* consiste à utiliser un schéma très dissipatif, comme le schéma HLL [HLL83]. En effet, ce schéma est très robuste pour calculer des écoulements supersoniques ou hypersoniques avec des chocs détachés mais possède l'inconvénient de trop dissiper dans la couche limite. Une autre approche consiste donc à utiliser une combinaison d'un flux classique avec un flux dissipatif [NK08]. Dans notre approche basée sur une décomposition de type Lagrange-Transport, nous avons remplacé le schéma de l'étape acoustique par le schéma HLL. Nous pouvons voir que les isovaleurs de la densité tracées sur la figure 6.5(b) ne sont pas symétriques. Contrairement à la formulation Euler direct, l'ajout de dissipation dans le schéma numérique ne permet pas de résoudre le phénomène de *carbuncle*. En utilisant le schéma HLLC [Tor97] ou le solveur de chocs dans l'étape acoustique, nous obtenons des résultats similaires, à savoir une perte de symétrie de la solution et des instabilités numériques au niveau du choc. Ainsi, dans l'approche Lagrange-Transport, il semble donc que le phénomène de *carbuncle* apparaisse avec tous les schémas basés sur un stencil à cinq points aussi dissipatifs soient-ils.

Cependant, si nous utilisons le schéma vraiment multidimensionnel EUCCLHYD pour l'étape acoustique, la solution obtenue est de bien meilleure qualité, voir figure 6.5(c). La solution ne présente aucune perturbation et est parfaitement symétrique. Des résultats similaires ont été présentés dans [SYY14], où l'utilisation d'un schéma eulérien à neuf points permet d'éliminer le phénomène de *carbuncle*. L'utilisation d'un schéma vraiment multidimensionnel dans l'étape acoustique semble donc offrir une solution pour le phénomène de *carbuncle* pour les schémas basés sur une décomposition de type Lagrange-Transport.

### 6.2.2 Interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15

Finalement, nous considérons un cas test instationnaire diphasique. Nous nous intéressons à l'interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15. Le domaine de calcul est un rectangle de 5 mm de longueur par 6 mm de largeur. Une goutte cylindrique de liquide de rayon  $r = 0.25$  mm est initialement située au point (1, 0) mm. La goutte d'eau est modélisée par une équation d'état de type gaz raide avec les coefficients  $\gamma = 4.4$  et  $\pi = 6.10^8$  Pa. Le liquide est initialement au repos à la pression atmosphérique avec une densité égale à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Une équation de type gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$  est utilisée pour la partie gazeuse. À l'instant initial, la densité du gaz est égale à  $1.293 \text{ kg.m}^{-3}$ , la vitesse de l'écoulement amont  $\mathbf{u} = (5000, 0) \text{ m.s}^{-1}$  et la pression  $p = 10^5$  Pa. Le nombre de Mach correspondant est alors égal à  $M = 15.2$ .

Pour cette simulation, nous avons utilisé un maillage composé de  $500 \times 300$  cellules dans la

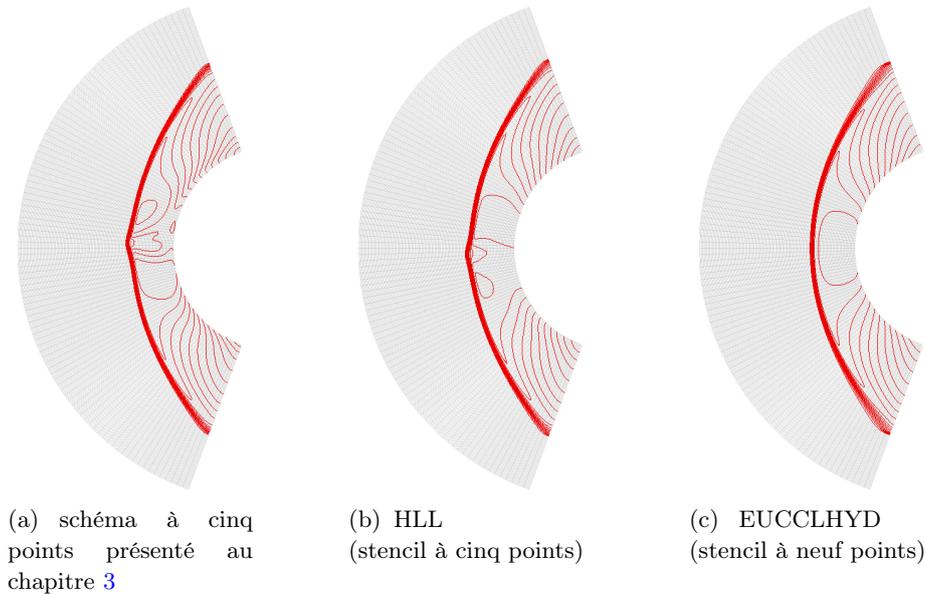


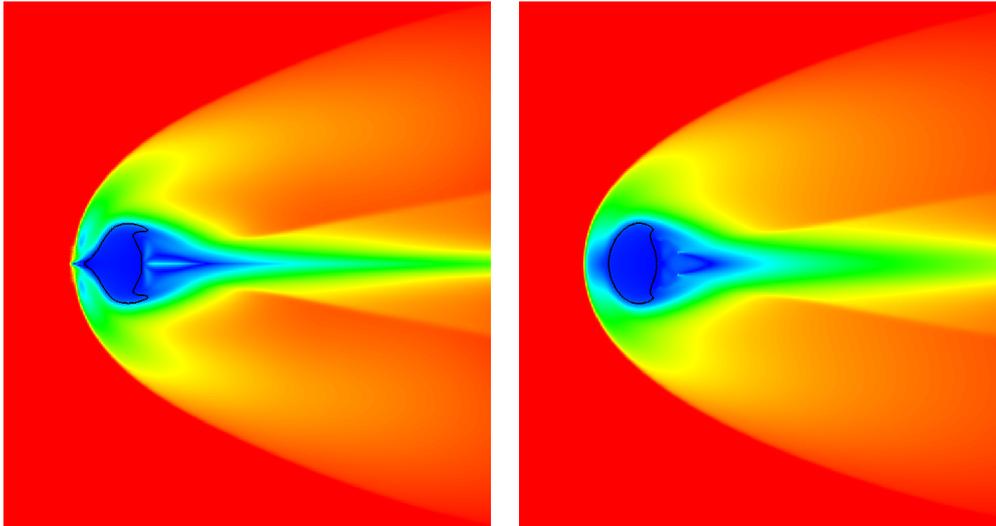
FIGURE 6.5 – Écoulement à Mach 10 autour d'une sphère : isovaleurs de la densité pour différents schémas dans l'étape acoustique : le schéma à 5 points (à gauche), HLL (au milieu) et le schéma EUCCLHYD à 9 points (à droite).

moitié supérieure du domaine. Nous avons imposé une condition de symétrie par rapport à l'axe  $x_2 = 0$ . La version explicite des schémas est utilisée avec une CFL égale à 0.9. Nous voulons comparer l'utilisation du schéma à 5 points pour l'étape acoustique avec le schéma vraiment multidimensionnel EUCCLHYD. Pour l'étape de transport, nous avons utilisé le schéma décentré.

Sur la figure 6.6, nous avons tracé l'amplitude de la vitesse pour les deux schémas de l'étape acoustique au temps  $t = 1.57 \mu\text{s}$ . De plus, la ligne noire sur la figure 6.6 indique l'interface entre la partie gazeuse et le liquide. Nous pouvons voir que la position du choc détaché en amont de la goutte est la même pour les deux solveurs. La position de la goutte est aussi identique mais sa forme est très différente. Les isovaleurs de la vitesse sont tracées sur la figure 6.7, et nous pouvons remarquer que des instabilités semblables au phénomène de *carbuncle* apparaissent sur ce cas test diphasique avec le schéma à cinq points. Ces instabilités semblent perturber l'écoulement gazeux entre la goutte de liquide et le choc détaché. Notons que l'apparente symétrie n'est que la conséquence de la visualisation, puisque le calcul n'a été fait que dans la moitié supérieure du domaine. *A contrario*, avec le schéma EUCCLHYD dans l'étape acoustique, il n'y a pas d'instabilité et l'écoulement n'est pas perturbé entre le choc détaché et la partie liquide. Le schéma basé sur un stencil à neuf points empêche donc l'apparition du phénomène de *carbuncle* même sur ce cas diphasique instationnaire.

## 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude numérique a été menée concernant le comportement des schémas de type Lagrange-Transport pour des écoulements à très grandes vitesses. Nous avons pu remarquer que comme les schémas classiques, c'est-à-dire non splittés, les solveurs de Riemann approchés résolvant exactement la discontinuité de contact capturent une solution non symétrique et présentent des instabilités au niveau du choc. Ce phénomène, appelé *carbuncle* dans la littérature est généralement résolu en augmentant la dissipation numérique du schéma. Cependant, nous avons remarqué que l'utilisation du schéma HLL dans l'étape acoustique du splitting ne permettait pas de supprimer les instabilités. Cela nous amène donc à conjecturer que le phéno-



(a) schéma à cinq points présenté au chapitre 3      (b) schéma à neuf points EUCCLHYD

FIGURE 6.6 – Interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15 : amplitude de la vitesse pour les deux schémas de l'étape acoustique après  $1.57 \mu s$ . La ligne noire représente l'interface entre le gaz et le liquide.

mène de *carbuncle* apparaît avec toutes les méthodes de type Lagrange-Transport utilisant dans l'étape acoustique un schéma basé sur un solveur unidimensionnel à chaque interface. Néanmoins, l'utilisation du schéma numérique réellement bidimensionnel EUCCLHYD dans la phase acoustique a permis de supprimer les instabilités et de retrouver une solution symétrique.

Des instabilités similaires ont également pu être observées sur un cas test diphasique simulant les premiers instants de l'interaction entre une goutte d'eau et un écoulement à Mach 15. Comme pour le cas monophasique, l'utilisation du schéma à neuf points EUCCLHYD dans l'étape acoustique supprime les instabilités au niveau du choc détaché.

Enfin, soulignons le fait que la construction d'une formulation implicite pour le schéma à neuf points EUCCLHYD dans le cadre des schémas de type Lagrange-Transport semble possible. Cependant, la stratégie de *splitting* implicite-explicite n'est pas très utile dans le cas d'écoulement supersonique. En effet, la vitesse matérielle du fluide est très grande, ce qui va induire une contrainte forte sur le pas de temps explicite de l'étape de transport. Cependant, dans le cas de simulations visqueuses nécessitant des maillages raffinés en proche paroi pour capter les phénomènes de couches limites, l'implicitation de l'étape acoustique avec les termes de dissipation peut s'avérer intéressante. L'approche présentée dans les chapitres précédents devrait pouvoir être appliquée au schéma EUCCLHYD sans trop de difficulté et fera l'objet d'un travail ultérieur.

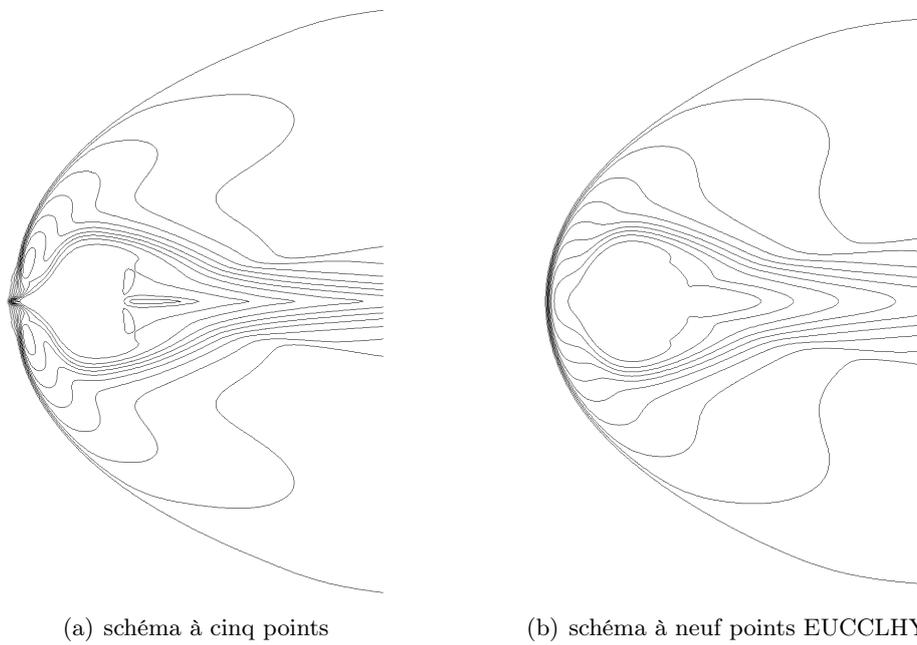


FIGURE 6.7 – Interaction entre une goutte d'eau et un écoulement d'air à Mach 15 : isovaleurs de la vitesse pour les deux schémas de l'étape acoustique après  $1.57 \mu\text{s}$ .

