

Table des matières

Table des figures et des tableaux	ix
Nomenclature	xv
Introduction	1
I Description polydisperse des écoulements à bulles	7
1 Modélisation moyennée des écoulements dispersés	9
1.1 Modélisation moyennée d'un milieu diphasique : le modèle à deux fluides	10
1.2 Modélisation moyennée de la phase dispersée par une approche particulière	17
1.3 Modélisation hybride des écoulements diphasiques à phase dispersée	23
1.4 Conclusion	32
1.5 Références	33
2 Écoulements à bulles et polydispersion	35
2.1 Stratégies de modélisation de la polydispersion	36
2.2 Représentation statistique de la population de bulles	37
2.3 Méthode des moments	46
2.4 Références	58
II Relations de fermetures – Application aux écoulements bouillants sous-saturés	61
3 Forces hydrodynamiques moyennes	63
3.1 Bulle isolée évoluant dans un milieu infini.	63
3.2 Détermination des forces moyennes polydisperses	68
3.3 Conclusion	77
3.4 Références	77

4	Coalescence et fragmentation de bulles	81
4.1	Description des processus physiques	82
4.2	Détermination du terme source de coalescence	85
4.3	Détermination du terme source de fragmentation	91
4.4	Conclusion	100
4.5	Références	101
5	Changement de phase	105
5.1	Condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé	105
5.2	Détermination des termes sources liés au changement de phase	107
5.3	Évaluation de l'influence de la polydispersion en taille sur le changement de phase	113
5.4	Références	122
6	Tentative de prise en compte de la polydispersion en vitesse	125
6.1	Transport des densités de moments et vitesse caractéristique de bulle	125
6.2	Vitesse relative de bulle	127
6.3	Conclusion	129
6.4	Références	130
III	Test et validation du modèle de polydispersion par simulation numérique	131
7	Présentation des équations de NEPTUNE_CFD	133
7.1	Équations principales	134
7.2	Équations complémentaires	137
7.3	Conclusion	143
7.4	Références	143
8	Simulation numérique de l'expérience DEBORA	145
8.1	Paramétrage du modèle numérique	145
8.2	Simulation et analyse des différents essais DEBORA	158
8.3	Comparaison du modèle Q2 aux autres modèles implantés dans NEPTUNE_CFD	161
8.4	Conclusion	162
8.5	Références	163

Conclusion générale	165
Annexes	171
A Loi cubique à deux paramètres	173
A.1 Propriétés géométriques	173
A.2 Formulations alternatives de la loi C2	174
A.3 Conditionnement géométrique des densités de moments de la loi C2	176
B Calcul des forces moyennes polydisperses	179
B.1 Force de traînée moyenne	179
B.2 Force de portance moyenne	181
B.3 Force de paroi moyenne	182
C Calcul des termes sources de coalescence et fragmentation	185
C.1 Détermination des termes sources de coalescence	185
C.2 Détermination du terme source de fragmentation homogène	187
C.3 Détermination du terme source de fragmentation hétérogène	191
D Calcul du taux de changement de phase géométrique moyen	197
D.1 Calcul des différentes intégrales	197
D.2 Écriture finale du terme source	199
E Résultats des différents calculs DEBORA	201
F Article présenté à la conférence ICAPP 2011	231
Références bibliographiques	243

Table des figures et des tableaux

Liste des figures

1	Exemples d'écoulements eau/air cocourants ascendants dans un tube vertical (reproduction de Roumy, 1969).	1
2	Assemblage 17×17 d'un réacteur à eau pressurisé (adapté de Delhayé, 2008).	2
2.1	Comparaison de l'approche multi-classes (PDF discrétisée) et de la méthode des moments (PDF modélisée).	37
2.2	Exemple de loi de distribution log-normale (LN).	49
2.3	Comparaison de l'allure de différentes lois de distribution par rapport à une distribution de taille de bulle expérimentale d'un écoulement à bulles adiabatique sans changement de phase.	50
2.4	Comparaison de l'allure de différentes lois de distribution par rapport à une distribution de taille de bulle expérimentale d'un écoulement bouillant à bulles.	50
2.5	Exemple de loi de distribution quadratique à un paramètre (Q1).	51
2.6	Exemple de loi de distribution quadratique à deux paramètres (Q2).	53
2.7	Exemple de loi de distribution cubique à deux paramètres (C2).	56
3.1	Forme d'une bulle en mouvement dans un liquide au repos (adapté de Clift <i>et al.</i> , 1978).	65
3.2	Évolution du coefficient de traînée en fonction du diamètre adimensionnel d/ζ , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds capillaire Re_ζ et pour $\alpha_d = 0,1$	71
3.3	Évolution du coefficient de portance de Tomiyama en fonction de E_o , pour différentes valeurs de Re_ζ	73
3.4	Comparaison de l'expression de C^L de Tomiyama pour $Re_\zeta = 100$ et de l'expression simplifiée (3.38).	73
3.5	Analogie entre le cas de figure d'une sphère entourée d'autres sphères et celui de deux sphères concentriques.	75
4.1	Schématisation des trois étapes menant à la coalescence de deux bulles (adapté de Jakobsen, 2008).	82
4.2	Sources de collisions entre bulles (adapté de Morel, 1997).	83

4.3	Schématisation de la fragmentation d'une bulle causée par son interaction avec un tourbillon turbulent du liquide environnant (adapté de Hagesaether <i>et al.</i> , 2002).	84
4.4	Schématisation d'un événement de coalescence : relations entre les volumes et les diamètres des bulles mères et fille.	85
4.5	Approche et déformation de deux bulles (adapté de Kamp <i>et al.</i> , 2001).	89
4.6	Schématisation d'un événement de fragmentation : relations entre les volumes des bulles mère et filles.	93
5.1	Condensation d'une bulle de vapeur au repos plongée dans un liquide sous-saturé (Theofanous <i>et al.</i> , 1969) : évolution du diamètre de bulle en fonction du temps pour différents régimes thermiques.	106
5.2	Schématisation de la section d'essai de l'expérience DEBORA (adapté de Manon, 2000).	115
5.3	Exemple de fonction de distribution des tailles de bulles obtenue sur DEBORA et diamètres moyens correspondants (Essai n° 1, point de mesure n° 15, $r/R = 0,7$).	117
5.4	Exemple de fonction de distribution des tailles de bulles obtenue sur DEBORA et comparaison avec des PDF Q2 et C2 ayant les mêmes densités de moments $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ (Essai n° 1, point de mesure n° 15, $r/R = 0,7$).	117
5.5	Flux de chaleur interface/liquide moyens obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale et différents diamètres moyens. Π_c a été ici divisé par le nombre de Jakob pour s'affranchir de la sous-saturation ($\theta_{sat} - \theta_c$).	119
5.6	Flux de chaleur interface/liquide moyens obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale, le diamètre moyen d_{32} et les PDF Q2 et C2. Π_c a été ici divisé par le nombre de Jakob pour s'affranchir de la sous-saturation ($\theta_{sat} - \theta_c$).	121
7.1	Schématisation de la répartition du flux de chaleur en paroi, selon la théorie de Kurul et Podowski (1990) (adapté de Laviéville <i>et al.</i> , 2006).	142
8.1	Schématisation de la grille de calcul et des différents types de conditions aux limites	148
8.2	Test de sensibilité en maillage du modèle numérique de DEBORA	150
8.3	Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_1$ pour l'essai DEBORA 4. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,65$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).	152
8.4	Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour l'essai DEBORA 4. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,65$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).	152
8.5	Évolution radiale ($z=4,485$ m) du terme source de fragmentation de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.	154
8.6	Évolution radiale ($z=4,485$ m) du terme source de coalescence de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.	154
8.7	Évolution radiale ($z=4,485$ m) du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulence pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.	155

8.8	Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_1$ pour l'essai DEBORA 1. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,79$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).	156
8.9	Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour l'essai DEBORA 1. Résultats obtenus avec la modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,79$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).	156
8.10	Nombre de Reynolds moyen obtenu pour les différents essais en fin de longueur chauffée ($z=4,485$ m).	159
A.1	Calcul numérique et interpolation de la relation géométrique donnant n en fonction des autres densités de moments pour la loi C2.	175
C.1	Calcul numérique et interpolation de l'intégrale $\mathcal{I}_2^{CO}$ en fonction de η_{10}^{CO} et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001) avec la PDF Q2.	188
C.2	Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation c_{21} et c_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001) avec la PDF Q2.	188
C.3	Calcul numérique et interpolation de l'intégrale $\mathcal{I}_2^{BU}$ en fonction de $\tilde{\eta}_{10}^{BU}$ et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_e=0,65$.	190
C.4	Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation b_{21} et b_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_e=0,65$.	190
C.5	Calcul numérique et interpolation de l'intégrale $\tilde{\mathcal{I}}_y^{BV}$ en fonction de $\tilde{\eta}^{BU}$ (modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec $\mathcal{K}_{LS}=0,25$).	193
C.6	Calcul numérique et interpolation de l'intégrale $\mathcal{I}_2^{BU}$ en fonction de η_{10}^{BU} et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_{LS}=0,25$.	194
C.7	Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation b_{21} et b_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_{LS}=0,25$.	194
E.1	Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	202
E.2	Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,65$) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	203
E.3	Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,79$) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	204

E.4	Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp <i>et al.</i> (2001) et les différents modèles de fragmentation. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	205
E.5	Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 1 et des résultats numériques obtenus avec différentes corrélations de Nusselt. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	206
E.6	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 1 à l'altitude $z=4,485$ m.	207
E.7	Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 1 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	208
E.8	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 2 à l'altitude $z=4,485$ m.	209
E.9	Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 2 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	210
E.10	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 3 à l'altitude $z=4,485$ m.	211
E.11	Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 3 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	212
E.12	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 4 à l'altitude $z=4,485$ m.	213
E.13	Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 4 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.	214
E.14	Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 1 pour quatre positions axiales différentes	215
E.15	Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 1.	216
E.16	Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 2 pour quatre positions axiales différentes	217
E.17	Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 2.	218
E.18	Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 3 pour quatre positions axiales différentes	219
E.19	Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 3.	220
E.20	Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 4 pour quatre positions axiales différentes.	221
E.21	Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 4.	222

E.22	Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 1 ($z=4,485$ m).	223
E.23	Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 2 ($z=4,485$ m).	224
E.24	Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 3 ($z=4,485$ m).	225
E.25	Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 4 ($z=4,485$ m).	226
E.26	Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 1 ($z=4,485$ m).	227
E.27	Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 2 ($z=4,485$ m).	228
E.28	Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 3 ($z=4,485$ m).	229
E.29	Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 4 ($z=4,485$ m).	230

Liste des tableaux

1	Exemples d'écoulement diphasique à phase dispersée (adapté d'Oesterlé, 2006).	1
2.1	Diamètres moyens usuels construits à partir des premières densités de moments de la fonction de distribution en diamètre des bulles (adapté de Mugele et Evans, 1951).	47
4.1	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source CO_γ pour les modèles de coalescence PB90 (Prince et Blanch, 1990) et KCCF01 (Kamp <i>et al.</i> , 2001).	92
4.2	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990).	96
4.3	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation hétérogène de Luo et Svendsen (1996) ($K_{LS}=0,25$).	100
5.1	Liste de corrélations pour le nombre de Nusselt du liquide.	109
5.2	Paramètres de contrôle des quatre essais DEBORA sélectionnés (Garnier <i>et al.</i> , 2001).	115
5.3	Erreurs relatives moyennes obtenues sur Π_c pour différents diamètres moyens par rapport aux résultats obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale.	119
5.4	Erreurs relatives moyennes obtenues sur Π_c avec le diamètre moyen d_{32} et les PDF Q2 et C2 par rapport aux résultats obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale.	121
8.1	Caractéristiques géométriques des différents maillages utilisés.	148
8.2	Temps CPU des calculs effectués pour le test de sensibilité en maillage.	150

C.1	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source CO_γ pour les modèles de coalescence PB90 (Prince et Blanch, 1990) et KCCF01 (Kamp <i>et al.</i> , 2001).	188
C.2	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990).	190
C.3	Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation hétérogène de Luo et Svendsen (1996) ($\mathcal{K}_{LS} = 0,25$).	194

Nomenclature

Commençons par quelques mots sur les conventions de notation adoptées dans ce document. Les vecteurs et tenseurs seront notés avec une famille de police grasse et leurs composantes avec une famille maigre : par exemple, si $\mathbf{v}$ désigne un vecteur quelconque, v_i désignera sa composante i .

Les principales notations qui seront rencontrées dans ce document ainsi que leur signification sont listées ci-dessous.

• Lettres latines

$\mathcal{A}$	aire par unité de surface	[–]
a_I	concentration d'aire interfaciale	[m ⁻¹]
a_k	diffusivité thermique de la phase k	[m ² ·s ⁻¹]
$\mathcal{B}$	coefficient de la fonction de distribution en taille expérimentale	
b	coefficient d'interpolation, coefficient de masse ajoutée	[–]
BU_γ	terme source de l'équation de transport de $\mathcal{M}_\gamma$ dû à la <i>fragmentation</i> de bulles	[m ^{γ-3}]
C	coefficient sans dimension	[–]
$\mathfrak{C}$	configuration de la population de bulles	
c	coefficient d'interpolation, paramètre du nombre de Nusselt	[–]
CO_γ	terme source de l'équation de transport de $\mathcal{M}_\gamma$ dû à la <i>coalescence</i> de bulles	[m ^{γ-3}]
C_{pk}	chaleur spécifique à pression constante de la phase k	[J·kg ⁻¹ ·°C ⁻¹]
d	diamètre de bulle	[m]
d_{10}	diamètre moyen arithmétique	[m]
d_{pq}	diamètre moyen tel que défini par (2.40)	[m]
D_n	diamètre de nucléation	[m]
d_{pq}	diamètre moyen tel que défini par (2.40)	[m]
$\mathcal{D}_k$	coefficient de diffusion moléculaire de la phase k	[m ³ ·s ⁻¹]
$\mathbf{e}_i$	vecteur de base i du système de coordonnées spatiales	[m]
e_k	énergie interne de la phase k	[J·kg ⁻¹]
$\check{e}$	énergie cinétique	[J]
$\tilde{e}$	énergie de surface	[J]
$\mathcal{F}$	fonction de densité de présence	
$\mathbf{F}$	force agissant sur une bulle	[N]
f_{BV}	fraction volumique de fragmentation	[–]
$\mathbf{g}, g$	accélération de la pesanteur et module correspondant	[m·s ⁻²]
$\mathcal{H}$	fonction de distribution expérimentale	

h	coefficient de transfert thermique	[W·m ⁻² ·°C ⁻¹]
$\bar{h}$	épaisseur de film interfacial	[m]
H_k	enthalpie totale moyenne pondérée par la masse de la phase k	[J·kg ⁻¹]
$\mathcal{I}$	intégrale	
I_k	enthalpie moyenne pondérée par la masse de la phase k	[J·kg ⁻¹]
i_k	enthalpie de la phase k	[J·kg ⁻¹]
$\mathcal{K}$	coefficient sans dimension	[–]
K_k	énergie cinétique turbulente de la phase k	[m ² ·s ⁻²]
$\mathcal{Q}_v$	chaleur latente de vaporisation	[J·kg ⁻¹]
$\mathbb{M}$	premier moment de la quantité de mouvement d’une bulle	[N·m]
$\mathbf{M}$	force moyenne agissant sur la toute la population de bulles	[N]
m	masse	[kg]
$\mathcal{M}_\gamma$	densité de moment en diamètre d’ordre γ de $\mathcal{F}$	[m ^{γ-3}]
$\mathbf{M}_k$	transfert interfacial moyen de quantité de mouvement de la phase k	[N]
$\dot{m}_k$	flux d’échange de masse par unité d’interface de la phase k	[kg·s ⁻¹ ·m ⁻²]
$\mathbf{n}$	vecteur normal unitaire	[m]
n	densité numérique de bulles	[m ⁻³]
N_b	nombre de bulles de la population	[–]
n_s	densité numérique de sites de nucléation actifs	[m ⁻²]
$\mathcal{P}$	fonction de densité de probabilité	
$\mathbf{p}$	dipôle de masse	[kg·m]
P	pression moyenne	[Pa]
p_k	pression locale instantanée régnant dans la phase k	[Pa]
$\tilde{p}$	pression du liquide vue par une bulle	[Pa]
Q	coefficient sans dimension	[–]
$\mathbf{q}_k$	flux de chaleur conductif dans la phase k	[W·m ⁻²]
$\dot{Q}_k$	source de chaleur volumique appliquée à la phase k	[J·m ⁻³ ·m ⁻¹]
$\mathbf{r}$	vecteur position relatif au centre d’une bulle	[m]
R	rayon de conduite	[m]
r	position radiale dans la conduite	[m]
$\mathcal{S}$	surface	[m ²]
t	temps	[s]
$\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{u}_i$	vitesse du liquide vu par une bulle et composante i correspondante	[m·s ⁻¹]
$\mathcal{V}$	volume	[m ³]
$\mathbf{v}_I$	vitesse de déplacement d’une interface	[m·s ⁻¹]
$\mathbf{V}_k, V_{k,i}$	vitesse moyenne phasique pondérée par la masse de la phase k et composante i correspondante	[m·s ⁻¹]
$\mathbf{v}_k, v_{k,i}$	vitesse locale instantanée de la phase k et composante i correspondante	[m·s ⁻¹]
$\mathbf{w}, w_i$	vitesse de translation du centre de masse d’une bulle et composante i correspondante	[m·s ⁻¹]
$\mathbf{W}, W_i$	vitesse moyenne de translation des bulles et composante i correspondante	[m·s ⁻¹]
$\bar{\mathbf{w}}$	vitesse caractéristique de bulle	[m·s ⁻¹]
$\mathbf{X}$	vecteur position lagrangien, trajectoire	[m]
$\mathbf{x}$	vecteur position	[m]
$\mathcal{X}$	vecteur d’état d’une bulle	

X_γ	variable géométrique d'ordre γ résolue par le code NEPTUNE_CFD, cf. (7.18)	$[m^\gamma \cdot kg^{-1}]$
$\mathbf{y}$	vecteur position lagrangien dans l'espace des phases	$[m]$

• **Lettres grecques**

α_k	taux de présence de la phase k	$[-]$
β	diamètre de bulle dans l'espace des phases	$[m]$
δ	distribution de Dirac	
ε_k	taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente de la phase k	$[m^2 \cdot s^{-3}]$
η	efficacité	$[-]$
Γ	taux de changement de phase moyen	$[kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}]$
ι	enthalpie d'une bulle	$[J \cdot kg^{-1}]$
Λ	échelle intégrale de la turbulence	$[m]$
λ_k	conductivité thermique de la phase k	$[W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C]$
μ_k	viscosité dynamique de la phase k	$[Pa \cdot s]$
ν_k	viscosité cinématique de la phase k	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
ω	mode d'oscillation d'une bulle	$[-]$
Φ	flux de chaleur	$[W]$
ϕ	fréquence	$[s^{-1}]$
Π	flux de chaleur moyen par unité de volume	$[W \cdot m^{-3}]$
ρ_k	masse volumique de la phase k	$[kg \cdot m^{-3}]$
σ	tension de surface	$[N \cdot m^{-1}]$
$\sigma_k, \sigma_{k,ij}$	tenseur des contraintes microscopiques de la phase k et composante ij correspondante	$[Pa]$
$\tilde{\sigma}$	écart type	$[m]$
τ	temps caractéristique	$[s]$
$\tau_k, \tau_{k,ij}$	tenseur des contraintes visqueuses de la phase k et composante ij correspondante	$[Pa]$
θ_k	température de la phase k	$[^\circ C]$
φ	fonction	
$\mathbf{S}, S_i$	vitesse de bulle dans l'espace des phases et coordonnée i correspondante	$[m \cdot s^{-1}]$
ξ, ξ_i	vecteur des coordonnées de phase interne et composante i correspondante	
ξ^*	ratio entre la taille d'une tourbillon et la taille d'une bulle	$[-]$
ζ	longueur capillaire	$[m]$

• **Indices**

α	label de bulle
b	bulle
c	phase continue
cel	cell, cellule du maillage
cr	critique
d	phase dispersée
δ	point dans la couche limite turbulente
e	eddy, tourbillon
eq	équivalent

<i>ext</i>	extérieur
<i>I</i>	interface
<i>int</i>	intérieur
<i>m</i>	mélange
<i>max</i>	maximal, maximum
<i>min</i>	minimal, minimum
**	polydisperse
<i>q</i>	<i>quenching</i> , conduction instationnaire
<i>rac</i>	raccord
<i>exp</i>	expérimental
<i>sat</i>	saturation
<i>t</i>	turbulent
<i>v</i>	vapeur, vaporisation
<i>w</i>	<i>wall</i> , paroi
<i>r, θ, z</i>	composantes en système de coordonnées circulaire

• Exposants

★	adimensionnel
'	fluctuation
<i>BU</i>	<i>break-up</i> , fragmentation
<i>CL</i>	collision
<i>CO</i>	coalescence
<i>D</i>	<i>drag</i> , traînée
<i>EA</i>	<i>eddy arrival</i> , arrivée de tourbillons
$\mathcal{E}$	eulérien
<i>L</i>	<i>lift</i> , portance
$\mathcal{L}$	lagrangien
<i>NU</i>	nucléation
<i>PC</i>	<i>phase change</i> , changement de phase
**	polydisperse
<i>T</i>	turbulent
<i>TD</i>	<i>turbulent dispersion</i> , dispersion turbulente
T	transposée
<i>VM</i>	<i>virtual mass</i> , masse ajoutée
<i>W</i>	<i>wall</i> , paroi

• Opérateurs mathématiques

$\mathbb{I}$	tenseur identité
$\hat{=}$	par définition égal à
$\cong$	quasiment égal à
$\approx$	approximativement égal à
$\frac{d}{dt}$	dérivée lagrangienne

$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle
$\frac{d_k}{dt}$	dérivée matérielle convectée par le mouvement de la phase k définie par $\frac{d_k \varphi}{dt} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \varphi$
$\frac{d_k}{dt}$	dérivée matérielle convectée par le mouvement de la phase k , définie par $\frac{d_k \varphi}{dt} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \varphi$
$\frac{D_k}{Dt}$	dérivée matérielle convectée par le mouvement moyen de la phase k définie par $\frac{D_k \varphi}{Dt} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V}_k \cdot \nabla \varphi$
$\frac{D_k}{Dt}$	dérivée matérielle convectée par le mouvement moyen de la phase k , définie par $\frac{D_k \varphi}{Dt} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V}_k \cdot \nabla \varphi$
$\nabla \cdot$	divergence
∇	gradient
$\langle . \rangle$	moyenne d'ensemble
$-\bar{k}$	moyenne phasique
$\cdot$	moyenne phasique pondérée par la masse
$\bar{\cdot}$	moyenne phasique pondérée par la masse
$\{ . \}$	moyenne de population
$\{ \cdot \}$	moyenne de population pondérée par la masse
$\otimes$	produit tensoriel
$\cdot$	produit tensoriel simplement contracté, produit scalaire
$:$	produit tensoriel doublement contracté
$\wedge$	produit vectoriel

• Nombres adimensionnels

Eo	nombre d'Eötvös, <i>cf.</i> (3.2)
Ja	nombre de Jakob, <i>cf.</i> (5.1)
Mo	nombre de Morton, <i>cf.</i> (3.4)
Nu	nombre de Nusselt, <i>cf.</i> (5.9)
Pr	nombre de Prandtl, <i>cf.</i> (5.8)
Re	nombre de Reynolds, <i>cf.</i> (3.1)
Sc	nombre de Schmidt, <i>cf.</i> (7.25)
Sn	nombre de Stanton, <i>cf.</i> (7.36)
St	nombre de Stokes, <i>cf.</i> (6.14)
We	nombre de Weber, <i>cf.</i> (4.2) et (4.7)

• Acronymes

CPU	<i>Central Processing Unit</i> , unité centrale de calcul
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i> , simulation numérique directe
DQMOM	<i>Direct Quadrature Method Of Moments</i> , méthode des moments à quadrature directe
C2	loi Cubique à 2 paramètres
LN	loi Log-Normale
Q1	loi Quadratique à 1 paramètre
Q2	loi Quadratique à 2 paramètres
NDF	<i>Number Density Function</i> , fonction de densité de présence
PDF	<i>Probability Density Function</i> , fonction de densité de probabilité
QMOM	<i>Quadrature Method Of Moments</i> , méthode des moments à quadrature
REP	Réacteur à Eau Pressurisé

Introduction

Les écoulements diphasiques, c'est-à-dire les écoulements où cohabitent deux phases, sont présents aussi bien dans la vie courante (boissons gazeuses, aérosols, fumées, etc) que dans de nombreux systèmes industriels (lits fluidisés, extraction pétrolière, systèmes de refroidissement, etc) ou naturels (écoulements sanguins, météorologie, érosion des sols, etc). La compréhension de ces écoulements est donc essentielle pour répondre aux demandes du monde industriel, par exemple à des problèmes de design, de dimensionnement ou de sûreté.

La grande famille des écoulements diphasiques regroupe des types d'écoulements très variés, allant des écoulements à phase dispersée, c'est-à-dire composés d'une phase continue dans laquelle évolue un ensemble d'inclusions, aux écoulements à phases séparées comme les écoulements stratifiés ou les écoulements à poches (cf. figure 1). Visés par cette étude, les écoulements à bulles font bien sûr partie de la première catégorie citée, la phase continue étant sous forme liquide et la phase dispersée sous forme gazeuse ; d'autres exemples d'écoulement diphasique à phase dispersée sont donnés dans le tableau 1.

Dans cette thèse on va s'intéresser plus particulièrement à la modélisation des écoulements bouillants à bulles, autrement dit des écoulements dont la phase dispersée est composée de bulles de vapeur créée par l'évaporation du liquide porteur. L'objectif de cette thèse est d'améliorer la modélisation de ce type d'écoulements, et ce à travers un axe de recherche particulier, à savoir la prise en compte du caractère *polydisperse* de la population de bulles, c'est-à-dire le fait que toutes les bulles n'aient *ni la même taille, ni la même vitesse*.

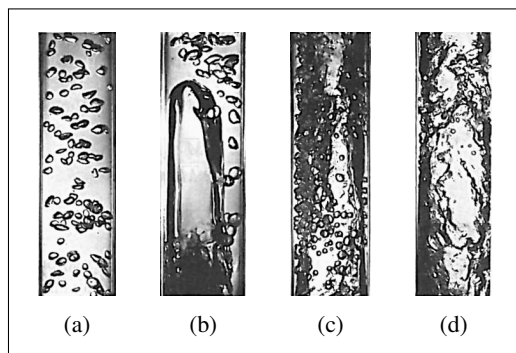


FIG. 1 – Exemples d'écoulements eau/air cocourants ascendants dans un tube vertical (reproduction de Roumy, 1969) : (a) écoulement à bulles, (b) écoulement à poches, (c) écoulement pulsatile, (d) écoulement annulaire dispersé.

Phase continue	Phase dispersée	Dénomination
Liquide	Gaz	Bouillon, mousse
	Liquide	Émulsion
	Solide	Suspension, boue
Gaz	Liquide	Aérosol, spray, brouillard, nuage
	Solide	Aérosol, suspension, fumée, lit fluidisé

TAB. 1 – Exemples d'écoulement diphasique à phase dispersée (adapté d'Oesterlé, 2006).

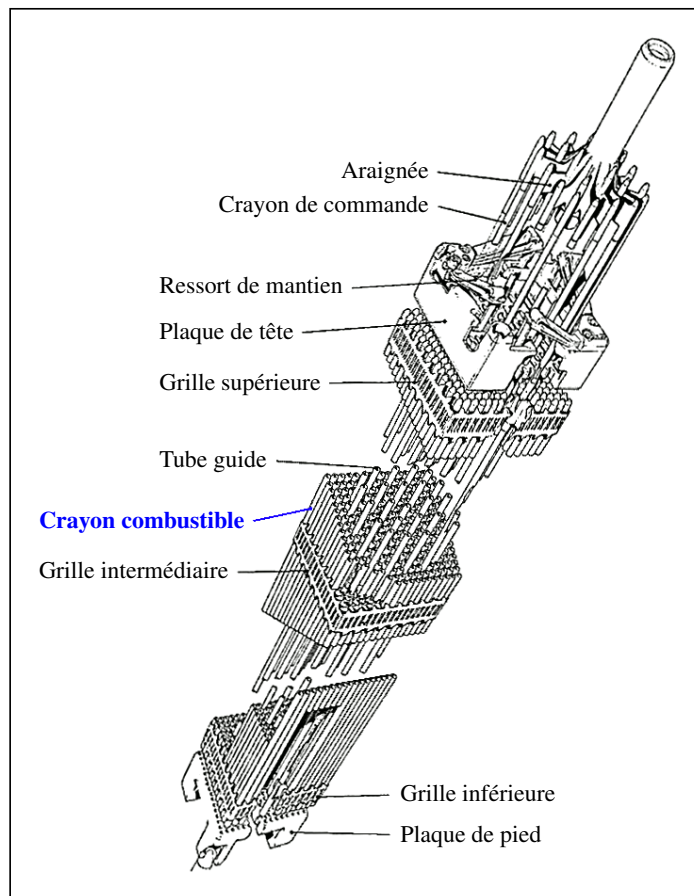


FIG. 2 – Assemblage 17 × 17 d'un réacteur à eau pressurisé (adapté de Delhay, 2008).

Contexte de l'étude

Cette thèse fait partie intégrante d'un projet à long terme, le projet NEPTUNE, un projet quadripartite impliquant les quatre acteurs majeurs du nucléaire civil en France, à savoir le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives), EDF, l'IRSN (Institut Radioprotection et de Sécurité Nucléaire) et AREVA-NP. L'objectif de ce projet est de développer les outils numériques multi-échelles et multi-physiques pour la modélisation et la simulation des réacteurs nucléaires de prochaine génération, aussi bien pour les études de conception que les études de sûreté (cf. Guelfi *et al.*, 2007).

L'étude des écoulements bouillants est d'une grande importance dans le cadre des études de sûreté des réacteurs nucléaires du type Réacteur à Eau Pressurisé (REP). En effet, en cas de dépressurisation accidentelle de la cuve du réacteur, le liquide caloporteur peut se mettre à bouillir au voisinage des crayons combustibles. Si une faible ébullition contrôlée permet d'extraire plus de chaleur des crayons combustibles (transformation du flux de chaleur en paroi en chaleur latente de vaporisation), une trop forte ébullition peut entraîner l'isolation des crayons combustibles sous un film de vapeur et ainsi empêcher leur refroidissement : c'est ce qu'on appelle la *crise d'ébullition*. La conductivité thermique de la vapeur étant nettement inférieure à celle du liquide, les crayons emprisonnés sous un film de vapeur ne sont plus refroidis si bien qu'ils peuvent être amenés à fondre, entraînant ainsi une aggravation de l'accident. On

comprend donc bien le besoin qu'ont les concepteurs et les exploitants de centrales nucléaires à mieux comprendre et prédire l'évolution des écoulements bouillants dans les canaux verticaux.

Dans cette thèse, on se restreindra à l'étude des écoulements bouillants à bulles dans des configurations proches de celles d'un sous-canal d'assemblage de crayons combustibles (cf. figure 2). Pour ce faire, on tentera de reproduire par la simulation numérique l'expérience DEBORA développée au CEA Grenoble (cf. Garnier *et al.*, 2001). Dédiée à l'étude des écoulements bouillants sous-saturés, cette expérience consiste en un tube vertical dont une partie de la paroi est chauffée par effet Joule afin de mener à ébullition le liquide s'écoulant de manière ascendante dans la conduite. Le fréon R-12 a été choisi comme fluide simulant, afin de reproduire les conditions d'écoulement dans un sous-canal du cœur d'un REP (c'est-à-dire une pression d'environ 150 bar et une température d'environ 300 °C), mais à plus basse pression et plus basse température, ces deux grandeurs n'excédant pas 30 bar et 100 °C respectivement.

Modélisation des écoulements diphasiques

La principale difficulté rencontrée dans la modélisation des écoulements à bulles, et plus généralement des écoulements diphasiques, réside dans les sauts de discontinuité que subissent les grandeurs physiques au passage des différentes interfaces. Pour traiter correctement ces discontinuités, deux niveaux de modélisation peuvent être envisagés.

Un premier moyen de modéliser un milieu diphasique est la *simulation numérique directe* (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation* en anglais) qui consiste à résoudre directement les équations locale instantanées et les différentes conditions de saut du milieu diphasique. Tous les détails de l'écoulement, aussi bien dans l'espace que le temps, sont ainsi *résolus numériquement*. La contrepartie d'une telle précision dans la description du milieu diphasique est malheureusement un coût numérique très élevé. Malgré l'amélioration récente des moyens de calcul et le haut degré de maturité atteint par les méthodes numériques actuelles, il est toujours peu envisageable de simuler des configurations industrielles complexes à l'aide de la DNS.

Une deuxième façon de modéliser un milieu diphasique est de le décrire en terme de grandeurs moyennes. L'emploi d'un *modèle moyenné* permet de réduire considérablement le temps de calcul et, bien que seules les grandes échelles soient résolues, le degré de précision d'un tel modèle est généralement suffisant pour beaucoup d'applications industrielles. La difficulté n'étant plus d'ordre numérique, elle est déplacée vers les fermetures. De nombreux modèles sont en effet nécessaires pour retrouver les informations perdues lors du processus de moyenne, notamment concernant la géométrie des interfaces et les interactions entre phases. La modélisation moyennée des écoulements diphasiques a fait l'objet de nombreux développements ces cinquante dernières années, le modèle le plus communément utilisé étant sans doute le *modèle à deux fluides* (p. ex. Ishii, 1975) de par son potentiel à décrire une large gamme d'écoulements diphasiques allant des écoulements à phase dispersée aux écoulements à phases séparées.

L'échelle de résolution choisie pour cette thèse est l'*échelle moyennée via* le modèle à deux fluides, l'objectif à terme étant d'obtenir un modèle tridimensionnel simple à mettre en œuvre et efficace numériquement pour modéliser toutes sortes de configurations et de géométries complexes d'écoulements à bulles.

Motivations de la prise en compte de la polydispersion

Comme énoncé précédemment, l'axe principal d'amélioration de la modélisation des écoulements à bouillants à bulles choisi dans cette thèse est la prise en compte de la polydispersion en taille et en vitesse

des populations de bulles étudiées. On peut donc légitimement se poser la question de la pertinence d'un tel effort de modélisation.

La première réponse à cette question est évidente : dans la réalité, les différentes bulles d'une population n'ont que très rarement la même taille ou la même vitesse. Par exemple, des bulles peuvent entrer en collision et fusionner pour donner des bulles plus grosses (c'est ce qu'on appelle la *coalescence* de bulles) et, de façon symétrique, elles peuvent également être amenées à se rompre en plusieurs fragments sous l'action des contraintes du liquide. Si l'on considère en outre le changement de phase, selon l'environnement dans lequel une bulle se trouve (température et pression du liquide environnant) celle-ci peut se condenser plus ou moins vite que ses voisines. De cette polydispersion en taille découle également une polydispersion en vitesse puisqu'il est bien connu que la vitesse de déplacement d'une bulle dépend de sa taille, notamment à travers la force de traînée. En complément, la turbulence peut bien évidemment également jouer un rôle dans cette polydispersion en vitesse.

Une utilisation maintenant classique du modèle à deux fluides est de coupler ses équations à une équation de bilan sur la concentration d'aire interfaciale (Yao et Morel, 2004), équation permettant de déterminer le diamètre moyen de Sauter des bulles. Toutes les bulles étant supposées pouvoir être caractérisées par ce diamètre moyen, ce dernier est alors injecté dans les différentes relations de fermeture. On obtient ainsi une description *monodisperse*¹ de la population de bulles.

Si ce type de modélisation est largement utilisé, il n'en reste pas moins assez limité lorsque l'on veut traiter certains phénomènes d'échanges entre phases. Par exemple, il est bien connu que la force de portance change de signe avec la taille de bulle (cf. Tomiyama, 1998) ; l'utilisation d'un diamètre moyen unique ne pourra donc capter le comportement global d'une population de bulles dont le spectre de taille est à cheval sur les différents régimes de portance. De plus, les phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles étant polydispersés par nature, la prise en compte d'un spectre de tailles de bulles plutôt qu'un unique diamètre moyen permet de traiter beaucoup plus naturellement ces deux phénomènes. Un dernier argument en faveur de la prise en compte de la polydispersion d'une population de bulles concerne la durée de vie des bulles de vapeur dans un liquide sous-saturé : les petites bulles vont disparaître plus rapidement que les bulles les plus grosses, si bien que le diamètre moyen des bulles peut finalement augmenter alors qu'une modélisation monodisperse verrait le diamètre moyen forcément diminuer.

Pour toutes ces raisons, une prise en compte de la variété des tailles et des vitesses des bulles apparaît comme un vecteur d'amélioration important pour la modélisation des écoulements bouillants à bulles.

Plan du manuscrit

Le manuscrit de cette thèse s'articule autour de trois parties. Dans une première partie, on présentera les équations de notre modèle moyenné polydisperse. Le premier chapitre présentera les équations de bilan moyennes régissant un écoulement diphasique *dispersé*. Une approche originale sera proposée afin de tirer au maximum parti des spécificités de ce type d'écoulement. On abordera ensuite dans le chapitre 2 comment prendre en compte les différentes tailles et vitesses des bulles. On verra ainsi comment intégrer le caractère polydisperse d'une population de bulles dans les différentes quantités moyennes introduites au premier chapitre. La méthode d'obtention de l'évolution spatio-temporelle du spectre des tailles et vitesses de bulles sera ensuite présentée.

1. La population réelle reste *polydisperse*, c'est sa représentation à travers le seul diamètre de Sauter que l'on qualifie de *monodisperse*.

La deuxième partie de ce manuscrit traitera des différentes fermetures à apporter à notre modèle pour pouvoir représenter efficacement les écoulements bouillants sous-saturés, le tout en prenant autant que possible en compte le caractère polydisperse de la population de bulles. Seront ainsi abordés successivement les fermetures des forces hydrodynamiques moyennes (chapitre 3), des phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles (chapitre 4), des différents termes liés au changement de phase (chapitre 5) et enfin des contributions spécifiques à la polydispersion en vitesse des bulles (chapitre 6).

Enfin, dans une troisième partie, le modèle polydisperse sera testé et validé grâce à la simulation numérique. Le chapitre 7 présentera l'implantation de notre modèle dans le code de calcul NEPTUNE_CFD utilisé pour cette étude, ainsi que les modèles de fermeture propres à ce code. Le dernier chapitre de cette thèse portera quant à lui sur la modélisation de l'expérience DEBORA avec notre modèle polydisperse ; différentes fermetures proposées dans les chapitres précédents seront testées et le modèle polydisperse sera confronté à d'autres modèles disponibles dans NEPTUNE_CFD.

Références

- DELHAYE, J.-M. : *Thermohydraulique des Réacteurs*. Collection Génie Atomique. EDP Sciences, 2008.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- GUELF, A., BESTION, D., BOUCKER, M., BOUDIER, P., FILLION, P., GRANDOTTO, M., HERARD, J.-M., HERVIEU, E. et PETURAUD, P. : NEPTUNE: A new software platform for advanced nuclear thermal hydraulics. *Nuclear Science and Engineering*, 156(3):281–324, 2007. ISSN 0029-5639.
- ISHII, M. : *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- OESTERLÉ, B. : *Écoulements Multiphasiques – Des fondements aux méthodes d'ingénierie*. Lavoisier. Hermes Science Publication, 2006.
- ROUMY, R. : Structure des écoulements diphasiques eau-air. Étude de la fraction de vide moyenne et des configurations d'écoulement. Rapport technique R-3892, CEA, 1969.
- TOMIYAMA, A. : Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, 10(4):369–405, 1998.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.

Première partie

DESCRIPTION POLYDISPERSE DES ÉCOULEMENTS À BULLES

Chapitre 1

Modélisation moyennée des écoulements dispersés

Les écoulements à bulles font partie de la famille des écoulements diphasiques à phase dispersée, c'est-à-dire des écoulements composés d'une phase continue, ou phase porteuse, dans laquelle évoluent des éléments discrets (gouttes, bulles ou particules solides), l'ensemble formé par les deux phases étant appelé *suspension*. La modélisation moyennée d'un tel milieu peut être envisagée de deux façons.

La première est de modéliser le milieu diphasique avec un modèle moyenné général, le modèle le plus communément utilisé étant sans aucun doute le *modèle à deux fluides* (Ishii, 1975 ; Nigmatulin, 1991 ; Drew et Passman, 1999). Dans ce type de modèle, toute l'information concernant la topologie des interfaces est perdue et doit être prise en compte par l'intermédiaire de modèles de fermeture. En fonction des lois de fermetures choisies, le modèle à deux fluides va donc pouvoir décrire une large gamme d'écoulements diphasiques : les écoulements à bulles bien sûr, mais aussi les écoulements à phases séparées ou tout autre configuration d'écoulement intermédiaire.

Par rapport à la multitude des types d'écoulements diphasiques, les écoulements à phase dispersée présentent cependant la particularité d'avoir une topologie des interfaces simple et connue à l'avance si toutes les inclusions ont et gardent une forme similaire (p. ex. sphérique). Cette particularité permet de traiter la population d'inclusions avec une approche statistique analogue à la théorie cinétique des gaz : les molécules d'un gaz agitées thermiquement sont alors remplacées par des inclusions entourées d'un fluide. L'utilisation d'une telle approche pour traiter la phase dispersée est largement abordée dans la littérature ; sans être exhaustif, on peut ainsi citer les travaux de Buyevich (1971), Achard (1978), Reeks (1980), Derevich et Zaichik (1990), Lhuillier (1992), Zhang et Prosperetti (1994a,b) et Simonin (1996). Si l'approche particulière, ou *approche particulière*, permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système, elle ne peut malheureusement être appliquée qu'à la phase dispersée, la phase porteuse ne pouvant être traitée qu'avec le modèle à deux fluides.

Dans ce premier chapitre, on se propose d'écrire un modèle moyenné *spécialement adapté au traitement des écoulements à phase dispersée*. Basé sur les équations du modèle à deux fluides, ce modèle moyenné pourra être qualifié d'*hybride* puisqu'il fera également intervenir des termes moyens issus d'une approche particulière appliquée à la phase dispersée. Avant de passer à la présentation de ce modèle dans la section 1.3, on présentera dans la section 1.1 l'obtention des équations du modèle à deux fluides ; la dérivation des équations de la phase dispersée obtenue avec l'approche particulière sera quant à elle présentée à la section 1.2.

Un dernier mot sur le vocabulaire utilisé dans ce document ; cette étude portant sur les écoulements à bulles, ce dernier terme sera systématiquement employé pour désigner les inclusions formant la phase dispersée. Plus généralement, on désignera par "liquide" la phase porteuse et "gaz" la phase dispersée. On gardera toutefois en mémoire que les équations présentées dans ce chapitre resteront assez générales pour pouvoir traiter les autres types de suspensions.

1.1 Modélisation moyennée d'un milieu diphasique : le modèle à deux fluides

Penchons-nous tout d'abord sur l'écriture du modèle à deux fluides. Dans le formalisme de ce modèle, le milieu diphasique est vu comme la superposition de deux fluides continus, coexistants et s'interpénétrant, un système de trois équations de bilan moyennées (masse, quantité de mouvement et énergie) étant résolu pour chaque phase.

L'obtention des équations du modèle à deux fluides est basée sur la combinaison de trois "ingrédients" :

- a) les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie valables dans chaque phase ainsi que des conditions de saut aux interfaces ;
- b) une fonction indicatrice de phase χ_k associée à la phase k ;
- c) un opérateur de moyenne d'ensemble.

Avant de passer à la présentation des équations du modèle à deux fluides, nous détaillerons en premier lieu en quoi consistent ces trois "ingrédients".

1.1.1 Équations locales instantanées

Ce paragraphe présente les équations locales instantanées d'un milieu diphasique, c'est-à-dire les équations de bilan valables en tout point et à tout instant à l'intérieur de chacune des deux phases ainsi que les équations de saut valables sur les interfaces séparant les deux phases. La dérivation générale de ces équations peut être trouvée dans un grand nombre d'ouvrages et ne sera que brièvement présentée ici ; citons par exemple les travaux de Delhaye (1974, 1981), Drew et Passman (1999) ou encore d'Ishii (1975) et Ishii et Hibiki (2006).

Notons que les dépendances en $\mathbf{x}$ et en t seront omises ici dans un souci d'allègement de la notation ; il en sera de même dans tout le document tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

• Bilan de masse

L'équation de bilan locale instantanée portant sur la masse de la phase k et valable uniquement dans cette phase prend la forme :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (1.1)$$

où ρ_k et $\mathbf{v}_k$ désignent respectivement la masse volumique et la vitesse locale instantanée de la phase k . Cette équation étant valable uniquement dans la phase k , on a besoin d'une condition de saut valable

sur les interfaces pour pouvoir décrire l'évolution de la masse dans tout l'écoulement ; dans le cas d'une interface sans masse celle-ci s'écrit :

$$\sum_{k=c,d} \dot{m}_k = 0 \quad (1.2)$$

avec $\dot{m}_k$ le flux d'échange de masse par unité d'interface de la phase k :

$$\dot{m}_k \triangleq \rho_k (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_k \quad (1.3)$$

$\mathbf{v}_I$ étant la vitesse locale de l'interface et $\mathbf{n}_k$ un vecteur unitaire normal à l'interface et dirigé vers l'extérieur de la phase k ($\mathbf{n}_c \triangleq \mathbf{n}_d$).

• Bilan de quantité de mouvement

L'équation de bilan locale instantanée portant sur la quantité de mouvement de la phase k exprime le principe fondamental de la dynamique et s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) = -\nabla p_k + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_k + \rho_k \mathbf{g} \quad (1.4)$$

où p_k correspond à la pression régnant dans la phase k , $\boldsymbol{\tau}_k$ au tenseur des contraintes visqueuses de la phase k et $\mathbf{g}$ à l'accélération de la pesanteur. Pour une interface ne possédant *ni quantité de mouvement*, *ni contraintes dues à la tension de surface*, la condition de saut aux interfaces s'écrit :

$$\sum_{k=c,d} \left[\dot{m}_k \mathbf{v}_k - p_k \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \right] = 0. \quad (1.5)$$

• Bilans d'énergie

Différentes équation de bilan d'énergie peuvent être écrites. Commençons par celle qui exprime le premier principe de la thermodynamique, à savoir l'équation de bilan portant sur l'énergie totale de la phase k , grandeur définie comme la somme de l'énergie interne e_k et de l'énergie cinétique de la phase k :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left(\rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \mathbf{v}_k \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_k - \nabla \cdot (p_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{v}_k) + \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{g} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{q}_k$ désigne le flux de chaleur dans la phase k . Les deux avant-derniers termes du second membre de ce bilan traduisent les flux d'énergie associés à la pression et aux contraintes visqueuses.

Une équation de bilan portant sur l'énergie cinétique de la phase k peut facilement être écrite en multipliant scalairement l'équation de quantité de mouvement (1.4) par la vitesse $\mathbf{v}_k$; on obtient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_k \frac{v_k^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho_k \frac{v_k^2}{2} \mathbf{v}_k \right) = -\mathbf{v}_k \cdot \nabla p_k + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{v}_k) - \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \mathbf{v}_k + \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{g}. \quad (1.7)$$

En soustrayant ce dernier bilan à l'équation (1.6), on obtient finalement une équation de bilan sur l'énergie interne e_k de la phase k :

$$\frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k e_k \mathbf{v}_k) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_k - p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \mathbf{v}_k. \quad (1.8)$$

Quelques mots sur la condition de saut d'énergie ; *en l'absence de toute forme d'énergie de surface et de contraintes superficielles*, celle-ci prend la forme (Delhay, 1974 ; Kataoka, 1986) :

$$\sum_{k=c,d} \left[\dot{m}_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) - p_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k - \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \right] = 0. \quad (1.9)$$

On notera qu'il s'agit d'une condition de saut sur l'énergie totale. Pour obtenir une condition de saut sur l'énergie interne il faudrait éliminer de (1.9) tous les termes faisant intervenir la vitesse avec l'aide de la condition de saut (1.5).

Introduisons à présent l'*enthalpie* de la phase k , notée i_k , et définie par (Delhay, 1981) :

$$i_k \triangleq e_k + \frac{p_k}{\rho_k}. \quad (1.10)$$

Son équation de bilan peut être aisément déterminée à partir de (1.8) :

$$\frac{\partial \rho_k i_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k i_k \mathbf{v}_k) = - \nabla \cdot \mathbf{q}_k + \frac{\partial p_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla p_k + \boldsymbol{\tau}_k : \nabla \mathbf{v}_k. \quad (1.11)$$

Sous les mêmes conditions que précédemment, la condition de saut sur i_k s'écrit :

$$\sum_{k=c,d} \left[\dot{m}_k \left(i_k + \frac{(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_I)^2}{2} + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_I) - \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \right) \right] = 0. \quad (1.12)$$

Dans la suite du document on verra que l'on peut supposer le changement de phase à l'interface des bulles comme principalement piloté par les échanges de chaleur. Les termes d'énergie mécanique pouvant dans ce cas être négligés devant les flux de chaleur et la chaleur latente de vaporisation, la condition de saut d'enthalpie peut être réduite à la relation suivante (p. ex. Achard, 1978 ; Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\sum_{k=c,d} \left[\dot{m}_k i_k - \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \right] \cong 0. \quad (1.13)$$

1.1.2 Fonction indicatrice de phase

Dans un écoulement diphasique, la configuration des deux phases évolue dans le temps et dans l'espace. À un instant t , un point fixé du domaine de vecteur position $\mathbf{x}$ voit défiler successivement chacune des deux phases. On définit la fonction indicatrice de phase χ_k associée à la phase k telle que :

$$\chi_k(\mathbf{x}, t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente au point courant } (\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.14a)$$

χ_k est donc une fonction binaire et vérifie de ce fait les propriétés suivantes :

$$\sum_{k=c,d} \chi_k(\mathbf{x}, t) = 1 \quad (1.15a)$$

$$\chi_k^n(\mathbf{x}, t) = \chi_k(\mathbf{x}, t) \quad (1.15b)$$

$$\chi_1(\mathbf{x}, t) \chi_2(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.15c)$$

Si l'on considère que les interfaces sont d'épaisseur nulle, la fonction indicatrice de phase présente une discontinuité au passage de ces interfaces. En conséquence, le gradient de χ_k ne peut être différent de

zéro qu'à cet endroit, ce qui permet d'écrire (Kataoka, 1986 ; Drew et Passman, 1999) :

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_k \delta_I \quad (1.16a)$$

où δ_I est la *fonction indicatrice des interfaces*, c'est-à-dire une *distribution de Dirac*¹ ayant pour support les différentes interfaces du milieu diphasique,² et $\mathbf{n}_k$ représente la normale à l'interface dirigée vers l'extérieur de la phase k ($\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$).

La fonction indicatrice de phase χ_k vérifie également l'équation topologique suivante (Kataoka, 1986 ; Drew et Passman, 1999) :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_I \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (1.16b)$$

où $\mathbf{v}_I$ désigne la vitesse d'un point de l'interface. Cette relation caractérise simplement le fait que l'on reste dans la même phase lorsque l'on se déplace à la vitesse de l'interface.

1.1.3 Opérateur de moyenne d'ensemble

Définissons à présent l'opérateur de moyenne dont nous allons nous servir pour moyenner les équations locales instantanées présentées au paragraphe précédent.

Notons φ une variable physique quelconque. La moyenne d'ensemble de cette variable, notée $\langle \varphi \rangle$, est définie comme sa moyenne statistique sur un grand nombre de réalisations du phénomène étudié (Sagaut, 1998) :

$$\langle \varphi \rangle \triangleq \lim_{N_{\mathcal{E}} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{\mathcal{E}}} \sum_{m=1}^{N_{\mathcal{E}}} \varphi^{(m)} \quad (1.17)$$

où $N_{\mathcal{E}}$ désigne le nombre de réalisations. L'opérateur de moyenne d'ensemble utilisé dans la suite du document sera supposé vérifier différentes propriétés, connues sous le nom d'axiomes de Reynolds. Pour deux variables quelconques φ et ψ , ces propriétés sont (Sagaut, 1998) :

a) la linéarité :

$$\langle \varphi + \psi \rangle = \langle \varphi \rangle + \langle \psi \rangle \quad (1.18a)$$

$$\langle \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi \rangle \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante} \quad (1.18b)$$

b) l'idempotence :

$$\langle \langle \varphi \rangle \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \langle \psi \rangle \quad (1.19a)$$

$$\langle \langle \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi \rangle \quad (1.19b)$$

c) la commutativité avec les opérateurs de dérivation et d'intégration :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} \quad (1.20a)$$

1. On rappelle la définition de la *distribution de Dirac* δ (Schwartz, 1965) : $\int \delta(x - x_0) \varphi(x) dx \triangleq \varphi(x_0)$.

2. δ_I est donc nulle partout sauf sur les interfaces ; cette distribution peut être assimilée à une *concentration d'aire interfaciale locale instantanée* (Kataoka, 1986).

$$\langle \nabla \varphi \rangle = \nabla \langle \varphi \rangle \quad (1.20b)$$

$$\left\langle \iint \varphi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \right\rangle = \iint \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (1.20c)$$

On définit également la notion de fluctuation $\varphi'^{(m)}$ associée à la réalisation $\varphi^{(m)}$ comme l'écart à la valeur moyenne :

$$\varphi'^{(m)} \triangleq \varphi^{(m)} - \langle \varphi \rangle. \quad (1.21a)$$

Dans le cas d'un opérateur de Reynolds, la moyenne de la fluctuation est nulle par définition :

$$\langle \varphi'^{(m)} \rangle \triangleq 0. \quad (1.21b)$$

Si l'opérateur de moyenne d'ensemble est très général, il n'est cependant pas très adapté à la mesure expérimentale. Il peut néanmoins être remplacé en invoquant l'hypothèse d'*ergodicité*, soit par une moyenne temporelle locale dans le cas d'un écoulement stationnaire, soit par une moyenne spatiale instantanée dans le cas d'un écoulement homogène.

