

Table des matières

Introduction	17
PREMIÈRE PARTIE. COMPORTEMENT MÉCANIQUE ET MODÉLISATION DES MATÉRIAUX COMPOSITES TISSÉS À MATRICE CÉRAMIQUE	21
Chapitre 1. Comportements et modèles de CMCs tissés	23
1.1. Comportement mécanique des CMCs tissés	23
1.1.1. Structure du matériau	23
1.1.2. Endommagement de CMCs tissés	24
1.1.2.1. Comportement macroscopique	24
1.1.2.2. Microstructure, mésostructure et rupture	25
1.1.2.3. Les modes d'endommagement	26
1.1.3. Le phénomène de multifissuration ou fragmentation	28
1.2. Modélisation des matériaux composites	30
1.2.1. Modèles destinés au calcul de structure	30
1.2.1.1. Les modèles de milieu continu	30
1.2.1.2. Les approches multi-échelle	31
1.2.2. Les approches micromécaniques	34
1.2.2.1. Modélisation des inclusions dans la microstructure	35
1.2.2.2. Approches statistiques probabilistes	37
1.3. Objectif du travail de thèse : modélisation de l'endommagement transverse des fils des composites tissés	39
DEUXIÈME PARTIE. DE L'OBSERVATION DE LA MICROSTRUCTURE DU MATÉ- RIAU À L'ESSAI VIRTUEL DE MULTIFISSURATION TRANSVERSE	43
Chapitre 2. D'une photo aux éléments finis : modélisation et simulation des mi- crostructures et mésostructures	45
2.1. Analyse d'image de coupes transverses de fils	45
2.2. Génération des cellules de calcul par éléments finis	46
2.2.1. Maillage des cellules	47
2.2.2. Optimisation des maillages : modélisation des inclusions	48
2.2.2.1. Maillage des fibres	49
2.2.2.2. Maillage des pores	55

2.3. Simulation de traction de matériaux virtuels	59
2.3.1. Matériau #1 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$ sans pore	60
2.3.2. Matériau #2 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$	62
2.3.3. Matériau #3 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$ à interphase	64
2.4. Conclusion	65
Chapitre 3. Essai Virtuel de multifissuration transverse des fils	69
3.1. Application de l' <i>Essai Virtuel</i>	69
3.2. Endommagement transverse du fil	70
3.2.1. Critère de rupture et fissuration	70
3.2.2. Procédure numérique de fissuration des fils	71
3.3. Effet des fissures sur les champs de contraintes	72
3.3.1. Fissure transverse	72
3.3.2. Décohésion inter fils	73
3.4. Essais virtuels	76
3.4.1. Matériau #1, rupture uniforme	76
3.4.2. Matériau #2, critère de rupture uniforme	79
3.4.3. Matériau #2, critère de rupture dispersé	82
3.4.4. Matériau #3, critère de rupture uniforme	84
3.5. Conclusions	87
TROISIÈME PARTIE. APPROCHE STATISTIQUE PROBABILISTE DE LA MULTI- FISSURATION TRANSVERSE DES FILS	89
Chapitre 4. Modèle statistique probabiliste de multifissuration transverse des fils	91
4.1. Définition des grandeurs dispersées	91
4.1.1. Découplage d'échelle micro/méso	91
4.1.2. Critère de rupture local et sévérité des défauts	92
4.2. Dispersion des populations de défauts et probabilité de rupture	93
4.2.1. Combinaison des fonctions de distribution	93
4.2.2. Probabilités de rupture : approche du "maillon faible"	95
4.2.3. Description des défauts par une distribution ponctuelle de Poisson	96
4.2.4. Correspondance entre les deux approches	98
4.3. Évolution des dispersions lors de la multifissuration	98
4.3.1. Probabilité conditionnelle de fissuration	99
4.3.1.1. Champs de contraintes homothétiques	99
4.3.1.2. Extension aux champs de contraintes non-homothétiques	102
4.3.2. Probabilités totales : processus complet de multifissuration	102
4.4. Conclusion	103
Chapitre 5. Traitement statistique des données issues des Essais Virtuels	105
5.1. Milieu Homogène Équivalent	105
5.2. Identification des fonctions analytiques caractéristiques des défauts à l'état initial	108
5.2.1. Distribution des contraintes	108
5.2.2. Distribution des concentrations de contraintes	110

5.2.3. Distribution des sévérités microscopiques	111
5.2.4. Combinaison des distributions de défauts : K_c et $\sigma^R \Leftrightarrow S_m$	113
5.3. Évolution des densités poissonniennes, probabilités de ruptures	115
5.3.1. Dispersion des sévérités mésoscopiques	115
5.3.2. Modification des densités de défauts : multifissuration	115
5.4. Conclusion	118
QUATRIÈME PARTIE. VERS L'ÉCHELLE MÉSCOSCOPIQUE : MULTIFISSURA-	
TION DU FIL HOMOGÈNE ÉQUIVALENT	121
Chapitre 6. Homogénéisation et Perturbation Discrète	123
6.1. Application de l'approche d'Homogénéisation et Perturbation Discrète . . .	123
6.2. Population complète de défauts	124
6.2.1. Matériau #2, σ^R uniforme	124
6.2.1.1. Transposition à l'identique : HPD-identique	124
6.2.1.2. Tirages statistiques : HPD-statistique	126
6.2.1.3. Bilan des essais virtuels	126
6.2.2. Matériau #2, σ^R dispersé	128
6.2.2.1. Transposition à l'identique : HPD-identique	128
6.2.2.2. Tirages statistiques : HPD-statistique	128
6.2.2.3. Bilan des essais virtuels	131
6.2.3. Matériau #3	132
6.2.3.1. Transposition à l'identique : HPD-identique	132
6.2.3.2. Tirages statistiques : HPD-statistique	132
6.2.3.3. Bilan des essais virtuels	132
6.2.4. Bilan des HPD-identique et HPD-statistique	132
6.3. Sélection des défauts par l'approche statistique	136
6.3.1. Répartition spatiale et conditionnement au nombre de défauts	136
6.3.2. Sélection des défauts par l'approche de troncature et obturation, champ de contrainte homothétique	138
6.3.3. Adaptation à un champ mésoscopique non homothétique : HPD-statistique	138
6.4. Conclusion	141
CINQUIÈME PARTIE. CONCLUSION GÉNÉRALE	143
Bibliographie	149

Table des figures

1.1	Schéma standard de croisement de mèches, VER d'un taffetas. D'après [BOI 01]	24
1.2	Détails microstructuraux d'un CMC à matrice séquencée. D'après [LAM 99]	25
1.3	Courbe de comportement en traction cyclée d'un 2.5D C/SiC. D'après [COU 08]	25
1.4	Schéma des modes d'endommagement au niveau d'un croisement de fils d'un CMC. D'après [BOI 01]	27
1.5	Détails des modes d'endommagement : microstructure d'un C/SiC. D'après [COU 08]	27
1.6	Multifissuration transverse des fils dans un C/SiC, 250MPa	29
1.7	Évolution du réseau de microfissures sous chargement thermomécanique d'un pli d'un CMO stratifié. D'après [LUB 09]	31
1.8	Stratégie de calcul multi-échelle développée dans [GHO 07]	32
1.9	Modélisation du tissage et de la microfissuration matricielle. D'après [KUH 99] et [HAA 03]	33
1.10	Modélisation de la fissuration au sein du tissage, approche DMD. D'après [COU 08]	34
1.11	Observation et simulation de la fissuration transverse dans un pli d'un CMO. D'après [STA 95]	36
1.12	Identification de la distribution de contrainte à rupture d'un CMC tissé 2D et prédiction erronée associée calculée à partir de V1 pour V2. D'après [CAL 02]	38
2.1	Image reconstituée du fil transverse, détail des images de départ	46

2.2	Images obtenues après seuillage de formes	46
2.3	(a) détail du maillage de la microstructure et (b) limite du fil transverse et courbe enveloppe (blanc)	48
2.4	Cellule de calcul : fils transverse et longitudinaux	48
2.5	Concentration de contraintes pour une inclusion circulaire soumise à une traction simple Σ_{11} . Inclusion souple en haut (a) et (b) : $E_f=20\text{GPa}$, $E_m=200\text{GPa}$, $C=1/10$. Inclusion rigide en bas (c) et (d) : $E_f=200\text{GPa}$, $E_m=20\text{GPa}$, $C=10$	50
2.6	Contraintes interpolées aux nœuds, interface fibre / matrice	51
2.7	Maillage de l'interphase en périphérie de fibre	53
2.8	Champs de contrainte σ_{11} sous sollicitation globale Σ_{11} pour l'inclusion composite ($E_f=200\text{ GPa}$, $E_m=350\text{ GPa}$), interfaces repérés en traits fins blanc	53
2.9	Champs de contraintes σ_{11} autour de pores sous sollicitation globale E_{11} de 0.5%, $E_m=350\text{ GPa}$	55
2.10	Différentes réalisations de maillage du pore no. 3, T_{max} égal à 10 p^2 : influence de la simplification de la pixelisation sur la géométrie du bord libre. $\delta = 1$, quadrant <i>a.</i> ; $\delta = 2$, quadrant <i>b.</i> ; $\delta = 3$, quadrant <i>c.</i> ; $\delta = 5$, quadrant <i>d.</i>	57
2.11	Intégration d'une bande de contrôle – en bleu – autour du pore située à une distance d du bord et d'épaisseur e	58
2.12	Cellule de calcul micro-méso, repère et conditions aux limites en déplacement	59
2.13	Détail de la microstructure de la cellule de calcul et du maillage des régions de contrôle des grandeurs locales, matériau #1	61
2.14	Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructure	61
2.15	Distribution statistique des contraintes σ_c^f	62
2.16	Détails de la microstructure de la cellule de calcul et du maillage des régions de contrôle des grandeurs locales, matériau # 2	62
2.17	Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructure	63
2.18	Distributions statistiques des contraintes σ_c^p et σ_c^f	63
2.19	Détail de la microstructure de la cellule de calcul : fibres, matrice, pores et couche d'interphase	64
2.20	Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructure	65

2.21	Distributions statistique des contraintes σ_c^p et σ_c^l	65
2.22	Comparaison des distributions de contraintes critiques dans la matrice adimensionnées par la contrainte moyenne dans la matrice	67
3.1	Déroulement de la procédure itérative de fissuration : essai virtuel de multifissuration	70
3.2	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, représentation de la zone de relaxation autour de la fissure	73
3.3	Dispersion des contraintes critiques σ_c au niveau des fibres, influence de la présence d'une fissure	73
3.4	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, représentation de la zone de relaxation autour de la fissure	74
3.5	Distributions des contraintes critiques σ_c , influence de la longueur de décohésion	75
3.6	Multifissuration du matériau #1 : champs de contraintes σ_{11}	77
3.7	Localisation des défauts activés dans le fil, matériau #1, disques noirs : de gauche à droite, ordre des fissures : 1, 4, 5, 3, 2	78
3.8	Évolution des dispersions des contraintes critiques σ_c^f en fonction de l'état d'endommagement	79
3.9	Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #1	79
3.10	Multifissuration du matériau #2 : champs de contraintes σ_{11}	80
3.11	Localisation des défauts activés dans le fil, disques noirs, matériau #2, σ^R uniforme : de gauche à droite, ordre des fissures : 4, 2, 5, 3, 1	81
3.12	Évolution des dispersions des contraintes critiques σ_c^p en fonction de l'état d'endommagement, matériau #2	81
3.13	Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #2, contraintes à rupture uniforme	82
3.14	Multifissuration du matériau #2, contraintes à rupture dispersées	83
3.15	Fonction de dispersion des contraintes à rupture, matériau #2	84
3.16	Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #2, contraintes à rupture dispersées	84
3.17	Multifissuration du matériau #3 : champ de contraintes σ_{11}	85

3.18	Évolution des dispersions du rapport σ_c/σ^R en fonction de l'état d'endommagement	86
3.19	Courbe de comportement de la cellule de calcul	87
5.1	Comparaison des maillages des cellules hétérogène et avec MHE	106
5.2	Champ de contraintes σ_{11} dans la cellule de calcul avec MHE pour le matériau #1, échelle de -50 à 400 MPa	106
5.3	Répartition des contraintes aux bords droit et gauche des cellules de calcul	107
5.4	Matériau# 1 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE .	108
5.5	Matériau# 2 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE .	109
5.6	Matériau# 3 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE .	109
5.7	Matériau# 1 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c	110
5.8	Matériau# 2 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c	110
5.9	Matériau# 3 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c	111
5.10	Matériau# 1 : distribution des sévérités microscopiques S_m	112
5.11	Matériau# 2, σ^R uniforme : distribution des sévérités microscopiques S_m .	113
5.12	Matériau# 2, σ^R dispersé : distribution des sévérités microscopiques S_m . .	113
5.13	Matériau# 3 : distribution des sévérités microscopiques S_m	114
5.14	Matériau# 1 : dispersion des sévérités mésoscopiques S_M^0	116
5.15	Matériau# 1 : densités successives λ^i des sévérités mésoscopiques S_M . . .	116
5.16	Matériau# 1 : probabilités conditionnelles de rupture successives Φ_f^i	117
5.17	Matériau# 1 : évolution des distributions des coefficients de répartition des contraintes mésoscopiques κ^i	117
5.18	Matériau# 1 : probabilités de rupture et sévérités S_M^0 associées au défauts activés pour l'essai virtuel hétérogène	118
6.1	Homogénéisation et Perturbation Discrète : Milieu Homogène Équivalent, endommagement sous forme discrète et population statistique de défauts .	124
6.2	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-identique	125

6.3	Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-identique	126
6.4	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-statistique	127
6.5	Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, , matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-statistiques	128
6.6	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-identique	129
6.7	Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-identique	130
6.8	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-statistique	130
6.9	Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-statistique	131
6.10	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #3, HPD-identique	133
6.11	Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #3, HPD-identique	134
6.12	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #3, HPD-statistique	134
6.13	Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #3, HPD-statistique	135
6.14	Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, localisation des fissures choisie arbitrairement	137
6.15	Fonctions de densités cumulées (a.) des densités de défauts et (b.) des probabilités de rupture avec les contraintes à rupture Σ^i pour des probabilités de rupture $p^R(\Sigma^i)$ prises à 50%	139
6.16	Fonctions de densités cumulées (a.) des densités de défauts et (b.) des probabilités de rupture avec les contraintes à rupture Σ^i pour des probabilités de rupture $p^R(\Sigma^i)$ prises à 75%	139
6.17	Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE sans prise en compte des fissures	140
6.18	Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #1, HPD-probabiliste	141
6.19	Multiplés réalisations de la séquence de multifissuration par essais virtuels : échelle microscopique hétérogène, échelle mésoscopique par HPD	146

Liste des tableaux

2.1	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion fibre dans la matrice : maxima des contraintes σ_{11} à l'interface et σ_{11}^G dans la matrice en fonction du nombre de nœuds sur l'interface et de la taille maximale d'élément maillage, 1 unité = 1 pixel	52
2.2	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion composite dans la matrice ($E_f=200\text{GPa}$, $E_i=27\text{GPa}$, $E_m=350\text{GPa}$), 200 nœuds sur les interfaces : contrainte critique σ_{11} aux frontières, dans l'interphase et la matrice	54
2.3	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion composite dans la matrice ($E_f=200\text{GPa}$, $E_i=250\text{GPa}$, $E_m=350\text{GPa}$), 200 nœuds sur les interfaces : contrainte critique σ_{11} aux frontières, dans l'interphase et la matrice	54
2.4	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par un pore en fonction du pas de la frontière δ et la taille maximale d'éléments T_{max} , cellules de taille 200x200 pixels	57
2.5	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par un pore pour un pas de frontière δ égal à 2 en fonction de la taille maximale d'éléments T_{max} , cellules de taille 100x100 pixels	58
2.6	Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par le pore #3 pour une bande de contrôle centrée à une distance d et d'épaisseur e , un pas de frontière δ égal à 2, en fonction de la taille maximale d'éléments T_{max} et de la distance d	59
5.1	Tableau récapitulatif des modules d'Young et coefficient de Poisson pour le Milieu Homogène Équivalent	106
5.2	Tableau récapitulatif des paramètres d'ajustement des fonctions de distribution des coefficients de concentrations de contraintes	112

5.3	Tableau récapitulatif des paramètres d'ajustement des fonctions de distribution des sévérités microscopiques	112
6.1	Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contrainte à rupture uniforme . .	126
6.2	Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contrainte à ruptures uniforme	127
6.3	Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contraintes à ruptures dispersées .	131
6.4	Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contraintes à ruptures dispersées	132
6.5	Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #3	135
6.6	Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #3	136
6.7	Tableau comparatif des sévérités $S_M^0(i)$, $S_m(i)$ et $S_M^i(i)$ pour le processus statistique de multifissuration adapté aux champs hétérogènes	140
6.8	Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD-probabiliste pour le matériau #1	141
6.9	Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD-probabiliste pour le matériau #1	142

Introduction

Le développement des Composites à Matrice Céramique (CMC) tissés s'est accompagné de progrès significatifs dans les domaines de la modélisation et de la simulation numérique dédiés. Des modèles de calcul de structure toujours plus performants et descriptifs ont vu le jour, souvent développés à travers des approches multi-échelles, en accord avec le caractère structuré micro/méso/macrosopique des composites à fibres longues. Le découpage des échelles est soit numérique pour améliorer les performances de calcul, soit calqué sur la structure des matériaux pour décrire au mieux les phénomènes physiques.

La problématique de durée de vie des CMC tissés mobilise les aspects mécanique en ce qui concerne l'endommagement de la structure interne et physico-chimique par l'interaction du matériau avec l'atmosphère d'utilisation oxydante qui réduit ses performances. Il faut donc connaître l'état d'endommagement, *i.e.* les réseaux de fissures, pour quantifier son influence sur le comportement du matériau et également sur les dégradations physico-chimiques : plus les fissures sont nombreuses et ouvertes, plus le flux d'O₂ attaque les fibres et la durée de vie diminue. Les aspects cinématique – le lien entre l'état d'endommagement et l'altération des propriétés mécaniques – et cinétique – entre l'intensité de la sollicitation et l'état d'endommagement – sont très bien traités en terme de calculs mais généralement ajustés sur des essais expérimentaux. Ces essais sont souvent coûteux et d'une complexité grandissante à mettre en œuvre lorsqu'on regarde vers les échelles les plus fines : il est à l'heure actuelle quasiment impossible de suivre un essai sur une zone d'activité d'endommagement à l'échelle des fibres.

Les développements actuels visent à enrichir les modèles de calcul performants par des études aux échelles fines du matériau. Le chaînon manquant est le développement d'études micromécaniques et leur intégration aux modèles de milieu continu utilisés pour le dimensionnement et la simulation de pièces de structure, c'est à dire les applications industrielles de pointe développées conjointement avec le milieu de la recherche en mécanique.

Le développement des matériaux virtuels est une voie prometteuse pour réduire la quantité d'expérimentations nécessaires pour établir une loi de comportement. Fondés sur des observations et quantifications des propriétés géométriques spécifiques, ils sont générés de façon modulaire pour créer des bases de données de simulation, en particulier par Méthode des Éléments Finis (MEF). Les calculs qui déterminent les niveaux d'apparition de fissures par des critères de rupture adaptés servent à établir la cinétique d'endommagement, ceux qui relient le nombre de fissures à la diminution des rigidités caractérisent la cinématique

d'endommagement. Ces simulations s'appuient sur des valeurs caractéristiques des matériaux telles les contraintes à rupture ou les propriétés d'interfaces ; elles ne dispensent donc pas de caractérisation par des procédures expérimentales. Les essais virtuels menés ainsi se veulent prédictifs et dotés d'un fort sens physique puisqu'ils prennent en compte la morphologie hétérogène et les mécanismes élémentaires.

Dans la grande famille des approches multi-échelles sont souvent mal situées les approches statistiques probabilistes. Elles réalisent naturellement un passage d'échelle, de l'individu à la population. Une probabilité d'évènement associée à une valeur aléatoire particulière est donnée en fonction de la description de sa famille, très souvent c'est une probabilité de rupture en fonction d'une dispersion de défauts. En ce qui concerne les composites, des analyses morphologiques existent et donnent des descriptions de populations de singularités – fibres ou pores. Elles servent de point de départ à des analyses statistiques probabilistes de rupture associée.

Le sujet d'étude est l'endommagement transverse des fils de CMC tissés : ce sont les fissures qui apparaissent dans les fils perpendiculaires à une sollicitation uniaxiale. Ce mode d'endommagement est le premier à se développer lors d'une sollicitation mécanique, dans tous les composites à renforts multidirectionnels, parfois même présent après le cycle de fabrication en raison des contraintes résiduelles thermiques. Il est donc caractéristique de la non-linéarité du comportement en sollicitation uniaxiale. En sollicitation multiaxiale, tous les fils sont endommagés dans le sens transverse. L'ouverture des fissures participe au flux d'atmosphère oxydante qui conditionne la durée de vie du matériau qui dépend de l'altération longitudinale des fils. Les réseaux de fissures conditionnent la répartition des contraintes dans les différents organes de la structure tissée.

Les interactions entre modes d'endommagement sont nombreuses, il faut connaître avec précision chacun d'entre eux et estimer l'influence respective des uns sur les autres. L'étude qui est menée ici sur le cas des CMC tissés sera transposable à tous les composites à renforts multidirectionnels qui sont sujet aux phénomènes de fragmentation ; c'est en pratique la quasi totalité d'entre eux.

L'approche suivie dans cette thèse est de développer des matériaux virtuels modulaires et représentatifs de la microstructure qui apparaît dans les coupes transverses des fils. Des essais virtuels sont menés par la suite puis analysés par une approche statistique probabiliste de multifissuration adaptée des formulations classiques. Un passage d'échelle est finalement réalisé vers l'échelle fil, *i.e.* mésoscopique, prenant en compte les populations de singularités à l'échelle fibre, *i.e.* microscopique. Le présent manuscrit développe une modélisation de la multifissuration de milieux hétérogènes appliquée à la modélisation multiéchelle des composites céramiques tissés.

Dans la partie I sont présentés le comportement mécanique et des modélisations spécifique aux CMC tissés ou génériques sur des matériaux fragiles à inclusions. Les effets de structure sur l'endommagement et les types d'endommagement sont décrits. Des modèles appliqués au calcul de structure, multi-échelles et micromécaniques sont détaillés pour identifier les spécificités de traitement des phénomènes physiques et évaluer quels types de données doit appréhender l'approche développée dans cette thèse.

Dans la partie II est détaillée la démarche d'essai virtuel d'endommagement transverse des fils. Le développement des matériaux virtuels est présenté Chapitre 2. À partir d'une

coupe transverse d'un fil, plusieurs maillages de microstructures EF sont réalisés, à partir des mêmes données géométriques. Des études de sensibilité sur des singularités élémentaires visent à optimiser les paramètres de maillage des microstructures. Le Chapitre 3 présente les essais virtuels réalisés sur les matériaux virtuels. Les critères de rupture considérés sont détaillés avant d'appliquer une procédure de maillage de fissures : l'endommagement est introduit dans les fils sous forme discrète. Le caractère statistique des ruptures dans les céramiques est également pris en compte.

L'approche statistique probabiliste est déroulée en partie III. Le modèle statistique est détaillé Chapitre 4. Il est inspiré des approches classiques de sélection de défauts les plus sévères. Il revisite le formalisme de Weibull-Poisson et propose une version spécifique à la multifissuration des fils. Chapitre 5, les fonctions qui décrivent les populations de défauts sont identifiées en post-traitement des essais virtuels. Le modèle développé précédemment est appliqué pour déterminer les paramètres associés à la modélisation de la multifissuration à l'échelle mésoscopique.

Dans la partie IV, de nouveaux essais virtuels de multifissuration sont réalisés à l'échelle du fil en application de la stratégie de changement d'échelle. Les populations de singularités sont traitées sous forme discrète avec des paramètres de dispersion définis dans l'approche statistique. Pour chaque matériau virtuel des tirages aléatoires de populations de défauts sont réalisés selon la méthode Monte Carlo. L'approche statistique probabiliste de sélection des défauts permet également de diminuer le nombre de défauts à prendre en considération ; elle est ainsi testée en vue d'être validée.

PREMIÈRE PARTIE

Comportement mécanique et modélisation des
matériaux Composites tissés à Matrice Céramique

Chapitre 1

Comportements et modèles de CMCs tissés

Ce premier chapitre porte sur le comportement de Composites à Matrice Céramique tissés (CMCs) et des modélisations afférentes. La morphologie du matériau est décrite afin d'en identifier les échelles représentatives. Les phénomènes d'endommagement caractéristiques des CMCs sont ensuite détaillés ainsi que les influences de la structure à différentes échelles. Le phénomène de multifissuration ou de fragmentation récurrent dans les matériaux composites est ensuite abordé à travers d'autres configurations de matériaux tels que les Composites à Matrice Organique (CMO).

Une synthèse de modèles d'endommagement est proposée par la suite. Elle regroupe les approches le plus souvent rencontrées dans l'étude du comportement des matériaux composites. Les forces de chaque modèle en terme d'échelles descriptives et représentatives sont analysées.

La démarche d'essai virtuel d'endommagement transverse des fils développée dans ce travail est ensuite abordée. Un modèle statistique probabiliste de multifissuration sera mis en place pour décrire la multifissuration des fils. Il servira finalement à réaliser un changement d'échelle pour réaliser de nouveaux essais virtuels à l'échelle mésoscopique par la méthode d'Homogénéisation et Perturbation Discrète.

1.1. Comportement mécanique des CMCs tissés

1.1.1. Structure du matériau

La structure de base d'un CMC tissé est une préforme d'un tissu de mèches, appelées par abus fil¹, constituées de fibres, infiltré par une matrice céramique. La quantité de structures de tissage est trop vaste pour en dresser une liste exhaustive, d'autant que l'on peut les combiner au sein d'empilements des structures de base :

- monostrates : satins, taffetas...
- tissages 3D : Guipex[®] [CAS 96], SepCarb 4D [AUB 00], etc.

1. Dans les matériaux composites, les mèches sont un ensemble de fibres et les fils sont ces mèches imprégnées de matrice, organique (CMO) ou céramique (CMC).

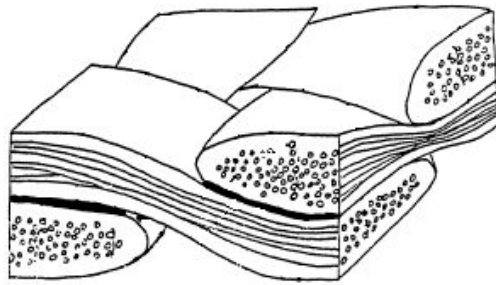


FIGURE 1.1 – Schéma standard de croisement de mèches, VER d'un taffetas. D'après [BOI 01]

L'échelle caractéristique du tissage est de l'ordre du millimètre, dite *mésoscopique*. Cette étude porte sur les zones du matériau où des fils se croisent FIG. 1.1 : ce sont des zones de forts gradients et de transferts de charges (voir section 1.1.2).

Les fibres les plus utilisées sont en carbone C ou carbure de silicium SiC, leur rayon moyen varie de 4 à 8 μm . La matrice est déposée par infiltration chimique en phase vapeur (CVI) [BER 98]. Le dépôt atomique génère une croissance de la matrice par couches concentriques autour des fibres. Cela entraîne la formation de pores à l'intérieur de fils et la microstructure finale est fortement hétérogène. L'échelle caractéristique de l'arrangement fibres, matrice et pores est *microscopique*.

Le procédé CVI permet de déposer diverses matrices : C, SiC, Si_3N_4 , SiO_2 ... En multipliant les cycles, des couches successives de composition diverse constituent une matrice séquencée FIG. 1.2. Suivant la configuration de la séquence matricielle, les propriétés du matériau final sont tout à fait remarquables : auto-cicatrisation, propriétés de déviation de fissures...

Un progrès notable a été l'introduction d'une interphase dans la microstructure : une fine couche de matériau, souvent du pyrocarbone PyC, positionnée entre fibres et matrice joue le rôle de fusible mécanique de par sa résistance mécanique plus faible [LAM 99]. Pour l'endommagement dans le sens des fils, les fissures traversant la matrice sont déviées le long des fibres dans la couche d'interphase fragile ; les fibres conservent leur intégrité et assurent la tenue de l'ensemble. Les premiers composites C/C avaient un comportement macroscopique fragile, l'introduction d'une interphase a permis d'évoluer vers un comportement élastique endommageable. Selon leur résistance, des interfaces entre différentes couches dans une matrice séquencée peuvent jouer ce rôle de fusible et dévier les fissures.

1.1.2. Endommagement de CMCs tissés

1.1.2.1. Comportement macroscopique

Bien que les constituants élémentaires aient un comportement fragile, les structures microscopique et mésoscopique rendent le comportement macroscopique élastique endommageable FIG. 1.3. Il est caractérisé par une baisse progressive de la rigidité en traction et la présence de déformations résiduelles causées respectivement par l'apparition de fissures et des phénomènes de frottement au niveau des lèvres des fissures qui empêchent le

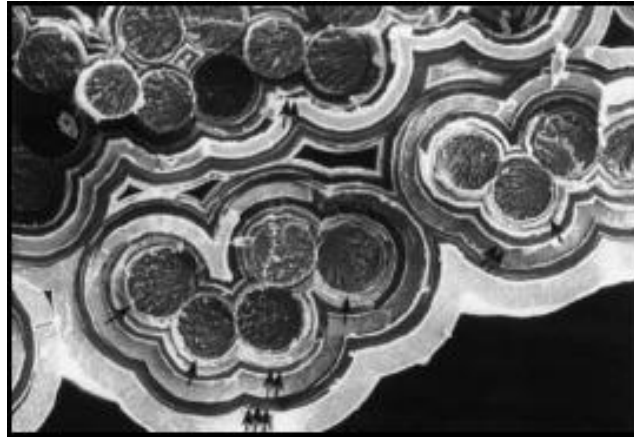


FIGURE 1.2 – Détails microstructuraux d'un CMC à matrice séquencée. D'après [LAM 99]

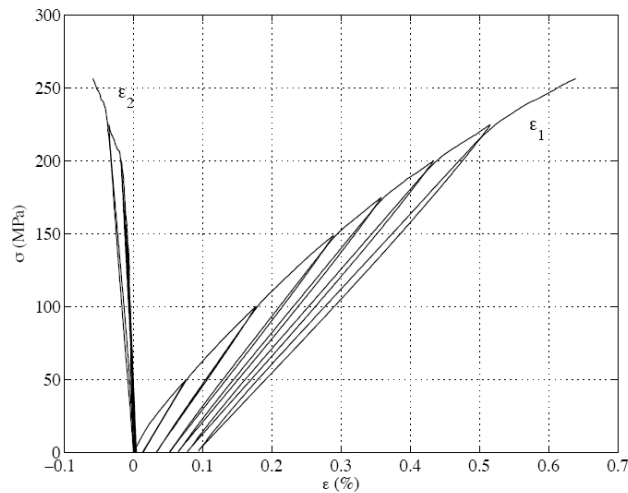


FIGURE 1.3 – Courbe de comportement en traction cyclée d'un 2.5D C/SiC. D'après [COU 08]

refermement. La rigidité en compression correspond à celle en traction selon l'historique d'endommagement : pour une compression suffisamment intense pour refermer toutes les fissures, on retombe sur un point singulier au delà duquel la rigidité en compression revient à sa valeur initiale non endommagée.

La structuration du matériau aux échelles micro et méso entraîne une grande hétérogénéité des champs de contrainte et de déformation. Cela influe de façon prépondérante sur le développement des réseaux de fissures.

1.1.2.2. Microstructure, mésostructure et rupture

Le tissage est responsable de la répartition des efforts au sein du matériau. Les champs mésoscopiques se répercutent en cascade sur les champs microscopiques par l'action de la microstructure. Les transferts de charge et les gradients les plus importants se produisent

au niveau des croisements de fils FIG. 1.1. Les fissures s'arrêtent en général aux limites du fil dans lequel elles apparaissent. Leur présence active généralement un nouveau réseau ; l'arrangement des fils au sein du tissage assure la redistribution des efforts lors du développement des réseaux de fissures en fonction de leur état d'avancement et de leur positionnement.

La microstructure très hétérogène – fibres, matrice et pores FIG. 1.2 – est responsable des hétérogénéités des champs de contraintes à l'échelle microscopique. Les contrastes élastiques entre les constituants entraînent sous sollicitation thermique ou mécanique des concentrations de contraintes fortement localisées au niveau de singularités et l'apparition de fissures. Dans les matériaux à fort contraste thermomécanique, il peut donc exister un préendommagement après refroidissement, en particulier dans les matériaux à fibres de carbone [WAN 94], [SIR 96], [DAL 97].

Les effets de structuration et d'échelle contrôlent l'endommagement. De manière générale, on peut dire que la microstructure est à l'origine de fissures et que la mésostructure pilote leur progression au sein du matériau. On distingue plusieurs modes d'endommagement caractérisés par des réseaux de fissures spécifiques.

1.1.2.3. *Les modes d'endommagement*

Différents modes d'endommagement sont définis par les caractéristiques de réseaux de fissures correspondants visibles au sein du tissage. Ils ont été observés et décrits pour différentes configurations de CMC tissés : C/C [SIR 96], C/SiC [GUI 94], SiC/C/SiC [CAL 98], SiC/SiC à matrice autocatrisante [FOR 00].

Pour tous ces matériaux, l'origine des fissures sont des concentrations de contraintes. Le caractère fragile des matrices céramiques entraîne une propagation instantanée d'une fissure dans le cas d'une matrice monolithique. Leur progression devient plus complexe dans une matrice séquencée.

Quatre modes d'endommagement sont ainsi décrits et observés FIG. 1.4 et 1.5 :

- (A) Endommagement de la matrice inter fils : réseau de fissures dans la matrice inter fils orientées soit par les directions privilégiées du tissage, soit par le chargement selon le matériau.
- (B) Endommagement transverse des fils : réseau de fissures dans la matrice intra fils perpendiculaires à un axe orthogonal aux fibres, appelées fissures transverses². Lors d'une sollicitation uniaxiale, se développe dans les fils orthogonaux à la direction de sollicitation.
- (C) Décohésion inter fils : déviation des fissures transverses en fissures de décohésion entre la matrice inter fils et les fibres périphériques des fils.
- (D) Endommagement longitudinal des fils : réseau de fissures dans la matrice intra fils perpendiculaires à l'axe des fibres, appelées fissures longitudinales³, suivi de ruptures

2. D'autres auteurs dénomment les fissures par les directions des plans des fissures, leurs fissures transverses correspondent à l'endommagement dans le sens longitudinal des fils.

Le parti pris ici est de s'attacher à la direction de sollicitation qui crée la fissure et qui correspond naturellement à la **normale** au plan de fissuration et également à la direction dans laquelle elle altère les propriétés du matériau.

Les fissures transverses sont donc dans des plans dont la normale est orientée à la perpendiculaire des fibres

3. Les fissures longitudinales sont ici dans des plans la normale est orientée dans le sens des fibres.

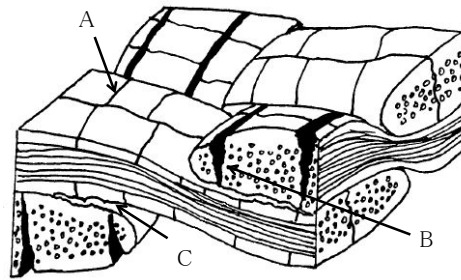


FIGURE 1.4 – Schéma des modes d'endommagement au niveau d'un croisement de fils d'un CMC. D'après [BOI 01]

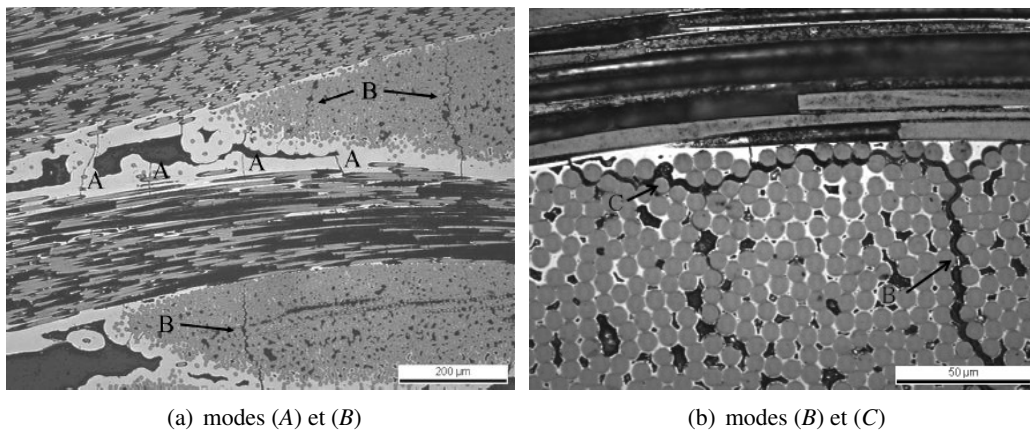


FIGURE 1.5 – Détails des modes d'endommagement : microstructure d'un C/SiC. D'après [COU 08]

de fibres qui entraînent la rupture totale du fil. Lors d'une sollicitation uniaxiale, se développe dans les fils orientés dans la direction de sollicitation.

Pour une sollicitation uniaxiale, on distingue dans la structure tissée les fils longitudinaux, dits à 0° , dans la direction de sollicitation et les fils transverses, dits à 90° , qui lui sont perpendiculaires. L'endommagement transverse opère dans les fils transverses et l'endommagement longitudinal dans les fils longitudinaux. Dans le cas où ce matériau est tourné d'un quart de tour, les anciens longitudinaux deviennent les transverses et inversement. Chaque type d'endommagement peut donc être présent dans tous les fils suite à des sollicitations multiaxiales. De façon à utiliser un vocabulaire rigoureux, les termes d'endommagement longitudinal ou transverse des fils sont adoptés, indépendamment de l'orientation des fils par rapport à une sollicitation⁴

4. On précise que l'étude de l'endommagement transverse concernera les fils transverses dans les cellules de calculs qui seront soumises à un chargement uniaxial.

Le scénario standard d'endommagement [BAS 01] [LAM 01] commence par les modes (A) et (B) : la matrice inter fils et les fils dans leur direction transverse sont les moins résistants. L'endommagement transverse se développe dans les fils transverses perpendiculaires à la sollicitation et entraîne des décohésions inter-fils (C). Les fils longitudinaux sont de plus en plus sollicités et l'endommagement longitudinal (D) s'amorce. En fin de vie du composite, la matrice inter fils n'assure plus la tenue de la structure tissée et les fils longitudinaux sont seuls à reprendre les charges. L'endommagement longitudinal est le mode qui pilote la durée de vie du composite.

En sollicitation uniaxiale, les conditions aux limites d'un fil longitudinal sont déterminées entre autre par l'état d'endommagement transverse des fils adjacents. Pour déterminer l'état de sollicitation et la durée de vie d'un fil longitudinal, il est donc fondamental de **connaître et prévoir l'état d'endommagement transverse** des fils voisins, de quelle façon il évolue et influe sur l'état général du matériau.

L'état de connaissance des propriétés des liaisons interfaciales entre les constituants du composite est fondamentale pour modéliser correctement les modes d'endommagement. Une résistance d'interface, ou interphase, forte ou faible a un effet significatif sur la progression, la déviation ou l'arrêt d'une fissure. Cette caractéristique joue un rôle essentiel dans la hiérarchie entre les modes d'endommagement. La problématique de modélisation et caractérisation des interfaces est abordée partie 3.2.1 lors de la modélisation de la rupture.

L'endommagement d'un matériau peut être suivi et caractérisé expérimentalement par suivi acoustique. Chaque rupture libère de l'énergie et crée une onde acoustique qui se propage dans le matériau. Une analyse énergétique permet de relier des classes de signaux à des modes d'endommagement et d'en déterminer la hiérarchie temporelle. Cette méthode développée dans [MOE 08a] a été appliquée à un SiC/SiC à matrice autotricitante dans [MOE 08b]. En début de chargement les ruptures matricielles et les décohésions fibre/matrice sont prédominantes, suivies par des ruptures de fibres puis des usures d'interface. Le scénario est identifié mais à faible déformation il est encore impossible de déterminer l'activité réelle de chaque mode. Une analyse simple d'émission acoustique de traction cyclée d'un C/SiC [COU 08] confirme l'apparition de fissures matricielles puis de ruptures de fibres.

L'étude de la multifissuration transverse des fils proposée dans nos travaux permet entre autres choses de préciser sa position dans la hiérarchie des modes de fissuration pour différents matériaux.

1.1.3. Le phénomène de multifissuration ou fragmentation

La multifissuration transverse des fils dans un composite tissé est visible sur la tranche polie d'une éprouvette de matériau FIG. 1.6. Le réseau de fissuration est relativement régulier. Le pas de fissuration à saturation varie selon la forme de la section du fil mais correspond à environ 3 à 4 fissures par regroupement de fils transverses.

Ce mode d'endommagement est analogue à d'autres processus d'endommagement par fragmentation :

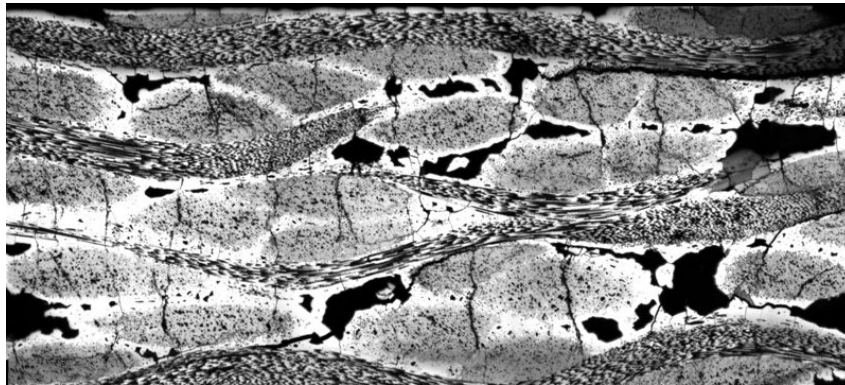


FIGURE 1.6 – Multifissuration transverse des fils dans un C/SiC, 250MPa

- (i) Endommagement de minicomposites à matrice céramique : sous sollicitation de traction uniforme dans le sens fibre, un réseau de fissures matricielles pontées par les fibres et orthogonales à la direction de chargement se développe [LIS 97].
- (ii) Multifissuration transverse des plis unidirectionnels dans les stratifiés : dans les plis dont la direction de renfort est perpendiculaire à la sollicitation dans le plan du composite, un réseau de fissures transverses se développe dans la matrice. Elles se propagent dans les plis adjacents dans certains CMCs à interface fibre/matrice forte [EVA 94], elles sont généralement stoppées aux interfaces interplis dans les CMO [TAL 94] pour rebrancher en fissures de délaminage inter plis.
- (iii) Fragmentation de fibres dans des composites à matrice métallique (CMM) : pour une sollicitation du composite dans le sens fibre, les fibres se fragmentent à l'intérieur d'une matrice ductile [ROU 08].

La comparaison de ces différents phénomènes fait ressortir des conditions d'existence communes à tous :

- **Dispersion** : microstructure cristalline (i) et (iii), microstructure hétérogène (ii)
- **Rechargement** : pontage de la fissure (i) et (iii), structure mésoscopique de stratification (ii) ou de tissage.

Dans le cas de multifissuration transverse des fils de CMC tissé, la dispersion découle de l'arrangement aléatoire des fibres et des pores dans la matrice intra fils et le caractère statistique des ruptures dans la matrice céramique. Le rechargement des zones saines est assuré par la structure du tissage par la présence de fils adjacents perpendiculaires FIG. 1.1.

Selon les analogies existant entre le mode d'endommagement transverse des fils et les processus d'endommagement listés ci dessus, il paraît opportun d'adapter des outils et modèles existants et éprouvés à notre problème. Un des objectifs de ce travail est de quantifier **l'influence des origines de variabilité micro dans le fil** - morphologie et comportements - et des conditions aux limites sur **les caractéristiques de la multifissuration transverse** - nombre, position et niveaux d'apparition des fissures.

1.2. Modélisation des matériaux composites

Une liste de modèles décrivant l'endommagement dans les matériaux composites à renfort fibreux est détaillé dans cette partie. Les spécificités de chacun sont passées en revue afin d'identifier leur efficacité pour décrire les réseaux de fissures et leurs caractéristiques.

1.2.1. Modèles destinés au calcul de structure

1.2.1.1. Les modèles de milieu continu

Les modèles de milieu continu adoptent un formalisme mathématique de lois de comportement dans lesquelles le matériau ou des sous-parties du matériau sont considérés homogènes et continus. Les variations ou discontinuités physiques sont homogénéisées par élément de volume : présence d'une fissure, singularité géométrique, variation locale des propriétés mécaniques, etc. Ces modèles sont particulièrement indiqués comme outils de simulation de structures sous chargements complexes.

Un modèle de milieu continu est inscrit dans un cadre thermodynamique et décrit l'évolution du matériau par des variables internes définissant (i) des potentiels thermodynamiques et des lois d'état – loi de comportement élastique – et (ii) des potentiels de dissipation et des lois complémentaires – endommagement mécanique. Un point de vue plus détaillé est présenté dans [LAD 96].

Deux définitions sont à retenir. La *cinétique* d'endommagement est la loi qui fait le lien entre l'intensité de la sollicitation et le taux d'endommagement, généralement par l'intermédiaire d'une force thermodynamique correctement définie. La *cinématique* d'endommagement décrit l'effet des variables d'endommagement sur les variations des propriétés mécaniques.

Dans le cas d'un comportement élastique endommageable, les variables internes thermodynamiques sont les variables d'endommagement et décrivent l'état de fissuration. Leur définition varie suivant les auteurs : elles sont exprimées soit à partir des variations relatives des modules élastiques, soit des modules de souplesse, soit selon une formulation mixte.

La théorie de l'endommagement anisotrope développée par Ladevèze dans [LAD 93] est très performante pour modéliser diverses configurations de CMCs stratifiés et tissés [GAS 96] [GAS 98]. Les variables d'endommagement sont définies en fonction de densités de fissuration. Le comportement macroscopique du matériau est correctement modélisé mais aucune information sur l'état d'endommagement à l'échelle du fil n'est accessible. En outre, une procédure expérimentale est nécessaire pour identifier les paramètres qui régissent les cinétiques d'endommagement. Ce type de modèle très efficace en calcul de structure se révèle pauvre en sens "physique" : le choix d'un milieu continu ne permet pas de représenter tous les phénomènes, par exemple l'aspect séquentiel de la fissuration.

Un modèle méso-macro appliqué aux CMO stratifiés appelé mésomodèle est développé dans [LAD 00]. Le stratifié est décomposé en éléments de base : le pli et l'interface. La stratégie de décomposition de domaines fait correspondre la partition de volumes de calcul numériques à la structure du stratifié. L'endommagement est uniforme par pli et varie de l'un à l'autre en fonction de son orientation, sa position, etc. Une échelle de variation méso est donc introduite dans la modélisation, mais la représentation de la physique de

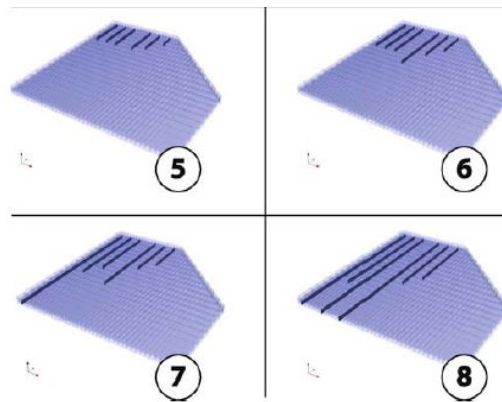


FIGURE 1.7 – Évolution du réseau de microfissures sous chargement thermomécanique d'un pli d'un CMO stratifié. D'après [LUB 09]

l'endommagement n'est toujours pas suffisamment pertinente pour rendre compte de l'aspect singulier des fissures.