## Chapitre 7

# Conclusion et perspectives

L'objectif des travaux présentés dans cette thèse était de contribuer au développement d'outils de simulation numérique robustes permettant d'étudier et de comprendre les différents mécanismes de l'ablation multiphasique. Dans ce problème, rappelons que nous sommes en présence de trois phases : le bouclier thermique sous forme solide, la phase liquide quasi-incompressible issue de la fusion de la résine et l'écoulement gazeux fortement compressible. Les méthodes numériques développées pour simuler l'écoulement diphasique doivent donc être très robustes, précises, implicites et capables de retrouver à la fois le comportement compressible du gaz et la quasi-incompressibilité du liquide. Enfin, pour simuler le processus de fusion d'un solide, il est nécessaire de développer une stratégie de couplage entre les domaines fluide et solide. Cela implique donc la gestion d'une interface mobile entre les deux domaines et la discrétisation des équations sur un maillage mobile.

Nous avons fait le choix des méthodes à interfaces diffuses pour simuler l'écoulement diphasique. En particulier, nous avons retenu deux modèles diphasiques pour lesquels les deux phases fluides sont à l'équilibre des vitesses et des pressions. Le premier modèle est celui de Kapila [KMB<sup>+</sup>01] qui dérive de modèles diphasiques plus généraux [BN86] et qui permet de traiter de véritables mélanges. Le deuxième modèle retenu est le modèle diphasique à cinq équations réduit [ACK00, ACK02, MSNA02] qui n'est valable que pour des phases non mélangées. Dans l'application visée, les deux fluides (le métal fondu et l'écoulement gazeux) sont très différents et sont supposés non miscibles. Pour de tels écoulements, les solutions continues des deux modèles diphasiques coïncident. Néanmoins, dans le cas des méthodes à interfaces diffuses retenues ici, l'interface matérielle entre les deux fluides va naturellement être diffusée par le schéma numérique. Nous avons donc construit des schémas numériques pour les deux modèles diphasiques dans le but de comparer les solutions numériques sur des configurations non mélangées.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté des schémas numériques pour les modèles diphasiques à cinq équations réduit et celui de Kapila. Ces schémas numériques sont basés sur une décomposition d'opérateurs de type Lagrange-Transport [CGK16, CGK17, CNPT10]. L'idée consiste à séparer les phénomènes acoustiques des phénomènes liés au transport. Nous avons mis au point un solveur de Riemann positif pour l'étape acoustique en s'inspirant des travaux de Gallice [Gal02]. Une formulation implicite du schéma de l'étape acoustique a aussi été développée pour les deux modèles diphasiques. L'étape de transport est quant à elle résolue de façon explicite. Pour limiter la diffusion numérique de l'interface entre les deux fluides, nous avons utilisé les schémas d'antidiffusion de Kokh et Lagoutière [KL10] et une méthode basée sur la projection aléatoire de Glimm [Jun13]. Finalement, les schémas obtenus sont conservatifs et se sont avérés très robustes sur les différentes simulations numériques 1D et 2D que nous avons considérées. Dans le cas où les deux phases fluides sont initialement non mélangées, les solutions obtenues pour les deux modèles diphasiques sont quasiment identiques, et ce malgré l'apparition d'une

---

zone de mélange numérique liée à la diffusion de l'interface. Cela semble donc indiquer que le modèle à cinq équations réduit est suffisant pour ce type de configurations.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté l'extension du modèle diphasique à cinq équations réduit pour prendre en compte les termes de dissipation. La modification du schéma numérique permettant de capturer correctement la limite incompressible quand le nombre de Mach est faible a aussi été présentée. Les termes de diffusion ont été ajoutés à la partie acoustique de notre schéma numérique de type Lagrange-Transport. Nous avons ensuite détaillé la discrétisation des termes de diffusion sur un maillage curviligne et la formulation implicite du schéma. La prise en compte des termes dissipatifs a été validée sur des cas tests académiques. Concernant la modification du schéma numérique pour les écoulements bas Mach, nous avons utilisé la correction proposée par Chalons et al. [CGK16]. Une analyse asymptotique a permis d'étudier le comportement bas Mach du schéma.

Après avoir présenté le schéma numérique pour la partie fluide, nous avons détaillé la stratégie de couplage entre un écoulement fluide diphasique et un solide utilisée pour la simulation de la fusion d'un matériau métallique. Une formulation ALE des équations a été présentée pour tenir compte du déplacement du maillage dans la résolution numérique. Une analyse dimensionnelle des différents temps caractéristiques nous a permis de conclure que les deux domaines fluide et solide doivent être traités de façon instationnaire pour simuler de tels phénomènes.

Finalement, nous avons étudié numériquement le comportement des schémas de type Lagrange-Transport pour des écoulements à très grandes vitesses. Nous avons montré que des instabilités de type *carbuncle* apparaissent avec les schémas de type Lagrange-Transport. Contrairement aux schémas directs, l'utilisation d'un schéma plus dissipatif dans l'étape acoustique n'empêche pas l'apparition de ces instabilités. Nous avons cependant montré que le schéma vraiment bidimensionnel EUCCLHYD [MABO07] permet de supprimer le phénomène de *carbuncle*.

Plusieurs perspectives existent à l'issue de ces travaux. La première concerne l'utilisation d'une méthode de capture d'interface vraiment bidimensionnelle de type *Volume of Fluid* ou *Moment of Fluid* pour l'étape de transport. Cela permettrait de traiter des configurations plus complexes et plus réalistes tout en limitant la diffusion numérique de l'interface.

Au niveau de l'analyse théorique de notre schéma, une question reste en suspens concernant le caractère entropique au niveau discret. Pour les schémas de type Lagrange-Transport utilisant une méthode de relaxation pour gérer les non linéarités dues à la loi d'état, il est possible de trouver une condition d'entropie discrète [CNPT10, CGK16, Ren17], voir aussi [Bou04]. L'obtention d'inégalités d'entropie discrètes semble donc possible pour nos schémas.

Un enrichissement de la physique du modèle peut aussi être envisagé. L'ajout de la tension de surface dans le schéma de type de Lagrange Transport semble possible en suivant les travaux de [PS05]. Finalement, la gestion de l'ablation différentielle d'un matériau composite avec une partie carbonée qui se sublime et une partie métallique qui va fondre reste encore à étudier.

# Annexes



# Annexe A

## Présentation des outils numériques

### A.1 Présentation des notations utilisées

Dans le cas unidimensionnel, nous utiliserons les notations suivantes. Nous considérons une discrétisation de la variable spatiale  $x \in \mathbb{R}$  en cellules  $([x_{i-1/2}, x_{i+1/2}])_{i \in \mathbb{Z}}$ . Les interfaces du maillages sont données par  $x_{i+1/2} = i\Delta x$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ , où  $\Delta x > 0$  est le pas de maillage. Le centre de la cellule  $i$  est quant à lui donné par  $x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2}$ . La variable temporelle est discrétisée par  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\Delta t > 0$  est le pas de temps.

Considérons un système hyperbolique général de la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{U}(t, x)$  est à valeurs dans  $\Omega$  qui est un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . La fonction régulière  $\mathbf{F} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$  est appelée fonction flux.

On supposera que le système possède un couple entropie-flux  $(\eta, q)$ , ce qui signifie qu'il existe une fonction strictement convexe  $\eta(\mathbf{U})$  et un flux d'entropie  $q(\mathbf{U})$  vérifiant la relation  $(\nabla_{\mathbf{U}} \eta(\mathbf{U}))^T \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\nabla_{\mathbf{U}} q)^T$ . On dira qu'une solution  $\mathbf{U}$  est entropique si elle vérifie au sens de distributions l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta + \partial_x q \leq 0. \quad (\text{A.2})$$

La méthode des volumes finis revient à intégrer l'équation (A.1) sur le rectangle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t^{n+1}, x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t^n, x) dx - \left( \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2})) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2})) dt \right).$$

Soit  $\mathbf{U}_i^n$  l'approximation de

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(t^n, x) dx.$$

Cette approximation numérique du système (A.1) est constante sur chaque maille  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  du maillage. En divisant par le pas d'espace, on obtient alors

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}), \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathbf{H}_{i+1/2}$  est une approximation de la moyenne en temps du flux sur l'interface  $x_{i+1/2}$  qui dépend des valeurs de  $\mathbf{U}$  dans les mailles voisines

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \mathbf{H}(\dots, u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n, \dots) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2})) dt.$$

**Définition 8 (Consistance)**

Le flux numérique  $\mathbf{H}$  est consistant avec le flux physique  $\mathbf{F}$  si et seulement si  $\mathbf{H}(u, \dots, u) = \mathbf{F}(u)$ .

**Définition 9 (Schéma entropique)**

Le schéma sera dit entropique (au sens classique du terme), s'il vérifie un équivalent discret de l'inégalité d'entropie (A.2). Autrement dit, si pour tout couple entropie flux  $(\eta, q)$ , il existe un flux numérique  $Q$  consistant avec  $q$  tel que le schéma vérifie l'inégalité d'entropie discrète

$$\eta(\mathbf{U}_i^{n+1}) \leq \eta(\mathbf{U}_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}), \quad (\text{A.4})$$

alors le schéma numérique (A.3) est entropique.

Dans le cas 2D, il est nécessaire d'introduire quelques notations supplémentaires pour décrire un maillage structuré. On considère un maillage de  $\mathbb{R}^2$  constitué de cellules, appelées aussi volumes de contrôle,  $\Omega_{l,m}$ . L'aire de cette cellule sera notée  $|\Omega_{l,m}|$ . On appelle  $\Gamma_{l+1/2,m}$  la face qui sépare les cellules  $\Omega_{l,m}$  et  $\Omega_{l+1,m}$ . Sa longueur sera désignée par  $|\Gamma_{l+1/2,m}|$ . De même, on désignera par  $\Gamma_{l,m+1/2}$  la face séparant deux cellules suivant la deuxième direction du maillage. On appelle  $\mathbf{n}_{l+1/2,m}$  (resp.  $\mathbf{n}_{l,m+1/2}$ ), la normale extérieure (unitaire) à la face  $\Gamma_{l+1/2,m}$  (resp.  $\Gamma_{l,m+1/2}$ ), voir Figure A.1. On note  $v(l, m)$  l'ensemble des indices des faces de la cellule  $\Omega_{l,m}$ . Dans le cas d'un maillage bidimensionnel structuré, nous avons :

$$v(l, m) = \{(l + 1/2, m), (l - 1/2, m), (l, m + 1/2), (l, m - 1/2)\}.$$

Par souci de clarté, nous utiliserons la plupart du temps une notation à un seul indice,  $\mathbf{i} = (l, m)$ , pour les maillages 2D. L'aire d'une cellule  $\Omega_{\mathbf{i}}$  sera donc notée  $|\Omega_{\mathbf{i}}|$  tandis que les quantités définies sur la face entre les cellules  $\Omega_{\mathbf{i}}$  et  $\Omega_{\mathbf{j}}$  seront repérées par l'indice  $\mathbf{ij}$ .

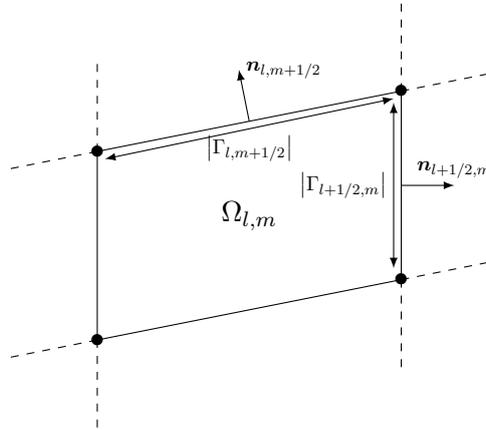


FIGURE A.1 – Notations pour les maillages structurés 2D.