1.1.4 Taux de présence et moyennes phasiques

Définissons maintenant le *taux de présence* de la phase k comme la moyenne de la fonction indicatrice de la phase correspondante :

$$\alpha_k \triangleq \langle \chi_k \rangle \quad (1.22a)$$

$$\alpha_c = 1 - \alpha_d. \quad (1.22b)$$

α_k correspond donc à la probabilité de trouver la phase k au point courant. En moyennant les relations topologiques (1.16), on obtient facilement les dérivées sur α_k :

$$\nabla \alpha_k = - \langle \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \langle \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle. \quad (1.23b)$$

À partir de la notion de taux de présence de la phase k , on peut définir la moyenne phasique d'une quantité φ_k attachée à la phase k , c'est-à-dire la moyenne conditionnée par la présence de la phase k :

$$\overline{\varphi_k}^k \triangleq \frac{\langle \chi_k \varphi_k \rangle}{\langle \chi_k \rangle} = \frac{\langle \chi_k \varphi_k \rangle}{\alpha_k}. \quad (1.24)$$

Une moyenne phasique pondérée par la masse, appelée *moyenne de Favre*, peut également être définie sur le même principe que la moyenne phasique (1.24) :

$$\overline{\varphi_k}^k \triangleq \frac{\langle \chi_k \rho_k \varphi_k \rangle}{\langle \chi_k \rho_k \rangle} = \frac{\overline{\rho_k \varphi_k}^k}{\overline{\rho_k}^k}. \quad (1.25)$$

Notons que ces nouveaux opérateurs de moyenne *ne peuvent être simplement permutés* avec les opérateurs de dérivation comme c'est le cas pour l'opérateur de moyenne d'ensemble.

1.1.5 Équations moyennes du modèle à deux fluides

L'obtention des équations moyennes du modèle à deux fluides se résume à multiplier les équations de bilan locales instantanées (1.1), (1.4) et (1.11) par la fonction indicatrice de phase χ_k , puis, après avoir tenu compte des relations topologiques (1.16), d'appliquer aux équations résultantes l'opérateur de moyenne d'ensemble défini à la section 1.1.3.

Les conditions de saut moyennes, ou conditions de saut macroscopiques, sont obtenues quant à elles en multipliant les conditions de saut locales instantanées (1.2), (1.5) et (1.13) par la fonction indicatrice des interfaces δ_I , puis en prenant la moyenne d'ensemble des équations résultantes.

• Bilans moyens de masse

En procédant comme indiqué ci-dessus, la condition de saut (1.2) se met sous la forme :

$$\sum_{k=c,d} \langle \dot{m}_k \delta_I \rangle = 0 \quad (1.26)$$

et les équation de bilan moyennes portant sur la masse s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_c \rho_c \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \rangle = - \langle \dot{m}_d \delta_I \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle = \langle \dot{m}_d \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (1.27a)$$

$$\quad (1.27b)$$

où les indices c et d désignent respectivement les phases continue et dispersée.

• Bilans moyens de quantité de mouvement

L'équation de bilan moyenne portant sur la quantité de mouvement s'écrit quant à elle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \rangle = - \nabla \langle \chi_k p_k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_k \boldsymbol{\tau}_k \rangle + \langle \chi_k \rho_k \rangle \mathbf{g} + \mathbf{M}_k \quad (1.28)$$

avec $\mathbf{M}_k$ le transfert interfacial moyen de quantité de mouvement, défini tel que :

$$\mathbf{M}_k \triangleq \langle \dot{m}_k \mathbf{v}_k \delta_I \rangle - \langle p_k \mathbf{n}_k \delta_I \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle. \quad (1.29)$$

La première contribution à ce transfert interfacial, à savoir $\langle \dot{m}_k \mathbf{v}_k \delta_I \rangle$, correspond à l'échange moyen de quantité de mouvement dû au changement de phase ; elle est souvent appelée *force de recul*. Les deux autres termes correspondent aux forces interfaciales moyennes dues respectivement aux contraintes de pression et visqueuses. En introduisant le tenseur des contraintes microscopiques $\boldsymbol{\sigma}_k \triangleq -p_k \mathbb{1} + \boldsymbol{\tau}_k$, ces deux contributions peuvent être regroupées sous un même terme :

$$- \langle p_k \mathbf{n}_k \delta_I \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle. \quad (1.30)$$

La condition de saut macroscopique de la quantité de mouvement s'écrit quant à elle :

$$\sum_{k=c,d} \left[\langle \dot{m}_k \mathbf{v}_k \delta_I \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \right] = 0. \quad (1.31)$$

On aboutit finalement au couple suivant d'équations de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \otimes \mathbf{v}_c \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_c \boldsymbol{\sigma}_c \rangle + \langle \chi_c \rho_c \rangle \mathbf{g} - \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle - \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \otimes \mathbf{v}_d \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_d \boldsymbol{\sigma}_d \rangle + \langle \chi_d \rho_d \rangle \mathbf{g} + \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle + \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (1.32a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \otimes \mathbf{v}_c \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_c \boldsymbol{\sigma}_c \rangle + \langle \chi_c \rho_c \rangle \mathbf{g} - \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle - \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \otimes \mathbf{v}_d \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_d \boldsymbol{\sigma}_d \rangle + \langle \chi_d \rho_d \rangle \mathbf{g} + \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle + \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (1.32b)$$

On notera que dans les termes représentant les échanges de quantité de mouvement on a privilégié les quantités $(\mathbf{v}_c, \boldsymbol{\sigma}_c)$ relatives à la phase continue de façon à mettre en évidence le rôle joué par la phase porteuse sur les bulles. Ces échanges font ainsi intervenir la force exercée par la phase continue sur les interfaces ainsi qu'une force liée aux échanges de masse entre les phases.

• Bilans moyens d'énergie

Choisissons à présent l'enthalpie pour caractériser l'énergie de notre milieu diphasique. La condition de saut simplifiée (1.13) devient après moyenne :

$$\sum_{k=c,d} \left[\langle \dot{m}_k i_k \delta_I \rangle - \langle \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \right] \cong 0. \quad (1.33)$$

Après application du processus de moyenne à l'équation locale instantanée d'enthalpie (1.11), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_c \rho_c i_c \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_c \rho_c i_c \mathbf{v}_c \rangle \\ = -\nabla \cdot \langle \chi_c \mathbf{q}_c \rangle + \left\langle \chi_c \frac{d_c p_c}{dt} \right\rangle + \langle \chi_c \boldsymbol{\tau}_c : \nabla \mathbf{v}_c \rangle - \langle \dot{m}_d i_c \delta_I \rangle + \langle \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (1.34a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d i_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d i_d \mathbf{v}_d \rangle \\ = -\nabla \cdot \langle \chi_d \mathbf{q}_d \rangle + \left\langle \chi_d \frac{d_d p_d}{dt} \right\rangle + \langle \chi_d \boldsymbol{\tau}_d : \nabla \mathbf{v}_d \rangle + \langle \dot{m}_d i_c \delta_I \rangle - \langle \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (1.34b)$$

où pour représenter les échanges d'énergie la condition de saut approchée (1.33) a été directement prise en compte de façon à privilégier les quantités $(\mathbf{q}_c, \mathbf{v}_c, \boldsymbol{\sigma}_c)$ relatives à la phase continue. Ces échanges font intervenir le flux de chaleur transmis par la phase continue à travers les interfaces des bulles ainsi qu'un échange d'énergie lié aux échanges de masse entre les phases.

Dans ces deux équations on a également introduit la notation suivante pour la dérivée matérielle microscopique :

$$\frac{d_k \varphi}{dt} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \varphi. \quad (1.35)$$

• Équations topologiques moyennes

Taux de présence phasique

Le taux de présence α_k étant défini comme la moyenne d'ensemble de la fonction indicatrice de phase χ_k (cf. équation 1.22a), on peut déterminer une équation de bilan portant sur α_k en moyennant les relations topologiques (1.16). Aussi, on obtient après quelques manipulations :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi_k \mathbf{v}_k \rangle = \langle \chi_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k \rangle + \left\langle \frac{\dot{m}_k}{\rho_k} \delta_I \right\rangle. \quad (1.36)$$

Si la phase k est incompressible cette équation se réduit à :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi_k \mathbf{v}_k \rangle = \frac{\langle \dot{m}_k \delta_I \rangle}{\rho_k} \quad (1.37)$$

équation que l'on peut également retrouver à partir du bilan moyen de masse (1.27b) puisque pour une phase incompressible le bilan de masse se réduit à un simple bilan de volume.

Concentration d'aire interfaciale

Certains auteurs introduisent également une équation de bilan portant sur la concentration d'aire interfaciale a_I (p. ex. Drew et Passman, 1999 ; Delhay, 2001 ; Morel, 2007), définie comme la moyenne de la distribution des interfaces :

$$a_I \triangleq \langle \delta_I \rangle. \quad (1.38)$$

Morel (2007) propose l'équation de bilan suivante :

$$\frac{\partial a_I}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_I \delta_I \rangle = \langle \nabla_s \cdot \mathbf{v}_I \delta_I \rangle. \quad (1.39)$$

Cette équation est exacte mais il est parfois plus avantageux d'utiliser une forme équivalente ne faisant intervenir que la composante normale aux interfaces de $\mathbf{v}_I$, c'est à dire la composante qui intervient dans les échanges de masse entre phases :

$$\frac{\partial a_I}{\partial t} + \nabla \cdot \langle (\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d) \mathbf{n}_d \delta_I \rangle = \langle (\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d) \nabla \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \quad (1.40)$$

Dans cette équation $\nabla \cdot \mathbf{n}_d$ représente la courbure des interfaces avec comme cas particulier $\nabla \cdot \mathbf{n}_d = 1/d$ pour des sphères de diamètre d .

Les phénomènes discrets de variation d'inventaire de la population de bulles (p. ex. coalescence et fragmentation de bulles) ne sont pas pris en compte dans cette équation générale ; ils nécessitent l'ajout de termes sources supplémentaires au second membre (Wu *et al.*, 1998 ; Hibiki et Ishii, 2000 ; Yao et Morel, 2004). L'écriture de ces termes n'étant pas aisée dans le cadre du modèle à deux fluides, elle sera abordée dans le prochain chapitre à l'aide d'un formalisme statistique bien plus adapté.

1.2 Modélisation moyennée de la phase dispersée par une approche particulière

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'écriture des équations régissant l'évolution de la population de bulles à l'aide de la théorie cinétique. Avec ce type d'approche, et contrairement à une approche du type modèle à deux fluides, l'écoulement du fluide à l'intérieur des bulles n'est pas résolu : on s'intéresse uniquement à des *quantités globales* attachées à chaque bulle et que l'on va localiser arbitrairement en leur centre.

Le principe de l'approche particulière est simple : on va considérer pour chaque bulle les équations d'évolution de ses quantités globales caractéristiques (masse, quantité de mouvement, énergie, surface et volume), puis on effectue une moyenne sur l'ensemble des bulles pour obtenir l'évolution moyenne de toute la population.

Notons que l'on s'intéressera dans cette section uniquement à des *bulles préexistantes* (*absence de nucléation*) et *qui conservent leur identité* (*absence de coalescence ou de fragmentation*). Le formalisme nécessaire à la prise en compte de ces phénomènes de nucléation, coalescence et fragmentation sera développé dans le prochain chapitre.

1.2.1 Équations relatives à une bulle unique

Intéressons-nous tout d'abord aux équations relatives à une bulle unique, labellisée α . À cette bulle α sont affectés une masse $m_\alpha(t)$, une vitesse $\mathbf{w}_\alpha(t)$, une enthalpie $\iota_\alpha(t)$, ainsi qu'un volume $\mathcal{V}_\alpha(t)$ et une surface $\mathcal{S}_\alpha(t)$. Dans ce premier paragraphe, on va chercher à déterminer l'évolution lagrangienne de ces paramètres, autrement dit en suivant la bulle le long de sa trajectoire $\mathbf{X}_\alpha(t)$.

Les équations d'évolution de ces paramètres peuvent être déterminées en intégrant les équations de bilan locales instantanées présentée au paragraphe 1.1.1 sur le volume de la bulle, celle-ci étant considérée comme un volume de contrôle géométrique mobile non matériel.³ Ces bilans globaux pouvant être aisément retrouvés dans la littérature (p. ex. Aris, 1962 ; Delhay, 2008), ils ne seront pas redémontrés ici.

• Masse

La masse $m_\alpha(t)$ de la bulle α est définie par :

$$m_\alpha(t) \triangleq \int_{\mathcal{V}_\alpha(t)} \rho_d \, d\mathcal{V} \quad (1.41)$$

L'évolution lagrangienne de la masse est donnée par :

$$\frac{dm_\alpha}{dt} = \oint_{\mathcal{S}_\alpha} \rho_d (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_d) \cdot \mathbf{n}_d \, dS = \oint_{\mathcal{S}_\alpha} \dot{m}_d \, dS \quad (1.42)$$

où $\mathbf{v}_d$ désigne la vitesse du fluide à l'intérieur de la bulle, $\mathbf{n}_d$ la normale unitaire à l'interface et $\mathbf{v}_I$ la vitesse de cette interface. La définition du taux de transfert de masse $\dot{m}_d$ est celle déjà utilisée plus haut (cf. équation 1.3).

En plus de la masse il est aussi possible de prendre en considération un éventuel dipôle de masse défini comme :

$$\mathbf{p}_\alpha(t) \triangleq \int_{\mathcal{V}_\alpha(t)} \mathbf{r}_\alpha \rho_d \, d\mathcal{V} \quad (1.43)$$

où $\mathbf{r}_\alpha$ est la position relative au centre de la bulle α . L'équation d'évolution du dipôle de masse s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \int_{\mathcal{V}_\alpha} \rho_d (\mathbf{v}_d - \mathbf{w}_\alpha) \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}_\alpha} \mathbf{r}_\alpha \dot{m}_d \, dS \quad (1.44)$$

Il peut paraître surprenant de devoir prendre en considération une quantité qui sera négligée par la suite, mais nous allons voir que l'équation d'évolution du dipôle de masse va nous permettre de mieux comprendre la *signification* de l'équation de conservation de la masse telle qu'elle est écrite dans le modèle à deux fluides.

3. Un *volume de contrôle géométrique mobile non matériel* est un volume géométrique pouvant se déformer et se déplacer dans l'espace et laissant passer de la matière à travers sa surface frontière ; contrairement à un volume de contrôle matériel, il n'est donc pas composé à chaque instant des mêmes éléments de matière (Delhay, 2008).

• Quantité de mouvement

La vitesse du centre de masse de la bulle α est définie comme :

$$\mathbf{w}_\alpha(t) \triangleq \frac{d\mathbf{X}_\alpha(t)}{dt} \triangleq \frac{\int_{V_\alpha(t)} \rho_d \mathbf{v}_d dV}{\int_{V_\alpha(t)} \rho_d dV} = \frac{\int_{V_\alpha(t)} \rho_d \mathbf{v}_d dV}{m_\alpha(t)} \quad (1.45)$$

et l'équation de quantité de mouvement de cette bulle est donnée par :

$$\frac{dm_\alpha \mathbf{w}_\alpha}{dt} = m_\alpha \mathbf{g} + \oint_{S_\alpha} (\dot{m}_d \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d) dS \quad (1.46)$$

où $\mathbf{g}$ représente l'accélération de la pesanteur. Dans l'intégrale de surface, le premier terme correspond à la force de recul et le deuxième terme à la force exercée par la phase continue.

On sait que pour décrire le mouvement d'une bulle on a besoin, non seulement de sa vitesse, mais aussi de sa vitesse angulaire. En plus d'une équation portant sur la quantité de mouvement de la bulle, une équation décrivant l'évolution de son moment angulaire est également nécessaire. Plus généralement, nous allons voir que pour les mélanges diphasiques dispersés une quantité de toute première importance est le (*premier*) *moment de la quantité de mouvement* d'une bulle. Pour la bulle α cette quantité tensorielle est définie telle que :

$$\mathbb{M}_\alpha(t) \triangleq \int_{V_\alpha(t)} \mathbf{r}_\alpha \otimes \rho_d \mathbf{v}_d dV. \quad (1.47)$$

On peut montrer que l'évolution temporelle de ce tenseur s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{M}_\alpha}{dt} &= \int_{V_\alpha} \rho_d (\mathbf{v}_d - \mathbf{w}_\alpha) \otimes \mathbf{v}_d dV \\ &= \oint_{S_\alpha} \mathbf{r}_\alpha \otimes (\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d) dS + \oint_{S_\alpha} \mathbf{r}_\alpha \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) dS - \int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_d dV + \int_{V_\alpha} \mathbf{r}_\alpha \otimes (\rho_d \mathbf{g}) dV. \end{aligned} \quad (1.48)$$

La partie antisymétrique de cette équation représente l'évolution du moment angulaire de la bulle et sa partie symétrique nous permettra d'évaluer l'intégrale de la contrainte sur cette bulle $\int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_d dV$.

• Enthalpie

L'enthalpie de la bulle α , notée $m_\alpha \iota_\alpha$, est définie comme :

$$m_\alpha \iota_\alpha(t) \triangleq \int_{V_\alpha(t)} \rho_d i_d dV \quad (1.49)$$

et son équation d'évolution s'écrit :

$$\frac{dm_\alpha \iota_\alpha}{dt} = \int_{V_\alpha} \left(\frac{d_d p_d}{dt} + \boldsymbol{\tau}_d : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_d \right) dV + \oint_{S_\alpha} (\dot{m}_d i_c - \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d) dS. \quad (1.50)$$

Le premier terme de l'intégrale de volume correspond à l'influence de la variation de pression à l'intérieur de la bulle, le second terme correspond à la dissipation visqueuse à l'intérieur de la bulle. Le premier terme de l'intégrale de surface représente quant à lui l'énergie apportée par le changement de phase et le second le flux de chaleur venant de la phase continue.

On pourrait, de manière analogue à ce qui a été fait pour la masse et la quantité de mouvement, écrire l'équation du premier moment de l'enthalpie $\int_{V_\alpha(t)} \mathbf{r}_\alpha \rho_d i_d dV$ mais nous nous en abstenons afin de ne pas alourdir la présentation.

- **Variables géométriques**

L'équation d'évolution du volume d'une bulle s'écrit :

$$\frac{dV_\alpha(t)}{dt} = \oint_{S_\alpha(t)} \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d dS = \int_{V_\alpha(t)} \nabla \cdot \mathbf{v}_d dV + \oint_{S_\alpha(t)} \frac{\dot{m}_d}{\rho_d} dS. \quad (1.51)$$

L'évolution de sa surface est quant à elle donnée par :

$$\frac{dS_\alpha(t)}{dt} = \oint_{S_\alpha(t)} (\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d) \nabla \cdot \mathbf{n}_d dS. \quad (1.52)$$

1.2.2 Fonction de présence des centres et moyennes associées

Ce paragraphe a pour but de présenter les opérateurs de moyenne dont nous allons nous servir pour établir les équations moyennes. Ceux-ci sont basés sur l'opérateur de moyenne d'ensemble présenté au paragraphe 1.1.3 et sur une fonction de présence des centres de bulles.

Affectons à chaque bulle α de la population une distribution de Dirac δ_α ayant son centre pour support. Cette distribution permettant de "localiser" le centre de chaque bulle α dans l'espace est définie comme suit :

$$\delta_\alpha(\mathbf{x}, t) \triangleq \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_\alpha(t)) \quad (1.53)$$

où $\mathbf{x}$ désigne le vecteur position et $\mathbf{X}_\alpha(t)$ la position instantanée du centre de la bulle α au sens lagrangien. La distribution δ_α peut donc être vue comme une passerelle entre les descriptions lagrangienne et eulérienne.

Étant attachée à la bulle α , cette distribution se déplace avec la vitesse $\mathbf{w}_\alpha$ de la bulle ; son équation de transport s'écrit donc simplement :

$$\frac{\partial \delta_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta_\alpha \mathbf{w}_\alpha) = 0. \quad (1.54)$$

où l'on a tenu compte du fait que la vitesse $\mathbf{w}_\alpha$ est une fonction de t uniquement pour la rentrer sous la divergence. En sommant la distribution δ_α sur les différentes bulles de la population en nombre N_b , on obtient une fonction de présence des centres de la phase dispersée que l'on notera δ_d :

$$\delta_d(\mathbf{x}, t) \triangleq \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_\alpha(t)). \quad (1.55)$$

La moyenne d'ensemble de cette fonction de densité de présence n'est autre que la densité numérique de bulles n (Lhuillier et Nadim, 1999) :

$$n(\mathbf{x}, t) = \langle \delta_d(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (1.56)$$

L'équation de transport n'est donc autre que la moyenne de (1.54) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathbf{w} \rangle = 0. \quad (1.57)$$

Cette équation suppose que chacune des bulles préserve son existence ; elle devra toutefois être modifiée en cas de coalescence, fragmentation ou nucléation.

Le Dirac δ_d joue pour la théorie cinétique des bulles le même rôle que χ_d dans le modèle à deux fluides. Il va permettre d'introduire la *moyenne de population* d'une variable quelconque φ_α attachée à une bulle α , autrement dit la moyenne conditionnée sur la présence de la phase dispersée et pondérée par la densité numérique de bulles :

$$\langle \varphi \rangle (\mathbf{x}, t) \triangleq \frac{\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha(\mathbf{x}, t) \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle} = \frac{\langle \delta_d(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle}{n(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.58)$$

Une autre manière d'exprimer cette moyenne de population, à savoir en introduisant une fonction de distribution de la population de bulles, sera exposée au chapitre 2.

Par analogie à la moyenne de Favre définie à la section 1.1.4, on peut également définir une moyenne de population pondérée par la masse des bulles :

$$\langle \langle \varphi \rangle \rangle (\mathbf{x}, t) \triangleq \frac{\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha(\mathbf{x}, t) m_\alpha(\mathbf{x}, t) \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha(\mathbf{x}, t) m_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle} = \frac{\langle m(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle m(\mathbf{x}, t) \rangle}. \quad (1.59)$$

Notons bien que les moyennes de population $\langle \cdot \rangle$ et $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ sont différentes des moyennes phasiques $\overline{\cdot}^d$ et $\overline{\cdot}$ introduites à la section 1.1, ces deux dernières étant pondérées par le taux de présence de la phase dispersée et non pas par la densité numérique de bulles.

1.2.3 Équations moyennes relatives à la phase dispersée

L'objectif de cette section est, de moyenner les équations d'évolutions relatives à une bulle unique à l'aide de la fonction de distribution des centres afin d'obtenir les équations moyennes de l'ensemble de la population.

• Bilan moyen de masse

Multiplions l'équation d'évolution de la masse d'une bulle (1.42) par δ_α , puis sommons le résultat sur toutes les bulles de la population. En prenant en compte l'équation de transport de δ_α (1.54), la moyenne d'ensemble de l'équation résultante donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha m_\alpha \right\rangle + \nabla \cdot \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha m_\alpha \mathbf{w}_\alpha \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta_\alpha \oint_{S_\alpha} \dot{m}_d \, ds \right\rangle \quad (1.60a)$$

soit de façon plus concise :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \, ds \right\rangle. \quad (1.60b)$$

Quant à l'équation (1.44) du dipôle de masse, elle devient après moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathbf{p} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathbf{p} \otimes \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \int \rho_d (\mathbf{v}_d - \mathbf{w}) dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \dot{m}_d dS \right\rangle. \quad (1.61)$$

• Bilan moyen de quantité de mouvement

Appliquons à l'équation de quantité de mouvement d'une bulle (1.46) la même procédure de moyenne qu'au paragraphe précédent ; on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle = \langle \delta_d m \rangle \mathbf{g} + \left\langle \delta_d \oint \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d dS \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c dS \right\rangle. \quad (1.62)$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation correspond à la moyenne sur toute la population de la force agissant sur une bulle unique.

À l'instar du second membre de l'équation de masse (1.60b), la modélisation de cette force constitue à la fois un des points clés de l'étude et une de ses principales difficultés. En effet, ce terme intègre les actions du liquide environnant sur la bulle α ainsi que les perturbations induites par les bulles environnantes sur cette bulle α et sur le liquide porteur. Déterminer une expression microscopique de cette force pour une bulle unique n'est donc pas chose aisée. On peut toutefois imaginer qu'elle fait intervenir différentes corrélations : diamètre/vitesse de bulle, diamètre/vitesse du liquide, diamètre/fluctuation de vitesse du liquide, corrélation double de vitesse de bulle, etc.

L'équation moyenne qui correspond au bilan (1.48) du premier moment de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathbb{M} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathbb{M} \otimes \mathbf{w} \rangle - \left\langle \delta_d \int \rho_d (\mathbf{v}_d - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{v}_d dV \right\rangle \\ = \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d) dS \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) dS \right\rangle - \left\langle \delta_d \int \boldsymbol{\sigma}_d dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \int \rho_d \mathbf{r} \otimes \mathbf{g} dV \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.63)$$

On remarquera que sa partie symétrique fait intervenir la moyenne des contraintes internes aux bulles. Ce dernier bilan va nous aider à mieux comprendre la signification du bilan de quantité de mouvement tel qu'il est écrit dans le modèle à deux fluides.

• Bilan moyen d'enthalpie

On écrit le bilan de l'enthalpie de la population de bulles en procédant de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m \iota \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m \iota \mathbf{w} \rangle \\ = \left\langle \delta_d \int \frac{d_d p_d}{dt} dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \int \boldsymbol{\tau}_d : \nabla \mathbf{v}_d dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c dS \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d dS \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.64)$$

où l'on a introduit l'enthalpie moyenne de la phase dispersée $\langle \delta_d m \iota \rangle$.

• Bilans géométriques moyens

Avec la même démarche que précédemment, on transforme les équations (1.51) et (1.52) en équations moyennes. Le bilan sur le volume moyen des bulles s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathcal{V} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathcal{V} \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \oint \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle = \left\langle \delta_d \int \nabla \cdot \mathbf{v}_d \, d\mathcal{V} \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \frac{\dot{m}_d}{\rho_d} \, ds \right\rangle. \quad (1.65)$$

Notons que la vitesse moyenne de transport du volume $\langle \delta_d \mathcal{V} \mathbf{w} \rangle / \langle \delta_d \mathcal{V} \rangle$ n'est égale à la vitesse moyenne des centres géométriques des bulles $\langle \delta_d \mathbf{w} \rangle / \langle \delta_d \rangle$ que pour des bulles ayant toutes le même volume.

Le bilan portant sur la surface moyenne des bulles s'écrit quant à lui :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathcal{S} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathcal{S} \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \oint (\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d) \nabla \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle. \quad (1.66)$$

La vitesse moyenne de transport surfacique $\langle \delta_d \mathcal{S} \mathbf{w} \rangle / \langle \delta_d \mathcal{S} \rangle$ est généralement différente de la vitesse moyenne de transport du volume et de la vitesse moyenne des centres géométriques des bulles.

1.3 Modélisation hybride des écoulements diphasiques à phase dispersée

Deux types de modélisation pour traiter les écoulements dispersés ont été présentés dans les sections précédentes :

- un modèle moyenné général, le modèle à deux fluides, qui consiste en un système de 2×3 équations moyennes (masse, quantité de mouvement, énergie). Ce système d'équations traite de façon symétrique les deux phases ; des équations de bilan moyennes portant sur la fraction volumique et la concentration d'aire interfaciale sont adjointes à ce système ;
- une approche particulière valable uniquement pour traiter la phase dispersée et composée de quatre équations moyennes (masse, quantité de mouvement, moment de la quantité de mouvement, énergie) auxquelles sont adjointes deux équations pour la fraction volumique et la densité d'aire interfaciale.

Dans cette section, on se propose d'écrire un modèle moyenné spécialement adapté aux écoulements à phase dispersée, basé sur les équations du modèle à deux fluides mais faisant également intervenir des termes issus de l'approche particulière. On verra que le système d'équations régissant ce modèle *hybride*, moins général que le modèle à deux fluides, va perdre son caractère symétrique : la dissymétrie géométrique des deux phases induisant une dissymétrie des équations.

1.3.1 Comparaison des équations obtenues pour la phase dispersée avec le modèle à deux fluides et la théorie cinétique

On rappelle ici les équations moyennes obtenues avec le modèle à deux fluides (a) et la théorie cinétique (b) pour décrire l'évolution de la phase dispersée.

- **Bilans moyens de masse**

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle = \langle \dot{m}_d \delta_I \rangle \quad (1.67a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \, ds \right\rangle \quad (1.67b)$$

• Bilans moyens de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \otimes \mathbf{v}_d \rangle = \langle \chi_d \rho_d \rangle \mathbf{g} + \nabla \cdot \langle \chi_d \boldsymbol{\sigma}_d \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle + \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle \quad (1.68a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle = \langle \delta_d m \rangle \mathbf{g} + \left\langle \delta_d \oint \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle \quad (1.68b)$$

• Bilans moyens d'enthalpie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d i_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d i_d \mathbf{v}_d \rangle \\ = -\nabla \cdot \langle \chi_d \mathbf{q}_d \rangle + \left\langle \chi_c \frac{d_d p_d}{dt} \right\rangle + \langle \chi_d \boldsymbol{\tau}_d : \nabla \mathbf{v}_d \rangle + \langle \dot{m}_d i_c \delta_I \rangle - \langle \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \end{aligned} \quad (1.69a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d m i \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d m i \mathbf{w} \rangle \\ = \left\langle \delta_d \int \frac{d_d p_d}{dt} \, dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \int \boldsymbol{\tau}_d : \nabla \mathbf{v}_d \, dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle \end{aligned} \quad (1.69b)$$

• Équations topologiques

Taux de présence phasique

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \mathbf{v}_d \rangle = \langle \chi_d \nabla \cdot \mathbf{v}_d \rangle + \left\langle \frac{\dot{m}_d}{\rho_d} \delta_I \right\rangle \quad (1.70a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathcal{V} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathcal{V} \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \int \nabla \cdot \mathbf{v}_d \, dV \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \frac{\dot{m}_d}{\rho_d} \, ds \right\rangle. \quad (1.70b)$$

Concentration d'aire interfaciale

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_I \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_I \delta_I \rangle = \langle \nabla_s \cdot \mathbf{v}_I \delta_I \rangle \quad (1.71a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_d \mathcal{S} \rangle + \nabla \cdot \langle \delta_d \mathcal{S} \mathbf{w} \rangle = \left\langle \delta_d \oint (\mathbf{v}_I \cdot \mathbf{n}_d) \nabla \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle. \quad (1.71b)$$

Les équations pour la phase dispersée obtenues avec les deux approches présentent des analogies certaines mais font intervenir des variables différentes. Par exemple, la vitesse $\mathbf{w}$ apparaissant dans les équations issues de la théorie cinétique est la vitesse moyenne de *translation* des bulles alors que $\mathbf{v}_d$, apparaissant dans les équations issues du modèle à deux fluides, tient compte de tous les mouvements de la phase dispersée : translation, rotation, déformation, etc.

Par ailleurs, certaines grandeurs n'apparaissent que dans les équations du modèle à deux fluides et pas dans celles obtenues avec l'approche particulaire : on remarquera par exemple que les contraintes de la phase dispersée $\boldsymbol{\sigma}_d$ ainsi que le flux de chaleur $\mathbf{q}_d$ sont absents des équations obtenues avec l'approche particulaire. En ce qui concerne les contraintes particulières, on a vu cependant que si elles n'intervenaient pas dans le bilan de quantité de mouvement (1.68b), elles intervenaient dans le bilan du *premier moment de la quantité de mouvement* (1.63). Cette constatation va avoir son importance dans ce qui suit.

Une dernière observation que l'on peut formuler en comparant les équations obtenues avec les deux approches est que les termes de transferts moyens obtenus avec la théorie cinétique ont un caractère plus intuitif que leurs homologues obtenus avec le modèle à deux fluides classique. Par exemple, dans

l'équation de quantité de mouvement version "théorie cinétique" la force moyenne entre phases apparaît sous la forme $\langle \delta_d \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \, dS \rangle$, qui n'est autre que le produit de la densité numérique de bulles par la force moyenne exercée sur une bulle par la phase qui l'entoure. La signification de ce terme est donc beaucoup plus évidente que celle du terme correspondant du modèle à deux fluides qui s'écrit $\langle \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle$. D'où l'intérêt d'une approche hybride mixant les deux écritures. Puisque la phase continue ne peut être décrite que dans le cadre du modèle à deux fluides, on aimerait disposer d'un ensemble d'équations avec les variables du modèle à deux fluides mais où les termes d'échanges seraient ceux de la théorie cinétique, afin de pouvoir bénéficier de leur interprétation plus intuitive.

1.3.2 Lien entre les deux approches pour les milieux dispersés

La différence entre les grandeurs moyennes obtenues avec le modèle à deux fluides ou la théorie cinétique ne réside pas dans l'opérateur de moyenne utilisé,⁴ mais dans la quantité moyennée : une *quantité locale* de la phase dispersée dans le modèle à deux fluides contre une *quantité globale* d'une bulle entière dans la théorie cinétique.

Pour le cas particulier des *suspensions faiblement inhomogènes*,⁵ des formules de transformation ont été développées pour faire le lien entre ces deux types de grandeurs moyennes (Buyevich et Shchelchkova, 1978 ; Lhuillier, 1992 ; Zhang et Prosperetti, 1994a,b ; Jackson, 1997). Ces formules prennent la forme de développements en série pour toute quantité φ_S définie sur la surface d'une bulle et toute quantité φ_V définie sur le volume d'une bulle :⁶

$$\langle \varphi_S \delta_I \rangle = \left\langle \delta_d \oint \varphi_S \, dS \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \varphi_S \, dS \right\rangle + \frac{1}{2} \nabla \nabla : \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \varphi_S \, dS \right\rangle + \dots \quad (1.72a)$$

$$\langle \varphi_V \chi_d \rangle = \left\langle \delta_d \int \varphi_V \, dV \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \varphi_V \, dV \right\rangle + \frac{1}{2} \nabla \nabla : \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \varphi_V \, dV \right\rangle + \dots \quad (1.72b)$$

À l'aide de ces formules de transformation, on peut donc exprimer les grandeurs moyennes du modèle à deux fluides en fonction des grandeurs moyennes issues de l'approche particulière :

$$\langle \delta_I \rangle = \langle \delta_d S \rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \, dS \right\rangle + \dots \quad (1.73)$$

$$\langle \chi_d \rangle = \langle \delta_d V \rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \, dV \right\rangle + \dots \quad (1.74)$$

$$\langle \chi_d \rho_d \rangle = \langle \delta_d m \rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \rho_d \, dV \right\rangle + \dots \quad (1.75)$$

$$\langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle = \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes (\rho_d \mathbf{v}_d) \, dV \right\rangle + \dots \quad (1.76)$$

$$\langle \chi_d \rho_d i_d \rangle = \langle \delta_d m i \rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \rho_d i_d \, dV \right\rangle + \dots \quad (1.77)$$

4. Dans les deux cas on utilise l'opérateur de moyenne d'ensemble $\langle \cdot \rangle$.

5. Par *suspension faiblement inhomogène*, on entend une suspension pour laquelle l'échelle de variation des grandeurs moyennes est bien plus grande que la taille des bulles (Lhuillier, 1992).

6. De telles formules de transformation ne devraient pas nous surprendre outre mesure : si dans la dernière on remplace φ_V par une densité de charges électriques on obtient un résultat très connu de l'*électromagnétique des milieux continus* : la moyenne d'ensemble de la charge est donnée par la contribution des charges libres, moins la divergence des charges dipolaires, plus la double divergence des charges quadripolaires, etc.

Ces relations sont d'une importance capitale. Elles montrent en particulier que :

- l'équation du modèle à deux fluides pour la masse volumique $\langle \chi_d \rho_d \rangle$ est équivalente à un ensemble d'équations de la théorie cinétique pour $\langle \delta_d m \rangle$, $\langle \delta_d \int \rho_d \mathbf{r} d\mathcal{V} \rangle$, c'est-à-dire le dipôle de masse moyen $\langle \delta_d \mathbf{p} \rangle$ dont l'évolution est donnée par (1.61), ainsi que les moments d'ordre supérieur ;
- l'équation du modèle à deux fluides pour la quantité de mouvement $\langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle$ est équivalente à un ensemble d'équations de la théorie cinétique pour $\langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle$, $\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes (\rho_d \mathbf{v}_d) d\mathcal{V} \rangle$ et les moments d'ordre supérieur ;
- l'équation du modèle à deux fluides pour l'enthalpie $\langle \chi_d \rho_d i_d \rangle$ est équivalente à un ensemble d'équations de la théorie cinétique pour $\langle \delta_d m \iota \rangle$, $\langle \delta_d \int \mathbf{r} \rho_d i_d d\mathcal{V} \rangle$ et les moments d'ordre supérieur.

C'est précisément maintenant qu'il faut faire des *hypothèses simplificatrices* concernant la pertinence des équations de la théorie cinétique portant sur les moments. En s'appuyant sur la forme moyenne des bulles ainsi que sur la répartition spatiale de la masse à l'intérieur des bulles, on pourra en général négliger tous les moments du type $\langle \delta_d \oint \mathbf{r} ds \rangle$, $\langle \delta_d \int \mathbf{r} d\mathcal{V} \rangle$, $\langle \delta_d \int \mathbf{r} \rho_d d\mathcal{V} \rangle$, $\langle \delta_d \int \mathbf{r} \rho_d i_d d\mathcal{V} \rangle$ ainsi que tous les moments d'ordre supérieur. Il n'y a guère que pour le premier moment de la quantité de mouvement que l'on puisse avoir des doutes et se poser la question : est-il pertinent, pour l'écoulement que je considère, de négliger tout rôle du premier moment $\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes (\rho_d \mathbf{v}_d) d\mathcal{V} \rangle$, et en particulier du moment angulaire des bulles ?

Dans ce qui suit nous nous plaçons d'emblée dans l'hypothèse où tous les moments, quels qu'ils soient, jouent un rôle négligeable dans la description de l'écoulement et par conséquent :

$$\langle \delta_I \rangle \cong \langle \delta_d \mathcal{S} \rangle = n \{ \mathcal{S} \} \quad (1.78)$$

$$\langle \chi_d \rangle \cong \langle \delta_d \mathcal{V} \rangle = n \{ \mathcal{V} \} \quad (1.79)$$

$$\langle \chi_d \rho_d \rangle \cong \langle \delta_d m \rangle = n \{ m \} \quad (1.80)$$

$$\langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle \cong \langle \delta_d m \mathbf{w} \rangle = n \{ m \mathbf{w} \} \quad (1.81)$$

$$\langle \chi_d \rho_d i_d \rangle \cong \langle \delta_d m \iota \rangle = n \{ m \iota \} . \quad (1.82)$$

C'est dans le cadre de cette hypothèse simplificatrice que nous allons bâtir un modèle *hybride* basé sur le modèle à deux fluides mais avec des termes de transferts moyens issus de l'approche particulière.

1.3.3 Les équations du modèle hybride

• Bilans moyens de masse

On suppose que le dipôle de masse des bulles ne joue aucun rôle. On part donc des équations (1.27a) pour le fluide porteur et (1.60b) pour les bulles. Le terme d'échange du modèle à deux fluides est écrit en bénéficiant du développement (1.72a) :

$$\langle \dot{m}_d \delta_I \rangle = \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \dot{m}_d ds \right\rangle + \dots \quad (1.83)$$

Dénier tout rôle au dipôle de masse (et aux multipôles d'ordre supérieur) revient à supposer que $\dot{m}_d$ est régulièrement réparti sur toute la surface d'une bulle (*cf.* équation 1.61). On peut alors négliger tous

les termes du développement sauf le premier et, si on tient compte des approximations (1.80) et (1.81), aboutir à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_c \rho_c \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_c \rho_c \mathbf{v}_c \rangle = - \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \, ds \right\rangle \end{array} \right. \quad (1.84a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_d \rho_d \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d \mathbf{v}_d \rangle = \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \, ds \right\rangle \end{array} \right. \quad (1.84b)$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho_c^c}) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c^c} \mathbf{V}_c) = -\Gamma \end{array} \right. \quad (1.85a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho_d^d}) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d^d} \mathbf{V}_d) = \Gamma \end{array} \right. \quad (1.85b)$$

avec un échange de masse moyen exprimé sous la forme théorie cinétique :

$$\Gamma \triangleq \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \, ds \right\rangle = n \{ \dot{m}_d \mathcal{S} \}. \quad (1.85c)$$

• Bilans moyens de quantité de mouvement

Introduisons tout d'abord la fluctuation de vitesse $\mathbf{v}_k'$, définie comme l'écart de la vitesse microscopique à la vitesse moyenne de la phase k :

$$\mathbf{v}_k' \triangleq \mathbf{V}_k - \mathbf{v}_k. \quad (1.86)$$

Les formules de transformations (1.72) vont à présent nous servir à établir les équations de bilan de quantité de mouvement de notre modèle hybride.

Phase continue

Dans un premier temps nous allons considérer le bilan de quantité de mouvement tel qu'il est écrit dans le modèle à deux fluides pour le fluide porteur ; dans ce bilan (1.32a) nous allons faire apparaître la pression moyenne $\overline{p_c^c}$ de la phase continue qui joue un grand rôle dans la dynamique des deux phases. Cette pression moyenne intervient dans les contraintes de la phase continue écrites sous la forme :

$$\nabla \cdot \langle \chi_c \boldsymbol{\sigma}_c \rangle = - \nabla (\alpha_c \overline{p_c^c}) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\boldsymbol{\tau}_c^c}). \quad (1.87)$$

Nous la faisons également apparaître dans la force moyenne aux interfaces en écrivant :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle &= \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_c + \overline{p_c^c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \right\rangle - \overline{p_c^c} \langle \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \\ &= \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_c + \overline{p_c^c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \right\rangle - \overline{p_c^c} \nabla \alpha_c. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Nous aboutissons ainsi à une autre forme du bilan (1.32a) où apparaît mieux le rôle de la pression moyenne :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho_c^c} \mathbf{V}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c^c} \mathbf{V}_c \otimes \mathbf{V}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c^c} \overline{\mathbf{v}_c' \otimes \mathbf{v}_c'}) \\ &= \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\boldsymbol{\tau}_c^c}) - \alpha_c \nabla \overline{p_c^c} + \alpha_c \overline{\rho_c^c} \mathbf{g} - \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_c + \overline{p_c^c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \right\rangle - \langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \rangle. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Appliquons à présent la formule de transformation (1.72a) à la force moyenne ainsi qu'à la force de recul du modèle à deux fluides :

$$\left\langle (\sigma_c + \overline{p_c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \right\rangle \cong \left\langle \delta_d \oint (\sigma_c + \overline{p_c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes ((\sigma_c + \overline{p_c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d) \, ds \right\rangle \quad (1.90)$$

$$\left\langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \right\rangle \cong \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) \, ds \right\rangle. \quad (1.91)$$

Introduisons ces développements dans l'équation de bilan de quantité de mouvement de la phase continue qui peut finalement se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho_c} \mathbf{V}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c} \mathbf{V}_c \otimes \mathbf{V}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c} \overline{\mathbf{v}_c' \otimes \mathbf{v}_c'}) \\ &= \nabla \cdot \left(\alpha_c \overline{\tau_c} + \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\sigma_c + \overline{p_c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) \, ds \right\rangle \right) \\ & \quad - \alpha_c \nabla \overline{p_c} + \alpha_c \overline{\rho_c} \mathbf{g} - \left\langle \delta_d \oint (\sigma_c + \overline{p_c} \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.92)$$

On a ainsi exprimé la force interphase sous la forme théorie cinétique mais au prix d'un changement de la définition des contraintes s'exerçant sur la phase liquide.

Phase dispersée

Concernant le bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée (1.68a), l'application de la formule de transformation (1.72b) donne :

$$\left\langle \chi_d \sigma_d \right\rangle \cong \left\langle \delta_d \int \sigma_d \, dV \right\rangle \quad (1.93)$$

$$\left\langle \chi_d \rho_d \right\rangle \mathbf{g} \cong \left\langle \delta_d \int \rho_d \, dV \right\rangle \mathbf{g} - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes (\rho_d \mathbf{g}) \, dV \right\rangle \quad (1.94)$$

tandis que l'application de (1.72a) donne :

$$\left\langle \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \right\rangle \cong \left\langle \delta_d \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\sigma_c \cdot \mathbf{n}_d) \, ds \right\rangle \quad (1.95)$$

$$\left\langle \dot{m}_d \mathbf{v}_c \delta_I \right\rangle \cong \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) \, ds \right\rangle. \quad (1.96)$$

Le bilan moyen de quantité de mouvement de la phase dispersée (1.68a) peut ainsi être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho_d} \mathbf{V}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d} \mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d} \overline{\mathbf{v}_d' \otimes \mathbf{v}_d'}) \\ &= \left\langle \delta_d m \right\rangle \mathbf{g} + \left\langle \delta_d \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle \\ & \quad + \nabla \cdot \left(\left\langle \delta_d \int \sigma_d \, dV \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes (\sigma_c \cdot \mathbf{n}_d + \dot{m}_d \mathbf{v}_c) \, ds \right\rangle - \left\langle \delta_d \int \mathbf{r} \otimes \rho_d \mathbf{g} \, dV \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Le dernier terme (sous divergence) de ce bilan fait intervenir trois quantités que l'on retrouve dans le bilan (1.63) portant sur le premier moment de la quantité de mouvement. Si nous décidons de ne pas

tenir compte de cette dernière grandeur, il est logique de ne pas tenir compte du dernier terme du bilan ci-dessus.

On veut maintenant que le bilan de quantité de mouvement pour la phase dispersée fasse apparaître le gradient de la pression moyenne du fluide pour représenter la force d'Archimède exercée par le fluide porteur. L'astuce pour faire apparaître un tel terme consiste à partir de la relation suivante :

$$\left\langle \delta_d \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle = \left\langle \delta_d \oint (\sigma_c + \overline{p}_c^c \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \overline{p}_c^c \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle \quad (1.98)$$

puis de détailler le deuxième terme du second membre à l'aide d'un développement limité de $\overline{p}_c^c$ sur la surface d'une bulle :

$$\left\langle \delta_d \oint \overline{p}_c^c \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle \approx \overline{p}_c^c \left\langle \delta_d \oint \overbrace{\mathbf{n}_d}^{=0} \, ds \right\rangle + \nabla \overline{p}_c^c \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \otimes \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle. \quad (1.99)$$

Le premier terme du membre de droite est nul et l'intégrale dans le second est égale au volume d'une bulle que multiplie le tenseur unité ; on obtient donc :

$$\left\langle \delta_d \oint \overline{p}_c^c \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle = \left\langle \delta_d \mathcal{V} \right\rangle \nabla \overline{p}_c^c \cong \alpha_d \nabla \overline{p}_c^c. \quad (1.100)$$

Le bilan de quantité de mouvement des bulles s'écrit désormais :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{V}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \overline{\mathbf{v}_d' \otimes \mathbf{v}_d'}^d) \\ = -\alpha_d \nabla \overline{p}_c^c + \alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{g} + \left\langle \delta_d \oint (\sigma_c + \overline{p}_c^c \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Forme finale des équations de bilan de quantité de mouvement

Finalement, les équations de bilan portant sur la quantité de mouvement des deux phases s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho}_c^c \mathbf{V}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho}_c^c \mathbf{V}_c \otimes \mathbf{V}_c) \\ = -\alpha_c \nabla \overline{p}_c^c + \nabla \cdot (\alpha_c (\overline{\tau}_c^c + \tau_c^T) + \sigma_c^*) + \alpha_c \overline{\rho}_c^c \mathbf{g} - \mathbf{M}^* - \Gamma \mathbf{V}^* \end{aligned} \right. \quad (1.102a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{V}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d) = -\alpha_d \nabla \overline{p}_c^c + \nabla \cdot (\alpha_d \tau_d^T) + \alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{g} + \mathbf{M}^* + \Gamma \mathbf{V}^* \end{aligned} \right. \quad (1.102b)$$

avec les définitions suivantes :

$$\mathbf{M}^* + \Gamma \mathbf{V}^* \triangleq n \left\{ \oint (\sigma_c + \overline{p}_c^c \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\} + n \left\{ \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\} \quad (1.102c)$$

$$\sigma_c^* \triangleq n \left\{ \oint \mathbf{r} \otimes (\sigma_c + \overline{p}_c^c \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\} + n \left\{ \oint \mathbf{r} \otimes (\dot{m}_d \mathbf{v}_c) \, ds \right\} \quad (1.102d)$$

$$\alpha_k \tau_k^T \triangleq -\alpha_k \overline{\rho}_k^k \overline{\mathbf{v}_k' \otimes \mathbf{v}_k'}^k. \quad (1.102e)$$

$\mathbf{M}^*$ peut être assimilé à la moyenne des forces hydrodynamiques agissant sur l'ensemble des bulles de la population et $\Gamma \mathbf{V}^*$ à la force de recul moyenne.

Notons que le système d'équations de bilan sur la quantité de mouvement n'est plus symétrique et que seule la pression moyenne de la phase continue y intervient, caractéristique propre aux écoulements à phase dispersée.

• Bilans moyens d'enthalpie

On introduit la notation $I_k \hat{=} \overline{i_k}^k$. De la même façon que pour les bilans moyens de quantité de mouvement, l'utilisation des formules de transformations (1.72) va nous permettre d'obtenir un système d'équations dissymétrique pour caractériser l'évolution moyenne de l'enthalpie des deux phases de notre suspension.

Phase continue

À l'aide de la formule de transformation (1.72a), développons tout d'abord les deux derniers termes du second membre du bilan moyen d'enthalpie de la phase continue (1.34a) ; on obtient :

$$\langle \dot{m}_d i_c \delta_I \rangle = \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle + \dots \quad (1.103)$$

$$\langle \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle = \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \nabla \cdot \left\langle \delta_d \oint \mathbf{r} (\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d) \, ds \right\rangle + \dots \quad (1.104)$$

En supposant que le flux de chaleur $\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d$ agit uniformément sur la surface des bulles et que l'enthalpie côté liquide de l'interface des bulles est homogène sur la surface de ces dernières, *on peut se limiter au premier terme de chacun de ces développements*, soit :

$$\langle \dot{m}_d i_c \delta_I \rangle \cong \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle \quad (1.105)$$

$$\langle \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \delta_I \rangle \cong \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle. \quad (1.106)$$

En négligeant en outre l'influence des fluctuations de vitesse et de pression sur le bilan moyen d'enthalpie, on arrive finalement au bilan suivant pour la phase continue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho_c}^c I_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c}^c I_c \mathbf{V}_c) \\ = - \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\mathbf{q}_c}^c) + \alpha_c \frac{D_c \overline{p_c}^c}{Dt} + \alpha_c \overline{\boldsymbol{\tau}_c} : \nabla \mathbf{v}_c^c + \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle - \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle \end{aligned} \quad (1.107)$$

où l'on a fait l'approximation suivante :

$$\left\langle \chi_c \frac{d_c p_c}{dt} \right\rangle \approx \alpha_c \frac{D_c \overline{p_c}^c}{Dt} = \alpha_c \left(\frac{\partial \overline{p_c}^c}{\partial t} + \mathbf{V}_c \cdot \nabla \overline{p_c}^c \right). \quad (1.108)$$

Phase dispersée

Développons à présent la divergence du flux d'enthalpie des bulles apparaissant dans le bilan d'enthalpie (1.34b) obtenu avec le modèle à deux fluides ; l'utilisation de la formule de transformation (1.72b) donne :

$$\nabla \cdot \langle \chi_d \rho_d i_d \mathbf{v}_d \rangle \cong \nabla \cdot \langle \delta_d m \iota \mathbf{w} \rangle \quad (1.109)$$

où l'on a négligé les termes du développement à partir de la dérivée double. En tenant compte en outre de la relation approchée (1.82), le bilan moyen d'enthalpie de la phase dispersée (1.64) obtenu avec l'approche particulière peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho_d}^d I_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d}^d I_d \mathbf{V}_d) = \alpha_d \frac{D_d \overline{p_d}^d}{Dt} - \left\langle \delta_d \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\rangle + \left\langle \delta_d \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\rangle \quad (1.110)$$

où l'on a également fait les approximations suivantes :

$$\left\langle \delta_d \int \frac{d_d p_d}{dt} dV \right\rangle \approx \left\langle \delta_d \int dV \right\rangle \frac{D_d \overline{p_d^d}}{Dt} \cong \alpha_d \frac{D_d \overline{p_d^d}}{Dt} \quad (1.111)$$

$$\left\langle \delta_d \int \boldsymbol{\tau}_d : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_d dV \right\rangle \approx 0 \quad (1.112)$$

la seconde approximation revenant à négliger la dissipation de l'énergie mécanique par la friction dans les bulles.

Forme finale des équations de bilan d'enthalpie

Finalement, les équations de bilan portant sur l'enthalpie des deux phases s'écrivent :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho_c^c} I_c) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\alpha_c \overline{\rho_c^c} I_c \mathbf{V}_c) = - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\alpha_c (\overline{\mathbf{q}_c^c} + \mathbf{q}_c^T)) + \alpha_c \frac{D_c \overline{p_c^c}}{Dt} + \alpha_c D_c - \Pi^* - \Gamma I^* \right. \quad (1.113a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho_d^d} I_d) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d^d} I_d \mathbf{V}_d) = \alpha_d \frac{D_d \overline{p_d^d}}{Dt} + \Pi^* + \Gamma I^* \right. \quad (1.113b)$$

avec les définitions suivantes :

$$\Pi^* + \Gamma I^* \triangleq - n \left\{ \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d dS \right\} + n \left\{ \oint \dot{m}_d i_c dS \right\} \quad (1.113c)$$

$$\alpha_c D_c \triangleq \alpha_c \overline{\boldsymbol{\tau}_c : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_c^c} \quad (1.113d)$$

où Π^* peut être assimilé à l'échange de chaleur moyen entre les bulles et la phase continue. Au second membre du bilan moyen (1.113a) D_c désigne la dissipation visqueuse moyenne dans la phase continue, le flux de chaleur turbulent $\alpha_c \mathbf{q}_c^T$ ayant quant à lui été ajouté de manière *ad hoc* de façon à prendre en compte la diffusion de l'énergie de la phase continue par la turbulence.

1.3.4 Résumé des équations du modèle hybride

Considérons à présent le principal type d'écoulements à bulles que l'on va chercher à modéliser, à savoir les écoulements bouillant sous-saturés. Par liquide sous-saturé on entend un liquide dont la température moyenne sur la section droite de la conduite est inférieure à sa température de saturation. Lorsqu'un liquide sous-saturé s'écoule dans un canal chauffant, des bulles de vapeurs se créent à proximité des parois, là où le liquide s'est localement réchauffé, et vont se condenser dans le cœur de l'écoulement.