Des évolutions ont été apportées dans [LAD 03], [LUB 09] et une équivalence entre l'état d'endommagement, décrit par un taux de fissuration, et les variables d'endommagement a été établie. Une nouvelle mouture de la stratégie de calcul par décomposition de domaine dont la géométrie correspond à l'échelle représentative de l'endommagement dans un CMO stratifié donne une représentation explicite du réseau de microfissuration FIG. 1.7. Le modèle de comportement issu du mésomodèle a été implanté dans des codes de calcul industriel avec succès [LUB 08].

Le mésomodèle est une belle illustration des approches multiéchelles descendantes du macroscopique vers le mésoscopique pour modéliser les structures composites. L'enrichissement de la géométrie et de la description de l'endommagement, qu'il semble évident d'intégrer pour améliorer les résultats de calcul, sont effectués à mesure que les capacités de calcul grandissent mais restent assujettis à la formulation du code. Les limites de performance des machines de calcul rendent impossible à l'heure actuelle un calcul multiéchelle micro-méso-macro complet et des simplifications sont nécessaires qui conditionnent l'exploitation des résultats. Par exemple, la description de l'endommagement par un taux de fissuration est traduite par une répartition régulière des fissures dans les volumes élémentaires, ce qui va à l'encontre du caractère aléatoire de la fissuration. De plus la variation continue du taux d'endommagement est en contradiction avec le caractère séquentiel et discret de l'apparition des fissures. Des approches montantes micro-méso-macro sont une alternative pour créer un lien fort avec les phénomènes à l'échelle micro et simuler les séquences de fissuration.

1.2.1.2. Les approches multi-échelle

Les modélisations présentées dans ce paragraphe sont des approches multiéchelles ascendantes : une représentation explicite à une échelle fine de la structure du matériau sert au développement d'un modèle à l'échelle supérieure. L'objectif de ce type d'approche est d'intégrer les échelles de structuration du matériau, à partir de la plus fine, à un outil de calcul de structure.

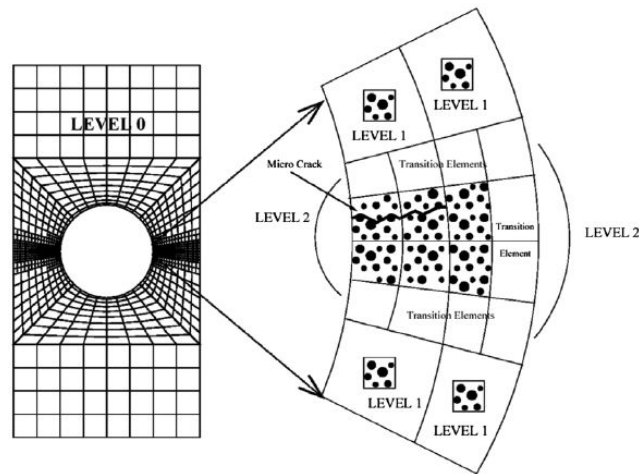


FIGURE 1.8 – Stratégie de calcul multi-échelle développée dans [GHO 07]

Une approche multi niveaux est développée dans [GHO 07] pour simuler l'endommagement dans un milieu hétérogène qui se présente sous la forme d'une section transversale d'un pli de CMO stratifié. Trois niveaux de modélisation imbriqués sont définis FIG. 1.8.

- Level 0 : simulation par éléments finis classique (FEM) du matériau homogène équivalent avec comportement endommageable dans les zones à faible gradient macroscopique, c'est le champ macroscopique équivalent.
- Level 1 : zone de transition entre le champ macroscopique (lev0) et le champ microscopique (lev2). La correspondance et la compatibilité des champs aux deux niveaux sont obtenues par homogénéisation asymptotique et découplage micro-macro.
- Level 2 : zone d'endommagement, le gradient macroscopique interagit avec la microstructure, le champ microscopique est obtenu par simulation d'éléments finis en cellule de Voronoï (VCFEM).

C'est une approche multiéchelle concurrentielle sous-structurée. Des calculs sont réalisés simultanément à plusieurs échelles avec différents modèles et comparés ensuite pour les faire converger vers une solution compatible. Dans les zones où l'endommagement est actif, il est fondamental de représenter la microstructure et les gradients locaux qui influent sur la propagation de fissures. Dans les zones où il ne se passe (presque) rien, seul le champ moyen est calculé. Une zone tampon fait le lien micro/ macro.

Le calcul micro est réalisé par VCFEM [GHO 93] : un élément défini par la cellule de Voronoï est associé à une inclusion. Cette technique donne d'excellents résultats pour la simulation de champs de contraintes dans un milieu hétérogène à inclusions. Des améliorations notables ont permis de simuler la décohésion fibre/matrice [GHO 00] et la fissuration matricielle par X-VCFEM [LI 07].

Cette approche est performante pour simuler la fissuration mais sa mise en œuvre est relativement complexe. Son champ d'application est limité à un mode d'endommagement particulier et il semble qu'elle ne soit adaptée qu'à des géométries simples et des zones d'endommagement localisées par les gradients macroscopiques. Le point important est que pour simuler correctement un phénomène physique, la fissuration transverse, il est impératif d'en **représenter explicitement** les causes, la microstructure et sa variabilité.

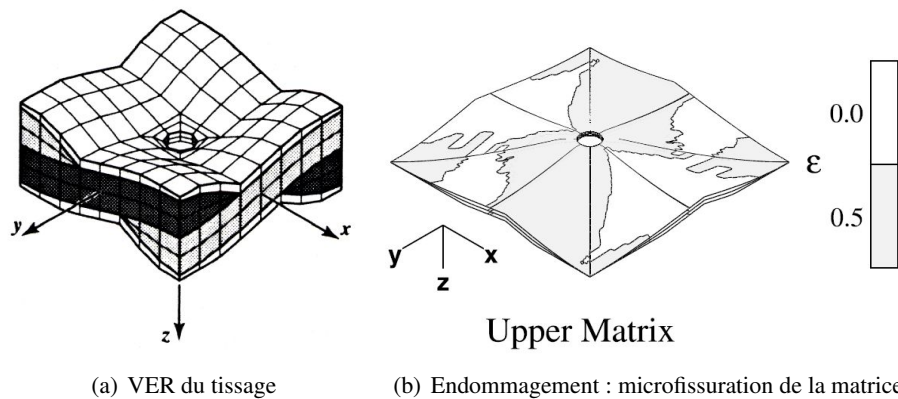


FIGURE 1.9 – Modélisation du tissage et de la microfissuration matricielle. D'après [KUH 99] et [HAA 03]

La stratégie développée dans [KUH 00] et [HAA 03] se base sur une représentation de la géométrie du volume élémentaire représentatif (VER) de la structure du tissage d'un matériau composite. Le VER se décompose en sous parties élémentaires : les fils de chaîne et de trame, la matrice inter fils et les méso porosités que l'on distingue FIG. 1.9(a). Au sein d'une approche multiéchelle hiérarchisée, les caractéristiques mécaniques équivalentes initiales des fils sont obtenues par homogénéisation de la microstructure hétérogène. Dans ces travaux, le seul mode d'endommagement retenu est celui de la matrice et est introduit sous forme d'une densité de microfissuration, les autres modes nécessitant des développements ultérieurs.

L'évolution de l'endommagement est pilotée par une stratégie itérative contrainte/ endommagement à chaque point d'intégration du calcul EF. La densité de fissuration dépend de la contrainte calculée en mode sous-critique (variation linéaire) ou supercritique (seuil). Une loi liant le module apparent et le taux de fissuration définit l'évolution des caractéristiques mécaniques. Une répartition spatiale simulée des zones endommagées est présentée FIG. 1.9(b).

Les résultats obtenus par cette approche sont qualitatifs mais très pertinents. Ils montrent **l'importance de l'effet de tissage** sur la localisation de l'endommagement : le couplage micro/méso est important. L'utilisation du taux de microfissuration pour décrire l'endommagement suppose une homogénéisation dans un volume qui correspond à la taille du maillage EF utilisé. La représentation proposée ne s'accorde pas tout à fait avec l'échelle de représentativité des réseaux de fissures observés habituellement FIG. 1.5.

L'approche Discrete Micro Damage (DMD) développée dans [COU 08] est une approche multiéchelle hiérarchisée qui repose sur une modélisation numérique réaliste des structures du matériau aux échelles micro et méso. Les modes d'endommagement sont introduits de manière discrète dans des cellules élémentaires. La fissuration longitudinale des fils, les décohésions fibre/matrice et les ruptures de fibres sont traitées dans le VER microscopique de la microstructure. La fissuration transverse des fils et la fissuration de la matrice inter fils est traitée dans le VER mésoscopique du tissage FIG. 1.10. Chaque mode d'endommagement est en fait représenté explicitement dans volume dont la taille correspond à

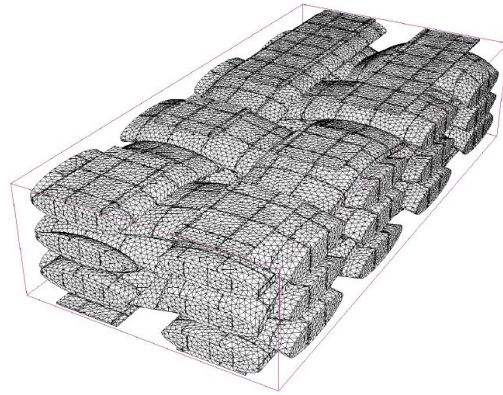


FIGURE 1.10 – Modélisation de la fissuration au sein du tissage, approche DMD. D’après [COU 08]

son échelle caractéristique.

Une stratégie d’identification associée, basée sur des essais numériques aux échelles micro et méso, permet de déterminer l’effet de l’endommagement sur les propriétés effectives du matériau. Des surfaces de réponse sont identifiées pour piloter le modèle de comportement endommageable macroscopique. Les cinétiques d’endommagement sont identifiées expérimentalement à l’échelle méso à partir d’un seul essai de traction. Le modèle a été implanté dans un code de calcul de structure et validé sur des pièces génériques industrielles.

L’effet du tissage sur le comportement macro est effectif par la représentation explicite de la géométrie de la structure. **La représentation discrète des réseaux de fissures** est très pertinente pour représenter les gradients de contraintes mésoscopiques qui interagissent avec les concentrations de contraintes à l’échelle microscopique. En effet une singularité a un effet beaucoup plus marqué dans son voisinage qu’une zone équivalente de rigidité moindre. Les variables d’endommagement choisies correspondent à des grandeurs caractéristiques de chaque mode : densité de fissuration, longueur de décohésion associée. L’amélioration à apporter est d’introduire **une approche numérique des cinétiques d’endommagement** par des simulations aux échelles micro et méso qui intègrent des critères de rupture locaux.

1.2.2. Les approches micromécaniques

La variabilité de la distribution géométrique des fibres est responsable des hétérogénéités des champs de contraintes à l’échelle microscopique et par voie de conséquence influe fortement sur l’apparition de fissures. Décrire l’endommagement par la modélisation de la fissuration nécessite une approche micromécanique prenant en compte la physique des amorces de fissure [MAT 03]. De nombreuses études portent sur les hétérogénéités, les statistiques étant performantes pour décrire les dispersions des données morphologiques ou mécaniques et la fissuration. Des approches probabilistes phénoménologiques et prédictives donnent des probabilités de rupture de structures composites et tendent vers une vision fiabiliste du comportement.

1.2.2.1. *Modélisation des inclusions dans la microstructure*

Parmi les premières études sur les inclusions, Eshelby propose une méthode analytique pour déterminer les champs de contraintes et déformations pour des inclusions elliptiques [ESH 57] [ESH 59] ou autour d'une fissure [ESH 69]. Ces calculs s'appliquent à des formes élémentaires pour des raisons évidentes de simplifications analytiques. Le contraste élastique entre le milieu considéré et l'inclusion entraîne une hétérogénéité du champ de contraintes et les localisations de concentrations de contraintes sont des sites privilégiés pour l'amorce de fissure.

Les calculs des champs de contraintes autour des singularités est une base de la mécanique de la rupture [MAS 78]. La contrainte maximale calculée en fond de fissure est liée au facteur d'intensité de contraintes par une relation dans laquelle interviennent des paramètres géométriques. L'intensité de ce facteur comparée à la ténacité du matériau détermine le potentiel de progression de la fissure. Certains auteurs ont adapté le formalisme de la mécanique de la rupture à l'amorce d'une fissure au niveau d'un pore en déterminant la ténacité effective qui décrirait la progression d'une fissure équivalente [EVA 80].

Ces travaux qui traitent d'une seule singularité évoluent naturellement vers l'étude d'interactions entre inclusions et vides (pores, fissures, charges...), l'objectif étant l'estimation des champs de contraintes dans un milieu hétérogène contenant tous les types d'inclusions. Pour un fil contenant seulement des fibres et une matrice, des méthodes analytiques suffisent pour déterminer les champs de contraintes et déformation. Dans le cas d'une matrice séquencée, une simulation numérique type MEF est inévitable.

Une étude de l'influence de la distribution de la microstructure sur le comportement transverse d'un CMO à renfort fibreux unidirectionnel est proposée dans [STA 95]. L'observation par microscopie d'une coupe transverse d'un pli ramène l'étude à une matrice contenant des inclusions circulaires réparties aléatoirement FIG. 1.11(a). La dispersion de la géométrie est caractérisée à l'aide d'outils statistiques. La population des centres de fibres, qui constitue une famille de variables aléatoires, est caractérisée par sa fonction de répartition des proches voisins, dont dérivent les fonctions densité du second ordre et de répartition des paires. Cette dernière décrit la distribution des distances inter centres.

Une méthode de superposition est appliquée à des solutions analytiques type Eshelby pour une inclusion pour obtenir les champs de contraintes résultant des interactions entre fibres et fissures. Diverses configurations de microstructure sont reproduites avec des fonctions de distribution usuelles. Les champs de contraintes obtenus permettent d'évaluer l'influence de la microstructure sur la dispersion des concentrations de contraintes et la propagation des fissures. Les facteurs d'intensité de contraintes en pointe de fissure ou les concentrations de contraintes à l'interface fibre/matrice calculés sont utilisés pour déterminer la progression de fissures par la mécanique de la rupture. La fissuration virtuelle d'une configuration existante est simulée FIG. 1.11(b) avec un bon accord entre expérimental et numérique, ce qui valide les hypothèses émises sur la propagation des fissures dans la matrice.

Cette étude montre l'impact du désordre de l'arrangement des fibres sur la dispersion des grandeurs critiques au niveau des singularités (fibres et fissures). Leurs interactions sont difficiles à quantifier mais des tendances qualitatives peuvent être tirées : plus la quantité de fibres proches est importante, plus les concentrations de contraintes sont nombreuses et intenses, la progression des fissures en est facilitée. La reproduction du trajet de fissuration

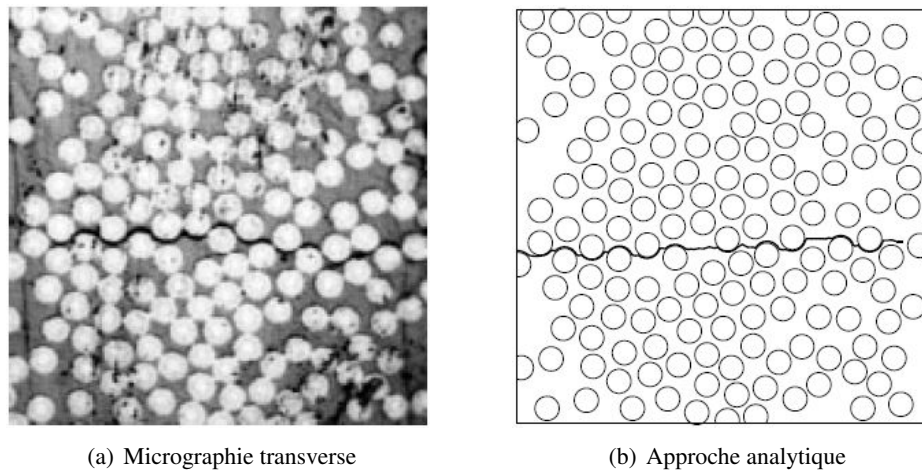


FIGURE 1.11 – Observation et simulation de la fissuration transverse dans un pli d’un CMO. D’après [STA 95]

est approximative, mais efficace, en raison des méconnaissances sur les paramètres locaux qui pilotent la progression de la fissure.

Des travaux similaires sont présentés dans [TRI 05] pour quantifier le lien entre microstructure et champs de contraintes, en particulier l’estimation des caractéristiques mécaniques du milieu homogène équivalent. La différence notable est que les champs de contraintes hétérogènes sont simulés par EF. La notion de dimension représentative est également plus présente, la taille des cellules de calcul étant optimisée pour faire converger le calcul des propriétés équivalentes. La taille du VER des hétérogénéités des champs de contraintes est estimée à 50 fois le rayon moyen de fibre, 15 fois le rayon pour les propriétés équivalentes [TRI 06]. Un bilan statistique sous forme d’histogramme de répartition décrit la distribution des contraintes et des probabilités de rupture qui en découlent.

Le VER morphologique de la microstructure peut être obtenu par une analyse statistique d’une micrographie. Une image binarisée d’un milieu biphasé est obtenue par seuillage. En considérant le milieu périodique, la courbe de covariance [JEU 01] – ou densité de probabilité à 2 points – donne des indications sur la portion volumique et la répartition relative de couples de points. Cette fonction s’applique à une distribution de points en 3D bien que son expression soit complexe, l’avantage en 2D est qu’elle correspond à la transformée de Fourier de l’image. Cette technique a été appliqué à des CMO [GAJ 06] ou des CMC [COU 08] pour déterminer la taille de cellule géométrique représentative. Les VER morphologiques obtenus correspondent aux VER de contrainte moyenne et sont valides pour le calcul de propriétés équivalentes.

Quelques éléments importants ressortent de ces études : des outils statistiques pour décrire les microstructures, des outils numériques pour générer les champs de contraintes hétérogènes, un traitement statistique des données pour aborder la fissuration. On note également que la notion de VER est indissociable d’une grandeur physique caractéristique, par exemple le VER de comportement moyen, le VER d’hétérogénéités des contraintes. Une

attention particulière est portée aux échelles de représentativité et la façon dont elles s'imbriquent pour la construction de la démarche de modélisation. La multifissuration n'est pas traitée à l'échelle des composites, c'est un aspect qui sera développé dans nos travaux.

1.2.2.2. *Approches statistiques probabilistes*

C'est historiquement Weibull qui a initié les approches statistiques probabilistes de la résistance des matériaux fragiles [WEI 39]. Son approche décrit la dispersion des ruptures par une fonction de densité cumulée dont l'expression est obtenue à partir de l'hypothèse fondamentale du maillon faible : pour une population de défauts donnée qui sont responsables d'une amorce de fissure, la probabilité de rupture de l'ensemble est égal au produit des probabilités associées à chaque défaut. Lorsque l'on considère une densité volumique de défauts $\Phi(\sigma)$ qui décrit la condition d'amorçage d'un défaut en fonction d'un champ de contrainte appliquée, la probabilité de rupture d'un volume de matériau V est donnée équation (1.1).

$$p_{rupture}(V) = 1 - e^{-V\Phi(\sigma)} \quad (1.1)$$

Cette expression est valable pour la première fissure car le défaut qui l'initie est le maillon faible de la chaîne complète. Dans un processus de fragmentation, d'autres maillons de la chaîne sont activés par la suite ; l'expression ci-dessus décrit correctement la dispersion des premières ruptures mais à mesure que le nombre de ruptures augmente et l'hypothèse du maillon faible n'est plus valable pour le volume total considéré au début [BAX 93].

Par exemple dans un volume V constitué de 30 sous volumes qui définissent la densité de fissure — un par sous-volume —, la 8^e rupture est le maillon faible des 23 derniers sous-volumes c'est à dire d'un volume égal à $23V/30$, l'expression de la probabilité de rupture n'est plus valable. La densité de défauts ne prend pas en compte que certains ont déjà été activés. Elle est d'autant moins valable que la fragmentation est avancée.

Des améliorations ont été apportées pour mieux tenir compte des densités de défauts et de l'hypothèse du maillon faible. On trouve dans [BAX 98] [LAM 09] et [CAS 10] trois approches de simulation de fragmentation de composites 1D. À chaque élément ou fragment est associé une résistance décrite par le formalisme de Weibull, la description des défauts et la densité choisie étant compatibles avec les remarques décrites précédemment. Le processus de placement des défauts varie entre ces trois approches.

Baxevanakis décrit la localisation des défauts et la contrainte correspondante par une densité de Poisson dont l'intensité permet de retrouver le formalisme de Weibull. En revanche les fragments sont de taille uniforme, c'est un cas limitant.

Lamon utilise un processus de Monte-Carlo pour localiser un défaut dans un fragment et la contrainte critique dépend de la taille du fragment avec un bon accord entre simulation et expérimentation, tant au niveau des tailles de fragment que de la dispersion des contraintes à rupture.

L'approche suivie par Castelier considère une distribution spatiale de Poisson pour décrire la population de défauts dans le milieu. La fragmentation est simulée selon trois méthodes de traitement statistique des localisations et niveaux d'apparition des contraintes. Elles donnent toutes trois les mêmes comportements, l'endommagement peut donc être simulé de plusieurs manières en considérant toutefois les mêmes caractéristiques statistique de la population de défauts.

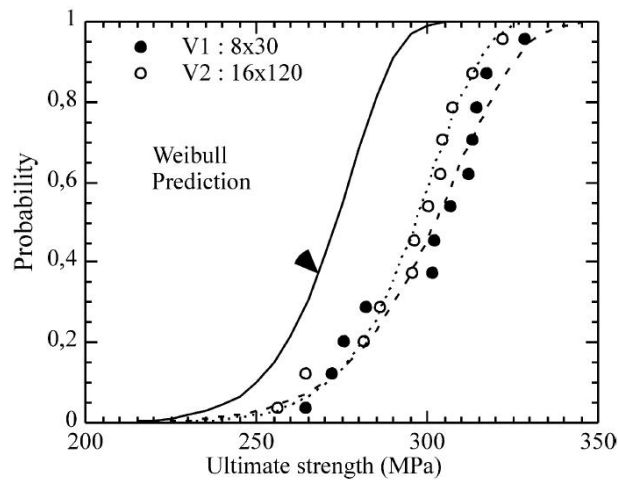


FIGURE 1.12 – Identification de la distribution de contrainte à rupture d'un CMC tissé 2D et prédiction erronée associée calculée à partir de V1 pour V2. D'après [CAL 02]

Une modélisation statistique de la multifissuration matricielle et des décohésions inter fils dans les CMC est proposée dans [LAM 98]. Une modélisation par MEF de la structure du tissage en 2D est utilisée pour déterminer les champs de contraintes dans la structure tissée. En post-traitement des calculs, des probabilités d'apparition de fissures sont données par un modèle de Weibull et un critère de rupture en contrainte élémentaire. Les paramètres statistiques de Weibull sont identifiés au préalable sur des essais de constituants élémentaires du tissage : les micro et minicomposites, la matrice inter et intra fils. Les fissures sont introduites dans le maillage et représentées explicitement par dédoublement des noeuds pour les décohésions et les fissures dans les fils transverses, par une altération localisée des propriétés mécaniques des éléments du maillage pour les fissures matricielles et l'endommagement des fils longitudinaux. Ces simulations donnent des courbes contrainte/déformation de la structure tissée 2D conformes aux comportements expérimentaux observés.

Une approche statistique de l'amorçage et la propagation de fissures sous sollicitation de fatigue thermique dans un matériau métallique en 2D est proposée dans [MAL 09]. Elle se base sur une distribution de Poisson des défauts activés dont l'intensité est variable et dépend de l'état de contrainte. L'apparition, la propagation et les interactions entre fissures sont pilotées par des processus statistiques. À chaque itération, de nouvelles fissures sont introduites par un processus de Poisson dont l'intensité dépend de l'incrément de contrainte et des événements précédents. La loi choisie permet de retomber sur une description par un processus de Weibull des fissurations successives. Les interactions entre fissures sont prises en compte par un processus d'obturation qui limite la progression de certaines d'entre elles. L'avantage de cette approche est la prise en compte de la répartition spatiale des fissures, indispensable pour les densités de fissures observées dans de tels cas.

Quelques approches statistiques de la rupture, parmi les moins récentes et les moins efficaces, se basent sur l'assertion qui associe une rupture à un défaut unique, c'est à dire un défaut activé par fragment ou zone élémentaire. Or pour pouvoir utiliser le formalisme de Weibull pour décrire cette population, il faut que le défaut qui cause la rupture du fragment

soit le maillon faible d'une population de défauts plus dense qui n'est pas forcément observable au sein de chaque fragment. Son identification est souvent abusément effectuée sur la population des défauts activés. Si la simulation de cas réels est parfois probante, une confusion dans les densités de défauts conduira à une impossibilité ou erreur d'extrapolation telle que celle visible FIG. 1.12. Ce point sera abordé au Chapitre 4.

Ce type d'approche statistique est néanmoins très efficace pour rendre compte de la dispersion des positionnement et des niveaux d'amorce des ruptures. Elles sont tout à fait indiquées pour traiter le processus itératif de fragmentation transverse des fils. De façon naturelle, une approche probabiliste de multifissuration réalisera un changement d'échelle de la population complète microscopique à une population de défauts associés à une fissure mésoscopique.

1.3. Objectif du travail de thèse : modélisation de l'endommagement transverse des fils des composites tissés

L'intitulé initial de la thèse était "Introduction de la micromécanique dans les modèles de milieu continu destinés au calcul de structure : le chaînon manquant". De par l'étendue des questionnements qu'il soulevait, les travaux ont été recentrés sur l'endommagement transverse des fils, mais il définissait correctement des axes de recherche : prendre en compte les échelles fines par la micromécanique pour s'adapter et enrichir les modèles de calcul de milieu continu appliqué à des applications industrielles typées recherche et développement. Le sujet d'étude est la description du réseau de fissures d'endommagement transverse dans les fils à partir des caractéristiques microscopiques pour effectuer ensuite un changement d'échelle par la simulation de l'endommagement à l'échelle mésoscopique. La réponse donnée dans ces travaux se décompose en quatre étapes, qui reprennent de nombreux aspects des modèles listés précédemment.

Matériau virtuel. Ce sont des modélisations modulaires de microstructures d'un type de matériau. Pour les CMC tissés, la microstructure est constituée au départ de fibres. Les traitements de surface et les procédés de fabrications multiples aboutissent à des séquences matricielles variées. Le matériau virtuel développé ici permettra de générer à partir d'une configuration de fibres et de micropores de nombreuses microstructures, avec ou sans porosités, multiséquencées, etc. en modulant les procédures de reconstruction de géométries.

Des maillages Éléments Finis variés seront générés à partir d'une micrographie. Les données morphologiques de l'arrangement microstructurel sont obtenues par analyse d'image. Une procédure numérique transforme ces données en maillages EF hétérogènes. L'échelle de représentation est microscopique, on distingue les fibres, les micropores et les différentes couches de matrice. Dans ce travail, les maillages EF sont relativement lourds, plusieurs centaines de milliers de ddl pour la résolution MEF. La stratégie de calcul numérique étant relativement sommaire, un calcul sur un processeur avec beaucoup de RaM, le type d'éléments finis est donc le plus simple possible.

Le concepteur de matériaux possède de cette manière un outil qui rend des informations sur les performances d'une configuration microstructurale matériau avant même de l'avoir mise en fabrication.

Essai virtuel. L'essai virtuel est une simulation qui se substitue à une démarche expérimentale impossible à mettre en œuvre. En ce qui concerne la multifissuration transverse, la taille d'observation et d'action des fissures est à l'échelle du tissage alors que les phénomènes physiques d'amorce de rupture ont lieu à l'échelle des fibres, voire plus petit encore. Un suivi optique ne permet pas d'avoir une résolution à l'échelle microscopique sur une taille d'image de l'ordre du tissage (~ 1 mm).

L'emploi de critères de rupture à l'échelle microscopique et l'introduction de fissures dans les maillages EF de matériaux virtuels décrits ci-dessus réaliseront des essais virtuels de multifissuration transverse. Les critères de rupture donnent les localisations et les niveaux d'apparition des fissures. Elles sont introduites dans les maillages par des procédures de remaillage développées spécifiquement. Les simulations sur les matériaux endommagés montrent l'influence des fissures sur les champs de contraintes et l'apparition des suivantes. Les cinématiques et cinétiques d'endommagement sont caractérisées à partir d'études micromécaniques. Elles dépendent des résistances des interfaces, des interphases, des propriétés de déviations de fissures dans les couches, etc.

De façon plus générale, l'essai virtuel se démarque fortement des simulations de validation ou d'ajustement de modèle par comparaison avec un essai expérimental. Il est destiné à explorer de nouvelles configurations de mise en œuvre de matériaux à travers des sollicitations innovantes ou particulièrement complexes à réaliser à une échelle de caractérisation en recherche et développement. Son but est de pallier les limites des explorations expérimentales, bien qu'elles soient repoussés plus loin chaque jour.

L'application d'essais virtuels aux matériaux virtuels élargit les possibilités dans les démarches de modélisation ; certaines incompréhensions telles que les paramètres de couplages ou découlant d'un manque d'observations pourront être levées. La représentation explicite de la microstructure est par exemple un avantage pour le développement d'une modélisation statistique de la multifissuration.

Approche statistique probabiliste Les approches statistiques sont une suite naturelle à l'analyse des champs de contraintes dans la microstructure hétérogène. L'idée est ici de caractériser chaque singularité au sens de l'endommagement, donc au regard d'un critère de rupture spécifique. Cela peut être fait dans le fil hétérogène par la contrainte locale critique ou un paramètre adaptée dans un Milieu Homogène Équivalent qui se substitue au fil hétérogène. Chaque singularité – fibre, pore, interphase autour d'une fibre – est considérée comme un défaut dans le fil homogénéisé et caractérisé par sa sévérité, qui combine le critère local et la description du champ de contraintes dans le MHE.

La dispersion des défauts et son évolution après les introductions de fissure successives dans le fil est décrite par des fonctions statistiques usuelles. Les processus de sélection de défauts classiques tel que le principe du maillon faible sont appliqués à chaque étape pour déterminer une probabilité d'apparition de fissure. Un modèle statistique probabiliste de multifissuration est mis en place et confronté aux résultats obtenus dans les essais virtuels.

La description statistique du milieu et l'approche probabiliste de fissuration successives permettent d'effectuer un changement d'échelle et traiter la multifissuration à l'échelle du fil.

Homogénéisation et Perturbation Discrète. Les essais virtuels sont réalisés sur le fil homogénéisé en transposant les défauts identifiés lors de l'approche hétérogène à travers

une population discrète des sévérités : elle est baptisée HPD. La cellule, dite mésoscopique en raison des échelles de représentation de chaque composant – fils, matrice interfils – est soumise à une sollicitation analogue à l'approche hétérogène et la population de sévérités permet d'appliquer un critère de rupture et d'introduire les fissures. Les calculs sont beaucoup plus rapides et l'évolution de l'endommagement est pilotée par des variables issues d'une étude micromécanique. Plusieurs possibilités pour transposer les populations de défauts dans le MHE par l'approche statistique existent.

On peut soit utiliser une population de défauts de même densité spatiale que les singularités dans la microstructure. Une premier cas de validation transpose les défauts à l'identique pour tester la correspondance entre les essais virtuels aux deux échelles : c'est la HPD-identique. Toujours en utilisant la même densité spatiale, les fonctions statistiques de dispersion de défauts identifiées sur les essais virtuels hétérogènes peuvent être utilisées pour réaliser des tirages statistiques de population de défauts : c'est la HPD-statistique. Elle s'apparente une procédure Monte-Carlo.

L'approche probabiliste de la rupture permet d'associer un défaut et sa probabilité d'amorçage à une fissure. L'idée est d'associer à un évènement mésoscopique, la fissure transverse, une grandeur représentative de la cause microscopique qui l'a générée. Par exemple, pour cinq fissures on aura sélectionné cinq défauts avec une probabilité associée de rupture : c'est la HPD-probabiliste.

Les travaux détaillés dans ce manuscrit trouvent leur application, par exemple, en amont de l'approche DMD développée par Couégnat dans [COU 08]. Les cinétiques d'endommagement ont été identifiées expérimentalement, elles sont ici explicitées en fonction de paramètres matériau microscopiques : géomorphologie, grandeurs à ruptures (interface, interphase, matrice) et variabilités. La démarche d'Essai Virtuel et d'analyse statistique pour effectuer un changement d'échelles participe à une vision "tout numérique", autant que faire se peut, du développement des matériaux composites.

Cette approche pourra également être appliquée à tous les processus de fragmentation dans les composites à renforts multidirectionnels ou plus largement adaptée aux problèmes de fragmentation de matériaux fragiles.

DEUXIÈME PARTIE

De l'observation de la microstructure du matériau à
l'essai virtuel de multifissuration transverse

Chapitre 2

D'une photo aux éléments finis : modélisation et simulation des microstructures et mésostructures

Ce chapitre décrit la méthode développée pour transformer une micrographie de la microstructure du matériau en un maillage éléments finis et en réaliser une simulation numérique d'essai virtuel. Une analyse d'image de formes est effectuée pour identifier les éléments de la microstructure : fibres, pores et matrice. La procédure de maillage développée spécifiquement est ensuite appliquée pour obtenir la discrétisation du matériau. Des cas test sur des inclusions ont permis d'optimiser les paramètres de maillage. La géométrie des cellules de calcul est adaptée à la structure du tissage pour satisfaire aux conditions de fragmentation transverse du fil. Plusieurs matériaux virtuels sont générés.

2.1. Analyse d'image de coupes transverses de fils

L'image du fil qui sert de point de départ est obtenue par microscopie optique de la tranche d'une éprouvette de traction orientée à 0° ou 90° . Le matériau est préparé avec soin pour obtenir un poli miroir. Une section transverse d'un fil est repérée et photographiée. L'orientation de la coupe par rapport aux directions des fils est importante pour que les sections de fibres soient perpendiculaires au plan de coupe et le plus circulaire possible.

Le poli miroir permet de distinguer les hétérogénéités de la microstructure. Il est important que toute la zone d'observation soit située autant que possible dans un même plan de focalisation. Le polissage est effectué manuellement par plusieurs passages avec des finesses de grain de plus en plus faibles.

Pour une définition suffisante des singularités sur l'image, le grossissement utilisé nécessite plusieurs prises de vue avant de reconstituer le fil entier à l'aide d'un logiciel de reconstruction d'images : 19 images ont été prises FIG. 2.1. Malgré tout le soin apporté à la préparation des images, des défauts de contraste subsistent. Un réajustement est donc effectué avant de procéder au seuillage (FIG. 2.2) et à l'analyse de formes.

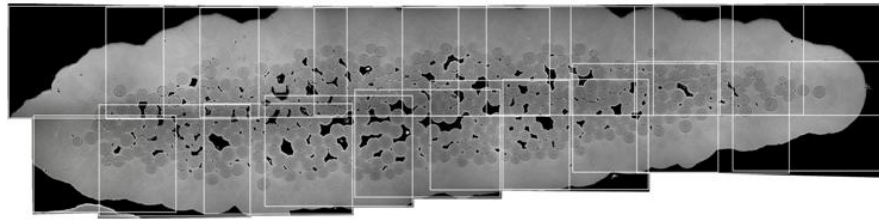
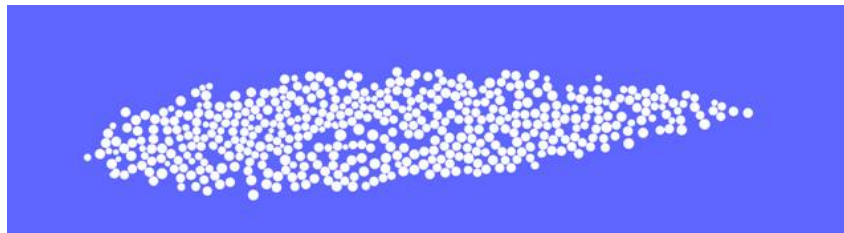


FIGURE 2.1 – Image reconstituée du fil transverse, détail des images de départ



(a) fibres



(b) pores

FIGURE 2.2 – Images obtenues après seuillage de formes

Les fibres sont analysées avec le logiciel Image J¹. Des ellipses sont identifiées et décrites par leurs caractéristiques géométriques : petit et grand axes, position du centre et orientation. Les pores sont identifiés par les pixels qui constituent les courbes enveloppes et traités sous forme de séries de points.

2.2. Génération des cellules de calcul par éléments finis

Les données géométriques sont traitées par un code développé sous Matlab, qui génère des maillages compatibles avec les outils numériques de calcul ZéBuLoN² et de visualisation Medit³. Une modélisation paramétrique des inclusions (fibres et pores) a été utilisée

1. <http://rsweb.nih.gov/ij/>

2. http://www.mat.enscm.fr/Competences/fr_zebulon.php

3. <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0247.html>

pour optimiser les procédures de maillage au regard des résultats de simulation, principalement la convergence au maillage du calcul et l'estimation de contraintes locales. Cette démarche permet de générer un grand nombre de microstructures modulaires et variées.

2.2.1. Maillage des cellules

Les maillages réalisés sont à géométrie 2D adaptés à des calculs en déformations planes ce qui réduit donc très fortement le nombre de degrés de liberté (ddl). Malgré tout les maillages obtenus sont de taille conséquente, de 500 à 700000 ddl. Les temps de calcul en comportement linéaire élastique restent faibles en comparaison de nombreux modèles développées en calcul de structure. De nombreuses simulations sont réalisées sur un seul processeur avec des ressources mémoire conséquentes, 16 Go de RAM.

Cette configuration 2D suppose une invariance géométrique de l'arrangement microstructural dans l'axe des fibres. Elle correspond plus intuitivement à une géométrie de composite stratifié de plis. Cela peut agrandir le champ d'application de cette étude. C'est dans le cas des composites tissée une hypothèse forte et simplificatrice. L'effet d'ondulation du tissage est néanmoins très faible à l'échelle des fibres, il semble justifié de négliger son effet dans la modélisation des microstructures, on peut considérer les fils rectilignes.

La variabilité de l'organisation des fibres est marquée. Une analyse statistique de ces simulations aura un effet globalisant sur l'impact des variabilités sur la description de l'endommagement à l'échelle mésoscopique.

Des routines de traitement des données développées spécifiquement et des logiciels libres de maillage constituent la procédure de maillage de la microstructure. Les limites des différentes zones (fibres, interphase, pores) sont les données d'entrée. Les frontières des interphases, lorsqu'elles sont prises en compte, sont obtenues par dilatation des fibres. Le logiciel Triangle⁴ permet de convertir ces séries de points en un maillage de type triangulation de Delaunay FIG. 2.3(a). Ce maillage est ensuite converti au format ZéBuLoN ; le type d'éléments utilisés c2d3 sont des triangles 2D à un point d'intégration.

Ces éléments sont relativement pauvres en terme de simulation numérique de par les fonctions d'interpolation linéaire des champs solution, mais leur mise en œuvre est simple. Un grand nombre de calculs sur des cellules de calcul relativement lourdes est ainsi réalisé.

On notera que cette procédure permet de générer facilement différentes microstructures. Par exemple on génère une matrice séquencée en dilatant plusieurs fois les fibres. On peut encore ne pas représenter les pores, ce qui correspond à la microstructure d'un CMO. Plusieurs configurations sont présentées au paragraphe 2.3.

La modularité des structures que l'on peut modéliser amène à parler de *Matériau Virtuel*. En effet, on peut imaginer de nouvelles configurations de microstructures, les tester numériquement, prévoir leur comportement et conclure sur leurs propriétés et performances au préalable de la phase de fabrication.

L'effet de rechargement après fissuration au niveau des chevauchements entre fils de trame et de chaîne dans le tissage est assuré par l'adjonction de fils longitudinaux de part

4. <http://www-2.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>

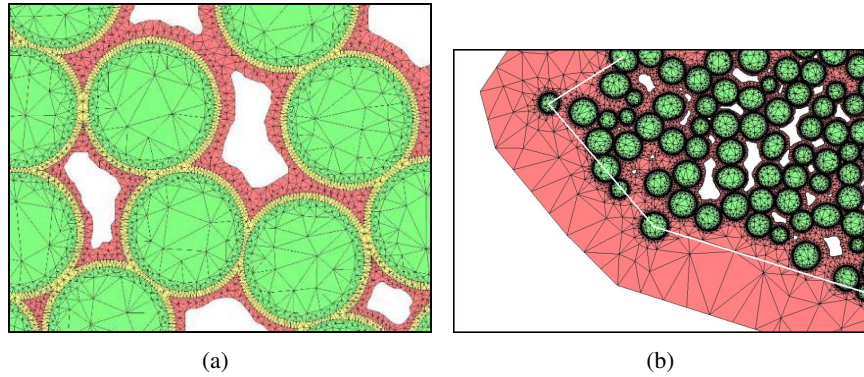


FIGURE 2.3 – (a) détail du maillage de la microstructure et (b) limite du fil transverse et courbe enveloppe (blanc)

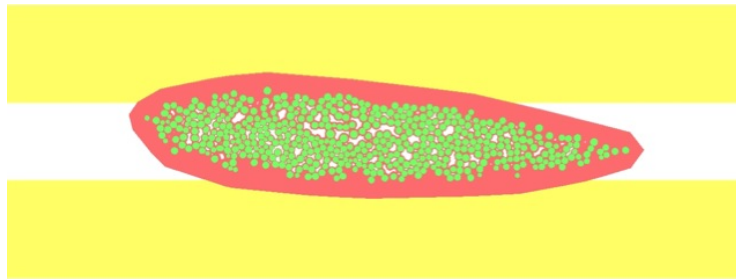


FIGURE 2.4 – Cellule de calcul : fils transverse et longitudinaux

et d'autre du fil transverse. Les transferts de contraintes dans ces zones y sont importants et les amorfes de fissures d'endommagement transverse plus probables au sein du tissage.

La limite du fil transverse est l'enveloppe circonscrite aux centres des fibres dilatée de l'épaisseur de la matrice interfils FIG. 2.3(b). Les angles aigus sont transformés en angles droits pour éviter une bande de matrice trop fine en pointe. La géométrie des fils longitudinaux est approchée par des rectangles tronqués FIG. 2.4. Cette approximation géométrique n'est pas pénalisante, les conditions de dispersion et rechargement caractéristiques des problèmes de fragmentation ou multifissuration étant assurées.

2.2.2. Optimisation des maillages : modélisation des inclusions

Dans le but d'étudier l'endommagement et les ruptures dont l'analyse sera présentée au paragraphe 3.2.1, le maillage des singularités doit assurer la convergence du calcul des grandeurs locales. Une étude paramétrique sur l'influence de la taille d'éléments est donc réalisée sur des cas élémentaires d'inclusions : fibres avec ou sans interphase et pores. Dans le paragraphe qui suit, les cellules élémentaires de calcul sont carrées et contiennent une inclusion. Elles sont soumises à des conditions de déplacement imposé correspondant à une déformation globale E_{11} égale à 0,05%, la direction $\vec{1}$ étant l'horizontale - la largeur de ce

document - comme précisé FIG. 2.5(a). Les modèles de comportement mécanique sont linéaires élastiques isotropes. C'est une approximation pour certaines configurations, puisque de nombreuses fibres ont un comportement isotrope transverse, mais dans le cas d'un calcul 2D cette hypothèse est en accord avec l'analyse d'influence menée ici.

Dans l'hypothèse d'une rupture fragile, on s'intéresse à la précision du calcul des contraintes principales σ_I et σ_{II} . Les simulations montrent qu'au niveau des concentrations de contraintes, la première contrainte principale est confondue avec la contrainte locale σ_{11} et la seconde contrainte principale quasi nulle. On définit ainsi par une prise de maximum la contrainte critique σ_c qui sera utilisée pour l'application d'un critère de rupture.

2.2.2.1. Maillage des fibres

Le maillage des fibres soulève deux problématiques : une bonne convergence du calcul EF des grandeurs locales grâce à une taille de maillage adaptée et le traitement des discontinuités de certains champs causées par le contraste élastique entre fibre et matrice.

Des calculs EF sont réalisés sur une inclusion dans un matériau avec un contraste élastique non unitaire. Une sollicitation mécanique génère une ou plusieurs concentrations de contraintes localisées autour de l'interface entre les deux milieux. Dans le cas d'une inclusion circulaire – une fibre, une sollicitation globale de traction entraîne des concentrations de contraintes dans la matrice proche de l'interface. La localisation dépend du contraste élastique $C = E_f/E_m$:

- à l'intersection de l'interface et du diamètre perpendiculaire à la direction de sollicitation – à 90° – dans le cas d'une inclusion souple, FIG. 2.5(a) et 2.5(b),
- à l'intersection de l'interface et du diamètre parallèle à la direction de sollicitation – à 0° – dans le cas d'une inclusion rigide, FIG. 2.5(c) et 2.5(d).

Il y a au niveau de l'interface fibre/matrice une discontinuité du comportement mécanique, caractérisée par le contraste élastique. La formulation du problème de mécanique des milieux continus (MMC) avec des interfaces parfaites impose des conditions particulières :

- une continuité des déplacements, traduite par :

$$[[u_i]] = 0 \quad (2.1)$$

- une transmission des efforts normaux sur l'interface de normale $\vec{n}_j$, traduite par :

$$[[\sigma_{ij}n_j]] = 0 \quad (2.2)$$

Cela se traduit pour l'inclusion rigide par une discontinuité de la contrainte σ_{11} à 90° à l'interface entre la matrice et la fibre FIG. 2.5(b) et 2.5(d), la normale à l'interface étant à cet endroit $\vec{n}_2$. Cela pose problème si l'on veut estimer la contrainte sur l'interface. L'interpolation aux nœuds fait une moyenne des contraintes des deux côtés de l'interface, dont la pondération dépend de la géométrie locale du maillage. Cela génère des gradients numériques très éloignés de la réalité, FIG. 2.5(a) et 2.5(c). Selon la répartition des éléments triangulaires liés au nœud considéré, la contrainte interpolée varie fortement FIG. 2.6 : les zones bruitées de ces courbes correspondent aux discontinuités de la contrainte σ_{11} à l'interface.