Considérons un système hyperbolique général de la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.5})$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  est encore le vecteur des inconnues et  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  est le vecteur des fonctions de flux. On note  $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^n$  une approximation de la solution exacte du problème (A.5) sur le volume de contrôle  $\Omega_{\mathbf{i}}$  au temps  $t^n$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^n \approx \frac{1}{|\Omega_{\mathbf{i}}|} \int_{\Omega_{\mathbf{i}}} \mathbf{U}(t^n, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

En intégrant sur le domaine  $\Omega_i \times [t^n, t^{n+1}]$  le système (A.5), on obtient le schéma numérique suivant

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j \in v(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{H}_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathbf{H}_{ij}$  est une approximation du flux sur la face  $\Gamma_{ij}$  séparant les cellules  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ . Pour déterminer ce flux numérique, nous nous appuyerons sur une résolution 1D suivant la normale à la face.

Pour résoudre les systèmes hyperboliques 1D de la forme (A.1), nous utilisons les notions de solveurs de Riemann et de schémas de type Godunov [HLL83, Gal02] rappelées ci-dessous.

## A.2 Rappels sur les schémas de type Godunov et les solveurs de Riemann simples

Nous considérons le système hyperbolique conservatif suivant :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

On supposera que le système possède un couple entropie-flux  $(\eta, q)$  tel que

$$\partial_t \eta + \partial_x q \leq 0. \quad (\text{A.8})$$

Pour définir un schéma numérique conservatif pour le système (A.7), il est classique de considérer le problème de Riemann suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) &= 0, \\ \mathbf{U}(t = 0, x) &= \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \text{si } x \leq 0. \\ \mathbf{U}_d, & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{W}$  une approximation du problème de Riemann, et  $(\mathbf{U}_i^n)_i$  une approximation numérique du système (A.7). Nous avons alors la définition suivante.

### Définition 10 (Consistance avec la forme intégrale de la loi de conservation [HLL83])

On dit que  $\mathbf{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$  est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation (A.7) si et seulement si l'égalité suivante est vérifiée pour  $\tau$  suffisamment petit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{W}(x/\tau; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) dx = \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \tau (\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g)). \quad (\text{A.9})$$

### Proposition 18 ([HLL83])

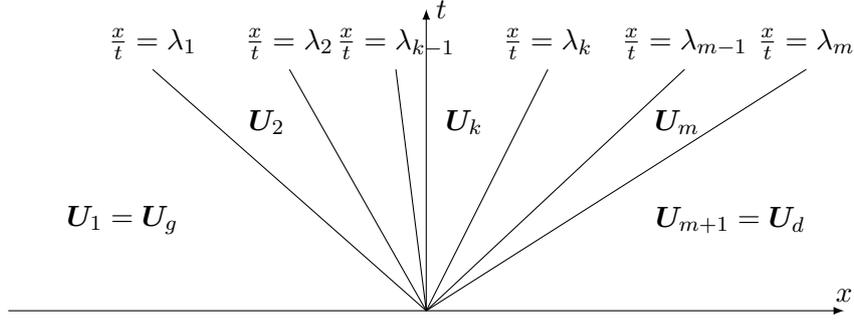
Si l'approximation  $\mathbf{W}$  du problème de Riemann est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation (A.7), alors le schéma défini par

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \mathbf{W} \left( \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_{i-1}^n, \mathbf{V}_i^n \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W} \left( \frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n \right) dx \right), \quad (\text{A.10})$$

est conservatif. Il existe alors un flux numérique  $\mathbf{H}$  tel que le schéma (A.10) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}).$$

Ce schéma est appelé schéma de type Godunov.


FIGURE A.2 – Solvateur de Riemann simple à  $m + 1$  états.

Il est aussi possible de définir la consistance vis-à-vis de l'inégalité d'entropie

**Définition 11 (Consistance avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie [HLL83])**

On dit que  $\mathbf{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$  est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (A.8) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée pour  $\tau$  suffisamment petit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta(\mathbf{W}(x/\tau; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)) \, dx \leq \frac{\Delta x}{2} (\eta(\mathbf{U}_g) + \eta(\mathbf{U}_d)) - \tau (q(\mathbf{U}_d) - q(\mathbf{U}_g)). \quad (\text{A.11})$$

**Proposition 19 ([HLL83])**

Si l'approximation  $\mathbf{W}$  du problème de Riemann est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (A.8), alors le schéma défini par (A.10) est entropique. Ce schéma est alors appelé schéma de type Godunov entropique.

$$\eta_i^{n+1} \leq \eta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}).$$

Dans [Gal00, Gal03], Gallice introduit les solveurs de Riemann simples.

**Définition 12 (Solveur de Riemann simple [Gal00, Gal03])**

On dira que le solveur de Riemann  $\mathbf{W}$  est simple si et seulement si  $\mathbf{W}(x/t)$  a la structure de la solution d'un problème de Riemann linéaire ; *i.e.*  $\mathbf{W}(x/t)$  est constitué de  $(m+1)$  états constants  $(\mathbf{W}_k)_{k=1, m+1}$ , séparés par des discontinuités, avec  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{U}_d$ . Il existe donc des réels  $(\lambda_k)_{k=1, m}$  tels que :

$$\mathbf{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \begin{cases} \mathbf{U}_g & \text{si } x/t < \lambda_1, \\ \mathbf{U}_k & \text{si } \lambda_{k-1} \leq x/t < \lambda_k \text{ pour } k = 2, m, \\ \mathbf{U}_d & \text{si } \lambda_m \leq x/t. \end{cases}$$

Sur la figure A.2, nous avons tracé une représentation schématique d'un solveur de Riemann simple à  $m+1$  états. Notons que les solveurs HLL [HLL83], HLLC [Tor97] et de Roe [Roe81] sont des solveurs de Riemann simples. Cependant les solveurs de Godunov [GP79] et d'Osher [OS82] ne sont pas des solveurs de Riemann simples.

Dans la suite, nous utilisons la notation  $\delta X_k = X_{k+1} - X_k$  pour toute suite  $(X_k)_k$ . Le principal intérêt de cette notion réside dans le fait qu'il est extrêmement facile de caractériser un solveur simple. En effet, Gallice montre le résultat suivant

**Proposition 20 (Gallice [Gal00])**

Un solveur de Riemann simple est de type Godunov si et seulement si :

$$(\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g)) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta \mathbf{U}_k. \quad (\text{A.12})$$

Dans ce cas, le flux est donné par :

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \sum_{k=1}^m |\lambda_k| \delta \mathbf{U}_k \right). \quad (\text{A.13})$$

Un solveur de Riemann simple est de type Godunov entropique si et seulement si :

$$(q(\mathbf{U}_d) - q(\mathbf{U}_g)) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta \eta_k. \quad (\text{A.14})$$

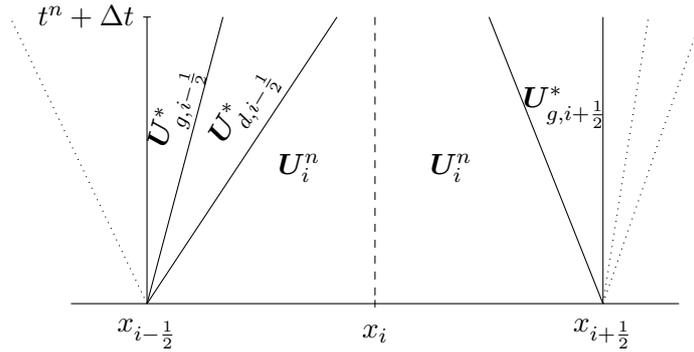


FIGURE A.3 – Schéma de type Godunov associé à un solveur de Riemann simple à quatre états ( $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_g^*$ ,  $\mathbf{U}_d^*$  et  $\mathbf{U}_d$ ).

### A.3 Rappels pour le non conservatif

Considérons maintenant le système non conservatif suivant

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{P}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{B}(\mathbf{U}) = 0, \quad (\text{A.15})$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{F}$  sont encore des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$ . La matrice  $\mathbf{P}$  est de taille  $p \times p$  et  $\mathbf{B}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Gallice [Gal02] étend la notion de solveur de Riemann simple aux systèmes non-conservatifs de la forme (A.15).

#### Définition 13 (Solveur de Riemann simple pour le non conservatif [Gal02])

On dira que  $\mathbf{W}$  est de type Godunov pour le système (A.15) s'il est consistant, *i.e.* si et seulement si il existe une matrice  $\bar{\mathbf{P}}$  telle que  $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U})$  et vérifiant la relation

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \delta \mathbf{U}_k = \Delta \mathbf{F} + \bar{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{B}. \quad (\text{A.16})$$

Dans ce cas, Gallice [Gal02] montre que le schéma numérique induit par la définition précédente s'écrit :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( (\bar{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{B})_{i-1/2} + (\bar{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{B})_{i+1/2} \right). \quad (\text{A.17})$$

où  $\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \sum_{k=1}^m |\lambda_k| \delta \mathbf{U}_k)$ .



## Annexe B

# Preuves des conditions de positivité

Cette annexe donne les détails des calculs pour trouver les conditions de positivité des propositions 8 et 10.

En utilisant la relation  $V_l^* = V_l + \phi_- R_-$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 \vartheta_g^* &= \vartheta_g - \frac{\Delta p - r\bar{C}^- \Delta u}{(1+r)(\bar{C}^-)^2}, \\
 y_g^* &= y_g, \\
 u_g^* &= u_g - \frac{\Delta p - r\bar{C}^- \Delta u}{(1+r)\bar{C}^-}, \\
 E_g^* &= E_g + \frac{\Delta p - r\bar{C}^- \Delta u}{(1+r)(\bar{C}^-)^2} (p_{1-\alpha} - u_\alpha \bar{C}^-), \\
 (\vartheta z)_g^* &= (\vartheta z)_g + \frac{\Delta p - r\bar{C}^- \Delta u}{(1+r)(\bar{C}^-)^2} (\Xi_g - z_g),
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

où  $r = \frac{\bar{C}^+}{\bar{C}^-}$  et  $\alpha = \frac{\bar{C}^-}{\bar{C}^- + \bar{C}^+}$ . Comme précédemment, le terme  $\Xi_g$  est nul dans le cas du modèle à cinq équations réduit et il vaut  $K_g$  pour le modèle de Kapila.

### Positivité du volume spécifique

La première relation de (B.1) conduit directement à l'équation du second degré en  $\bar{C}^-$

$$(1+r)(\bar{C}^-)^2 \vartheta_g^* = (1+r)\vartheta_g (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u \bar{C}^- - \Delta p. \tag{B.2}$$

Étant donné que les pentes et le volume spécifique de l'état gauche  $\vartheta_g$  sont positif, si le discriminant  $d_{\vartheta_g}$  de l'équation du second degré est négatif, le volume spécifique de l'état intermédiaire  $\vartheta_g^*$  sera positif sans aucune restriction sur la pente  $\bar{C}^-$ . Si le discriminant est positif,  $\vartheta_g^*$  sera positif

$$\text{si } \bar{C}^- \geq \frac{-r\Delta u + \sqrt{d_{\vartheta_g}}}{2(1+r)\vartheta_g}.$$

### Positivité de l'énergie interne

En utilisant les relations sur la vitesse et l'énergie totale des états intermédiaires, nous obtenons

$$(\bar{C}^-)^2 \varepsilon_g^* = (\bar{C}^-)^2 \varepsilon_g + \frac{(r\bar{C}^- \Delta u - \Delta p)(r\bar{C}^- \Delta u - \Pi_g)}{2(1+r)^2}, \tag{B.3}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$2(1+r)^2 (\bar{C}^-)^2 \varepsilon_g^* = \left( 2(1+r)^2 \varepsilon_g + r^2 (\Delta u)^2 \right) (\bar{C}^-)^2 - (r\Delta u (\Delta p + \Pi_g)) \bar{C}^- + \Delta p \Pi_g. \tag{B.4}$$

Avec les mêmes arguments que pour le volume spécifique, nous obtenons les conditions de positivité exactes pour l'énergie interne.