On va supposer que pour un écoulement globalement sous-saturé, les bulles de vapeur n'ont pas le temps de croître suffisamment pour justifier l'apparition d'un gradient de température significatif en leur sein ; on peut de ce fait émettre l'hypothèse d'une *température homogène à l'intérieur des bulles*, température pouvant être assimilée à la température de l'interface. Ainsi, en supposant en outre que les interfaces sont à la *température de saturation*, on peut se passer de l'équation de bilan d'énergie pour la phase dispersée.

Un mot sur la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_c^*$, celle-ci est composée de deux contributions : une première contribution, appelée *stresslet* par Batchelor (1970), correspondant au moment des forces exercées par le liquide sur la surface des bulles, une seconde contribution qui est le moment de la force induite par le changement de phase sur la surface des bulles. Des solutions analytiques existent pour ces termes dans les cas académiques que sont un fluide porteur rampant (Jackson, 1997) et un fluide porteur non visqueux et potentiel (Lhuillier *et al.*, 2010). Les écoulements que l'on cherche à modéliser étant turbulents, ces solutions analytiques ne peuvent être appliquées à notre cas de figure. Aucun modèle adapté n'ayant été trouvé dans la littérature, on ne prendra finalement pas en compte la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_c^*$ dans la suite du document.

Finalement, compte tenu de ces hypothèses ainsi que de la relation (1.22b) reliant α_c à α_d , le système d'équations régissant l'évolution du milieu diphasique comporte cinq équations pour cinq inconnues principales que sont α_d , $\mathbf{V}_c$, $\mathbf{V}_d$, I_c et $\overline{p}_c^c$. Les différentes équations de ce *modèle moyenné à une pression* sont rappelées ci-dessous sous *forme non conservative*.⁷

- **Équations de la phase continue**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \overline{\rho}_c^c) + \nabla \cdot (\alpha_c \overline{\rho}_c^c \mathbf{V}_c) = -\Gamma \quad (1.114a)$$

$$\alpha_c \overline{\rho}_c^c \frac{D_c \mathbf{V}_c}{Dt} = -\alpha_c \nabla \overline{p}_c^c + \nabla \cdot (\alpha_c (\overline{\boldsymbol{\tau}}_c^c + \boldsymbol{\tau}_c^T)) + \alpha_c \overline{\rho}_c^c \mathbf{g} - \mathbf{M}^* - \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_c) \quad (1.114b)$$

$$\alpha_c \overline{\rho}_c^c \frac{D_c I_c}{Dt} = -\nabla \cdot (\alpha_c (\overline{\mathbf{q}}_c^c + \mathbf{q}_c^T)) + \alpha_c \frac{D_c \overline{p}_c^c}{Dt} + \alpha_c D_c - \Pi^* - \Gamma (I^* - I_c) \quad (1.114c)$$

- **Équations de la phase dispersée**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \overline{\rho}_d^d) + \nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{V}_d) = \Gamma \quad (1.115a)$$

$$\alpha_d \overline{\rho}_d^d \frac{D_d \mathbf{V}_d}{Dt} = -\alpha_d \nabla \overline{p}_c^c + \nabla \cdot (\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T) + \alpha_d \overline{\rho}_d^d \mathbf{g} + \mathbf{M}^* + \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_d) \quad (1.115b)$$

- **Termes de transferts entre phases**

$$\Gamma = n \{ \dot{m}_d \mathcal{S} \} \quad (1.116)$$

$$\mathbf{M}^* + \Gamma \mathbf{V}^* = n \left\{ \oint (\boldsymbol{\sigma}_c + \overline{p}_c^c \mathbb{1}) \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\} + n \left\{ \oint \dot{m}_d \mathbf{v}_c \, ds \right\} \quad (1.117)$$

$$\Pi^* + \Gamma I^* = -n \left\{ \oint \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \right\} + n \left\{ \oint \dot{m}_d i_c \, ds \right\} \quad (1.118)$$

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, un modèle moyenné spécialement adapté aux écoulements diphasiques à phase dispersée a été écrit. Basé sur le modèle moyenné général qu'est le modèle à deux fluides, le modèle proposé ici tire parti de la topologie particulière des écoulements à phase dispersée où une des deux phases se présente sous la forme d'un ensemble d'inclusions de formes semblables.

Les équations d'évolution de la phase dispersée, et plus particulièrement les termes d'échanges entre phases qu'elle engendre, ont ainsi pu être réécrits en s'appuyant sur une modélisation particulière dérivée de la théorie cinétique, modélisation qui a l'avantage d'être assez intuitive. Un système d'équations de bilans *hybride*, c'est-à-dire mixant le modèle à deux fluides et la théorie cinétique a finalement été proposé ; le lien entre ces deux approches a pu être effectué à l'aide de formules de transformation reliant les quantités moyennes obtenues avec chacune des deux descriptions.

Les principales hypothèses qui ont été formulées pour établir ce modèle hybride sont listées ci-dessous.

7. Pour obtenir la *forme non conservative* d'une équation de bilan portant sur une grandeur φ , il suffit de multiplier l'équation de bilan portant sur la masse par φ , puis de soustraire l'équation résultante à la *forme conservative*.

- [H1] Les interfaces n'ont ni épaisseur, ni masse, ni quantité de mouvement, ni contraintes dues à la tension de surface.
- [H2] Les énergies de surface et de contrainte superficielle sont négligées
- [H3] Les bulles sont toutes sphériques.
- [H4] La suspension est faiblement inhomogène.
- [H5] La masse est répartie uniformément dans chaque bulle.
- [H6] Les bulles restent suffisamment petites pour leur garantir une température homogène égale à la température de l'interface.
- [H7] L'interface des bulles est à la température de saturation.
- [H8] Les transferts de masse et d'énergie sont répartis uniformément sur l'interface de chaque bulle.
- [H9] Le mouvement interne et la rotation des bulles sont négligeables devant les autres contributions.

Dans le cadre de ces hypothèses, la prochaine étape de l'étude sera la prise en compte de la polydispersion en taille et en vitesse de la population de bulles, et ce par l'intermédiaire des opérateurs de moyenne de population issus de la théorie cinétique. On verra ainsi dans le prochain chapitre que ces opérateurs peuvent être redéfinis en introduisant des fonctions de distribution en taille et en vitesse de la population de bulle, permettant ainsi une description de la phase dispersée tenant compte des spectres de taille et de vitesse des bulles.

1.5 Références

- ACHARD, J.-L. : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- ARIS, R. : *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- BATCHELOR, G.K. : The stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(3):545–570, 1970.
- BUYEVICH, Y.A. : Statistical hydromechanics of disperse systems – 1. Physical background and general equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(3):489–507, 1971.
- BUYEVICH, Y.A. et SHCHELCHKOVA, I.N. : Flow of dense suspensions. *Progress in Aerospace Sciences*, 18(2):121–150, 1978.
- DELHAYE, J.-M. : Jump conditions and entropy sources in two-phase systems – Local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 1:395–409, 1974.
- DELHAYE, J.-M. : Local instantaneous equations. DELHAYE, J.-M., GIOT, M. et RIETHMULLER, M.L., éditeurs : *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*, pages 95–116. Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- DELHAYE, J.-M. : Some issues related to the modeling of interfacial areas in gas-liquid flows – 1. the conceptual issues. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 329:397–410, 2001.
- DELHAYE, J.-M. : *Thermohydraulique des Réacteurs*. Collection Génie Atomique. EDP Sciences, 2008.

- DEREVICH, I.V. et ZAICHIK, L.I. : An equation for the probability density, velocity, and temperature of particles in a turbulent flow modelled by a random gaussian field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 54(5):631–637, 1990.
- DREW, D.A. et PASSMAN, S.L. : *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- HIBIKI, T. et ISHII, M. : One-group interfacial area transport of bubbly flows in vertical round tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(15):2711–2726, 2000.
- ISHII, M. : *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- JACKSON, R. : Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a newtonian fluid. *Chemical Engineering Science*, 52(15):2457–2469, 1997.
- KATAOKA, I. : Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5):745–758, 1986.
- LHULLIER, D. : Ensemble averaging in slightly non-uniform suspensions. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 11(6):649–661, 1992.
- LHULLIER, D. et NADIM, A. : Fluid dynamics of particulate suspensions: Selected topics. *Proc. of the 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems (CMD9)*, Istanbul, Turkey – June 29-July 3 1998. World Scientific Publishing Corporation, 1999.
- LHULLIER, D., THEOFANOUS, T.G. et M.-S.LIOU : Multiphase flows: Compressible multi-hydrodynamics. CACUCI, D.G., éditeur : *Handbook of Nuclear Engineering*, volume 3, chapitre 25. Springer, 2010.
- MOREL, C. : On the surface equations in two-phase flows and reacting single-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 33:1045–1073, 2007.
- NIGMATULIN, R.I. : *Dynamics of Multiphase Media*. Hemisphere Publishing Corporation, 1991.
- REEKS, M.W. : Eulerian direct interaction applied to the statistical motion of particles in a turbulent fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(3):569–590, 1980.
- SAGAUT, P. : *Introduction à la simulation numérique des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, volume 30 de *Mathématiques et Application*. Springer, 1998.
- SCHWARTZ, L. : *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, 1965.
- SIMONIN, O. : Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Combustion and turbulence in two-phase flows*, Von Karman Lecture Series 1996-02. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- WU, Q., KIM, S., ISHII, M. et BEUS, S.G. : One-group interfacial area transport in vertical bubble flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(8-9):1103–1112, 1998.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.
- ZHANG, D.Z. et PROSPERETTI, A. : Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 267:185–219, 1994a.
- ZHANG, D.Z. et PROSPERETTI, A. : Ensemble phase-averaged equations for bubbly flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 6(9):2956–2970, 1994b.

Chapitre 2

Écoulements à bulles et polydispersion

Dans cette étude, on s'intéressera uniquement à la *polydispersion en taille et en vitesse* de la population de bulles, ces dernières étant toutes supposées à la température de saturation (cf. hypothèses H6 et H7). Dans le cadre des écoulements à bulles bouillants sous-saturés que l'on cherche à modéliser, on peut recenser au moins quatre phénomènes facteurs de polydispersion en taille :

- a) la *cinématique de condensation* : la condensation peut être plus ou moins rapide en fonction de l'état du milieu où se trouve la bulle, mais aussi de la vitesse relative de la bulle par rapport au liquide environnant ;
- b) la *compressibilité du gaz* : pour une bulle qui conserve sa masse, sa taille diminue lorsqu'augmente la densité du gaz qui la compose, et inversement ;
- c) la *coalescence de bulles* : des bulles peuvent entrer en collision et fusionner pour donner une bulle plus grosse ;
- d) la *fragmentation de bulles* : sous les contraintes exercées par le liquide, des bulles peuvent se diviser en plusieurs fragments plus petits.

Concernant la polydispersion en vitesse, deux principaux facteurs peuvent être recensés :

- a) la *polydispersion en taille* : les forces agissant sur une bulle étant fonction de sa taille, le mouvement de la bulle va également en dépendre ; on peut ainsi supposer que pour une taille de bulle donnée, à un instant donné et à une position donnée, il existe une vitesse unique caractéristique de la bulle ;
- b) la *turbulence de la population de bulles* qui peut induire une dispersion autour de la vitesse caractéristique de bulle.

Si la modélisation de la polydispersion en vitesse induite par la turbulence est essentielle dans les écoulements gaz/particules,¹ on supposera que pour les écoulements à bulles visés dans cette étude le mouvement des bulles est principalement contrôlé par le mouvement du liquide par l'intermédiaire des forces entre phases. Ces dernières dépendant du diamètre de bulles, on fera ici l'hypothèse que la *polydispersion en vitesse est uniquement liée à la polydispersion en taille*.

1. Les particules étant beaucoup plus denses que la phase porteuse, leur mouvement peut être fortement décorrélé du mouvement du gaz, comme cela a notamment été montré par Simonin *et al.* (2002), Février *et al.* (2005) ou encore Kaufmann *et al.* (2008). Ce n'est pas forcément le cas pour les écoulements à bulles dans lesquels le liquide porteur est au contraire plus dense que le gaz des bulles.

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'introduction de la polydispersion d'une population de bulles dans un modèle moyenné *via* une nouvelle écriture des termes moyens faisant intervenir une fonction de distribution des bulles. Après une revue rapide des méthodes pouvant être mise en œuvre pour traiter la polydispersion d'un essaim de bulles, on présentera dans une deuxième section le formalisme statistique permettant de décrire la population de bulles à l'aide d'une fonction de distribution. Puis, dans une troisième section, on s'intéressera au traitement de cette fonction à l'aide de la *méthode des moments* ; seront alors abordés l'écriture des équations supplémentaires nécessaires au formalisme de la méthode ainsi que la fermeture de la fonction de distribution des bulles.

2.1 Stratégies de modélisation de la polydispersion

La polydispersion d'une population de bulles peut être prise en compte par l'intermédiaire d'une fonction de distribution des bulles. Introduite par l'intermédiaire d'un formalisme statistique analogue à la théorie cinétique des gaz (Chapman et Cowling, 1952 ; Bird, 1994), cette fonction indique en un point et à un instant donnés comment sont distribuées les bulles selon différents paramètres caractéristiques de leur état ; dans notre cas la taille et la vitesse.

L'utilisation de ce formalisme permet d'introduire des moyennes statistiques faisant intervenir la fonction de distribution des bulles, moyennes qui ne sont en fait qu'une forme particulière des moyennes de population introduites au précédent chapitre. Cependant, la connaissance de la fonction de distribution et de son évolution est nécessaire si l'on veut pouvoir fermer tous les termes moyens apparaissant *via* ce formalisme statistique.

Deux grandes familles de méthodes ont vu le jour pour décrire l'évolution de la fonction de distribution des bulles.

2.1.1 Méthode multi-classes

La *méthode multi-classes* (Greenberg *et al.*, 1993 ; Carrica *et al.*, 1999), consiste à *discrétiser* la fonction de distribution en taille en un nombre fini de classes, chaque classe ayant un diamètre fixe (*cf.* figure 2.1). Trois équations de bilan moyennes (masse, quantité de mouvement, énergie) sont alors résolues pour chaque classe de bulles. La résolution d'un tel système permet de traiter "naturellement" la polydispersion en vitesse associée à la polydispersion en taille puisqu'une vitesse différente est calculée pour chaque taille de bulle.

Le fait que chaque classe de bulle garde une taille figée est un des points faibles de cette méthode. Morel *et al.* (2010) ont en effet montré que cela pouvait poser des problèmes aux bornes du spectre des tailles de bulles dans le cas d'une distribution qui évolue assez fortement au cours du temps. Un autre inconvénient de cette méthode n'est autre que les coûts de calculs qu'elle engendre : le nombre de classes nécessaire pour obtenir des résultats d'une qualité acceptable étant assez élevé, on peut se retrouver rapidement avec un nombre substantiel d'équations à résoudre rendant difficile d'accès certaines configurations d'écoulements complexes.²

2. Si l'on réfère aux travaux de Greenberg *et al.* (1993) et Bannari *et al.* (2008) notamment, une dizaine de classes est nécessaire pour modéliser correctement la population de bulles. Cela revient à résoudre une trentaine d'équations de bilan pour le système total : trois équations par classe de bulles (masse, quantité de mouvement et énergie) ainsi que trois équations pour la phase continue.

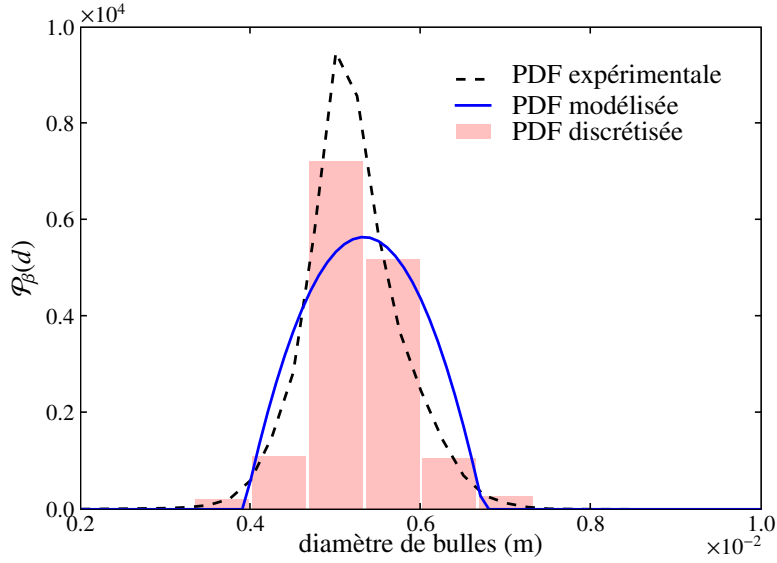


FIG. 2.1 – Comparaison de l'approche multi-classes (PDF discrétisée) et de la méthode des moments (PDF modélisée).

2.1.2 Méthode des moments

La *méthode des moments* (Hulburt et Katz, 1964), consiste à suivre l'évolution de certaines densités de moments de la fonction de distribution des bulles plutôt que la fonction de distribution elle-même, comme c'est le cas pour la méthode multi-classes. En plus des habituelles équations moyennes de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, on résout un certain nombre d'équations supplémentaires sur les premières densités de moments de la fonction de distribution des bulles. Cette dernière doit donc pouvoir être exprimée en fonction des densités de moment résolues si l'on veut obtenir un système d'équations fermé.

Pour ce faire, on *modélise* la fonction de distribution à l'aide d'une expression mathématique pré-supposée (*cf.* figure 2.1) et choisie de telle sorte que ses paramètres puisse être exprimés comme des fonctions de certaines de ses densités de moments. Le choix d'une forme mathématique adéquate est un des points essentiels de cette méthode ; plusieurs formes de fermetures peuvent être citées : polynôme de Laguerre (Hulburt et Katz, 1964), approximation par quadrature (McGraw, 1997 ; Marchisio et Fox, 2005) ou lois de distribution diverses (Lee, 1983 ; Kamp *et al.*, 2001 ; Ruyer *et al.*, 2007). C'est cette dernière solution qui a été choisie ici et qui sera développée dans la section 2.3.

On verra que le nombre d'équations supplémentaires à résoudre pour la méthode des moments est égal au nombre de paramètres de la loi mathématique choisie pour modéliser la fonction de distribution des bulles. Celui-ci étant généralement peu élevé (un ou deux, rarement plus), la méthode des moments est beaucoup plus légère et efficace du point de vue numérique que la méthode des classes ; elle nécessite néanmoins plus de développements théoriques préalables.

2.2 Représentation statistique de la population de bulles

Dans la théorie cinétique des gaz telle que formulée par Chapman et Cowling (1952) puis Bird (1994), l'évolution d'un gaz est déterminée à partir d'une approche statistique faisant intervenir une fonction de

distribution en vitesse de la population des molécules ; cette fonction indique en un point et à un instant donnés comment sont distribuées les molécules du gaz en fonction de leur vitesse.

L'analogie qui existe entre l'agitation thermique des molécule d'un gaz et le mouvement erratique d'inclusions dans un champ fluide turbulent a conduit différents auteurs à appliquer ce formalisme à la modélisation de la phase dispersée des écoulements diphasiques turbulent (Reeks, 1980, 1991, 1992 ; Zaichik, 1996 ; Minier et Peirano, 2001 ; Kaufmann *et al.*, 2008). Le formalisme a également été étendu à des fonctions de distributions dépendant non seulement de la vitesse mais aussi d'autres paramètres de l'inclusion, comme le diamètre ou la température (Achard, 1978 ; Derevich et Zaichik, 1990 ; Simonin, 1996), et même de la vitesse du fluide porteur (Simonin, 1996 ; Minier et Peirano, 2001 ; Simonin *et al.*, 2002 ; Février *et al.*, 2005). En plus de pouvoir introduire simplement la polydispersion de la population de bulles, cette approche "théorie cinétique" par fonction de distribution a également l'avantage de pouvoir traiter les phénomènes de collisions.³

Deux types de fonctions de distribution peuvent être définies pour caractériser les statistiques de la population : des fonctions de densité de probabilité, normalisées, et des fonctions de densité de présence ou fonctions de distribution en nombre. Ces deux types de fonctions ainsi que les moyennes statistiques définie à partir d'elles seront abordés successivement dans les prochains paragraphes. On y verra également comment l'équation de transport sur la fonction de densité de présence permet de déterminer une équation de transport sur toute quantité moyenne statistique.

2.2.1 Fonction de densité de probabilité

La phase dispersée est constituée de différents éléments discrets, les bulles, qui évoluent dans un champ fluide, le liquide. Pour chaque bulle de la population, on choisit différents paramètres représentatifs de l'état de la bulle à l'instant t . Ces différents paramètres peuvent être vus comme les *coordonnées* d'un espace vectoriel spécifique à la configuration de la population de bulles et appelé *espace des phases*, ou *espace des possibles*. Ces coordonnées de phases, toutes *indépendantes les unes des autres*, regroupent d'une part les coordonnées lagrangiennes du centre de chaque bulle et, d'autre part, tous les autres paramètres jugés pertinents pour caractériser l'état des bulles, comme leur volume, diamètre, vitesse, masse ou encore température.

Comme on ne s'intéresse dans cette étude qu'à la modélisation de la polydispersion en taille et en vitesse de la population de bulles, on ne retiendra ici que deux coordonnées de phases supplémentaires, à savoir le diamètre des bulles⁴ ainsi que la vitesse de leur centre. Ces deux grandeurs seront respectivement notées β et ς dans l'espace des phases pour ne pas les confondre avec leur *alter ego* respectif dans l'espace physique que l'on notera d et $\mathbf{w}$. De la même façon, on notera $\mathbf{y}$ le vecteur de position des centres de bulles dans l'espace des phases, son *alter ego* de l'espace physique étant le vecteur $\mathbf{X}$, déjà rencontré au premier chapitre.

Notons $\mathcal{X}_\alpha$ le vecteur d'état d'une bulle α à l'instant t , regroupant l'ensemble des coordonnées de phases de la bulle α :

$$\mathcal{X}_\alpha \hat{=} (\mathbf{y}_\alpha, \beta_\alpha, \varsigma_\alpha) \quad (2.1)$$

La phase dispersée est entièrement décrite lorsque l'on est capable de lister à chaque instant l'ensemble des états de toutes les bulles de la population. Cela étant inenvisageable si un grand nombre de bulles

3. Les phénomènes de coalescence et fragmentation de bulles peuvent être assimilés à des mécanismes de collisions particuliers (Simonin, 1996).

4. Notons que l'on aurait très bien pu choisir le volume ou la surface des bulles pour caractériser leur taille ; ces quantités étant toutes reliées analytiquement, les statistiques de population obtenues avec l'une ou l'autre d'entre elles sont équivalentes (Fox, 2007).

compose la population, on a recours à une description statistique de la population de bulles faisant appel à des fonctions de distribution.

Considérons la configuration de N_b bulles se trouvant dans un certain volume. Cette configuration particulière regroupe les états des N_b bulles, soit :

$$\mathfrak{C}_{N_b} = (\mathcal{X}_1; \mathcal{X}_2; \dots; \mathcal{X}_{N_b}) = (\mathbf{y}_1, \beta_1, \boldsymbol{\varsigma}_1; \mathbf{y}_2, \beta_2, \boldsymbol{\varsigma}_2; \dots; \mathbf{y}_{N_b}, \beta_{N_b}, \boldsymbol{\varsigma}_{N_b}). \quad (2.2)$$

On note $\mathcal{P}^{(N_b)}$ la *fonction de densité de probabilité* (ou PDF pour *Probability Density Function* en anglais) à N_b bulles attachée à la configuration particulière $\mathfrak{C}_{N_b}$; cette PDF est définie telle que :⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) d\mathfrak{C}_{N_b} \\ = \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\xi}_1; \mathbf{y}_2, \boldsymbol{\xi}_2; \dots; \mathbf{y}_{N_b}, \boldsymbol{\xi}_{N_b}) d\mathbf{y}_1 d\boldsymbol{\xi}_1 d\mathbf{y}_2 d\boldsymbol{\xi}_2 \dots d\mathbf{y}_{N_b} d\boldsymbol{\xi}_{N_b} \end{aligned} \quad (2.3)$$

représente la probabilité que l'ensemble des N_b bulles contenues dans le volume de référence aient leur configuration située dans l'élément de volume $d\mathfrak{C}_{N_b}$ autour de la configuration $\mathfrak{C}_{N_b}$ (Bird, 1994 ; Achard, 1978).

Cette PDF à N_b bulles peut être réduite à une PDF marginale à k bulles, notée $\mathcal{P}^{(k)}$, en fixant l'état de certaines bulles de la population et en intégrant sur les états des bulles restantes (Bird, 1994 ; Achard, 1978). En fixant l'état des k premières bulles de la population, on obtient :

$$\mathcal{P}_{1,2,\dots,k}^{(k)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_k) = \int \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) d\mathcal{X}_{k+1} d\mathcal{X}_{k+2} \dots d\mathcal{X}_{N_b}. \quad (2.4)$$

On en déduit la PDF marginale à une bulle $\mathcal{P}_1^{(1)}$:

$$\mathcal{P}_1^{(1)}(\mathcal{X}_1) = \int \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) d\mathfrak{C}_{N_b-1}. \quad (2.5)$$

ainsi que la PDF marginale à deux bulles $\mathcal{P}_{1,2}^{(2)}$:

$$\mathcal{P}_{1,2}^{(2)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \int \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) d\mathfrak{C}_{N_b-2}. \quad (2.6)$$

Cette dernière PDF trouve son utilité lorsque l'on considère des phénomènes de collisions binaires entre des paires de bulles de la population, comme le font par exemple Février *et al.* (2005) pour une suspension gaz/particules. On va cependant supposer dans cette étude que les corrélations entre les bulles seront suffisamment faibles dans nos suspensions pour pouvoir approcher la PDF marginale à deux bulles par le produit des deux PDF marginales à une bulle correspondantes, soit :

$$\mathcal{P}_{1,2}^{(2)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \cong \mathcal{P}_1^{(1)}(\mathcal{X}_1) \mathcal{P}_2^{(1)}(\mathcal{X}_2). \quad (2.7)$$

approximation caractérisant un certain caractère *chaotique* de la population (Bird, 1994).

2.2.2 Moyennes d'ensemble

À partir de ces différentes PDF, on peut redéfinir la notion de moyenne d'ensemble d'une quantité quelconque φ (Achard, 1978 ; Lhuillier, 1992 ; Zhang et Prosperetti, 1994) :

5. Dans un premier temps, et afin de ne pas alourdir les notations, les deux coordonnées de phases β et $\boldsymbol{\varsigma}$ seront regroupées sous un même vecteur que l'on notera $\boldsymbol{\xi}$; la différentielle $d\boldsymbol{\xi}$ correspondra quant à elle au produit des différentielles $d\beta$ et $d\boldsymbol{\varsigma}$.

$$\langle \varphi \rangle \triangleq \int \varphi(\mathfrak{C}_{N_b}) \mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) d\mathfrak{C}_{N_b}. \quad (2.8)$$

On définit également une moyenne conditionnelle $\langle \varphi \rangle_{\mathcal{X}_1}$ comme la moyenne d'ensemble de φ sur toutes les configurations contenant une bulle dans l'état $\mathcal{X}_1$ (Achard, 1978 ; Lhuillier, 1992 ; Zhang et Prosperetti, 1994) :

$$\langle \varphi \rangle_{\mathcal{X}_1} \triangleq \int \varphi(\mathfrak{C}_{N_b}) \mathcal{P}_{2,\dots,N_b}^{(N_b-1)}(\mathfrak{C}_{N_b-1} | \mathcal{X}_1) d\mathfrak{C}_{N_b-1} \quad (2.9)$$

où $\mathcal{P}_{2,\dots,N_b}^{(N_b-1)}(\mathfrak{C}_{N_b-1} | \mathcal{X}_1)$, qui correspond à une PDF conditionnée par l'état de la première bulle, est définie telle que :

$$\mathcal{P}_{2,\dots,N_b}^{(N_b-1)}(\mathfrak{C}_{N_b-1} | \mathcal{X}_1) d\mathfrak{C}_{N_b-1} \quad (2.10)$$

corresponde à la probabilité que les N_b bulles moins la première soient dans le volume élémentaire $d\mathfrak{C}_{N_b-1}$ autour de la configuration $\mathfrak{C}_{N_b-1}$, sachant que la première bulle est fixée à l'état $\mathcal{X}_1$. Cette PDF conditionnelle est reliée à la PDF inconditionnelle $\mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b})$ par la relation :⁶

$$\mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b}) = \mathcal{P}_1^{(1)}(\mathcal{X}_1) \mathcal{P}_{2,\dots,N_b}^{(N_b-1)}(\mathfrak{C}_{N_b-1} | \mathcal{X}_1). \quad (2.11)$$

En combinant cette dernière relation et la définition (2.9), on obtient une définition alternative de la moyenne d'ensemble :

$$\langle \varphi \rangle = \int \langle \varphi \rangle_{\mathcal{X}_1} \mathcal{P}_1^{(1)}(\mathcal{X}_1) d\mathcal{X}_1. \quad (2.12)$$

Cette dernière relation, combinée à la relation (2.7), permet de réduire la description statistique de la phase dispersée à la seule connaissance d'une PDF marginale à une seule bulle, cette dernière prenant l'appellation de *bulle test*.

2.2.3 Fonction de densité de présence

Introduisons à présent la *fonction de densité de présence* (ou NDF pour *Number Density Function* en anglais) associée à une bulle localisée au point $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t)$ de l'espace des phases, notée $\mathcal{F}$ et définie telle que :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \quad (2.13)$$

représente le nombre probable de bulles au temps t dont le centre est localisé dans l'élément de volume $[\mathbf{y}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}]$ et dont le vecteur de coordonnée de phase $\boldsymbol{\xi}$ est compris dans l'intervalle $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}]$. L'exposant $\mathcal{L}$ met en évidence le fait que cette NDF correspond à une description *lagrangienne* de la population.

De nombreux auteurs (Reeks, 1980 ; Simonin, 1996 ; Zaichik, 1996 ; Minier et Peirano, 2001 ; Février *et al.*, 2005 ; Fox, 2007) introduisent également une représentation discrète de $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ par l'intermédiaire d'une *fonction de densité de probabilité microscopique*, notée $\mathcal{W}_\alpha$, et définie telle que :

6. Notons que les trois PDF $\mathcal{P}^{(N_b)}(\mathfrak{C}_{N_b})$, $\mathcal{P}_1^{(1)}(\mathcal{X}_1)$ et $\mathcal{P}_{2,\dots,N_b}^{(N_b-1)}(\mathfrak{C}_{N_b-1} | \mathcal{X}_1)$ sont normalisées, c'est-à-dire que l'intégration sur leur espace de définition respectif donne l'unité.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \delta(\beta - d_{\alpha}(t)) \delta(\boldsymbol{\varsigma} - \mathbf{w}_{\alpha}(t)) \right\rangle.\end{aligned}\quad (2.14)$$

La fonction $\mathcal{W}_{\alpha}$ est donc une fonction de l'espace des phases décrivant l'histoire de la bulle α au cours du temps, faisant de ce fait le lien entre l'espace des phases et l'espace physique.

Utilisons la définition de la moyenne d'ensemble (2.12) pour développer la définition de $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ donnée ci-dessus :⁷

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) &= \sum_{\alpha=1}^{N_b} \left\langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Xi}_{\alpha}(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_b} \iint \left\langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Xi}_{\alpha}(t)) \right\rangle_{\mathcal{X}_{\alpha}} \mathcal{P}_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{y}_{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha}; t) d\mathbf{y}_{\alpha} d\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_b} \iint \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\alpha}) \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{\alpha}) \mathcal{P}_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{y}_{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha}; t) d\mathbf{y}_{\alpha} d\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_b} \mathcal{P}_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) \\ &= N_b \mathcal{P}_1^{(1)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t)\end{aligned}\quad (2.15)$$

où, pour écrire la dernière ligne, on a supposé que toutes les bulles étaient *interchangeables* et avaient ainsi la même influence sur le comportement global de la population, la première bulle étant choisie comme bulle test.

La NDF *lagrangienne* $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ peut être reliée à une NDF *eulérienne* par la relation (Minier et Peirano, 2001) :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y} = \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t) = \int \mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.16)$$

où la NDF eulérienne $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ est définie telle que :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.17)$$

corresponde au nombre probable de bulles au temps t à la position $\mathbf{x}$ et dont le vecteur de coordonnée de phase $\boldsymbol{\xi}$ est compris dans l'intervalle $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}]$. La relation (2.16) exprime simplement le fait qu'il y a équivalence des descriptions lagrangienne et eulérienne lorsque l'on fait coïncider $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ dans l'espace des phases. On en déduit la définition discrète de $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t) &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \int \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \delta(\beta - d_{\alpha}(t)) \delta(\boldsymbol{\varsigma} - \mathbf{w}_{\alpha}(t)) \right\rangle\end{aligned}\quad (2.18)$$

7. On emploie ici la notation condensée $\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Xi}_{\alpha}(t)) \triangleq \delta(\beta - d_{\alpha}(t)) \delta(\boldsymbol{\varsigma} - \mathbf{w}_{\alpha}(t))$.

ainsi que la relation entre NDF et PDF marginale eulériennes :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\xi; \mathbf{x}, t) = N_b \mathcal{P}_1^{(1)}(\xi; \mathbf{x}, t). \quad (2.19)$$

2.2.4 Densité numérique de bulles et moyennes de population

La densité numérique de bulles et les moyennes de population introduites au premier chapitre peuvent être redéfinies en faisant intervenir les fonctions de distribution introduites aux paragraphes précédents.

Ainsi, la densité numérique de bulles peut être déterminée par l'intégration de la NDF eulérienne sur les coordonnées de phase interne (Simonin, 1996) : ⁷

$$n(\mathbf{x}, t) = \int \mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\xi; \mathbf{x}, t) d\xi = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \delta(\xi - \Xi_{\alpha}(t)) d\xi \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \right\rangle \quad (2.20)$$

où l'on retrouve bien la définition de n donnée au précédent chapitre (cf. équation 1.56). La densité numérique de bulle peut donc être vue comme une PDF marginale de position (Oesterlé, 2006), le produit $n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ correspondant au nombre de bulles contenues dans le volume $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}]$.

En prenant en compte la définition de la moyenne d'ensemble (2.12), la moyenne de population (1.58) d'une grandeur φ se réécrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) \varphi(\xi_{\alpha}; \mathbf{x}, t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \iiint \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_1(t)) \varphi(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) \rangle_{\mathcal{X}_1} N_b \mathcal{P}_1^{(1)}(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) d\mathbf{y}_1 d\xi_1 d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \iiint \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \varphi(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) \mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) d\mathbf{y}_1 d\xi_1 d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \iint \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}, \xi_1; t) \mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \xi_1; t) d\xi_1 d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int \varphi(\xi_1; \mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\xi_1; \mathbf{x}, t) d\xi_1 \end{aligned} \quad (2.21a)$$

où l'on retrouve la définition statistique donnée par Simonin (1996) :

$$\langle \varphi \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int \varphi(\xi; \mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\xi; \mathbf{x}, t) d\xi. \quad (2.21b)$$

La même démarche peut être appliquée à la moyenne de population pondérée par la masse (1.59) : ⁸

$$\begin{aligned} \langle \langle \varphi \rangle \rangle(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t) \langle m \rangle(\mathbf{x}, t)} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_b} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}(t)) m(\beta_{\alpha}; \mathbf{x}, t) \varphi(\xi_{\alpha}; \mathbf{x}, t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t) \langle m \rangle(\mathbf{x}, t)} \iiint \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) m(\mathbf{y}_1, \beta_1; t) \varphi(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) \mathcal{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}_1, \xi_1; t) d\mathbf{y}_1 d\xi_1 d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\alpha_d(\mathbf{x}, t) \bar{\rho}_d^d(\mathbf{x}, t)} \int m(\beta; \mathbf{x}, t) \varphi(\xi; \mathbf{x}, t) \mathcal{F}^{\mathcal{E}}(\xi; \mathbf{x}, t) d\xi \end{aligned} \quad (2.22)$$

8. Deux possibilités s'offrent à nous : (a) soit la masse des bulles est choisie comme une coordonnée de phase interne de la configuration $\mathcal{C}_{N_b}$, ce que fait par exemple Simonin (1996) ; (b) soit elle est choisie comme une fonction de cette configuration. C'est cette dernière solution qui a été retenue ici, la masse étant exprimée comme une fonction du diamètre de bulle β : $m(\beta; \mathbf{x}, t) = \rho_d(\mathbf{x}, t) \frac{\pi}{6} \beta^3$.

où l'on a également utilisé l'approximation $\alpha_d \bar{\rho}_d^d \cong n \{m\}$ démontrée au précédent chapitre (cf. équation 1.80).

Notons qu'à partir de maintenant, *on emploiera uniquement des fonctions de distributions eulériennes* ; l'exposant $\mathcal{E}$ sera donc omis. Ce type fonction n'ayant plus que β et ς pour coordonnées de phases, on pourra parler de *fonctions de distributions jointes diamètre/vitesse*. Les coordonnées de phases β et ς seront en outre désignées par le terme de *coordonnées de phase interne*, par opposition à $\mathbf{x}$ et t considérés comme des *coordonnées de phase externe*.

2.2.5 Équations de transport de la fonction de densité de présence

En faisant le bilan local instantané du nombre de bulles dans un volume élémentaire de l'espace des phases, on arrive à établir de façon très générale l'équation de transport de la fonction de distribution $\mathcal{F}$ (Achard, 1978). Cette équation de transport, appelée *équation de Liouville-Boltzmann*, s'écrit de la façon suivante pour une NDF à deux coordonnées de phase interne β et ς :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(\beta, \varsigma; \mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\varsigma \mathcal{F}(\beta, \varsigma; \mathbf{x}, t)) \\ = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\dot{\beta} \mathcal{F}(\beta, \varsigma; \mathbf{x}, t)) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_i} (\dot{\varsigma}_i \mathcal{F}(\beta, \varsigma; \mathbf{x}, t)) + \dot{\mathcal{F}}(\beta, \varsigma; \mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

où i désigne l'indice spatial, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varsigma}$ correspondent aux vitesses de variation des coordonnées de phases et $\dot{\mathcal{F}}$ à la variation de l'inventaire de la population de bulles dues à des événements discrets (collisions, coalescence ou fragmentation de bulles, etc).

Comme le font remarquer Achard (1978) et Chevallier et Fabre (1988), cette équation ne sera fermée que si l'on sait se donner des lois décrivant les vitesses des coordonnées de phase interne, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varsigma}$, ainsi que le terme source $\dot{\mathcal{F}}$. Simonin (1996) définit les vitesses des coordonnées de phase interne de la façon suivante :

$$\dot{\beta} \triangleq \left\langle \frac{dd(t)}{dt} \middle| \beta, \varsigma \right\rangle \quad (2.24)$$

$$\dot{\varsigma} \triangleq \left\langle \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \middle| \beta, \varsigma \right\rangle \quad (2.25)$$

où $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ représente la dérivée lagrangienne de la grandeur $\varphi(t)$ attachée à une bulle unique et $\langle \varphi | \beta, \varsigma; \mathbf{x} \rangle$ correspond à la moyenne d'ensemble de φ conditionnée par le fait que les variables lagrangiennes $d(t)$ et $\mathbf{w}(t)$ soient respectivement égales à β et ς pour chaque bulle intervenant dans la moyenne.

Les vitesses $\dot{\beta}$ et $\dot{\varsigma}$ peuvent donc facilement être déterminées à partir des bilans sur une bulle unique (1.42) et (1.46) établis au précédent chapitre :

$$\frac{dd}{dt} = \frac{2}{\rho_d} \dot{m}_d - \frac{d}{3\rho_d} \frac{d\rho_d}{dt} \quad (2.26)$$

$$m \frac{d\mathbf{w}}{dt} = m \mathbf{g} + \pi d^2 \dot{m}_d (\mathbf{v}_c - \mathbf{w}) + \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d \, ds \quad (2.27)$$

Le cas du terme source $\dot{\mathcal{F}}$ sera quant à lui abordé plus tard.

2.2.6 Décomposition de la NDF jointe diamètre/vitesse

Comme énoncé dans l'introduction de ce chapitre, on fait l'hypothèse que la *polydispersion en vitesse est uniquement liée à la polydispersion en taille* par l'intermédiaire des forces entre phases. Aussi, on considère à l'instar de Massot (2007) que pour une taille de bulle donnée, à un instant donné et à une position donnée, il existe une vitesse unique caractéristique de la taille de bulle, notée $\bar{\mathbf{w}}(\beta; \mathbf{x}, t)$, et que la *dispersion autour de cette vitesse est nulle*. Cette hypothèse de *monodispersion de vitesse* pour une taille donnée permet de décomposer la NDF $\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}, t)$ de la façon suivante (Mossa, 2005 ; Massot, 2007) :⁹

$$\mathcal{F}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) \delta(\boldsymbol{\varsigma} - \bar{\mathbf{w}}(\beta; \mathbf{x}, t)) \quad (2.28)$$

où $\mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t)$ est une PDF en diamètre définie par :

$$\mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) \triangleq \frac{\int \mathcal{F}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x}, t) d\boldsymbol{\varsigma}}{n(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.29)$$

Cette fonction de distribution est *normalisée* puisque l'on déduit facilement de l'équation précédente que :

$$\int \mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) d\beta = 1. \quad (2.30)$$

2.2.7 Équation de transport d'une quantité moyenne

À partir de l'équation de Liouville-Boltzmann (2.23), on peut déterminer une équation de transport d'une quantité moyenne générique $\{\varphi\}$. Cette équation, appelée *équation générale d'Enskog*, s'obtient en multipliant l'équation (2.23) par $\varphi(\beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x}, t)$, puis en intégrant l'équation résultante sur les coordonnées de phase interne :¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n \{\varphi\}) + \nabla \cdot (n \{\varphi \boldsymbol{\varsigma}\}) - \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\varsigma} \cdot \nabla \varphi \right) \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \\ = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \varsigma_i} \left\langle \frac{dw_i}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \varphi \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \end{aligned} \quad (2.31)$$

où les dépendances en β , $\boldsymbol{\varsigma}$, $\mathbf{x}$ et t ont été omises dans un souci d'allègement de la notation. Cette équation pondérée par la densité numérique de bulles est utile pour les quantités géométriques.

Pour les quantités définies par unité de masse, on préfère généralement utiliser une formulation pondérée par la masse ; cette formulation alternative est obtenue en multipliant l'équation (2.23) par le produit $m(\beta; \mathbf{x}, t) \varphi(\beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x}, t)$, puis en intégrant l'équation résultante selon les coordonnées de phase interne :¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n \{m\} \{\varphi\}) + \nabla \cdot (n \{m\} \{\varphi \boldsymbol{\varsigma}\}) - \iint \left(\frac{\partial m \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\varsigma} \cdot \nabla (m \varphi) \right) \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \\ = \iint \frac{\partial m \varphi}{\partial \beta} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \frac{\partial m \varphi}{\partial \varsigma_i} \left\langle \frac{dw_i}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \\ + \iint m \varphi \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

9. Notons que pour un modèle plus élaboré prenant en compte une dispersion autour de la vitesse caractéristique $\bar{\mathbf{w}}$, une loi un peu plus évoluée que la distribution de Dirac serait introduite pour modéliser la distribution des vitesses comme par exemple une gaussienne (Mossa, 2005) ou une maxwellienne (Simonin *et al.*, 2002).

10. Les détails du calcul pourront être trouvés dans la thèse de Mossa (2005).

En remplaçant successivement φ par 1 et $\boldsymbol{\varsigma}$ dans cette dernière équation, on retrouve bien la version "théorie cinétique" des équations de masse (1.67b) et de quantité de mouvement (1.68b) de la phase dispersée vues au premier chapitre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (n\{m\}) + \nabla \cdot (n\{m\}\{\mathbf{w}\}) = \iint \pi \beta^2 \langle \dot{m} | \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint m \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \end{array} \right. \quad (2.33a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (n\{m\}\{\mathbf{w}\}) + \nabla \cdot (n\{m\}\{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}\}) \\ = n\{m\} \mathbf{g} + \iint \left\langle \oint \sigma_c \cdot \mathbf{n}_d ds \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \pi \beta^2 \mathbf{v}_c \langle \dot{m} | \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \\ + \iint m \boldsymbol{\varsigma} \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \end{array} \right. \quad (2.33b)$$

Mise à part la façon d'écrire les moyennes de population, la seule différence entre ces deux équations et celles du précédent chapitre réside dans la présence des termes collisionnels en $\dot{\mathcal{F}}$ absents précédemment.

Sous l'hypothèse que les bulles soient sphériques, on peut également retrouver les équations géométriques (1.65) et (1.66) du précédent chapitre en remplaçant successivement φ par $S = \pi \beta^2$ et $\mathcal{V} = \frac{\pi}{6} \beta^3$ dans l'équation (2.31) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\{\mathcal{V}\}) + \nabla \cdot (n\{\mathcal{V}\} \mathbf{W}_{\mathcal{V}}) = \iint \frac{\pi}{2} \beta^2 \left\langle \frac{d\mathcal{V}}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \frac{\pi}{6} \beta^3 \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\{S\}) + \nabla \cdot (n\{S\} \mathbf{W}_S) = \iint 2\pi \beta \left\langle \frac{dS}{dt} \middle| \beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{F} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} + \iint \pi \beta^2 \dot{\mathcal{F}} d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \quad (2.35)$$

où $\mathbf{W}_{\mathcal{V}} \triangleq \langle \delta_d \mathcal{V} \mathbf{w} \rangle / \langle \delta_d \mathcal{V} \rangle$ et $\mathbf{W}_S \triangleq \langle \delta_d S \mathbf{w} \rangle / \langle \delta_d S \rangle$. Avec le formalisme statistique présenté dans cette section, ces vitesses de transport s'écrivent maintenant :

$$n\{\mathcal{V}\} \mathbf{W}_{\mathcal{V}} = \iint \frac{\pi}{6} \beta^3 \boldsymbol{\varsigma} \mathcal{F}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma} = \frac{\pi}{6} n \int \beta^3 \mathcal{P}_{\beta}(\beta) \bar{\mathbf{w}}(\beta) d\beta \quad (2.36)$$

$$n\{S\} \mathbf{W}_S = \iint \pi \beta^2 \boldsymbol{\varsigma} \mathcal{F}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma} = \pi n \int \beta^2 \mathcal{P}_{\beta}(\beta) \bar{\mathbf{w}}(\beta) d\beta. \quad (2.37)$$

Ces deux flux peuvent être facilement déterminés si l'on sait se donner des expressions pour $\mathcal{P}_{\beta}(\beta)$ et $\bar{\mathbf{w}}(\beta)$.

Notons que si la coalescence et la fragmentation de bulles sont les seuls phénomènes retenus pour modéliser le terme collisionnel, celui-ci disparaît du second membre de (2.34) puisque ces deux phénomènes n'impactent pas le taux de présence du gaz.¹¹

2.2.8 Conclusion sur la description statistique de la phase dispersée

Nous avons pu voir que la description statistique de la phase dispersée présentée dans cette section était parfaitement compatible avec l'approche "théorie cinétique" présentée dans le chapitre 1 et qu'elle permettait en outre de prendre en compte des termes collisionnels absents jusqu'à présent.

L'écriture des termes de transferts moyens du modèle moyenné hybride peut donc être envisagée en utilisant la moyenne de population (2.21b) faisant appel à la fonction de densité de présence de

11. Ce terme ne disparaît toutefois pas si la présence de nucléation homogène est avérée. Dans cette étude, on considérera uniquement de la nucléation en paroi qui, traitée comme une condition aux limites, n'apparaîtra pas directement dans les équations de bilan.

la population de bulles. Le calcul de ces termes moyens nécessite néanmoins de pouvoir déterminer l'évolution spatio-temporelle de $\mathcal{F}$, ce qui va être abordé dans la section suivante à l'aide du formalisme de la *méthode des moments*.

Les principales hypothèses formulées dans cette section sont rappelées ci-dessous.

- [H10] Pour une taille de bulle donnée, à un instant donné et une position donnée, il existe une vitesse unique caractéristique de la taille de bulle, la dispersion autour de cette vitesse caractéristique étant nulle.
- [H11] Une PDF marginale à deux bulles peut être approchée par le produit des deux PDF marginales à une bulle correspondantes.
- [H12] Les bulles sont interchangeables ayant ainsi toutes la même influence sur le comportement global de la population.

2.3 Méthode des moments

Comme évoqué à la section 2.1, la *méthode des moments* consiste à suivre l'évolution de certaines densités de moments de la fonction de distribution des bulles ; on a donc besoin d'écrire des équations de transport sur ces quantités.

Puisque nous avons supposé une monodispersion de vitesse de bulle pour une taille donnée (*cf.* paragraphe 2.2.6), on ne s'intéressera ici qu'à l'évolution des densités de moments en diamètre.

2.3.1 Densités de moment en diamètre

Commençons tout d'abord par définir la densité de moment en diamètre d'ordre γ (Hulburt et Katz, 1964 ; Fox, 2007) :

$$\mathcal{M}_\gamma(\mathbf{x}, t) \triangleq \iint \beta^\gamma \mathcal{F}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}; \mathbf{x}, t) d\beta d\boldsymbol{\varsigma} = n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) d\beta = n \{\beta^\gamma\}. \quad (2.38)$$

On peut remarquer que les premières densités de moments en diamètre sont reliées à certaines quantités géométriques moyennes de la suspension :

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \quad (2.39a)$$

$$\mathcal{M}_1(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) d_{10}(\mathbf{x}, t) \quad (2.39b)$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} n \{S\} \cong \frac{1}{\pi} a_I(\mathbf{x}, t) \quad (2.39c)$$

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{x}, t) = \frac{6}{\pi} n \{V\} \cong \frac{6}{\pi} \alpha_d(\mathbf{x}, t) \quad (2.39d)$$

où a_I désigne la concentration d'aire interfaciale, α_d le taux de présence de la phase dispersée et d_{10} le *diamètre moyen arithmétique* des bulles (au sens de l'espérance mathématique). Plus généralement, on peut définir une infinité de diamètres moyens caractéristiques de la population de bulles à l'aide de la relation (Mugele et Evans, 1951) :

$$d_{pq} \triangleq \left(\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_q} \right)^{\frac{1}{p-q}} \quad (2.40)$$

p	q	Ordre ($p+q$)	Symbole	Nom usuel	Champ d'application
1	0	1	d_{10}	longueur	comparaisons, évaporation
2	0	2	d_{20}	surface	absorption
2	1	3	d_{21}	surface-longueur	adsorption
3	0	3	d_{30}	volume	hydrologie
3	1	4	d_{31}	volume-longueur	évaporation, diffusion moléculaire
3	2	5	d_{32}	Sauter	transfert de masse, efficacité, réaction chimique
4	3	7	d_{43}	De Brouckere	combustion

TAB. 2.1 – Diamètres moyens usuels construits à partir des premières densités de moments de la fonction de distribution en diamètre des bulles (adapté de Mugele et Evans, 1951).

où p et q sont des entiers positifs ($p \neq q$). Le tableau 2.1 recense quelques diamètres moyens construits à partir des premières densités de moments ainsi que leur champ d'application.

Une autre grandeur statistique utile pour caractériser une loi de distribution est son *écart type*, défini par :

$$\tilde{\sigma} \triangleq \sqrt{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta - \left(\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \beta \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \right)^2} = \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n} \right)^2}. \quad (2.41)$$

et permettant d'évaluer la dispersion de la population autour du diamètre moyen d_{10} .¹²

2.3.2 Équation de transport des densités de moment

L'équation de transport des densités de moments en diamètre est obtenue en remplaçant simplement φ par β^γ dans l'équation d'Enskog (2.31) :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{W}_\gamma) = n \int \gamma \beta^{\gamma-1} \left\langle \frac{dd}{dt} \middle| \beta, \bar{\mathbf{w}}(\beta); \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta + \iint \beta^\gamma \dot{\mathcal{F}}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma} \quad (2.42)$$

où la vitesse de transport $\mathbf{W}_\gamma$, *différente pour chaque densité de moment*, est définie par :¹³

$$\mathbf{W}_\gamma(\mathbf{x}, t) \triangleq \frac{\{\beta^\gamma \boldsymbol{\varsigma}\}}{\{\beta^\gamma\}} = \frac{n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{w}}(\beta; \mathbf{x}, t) d\beta}{\mathcal{M}_\gamma(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.43)$$

En injectant (2.26) dans (2.42), l'équation de transport sur $\mathcal{M}_\gamma$ s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{W}_\gamma) \\ = n \frac{2\gamma}{\rho_d} \int \beta^{\gamma-1} \left\langle \dot{m} \middle| \beta, \bar{\mathbf{w}}(\beta); \mathbf{x} \right\rangle \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \\ - n \frac{\gamma}{3\rho_d} \int \beta^\gamma \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}}(\beta) \cdot \nabla \rho_d \right) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta + \iint \beta^\gamma \dot{\mathcal{F}}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

12. L'*écart type* est en fait la racine carrée de la *variance*, grandeur statistique pouvant être interprétée comme la *moyenne des carrés des écarts à la moyenne*.

13. Si l'on sait se donner une expression analytique pour $\mathcal{P}_\beta(\beta)$ et $\bar{\mathbf{w}}(\beta)$, la détermination des différentes vitesses géométriques $\mathbf{W}_\gamma$ se résume donc à un simple calcul intégral.

En plus des expressions pour $\mathcal{P}_\beta(\beta)$ et $\bar{\mathbf{w}}(\beta)$, cette équation sera complètement fermée si l'on sait se donner une expression pour le terme collisionnel en $\dot{\mathcal{F}}$. La modélisation de $\bar{\mathbf{w}}(\beta)$ et $\dot{\mathcal{F}}$ sera abordée dans la deuxième partie de cette étude consacrée à la fermeture du modèle dans le cadre des écoulements à bulles bouillants. Puisque conditionné par le formalisme mathématique de la méthode des moments, le choix d'une expression mathématique pour modéliser la PDF $\mathcal{P}_\beta(\beta)$ sera par contre abordé au prochain paragraphe.