Dans le cas où l'on considère une rupture de l'interface, le problème est insoluble : il est impossible d'estimer correctement une contrainte locale d'interface. L'application d'un

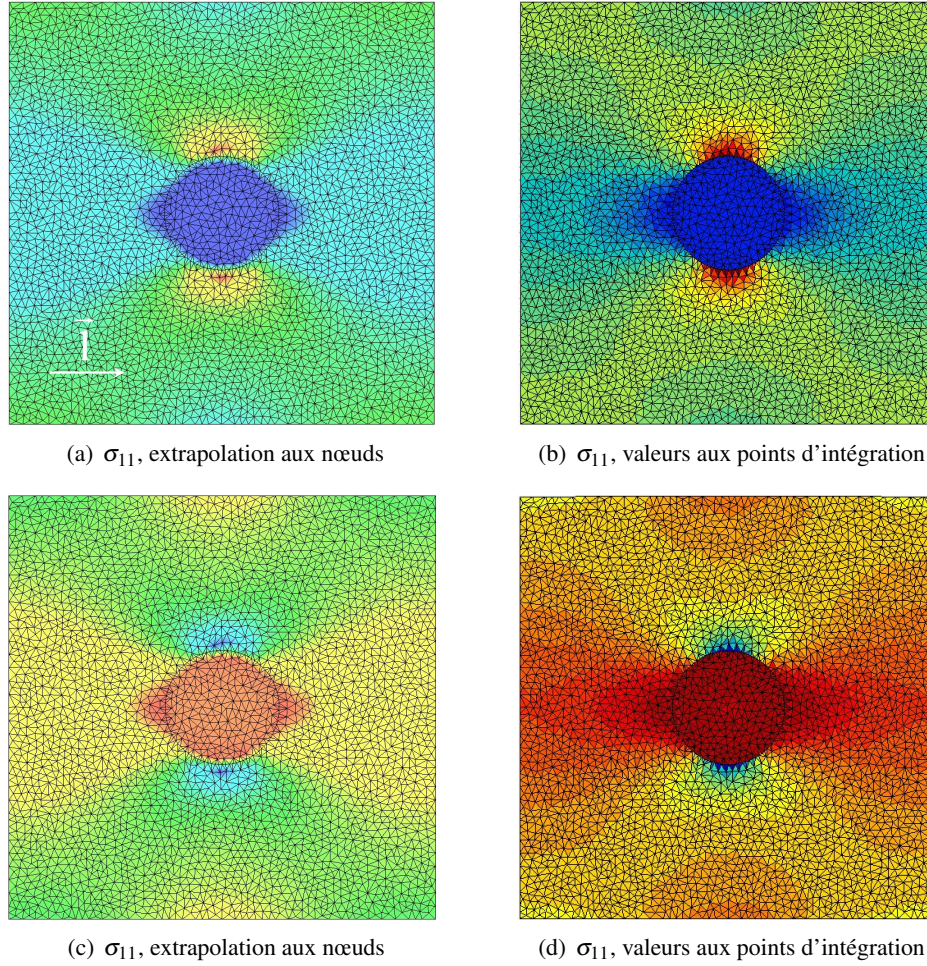


FIGURE 2.5 – Concentration de contraintes pour une inclusion circulaire soumise à une traction simple Σ_{11} . Inclusion souple en haut (a) et (b) : $E_f=20\text{GPa}$, $E_m=200\text{GPa}$, $C=1/10$. Inclusion rigide en bas (c) et (d) : $E_f=200\text{GPa}$, $E_m=20\text{GPa}$, $C=10$.

critère de rupture à une grandeur mal calculée est hasardeux et l'aspect quantitatif des scénarios d'endommagement n'est pas garanti. L'utilisation d'un critère non-local permet d'utiliser une grandeur correctement calculée mais sans lien avec une grandeur spécifique à l'interface : c'est dans ce cas la grandeur à rupture qui n'est pas viable. Par exemple dans [STA 95] la grandeur critique est calculée dans la matrice à une distance donnée de l'interface mais elle n'est pas représentative du comportement ou de la rupture de l'interface. Ce type d'approche est plus indiqué dans des configurations de matériau pour lequel la zone d'endommagement est plus étendue, par exemple le calcul de structure appliqué aux CMO [HOC 07].

Dans le cas d'une amorce de rupture dans la matrice, on s'intéresse aux contraintes calculées aux points d'intégration de Gauss σ_{ij}^G . Le choix d'un critère en contraintes principales dans la matrice est tout indiqué pour les CMC, la précision du calcul dépend par la suite de la finesse du maillage. Au niveau de la concentration de contraintes $\sigma_{11} = \sigma_I$, la contrainte

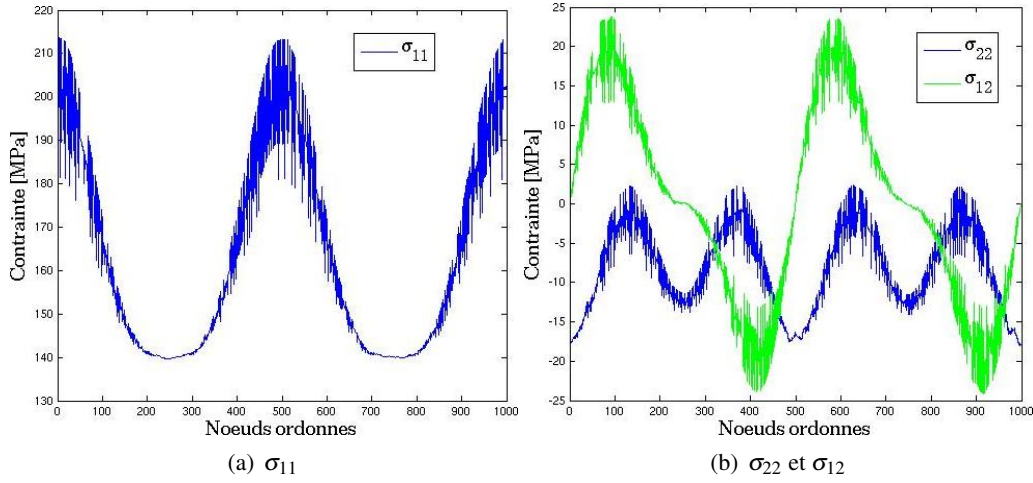


FIGURE 2.6 – Contraintes interpolées aux nœuds, interface fibre / matrice

$\sigma_{22} = \sigma_{II}$ est nulle FIG. 2.6, la contrainte critique est donc la première contrainte principale équivalent à σ_{11} .

Les résultats d'une étude paramétrique de l'influence du maillage sur le calcul des grandeurs critiques sont présentés TAB. 2.1. Les longueurs sont données en pixels et correspondent à l'image de départ FIG. 2.1. Le diamètre de la fibre est de 54 pixels pour un diamètre réel moyen de 12 μm .

La taille maximale des éléments dans la cellule T_{max} , indiquée au logiciel de maillage, et le nombre de nœuds le long de l'interface N_{noeuds} sont les deux paramètres d'entrée. On note que le nombre de nœuds sur l'interface influe localement sur la finesse du maillage : pour une taille maximale importante, un faible pas de maillage sur l'interface réduit la taille des éléments attenants et voisins. Quelques règles de proportionnalité permettent d'établir une correspondance entre le nombre de nœuds et la taille moyenne des éléments liés à l'interface.

- 40 nœuds $\Rightarrow T_{elem} \simeq 10 \text{ pix}^2$
- 200 nœuds $\Rightarrow T_{elem} \simeq 0.35 \text{ pix}^2$
- 1000 nœuds $\Rightarrow T_{elem} \simeq 0.13 \text{ pix}^2$

Ainsi, jusqu'à 200 nœuds par interface, diminuer la taille d'élément augmente la finesse du maillage. Au delà, la finesse ne dépend plus que du nombre de nœuds sur l'interface.

Cette dernière remarque est confirmée par l'évolution de la contrainte σ_{11}^G dans la matrice en fonction du nombre de nœuds. L'influence de la taille maximale d'élément n'est pas significative : conforme à la logique de convergence pour 40 nœuds, cette tendance s'inverse, certes de façon peu significative et non systématique, pour un nombre de nœuds supérieur à 200. On pourrait y voir là l'effet de la finesse du maillage sur le champ de contraintes plus éloigné de la fibre. Des simulations supplémentaires pourraient préciser ces tendances, mais on peut dès lors juger que **200 nœuds par interface** sont tout à fait **suffisants pour le calcul de la contrainte maximale** dans la matrice.

De façon naturelle, les contraintes interpolées à l'interface sont plus faibles que dans la

N_{noeuds}	T_{max}					
	10		3		0,5	
	σ_{11}^{int}	σ_{11}^G	σ_{11}^{int}	σ_{11}^G	σ_{11}^{int}	σ_{11}^G
40	189,90	269,25	205,76	269,23	214,91	268,18
200	218,22	265,32	218,77	266,40	201,58	266,51
500	213,66	264,77	213,67	265,30	213,54	265,02
1000	221,70	264,10	221,69	264,13	221,79	264,32
2000	221,71	263,61	221,80	263,31	222,34	264,00

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion fibre dans la matrice : maxima des contraintes σ_{11} à l'interface et σ_{11}^G dans la matrice en fonction du nombre de nœuds sur l'interface et de la taille maximale d'élément maillage, 1 unité = 1 pixel

matrice. Ces grandeurs sont de piètres approximations et ne peuvent être utilisés qu'à titre indicatif ou de façon qualitative.

Une solution plus proche de l'aspect physique réel de l'interface est de le considérer comme une couche d'épaisseur non nulle dont la constitution varie d'une phase vers la seconde. Numériquement, il est impossible de prendre en compte une variation continue de part le principe de discrétisation du milieu par MHE. Il faudrait superposer des couches successives de matériaux différents dont la faible taille entraînerait par ailleurs l'explosion du nombre d'éléments du maillage. Une solution est de ne prendre qu'une seule couche dont on choisit avec soin les caractéristiques mécaniques. On étudie pour cette configuration le cas d'une inclusion composite FIG. 2.7.

Certains matériaux correspondent à ce cas de figure : dans les systèmes $\text{SiC}_f/\text{PyC}/\text{SiC}_m$, l'interphase est clairement visible en périphérie des fibres. Sa résistance mécanique est relativement faible, elle joue le rôle de fusible mécanique et provoque la déviation de fissures le long des fibres. Dans notre cas d'inclusion composite, c'est a priori un des sites privilégiés d'amorce de rupture.

Plusieurs configurations de contraste élastique peuvent être étudiées, selon que la fibre et/ou l'interphase soient plus souples ou rigides que la matrice. Les différents contrastes influent naturellement sur la localisation des concentrations de contrainte et l'on peut distinguer une contrainte critique dans l'interphase différente de celle dans la matrice. L'épaisseur relative de l'interface ε a été fixée à 10 % du diamètre de la fibre.

Lorsque la matrice est plus rigide que la fibre, ce qui correspond par exemple à un composite C/SiC , deux configurations sont présentées : une interphase plus souple que la fibre et que la matrice et une interphase plus rigide que la fibre et plus souple que la matrice. Les localisations sont définies par rapport au centre de la fibre et la direction de sollicitation $\bar{I}$.

Dans le premier cas ($E_m=350\text{GPa}$, $E_f=200\text{GPa}$, $E_i=27\text{GPa}$), qui correspond par exemple à une couche d'interphase PyC , la concentration de contraintes σ_{11} est située à 90° dans la matrice et à 0° dans l'interphase FIG. 2.8(a). La contrainte moyenne Σ_{11} sur les bords est de 168 MPa pour une déformation imposée E_{11} de 0.05 %.

Dans le second cas ($E_m=350\text{GPa}$, $E_f=200\text{GPa}$, $E_i=250\text{GPa}$), la concentration de contraintes est à 90° dans la matrice et l'interphase FIG. 2.8(b). La contrainte moyenne

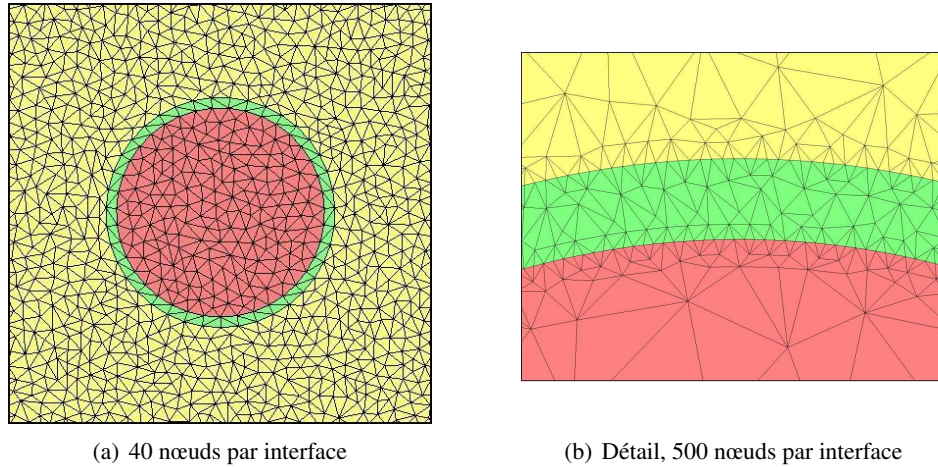
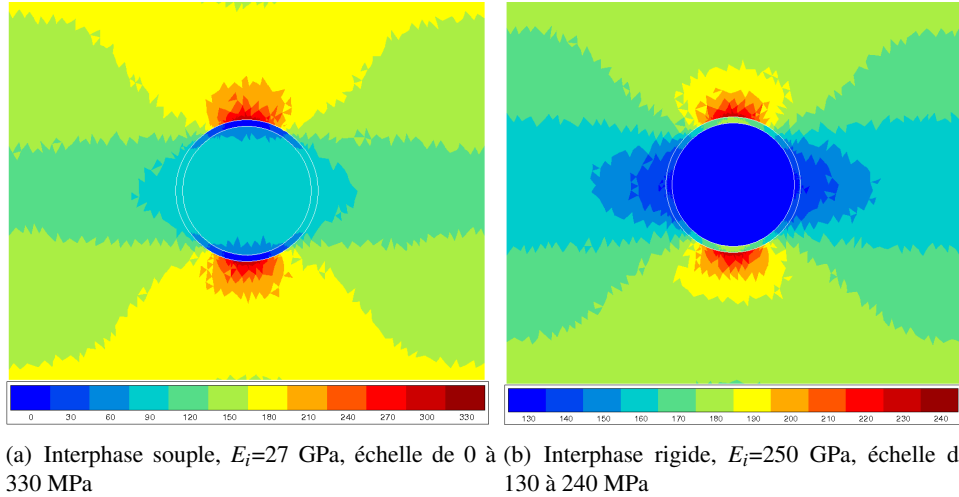


FIGURE 2.7 – Maillage de l'interphase en périphérie de fibre

FIGURE 2.8 – Champs de contrainte σ_{11} sous sollicitation globale Σ_{11} pour l'inclusion composite ($E_f=200$ GPa, $E_m=350$ GPa), interfaces repérés en traits fins blanc

Σ_{11} sur les bords est de 175 MPa pour une déformation imposée E_{11} de 0.05 %

L'inclusion composite agit dans les deux cas comme une inclusion souple dans la matrice. Ce comportement est naturel, l'interphase et la fibre étant toutes deux plus souples que la matrice. La rigidité de l'interphase influe sur l'intensité de la concentration de contraintes dans la matrice et sur la localisation de la concentration de contraintes dans l'interphase. Lorsqu'elle est très souple, les contrastes élastiques et par voie de conséquence les gradients de contraintes sont plus importants. L'interphase souple subit sa contrainte maximale à 0° et l'interphase rigide à 90° . La fibre est une inclusion rigide pour l'interphase souple et une inclusion souple pour l'interphase rigide.

Nnoeuds	T_{max}											
	10				3				0,5			
	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}
40	117,68	196,52	118,37	331,23	117,45	168,78	120,10	333,96	118,30	205,91	121,44	241,54
200	117,45	261,32	118,72	329,76	117,57	217,94	118,81	330,73	116,96	170,63	117,90	332,40
500	117,47	220,33	118,46	332,10	117,36	220,80	118,52	331,18	117,38	222,21	118,26	330,92
1000	117,17	221,82	118,30	329,04	117,06	221,88	118,43	330,00	116,99	222,87	118,40	330,76

TABLE 2.2 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion composite dans la matrice ($E_f=200\text{GPa}$, $E_i=27\text{GPa}$, $E_m=350\text{GPa}$), 200 nœuds sur les interfaces : contrainte critique σ_{11} aux frontières, dans l'interphase et la matrice

Nnoeuds	T_{max}											
	10				3				0,5			
	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}	$\sigma_{11}^{int_fi}$	$\sigma_{11}^{int_im}$	σ_{11}^{Gintp}	σ_{11}^{Gmat}
40	163,42	213,05	186,13	240,92	161,49	203,18	186,35	242,31	164,73	215,87	186,70	242,64
200	165,93	216,89	185,85	241,20	166,09	217,51	186,04	241,55	161,75	203,76	182,18	242,18
500	186,16	218,53	185,46	241,47	168,21	218,75	185,54	241,54	168,27	219,32	185,65	241,63
1000	169,15	219,36	185,17	241,07	169,37	219,30	185,27	241,22	169,33	219,70	185,37	241,31

TABLE 2.3 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par l'inclusion composite dans la matrice ($E_f=200\text{GPa}$, $E_i=250\text{GPa}$, $E_m=350\text{GPa}$), 200 nœuds sur les interfaces : contrainte critique σ_{11} aux frontières, dans l'interphase et la matrice

L'évolution des contraintes critiques sur l'interphase et dans la matrice en fonction des paramètres de maillage sont listées TABS. 2.2 et 2.3. On note tout d'abord que la contrainte maximale dans l'interphase est inférieure à celle dans la matrice. Toutefois une matrice SiC est plus résistante qu'une interphase PyC, il peut exister une compétition entre les modes de rupture de l'interphase et de la matrice.

De façon récurrente, les contraintes estimées au niveau des interfaces σ^{int} sont inutilisables pour une analyse quantitative de l'amorce de rupture.

En ce qui concerne le calcul des contraintes aux points d'intégration σ^G , le maillage le plus fin est bien évidemment celui à 1000 nœuds et de taille maximale 0,5, mais il ne se dégage aucune tendance nette en ce qui concerne la convergence des maxima locaux. Cela peut s'expliquer par un raffinement du maillage encore insuffisant ; la finesse actuelle est intransposable à une simulation contenant plusieurs centaines d'inclusions. Les calculs obtenus avec 200 nœuds par interface sont tout à fait satisfaisants puisqu'ils offrent une précision a priori inférieure à 1%.

L'interphase PyC, très souvent présent dans les SiC/SiC a un comportement qui est loin d'être isotrope. Sa microstructure dépend des conditions d'élaboration et son comportement est assez variable. Le comportement le plus souvent observé est isotrope transverse, la première direction déterminée par l'orientation des cristallites étant confondue avec la normale à la surface sur laquelle elle est déposée [HéL 08], [POM 03]. Ce modèle étant plus complexe à associer aux éléments en raison de l'orientation des directions principales

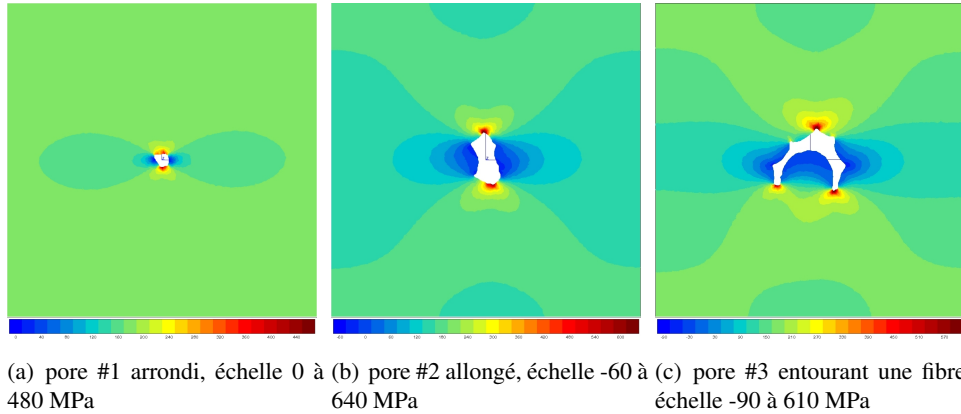


FIGURE 2.9 – Champs de contraintes σ_{11} autour de pores sous sollicitation globale E_{11} de 0.5%, $E_m = 350$ GPa

de comportement, il a été jugé trop dispendieux en temps pour être intégré à notre étude d'influence. Le raffinement local du maillage paraissant suffisant pour assurer une qualité acceptable dans la précision des calculs de contraintes.

2.2.2.2. Maillage des pores

Un pore est une inclusion de rigidité nulle. L'intensité de la concentration de contraintes qu'il génère dépend de sa taille et des singularités géométriques de sa forme. Les cas de simulation présentés par la suite sont une cellule carrée avec un pore positionné en son centre. Sous une sollicitation de traction, les concentrations de contraintes sont localisées à 90° , comme pour une fibre souple, le principe de localisation étant identique par rapport au centre de la singularité et la direction de sollicitation.

Deux facteurs géométriques influent sur l'intensité des concentrations de contraintes : la taille et la forme du pore. De façon générale, plus un pore est grand et allongé dans la direction perpendiculaire à la sollicitation, plus la concentration de contraintes est importante FIG. 2.9(a) et 2.9(b). Ces deux effets peuvent pourtant agir de façon contraire. En considérant une inclusion elliptique dont la dimension selon l'axe de sollicitation varie, les cas extrêmes sont le cercle et la fissure. Pour la même dimension effective qui est la hauteur de l'inclusion – le diamètre du cercle ou la longueur de fissure – la fissure génère une contrainte plus importante en raison du faible rayon de courbure en pointe. On a donc une inclusion de plus faible surface qui génère une contrainte locale plus importante.

Il arrive également qu'un pore qui contourne une fibre ait une forme qui entraîne plusieurs localisations de concentration de contraintes. La répartition spatiale des localisations combinée aux facteurs décrits précédemment détermine la concentration la plus intense FIG. 2.9(c).

On cherche par la suite à montrer l'influence du maillage sur la précision du calcul des maxima de contraintes.

Deux aspects influent sur la finesse du maillage d'un pore : la résolution de la géométrie qui provient de la reconnaissance des frontières par analyse d'image décrite au paragraphe

2.1 et la taille maximale des éléments du maillage. Une seconde étude est menée pour déterminer leur effet sur le calcul des contraintes critiques.

L'morce de rupture autour d'un pore se produit au niveau de la singularité la plus marquée avec une amorce dans la matrice. L'analyse de l'amorce de rupture s'approche de la mécanique de la rupture pour des fissures à grand rayon de courbure en pointe. La grandeur critique choisie est la maximum local de la contrainte d'ouverture en mode I ; dans notre cas c'est le maximum de contraintes σ_{11} .

L'interpolation des valeurs des contraintes aux nœuds situés sur les frontières des pores σ^{int} pose un problème identique à celui rencontré avec les fibres : la géométrie triangulaire des éléments influe fortement sur le calcul des contraintes locales aux nœuds. La contrainte dans la matrice calculée aux points d'intégration est une grandeur numériquement plus fiable, mais le sens physique qu'elle revêt en regard du critère de rupture considéré doit être discuté.

La géométrie des pores est explicitée sous forme de listes de points. Ce sont les pixels qui délimitent sur l'image de départ le fort contraste de niveaux de gris entre un pore et la matrice. La définition de la frontière dépend directement de la résolution de l'image et est très pixelisée FIG. 2.10 puisque la distance δ entre deux points n'excède pas la diagonale d'un pixel. La géométrie ainsi obtenue est vraiment éloignée de l'aspect assez lisse de la géométrie des pores.

Pour régulariser cette géométrie, un lissage des points est effectué pour créer une nouvelle frontière en ajustant la distance minimale δ entre deux points supérieure à sa valeur initiale. L'aspect du pore change en fonction du paramètre δ FIG. 2.10. On note qu'une valeur faible du paramètre δ entraîne naturellement un raffinement local du maillage, mais son action est particulièrement effective sur la géométrie du bord libre. Une valeur importante a tendance à améliorer la rapidité du calcul. Cet aspect est à prendre en compte pour le calcul sur le fil entier.

La taille maximale d'éléments T_{max} influe également sur la finesse locale du maillage. Plusieurs cellules ont été générées en faisant évoluer ce paramètre. On peut ainsi augmenter la résolution du maillage pour une géométrie donnée par le paramètre δ .

On déterminera la valeur maximale admissible pour δ au regard de l'aspect géométrique du pore et du calcul de contraintes, et la meilleure association avec la taille maximale d'éléments T_{max} .

Les résultats listés dans le tableau TAB. 2.4 montrent que les maxima des contraintes sont d'autant plus importants que les angles formés par les éléments sont saillants, ce lorsque le pore est pixelisé (δ égal à 1) ou trop simplifié (δ supérieur à 3). On retient pour le maillage du fil complet un paramètre δ égal à 2. C'est la configuration pour que laquelle le maillage est le plus ressemblant à la géométrie des pores sur l'image de départ.

On observe par ailleurs que plus la taille maximale d'éléments T_{max} est faible, plus les maxima calculés sont importants. Une seconde série de simulations à δ fixé à 2 confirme cette tendance TAB. 2.5.

En effet, une singularité génère un champ de contraintes local qui prend une valeur infinie au fond de l'angle puisque le rayon de courbure de fond de fissure y est – numériquement – nul. Le raffinement du maillage entraîne donc une divergence du calcul du maximum de contraintes sur l'interface.

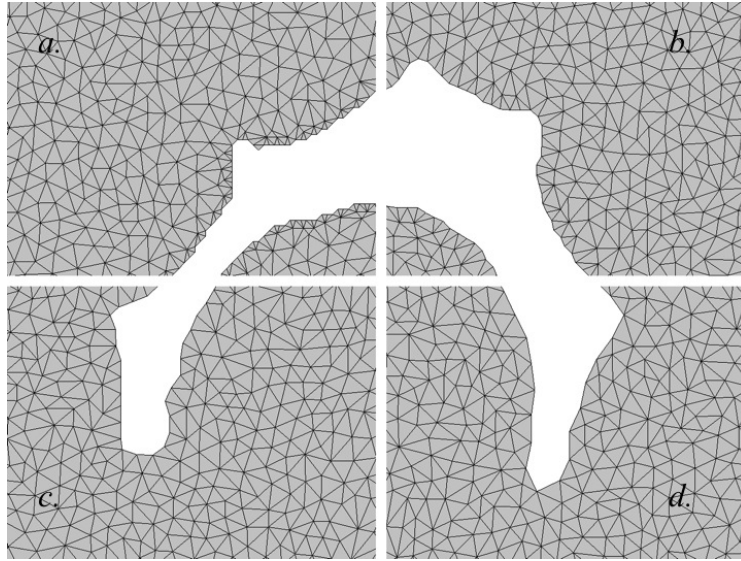


FIGURE 2.10 – Différentes réalisations de maillage du pore no. 3, T_{max} égal à 10 p^2 : influence de la simplification de la pixelisation sur la géométrie du bord libre. $\delta = 1$, quadrant *a.* ; $\delta = 2$, quadrant *b.* ; $\delta = 3$, quadrant *c.* ; $\delta = 5$, quadrant *d.*

pore	δ	T_{max}					
		10		3		0,5	
		σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}
# 1	5	357,90	442,53	426,43	550,97	534,30	727,32
	3	405,15	515,14	426,57	542,69	554,96	647,55
	2	488,08	495,83	476,89	540,33	557,27	686,51
	1	556,52	596,70	582,85	629,21	525,23	624,73
# 2	5	631,97	815,47	710,74	1046,16	1155,21	1366,15
	3	727,09	1010,52	787,31	1103,60	1073,03	1223,59
	2	802,17	1020,73	816,48	1082,35	1520,03	1510,28
	1	864,41	1051,70	888,62	1119,74	1057,2	1368,14
# 3	5	631,94	921,67	827,47	1066,31	1081,55	1386,80
	3	671,89	973,76	810,52	1036,18	1082,24	1290,05
	2	821,60	1070,15	951,86	1237,05	1188,78	1461,56
	1	1319,13	1345,61	1335,54	1364,68	1268,01	1637,53

TABLE 2.4 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par un pore en fonction du pas de la frontière δ et la taille maximale d'éléments T_{max} , cellules de taille 200x200 pixels

pore	T_{max}							
	3		0,5		0,2		0,1	
	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}	σ_{11}^{bord}	σ_{11}^{Gmat}
# 1	470,58	533,86	556,24	682,17	614,08	761,06	604,26	777,06
# 2	712,63	1038,17	1047,79	1420,45	1281,16	1603,53	1397,18	1825,74
# 3	824,24	1070,79	1003,31	1286,57	1190,91	1476,21	1316,11	1536,02

TABLE 2.5 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par un pore pour un pas de frontière δ égal à 2 en fonction de la taille maximale d'éléments T_{max} , cellules de taille 100x100 pixels

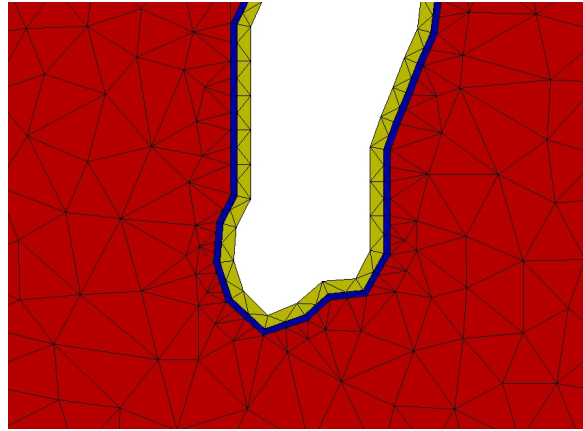


FIGURE 2.11 – Intégration d'une bande de contrôle – en bleu – autour du pore située à une distance d du bord et d'épaisseur e

Le critère d'amorçage doit être adapté en conséquence aux possibilités qu'offre le calcul MEF, par exemple un critère non-local de type McClintock modifié [SEW 02]. Basé sur un critère d'amorce de rupture explicité en fonction du facteur d'intensité de contraintes, il définit une longueur caractéristique où la contrainte locale égale la contrainte à rupture. Inversement, à une distance donnée, il permet de déterminer une contrainte équivalente qui provoque l'amorce de fissure.

Il faut dans ce cas générer dans le maillage des points supplémentaires pour obtenir en post-processing les contraintes dans la matrice à une distance égale à la longueur caractéristique. Une solution est d'intégrer au maillage une bande de contrôle identique à l'interphase dans le maillage des fibres FIG. 2.11, dont les caractéristiques mécaniques seront celles de la matrice. On contrôle localement la géométrie du maillage ; cela a naturellement pour effet d'augmenter le nombre de ddl du calcul EF.

On observe une stabilité de la valeur du maximum de contraintes dans la zone de contrôle, sans parler de convergence. On note cependant qu'une épaisseur de bande trop importante a tendance à donner une contrainte trop importante. En effet, plus la bande est large plus elle est proche du bord : elle est donc plus sensible à l'effet de singularité du maillage. Une bande fine semble plus appropriée mais entraîne une explosion du nombre de ddl dans le calcul EF.

T_{max}	10						1		
d	1			0,5					
e	$\sigma_{11}^{G_E1}$	$\sigma_{11}^{G_E2}$	$\sigma_{11}^{G_E3}$	$\sigma_{11}^{G_E1}$	$\sigma_{11}^{G_E2}$	$\sigma_{11}^{G_E3}$	$\sigma_{11}^{G_E1}$	$\sigma_{11}^{G_E2}$	$\sigma_{11}^{G_E3}$
0,1	1599,24	880,43	856,87	1708,68	1155,31	1050,29	1749,90	1174,37	1077,29
0,2	1480,65	889,88	828,74	1406,74	1129,00	1006,58	1464,32	1168,1	1036,25
0,3	1227,85	968,70	824,68	1449,00	1116,74	946,53	1475,59	1152,34	1032,81
0,4	1243,02	860,96	785,64	1780,66	1287,21	942,36	1822,42	1297,38	964,29

TABLE 2.6 – Tableau récapitulatif des concentrations de contraintes générées par le pore #3 pour une bande de contrôle centrée à une distance d et d'épaisseur e , un pas de frontière δ égal à 2, en fonction de la taille maximale d'éléments T_{max} et de la distance d

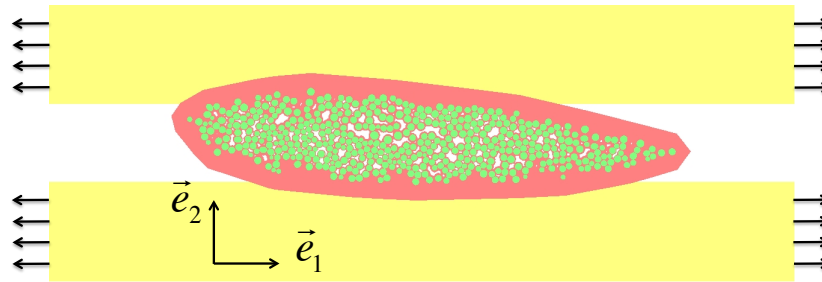


FIGURE 2.12 – Cellule de calcul micro-méso, repère et conditions aux limites en déplacement

En fonction du choix du couple de paramètres d et e , la taille des éléments varie fortement et de façon incontrôlable. Le calcul de grandeurs locales dépend fortement de la répartition des triangles du maillage dans un domaine où les gradients sont très importants. Ce choix dépend de la nature des matériaux constitutifs du composite que l'on modélisera.

En effet la longueur caractéristique pour le critère de rupture non local correspond à la distance entre la médiane de la bande de contrôle et la frontière du pore d . Le choix de l'épaisseur de la bande e est ensuite un compromis entre la qualité du calcul de contraintes et l'augmentation du nombre de ddl qui ralentit la vitesse de résolution du problème EF.

2.3. Simulation de traction de matériaux virtuels

Suite aux investigations sur les paramètres de maillage et la qualité des calculs de contraintes, plusieurs cellules de calcul représentant un fil entier ont été réalisées. L'avantage d'un *matériau virtuel* est de pouvoir moduler la microstructure du fil transverse à volonté : des combinaisons de géométrie avec ou sans pores, avec ou sans interphases. Les fils longitudinaux sont ceux de la première microstructure pour toutes les simulations.

Par la suite et pour tous les calculs, la direction horizontale sur la longueur de la section du fil est indiquée $\vec{1}$, la verticale sur la largeur indiquée $\vec{2}$, l'ensemble formant une base directe FIG. 2.12. Chaque cellule est soumise à une sollicitation de traction par application de déplacements imposés sur les bords droite et gauche. La déformation globale est fixée arbitrairement à 0.1 %. Ce choix d'une déformation globale unique est justifié par les modèles

de comportement linéaires élastiques à l'échelle micro pour chaque matériau.

L'aspect aléatoire de la morphologie des microstructures va entraîner une forte variabilité pour les grandeurs locales et les sites préférentiels d'amorce de rupture. Nous identifions au préalable de chaque analyse les grandeurs qui pilotent l'apparition de fissures pour chaque microstructure pour en caractériser la dispersion.

Les calculs qui suivent présentent tous une configuration $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$, cela permet d'évaluer l'influence des pores et des interphases. Leurs propriétés mécaniques sont :

- fibres : $E_f = 200\text{GPa}$, $\nu_f = 0.12$
- matrice : $E_m = 350\text{GPa}$, $\nu_m = 0.20$

Les propriétés mécaniques des renforts longitudinaux ont été estimées par loi des mélanges, qui donne des résultats acceptables pour une configuration de matériau biphasé en parallèle selon le modèle de Voigt :

- fils longitudinaux : $E_{fl} = 270\text{GPa}$, $\nu_{fl} = 0.15$

2.3.1. Matériau #1 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$ sans pore

La géométrie de la microstructure d'un fil sans pore est identique à celle d'un CMO totalement imprégné, c'est le cas limite pour un CMC totalement densifié. Bien que la réalisation soit triviale, on est de plain-pied dans l'approche de *matériau virtuel* puisque l'on teste numériquement une configuration irréalisable expérimentalement.

L'identification des grandeurs critiques dépend du mode de rupture. Pour cette configuration, l'interface fibre/matrice est particulièrement visée mais on a montré que le maillage utilisé ne permet pas d'exprimer un critère de rupture quantitatif. On considère donc une rupture fragile dans la matrice en périphérie des fibres. La contrainte critique est la valeur maximale de la première contrainte principale autour de la fibre.

Le maillage des fibres est enrichi d'une bande de contrôle dans la matrice similaire à une interphase de façon à obtenir la concentration de contrainte générée par chaque inclusion à un point d'intégration du maillage. Pour chaque fibre indexée i , la région périphérique de matrice est notée Ω_f^i . Elles sont visibles en couleur FIG. 2.13. On y récupère les contraintes principales aux points d'intégration. Une analyse locale montre qu'au niveau de la localisation du maximum, la contrainte principale σ_I correspond à la contrainte σ_{11} et σ_{II} négligeable. La contrainte critique dans la matrice associée à chaque fibre est définie par

$$\sigma_c^f(i) = \max_{\Omega_f^i} < \sigma_{11} > \quad (2.3)$$

Le champ de contraintes calculé est fortement hétérogène FIG. 2.14. On y retrouve des caractéristiques obtenues lors de l'étude des inclusions. Les fibres présentent des concentrations de contraintes à peu près à 90° , elles jouent le rôle d'inclusions souples. Cette localisation est variable dans l'intervalle approximatif $[75^\circ, 90^\circ]$ en raison des fortes interactions entre fibres. On les distingue très clairement dans le champ de contraintes σ_{11} , en particulier par la discontinuité le long de l'interface fibre-matrice à 90° .

On remarque que dans le coin bas gauche FIG. 2.14 les contraintes sont globalement plus faibles (bleues). En effet cette partie de la microstructure est proche de la limite du fil située au niveau du mésopore entre les fils longitudinaux. Le champ local est influencé par divers

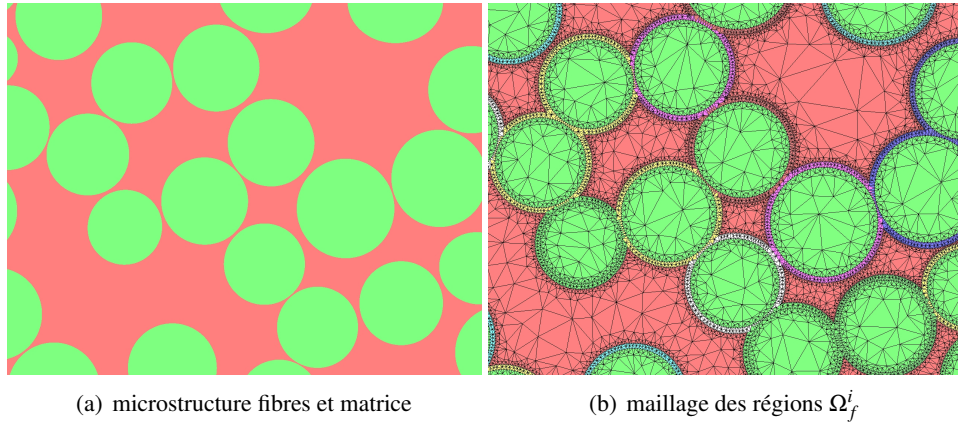


FIGURE 2.13 – Détail de la microstructure de la cellule de calcul et du maillage des régions de contrôle des grandeurs locales, matériau #1

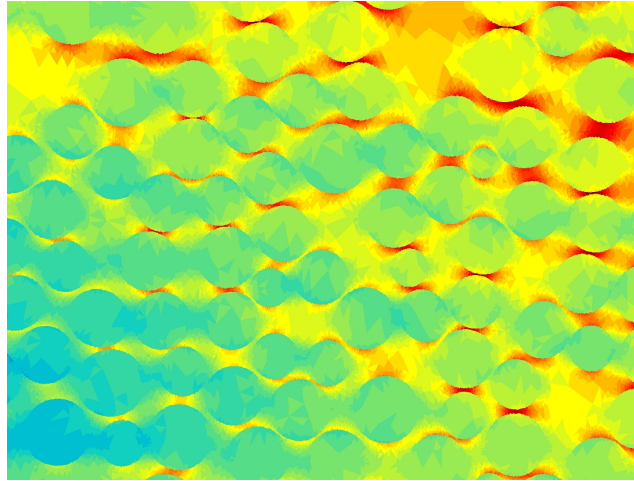


FIGURE 2.14 – Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructure

effets : les comportements locaux, la morphologie de la microstructure mais également par les hétérogénéités mésoscopiques.

L'analyse des contraintes critiques $\sigma_c^f(i)$ permet d'évaluer la variabilité des champs de contraintes au sens de la rupture. La distribution statistique des grandeurs obtenues par post-processing est présentée FIG. 2.15. Les valeurs sont très importantes mais correspondent à une déformation totale que ne verrait jamais le matériau réel sans être endommagé.

En comparant ces valeurs à la contrainte moyenne dans la matrice de façon à les décorréler de l'intensité de la sollicitation, on peut estimer l'effet des inclusions dans la matrice.

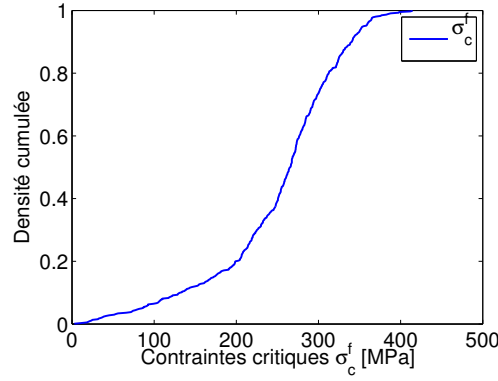
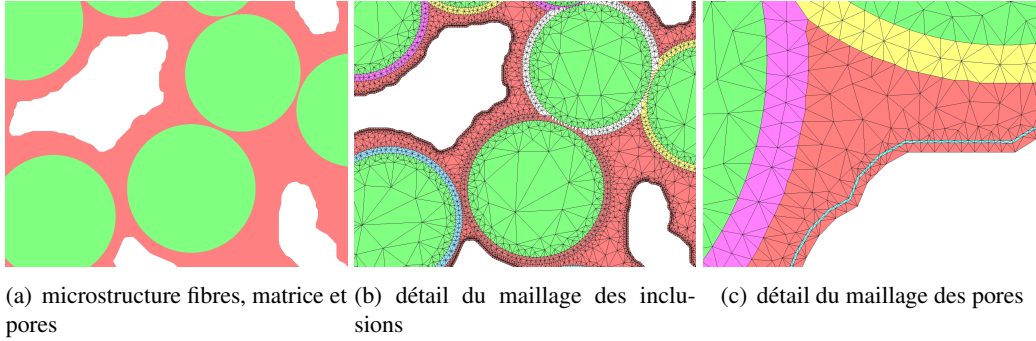
FIGURE 2.15 – Distribution statistique des contraintes σ_c^f 

FIGURE 2.16 – Détails de la microstructure de la cellule de calcul et du maillage des régions de contrôle des grandeurs locales, matériau # 2

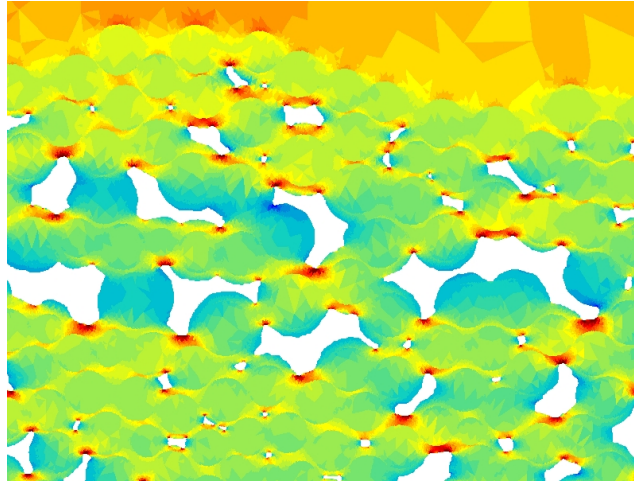
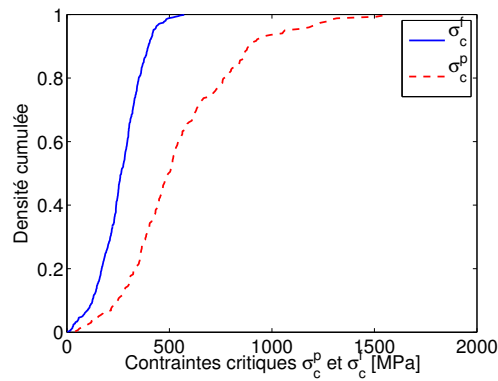
2.3.2. Matériau #2 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$

Les pores sont intégrés au maillage pour représenter la microstructure caractéristique d'un composite céramique densifié par CVI : la croissance de la matrice par couches concentriques autour des fibres entraîne la fermeture de cavités internes au fil, les micropores. Cette configuration est celle des premières générations de composites infiltrés : sans interphase PyC, il y a seulement des interfaces fibre/matrice.

Deux populations de localisations critiques sont en concurrence : les concentrations de contraintes dans la matrice en périphérie des fibres – la même que pour la microstructure précédente – et dans la matrice au niveau des pores. Le maillage est adapté autour des fibres avec les zones de contrôle Ω_f^i et au niveau des pores avec les bande de contrôle Ω_p^j pour y relever respectivement les contraintes maximales dans la matrice $\sigma_c^f(i)$ définies EQ. (2.3) et $\sigma_c^p(j)$ définies par

$$\sigma_c^p(j) = \max_{\Omega_p^j} \langle \sigma_{11} \rangle \quad (2.4)$$

Le champ de contraintes obtenu en traction uniaxiale est fortement hétérogène, plus encore que pour la configuration sans pores. Les caractéristiques des concentrations de

FIGURE 2.17 – Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructureFIGURE 2.18 – Distributions statistiques des contraintes σ_c^p et σ_c^f

contraintes autour des fibres sont similaires à la réalisation précédente. En revanche, les pores, plus distants les uns des autres, interagissent uniquement avec des fibres et les concentrations de contraintes sont localisées plus précisément autour des 90° . Les pores les plus grands génèrent naturellement des concentrations de contraintes plus importantes que les petits.

Les pores augmentent notablement les gradients locaux. En effet, les effets combinés de géométries plus singulières que les ellipses et du contraste élastique, qui tend vers une valeur infinie et se traduit par des bords libres au sein de la microstructure, font cohabiter des contraintes locales de compression avec des zones localisée de très intense traction FIG. 2.17. La présence de bords libres dans le fil a tendance à l'assouplir et pourtant les concentrations de contraintes en périphérie de fibres sont plus importantes, en comparaison avec le matériau #1. Une comparaison entre les différentes réalisations sera développée dans la conclusion de ce chapitre.

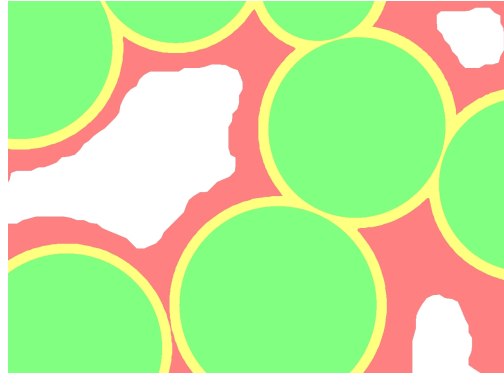


FIGURE 2.19 – Détail de la microstructure de la cellule de calcul : fibres, matrice, pores et couche d'interphase

La distribution des concentrations de contraintes générées par les singularités est décrit par la fonction de distribution des contraintes critiques Fig 2.18. De manière générale, les concentrations de contraintes au niveau des pores sont beaucoup plus importantes qu'au niveau des fibres. Les pores sont des singularités plus critiques que les fibres, ce sont les sites privilégiés d'amorce de fissure dans la matrice.

2.3.3. Matériau #3 : $\text{SiC}_f/\text{SiC}_m$ à interphase

Les interphases sont intégrées au maillage autour des fibres pour représenter des réalisations de matériaux plus récents, telle une microstructure $\text{SiC}_f/\text{PyC}/\text{SiC}_m$ FIG. 2.19. L'interphase PyC moins résistante que les fibres et la matrice joue le rôle de fusible mécanique et crée un effet de structure microscopique très marqué.