### Positivité de $p + \pi$ (modèle à cinq équations réduit)

Pour un mélange de deux gaz raides, l'équation d'état du mélange s'écrit

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon - \gamma\pi. \quad (\text{B.5})$$

Ainsi,

$$(p + \pi)\vartheta = (\gamma - 1)(\varepsilon - \pi\vartheta) = (\gamma - 1)\hat{\varepsilon}. \quad (\text{B.6})$$

Pour démontrer la positivité de  $p + \pi$ , nous pouvons donc chercher des conditions sur la positivité de  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \pi\vartheta$ . En combinant la première et la dernière équation de (B.1), nous remarquons que  $z_g^* = z_g$  pour le modèle à cinq équations réduit. Ainsi, les paramètres du mélange pour l'état intermédiaire gauche  $\gamma_g^*$  and  $\pi_g^*$  sont égaux à  $\gamma_g$  et  $\pi_g$ . À partir des relations (B.2) et (B.3), on a

$$(\bar{C}^-)^2 \hat{\varepsilon}_g^* = (\bar{C}^-)^2 \hat{\varepsilon}_g + \frac{(r\bar{C}^- \Delta u - \Delta p)(r\bar{C}^- \Delta u - \Pi_g)}{2(1+r)^2} + \pi_g \frac{\Delta p - r\bar{C}^- \Delta u}{1+r}. \quad (\text{B.7})$$

Ceci permet de déterminer les conditions de positivité données par la proposition 8.

### Encadrement sur la fraction volumique (modèle de Kapila)

Pour le modèle de Kapila, la fraction volumique  $z$  est modifiée au cours de l'étape acoustique. Nous cherchons donc à déterminer les conditions sur les pentes du solveur de Riemann qui assurent que la fraction volumique reste entre 0 et 1. Puisque nous avons déjà trouvé les conditions de positivité pour le volume spécifique, nous cherchons à avoir  $(\vartheta z)_g^* \in (0, \vartheta_g^*)$ . Tout d'abord nous pouvons remarquer que le terme

$$z^n - K^n = \frac{z^n \rho_2 c_2^2}{(1 - z^n) \rho_1 c_1^2 + z^n \rho_2 c_2^2} = \frac{z^n \tau_1}{z^n \tau_1 + (1 - z^n) \tau_2},$$

est compris entre 0 et 1. Ensuite, en utilisant la dernière équation de (B.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\vartheta z)_g^* &> 0, \\ (1+r) (\vartheta z)_g^n (\bar{C}^-)^2 - r\Delta u (K_g^n - z_g^n) \bar{C}^- + \Delta p (K_g^n - z_g^n) &> 0, \\ (1+r) \vartheta_g^n \left( z_g^n + (1 - z_g^n) \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u \bar{C}^- - \Delta p &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la positivité de la fraction volumique de l'état intermédiaire gauche se traduit aussi par une inégalité quadratique sur la pente  $\bar{C}^-$ . L'étude du signe du polynôme du second degré en  $\bar{C}^-$  permet de trouver la condition pour  $z_g^* > 0$  donnée dans la proposition 10.

De même, en réutilisant la dernière équation de (B.1) et la relation (B.2) nous avons

$$\begin{aligned} (\vartheta z)_g^* &< \vartheta_g^*, \\ (1+r) (\vartheta z)_g^n (\bar{C}^-)^2 - r\Delta u (K_g^n - z_g^n) \bar{C}^- + \Delta p (K_g^n - z_g^n) &< (1+r) \vartheta_g^n (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u \bar{C}^- - \Delta p, \\ (1+r) \vartheta_g^n (1 - z_g^n) (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u (K_g^n - z_g^n + 1) \bar{C}^- - \Delta p (K_g^n - z_g^n + 1) &> 0, \\ (1+r) \vartheta_g^n \left( z_g^n \frac{\tau_1}{\tau_2} + (1 - z_g^n) \right) (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u \bar{C}^- - \Delta p &> 0. \end{aligned}$$

De la même façon, nous pouvons en déduire la condition détaillée dans la proposition 10 pour assurer que la fraction volumique de l'état intermédiaire gauche reste inférieure à 1.

**Remarque 30**

Pour rappel, la condition  $\vartheta_g^* > 0$  est équivalente à

$$(1+r)\vartheta_g^n (\bar{C}^-)^2 + r\Delta u \bar{C}^- - \Delta p > 0.$$

Ainsi si nous avons  $\rho_1 c_1^2 > \rho_2 c_2^2$ , la condition de positivité sur le volume spécifique implique que la fraction volumique est positive. Dans le cas contraire, la condition de positivité sur  $\vartheta_g^*$  implique que la fraction volumique est inférieure à 1.

**Remarque 31**

Les conditions de positivité pour l'état intermédiaire droit sont obtenues de la même façon en utilisant la relation  $\mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+ R_+$ .

---

## Annexe C

# Coefficients de la matrice M

Dans cette annexe, nous détaillons les coefficients de la matrice M utilisée dans la section 3.1.1.3 pour le schéma implicite de l'étape acoustique. Afin d'alléger les formules, introduisons les notations suivantes :

$$\Delta = \frac{\bar{C}^+ - \bar{C}^-}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)^2}, \text{ et } \Pi = \frac{\bar{C}^+ \bar{C}^-}{(\bar{C}^- + \bar{C}^+)^2}.$$

Les coefficients de la troisième ligne des blocs  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  de la matrice globale M sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^{3,1} &= (-\bar{C}^- \Pi)_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} - \Pi_{i-\frac{1}{2}} p_{i-1} - (\bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i}{2} + (\bar{C}^- \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_i}{2}, \\ \mathbf{A}_i^{3,2} &= (-\Pi)_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} - \left( \frac{\Pi}{\bar{C}^-} \right)_{i-\frac{1}{2}} p_{i-1} - (\bar{C}^+ \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i}{2} + \Delta_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_i}{2}, \\ \mathbf{B}_i^{3,1} &= -(\bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_{i-1}}{2} - (\bar{C}^+ \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_{i-1}}{2} + \left( (\bar{C}^+ \Pi)_{i-\frac{1}{2}} + (\bar{C}^- \Pi)_{i+\frac{1}{2}} \right) u_i + \left( -\Pi_{i-\frac{1}{2}} + \Pi_{i+\frac{1}{2}} \right) p_i \\ &\quad + (\bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}}{2} - (\bar{C}^- \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{i+1}}{2}, \\ \mathbf{B}_i^{3,2} &= (\bar{C}^- \Delta)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_{i-1}}{2} + \Delta_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_{i-1}}{2} + \left( -\Pi_{i-\frac{1}{2}} + \Pi_{i+\frac{1}{2}} \right) u_i + \left( \left( \frac{\Pi}{\bar{C}^+} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\Pi}{\bar{C}^-} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right) p_i \\ &\quad + (\bar{C}^+ \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}}{2} - \Delta_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{i+1}}{2}, \\ \mathbf{C}_i^{3,1} &= (\bar{C}^- \bar{C}^+ \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_i}{2} + (\bar{C}^+ \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_i}{2} - (\bar{C}^+ \Pi)_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} + \Pi_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1}, \\ \mathbf{C}_i^{3,2} &= (-\bar{C}^- \Delta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_i}{2} - \Delta_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_i}{2} + \Pi_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} - \left( \frac{\Pi}{\bar{C}^+} \right)_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1}. \end{aligned}$$

---

## Annexe D

# Discrétisation des termes de dissipation sur maillages curvilignes

Pour présenter la discrétisation des termes de dissipation, nous allons considérer l'équation de diffusion de la quantité  $\theta$

$$\partial_t \theta = \nabla_{x,y} \cdot (\lambda \nabla_{x,y} \theta), \quad (\text{D.1})$$

dans le repère  $(x, y)$  curviligne. Dans toute la suite, on note  $\nabla = \nabla_{x,y}$ .

Pour discrétiser le second membre de l'équation (D.1), nous allons utiliser le fait que nous travaillons sur des maillages structurés. Nous considérons la transformation entre le maillage structuré curviligne  $(t, x, y)$  et le maillage structuré cartésien  $(T, X, Y)$  représentée sur la figure D.1. Toutes les mailles du maillage cartésien sont de taille 1. Ici nous supposons que le maillage n'évolue pas au cours du temps, *i.e.*  $T = t$ . En notant  $\mathbf{A}$  la jacobienne de la transformation  $(t, x, y) \mapsto (T, X, Y)$ , et  $\mathbf{A}^{-1}$  la jacobienne de la transformation inverse  $(T, X, Y) \mapsto (t, x, y)$ , nous avons

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X_x & Y_x \\ 0 & X_y & Y_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_X & x_Y \\ 0 & y_X & y_Y \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors calculer l'inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  et identifier les termes, ce qui donne les relations suivantes :

$$x_X = \frac{Y_y}{J}, \quad x_Y = \frac{-X_y}{J}, \quad y_X = \frac{-Y_x}{J}, \quad y_Y = \frac{X_x}{J},$$

où  $J = \left| \frac{dX dY}{dx dy} \right|$  est le jacobien de la transformation. Nous avons alors

$$\frac{\nabla X}{J} = (y_Y, -x_Y)^T = \frac{1}{\Delta Y} (\delta y, -\delta x)^T = \frac{(\delta x^2 + \delta y^2)^{1/2}}{\Delta Y} (n_x^X, n_y^X)^T,$$

où  $\delta \bullet$  représente une variation de la quantité  $\bullet$  le long d'une ligne de maillage. En définissant  $\mathbf{n}^X dl^X = (\delta y, -\delta x)^T$  la normale multipliée par la longueur sur une ligne de maillage telle que  $X = cste$ , nous avons alors

$$\frac{\nabla X}{J} = \frac{\mathbf{n}^X dl^X}{\Delta Y}. \quad (\text{D.2})$$

De la même façon, nous avons

$$\frac{\nabla Y}{J} = \frac{\mathbf{n}^Y dl^Y}{\Delta X}, \quad (\text{D.3})$$

où  $\mathbf{n}^Y dl^Y = (-\delta y, \delta x)^T$  sur une ligne de maillage telle que  $Y = cste$ .

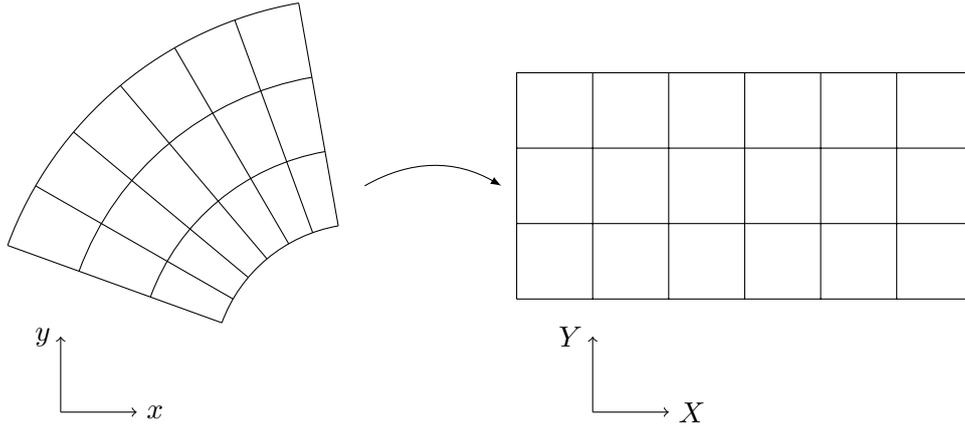


FIGURE D.1 – Transformation entre le maillage structuré curviligne (à gauche) et le maillage structuré cartésien (à droite)

L'équation (D.1) peut s'écrire sous la forme générale  $\partial_t U + \partial_x F + \partial_y G = 0$ . Pour déterminer la formulation dans le nouveau repère on multiplie l'équation par une fonction test  $\varphi$  et on intègre

$$\int (\partial_t U + \partial_x F + \partial_y G) \varphi \, dt dx dy = 0.$$

Après une intégration par parties, nous trouvons

$$\int U \partial_t \varphi + F \partial_x \varphi + G \partial_y \varphi \, dt dx dy = 0.$$

Ensuite, en effectuant le changement de variables  $(t, x, y) \mapsto (T, X, Y)$ , nous obtenons

$$\int (U \partial_t \varphi + F \partial_x \varphi + G \partial_y \varphi) \left| \frac{dt dx dy}{dT dX dY} \right| dT dX dY = 0.$$

Nous pouvons également écrire les relations entre les dérivées en  $(t, x, y)$  et en  $(T, X, Y)$