2.3.3 Fermeture de la fonction de densité de probabilité en diamètre

De nombreux auteurs se sont déjà penché sur le problème de la répartition en diamètres d'une population de bulles ou de gouttes. Cela a débouché sur un grand nombre de lois empiriques, plus ou moins représentatives de la réalité expérimentale. On peut citer par exemple les lois de Rosin-Ramler et de Nukiyama-Tanasawa, les lois log-normale, log-normale "upper-limit", root-normal ou encore log-hyperbolique. Non détaillées ici, les expressions de ces différentes lois pourront notamment être trouvées dans les travaux de Babinski et Sojka (2002) et Paloposki (1994).

Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, l'utilisation de la méthode des moments pour décrire le comportement de la population de bulles nécessite de la PDF en taille utilisées certaines propriétés mathématiques. La première est de pouvoir être exprimée comme une fonction de ses densités de moments par l'intermédiaire de ses paramètres. L'évolution des densités de moments étant connue par la résolution de l'équation de transport (2.44), l'évolution spatio-temporelle de la PDF en taille peut ainsi facilement en être déduite.

Si une relation entre les paramètres et les densités de moments d'une PDF est absolument nécessaire, il n'est cependant pas toujours possible d'en établir une : la plupart des lois citées précédemment ne peuvent en fait être utilisées dans le cadre de la méthode des moments pour cette raison. Intéressons nous à présent aux lois de distribution compatibles avec la méthode.

- **Loi log-normale**

Introduite en 1941 par Kolmogorov qui s'intéressait aux distributions en tailles obtenues par le broyage continu de particules solides (Shimizu et Crow, 1988), la loi log-normale (LN) a deux paramètres et prend la forme :

$$\mathcal{P}_\beta^{LN}(\beta; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) \beta} \exp \left(- \left(\frac{\ln \left(\frac{\beta}{d_{00}(\mathbf{x}, t)} \right)}{\sqrt{2} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t)} \right)^2 \right) \quad \text{pour } 0 \leq \beta < +\infty \quad (2.45)$$

où le paramètre d_{00} correspond au diamètre médian caractéristique de la fonction de distribution et $\hat{\sigma}$ à un paramètre de largeur. Une variable est distribuée selon une loi log-normale si son logarithme est distribué selon une gaussienne (ou loi normale), centrée en $\ln d_{00}$ et d'écart type $\hat{\sigma}$. Un exemple de loi log-normale est donné à la figure 2.2.

En plus de présenter une allure assez représentative des granulométries rencontrées expérimentalement dans la gamme d'écoulements visés par cette étude (*cf.* figures 2.3 et 2.4), cette loi a une expression mathématique bien conditionnée nous permettant d'établir une relation analytique entre ses paramètres et ses densités de moments (Kamp *et al.*, 2001) :

$$\mathcal{M}_\gamma^{LN} = n d_{00}^\gamma \exp \left(\frac{\hat{\sigma}^2 \gamma^2}{2} \right). \quad (2.46)$$

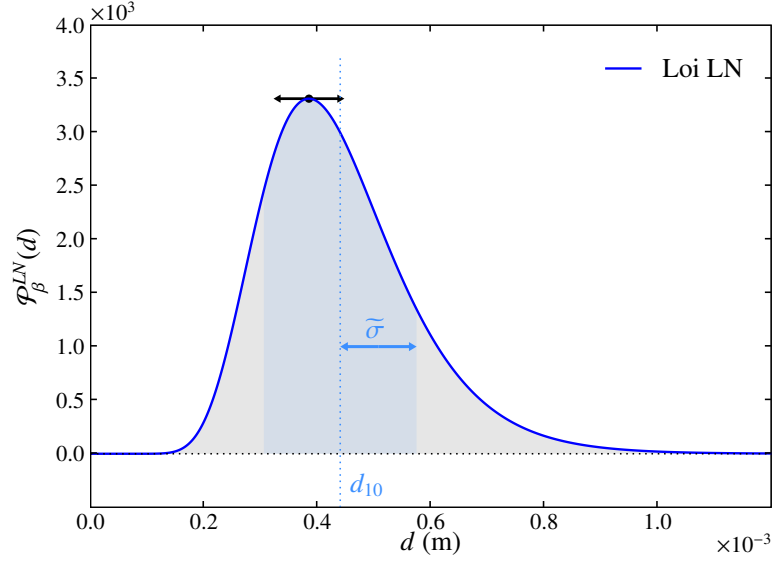


FIG. 2.2 – Exemple de loi de distribution log-normale (LN).

ce qui permet également d'en déduire les expressions de son diamètre moyen arithmétique et de son écart type :

$$\begin{cases} d_{10} = d_{00} \exp\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) \\ \tilde{\sigma} = d_{00} \sqrt{\exp(2\hat{\sigma}^2) - \exp(\hat{\sigma}^2)} \end{cases} \quad (2.47a)$$

$$\tilde{\sigma} = d_{00} \sqrt{\exp(2\hat{\sigma}^2) - \exp(\hat{\sigma}^2)} \quad (2.47b)$$

Cette souplesse mathématique fait de la loi log-normale la fonction de distribution sans doute la plus utilisée à l'heure actuelle pour décrire la distribution en diamètre d'une grande variété de suspensions formées de gouttes, de bulles ou de particules solides (Lee, 1983 ; Kamp *et al.*, 2001 ; Mossa, 2005 ; Morel et Laviéville, 2009).

La loi log-normale présente tout de même un inconvénient de taille : *elle est incapable de traiter les termes de fragmentation de bulles*. Comme l'a montré Riou dans sa thèse (2003), ceci est dû à son support semi-infini qui entraîne la divergence des intégrales intervenant dans le calcul des termes sources de fragmentation. Toujours d'après Riou, la seule solution pour contourner ce problème est tout simplement d'utiliser une autre expression pour modéliser $\mathcal{P}_\beta$, cette nouvelle expression devant présenter un support borné. On pourrait envisager l'utilisation d'une loi log-normale "upper-limit"¹⁴ ou d'une loi bêta, mais ces deux types de loi ne permettent pas malheureusement pas d'établir une relation analytique entre leurs paramètres et leurs densités de moments.

• Loi quadratique à un paramètre

Développée récemment par Ruyer *et al.* (2007, 2009), la loi quadratique à un paramètre (Q1) s'écrit :

$$\mathcal{P}_\beta^{Q1}(\beta; \mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{6\beta(d_{\max}(\mathbf{x}, t) - \beta)}{d_{\max}^3(\mathbf{x}, t)} & \text{pour } 0 \leq \beta \leq d_{\max}(\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.48)$$

14. Introduite par Mugele et Evans (1951), la loi log-normale "upper-limit" est une loi log-normale modifiée de façon à présenter un diamètre maximal, celui-ci devenant un paramètre supplémentaire de la PDF.

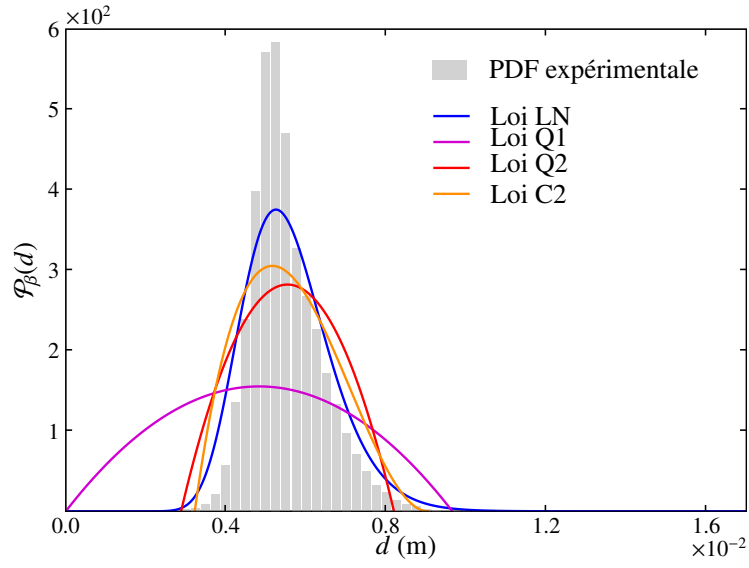


FIG. 2.3 – Comparaison de l'allure de différentes lois de distribution par rapport à une distribution de taille de bulle expérimentale d'un écoulement à bulles adiabatique sans changement de phase. Données expérimentales tirées de la banque de données MTLOOP (Lucas *et al.*, 2005).

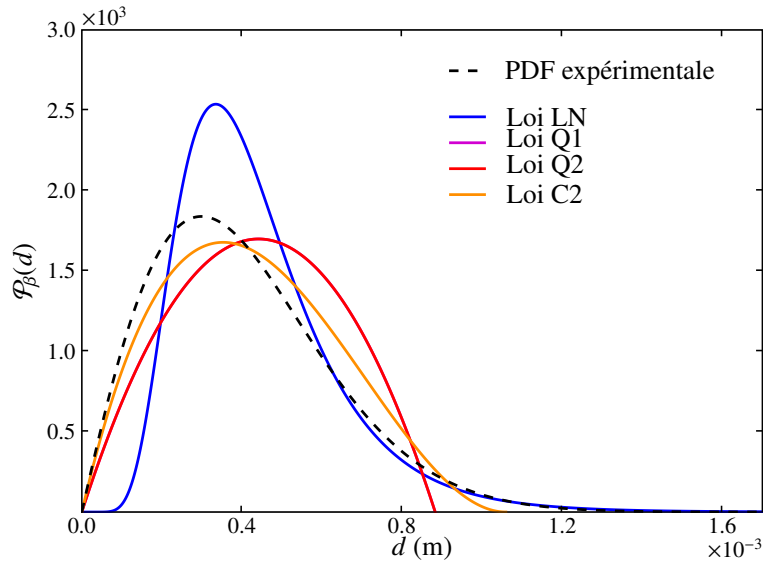


FIG. 2.4 – Comparaison de l'allure de différentes lois de distribution par rapport à une distribution de taille de bulle expérimentale d'un écoulement bouillant à bulles ; les lois Q1 et Q2 sont confondues. Données expérimentales tirées de la banque de données DEBORA (Garnier *et al.*, 2001).

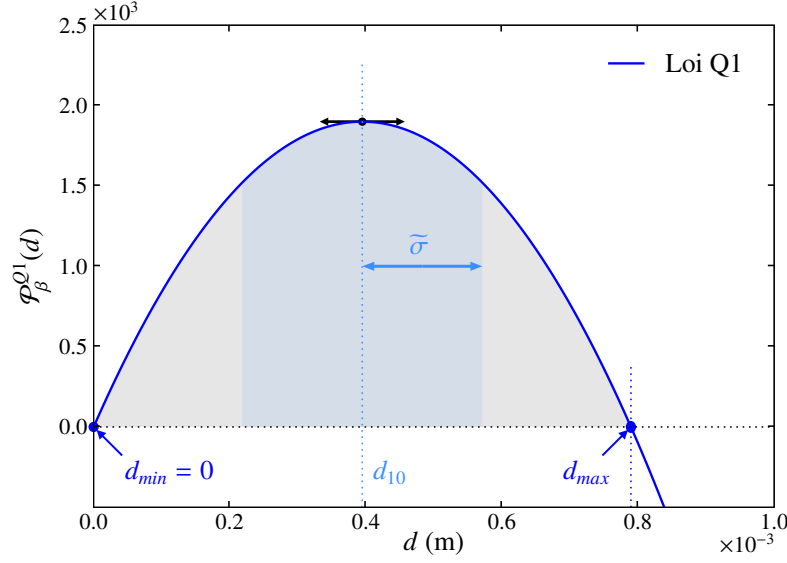


FIG. 2.5 – Exemple de loi de distribution quadratique à un paramètre (Q1).

où le paramètre d_{max} correspond au diamètre de bulle maximal de la population. Cette loi est une simple parabole ayant un diamètre minimal nul ; son allure symétrique fait qu'elle atteint son maximum en $d_{max}/2$ (cf. figure 2.5). De support borné, cette loi est donc capable de traiter la fragmentation de bulles, ce qui était d'ailleurs une des motivations de son développement. La relation donnant les densités de moment en fonction de son paramètre est la suivante (Ruyer *et al.*, 2007) :

$$\mathcal{M}_\gamma^{Q1} = \frac{6 n d_{max}^\gamma}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)}. \quad (2.49)$$

On en déduit les expressions du diamètre moyen arithmétique et de l'écart type de la loi Q1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{10} = \frac{d_{max}}{2} \\ \tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{d_{max}}{2} \end{array} \right. \quad (2.50a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{10} = \frac{d_{max}}{2} \\ \tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{d_{max}}{2} \end{array} \right. \quad (2.50b)$$

grandeurs qui sont reliées analytiquement par le biais du paramètre d_{max} .

Le point fort de la loi Q1 est la simplicité de son expression mathématique. Celle-ci permet en effet une prise en compte maximale de la polydispersion puisque la détermination de la plupart des termes moyens statistiques se résume à calculer des intégrales de polynômes, intégrales pouvant se calculer aisément "à la main".

L'inconvénient évident de cette loi quadratique est par contre une faible représentativité des granulométries expérimentales (cf. figures 2.3 et 2.4) : d'une part en raison de sa symétrie de forme et d'autre part en raison de la relation liant l'écart type et le diamètre moyen arithmétique qui lui confère un diamètre minimal forcément nul. Cette dernière caractéristique ne permet pas à la loi Q1 de dégénérer vers une *distribution monodisperse*¹⁵ : lorsque l'écart type de la loi tend vers zéro, c'est aussi forcément le cas pour son diamètre moyen arithmétique.

15. Une distribution monodisperse est assimilable à une distribution de Dirac.

Si l'allure de la loi Q1 n'est pas particulièrement représentative des essais de bulles expérimentaux, Morel *et al.* (2010) ont montré que cette loi était tout de même capable de prédire correctement l'évolution de l'aire interfaciale volumique et du taux de vide dans un écoulement à bulles adiabatique ascendant. Il semblerait ainsi qu'il ne soit pas nécessaire de reproduire fidèlement la fonction de distribution en taille de la population de bulles tant que les grandeurs statistiques de la population (écart type, diamètres moyens, etc) sont raisonnablement estimées.

• Loi quadratique à deux paramètres

Dans cette étude nous avons choisi de poursuivre les développements sur la loi Q1 et de lui adjoindre un second paramètre afin de dissocier l'évolution de l'écart type de celle du diamètre moyen de la population.

Définition et propriétés géométriques

L'expression mathématique de cette loi quadratique à deux paramètres (Q2) est la suivante : ¹⁶

$$\mathcal{P}_\beta^{Q2}(\beta; \mathbf{x}, t) \triangleq \begin{cases} \frac{6(d_{\max}(\mathbf{x}, t) - \beta)(\beta - d_{\min}(\mathbf{x}, t))}{(d_{\max}(\mathbf{x}, t) - d_{\min}(\mathbf{x}, t))^3} & \text{pour } d_{\min}(\mathbf{x}, t) \leq \beta \leq d_{\max}(\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.51)$$

où les deux paramètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$ correspondent respectivement aux diamètres minimal et maximal de la population pour lesquels $\mathcal{P}_\beta^{Q2}(\beta) = 0$. Un exemple de loi Q2 est présenté à la figure 2.6.

La définition de $\mathcal{M}_\gamma$ (2.38) permet de déterminer la relation entre les paramètres et les densités de moments de la loi Q2 :

$$\mathcal{M}_\gamma^{Q2} = 6n \left(\frac{d_{\max}^{\gamma+3} - d_{\min}^{\gamma+3}}{(\gamma+2)(\gamma+3)(d_{\max} - d_{\min})^3} + \frac{d_{\max} d_{\min}^{\gamma+2} - d_{\max}^{\gamma+2} d_{\min}}{(\gamma+1)(\gamma+2)(d_{\max} - d_{\min})^3} \right) \quad (2.52)$$

ce qui donne pour les premières densités de moments :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0 = n \end{cases} \quad (2.53a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 = \frac{n}{2}(d_{\max} + d_{\min}) \end{cases} \quad (2.53b)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_2 = \frac{n}{10}(3d_{\max}^2 + 4d_{\max}d_{\min} + 3d_{\min}^2) \end{cases} \quad (2.53c)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_3 = \frac{n}{10}(d_{\max} + d_{\min})(2d_{\max}^2 + d_{\max}d_{\min} + 2d_{\min}^2) \end{cases} \quad (2.53d)$$

L'inversion de ce système permet d'obtenir des expressions pour les paramètres de la loi Q2 en fonction de ses trois premières densités de moments :

$$\begin{cases} d_{\max} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} + \sqrt{5} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} \end{cases} \quad (2.54a)$$

$$\begin{cases} d_{\min} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} - \sqrt{5} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} \end{cases} \quad (2.54b)$$

16. La condition de normalisation (2.30) entre $d_{\min}$ et $d_{\max}$ a été prise en compte pour établir cette expression.

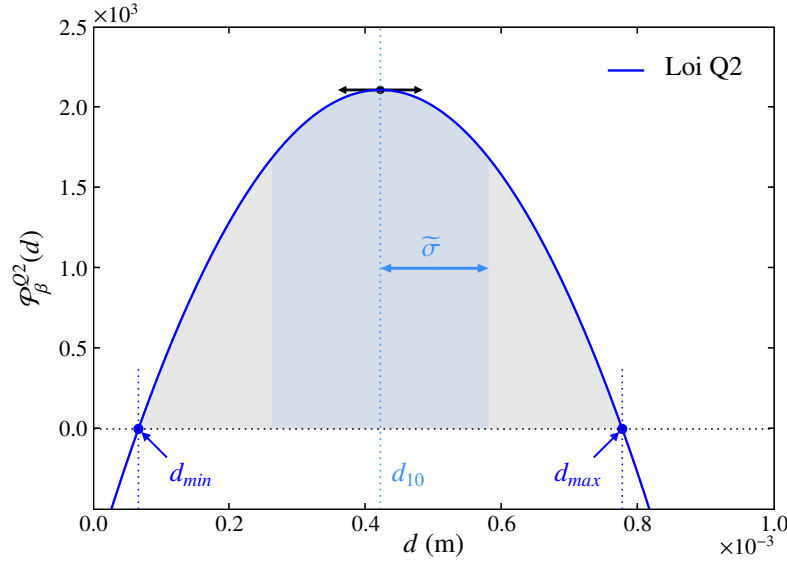


FIG. 2.6 – Exemple de loi de distribution quadratique à deux paramètres (Q2).

Par ailleurs, le système (2.53) permet également d'établir une expression reliant les premières densités de moments :

$$\mathcal{M}_3 n^2 - 3 \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 n + 2 \mathcal{M}_1^3 = 0. \quad (2.55)$$

La résolution de ce polynôme du second degré en n permet d'obtenir une *relation géométrique* nous donnant n en fonction des premières densités de moments de $\mathcal{P}_\beta^{Q2}$:

$$n = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}_2^3}{\mathcal{M}_3^2} \frac{1}{\mathcal{Y}^*} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{1}{\mathcal{Y}^*}} \right) \quad (2.56)$$

où $\mathcal{Y}^*$ désigne un paramètre géométrique adimensionnel défini tel que :

$$\mathcal{Y}^* \triangleq \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3}. \quad (2.57)$$

L'utilité de ce paramètre géométrique sera vue plus loin.

Diamètre moyen arithmétique et écart type

Une formulation alternative de la loi Q2 peut être obtenue en utilisant comme paramètres un diamètre moyen caractéristique et un paramètre de largeur à l'image de la loi log-normale. On choisit donc le diamètre moyen arithmétique d_{10} et l'écart type $\tilde{\sigma}$ comme nouveaux paramètres, ces grandeurs statistiques étant par définition des fonctions des premières densités de moments de la loi de distribution.

À partir du système (2.54) et des définitions de d_{10} et de $\tilde{\sigma}$ (2.40) et (2.41), on obtient aisément les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{10} = \frac{d_{max} + d_{min}}{2} \end{array} \right. \quad (2.58a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma} = \frac{d_{max} - d_{min}}{2 \sqrt{5}} \end{array} \right. \quad (2.58b)$$

système que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\begin{cases} d_{min} = d_{10} - \sqrt{5} \tilde{\sigma} \\ d_{max} = d_{10} + \sqrt{5} \tilde{\sigma}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.59a) \\ (2.59b) \end{matrix}$$

Avec ces nouveaux paramètres, l'expression mathématique de la loi Q2 devient :

$$\mathcal{P}_\beta^{Q2}(\beta) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}\tilde{\sigma}} \left(1 - \left(\frac{\beta - d_{10}}{\sqrt{5}\tilde{\sigma}} \right)^2 \right) & \text{pour } d_{min} \leq \beta \leq d_{max} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.60)$$

et ses premières densités de moments s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 = n d_{10} & (2.61a) \\ \mathcal{M}_2 = n (d_{10}^2 + \tilde{\sigma}^2) & (2.61b) \\ \mathcal{M}_3 = n d_{10} (d_{10}^2 + 3\tilde{\sigma}^2). & (2.61c) \end{cases}$$

Écart type adimensionnel

De façon à obtenir une formulation adimensionnelle de la loi Q2 qui sera plus commode pour calculer les termes moyens intégraux, on introduit à présent le paramètre $\tilde{\sigma}^*$ défini tel que :

$$\tilde{\sigma}^* \triangleq \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} = \frac{\sqrt{5}\tilde{\sigma}}{d_{10}}. \quad (2.62)$$

Ce paramètre peut être vu comme un écart type adimensionnel. Notons que $\tilde{\sigma}^*$ a l'intéressante propriété d'avoir une valeur toujours comprise entre 0 et 1, les conditions limites étant les suivantes :

$$\tilde{\sigma}^* = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{min} = 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{\sigma} = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.63a) \\ (2.63b) \end{matrix}$$

En injectant $\tilde{\sigma}^*$ dans l'expression de $\mathcal{P}_\beta^{Q2}$, on obtient :

$$\mathcal{P}_\beta^{Q2}(\beta^*) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{1}{d_{10}} (Q_2^* \beta^{*2} + Q_1^* \beta^* + Q_0^*) & \text{pour } d_{min}^* \leq \beta^* \leq d_{max}^* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.64)$$

avec les coefficients adimensionnels :

$$Q_2^*(\tilde{\sigma}^*) = -\frac{1}{\tilde{\sigma}^{*3}} \quad (2.65a)$$

$$Q_1^*(\tilde{\sigma}^*) = \frac{2}{\tilde{\sigma}^{*3}} \quad (2.65b)$$

$$Q_0^*(\tilde{\sigma}^*) = \frac{\tilde{\sigma}^{*2} - 1}{\tilde{\sigma}^{*3}} \quad (2.65c)$$

et où l'on a introduit un diamètre de bulle sans dimension $\beta^* \triangleq \beta/d_{10}$. Les diamètres minimal et maximal rendus sans dimension de la même manière s'écrivent :

$$\begin{cases} d_{min}^* = 1 - \tilde{\sigma}^* \\ d_{max}^* = 1 + \tilde{\sigma}^*. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.66a) \\ (2.66b) \end{matrix}$$

Conditionnement géométrique des densités de moments de la loi Q2

Nous avons vu que la valeur de $\tilde{\sigma}^*$ pouvait caractériser les deux cas limites de la loi Q2, à savoir un diamètre minimal nul ou un écart type nul. On va voir que ces deux configurations géométriques peuvent aussi être traduites en terme de conditions sur les densités de moments de $\mathcal{P}_\beta^{Q2}$ par l'intermédiaire de $\mathcal{Y}^*$.

Lorsque le *diamètre minimal est nul*, la loi Q2 se confond avec la loi Q1 ; on peut ainsi écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{min} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} - \sqrt{5} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.67a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{max} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} + \sqrt{5} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} = 2 d_{10} \end{array} \right. \quad (2.67b)$$

où la première équation peut être réécrite sous la forme :

$$n = \frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}_1^2}{\mathcal{M}_2}. \quad (2.68)$$

En injectant cette relation dans (2.55), on obtient finalement la valeur suivante pour $\mathcal{Y}^*$:

$$\mathcal{Y}^* = \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3} = \frac{9}{10}. \quad (2.69)$$

La condition de *nullité de l'écart type* se traduit quant à elle par la relation :

$$n = \frac{\mathcal{M}_1^2}{\mathcal{M}_2}. \quad (2.70)$$

En injectant cette relation dans (2.55), on obtient une seconde valeur limite pour $\mathcal{Y}^*$:¹⁷

$$\mathcal{Y}^* = \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3} = 1. \quad (2.71)$$

Finalement, le conditionnement géométrique de la PDF Q2 se réduit à un simple conditionnement sur le paramètre géométrique adimensionnel $\mathcal{Y}^*$:

$$0,9 \leq \mathcal{Y}^* \leq 1. \quad (2.72)$$

• Loi cubique à deux paramètres

Si la loi quadratique à deux paramètres a réglé le défaut de la loi Q1, à savoir un écart type et un diamètre moyen analytiquement liés, elle présente toujours l'inconvénient d'avoir une allure symétrique peu représentative des granulométries expérimentales. On se propose à présent d'écrire une loi de distribution *cubique*, à deux paramètres également, mais présentant une *dissymétrie de forme* vers les petits diamètres (cf. figure 2.7). Ce type de loi d'allure similaire à une loi log-normale sera ainsi plus représentative des distributions en diamètres que l'on va chercher à modéliser (cf. figures 2.3 et 2.4).

17. Il est intéressant de noter que cette condition est également valable pour la loi log-normale. En effet, d'après les résultats de Kamp *et al.* (2001), le paramètre de largeur de la loi log-normale est donné par la relation $\hat{\sigma} = \sqrt{\ln(1/\mathcal{Y}^*)}$; on en déduit donc que la condition de nullité de $\tilde{\sigma}$ est là aussi équivalente à la relation $\mathcal{Y}^* = 1$.

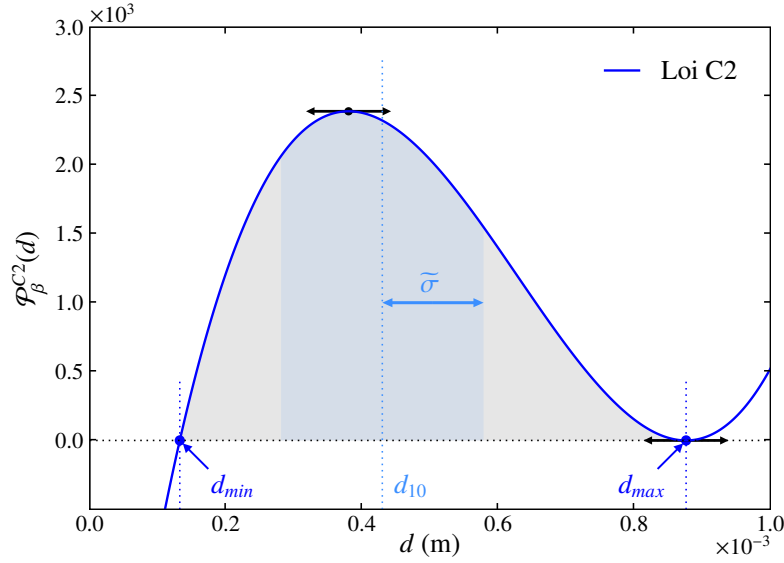


FIG. 2.7 – Exemple de loi de distribution cubique à deux paramètres (C2).

Définition et propriétés géométriques

La loi cubique à deux paramètres (C2) a pour expression : ¹⁸

$$\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta; \mathbf{x}, t) \triangleq \begin{cases} \frac{12 (d_{\max}(\mathbf{x}, t) - \beta)^2 (\beta - d_{\min}(\mathbf{x}, t))}{(d_{\max}(\mathbf{x}, t) - d_{\min}(\mathbf{x}, t))^4} & \text{pour } d_{\min}(\mathbf{x}, t) \leq \beta \leq d_{\max}(\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.73)$$

où les deux paramètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$ correspondent à nouveau aux diamètres minimal et maximal pour lesquels $\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta) = 0$.

Le calcul des densités de moments en diamètre par la relation (2.38) donne :

$$\mathcal{M}_\gamma^{C2} = 12n \left(\frac{2d_{\max}^{\gamma+4} + (\gamma+2)d_{\min}^{\gamma+4}}{(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(d_{\max} - d_{\min})^4} - \frac{2d_{\max}^{\gamma+3}d_{\min} + 2(\gamma+1)d_{\max}d_{\min}^{\gamma+3}}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(d_{\max} - d_{\min})^4} + \frac{d_{\max}^2d_{\min}^{\gamma+2}}{(\gamma+1)(\gamma+2)(d_{\max} - d_{\min})^4} \right) \quad (2.74)$$

L'obtention et la résolution de l'équation géométrique permettant d'obtenir une relation entre n et les autres densités de moments est détaillée à l'annexe A.1.

Formulations alternatives de la loi C2

Comme pour la loi Q2, des formulations alternatives de la loi cubique à deux paramètres peuvent être écrites. Celles-ci étant obtenues en suivant le même raisonnement que pour la loi quadratique à deux paramètres, le détail des calculs ainsi que l'étude du conditionnement géométrique de la loi C2 ont été placés en annexe (cf. annexes A.2 et A.3 respectivement).

¹⁸. Les conditions de normalisation (2.30) entre $d_{\min}$ et $d_{\max}$ et de tangente horizontale en $d_{\max}$ ont été prises en compte pour établir l'expression mathématique de la loi C2.

La première formulation alternative de la loi C2 peut être écrite en utilisant le diamètre moyen arithmétique d_{10} et l'écart type $\tilde{\sigma}$ comme paramètres plutôt que d_{min} et d_{max} :

$$\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta) = \begin{cases} \frac{12}{625} \frac{1}{\tilde{\sigma}^4} (\beta - d_{10} - 3\tilde{\sigma})^2 (\beta - d_{10} + 2\tilde{\sigma}) & \text{pour } d_{min} \leq \beta \leq d_{max} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.75)$$

où d_{10} et $\tilde{\sigma}$ sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} d_{10} = \frac{2d_{max} + 3d_{min}}{5} \end{cases} \quad (2.76a)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \frac{d_{max} - d_{min}}{5}. \end{cases} \quad (2.76b)$$

Une formulation de $\mathcal{P}_\beta^{C2}$ en variable adimensionnelle peut également être écrite ; en posant $\beta^* = \beta/d_{10}$ on obtient :

$$\mathcal{P}_{\beta^*}^{C2}(\beta^*) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{1}{d_{10}} (C_3^* \beta^{*3} + C_2^* \beta^{*2} + C_1^* \beta^* + C_0^*) & \text{pour } d_{min}^* \leq \beta^* \leq d_{max}^* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.77)$$

avec les coefficients adimensionnels :

$$\begin{cases} C_3^*(\tilde{\sigma}^*) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5\tilde{\sigma}^*} \right)^4 \end{cases} \quad (2.78a)$$

$$\begin{cases} C_2^*(\tilde{\sigma}^*) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 3}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5\tilde{\sigma}^*} \right)^3 \end{cases} \quad (2.78b)$$

$$\begin{cases} C_1^*(\tilde{\sigma}^*) = - \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 1}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 3}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5\tilde{\sigma}^*} \right)^2 \end{cases} \quad (2.78c)$$

$$\begin{cases} C_0^*(\tilde{\sigma}^*) = - \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 1}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 1}{\tilde{\sigma}^*} \right)^2 \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5\tilde{\sigma}^*} \right). \end{cases} \quad (2.78d)$$

et où l'écart type adimensionnel $\tilde{\sigma}^*$ a été défini tel que :

$$\tilde{\sigma}^* \triangleq \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} = \frac{5\tilde{\sigma}}{2d_{10} + \tilde{\sigma}}. \quad (2.79)$$

2.3.4 Conclusion sur la méthode des moments

La méthode des moments permet de traiter la polydispersion en modélisant la fonction de distribution en taille de la population de bulles par une fonction mathématique relativement simple. On a vu que cette expression se devait de répondre à certaines contraintes mathématiques pour pouvoir être compatible avec le formalisme de la méthode mais aussi pour pouvoir prendre en compte la fragmentation de bulles.

Au regard de ces restrictions, deux lois de fermetures ont été proposées pour la suite de l'étude : les lois quadratique et cubique à deux paramètres. On a vu que les paramètres de ces deux fonctions de distribution pouvaient être exprimés comme des fonctions des densités de moments d'ordre 1 et 2 ainsi que de la densité numérique de bulles. Cette dernière pouvant être également exprimée comme une fonction de $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ à l'aide d'une relation géométrique propre à chaque type de loi.

Pour un système d'équations à une seule pression comme le nôtre, la détermination du taux de présence du gaz α_d peut être directement déduite de l'équation de masse. $\mathcal{M}_3$ et α_d étant par ailleurs égaux

au facteur $\pi/6$ près, la résolution d'une équation de bilan sur la densité de moment M_3 est en conséquence superflue. En conséquence, en plus des habituelles équations moyennes du modèle à deux fluides, seules deux équations de bilan sur les densités de moment M_1 et M_2 nécessitent d'être résolues pour déterminer l'évolution des deux paramètres de la PDF en taille de la population.

La prochaine étape de l'étude est maintenant la fermeture de tous les termes de transfert de notre système d'équations impliquant la fonction de distribution des bulles par l'intermédiaire de la moyenne de population, et cela dans le cadre particulier des écoulements bouillants à bulles sous-saturés.

2.4 Références

- ACHARD, J.-L. : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- BABINSKI, E. et SOJKA, P.E. : Modeling drop size distributions. *Progress in Energy and Combustion Science*, 28:303–329, 2002.
- BANNARI, R., KERDOUSS, F., SELMA, B., BANNARI, A. et PROULX, P. : Three-dimensional mathematical modeling of dispersed two-phase flow using class method of population balance in bubble columns. *Computers and Chemical Engineering*, 32:3224–3237, 2008.
- BIRD, G.A. : *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow*. Oxford Engineering Science Series. Clarendon Press, Oxford, 2^e édition, 1994.
- CARRICA, P.M., DREW, D., BONETTO, F. et LAHEY JR., R.T. : A polydisperse model for bubbly two-phase flow around a surface ship. *International Journal of Multiphase Flow*, 25:257–305, 1999.
- CHAPMAN, S. et COWLING, T.G. : *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, 2^e édition, 1952.
- CHEVALLIER, J.P. et FABRE, J. : Écoulements diphasiques dispersés : établissement des équations de bilan et problèmes de fermeture. *La Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, 2:157–162, 1988.
- DEREVICH, I.V. et ZAICHIK, L.I. : An equation for the probability density, velocity, and temperature of particles in a turbulent flow modelled by a random gaussian field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 54(5):631–637, 1990.
- FOX, R.O. : Introduction and fundamentals of modeling approaches for polydisperse multiphase flows. MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 1–40. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- FÉVRIER, P., SIMONIN, O. et SQUIRES, K.D. : Partitioning of particle velocities in gas-solid turbulent flows into a continuous field and a spatially uncorrelated random distribution : theoretical formalism and numerical study. *Journal of Fluid Mechanics*, 533:1–46, 2005.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- GREENBERG, J.B., SILVERMAN, I. et TAMBOUR, Y. : On the origins of spray sectional conservation equations. *Combustion and Flames*, 96(1-2):90–96, 1993.

- HULBURT, H.M. et KATZ, S. : Some problems in particle technology – A statistical mechanical formulation. *Chemical Engineering Science*, 19:555–574, 1964.
- KAMP, A.M., CHESTERS, A.K., COLIN, C. et FABRE, J. : Bubble coalescence in turbulent flows : a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1363–1396, 2001.
- KAUFMANN, A., MOREAU, M., SIMONIN, O. et HELIE, J. : Comparison between Lagrangian and mesoscopic Eulerian modelling approaches for inertial particles suspended in decaying isotropic turbulence. *Journal of Computational Physics*, 227:6448–6472, 2008.
- LEE, K.W. : Change of particle size distribution during Brownian coagulation. *Journal of Colloid and Interface Science*, 92(2):315–325, 1983.
- LHUILIER, D. : Ensemble averaging in slightly non-uniform suspensions. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 11(6):649–661, 1992.
- LUCAS, D., KREPPER, E. et PRASSER, H.-M. : Development of co-current air-water flow in a vertical pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 31:1304–1328, 2005.
- MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O. : Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments. *Journal of Aerosol Science*, 36:43–73, 2005.
- MASSOT, M. : Eulerian multi-fluid models for polydisperse evaporating sprays. MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 79–124. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- MCGRAW, R. : Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments. *Aerosol Science and Technology*, 27(2):255–265, 1997.
- MINIER, J.-P. et PEIRANO, E. : The PDF approach to turbulent dispersed two-phase flows. *Physics Reports*, 352(1-3):1–214, 2001.
- MOREL, C. et LAVIÉVILLE, J.M. : Modeling of multi-size bubbly flow and application to the simulation of boiling flows with the NEPTUNE_CFD code. *Science and Technology of Nuclear Installations*, Article ID 953527, 2009.
- MOREL, C., RUYER, P., SEILER, N. et J.M. LAVIÉVILLE : Comparison of several models for multi-size bubbly flows on an adiabatic experiment. *International Journal of Multiphase Flow*, 36:25–39, 2010.
- MOSSA, J.-B. : *Extension polydisperse pour la description Euler-Euler des écoulements diphasiques réactifs*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- MUGELE, R.A. et EVANS, H.D. : Droplet size distribution in sprays. *Industrial and Engineering Chemistry*, 43(6):1317–1324, 1951.
- OESTERLÉ, B. : *Écoulements Multiphasiques – Des fondements aux méthodes d'ingénierie*. Lavoisier. Hermes Science Publication, 2006.
- PALOPOSKI, T. : *Drop size distributions in liquid sprays*. Thèse de doctorat, Helsinki University of Technology, 1994.
- REEKS, M.W. : Eulerian direct interaction applied to the statistical motion of particles in a turbulent fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(3):569–590, 1980.

- REEKS, M.W. : On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 3(3):446–456, 1991.
- REEKS, M.W. : On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 4(6):1290–1302, 1992.
- RIOU, X. : *Contribution à la modélisation de l'aire interfaciale en écoulement gaz-liquide en conduite*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- BUYER, P. et SEILER, N. : Advanced model for polydispersion in size in boiling flows. *La Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, 4:65–71, 2009. ISSN 0018-6368.
- BUYER, P., SEILER, N., BEYER, M. et WEISS, F.-P. : Bubble size distribution modelling for the numerical simulation of bubbly flows. *Proceedings of the 6th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2007), Leipzig, Germany – July 9-13, 2007*.
- SHIMIZU, K. et CROW, E.L. : History, genesis and properties. CROW, E.L. et SHIMIZU, K., éditeurs : *Log-normal Distributions: Theory and Applications*, volume 88 de *Statistics: Textbooks & Monographs*, chapitre 1, pages 1–26. Marcel Dekker, Inc., 1988.
- SIMONIN, O. : Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Combustion and turbulence in two-phase flows*, Von Karman Lecture Series 1996-02. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- SIMONIN, O., FÉVRIER, P. et LAVIÉVILLE, J. : On the spatial distribution of heavy-particle velocities in turbulent flows: From continuous field to particulate chaos. *Journal of Turbulence*, 3(40):1–18, 2002.
- ZAICHIK, L.I. : An equation for the particle velocity probability density function in inhomogeneous turbulent flow. *Fluid Dynamics*, 31(2):261–267, 1996.
- ZHANG, D.Z. et PROSPERETTI, A. : Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 267:185–219, 1994.

Deuxième partie

RELATIONS DE FERMETURES

APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS BOUILLANTS SOUS-SATURÉS

Chapitre 3

Forces hydrodynamiques moyennes

Ce chapitre ouvre la deuxième partie de notre étude consacrée à la fermeture du modèle moyenné hybride (*cf.* chapitre 1) tout en prenant en compte la polydispersion en taille et en vitesse d'un essaim de bulles (formalisme présenté au chapitre 2). Dans cette deuxième partie, on s'oriente plus particulièrement vers la modélisation des écoulements bouillants à bulles ascendants, le but étant de simuler l'expérience DEBORA, un écoulement à bulles ascendant dans une conduite verticale à section circulaire (*cf.* Garnier *et al.*, 2001).

La première étape de cette deuxième partie abordée ici consiste à fermer de la force moyenne entre phase, qui, comme nous l'avons vu au premier chapitre, peut s'exprimer comme la moyenne des forces hydrodynamiques agissant sur chaque bulle de la population. Le deuxième chapitre, a quant à lui mis en évidence le fait qu'en considérant les bulles de la population comme interchangeable et suffisamment peu corrélées entre elles, on pouvait se contenter d'étudier une seule bulle de la population en particulier, les statistiques de population étant ensuite exprimées à l'aide de fonctions de densité de probabilité.

La détermination des forces moyennes va donc passer par deux étapes. En premier lieu, on étudiera le cas de figure d'une bulle isolée évoluant dans un champ fluide infini. Dans un second temps on détaillera l'obtention des forces hydrodynamiques moyennes ; celles-ci pourront être qualifiées de *polydisperses* puisqu'on verra qu'elle feront intervenir les grandeurs statistiques de la population de bulles.

3.1 Bulle isolée évoluant dans un milieu infini

Dans cette section consacrée à l'étude d'une bulle évoluant dans un milieu infini, trois points seront développés successivement : les différentes formes que peut prendre une telle bulle, le bilan des forces agissant sur elle ainsi que sa vitesse terminale.

3.1.1 Différentes formes de bulle

Une bulle plongée dans un liquide peut se déformer sous l'action du liquide environnant. La forme que va prendre la bulle va dépendre des propriétés physiques des deux fluides mais aussi de paramètres propres à la bulle comme sa taille (ou son diamètre équivalent) et sa vitesse relative. Les différentes familles de formes susceptibles d'être observées peuvent être caractérisées à l'aide de trois nombres adimensionnels bien connus :

- a) le *nombre de Reynolds de bulle*, Re_b , qui représente le rapport des effets inertiels sur les effets visqueux :

$$Re_b \triangleq \frac{\|\Delta \mathbf{v}\| d}{\nu_c} \quad (3.1)$$

avec $\|\Delta \mathbf{v}\|$ la norme de la vitesse relative de bulle et ν_c la viscosité cinématique du liquide ;

- b) le *nombre d'Eötvös*, Eo , permettant d'évaluer la déformabilité d'une bulle ; il est ainsi défini comme le ratio des forces de gravité sur les forces de tension de surface :

$$Eo \triangleq \left(\frac{d}{\zeta} \right)^2 \quad (3.2)$$

où ζ désigne la longueur capillaire définie par :

$$\zeta \triangleq \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_c - \rho_d)}} \quad (3.3)$$

avec g le module de l'accélération de la pesanteur et σ la tension de surface ;

- c) le *nombre de Morton*, Mo ou M , qui n'implique que des propriétés physiques du liquide et du gaz ainsi que la pression statique :

$$Mo \triangleq \frac{g \mu_c^4 (\rho_c - \rho_d)}{\rho_c^2 \sigma^3}. \quad (3.4)$$

Grâce à ces trois nombres adimensionnels, Clift *et al.* (1978) ont construit une carte permettant de déterminer la forme d'une bulle ou d'une goutte en mouvement dans un liquide au repos (*cf.* figure 3.1).

Trois familles de formes de bulle peuvent être rencontrées dans la gamme d'écoulements visés par cette étude (entourées en bleu sur la figure 3.1).

- a) Forme *sphérique* : lorsque la valeur du nombre de Reynolds de bulle est modérée, les effets d'inertie ne sont pas suffisamment importants pour déformer les bulles, celles-ci conservent une forme sphérique grâce aux forces de tension de surface ; on parle alors de *régime visqueux*.
- b) Forme *ellipsoïdale* : la valeur du nombre de Reynolds augmentant, les effets d'inertie peuvent induire une faible déformation symétrique des bulles, celles-ci prenant la forme d'ellipsoïdes de révolution aplatis dans la direction de la vitesse d'ascension des bulles ; l'ascension de telles bulles se fait à une vitesse constante indépendante de leur taille.
- c) Forme de *calottes sphériques* (ou *cap-bubbles*) : à partir d'un volume suffisamment important, les bulles vont prendre une forme ressemblant à une calotte sphérique.

On verra plus loin que ces formes de bulles pourront être prise en compte lors de la fermeture des différentes forces agissant sur la bulle et plus particulièrement de la force de traînée.

3.1.2 Bilan des forces agissant sur une bulle isolée

L'expression de la force agissant sur une inclusion isolée a été l'objet de nombreuses recherches, et ce, depuis la fin du 19^e siècle avec les travaux de Basset (1888), Boussinesq (1885) et Oseen (1927). Ces derniers ont donné naissance au modèle BBO, modèle valable pour une particule sphérique soumis au champ de gravité dans un fluide au repos. L'extension de ces travaux aux écoulements turbulents homogènes a

- a) la *force de flottabilité* définie comme la différence entre le poids de la bulle et la poussée d'Archimède :

$$\tilde{\mathbf{F}}^{flot} = (\rho_d - \rho_c) \mathcal{V}_b \mathbf{g} \quad (3.5)$$

où $\mathcal{V}_b$ désigne le volume de la bulle ;

- b) la *force de Tchen* qui traduit le fait que l'accélération qui serait donnée au liquide en l'absence de la bulle par du liquide voisin est transmis à cette dernière par l'intermédiaire d'une force ; elle s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{F}}^{Tchen} = \rho_c \mathcal{V}_b \frac{d_c \tilde{\mathbf{u}}}{dt} \quad (3.6)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse du liquide non perturbé par la présence de la bulle, c'est-à-dire en l'absence de celle-ci, aussi appelée *vitesse du liquide vu par la bulle* ; l'opérateur $\frac{d_c}{dt}$ correspond quant à lui à la dérivée matérielle convectée par la vitesse microscopique du liquide.

La vitesse du liquide vu par la bulle obéissant à une équation de quantité de mouvement du type (1.4), on peut écrire en intégrant cette dernière sur $\mathcal{V}_b$:

$$\rho_c \mathcal{V}_b \frac{d_c \tilde{\mathbf{u}}}{dt} \cong -\mathcal{V}_b \nabla \tilde{p} + \rho_c \mathcal{V}_b \mathbf{g} + \mathcal{V}_b \nabla \tilde{\tau}_c \quad (3.7)$$

où l'on a supposé que le liquide était incompressible. En négligeant en outre la contribution visqueuse, la somme de (3.5) et (3.6) nous permet d'écrire la force due au liquide non perturbé sous la forme (Achard, 1978 ; Simonin, 1996) :

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\mathcal{V}_b \nabla \tilde{p} + \rho_d \mathcal{V}_b \mathbf{g} \quad (3.8)$$

où le premier terme du second membre, appelé *poussée d'Archimède généralisée* par Simonin (1996), est fonction du gradient de pression qui existerait au centre de la bulle en l'absence de celle-ci.

• Force de perturbation

La force de perturbation $\mathbf{F}^*$ peut également être décomposée en la somme de différentes forces élémentaires détaillées ci-dessous (Ishii et Hibiki, 2006 ; Jakobsen, 2008).

- a) *Force de traînée* (*drag* en anglais) $\mathbf{F}^D$: cette force d'origine visqueuse s'oppose au mouvement relatif de la bulle et du liquide. Elle correspond à la composante des forces hydrodynamiques agissant sur la surface de la bulle dans la direction de l'écoulement du liquide. Son expression pour une bulle sphérique est maintenant classique (Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\mathbf{F}^D = -\frac{1}{2} C^D \rho_c \frac{\pi}{4} d^2 \|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}\| (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) \quad (3.9)$$

où C^D désigne un nombre sans dimension appelé coefficient de traînée. Ce dernier est donné par des corrélations dépendant de la forme et/ou de la taille de la bulle. On rappelle que $\mathbf{w}$ désigne la vitesse de bulle mesurée d'un point de vue lagrangien.

- b) *Force de portance* (*lift* en anglais) $\mathbf{F}^L$: cette force est liée à la présence d'un gradient dans le champ des vitesses du liquide, celui-ci résultant en un gradient de pression (et donc une force) sur la surface de la bulle. La force de portance correspond à la composante des forces hydrodynamiques

agissant sur la surface de la bulle dans la direction normale à celle de l'écoulement relatif. Pour une bulle sphérique elle s'écrit (Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\mathbf{F}^L = -C^L \rho_c \frac{\pi}{6} d^3 (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) \wedge \nabla \wedge \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.10)$$

où C^L désigne le coefficient de portance pouvant également être exprimé à l'aide de corrélations comme une fonction du diamètre de bulle.

- c) *Force de masse ajoutée* (virtual mass ou added mass en anglais) $\mathbf{F}^{VM}$: cette force est due à une petite quantité de liquide entraînée par la bulle dans son mouvement. Ce liquide augmentant virtuellement la masse de la bulle, il en résulte une opposition à l'accélération de la bulle que l'on peut traduire par une force. La force de masse ajoutée a pour expression (Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\mathbf{F}^{VM} = -C^{VM} \rho_c \frac{\pi}{6} d^3 \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{d_c \tilde{\mathbf{u}}}{dt} \right) \quad (3.11)$$

où C^{VM} , le coefficient de masse ajoutée, dépend uniquement de la forme de la bulle.

- d) *Force d'histoire*, dite également *de Basset*, $\mathbf{F}^B$: cette force est due aux effets instationnaires et traduit un retard entre la traînée instantanée et celle exercée en régime établi. Son expression est la suivante (Jakobsen, 2008) :

$$\mathbf{F}^B = -\mu_c d \int_0^t K(t-t') \frac{d}{dt'} (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) dt' \quad (3.12)$$

où μ_c désigne la viscosité dynamique du liquide. Selon Jakobsen (2008), l'expression du noyau $K(t-t')$ dépend de la diffusion de la vorticité et diffère selon la nature de l'inclusion. Pour une bulle sphérique, Jakobsen (2008) propose l'expression suivante :

$$K(t-t') = 4\pi \exp\left(\frac{36\nu_c(t-t')}{d^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{36\nu_c(t-t')}{d^2}}\right) \quad (3.13)$$

Afin d'éviter le contact entre une bulle et une éventuelle paroi, Antal *et al.* (1991) introduisent une cinquième force en complément de ces quatre premières contributions.

- e) *Force de paroi* (wall-lift en anglais) $\mathbf{F}^W$: l'existence de cette force est liée au drainage du film liquide entre la bulle et la paroi : le drainage étant dissymétrique de par la condition de non glissement à la paroi, il en résulte une force repoussant la bulle vers le cœur de l'écoulement dans la direction normale à la paroi. Après une série de développements analytiques et numériques, Antal *et al.* (1991) proposent l'expression suivante :

$$\mathbf{F}^W = C^W \rho_c \frac{\pi}{3} d^3 \frac{\|\mathbf{v}_{\parallel}\|^2}{d} \mathbf{n}_w \quad (3.14)$$

   C^W désigne un coefficient de distance à la paroi que l'on détaillera plus loin et $\mathbf{n}_w$ un vecteur unitaire normal à la paroi dirigé et vers le liquide. Dans cette expression, $\mathbf{v}_{\parallel}$ désigne une vitesse relative parallèle à la paroi, définie par les auteurs par :

$$\mathbf{v}_{\parallel} \triangleq (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) - ((\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n}_w) \mathbf{n}_w. \quad (3.15)$$

3.1.3 Vitesse terminale de bulle

On appelle *vitesse terminale de bulle* la vitesse à laquelle se meut une bulle une fois sa vitesse relative constante.

Dans un premier temps, on se limite à l'étude de la composante axiale de la vitesse terminale, les écoulements visés ici étant essentiellement ascendants. Dans cette configuration, on peut considérer qu'une bulle est principalement soumise à deux forces : la poussée d'Archimède comme force motrice et la traînée dans le sens contraire au mouvement. En définissant la vitesse terminale de la bulle comme la vitesse relative $\Delta \mathbf{v} \triangleq \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}$, on peut écrire le bilan simplifié suivant selon la direction verticale $\mathbf{e}_z$:

$$(1 - \alpha_d)(\rho_c - \rho_d) \frac{\pi}{6} d^3 g = \frac{\pi}{8} \rho_c C^D d^2 \|\Delta \mathbf{v}\| \Delta v_z \quad (3.16)$$

où, afin de prendre en compte l'influence des bulles avoisinantes, on a utilisé la masse volumique du mélange¹ plutôt que la masse volumique du liquide pour exprimer la poussée d'Archimède. Dans le cas d'un écoulement ascendant en colonne, on peut en outre approcher la norme de la vitesse terminale comme suit :

$$\|\Delta \mathbf{v}\| = \sqrt{\Delta v_r^2 + \Delta v_\theta^2 + \Delta v_z^2} \approx \Delta v_z \quad (3.17)$$

ce qui permet de déduire une expression de la vitesse terminale axiale fonction entre autres du diamètre de bulle et du coefficient de traînée :

$$\Delta v_z \cong \sqrt{\frac{4}{3} g (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c}\right) \frac{d}{C^D}}. \quad (3.18)$$

On va voir plus loin que C^D peut lui aussi être exprimé comme une fonction du diamètre de bulle par l'intermédiaire de différentes corrélations. Cette expression de v_z comme une fonction du diamètre de bulle va notamment nous être utile pour relier les polydispersions en diamètre et en vitesse.

3.2 Détermination des forces moyennes polydisperses

Connaissant à présent le bilan des forces agissant sur une bulle isolée, on peut déterminer l'expression de la force moyenne agissant sur l'ensemble de la suspension à l'aide d'une moyenne de population. Cet opérateur de moyenne faisant intervenir la fonction de distribution en taille et en vitesse des bulles, on pourra obtenir une *expression moyenne polydisperse* pour chaque type de force.