Le maillage utilisé est identique à celui utilisé pour la simulation du matériau #2 FIG. 2.16(b), mais les propriétés mécaniques du PyC sont affectées aux éléments des zones d'interphase Ω_f^i . En première approximation, le comportement de l'interphase est considéré isotrope : $E_I = 27\text{GPa}$, $\nu_I = 0.15$.

Les contraintes critiques relevées dans les zones de contrôles Ω_p^j pour les pores et Ω_f^i pour les interphases sont définies respectivement EQ. (2.4) et

$$\sigma_c^I(i) = \max_{\Omega_f^i} < \sigma_{11} > \quad (2.5)$$

Le champ de contraintes est très hétérogène, avec de nombreux gradients causés par les contrastes élastiques fibre/interphase et interphase/matrice. L'interphase plus souple que le reste se distingue dans le champ de contraintes FIG. 2.20 par des bandes de plus faibles contraintes autour des fibres. Les localisations des concentrations de contrainte dans l'interphase sont approximativement à 0° , variant en fonction des interactions avec les singularités alentours. L'ensemble fibre/interphase crée également une concentrations de contraintes à 90° dans la matrice, particulièrement visible en bord de fil. Ces deux phénomènes suivent les comportements d'inclusion rigide (fibre/interphase) et souple (interphase/matrice) qui ont été détaillés en section 2.2.2.1.

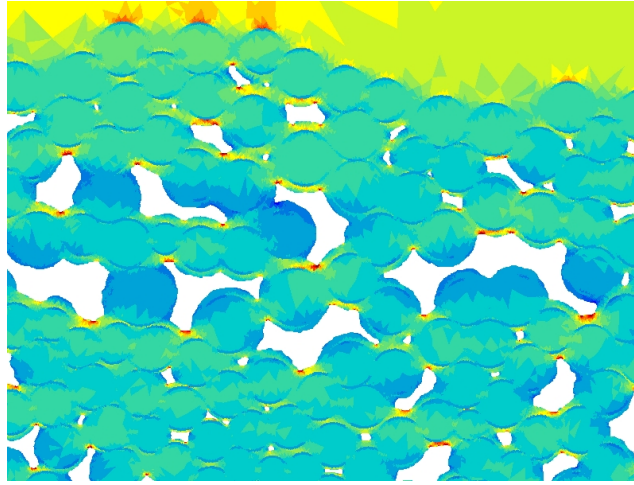


FIGURE 2.20 – Champ de contrainte σ_{11} hétérogène dans la microstructure

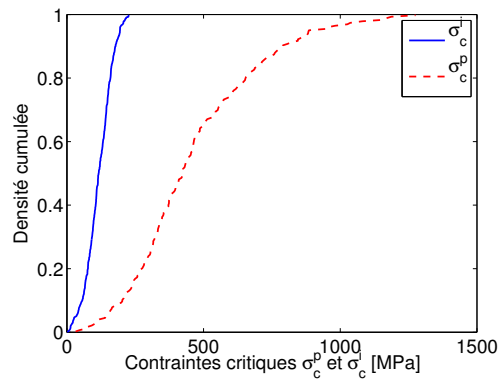


FIGURE 2.21 – Distributions statistique des contraintes σ_c^p et σ_c^I

Les concentrations de contraintes au niveau des pores sont toujours à 0° et ce sont toujours les plus gros pores qui génèrent les contraintes locales les plus élevées.

La distribution des contraintes critiques est présenté FIG. 2.21. On remarque en comparant avec la distribution FIG. 2.18 que l'introduction des interphases souples diminue le niveau global des concentrations de contraintes au niveau des pores.

Les contraintes dans les interphases sont relativement faibles par rapport aux autres cas de simulations à cause de la souplesse du PyC. Néanmoins, au sens de l'endommagement, c'est après avoir comparé les grandeurs critiques aux grandeurs à rupture adéquates que l'on pourra donner des tendances entre les différentes populations.

2.4. Conclusion

La démarche présentée dans ce chapitre permet de générer un matériau virtuel à microstructure modulable à partir d'une image de la structure d'un matériau SiC/SiC. Ce matériau

virtuel est ensuite placé dans une cellule de calcul dont la géométrie répond aux conditions nécessaires au phénomène de fragmentation dans les composites à renfort multidirectionnel. Une simulation de traction uniforme est appliquée. Cette approche *virtuelle* est motivée par le caractère fortement hétérogène du matériau et son effet sur le comportement global que traduit la variabilité des champs de contraintes au sens de la rupture.

Les procédures de maillage des singularités ont été optimisées pour obtenir la meilleure estimation possible des contraintes locales critiques en vue d'appliquer des critères de rupture pertinents dans le chapitre qui suit. Différents maillages de microstructures ont été intégrés dans une cellule de calcul représentative de la mésostructure des CMC tissés : le fil transverse est positionné entre deux fils longitudinaux rectilignes. Deux échelles représentatives, micro et méso, sont ainsi prises en compte.

La modularité de la construction des microstructures permet après dépouillement des essais virtuels de tirer des tendances sur les effets des architectures du matériau, en particulier les interactions entre singularités et les effets des pores et des interphases

Le nombre de singularités augmente d'une simulation à l'autre selon la nature de la microstructure, les interactions sont de plus en plus nombreuses. Les tendances identifiées sur les inclusions simples sont relativement bien reproduites avec des variations selon le voisinage de chaque inclusion :

- localisation à 90° par rapport au centre de la singularité et la direction de sollicitation pour les inclusions souples : fibre dans la matrice, interphase dans la matrice (le pore étant les cas limite de l'inclusion de rigidité nulle),
- localisation à 0° pour les inclusions rigides : fibre dans l'interphase,
- plus l'inclusion est grande, plus la contrainte locale est importante.

Ces règles sont à considérer avec précaution, car de nombreux cas particuliers peuvent être identifiés. Par exemple on remarque très souvent dans le fil des angles de localisation modifiés par le positionnement particulier de deux fibres, de même que les nombreuses interactions entre fibres et pores.

Les interphases, plus souples que fibres et matrice, assouplissent le fil, de même que les pores, mais dans les microstructure poreuses – matériaux #2 et #3 – les concentrations de contraintes sont plus importantes que dans le matériau #1, pourtant plus dense. Les contraintes moyennes dans la matrice ont été relevées :

- matériau #1 : $\langle \sigma_{11}^{mat} \rangle = 167,89 \text{ MPa}$
- matériau #2 : $\langle \sigma_{11}^{mat} \rangle = 170,36 \text{ MPa}$
- matériau #3 : $\langle \sigma_{11}^{mat} \rangle = 172,17 \text{ MPa}$

Pour comparer les microstructures, les populations de contraintes critiques ont été adimensionnées par la contrainte moyenne dans la matrice. On compare les matériaux #1 et #2 pour identifier l'effet des pores sur les contraintes critiques au niveau des fibres et les matériaux #2 et #3 pour l'effet des interphases sur les contraintes critiques au niveau des pores.

Ainsi, pour les fibres, si les concentrations de contraintes (grandeurs adimensionnées) sont à peine plus importantes dans le matériau avec pores FIG. 2.22(a), les maxima locaux sont nettement supérieurs (par comparaison des histogrammes FIG. 2.15 et 2.18). On en conclut que la présence de micropores a tendance à réduire la résistance du matériau à l'apparition de fissures et d'endommagement puisque les maxima de contraintes locales sont plus importants.

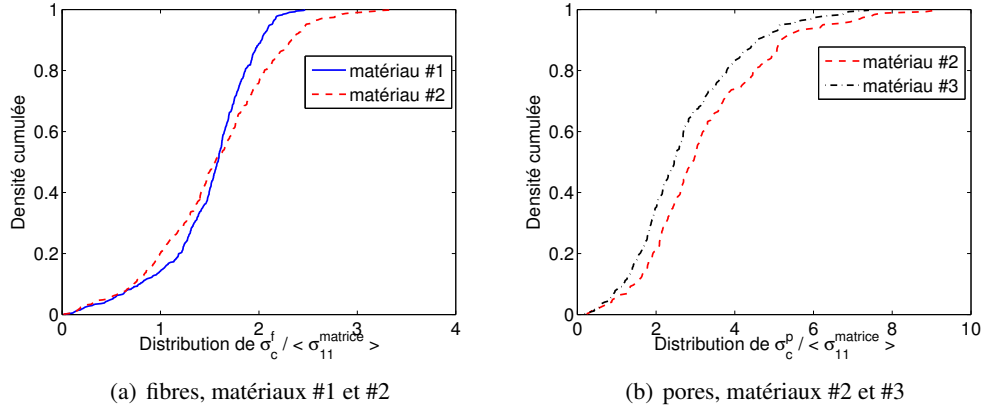


FIGURE 2.22 – Comparaison des distributions de contraintes critiques dans la matrice adimensionnées par la contrainte moyenne dans la matrice

En ce qui concerne les contraintes critiques au niveau des pores, la présence d'une couche d'interphase réduit à la fois les concentrations de contraintes FIG. 2.22(b) et les maxima locaux (par comparaison des distributions FIG. 2.18 et 2.21).

Dans ce chapitre ont été montrées quelques potentialités du matériau virtuel et des simulations numériques.

L'étape suivante est l'introduction de l'endommagement dans les cellules de calcul et l'étude de l'évolution des populations de grandeurs critiques.

Chapitre 3

Essai Virtuel de multifissuration transverse des fils

Après la description des microstructures hétérogènes des matériaux virtuels, ce chapitre décrit les essais virtuels qui en sont réalisés. La méthode de remaillage pour introduire l'endommagement transverse dans les cellules de calcul est présentée. Les effets des fissures sur les champs de contraintes et les populations de contraintes critiques sont étudiés. Les résultats obtenus pour plusieurs réalisations sur des microstructures diverses sont analysés et comparés.

3.1. Application de l'Essai Virtuel

L'essai virtuel est la simulation d'endommagement des cellules de calcul développées dans le Chapitre 2. La configuration hybride tissé CVI/stratifié propose une microstructure caractéristique des CMC dans une configuration qui mélange un fil transverse dans un tissé, par la présence de mésopores, à des longitudinaux dans un stratifié au vu de leur orientation. L'aspect *virtuel* est très présent : on met en œuvre un essai très éloigné d'un cas expérimental mais toutes les conditions pour étudier la fragmentation transverse des fils sont réunies.

À partir du calcul des champs de contraintes dans le matériau virtuel, les sites d'amorces sont identifiés par application de critères de rupture propres à chaque microstructure. Les grandeurs locales critiques sont définies en fonction, pour chaque singularité fibre, pore ou interphase.

L'endommagement transverse des fils est modélisé en intégrant des fissures dans les maillages. La propagation dans la matrice fragile est considérée instantanée jusqu'aux limites du fil transverse. Les fissures transverses ainsi créées sont introduites dans le maillage selon une procédure de dédoublement des nœuds développée spécifiquement. Les nœuds le long de la trajectoire de la fissure sont identifiés itérativement. La trajectoire idéale est définie par la localisation de la singularité et orientée perpendiculairement à la direction de sollicitation.

La cinétique d'endommagement transverse est donc explorée en prenant en compte la morphologie de la microstructure et des paramètres matériau microscopique. Les variabilités connues pour ces paramètres, en particulier les grandeurs à rupture dans les matrices céramiques sont intégrées dans la procédure. Elle est résumée FIG. 3.1.

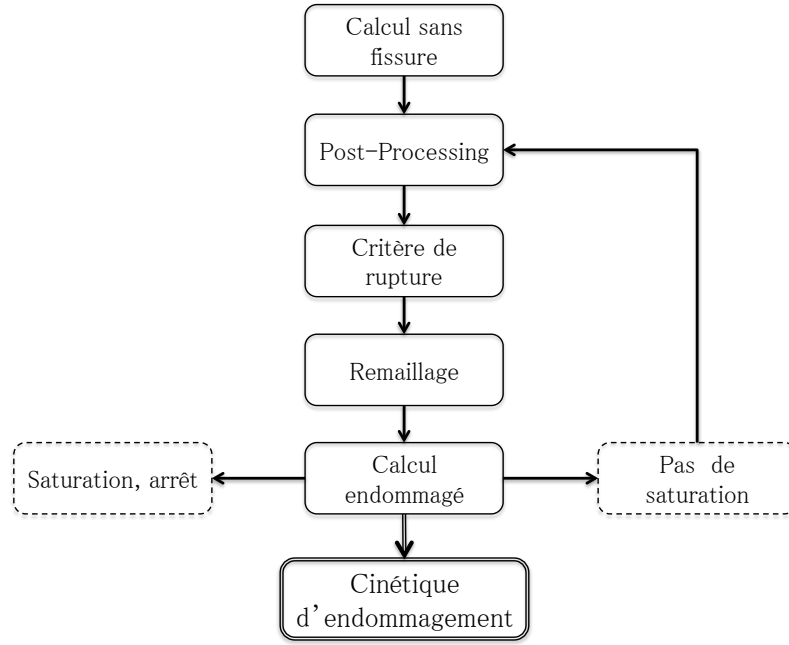


FIGURE 3.1 – Déroulement de la procédure itérative de fissuration : essai virtuel de multifissuration

3.2. Endommagement transverse du fil

3.2.1. Critère de rupture et fissuration

La rupture fragile des matrices céramique permet d'utiliser des critères d'amorce de rupture en contrainte principale [LAM 07]. Les contraintes critiques définissant les *défauts* au sens de l'analyse statistique de la rupture sont les maxima locaux de contrainte principale σ_I définis Eq. (2.3), (2.4) et (2.5). Le critère de rupture est explicité par l'équation (3.1).

$$\sigma_c \geq \sigma^R \quad (3.1)$$

Pour les fibres, la contrainte critique est le maximum de contrainte dans le milieu autour de l'interface, la matrice ou une couche d'interphase autour des fibres.

Pour les pores, la contrainte critique est normalement le maximum de contraintes le long de la frontière mais il a été montré que cette grandeur est mal approximée dans les calculs par MEF. Le critère de rupture utilisé est un critère non-local dit de Mac Clintock modifié [SEW 02]. Il est explicité eq. (3.2).

$$\sigma_c \geq \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi\rho_c}} \quad (3.2)$$

La longueur interne ρ_c est la distance pour laquelle la contrainte locale égale la contrainte critique pour un champ de contraintes autour d'une singularité décrit par le coefficient de concentration de contraintes critique K_{Ic} . Le lien entre K_{Ic} et la ténacité G_c est fait en utilisant une relation classique de la mécanique de la rupture en conditions de déformations

planes.

$$K_{Ic}^2 = \frac{G_c \cdot E}{(1 - \nu^2)} \quad (3.3)$$

Il suffit par la suite de connaître une valeur de ténacité pour déterminer à une longueur critique ρ_c la contrainte critique correspondante. Pour les constituants communément utilisés dans les CMCs étudiés ici, on pourra se référer à [MAR 98].

La propagation des fissures transverses est considérée instantanée dans la matrice car celle-ci est fragile et stoppée à l'interface avec les fils longitudinaux. Les fissures sont introduites dans le maillage de part et d'autre de la localisation de l'amorce, elles traversent tout le fil. Elles sont orientées en accord avec les scénarios observés expérimentalement FIG. 1.5(a) et 1.6. Dans le cas des matrices SiC, elles sont perpendiculaires à la direction des renforts longitudinaux. Étant donné la géométrie de la cellule de calcul, c'est également la direction de sollicitation.

Selon les matériaux, les fissures transverses peuvent être déviées en fissures de décohé- sion inter-fils visibles FIG. 1.6. Le type de maillage utilisé ne permet pas de traiter la propagation de ces décohé- sions. Contrairement aux fissures transverses, aucune singularité géométrique ne les arrête, il est impossible de prévoir correctement une longueur de déco- hésion. Elles agissent sur les champs de contraintes et les populations de défauts et a fortiori sur la cinétique d'endommagement. Leur effet sera étudié sur une fissure mais elles ne se- ront pas intégrées aux procédures d'essai virtuel. Dans certaines études [COU 08], elles sont prises en compte dans la modélisation de la cinématique d'endommagement, mais la cinétique d'endommagement de décohé- sion inter-fils est identifiée expérimentalement.

3.2.2. Procédure numérique de fissuration des fils

Les maillages sont tout d'abord stockés sous une forme générique pour pouvoir jongler entre les différents outils utilisés pour l'essai virtuel :

- logiciel Triangle pour la génération des maillages,
- logiciel Matlab pour la modification des maillages,
- code de calcul ZéBuLon pour les calculs Éléments Finis,
- logiciel Medit pour la visualisation des maillages.

La structure MAILLAGE contient :

- les nœuds MAILLAGE.NŒUDS par leurs coordonnées dans le plan (x_i, y_i)
- les éléments MAILLAGE.ÉLÉMENTS par les nœuds qui les constituent (N_i, N_j, N_k) ,
- les groupes MAILLAGE.GROUPES : les nset par les nœuds et les elset par les éléments qui les constituent.

Des tables de correspondance indicées permettent de relier les éléments, les nœuds et les groupes entre eux.

Les fissures sont introduites dans les maillages du fil par dédoublement de nœuds. L'identification le long de la fissure est itérative : les éléments attenants au nœud n_i sont identifiés puis parmi les nœuds suivants situés dans le bon sens de propagation, le plus proche de la trajectoire de référence de la fissure est identifié n_{i+1} . Cette procédure est ap- pliquée depuis la singularité qui provoque l'amorce de rupture vers le haut et le bas. Les

fibres sont contournées et les pores traversés par les fissures. Elles sont stoppées au contact des fils longitudinaux, le dernier nœud sur l'interface matrice/fil longi n'est pas dédoublé dans la fissure transverse ; si l'on intègre les fissures de décohésion, la procédure itérative est appliquée vers la droite et la gauche le long de l'interface interfils.

La méthode d'introduction de fissures peut se résumer aux opérations suivantes :

- identification du(des) nœud(s) de départ au niveau d'une singularité, définition de la trajectoire de référence de la fissure perpendiculaire à la direction de sollicitation,
- procédure itérative de sélection des nœuds, contournement des fibres et saut des pores,
- duplication des nœuds sélectionnés dans la structure MAILLAGE :
 - i) rajout dans la liste MAILLAGE.NŒUDS des nœuds situés d'un côté de la fissure
 - ii) remplacement dans la liste MAILLAGE.ÉLÉMENTS, dans les éléments d'un même côté de la fissure, des nœuds rajoutés précédemment,
- mise à jour des tables de correspondance par ajout des nœuds,
- sauvegarde des données et des maillages sous les différents formats.

On notera que seul le nombre de nœuds augmente à mesure que l'on intègre des fissures.

3.3. Effet des fissures sur les champs de contraintes

La présence de fissures dans le fil influe sur les gradients mésoscopiques de contraintes qui se répercutent sur la dispersion des concentrations des contraintes. Les bords libres génèrent des zones de relaxation de contraintes visibles sur les champs de contraintes, dont l'effet est effectif sur les fonctions de dispersion.

Chronologiquement, une fissure transverse apparaît et traverse le fil de part en part. Les fissures de décohésion inter-fils se propagent par la suite à partir des pointes de fissure transverse, le long des frontières des fils longitudinaux.

3.3.1. Fissure transverse

Après application d'un critère de rupture, une fissure est introduite dans le matériau #1. L'exemple traité dans cette partie est la configuration avec pores et sans interphase. La géométrie de la fissure présente une dépendance au maillage surtout près des fils longitudinaux car il y est grossier. Dans le fil, le maillage est très raffiné par la présence de singularités, le tracé de fissuration est quasi rectiligne. L'allure générale est très ressemblante à celle des fissures observées expérimentalement. La représentation géométrique des fissures est suffisante pour caractériser l'évolution des champs de contraintes et de populations de défauts.

En sollicitation de traction uniforme sur la cellule, on observe autour de la fissure une zone de relaxation de contraintes FIG. 3.2. Sa forme est un cercle dont le diamètre est la fissure. Cette forme est celle communément observée dans les milieux homogènes [TIM 70], [BER 96], [MAL 09].

La répartition des champs de contraintes après fissuration modifie très clairement la distribution des concentrations de contraintes FIG. 3.3(a) : on observe un renflement convexe dans la partie basse qui correspond à un repli du spectre vers des valeurs faibles sur l'histogramme de densité. En séparant les singularités situées dans la zone de relaxation du reste de la population, on obtient un découplage net entre ces deux parties du fil : le repli du spectre

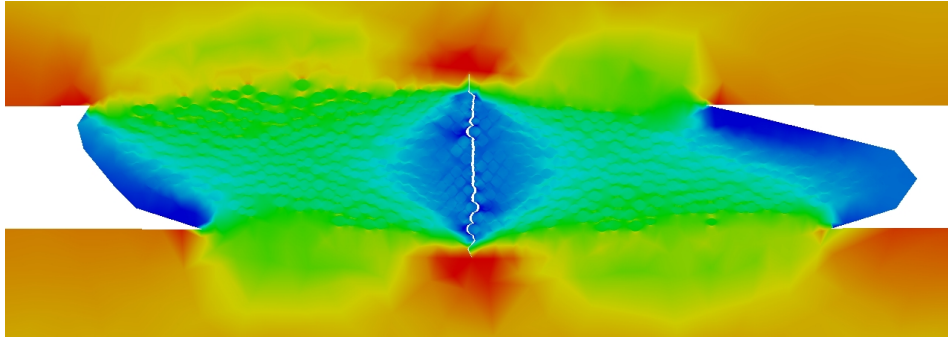


FIGURE 3.2 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, représentation de la zone de relaxation autour de la fissure

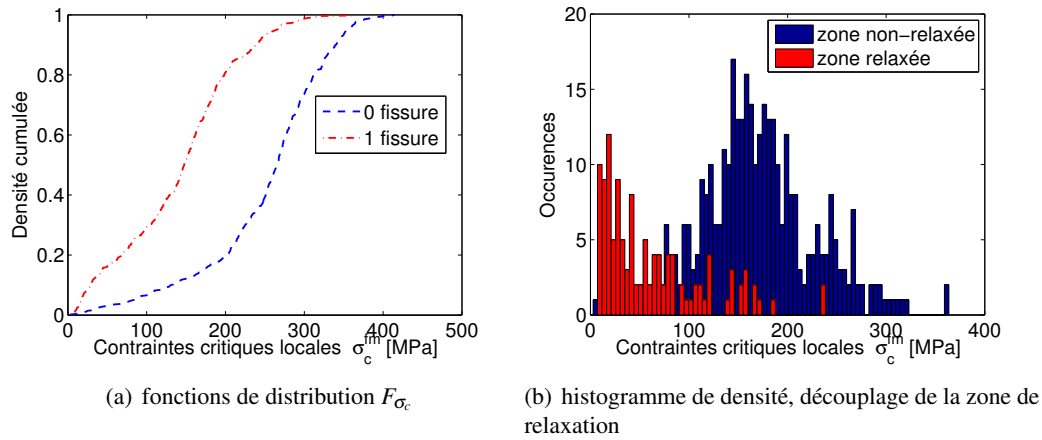


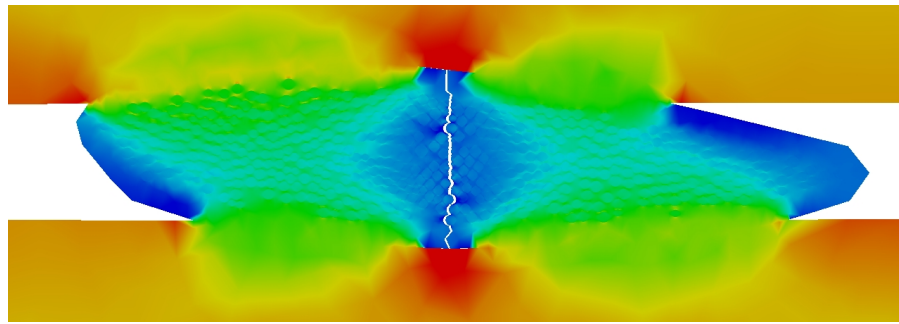
FIGURE 3.3 – Dispersion des contraintes critiques σ_c au niveau des fibres, influence de la présence d'une fissure

de l'histogramme correspond aux singularités situées dans la zone de relaxation autour de la fissure FIG. 3.3(b).

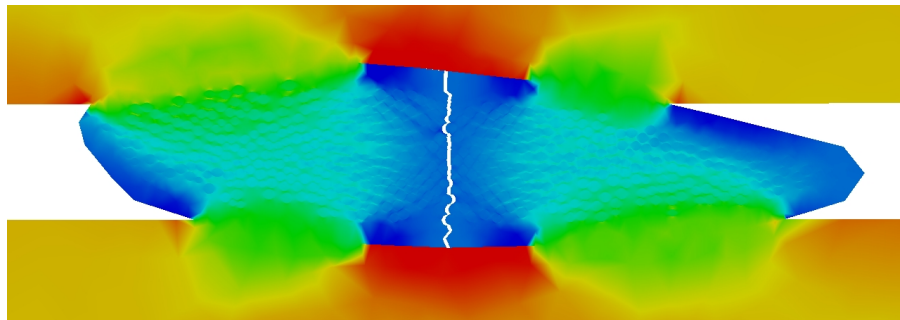
3.3.2. Décohésion inter fils

Les fissures de décohésion se propagent le long de l'interface des fils longitudinaux de part et d'autre des pointes des fissures transverses. La propagation ne peut être traitée avec les maillages utilisés, différentes longueurs de décohésion sont réalisées pour caractériser l'évolution des dispersions des champs de contraintes. Elles sont identiques de part et d'autre de la fissure transverse et le long des deux fils longitudinaux.

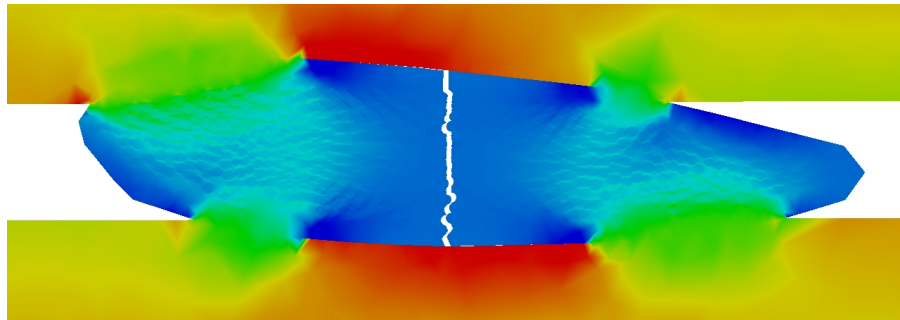
Le contact entre la partie du fil décohérée et les fils longitudinaux n'est pas pris en compte. La modélisation des frottements est complexe et la méconnaissance des géométries réelles des bords frottants fait qu'à l'heure actuelle il est impossible d'évaluer un coefficient de frottement ou de glissement entre les fils. En sollicitation, il peut apparaître un recouvrement des maillages au niveau zones proches des pointes de fissures, mais cet effet est



(a) L=2



(b) L=8



(c) L=14

FIGURE 3.4 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, représentation de la zone de relaxation autour de la fissure

négligeable sur les dispersions qui sont étudiées.

La progression des décohésions se traduit par de nouveaux bords libres autour du fil transverse et modifie la forme des zones de relaxation et les fonctions de distribution des concentrations de contraintes FIG. 3.4. La zone de relaxation est circulaire à décohésion nulle et évolue vers une forme rectangulaire élargie de deux demi-cercles dans la longueur du fil FIG. 3.4(b) à mesure que la décohésion progresse.

Lorsque la longueur de décohésion augmente, le repli du spectre devient tellement important qu'il est impossible de le distinguer clairement FIG. 3.5 : la zone de relaxation de

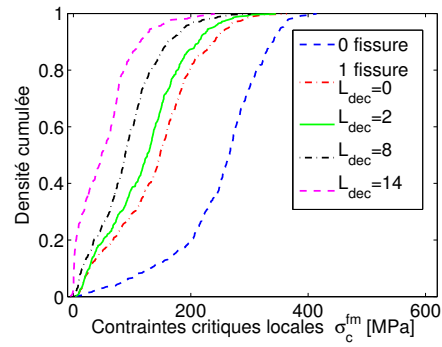


FIGURE 3.5 – Distributions des contraintes critiques σ_c , influence de la longueur de décohé-
sion

contraintes recouvre la quasi-totalité du fil d'autant qu'elle interagit avec les zones non chargées autour des mésopores en bout de fil FIG. 3.4(c). Les décohésions interfils, par l'augmentation de la taille cumulée des zones de relaxation, ont tendance à limiter le nombre de fissures d'endommagement transverse des fils.

3.4. Essais virtuels

Les trois microstructures présentées dans le chapitre précédent ont été testées virtuellement : *i)* le matériau #1, le fil avec fibres et matrice sans pores, *ii)* le matériau #2, le fil avec fibres, matrice et pores, *iii)* le matériau #3, le fil avec fibres, matrice, pores et une couche d'interphase autour des fibres. La seconde microstructure a été testée deux fois : une première avec un critère de rupture uniforme, une seconde en prenant en compte une dispersion dans les grandeurs à rupture, caractéristique des matrices céramiques. Ce dernier cas de simulation a pour but d'évaluer l'effet de combinaison de dispersions géométrique et matériau.

Quatre réalisations d'essais virtuels permettent de comparer les effets de la microstructure sur l'endommagement transverse des fils. Les caractéristiques des comportements obtenue sont comparées ensuite aux connaissances expérimentales sur les CMC, en particulier le seuil de non-linéarité qui est généralement associé au mode d'endommagement transverse des fils, inférieur à 0,1% [LIS 97].

3.4.1. Matériau #1, rupture uniforme

Le premier essai virtuel est réalisé sur le matériau décrit au paragraphe 2.3.1 : la microstructure ne contient pas de micropores. Les fibres sont les défauts du fil et les contraintes critiques sont localisées au niveau de l'interface fibre/matrice comme décrit dans la partie 2.2.2.1.

Les amorces de rupture se produisent dans la matrice en périphérie de fibres, sous l'hypothèse d'interface fibre/matrice forte. Le critère de rupture est en contrainte principale, il est explicité EQ. (3.1). La contrainte critique est définie EQ. 2.3 étant égale en périphérie de fibres au maximum de contrainte σ_{11} . Pour cet essai virtuel, la contrainte à rupture dans la matrice est considérée uniforme, $\sigma^R = 250MPa$.

Le critère de rupture étant uniforme, la première rupture intervient au niveau de la fibre générant la concentration de contraintes la plus importante. Le comportement des différents matériaux est linéaire élastique, toutes les simulations de traction sont réalisées sous une déformation globale sur la cellule de 0.1%. Il suffit d'appliquer une simple règle de proportionnalité pour déterminer la déformation appliquée correspondant aux ruptures successives.

La première fissure est introduite dans le maillage par la procédure de remaillage décrite en section 3.2.2. Un nouveau calcul est réalisé sur la nouvelle géométrie, la fibre qui satisfait le critère de rupture est identifiée pour introduire la seconde fissure. Cette procédure itérative est menée jusqu'à recouvrir le fil de zones de relaxation de contraintes autour des fissures. La séquence de multifissuration obtenue est présentée FIG. 3.6.

Les zones de relaxation de contraintes sont considérées comme des zones d'exclusion pour les amorces de rupture suivantes. Un critère géométrique de saturation du processus de fissuration transverse des fils peut donc être défini EQ. (3.4). Le nombre de fissures dépend des dimensions du fil (hauteur h et longueur L), la distance minimale interfissures étant égale au rayon des zones de relaxation, c'est à dire la demi hauteur.

$$N_{max} = E\left(\frac{2L}{h} + 1\right) \quad (3.4)$$

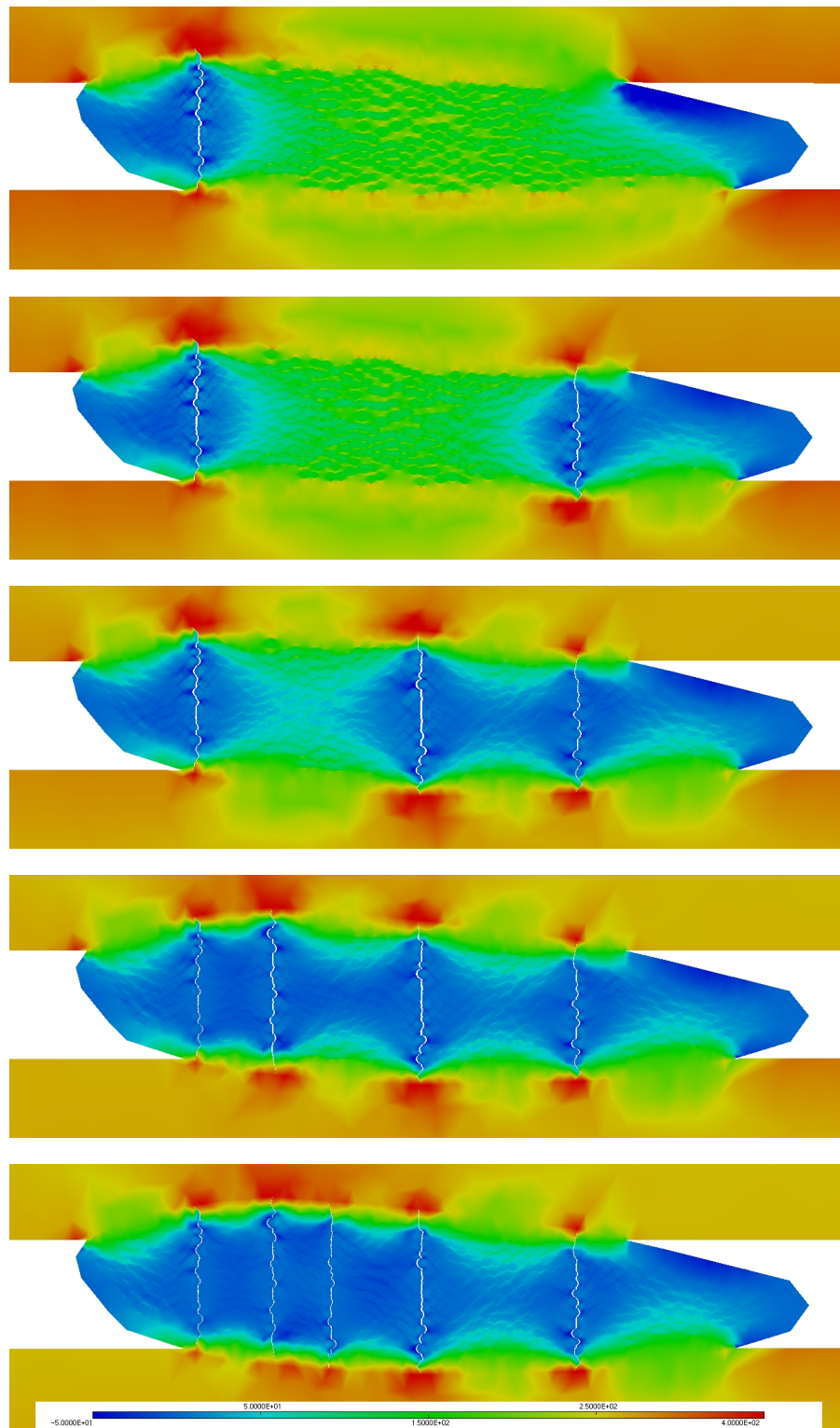


FIGURE 3.6 – Multifissuration du matériau #1 : champs de contraintes σ_{11}

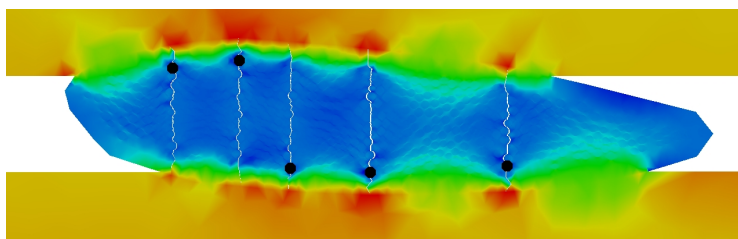


FIGURE 3.7 – Localisation des défauts activés dans le fil, matériau #1, disques noirs : de gauche à droite, ordre des fissures : 1, 4, 5, 3, 2

Les décohésions inter-fils ne sont pas prises en compte ici et des défauts peuvent être activés à une distance faible d'une fissure précédente dans l'espace entre les cercles et le bord du fil : dans notre cas les quatrième et cinquième fissures. Ce phénomène ne peut être négligé car il a été remarqué que les défauts activés sont situés en périphérie du fil FIG. 3.7.

Sans critère de saturation explicite, le nombre de fissures a été stoppé à 5 pour cet essai virtuel et sera de même pour les suivants.

L'apparition des fissures est relativement tardive en raison du choix de traiter des interfaces fortes. Il est vraisemblable que le niveau de sollicitation à atteindre pour les dernières fissures ait entraîné des décohésions ou l'endommagement des fils longitudinaux, en particulier au niveau des concentrations de contraintes au droit des fissures transverses. La saturation du fil transverse serait donc atteinte plus tôt ; expérimentalement on observe plutôt trois fissures par fil isolé voire moins au sein des amas de fils FIG. 1.6 mais la comparaison n'est pas aisée puisque cette configuration de microstructure n'a jamais été réalisée.

La distribution des contraintes critiques évolue fortement lors de la multifissuration FIG. 3.8. Les replis du spectre de dispersion décrit partie 3.3.1 et l'évolution des distributions vers les valeurs basses sont de plus en plus importants en fonction du nombre de fissures puisque la surface cumulée des zones de relaxation augmente. On note que les dernières fissures influent moins que les premières puisque les zones de relaxation recouvrent en partie des précédentes.

La courbe de comportement obtenue pour la cellule de calcul est linéaire par morceaux FIG. 3.9. La limite de non linéarité en déformation est à 0,06%. Les pertes de rigidité sont limitées, de 1.5% à 6.4%, ce qui signifie que ce sont les fils longitudinaux – dans la direction de sollicitation – qui reprennent une grande partie des efforts et qui assurent la rigidité du tissage. La connaissance de l'état d'endommagement transverse est cependant fondamentale car elle conditionne l'état de sollicitation des fils longitudinaux.

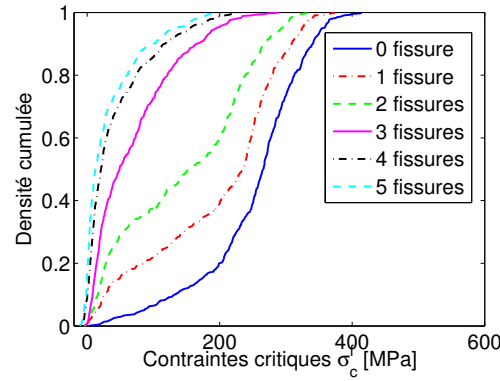


FIGURE 3.8 – Évolution des dispersions des contraintes critiques σ_c^f en fonction de l'état d'endommagement

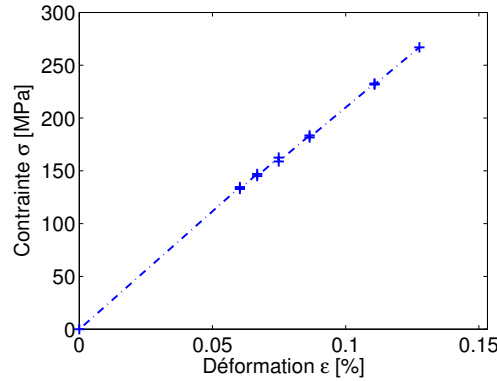


FIGURE 3.9 – Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #1

3.4.2. Matériau #2, critère de rupture uniforme

L'essai virtuel présenté dans cette partie est réalisé sur le matériau #2 présenté au paragraphe 2.3.2. C'est la microstructure d'un composite SiC/SiC. La présence de micropores au sein de la matrice entre les fibres modifie fortement les champs de contraintes. De nombreuses interactions entre les singularités fibre et pores influent en particulier sur les localisations de concentrations de contraintes. Une nouvelle population de défauts, les pores, entre en concurrence avec celle des fibres pour les amorces de fissures.

La liaison fibre/matrice est considérée comme une interface forte, le critère de rupture associé aux défauts fibres est identique à l'essai précédent : une rupture dans la matrice avec une contrainte à rupture uniforme $\sigma^R = 250\text{MPa}$. Le critère de rupture est explicité EQ. (3.1).

Le critère de rupture utilisé pour l'amorçage de fissure au niveau des pores est décrit au paragraphe 3.2.1. C'est une écriture non locale d'un critère énergétique de taux de relaxation d'énergie adaptée aux matériaux fragiles. Le calcul de la contrainte équivalent dans la bande de contrôle des contraintes intégrée au maillage EF donne une valeur bien supérieure

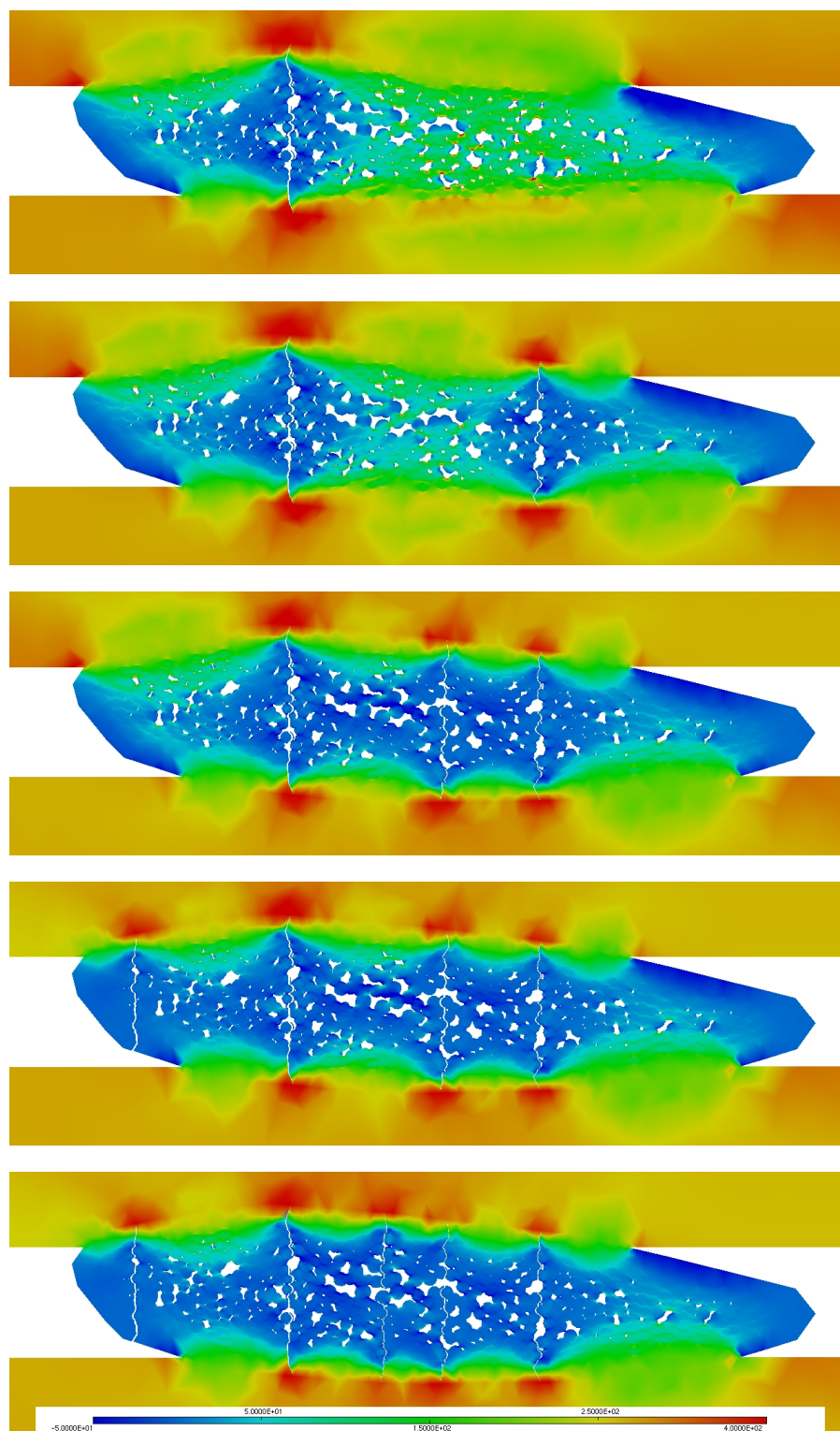


FIGURE 3.10 – Multifissuration du matériau #2 : champs de contraintes σ_{11}

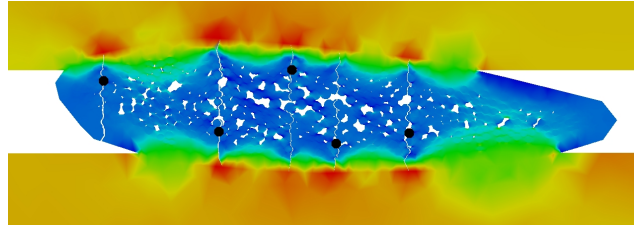


FIGURE 3.11 – Localisation des défauts activés dans le fil, disques noirs, matériau #2, σ^R uniforme : de gauche à droite, ordre des fissures : 4, 2, 5, 3, 1

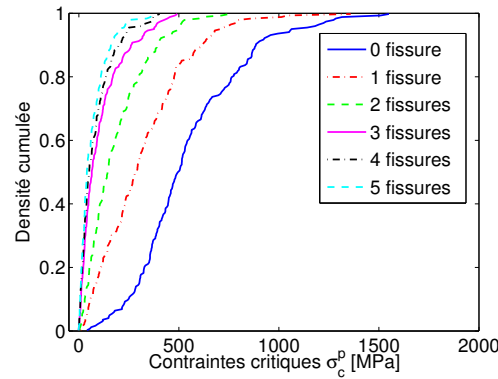


FIGURE 3.12 – Évolution des dispersions des contraintes critiques σ_c^p en fonction de l'état d'endommagement, matériau #2

à la contrainte à rupture dans la matrice utilisée pour les fibres. Cela signifie que le critère en contrainte est vérifié avant le critère énergétique, ce qui est un résultat répandu pour les matériaux fragiles [LAM 07]. Cette approche nécessite donc une bonne qualité dans le calcul des contraintes locales, ce qui a été exploré en partie 2.2.2.2. La valeur utilisée pour les pores est une contrainte à rupture uniforme $\sigma^R = 250 \text{ MPa}$, la même qu'au niveau des fibres.

Les concentrations de contraintes au niveau des pores sont beaucoup plus intenses qu'au niveau des fibres FIG. 2.18. Étant donné les contraintes à rupture utilisées égales pour les pores et les fibres, la compétition entre les deux modes de rupture est totalement déséquilibrée en faveur des pores.

Les fissures sont introduites successivement pour aboutir à la séquence de fissuration décrite FIG. 3.12. La répartition des fissures est plus régulière que dans l'essai virtuel précédent, les distances interfissures respectent mieux le critère de saturation géométrique donné EQ. (3.4). En effet, les pores sont moins nombreux et plus espacés dans le fil. En outre, les défauts activés sont un peu plus à l'intérieur du fil FIG. 3.11 et donc un peu moins susceptibles d'être positionnés hors d'une zone de relaxation et proches d'une fissure.