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi &= \partial_T \varphi, \\ \partial_x \varphi &= X_x \partial_X \varphi + Y_x \partial_Y \varphi, \\ \partial_y \varphi &= X_y \partial_X \varphi + Y_y \partial_Y \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \int (U \partial_T \varphi + F(X_x \partial_X \varphi + Y_x \partial_Y \varphi) + G(X_y \partial_X \varphi + Y_y \partial_Y \varphi)) \frac{1}{J} dT dX dY &= 0, \\ \int \frac{U}{J} \partial_T \varphi + \left( F \frac{X_x}{J} + G \frac{X_y}{J} \right) \partial_X \varphi + \left( F \frac{Y_x}{J} + G \frac{Y_y}{J} \right) \partial_Y \varphi dT dX dY &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, après une intégration par parties, on trouve

$$\int \left( \partial_T \left( \frac{U}{J} \right) + \partial_X \left( F \frac{X_x}{J} + G \frac{X_y}{J} \right) + \partial_Y \left( F \frac{Y_x}{J} + G \frac{Y_y}{J} \right) \right) \varphi dT dX dY = 0.$$

En conclusion, dans le repère  $(T, X, Y)$ , l'équation (D.1) se reformule

$$\partial_T \left( \frac{\theta}{J} \right) = \partial_X \left( \lambda \frac{X_x}{J} \theta_x + \lambda \frac{X_y}{J} \theta_y \right) + \partial_Y \left( \lambda \frac{Y_x}{J} \theta_x + \lambda \frac{Y_y}{J} \theta_y \right), \quad (\text{D.4})$$

où

$$\begin{aligned}\theta_x &= X_x \theta_X + Y_x \theta_Y, \\ \theta_y &= X_y \theta_X + Y_y \theta_Y,\end{aligned}$$

L'équation (D.4) peut se réécrire sous la forme plus compacte

$$\partial_T \left( \frac{\theta}{J} \right) = \partial_X \left( \lambda J \frac{\nabla X}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right) + \partial_Y \left( \lambda J \frac{\nabla Y}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right). \quad (\text{D.5})$$

En intégrant l'équation (D.5) sur un volume de contrôle (en  $X, Y$ ), nous trouvons

$$\begin{aligned}\theta_{l,m}^{n+1} &= \theta_{l,m}^n + \Delta t J_{l,m} \frac{1}{|\Omega_{l,m}^{X,Y}|} \left( \left( \lambda J \frac{\nabla X}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l+1/2,m} - \left( \lambda J \frac{\nabla X}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l-1/2,m} \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda J \frac{\nabla Y}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l,m+1/2} - \left( \lambda J \frac{\nabla Y}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l,m-1/2} \right).\end{aligned}$$

Étant donné que le maillage en  $X, Y$  est unitaire, nous savons que  $|\Gamma|^{X,Y} = 1$  et  $|\Omega_{l,m}^{X,Y}| = 1$ . Nous obtenons alors le schéma suivant :

$$\begin{aligned}\theta_{l,m}^{n+1} &= \theta_{l,m}^n + \Delta t J_{l,m} \left( \left( \lambda J \frac{\nabla X}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l+1/2,m} - \left( \lambda J \frac{\nabla X}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l-1/2,m} \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda J \frac{\nabla Y}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l,m+1/2} - \left( \lambda J \frac{\nabla Y}{J} \cdot \frac{\nabla \theta}{J} \right)_{l,m-1/2} \right).\end{aligned}$$

Par définition, le jacobien de la cellule  $(l, m)$  est égal à l'inverse de l'aire de la cellule  $\Omega_{l,m}$  dans le repère curviligne  $(x, y)$ . Il reste finalement à déterminer les grandeurs sur chaque face. Pour le produit entre le jacobien et la conductivité thermique sur la face  $\mathbf{i}j$  séparant les cellules  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$ , nous utilisons une moyenne harmonique

$$(\lambda J)_{\mathbf{i}j} = 2 \frac{\lambda_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}} \lambda_{\mathbf{j}} J_{\mathbf{j}}}{\lambda_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}} + \lambda_{\mathbf{j}} J_{\mathbf{j}}} = 2 \frac{\lambda_{\mathbf{i}} \lambda_{\mathbf{j}}}{\lambda_{\mathbf{i}} |\Omega_{\mathbf{j}}| + \lambda_{\mathbf{j}} |\Omega_{\mathbf{i}}|}.$$

Contrairement à la moyenne arithmétique, l'utilisation d'une moyenne harmonique permet de conserver les champs linéaires par morceaux [Cha04].

À partir des formules (D.2) et (D.3) et en se rappelant que le maillage cartésien en  $X, Y$  est unitaire, nous pouvons déduire les relations suivantes pour calculer les normales au centre de chaque face

$$\begin{aligned}\left( \frac{\nabla X}{J} \right)_{l+1/2,m} &= (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l+1/2,m}, \\ \left( \frac{\nabla Y}{J} \right)_{l+1/2,m} &= \frac{1}{4} \left( (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l,m+1/2} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l+1,m+1/2} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l,m-1/2} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l+1,m-1/2} \right), \\ \left( \frac{\nabla X}{J} \right)_{l,m+1/2} &= \frac{1}{4} \left( (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l+1/2,m} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l+1/2,m+1} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l-1/2,m} + (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l-1/2,m+1} \right), \\ \left( \frac{\nabla Y}{J} \right)_{l,m+1/2} &= (\mathbf{n} |\Gamma|)_{l,m+1/2},\end{aligned}$$

où  $(\mathbf{n} |\Gamma|)_f$  est la normale à la face multipliée par la longueur sur le maillage physique en  $(x, y)$ , voir figure D.2.

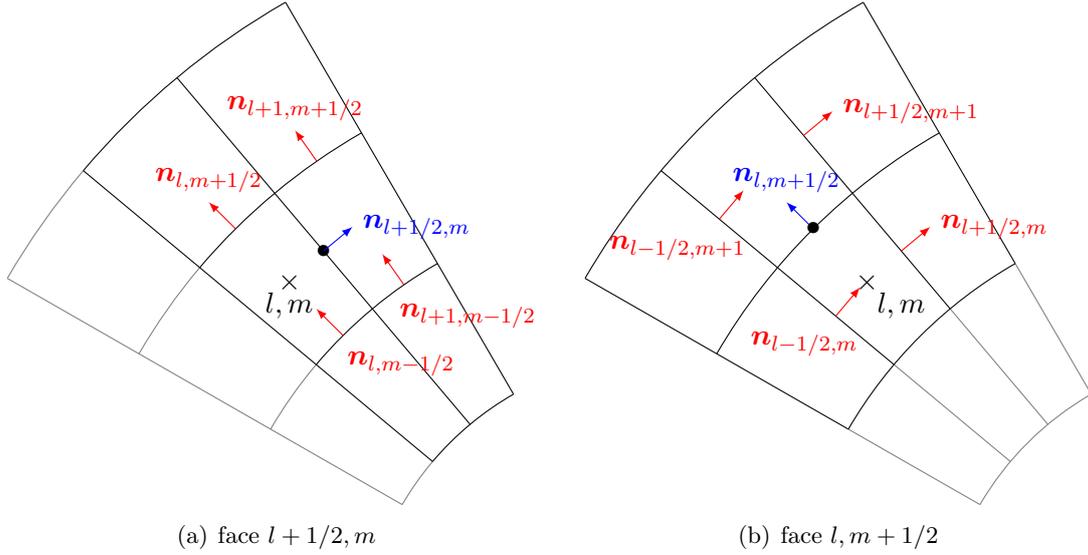


FIGURE D.2 – Contributions pour calculer les coefficients métriques sur une face

Finalement pour le terme

$$\frac{\nabla\theta}{J} = \frac{\nabla X}{J}\theta_X + \frac{\nabla Y}{J}\theta_Y,$$

nous utilisons les relations précédentes et les dérivées dans le maillage cartésien

$$\begin{aligned}\theta_{X_{l+1/2,m}} &= \theta_{l+1,m} - \theta_{l,m}, \\ \theta_{Y_{l+1/2,m}} &= \frac{1}{4}(\theta_{l+1,m+1} - \theta_{l+1,m-1} + \theta_{l,m+1} - \theta_{l,m-1}), \\ \theta_{X_{l,m+1/2}} &= \frac{1}{4}(\theta_{l+1,m+1} - \theta_{l+1,m} + \theta_{l-1,m+1} - \theta_{l-1,m}), \\ \theta_{Y_{l,m+1/2}} &= \theta_{l,m+1} - \theta_{l,m}.\end{aligned}$$

Nous avons donc entièrement déterminé le schéma numérique pour résoudre une équation de diffusion de la forme (D.1).

## Annexe E

# Solutions des problèmes de Couette monophasique et diphasique

Dans cette annexe, nous détaillons les solutions théoriques des écoulements plans de type Couette monophasique et diphasique.

### E.1 Écoulement monophasique de type Couette

Nous considérons un écoulement laminaire entre deux parois horizontales infinies séparées par une distance  $y_e - y_w$ . La paroi supérieure se déplace à la vitesse constante  $u_e$  tandis que la paroi inférieure est fixe. De plus, la paroi supérieure est chauffée à la température  $T_e$  et la paroi inférieure à la température  $T_w$  avec  $T_e > T_w$ . La géométrie du cas test est schématisée sur la figure E.1.

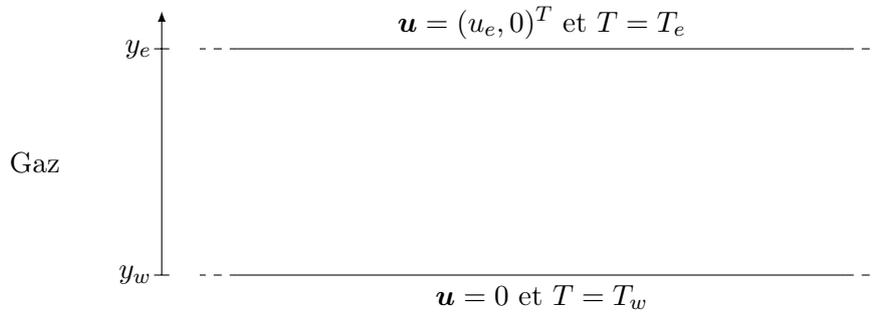


FIGURE E.1 – Écoulement monophasique de type Couette : représentation schématique de la géométrie du cas test et des conditions de bord.

Les équations de Navier-Stokes compressibles sont données par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbb{T} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Nous cherchons la solution stationnaire du problème. Toutes les dérivées temporelles du système (E.1) sont nulles. Les dérivées partielles en  $x$  sont aussi nulles dans la mesure où les deux plaques sont considérées comme infinies. L'équation de conservation de la masse et les conditions aux limites nous indiquent que le champ de vitesse est de la forme  $\mathbf{u} = (u(y), 0)^T$ .

Nous pouvons en déduire que la pression est constante dans tout le domaine. Dans ce cas, le tenseur des contraintes se simplifie  $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{pmatrix}$ , où  $\tau_{xy} = \mu \partial_y u$ . L'équation de quantité de mouvement nous donne alors

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Dans le cas monophasique, la viscosité est constante dans tout le domaine. Ainsi, en utilisant les conditions aux limites  $u(y_w) = 0$  et  $u(y_e) = u_e$ , nous obtenons le profil de vitesse linéaire

$$u(y) = u_e \frac{y - y_w}{y_e - y_w}. \quad (\text{E.2})$$

L'équation d'évolution de l'énergie s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Puisque nous avons supposé que la conductivité thermique était uniforme dans le fluide, le profil de température est parabolique. Après avoir utilisé les conditions de bord  $T(y_w) = T_w$  et  $T(y_e) = T_e$ , nous en déduisons que le profil de température est donné par

$$T(y) = T_w + \left( T_e - T_w + \frac{\mu u_e^2}{2\kappa} \left( 1 - \frac{y - y_w}{y_e - y_w} \right) \right) \frac{y - y_w}{y_e - y_w}. \quad (\text{E.3})$$

Pour déterminer la valeur de la pression  $p(y) = P$ , nous pouvons utiliser la conservation de la masse.

$$\int_{y_w}^{y_e} \rho(y) dy = M_{ini}, \quad (\text{E.4})$$

où  $M_{ini}$  est la masse initiale. Dans le cas où le fluide est un gaz raide, nous avons  $P = (\gamma - 1)\rho c_v T - \pi$  et nous en déduisons la valeur de la pression

$$P = (\gamma - 1)c_v \left( \int_{y_w}^{y_e} \frac{dy}{T(y)} \right)^{-1} M_{ini}. \quad (\text{E.5})$$

Nous avons donc bien déterminé les profils de vitesse, de température et de pression dans le cas d'un écoulement de type Couette monophasique.