Définissons tout d'abord la force moyenne agissant sur l'ensemble des bulles de la suspension comme le produit de la moyenne de population de la force agissant sur une bulle test par la densité numérique des bulles :

$$\begin{aligned} n \{\mathbf{F}\} &= n \{\tilde{\mathbf{F}}\} + n \{\mathbf{F}^*\} \\ &= -n \{\mathcal{V}_b \nabla \tilde{p}\} + n \{\rho_d \mathcal{V}_b\} \mathbf{g} + n \{\mathbf{F}^D\} + n \{\mathbf{F}^L\} + n \{\mathbf{F}^{VM}\} + n \{\mathbf{F}^B\} + n \{\mathbf{F}^W\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où l'on rappelle que la moyenne de population est définie par la relation (2.21b). En assimilant la pression vue par la bulle $\tilde{p}$ à la pression moyenne phasique du liquide $\overline{p}^c$ et en se souvenant que $\alpha_d \cong n \{\mathcal{V}_b\}$ et $\alpha_d \rho_d \cong n \{\rho_d \mathcal{V}_b\}$ (cf. paragraphe 1.3.2), cette force moyenne peut être réécrite de la façon suivante :

1. La masse volumique du mélange ρ_m est définie comme la somme des masses volumiques des deux fluides, pondérée par le taux de présence de chaque fluide, soit $\rho_m \triangleq \alpha_d \rho_d + (1 - \alpha_d) \rho_c$.

$$n \{ \mathbf{F} \} \cong -\alpha_d \nabla \overline{p_c}^c + \alpha_d \overline{\rho_d}^d \mathbf{g} + n \{ \mathbf{F}^D \} + n \{ \mathbf{F}^L \} + n \{ \mathbf{F}^{VM} \} + n \{ \mathbf{F}^B \} + n \{ \mathbf{F}^W \} \quad (3.20)$$

où les deux premiers termes du second membre apparaissent dans l'équation de bilan moyenne de quantité de mouvement de la phase dispersée (1.102b). Par comparaison avec le second membre de cette même équation de bilan, on va choisir de modéliser la force moyenne entre phase $\mathbf{M}^*$ comme la moyenne de la force de perturbation $\mathbf{F}^*$:

$$\mathbf{M}^* \cong n \{ \mathbf{F}^D \} + n \{ \mathbf{F}^L \} + n \{ \mathbf{F}^{VM} \} + n \{ \mathbf{F}^B \} + n \{ \mathbf{F}^W \}. \quad (3.21)$$

Si cette décomposition est valable pour un écoulement dilué, elle n'est cependant pas très rigoureuse dans le cas d'un écoulement dense où la proximité réciproque des bulles peut influencer les différentes forces. Ce dernier point pourra néanmoins être relaxé lors de la fermeture des coefficients de proportionnalité C des différentes forces.

Un dernier mot sur la force d'histoire $\mathbf{F}^B$; d'après les travaux de Magnaudet (1997) cités par Jakobsen (2008), *la force d'histoire peut être négligée devant la traînée pour la grande majorité des écoulements à bulles.*² Par conséquent, elle ne sera pas prise en compte dans cette étude.

3.2.1 Force de traînée

Notons $\mathbf{M}^D$ la force de traînée moyenne; celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{M}^D \triangleq n \{ \mathbf{F}^D \} = -\frac{\pi}{8} \overline{\rho_c}^c n \{ C^D d^2 \| \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}} \| (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}}) \}. \quad (3.22)$$

où l'on a supposé le liquide incompressible (autrement dit $\rho_c \cong \overline{\rho_c}^c$). Une simplification classique de cette écriture moyenne est d'y identifier les vitesses microscopiques $\mathbf{w}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ par les vitesses moyennes macroscopiques $\mathbf{V}_d$ et $\mathbf{V}_c$ respectivement (*cf.* Ishii et Hibiki, 2006, p. ex.). Pour compenser la perte d'information inhérente à cette simplification, on va introduire une force moyenne supplémentaire appelée *force de dispersion turbulente*. L'expression de cette force sera détaillée au paragraphe 3.2.5.

Compte tenu de la simplification énoncée ci-dessus, la force de traînée moyenne est réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}^D \cong -\frac{\pi}{8} \overline{\rho_c}^c n \{ C^D d^2 \| \mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c \| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \}. \quad (3.23)$$

où il nous reste à renseigner le coefficient de traînée C^D .

• Coefficients de traînée

Détaillons à présent l'expression du coefficient de traînée C^D . Celui-ci est différent pour chaque famille de forme de bulle que nous avons retenu : bulles sphériques, bulles ellipsoïdales et cap-bubbles (*cf.* paragraphe 3.1.1). Les transitions entre ces trois familles de bulles se produisent à deux diamètres de bulle particuliers que l'on va nommer respectivement $d_{rac}^{D_{12}}$ et $d_{rac}^{D_{23}}$.

Bulles sphériques

Ishii et Hibiki (2006) donnent l'expression suivante pour le coefficient de traînée d'une bulle sphérique ($d < d_{rac}^{D_{12}} < d_{rac}^{D_{23}}$) :

2. Ce n'est par contre pas le cas pour les écoulements d'inclusions solides ou de gouttes.

$$C_1^D(d) = \frac{24}{\text{Re}_b(d)} \left(1 + 0,1 \text{Re}_b(d)^{3/4} \right) \quad (3.24)$$

On a vu précédemment que pour les écoulements ascendants la vitesse relative de bulle intervenant dans Re_b pouvait être modélisée par une expression particulière, fonction notamment du coefficient de traînée (cf. équations 3.17 et 3.18). En injectant cette expression dans (3.24), on arrive à une expression de C_1^D spécialement adaptée aux écoulements ascendants :

$$C_1^D(d) = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{5} \right)^{8/7} \left(g(1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{d^3}{v_c^2} \right)^{-1/7} \quad (3.25)$$

où on a également supposé que $0,1 \text{Re}_b(d)^{3/4} \gg 1$ pour simplifier (3.24). La norme de la vitesse relative de bulle correspondante est la suivante :

$$\|\Delta \mathbf{v}\|_1 \cong \Delta v_{z1} \cong \left(\frac{5}{9} g(1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \right)^{4/7} \left(\frac{d^5}{v_c} \right)^{1/7} \quad (3.26)$$

Bulles ellipsoïdales

Pour le coefficient de traînée d'une bulle ellipsoïdale ($d_{rac}^{D_{12}} < d < d_{rac}^{D_{23}}$), Ishii et Hibiki (2006) proposent l'expression suivante :

$$C_2^D(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\text{Eo}(d)} \varphi^D = \frac{2}{3} \frac{d}{\zeta} \varphi^D \quad (3.27)$$

où φ^D est une fonction de α_d :

$$\varphi^D(\alpha_d) = \left(\frac{1 + 17,67(1 - \alpha_d)^{9/7}}{18,67(1 - \alpha_d)^{3/2}} \right)^2 \quad (3.28)$$

On en déduit la norme de la vitesse relative de bulle correspondant à ce régime de traînée à l'aide des relations (3.17) et (3.18) :

$$\|\Delta \mathbf{v}\|_2 \cong \Delta v_{z2} = \left(2 g(1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{\zeta}{\varphi^D} \right)^{1/2} \quad (3.29)$$

Cap-bubbles

Le coefficient de traînée d'une cap-bubble ($d_{rac}^{D_{12}} < d_{rac}^{D_{23}} < d$) est une fonction de α_d uniquement (Ishii et Hibiki, 2006) :

$$C_3^D = \frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2 \quad (3.30)$$

La norme de la vitesse relative d'une bulle en forme de calotte sphérique s'écrit en conséquence :

$$\|\Delta \mathbf{v}\|_3(d) \cong \Delta v_{z3} = \left(\frac{g(\rho_c - \rho_d)d}{2\rho_c(1 - \alpha_d)} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

Diamètres de transition

Le diamètre de transition $d_{rac}^{D_{12}}$ étant valable pour les deux premières corrélations, il vérifie l'identité $C_1^D(d_{rac}^{D_{12}}) = C_2^D(d_{rac}^{D_{12}})$, ce qui donne en utilisant (3.25) et (3.27) :

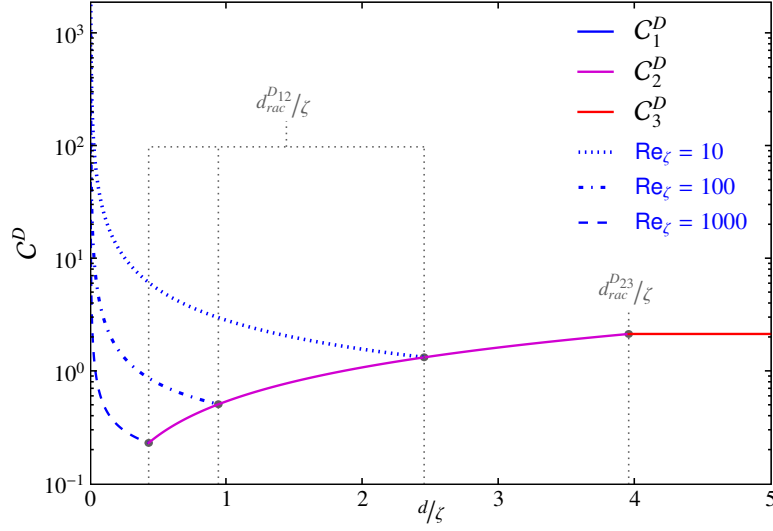


FIG. 3.2 – Évolution du coefficient de traînée en fonction du diamètre adimensionnel d/ζ , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds capillaire $\text{Re}_\zeta \triangleq \frac{\|\Delta \mathbf{v}\| \zeta}{\nu_c}$ et pour $\alpha_d = 0,1$.

$$d_{rac}^{D_{12}} = \left(\frac{9}{5}\right)^{4/5} \left(\frac{2\zeta}{\varphi^D}\right)^{7/10} \left(\frac{g}{\nu_c^2} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c}\right)\right)^{-1/10}. \quad (3.32)$$

De la même manière, le diamètre de transition $d_{rac}^{D_{23}}$ vérifie l'identité $C_2^D(d_{rac}^{D_{23}}) = C_3^D$; on en déduit l'expression suivante :

$$d_{rac}^{D_{23}} = \frac{4(1 - \alpha_d)^2 \zeta}{\varphi^D(\alpha_d)}. \quad (3.33)$$

Une illustration des transitions entre les différents régimes de traînée est donnée à la figure 3.2.

• Calcul de la force de traînée moyenne

Compte tenu de la définition de la moyenne de population (2.21b) et de la décomposition de $\mathcal{F}$ (2.28), la force de traînée moyenne s'écrit :

$$\mathbf{M}^D = -\frac{\pi}{8} \overline{\rho_c}^c \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) n \int C^D(\beta) \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta; \mathbf{x}, t) d\beta \quad (3.34)$$

le coefficient de traînée étant uniquement fonction du diamètre de bulle. L'écriture de la moyenne sous la forme d'une intégrale permet de prendre en compte facilement les différents régimes de traînée :

$$\mathbf{M}^D = -\frac{\pi}{8} \overline{\rho_c}^c \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \times n \left(\underbrace{\int_{d_{min}}^{d_{rac}^{D_{12}}} C_1^D(\beta) \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_1^D} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{12}}}^{d_{rac}^{D_{23}}} C_2^D(\beta) \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_2^D} + \underbrace{C_3^D \int_{d_{rac}^{D_{23}}}^{d_{max}} \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_3^D} \right). \quad (3.35)$$

Le calcul des termes intégraux $\mathcal{I}_i^D$ ne présente pas de difficulté particulière puisque l'on a choisi de modéliser $\mathcal{P}_\beta(\beta)$ avec des expressions polynomiales (polynômes de degré 2 et 3 pour les lois Q2 et C2 respectivement). Les calculs étant quelque peu fastidieux, ils sont détaillés à l'annexe B.1.

Après résolution de $\mathcal{I}_1^D$, $\mathcal{I}_2^D$ et $\mathcal{I}_3^D$, on retrouve l'expression classique de la force de traînée moyenne donnée par exemple par Ishii et Hibiki (2006) :

$$\mathbf{M}^D = -\frac{1}{8} \overline{\rho_c}^c a_I C_{**}^D \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \quad (\text{B.10})$$

où C_{**}^D est ici un *coefficient de traînée polydisperse* dépendant de d_{10} , $\tilde{\sigma}^*$, $C_1^D(d_{10})$, $C_2^D(d_{10})$, C_3^D , $d_{rac}^{D_{12}}$ et $d_{rac}^{D_{23}}$. Il est respectivement donné par (B.11a) et (B.11b) pour les lois Q2 et C2.

3.2.2 Force de portance

En effectuant la même simplification sur les vitesses que pour la force de traînée moyenne, la force de portance moyenne s'écrit :

$$\mathbf{M}^L \triangleq n \{\mathbf{F}^L\} = -\frac{\pi}{6} \overline{\rho_c}^c n \{C^L d^3\} (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \wedge \nabla \wedge \mathbf{V}_c. \quad (\text{3.36})$$

l'effet des fluctuations de vitesses étant pris en compte dans la force de dispersion turbulente (*cf.* paragraphe 3.2.5).

• Coefficient de portance

Le coefficient de portance peut être exprimé à partir de la corrélation de Tomiyama (1998) :

$$C^L(d) = \begin{cases} \min(0,288 \tanh(0,121 \text{Re}_b(d)); \varphi^L(\text{Eo}(d))) & \text{si } \text{Eo} \leq 10 \\ -0,27 & \text{si } \text{Eo} \geq 10 \end{cases} \quad (\text{3.37})$$

avec $\varphi^L(\text{Eo}) = 0,001\,05 \text{Eo}^3 - 0,0159 \text{Eo}^2 - 0,0204 \text{Eo} + 0,474$.

La figure 3.3 montre l'évolution du coefficient de portance de Tomiyama en fonction de Eo , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds capillaire Re_ζ . On remarque que pour la valeur critique $\text{Eo} \simeq 6$, le coefficient de portance change de signe caractérisant ainsi un effet ségrégationniste bien connu de la force de portance sur la population de bulles. Cette force a donc tendance à séparer les petites bulles, peu déformables, des plus grosses, plus facilement déformables, ces dernières étant alors entraînées vers des zones de l'écoulement où le cisaillement est moindre de façon à limiter leur déformation et par là même leur énergie de surface. Cette caractéristique est une composante essentielle de la polydispersion en vitesse d'une population de bulles.

Par soucis de simplification on fait l'hypothèse que, pour les écoulements qui nous intéressent, le nombre de Reynolds capillaire serait suffisamment grand pour négliger le terme en $\tanh$ dans l'expression originale de Tomiyama. De plus, en vue des développements mathématiques qui nous attendent, on va également remplacer le polynôme de degré 3 proposé par Tomiyama par une simple droite, l'essentiel étant de garder la principale caractéristique de C^L , à savoir son changement de signe pour $\text{Eo} \simeq 6$. L'expression simplifiée suivante sera donc utilisée dans la suite du document :

$$C^L(d) \cong \begin{cases} C_1^L = 0,288 & \text{si } \text{Eo} \leq 2,942 \\ C_2^L(d) = -0,092\,33 \text{Eo}(d) + 0,5597 & \text{si } 2,942 < \text{Eo}(d) < 8,986 \\ C_3^L = -0,27 & \text{si } \text{Eo} \geq 8,986 \end{cases} \quad (\text{3.38})$$

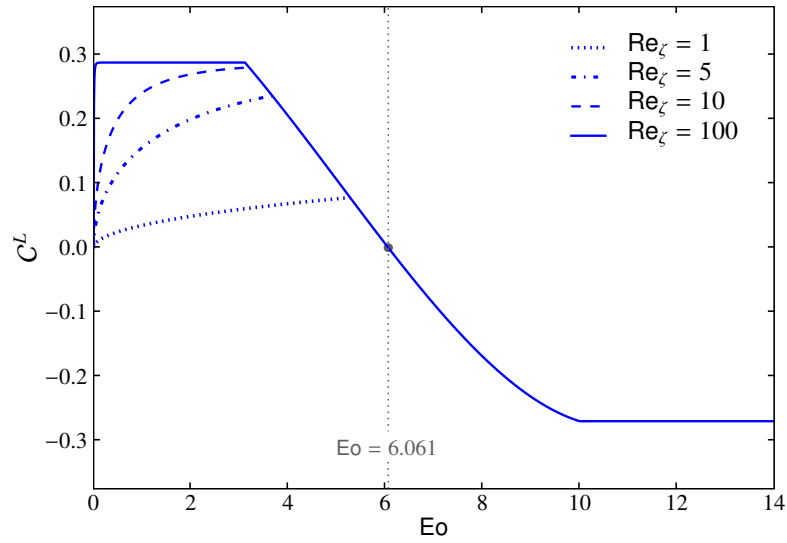


FIG. 3.3 – Évolution du coefficient de portance de Tomiyama en fonction de Eo , pour différentes valeurs de Re_ζ .

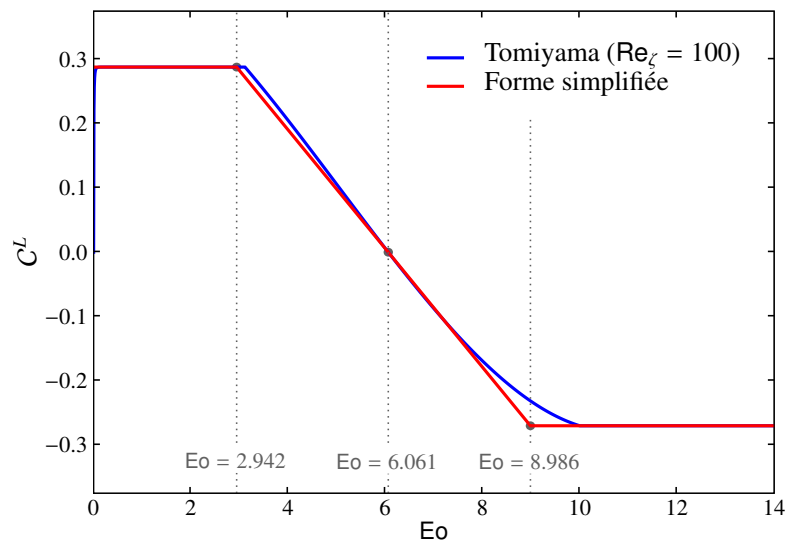


FIG. 3.4 – Comparaison de l'expression de C^L de Tomiyama pour $Re_\zeta = 100$ et de l'expression simplifiée (3.38).

où la droite proposée pour C_2^L a été ajustée en minimisant l'écart avec le polynôme original de Tomiyama. Les expressions originale et simplifiée de $C^L(d)$ sont présentées sur la figure 3.4.

Comme pour le coefficient de traînée, on va introduire des diamètres de raccord pour caractériser les transitions entre les différents régimes de portance. Les deux transitions se produisant respectivement pour $Eo = 2,942$ et $Eo = 8,986$, on en déduit les expressions des diamètres de raccord correspondants :

$$\begin{cases} d_{rac}^{L12} = 1,715 \zeta \\ d_{rac}^{L23} = 2,998 \zeta. \end{cases} \quad (3.39a)$$

$$(3.39b)$$

• Calcul de la force de portance moyenne

La définition de la moyenne de population (2.21b) et la décomposition de $\mathcal{F}$ (2.28) permettent d'écrire la force de portance moyenne sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^L = & -\frac{\pi}{6} \overline{\rho_c}^c (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \wedge \nabla \wedge \mathbf{V}_c \\ & \times n \left(\underbrace{C_1^L \int_{d_{min}}^{d_{rac}^{L12}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_1^L} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{L12}}^{d_{rac}^{L23}} C_2^L(\beta) \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_2^L} + \underbrace{C_3^L \int_{d_{rac}^{L23}}^{d_{max}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_3^L} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Après calcul des intégrales I_1^L , I_2^L et I_3^L (cf. annexe B.2), on retrouve l'expression classique de la force de portance (Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\mathbf{M}^L = -\overline{\rho_c}^c \alpha_d C_{**}^L (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \wedge \nabla \wedge \mathbf{V}_c \quad (B.16)$$

où C_{**}^L est ici un *coefficient de portance polydisperse* dépendant de d_{10} , $\tilde{\sigma}^*$, $Eo(d_{10})$, d_{rac}^{L12} et d_{rac}^{L23} . Il est respectivement donné par (B.17a) et (B.17b) pour les lois Q2 et C2.

3.2.3 Force de masse ajoutée

Sous les mêmes hypothèses que les précédentes forces, la force de masse ajoutée moyenne s'écrit :

$$\mathbf{M}^{VM} \triangleq n \{ \mathbf{F}^{VM} \} = -\overline{\rho_c}^c \alpha_d C^{VM} \left(\frac{D_d \mathbf{V}_d}{Dt} - \frac{D_c \mathbf{V}_c}{Dt} \right). \quad (3.41)$$

où l'on s'est servi de l'approximation $n \{ \mathcal{V}_b \} \cong \alpha_d$ démontrée au premier chapitre. On rappelle que le coefficient de masse ajoutée C^{VM} ne dépend que de la forme de la bulle et pas de son diamètre ; pour une bulle sphérique isolée, sa valeur est maintenant bien connue (Ishii et Hibiki, 2006 ; Jakobsen, 2008) :

$$C^{VM} = 0,5. \quad (3.42)$$

Afin de prendre en compte l'influence des bulles environnantes, Zuber (1964) a fait l'analogie entre le cas de figure d'une sphère particulière d'une population de bulles, c'est-à-dire entourée d'autres bulles (cf. figure 3.5(a)), et une sphère se déplaçant dans un milieu fluide limité par une deuxième sphère concentrique (cf. figure 3.5(b)).

La valeur du coefficient de masse ajoutée d'une sphère dans cette dernière configuration a été obtenue analytiquement par Lamb (1932) :

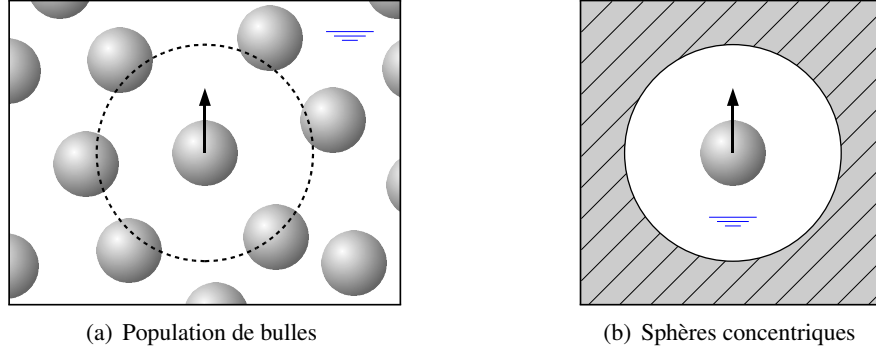


FIG. 3.5 – Analogie entre le cas de figure d'une sphère entourée d'autres sphères et celui de deux sphères concentriques.

$$C^{VM} = \frac{1}{2} \frac{1 + 2 \mathcal{V}_{int}/\mathcal{V}_{ext}}{1 - \mathcal{V}_{int}/\mathcal{V}_{ext}}. \quad (3.43)$$

On remarque que l'on retrouve le coefficient $1/2$ de la sphère en milieu infini, adjoint cette fois-ci d'un facteur correctif fonction du rapport des volumes des sphères intérieure $\mathcal{V}_{int}$ et extérieure $\mathcal{V}_{ext}$.

À partir de ce résultat, Zuber (1964) exprime le coefficient de masse ajoutée d'une bulle d'un milieu diphasique comme suit :

$$C_{**}^{VM} = C^{VM} \frac{1 + 2 \alpha_d}{1 - \alpha_d} = \frac{1}{2} \frac{1 + 2 \alpha_d}{1 - \alpha_d} \quad (3.44)$$

expression qui sera retenue dans cette étude.

3.2.4 Force de paroi

L'effet des fluctuations de vitesses étant pris en compte dans une force de dispersion turbulente, la force de paroi moyenne peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}^W \triangleq n \{ \mathbf{F}^W \} = - \frac{\pi}{3} \overline{\rho_c}^c n \{ C^W d^2 \} \| \mathbf{V}_{\parallel} \|^2 \mathbf{n}_w. \quad (3.45)$$

où la vitesse relative parallèle macroscopique est donnée par :

$$\mathbf{V}_{\parallel} \triangleq (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) - ((\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \cdot \mathbf{n}_w) \mathbf{n}_w. \quad (3.46)$$

avec $\mathbf{n}_w$ un vecteur unitaire normal à la paroi dirigé vers le liquide.

• Coefficient de distance à la paroi

Le coefficient de distance à la paroi a été déterminé analytiquement puis approximé par un développement en série de Taylor par Antal *et al.* (1991), les différents coefficients de ce développement étant ensuite évalués par comparaison avec un calcul DNS d'un écoulement autour d'une bulle isolée. Les auteurs arrivent ainsi à l'expression suivante :

$$C^W \cong C_1^W + C_2^W \frac{d}{2y_w} \quad (3.47)$$

où y_w désigne la distance à la paroi du point courant. Les coefficients C_1^W et C_2^W ont quant à eux été estimés par Antal *et al.* comme étant égaux à :

$$\begin{cases} C_1^W = -0,104 - 0,06 \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| \\ C_2^W = 0,147 \end{cases} \quad (3.48a) \quad (3.48b)$$

où l'on peut remarquer que le coefficient C_1^W , tel que donné par Antal *et al.*, n'est pas sans dimension.

Comme le soulignent Ishii et Hibiki (2006), l'expression du coefficient de distance à la paroi proposée par Antal *et al.* (1991) devient négatif lorsque le diamètre de bulle est inférieur à une valeur critique dépendant de y_w :

$$C_1^W + C_2^W \frac{d}{2y_w} < 0 \iff d < -2 \frac{C_1^W}{C_2^W} y_w. \quad (3.49)$$

Avec un coefficient de distance à la paroi négatif, les bulles seraient attirées vers la paroi, alors que le but de la force de paroi est au contraire de repousser les bulles s'approchant trop près d'une paroi. Pour contourner ce problème, la correction suivante est proposée :

$$C^W = \max \left(0 ; C_1^W + C_2^W \frac{d}{2y_w} \right). \quad (3.50)$$

Il existe donc un diamètre limite pour lequel la force de paroi s'annule, diamètre limite qui n'est pas le même selon la position considérée puisqu'il dépend de y_w . Ce diamètre limite, noté d_{rac}^W , se déduit facilement de (3.49) :

$$d_{rac}^W = y_w (1,415 + 0,816 \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\|). \quad (3.51)$$

• Calcul de la force de paroi moyenne

Compte tenu de (2.21b) et (2.28), la force de paroi moyenne peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}^W = -\frac{\pi}{3} \overline{\rho}_c n \left(\underbrace{C_1^W \int_{d_{rac}^W}^{d_{max}} \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_1^W} + \underbrace{\frac{C_2^W}{2y_w} \int_{d_{rac}^W}^{d_{max}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_2^W} \right) \|\mathbf{V}_\parallel\|^2 \mathbf{n}_w. \quad (3.52)$$

Après calcul des intégrales $\mathcal{I}_1^W$ et $\mathcal{I}_2^W$ (cf. annexe B.3), on retrouve l'expression de la force de portance moyenne donnée par (Antal *et al.*, 1991) :

$$\mathbf{M}^W = -\frac{1}{3} \overline{\rho}_c a_I C_{**}^W \|\mathbf{V}_\parallel\|^2 \mathbf{n}_w \quad (B.20)$$

où C_{**}^W est ici un *coefficient de distance à la paroi polydisperse* dépendant de d_{10} , $\overline{\sigma}^*$, C_1^W , C_2^W , y_w , d_{rac}^W . Il est respectivement donné par (B.21a) et (B.21b) pour les lois Q2 et C2.

3.2.5 Force de dispersion turbulente

Introduisons à présent une nouvelle force macroscopique : la *force de dispersion turbulente*. Celle-ci a été introduite pour traiter le phénomène de diffusion phasique, autrement dit l'existence d'un flux diffusif de α_d résultant du transport des bulles par la turbulence du liquide.

Un tel flux n'apparaissant pas dans les équations de masse du modèle à deux fluides, le moyen le plus simple serait de l'y faire apparaître en introduisant une fluctuation phasique α'_d . Cependant, comme le soulignent Lahey Jr. *et al.* (1993), cette méthode ne serait pas rigoureuse : le taux de présence α_d étant une grandeur moyenne par définition, il ne peut exister de fluctuation α'_d .

D'après Lopez de Bertodano (1998), le phénomène de diffusion phasique peut être vu comme la résultante des composantes fluctuantes des différentes forces agissant sur les bulles. En conséquence, on peut modéliser la diffusion phasique au moyen d'une force macroscopique supplémentaire, comme l'a notamment démontré Reeks (1991, 1992) par une approche cinétique. Cette force étant d'origine statistique, elle n'a pas d'équivalent pour une bulle isolée.

Par analogie avec le phénomène de diffusion moléculaire l'expression suivante a été proposée par différents auteurs (Lahey Jr. *et al.*, 1993 ; Lopez de Bertodano, 1998 ; Moraga *et al.*, 2003) pour la force de dispersion turbulente :

$$\mathbf{M}^{TD} = -\overline{\rho}_c^c K_c C^{TD} \nabla \alpha_d \quad (3.53)$$

où C^{TD} correspond à un coefficient de proportionnalité de l'ordre de l'unité et K_c désigne l'énergie cinétique turbulente du liquide. La dépendance en $\nabla \alpha_d$ de cette force va avoir tendance à homogénéiser la distribution spatiale des bulles, c'est-à-dire à déplacer les bulles des régions de forte concentration vers les régions de plus faible concentration.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu que l'on pouvait modéliser le transfert moyen de quantité de mouvement entre les deux phases comme la somme de différentes forces hydrodynamiques moyennes, chacune de ces forces n'étant autre que la moyenne de population d'une force microscopique agissant sur une seule bulle.

L'utilisation de la moyenne de population pour déterminer ces forces moyennes permet en outre d'introduire facilement la polydispersion en taille des bulles, et ce par l'intermédiaire de la fonction de densité de probabilité en diamètre. Les *forces moyennes polydisperses* que nous avons ainsi écrites ont des expressions semblables à celle que l'on obtiendrait avec une approche modèle à deux fluides classique, à la différence près que les coefficients de proportionnalité de chaque force font intervenir les paramètres statistiques de la population de bulles (diamètre moyen arithmétique et écart type) au lieu du simple diamètre de Sauter. L'implémentation de ces forces moyennes polydisperse dans un code de calcul diphasique n'en sera donc que plus simple.

3.4 Références

- ACHARD, J.-L. : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- ANTAL, S.P., LAHEY JR., R.T. et FLAHERTY, J.E. : Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 17(5):635–652, 1991.
- BASSET, A.B. : *A Treatise on Hydrodynamics*, volume 2. Deighton, Bell and Co., London, 1888.

- BOUSSINESQ, J. : Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 1885.
- CLIFT, R., GRACE, J.R. et WEBER, M.E. : *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, New York, 1978.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- GATIGNOL, R. : The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(2):143–160, 1983.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- JAKOBSEN, H.A. : *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Springer, 2008.
- LAHEY JR., R.T., LOPEZ DE BERTODANO, M. et JONES JR., O.C. : Phase distribution in complex geometry conduits. *Nuclear Engineering and Design*, 141:177–201, 1993.
- LAMB, H. : *Hydrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 6^e édition, 1932.
- LOPEZ DE BERTODANO, M.A. : Two fluid model for two-phase turbulent jets. *Nuclear Engineering and Design*, 179:65–74, 1998.
- MAGNAUDET, J. : The forces acting on bubbles and rigid particles. *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, numéro FEDSM97-3522, 1997.
- MAXEY, M.R. et RILEY, J.J. : Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- MORAGA, F.J., LARRETEGUY, A.E., DREW, D.A. et LAHEY JR., R.T. : Assessment of turbulent dispersion models for bubbly flows in the low stokes number limit. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:655–673, 2003.
- OSEEN, C.W. : *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- REEKS, M.W. : On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 3(3):446–456, 1991.
- REEKS, M.W. : On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 4(6):1290–1302, 1992.
- SIMONIN, O. : Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Combustion and turbulence in two-phase flows*, Von Karman Lecture Series 1996-02. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- TCHEN, C.M. : *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid*. Thèse de doctorat, University of Delft. Martinus Nijhoff, The Hague, 1947.
- TOMIYAMA, A. : Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, 10 (4):369–405, 1998.

ZUBER, N. : On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. *Chemical Engineering Science*, 19:897–919, 1964.

Chapitre 4

Coalescence et fragmentation de bulles

Dans ce chapitre, nous allons chercher à fermer les termes sources liés aux phénomènes de *coalescence* et de *fragmentation* de bulles, phénomènes qui, avec le changement de phase et la dilatabilité du gaz, sont responsables de la variation et la polydispersion en taille de la population de bulles. En effet, la coalescence correspond à la *fusion* de plusieurs bulles en une bulle plus grosse, et la fragmentation à la *rupture* d'une bulle en plusieurs fragments plus petits.

Comme l'a fait remarquer Palermo (1991), le nombre considérable de travaux publiés sur ces deux thématiques montrent de lui-même l'importance mais aussi la complexité de ces deux phénomènes. En effet, bien que de nombreux efforts ont été entrepris pour comprendre les mécanismes physiques les régissant, il n'existe toujours pas de modèle communément admis et pouvant décrire avec précision l'occurrence et le déroulement d'un événement de coalescence ou de fragmentation. La grande variété de sources de coalescence et de fragmentation ainsi que le grand nombre d'échelles impliquées dans ces mécanismes contribuent sans aucun doute au brouillard qui subsiste encore autour de la compréhension de ces deux phénomènes. Aussi, la fermeture des termes modélisant la coalescence et fragmentation de bulles va induire de nombreuses hypothèses simplificatrices et restera dans tout les cas un problème ouvert tant que la physique de ces phénomènes ne sera pas mieux comprise.

Revenons à présent à notre modélisation moyennée par la méthode des moments. Les phénomènes de coalescence et fragmentation de bulles y interviennent exclusivement dans l'équation de bilan sur les densités de moments en diamètre de la fonction de distribution des bulles (2.44),¹ et ce sous la forme d'un terme source collisionnel permettant de prendre en compte la *création* et la *disparition discrètes* de bulles. En supposant les mécanismes de coalescence (CO) et de fragmentation de bulles (BU, pour *break-up* en anglais) parfaitement décorrélés, on peut ainsi diviser le terme source collisionnel de l'équation de bilan (2.44) en une somme de deux contributions, une pour chaque phénomène (Coulaloglou et Tavlarides, 1977 ; Kocamustafaogullari et Ishii, 1995) :

$$\iint \beta^\gamma \dot{\mathcal{F}}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma} = \underbrace{\iint \beta^\gamma \dot{\mathcal{F}}^{CO}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma}}_{CO_\gamma} + \underbrace{\iint \beta^\gamma \dot{\mathcal{F}}^{BU}(\beta, \boldsymbol{\varsigma}) d\beta d\boldsymbol{\varsigma}}_{BU_\gamma}. \quad (4.1)$$

Avant de passer à la fermeture de ces termes proprement dite, on se propose de décrire tout d'abord les mécanismes de coalescence et de fragmentation d'un point de vue physique.

1. En toute rigueur, la coalescence et la fragmentation impactent également le bilan de quantité de mouvement moyen de la phase dispersée ; cependant, la phase dispersée ayant une densité bien plus faible que le liquide, nous avons ici supposé cette contribution négligeable.

4.1 Description des processus physiques

4.1.1 Coalescence

Interagissant avec le liquide, des bulles, appelées *bulles mères*, peuvent être amenées à entrer en contact puis à *fusionner* pour donner naissance à une nouvelle bulle plus grosse, appelée *bulle fille*. Par simplicité on ne considérera ici que des événements de *coalescence binaire*, c'est-à-dire les événements de coalescence impliquant uniquement deux bulles mères pour une bulle fille.

Le scénario de la coalescence de deux bulles peut être décomposé en trois étapes principales (Chesters et Hofman, 1982), illustrées sur la figure 4.1.

- 1) *Collision de deux bulles* : deux bulles entrent en collision de par leur interaction avec le liquide, piégeant ainsi un film de liquide entre elles appelé *film interfacial*.
- 2) *Drainage du film interfacial* : du rapprochement relatif des deux bulles dû à la cinétique de collision s'ensuit une augmentation de la pression dans le film interfacial ayant deux conséquences. La première est un aplatissement du film interfacial, pouvant éventuellement mener à l'apparition d'une striction, c'est-à-dire un amincissement local du film interfacial ; l'énergie cinétique de collision est ainsi transformée en énergie de surface. La seconde conséquence est le *drainage* du liquide vers l'extérieur du film sous l'effet du gradient de pression.
- 3) *Rupture du film* : lorsque l'épaisseur du film liquide atteint l'*échelle des interactions moléculaires* (de l'ordre de 100 Å), les effets des forces de Van der Waals deviennent prédominants dans le film. Ce dernier se troue, puis, la tension de surface agrandissant l'ouverture, le film se rompt et les deux bulles *coalescent* pour ne plus former qu'une seule bulle plus grosse. L'étape de rupture du film peut être considérée comme instantanée devant la cinétique de drainage (Chesters et Hofman, 1982).

Les collisions entre bulles peuvent quant à elles être de différentes natures. Dans une synthèse publiée récemment, Liao et Lucas (2010) ont répertorié les quatre sources de collisions suivantes, également illustrées sur la figure 4.2 :

- a) les collisions aléatoires dues à l'agitation des bulles par la turbulence du liquide (*turbulent collisions*) ;
- b) les collisions par écart de vitesse terminale entre bulles de différentes tailles (*buoyant collisions*) ;
- c) les collisions par aspiration dans un sillage d'une bulle environnante (*wake entrainment*) ;
- d) les collisions dues au gradient de la vitesse moyenne du liquide, en particulier dans les zones proches des parois (*shear collision*).

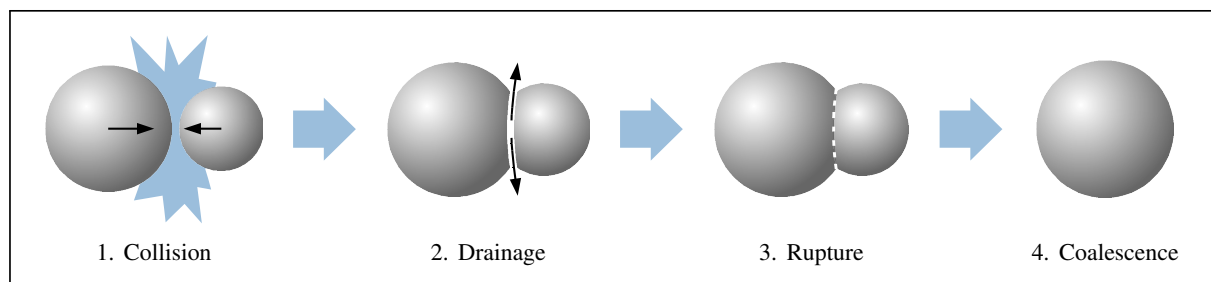


FIG. 4.1 – Schématisation des trois étapes menant à la coalescence de deux bulles (adapté de Jakobsen, 2008).

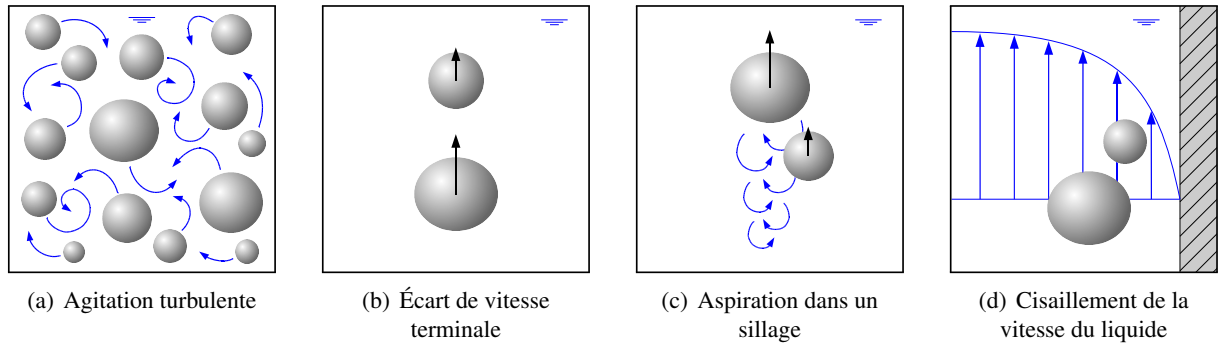


FIG. 4.2 – Sources de collisions entre bulles (adapté de Morel, 1997).

Les écoulements visés ici étant fortement turbulents, la suite de l'étude abordera uniquement la modélisation des collisions par agitation turbulente, cette source de collisions étant supposée largement prédominante par rapport aux autres sources listées ci-dessus.

Toutes les collisions ne mènent cependant pas forcément à un événement de coalescence : pour qu'il y ait rupture du film, il faut que les deux bulles restent suffisamment longtemps en contact de façon à ce que le film interfacial puisse atteindre l'épaisseur critique par drainage. Si ce n'est pas le cas, les deux bulles se séparent. On voit ici apparaître la notion d'*efficacité de collision*, aussi appelée *probabilité de coalescence*.

4.1.2 Fragmentation

Nous avons déjà vu au chapitre 3 (paragraphe 3.1.1) qu'une bulle immergée dans un liquide se déformait sous l'effet des contraintes du liquide environnant. Cette déformation peut être telle que cette bulle, la *bulle mère* se rompe en plusieurs fragments plus petits, les *bulles filles*, donnant ainsi lieu à un *événement de fragmentation*. Là aussi, on ne considérera par simplicité que des événements de *fragmentation binaires*, c'est-à-dire donnant naissance à deux bulles filles.

Pour évaluer le potentiel de rupture d'une bulle on introduit le *nombre de Weber de bulle*, We_b , défini comme le ratio des contraintes extérieures déstabilisatrices σ_{ext} , sur les contraintes de surface (Hinze, 1955) :

$$We_b \triangleq \frac{\sigma_{ext} d}{\sigma}. \quad (4.2)$$

Pour caractériser l'occurrence d'un événement de fragmentation, on introduit également la notion de nombre de Weber critique, $We_{b,cr}$, à partir duquel la déformation de la bulle entraînera sa rupture. À l'image du mécanisme de coalescence, il apparaît ici une notion de *probabilité de fragmentation*.

Les sources de fragmentation de bulles sont nombreuses et variées, les principales étant les suivantes (Risso, 2000 ; Liao et Lucas, 2009) :

- a) la turbulence du liquide environnant (*turbulent break-up*) ;
- b) les contraintes visqueuses du liquide (*viscous break-up*) ;
- c) un gradient de la vitesse liquide causé par le sillage de bulles environnantes ou d'une paroi (*shearing-off*) ;
- d) des instabilités de surface.

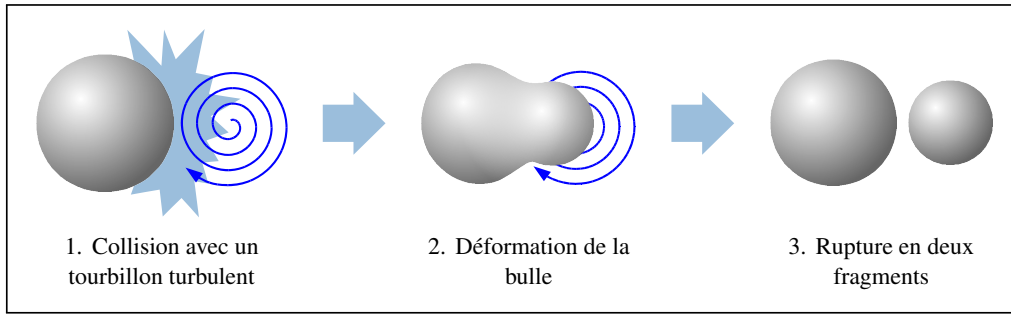


FIG. 4.3 – Schématisation de la fragmentation d'une bulle causée par son interaction avec un tourbillon turbulent du liquide environnant (adapté de Hagesaether *et al.*, 2002).

À l'instar de l'étude de la coalescence de bulles, et pour la même raison, *nous allons nous limiter dans ce document à la modélisation de la fragmentation de bulles par les contraintes turbulentes du liquide.*

La première théorie de la fragmentation de bulle par la turbulence a été établie indépendamment par Kolmogorov (1949) et Hinze (1955). Bien que maintenant ancienne, elle constitue encore aujourd'hui la base de la grande majorité des études sur la fragmentation turbulente. Cette théorie suppose que la déformation, et la rupture éventuelle, d'une bulle résulte d'une interaction entre cette bulle et les tourbillons du liquide environnant (*cf.* figure 4.3). En faisant l'hypothèse que seuls les tourbillons de tailles comparables à la bulle sont susceptibles de déformer significativement celle-ci,² Hinze (1955) définit la *contrainte de déformation turbulente* comme suit :

$$\sigma_{ext}^T = \rho_c \overline{\mathbf{v}_t^2}(d) \quad (4.3)$$

où $\overline{\mathbf{v}_t^2}$ correspond au carré moyen d'une *vitesse turbulente* $\mathbf{v}_t$, défini quant à lui comme la différence de la vitesse liquide en deux points distants du diamètre de bulle, soit (Risso, 2000) :

$$\overline{\mathbf{v}_t^2}(d; \mathbf{x}, t) \triangleq \left\langle \left(v_{c,i}(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \mathbf{e}_i) - v_{c,i}(\mathbf{x} - \frac{d}{2} \mathbf{e}_i) \right)^2 \right\rangle \quad (4.4)$$

où i désigne l'indice spatial.

En supposant que la turbulence du liquide est *isotrope* à l'échelle de la bulle considérée³ et que le diamètre de cette dernière est compris dans la *zone inertielle* du spectre de turbulence, la *théorie de la turbulence isotrope* nous permet d'exprimer $\overline{\mathbf{v}_t^2}$ comme une fonction du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente du liquide ε_c et du diamètre de bulle.⁴ À l'aide d'une analyse dimensionnelle, on peut ainsi écrire :

$$\overline{\mathbf{v}_t^2} = C (\varepsilon_c d)^{2/3}. \quad (4.5)$$

où C est un coefficient de proportionnalité. En intégrant le spectre de turbulence, Risso (2000) exprime ce coefficient tel que :

2. Les tourbillons plus petits n'ont pas assez d'énergie pour déformer les bulles et les tourbillons plus gros ne font que les déplacer.

3. On fait ici l'hypothèse que seules les plus petites échelles de la turbulence sont isotropes, à savoir celles du même ordre de grandeur que la taille des bulles ainsi que les échelles plus petites ; aucune restriction n'est posée sur les plus grandes échelles.

4. Selon la théorie de cascade d'énergie de Kolmogorov (1941) (voir aussi Frisch, 1995), les tourbillons de la zone inertielle sont indépendants à la fois de la macro-échelle (échelle de création de la turbulence) et de l'échelle de Kolmogorov (échelle de dissipation visqueuse de la turbulence) ; leur rôle est uniquement de transférer sans perte l'énergie turbulente de la zone de production à la zone de dissipation.

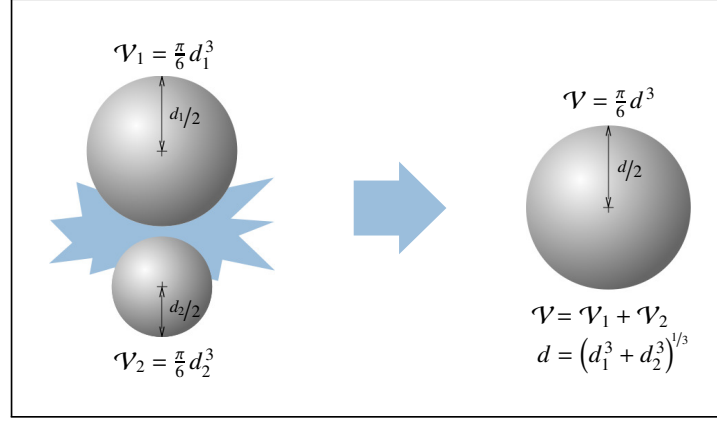


FIG. 4.4 – Schématisation d'un événement de coalescence : relations entre les volumes et les diamètres des bulles mères et fille.

$$C = \frac{27}{55} \Gamma^{(1/3)} C_K \approx 2. \quad (4.6)$$

où $C_K \approx 1,5$ désigne la constante de Kolmogorov (Jakobsen, 2008). On en déduit l'expression du *nombre de Weber de bulle turbulent* :

$$\text{We}_b^T(d) = \frac{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}}{\sigma} \quad (4.7)$$

qui va nous permettre de caractériser la fragmentation turbulente de bulles.

4.2 Détermination du terme source de coalescence

On se propose à présent de fermer le terme source de l'équation de transport de $\mathcal{M}_\gamma$ (2.44) dû à la coalescence de bulles.

Celui-ci est généralement écrit en introduisant une *fréquence de coalescence*, notée ϕ^{CO} et permettant de quantifier le nombre d'événements de coalescence par unité de temps (Coulaloglou et Tavlarides, 1977). En modélisant le terme source de coalescence comme la somme des contributions de tous les couples de bulles (d_1, d_2) qui coalescent, on peut écrire (Hill, 1998 ; Kamp *et al.*, 2001) :

$$\text{CO}_\gamma = \frac{1}{2} \iint_{d_{\min}}^{d_{\max}} \Delta \mathcal{M}_\gamma^{CO}(d_1, d_2) \phi^{CO}(d_1, d_2) dd_1 dd_2 \quad (4.8)$$

où le facteur $1/2$ permet d'éviter de compter deux fois le même événement de coalescence. Dans cette expression, $\Delta \mathcal{M}_\gamma^{CO}$ correspond à la décroissance de $\mathcal{M}_\gamma$ causée par un événement de coalescence ; celle-ci peut être déduite de la figure 4.4 :

$$\Delta \mathcal{M}_\gamma^{CO}(d_1, d_2) = (d_1^3 + d_2^3)^{\gamma/3} - d_1^\gamma - d_2^\gamma. \quad (4.9)$$

La fréquence de coalescence peut quant à elle être exprimée comme le produit d'une *fréquence de collision* d'une *efficacité de collision* :⁵

5. Très répandu dans la littérature, le terme *fréquence* pour désigner ϕ^{CO} et ϕ^{CL} est en fait un abus de langage ; par la suite, on pourra en effet remarquer que ces deux grandeurs ont la dimension de $\text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-5}$ et non pas simplement de s^{-1} comme c'est le cas d'une fréquence classique.

$$\phi^{CO}(d_1, d_2) = \phi^{CL}(d_1, d_2) \eta^{CO}(d_1, d_2). \quad (4.10)$$

Intéressons-nous maintenant à la fermeture de ϕ^{CL} et de η^{CO} pour des événements de coalescence par agitation turbulente. Face à la grande variété de modèles existant pour fermer de ces deux grandeurs, nous avons choisi de nous focaliser uniquement sur deux modèles particulier : celui de Prince et Blanch (1990), largement utilisé dans la littérature, et celui de Kamp *et al.* (2001) dont l'approche de la physique de la coalescence est particulièrement intéressante.

4.2.1 Fréquence de collision

La fréquence de collision de deux bulles peut s'écrire de manière très générale sous la forme suivante (Prince et Blanch, 1990 ; Kamp *et al.*, 2001) :

$$\phi^{CL}(d_1, d_2) = n \mathcal{P}_\beta(d_1) n \mathcal{P}_\beta(d_2) \mathcal{S}_{1,2}^{CL}(d_1, d_2) V_{1,2}(d_1, d_2) \quad (4.11)$$

où $\mathcal{S}_{1,2}^{CL}$ désigne une surface efficace de collision et $V_{1,2}$ une vitesse représentative de la collision des deux bulles. À une constante près, la modélisation de $\mathcal{S}_{1,2}^{CL}$ est la même pour les deux modèles.

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\mathcal{S}_{1,2}^{CL}(d_1, d_2) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \cong 0,196 (d_1 + d_2)^2. \quad (4.12a)$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\mathcal{S}_{1,2}^{CL}(d_1, d_2) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \cong 0,724 (d_1 + d_2)^2. \quad (4.12b)$$

La vitesse caractéristique du couple de bulles $V_{1,2}$ est par contre différente selon le modèle choisi.

a) Prince et Blanch (1990) expriment cette vitesse comme la moyenne quadratique de la vitesse turbulente $\mathbf{v}_t$ associée à chaque bulle :

$$V_{1,2}(d_1, d_2) = \sqrt{\overline{\mathbf{v}_t^2}(d_1) + \overline{\mathbf{v}_t^2}(d_2)} \cong \sqrt{2} \varepsilon_c^{1/3} \sqrt{d_1^{2/3} + d_2^{2/3}} \quad (4.13a)$$

où l'on a utilisé la relation (4.5) pour exprimer $\overline{\mathbf{v}_t^2}$.

b) Kamp *et al.* (2001) expriment par contre $V_{1,2}$ comme la vitesse turbulente associée à la taille moyenne des deux bulles mères :

$$V_{1,2}(d_1, d_2) = \frac{2 C_t}{\sqrt{1,61}} \left(\varepsilon_c \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \quad (4.13b)$$

où le facteur $1/\sqrt{1,61}$ permet de prendre en compte la décélération des bulles due à une augmentation de leur masse ajoutée causé par leur rapprochement réciproque. Le coefficient C_t correspond quant à lui au ratio entre les fluctuations de la vitesse des bulles et celles de la vitesse du liquide ; selon Kamp *et al.* (2001), ce coefficient peut être estimé par :

$$C_t^2 \approx \frac{9 + 72 \nu_c/d^2 C'_t l_e/\nu'_c}{1 + 72 \nu_c/d^2 C'_t l_e/\nu'_c} \quad (4.13c)$$

où l_e désigne l'échelle intégrale de la turbulence et ν'_c le module de la vitesse fluctuante du liquide. Le coefficient C'_t devant être choisi voisin mais légèrement inférieur à l'unité (Kamp, 1996), les

auteurs proposent de prendre $C'_t \approx 0,6$. Ces derniers proposent également de remplacer d par un diamètre moyen (p. ex. d_{10}) dans l'expression de C_t , ce coefficient étant supposé dépendre peu du diamètre.

Finalement, on obtient les expressions suivantes pour la fréquence de collision par agitation turbulente.

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\phi^{CL}(d_1, d_2) = 0,278 n^2 \varepsilon_c^{1/3} (d_1 + d_2)^2 \sqrt{d_1^{2/3} + d_2^{2/3}} \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2). \quad (4.14a)$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\phi^{CL}(d_1, d_2) = 0,905 C_t n^2 \varepsilon_c^{1/3} (d_1 + d_2)^{7/3} \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2). \quad (4.14b)$$

Dans ces expressions, $\mathcal{P}_\beta$ peut être remplacé soit par l'expression mathématique de la loi Q2, soit par celle de la loi C2.