L'évolution de la dispersion des concentrations de contraintes suit la même tendance que pour l'essai virtuel précédent FIG. 3.12. On note toutefois que le repli du spectre associé à la première zone de relaxation est très peu visible pour la configuration à 1 fissure et

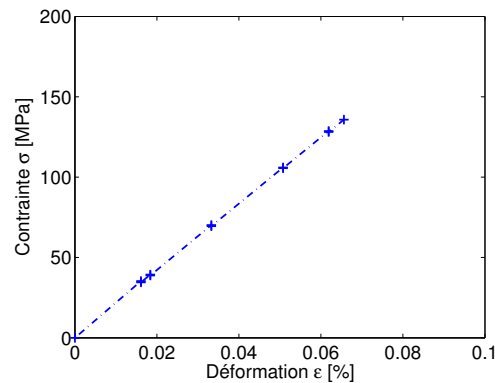


FIGURE 3.13 – Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #2, contraintes à rupture uniforme

encore moins pour les situations suivantes. Deux aspects expliquent cela : *i*) la densité de défauts pores est relativement faible, *ii*) la dispersion de la population est déséquilibrée vers les valeurs faibles. Quelques pores constituent l'extrême supérieur de la distribution et ils sont répartis dans le fil : lorsqu'une zone de relaxation apparaît, ce sont surtout des pores à moyenne concentration de contraintes qui s'y trouvent et le repli du spectre de dispersion est peu marqué.

La courbe de comportement de la cellule est linéaire par morceaux FIG. 3.13. La différence notable avec la simulation précédente est la limite de non linéarité ici égale à 0,014%. Les pores sont effectivement des défauts bien plus sévères que les fibres. Les baisses de rigidité sont similaires à l'essai virtuel précédent, de 2.4% à 5.5%.

3.4.3. Matériau #2, critère de rupture dispersé

Cet essai virtuel présente une séquence d'endommagement sur la microstructure du matériau #2 SiC/SiC poreux étudié au paragraphe précédent. Les pores sont toujours les défauts activés mais le critère de rupture n'est plus uniforme. Une distribution normale est utilisée pour la dispersion des contraintes à rupture FIG. 3.15. La moyenne est fixée à 250MPa et la variance à 20MPa, 97% des valeurs sont comprises entre 200 et 300MPa.

Une nouvelle séquence de fissuration est obtenue FIG. 3.14. Les trois premiers défauts activés sont les mêmes qu'à l'essai virtuel précédent mais dans un ordre différent, le quatrième défaut est nouveau et le cinquième de nouveau identique. L'évolution des dispersions des concentrations de contraintes est similaire en tout point à la simulation précédente, elle n'est pas présentée ici.

Le comportement de la cellule est similaire à la courbe précédemment obtenue. La limite de linéarité en déformation est toujours à 0,024%. Les ruptures successives ont lieu à des valeurs à peine différentes. La prise en compte de la dispersion des contraintes à rupture n'est ici pas significative, les pores les plus gros restent les défauts activés en premier mais dans un ordre différent. La dispersion des contraintes à rupture – environ 100MPa – est a

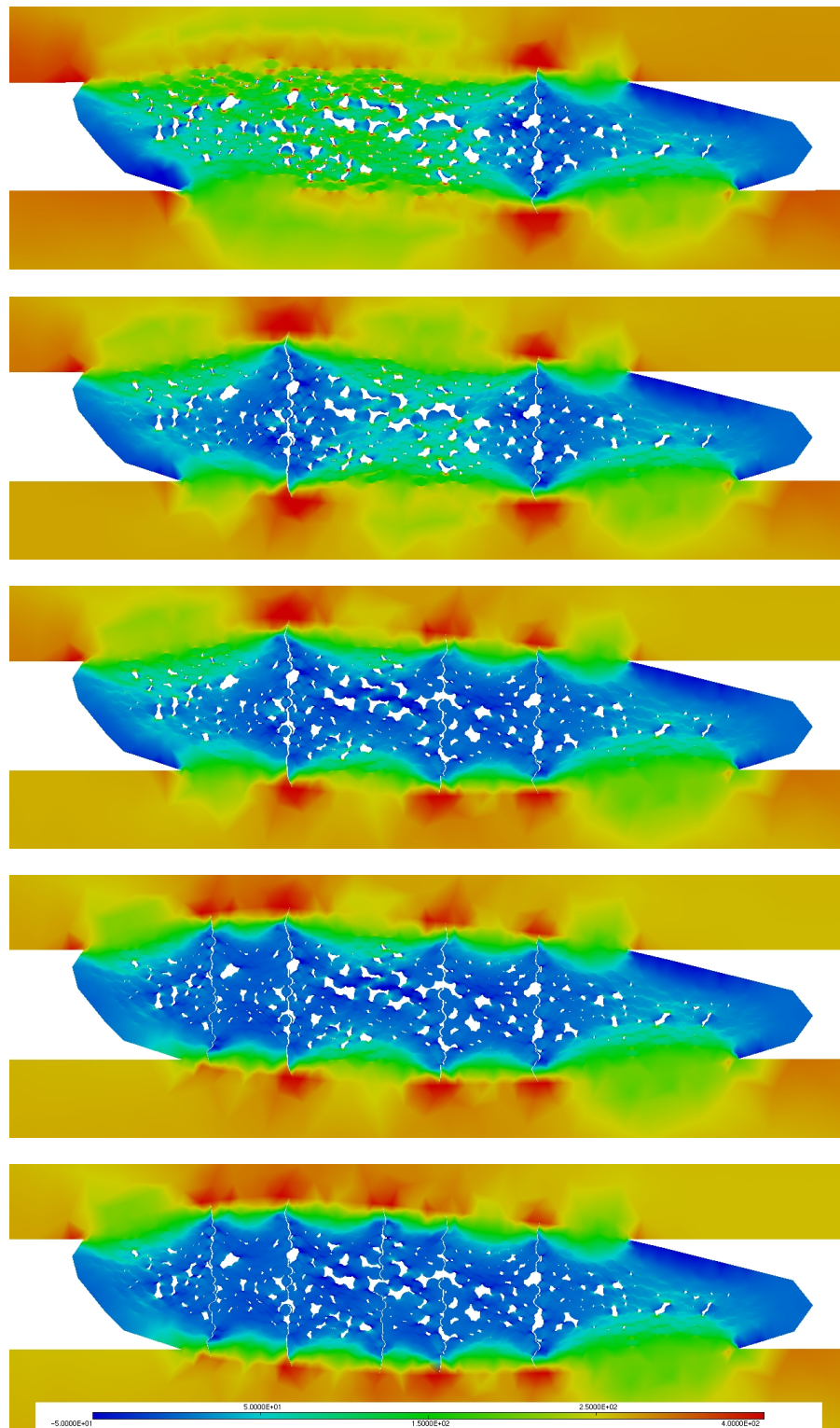


FIGURE 3.14 – Multifissuration du matériau #2, contraintes à rupture dispersées

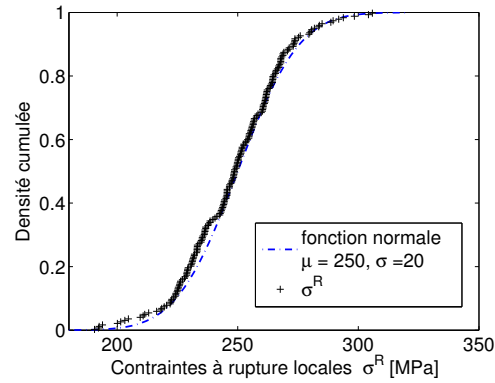


FIGURE 3.15 – Fonction de dispersion des contraintes à rupture, matériau #2

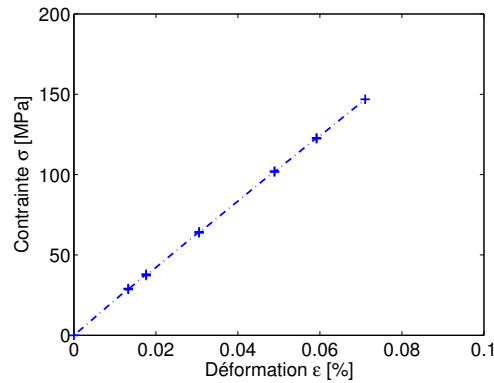


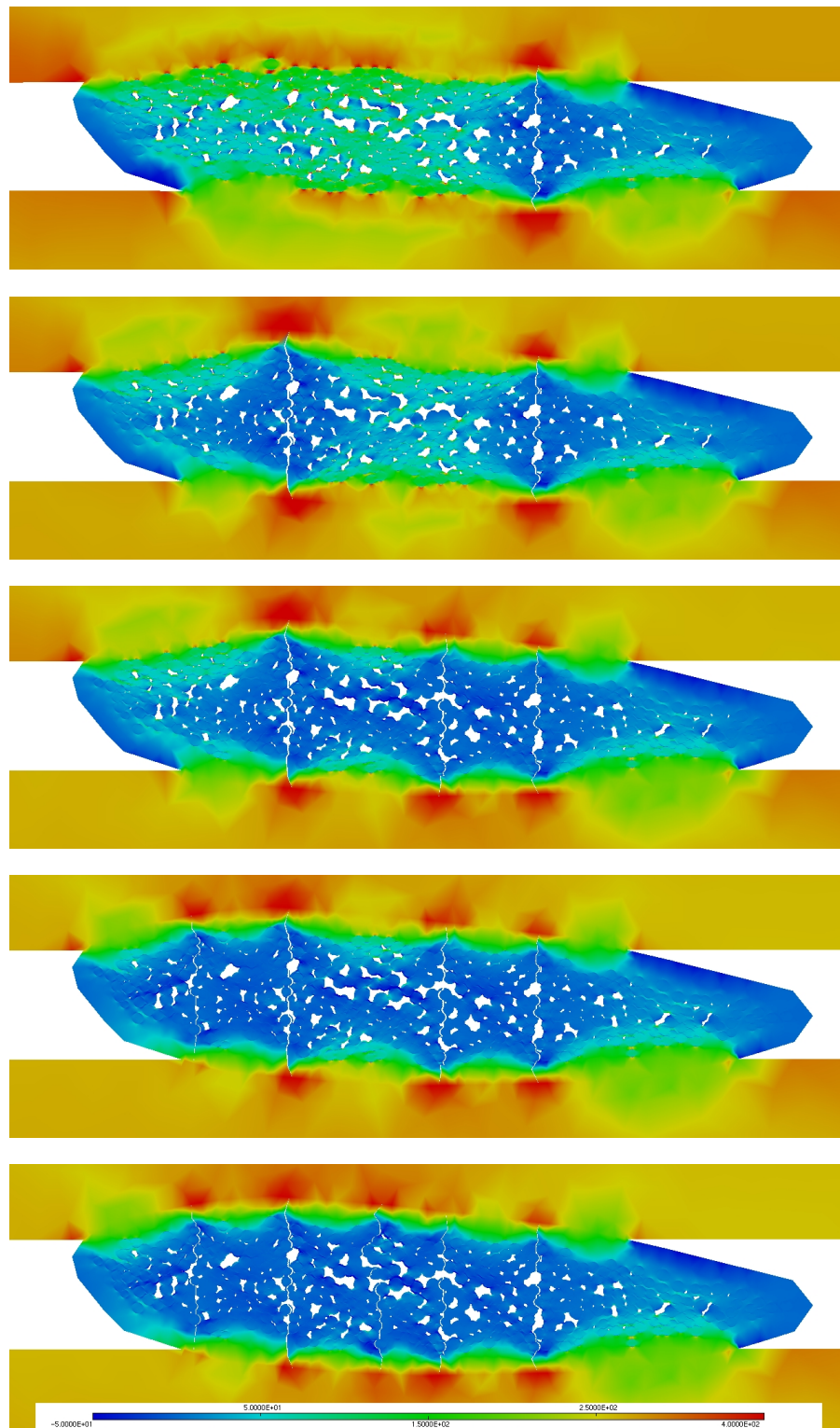
FIGURE 3.16 – Courbe de comportement de la cellule de calcul, matériau #2, contraintes à rupture dispersées

priori trop faible en comparaison avec les plus fortes concentrations de contraintes – environ 1500MPa à $\varepsilon = 0,1\%$ – pour modifier de façon significative les seuils d'apparition des fissures.

3.4.4. Matériau #3, critère de rupture uniforme

Le dernier essai virtuel est réalisé sur la microstructure SiC/PyC/SiC poreuse présentée au paragraphe 2.3.3. La couche de pyrocarbone PyC influe fortement sur la répartition des contraintes dans la microstructure, mais plus important encore, elle est une nouvelle population de défauts – la couche autour de chaque fibre – qui rentre en concurrence avec les défauts pores.

En effet, la résistance du PyC est beaucoup plus faible que celle de la matrice SiC, c'est le comportement attendu d'une interphase fragile. Le comportement du PyC lamellaire est orthotrope transverse, il est en première approximation considéré homogène pour faciliter la modélisation de la microstructure. Cela a pour effet de surestimer la rigidité de l'interphase dans son épaisseur.

FIGURE 3.17 – Multifissuration du matériau #3 : champ de contraintes σ_{11}

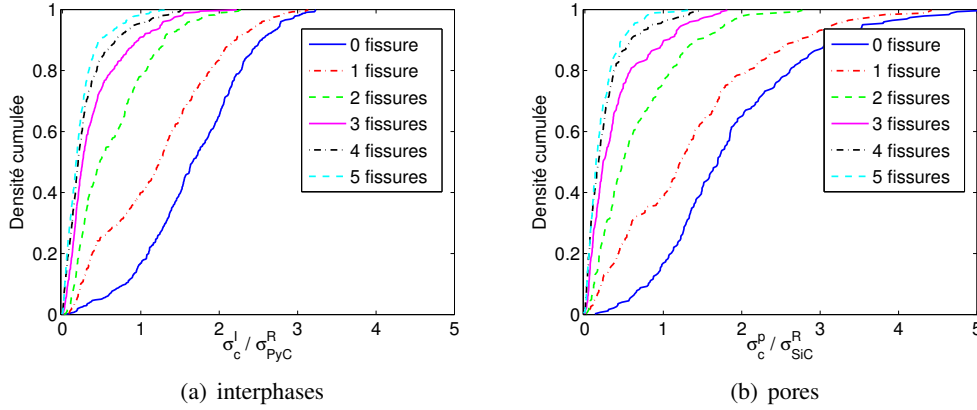


FIGURE 3.18 – Évolution des dispersions du rapport σ_c/σ^R en fonction de l'état d'endommagement

Les plans de graphitisation du pyrocarbone sont parallèles à la surface des fibres. Dans la direction hors-plan, correspondant ici à une concentration de contrainte σ_{11} localisé à 0° pour une inclusion fibre rigide, une contrainte à rupture est proposée dans [POM 07] : $\sigma_{PyC}^R = 70MPa$.

Les concentrations de contraintes au niveau des pores sont beaucoup plus importantes que celles au niveau des interphases FIG. 2.21, mais la résistance plus faible de l'interphase rééquilibre la compétition entre les deux populations. Il suffit pour cela de rapporter chaque concentration de contrainte à la valeur à rupture correspondante, le critère de rupture est reformulé EQ. (3.5).

$$1 \leq \frac{\sigma_c}{\sigma^R} \quad (3.5)$$

Pour cet essai virtuel, les valeurs à rupture sont considérées uniformes. La contrainte à rupture dans la matrice est toujours la même $\sigma_{SiC}^R = 250MPa$. La séquence de fissuration obtenue est présentée FIG. 3.17.

Les zones de relaxation génèrent les replis de spectre dans les fonctions de dispersion des grandeurs à ruptures adimensionnées FIG. 3.18. Les trois premiers défauts activés sont des pores, les deux suivants des interphases : la compétition entre les populations de défauts est équilibrée. On note qu'elle penche en faveur des pores au départ pour basculer ensuite en faveur des interphases.

Dans ce dernier essai virtuel, le schéma de fissuration respecte le critère de distance inter-fissures énoncé au paragraphe 3.4.1. Les fissures sont réparties régulièrement dans le fil.

La courbe de comportement est linéaire par morceaux FIG. 3.19. La limite de linéarité est obtenue ici pour une déformation égale à 0,020%. La présence des interphases souples diminue la rigidité du fil ainsi que les concentrations de contraintes au niveau des pores. La

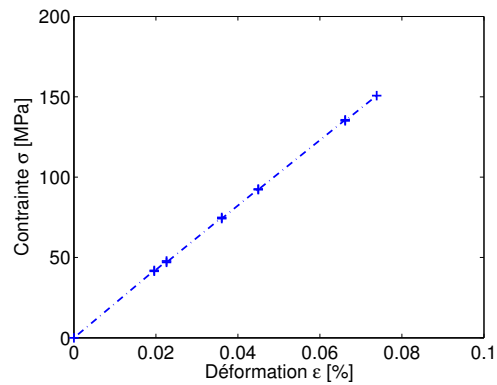


FIGURE 3.19 – Courbe de comportement de la cellule de calcul

baisse de rigidité va de 1,2% à 4,7%, c'est moins que pour les essais virtuels précédents. Cela s'explique par la souplesse plus importante du fil transverse qui agit moins pour la rigidité de la cellule de calcul.

3.5. Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode d'essai virtuel appliquée aux matériaux virtuels développés dans le chapitre précédent a été décrite et appliquée. Les cellules de calcul sont soumises à des sollicitations de traction pour générer des champs de contraintes fortement hétérogènes dans le fil transverse. En fonction de la configuration de la microstructure, différents critères de rupture sont appliqués pour déterminer les niveaux d'apparition des fissures. En raison du caractère fragile de la rupture des matrices et des interphases céramique, ces critères de rupture sont en contrainte principale locale.

Les fissures sont introduites dans le maillage par dédoublement des nœuds situés le long du trajet de fissuration qui est en première approximation pris perpendiculaire à la direction de sollicitation globale. Chaque fissure génère autour d'elle une zone de relaxation de contraintes circulaire, qui peut évoluer avec la propagation éventuelle de fissures de décohérences inter-fils. À cause de l'impossibilité de traiter la progression des décohérences par le maillage utilisé, elles ont été négligées dans tous les essais virtuels.

Chaque fissure modifie la dispersion des concentrations de contraintes associées aux défauts microstructuraux – fibres, pores, interphases. La relaxation des contraintes localisées autour de chaque fissure entraîne un repli du spectre de dispersion visible sur les fonctions de densité et se traduit par une bosse sur les fonctions de distribution ; ce phénomène est plus marqué pour les premières fissures.

Les courbes de comportement obtenues sont linéaires par morceaux, tout à fait en accord avec le choix de comportement linéaire élastique des constituants du matériau composite. Les baisses de rigidités relativement faibles sont associées à la configuration géométrique particulière de la cellule de calcul : les fils longitudinaux sont les éléments qui reprennent principalement le chargement. L'étude de l'endommagement transverse des fils est néanmoins indispensable puisque l'état du fil transverse conditionne les champs de contraintes dans les fils longitudinaux.

La confrontation de diverses microstructures et de dispersion des contraintes à rupture permet de donner des tendances. L'absence de micropores augmente très nettement la limite de linéarité de comportement de la cellule de calcul en limitant les concentrations de contraintes à des configurations d'inclusion rigide. La présence de micropores diminue la limite de linéarité car les pores sont des vides comparables à des fissures existantes, ce sont des défauts plus sévères que les fibres.

La présence d'une couche d'interphase autour des fibres n'a pas un effet significatif sur le comportement de la cellule. Les interphases constituent une population de défauts qui entre en concurrence active avec les pores en raison de leur faible résistance, mais les niveaux d'activation sont similaires. Leur effet sera plus marqué sur l'endommagement longitudinal des fils de par leur rôle de fusible mécanique déviateur de fissures qui annihile le caractère fragile de la rupture des fibres et de la matrice.

La cinétique d'endommagement – les niveaux d'apparition des fissures – dépend fortement des critères de rupture utilisés. C'est ici un aspect sujet à des améliorations en particulier au niveau de la précision des calculs numériques et de la connaissance des dispersions des grandeurs à rupture locales.

En ce qui concerne les zones interfaciales, la modélisation des inclusions peut être améliorée par des outils numériques existants – zone cohésive, X-FEM, etc. – mais très peu de données expérimentales correspondantes sont disponibles – par exemple une loi d'interface cohésive fibre/matrice.

En ce qui concerne les pores, les valeurs à rupture sont a priori éprouvées, c'est ici le calcul des champs locaux qui nécessite des outils plus développés. Pour les interphases, il faudra seulement prendre en compte l'anisotropie et l'orientation lorsque c'est nécessaire pour améliorer l'estimation des contraintes locales.

En conclusion, les essais virtuels présentés ici inaugurent les approches "tout micro" : on cherche à traiter la modélisation d'un matériau à partir de l'échelle la plus fine mais il manque encore des données expérimentales à l'échelle microscopique. La confrontation dans ce cas des échelles microscopiques et mésoscopiques au sein d'une même simulation entraîne des coûts de calcul ÉF relativement élevés en terme de stockage mémoire. Les outils numériques ne peuvent être trop complexes, il faut les adapter par le meilleur compromis avec les connaissances limitées de grandeurs caractéristiques microscopiques. L'avantage des simulations présentées ci-dessus est de traiter des comportements très simples – linéaire élastique – qui favorisent la modularité et l'adaptabilité des configurations de calcul.

TROISIÈME PARTIE

Approche statistique probabiliste de la multifissuration transverse des fils

Chapitre 4

Modèle statistique probabiliste de multifissuration transverse des fils

Ce chapitre présente le formalisme statistique probabiliste développé pour modéliser la multifissuration et amorcer un changement d'échelle du microscopique vers le mésoscopique. Le passage est réalisé de la description des populations de défauts activables à la sélection d'un défaut activé. Ce défaut associé à une fissure prend son sens à l'échelle où le fil est représenté par un milieu homogène équivalent.

Les champs de contraintes hétérogènes obtenus dans la partie précédente sont discrétisés sous la forme d'une population de sites préférentiels d'amorce de rupture. Les concentrations de contraintes que génère chaque inclusion constituent une population de valeurs dispersées de manière aléatoire. Chaque singularité est considérée comme un défaut dans le matériau.

Des probabilités de rupture successives du fil sont explicitées à partir des dispersions des champs de contraintes, des grandeurs à rupture ou d'autres paramètres statistiques définis par la suite. Une version adaptée du formalisme de Weibull est proposée. Les populations de défauts sont décrites à différentes échelles au sens de l'endommagement transverse.

4.1. Définition des grandeurs dispersées

Dans cette section sont présentées les relations analytiques entre les grandeurs qui interviennent dans l'application de critères de rupture. Tout d'abord, la contrainte locale est décomposée en fonction des influences des différentes échelles du matériau – microstructure et tissage. Ensuite le critère de rupture local est explicité et transposé de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique dans le Milieu Homogène Équivalent. Présenté plus en détail au Chapitre 5, il est la représentation homogénéisée du fil à l'échelle mésoscopique.

4.1.1. Découplage d'échelle micro/méso

Les concentrations de contraintes décrites dans la partie II au sein du matériau hétérogène sont comparées aux contraintes dans le matériau homogène équivalent du fil à l'échelle

mésoscopique, relevées à la localisation de chaque inclusion. Le coefficient de concentration critique de contrainte K_c est exprimé en fonction de la contrainte critique σ_c identifiée précédemment et de la contrainte σ_{eq} dans le milieu équivalent EQ. (4.1).

$$\sigma_c = K_c \sigma_{eq} \Leftrightarrow K_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{eq}} \quad (4.1)$$

La contrainte équivalente σ_{eq} est issue d'un calcul à l'échelle mésoscopique mais sa définition spatiale correspond à l'échelle microscopique : elle est à cheval sur les deux échelles.

Elle est décomposée en fonction de l'intensité de la sollicitation sur la cellule Σ et d'un facteur κ de répartition des contraintes dans le MHE Eq. (4.2)

$$\sigma_{eq} = \kappa \Sigma \Leftrightarrow \kappa = \frac{\sigma_{eq}}{\Sigma} \quad (4.2)$$

L'équation (4.1) devient :

$$\sigma_c = K_c \kappa \Sigma \quad (4.3)$$

ou encore

$$\sigma_c = \kappa_c \Sigma \quad (4.4)$$

avec

$$\kappa_c = K_c \kappa \quad (4.5)$$

κ_c est appelé coefficient mésoscopique de répartition de contraintes critiques.

Deux remarques importantes sont à faire. Premièrement, le coefficient de concentration de contraintes est une grandeur intrinsèque, qui ne dépend que de l'arrangement local de la microstructure. Deuxièmement, l'approche par matériau virtuel permet d'avoir une description exhaustive des défauts – des faiblesses – d'origine structurelle : toutes les inclusions fibres et pores sont identifiées, représentées et leur effet à l'échelle microscopique est caractérisé.

Ce dernier point est fondamental pour l'écriture de l'approche statistique des ruptures successives, pour laquelle il faut bien entendu considérer des valeurs à rupture locales. En effet dans de nombreux travaux, la population de défauts n'est que partiellement connue puisqu'elle est identifiée expérimentalement par ruptures successives. Sa densité géométrique est traitée comme un paramètre d'ajustement et n'est pas toujours en accord avec la séparation d'échelles nécessaire entre le volume de fragmentation et le volume élémentaire associé à un défaut. Les extrapolations vers les échelles plus hautes sont viables mais ça n'est pas le cas vers les échelles plus fines comme montré FIG. 1.12.

4.1.2. Critère de rupture local et sévérité des défauts

En conséquence des propriétés fragiles des matrices céramiques, un critère de rupture en contrainte est utilisé pour caractériser l'amorçage de fissures. Il est explicité au niveau des singularités en fonction de la contrainte critique et de la contrainte de rupture σ^R , c'est sa version *locale*.

$$\sigma^R \leq \sigma_c \quad (4.6)$$

En utilisant la décomposition des grandeurs critiques Eq. (4.1), le critère de rupture est explicité en fonction de la contrainte dans le MHE.

$$\frac{\sigma^R}{K_c} \leq \sigma_{eq} \quad (4.7)$$

On définit la sévérité microscopique des défauts S_m . Elle correspond à la contrainte dans le MHE qui satisfait le critère de rupture.

$$S_m = \frac{\sigma^R}{K_c} \quad (4.8)$$

À l'échelle de la cellule de calcul, l'équation (4.7) devient

$$\frac{\sigma^R}{K_c \kappa} \leq \Sigma \quad (4.9)$$

On définit la sévérité mésoscopique des défauts S_M . Elle correspond à la contrainte appliquée sur la cellule qui satisfait le critère de rupture au niveau d'un défaut. Elle prend en compte le caractère non uniforme des champs de contraintes dans le MHE.

$$S_M = \frac{\sigma^R}{K_c \kappa} = \frac{\sigma^R}{\kappa_c} \quad (4.10)$$

La sévérité microscopique est un paramètre intrinsèque à la microstructure. La sévérité mésoscopique dépend du champ de contraintes dans le MHE dans lequel elle est identifiée.

4.2. Dispersion des populations de défauts et probabilité de rupture

4.2.1. Combinaison des fonctions de distribution

À partir des fonctions de distribution des coefficients de concentration de contraintes et des contraintes à rupture, on peut expliciter la fonction de distribution de n'importe quelle combinaison mathématique des deux : somme, produit, etc.

Considérant deux variables aléatoires X et Y , décrites par les fonctions de densité respectives f_X et f_Y , on veut obtenir $f_{(X,Y)}$ la densité conjointe du couple (X,Y) . La *densité conditionnelle* de X connaissant $Y = y$, valable lorsque $f_Y(y) > 0$, est donnée par la relation

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (4.11)$$

également appelée formule de Bayes.

La *probabilité totale* de la variable X conditionnée par la variable Y pour une propriété décrite par une condition d'appartenance à un sous-ensemble B , est donnée par la relation

$$Pr(X \in B) = \int_{\Omega_Y} Pr(X \in B \mid Y = y) f_Y(y) dy \quad (4.12)$$

Ainsi pour le rapport qui définit la sévérité mésoscopique, la fonction de distribution ou de densité cumulée $F_{S_m}(s)$ conditionnée par la variable K_c est donnée par la relation

$$F_{S_m}(s) = \int_{\Omega_{K_c}} Pr\left(\frac{\sigma^R}{K_c} < s \mid K_c = k\right) f_{K_c}(k) dk \quad (4.13)$$

On en déduit l'expression de la fonction de densité cumulée $F_{S_m}(s)$ en fonction des fonctions densité des contraintes à rupture σ^R et des coefficients K_c .

$$F_{S_m}(s) = \int_{\Omega_{K_c}} F_{\sigma^R}(s.k) f_{K_c}(k) dk \quad (4.14)$$

La fonction de densité est obtenue en dérivant l'expression précédente :

$$f_{S_m}(s) = \frac{d}{ds} F_{S_m} = \int_{\Omega_{K_c}} k f_{\sigma^R}(s.k) f_{K_c}(k) dk \quad (4.15)$$

De même, en utilisant la variable intermédiaire κ_c , la fonction de densité cumulée des sévérités mésoscopiques S_M s'exprime

$$f_{S_M}(s) = \int_{\Omega_{\kappa_c}} k f_{\sigma^R}(s.k) f_{\kappa_c}(k) dk \quad (4.16)$$

avec

$$f_{\kappa_c}(s) = \int_{\Omega_{\kappa}} \frac{1}{h} f_{K_c}(h) f_{\kappa}\left(\frac{k}{h}\right) dk \quad (4.17)$$

Cette expression est d'un niveau d'application plus complexe mais prend en compte l'hétérogénéité du champ mésoscopique.

En appliquant cette démarche aux champs de contraintes discrétisés au niveau des défauts, on exprime la fonction de densité des contraintes critiques σ_c à partir des fonctions de densité des coefficients de concentration de contraintes K_c et des contraintes dans le milieu homogène équivalent σ_{eq} .

$$f_{\sigma_c}(\sigma) = \int_{\Omega_{\sigma_{eq}}} \frac{1}{s_{eq}} f_{K_c}\left(\frac{\sigma}{s_{eq}}\right) f_{\sigma_{eq}}(s_{eq}) ds_{eq} \quad (4.18)$$

La fonction densité des contraintes dans le milieu homogène équivalent est elle même explicitée en fonction de la densité des facteurs de répartition des contraintes mésoscopiques κ .

$$f_{\sigma_{eq}}(\sigma) = \frac{1}{\Sigma} f_{\kappa}\left(\frac{\sigma}{\Sigma}\right) \quad (4.19)$$

On peut de cette manière exprimer les dispersions, par les fonctions de densité et de distribution, des variables à différentes échelles qui rendent compte des hétérogénéités des champs de contraintes et des propriétés à rupture locales. On notera que ces combinaisons de fonctions sont valables pour des variables non indépendantes puisque une éventuelle interaction est prise en compte dans le calcul des intégrales. Il faut faire la différence entre les variables *intrinsèques*, qui peuvent être transposées sans précaution, et les variables *extrinsèques* dont la dispersion n'est définie que pour un état d'endommagement et de sollicitation

donnés.

À partir de la population des concentrations de contraintes K_c identifiée en comparant les simulations sur les milieux hétérogène et homogène équivalent, de la population des contraintes à ruptures locales σ^R expérimentales si possible et de la variabilité des facteurs de répartition de contraintes mésoscopiques κ , on peut expliciter les dispersions de tous les paramètres statistiques.

4.2.2. Probabilités de rupture : approche du "maillon faible"

La probabilité d'activation d'un défaut est obtenue à partir de l'expression du critère de rupture EQ. (4.7). Elle est conditionnée à la forme du champ de contraintes dans le MHE, caractérisée par la distribution du paramètre κ . Elle est explicitée en fonction de la fonction de dispersion des sévérités microscopiques.

$$p_{act|\kappa}(\sigma_{eq}) = p(S_m \leq \sigma_{eq}) = F_{S_m}(\sigma_{eq}) \quad (4.20)$$

Cette expression combine les dispersions des contraintes à rupture et des contraintes critiques. Toutefois le conditionnement au champ de contraintes non uniforme doit être levé pour l'appliquer à un cas de calcul.

La probabilité d'activation est donc exprimée à partir du critère de rupture mésoscopique EQ. (4.9) et de la fonction de dispersion des sévérités mésoscopiques.

$$p_{act}(\Sigma) = p(S_M \leq \Sigma) = F_{S_M}(\Sigma) \quad (4.21)$$

Cette seconde expression prend en compte la dispersion des contraintes dans le MHE par définition de la sévérité S_M EQ. (4.10). Elle est équivalente à l'équation précédente (4.20) à laquelle on applique la formule des probabilités totales par rapport à la variable de conditionnement κ .

La probabilité d'activation des défauts est en fait décrite par la distribution des défauts par la sévérité mésoscopique S_M . Elle est notée par la suite de façon générique Φ_d .

$$\Phi_d(\Sigma) = p_{act}(\Sigma) \quad (4.22)$$

Plaçons nous maintenant dans le cas du fil contenant N défauts pour détailler l'approche statistique probabiliste. Pour appliquer le principe du maillon faible, on considère les défauts indépendents et répartis dans le champ de contrainte du MHE.

La rupture du MHE contenant tous les défauts intervient dès l'activation du premier d'entre eux. L'application de ce principe est basée sur l'hypothèse de propagation instantanée des fissures dans la matrice fragile, l'ensemble des défauts répartis spatialement peut être vu comme une chaîne 1D.

La probabilité d'apparition d'une fissure parmi N défauts est le complément à 1 de la probabilité de survie de l'ensemble.

$$p_{rupture}(N) = 1 - p_{survie}(N) \quad (4.23)$$

La probabilité de survie des N défauts est obtenue simplement à partir de la probabilité d'activation d'un seul défaut qui est le complément à 1 de sa probabilité de survie.

$$p_{survie}(N) = (p_{survie}(1))^N = (1 - \Phi_d)^N \quad (4.24)$$

Cette expression traduit l'aspect fragile de la rupture dans la matrice céramique et la propagation instantanée d'une fissure de part et d'autre du fil transverse. Les défauts répartis spatialement en 2D sont ramenés à une chaîne 1D dont la probabilité de survie est égal au produit de celle de chaque maillon.

Lorsque le nombre de défauts N est important, la probabilité de survie de l'ensemble correspond mathématiquement au développement limité d'une fonction exponentielle.

$$\left(1 - \frac{X}{N}\right)^N \underset{N \gg 1}{\sim} \exp(-X) \quad (4.25)$$

La probabilité de rupture de l'ensemble des N défauts est donc explicitée sous la forme

$$p_{rupture}(N) = 1 - e^{(-N\Phi_d)} \quad (4.26)$$

La probabilité d'amorce de la première fissure est ainsi explicitée à l'échelle mésoscopique en utilisant la probabilité d'activation correspondante d'un défaut en se référant à l'équation EQS. (4.21). On la note par la suite de manière générique Φ_f .

$$\Phi_f = 1 - e^{(-N\Phi_d)} \quad (4.27)$$

Ce résultat habituel de l'approche de Weibull est ici intéressant car le point de départ de l'application aux simulations est la distribution des défauts et non la probabilité d'apparition d'une fissure. On passe de la probabilité associée à un défaut pris au hasard dans le fil à la probabilité associée à l'ensemble de N défauts.

4.2.3. Description des défauts par une distribution ponctuelle de Poisson

Le modèle décrit dans le paragraphe précédent ne distingue par l'aspect spatial 2D de la population de défauts : on peut considérer indifféremment une chaîne de défauts – par exemple pour la fragmentation de fibres – ou une distribution dans un plan – les fibres et pores dans la coupe transverse du fil.

La dispersion spatiale des défauts est décrite ici par une distribution spatiale uniforme dans le plan d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité variable $\Lambda = \lambda(\Sigma)N$. $\lambda(\Sigma)$ désigne la densité – adimensionnée, i.e. la proportion – de défauts activés parmi N défauts activables présents dans le MHE dans la cellule sollicitée à un niveau de contrainte Σ . L'aspect spatial uniforme est une hypothèse simplificatrice forte qui rejoint le cadre standard des approches statistiques.

L'espace de définition de la densité de points est ici spatial et en contraintes. Inspirée des définitions des densités utilisées dans les travaux sur les composites 1D [CAS 10] et les milieux 2D [MAL 09], la densité ponctuelle de défauts $\lambda(\Sigma)$ est exprimée en fonction d'une

densité sous-jacente $d\lambda$ intégrée sur la portion du domaine des contraintes parcouru pour les activer, de 0 à Σ .

$$\lambda(\Sigma) = \int_0^\Sigma d\lambda(s)ds \quad (4.28)$$

La densité $\lambda(\Sigma)$ est adimensionnée, $d\lambda$ est l'inverse d'une contrainte.

Cette écriture intégrale découle des espaces paramétriques dans lesquels est défini le processus ponctuel décrivant les populations de défauts [MAT 75]. Ici ce sont l'espace spatial 2D qui est ramené à un nombre de défauts – par la discrétisation des concentrations de contraintes – et le domaine de contrainte à parcourir pour activer la totalité des défauts, naturellement $[0, +\infty[$. L'aspect spatial est simplifié par l'hypothèse de distribution uniforme.

Le développement qui suit est un résultat usuel des approches poissonniennes. La probabilité d'avoir k défauts activés parmi les N activables est donnée EQ. (4.29)

$$p(k|N) = \frac{(\lambda N)^k}{k!} e^{-\lambda N} \quad (4.29)$$

On note que le paramètre N nombre de défauts remplace le paramètre de longueur L ou de volume V utilisés habituellement (se référer à [WEI 39], [BAX 98], [MAL 09]) pour obtenir un nombre de défauts activés dans un domaine. La fonction $\lambda(\Sigma)$ est donc ici une densité au sens strict de la définition. Dans les autres problèmes, les fonctions utilisées sont des densités volumique ou linéique, réduites par abus de langage à des densités, toujours pour aboutir à nombre de défauts.

Une description exhaustive de la population de défauts est donnée par la transformation du champ hétérogène de contrainte du milieu dans les essais virtuels en une famille de points. La densité des défauts est donc adimensionnée et l'on s'affranchit de l'aspect dimensionnel.

La probabilité de rupture du fil contenant N défauts est la probabilité de trouver au moins un défaut. Elle est exprimée par la somme des probabilités d'avoir k défauts définies EQ. (4.29) pour obtenir l'expression EQ. (4.30).

$$p_{rupture} = \sum_{k=1}^N p_k(N) = e^{-\lambda N} \sum_{k=1}^N \frac{(\lambda N)^k}{k!} \quad (4.30)$$

En considérant le nombre de défauts N grand, on reconnaît une partie du développement limité d'une fonction exponentielle, de 1 à $+\infty$. En introduisant le terme d'ordre 0 EQ. (4.31), la probabilité de rupture définie à partir de la densité de Poisson prend une forme simple.

$$p_{rupture} = e^{-\lambda N} (e^{\lambda N} - 1) = 1 - e^{-\lambda N} \quad (4.31)$$

La forme mathématique obtenue est similaire à celle du principe du maillon faible.

4.2.4. Correspondance entre les deux approches

Les deux approches présentées ci dessus proposent deux visions du même phénomène de sélection de défauts. Il faut pour cela revenir à la correspondance entre probabilité et proportion. Sur un tirage aléatoire, les proportions de réalisations sont relevées. Elles servent par la suite à définir les probabilités des évènements à venir. Une seule et même fonction mathématique décrit le passé et prévoit le futur.

Dans notre cas, la probabilité d'activation des défauts Φ_d découle de l'analyse des champs de contraintes et de la distribution des paramètres descriptifs de la microstructure au sens de la rupture. Elle correspond donc à une proportion de défauts activés à un niveau donné de contraintes parmi la population complète. C'est de cette manière qu'est définie la densité poissonnienne $\lambda(\sigma)$: le nombre de défauts activés parmi les N défauts activables.

On traduit cette équivalence entre probabilité et proportion par la relation

$$\lambda(\Sigma) = \Phi_d(\sigma) \quad (4.32)$$

La probabilité de rupture $p_{rupture}$ obtenue par l'approche Poissonnienne correspond donc à Φ_f obtenue sous l'hypothèse du maillon faible.

$$p_{rupture} = 1 - e^{-\lambda N} = 1 - e^{-N\Phi_d} = \Phi_f \quad (4.33)$$

En terme de vocabulaire, il faut distinguer :

- la densité de probabilité des approches statistiques qui, intégrée sur son espace de définition, donne une probabilité également appelée distribution et
- la densité poissonnienne qui décrit une proportion de points dans la matière.

La densité poissonnienne est dans notre cas adimensionnée et définie entre 0 et 1 car la connaissance des défauts est exhaustive. C'est donc la probabilité d'activation qui découle elle même d'une densité de probabilité. Par la suite le terme *densité* désigne la densité poissonnienne de défauts activés à une contrainte donnée parmi une population de défauts activables.

4.3. Évolution des dispersions lors de la multifissuration

Pour appliquer le modèle probabiliste de fissuration et expliciter une probabilité de rupture pour chaque itération de fissure, il faut exprimer la densité de défauts activés à un niveau de sollicitation donné pour un état de fissuration quelconque. On utilise deux processus de troncature et d'obscurcissement pour modéliser la modification de la densité de défauts par une fissure. Il suffit ensuite d'appliquer le principe du maillon faible à la nouvelle densité de défauts pour obtenir la probabilité d'apparition de la fissure suivante.

À chaque étape de fissuration, cette démarche permet d'exprimer une probabilité de rupture conditionnée par l'état d'endommagement précédent. Il est possible pour prendre en compte l'historique d'endommagement d'exprimer des probabilités totales de n^{eme} fissuration. Cela a pour effet de globaliser l'approche statistique de multifissuration mais les aspects de dépendances successives doivent être modélisés avec attention.

4.3.1. Probabilité conditionnelle de fissuration

On utilise des notations indicées pour les densités de défauts successives et les probabilités de rupture correspondantes. Le matériau sain est indicé 0 pour le nombre de défauts activables N^0 et la densité de défauts activés λ^0 qui est également la fonction de dispersion des sévérités Φ_d . La probabilité d'apparition de la première fissure Φ_f^0 est réécrite selon ces notations EQ. (4.34).

$$p_{rupture}(1^{ere}) = \Phi_f^0(\Sigma) = 1 - \exp(-N^0 \lambda^0(\Sigma)) \quad (4.34)$$

La présence de la fissure dans le fil par activation du défaut le plus sévère entraîne une modification de la densité de défauts activables notée λ^1 . La probabilité d'apparition de la seconde fissure conditionnée par la première est obtenue en appliquant le modèle de distribution ponctuelle de Poisson EQ. (4.35), équivalent au principe du maillon faible.

$$p_{rupt}(2^{eme}|1^{ere}) = \Phi_f^1(\Sigma) = 1 - \exp(-N^0 \lambda^1(\Sigma)) \quad (4.35)$$

Il faut pour appliquer cette probabilité déterminer une expression de la densité λ^1 avec une fissure à partir de la densité λ^0 initiale. Le nombre de défauts dans le fil est toujours N^0 mais la densité de défauts activables a évolué à cause de la fissure et de la zone d'exclusion qu'elle a créé.

4.3.1.1. Champs de contraintes homothétiques

4.3.1.1.1. Modification de la densité de défauts par la première fissure

Dans le cas d'un processus de fragmentation d'un composite 1D [LAM 10] ou de problème à champ de contraintes uniforme [MAL 09], la transformation est rapide et efficace. Ces cas de modélisation sont des matériaux dans lesquels les singularités sont petites et ne créent pas d'hétérogénéité dans les champs de contraintes. Les conditions aux limites du domaine de matériau considéré sont géométriquement simples, le champ de contraintes est uniforme.

Le principe adopté dans ce paragraphe est qu'en dehors des zones de relaxation les champs de contraintes ne varient pas d'un état fissuré au suivant, on les qualifie d'*homothétiques*. Cela a pour effet de conserver une valeur identique de sévérité méso-scopique aux défauts hors zone de relaxation. C'est bien entendu totalement faux dans le cas des fissures transverses puisque leur taille représentative est celle du fil et elles modifient très fortement les champs de contraintes. À partir des développements qui suivent sur les champs homothétiques, ce point est réglé dans le paragraphe suivant pour les champs non-homothétiques.

En considérant que la nouvelle population de défaut est une sous-partie de la population initiale, λ^1 se déduit de λ^0 en lui ôtant le défaut activé par la première fissure ainsi que la fraction des défauts comprise dans la zone de relaxation considérée comme une zone d'exclusion. Cette nouvelle densité considère un nombre N^0 de défauts mais réduit le nombre de défauts activables après la première fissuration.

Troncature de la densité de défauts. Il faut considérer la densité de défauts initiale sans le défaut activé, on reprend pour cela l'expression obtenue par la densité du processus

de Poisson. Elle est exprimée à partir de la densité sous-jacente $d\lambda$ qui est intégrée sur le domaine de contraintes admissible pour l'activation des défauts EQ. (4.36). De façon générique on prend le domaine $[b, +\infty[$ où b est la limite inférieure de contrainte pour activer un défaut.

$$\lambda^0(\Sigma) = \int_b^\Sigma d\lambda(s)ds \quad (4.36)$$

En activant le maillon faible à la contrainte Σ^1 pour la première fissure, le domaine de définition en contrainte est tronqué et devient $[\Sigma^1, +\infty[$. Dans un champ de contraintes uniforme, la nouvelle densité de défauts tronquée λ^T est donc définie juste en changeant les bornes d'intégration EQ. (4.37).

$$\lambda^T(\Sigma) = \int_{\Sigma^1}^\Sigma d\lambda(s)ds \quad (4.37)$$

Les propriétés de linéarité de l'intégrale permettent de donner une expression plus simple EQ. (4.38).

$$\lambda^T(\Sigma) = \lambda^0(\Sigma) - \lambda^0(\Sigma^1) \quad (4.38)$$

Obscurcissement de la densité de défauts. La zone de relaxation autour de la première fissure éteint une partie de la population de défauts $N^0 - N^1$ avec N^1 défauts activable restants. En considérant la distribution spatiale uniforme, il est relativement simple d'exprimer la densité de défauts obscurcie λ^{Ob} à partir la distribution tronquée obtenue précédemment. Il suffit d'appliquer un coefficient correctif qui rend compte de la proportion de défauts activables restants par rapport au nombre de défauts initiaux EQ. (4.39).

$$\lambda^{Ob}(\Sigma) = \frac{N^1}{N^0} \lambda^T(\Sigma) \quad (4.39)$$

Probabilité conditionnelle. En cumulant ces deux effets, on obtient l'expression de la densité de défauts activés à un niveau de contrainte Σ avec une première fissure présente dans le fil EQ. (4.40).

$$\lambda^1(\Sigma) = \frac{N^1}{N^0} (\lambda^0(\Sigma) - \lambda^0(\Sigma^1)) \quad (4.40)$$

Cette expression tend vers la valeur $\frac{N^1}{N^0}$ strictement inférieure à 1 pour les valeurs élevées de contrainte Σ . Cela correspond à la proportion de défauts activables N^1 parmi la population initiale N^0 : la proportion $N^0 - N^1$ ne peut pas être activée parce qu'elle est située dans la zone d'exclusion.

Pour le fil sain, on dénombre N^0 défauts activables parmi N^0 défauts présents, la densité λ^0 de défauts activés tend donc vers 1.

La probabilité conditionnelle de deuxième fissuration EQ. (4.35) est donc réécrite EQ. (4.41)

$$p_{rupt}(2^{eme} | 1^{ere}) = \Phi_f^1(\Sigma) = 1 - \exp(-N^1 (\lambda^0(\Sigma) - \lambda^0(\Sigma^1))) \quad (4.41)$$

C'est l'expression qui a été obtenue pour la fragmentation d'un composite 1D dans [LAM 10], dans lequel un seul défaut est éliminé.