## E.2 Écoulement diphasique de type Couette

Comme pour le cas monophasique, nous considérons un domaine physique délimité par deux parois horizontales infinies séparées par une distance  $y_e - y_w$ . La paroi supérieure se déplace à la vitesse constante  $u_e$  tandis que la paroi inférieure est fixe. De plus, la paroi supérieure est chauffée à la température  $T_e$  et la paroi inférieure à la température  $T_w$  avec  $T_e > T_w$ . Pour ce cas test, nous considérons un écoulement diphasique entre les deux parois. La position de l'interface entre les deux fluides est située en  $y = y_0$ . Durant la phase transitoire, l'interface entre les deux fluides va se déplacer. La géométrie du cas test est schématisée sur la figure E.2.

Nous cherchons encore la solution stationnaire du problème donc toutes les dérivées temporelles de (4.1) sont nulles. Les dérivées en  $x$  sont aussi nulles dans la mesure où les deux plaques sont considérées comme infinies. Nous avons encore un champ de pression  $p(y) = P$  constant dans tout le domaine et un champ de vitesse de la forme  $\mathbf{u} = (u(y), 0)^T$ . Dans ce cas, le système

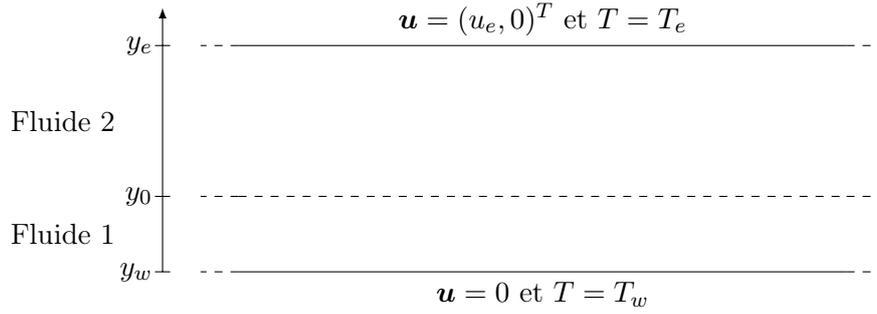


FIGURE E.2 – Écoulement diphasique de type Couette : représentation schématique de la géométrie du cas test et des conditions de bord.

à cinq équations avec les termes de dissipation (4.1) se simplifie et nous avons les équations suivantes

$$\partial_y (\mu \partial_y u) = 0, \quad (\text{E.6a})$$

$$\mu (\partial_y u)^2 + \partial_y (\kappa \partial_y T) = 0. \quad (\text{E.6b})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(y = y_w) = u_w \quad \text{et} \quad u(y = y_e) = u_e, \\ T(y = y_w) = T_w \quad \text{et} \quad T(y = y_e) = T_e. \end{aligned}$$

Les conditions de raccord entre les deux fluides en  $y = y_0$  imposent la continuité de la vitesse, du cisaillement  $\tau_{xy}$ , de la température et du flux de chaleur.

Il est possible d'intégrer l'équation sur la vitesse (E.6a) pour trouver

$$u(y) = \begin{cases} u_0 \frac{y - y_w}{L_1} & y_w < y < y_0, \\ u_0 + (u_e - u_0) \frac{y - y_0}{L_2} & y_0 < y < y_e, \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

avec  $L_1 = y_0 - y_w$ ,  $L_2 = y_e - y_0$  et  $u_0$  la vitesse à l'interface entre les deux fluides. La continuité du cisaillement  $\tau_{xy} = \mu \partial_y u$  à l'interface entre les deux fluides permet de trouver la valeur de la vitesse  $u_0$

$$u_0 = \frac{\frac{\mu_2}{L_2} u_e}{\frac{\mu_1}{L_1} + \frac{\mu_2}{L_2}}.$$

Après avoir déterminé la forme du champ de vitesse, l'équation sur la température (E.6b) s'écrit

$$\partial_y (\kappa \partial_y T) = \begin{cases} -\mu_1 \left( \frac{u_0}{L_1} \right)^2 & y_w < y < y_0, \\ -\mu_2 \left( \frac{u_e - u_0}{L_2} \right)^2 & y_0 < y < y_e. \end{cases}$$

Le profil de température est donc parabolique dans chaque zone. En utilisant les conditions aux

limites, nous obtenons

$$T(y) = \begin{cases} -\frac{\mu_1 u_0^2}{2\kappa_1} \left( \frac{y - y_w}{L_1} \right)^2 + \left( T_0 - T_w + \frac{\mu_1 u_0^2}{2\kappa_1} \right) \frac{y - y_w}{L_1} + T_w & y_w < y < y_0, \\ -\frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2\kappa_2} \left( \frac{y - y_0}{L_2} \right)^2 + \left( T_e - T_0 + \frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2\kappa_2} \right) \frac{y - y_0}{L_2} + T_0 & y_0 < y < y_e, \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

où  $T_0$  est la température à l'interface entre les deux fluides à déterminer. La continuité du flux de chaleur en  $y = y_0$  nous permet de calculer la valeur de la température d'interface

$$T_0 = \frac{1}{\frac{\kappa_1}{L_1} + \frac{\kappa_2}{L_2}} \left( \frac{\kappa_1}{L_1} T_w + \frac{\kappa_2}{L_2} T_e + \frac{\mu_1 u_0^2}{2L_1} + \frac{\mu_2 (u_e - u_0)^2}{2L_2} \right).$$

Il nous reste à déterminer la position  $y_0$  de l'interface entre les deux fluides et la valeur de la pression  $P$  de l'état stationnaire. Pour cela, nous pouvons utiliser l'équation de conservation de la masse

$$\int_{y_w}^{y_e} \rho(y) dy = M_{ini}, \quad (\text{E.9})$$

où  $M_{ini}$  est la masse initiale. Dans le cas où les deux fluides sont des gaz raides, nous obtenons alors

$$\frac{P + \pi_1}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}} \int_{y_w}^{y_0} \frac{dy}{T(y)} + \frac{P + \pi_2}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}} \int_{y_0}^{y_e} \frac{dy}{T(y)} = M_{ini}. \quad (\text{E.10})$$

Nous avons vu que la température est de la forme  $T(y) = ay^2 + by + c$  dans chaque zone. Il est possible d'intégrer les termes

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{ay^2 + by + c}, \quad (\text{E.11})$$

avec  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  et  $r_1 < y_1 < y_2 < r_2$  où  $r_1 = \min\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$  et  $r_2 = \max\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ . Après calculs, nous trouvons

$$I = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} \ln \left( \frac{(y_2 - r_1)(y_1 - r_2)}{(y_1 - r_1)(y_2 - r_2)} \right).$$

Il est donc possible de déterminer la valeur de la pression  $P$  à partir de la position de l'interface  $y_0$ . En notant  $I_1 = \int_{y_w}^{y_0} \frac{dy}{T(y)}$  et  $I_2 = \int_{y_0}^{y_e} \frac{dy}{T(y)}$  les intégrales de la température dans les deux zones, nous obtenons

$$P = \frac{M_{ini} - \frac{\pi_1 I_1}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}} - \frac{\pi_2 I_2}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}}}{\frac{I_1}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}} + \frac{I_2}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}}}. \quad (\text{E.12})$$

Dans le cas d'un écoulement de type Couette diphasique, nous avons réussi à exprimer la pression ainsi que les profils de vitesse et de température en fonction de la position à l'interface entre les deux fluides. Il nous manque cependant une équation pour déterminer complètement l'état stationnaire. Nous ne pouvons pas utiliser le principe de conservation de l'énergie dans la mesure où nous apportons de l'énergie en imposant des températures sur les parois du domaine.

# Bibliographie

- [Abg96] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi conservative approach. *J. Comput. Phys.*, 125(1) :150–160, 1996. (Cité page 13)
- [ACK00] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the numerical simulation of interfaces in two-phase flows. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, pages 1017–1022, 2000. (Cité pages 5, 13, 40 et 165)
- [ACK02] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *J. Comput. Phys.*, 181 :577–616, 2002. (Cité pages vii, 5, 9, 10, 12, 13, 17, 20, 21, 26, 40, 74, 78 et 165)
- [AH75] J. R. Asay and D. B. Hayes. Shockcompression and release behavior near melt states in aluminium. *J. Appl. Phys.*, 46(4789), 1975. (Cité page 146)
- [AK10] R. Abgrall and S. Karni. A comment on the computation of non-conservative products. *J. Comput. Phys.*, 229(8) :2759–2763, 2010. (Cité page 43)
- [Ala06] T. Alazard. Low Mach number limit of the full Navier-Stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 180(1) :1–73, 2006. (Cité pages 113, 129 et 131)
- [AS07] H. T. Ahn and M. Shashkov. Multi-material interface reconstruction on generalized polyhedral meshes. *J. Comput. Phys.*, 226(2) :2096–2132, 2007. (Cité pages 10 et 65)
- [AS17] A. Agrawal and B. Srinivasan. Stability analysis of the carbuncle phenomenon and the sonic point glitch. *Sadhana*, 42(5), 2017. (Cité page 155)
- [Ber06] C. Berthon. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 218(2) :495–509, 2006. (Cité page 56)
- [BHMS13] J. Breil, T. Haribey, P.-H. Maire, and M. Shashkov. A multi-material ReALE method with MOF interface reconstruction. *Comput. Fluids*, 83 :115–125, 2013. (Cité pages 65 et 88)
- [BK90] Z. Bilicki and J. Kestin. Physical aspects of the relaxation model in two-phase flow. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 428(1875) :379–397, 1990. (Cité page 42)
- [BL15] X. Blanc and E. Labourasse. A positive scheme for diffusion problems on deformed meshes. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2015. (Cité page 100)
- [BN86] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 12(6) :861–889, 1986. (Cité pages vii, 9, 10, 11 et 165)
- [BN09] B. Braconnier and B. Nkonga. An all-speed relaxation scheme for interface flows with surface tension. *J. Comput. Phys.*, 228 :5722–5739, 2009. (Cité pages 13, 96 et 113)

- [BNM10] D. Bianchi, F. Nasuti, and E. Martelli. Navier-Stokes simulations of hypersonic flows with coupled graphite ablation. *J. Spacecraft Rockets*, 47(4) :554–562, 2010. (Cité pages 135 et 145)
- [Bou04] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws : And Well-Balanced schemes for sources*. Springer Science & Business Media, 2004. (Cité pages 19, 43 et 166)
- [CBS17] A. Chiapolino, P. Boivin, and R. Saurel. A simple and fast phase transition relaxation solver for compressible multicomponent two-phase flows. *Comput. Fluids*, 150 :31–45, 2017. (Cité page 40)
- [CC17] C. Chalons and F. Coquel. A new comment on the computation of non-conservative products using Roe-type path conservative schemes. *J. Comput. Phys.*, 335 :592–604, 2017. (Cité page 43)
- [CDK12] F. Cordier, P. Degond, and A. Kumbaro. An Asymptotic-Preserving all-speed scheme for the Euler and Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 231(17) :5685–5704, 2012. (Cité page 117)
- [CGHS02] F. Coquel, T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(10) :927–932, 2002. (Cité page 11)
- [CGK16] C. Chalons, M. Girardin, and S. Kokh. An all-regime Lagrange-Projection like scheme for the gas dynamics equations on unstructured meshes. *Comm. Comput. Phys.*, 20(1) :188–233, 006 2016. (Cité pages 6, 7, 40, 41, 42, 46, 52, 53, 56, 89, 113, 114, 115, 116, 123, 126, 133, 165 et 166)
- [CGK17] C. Chalons, M. Girardin, and S. Kokh. An all-regime Lagrange-Projection like scheme for 2D homogeneous models for two-phase flows on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 335 :885–904, 2017. (Cité pages 6, 40, 42, 89, 113, 115, 116 et 165)
- [Cha04] G. Chantepredrix. *Modélisation et simulation numérique d’écoulements diphasiques à surface libre. Application à l’étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2004. (Cité pages 99 et 183)
- [CHRZ17] Z. Chen, X. Huang, Y.-X. Ren, and M. Zhou. General procedure for Riemann solver to eliminate carbuncle and shock instability. *AIAA Journal*, 2017. (Cité page 156)
- [CMG05] Y. Chauvat, J.-M. Moschetta, and J. Gressier. Shock wave numerical structure and the carbuncle phenomenon. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 47 :903–909, 2005. (Cité pages 155 et 156)
- [CNPT10] F. Coquel, Q. Nguyen, M. Postel, and Q. Tran. Entropy-satisfying relaxation method with large time-steps for Euler IBVPs. *Mathematics of Computation*, 79(271) :1493–1533, 2010. (Cité pages 6, 40, 89, 117, 165 et 166)
- [CP99] P. Colella and K. Pao. A projection method for low speed flows. *J. Comput. Phys.*, 149(2) :245–269, 1999. (Cité page 123)
- [CSN17] A. Chiapolino, R. Saurel, and B. Nkonga. Sharpening diffuse interfaces with compressible fluids on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 340 :389–417, 2017. (Cité page 65)
- [Del10] S. Dellacherie. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 229 :978–1016, 2010. (Cité pages 113, 125, 126 et 127)