4.2.2 Efficacité de collision

On a mentionné précédemment le fait que toutes les collisions ne donnait pas forcément lieu à un événement de coalescence. Pour que la coalescence ait lieu il faut en effet que les deux bulles entrées en collision reste en interaction suffisamment longtemps pour que le film interfacial puisse être totalement drainé. L'efficacité de coalescence peut donc s'écrire sous la forme :

$$\eta^{CO} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\tau_{df}}{\tau_{1,2}} < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

où τ_{df} désigne le temps caractéristique de drainage du film interfacial et $\tau_{1,2}$ le temps caractéristique d'interaction des bulles mères. Une transition abrupte de l'efficacité de collision est cependant peu probable, notamment à cause des différents angles de collision possibles pour un même ratio $\tau_{df}/\tau_{1,2}$ (Kamp *et al.*, 2001). Aussi, une formulation semi-empirique, *lissée* et *continue* de l'efficacité de collision est généralement utilisée (Ross, 1971 ; Coualaloglou et Tavlarides, 1977 ; Chesters, 1991) :

$$\eta^{CO} = \exp\left(-\frac{\tau_{df}}{\tau_{1,2}}\right) \quad (4.16)$$

où l'on retrouve bien les conditions aux limites de (4.15) : si $\tau_{df} \ll \tau_{1,2}$, alors $\eta^{CO} \rightarrow 1$; si $\tau_{df} \gg \tau_{1,2}$, alors $\eta^{CO} \rightarrow 0$.

Pour un écoulement bouillant, l'influence du changement de phase sur le mécanisme de coalescence peut être prise en compte par l'intermédiaire de l'efficacité de collision, celle-ci s'écrivant alors selon Saboni *et al.* (2002) :

$$\eta_\Gamma^{CO} = \exp\left(-f \frac{\tau_{df}}{\tau_{1,2}}\right) = \eta^{CO f} \quad (4.17)$$

où f est un coefficient permettant de prendre en compte l'accélération ou la décélération du mécanisme de coalescence par le changement de phase. La modélisation de ce coefficient étant très complexe (*cf.* Saboni *et al.*, 2002), on supposera ici en première approximation que le changement de phase n'influence que peu le mécanisme de coalescence de bulles, soit $f \approx 1$.

Penchons-nous à présent sur la fermeture des temps caractéristiques τ_{df} et $\tau_{1,2}$ par les modèles de Prince et Blanch (1990) et Kamp *et al.* (2001).

• Temps caractéristique de drainage

Comme l'étape de rupture peut être considérée comme instantanée devant l'étape de drainage (Chesters et Hofman, 1982), le temps caractéristique de drainage est défini comme l'intervalle de temps nécessaire pour que le film interfacial atteigne l'épaisseur critique à laquelle il va se rompre. Cette épaisseur critique, notée $\bar{h}_{cr}$, est généralement estimée à 100 Å (Chesters et Hofman, 1982 ; Kim et Lee, 1987), c'est-à-dire de l'ordre de l'échelle des interactions moléculaires.

L'approche de (Prince et Blanch, 1990), tirée des travaux de Oolman et Blanch (1986), consiste à résoudre une équation différentielle simplifiée décrivant l'amincissement d'un film liquide entre deux interfaces mobiles ; l'écoulement du liquide étant supposé piloté par la pression capillaire uniquement, les forces de Van der Waals sont donc négligées. L'intégration de cette équation entre l'épaisseur initiale du film $\bar{h}_0$, et l'épaisseur critique $\bar{h}_{cr}$, leur permet d'obtenir une expression pour le temps caractéristique de drainage :

$$\tau_{df} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\rho_c d_{eq}^3}{2\sigma}} \ln\left(\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_{cr}}\right) \cong 0,814 \sqrt{\frac{\rho_c d_{eq}^3}{\sigma}} \quad (4.18)$$

où $\bar{h}_0$ a été prise égale à 100 µm par les auteurs, citant les travaux de Kirkpatrick et Lockett (1974). Dans cette relation, d_{eq} désigne un diamètre représentatif du couple de bulles ; d'après Chesters et Hofman (1982), ce diamètre peut être pris égal à la moyenne harmonique des diamètres de bulles :

$$d_{eq}(d_1, d_2) \cong 2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)^{-1} = \frac{2 d_1 d_2}{d_1 + d_2} \quad (4.19)$$

À partir de différents travaux de Chesters (Chesters et Hofman, 1982 ; Chesters, 1991 ; Abid et Chesters, 1994) où le problème du drainage du film entre deux bulles à interfaces déformables a été résolu numériquement, Kamp *et al.* (2001) proposent le temps caractéristique de drainage suivant :

$$\tau_{df} \approx \frac{\rho_c \Delta V_0 d_{eq}^2}{8\sigma} \quad (4.20)$$

où ΔV_0 désigne la vitesse relative des bulles au début de la déformation que les auteurs prennent égale à la vitesse de collision $V_{1,2}$ (4.13b). Cette relation a été obtenue à partir de considérations dimensionnelles et en négligeant les effets des forces de Van der Waals ainsi que ceux de la viscosité du gaz.

• Temps caractéristique d'interaction

D'après Prince et Blanch (1990), le temps caractéristique d'interaction de deux bulles dépend à la fois de leur *taille*, la surface de contact augmentant avec la taille des bulles, et de *l'intensité de la turbulence du liquide* qui va par contre avoir tendance à séparer les deux bulles. Une analyse dimensionnelle permet aux auteurs d'estimer $\tau_{1,2}$ par le ratio suivant :

$$\tau_{1,2} \approx \frac{d_{eq}^{2/3}}{2^{2/3} \varepsilon_c^{1/3}} \cong 0,630 \frac{d_{eq}^{2/3}}{\varepsilon_c^{1/3}} \quad (4.21)$$

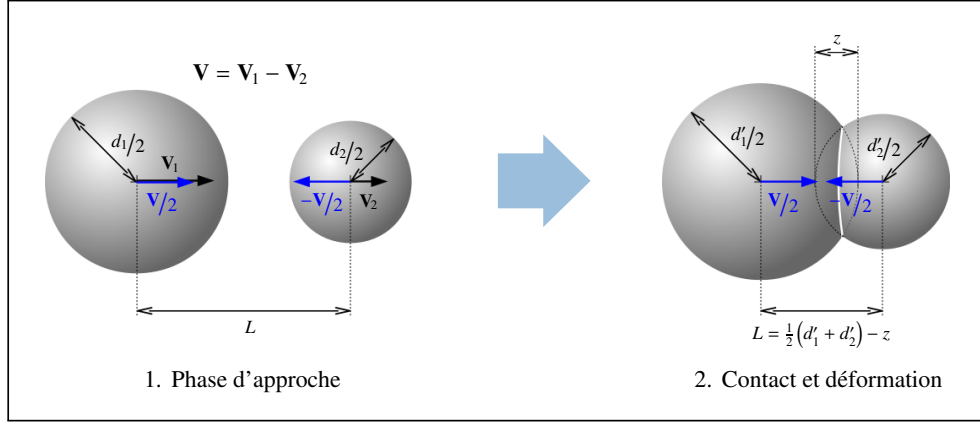


FIG. 4.5 – Approche et déformation de deux bulles (adapté de Kamp *et al.*, 2001). Notons que les diamètres des bulles déformées d'_1 et d'_2 sont légèrement plus grands que les diamètres initiaux d_1 et d_2 afin de compenser la déformation des bulles.

Le temps d'interaction tel que modélisé par Prince et Blanch (1990) peut aussi être interprété comme le temps caractéristique de retournement d'un tourbillon de taille comparable à celle d'une bulle de diamètre d_{eq} . Les auteurs insistent bien sur le fait qu'il ne s'agit que d'une estimation de l'ordre de grandeur du temps d'interaction et non pas d'un modèle physique fiable.

La modélisation de $\tau_{1,2}$ proposée par Kamp *et al.* (2001) traduit une physique bien différente, le processus de coalescence y étant vu comme une compétition entre l'*inertie de la collision* et la *déformation élastique* des bulles. En effet, deux bulles entrant en collision se déforment, augmentant ainsi leur énergie de surface au détriment de leur énergie cinétique. Les bulles décélèrent donc et peuvent même être amenées à rebondir si le film ne se rompt pas avant que leur mouvement ne s'inverse (l'énergie de surface est alors restituée aux bulles sous forme d'une énergie cinétique négative). Kamp *et al.* (2001) définissent donc le temps caractéristique d'interaction comme l'intervalle de temps entre le début de la déformation des bulles et l'instant où la déformation est maximale, c'est-à-dire juste avant que les bulles ne commencent à se séparer.

À partir d'un simple bilan énergétique traduisant cette compétition entre l'énergie cinétique et l'énergie de surface des bulles, Kamp *et al.* (2001) déterminent une équation différentielle donnant la variation de la pénétration réciproque des bulles en interaction (cote z sur la figure 4.5). L'intégration de cette équation différentielle entre le début de la déformation et l'instant où le mouvement s'inverse (c'est-à-dire lorsque $dz/dt = 0$) leur permet de déterminer $\tau_{1,2}$:

$$\tau_{1,2} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\rho_c C_{1,2}^{VM} d_{eq}^3}{3 \sigma}} \quad (4.22)$$

où $C_{1,2}^{VM}$ désigne le coefficient de masse ajoutée du couple de bulles en contact, coefficient pouvant être exprimé comme une fonction de d_2/d_1 :⁶

$$C_{1,2}^{VM} = \frac{L'' N'' - M''^2}{L'' - 2 M'' + N''} \quad (4.23a)$$

6. $C_{1,2}^{VM}$ est estimé par Kamp *et al.* (2001) à partir de la définition $Ec \triangleq \frac{1}{2} \rho_c \frac{\pi}{6} d_{eq}^3 C_{1,2}^{VM} V^2$, où Ec désigne l'énergie cinétique de l'écoulement potentiel autour de deux sphères solides se rapprochant l'une de l'autre (résultat analytique donné par Lamb, 1932) et V désigne le module de la vitesse relative des deux bulles (définie comme la différence des deux vitesses d'approche, cf. figure 4.5).

avec les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} L'' \cong \frac{1}{(2-D^*)^3} + \frac{3}{(4-D^*)^3} + \frac{3}{(6-D^*)^3} \end{array} \right. \quad (4.23b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M'' \cong \frac{251}{276} \end{array} \right. \quad (4.23c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N'' \cong \frac{1}{D^{*3}} + \frac{3}{(2+D^*)^3} + \frac{3}{(4+D^*)^3} \end{array} \right. \quad (4.23d)$$

où D^* est un diamètre adimensionnel défini comme suit :

$$D^* = \frac{2d_1}{d_1 + d_2} = \frac{2}{1 + d_2/d_1}. \quad (4.23e)$$

• Expressions finales de l'efficacité de collision

Finalement, on obtient les expressions suivantes pour l'efficacité de collision.

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\eta^{CO}(d_1, d_2) = \exp \left(-1,29 \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} d_{eq}^{5/6}(d_1, d_2) \right). \quad (4.24a)$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\eta^{CO}(d_1, d_2) = \exp \left(-\frac{\mathcal{K}_\eta C_t \sqrt{3}}{2\pi \sqrt{1,61}} \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{d_{eq}(d_1, d_2)}{C_{1,2}^{VM}(d_1, d_2)} \right)^{1/2} \right) \quad (4.24b)$$

où $\mathcal{K}_\eta$ est un coefficient de proportionnalité ajouté par les auteurs pour tenir compte des différentes approximations faites lors de l'écriture de leur modèle. Ajustée sur une série d'expériences en microgravité (Kamp, 1996), la valeur de $\mathcal{K}_\eta$ a été fixée à 5,13 par Kamp *et al.* (2001)

Bien que l'approche de la modélisation de η^{CO} soit complètement différente pour les deux modèles, on peut remarquer que dans le cas monodispersé (c'est-à-dire lorsque $d_1 = d_2$) les deux expressions se confondent à une constante près.

4.2.3 Calcul du terme source

En combinant les différentes relations présentées aux paragraphes précédents, on obtient les expressions suivantes pour le terme source de coalescence :

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\begin{aligned} CO_\gamma = 0,139 n^2 \varepsilon_c^{1/3} \int \int_{d_{min}}^{d_{max}} & \left((d_1^3 + d_2^3)^{\gamma/3} - d_1^\gamma - d_2^\gamma \right) (d_1 + d_2)^2 \sqrt{d_1^{2/3} + d_2^{2/3}} \\ & \times \exp \left(-1,29 \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} d_{eq}^{5/6}(d_1, d_2) \right) \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2) dd_1 dd_2. \end{aligned} \quad (4.25a)$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\begin{aligned} CO_\gamma = & 0,453 C_t n^2 \varepsilon_c^{1/3} \iint_{d_{min}}^{d_{max}} \left((d_1^3 + d_2^3)^{1/3} - d_1^\gamma - d_2^\gamma \right) (d_1 + d_2)^{7/3} \\ & \times \exp \left(-1,11 C_t \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{deq(d_1, d_2)}{C_{1,2}^{VM}(d_1, d_2)} \right)^{1/2} \right) \\ & \times \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2) dd_1 dd_2. \end{aligned} \quad (4.25b)$$

Suite au changement de variable $d_i^\star \triangleq d_i/d_{10}$, on peut montrer que les intégrales doubles apparaissant dans ces deux expressions peuvent être exprimées comme des fonctions de deux paramètres adimensionnels : l'écart type $\tilde{\sigma}^\star$ et l'efficacité de collision monodisperse η_{10}^{CO} , définie comme l'efficacité de collision obtenue pour $d_1 = d_2 = d_{10}$.

Après quelques calculs et interpolations additionnels (détaillés à l'annexe C.1), le terme source de coalescence s'exprime finalement selon l'expression approchée suivante :

$$CO_\gamma \cong \mathcal{K}_{CO} n^2 \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma+7/3} \left(c_{\gamma 11} + c_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{\star c_{\gamma 13}} \right) \eta_{10}^{CO} \left(c_{\gamma 21} + c_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{\star c_{\gamma 23}} \right) \quad (C.9)$$

avec :

a) pour le modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{CO} = 0,0782 \\ \eta_{10}^{CO} \triangleq \exp \left(-1,29 \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{5/6} \right) = \exp \left(-0,912 \sqrt{We_b^T(d_{10})} \right) \end{cases} \quad \begin{aligned} (4.25a.1) \\ (4.25a.2) \end{aligned}$$

b) pour le modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{CO} = 0,255 C_t \\ \eta_{10}^{CO} \triangleq \exp \left(-\frac{1,25 C_t}{\sqrt{C_{1,2}^{VM}}} \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{5/6} \right) = \exp \left(-0,987 C_t \sqrt{We_b^T(d_{10})} \right) \end{cases} \quad \begin{aligned} (4.25b.1) \\ (4.25b.2) \end{aligned}$$

où $C_{10}^{VM} \triangleq C_{1,2}^{VM}(d_{10}, d_{10}) \cong 0,803$ (Kamp *et al.*, 2001).

Les valeurs des différents coefficients d'interpolation $c_{\gamma ij}$ apparaissant dans (C.9) sont données dans le tableau 4.1 pour les deux modèles de coalescence et les deux PDF qui nous intéressent. On rappelle également que n peut être exprimée comme une fonction des premières densités de moments grâce à une relation géométrique propre à chaque type de PDF : la relation (2.56) pour la PDF Q2 et la relation (A.5) pour la PDF C2.

4.3 Détermination du terme source de fragmentation

Intéressons-nous à présent à la fermeture du terme source de l'équation de transport de $\mathcal{M}_\gamma$ (2.44) dû à la fragmentation de bulles.

De la même façon que pour le terme source de coalescence, on introduit une *fréquence de fragmentation*, notée ϕ^{BU} , permettant de quantifier le nombre d'événements de fragmentation par unités de temps (Coulaloglou et Tavlarides, 1977).⁷ À l'instar de Luo et Svendsen (1996), on définit également une

7. À nouveau, le terme *fréquence* pour désigner ϕ^{BU} est un abus de langage, cette grandeur ayant la dimension de $s^{-1} \cdot m^{-4}$.

	γ	PDF	$c_{\gamma 11}$	$c_{\gamma 12}$	$c_{\gamma 13}$	$c_{\gamma 21}$	$c_{\gamma 21}$	$c_{\gamma 23}$
PB90	1	Q2	-7,448	-1,755	2,159	1,000	0,142	2,035
		C2	-7,460	-2,182	2,597	1,000	0,174	2,390
	2	Q2	-4,158	-2,136	2,230	1,000	0,215	1,940
		C2	-4,176	-2,724	2,725	1,000	0,267	2,287
KCCF01	1	Q2	-6,635	-1,615	2,155	0,888	0,255	1,611
		C2	-6,647	-2,007	2,597	0,890	0,312	1,917
	2	Q2	-3,705	-1,928	2,224	0,887	0,297	1,585
		C2	-3,720	-2,458	2,720	0,889	0,370	1,890

TAB. 4.1 – Valeurs des coefficients d’interpolation du terme source CO_γ pour les modèles de coalescence PB90 (Prince et Blanch, 1990) et KCCF01 (Kamp *et al.*, 2001).

fraction volumique de fragmentation, f_{BV} , permettant de caractériser la taille des bulles filles. Pour un événement de fragmentation binaire, cette nouvelle grandeur s’écrit simplement :

$$f_{BV} \triangleq \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2} = \frac{d_1^3}{d_1^3 + d_2^3} \quad (4.26)$$

où d désigne le diamètre de la bulle mère et d_1 et d_2 les diamètres des deux bulles filles. Pour la valeur particulière $f_{BV} = 1/2$, on parle généralement de *fragmentation homogène*, autrement dit, les deux bulles filles ont la même taille.

On écrit le terme source de fragmentation de façon similaire à celui de coalescence, c’est-à-dire comme la somme des contributions de toutes les bulles mères se fragmentant pour tous les couples de bulles filles possibles (d_1, d_2) :⁸

$$\text{BU}_\gamma = \int_0^{1/2} \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}(d; f_{BV}) \phi^{BU}(d; f_{BV}) dd df_{BV} \quad (4.27)$$

où $\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}$ correspond à la variation de $\mathcal{M}_\gamma$ causée par un événement de fragmentation ; celle-ci peut être déduite de la figure 4.6 :

$$\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}(d; f_{BV}) = d^\gamma \left(f_{BV}^{\gamma/3} + (1 - f_{BV})^{\gamma/3} - 1 \right). \quad (4.28)$$

Notons que *dans le cas de la fragmentation homogène on retrouve l’expression classique du terme source de fragmentation* donnée notamment par Hill (1998) :

$$\text{BU}_\gamma = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}(d, \frac{1}{2}) \phi^{BU}(d) dd = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (2^{1-\gamma/3} - 1) d^\gamma \phi^{BU}(d) dd. \quad (4.29)$$

En considérant que la fragmentation turbulente d’une bulle est causée par la collision de cette bulle et d’un tourbillon turbulent, on peut définir la fréquence de fragmentation comme le produit d’une *fréquence d’arrivée* des tourbillons sur la surface de la bulle, notée ϕ^{EA} , et d’une *probabilité de fragmentation*, notée η^{BU} et permettant de caractériser l’efficacité de la collision. On définit ainsi (Coulaloglou et Tavlarides, 1977 ; Prince et Blanch, 1990 ; Luo et Svendsen, 1996) :

8. La borne supérieure de l’intégrale en f_{BV} est fixée à $1/2$ car l’intégrande est symétrique par rapport à $f_{BV} = 1/2$ (Luo et Svendsen, 1996) ; on évite ainsi de compter deux fois les mêmes couples de bulles filles.

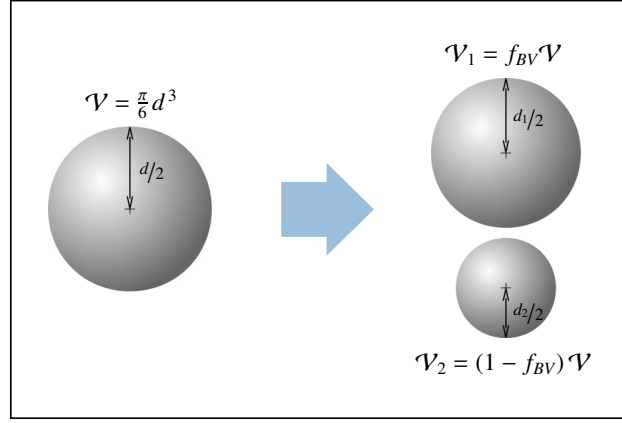


FIG. 4.6 – Schématisation d'un événement de fragmentation : relations entre les volumes des bulles mère et filles.

$$\phi^{BU}(d; f_{BV}) = \int_{d_{e,min}}^{d_{e,max}} \phi^{EA}(d, d_e; f_{BV}) \eta^{BU}(d, d_e; f_{BV}) dd_e \quad (4.30)$$

où l'intégration porte sur la gamme des diamètres des tourbillons susceptibles d'initier un événement de fragmentation. Si la majorité des auteurs s'accordent sur la forme de la probabilité de fragmentation, il en va différemment pour l'expression de la fréquence d'arrivée des tourbillons pour laquelle une grande variété de modèles existe (*cf.* Liao et Lucas, 2009).

La modélisation du terme source de fragmentation BU_γ va être abordée en deux étapes successives. On se limitera tout d'abord à la modélisation de la fragmentation homogène à l'aide du modèle de Prince et Blanch (1990), couramment utilisé, puis dans un second temps, le caractère hétérogène du mécanisme de fragmentation sera pris en compte à l'aide du modèle de Luo et Svendsen (1996).

Notons également que, à l'instar de la modélisation du mécanisme de coalescence, *on supposera négligeable l'influence du changement de phase sur le mécanisme de fragmentation.*

4.3.1 Fragmentation homogène

Dans un premier temps, et afin de ne pas compliquer trop grandement les calculs théoriques, on va supposer le mécanisme de fragmentation comme homogène, autrement dit, les bulles filles résultant d'un même événement de fragmentation ont la même taille.

• Fréquence d'arrivée des tourbillons

Pour modéliser la fréquence d'arrivée des tourbillons sur la surface de la bulle, Prince et Blanch (1990) proposent d'utiliser la fréquence de collision utilisée pour la modélisation de la coalescence (*cf.* équation 4.11). En remplaçant la deuxième bulle par un tourbillon, ils écrivent :

$$\phi^{EA}(d, d_e) = n \mathcal{P}_\beta(d) \mathcal{F}_e(d_e) \mathcal{S}_{b,e}^{CL}(d, d_e) V_{b,e}(d, d_e) \quad (4.31)$$

où d et d_e désignent respectivement le diamètre de la bulle et du tourbillon entrant en collision, $\mathcal{F}_e$ la fonction de densité de présence des tourbillons et $\mathcal{S}_{b,e}^{CL}$ et $V_{b,e}$ respectivement la surface efficace et la

vitesse de collision. Ces dernières sont modélisées de la même façon que précédemment, en remplaçant simplement d_1 et d_2 par d et d_e dans (4.12a) et (4.13a) :

$$S_{b,e}^{CL}(d, d_e) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d + d_e}{2} \right)^2 \cong 0,196 (d + d_e)^2 \quad (4.32)$$

$$V_{b,e}(d, d_e) = \sqrt{\mathbf{v}_t^2(d) + \mathbf{v}_t^2(d_e)} \cong \sqrt{2} \varepsilon_c^{1/3} \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}}. \quad (4.33)$$

La fonction de densité de présence des tourbillons peut quant à elle être déterminée à partir des travaux d’Azbel et Athanasios (1983) repris ensuite par Hibiki et Ishii (2000) :

$$\frac{dN_e(k)}{dk} = 0,1 (1 - \alpha_d) k^2 \quad (4.34)$$

où N_e désigne le nombre de tourbillons de longueur d’onde k par unité de volume du liquide. La relation entre le nombre d’onde et la taille d’un tourbillon est simplement $k = 2/d_e$ (Tennekes et Lumley, 1972). À l’aide d’un changement de variable, on en déduit l’expression suivante (Yao et Morel, 2004) :

$$\mathcal{F}_e(d_e) = 0,8 (1 - \alpha_d) \frac{1}{d_e^4}. \quad (4.35)$$

Finalement, la fréquence d’arrivée d’un tourbillon turbulent sur la surface d’une bulle s’écrit :

$$\phi^{EA}(d) \cong 0,222 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \frac{(d + d_e)^2}{d_e^4} \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}} \mathcal{P}_\beta(d). \quad (4.36)$$

• Probabilité de fragmentation

Nous avons vu au paragraphe 4.1.2 que le potentiel de rupture d’une bulle dans un écoulement turbulent pouvait être caractérisé par un *nombre de Weber turbulent* (4.7) dont on rappelle l’expression ici :

$$We_b^T(d) = \frac{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}}{\sigma}. \quad (4.7)$$

la rupture d’une bulle ayant lieu lorsque la valeur We_b^T dépasse une valeur critique We_{cr}^T . En conséquence, Wu *et al.* (1998) expriment la probabilité de fragmentation de la façon suivante :

$$\eta^{BU}(d) \hat{=} \exp \left(- \frac{We_{cr}^T}{We_b^T(d)} \right) = \exp \left(- \frac{We_{cr}^T \sigma}{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}} \right) \quad (4.37)$$

où l’on retrouve l’utilisation d’une fonction exponentielle comme c’était déjà le cas pour la probabilité de coalescence (4.16).

Le nombre de Weber turbulent critique peut être déterminé à partir des travaux de Sevik et Park (1973). Ces derniers supposent que la fragmentation turbulente d’une bulle est due à la mise en résonance des oscillations naturelles de cette bulle avec les oscillations de la turbulence du liquide. La fréquence naturelle d’oscillation d’ordre ω d’une bulle sphérique de diamètre d , notée ϕ_ω , peut être trouvée dans l’ouvrage de Lamb (1932) :

$$(2 \pi \phi_\omega)^2 = \frac{8 \omega (\omega + 1) (\omega - 1) (\omega + 2) \sigma}{((\omega + 1) \rho_d + \omega \rho_c) d^3}. \quad (4.38)$$

Le mode 0 correspond à une pulsation de volume, alors que le mode 1 correspond à une oscillation de translation. Les modes 2 et supérieurs correspondent à des modes entraînant une déformation de la surface de la bulle avec la création de ω lobes.

Grâce à une analyse dimensionnelle, la fréquence caractéristique de la turbulence du liquide peut être estimée telle que (Sevik et Park, 1973) :

$$\phi_t = \frac{\sqrt{v_t^2}}{d} \quad (4.39)$$

où le diamètre de bulle a été pris comme longueur caractéristique. En égalant ϕ_ω et ϕ_t , les auteurs arrivent à l'expression suivante pour le nombre de Weber critique :

$$\text{We}_{cr}^T = \frac{2 \omega (\omega + 1) (\omega - 1) (\omega + 2)}{\pi^2 ((\omega + 1) \rho_d / \rho_c + \omega)}. \quad (4.40)$$

Le deuxième mode d'oscillation étant le plus à même d'initier un événement de fragmentation binaire, on pose $\omega = 2$ et on obtient :

$$\text{We}_{cr}^T = \frac{48}{\pi^2 (3 \rho_d / \rho_c + 2)}. \quad (4.41)$$

Dans le cas où $\rho_d \ll \rho_c$, ce qui est le cas pour un écoulement à bulles, l'expression de We_{cr}^T se simplifie comme suit :

$$\text{We}_{cr}^T \cong \frac{24}{\pi^2} \cong 2,4. \quad (4.42)$$

où l'on retrouve une valeur proche de celle proposée par Prince et Blanch (1990), à savoir $\text{We}_{cr}^T = 2,3$.

• Fréquence de fragmentation

Compte tenu des relations (4.36) et (4.37), la fréquence de fragmentation (4.30) s'écrit désormais :

$$\phi^{BU}(d) = 0,222 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \mathcal{P}_\beta(d) \exp\left(-\frac{\text{We}_{cr}^T}{\text{We}_b^T(d)}\right) \int_{d_{e,min}}^{d_{e,max}} \frac{(d + d_e)^2}{d_e^4} \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}} dd_e. \quad (4.43)$$

Comme énoncé au début de ce chapitre, il est généralement supposé que seuls les tourbillons de taille comparable à une bulle sont capables de déformer suffisamment cette bulle pour la conduire à une rupture éventuelle ; Prince et Blanch (1990) proposent ainsi de prendre $d_{e,max} = d$ et $d_{e,min} = \mathcal{K}_e d$, avec $0 < \mathcal{K}_e < 1$ et $\mathcal{K}_e \approx 0,2$ comme valeur indicative.

Après ajustement de cette constante sur des résultats expérimentaux (expérience DEBORA, cf. paragraphe 5.3.1), Yao et Morel (2004) proposent par contre $\mathcal{K}_e \approx 0,65$. En suivant Lehr *et al.* (2002), selon qui le diamètre minimal des tourbillons efficaces est égal au diamètre du plus petit fragment de bulle résultant, on peut déterminer que $\mathcal{K}_e = f_{BV}^{1/3}$, soit pour une fragmentation homogène $\mathcal{K}_e \approx 0,79$. La valeur $\mathcal{K}_e$ est donc loin d'être universelle ; elle pourra éventuellement être utilisée comme paramètre d'ajustement.

• Calcul du terme source

En combinant les différentes relations présentées aux paragraphes précédents, le terme source de fragmentation s'écrit :

	γ	PDF	$b_{\gamma 11}$	$b_{\gamma 12}$	$b_{\gamma 13}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 23}$
$\mathcal{K}_e = 0,65$	1	Q2	1,587	-0,165	0,690	3,653	0,065	-1,079
		C2	1,658	-0,519	1,032	3,537	0,672	-1,707
	2	Q2	1,480	0,408	1,502	3,780	-0,635	-1,288
		C2	1,658	-0,610	2,728	3,623	0,300	-2,454
$\mathcal{K}_e = 0,79$	1	Q2	0,703	-0,073	0,306	1,617	0,029	-0,478
		C2	0,734	-0,230	0,457	1,566	0,297	-0,756
	2	Q2	0,655	0,181	0,665	1,673	-0,281	-0,570
		C2	0,734	-0,270	1,208	1,604	0,133	-1,087

 TAB. 4.2 – Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990).

$$\begin{aligned}
 BU_\gamma &= 0,222 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \\
 &\times \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \int_{\mathcal{K}_e d}^d \frac{d^\gamma}{d_e^4} (d + d_e)^2 \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}} \exp \left(- \frac{We_{cr}^T \sigma}{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}} \right) \mathcal{P}_\beta(d) dd_e dd.
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Comme pour le calcul du terme source de coalescence, le changement de variable $d_i^* \triangleq d_i/d_{10}$ permet d'écrire l'intégrale double comme une fonction des deux paramètres adimensionnels $\tilde{\sigma}^*$ et η_{10}^{BU} , ce dernier n'étant autre qu'une *probabilité de fragmentation monodisperse* définie comme la probabilité de fragmentation obtenue pour $d_1 = d_2 = d_{10}$.

L'intégrale double pouvant être estimée avec une méthode similaire à celle utilisée pour le calcul du terme source de coalescence (cf. annexe C.2), le terme source de fragmentation peut finalement être approché par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 BU_\gamma &\cong 0,167 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma-2/3} \\
 &\times \left((b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 13} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU 1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 23} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU 3/2} \right)
 \end{aligned} \quad (C.18)$$

avec :

$$\eta_{10}^{BU} \triangleq \exp \left(- \frac{We_{cr}^T \sigma}{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d_{10}^{5/3}} \right) \cong \exp \left(- \frac{2,4}{We_b^T(d_{10})} \right) \quad (4.45)$$

Les valeurs des différents coefficients d'interpolation $b_{\gamma ij}$ apparaissant dans (C.18) sont données dans le tableau 4.2 pour les deux PDF qui nous intéressent et pour différentes valeurs du coefficient $\mathcal{K}_e$. Rappelons également que n peut être exprimé comme une fonction des premières densités de moments grâce à une relation géométrique propre à chaque type de PDF : la relation (2.56) pour la PDF Q2 et la relation (A.5) pour la PDF C2.

4.3.2 Fragmentation hétérogène

On a vu que l'on pouvait assez facilement déterminer un terme source pour le mécanisme de fragmentation de bulles en considérant que celui-ci donnait naissance à deux bulles filles de même taille. Si cette hypothèse de fragmentation homogène permet de s'affranchir de la prise en compte d'une distribution en taille des bulles filles qui complique grandement le calcul du terme source, elle n'est cependant

pas très réaliste. En effet, comme le soulignent Luo et Svendsen (1996), la probabilité qu'un événement de fragmentation donne naissance à deux bulles de volumes identiques est bien plus faible que celle d'une fragmentation résultant en deux bulles de volumes différents, affirmation d'ailleurs confirmée par l'expérience (p. ex. Hesketh *et al.*, 1991).

La prise en compte du caractère hétérogène du mécanisme de fragmentation nécessite la connaissance de la distribution des tailles de bulles filles en fonction de la fraction volumique de fragmentation f_{BV} , paramètre défini au début de la section 4.3. Cette nouvelle fonction de distribution a fait l'objet de nombreux travaux (Wang *et al.*, 2003 ; Liao et Lucas, 2009 ; Martínez-Bazán *et al.*, 2010) qui ont débouchés sur deux familles de modèles :

- a) les *modèles statistiques*, où la taille des bulles filles est traitée comme une variable aléatoire dont la fonction de distribution serait donnée par une loi statistique simple comme par exemple une loi normale (Valentas *et al.*, 1966 ; Coulaloglou et Tavlarides, 1977) ou une loi bêta (Lee *et al.*, 1987) ;⁹
- b) les *modèles phénoménologiques*, où la fonction de distribution est déterminée à partir d'observations empiriques et/ou de la théorie ; il en résulte différentes formes de fonction de distribution de taille de bulles filles : en forme de U (Tsouris et Tavlarides, 1994 ; Luo et Svendsen, 1996), de M (Lehr *et al.*, 2002 ; Wang *et al.*, 2003) ou encore de cloche (Martínez-Bazán *et al.*, 1999).

Dans cette étude, la fragmentation hétérogène sera traitée à l'aide du modèle de Luo et Svendsen (1996), largement utilisé dans la littérature et où la fonction de distribution des tailles de bulles filles est calculée et non présumée. Détaillons à présent ce nouveau modèle de fragmentation.

• Fréquence d'arrivée des tourbillons

La fréquence d'arrivée des tourbillons sur la surface de la bulle est modélisée par Luo et Svendsen (1996) de la même manière que Prince et Blanch (1990), à savoir :

$$\phi^{EA}(d, d_e) = n \mathcal{P}_\beta(d) \mathcal{F}_e(d_e) \mathcal{S}_{b,e}^{CL}(d, d_e) V_{b,e}(d_e) \quad (4.46)$$

où les surface efficace et vitesse de collision $\mathcal{S}_{b,e}^{CL}$ et $V_{b,e}$ sont cette fois modélisées comme suit :

$$\mathcal{S}_{b,e}^{CL}(d, d_e) = \frac{\pi}{4} (d + d_e)^2 \cong 0,785 (d + d_e)^2 \quad (4.47)$$

$$V_{b,e}(d_e) = \sqrt{\mathbf{v}_t^2(d_e)} \cong \sqrt{2} (\varepsilon_c d_e)^{1/3} . \quad (4.48)$$

La fonction de densité de présence des tourbillons est elle aussi modélisée de la façon similaire aux travaux de Prince et Blanch (1990) :

$$\mathcal{F}_e(d_e) = 0,822 (1 - \alpha_d) \frac{1}{d_e^4} \quad (4.49)$$

où la constante a ici été déterminée d'après les travaux de Tennekes et Lumley (1972).

En définissant $\xi^\star \triangleq d_e/d$ comme le ratio de la taille du tourbillon et de la taille de la bulle, Luo et Svendsen (1996) expriment finalement la fréquence d'arrivée des tourbillons de la façon suivante :

$$\phi^{EA}(d, \xi^\star) = 0,923 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d^{-5/3} \mathcal{P}_\beta(d) (1 + \xi^\star)^2 \xi^{\star -11/3} . \quad (4.50)$$

9. La fragmentation homogène peut être attachée à cette famille de modèles en assimilant la fonction de distribution des bulles filles à une distribution de Dirac centrée sur $f_{BV} = 1/2$.

L'introduction du diamètre adimensionnel ξ^* va nous permettre de faire apparaître un nombre de Weber de bulle dans l'expression de la probabilité de fragmentation.

• Probabilité de fragmentation

D'après Luo et Svendsen (1996), la probabilité de fragmentation peut être définie comme la probabilité qu'un tourbillon de taille d_e impactant la bulle ait une énergie cinétique supérieure ou égale à l'énergie de surface minimale nécessaire à la création du couple de bulles filles. Ces deux énergies sont données respectivement par :

$$\check{e}_e(d, \xi^*) = \rho_c \frac{\pi}{6} d_e^3 \frac{\overline{\mathbf{v}_t^2}(d_e)}{2} \cong \frac{\pi}{6} \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{11/3} \xi^{*11/3} \quad (4.51)$$

$$\check{e}_b(d; f_{BV}) = \pi d^2 \left(f_{BV}^{2/3} + (1 - f_{BV})^{2/3} - 1 \right) \sigma \quad (4.52)$$

d'où les auteurs déduisent une expression pour la probabilité de fragmentation :

$$\eta^{BU}(d, \xi^*; f_{BV}) = \exp \left(- \frac{\check{e}_b(d; f_{BV})}{\check{e}_e(d, \xi^*)} \right) = \exp \left(- \frac{6 \left(f_{BV}^{2/3} + (1 - f_{BV})^{2/3} - 1 \right) \sigma}{\rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3} \xi^{*11/3}} \right) \quad (4.53)$$

que l'on peut également réécrire en faisant apparaître le ratio des nombres de Weber critique et turbulent :

$$\eta^{BU}(d, \xi^*; f_{BV}) = \exp \left(- \frac{\text{We}_{cr}^T(\xi^*; f_{BV})}{\text{We}_b^T(d)} \right). \quad (4.54)$$

On rappelle que le nombre de Weber turbulent est défini par (4.7), le nombre de Weber critique étant quant à lui défini ici par :

$$\text{We}_{cr}^T(\xi^*; f_{BV}) \triangleq 12 \left(f_{BV}^{2/3} + (1 - f_{BV})^{2/3} - 1 \right) \xi^{*-11/3}. \quad (4.55)$$

Contrairement au modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990), le nombre de Weber critique dépend ici des diamètres de bulle et de tourbillon par l'intermédiaire de ξ^* .

• Fréquence de fragmentation

D'après sa définition (4.30) et le changement de variable $\xi^* \triangleq d_e/d$, la fréquence de fragmentation prend la forme suivante :

$$\phi^{BU}(d; f_{BV}) = \int_{\xi_{min}^*}^{\xi_{max}^*} \phi^{EA}(d, \xi^*) \eta^{BU}(d, \xi^*; f_{BV}) d \xi^*. \quad (4.56)$$

Comme Prince et Blanch (1990), Luo et Svendsen (1996) font l'hypothèse que seuls les tourbillons ayant une taille inférieure ou égale à la taille de la bulle sont en mesure d'initier un événement de fragmentation en cas de collision ; les auteurs proposent ainsi de prendre $d_{e,max} = d$, autrement dit $\xi_{max}^* = 1$.

Concernant la borne inférieure de l'intégrale, Luo et Svendsen (1996) suggèrent de prendre la taille minimale des tourbillons de la zone inertielle de la turbulence, celle-ci pouvant être approchée par $d_{e,min} \approx C_{TL} \nu_c^{3/4} / \varepsilon_c^{1/4}$ avec $11,4 \lesssim C_{TL} \lesssim 31,4$ (Tennekes et Lumley, 1972) ; on en déduit que :

$$\xi_{min}^*(d) \approx C_{TL} \frac{\nu_c^{3/4}}{\varepsilon_c^{1/4} d}. \quad (4.57)$$

Compte tenu de (4.50) et (4.53) la fréquence de fragmentation s'écrit finalement :

$$\phi^{BU}(d; f_{BV}) = 0,923 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d^{-2/3} \mathcal{P}_\beta(d) \int_{\xi_{min}^*(d)}^1 \frac{(1 + \xi^*)^2}{\xi^{*11/3}} \exp\left(-\frac{\text{We}_{cr}^T(\xi^*; f_{BV})}{\text{We}_b^T(d)}\right) d\xi^*. \quad (4.58)$$

• Calcul du terme source

En injectant l'expression de la fréquence de fragmentation (4.58) dans la définition du terme source BU_γ (4.27), on arrive à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \text{BU}_\gamma = 0,923 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \int_0^{1/2} \int_{d_{min}}^{d_{max}} \int_{\xi_{min}^*(d)}^1 d^{\gamma-2/3} \left(f_{BV}^{\gamma/3} + (1 - f_{BV})^{\gamma/3} - 1 \right) \mathcal{P}_\beta(d) \frac{(1 + \xi^*)^2}{\xi^{*11/3}} \\ \times \exp\left(-\frac{12 \left(f_{BV}^{2/3} + (1 - f_{BV})^{2/3} - 1 \right)}{\text{We}_b^T(d) \xi^{*11/3}}\right) d\xi^* dd df_{BV} \end{aligned} \quad (4.59)$$

où l'on a également tenu compte de la définition de $\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}$ (4.28).

Le fait que la borne inférieure de l'intégrale en ξ^* dépende de grandeurs locales de l'écoulement pose problème. La valeur de ξ_{min}^* pouvant varier d'un point à l'autre de l'écoulement, mais aussi d'un écoulement à l'autre, on ne peut déterminer une expression analytique et universelle du terme source de fragmentation. On va cependant supposer que ξ_{min}^* garde globalement le même ordre de grandeur pour les écoulements que l'on va chercher à modéliser dans cette étude, à savoir quatre essais particuliers de expérience DEBORA qui seront présentés au chapitre 5 (cf. paragraphe 5.3.1). Pour ces quatre essais, les différentes grandeurs intervenant dans le calcul de ξ_{min}^* sont estimées comme suit (Garnier *et al.*, 2001) :

- viscosité cinématique du liquide : $\nu_c \approx 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;
- taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente du liquide : $\varepsilon_c \approx 1,5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$;
- diamètre moyen arithmétique des bulles : $d_{10} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

En choisissant arbitrairement $C_{TL} \approx 21,4$, c'est-à-dire la valeur médiane de la gamme proposée par Tennekes et Lumley (1972), on en déduit que $\xi_{min}^*(d_{10}) \hat{=} \mathcal{K}_{LS} \approx 0,25$, ce coefficient pouvant éventuellement servir de paramètre d'ajustement.

L'évaluation de l'intégrale triple apparaissant dans (4.59) est détaillée à l'annexe C.3. Après un série d'interpolations, le terme source de fragmentation hétérogène peut finalement être approché par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \text{BU}_\gamma \cong 0,692 \mathcal{K}_{BV\gamma} (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma-2/3} \\ \times \left((b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \bar{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU 1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \bar{\sigma}^*) \eta_{10}^{BU 2} + (b_{\gamma 31} + b_{\gamma 32} \bar{\sigma}^*) \eta_{10}^{BU 15} \right) \end{aligned} \quad (C.30)$$

avec :

$$\eta_{10}^{BU} \hat{=} \exp\left(-\frac{12(2^{1/3} - 1)\sigma}{2\rho_c \varepsilon_c^{2/3} d_{10}^{5/3}}\right) \cong \exp\left(-\frac{3,119}{\text{We}_b^T(d_{10})}\right) \quad (4.60)$$

Les valeurs des différents coefficients d'interpolation $\mathcal{K}_{BV\gamma}$ et $b_{\gamma ij}$ apparaissant dans (C.30) sont données dans le tableau 4.3 pour les deux PDF qui nous intéressent. Rappelons également que n peut être exprimé

γ	$\mathcal{K}_{BV\gamma}$	PDF	$b_{\gamma 11}$	$b_{\gamma 12}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 22}$	$b_{\gamma 31}$	$b_{\gamma 32}$
1	0,249	Q2	0,169	0,357	3,948	-0,074	14,361	0,317
		C2	0,138	0,458	3,965	-0,116	14,288	0,480
2	0,100	Q2	0,130	0,639	3,409	1,340	12,347	5,613
		C2	0,062	0,892	3,217	1,703	11,369	7,543

TAB. 4.3 – Valeurs des coefficients d’interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation hétérogène de Luo et Svendsen (1996) ($\mathcal{K}_{LS} = 0,25$).

comme une fonction des premières densités de moments grâce à une relation géométrique propre à chaque type de PDF : la relation (2.56) pour la PDF Q2 et la relation (A.5) pour la PDF C2.

4.4 Conclusion

La modélisation de la coalescence et de la fragmentation de bulles est un des points essentiels de cette étude car ces deux phénomènes impactent directement la distribution des taille de bulles. On a pu voir que la physique de ces deux phénomènes n’était toujours pas parfaitement comprise, comme en témoigne la grande variété de modèles qui existent aujourd’hui dans la littérature, ainsi que le grand nombre d’hypothèses qu’il est nécessaire de formuler pour espérer fermer ces modèles. Dans ce chapitre, nous nous sommes uniquement intéressés à la modélisation de la coalescence et fragmentation turbulente de bulles ; les principales hypothèses qui y ont été formulées sont rappelées ci-dessous.

- [H13] Les événements de coalescence sont supposés binaires, c’est-à-dire qu’il font intervenir uniquement deux bulles mères pour une bulle fille.
- [H14] Les écoulements visés par cette étude étant turbulents, on suppose les collisions par agitation turbulente prédominantes par rapport aux autres sources de collisions.
- [H15] L’influence du changement de phase sur les mécanismes de coalescence et fragmentation est supposée négligeable.
- [H16] Les événements de fragmentation sont supposés binaires, c’est-à-dire qu’il font intervenir uniquement deux bulles filles pour une bulle mère.
- [H17] Les écoulements visés par cette étude étant turbulents, on suppose la rupture par les contraintes turbulentes du liquide comme la principale source de fragmentation de bulles.
- [H18] Seuls les tourbillons de taille comparable à une bulle sont susceptibles de déformer significativement celle-ci.
- [H19] La turbulence du liquide est supposée isotrope à l’échelle des bulles.
- [H20] Les bulles ont toutes un diamètre compris dans la zone inertielle du spectre de turbulence.

Deux modèles de coalescence ont été adaptés à notre formalisme de modélisation de la polydispersion en taille, les modèles de Prince et Blanch (1990) et de Kamp *et al.* (2001), ainsi que deux modèles de fragmentation, un modèle homogène (Prince et Blanch, 1990) et un modèle hétérogène (Luo et Svendsen, 1996). Les termes sources de coalescence et fragmentation résultants impliquent des intégrales doubles ou triples qui, bien que non solvables analytiquement, ont pu être déterminées grâce à une méthode approchée inspirée de celle utilisée par Kamp dans sa thèse (1996).

Finalement, au regard de la complexité des modèles utilisés, des expressions plutôt simples on pu être obtenues pour les différents termes sources. Ces expressions présentent en outre l’avantage d’être

indépendantes de la forme de la PDF utilisée pour caractériser la polydispersion en taille de la population de bulles (PDF Q2 ou C2).

Les différents modèles de coalescence et fragmentation décrits dans ce chapitre seront confrontés au chapitre 8 à l'aide d'une simulation numérique d'un essai de la base de données DEBORA.

4.5 Références

- ABID, S. et CHESTERS, A.K. : The drainage and rupture of partially-mobile films between colliding drops at constant approach velocity. *International Journal of Multiphase Flow*, 20(3):613–629, 1994.
- AZBEL, D. et ATHANASIOS, L.L. : A mechanism of liquid entrainment. CHEREMISINOFF, N., éditeur : *Handbook of Fluids in Motion*. Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, USA, 1983.
- CHESTERS, A.K. : The modelling of coalescence processes in fluid-liquid dispersions: A review of current understanding. *Chemical Engineering Research and Design*, 69(4):259–270, 1991.
- CHESTERS, A.K. et HOFMAN, G. : Bubble coalescence in pure liquids. *Applied Scientific Research*, 38:353–361, 1982.
- COULALOGLOU, C. et TAVLARIDES, L.L. : Description of interaction processes in agitated liquid-liquid dispersions. *Chemical Engineering Science*, 32:1289–1297, 1977.
- FRISCH, U. : *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- HAGESAETHER, L., JAKOBSEN, H.A. et SVENDSEN, H.F. : A model for turbulent binary breakup of dispersed fluid particles. *Chemical Engineering Science*, 57:3251–3267, 2002.
- HESKETH, R.P., ETCHHELLS, A.W. et RUSSELL, T.W.F. : Experimental observations of bubble breakage in turbulent flow. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 30(5):835–841, 1991.
- HIBIKI, T. et ISHII, M. : One-group interfacial area transport of bubbly flows in vertical round tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(15):2711–2726, 2000.
- HILL, D.H. : *The computer simulation of dispersed two-phase flows*. Thèse de doctorat, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1998.
- HINZE, J.O. : Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. *AIChE Journal*, 1(3):289–295, 1955.
- JAKOBSEN, H.A. : *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Springer, 2008.
- KAMP, A.M. : *Écoulements turbulents à bulles dans une conduite en micropesanteur*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- KAMP, A.M., CHESTERS, A.K., COLIN, C. et FABRE, J. : Bubble coalescence in turbulent flows : a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1363–1396, 2001.
- KIM, W.K. et LEE, K.L. : Coalescence behavior of two bubbles in stagnant liquids. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 20(5):448–453, 1987.

- KIRKPATRICK, R.D. et LOCKETT, M.J. : The influence of approach velocity on bubble coalescence. *Chemical Engineering Science*, 29(12):2363 – 2373, 1974.
- KOCAMUSTAFAOGULLARI, G. et ISHII, M. : Foundation of the interfacial area transport equation and its closure relations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(3):481–493, 1995.
- KOLMOGOROV, A.N. : Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 32:16–18, 1941.
- KOLMOGOROV, A.N. : On the disintegration of drops in a turbulent flow. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66:825–828, 1949.
- LAMB, H. : *Hydrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 6^e édition, 1932.
- LEE, C.H., ERICKSON, L.E. et GLASGOW, L.A. : Bubble breakup and coalescence in turbulent gas-liquid dispersions. *Chemical Engineering Communications*, 59:65–84, 1987.
- LEHR, F., MILLIES, M. et MEWES, D. : Bubble-size distributions and flow fields in bubble columns. *AIChE Journal*, 48(11):2426–2443, 2002.
- LIAO, Y. et LUCAS, D. : A literature review of theoretical models for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *Chemical Engineering Science*, 64:3389–3406, 2009.
- LIAO, Y. et LUCAS, D. : A literature review on mechanisms and models for the coalescence process of fluid particles. *Chemical Engineering Science*, 65:2851–2864, 2010.
- LUO, H. et SVENDSEN, H.F. : Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 42(5):1225–1233, 1996.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., MONTAÑES, J.L. et LASHERAS, J.C. : On the breakup of an air bubble injected into a fully developed turbulent flow – Part 2. Size PDF of the resulting daughter bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 401:183–207, 1999.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., RODRÍGUEZ-RODRÍGUEZ, J., DEANE, G.B., MONTAÑES, J.L. et LASHERAS, J.C. : Considerations on bubble fragmentation models. *Journal of Fluid Mechanics*, 661:159–177, 2010.
- MOREL, C. : *Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1997.
- OOLMAN, T.O. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence in stagnant liquids. *Chemical Engineering Communications*, 43:237–261, 1986.
- PALERMO, T. : Le phénomène de coalescence – Étude bibliographique. *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 46(3):325–360, 1991.
- PRINCE, M.J. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36(10):1485–1499, 1990.
- RISSE, F. : The mechanisms of deformation and breakup of drops and bubbles. *Multiphase Science and Technology*, 12:1–50, 2000.
- ROSS, S.L. : *Measurements and models of dispersed phase mixing process*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 1971.

- SABONI, A., ALEXANDROVA, S., GOURDON, C. et CHESTERS, A.K. : Interdrop coalescence with mass transfer: Comparison of the approximate drainage models with numerical results. *Chemical Engineering Journal*, 88:127–139, 2002.
- SEVIK, S. et PARK, S.H. : The splitting of drops and bubbles by turbulent fluid flow. *Journal of Fluids Engineering – Transactions of the ASME*, 95(1):53–60, 1973.
- TENNEKES, H. et LUMLEY, J.L. : *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- TSOURIS, C. et TAVLARIDES, L.L. : Breakage and coalescence models for drops in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 40(3):395–406, 1994.
- VALENTAS, K.J., BILOUS, O. et AMUNDSON, N.R. : Analysis of breakage in dispersed phase systems. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 5(2):271–279, 1966.
- WANG, T., WANG, J. et JIN, Y. : A novel theoretical breakup kernel function for bubbles/droplets in a turbulent flow. *Chemical Engineering Science*, 58:4629–4637, 2003.
- WU, Q., KIM, S., ISHII, M. et BEUS, S.G. : One-group interfacial area transport in vertical bubble flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(8-9):1103–1112, 1998.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.

Chapitre 5

Changement de phase

Ce cinquième chapitre aborde la fermeture des termes sources liés au changement de phase dans le cadre de la modélisation des écoulements bouillants sous-saturés,¹ et plus particulièrement de l'expérience DEBORA. Celle-ci consiste en un écoulement à bulles ascendant dans une conduite verticale ; la paroi du tube étant en partie chauffée les bulles de vapeur y sont créées par nucléation pariétale (cf. Garnier *et al.*, 2001).

On traitera dans ce chapitre uniquement du changement de phase *dans le cœur de l'écoulement* ; pour un écoulement sous-saturé, celui-ci se résume principalement à de la condensation de vapeur. La nucléation des bulles de vapeur ne sera donc pas traitée ici : la température du liquide étant inférieure à sa température de saturation dans la majeure partie de l'écoulement, la naissance des bulles est supposée être localisée uniquement près des parois chauffées, c'est-à-dire là où le liquide est localement surchauffé. Cette nucléation *hétérogène* sera traitée comme une condition aux limites du système.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Après une première partie donnant quelques généralités sur la condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé, la fermeture proprement dite des termes liés au changement de phase sera abordée à la section 5.2 en essayant une nouvelle fois de prendre en compte au maximum la polydispersion en taille de la population de bulle ainsi que la polydispersion en vitesse qui en découle. Enfin, dans une troisième section on tentera d'évaluer l'influence de la prise en compte de la polydispersion sur la modélisation du flux de chaleur moyen entre le liquide et les interfaces des bulles, ce flux jouant un rôle prépondérant dans la modélisation du taux de changement de phase moyen.