En examinant les paramètres qui entrent en jeu dans cette relation, on voit que cette probabilité dépend des valeurs du nombre de défauts restant et de la contrainte à première rupture. Le nombre de défauts restants dépend de la position du premier défaut et de la forme du fil. De par sa variabilité, c'est une variable de conditionnement pour la fissure suivante. La contrainte à rupture est évidemment une variable de conditionnement, sa variabilité étant décrite par la fonction Φ_f^0 . On peut donc réécrire la probabilité conditionnée EQ. (4.42).

$$p_{rupt}(2^{eme}|1^{ere}) = p_{rupt}(2^{eme}|(\Sigma^1, N^1)) \quad (4.42)$$

4.3.1.1.2. Processus statistique de multifissuration

En reprenant la démarche adoptée précédemment on cherche la probabilité d'apparition de la i^{eme} fissure conditionnée par la précédente EQ. (4.43).

$$p_{rupt}(i^{eme}|i-1^{eme}) = \Phi_f^i(\Sigma) \quad (4.43)$$

On doit tout d'abord exprimer la nouvelle densité de défauts après la $i-1^{eme}$ fissuration qui apparaît avec la densité $\lambda^{i-1}(\Sigma)$ à la contrainte Σ^i parmi les N^0 défauts initiaux et qui aboutit à une population de N^i défauts potentiellement activables. Il suffit d'appliquer les principes de troncature et d'obscurcissement pour obtenir la nouvelle densité de défauts activables, soit à la densité précédente EQ. (4.44), .

$$\lambda^i(\Sigma) = \frac{N^i}{N^{i-1}} (\lambda^{i-1}(\Sigma) - \lambda^{i-1}(\Sigma^i)) \quad (4.44)$$

soit à la densité initiale EQ. (4.45)

$$\lambda^i(\Sigma) = \frac{N^i}{N^0} (\lambda^0(\Sigma) - \lambda^0(\Sigma^i)) \quad (4.45)$$

Ces deux expressions sont équivalentes – facile à obtenir par écritures itératives – et valables sur le domaine de définition $[\Sigma^i, +\infty[$; on utilisera plutôt la seconde car elle utilise la densité initiale.

La probabilité d'apparition de la i^{eme} fissure conditionnée par la précédente est obtenue en appliquant le principe du maillon faible.

$$\Phi_f^i(\Sigma) = 1 - \exp(-N^i (\lambda^0(\Sigma) - \lambda^0(\Sigma^i))) \quad (4.46)$$

Cette probabilité est donc conditionnée par le nombre de défauts restant et la contrainte d'amorçage de fissure précédente EQ. (4.47).

$$p_{rupt}(i^{eme}|i-1^{eme}) = p_{rupt}(i^{eme}|(\Sigma^i, N^i)) \quad (4.47)$$

4.3.1.2. Extension aux champs de contraintes non-homothétiques

Les champs de contraintes dans le MHE ne sont pas uniformes par la structure du tissage. Plus encore, il ne sont pas *homothétiques* lors de la progression de la multifissuration, les fissures modifient complètement la répartition des efforts dans le fil, en particulier à l'extérieur des zones de relaxation. Le paramètre κ n'est pas intrinsèque et évolue avec les états de fissuration. La sévérité mésoscopique S_M est la combinaison des paramètres intrinsèques K_c et σ^R et du paramètre κ . Ces valeurs caractéristiques, descriptives des défauts hors des zones de relaxation évoluent, ainsi que la fonction de distribution qui les décrit. On utilise de fait des notations indicées pour traduire ces évolutions : S_M^0 et κ^0 pour l'état initial, S_M^i et κ^i pour l'itération correspondante.

Les processus de troncature et obscurcissement du paragraphe précédent ne sont plus valables. Dans les cas précédents de champs homothétiques, la troncature correspond à l'élimination d'un défaut sous l'hypothèse de maillon faible et l'obscurcissement spatial uniforme est valable car une fissure n'influe pas sur la répartition des champs de contraintes mésoscopique en observant que sa taille est faible par rapport aux dimensions mésoscopiques caractéristiques. Cela suppose que la valeur du paramètre κ pour un défaut hors d'une zone de relaxation ne change pas.

Dans notre cas une fissure influe grandement sur la répartition des contraintes dans le MHE. Les concentrations de contraintes dans les fils longitudinaux surchargent les défauts situés à proximité mais ont tendance à décharger le fil transverse en dehors des zones de relaxation. La taille des fissures est ici du même ordre de grandeur que celle de la cellule.

Pour pallier les limites des principes de troncature et obscurcissement, il faut à chaque étape de fissuration identifier la fonction descriptive du paramètre κ^i et la combiner avec les fonctions de dispersion des K_c et σ^R qui ne changent pas au cours de la multifissuration.

Néanmoins, lors de la procédure itérative de sélection des défauts les plus faibles développée pour les champs de contraintes *homothétiques*, on suppose les défauts successifs identifiés sont probablement ceux qui provoquent l'apparition des fissures dans les champs successifs *non-homothétiques*.

On sélectionnerait ainsi les *bons* défauts mais par une *mauvaise* variable S_M^0 qui ne prend pas en compte l'évolution des champs dans le MHE. Le processus de multifissuration doit en revanche être réalisé en prenant en compte les *bonnes* variables S_m associées aux défauts identifiés. Cette démarche sera appliquée section 5.3.2.

4.3.2. Probabilités totales : processus complet de multifissuration

En utilisant l'expression standard qui lie une probabilité totale d'un évènement à sa probabilité conditionnée par un autre, on exprime la probabilité d'apparition de la seconde fissure EQ. (4.48). On note que les probabilités totales de rupture sont notées en majuscule $P_{rupture}$ et les probabilités conditionnelles $p_{rupture}$.

$$P_{rupt}(2^{eme})(\Sigma) = \int_{\Omega_{\Sigma^1}} \int_{\Omega_{N^1}} p_{rupt}(2^{eme}|1^{ere})(\Sigma) f_{\Sigma^1}(s) f_{N^1}(n) ds dn \quad (4.48)$$

La fonction f_{Σ^1} correspond à la densité de probabilité associée à la première fissure dont la probabilité est Φ_f^1 . La fonction f_{N^1} décrit la densité de probabilité associée au nombre

de défauts désactivés par la première fissure. Elle peut être abordée par des considérations géométriques par la forme du fil et le positionnement de la fissure.

La probabilité totale d'apparition de la i^{eme} fissure peut être exprimée de la même manière. Toutefois la complexité de l'écriture analytique prenant en compte les probabilités de positionnements successifs des fissures incite à traiter le problème de sélection des défauts activés de manière conditionnelle au cours des essais virtuels présentés section 6.3.

4.4. Conclusion

L'approche statistique présentée dans ce chapitre se base sur la description et l'évolution des populations de défauts qui amorcent les fissures transverses dans les fils. Elle donne une vision à l'échelle mésoscopique de la population de défauts caractérisée à l'échelle microscopique à travers les essais virtuels sur la microstructure hétérogène.

Le découplage d'échelles micro/méso est effectué par le coefficient de concentrations de contraintes K_c . Il localise les sites d'amorce de rupture au niveau des maxima de contraintes générés par les singularités dans la microstructure, qui sont donc vues comme des *défauts*. Il découple la contribution de la microstructure de celle du tissage sur l'intensité de ces maxima locaux.

L'application d'un critère de rupture local et ses différentes écritures en fonction des paramètres décrits ci-dessus amène à la définition des sévérités microscopique S_m et mésoscopique S_M de chaque défaut. Elles correspondent respectivement à la contrainte σ_{eq} dans le MHE ou à l'intensité de la sollicitation Σ sur la cellule pour activer un défaut et amorcer une fissure.

En utilisant l'expression des probabilités conditionnelles, de multiples combinaisons des fonctions de dispersion des variables associées aux grandeurs du calcul hétérogène – K_c, σ^R, κ – permettent d'expliciter les fonctions de distribution des variables associées aux probabilités de rupture – les sévérités S_m et S_M .

L'approche probabiliste de la rupture est réalisée avec un modèle de distribution spatiale de points de Poisson dont l'intensité variable et la densité poissonnienne correspond aux fonctions de dispersion des défauts décrites par les sévérités mésoscopiques. Elle est équivalente aux approches classiques du maillon faible ou de Weibull. Son avantage est d'utiliser une fonction de description de la population de défauts qui possède plus de sens physique essentiellement en terme de densité volumique de défauts. De plus le suivi de la multifissuration avec les zones de relaxation autour des fissures est plus aisé à traiter avec une distribution ponctuelle.

Dans le cas des simulations d'endommagement à champs de contraintes homothétiques, la modification de la description des défauts au cours de la multifissuration est effectuée par deux processus de troncature et d'obturation simultanées du spectre en considérant le nombre initial de défauts. Cela revient à considérer la surface complète du fil avec une population de défauts activables réduite. La troncature consiste à enlever tous les défauts plus sévères que celui activé et revient à appliquer le principe du maillon faible. L'obturation est effectuée sous l'hypothèse d'une distribution spatiale uniforme des défauts. Elle pourrait être améliorée, mais complexifiée, par une étude plus poussée de la répartition spatiale

géostatistique des sévérités des défauts dans le fil.

Les conditions d'apparition d'une fissure dépendant de la configuration précédente, des probabilités conditionnelles de rupture ont été explicitées. Les variables de conditionnement successives pour la $k + 1^{eme}$ ont été identifiées : la contrainte à rupture de la fissure précédente Σ^k et le nombres de défauts désactivés N^k .

Définir un cadre analytique global de probabilités totales nécessite de prendre en compte l'aspect statistique pour les valeurs des paramètres de conditionnement. La probabilité totales de $k + 1^{eme}$ rupture est donc définie dans un espace à $2k$ dimensions ce qui rend son application relativement complexe.

Dans la situation où l'on suit le processus de fissuration pas à pas sur une simulation d'essai virtuel – pour identifier ou vérifier – ou un tirage de Monte-Carlo – pour simuler, les valeurs successives de N^i et Σ^i sont connues et les formules de probabilités conditionnées peuvent être appliquées pas à pas.

Dans le cas des simulations d'endommagement à champs de contraintes non-homothétiques, celui des essais virtuels présentés dans ces travaux, il n'est pas possible d'obtenir une densité de défauts modifiée λ^i à partir de la densité initiale par des opérations simples de sélection des défauts. Il faut réidentifier les fonctions de dispersion des paramètres intrinsèques κ^i à chaque étape de fissuration et les combiner aux dispersions des paramètres invariants K_c et σ^R . La nouvelle population de coefficients de répartition des contraintes mésoscopiques tient compte des opérations de troncature et obturation puisqu'elle est caractéristique de la zone de relaxation et de la redistribution des contraintes aux endroits où sont situés les défauts toujours activables.

Une approximation est faite pour s'affranchir de la réidentification de nouvelles distribution de défauts à chaque étape. Les défauts seront sélectionnés par des valeurs non-intrinsèques associées à l'état initial S_M^0 sous l'hypothèse de champs homothétiques puis transposées en variables intrinsèques S_m . Ces grandeurs sont transportables dans les champs de contraintes successifs non-homothétiques du processus de multifissuration à chaque étape de fissuration.

Chapitre 5

Traitement statistique des données issues des Essais Virtuels

Les essais virtuels développés au Chapitre 3 sont exploités à travers le modèle statistique proposé au Chapitre 4. En premier lieu, les propriétés du milieu homogène équivalent sont établies pour chaque configuration de matériau virtuel. Les fonctions statistiques décrivant les dispersions des différentes grandeurs mises en jeu dans le modèle statistique sont ensuite identifiées. Les processus d'évolution de ces grandeurs sont caractérisés pour finalement aboutir à une description statistique explicite du processus de multifissuration transverse des fils.

5.1. Milieu Homogène Équivalent

Sur la base des cellules de calcul hétérogènes développées pour les essais virtuels, une nouvelle cellule de calcul EF est réalisée FIG. 5.1(a). La microstructure hétérogène est remplacée par un Milieu Homogène Équivalent (MHE). Sa limite géométrique est une contraction de la limite du fil hétérogène de façon à créer une bande de matrice interfils d'épaisseur régulière autour du MHE. Les cellules hétérogènes et avec MHE doivent être géométriquement le plus proche possible FIG. 5.1 mais le changement d'échelle dans la représentation du fil par homogénéisation génère naturellement une simplification de l'enveloppe de la microstructure hétérogène.

Cette cellule permet de représenter les trois matériaux virtuels testés en partie 3. Les champs de contraintes obtenus rendent compte de l'effet de structure entre les fils FIG. 5.2 : c'est la contribution mésoscopique des champs de contraintes.

Pour chaque matériau virtuel, il faut déterminer les caractéristiques mécaniques correspondantes. Elles sont en première approximation estimées par la loi des mélanges puis affinées en comparant les conditions aux limites en contraintes et déplacement FIG. 5.3. De la même façon que pour les essais virtuels, tous les calculs seront effectués pour une déformation unique égale à 0.1% imposée par des déplacements. Les caractéristiques mécaniques équivalentes sont donc identifiées en fonction des contraintes aux bords. En terme

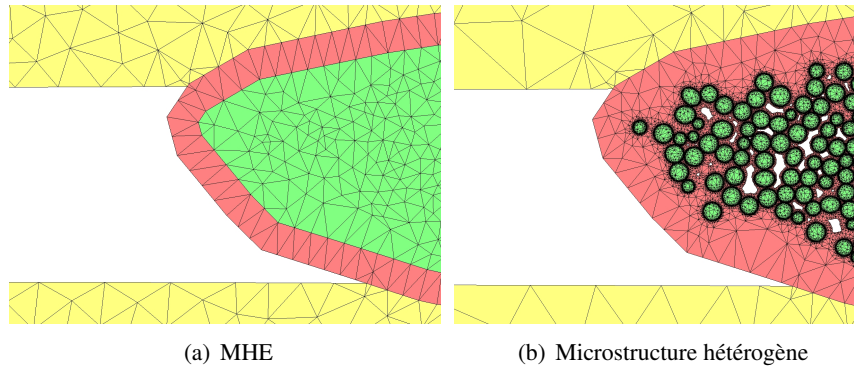
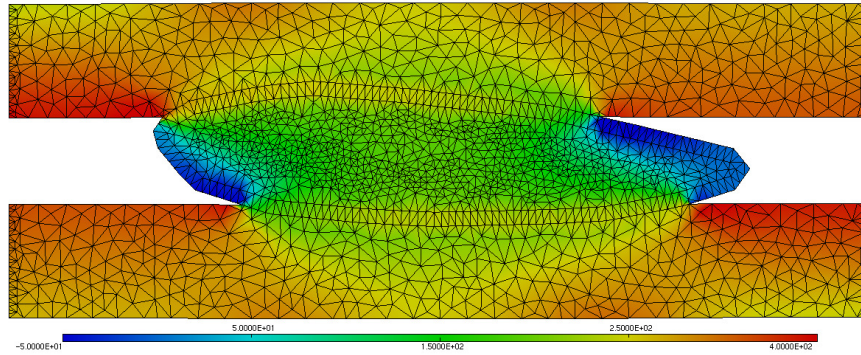


FIGURE 5.1 – Comparaison des maillages des cellules hétérogène et avec MHE

FIGURE 5.2 – Champ de contraintes σ_{11} dans la cellule de calcul avec MHE pour le matériau #1, échelle de -50 à 400 MPa

numérique, les nœuds du maillage situés sur les bords gauche et droite doivent être compatibles entre les deux approches ; la comparaison des contraintes est effectuée aux mêmes points.

L'accord entre les deux modélisations est quasi parfait pour le comportement longitudinal des cellules de calcul. L'équivalence entre les cellules hétérogène et MHE est donc effective en terme d'énergie élastique stockée, étant égale au travail mécanique appliquée aux limites.

	E [GPa]	ν
mat #1	278	0.16
mat #2	209	0.16
mat #3	144	0.16

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des modules d'Young et coefficient de Poisson pour le Milieu Homogène Équivalent

Les caractéristiques mécaniques obtenues par cette méthode pour le MHE sont listées TAB. 5.1. Les rigidités sont logiquement de plus en plus faibles avec l'introduction de pores

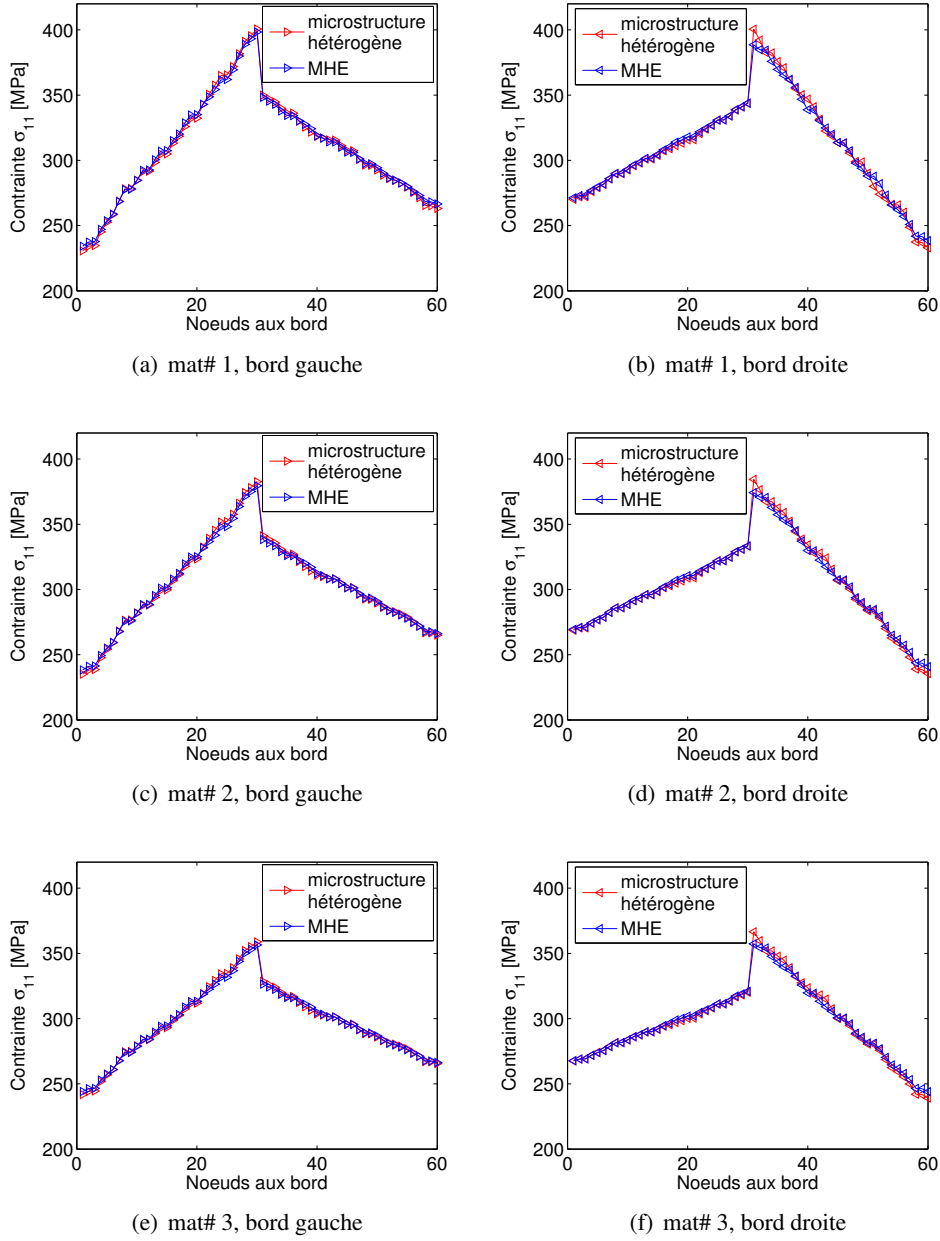


FIGURE 5.3 – Répartition des contraintes aux bords droit et gauche des cellules de calcul

et de la couche d'interphase dans la microstructure. L'estimation fine de la valeur du coefficient de Poisson s'est révélée compliquée par les déplacements sur les bords de la cellule dans la direction $\vec{e}_2$. Une valeur médiane à celles des constituants de base a été choisie de façon arbitraire.

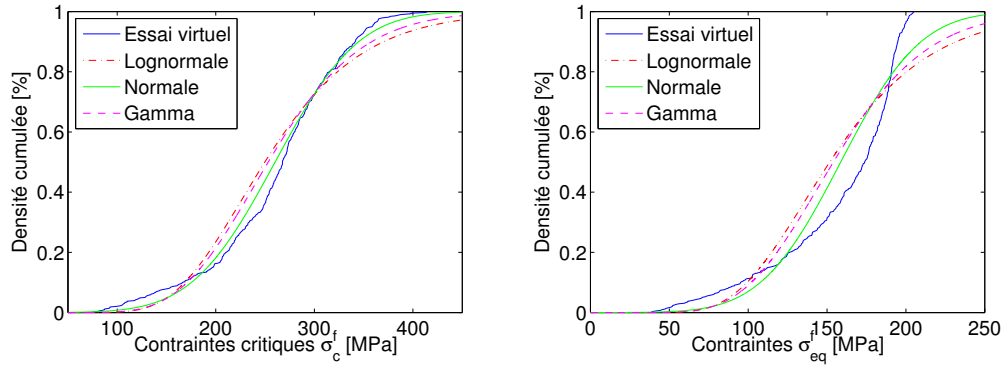


FIGURE 5.4 – Matériau# 1 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE

5.2. Identification des fonctions analytiques caractéristiques des défauts à l'état initial

Les fonctions de distribution des différents paramètres statistiques décrites au chapitre 4 sont obtenues en confrontant les approches hétérogènes et les calculs dans les MHE. En comparant les contraintes locales σ_c dans la microstructure et la contrainte σ_{eq} , on obtient le coefficient de concentrations de contraintes K_c . En introduisant la contrainte à rupture σ^R correspondant au mode de rupture considéré, on obtient la sévérité microscopique S_m . Le but et la difficulté par la suite est d'identifier pour chaque valeur quelle est la forme mathématique pertinente pour la fonction de distribution puis d'ajuster les paramètres qui la gouvernent. Ce choix est principalement effectué en comparant les différentes analyses pour voir, au sens propre, quelle est la meilleure.

5.2.1. Distribution des contraintes

Étant donné la possibilité de combiner les dispersions telle que décrite dans la partie 4.2.1, le point de départ de l'analyse peut être les contraintes dans la microstructure et dans le MHE. Pour les trois matériaux virtuels développés, leur dispersion est caractérisée par des fonctions de dispersion parmi les plus usuelles :

- *normale* : la plus utilisée, la plus simple à identifier et à manier,
- *lognormale* : découle d'une loi normale dont la variable est $\ln(X)$, a l'avantage d'un domaine de définition correspondant à la physique du problème,
- *gamma* : plus complexe mais souvent utilisée, en particulier pour les probabilités de durée de vie.

Les résultats d'ajustement sont présentés FIGS. 5.4, 5.5 et 5.6. On rappelle que les concentrations de contraintes sont, pour le matériau #1 dans la matrice en périphérie de fibre, pour le matériau #2 dans la matrice au niveau des pores, pour le matériau #3 dans les interphases en périphérie des fibres et dans la matrice au niveau des pores en compétition.

En ce qui concerne les contraintes dans le MHE, aucune des fonctions utilisées n'aboutit à une identification correcte. Pour les contraintes critiques dans la microstructure hétérogène, l'identification n'est pas probante pour le matériau #1 FIG. 5.4(a) mais tout à fait acceptable pour les matériaux #2 avec une distribution normale et #3 avec des distributions

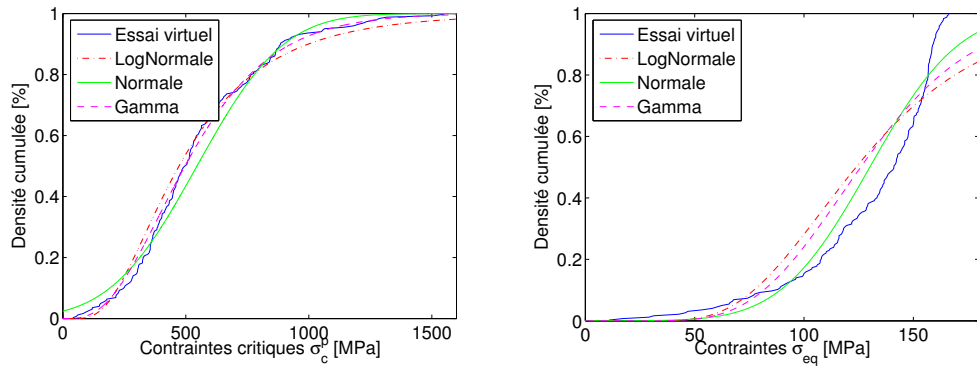


FIGURE 5.5 – Matériau# 2 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE

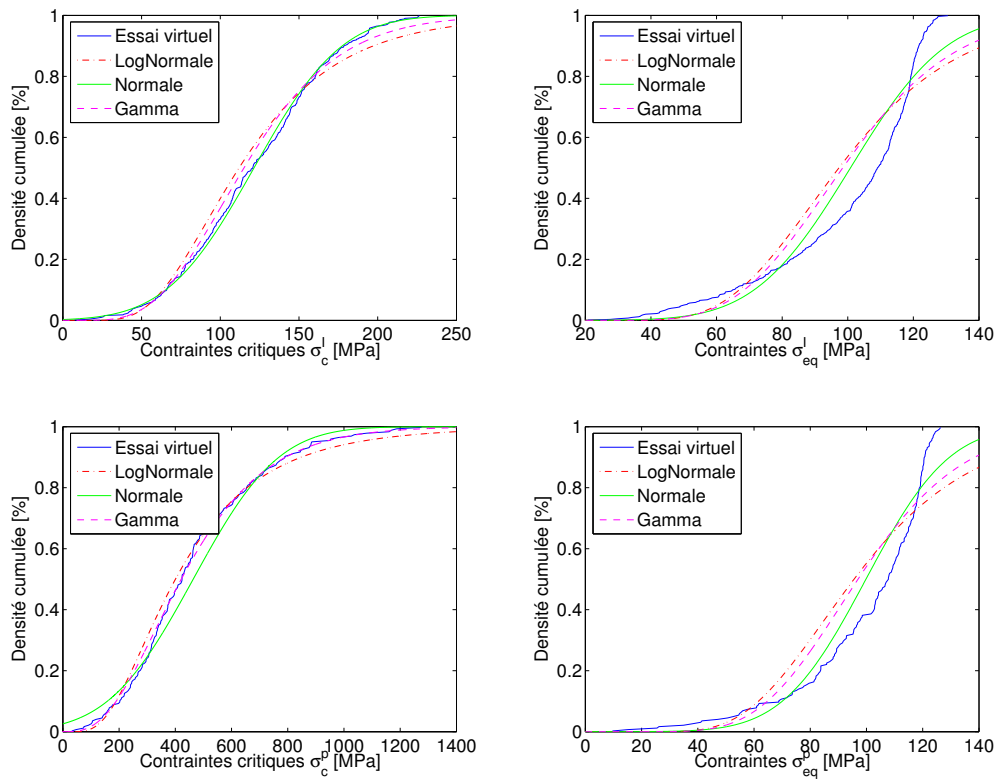
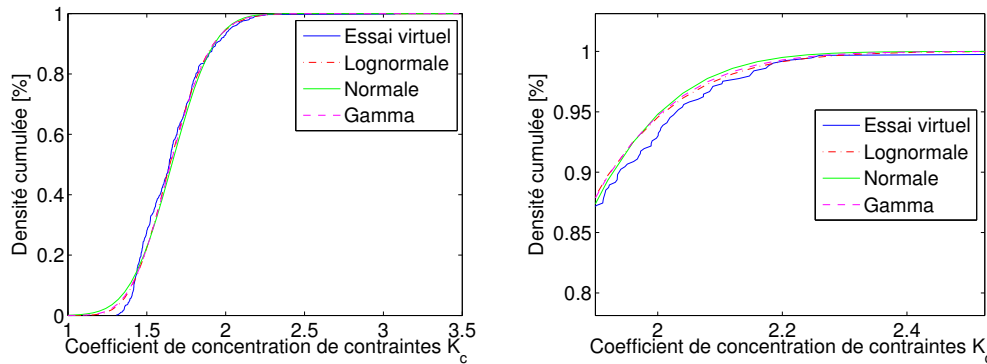
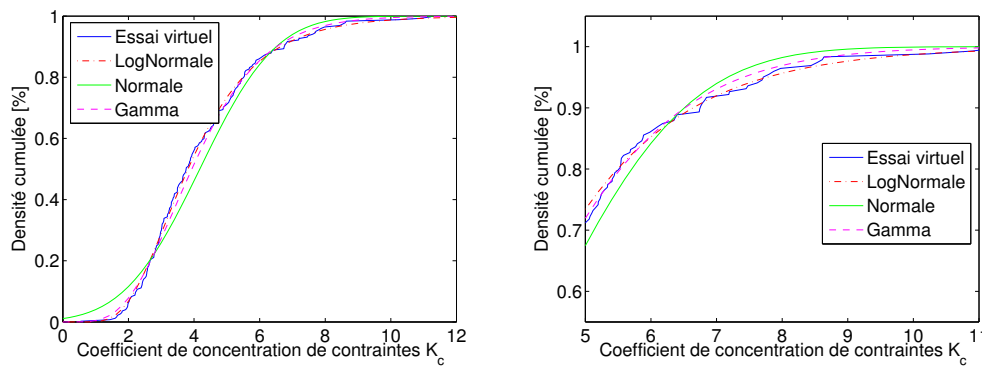


FIGURE 5.6 – Matériau# 3 : dispersion des contraintes dans la microstructure et le MHE

normale pour les interphases et gamma pour les pores.

Combiner des fonctions dont l'une est trop approximative entraînerait des erreurs supposées conséquentes sur les expressions des dispersions des variables entrant en jeu dans les critères de rupture. Le choix est fait d'identifier directement les dispersions des coefficients de concentrations de contraintes et des sévérités.

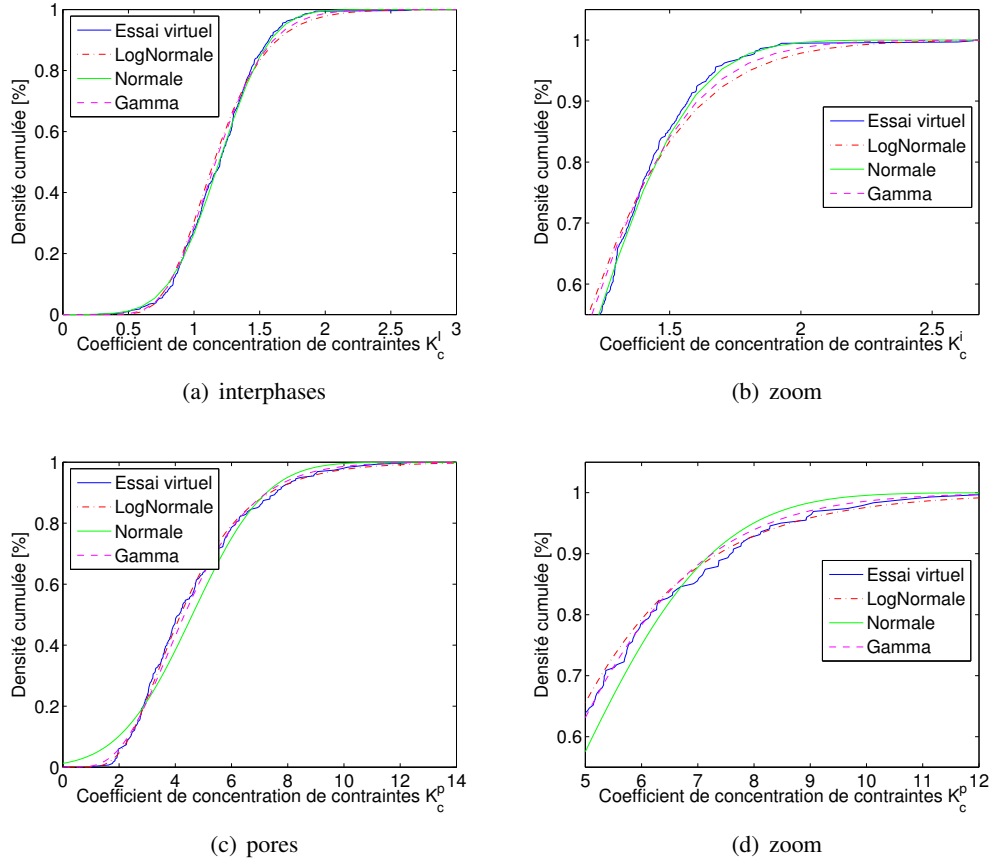
FIGURE 5.7 – Matériau# 1 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c FIGURE 5.8 – Matériau# 2 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c

5.2.2. Distribution des concentrations de contraintes

L'identification des fonctions de dispersion des coefficients K_c est présentée FIGS. 5.7, 5.8 et 5.9. Certaines valeurs de ces coefficients ont été supprimées des données issues des essais virtuels, en particulier pour le premier matériau : en effet, quelques valeurs de contrainte dans le MHE étant très faibles car situées dans des zones déchargées – visibles FIG. 5.2 – entraînent une surestimation de K_c . Ces valeurs polluent les extrêmes des dispersion dont une connaissance précise est fondamentale pour l'approche statistique de la fissuration. Cette simplification est motivée et justifiée par le fait que ces défauts ne provoquent pas d'amorce de fissure comme constaté lors de la réalisation des essais virtuels – partie 3.4.

Pour le matériau #1, le meilleur ajustement est réalisé par une fonction gamma FIGS. 5.7(a) et 5.7(b). Pour les matériaux #2 et #3, les meilleurs ajustements sont réalisés par des fonctions *lognormale* comme le confirment les zooms sur les valeurs de K_c les plus importantes FIGS. 5.8(b), 5.9(b) 5.9(d).

On remarque que, uniquement pour les concentrations de contraintes au niveau des interphases pour le matériau #3 FIG. 5.9(a), une loi normale ajuste correctement les données de calcul. On retrouve d'ailleurs une loi normale pour un très bon ajustement des contraintes

FIGURE 5.9 – Matériau# 3 : distribution des coefficients de concentration de contraintes K_c

locales dans la microstructure hétérogène FIG. 5.6(a).

De manière générale, l'emploi d'une fonction *lognormale* est un choix satisfaisant pour traiter les dispersions des coefficients K_c . On rappelle l'expression générique des fonctions densité de probabilité (5.1) et probabilité – ou densité cumulée – (5.2) avec une moyenne μ et un écart type σ pour la distribution normale de $\ln(x)$.

$$f_{\{\mu,\sigma\}}(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2 \sigma^2}} \quad (5.1)$$

$$F_{\{\mu,\sigma\}}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2 \sigma^2}}}{t} dt \quad (5.2)$$

Les paramètres correspondant aux différents populations sont listés TAB. 5.2.

5.2.3. Distribution des sévérités microscopiques

L'identification des dispersions des sévérités S_m est effectuée de la même façon, en utilisant à chaque fois différentes fonctions d'ajustement. La sévérité microscopique combine

	μ_{K_c}	σ_{K_c}
mat #1, K_c^f	0.4983	0.1216
mat #2, K_c^p	1.3390	0.4324
mat #3, K_c^l	0.1400	0.2735
mat #3, K_c^p	1.4326	0.4404

TABLE 5.2 – Tableau récapitulatif des paramètres d’ajustement des fonctions de distribution des coefficients de concentrations de contraintes

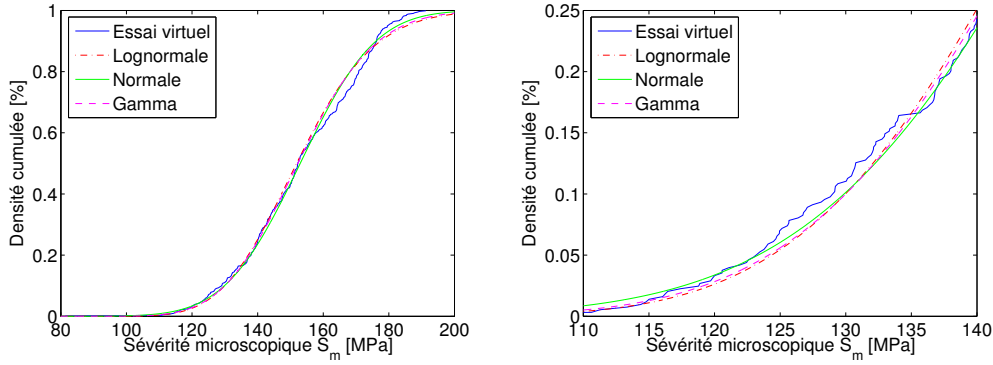


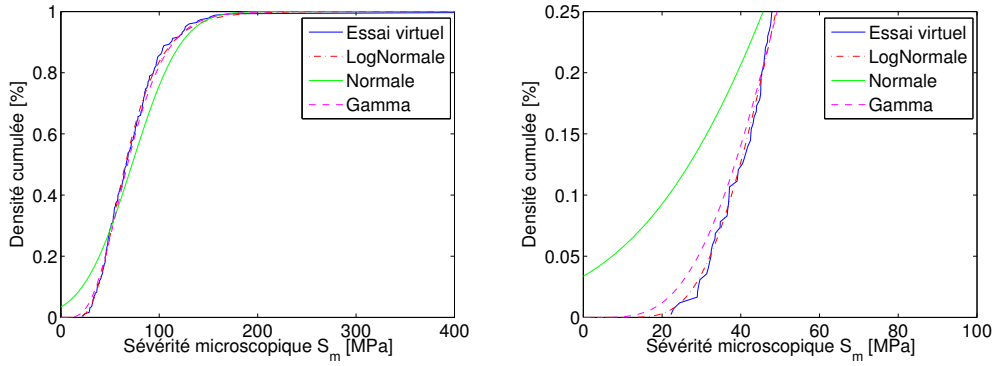
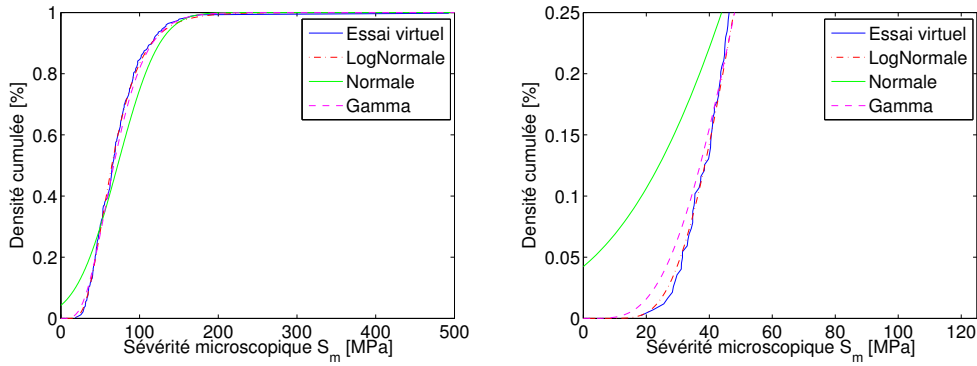
FIGURE 5.10 – Matériau# 1 : distribution des sévérités microscopiques S_m

les coefficients K_c – identifiées en section précédente 5.2.2 – et les contraintes à rupture σ^R . En reprenant les dispersions utilisées pour les essais virtuels menés en section 3.4, plusieurs cas de figure sont étudiés. Les contraintes à rupture sont considérées uniformes pour les matériaux #1 FIG. 5.10 et #3 FIG. 5.13. Pour le matériau #2 les deux possibilités sont présentées : uniforme FIG. 5.11 et dispersées FIG. 5.12, suivant la loi normale utilisée section 3.4.3.

Dans tous les cas de figure, une distribution *lognormale* est la plus précise pour l’ajustement, de façon particulièrement marquée lorsqu’on regarde les valeurs les plus faibles des sévérités qui correspondent aux défauts qui amorcent préférentiellement des fissures. Les paramètres d’ajustement sont listés TAB. 5.3.

	μ_{S_m}	σ_{S_m}
mat #1, S_m^f	5.0231	0.1216
mat #2 [σ^R uniforme], S_m^p	4.1825	0.4324
mat #2 [σ^R dispersé], S_m^p	4.1704	0.4508
mat #3, S_m^l	4.1085	0.2735
mat #3, S_m^p	4.0888	0.4404

TABLE 5.3 – Tableau récapitulatif des paramètres d’ajustement des fonctions de distribution des sévérités microscopiques

FIGURE 5.11 – Matériau# 2, σ^R uniforme : distribution des sévérités microscopiques S_m FIGURE 5.12 – Matériau# 2, σ^R dispersé : distribution des sévérités microscopiques S_m

5.2.4. Combinaison des distributions de défauts : K_c et $\sigma^R \Leftrightarrow S_m$

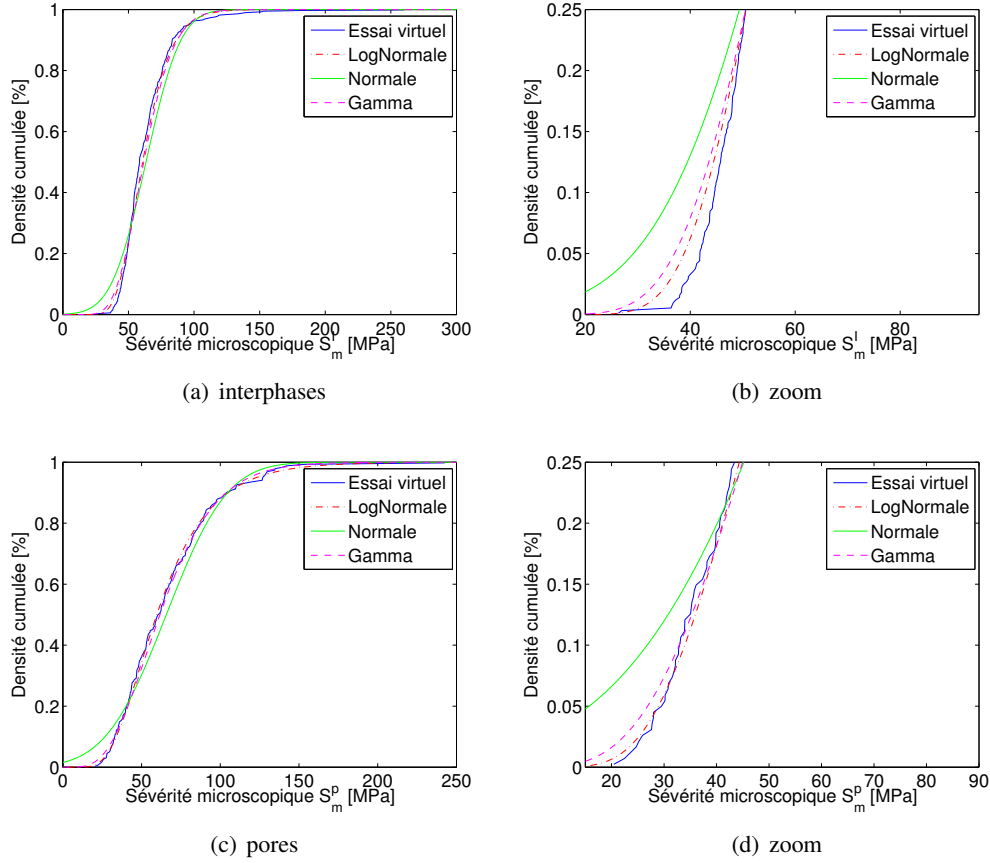
Nous cherchons dans ce paragraphe à vérifier les relations de combinaison de distributions statistiques développées en section 4.2.1.

En effet, il apparaît en comparant les TAB. 5.2 et 5.3 que, pour une réalisation d'essai virtuel donnée et lorsque la contrainte à rupture σ^R est uniforme, les écart-types σ sont identiques pour les distributions de K_c et S_m .

En reprenant l'équation de combinaison (4.14) et considérant la distribution F_{σ^R} donnée EQ. (5.3) pour une contrainte à rupture σ^R unique, on obtient une nouvelle expression de la densité de probabilité f_{S_m} EQ. (5.4).

$$F_{\sigma^R}(s) = \begin{cases} 0 & | \ s < \sigma^R \\ 1 & | \ s \geq \sigma^R \end{cases} \quad (5.3)$$

$$f_{S_m}(s) = \frac{\sigma^R}{s^2} f_{K_c}\left(\frac{\sigma^R}{s}\right) \quad (5.4)$$

FIGURE 5.13 – Matériau# 3 : distribution des sévérités microscopiques S_m

Cette expression est développée et simplifiée EQ. (5.5) en utilisant l'expression analytique d'une distribution lognormale donnée EQ. (5.1). Les moyennes et écarts types sont indexés par la variable de dispersion auxquels ils correspondent : μ_{K_c} , σ_{K_c} , μ_{S_m} et σ_{S_m} .

$$f_{S_m}(s) = \frac{1}{s \sigma_{K_c} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{\sigma^R}{s}\right) - \mu_{K_c}\right)^2}{2 (\sigma_{K_c})^2}} \quad (5.5)$$

En utilisant les propriétés de transformation de la logarithme, cette expression se transforme EQ. (5.6).

$$f_{S_m}(s) = \frac{1}{s \sigma_{K_c} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\ln(s) - \ln(\sigma^R) - \mu_{K_c}\right)^2}{2 (\sigma_{K_c})^2}} \quad (5.6)$$

Il apparaît une nouvelle fonction de densité EQ. (5.7) qui correspond à l'écriture d'une distribution lognormale.

$$f_{S_m}(s) = \frac{1}{s \sigma_{S_m} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(s) - \mu_{S_m})^2}{2 (\sigma_{S_m})^2}} \quad (5.7)$$

Dans cette nouvelle expression, l'écart type σ_{S_m} reste égal à σ_{K_c} et la nouvelle moyenne μ_{S_m} vaut $\ln(\sigma^R) - \mu_{K_c}$. On vérifie en se référant aux TABS. 5.2 et 5.3 que cette relation est validée pour les différents cas de figure :

- mat #1 : $5.0231 = \ln(250) - 0.4983$,
- mat #2 : $41825 = \ln(250) - 1.3390$,
- mat #3 : $4.1085 = \ln(70) - 0.1400$ et $4.0888 = \ln(250) - 1.4326$.

Dans le dernier cas, le matériau #2 avec des contraintes à rupture σ^R dispersées dont la fonction normale est donnée EQ. (5.8), la combinaison des fonctions de dispersion EQ. (5.7) prend une expression plus complexe EQ. (5.9).

$$f_{\sigma^R}(s) = \frac{1}{s \sigma_{\sigma^R} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu_{\sigma^R})^2}{2 (\sigma_{\sigma^R})^2}} \quad (5.8)$$

$$f_{S_m}(s) = \frac{1}{s \sigma_{\sigma^R} \sigma_{K_c} 2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(sk - \mu_{\sigma^R})^2}{2 (\sigma_{\sigma^R})^2}} e^{-\frac{(\ln(k) - \mu_{K_c})^2}{2 (\sigma_{K_c})^2}} dk \quad (5.9)$$

Quelques développements analytiques ont été menés pour identifier les paramètres d'une distribution lognormale sans succès. Une méthode d'identification numérique est donc préconisée pour aboutir à ce résultat, mais ne sera pas développé dans ces travaux.

La correspondance des paramètres d'ajustement confirme que pour un défaut le couple (K_c, σ^R) est équivalent à S_m .

5.3. Évolution des densités poissonniennes, probabilités de ruptures

L'étude de l'évolution des populations de défauts est réalisée uniquement sur le matériau #1. Il est en effet celui qui propose une seule population de défauts – les fibres, plus nombreuses que les pores – ce qui rend le problème plus facile à traiter.