- [Del12] S. Dellacherie. On a low Mach nuclear core model. In *ESAIM : Proceedings*, volume 35, pages 79–106. EDP Sciences, 2012. (Cité page 129)
- [Dev] R. Devalay. Données numériques sur l’aluminium non allié. Techniques de l’ingénieur, traité Matériaux métalliques. Formulaire. (Cité pages 144, 145 et 146)
- [DGGB14] F. Daude, P. Galon, Z. Gao, and E. Blaud. Numerical experiments using a HLLC-type scheme with ALE formulation for compressible two-phase flows five-equation models with phase transition. *Comput. Fluids*, 94 :112–138, 2014. (Cité pages 40 et 88)
- [DJOR16] S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes, and P.-A. Raviart. Construction of modified Godunov-type schemes accurate at any Mach number for the compressible Euler system. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(13) :2525–2615, 2016. (Cité pages 113 et 123)
- [DJY07] P. Degond, S. Jin, and J. Yuming. Mach-number uniform asymptotic-preserving gauge schemes for compressible flows. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica*, 2(4) :851, 2007. (Cité page 117)
- [DKL16] B. Després, S. Kokh, and F. Lagoutière. Sharpening methods for finite volume schemes. *Handb. Numer. Anal.*, 17 :77–102, 2016. (Cité page 65)
- [DL99] B. Després and F. Lagoutière. Un schéma non linéaire anti-dissipatif pour l’équation d’advection linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 328(10) :939–943, 1999. (Cité page 65)
- [DLL07] B. Després, E. Labourasse, and F. Lagoutière. The Vofire method for multicomponent flows on unstructured meshes. *Jacques-Louis Lions Report R07052*, 2007. (Cité page 65)
- [DMFM95] G. Dal Maso, P. G. Le Floch, and F. Murat. Definition and weak stability of nonconservative products. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 74(6) :483–548, 1995. (Cité page 43)
- [DMG04] M. Dumbser, J.-M. Moschetta, and J. Gressier. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. *J. Comput. Phys.*, 197 :647–670, 2004. (Cité page 156)
- [DS08] V. Dyadechko and M. Shashkov. Reconstruction of multi-material interfaces from moment data. *J. Comput. Phys.*, 227(11) :5361–5384, 2008. (Cité pages 10 et 65)
- [EDKT17] M.F.P. ten Eikelder, F. Daude, B. Koren, and A.S. Tijsseling. An acoustic-convective splitting-based approach for the Kapila two-phase flow model. *J. Comput. Phys.*, 331(1) :188–208, 2017. (Cité pages 40, 42, 58 et 85)
- [Ein88] B. Einfeldt. On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(2) :294–318, 1988. (Cité page 156)
- [FBC<sup>+</sup>11] M. Billaud Friess, B. Boutin, F. Caetano, G. Faccanoni, S. Kokh, F. Lagoutière, and L. Navoret. A second order anti-diffusive Lagrange-remap scheme for two-component flows. In *ESAIM : Proceedings*, volume 32, pages 149–162. EDP Sciences, 2011. (Cité pages 10, 42, 55, 67 et 79)
- [FK13] V. Faucher and S. Kokh. Extended Vofire algorithm for fast transient fluid–structure dynamics with liquid–gas flows and interfaces. *J. Fluids Struct.*, 39 :102–125, 2013. (Cité page 65)
- [FK14] M. Billaud Friess and S. Kokh. Simulation of sharp interface multi-material flows involving an arbitrary number of components through an extended five-equation model. *J. Comput. Phys.*, 273 :488–519, 2014. (Cité page 65)

- [FL11] T. Flåtten and H. Lund. Relaxation two-phase flow models and the subcharacteristic condition. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(12) :2379–2407, 2011. (Cité page 10)
- [Fra06] E. Franquet. *Modélisation eulérienne d'écoulements multiphasiques en présence d'ondes de chocs, de détonations et d'interfaces matérielles. Application aux matériaux énergétiques nanostructurés*. PhD thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I), 2006. 2006AIX11026. (Cité page 29)
- [Gal00] G. Gallice. Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 331(2) :149–152, 2000. (Cité pages 43 et 172)
- [Gal02] G. Gallice. *Numerical Approximation of conservative or nonconservative non-linear hyperbolic systems*. Accreditation to supervise research, Université de Bordeaux I, June 2002. (Cité pages 43, 44, 89, 165, 171 et 173)
- [Gal03] G. Gallice. Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in Lagrangian or Eulerian coordinates. *Numerische Mathematik*, 94 :673–713, 2003. (Cité pages 43, 44, 45, 47 et 172)
- [GGS82] U. Ghia, K. N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48(3) :387–411, 1982. (Cité page 132)
- [GHS04] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(05) :663–700, 2004. (Cité page 11)
- [Gli65] J. Glimm. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18(4) :697–715, 1965. (Cité page 65)
- [GM04] H. Guillard and A. Murrone. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Comput. Fluids*, 33(4) :655–675, 2004. (Cité page 113)
- [GP79] S. K. Godunov and V. Platonov. Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz. 1979. (Cité page 172)
- [GR91] E. Godlevski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, 1991. (Cité page 55)
- [GR96] E. Godlevski and P.-A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, 1996. (Cité pages 19 et 41)
- [Gui07] V. Guillemaud. *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2007. (Cité page 11)
- [GV99] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Comput. Fluids*, 28(1) :63–86, 1999. (Cité pages 113 et 120)
- [HJ13] P. Helluy and J. Jung. OpenCL numerical simulations of two-fluid compressible flows with a 2D random choice method. *International J. Finite Volumes*, 10 :1–38, 2013. (Cité page 65)
- [HJL12] J. Haack, S. Jin, and J. Liu. An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic Euler and Navier-Stokes equations. *Comm. Comput. Phys.*, 12(04) :955–980, 2012. (Cité page 117)

- [HLL83] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983. (Cité pages [43](#), [156](#), [157](#), [161](#), [171](#) et [172](#))
- [HN81] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39(1) :201–225, 1981. (Cité pages [10](#) et [65](#))
- [HS87] J.-F. Haas and B. Sturtevant. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *J. Fluid Mech.*, 181 :41–76, 1987. (Cité pages [88](#), [89](#), [90](#), [91](#), [92](#) et [93](#))
- [IRN06] F. Ismail, P. L. Roe, and H. Nishikawa. A proposed cure to the carbuncle phenomenon. *International Conference on Computational Fluid Dynamics*, pages 149–154, 2006. (Cité page [155](#))
- [Jin99] S. Jin. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(2) :441–454, 1999. (Cité page [117](#))
- [JO11] S. Jiang and Y. Ou. Incompressible limit of the non-isentropic Navier–Stokes equations with well-prepared initial data in three-dimensional bounded domains. *J. Math. Pures Appl.*, 96(1) :1–28, 2011. (Cité page [113](#))
- [Jun13] J. Jung. *Schémas numériques adaptés aux accélérateurs multicœurs pour les écoulements bifluide*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2013. (Cité pages [35](#), [65](#), [68](#), [69](#), [71](#), [73](#), [74](#), [79](#), [83](#), [89](#), [94](#) et [165](#))
- [KK10] J.J. Kreft and B. Koren. A new formulation of Kapila’s five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment. *J. Comput. Phys.*, 229 :6220–6242, 2010. (Cité pages [12](#), [40](#), [85](#), [88](#) et [89](#))
- [KL10] S. Kokh and F. Lagoutière. An anti-diffusive numerical scheme for the simulation of interfaces between compressible fluids by means of five-equation model. *J. Comput. Phys.*, 229 :2773–2809, 2010. (Cité pages [10](#), [40](#), [41](#), [42](#), [65](#), [67](#), [73](#), [79](#), [81](#), [83](#), [88](#), [89](#), [94](#), [110](#), [148](#) et [165](#))
- [KM81] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4) :481–524, 1981. (Cité pages [113](#) et [129](#))
- [KMB<sup>+</sup>01] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D. S. Stewart. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : Reduced equations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(10) :3002–3024, 2001. (Cité pages [vii](#), [5](#), [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [21](#), [27](#), [40](#) et [165](#))
- [Lag00] F. Lagoutière. *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants*. PhD thesis, Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6), 2000. (Cité page [65](#))
- [Lat13] M. Latige. *Simulation numérique de l’ablation liquide*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2013. (Cité pages [2](#), [17](#), [26](#), [40](#), [82](#), [135](#), [145](#), [146](#) et [147](#))
- [LCM] J. Lachaud, I. Cozmuta, and N. Mansour. Multiscale approach to ablation modeling of phenolic impregnated carbon ablators. Nasa Ames Research Center, Moffet Field, California, 94035. (Cité page [5](#))
- [LF96] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134(1-2) :71–90, 1996. (Cité pages [139](#) et [141](#))

- 
- [LMMS04] O. Le Metayer, J. Massoni, and R. Saurel. Elaboration des lois d'état d'un liquide et de sa vapeur pour les modèles d'écoulements diphasiques. *Int. J. Thermal Sciences*, 43(3) :265–276, 2004. (Cité pages 6, 17 et 46)
- [LMNS13] S. Le Martelot, B. Nkonga, and R. Saurel. Liquid and liquid–gas flows at all speeds. *J. Comput. Phys.*, 255 :53–82, 2013. (Cité pages 13, 40 et 113)
- [LP09] C. Le Potier. A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators. *Int. J. Finite Volumes*, pages 1–20, 2009. (Cité page 100)
- [Lun12] H. Lund. A hierarchy of relaxation models for two-phase flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 72(6) :1713–1741, 2012. (Cité page 10)
- [MABO07] P.-H. Maire, R. Abgrall, J. Breil, and J. Ovadia. A cell-centered lagrangian scheme for two-dimensional compressible flow problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(4) :1781–1824, 2007. (Cité pages 7, 157, 159 et 166)
- [Mai09] P.-H. Maire. A high-order cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible fluid flows on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 228(7) :2391–2425, 2009. (Cité pages 157 et 159)
- [MB14] A. Martin and I. D. Boyd. Strongly coupled computation of material response and nonequilibrium flow for hypersonic ablation. *J. Spacecraft Rockets*, 52(1) :89–104, 2014. (Cité page 135)
- [MC13] F. S. Milos and Y.-K. Chen. Ablation, thermal response, and chemistry program for analysis of thermal protection systems. *J. Spacecraft Rockets*, 50(1) :137–149, 2013. (Cité page 135)
- [Men07] R. Menikoff. Empirical equations of state for solids. In *ShockWave Science and Technology Reference Library*, pages 143–188. Springer, 2007. (Cité page 16)
- [MG05] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *J. Comput. Phys.*, 202(2) :664 – 698, 2005. (Cité pages 11, 21, 27, 29, 40 et 85)
- [MG08] A. Murrone and H. Guillard. Behavior of upwind scheme in the low Mach number limit : III. preconditioned dissipation for a five equation two phase model. *Comput. Fluids*, 37(10) :1209–1224, 2008. (Cité pages 113 et 117)
- [MP89] R. Menikoff and B. J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Reviews of modern physics*, 61(1) :75, 1989. (Cité page 16)
- [MSNA02] J. Massoni, R. Saurel, B. Nkonga, and R. Abgrall. Proposition de méthodes et modèles Eulériens pour les problèmes à interfaces entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur : Some models and Eulerian methods for interface problems between compressible fluids with heat transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45(6) :1287–1307, 2002. (Cité pages vii, 5, 9, 10, 12, 13, 40 et 165)
- [Mul10] N. J. Mullenix. *Fully Coupled Model for High-Temperature Ablation and a Reactive-Riemann Solver for its Solution*. PhD thesis, University of Akron, 2010. (Cité page 135)
- [NK08] H. Nishikawa and K. Kitamura. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. *J. Comput. Phys.*, 227 :2560–2581, 2008. (Cité pages 155, 156 et 161)
- [NW76] W. F. Noh and P. Woodward. SLIC (Simple Line Interface Calculation). In *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28–July 2, 1976 Twente University, Enschede*, pages 330–340. Springer, 1976. (Cité page 65)
-