5.1 Condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé

Intéressons-nous tout d'abord au problème de la condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé.

Cette problématique a déjà été l'objet de nombreuses études théoriques, expérimentales ou numériques (p. ex. Zuber, 1961 ; Florschuetz et Chao, 1965 ; Theofanous *et al.*, 1969 ; Akiyama, 1973 ; Chen et Mayinger, 1992 ; Legendre *et al.*, 1998). Celles-ci s'accordent sur le fait que la condensation d'une bulle de vapeur est contrôlée principalement par deux mécanismes :

1. Par écoulement sous-saturé on entend un écoulement où le liquide porteur présente une température moyenne sur la section droite de la conduite inférieure à sa température de saturation.

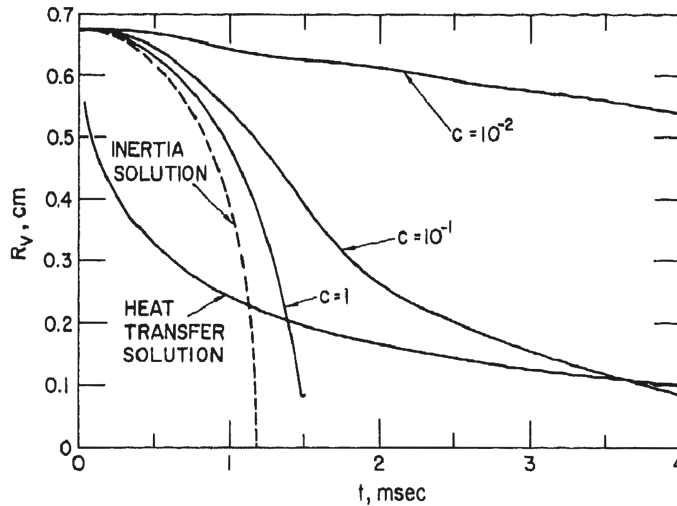


FIG. 5.1 – Condensation d’une bulle de vapeur au repos plongée dans un liquide sous-saturé (Theofanous *et al.*, 1969) : évolution du diamètre de bulle en fonction du temps pour différents régimes thermiques.

- les échanges de chaleur à l’interface de la bulle ;
- l’inertie du liquide lorsque celui-ci prend la place de la vapeur condensée.

Theofanous *et al.* (1969) ont résolu le problème de la condensation d’une bulle de vapeur au repos plongée dans un liquide sous-saturé, et ce pour différents régimes de condensation : un *régime thermique* (*heat transfer solution*) où la condensation est uniquement contrôlée par les échanges de chaleur à l’interface, un *régime inertiel* (*inertia solution*) où la condensation est uniquement contrôlée par l’inertie du liquide, ainsi que trois régimes mixtes intermédiaires. La figure 5.1 tirée de leurs travaux montre l’évolution du diamètre de la bulle de vapeur pour ces différents régimes. Il apparaît clairement sur cette figure que les temps caractéristiques des régimes thermique et inertiel ne sont pas du tout du même ordre de grandeur.

Comme reporté dans les différentes études précédemment citées, et notamment celle de Zuber (1961), la condensation d’une bulle suit le régime inertiel si le liquide environnant est fortement sous-saturé. Dans le cas contraire où la température du liquide est assez proche de la température de saturation, le régime inertiel ne prédomine plus que dans les premiers instants de la condensation, le régime thermique devenant rapidement le mécanisme moteur du processus (Akiyama, 1973 ; Legendre *et al.*, 1998).

Suite à leur travaux expérimentaux, Chen et Mayinger (1992) ont déterminé un critère permettant de distinguer quel régime de condensation est prédominant en fonction des caractéristiques thermophysiques du système. D’après ces auteurs :

- lorsque $Ja_c \gtrsim 100$, la condensation d’une bulle est pilotée par l’inertie du liquide environnant ;
- lorsque $Ja_c \lesssim 80$, la condensation est pilotée par les échanges de chaleur à l’interface de la bulle ;

avec Ja_c le *nombre de Jakob* du liquide. Ce nombre adimensionnel représente le rapport de la chaleur sensible du liquide sur la chaleur latente :

$$Ja_c \triangleq \frac{\rho_c}{\rho_d} \frac{C_{p_c} (\theta_{sat} - \theta_c)}{\mathcal{L}_v} \quad (5.1)$$

où $\mathcal{L}_v$ désigne la chaleur latente de vaporisation du fluide.

Les écoulement bouillants que l'on souhaite modéliser dans cette étude présentent globalement un nombre de Jakob de l'ordre de l'unité (cf. Garnier *et al.*, 2001). On peut donc légitimement faire l'hypothèse d'une condensation uniquement pilotée par les échanges de chaleur à l'interface des bulles.

5.2 Détermination des termes sources liés au changement de phase

Dans le cadre précisé plus haut, on se propose de déterminer les termes sources de notre modèle à deux fluides hybride qui sont liés au changement de phase hors nucléation. On va voir que des *expressions polydisperses* de ces termes sources peuvent être obtenues ; en plus de dépendre des paramètres statistiques de la fonction de distribution en taille de la population de bulles, ces expressions particulières tiendront également compte de la dépendance en diamètre de la vitesse terminale des bulles.

Comme ce fut le cas au chapitre précédent lors de la détermination des forces hydrodynamiques moyennes, on va s'intéresser en premier lieu aux transferts de masse et d'énergie à l'interface d'une *bulle particulière de la population*. Les termes sources moyens seront ensuite obtenus à l'aide d'une moyenne de population faisant intervenir la fonction de distribution des bulles.

• Condition de saut et bilan thermique à l'interface d'une bulle

Le but de ce paragraphe est de déterminer une expression pour le flux surfacique de transfert de masse de la phase dispersée $\dot{m}_d$ à l'interface d'une bulle test.

Pour ce faire, revenons rapidement à l'équation de saut d'enthalpie donnée au premier chapitre. Cette relation *valable en tout point de l'interface de la bulle test* s'écrit (cf. équation 1.12) :

$$\begin{aligned} \dot{m}_d (i_d - i_c) + \dot{m}_d \left(\frac{v_d^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} \right) - \dot{m}_d (\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{v}_I - \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_I) \\ + (\boldsymbol{\tau}_d \cdot \mathbf{n}_d) \cdot (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_I) + (\boldsymbol{\tau}_c \cdot \mathbf{n}_c) \cdot (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_I) - \mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n}_d - \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Puisque l'on suppose le changement de phase principalement piloté par les échanges de chaleur à l'interface, on peut négliger les termes d'énergie mécanique (énergie cinétique et dissipation visqueuse) devant les flux de chaleur et la chaleur latente de vaporisation. Aussi, on arrive à une condition de saut simplifiée largement utilisée dans la littérature (p. ex. Achard, 1978 ; Ishii et Hibiki, 2006) :

$$\dot{m}_d (i_{d,I} - i_{c,I}) - \mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n}_d - \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c \cong 0. \quad (5.3)$$

où l'on a rajouté les indices I pour se souvenir que cette relation n'est valable qu'à l'interface de la bulle. Notons que si l'on suppose en outre que l'interface de la bulle est à la température de saturation (H7), les enthalpies $i_{d,I}$ et $i_{c,I}$ peuvent alors être remplacées par les enthalpies de saturation correspondantes, notées respectivement $I_{d,sat}$ et $I_{c,sat}$.²

Comme énoncé à la fin du premier chapitre, la bulle est supposée avoir une température homogène égale à la température des interfaces (hypothèse H6). Aussi, on peut supposer que la *cinématique de condensation de la bulle est pilotée par l'échange de chaleur interface/liquide*. Le flux surfacique $\mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n}_d$ permettant uniquement de maintenir la température de la bulle à la température de saturation, il agit quasi instantanément, laissant le seul flux $\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c$ contrôler l'évolution du taux de transfert de masse $\dot{m}_d$. Par conséquent, le flux surfacique $\mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n}_d$ ne sera pas pris en compte dans le calcul de $\dot{m}_d$.

2. La différence entre $I_{d,sat}$ et $I_{c,sat}$ n'est autre que la chaleur latente de vaporisation du fluide.

Finalement, l'intégration de l'équation de saut (5.3) sur toute la surface de la bulle, en se souvenant que $\dot{m}_d$ est supposé être régulièrement réparti sur toute cette surface, permet d'arriver à la relation :

$$\dot{m}_d \cong - \frac{\Phi_{I \rightarrow c}}{\pi d^2 (i_{d,I} - i_{c,I})} \cong - \frac{\Phi_{I \rightarrow c}}{\pi d^2 \mathcal{L}_v} \quad (5.4)$$

où $\mathcal{L}_v$ désigne la chaleur latente de vaporisation et $\Phi_{I \rightarrow k}$ le flux de chaleur interface/phase k défini tel que :

$$\Phi_{I \rightarrow k} \triangleq - \oint \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \, dS. \quad (5.5)$$

La modélisation de ce flux est abordée dans le prochain paragraphe.

• Modélisation du flux de chaleur interface/liquide

Le flux de chaleur interface/liquide peut être modélisé en introduisant un coefficient de transfert thermique, lui-même modélisé à l'aide d'un nombre de Nusselt :

$$\Phi_{I \rightarrow c} = \frac{\text{Nu}_c \lambda_c}{d} \pi d^2 (\theta_{sat} - \theta_c) \quad (5.6)$$

où Nu_c désigne le nombre de Nusselt du liquide, λ_c et θ_c respectivement la conductivité thermique et la température du liquide et θ_{sat} la température de saturation.

Commentaires bibliographiques

Pour modéliser Nu_c , on trouve dans la littérature de nombreuses corrélations analytiques ou empiriques (Zeitoun *et al.*, 1995 ; Park *et al.*, 2007). On en retiendra quatre particulières régulièrement citées ; celles-ci sont données dans le tableau 5.1.

La corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b) a été développée pour caractériser l'évaporation d'une goutte d'eau au repos par convection forcée dans un écoulement d'air surchauffé. Les travaux théoriques de Ruckenstein (1959) se sont focalisés quant à eux sur la croissance d'une bulle de vapeur dans un écoulement potentiel de liquide surchauffé. Les corrélations d'Akiyama (1973) et de Chen et Mayinger (1992) ont par contre été développées pour la configuration qui nous intéresse, à savoir la condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé. Si Akiyama (1973) s'est uniquement intéressé à des bulles de vapeur d'eau, Chen et Mayinger (1992) ont quant à eux ajusté les coefficients de leur corrélation en utilisant différents fluides (eau, éthanol, propanol et fréon R113), ce qui en fait *a priori* la corrélation la plus fiable et la mieux adaptée à notre cas de figure.

Bien que largement utilisée dans les modèles moyennés, ces corrélations sont critiquable sur un point : elles ne tiennent pas compte d'un quelconque *effet collectif*, c'est-à-dire de la présence éventuelle d'autres bulles de vapeur à proximité de la bulle test. L'influence des autres bulles de la population sur le taux de condensation de notre bulle test peut être illustrée par au moins deux mécanismes : d'une part, la proximité des couches limites thermiques autour des bulles joue sur la température du liquide environnant et, d'autre part, la turbulence de sillage des bulles environnantes améliore le brassage du liquide sous-saturé et ainsi l'extraction de la chaleur des bulles.

Si Ruckenstein (1959) recommandait déjà de considérer l'effet collectif, la complexité engendrée par la prise en compte de ce phénomène dans les modèles analytiques ou dans l'exploitation de données expérimentales n'a pour l'instant pas permis l'émergence d'un grand nombre de *corrélations multi-bulles*.

3. Corrélation utilisée par défaut dans le code NEPTUNE_CFD (cf. Laviéville *et al.*, 2006).

Auteurs	Nombre de Nusselt	Domaine de validité
Ranz et Marshall (1952a,b) ³	$Nu_c = 2 + 0,55 Re_b^{1/2} Pr_c^{1/3}$	$0 < Re_b < 200$
Rückenstein (1959)	$Nu_c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} Re_b^{1/2} Pr_c^{1/2}$	$0 < Re_b < 1600 - 1800$
Akiyama (1973)	$Nu_c = 0,37 Re_b^{0,6} Pr_c^{1/3}$	Non disponible
Chen et Mayinger (1992)	$Nu_c = 0,185 Re_b^{0,7} Pr_c^{0,5}$	$0 < Re_b < 10\,000$ $2 < Pr_c < 15$ $1 < Ja_c < 80$

TAB. 5.1 – Liste de corrélations pour le nombre de Nusselt du liquide.

On peut toutefois citer la corrélation de Zeitoun *et al.* (1995) qui proposent d’inclure le taux de présence α_d dans le nombre de Nusselt ; malheureusement, les auteurs utilisent un taux de présence moyenné sur la section de l’écoulement (modèle monodimensionnel) incompatible avec notre modélisation tridimensionnelle.

Les récents progrès de la simulation numérique des écoulements diphasiques à l’échelle locale permet cependant d’envisager une nouvelle catégorie de modèles de condensation multi-bulles, à savoir les modèles développés à l’aide de calculs DNS (Bois *et al.*, 2010 ; Bois, 2011). Cet outil numérique permet en effet d’accéder à la représentation *locale* et *complète* de l’écoulement dans des configurations relativement complexes. Bois (2011) propose ainsi d’écrire les corrélations multi-bulles sous la forme :

$$Nu_c^* = Nu_c (1 + \varphi(\alpha_d)) \quad (5.7)$$

permettant de ce fait au nombre de Nusselt multi-bulles Nu_c^* de tendre vers un nombre de Nusselt pour une bulle isolée lorsque le taux de présence de la phase dispersée tend vers 0 ; reste toutefois à déterminer la forme de la fonction du taux de présence des bulles. Suite à différents calculs DNS, Bois (2011) a pu montrer que la proximité des autres bulles de la population était responsable d’une augmentation du taux de transfert de masse d’une bulle de l’ordre de 20% pour la gamme $4\% \leq \alpha_d \leq 7.5\%$. Bois concède toutefois que des travaux complémentaires sont nécessaires pour confirmer cette tendance, élargir sa gamme de validité et arriver à écrire une corrélation de Nusselt multi-bulles générale.

En l’absence de corrélation fiable prenant en compte l’effet collectif, on se limitera ici à l’utilisation des corrélations présentées dans le tableau 5.1. Bien que les domaines de validité et d’application de ces corrélations ne soient pas toujours en adéquation avec la gamme d’écoulements bouillants visés par cette étude, on supposera qu’elles permettent néanmoins d’obtenir des approximations raisonnables du nombre de Nusselt recherché.

Nombre de Nusselt fonction de la taille de bulle

Les différentes corrélations du tableau 5.1 donnent le nombre de Nusselt du liquide comme une fonction de deux autres nombres adimensionnels :

- a) le nombre de Reynolds de bulle, Re_b , déjà rencontré au précédent chapitre :

$$Re_b \triangleq \frac{\|\Delta \mathbf{v}\| d}{\nu_c} \quad (3.1)$$

où la norme de la vitesse relative $\|\Delta \mathbf{v}\|$ peut être approchée par la composante axiale de la vitesse terminale de bulle Δv_z dans le cas d’un écoulement ascendant (*cf.* équation 3.17) ;

- b) le *nombre de Prandtl* du liquide, Pr_c , qui correspond au rapport de la diffusion visqueuse sur la diffusion thermique dans le liquide :

$$Pr_c \triangleq \frac{C_{p_c} \mu_c}{\lambda_c} \quad (5.8)$$

où C_{p_c} désigne la chaleur spécifique à pression constante du liquide et μ_c sa viscosité dynamique.

De façon à pouvoir aisément confronter les différentes corrélations du tableau 5.1, on utilisera une formulation paramétrée du nombre de Nusselt :

$$Nu_c = c_0 + c_1 Re_b^{c_2} Pr_c^{c_3}. \quad (5.9)$$

Une expression de Nu_c fonction du diamètre de bulle peut être déterminée en remplaçant dans le nombre de Reynolds de bulle $||\Delta \mathbf{v}||$ par l'expression approchée de la vitesse relative axiale, à savoir les relations (3.26), (3.29) et (3.31) selon le régime de traînée de la bulle. On obtient les expressions suivantes.

- a) Bulles sphériques ($d < d_{rac}^{D_{12}} < d_{rac}^{D_{23}}$) :

$$Nu_{c1}(d) = c_0 + c_1 \underbrace{\left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g d^3}{\nu_c^2} \right)^{4/7}}_{Re_{b1}(d)}^{c_2} Pr_c^{c_3}. \quad (5.10a)$$

- b) Bulles ellipsoïdales ($d_{rac}^{D_{12}} < d < d_{rac}^{D_{23}}$) :

$$Nu_{c2}(d) = c_0 + c_1 \underbrace{\left(2 \left(\frac{1 - \alpha_d}{\varphi^D(\alpha_d)} \right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{\zeta g d^3}{\nu_c^2} \right)^{1/2}}_{Re_{b2}(d)}^{c_2} Pr_c^{c_3}. \quad (5.10b)$$

- c) Cap-bubbles ($d_{rac}^{D_{12}} < d_{rac}^{D_{23}} < d$) :

$$Nu_{c3}(d) = c_0 + c_1 \underbrace{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha_d} \right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g d^3}{\nu_c^2} \right)^{1/2}}_{Re_{b3}(d)}^{c_2} Pr_c^{c_3}. \quad (5.10c)$$

Comme pour le calcul des forces hydrodynamiques moyennes, la prise en compte simultanée de ces trois régimes de condensation va être possible grâce à la forme intégrale de la moyenne de population.

• Détermination des termes de transfert moyens

On se propose à présent de déterminer les termes de transfert moyens liés au changement de phase que nous avons rencontrés aux chapitres 1 et 2, à savoir :

- a) le terme source de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_\gamma$ que l'on dénommera *taux de changement de phase géométrique moyen* (cf. équation 2.44) :

$$\Gamma_\gamma \triangleq \frac{2\gamma}{\rho_d} n \{ \dot{m}_d d^{\gamma-1} \} \quad (5.11)$$

- b) le terme source du bilan moyen de masse, aussi appelé *taux de changement de phase moyen* (cf. équation 1.85c) :

$$\Gamma \triangleq \pi n \{ \dot{m}_d d^2 \} \quad (5.12)$$

où l'on a vu que le flux surfacique de transfert de masse $\dot{m}_d$ s'exprimait comme une fonction du diamètre de bulle (cf. équations 5.4 et 5.6).

Taux de changement de phase géométrique moyen

En combinant les relations (5.4) et (5.6) ainsi que les expressions des différents nombre de Nusselt, le taux de changement de phase géométrique moyen peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma_\gamma = -\frac{2\gamma}{\rho_d} \lambda_c \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\Omega_v} \right) n \left(\overbrace{c_0 \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta^{\gamma-2} \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}^{I_{\gamma 0}^{PC}} + c_1 \Pr_c^{c_3} \left(\overbrace{\int_{d_{min}}^{d_{rac}^{D_{12}}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_1}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}^{I_{\gamma 1}^{PC}} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{12}}}^{d_{rac}^{D_{23}}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_2}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{\gamma 2}^{PC}} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{23}}}^{d_{max}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_3}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{\gamma 3}^{PC}} \right) \right). \quad (5.13)$$

Le calcul des différentes intégrales est détaillé à l'annexe D ; on arrive finalement à l'expression suivante :

$$\Gamma_\gamma = -\frac{2\gamma}{\rho_d} \frac{\lambda_c}{d_{10}^2} \text{Nu}_{c\gamma}^{**} \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\Omega_v} \right) \mathcal{M}_\gamma \quad (D.8)$$

où $\text{Nu}_{c\gamma}^{**}$ désigne un *nombre de Nusselt géométrique* donné respectivement par les équations (D.9a) et (D.9b) pour les lois Q2 et C2.

Taux de changement de phase moyen

En suivant la même démarche que précédemment, le taux de changement de phase moyen s'écrit :

$$\Gamma = -\pi \lambda_c \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\Omega_v} \right) n \left(\overbrace{c_0 \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}^{d_{10}} + c_1 \Pr_c^{c_3} \left(\overbrace{\int_{d_{min}}^{d_{rac}^{D_{12}}} \beta \text{Re}_{b_1}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}^{I_{31}^{PC}} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{12}}}^{d_{rac}^{D_{23}}} \beta \text{Re}_{b_2}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{32}^{PC}} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{23}}}^{d_{max}} \beta \text{Re}_{b_3}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{33}^{PC}} \right) \right) \quad (5.14)$$

où l'on retrouve les mêmes termes intégraux que pour Γ_γ avec cette fois-ci $\gamma = 3$ (cf. annexe D). En se servant des relations géométriques (B.9), on peut déterminer une expression de Γ proportionnelle à la concentration d'aire interfaciale :

$$\Gamma = -\frac{\lambda_c}{d_{10}} \text{Nu}_c^{**} \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\Omega_v} \right) a_I \quad (5.15)$$

où Nu_c^{**} désigne un *nombre de Nusselt polydisperse* dépendant de la forme de la loi choisie pour modéliser $\mathcal{P}_\beta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nu}_{cQ2} = \left(\frac{5}{\bar{\sigma}^{\star 2} + 5} \right) \left(c_0 + c_1 \text{Pr}_c^{c_3} \left(\text{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{31}^{\star}, d_{min}^{\star}, d_{rac}^{D_{12}^{\star}}) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{32}^{\star}, d_{rac}^{D_{12}^{\star}}, d_{rac}^{D_{23}^{\star}}) + \text{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{33}^{\star}, d_{rac}^{D_{23}^{\star}}, d_{max}^{\star}) \right) \right) \quad (5.16a) \\ \text{Nu}_{cC2} = \frac{(\bar{\sigma}^{\star} - 5)^2}{5(\bar{\sigma}^{\star 2} - 2\bar{\sigma}^{\star} + 5)} \left(c_0 + c_1 \text{Pr}_c^{c_3} \left(\text{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{31}^{\star}, d_{min}^{\star}, d_{rac}^{D_{12}^{\star}}) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{32}^{\star}, d_{rac}^{D_{12}^{\star}}, d_{rac}^{D_{23}^{\star}}) + \text{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{33}^{\star}, d_{rac}^{D_{23}^{\star}}, d_{max}^{\star}) \right) \right) \quad (5.16b) \end{array} \right.$$

avec les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{31}^{\star} = \frac{12}{7} c_2 + 1 \quad (5.16c) \\ c_{32}^{\star} = c_2 + 1 \quad (5.16d) \\ c_{33}^{\star} = \frac{3}{2} c_2 + 1. \quad (5.16e) \end{array} \right.$$

Dans ces équations, Re_{110} , Re_{210} et Re_{310} correspondent respectivement au nombre de Reynolds de bulle Re_{b1} , Re_{b2} et Re_{b3} définis avec $d = d_{10}$.

Rappelons que $d_{min}^{\star}$ et $d_{max}^{\star}$ sont des fonctions de $\bar{\sigma}^{\star}$ différentes pour les deux PDF ; elles sont données respectivement par les systèmes (2.66) et (A.12) pour les lois Q2 et C2. Les diamètres de raccord $d_{rac}^{D_{12}^{\star}}$ et $d_{rac}^{D_{23}^{\star}}$ sont quant à eux donnés respectivement par les relations (3.32) et (3.33), leur forme sans dimension $d_{rac}^{D_{12}^{\star}}$ étant simplement obtenue en divisant les expressions originales par le diamètre moyen d_{10} .

5.2.1 Autres fermetures

Penchons-nous à présent sur les termes sources liés au changement de phase apparaissant dans les bilans moyens d'enthalpie et de quantité de mouvement présentés au premier chapitre.

• Échange d'énergie aux interfaces

D'après la relation (5.5), l'échange d'énergie entre le liquide et les bulles apparaissant dans les bilans moyens d'enthalpie (1.113) peut être exprimé comme suit :

$$\Pi^* + \Gamma I^* = -n \{ \Phi_{I \rightarrow c} \} + \Gamma I_{c,sat} \quad (5.17)$$

où, pour rester cohérent avec les hypothèses faites pour établir la relation (5.4), on a choisi de modéliser le flux ΓI^* par le produit $\Gamma I_{c,sat}$, les interfaces étant supposées être à saturation.

En appliquant l'opérateur de moyenne de population à la relation (5.4), on obtient une relation reliant le flux de chaleur interface/liquide moyen au taux de changement de phase moyen :

$$\Pi_c \hat{=} n \{ \Phi_{I \rightarrow c} \} = -\mathfrak{L}_v \Gamma \quad (5.18a)$$

$$= -\frac{\lambda_c \text{Nu}_c^{**}}{d_{10}} (\theta_{sat} - \theta_c) a_I \quad (5.18b)$$

et on en déduit que :

$$\Pi^* + \Gamma I^* = \Gamma (\mathcal{Q}_v - I_{c,sat}) = - \frac{\lambda_c \text{Nu}_c^{**}}{d_{10}} \left(\frac{I_{d,sat}}{I_{d,sat} - I_{c,sat}} \right) (\theta_{sat} - \theta_c) a_I \quad (5.19)$$

où le nombre de Nusselt polydisperse Nu_c^{**} est donné par les relations (5.16).

• Force de recul

On rappelle que la force de recul, notée $\Gamma \mathbf{V}^*$, apparaît au second membre des équations de quantité de mouvement moyennes (1.102a) et (1.102b) écrites au premier chapitre.

La vitesse $\mathbf{V}^*$ étant forcément comprise entre $\mathbf{V}_c$ et $\mathbf{V}_d$, différents auteurs (Young, 1995 ; Bdzil *et al.*, 1999 ; Lhuillier, 2003) proposent de modéliser $\mathbf{V}^*$ par l'expression suivante :

$$\mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}_c + \mathbf{V}_d}{2}. \quad (5.20)$$

Comme le souligne Lhuillier (2003), cette expression particulière pour $\mathbf{V}^*$ permet limiter l'influence de la vitesse relative des deux phases dans le changement de phase, ce dernier étant supposé être piloté essentiellement par le déséquilibre thermodynamique des deux phases.

5.2.2 Conclusion sur la fermeture des termes liés au changement de phase

Dans cette section, la fermeture des termes sources liés au changement de phase a été effectuée pour le cas particulier des écoulements bouillants sous-saturés.

Le flux surfacique de masse à l'interface d'une bulle a pu être déterminé en simplifiant la condition de saut d'enthalpie à l'interface en faisant quelques hypothèses propres aux écoulement bouillants visés par cette étude.

[H21] Le changement de phase est piloté par les échanges de chaleur aux interfaces des bulles ($\text{Ja}_c < 80$; Chen et Mayinger, 1992).

[H22] Le flux de chaleur interface/vapeur est quasi instantané, laissant le flux de chaleur interface/liquide piloter la cinématique de changement de phase.

Nous avons ainsi pu montrer que le taux de changement de phase moyen était directement proportionnel au flux de chaleur interface/liquide moyen, ce flux de chaleur pouvant quant à lui être déterminé en introduisant un nombre de Nusselt. Différentes corrélations empiriques ou analytiques ont proposées pour modéliser ce nombre adimensionnel. De façon à pouvoir confronter plusieurs corrélations de la littérature, nous avons utilisé ici une écriture paramétrée du nombre de Nusselt, fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl comme la grande majorité des corrélations de la littérature.

À l'instar des forces hydrodynamiques moyennes déterminées au chapitre précédent, les termes sources liés au changement de phase ont pu être écrits en prenant en compte la polydispersion en taille de la population de bulles ainsi que la polydispersion en vitesse qui en découle, et ce grâce à la forme particulière de la moyenne de population.

5.3 Évaluation de l'influence de la polydispersion en taille sur le changement de phase

Dans la section précédente, on a vu que le taux de changement de phase moyen Γ dépendait directement du flux de chaleur interface/liquide moyen, d'où l'importance de ce dernier dans la modélisation

des écoulements bouillants sous-saturés. Une *expression polydisperse* de ce flux de chaleur moyen a pu être déterminée, celle-ci dépendant entre autres des paramètres statistiques de la fonction de distribution en taille des bulles.

On se propose à présent d'évaluer l'influence de la polydispersion en taille sur le changement de phase par l'intermédiaire de ce flux de chaleur moyen. En combinant les équations de la section précédente, celui-ci peut se mettre sous la forme :

$$\Pi_c \triangleq n \{\Phi_{I \rightarrow c}\} = \pi n \lambda_c (\theta_{sat} - \theta_c) \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta \text{Nu}_c(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \quad (5.21)$$

le nombre de Nusselt étant une fonction du diamètre de bulle par l'intermédiaire du nombre de Reynolds.

L'influence de la polydispersion sur Π_c va être évaluée en comparant différentes expressions de ce flux obtenues en utilisant successivement une PDF empirique, les lois Q2 et C2, et différentes distributions monodisperses pour modéliser $\mathcal{P}_\beta(\beta)$.

Avant toute chose, commençons par décrire l'expérience DEBORA qui nous servira de référence expérimentale.

5.3.1 Présentation de l'expérience DEBORA

L'expérience DEBORA a été développée au CEA Grenoble afin d'étudier les écoulements bouillants sous-saturés dans les conditions des Réacteurs à Eau Pressurisés (REP) (Cubizolles, 1996 ; Manon, 2000 ; Garnier *et al.*, 2001).

• Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'un tube vertical de diamètre interne égal à 19,2 mm divisé en trois section distinctes :

- a) une section d'entrée adiabatique de longueur égale à 1 m ;
- b) une section uniformément chauffée par effet Joule longue de 3,5 m ;
- c) une section de sortie adiabatique d'environ 0,5 m.

Un schéma du dispositif expérimental est donné à la figure 5.2.

Le fréon R-12 a été choisi comme fluide simulant afin de reproduire les conditions d'écoulement dans un sous-canal réacteur d'un REP ($P \sim 150$ bar et $\theta \sim 300$ °C), mais à pression et à température plus basse (cf. tableau 5.2). Le fluide est injecté à l'état liquide en bas de la section d'essai puis s'écoule le long du tube de manière ascendante. Dans la section chauffée, des bulles de vapeur sont générées par nucléation sur les parois et se condensent dans le cœur de l'écoulement au contact du liquide sous-saturé.

Une sonde optique positionnée en fin de longueur chauffée permet de mesurer les profils diamétraux des grandeurs géométriques du milieu diphasique (taux de présence de la vapeur et distribution en diamètre des bulles), l'écoulement étant supposé axisymétrique. Une bi-sonde optique est utilisée afin de déterminer la vitesse moyenne du gaz. Des mesures de température et de pression sont également effectuées à l'entrée et à la sortie de la section d'essai.

À la vue de l'ensemble des résultats disponibles, quatre essais ont été sélectionnés dans la banque d'essais proposée par Garnier *et al.* (2001) ; leur paramètres de contrôle sont donnés dans le tableau 5.2.

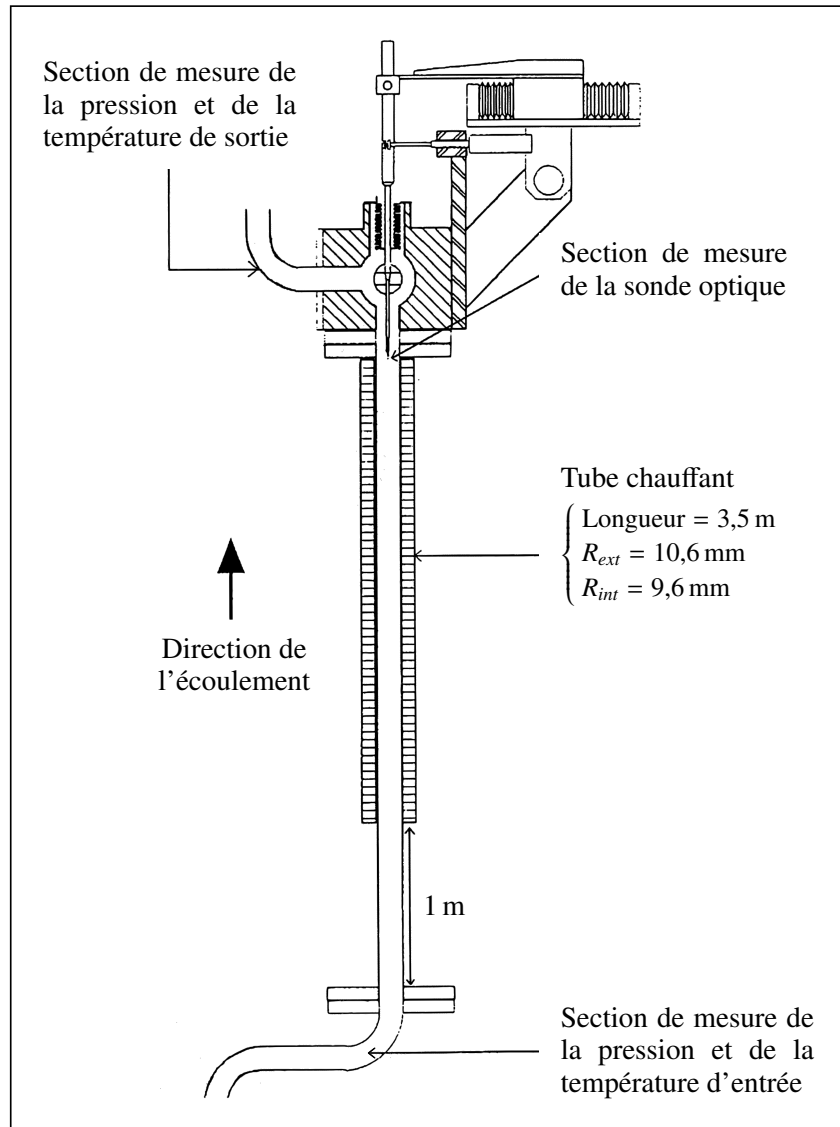


FIG. 5.2 – Schématisation de la section d'essai de l'expérience DEBORA (adapté de Manon, 2000).

N° de l'essai	Pression (bar)	Débit massique entrant ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$)	Température d'entrée ($^{\circ}\text{C}$)	Flux de chaleur en paroi ($\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$)
1	14,59	2027	28,52	73,161
2	14,59	2030	31,16	72,054
3	26,15	2003	62,73	73,890
4	26,15	1985	70,53	72,722

TAB. 5.2 – Paramètres de contrôle des quatre essais DEBORA sélectionnés (Garnier *et al.*, 2001).

• Détermination expérimentale de la fonction de distribution des tailles de bulles

Le contenu de ce paragraphe est tiré en grande partie des thèses de Cubizolles (1996) et Manon (2000), documents auxquels pourra se référer le lecteur intéressé par plus de détails sur la méthode expérimentale et le traitement des données obtenues.

En chaque point de mesure d'abscisse radiale r , une fonction de distribution des *temps vapeur*, notée $\mathcal{H}_{t_v}$, est mesurée par la sonde optique. À l'aide d'une méthode de régression non linéaire, cette fonction de distribution est ensuite approchée par la fonction analytique suivante (Garnier *et al.*, 2001) :

$$\mathcal{H}_{t_v}(t_v; r) \cong \left(b_1(r) t_v^3 + b_2(r) b_4^2(r) t_v^2 + b_2(r) t_v \right) e^{-b_3(r) t_v^2 - b_4^2(r) t_v} \quad (5.22)$$

où b_1 , b_2 , b_3 et b_4 sont les coefficients d'interpolation et t_v désigne le temps vapeur, c'est-à-dire le temps passé par la sonde dans la vapeur par rapport au temps d'échantillonnage. La distribution en diamètre de la population de bulles est ensuite déduite de $\mathcal{H}_{t_v}$ à l'aide de la relation :

$$\mathcal{H}_\beta(\beta; r) = -\frac{2}{\pi V_b(r)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathcal{H}_{t_v}(\frac{\beta}{V_b(r)}; r)}{\beta} \right) \quad (5.23)$$

où V_b désigne la vitesse moyenne des bulles obtenue en chaque point de mesure. L'application de cette formule de transformation donne :

$$\mathcal{H}_\beta(\beta; r) = \left(\mathcal{B}_3(r) \beta^3 + \mathcal{B}_2(r) \beta^2 + \mathcal{B}_1(r) \beta \right) e^{-\mathcal{B}_5(r) \beta^2 - \mathcal{B}_4(r) \beta} \quad (5.24a)$$

avec les coefficients :

$$\mathcal{B}_1(r) = \frac{-4 b_1(r) + 4 b_2(r) b_3(r) + 2 b_2(r) b_4^4(r)}{\pi V_b^4(r)} \quad (5.24b)$$

$$\mathcal{B}_2(r) = \frac{4 b_2(r) b_3(r) b_4^2(r) + 2 b_1(r) b_4^2(r)}{\pi V_b^5(r)} \quad (5.24c)$$

$$\mathcal{B}_3(r) = \frac{4 b_1(r) b_3(r)}{\pi V_b^6(r)} \quad (5.24d)$$

$$\mathcal{B}_4(r) = \frac{b_4^2(r)}{V_b(r)} \quad (5.24e)$$

$$\mathcal{B}_5(r) = \frac{b_3(r)}{V_b^2(r)} \quad (5.24f)$$

La fonction de densité de probabilité des tailles de bulles est obtenue en normalisant $\mathcal{H}_\beta$:

$$\mathcal{P}_\beta(\beta; r) = \frac{\mathcal{H}_\beta(\beta; r)}{\int \mathcal{H}_\beta(\beta; r) d\beta}. \quad (5.25)$$

Un exemple de PDF expérimentale obtenue sur DEBORA est présenté sur les figures 5.3 et 5.4.

5.3.2 Calcul du flux de chaleur interface/liquide moyen

Dans un souci de simplification, et au regard des distributions en taille des bulles obtenues sur DEBORA, on se limitera ici à la prise en compte du premier régime de traînée pour le calcul du nombre de Nusselt du liquide, les bulles restant globalement suffisamment petites pour être supposées sphériques.

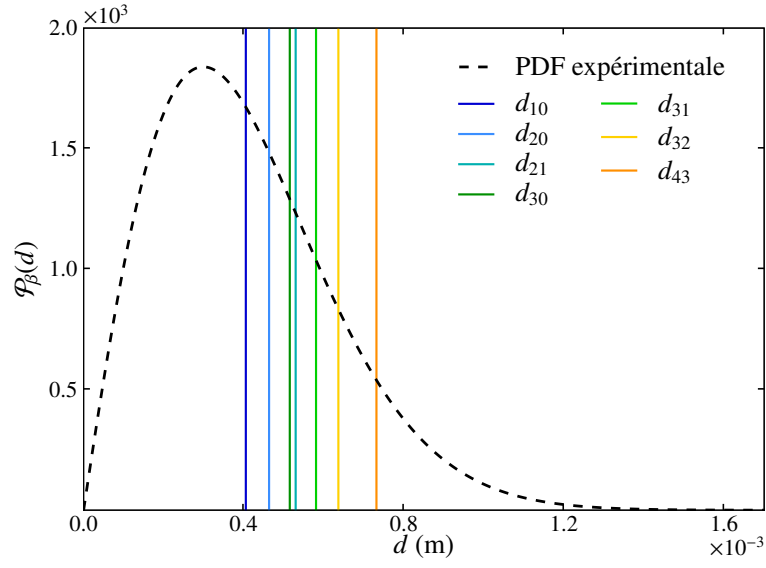


FIG. 5.3 – Exemple de fonction de distribution des tailles de bulles obtenue sur DEBORA et diamètres moyens correspondants (Essai n° 1, point de mesure n° 15, $r/R = 0,7$).

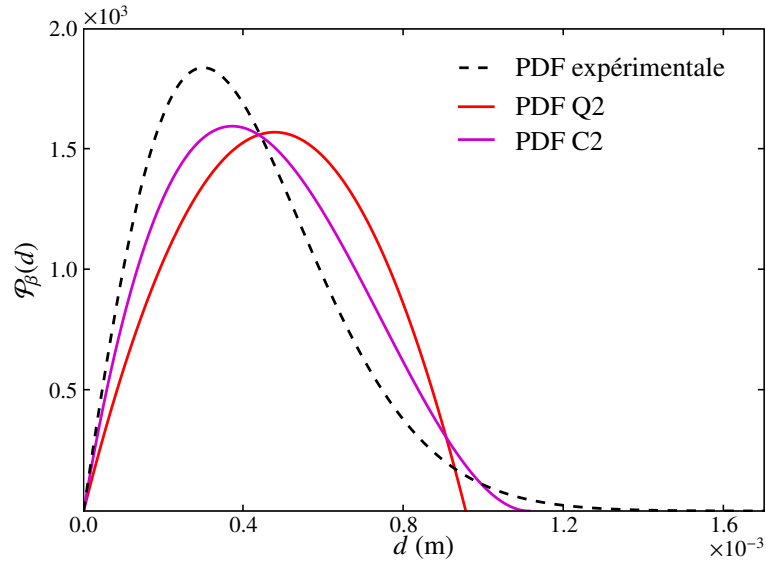


FIG. 5.4 – Exemple de fonction de distribution des tailles de bulles obtenue sur DEBORA et comparaison avec des PDF Q2 et C2 ayant les mêmes densités de moments $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ (Essai n° 1, point de mesure n° 15, $r/R = 0,7$).

En conséquence, Π_c s'obtient simplement en injectant l'expression de Nu_{c1} (5.10a) dans la définition (5.21) ; on obtient après quelques manipulations :

$$\Pi_c = \pi \lambda_c (\theta_{sat} - \theta_c) \left(\overbrace{c_0 n \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}^{\mathcal{M}_1} + c_1 \Pr_c^{c_3} \left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g}{v_c^2} \right)^{\frac{4}{7} c_2} \underbrace{n \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta^{\frac{12}{7} c_2 + 1} \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{M}_{\frac{12}{7} c_2 + 1}} \right) \quad (5.26)$$

où l'on voit apparaître les densités de moment d'ordre 1 et d'ordre $\frac{12}{7} c_2 + 1$.

Choisissons à présent la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b) pour modéliser Nu_c ; les paramètres de la corrélation sont $c_0 = 2$, $c_1 = 0,55$, $c_2 = 1/2$ et $c_3 = 1/3$; Π_c s'écrit désormais :

$$\Pi_c = \pi \lambda_c (\theta_{sat} - \theta_c) \left(2 \mathcal{M}_1 + 0,55 \Pr_c^{1/3} \left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g}{v_c^2} \right)^{2/7} \mathcal{M}_{13/7} \right). \quad (5.27)$$

où il nous reste à déterminer les deux densités de moments $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_{13/7}$, différentes selon la fonction de distribution choisie pour représenter $\mathcal{P}_\beta$.

• Fonction de distribution expérimentale

Le calcul des différentes densités de moment ne pouvant être obtenu de façon analytique pour la fonction de distribution expérimentale, celles-ci sont déterminées en utilisant une méthode d'intégration numérique (cf. Hoffman, 2001, chapitre 5).

• Fonction de distribution monodisperse

Une distribution monodisperse se résume à une simple distribution de Dirac centrée sur un certain diamètre moyen d_{pq} ; la densité de moment d'ordre γ correspondante est triviale :

$$\mathcal{M}_\gamma = n \int \beta^\gamma \delta(\beta - d_{pq}) d\beta = n d_{pq}^\gamma. \quad (5.28)$$

On en déduit l'expression *monodisperse* de Π_c :

$$\Pi_c = \pi \lambda_c (\theta_{sat} - \theta_c) n_{pq} \left(2 d_{pq} + 0,55 \Pr_c^{1/3} \left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g}{v_c^2} \right)^{2/7} d_{pq}^{13/7} \right). \quad (5.29)$$

où n_{pq} désigne la densité numérique de bulles correspondant au taux de présence α_d et à un diamètre de bulles moyen unique d_{pq} . Celle-ci est simplement obtenue par le ratio du volume total des bulles sur le volume d'une seule bulle, soit :

$$n_{pq} = \frac{\alpha_d}{\frac{\pi}{6} d_{pq}^3}. \quad (5.30)$$

Les résultats obtenus pour les différents diamètres moyens du tableau 2.1 (page 47) sont présentés à la figure 5.5. Les erreurs moyennes des différents Π_c monodisperses par rapport au flux obtenus avec les densités de moments de la PDF empirique sont quant à elles données dans le tableau 5.3 pour chaque essai.

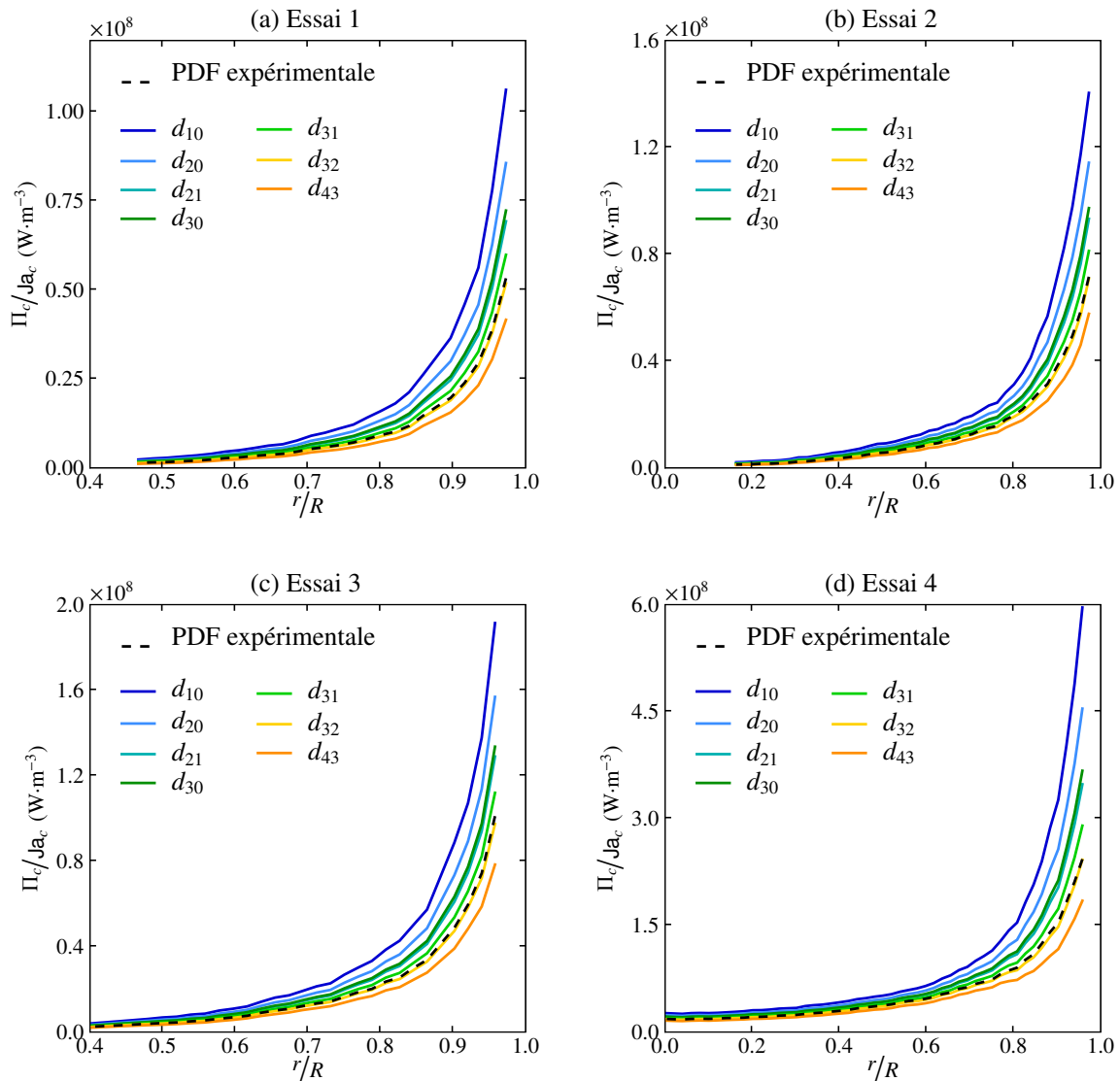


FIG. 5.5 – Flux de chaleur interface/liquide moyens obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale et différents diamètres moyens. Π_c a été ici divisé par le nombre de Jakob pour s'affranchir de la sous-saturation ($\theta_{sat} - \theta_c$).

N° de l'essai	Erreur d_{10} (%)	Erreur d_{20} (%)	Erreur d_{21} (%)	Erreur d_{30} (%)	Erreur d_{31} (%)	Erreur d_{32} (%)	Erreur d_{43} (%)
1	75,76	46,76	22,79	27,46	8,80	-3,53	-19,48
2	64,85	40,90	20,65	24,57	8,51	-2,33	-16,72
3	64,56	40,55	20,28	24,09	8,01	-2,92	-17,48
4	53,41	33,59	16,77	19,97	6,55	-2,63	-15,07

TAB. 5.3 – Erreurs relatives moyennes obtenues sur Π_c pour différents diamètres moyens par rapport aux résultats obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale.

À la vue de ces résultats, il apparaît que le diamètre de Sauter d_{32} donne les meilleurs résultats sur les quatre essais DEBORA étudiés (erreur moyenne de l'ordre de 3 %). Ce résultat va donc dans le sens des modèles monodisperses à une équation d'aire interfaciale où les termes d'échanges entre phases sont calculés à l'aide du diamètre de Sauter ($d_{32} = 6 \alpha_d / a_I$) (p. ex. Yao et Morel, 2004).

• Fonction de distribution quadratique

D'après les différentes relations géométriques données au chapitre 2 (cf. paragraphe 2.3.3), il est nécessaire de connaître trois densités de moments pour arriver à déterminer les paramètres d'une loi quadratique Q2.

Par conséquent, on choisit de conserver les trois densités de moments expérimentales suivantes : M_3 , c'est-à-dire le taux de vide α_d , M_2 , autrement dit la concentration d'aire interfaciale a_I , ainsi que M_1 . La densité numérique de bulles n est quant à elle déterminée comme une fonction de ces trois densités de moments à l'aide de la relation géométrique propre à la loi Q2 (2.56). Connaissant M_1 , M_2 et n , on peut donc en déduire les paramètres d_{min} et d_{max} de notre loi Q2 à l'aide des relations (2.54), l'expression de la PDF étant donnée par la relation (2.51). On obtient ainsi une PDF Q2 ajustée sur la fonction de distribution expérimentale (cf. figure 5.4).

Les densités de moments de la PDF Q2 nécessaires au calcul de Π_c peuvent être déterminées analytiquement grâce à la relation (2.52) :

$$\begin{cases} M_1^{Q2} = n_{Q2} \frac{d_{max} + d_{min}}{2} \\ M_{13/7}^{Q2} = n_{Q2} \frac{49 \left(10 d_{max}^{34/7} - 17 d_{max}^{27/7} d_{min} + 17 d_{max} d_{min}^{27/7} - 10 d_{min}^{34/7} \right)}{1530 (d_{max} - d_{min})^3} \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\quad (5.32)$$

Les flux de chaleur Π_c ainsi obtenus sont représentés sur la figure 5.6 ; les erreurs moyennes par rapport aux flux obtenus avec la fonction de distribution expérimentale sont données dans le tableau 5.4.

Les résultats obtenus avec la loi Q2 sont excellents (erreur moyenne inférieure à 1 %) prouvant ainsi l'efficacité de cette loi à représenter l'influence de la polydispersion en taille de la population de bulles dans l'évaluation de Π_c , et ce bien que son allure symétrique soit moins représentative de la distribution en taille empirique que par exemple la loi C2.

• Fonction de distribution cubique

En suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent on peut déterminer une loi C2 ajustée sur la PDF empirique (cf. figure 5.4) : l'expression de la PDF C2 est donnée par la relation (2.73), ses paramètres d_{min} et d_{max} par (A.2) et la densité numérique de bulles correspondante par la relation géométrique approchée propre à la loi C2 (A.5). Les densités de moments de la PDF C2 nécessaires au calcul de Π_c sont quant à elles déterminées grâce à la relation (2.74) :

$$\begin{cases} M_1^{C2} = n_{C2} \frac{2 d_{max} + 3 d_{min}}{5} \\ M_{13/7}^{C2} = n_{C2} \frac{49 \left(140 d_{max}^{41/7} - 287 d_{max}^{34/7} d_{min} + 697 d_{max}^2 d_{min}^{27/7} - 820 d_{max} d_{min}^{34/7} + 270 d_{min}^{41/7} \right)}{31\,365 (d_{max} - d_{min})^4} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\quad (5.34)$$

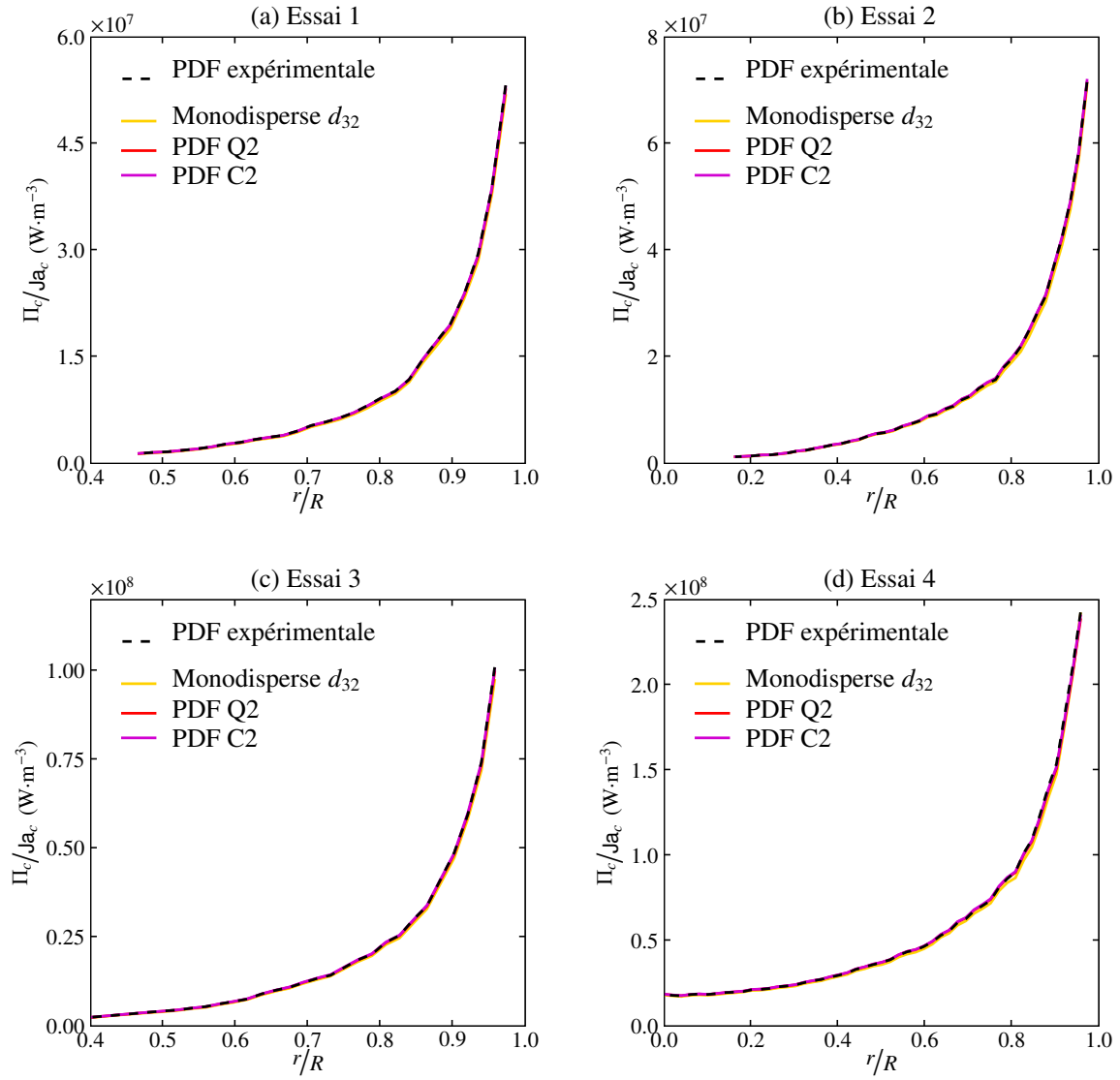


FIG. 5.6 – Flux de chaleur interface/liquide moyens obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale, le diamètre moyen d_{32} et les PDF Q2 et C2. Π_c a été ici divisé par le nombre de Jakob pour s'affranchir de la sous-saturation ($\theta_{sat} - \theta_c$).