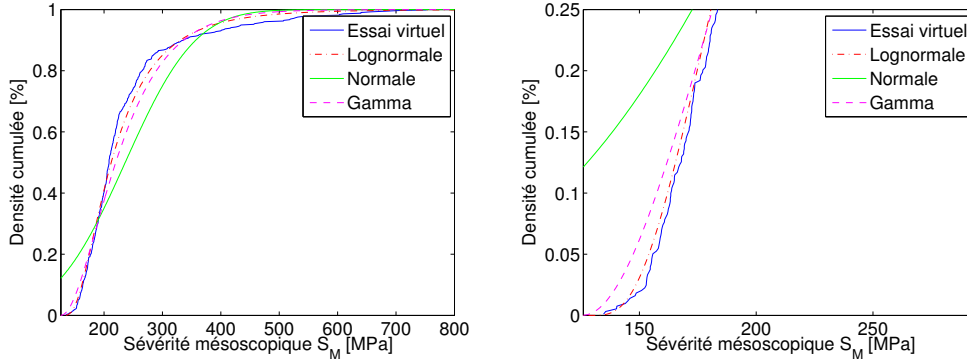
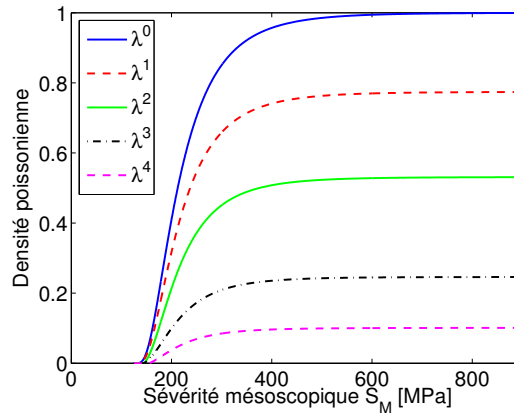
5.3.1. Dispersion des sévérités mésoscopiques

La densité de défauts caractérisée par la distribution des sévérités mésoscopiques S_M^0 est identifiée. Dans le but d'appliquer la relation du principe du maillon faible (4.26) et éviter les dérives dans les valeurs extrêmes basses de la densité de défauts générés par l'exponentielle, une borne inférieure est utilisée. C'est en fait la variable $S_M^0 - S_0$ avec $S_0 = 125 \text{ MPa}$ qui est décrite par les fonctions de distribution usuelles : lognormale, normale, gamma. Les résultats sont présentés FIG. 5.14.

La loi lognormale est une nouvelle fois la plus appropriée pour décrire cette population avec une valeur moyenne $\mu_{S_M} = 4.4693$ et un écart-type $\sigma_{S_M} = 0.6690$.

5.3.2. Modification des densités de défauts : multifissuration

La densité de défauts λ^0 , ou Φ_d^0 , décrite par la dispersion des sévérités mésoscopiques identifiée au paragraphe précédent sert de point de départ à l'analyse statistique probabiliste.

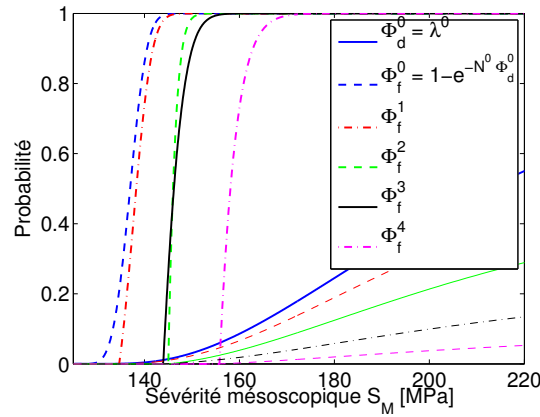
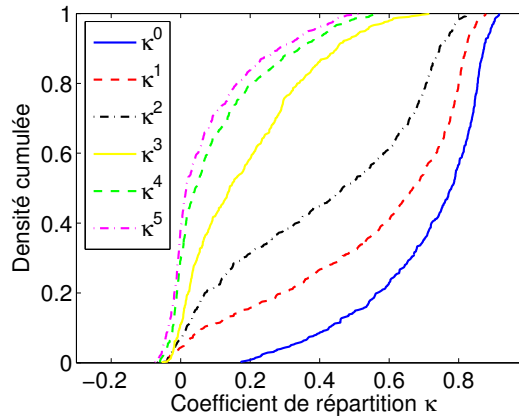
FIGURE 5.14 – Matériau# 1 : dispersion des sévérités mésoscopiques S_M^0 FIGURE 5.15 – Matériau# 1 : densités successives λ^i des sévérités mésoscopiques S_M

L'analyse des données est réalisée avec le formalisme adapté aux champs de contraintes homothétiques : la population de défauts activables est décrite par la variable statistique S_M^0 pour lui appliquer les processus de troncature et obturation.

On détermine l'évolution des densités de défauts λ^i à l'aide des paramètres de conditionnement statistique Σ^i et N^i issus de l'essai virtuel réalisé sur le matériau #1 en section 3.4.1. Les sévérités S_M^0 associées à chaque défaut initiant une fissure et le nombre de défauts désactivés sont identifiés. Les fonctions successives sont calculées grâce aux processus de troncature et d'obturation définis 4.3.1.1 sont présentées FIG. 5.15

Comme il a été remarqué au paragraphe 4.3, les valeurs des densités successives tendent vers des valeurs inférieures à 1, qui correspondent aux proportions de défauts désactivés par les fissures.

L'application du principe du maillon faible EQ. (4.26) permet de représenter les probabilités d'apparition de fissure successives FIG. 5.16. Par définition du principe de troncature,

FIGURE 5.16 – Matériau# 1 : probabilités conditionnelles de rupture successives Φ_f^i FIGURE 5.17 – Matériau# 1 : évolution des distributions des coefficients de répartition des contraintes mésoscopiques κ^i

chaque probabilité est définie sur un intervalle dont la borne inférieure correspond à la sévérité mésoscopique associée à la fissure précédente.

Hormis la valeur associée à la première fissure, on note que les valeurs de sévérité mésoscopique pour une probabilité moyenne d'activation obtenues par cette approche sont très inférieures aux contraintes de sollicitation correspondant aux ruptures successives de l'essai virtuel FIG. 3.4. En particulier pour la dernière fissure, la sévérité du cinquième défaut vaut 155 et il est activé à 232MPa.

Ces différences sont la conséquence des modifications des populations de coefficient de répartition κ^i avec l'augmentation du nombre de fissures FIG. 5.17 hors des zones de relaxation de contraintes.

Pour vérifier la pertinence de la sélection des défauts par l'approche de champs homothétiques, les valeurs de sévérités initiales S_M^0 des défauts activés lors de l'essai virtuel sont reportées FIG. 5.18.

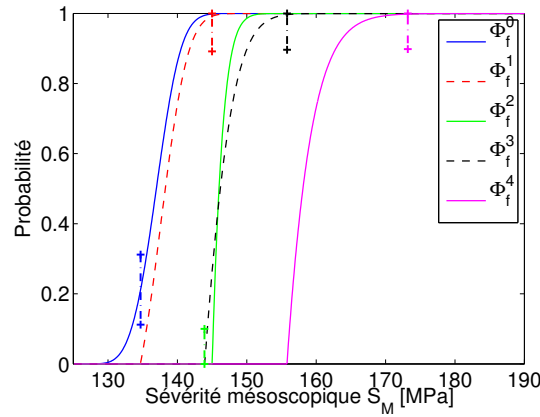


FIGURE 5.18 – Matériau# 1 : probabilités de rupture et sévérités S_M^0 associées au défauts activés pour l’essai virtuel hétérogène

On s’aperçoit que les contraintes d’activation, qui correspondent à la sévérité mésoscopique du défaut activé, ne sont pas nécessairement ordonnées : on y voit l’effet des fissures et la modification des champs de contraintes mésoscopiques. La troisième sévérité mésoscopique d’activation est inférieure à la précédente, à cause des modifications des paramètres κ^i . C’est un cas tout à fait particulier, on s’attend plutôt à obtenir des sévérités ordonnées croissantes.

Les sévérités relevées sont pour la plupart situées au niveau de probabilités quasi unitaires. Cela signifie qu’à chaque pas de fissuration, de nombreux défauts sont désactivés. Le processus proposé sous-estime probablement l’intensité de l’obturation.

Les valeurs de sévérité initiale relevées sont suffisamment proches des probabilités calculées pour valider le processus de sélection. L’approche de champ homothétique sera utilisée pour sélectionner des défauts, en nombre égal au nombre de fissures voulues, par leur sévérité mésoscopique initiale S_M^0 . Elle sera ensuite ramenée à leur sévérité microscopique S_m : c’est un paramètre intrinsèque non affecté par l’introduction de fissures. De cette manière un nombre restreint de défauts peut être utilisé pour simuler toute une population.

5.4. Conclusion

Pour obtenir les valeurs numériques des paramètres utilisés dans l’approche statistique probabiliste de ruptures successives, des cellules de calcul avec un Milieu Homogène Équivalent remplaçant la microstructure hétérogène ont été développées. Les propriétés mécaniques des MHE ont été obtenues en comparant les conditions en contrainte et déplacement aux bornes des cellules hétérogènes et homogènes. La confrontation des données obtenues en post traitement donne les distributions des paramètres pilotant la statistique de rupture. L’équivalence entre le couple (K_c, σ^R) et S_m pour décrire une population de défauts est effective. Le choix de l’un ou l’autre dépend des possibilités d’application.

De façon globale, la fonction *lognormale* est la plus précise pour décrire les populations de défauts par leur coefficient de contraintes ou leur sévérité.

Dans l'optique de transposer les populations de défauts dans le MHE par l'approche d'Homogénéisation et Perturbation Discrète, les populations K_c sont suffisantes dans les cas où la contrainte à rupture est uniforme, les populations σ^R seront utilisées en sus pour les configurations à contrainte à rupture dispersée.

La population de sévérités mésoscopiques S_M^0 permet d'appliquer l'approche statistique de la multi-fissuration en sélectionnant les valeurs associées à chaque fissure. On utilise en première approximation la démarche statistique probabiliste de sélection des défauts développée pour les champs de contraintes homothétiques. La transposition des défauts sélectionnés en valeur intrinsèque S_m autorise leur utilisation dans des champs de contraintes non-homothétiques. Cette démarche évite de réidentifier les dispersions des défauts Φ_d^i à chaque étape de fissuration.

QUATRIÈME PARTIE

Vers l'échelle méscoscopique : multifissuration du fil
homogène équivalent

Chapitre 6

Homogénéisation et Perturbation Discrète

Cette partie présente les résultats des essais virtuels réalisés sur le fil homogène équivalent. La stratégie de changement d'échelle consiste à rendre compte des hétérogénéités de la microstructure par une distribution de défauts dans le MHE. Ils rendent compte de la variabilité de la microstructure hétérogène, en particulier les points critiques de concentrations de contraintes au niveau des singularités et de la variabilité des contraintes locales à rupture dans les céramiques.

L'application de critères de rupture détermine les niveaux d'apparition de fissures. Elles sont introduites dans les maillages éléments finis de manière itérative pour réaliser des essais virtuels à l'échelle mésoscopique.

Une population complète de défauts peut être transposée à l'échelle du fil, mais l'approche statistique développée précédemment permet également d'appliquer cette méthode en utilisant un nombre de défauts réduit correspondant au nombre de fissures attendues.

6.1. Application de l'approche d'Homogénéisation et Perturbation Discrète

La méthode HPD permet de réaliser des essais virtuels de multifissuration des fils à l'échelle mésoscopique. Le fil est modélisé par un MHE et une population discrète de défauts représentative des hétérogénéités de la microstructure. Les fissures sont représentées à l'échelle mésoscopique, c'est leur échelle caractéristique. Le principe de l'HPD est schématisé FIG. 6.1.

Les populations de défauts sont identifiées par l'analyse statistique de multifissuration proposée Chapitre 4. Elles peuvent être transposées de deux façons : une population complète analogue à la microstructure ou une population réduite au nombre de fissures.

Pour une population complète, la densité poissonnienne de défauts est celle de la description hétérogène. Le changement d'échelle est d'abord réalisé en transposant la microstructure des matériaux virtuels : c'est l'HPD-identique. Cela permet de comparer les deux approches et valider le changement d'échelle. Des tirages aléatoires permettent par la suite

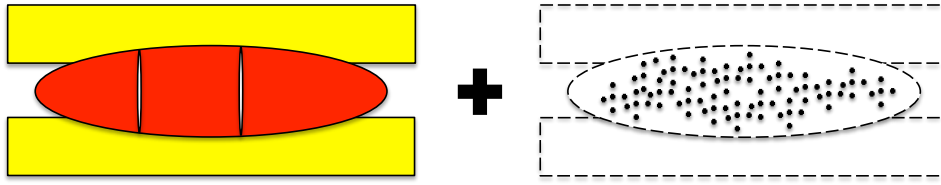


FIGURE 6.1 – Homogénéisation et Perturbation Discrète : Milieu Homogène Équivalent, endommagement sous forme discrète et population statistique de défauts

de générer des populations de défauts de même densité : c'est l'HPD-statistique. Les paramètres de distribution sont ceux identifiés Chapitre 5. Leur dispersion statistique est représentative de la microstructure étudiée.

Les populations de défauts sont caractérisées par le couple coefficient de concentration de contrainte et contrainte à rupture (K_c, σ^R) ¹. Le calcul sur le MHE donne les champs de contraintes σ_{eq} qui sont pondérés par la population de K_c pour établir une population de contraintes critiques. Les critères de rupture sont appliqués pour déterminer la localisation et le niveau d'apparition d'une fissure. Elle est introduite dans le MHE, puis un nouveau calcul est réalisé. La procédure itérative de fissuration est menée jusqu'à saturation.

L'approche statistique probabiliste permet d'explicitier les densités poissoniennes de défauts successives. À chaque fissure est donc associée une localisation et un niveau d'apparition pour une probabilité donnée. En utilisant les troncatures et obturation et le principe du maillon faible, cinq défauts sont sélectionnés pour cinq fissures : c'est l'HPD-probabiliste.

Les défauts sont décrits et sélectionnés par leur sévérité mésoscopique initiale S_M^0 . Il faut les transformer en sévérité microscopique S_m pour appliquer ensuite un critère de rupture local dans les champs de contraintes fortement hétérogènes et non homothétiques à cause des fissures.

Les cinétiques d'endommagement sont ainsi reproduites à l'échelle mésoscopique sur la base d'informations microscopiques. Les calculs sont très rapides en comparaison de l'approche hétérogène.

6.2. Population complète de défauts

6.2.1. Matériau #2, σ^R uniforme

6.2.1.1. Transposition à l'identique : HPD-identique

Le matériau #2 – fibres, pores et matrice – est soumis à un essai virtuel avec le fil homogénéisé. La distribution des coefficients de concentration de contraintes est celle de la microstructure hétérogène étudiée. La séquence de fissuration obtenue FIG. 6.2 est géométriquement identique à l'approche hétérogène FIG. 3.10 : ce sont les mêmes défauts qui sont activés.

1. C'est équivalent à l'utilisation de la sévérité microscopique S_m seule. Le choix de K_c était plus pratique pour le calcul de la valeur intermédiaire σ_c qui est utile pour comparer les champs de contraintes hétérogène et MHE

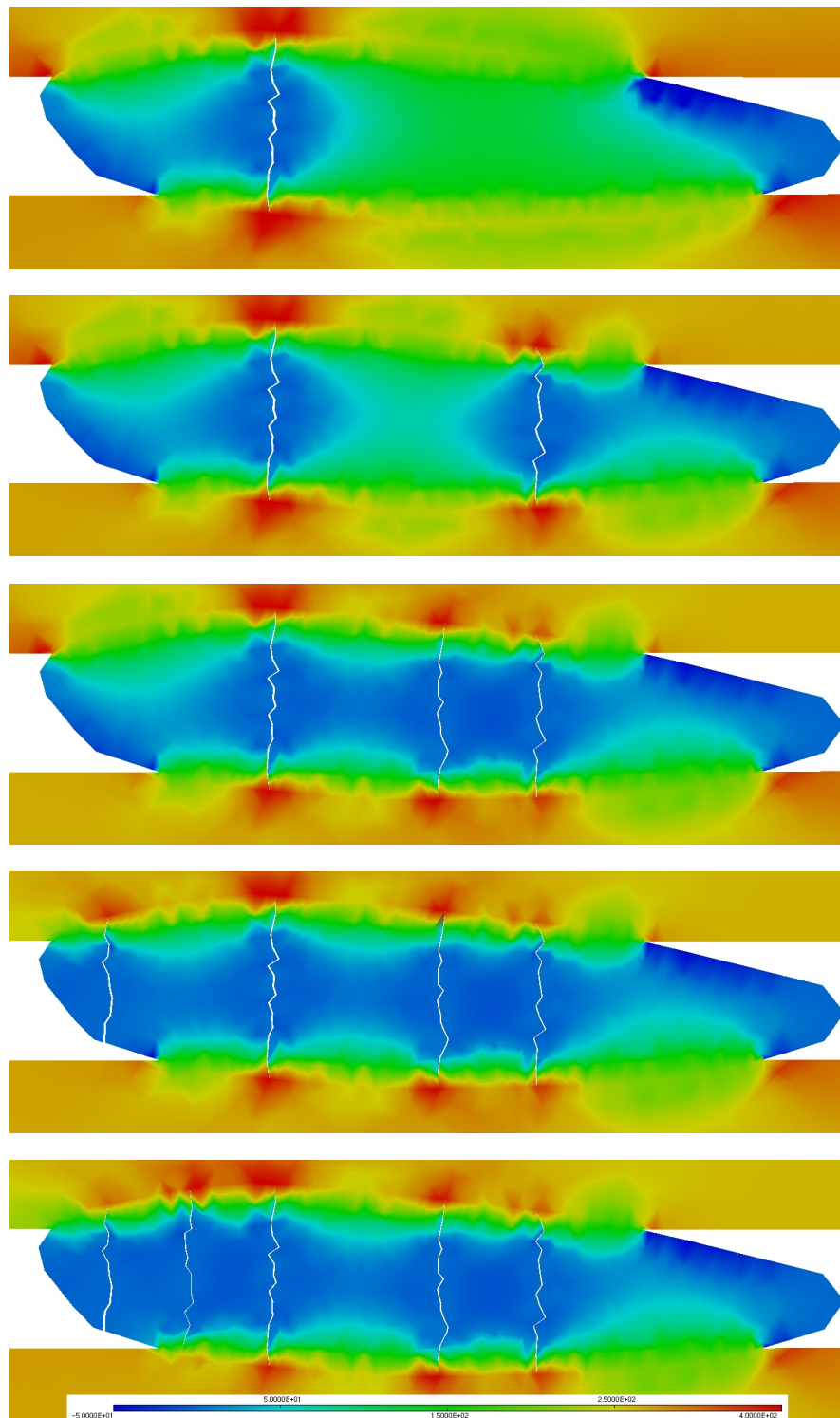


FIGURE 6.2 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-identique

La courbe de comportement obtenue FIG. 6.3 est similaire à celle de l'approche hétérogène FIG. 3.13, en particulier le premier point de non linéarité. Ce résultat est somme toute logique puisque la microstructure a été simplement transposée dans le MHE à l'échelle mésoscopique.

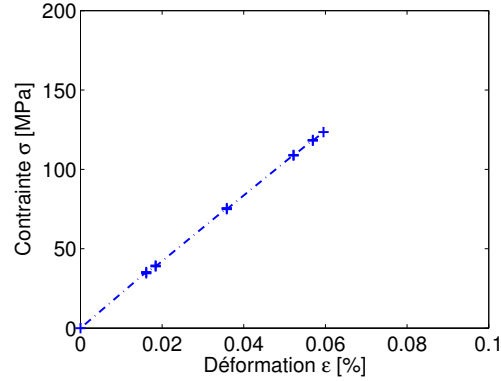


FIGURE 6.3 – Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-identique

6.2.1.2. Tirages statistiques : HPD-statistique

Plusieurs populations de coefficients de concentrations de contraintes K_c sont générés par des tirages aléatoires pour simuler des configurations de répartition de défauts statistiquement équivalentes. Elles suivent une loi *lognormale* de paramètres $\mu_{K_c^p} = 1.3205$ et $\sigma_{K_c^p} = 0.4323$. Ces réalisations génèrent des schémas de fissuration variables FIG. 6.4.

Les courbes de comportement obtenues FIG. 6.5 montrent une variabilité des seuils d'apparition des fissures mais les allures sont similaires.

6.2.1.3. Bilan des essais virtuels

Les rigidités successives obtenues par les différentes approches sont très proches TAB. 6.1, particulièrement entre l'approche hétérogène et l'approche HPD avec l'affectation à l'identique des défauts.

Les déformations à rupture présentent une dispersion marquée TAB. 6.2.

$N_{fissures}$	$E_{essai\ virtuel}$	$E_{HPD-identique}$	$E_{HPD-statistique}$		
0	219.03	219.01	219.01	219.01	219.01
1	213.86	213.90	214.27	215.58	214.29
2	210.87	210.96	210.58	213.07	210.41
3	208.76	209.03	209.51	209.44	209.38
4	207.87	208.23	207.89	208.30	208.70
5	206.94	207.48	207.62	207.50	207.59

TABLE 6.1 – Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contrainte à rupture uniforme

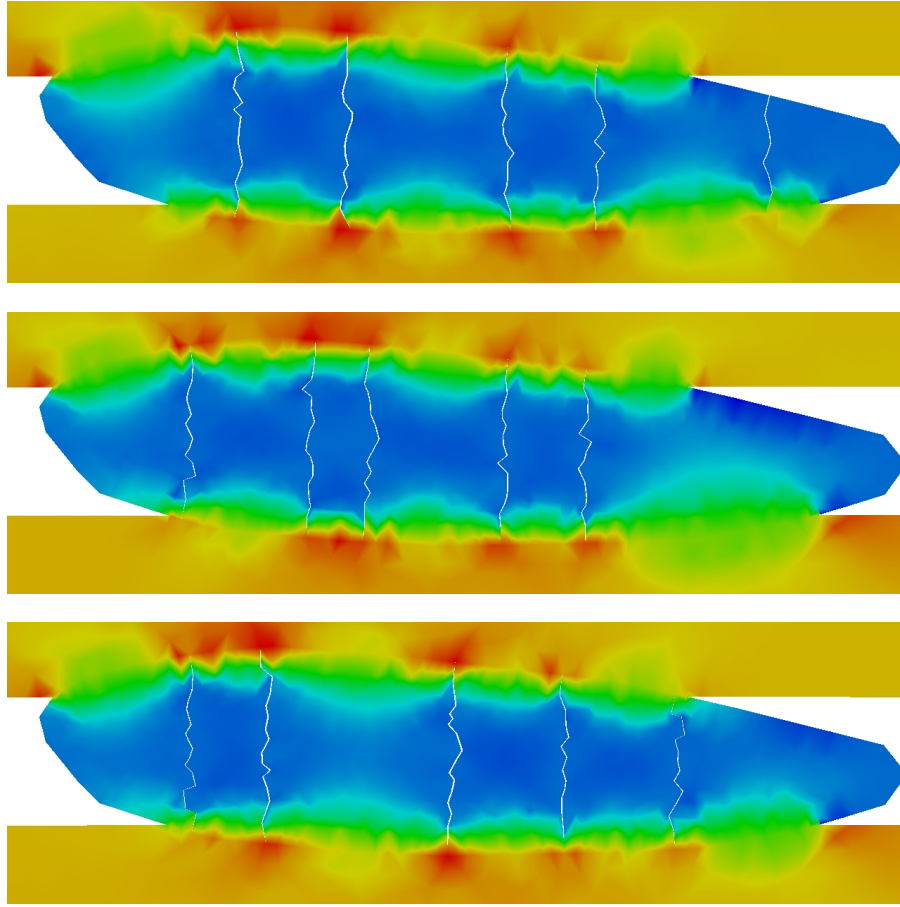


FIGURE 6.4 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-statistique

$N_{fissure}$	$\epsilon_{essai\ virtuel}$	$\epsilon_{HPD-identique}$	$\epsilon_{HPD-statistique}$		
1	0.016	0.016	0.009	0.018	0.015
2	0.018	0.018	0.019	0.023	0.022
3	0.033	0.036	0.024	0.026	0.034
4	0.051	0.052	0.037	0.051	0.041
5	0.062	0.057	0.056	0.083	0.046

TABLE 6.2 – Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contrainte à ruptures uniforme

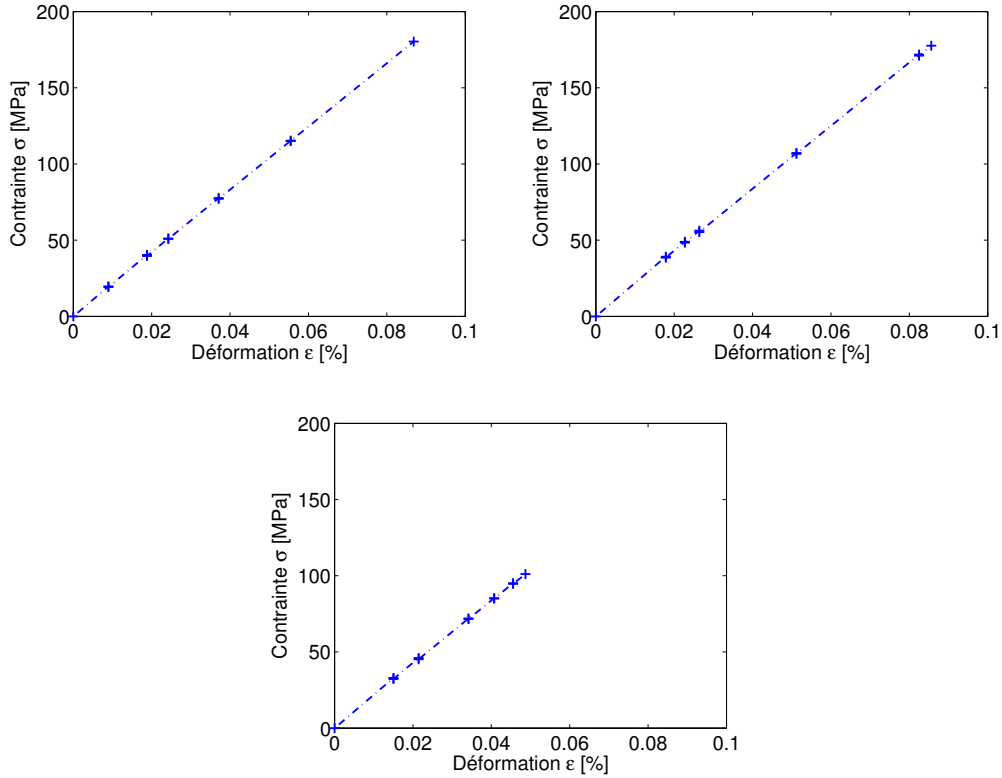


FIGURE 6.5 – Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, , matériau #2, contrainte à rupture uniforme, HPD-statistiques

6.2.2. Matériau #2, σ^R dispersé

6.2.2.1. Transposition à l'identique : HPD-identique

La transposition de la population de défauts à l'identique est complétée par celle des contraintes à ruptures σ^R dispersées, avec la dispersion considérée dans l'approche hétérogène. Cela aboutit à la même séquence de fissuration FIG. 6.6, avec les mêmes défauts activés, que l'approche hétérogène décrite FIG. 3.14.

Les courbes de comportement HPD FIG. 6.7 et hétérogènes FIG. 3.16 sont de nouveau similaires avec en particulier le même premier point d'amorce de fissure.

6.2.2.2. Tirages statistiques : HPD-statistique

Les populations de concentrations de contraintes K_c suivent la même loi de distribution *lognormale* que précédemment. On considère une dispersion de la contrainte locale à rupture statistiquement équivalente à l'essai virtuel présenté section 3.4.3 : les populations suivent une loi *normale* de moyenne $\mu_{\sigma^R} = 250 \text{ GPa}$ et d'écart type $\sigma_{\sigma^R} = 20$. De nouvelles séquences de fissuration sont obtenues FIG. 6.8.

Leurs courbes de comportement FIG. 6.9 sont de nouveau très proches des approches hétérogènes FIG. 3.16.

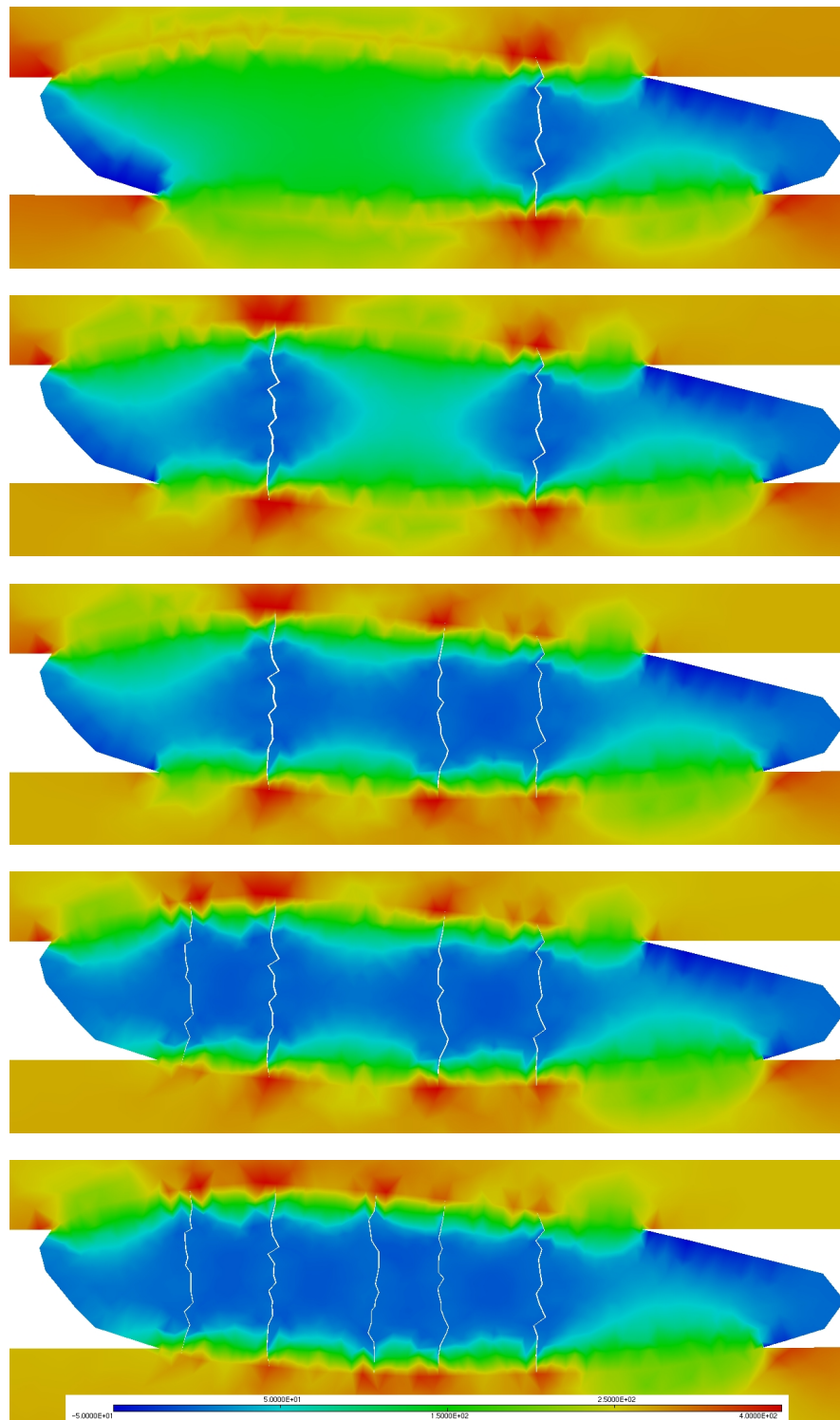


FIGURE 6.6 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-identique

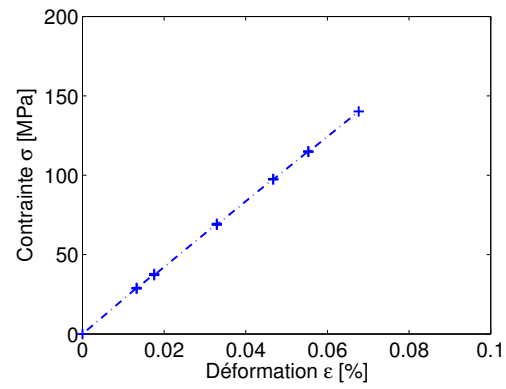


FIGURE 6.7 – Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-identique

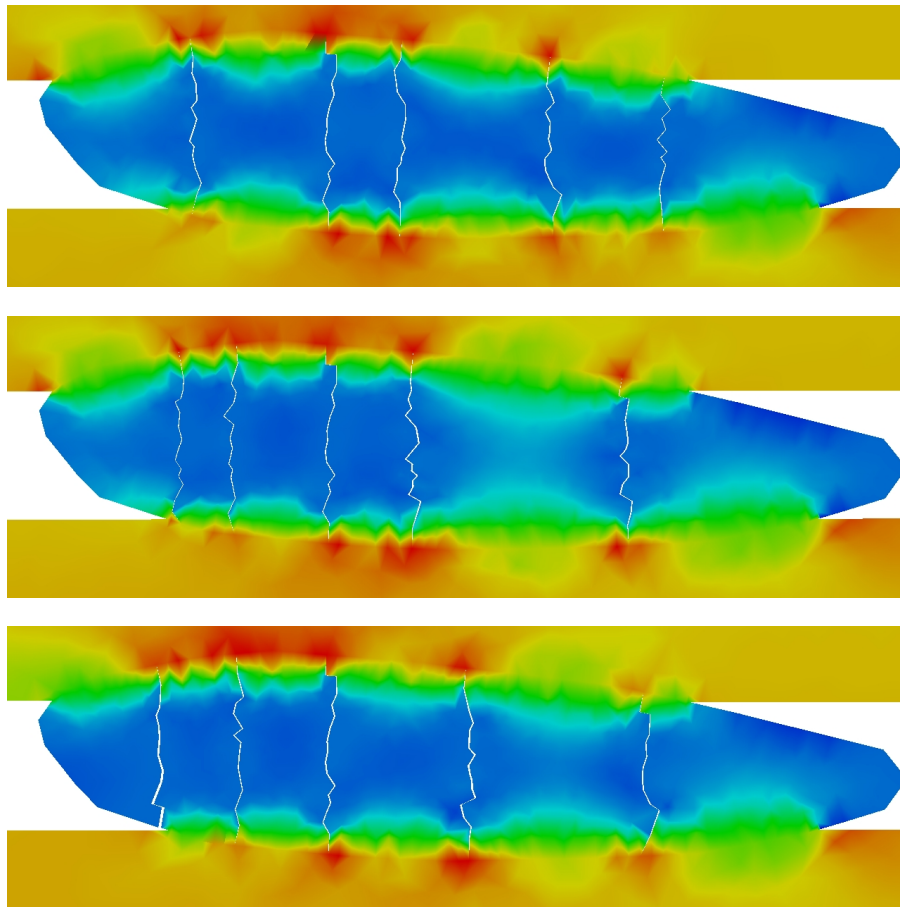


FIGURE 6.8 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-statistique

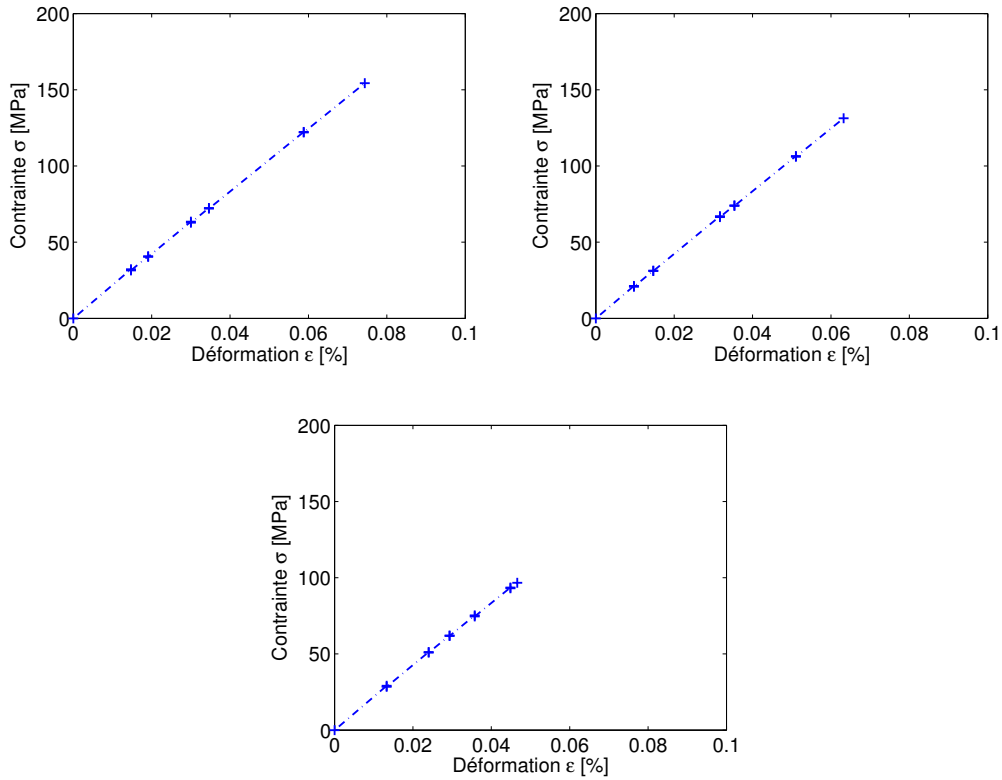


FIGURE 6.9 – Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #2, contraintes à rupture dispersées, HPD-statistique

6.2.2.3. Bilan des essais virtuels

De nouveau les variations sur le module d'Young apparent des cellules de calcul sont faibles entre les différentes réalisations FIG. 6.3.

Les déformations à rupture présentent une variabilité marquée TAB. 6.4.

$N_{fissures}$	$E_{essai\ virtuel}$	$E_{HPD-identique}$	$E_{HPD-statistique}$		
0	219.03	219.01	219.01	219.01	219.01
1	215.45	215.38	213.72	213.34	213.51
2	210.87	210.96	211.47	211.56	211.66
3	208.76	209.03	209.28	209.78	210.39
4	207.65	208.12	208.05	208.62	208.49
5	206.74	207.24	207.49	207.67	207.34

TABLE 6.3 – Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contraintes à ruptures dispersées

$N_{fissure}$	$\varepsilon_{essai\ virtuel}$	$\varepsilon_{HPD-identique}$	$\varepsilon_{HPD-statistique}$		
1	0.013	0.013	0.015	0.010	0.013
2	0.018	0.018	0.019	0.015	0.024
3	0.031	0.033	0.030	0.032	0.029
4	0.049	0.047	0.035	0.035	0.036
5	0.059	0.055	0.059	0.051	0.045

TABLE 6.4 – Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #2 avec contraintes à ruptures dispersées

6.2.3. Matériau #3

6.2.3.1. Transposition à l'identique : HPD-identique

Pour cet essai virtuel, les deux populations de défauts, interphases et pores, ont été transposées à l'échelle mésoscopique. Il existe donc la même compétition entre les modes de rupture que pour l'approche hétérogène. Naturellement, la même séquence de fissuration est obtenue FIG. 6.10 avec les mêmes défauts activés : d'abord trois pores puis deux interphases.

La courbe de comportement obtenue FIG. 6.11 est similaire à l'approche hétérogène, le point correspondant à la première fissure est identique.

6.2.3.2. Tirages statistiques : HPD-statistique

Des tirages statistiques ont été réalisés pour générer pour chaque essai virtuel deux populations de défauts qui suivent les lois de distribution *lognormale* identifiées précédemment : $\mu_{K_c^i} = 0.1099$ et $\sigma_{K_c^i} = 0.2734$ pour les interphases et $\mu_{K_c^p} = 1.4029$ et $\sigma_{K_c^p} = 0.4401$ pour les pores. De nouvelles séquences de fissuration sont obtenues FIG. 6.10.

Les courbes de comportement obtenues sont présentées FIG. 6.13. Elles sont toujours similaires à celles obtenues par l'approche hétérogène.

6.2.3.3. Bilan des essais virtuels

De nouveau les variations sur le module d'Young apparent des cellules de calcul sont faibles entre les différentes réalisations FIG. 6.5.

Les déformation à ruptures présentent une variabilité marquée TAB. 6.6.

6.2.4. Bilan des HPD-identique et HPD-statistique

Les résultats des approches HPD-identique et -statistique sont très satisfaisants. Le changement d'échelle donne des erreurs relativement faibles pour la modélisation à l'échelle mésoscopique.

Les comparaisons entre les courbes de comportement montrent que pour chaque matériau virtuel, l'évolution des rigidités des cellules de calcul sont quasi identiques. Cela

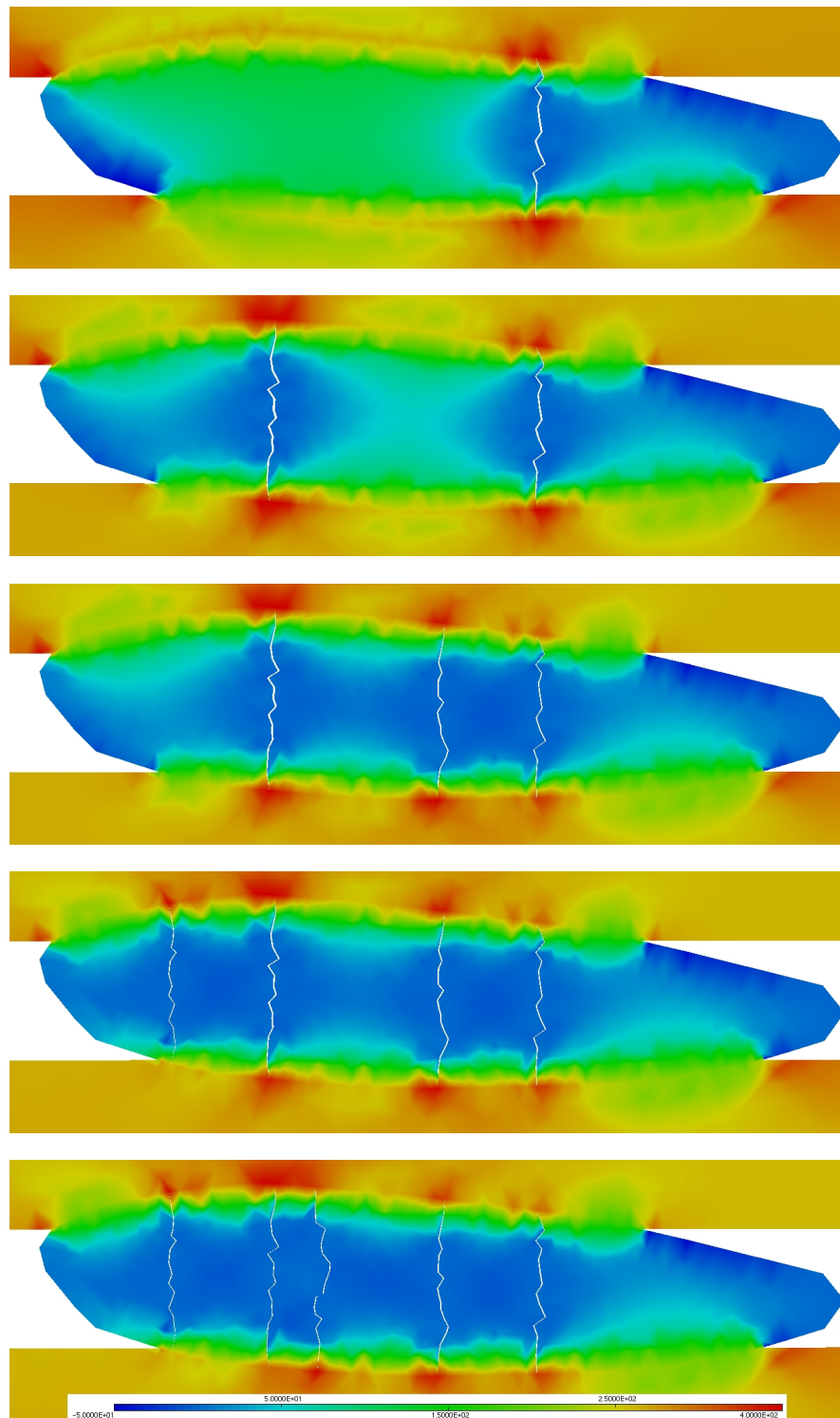


FIGURE 6.10 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, étapes de fissuration, matériau #3, HPD-identique

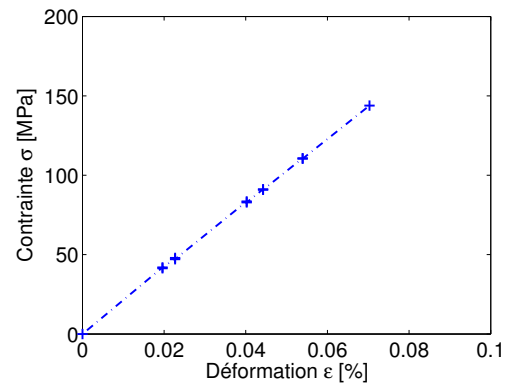


FIGURE 6.11 – Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #3, HPD-identique

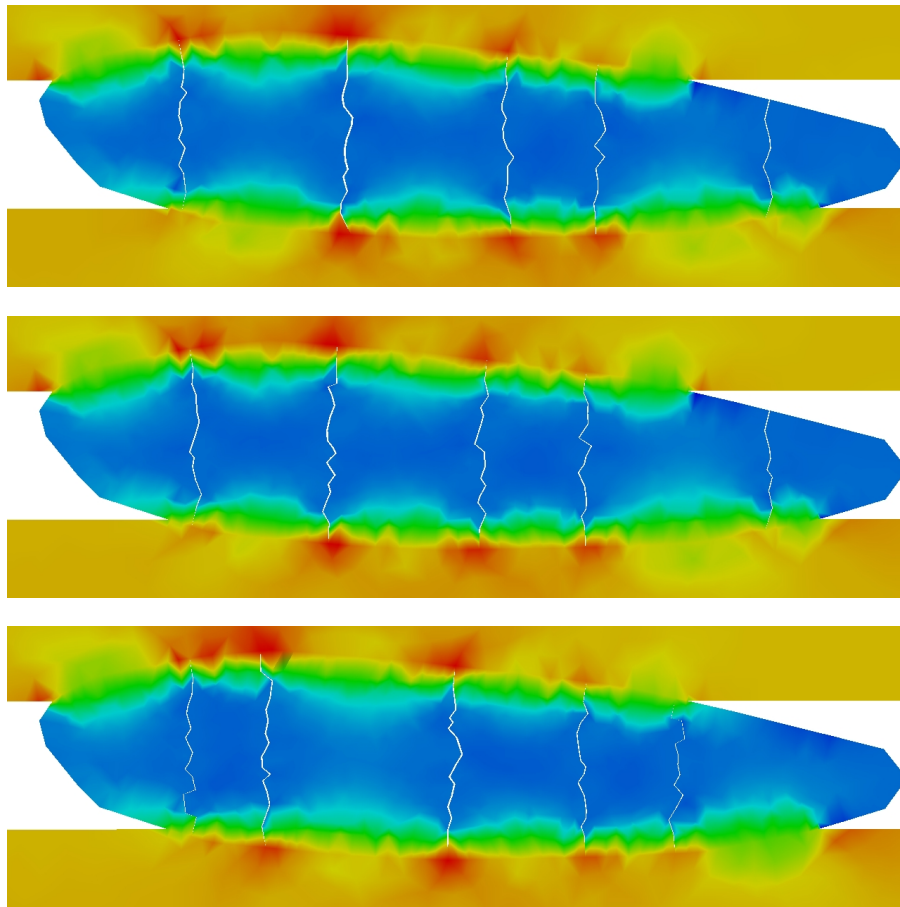


FIGURE 6.12 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil avec MHE, matériau #3, HPD-statistique

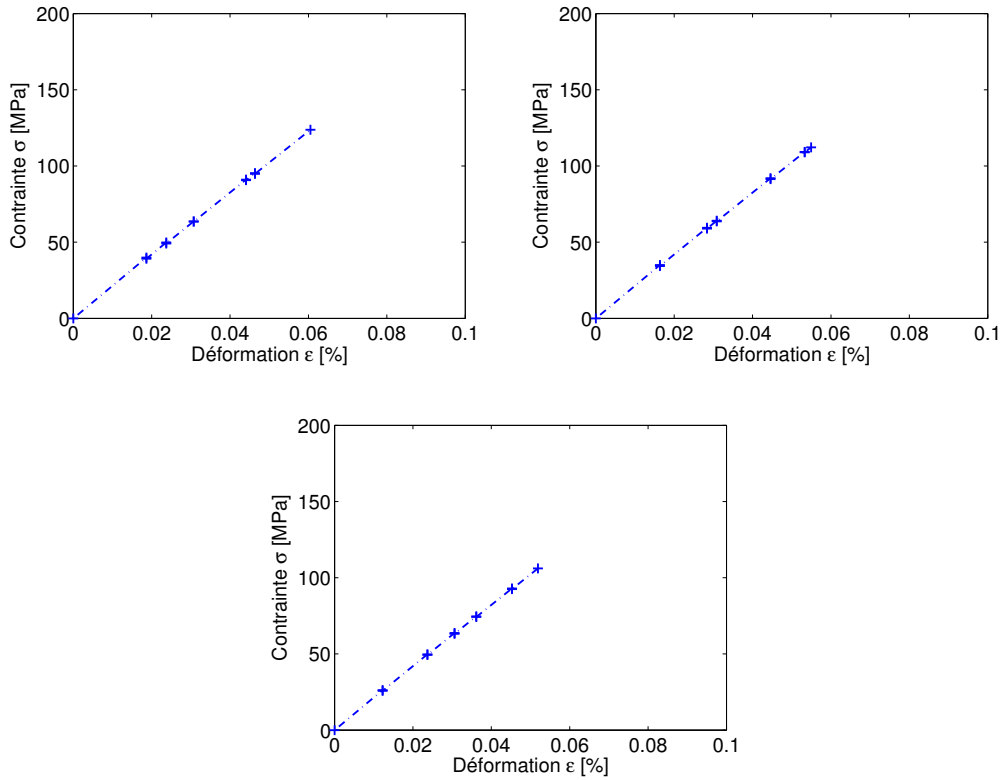


FIGURE 6.13 – Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #3, HPD-statistique

$N_{fissures}$	$E_{essai\ virtuel}$	$E_{HPD-identique}$	$E_{HPD-statistique}$		
0	214.08	214.06	214.06	214.06	214.06
1	211.35	211.23	209.94	209.72	210.03
2	207.68	207.64	207.26	207.77	208.21
3	205.89	206.04	206.50	206.35	206.39
4	205.00	205.29	205.63	204.95	205.28
5	204.11	204.65	204.60	204.38	204.48

TABLE 6.5 – Tableau comparatif des modules d'Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #3

signifie que la cinématique d'endommagement est la même pour chaque matériau à travers les approches hétérogènes ou HPD-identique et HPD-statistique.