- [OS82] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comput.*, 38(158) :339–374, 1982. (Cité page 172)
- [OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49, 1988. (Cité page 10)
- [Par06] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1) :300–321, 2006. (Cité page 43)
- [PD01] M. Pandolfi and D. D’Ambrosio. Numerical instabilities in upwind methods : analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon. *J. Comp. Phys.*, 166(2) :271–301, 2001. (Cité page 156)
- [Pel17] M. Pelanti. Low Mach number preconditioning techniques for Roe-type and HLLC-type methods for a two-phase compressible flow model. *Applied Mathematics and Computation*, 310(1) :112–133, 2017. (Cité page 113)
- [Pér03] G. Périgaud. *Elaboration et résolution de modèles d’écoulement compressibles à interfaces en présence de capillarité et de viscosité*. PhD thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I), 2003. (Cité pages 13, 26 et 29)
- [PFSLM07] F. Petitpas, E. Franquet, R. Saurel, and O. Le Metayer. A relaxation-projection method for compressible flows. part II : Artificial heat exchanges for multiphase shocks. *J. Comput. Phys.*, 225 :2214–2248, 2007. (Cité pages 29 et 40)
- [PGM16] S. Peluchon, G. Gallice, and P.-H. Maire. Some acoustic-transport splitting schemes for two-phase compressible flows. In *ECCOMAS Congress 2016*, 2016. (Cité page 8)
- [PGM17] S. Peluchon, G. Gallice, and L. Mieussens. A robust implicit–explicit acoustic-transport splitting scheme for two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, 339 :328–355, 2017. (Cité page 8)
- [PI88] KM Peery and ST Imlay. Blunt-body flow simulations. *AIAA paper*, 2904 :1988, 1988. (Cité page 155)
- [PMS<sup>+</sup>09] F. Petitpas, J. Massoni, R. Saurel, E. Lapebie, and L. Munier. Diffuse interface model for high speed cavitating underwater systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 35(8) :747–759, 2009. (Cité page 40)
- [Pol05] M. Polner. *Galerkin Least-Squares Stabilisation Operators for the Navier-Stokes Equations*. PhD thesis, Departement of Applied Mathematics in the Faculty EWI, Universiteit Twente, 2005. (Cité page 14)
- [PS05] G. Périgaud and R. Saurel. A compressible flow model with capillary effects. *J. Comput. Phys.*, 209(1) :139–178, 2005. (Cité pages 13, 26, 40 et 166)
- [PS14] M. Pelanti and K.-M. Shyue. A mixture-energy-consistent six-equation two-phase numerical model for fluids with interfaces, cavitation and evaporation waves. *J. Comput. Phys.*, 259 :331 – 357, 2014. (Cité page 40)
- [QK96] J. J. Quirk and S. Karni. On the dynamics of a shock–bubble interaction. *J. of Fluid Mech.*, 318 :129–163, 1996. (Cité pages 82, 88 et 89)
- [Qui94] J. J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 18(6) :555–574, 1994. (Cité pages 155 et 156)
- [RB09] F. Rieper and G. Bader. The influence of cell geometry on the accuracy of upwind schemes in the low Mach number regime. *J. Comput. Phys.*, 228(8) :2918–2933, 2009. (Cité page 113)

- [Ren03] Y.-X. Ren. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers. *Comput. Fluids*, 32(10) :1379–1403, 2003. (Cité page 156)
- [Ren17] F. Renac. A robust high-order discontinuous Galerkin method with large time steps for the compressible Euler equations. *Comm. Math. Sci.*, 15(3) :813–837, 2017. (Cité page 166)
- [RH84] V. H. Ransom and D. L. Hicks. Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 53(1) :124–151, 1984. (Cité page 11)
- [Rie11] F. Rieper. A low-Mach number fix for Roe’s approximate Riemann solver. *J. Comput. Phys.*, 230(13) :5263–5287, 2011. (Cité pages 113, 114, 120 et 127)
- [Rod17] A. V. Rodionov. Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon. *J. Comput. Phys.*, 345 :308–329, 2017. (Cité pages 155 et 156)
- [Roe81] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. phys.*, 43(2) :357–372, 1981. (Cité pages 156 et 172)
- [SA99a] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.*, 150 :425–467, 1999. (Cité page 11)
- [SA99b] R. Saurel and R. Abgrall. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21 (3) :1115–1145, 1999. (Cité pages 10, 79, 81 et 89)
- [Sch86] S. Schochet. The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :49–75, 1986. (Cité page 113)
- [Shy04] K.-M. Shyue. A fluid-mixture type algorithm for barotropic two-fluid flow problems. *J. Comput. Phys.*, 200 :718–748, 2004. (Cité page 46)
- [Smo83] J. Smoller. *Shock waves and reaction—diffusion equations*. Springer, 1983. (Cité pages 19 et 28)
- [SPA08] R. Saurel, F. Petitpas, and R. Abgrall. Modelling phase transition in metastable liquids : application to cavitating and flashing flows. *J. Fluid Mech.*, 607 :313–350, 2008. (Cité page 40)
- [SPB09] R. Saurel, F. Petitpas, and R. A. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *J. Comput. Phys.*, 228(5) :1678 – 1712, 2009. (Cité pages 11, 40, 85 et 87)
- [SPD<sup>+</sup>17] K. Schmidmayer, F. Petitpas, E. Daniel, N. Favrie, and S. Gavriluyk. A model and numerical method for compressible flows with capillary effects. *J. Comput. Phys.*, 334 :468–496, 2017. (Cité pages 13 et 40)
- [Ste91] J. Stefan. Über die theorie der eisbildung, insbesondere ueber die eibildung im polar-meere. *Ann. Phys. Chem.*, 42 :269–286, 1891. (Cité page 138)
- [SY08] Z. Sheng and G. Yuan. A nine point scheme for the approximation of diffusion operators on distorted quadrilateral meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(3) :1341–1361, 2008. (Cité page 99)
- [SYY14] Z. Shen, W. Yan, and G. Yuan. A robust and contact resolving Riemann solver on unstructured mesh, Part I, Euler method. *J. Comput. Phys.*, 268 :432–455, 2014. (Cité pages 156 et 161)
- [SYY16] Z. Shen, W. Yan, and G. Yuan. A robust HLLC-type Riemann solver for strong shock. *J. Comput. Phys.*, 309 :185–206, 2016. (Cité pages 155 et 156)
- [TFL94] E. Turkel, A. Fiterman, and B. van Leer. *Preconditioning and the limit of the compressible to the incompressible flow equations for finite difference schemes*. John Wiley and Sons, 1994. (Cité page 113)

- [TMD<sup>+</sup>08] B. Thornber, A. Mosedale, D. Drikakis, D. Youngs, and R.J.R. Williams. An improved reconstruction method for compressible flows with low Mach number features. *J. Comput. Phys.*, 227(10) :4873 – 4894, 2008. (Cité pages [113](#) et [127](#))
- [Tor97] E.F. Toro. *Riemann solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1997. (Cité pages [28](#), [55](#), [65](#), [122](#), [156](#), [161](#) et [172](#))
- [Tur87] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J. of Comput. Phys.*, 72(277-298), 1987. (Cité page [113](#))
- [Tur93] E. Turkel. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Appl. Numer. Math.*, 12(1-3) :257–284, 1993. (Cité page [113](#))
- [Tur13] A. Turchi. *A Gas-Surface Interaction Model for the Numerical Study of Rocket nozzle flows over pyrolyzing ablative materials*. PhD thesis, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, 2013. (Cité pages [135](#) et [145](#))
- [Vel07] A. Velghe. *Modélisation de l’Interaction entre un écoulement Turbulent et une Paroi Ablable*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Septembre 2007. (Cité page [4](#))
- [Woo30] A. B. Wood. A textbook of sound. 1930. *G. Bell and Sons Ltd., London*, 1930. (Cité page [23](#))
- [Wu17] J. Wu. Vertex-centered linearity-preserving schemes for nonlinear parabolic problems on polygonal grids. *J. of Scientific Computing*, 71(2) :499–524, 2017. (Cité page [100](#))
- [YZX<sup>+</sup>08] J. Yin, H. Zhang, X. Xiong, B. Huang, and J. Zuo. Ablation properties of carbon/carbon composites with tungsten carbide. *Applied Surface Science*, 255 :5036–5040, 2008. (Cité page [3](#))
- [Zak17] H. Zakerzadeh. On the Mach-uniformity of the Lagrange-Projection scheme. *ESAIM : Math. Model. Num. Anal.*, 51(4) :1343–1366, 2017. (Cité page [117](#))
- [ZSW17] X. Zhang, S. Su, and J. Wu. A vertex-centered and positivity-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary polygonal grids. *J. Comput. Phys.*, 2017. (Cité page [100](#))



## RÉSUMÉ

Lors de sa rentrée dans l'atmosphère d'une planète, un engin spatial subit un échauffement important dû aux frottements des gaz atmosphériques sur la paroi. Cette élévation de température conduit à une dégradation physico-chimique du bouclier thermique de l'objet constitué de matériaux composites. Un composite est constitué de divers matériaux qui s'ablatent différemment. Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la fusion d'un matériau durant sa phase de rentrée atmosphérique. Nous sommes donc en présence de trois phases : solide, liquide et gaz. Pour simuler ce phénomène, des méthodes numériques robustes ont été mises au point pour calculer l'écoulement diphasique compressible autour de l'objet. Le couplage entre le solide et l'écoulement fluide a aussi été étudié.

Les méthodes numériques développées durant cette thèse sont basées sur une approche volumes finis. Une stratégie de décomposition d'opérateurs est utilisée pour résoudre le modèle diphasique à cinq équations avec les termes de dissipation modélisant l'écoulement fluide. L'idée principale de cette décomposition d'opérateurs est de séparer les phénomènes acoustiques et dissipatifs des phénomènes de transport. Un traitement implicite de l'étape acoustique est réalisé tandis que l'étape de transport est résolue explicitement. Le schéma semi-implicite global est alors très robuste, conservatif et préserve les discontinuités de contact.

Les conditions d'interface entre les domaines fluide et solide sont déduites des bilans de masse et d'énergie à la paroi. Le front de fusion est suivi explicitement grâce à une formulation ALE des équations. La robustesse de l'approche et l'apport de la formulation semi-implicite sont finalement démontrés grâce à des expériences numériques mono et bidimensionnelles sur maillages curvilignes mobiles.

**Mots-clés** Écoulements diphasiques, Navier-Stokes compressible, Écoulements bas Mach, Méthode implicite, Schémas de type Godunov.

## ABSTRACT

During atmospheric re-entry phase, a spacecraft undergoes a sudden increase of the temperature due to the friction of atmospheric gases. This rise drives to a physical-chemical degradation of the thermal protective system of the object made of composite material. A composite is made of several materials with ablates differently. In this thesis, we mainly focus on the melting of an object during its re-entry phase. Therefore there are three phases: solid, liquid and gas phases. In order to simulate this phenomenon, robust numerical methods have been developed to compute a compressible multiphase flow. The coupling strategy between the solid and the fluid have also been studied.

Solvers developed in the present work are based on Finite Volume Method. A splitting strategy is used to compute compressible two-phase flows using the five-equation model with viscous and heat conduction effects. The main idea of the splitting is to separate the acoustic and dissipative phenomena from the transport one. An implicit treatment of the acoustic step is performed while the transport step is solved explicitly. The overall scheme resulting from this splitting operator strategy is very robust, conservative, and preserves contact discontinuities.

The boundary interface condition between the solid and the multiphase flow is enforced by mass and energy balances at the wall. The melting front is tracked explicitly using an ALE formulation of the equations. The robustness of the approach and the interest of the semi-implicit formulation are demonstrated through numerical simulations in one and two dimensions on moving curvilinear grids.

**Keywords** Two-phase flow, Compressible Navier-Stokes, Low Mach, Implicit method, Godunov-type schemes.