La variabilité est plus marquée pour les déformations ou contraintes à rupture de fissurations successives pour l'approche HPD-statistique. La cinématique d'endommagement est donc plus variable d'un cas de calcul à l'autre. Cet effet est inhérent à la réalisation de tirages statistiques. Il faudrait pour harmoniser ces variabilités réaliser de nombreux tirages et construire une approche de type Monte Carlo.

$N_{fissure}$	$\varepsilon_{essai\ virtuel}$	$\varepsilon_{HPD-identique}$	$\varepsilon_{HPD-statistique}$		
1	0.020	0.020	0.019	0.016	0.012
2	0.023	0.023	0.024	0.028	0.024
3	0.036	0.040	0.031	0.031	0.031
4	0.045	0.044	0.044	0.045	0.036
5	0.066	0.054	0.046	0.053	0.045

TABLE 6.6 – Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD pour le matériau #3

6.3. Sélection des défauts par l'approche statistique

Le principe de sélection des défauts par le modèle probabiliste de multifissuration est appliquée au matériau virtuel #1. C'est la microstructure qui présente une seule population de défauts, les fibres, qui est la plus fournie. Après avoir réglé la problématique spatiale et l'aspect conditionnel des probabilités successives, ces deux points étant détaillés plus loin, deux séries de simulations sont réalisées.

La première met en œuvre l'approche statistique de troncature et obturation de la population initiale des sévérités mésoscopiques initiale S_M^0 ; elle permet de quantifier l'importance des modifications des champs mésoscopiques.

La seconde type simulation utilise ces défauts sélectionnés par leur sévérité mésoscopique S_M^0 qui est transposée ensuite en sévérité microscopique S_m . Cela permet de se placer dans des champs de contraintes non homothétiques caractéristiques de la multifissuration des fils.

6.3.1. Répartition spatiale et conditionnement au nombre de défauts

Pour s'affranchir des probabilités conditionnelles sur le nombre de défauts, les localisations de fissures sont choisies a priori et arbitrairement. Pour respecter les localisations obtenues avec l'essai virtuel hétérogène, ils sont situés près des fils longitudinaux et espacés d'au moins une demi hauteur de fil à leurs niveaux. Quelles que soient les valeurs des paramètres associés à chaque défaut pour les différentes séquences de fissuration, la répartition géométrique est fixée dès le départ FIG. 6.14.

Les approches HPD-probabiliste développées par la suite aboutissent donc à la même géométrie de fissuration mais les différentes hypothèses et simplifications conduisent à des comportements mécaniques totalement différents. La cinématique d'endommagement est la même pour toutes les simulations, la cinétique varie selon les réalisations.

L'aspect probabiliste spatial de la position des fissures peut être pris en compte par des localisations aléatoires. Prendre une seule répartition de fissures permet dans notre cas d'évaluer l'influence de l'aspect probabiliste par rapport aux contraintes uniquement.

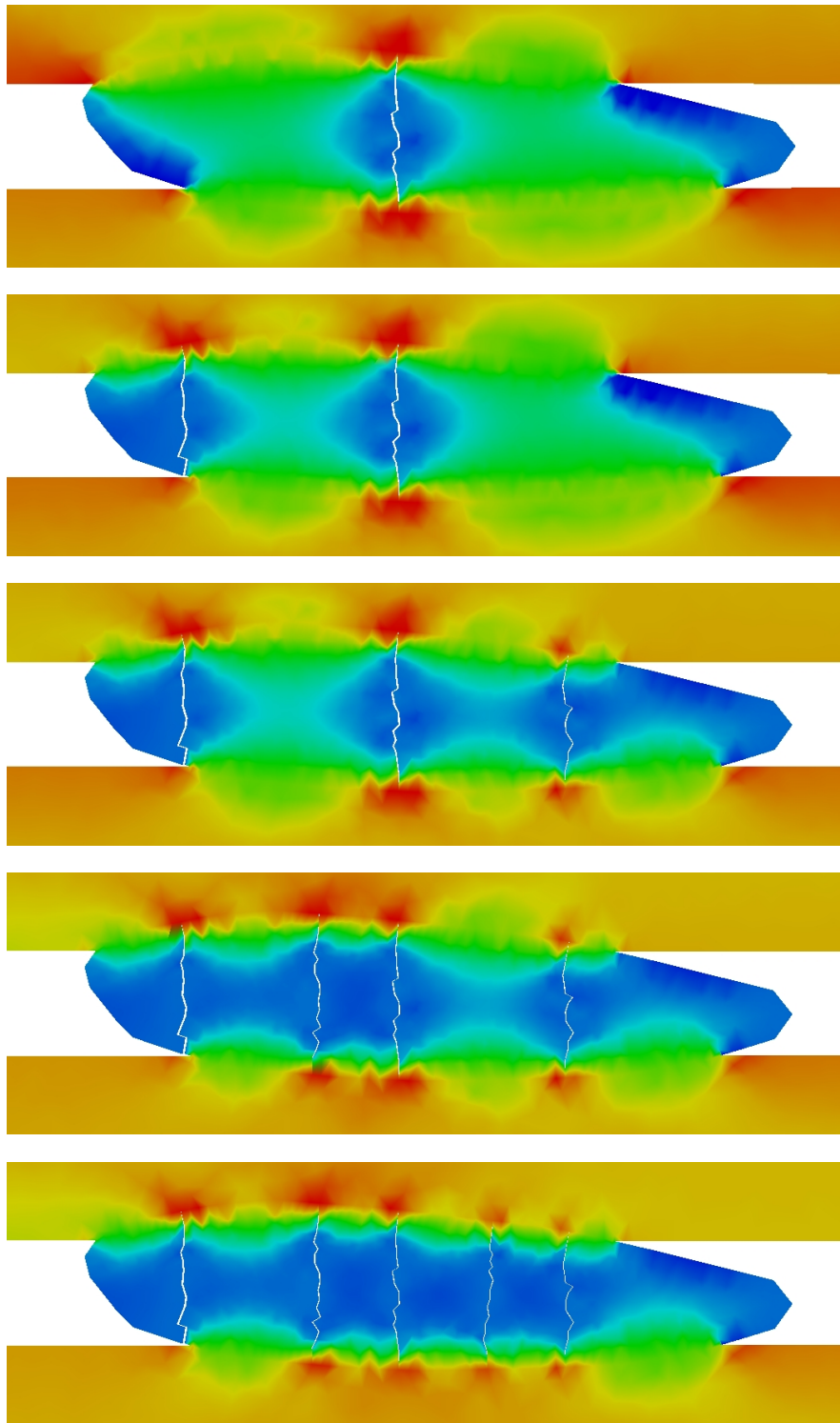


FIGURE 6.14 – Champ de contraintes σ_{11} dans le fil, localisation des fissures choisie arbitrairement

6.3.2. Sélection des défauts par l'approche de troncature et obturation, champ de contrainte homothétique

L'hypothèse considérée dans ce paragraphe est que la population des sévérités S_M^i ne varie pas selon le nombre de fissures mais uniquement pas les processus de troncature et obturation, sans prendre en compte l'effet des fissures sur la modification des κ^i hors des zones de relaxation : on se place dans un champ homothétique à l'extérieur des zones de relaxation. Il a été prouvé en section 5.3.2 que ces modifications ne sont pas négligeables, les simulations qui suivent sont présentées à titre exploratoire.

La population complète de défauts est décrite par la population des sévérités mésoscopiques S_M^0 , décrite par la probabilité d'activation Φ_d équivalente à la densité ponctuelle poissonnienne λ^0 . La contrainte associée au premier défaut est obtenue en tirant une valeur aléatoire Σ^1 dans la dispersion Φ_f^0 qui est obtenue par application du principe du maillon faible EQ. (4.26).

Cette valeur Σ^1 est ensuite utilisée pour déterminer la nouvelle densité de défauts Φ_d^1 , qui est également conditionnée par le nombre de défauts restant N^1 déterminé par le positionnement du défaut activé. La probabilité d'apparition de la seconde fissure Φ_f^1 est explicitée et une nouvelle contrainte à rupture Σ^2 est de nouveau obtenue par tirage statistique.

Cette procédure est répétée jusqu'à atteindre le nombre de cinq fissures obtenues à saturation des essais virtuels du fil hétérogène.

Une première simulation est réalisée avec des contraintes à rupture correspondant à des probabilités de rupture conditionnées $p^R(\Sigma^i) = 50\%$, qui se traduit avec les notations utilisées précédemment $\Phi_f^i(\Sigma^{i+1}) = 0.5$. Les densités de défauts successives obtenues et les probabilités de rupture correspondantes sont présentées FIG. 6.15. Les contraintes à rupture sont relativement proches les unes des autres.

Une seconde simulation est réalisée avec des niveaux de probabilité $p^R(\Sigma^i) = 0.75\%$. Les probabilités de rupture sont un peu plus espacées et correspondent mieux à celles obtenues en analysant l'essai virtuel hétérogène en section 5.3.2.

Les courbes de comportement obtenues à partir de ces deux populations de défauts sont présentées FIG. 6.17. Les déformations à rupture sont obtenues lorsque l'intensité de la sollicitation sur la cellule atteint la valeur de la sévérité associée au défaut.

Ces courbes ne reproduisent pas le comportement du matériau virtuel hétérogène. Les défauts sont activés à des niveaux de contrainte et déformation beaucoup plus faibles. La sélection des défauts par la population initiales des sévérités S_M^0 simule en fait un matériau dans lequel la population de défauts est tronquée et obturée mais soumise à un champ de contrainte sans fissures, c'est à dire le champ initial.

6.3.3. Adaptation à un champ mésoscopique non homothétique : HPD-statistique

Les défauts sélectionnés au paragraphe précédent, pour des probabilités conditionnelles de rupture à 50 et 75%, sont utilisés à nouveau. Pour simplifier l'écriture la procédure, une itération de fissuration est repérée par la variable (i) . Les défauts sont sélectionnés par leur

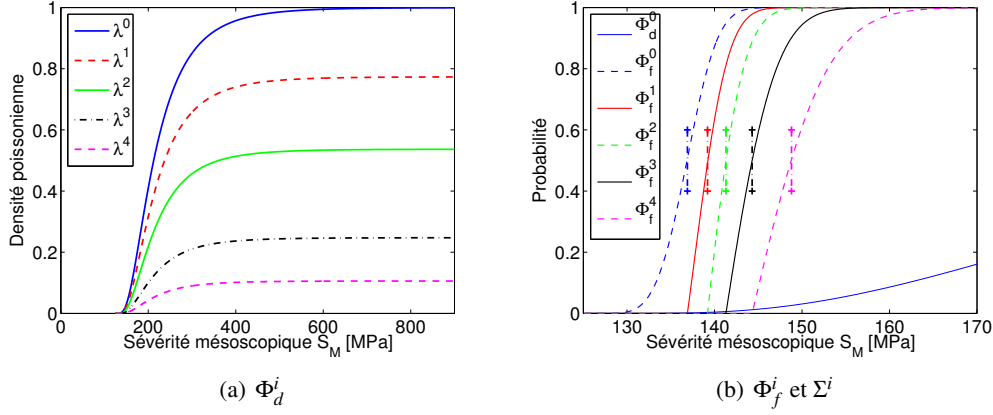


FIGURE 6.15 – Fonctions de densités cumulées (a.) des densités de défauts et (b.) des probabilités de rupture avec les contraintes à rupture Σ^i pour des probabilités de rupture $p^R(\Sigma^i)$ prises à 50%

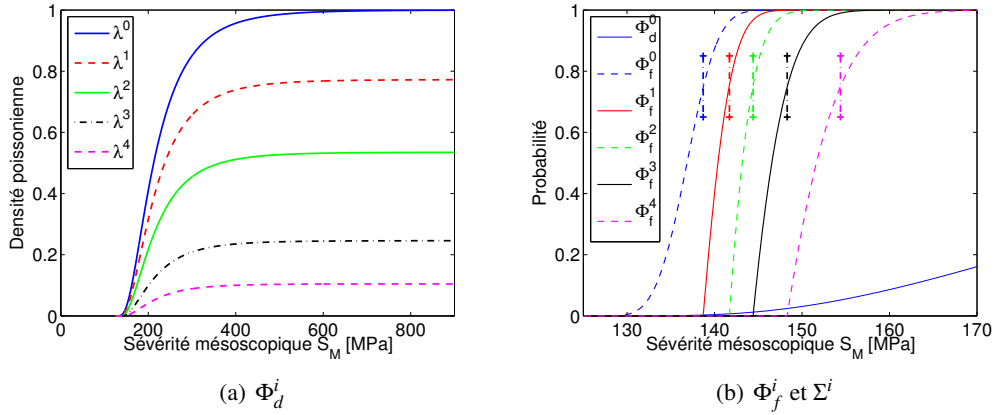


FIGURE 6.16 – Fonctions de densités cumulées (a.) des densités de défauts et (b.) des probabilités de rupture avec les contraintes à rupture Σ^i pour des probabilités de rupture $p^R(\Sigma^i)$ prises à 75%

sévérité mésoscopique $S_M^0(i)$ défini dans le champ de contraintes sans fissure ; c'est un indicateur non-intrinsèque. Pour pallier ce problème, ces valeurs sont transposées en sévérité microscopique $S_m(i)$ simplement en utilisant les valeurs des coefficients de répartition mésoscopique initiaux $\kappa^0(i)$ du matériau sain.

À chaque étape de fissuration, un nouveau coefficient $\kappa^i(i)$ est identifié pour le défaut (i) dans le champ de contraintes du MHE fissuré. Il est ensuite combiné avec la sévérité microscopique $S_m(i)$ pour donner la sévérité mésoscopique $S_M^i(i)$. Cette valeur est l'adaptation au champ de contrainte non homothétique modifié par les fissures de la sévérité initiale sélectionnée par l'approche du maillon faible appliquée aux densités poissonniennes obtenues par processus de troncature et obturation.

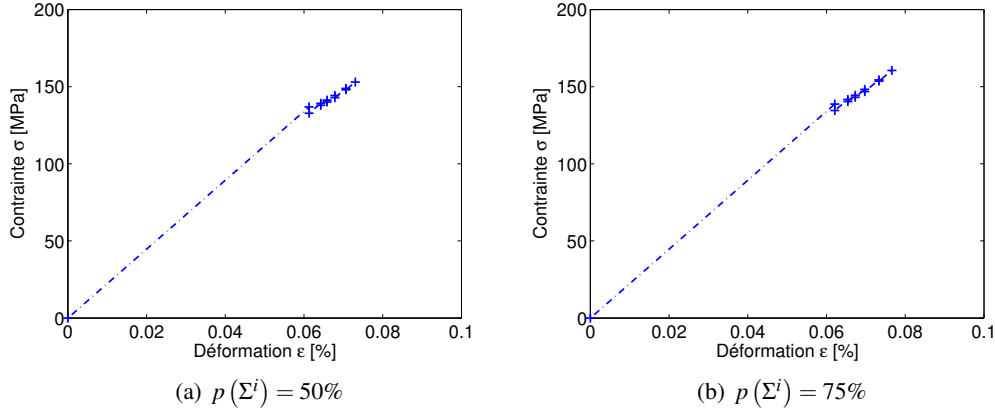


FIGURE 6.17 – Courbes de comportement de la cellule de calcul avec MHE sans prise en compte des fissures

L'évolution des ces paramètres est résumée TAB. 6.7. On précise que les indices correspondent à l'itération avant la fissure – 0 pour la première fissure, 1 pour la seconde, etc.

i	0	1	2	3	4
$p^R(\Sigma^i) = 50\%$					
$S_M^0(i)$	136.9	139.2	141.3	144.3	148.8
$S_m(i)$	105.06	117.10	118.07	126.40	130.28
$S_M^i(i)$	136.9	160.49	171.48	221.02	257.12
$p^R(\Sigma^i) = 75\%$					
$S_M^0(i)$	138.7	141.7	144.4	148.3	154.4
$S_m(i)$	106.45	119.20	120.66	129.90	135.19
$S_M^i(i)$	138.70	163.38	175.24	227.14	266.80

TABLE 6.7 – Tableau comparatif des sévérités $S_M^0(i)$, $S_m(i)$ et $S_M^i(i)$ pour le processus statistique de multifissuration adapté aux champs hétérogènes

Les courbes de comportement obtenues sont présentées FIG. 6.18. Les déformations à rupture correspondent aux sévérités $S_M^i(i)$ calculées dans les champs non homothétiques.

Les écarts de variations sur le module d'Young apparent des cellules de calcul avec l'approche hétérogène sont présentés TAB. 6.8. Les variations sont marquées pour des déformations à rupture TAB. 6.9.

Les courbes de comportement obtenues par l'approche HPD-probabiliste sont similaires à la courbe de comportement obtenue pour l'essai virtuel hétérogène FIG. 3.9. La sélection des défauts par l'approche de champs homothétiques et sa transposition aux champs non homothétiques fonctionne.

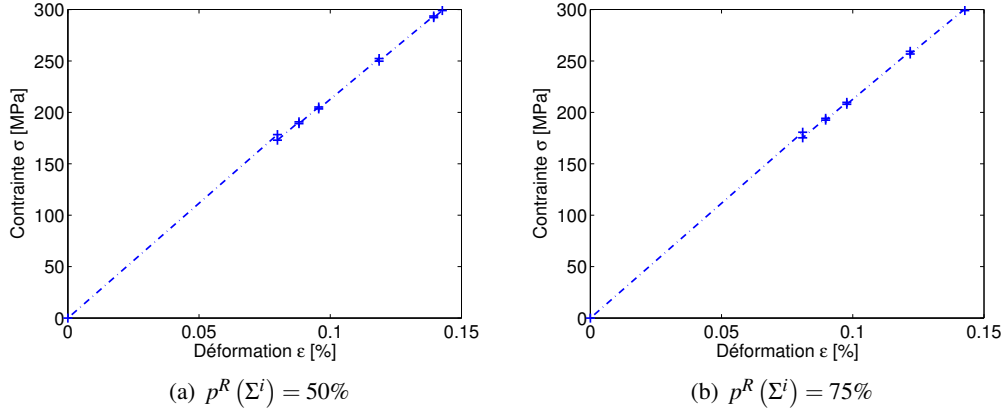


FIGURE 6.18 – Courbe de comportement de la cellule de calcul avec MHE, matériau #1, HPD-probabiliste

$N_{fissures}$	$E_{essai\ virtuel}$	$E_{HPD-probabiliste}$
0	223.25	223.33
1	220.15	216.60
2	217.12	214.60
3	212.25	212.71
4	209.99	210.60
5	209.08	209.51

TABLE 6.8 – Tableau comparatif des modules d’Young [GPa] entre les approches hétérogènes et HPD-probabiliste pour le matériau #1

6.4. Conclusion

Suite à l’identification des fonctions de dispersion pour les différents matériaux virtuels, deux stratégies de changement d’échelle ont été mises en œuvre par l’approche d’Homogénéisation et Perturbation Discrète. La première, HPD-identique et HPD-statistique, consiste à transposer une population complète de défauts dont les caractéristiques statistiques ont été identifiées au chapitre précédent. La seconde, HPD-probabiliste, transpose un nombre réduit de défauts correspondant au nombre de fissures attendues, sélectionnés par l’approche statistique probabiliste de multifissuration.

La transposition des populations complètes de défauts génère une densité de défauts identique à celle observée dans l’essai virtuel hétérogène. Les coefficients de concentration de contraintes K_c caractérisent les défauts. Lorsque la population σ^R est dispersée, on cumule ce deux dispersions pour chaque défaut. Dans les deux cas, les défauts sont caractérisés par des paramètres *intrinsèques* dont les dispersions n’évoluent pas au cours de la multifissuration. Les niveaux de rupture sont obtenus en combinant le paramètre intrinsèque de description des défauts et la contrainte dans le milieu équivalent σ_{eq} pour appliquer un critère de rupture identique à l’approche hétérogène.

De nombreuses simulations sont réalisées rapidement et simplement : les maillages des

$N_{fissure}$	$\varepsilon_{essai\ virtuel}$	$\varepsilon_{HPD-probabiliste}$	
		$p^R = 50\%$	$p^R = 75\%$
1	0.060	0.080	0.081
2	0.067	0.088	0.090
3	0.075	0.096	0.098
4	0.087	0.119	0.1219
5	0.111	0.139	0.145

TABLE 6.9 – Tableau comparatif des déformations locales à rupture [%] entre les approches hétérogènes et HPD-probabiliste pour le matériau #1

cellules de calculs ont été réduits de 516800 - 793800 ddl à 3850. Les temps de calcul sur un processeur en direct de plus de 2 min à 1,6 s pour chaque calcul d'étape de fissuration ; pour une séquence de fissuration complète, le temps est réduit de 30 min à 25 s. Les courbes de comportement sont similaires entre les approches homogènes et hétérogènes, en particulier en terme de limite de linéarité – l'apparition de la première fissure – et de l'évolution des rigidités globales des cellules de calcul. Les cinématiques d'endommagement sont très bien reproduites, les cinétiques sont plus variables.

La sélection des défauts par l'approche statistique probabiliste de multifissuration proposée au chapitre 4 se déroule en deux étapes. La première consiste à sélectionner les défauts associés aux fissures par les processus de troncature, obturation et maillon faible en les considérant soumis à des champs de contraintes homothétiques. Une fois identifiés par leur sévérité mésoscopique initiale S_M^0 , elle est découplée du gradient mésoscopique initial caractérisé par la distribution de κ^0 . Leur sévérité microscopique S_m est obtenue, c'est un indicateur *intrinsèque* qui peut être utilisé à toutes les étapes de fissuration. Ainsi elles sont combinées aux champs de contraintes dans le MHE avec les fissures, caractérisés par les dispersions des κ^i . Un critère de rupture est appliqué à chaque étape de fissuration, comme pour l'approche hétérogène.

La méthode de changement d'échelle HPD, considérant une population complète ou une population réduite par approche statistique, donne de bons résultats en terme de courbes de comportement des cellules et permet de réduire de façon significative les temps de calcul par MEF.

CINQUIÈME PARTIE

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif de la thèse était de relier les études à l'échelle microscopique, spécialité du Laboratoire des Composites ThermoStructuraux, à des modèles de calcul de structure. Le passage de l'échelle microscopique à mésoscopique a été réalisé pour l'endommagement transverse des fils d'un CMC tissé.

Une procédure spécifique pour générer des matériaux virtuels à partir de micrographies a été développée. Une image qui détaille la microstructure des fils – fibres, pores, matrice – est transformée en maillages éléments finis modulaires. Les procédures de maillage ont été optimisées sur des singularités élémentaires pour garantir une convergence du calcul des grandeurs locales. Trois microstructures ont été étudiées :

- fibres et matrice : c'est le plus virtuel des matériaux pour les CMC, qui correspond à une mèche de fibres totalement imprégné de matrice ;
- fibres, pores et matrice : correspond à la géométrie de la micrographie de départ ;
- fibres, interphase, pores et matrice : penche vers une matrice multi-séquencée avec des interphases qui jouent le rôle de fusible mécanique.

Des cellules de calcul représentatives des zones de chevauchement des fils dans le tissage ont été réalisées : la coupe du fil transverse est positionnée entre deux fils longitudinaux. Des simulations de traction sur la cellule hétérogène permettent de caractériser les champs de contraintes. Les répartitions de contraintes sont fondamentalement différentes au sein des trois matériaux : les localisations et les dispersions des concentrations de contraintes sont spécifiques à chacun. Une singularité caractérisée par la concentration de contrainte qu'elle génère est considérée comme un défaut dans le fil. C'est un site préférentiel d'amorce. Les matériaux virtuels permettent de comparer et d'appréhender les modes de rupture pour diverses microstructures.

L'application de critères de rupture en contrainte au niveau des singularités caractérise l'apparition de fissures. Elles sont explicitement représentées à l'échelle des fils. Une procédure de remaillage a été développée pour dédoubler les nœuds dans la microstructure. La propagation est instantanée dans la matrice fragile. Les fissures sont perpendiculaires à la sollicitation, elles contournent les fibres et traversent les pores. Des essais virtuels de multifissuration ont été menés en itérant ces apparitions de fissures en sollicitation de traction. Les courbes de comportement des cellules obtenues sont conformes aux seuils d'apparition des non-linéarités dans les SiC-SiC. Tout l'intérêt des essais virtuels est d'accéder aux cinétiques, mais surtout aux cinématiques d'endommagement des matériaux virtuels.

Les matériaux et essais virtuels forment un ensemble d'outil performant pour déterminer

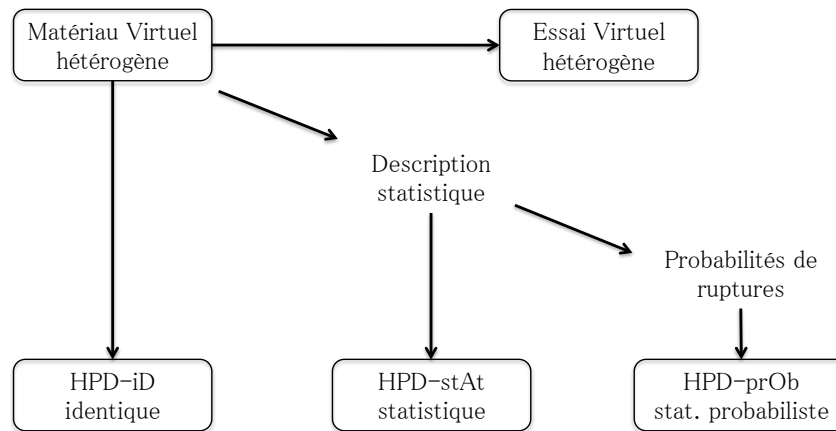


FIGURE 6.19 – Multiples réalisations de la séquence de multifissuration par essais virtuels : échelle microscopique hétérogène, échelle mésoscopique par HPD

les propriétés mécaniques d'un CMC à l'échelle du tissage. Ils proposent une représentativité morphologique de la microstructure et un sens physique développé des processus qui pilotent les ruptures et l'endommagement. Ils sont néanmoins nécessaires en terme de ressources numériques et d'une efficacité relative. La démarche de changement d'échelle vers l'échelle mésoscopique a pour but de réduire la lourdeur des calculs.

L'approche statistique probabiliste développée pour la multifissuration est basée sur le principe du maillon faible appliqué à des densités de défauts identifiées sur les essais virtuels. Plusieurs familles de paramètres sont définies pour découpler les échelles et caractériser les influences de la microstructure et du tissage sur la dispersion des concentrations de contraintes. Des paramètres intrinsèques K_c , σ^R et S_m caractérisent l'influence microscopique : leurs valeurs ne varient pas au cours de l'essai virtuel. Les paramètres κ et S_M sont des descripteurs de défaut qui varient en fonction du nombre de fissures : ils sont représentatifs de la combinaison de la microstructure et des champs mésoscopiques modifiés par les fissures.

Des probabilités conditionnelles d'apparition de fissures successives sont explicitées. L'application du principe du maillon faible réalise un changement d'échelle en passant de la population décrite à l'échelle microscopique à un seul défaut associée à une fissure qui est un événement mésoscopique de part sa taille caractéristique. Une nouvelle population de défauts correspondant aux fissures, donc représentative à l'échelle mésoscopique, est ainsi définie.

L'avantage d'identifier les densités de défauts sur les essais virtuels est de traiter une population exhaustive de défauts. La densité de défauts est donc connue a priori.

Le changement d'échelle est réalisé par l'approche d'Homogénéisation et Perturbation Discrète. Les microstructures hétérogènes sont remplacées par un fil homogène équivalent et une distribution discrète de défauts. Ses propriétés statistiques sont celles identifiées par l'approche statistique.

Pour les configurations avec compétition entre les populations de défauts, il est plus simple de transposer les populations complètes ; c'est le cas d'application des matériaux

avec pores et interphases. Les schémas de fissuration et les courbes de comportement obtenus valident l'approche avec population complète.

Pour le matériau virtuel avec fibres et pores, cinq défauts sont sélectionnés pour autant de fissures à faire apparaître sous des hypothèses de champs de contraintes successifs homothétiques. Les défauts sont caractérisés et sélectionnés par leur sévérité mésoscopique S_M^0 dans le champ initial sans fissures. Ces valeurs sont ensuite transposées en sévérités microscopiques S_m qui sont des paramètres intrinsèques, donc utilisables dans des champs de contraintes non homothétiques. Les courbes de comportement obtenues valident l'approche par sélection probabiliste de défauts.

De nombreuses perspectives se dégagent de cette thèse.

Les matériaux et essais virtuels peuvent être appliqués à la conception de structures de matériaux. De part leur modularité, des études exploratoires peuvent être menées sur de nombreuses configurations ; les composites à fibres en particulier, les matériaux particuliers, etc. Le développement des outils virtuels passe par l'adaptation des techniques de calcul EF plus évoluées pour le calcul des contraintes locales. Au regard de l'importance des résistances interfaciales sur le comportement des composites, des critères de rupture plus complexes peuvent également affiner l'analyse des niveaux d'apparition des fissures.

Les cinématiques et cinétiques d'endommagement peuvent être adaptées au formalisme adéquat et utilisées dans une modélisation du composite à l'échelle du tissage, à l'image de l'approche DMD développée dans [COU 08].

L'approche statistique de sélection des défauts peut servir à revisiter les problèmes de fragmentation traités dans certains travaux. Ce formalisme est directement applicable aux problématiques de multifissuration longitudinale des fils, de multifissuration dans les stratifiés de plis unidirectionnels. Il est également transposable à la fragmentation de milieux quasi-fragiles tels les bétons, sous réserve d'adapter les critères de rupture aux phénomènes physiques relativement différents.

Des méthodes inverses de déconvolution des fonctions de dispersion des différents paramètres statistiques permettraient de remonter en particulier à des populations de contraintes à rupture locales.

Bibliographie

- [AUB 00] AUBARD X., CLUZEL C., GUITARD L., LADEVÈZE P., « Damage modeling at two scales for 4D carbon/carbon composites », *Computers and Structures*, vol. 78, p. 83-91, 2000.
- [BAS 01] BASTE S., « Inelastic behaviour of ceramic-matrix composites », *Composites Science and Technology*, vol. 61, p. 2285–2297, 2001.
- [BAX 93] BAXEVANAKIS C., JEULIN D., VALENTIN D., « Fracture statistics of single-fibre composite specimen », *Composites Science and Technology*, vol. 48, p. 47–56, 1993.
- [BAX 98] BAXEVANAKIS C., JEULIN D., LEBON B., RENARD J., « Fracture statistics modeling of laminate composites », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 19, p. 2502–2521, 1998.
- [BER 96] BERTHELOT J. M., LEBLOND P., MAHI A. E., CORRE J.-F. L., « Transverse cracking of cross-ply laminates : Part 1. Analysis », *Composites Part A*, vol. 27A, p. 989 – 1001, 1996.
- [BER 98] BERTRAND S., LAVAUD J. F., HADI R. E., VIGNOLES G., PAILLER R., « The thermal gradient-pulse flow CVI process : an new chemical vapor infiltration technique for the densification of fibre preforms », *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 18, p. 857–870, 1998.
- [BOI 01] BOITIER G., VINCENS J., CHERMANT L., « Understanding the creep behavior of a 2.5D Cf-SiC composite. III : From mesoscale to nanoscale microstructural and morphological investigation towards creep mechanism », *Materials Science and Engineering A*, vol. 313, p. 53-63, 2001.
- [CAL 98] CALARD V., *Approches statistiques-probabilistes du comportement mécanique des composites à matrice céramique*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 1998.
- [CAL 02] CALARD V., LAMON J., « A probabilistic-statistical approach to the ultimate failure of ceramic-matrix composites – part I : experimental investigation of 2D woven SiC/SiC composites », *Composites Part 1 Science and Technology*, vol. 62, p. 385–393, 2002.

- [CAS 96] CASO A., HUET P., TRAMIER P., « A new SiC-SiC Composite as low-activation structural material », in *Proceedings of the first IEA 'SiC/SiC composites' workshop, JCR/Ispra (I), October 28-29*, page 95, 1996.
- [CAS 10] CASTELIER É., GÉLÉBART L., LACOUR C., LANTUÉJOUL C., « Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites », *Composites Science and Technology*, vol. 70, p. 2146–2153, 2010.
- [COU 08] COUÉGNAT G., *Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, 2008.
- [DAL 97] DALMAZ A., *Étude du comportement en fatigue cyclique à haute température du composite tissé 2.5D-C/SiC*, Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1997.
- [ESH 57] ESHELBY J. D., « The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems », in *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 241 de A, *Mathematical and Physical Sciences*, p. 376 – 396, 1957.
- [ESH 59] ESHELBY J. D., « The elastic field outside an ellipsoidal inclusion », in *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 252 de A, *Mathematical and Physical Sciences*, p. 561 – 569, 1959.
- [ESH 69] ESHELBY J. D., « The elastic field of a crack extending non-uniformly under general anti-plane loading », *Journal of Mechanics of Physics and Solids*, vol. 17, p. 177–199, 1969.
- [EVA 80] EVANS A. G., MEYER M. E., FERTIG K. W., DAVIS B. I., BAUMGARTNER H. R., « Probabilistic models for defect initiated fracture in ceramics », *Journal of Non-destructive Evaluation*, vol. 1, p. 111–122, 1980.
- [EVA 94] EVANS A. G., ZOK F. W., « Review : the physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites », *Journal of Materials Science*, vol. 29, p. 3857–3896, 1994.
- [FOR 00] FORIO P., *Comportement thermomécanique et durée de vie d'un composite 2D SiC/SiC à matrice multicouche et autocicatrisante*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2000.
- [GAJ 06] GAJDOSIK J., ZEMAN J., SEJNOHA M., « Qualitative analysis of fiber composite microstructure : Influence of boundary conditions », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 21, p. 317–329, 2006.
- [GAS 96] GASSER A., LADEVÈZE P., POSS M., « Damage mechanisms of a woven SiC/SiC composite : modelling and identification », *Composites Science and Technology*, vol. 56, p. 779–784, 1996.
- [GAS 98] GASSER A., LADEVÈZE P., PERES P., « Damage modelling for a laminated ceramic composite », *Materials Science and Engineering A*, vol. 50, p. 249–255, 1998.

- [GHO 93] GHOSH S., MUKHOPADHYAY S. N., « A material based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 104, p. 211–247, 1993.
- [GHO 00] GHOSH S., LING Y., MAJUMDAR B., KIM R., « Interfacial debonding analysis in multiple fiber reinforced composites », *Mechanics of Materials*, vol. 32, p. 561–591, 2000.
- [GHO 07] GHOSH S., BAI J., RAGHAVAN P., « Concurrent multi-level model for damage evolution in microstructurally debonding composites », *Mechanics of Materials*, vol. 39, p. 241–266, 2007.
- [GUI 94] GUILLAUMAT L., *Microfissuration des CMC : Relation avec la microstructure et le comportement mécanique*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 1994.
- [HAA 03] HAAN S., CHARALAMBIDES P., KUHN J., PATTERSON M., « Supercritical matrix microcracking in brittle matrix plain weave composites under uniaxial tension », *Mechanics of Materials*, vol. 35, p. 1107–1126, 2003.
- [HOC 07] HOCHARD C., LAHELLEC N., BORDREUIL C., « A ply scale non-local fibre rupture criterion for CRP woven ply laminated structures », *Composites Structures*, vol. 80, p. 321–326, 2007.
- [HéL 08] HÉLARY D., DUGNE O., BOURRAT X., « Advanced characterization techniques for SiC and PyC coatings on high-temperature reactor fuel particles », *Journal of Nuclear Materials*, vol. 373, p. 150–156, 2008.
- [JEU 01] JEULIN D., OSTOJA-STARZEWSKI M., Eds., *Mechanics of random and multiscale microstructures*, N° 430CISM Courses and Lectures, Springer, 2001.
- [KUH 99] KUHN J., CHARALAMBIDES P., « Modeling of plain weave fabric composite geometry », *Journal of Composite Materials*, vol. 33, p. 188–220, 1999.
- [KUH 00] KUHN J., HAAH S., CHARALAMBIDES P., « Stress induced matrix microcracking in brittle matrix plain weave fabric composites under uniaxial tension », *Journal of Composite Materials*, vol. 34, p. 1640–1664, 2000.
- [LAD 93] LADEVÈZE P., *Failure criteria of structured media*, edit. J.P. Boehler, Chapitre On an anisotropic damage theory, p. 355–364, Balkema, 1993.
- [LAD 96] LADEVÈZE P., *Mécanique non linéaire des structures : Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Pierre Ladevèze, 1996.
- [LAD 00] LADEVÈZE P., ALLIX O., DEÛ J.-F., LÉVÈQUE D., « A mesomodel for localisation and damage computation in laminates », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, p. 105–122, 2000.
- [LAD 03] LADEVÈZE P., LUBINEAU G., « On a damage mesomodel for laminates : micromechanics », *Mechanics of Materials*, vol. 37, p. 763–775, 2003.

- [LAM 98] LAMON J., THOMMERET B., PERCEVAULT C., « Probabilistic-statistical approach to matrix damage and stress-strain behavior of 2-D woven SiC-SiC ceramic matrix composites », *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 18, p. 1797-1808, 1998.
- [LAM 99] LAMOUROUX F., BERTRAND S., PAILLER R., NASLAIN R., CATALDI M., « Oxidation-resistant carbon-fiber-reinforced ceramic-matrix composites », *Composites Science and Technology*, vol. 59, p. 1073–1085, 1999.
- [LAM 01] LAMON J., « A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites », *Composites Science and Technology*, vol. 61, p. 2259–2272, 2001.
- [LAM 07] LAMON J., *Mécanique de la rupture fragile et de l'endommagement – approches statistiques probabilistes*, Hermes Sciences Publications, 2007.
- [LAM 09] LAMON J., « Stochastic approach to multiple cracking in composite systems based on the extreme-values theory », *Composites Science and Technology*, vol. 69, p. 1607–1614, 2009.
- [LAM 10] LAMON J., « Stochastic models of fragmentation of brittle fibers or matrix in composites », *Composites Science and Technology*, vol. 70, p. 743 - 751, 2010.
- [LI 07] LI S., GHOSH S., « Modeling interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composites by the extended Voronoi cell FEM », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, p. 397–410, 2007.
- [LIS 97] LISSART N., LAMON J., « Damage and failure in ceramic matrix minicomposites : experimental study and model », *Acta Materialia*, vol. 45, p. 1025–1044, 1997.
- [LUB 08] LUBINEAU G., LADEVÈZE P., « Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel, and illustrations in ABAQUS/Standard », *Computational Materials Science*, vol. 43, p. 137–145, 2008.
- [LUB 09] LUBINEAU G., VIOLEAU D., LADEVÈZE P., « Illustrations of a microdamage model for laminates under oxidizing thermal cycling », *Composites Science and Technology*, vol. 69, p. 3–9, 2009.
- [MAL 09] MALÉSYS N., VINCENT L., HILD F., « A probabilistic model to predict the formation and propagation of crack networks in thermal fatigue », *International Journal of Fatigue*, vol. 31, p. 565–574, 2009.
- [MAR 98] ÉRIC MARTIN, PETERS P. W. M., LEGUILLON D., QUENISSET J. M., « Conditions for matrix crack deflection at an interface in ceramic matrix composites », *Materials Science and Engineering A*, vol. 250, p. 291–302, 1998.
- [MAS 78] MASSON P., Ed., *Mécanique de la rupture fragile*, Bui, H. D. and Germain P., 1978.
- [MAT 75] MATHERON G., *Random sets and integral geometry*, John Wiley & Sons, 1975.

- [MAT 03] MATSUDA T., OHNO N., TANAKA H., SHIMIZU T., « Effects of fibre distribution on elastic-viscoplastic behavior of long fibre-reinforced laminates », *Mechanical Sciences*, vol. 45, p. 1583–1598, 2003.
- [MOE 08a] MOEVUS M., GODIN N., « Analysis of damage mechanisms and associated acoustic emission in two SiCf/[Si-B-C] composites exhibiting different tensile behaviours. Part I : Damage patterns and acoustic emission activity », *Composites Science and Technology*, vol. 68, p. 1250–1257, 2008.
- [MOE 08b] MOEVUS M., GODIN N., « Analysis of damage mechanisms and associated acoustic emission in two SiCf/[Si-B-C] composites exhibiting different tensile behaviours. Part II : Unsupervised acoustic emission data clustering », *Composites Science and Technology*, vol. 68, p. 1258–1265, 2008.
- [POM 03] POMPIDOU S., *Déviations des fissures par une interface ou une interphase dans les composites et les multicouches*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2003.
- [POM 07] POMPIDOU S., LAMON J., « Analysis of crack deviation in ceramic matrix composites and multilayers based on the Cook and Gordon mechanism », *Composites Science and Technology*, vol. 67, p. 2052 - 2060, 2007.
- [ROU 08] ROUSSET G., *Approche probabiliste de la durée de vie d'un composite unidirectionnel à matrice métallique en fatigue oligocyclique axiale*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2008.
- [SEW 02] SEWERYN A., LUKASZEWICZ A., « Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, p. 1487 – 1510, 2002.
- [SIR 96] SIRON O., *Approche micro-macro du comportement mécanique et de la rupture d'un composite carbone-carbone à architecture fibreuse multidimensionnelle*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, 1996.
- [STA 95] STAAL AXELSEN M., *Quantitative description of the morphology and microdamages of composite materials*, Thèse de Doctorat, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, 1995.
- [TAL 94] TALREJA R., Ed., *Damage mechanics of composite materials*, Elsevier, 1994.
- [TIM 70] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J., *Theory of Elasticity*, McGraw, New York, 1970.
- [TRI 05] TRIAS MANSILLA D., *Analysis and simulation of transverse random fracture of long fibre reinforced composites*, Thèse de Doctorat, Escola Politècnica Superior, Universitat de Girona, 2005.
- [TRI 06] TRIAS D., COSTA J., TURON A., HURTADO J., « Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers », *Acta Materialia*, vol. 54, p. 3471–3484, 2006.

[WAN 94] WANG H., SING R. N., « Thermal shock behavior of ceramics and ceramic composites », *International Materials Review*, vol. 39, p. 228–244, 1994.

[WEI 39] WEIBULL G. W., « A statistical theory of the strenght of materials », in *Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research*, vol. 151 :1, 1939.

Essais virtuels et modèle statistique de multifissuration transverse des fils dans les composites tissés à matrice céramique

Ce travail concerne l'étude et la modélisation du phénomène de multifissuration transverse des fils dans les CMC tissés. Sa connaissance est fondamentale pour déterminer son effet sur les champs de contraintes, la progression des endommagements et la durée de vie du matériau.

À partir d'observations sur des coupes de CMC, des matériaux virtuels sont développés et des essais virtuels réalisés. Différentes séquences de fissuration transverse sont simulées sur diverses microstructures de CMC. Ces simulations se substituent à des observations expérimentales impossibles à réaliser.

Un modèle statistique de multifissuration est développé sur la base du principe du maillon faible appliqué à une distribution ponctuelle de Poisson. Les singularités microstructurales sont représentées par des défauts dans un milieu homogène équivalent (MHE). Les modifications des fonctions de distribution au cours de la multifissuration sont modélisées.

Le modèle statistique permet de réaliser un changement d'échelle à la suite duquel la multifissuration transverse est simulée dans le MHE avec une réduction des temps de calcul de l'ordre de 90%.

Mots-clés : composites tissés ; approche multiéchelle ; loi de comportement ; endommagement ; multifissuration.

Virtual testing and statistical model of transverse multiple cracking of tows in ceramic matrix composites

This work deals with the study and modeling of multiple cracking of tows in woven CMCs. Its understanding is fundamental to determine the effect on stress fields, the evolution of damage and the lifetime of material.

From observations on real CMC pieces, virtual materials are developed and multiple cracking virtual testing is achieved. Different scenarios are simulated on various CMC microstructures. These simulations are a substitute for impossible experimental observations.

A statistical model for multiple cracking based on the weakest link principle applied to a distribution of Poisson is developed. Microstructural singularities are represented by defects in a homogeneous medium equivalent (EHM). Modification of distribution functions during the multicracking are modeled.

The statistical model realizes a scale changing : transverse multicracking is simulated in the EHM with a reduction of almost 90% for computational time.

Keywords : woven composites ; multiscale modeling ; mechanical behavior ; damage ; cracking.