N° de l'essai	Erreur d_{20} (%)	Erreur PDF Q2 (%)	Erreur PDF C2 (%)
1	-3,53	-0,58	-0,06
2	-2,33	0,38	0,86
3	-2,92	-0,27	0,43
4	-2,63	0,18	0,57

TAB. 5.4 – Erreurs relatives moyennes obtenues sur Π_c avec le diamètre moyen d_{32} et les PDF Q2 et C2 par rapport aux résultats obtenus avec la fonction de distribution des tailles de bulles expérimentale.

Les flux de chaleur Π_c obtenus avec ces deux densités de moments sont donnés sur la figure 5.6 et les erreurs moyennes par rapport aux flux obtenus avec la fonction de distribution expérimentale dans le tableau 5.4.

Les résultats obtenus avec la loi C2 sont de qualité comparable à ceux obtenus avec la loi Q2 (erreur moyenne inférieure à 1 %). L'utilisation de la loi C2 ne se justifie pas forcément car elle n'amène pas d'amélioration visible des résultats sur la prédiction de Π_c et donc du taux de changement de phase moyen Γ . La PDF C2 pourra toutefois se montrer plus réaliste dans la prédiction d'autres phénomènes comme par exemple les forces hydrodynamiques moyennes.

5.3.3 Conclusion

Cette courte étude sur l'influence de la polydispersion sur le flux de chaleur interface/liquide moyen aura permis de mettre en évidence que la diamètre de Sauter, largement utilisé dans les modèles moyennés, était le diamètre moyen le plus représentatif de la population de bulles pour évaluer le flux de chaleur Π_c avec une approche *monodisperse*.

On a également pu voir que l'utilisation d'une approche *polydisperse* où la distribution des tailles de bulles est modélisée par une loi Q2 ou une loi C2 permettait d'améliorer la prédiction du flux de chaleur moyen obtenu avec l'approche *monodisperse* d_{32} . Cela prouve donc la pertinence et l'efficacité de ces deux lois, somme toute relativement simples, à représenter l'influence de la polydispersion en taille sur le changement de phase (hors nucléation) dans les écoulements bouillants sous-saturés.

5.4 Références

- ACHARD, J.-L. : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- AKIYAMA, M. : Bubble collapse in subcooled boiling. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 16(93):570–575, 1973.
- BDZIL, J.B., MENIKOFF, R., SON, S.F., KAPILA, A.K. et STEWART, D.S. : Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: A critical examination of modeling issues. *Physics of Fluids*, 11(2):378–402, 1999.
- BOIS, G. : *Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2011.
- BOIS, G., JAMET, D. et LEBAGUE, O. : Towards Large Eddy Simulation of two-phase flow with phase-change: Direct Numerical Simulation of a pseudo-turbulent two-phase condensing flow. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- CHEN, Y.M. et MAYINGER, F. : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877–890, 1992.
- CUBIZOLLES, G. : *Étude stéréologique de la topologie des écoulements diphasiques à haute pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 1996.

- FLORSCHUETZ, L.W. et CHAO, B.T. : On the mechanics of vapor bubble collapse. *Journal of Heat Transfer*, 87:209–220, 1965.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- HOFFMAN, J.D. : *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., 2^e édition, 2001.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- LAVIÉVILLE, J., QUÉMÉRAIS, E., MIMOUNI, S., BOUCKER, M. et MÉCHITOUA, N. : NEPTUNE CFD v1.0 theory manual. Rapport technique HI-81/05/032/P, Nept_2004_L1.2/3/P, EDF, 2006.
- LEGENDRE, D., BORÉE, J. et MAGNAUDET, J. : Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 10(6):1256–1272, 1998.
- LHULLIER, D. : A mean-field description of two-phase flows with phase changes. *International Journal of Multiphase Flow*, 29(3):511–525, 2003.
- MANON, E. : *Contribution à l'analyse et à la modélisation locale des écoulements bouillants sous-saturé dans les conditions des Réacteurs à Eau sous Pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2000.
- PARK, H.S., LEE, T.H., HIBIKI, T., BAEK, W.P. et ISHII, M. : Modeling of the condensation sink term in an interfacial area transport equation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:5041–5053, 2007.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part II. *Chemical Engineering Progress*, 48 (4):173–180, 1952a.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part I. *Chemical Engineering Progress*, 48 (3):141–146, 1952b.
- RÜCKENSTEIN, E. : On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chemical Engineering Science*, 10:22–30, 1959.
- THEOFANOUS, T.G., BIASI, L., ISBIN, H.S. et FAUSKE, H.K. : Nonequilibrium bubble collapse: A theoretical study. *Proceedings of the 11th National Heat Transfer Conference, Minneapolis, Minnesota – 3 August 1969, Heat Transfer Minneapolis*, Chemical Engineering Science Symposium Series 66. American Institute of Chemical Engineers, 1969.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.
- YOUNG, J.B. : The fundamental equations of gas-droplet multiphase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 21(2):175 – 191, 1995. ISSN 0301-9322.
- ZEITOUN, O., SHOUKRI, M. et CHATOORGOON, V. : Interfacial heat transfert between steam bubbles and subcooled water in vertical upward flow. *Journal of Heat Transfer*, 117:402–407, 1995.
- ZUBER, N. : The dynamics of vapor bubbles in nonuniform temperature fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2(1-2):83–98, 1961.

Chapitre 6

Tentative de prise en compte de la polydispersion en vitesse

Dans ce chapitre, nous allons étudier la faisabilité d'une prise en compte de la polydispersion en vitesse de la population de bulles dans la méthode des moments. *Ce chapitre restera ouvert* et doit en ce sens être vu comme une première approche de la modélisation de ce phénomène dans la méthode des moments.

Rappelons que seule la polydispersion en vitesse directement liée à la polydispersion en taille sera abordée et non pas la polydispersion due à la turbulence de l'essaim de bulle. On a en effet fait l'hypothèse d'une monodispersion de vitesse *pour une taille de bulle donnée* (cf. section 2.2.6), autrement dit, pour une taille de bulle donnée, à un instant donné et à une position donnée, on suppose qu'il existe une *vitesse unique caractéristique de la taille de bulle* $\bar{w}$, la dispersion autour de cette vitesse étant nulle.

La plupart des travaux déjà existant sur ce type de polydispersion, et notamment sur la fermeture de la vitesse caractéristique $\bar{w}$, portent sur des écoulements très dilués à fines gouttes ou à particules solides (Rani et Balachandar, 2003 ; Mossa, 2005 ; Marchisio, 2007). Contrairement aux écoulement gaz/gouttes ou gaz/particules où la phase dispersée est la plus lourde, les écoulements à bulles se caractérisent par une phase dispersée plus légère que le fluide porteur. En conséquence, il apparaît indispensable de retenir la force de portance en plus des seules forces de traînée et de volume prises en compte dans les travaux précédemment cités.

Pour les écoulements qui nous intéressent, la fermeture de la vitesse caractéristique $\bar{w}$ se doit donc de prendre en compte au moins deux caractéristiques importantes vues au chapitre 3 : la variation de la traînée et donc de la vitesse de bulle avec la taille de bulle ainsi que l'effet de la force de portance qui pousse les plus petites bulles vers la paroi tout en emmenant les plus grosses au centre de la conduite.

6.1 Transport des densités de moments et vitesse caractéristique de bulle

Dans le deuxième chapitre, nous avons vu que la méthode des moments nécessitait le transport de deux moments particuliers, à savoir $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, les densités de moments d'ordres 1 et 2 de la fonction de distribution en taille des bulles. Rappelons l'équation de transport de la densité de moment d'ordre γ :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{W}_\gamma) = \underbrace{\Gamma_\gamma}_{\text{changement de phase}} - \underbrace{n \frac{\gamma}{3\rho_d} \int \beta^\gamma \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}}(\beta) \cdot \nabla \rho_d \right) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\text{compressibilité du gaz}} + \underbrace{\text{CO}_\gamma + \text{BU}_\gamma}_{\text{coalescence et fragmentation}} \quad (6.1)$$

où la vitesse de transport $\mathbf{W}_\gamma$, aussi appelée *vitesse géométrique d'ordre γ* , est définie par la relation (2.43) qui peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}_\gamma \mathbf{W}_\gamma = n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) \bar{\mathbf{w}}(\beta) d\beta. \quad (6.2)$$

Comme le montre cette définition, les différentes densités de moments ont la particularité d'être transportées à des vitesses différentes, traduisant ainsi la dépendance en diamètre de la vitesse de chaque bulle et donc la polydispersion en vitesse de la population de bulles.

La vitesse caractéristique $\bar{\mathbf{w}}$ intervient dans deux termes de l'équation (6.1) : la vitesse de transport et la contribution de la compressibilité du gaz. La caractérisation de la polydispersion en vitesse passe en conséquence par la détermination de la vitesse caractéristique de bulle $\bar{\mathbf{w}}$. Celle-ci peut être exprimée à l'aide de la relation :

$$\bar{\mathbf{w}}(\beta) \triangleq \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{v}(\beta) \quad (6.3)$$

où $\Delta \mathbf{v}$ désigne la vitesse relative de bulle par rapport au liquide environnant caractérisé par une vitesse $\bar{\mathbf{u}}$. Dans cette relation, la vitesse du liquide vu par la bulle $\bar{\mathbf{u}}$ peut être déterminée en utilisant un modèle de Langevin (*cf.* Minier et Peirano, 2001 ; Oesterlé, 2006) ; ce type de modèle étant assez lourd et difficile à mettre en œuvre, on préférera utiliser les notations de Simonin (1996) qui décompose $\bar{\mathbf{u}}$ en une vitesse moyenne, la vitesse moyennephasique du liquide $\mathbf{V}_c$, et une fluctuation $\bar{\mathbf{u}}'$ définie autour de cette moyenne :

$$\bar{\mathbf{w}}(\beta) \triangleq \mathbf{V}_c + \bar{\mathbf{u}}' + \Delta \mathbf{v}(\beta) \quad (6.4)$$

Le problème de fermeture de $\bar{\mathbf{w}}$ est ainsi déplacé sur les quantités $\bar{\mathbf{u}}'$ et $\Delta \mathbf{v}$.

Compte tenu de cette dernière relation, l'équation de transport de $\mathcal{M}_\gamma$ (6.1) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{V}_d) = & \Gamma_\gamma - \frac{\gamma}{3\rho_d} \mathcal{M}_\gamma \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \rho_d \right) + \text{CO}_\gamma + \text{BU}_\gamma \\ & + \nabla \cdot \left(\mathcal{M}_\gamma (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) - n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) \Delta \mathbf{v}(\beta) d\beta \right) \\ & + \frac{\gamma}{3\rho_d} \left(\mathcal{M}_\gamma (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \cdot \nabla \rho_d - n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) (\Delta \mathbf{v}(\beta) \cdot \nabla \rho_d) d\beta \right) \\ & - \nabla \cdot \left(n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) \bar{\mathbf{u}}' d\beta \right) - \frac{\gamma}{3\rho_d} n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) (\bar{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \rho_d) d\beta \end{aligned} \quad (6.5)$$

où l'on a choisit la vitesse moyenne des bulles comme vitesse de transport.

L'avant dernier terme du second membre de cette équation de bilan peut être assimilé à un flux diffusif de la densité de moment d'ordre γ . Si des fermetures pour ce terme existent pour la densité de moment d'ordre 3 (*cf.* Simonin, 1996 ; Oesterlé, 2006), aucune fermeture n'est à ce jour disponible pour les deux densités de moments qui nous intéressent. À l'instar de ce qui a été accompli pour la densité de moment d'ordre 3 (Deutsch et Simonin, 1991 ; Deutsch, 1992 ; Simonin *et al.*, 1993), on pourrait envisager de

développer des fermetures dédiées au cas des colonnes à bulles pour les deux derniers termes du second membre de (6.5), et ce à partir de résultats de DNS diphasique (p. ex. Magdeleine, 2009 ; Magdeleine *et al.*, 2010). Cela n'ayant malheureusement pas pu être effectué dans le cadre de cette thèse, les deux derniers termes de (6.5) seront négligé en première approximation.

Concernant les cinquième et sixième termes du second membre de (6.5), ils traduisent le fait que la différence des vitesses moyennes diffère de la moyenne des différentes vitesses relatives de bulles, caractérisant ainsi la polydispersion en vitesse de la population. L'intégrale intervenant dans chacun de ces deux termes peut être déterminée analytiquement si l'on sait se donner une expression pour la vitesse relative $\Delta \mathbf{v}$, ce qui va être tenté dans la prochaine section.

6.2 Vitesse relative de bulle

La fermeture de $\Delta \mathbf{v}(\beta)$ dans le cadre général nous paraissant trop complexe, nous nous restreignons au cas particulier d'un écoulement à bulles ascendant en conduite verticale de section circulaire, l'écoulement étant en outre supposé *axisymétrique*.

L'idée est maintenant d'écrire des fermetures pour la vitesse relative de bulle en étudiant indépendamment ses composantes axiale et radiale notées respectivement Δv_r et Δv_z . La composante azimutale de la vitesse relative n'est pas utile ici, compte tenu de l'hypothèse d'axisymétrie que nous avons faite.

6.2.1 Vitesse relative axiale

La vitesse relative axiale a déjà été déterminée au chapitre 3 (*cf.* paragraphe 3.1.3). En supposant la bulle principalement soumise à la poussée d'Archimède et à la traînée axiale, on arrive à l'expression suivante :

$$\Delta v_z(d) \cong \sqrt{\frac{4}{3} g (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c}\right) \frac{d}{C^D(d)}}. \quad (3.18)$$

En première approximation *on ne considérera que le premier régime de traînée*, c'est-à-dire le régime à bulles sphériques, la vitesse relative axiale étant ainsi donnée par la relation approchée (3.26) que l'on rappelle ici :

$$\Delta v_z(d) \cong \left(\frac{5}{9} g (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c}\right) \right)^{4/7} \left(\frac{d^5}{\nu_c} \right)^{1/7}. \quad (6.6)$$

6.2.2 Vitesse relative radiale

Radialement, la force motrice est la force de portance, la traînée agissant comme un frein. Quelque soit le signe de C^L , la composante radiale de la traînée sera toujours opposée à la la composante radiale de la portance. On peut donc écrire le bilan simplifié suivant l'axe $\mathbf{e}_r$:

$$\frac{\pi}{6} \rho_c d^3 C^L(d) \Delta v_z(d) \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} \right) = \frac{\pi}{8} \rho_c d^2 C^D(d) \|\Delta \mathbf{v}(d)\| \Delta v_r(d). \quad (6.7)$$

À nouveau, il nous faut connaître les composantes de la vitesse du liquide vu par la bulle. En utilisant la décomposition $\tilde{\mathbf{u}} \triangleq \mathbf{V}_c + \tilde{\mathbf{u}}'$ vue plus haut, on peut écrire :

$$\frac{\pi}{6} \rho_c d^3 C^L(d) \Delta v_z(d) \left(\frac{\partial V_{c,r}}{\partial z} - \frac{\partial V_{c,z}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}'_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{u}'_z}{\partial r} \right) = \frac{\pi}{8} \rho_c d^2 C^D(d) \|\Delta \mathbf{v}(d)\| \Delta v_r(d) \quad (6.8)$$

À l'instar de ce que l'on a fait au chapitre 3, la partie fluctuante de la force de portance peut être remplacée par une force de dispersion turbulente pour laquelle on propose la modélisation suivante :

$$\mathbf{F}^{TD} \triangleq -C^{TD} \rho_c \frac{\pi}{6} d^3 K_d \nabla \alpha_d \quad (6.9)$$

où K_d désigne l'énergie cinétique d'agitation des bulles et C^{TD} un coefficient de proportionnalité supposé de l'ordre de 1. Le bilan (6.8) s'écrit désormais :

$$\frac{\pi}{6} \rho_c d^3 C^L(d) \Delta v_z(d) \left(\frac{\partial V_{c,r}}{\partial z} - \frac{\partial V_{c,z}}{\partial r} \right) = \frac{\pi}{8} \rho_c d^2 C^D(d) \|\Delta \mathbf{v}(d)\| \Delta v_r(d) + \frac{\pi}{6} \rho_c d^3 C^{TD} K_d \frac{\partial \alpha_d}{\partial r} \quad (6.10)$$

Compte tenu du fait que pour les écoulements ascendants $\|\Delta \mathbf{v}(d)\| \cong \Delta v_z$ (cf. équation 3.17), on en déduit l'expression suivante pour Δv_r :

$$\Delta v_{ri}(d) = \frac{4}{3} d \frac{C_i^L(d)}{C^D(d)} \left(\frac{\partial V_{c,r}}{\partial z} - \frac{\partial V_{c,z}}{\partial r} \right) - \frac{4}{3} d \frac{C^{TD}}{C^D(d)} \frac{K_d}{\Delta v_z(d)} \frac{\partial \alpha_d}{\partial r} \quad (6.11)$$

où les différents coefficients de portance C_i^L sont donnés par (3.38), le premier coefficient de traînée par (3.25) et la vitesse relative axiale correspondante par (6.6).

L'énergie cinétique d'agitation des bulles K_d peut quant à elle être exprimée à l'aide d'une formule de Tchen (Oesterlé, 2006) :

$$K_d = K_c \frac{1 + b^2 \text{St}}{1 + \text{St}} \quad (6.12)$$

où b désigne un paramètre de masse ajoutée défini par :¹

$$b \triangleq \frac{\rho_c / \rho_d (1 + C^{VM})}{(1 + \rho_c / \rho_d C^{VM})} \quad (6.13)$$

et St désigne le nombre de Stokes donné par :

$$\text{St} \triangleq \frac{\tau_b}{\tau_t^{\mathcal{L}}} \quad (6.14)$$

avec τ_b le temps de relaxation de la bulle lié aux forces de traînée et de masse ajoutée et $\tau_t^{\mathcal{L}}$ l'échelle temporelle intégrale lagrangienne de la turbulence. D'après Oesterlé (2006), ces deux temps caractéristiques peuvent être déterminés à l'aide des relations suivantes :

$$\tau_b = \frac{4}{3} \frac{\rho_d}{\rho_c} (1 + \rho_c / \rho_d C^{VM}) \frac{d}{C^D(d) \Delta v_z(d)} \quad (6.15)$$

$$\tau_t^{\mathcal{L}} = \frac{3}{2} C_\mu \frac{K_c}{\varepsilon_c} \quad (6.16)$$

1. On rappelle que pour une bulle sphérique $C^{VM} = 1/2$, ce qui donne $b = \frac{3 \rho_c}{2 \rho_d + \rho_c}$. Si en outre $\rho_d \ll \rho_c$, alors $b \cong 3$.

où C_μ est un coefficient du modèle $K-\varepsilon$ utilisé pour modéliser la turbulence du liquide et dont les équations seront données dans le prochain chapitre (classiquement $C_\mu = 0,09$).

6.2.3 Calcul des termes source de l'équation de bilan géométrique

Compte tenu des résultats précédents, les intégrales intervenant les cinquième et sixième termes du second membre de (6.5) peuvent être déterminées analytiquement :

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \cdot \left(n \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) \Delta \mathbf{v}(\beta) d\beta \right) \\
 & = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \underbrace{\left(n \int \beta^\gamma \Delta v_r(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \right)}_{I_{\gamma r}} - \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\left(n \int \beta^\gamma \Delta v_z(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \right)}_{I_{\gamma z}}.
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
 & -n \frac{\gamma}{3\rho_d} \int \beta^\gamma \mathcal{P}_\beta(\beta) (\Delta \mathbf{v}(\beta) \cdot \nabla \rho_d) d\beta \\
 & = -\frac{\gamma}{3\rho_d} \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial r} \underbrace{n \int \beta^\gamma \Delta v_r(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{\gamma r}} + \frac{\partial \rho_d}{\partial z} \underbrace{n \int \beta^\gamma \Delta v_z(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_{\gamma z}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

où l'on retrouve les deux mêmes intégrales à calculer. Ne relevant que d'un simple mais non moins fastidieux exercice calculatoire la détermination de ces deux intégrales ne sera pas détaillée ici.

6.3 Conclusion

Ce court chapitre aura permis de montrer comment la polydispersion en vitesse pouvait être intégrée dans la méthode des moments moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

La prise en compte de la polydispersion en vitesse nécessite de connaître une expression donnant la vitesse caractéristique de bulle, celle-ci influençant l'équation de bilan des densités de moments en diamètre par l'intermédiaire la vitesse de transport et le terme source de compressibilité du gaz. En exprimant cette vitesse caractéristique comme une fonction de la vitesse moyenne du liquide, de la vitesse relative de bulle et d'une fluctuation de vitesse, les densités de moments peuvent toutes être transportées à la même vitesse moyenne. En contrepartie apparaissent au second membre des termes sources impliquant la fluctuation de vitesse ainsi que les vitesses relatives de bulles macroscopique et microscopique.

Nous avons vu que les fermetures pour ces derniers termes pouvaient être déterminées analytiquement sous réserve de faire des *hypothèses sur la géométrie de l'écoulement*. Les termes résultants sont néanmoins assez lourds à manipuler, *surtout si l'on cherche à prendre en compte à la fois les différents régimes de traînée et ceux de portance* comme c'est le cas dans le reste de ce document. Les fermetures des termes sources faisant intervenir la fluctuation de la vitesse du liquide vu par une bulle restent quant à eux encore à déterminer, à l'aide de calculs DNS par exemple.

Au regard des nombreuses simplifications nécessaires à la fermeture des termes sources caractérisant la polydispersion en vitesse d'une population de bulles et des nombreuses incertitudes restant encore à clarifier concernant ces fermetures, on peut conclure qu'une description complète de la polydispersion en vitesse dans le cadre de la méthode des moments n'est pas chose aisée et est encore loin d'être aboutie.

En conséquence, on supposera dans la suite de cette étude que la polydispersion en vitesse des populations de bulles considérées sera suffisamment faible pour pouvoir négliger en première approximation les quatre derniers termes du second membre de (6.5).

6.4 Références

- DEUTSCH, E. : *Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire calculée par simulation numérique directe des grandes échelles*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 1992.
- DEUTSCH, E. et SIMONIN, O. : Large eddy simulation applied to the motion of particles in stationary homogeneous fluid turbulence. Dans *Turbulence Modification in Multiphase Flows*, volume 110, pages 35–42. ASME Fluids Engineering Division, 1991.
- MAGDELEINE, S. : *Démonstration de la potentialité des méthodes de SND diphasique à renseigner les modèles moyennés : Application à la colonne à bulles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- MAGDELEINE, S., MATHIEU, B., LEBAGUE, O., TOUTANT, A. et MOREL, C. : DNS up-scaling applied to two-phase momentum balance and volumetric interfacial area transport equation for a vertical bubbly flow. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- MARCHISIO, D.L. : Quadrature method of moments for poly-disperse flows. MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 41–78. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- MINIER, J.-P. et PEIRANO, E. : The PDF approach to turbulent dispersed two-phase flows. *Physics Reports*, 352(1-3):1–214, 2001.
- MOSSA, J.-B. : *Extension polydisperse pour la description Euler-Euler des écoulements diphasiques réactifs*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- OESTERLÉ, B. : *Écoulements Multiphasiques – Des fondements aux méthodes d’ingénierie*. Lavoisier. Hermes Science Publication, 2006.
- RANI, S.L. et BALACHANDAR, S. : Evaluation of the equilibrium Eulerian approach for the evolution of particle concentration in isotropic turbulence. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:1793–1816, 2003.
- SIMONIN, O. : Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Combustion and turbulence in two-phase flows*, Von Karman Lecture Series 1996-02. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- SIMONIN, O., DEUTSCH, E. et MINIER, J.P. : Eulerian prediction of the fluid/particle correlated motion in turbulent two-phase flows. *Applied Scientific Research*, 51:275–283, 1993.

Troisième partie

TEST ET VALIDATION DU MODÈLE DE POLYDISPERSION PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

Chapitre 7

Présentation des équations de NEPTUNE_CFD

Ce chapitre présente les équations du code de calcul NEPTUNE_CFD utilisé pour tester le modèle de polydispersion présenté dans les précédents chapitres.

Le code NEPTUNE_CFD fait partie de la plate-forme d'outils thermohydrauliques développée dans le cadre du projet NEPTUNE. Ce projet quadripartite impliquant le CEA, EDF, l'IRSN et AREVA-NP a pour objectif de développer les outils numériques multi-échelles et multi-physiques pour la modélisation et la simulation des réacteurs nucléaires de prochaine génération (*cf.* Guelfi *et al.*, 2007).

D'un point de vue physique, le code NEPTUNE_CFD est basé sur le *modèle à deux fluides à une pression* développé initialement par Ishii *et al.* (1975 ; 2006), ce modèle ayant été ensuite *généralisé* de façon à pouvoir traiter un grand nombre de phases.¹ Actuellement, le code permet de traiter trois types d'écoulements multiphasiques, à savoir les écoulements gaz/particules, les écoulements stratifiés et les écoulements à bulles auxquels on s'intéresse ici.

Le système d'équations résolu par le code pour simuler cette dernière famille d'écoulement est composé de six équations principales :

- a) deux équations de masse ;
- b) deux équations de quantité de mouvement ;
- c) deux équations d'énergie.

En complément de ces six équations qui seront présentées à la section 7.1, deux autres types d'équations sont résolues par le code, à savoir :

- d) des équations permettant de caractériser la turbulence de la phase porteuse ;
- e) des équations de bilan géométriques permettant de déterminer la topologie de l'écoulement, équations indispensables à notre modèle de polydispersion.

Ces équations complémentaires seront présentées à la section 7.2

Un mot également sur la méthode numérique utilisée dans NEPTUNE_CFD pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles ; celui-ci est résolu grâce à une méthode des volumes finis colocalisés, l'algorithme de résolution étant basé sur une méthode elliptique à pas fractionnaires (*cf.* Méchitoua *et al.*, 2003).

1. On se limitera toutefois à la description des équations d'un simple système diphasique.

Notons qu'à partir de maintenant les symboles d'opérateurs de moyenne seront omis dans un souci d'allègement de l'écriture. *Toutes les variables devront donc être interprétées comme des grandeurs caractérisant l'évolution macroscopique de l'écoulement.*

7.1 Équations principales

Les équations de bilan ont été implantées dans le code sous forme *non conservative*. En pratique, l'équation exploitée dans le code est également divisée par le taux de présence de la phase traitée α_k de façon à gérer le problème des phases résiduelles.² Afin de ne pas perdre en lisibilité, les équations de bilan du code de calcul ne seront toutefois pas présentées sous cette dernière forme.

7.1.1 Bilans moyens de masse

Les bilans de masse résolus dans le code NEPTUNE_CFD sont les équations (1.85) de notre modèle hybride (Pouvreau, 2003 ; Laviéville *et al.*, 2006) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \rho_c) + \nabla \cdot (\alpha_c \rho_c \mathbf{V}_c) = -\Gamma \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_d \rho_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \rho_d \mathbf{V}_d) = \Gamma. \end{array} \right. \quad (7.1a)$$

$$\quad (7.1b)$$

L'expression implantée dans le code pour modéliser le taux de changement de phase moyen Γ sera détaillée plus loin.

7.1.2 Bilans moyens de quantité de mouvement

Les bilans moyens de quantité de mouvement que nous avons établis au chapitre 1 ont été dissymétrisés, caractérisant ainsi la dissymétrie géométrique des deux phases pour un écoulement dispersé ; on rappelle ici ces équations sous forme non conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c \mathbf{V}_c}{Dt} = -\alpha_c \nabla p_c + \nabla \cdot (\alpha_c (\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T)) + \alpha_c \rho_c \mathbf{g} - \mathbf{M}^* - \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_c) \\ \alpha_d \rho_d \frac{D_d \mathbf{V}_d}{Dt} = -\alpha_d \nabla p_c + \nabla \cdot (\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T) + \alpha_d \rho_d \mathbf{g} + \mathbf{M}^* + \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_d). \end{array} \right. \quad (7.2a)$$

$$\quad (7.2b)$$

où l'on a négligé la contrainte σ_c^* (cf. équation 1.102d), celle-ci n'ayant pas été fermée dans cette étude.

Les bilans moyens de quantité de mouvement résolus par NEPTUNE_CFD sont des *versions simplifiées* du modèle à deux fluides d'Ishii et Hibiki (1975 ; 2006) ; ils sont par conséquent parfaitement symétriques pour les deux phases (Pouvreau, 2003 ; Laviéville *et al.*, 2006) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c \mathbf{V}_c}{Dt} = -\alpha_c \nabla P + \nabla \cdot (\alpha_c (\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T)) + \alpha_c \rho_c \mathbf{g} - \mathbf{M}^* \\ \alpha_d \rho_d \frac{D_d \mathbf{V}_d}{Dt} = -\alpha_d \nabla P + \nabla \cdot (\alpha_d (\boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_d^T)) + \alpha_d \rho_d \mathbf{g} + \mathbf{M}^*. \end{array} \right. \quad (7.3a)$$

$$\quad (7.3b)$$

La comparaison des deux systèmes d'équations mène aux remarques suivantes.

2. Cela permet d'éviter que les différents membres des équations de bilans deviennent nuls lorsque α_k tend vers 0.

- a) Les derniers termes du second membre des équations de bilan (7.2) faisant intervenir la vitesse de recul $\mathbf{V}^*$ sont absents des équations du code de calcul (7.3). Ces deux termes ont donc été implantés dans le code en prenant l'expression (5.20) pour quantifier $\mathbf{V}^*$.
- b) Le tenseur des contraintes visqueuses dans la phase dispersée $\boldsymbol{\tau}_d$ est présent dans le bilan de quantité de mouvement (7.3b), alors qu'il n'apparaît pas dans l'équation de bilan correspondante de notre modèle. Ce terme a par conséquent été supprimé de l'équation de bilan résolue par le code.
- c) La pression moyenne P résolue par le code peut être identifiée à la pression moyenne du liquide p_c apparaissant dans notre modèle.

En conséquence, les équations de bilan de quantité de mouvement résolues pour cette étude avec NEPTUNE_CFD sont les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_c \rho_c \frac{D_c \mathbf{V}_c}{Dt} = -\alpha_c \nabla P + \nabla \cdot (\alpha_c (\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T)) + \alpha_c \rho_c \mathbf{g} - \mathbf{M}^* - \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_c) \end{cases} \quad (7.4a)$$

$$\begin{cases} \alpha_d \rho_d \frac{D_d \mathbf{V}_d}{Dt} = -\alpha_d \nabla P + \nabla \cdot (\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T) + \alpha_d \rho_d \mathbf{g} + \mathbf{M}^* + \Gamma (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_d) \end{cases} \quad (7.4b)$$

où les expressions des différentes forces moyennes vue au chapitre 3 ont été implantées pour modéliser la force moyenne entre phases $\mathbf{M}^*$ selon la relation :

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^D + \mathbf{M}^L + \mathbf{M}^{VM} + \mathbf{M}^W + \mathbf{M}^{TD}. \quad (7.5)$$

Quelques mots encore sur la modélisation du tenseur visqueux moyen $\boldsymbol{\tau}_c$. Celui-ci est modélisé en supposant les deux fluides *newtoniens*, l'expression implantée dans NEPTUNE_CFD étant la suivante :

$$\boldsymbol{\tau}_c = \mu_c (\nabla \mathbf{V}_c + {}^T \nabla \mathbf{V}_c) - \frac{2}{3} \mu_c \nabla \cdot \mathbf{V}_c \mathbb{1} \quad (7.6)$$

ce qui revient à négliger le *tenseur d'extra-déformations interfaciales* (cf. Ishii, 1975). Les modélisations des tenseurs des contraintes turbulentes $\boldsymbol{\tau}_c^T$ et $\boldsymbol{\tau}_d^T$ sont quant à elles abordées au paragraphe 7.2.2.

7.1.3 Bilans moyens d'énergie

Commençons par rappeler les équations de bilan (1.113) sur l'enthalpie moyenne de chaque phase tel qu'elles ont été établies au premier chapitre :

$$\begin{cases} \alpha_c \rho_c \frac{D_c I_c}{Dt} = -\nabla \cdot (\alpha_c (\mathbf{q}_c + \mathbf{q}_c^T)) + \alpha_c \frac{D_c p_c}{Dt} + \alpha_c D_c - \Pi^* - \Gamma (I^* - I_c) \end{cases} \quad (7.7a)$$

$$\begin{cases} \alpha_d \rho_d \frac{D_d I_d}{Dt} = \alpha_d \frac{D_d p_d}{Dt} + \Pi^* + \Gamma (I^* - I_d) \end{cases} \quad (7.7b)$$

Contrairement à notre modèle hybride, la grandeur choisie dans NEPTUNE_CFD pour caractériser l'énergie d'une phase est son *enthalpie totale moyenne*, notée H_k et définie comme la somme de l'enthalpie moyenne et de l'énergie cinétique du mouvement moyen : ³

$$H_k \triangleq I_k + \frac{V_k^2}{2}. \quad (7.8)$$

Pour obtenir une équation de bilan sur H_k , nous avons donc besoin des équations de bilan sur les énergies cinétiques du mouvement moyen, celles-ci étant obtenues par le produit scalaire des bilans moyens de

3. Notons que, définie ainsi, H_k ne correspond pas à la moyenne de l'enthalpie totale puisqu'elle ne prend pas en compte l'énergie cinétique turbulente de la phase k (cf. Lhuillier *et al.*, 2010).

quantité de mouvement (7.2) par les vitesses moyennes phasiques correspondantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c}{Dt} \left(\frac{V_c^2}{2} \right) \\ \quad = -\alpha_c \mathbf{V}_c \cdot \nabla p_c + \mathbf{V}_c \cdot \nabla \cdot \left(\alpha_c (\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T) \right) + \alpha_c \rho_c \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{g} - \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{M}^* - \Gamma (\mathbf{V}_c \cdot \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{V}_c) \end{array} \right. \quad (7.9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_d \rho_d \frac{D_d}{Dt} \left(\frac{V_d^2}{2} \right) \\ \quad = -\alpha_d \mathbf{V}_d \cdot \nabla p_c + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \cdot \left(\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T \right) + \alpha_d \rho_d \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{g} + \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{M}^* + \Gamma (\mathbf{V}_d \cdot \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{V}_d) \end{array} \right. \quad (7.9b)$$

L'addition de ces bilans moyens d'énergie cinétique aux bilans d'enthalpie moyenne (7.7) correspondants nous donne finalement les bilans moyens sur H_k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c H_c}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\alpha_c (\mathbf{q}_c + \mathbf{q}_c^T) \right) + \alpha_c \frac{\partial p_c}{\partial t} + \mathbf{V}_c \cdot \nabla \cdot \left(\alpha_c (\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T) \right) + \alpha_c D_c + \alpha_c \rho_c \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{g} \\ \quad - \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{M}^* - \Pi^* - \Gamma (I^* - H_c) - \Gamma \left(\mathbf{V}_c \cdot \mathbf{V}^* - \frac{V_c^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (7.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_d \rho_d \frac{D_d H_d}{Dt} = \alpha_d \frac{\partial p_c}{\partial t} - \alpha_d \frac{D_d}{Dt} (p_c - p_d) + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \cdot \left(\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T \right) + \alpha_d \rho_d \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{g} \\ \quad + \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{M}^* + \Pi^* + \Gamma (I^* - H_d) + \Gamma \left(\mathbf{V}_d \cdot \mathbf{V}^* - \frac{V_d^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (7.10b)$$

Au premier chapitre, nous avons en outre fait l'hypothèse que la température à l'intérieur des bulles était homogène et égale à la température de saturation (*cf.* hypothèses H6 et H7), de sorte que l'on pouvait se passer de l'équation de bilan sur l'énergie moyenne de la phase dispersée.

En raison de son traitement symétrique des deux phases, le code NEPTUNE_CFD *résout forcément deux équations d'enthalpie totale moyenne*, une pour chaque phase ; elles s'écrivent (Pouvreau, 2003 ; Laviéville *et al.*, 2006) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c H_c}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\alpha_c (\mathbf{q}_c + \mathbf{q}_c^T) \right) + \alpha_c \frac{\partial P}{\partial t} + \Pi_c - \Gamma (I_c^* - H_c) + \dot{Q}_c \end{array} \right. \quad (7.11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_d \rho_d \frac{D_d H_d}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\alpha_d (\mathbf{q}_d + \mathbf{q}_d^T) \right) + \alpha_d \frac{\partial P}{\partial t} + \Pi_d + \Gamma (I_d^* - H_d) + \dot{Q}_d \end{array} \right. \quad (7.11b)$$

où $\dot{Q}_k$ désigne une éventuelle source de chaleur volumique dans la phase k dont on s'était jusqu'à présent affranchi dans nos développements.

En comparant les équations théoriques (7.10) et les équations (7.11) implantées dans NEPTUNE_CFD, les observations suivantes peuvent être formulées.

- Un grand nombre de termes, notamment d'origine mécanique, a été négligé par l'équipe de développement du code devant les échanges d'énergie induits par le changement de phase.
- Le code NEPTUNE_CFD ne faisant pas de distinction entre les pressions des deux phases, la dérivée matérielle de la différence des pressions moyennes apparaissant dans (7.10b) n'apparaît donc pas dans (7.11b).
- Les flux de chaleur diffusifs (moléculaire et turbulent) n'ont pas été pris en compte dans l'équation de notre modèle pour la phase dispersée, la prise en compte d'un phénomène de diffusion de chaleur d'une bulle à une autre de la population ne apparaissant pas pertinente.
- En prenant en compte la fermeture (5.20) pour caractériser $\mathbf{V}^*$, les termes d'échanges $\pm \Pi^* \pm \Gamma (I^* + \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}^*)$ disparaissent lorsque l'on somme les deux bilans (7.10) pour obtenir le

bilan d'enthalpie totale du mélange. La philosophie du code NEPTUNE_CFD est quelque peu différente : pour garantir le bilan d'enthalpie du mélange il faut que :

$$\Gamma (I_d^* - I_c^*) + \Pi_c + \Pi_d = 0. \quad (7.12)$$

En remplaçant la différence $(I_d^* - I_c^*)$ par la chaleur latente de vaporisation $\mathcal{Q}_v$ on obtient la relation suivante :

$$\Gamma = -\frac{\Pi_c + \Pi_d}{\mathcal{Q}_v} \quad (7.13)$$

qui correspond à notre relation de saut macroscopique (5.18a) lorsque Π_d , l'échange de chaleur moyen entre les interfaces et le gaz, est négligeable (hypothèse faite au chapitre 5).

L'expression permettant le calcul du taux de changement de phase Γ utilisée dans NEPTUNE_CFD est l'expression (7.13), Π_c étant modélisé à l'aide de l'expression polydisperse (5.18b). Les bulles étant supposées rester à saturation, Π_d est quant à lui modélisé de telle sorte que l'on obtienne un retour à la saturation de la vapeur sur l'intervalle du pas de temps numérique :

$$\Pi_d \triangleq n \{ \Phi_{l \rightarrow d} \} = \frac{\alpha_d \rho_d C_{pd}}{\Delta t} (\theta_{sat} - \theta_d) \quad (7.14)$$

où C_{pd} désigne la chaleur spécifique à pression constante de la vapeur et Δt le pas de temps. Concernant les termes moyens I_c^* et I_d^* , ils sont modélisés dans NEPTUNE_CFD par les enthalpies de saturation correspondantes, les interfaces étant supposées à la température de saturation.

Un dernier mot sur la modélisation des flux de chaleur moyens $\mathbf{q}_k$ et $\mathbf{q}_k^T$. Le premier de ces deux termes est modélisé selon une loi de Fourier classique :

$$\mathbf{q}_k = -\lambda_k \nabla \theta_k \quad (7.15)$$

où θ_k désigne la température moyenne de la phase k ; une loi similaire est supposée pour le flux turbulent :

$$\mathbf{q}_k^T = -\lambda_k^T \nabla \theta_k = -\frac{C_{pk} \mu_k^T}{Pr_k^T} \nabla \theta_k \quad (7.16)$$

où λ_k^T est une conductivité thermique turbulente reliée à la viscosité dynamique turbulente μ_k^T par le biais d'un nombre de Prandtl turbulent Pr_k^T ($Pr_k^T = 0,9$). La modélisation de μ_k^T dans NEPTUNE_CFD sera abordée au paragraphe 7.2.2.

7.2 Équations complémentaires

Dans cette section, on se penche sur l'écriture des équations et termes sources supplémentaires, à savoir les équations de bilan des densités de moments géométriques ainsi que la modélisation de la turbulence et de la nucléation pariétale.

7.2.1 Équations de bilan des densités de moments géométriques

Dans NEPTUNE_CFD, les équations de bilan des deux densités de moments géométriques nécessaires à la fermeture de notre modèle de polydispersion, à savoir $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, sont résolues comme des scalaires passifs. La résolution de ces équations est découplée des équations précédentes, autrement dit,

pour un pas de temps donné, elles sont résolues après la résolution couplée en taux de présence phasique, en quantité de mouvement, en enthalpie totale et en pression.

Rappelons l'expression de l'équation de bilan géométrique finalement résolue dans notre modèle :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{V}_d) = \Gamma_\gamma - \frac{\gamma}{3 \rho_d} \mathcal{M}_\gamma \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \rho_d \right) + \text{CO}_\gamma + \text{BU}_\gamma \quad (7.17)$$

où les termes sources relatifs à la polydispersion en vitesse de la population de bulles n'ont pas été pris en compte, comme annoncé à la fin du chapitre 6.

Pour des raisons numériques, la variable résolue dans NEPTUNE_CFD n'est pas directement $\mathcal{M}_\gamma$, mais une variable intermédiaire notée X_γ et définie telle que (Pouvreau, 2003 ; Laviéville *et al.*, 2006) :

$$X_\gamma \triangleq \frac{\mathcal{M}_\gamma}{\alpha_d \rho_d}. \quad (7.18)$$

l'équation de bilan correspondante pouvant aisément être déduite de l'équation (7.17). Sous forme non conservative, celle-ci s'écrit :

$$\alpha_d \rho_d \frac{D_d X_\gamma}{Dt} = \Gamma_\gamma - \Gamma X_\gamma - \alpha_d \frac{\gamma}{3} \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \rho_d \right) X_\gamma + \text{CO}_\gamma + \text{BU}_\gamma \quad (7.19)$$

Les différents modèles de coalescence et fragmentation déterminés au chapitre 4 ont été implantés dans le code pour modéliser CO_γ et BU_γ . Comme ce fut le cas pour le taux de changement de phase moyen Γ , le terme source Γ_γ doit également être légèrement corrigée par rapport à l'expression déterminée au chapitre 5, et ce de façon prendre en compte le flux de chaleur Π_d calculé dans NEPTUNE_CFD :

$$\Gamma_\gamma = -2 \gamma \frac{\alpha_d \lambda_c \text{Nu}_{c\gamma}^{**}}{d_{10}^2} \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\mathcal{L}_v} \right) X_\gamma + \frac{\gamma}{3} \frac{\alpha_d \rho_d C_{pd}}{\Delta t} \left(\frac{\theta_d - \theta_{sat}}{\mathcal{L}_v} \right) X_\gamma \quad (7.20)$$

où le nombre de Nusselt géométrique $\text{Nu}_{c\gamma}^{**}$ est donné par les relations (D.9a) et (D.9b).

7.2.2 Modélisation de la turbulence

• Turbulence dans le liquide

Différents modèles sont disponibles dans NEPTUNE_CFD pour modéliser la turbulence de la phase liquide. Dans cette étude nous avons choisi d'utiliser un modèle $K - \varepsilon$ spécialement adapté aux écoulements à bulles, modèle basé sur les travaux de Morel (1997).

Le tenseur des contraintes turbulentes dans le liquide, également appelé *tenseur de Reynolds*, est modélisé à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq :

$$\tau_c^T = \mu_c^T (\nabla \mathbf{V}_c + {}^T \nabla \mathbf{V}_c) - \frac{2}{3} \mu_c^T \nabla \cdot \mathbf{V}_c \mathbb{1} - \frac{2}{3} \rho_c K_c \mathbb{1} \quad (7.21)$$

avec μ_c^T une viscosité dynamique turbulente modélisée telle que :

$$\mu_c^T = \rho_c C_\mu \frac{K_c^2}{\varepsilon_c} \quad (7.22)$$

où C_μ est une constante du modèle de turbulence dont la valeur communément admise est $C_\mu = 0,09$; K_c désigne l'énergie cinétique turbulente du liquide et ε_c son taux de dissipation.

L'évolution de K_c et ε_c est obtenue par la résolution des équations de bilan suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c K_c}{Dt} = -\alpha_c \tau_c^T : \nabla \mathbf{V}_c + \nabla \cdot \left(\alpha_c \frac{\mu_c^T}{Sc_c^K} \nabla K_c \right) - \alpha_c \rho_c \varepsilon_c + P_{IK} - \Gamma (K_c^* - K_c) \end{array} \right. \quad (7.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_c \rho_c \frac{D_c \varepsilon_c}{Dt} = -C_{\varepsilon_1} \alpha_c \frac{\varepsilon_c}{K_c} \tau_c^T : \nabla \mathbf{V}_c + \nabla \cdot \left(\alpha_c \frac{\mu_c^T}{Sc_c^\varepsilon} \nabla \varepsilon_c \right) - C_{\varepsilon_2} \alpha_c \rho_c \frac{\varepsilon_c^2}{K_c} + P_{I\varepsilon} - \Gamma (\varepsilon_c^* - \varepsilon_c) \end{array} \right. \quad (7.24)$$

où Sc_c désigne le *nombre de Schmidt turbulent* du liquide, nombre adimensionnel permettant de quantifier le rapport de la diffusivité turbulente sur la diffusivité moléculaire :

$$Sc_c \triangleq \frac{\mu_c^T}{\rho_c \mathcal{D}_c} \quad (7.25)$$

où $\mathcal{D}_c$ désigne le coefficient de diffusion moléculaire du liquide. Sc_c^K et Sc_c^ε ainsi que C_{ε_1} et C_{ε_2} sont des constantes du modèle ($Sc_c^K = 1$, $Sc_c^\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon_1} = 1,44$ et $C_{\varepsilon_2} = 1,92$).

Les premiers termes des seconds membres de (7.23) et (7.24) modélisent la production de turbulence par les gradients de la vitesse moyenne du liquide, les deuxièmes termes des seconds membres au transport de la turbulence par le liquide et les troisièmes termes à la dissipation de la turbulence. Les avant-derniers termes de chaque second membre sont quant à eux des termes purement diphasiques et correspondent à la production ou la destruction de turbulence par la présence des bulles dans le liquide ; ces deux termes sont respectivement modélisés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{IK} = -\mathbf{M}^D \cdot (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \end{array} \right. \quad (7.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{I\varepsilon} = C_{\varepsilon_3} \frac{\varepsilon_c}{K_c} P_{IK} \end{array} \right. \quad (7.27)$$

où C_{ε_3} est une constante ($C_{\varepsilon_3} = 1,2$). Concernant les deux derniers termes des équations (7.23) et (7.24), Yao et Morel (2002) proposent de prendre $K_c^* = K_c$ et $\varepsilon_c^* = \varepsilon_c$ en raison du manque d'informations pour modéliser ces deux quantités. Cela a pour conséquence d'éliminer les termes issus du changement de phase de ces deux équations de bilan.

Les équations de bilans du modèle K - ε diphasique ne diffèrent finalement de celles d'un modèle K - ε monophasique que par la présence des termes supplémentaires liés à la présence des bulles P_{IK} et $P_{I\varepsilon}$.

• Turbulence des bulles

La turbulence des bulles est caractérisée par le tenseur cinétique défini au chapitre 2 (cf. équation 2.33b). Ce tenseur est modélisé dans NEPTUNE_CFD à l'aide un modèle algébrique, le modèle de Tchen (Oesterlé, 2006). Les hypothèses sous-jacentes à ce modèle nous étant peu claires, il n'a toutefois pas été utilisé dans cette étude. Le tenseur cinétique, et donc la turbulence des bulles, n'ont ainsi pas été pris en compte.

7.2.3 Modélisation de la nucléation pariétale

Dans l'expérience DEBORA que l'on cherche à modéliser, nous avons vu que la paroi de la section d'essai était chauffée (cf. paragraphe 5.3.1). Une couche de liquide en contact avec cette paroi étant amenée à une température supérieure à la température de saturation du fluide, des bulles de vapeur peuvent s'y former. Détaillons à présent comment ce phénomène est pris en compte dans NEPTUNE_CFD (cf. Laviéville *et al.*, 2006).

• Écriture des termes sources de nucléation

La prise en compte de la nucléation dans les équation de bilan intervient par l'intermédiaire d'une contribution supplémentaire au taux de changement de phase moyen Γ , mais *uniquement dans les cellules du maillage en contact avec la paroi*. Pour ces cellules particulières, le terme source du bilan moyen de masse s'écrit :

$$\Gamma \triangleq \Gamma^{PC} + \Gamma_w^{NU} \quad (7.28)$$

où Γ^{PC} correspond à la contribution du changement de phase hors nucléation, modélisé dans notre cas à l'aide de la relation (7.13), et Γ_w^{NU} à la contribution de la nucléation des nouvelles bulles de vapeur à la paroi. Sur le même principe, une contribution de la nucléation pariétale est aussi ajoutée au second membre des équations de bilan géométriques :

$$\Gamma_\gamma \triangleq \Gamma_\gamma^{PC} + \Gamma_{\gamma,w}^{NU}. \quad (7.29)$$

En considérant que les bulles nucléées naissent toutes à un même diamètre D_n , la fonction de distribution des bulles naissantes peut être assimilée à une distribution de Dirac centrée sur D_n . Les termes sources de nucléation Γ_w^{NU} et $\Gamma_{\gamma,w}^{NU}$ peuvent ainsi être définis comme suit :

$$\Gamma_w^{NU} \triangleq \frac{S_{cel,w}}{\mathcal{V}_{cel}} \int_0^\infty \rho_d \frac{\pi}{6} \beta^3 n_s \delta(\beta - D_n) \phi^{NU}(\beta) d\beta = \frac{S_{cel,w}}{\mathcal{V}_{cel}} \rho_d \frac{\pi}{6} n_s \phi^{NU}(D_n) D_n^3 \quad (7.30)$$

$$\Gamma_{\gamma,w}^{NU} \triangleq \frac{S_{cel,w}}{\mathcal{V}_{cel}} \int_0^\infty \beta^\gamma n_s \delta(\beta - D_n) \phi^{NU}(\beta) d\beta = \frac{S_{cel,w}}{\mathcal{V}_{cel}} n_s \phi^{NU}(D_n) D_n^\gamma \quad (7.31)$$

où ϕ^{NU} désigne une *fréquence de nucléation*, que l'on peut se représenter comme la fréquence à laquelle les bulles se détachent de la paroi. n_s désigne la densité de sites de nucléation qui sont actifs, autrement dit le nombre de site de nucléation actifs sur la surface pariétale en contact avec le fluide ; n_s a donc la dimension d'une densité numérique surfacique. Les termes sources Γ_w^{NU} et $\Gamma_{\gamma,w}^{NU}$ étant définis sur les volumes des cellules concernées par la nucléation, ils font intervenir le ratio de la surface pariétale en contact avec la cellule du maillage considérée $S_{cel,w}$ et du volume de cette cellule $\mathcal{V}_{cel}$ afin de ramener leur dimension à celles de grandeurs volumiques.

La densité numérique de sites actifs de nucléation et la fréquence de détachement des bulles sont renseignées dans NEPTUNE_CFD à l'aide de relations données par Kurul et Podowski (1990) :

$$\phi^{NU}(d) = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g(\rho_c - \rho_d)}{\rho_d d}} \quad (7.32)$$

$$n_s = \left(210 (\theta_w - \theta_{sat}) \right)^{1,8} \quad (7.33)$$

où θ_w désigne la température de la paroi. Notons que la fréquence de détachement donnée par (7.32) ne tient pas compte du temps de croissance des bulles, celui-ci étant supposé négligeable par Kurul et Podowski (1990) devant le temps d'attente entre deux détachements. On remarquera également que la constante intervenant dans l'expression donnant n_s n'est pas sans dimension.

Le *diamètre de nucléation*, également appelé *diamètre de détachement*, est quant à lui estimé à l'aide de la corrélation d'Ünal (1976) :

$$D_n = 2,42 \cdot 10^{-5} P^{0,709} \frac{a}{\sqrt{b \varphi_V}} \quad (7.34a)$$

avec :

$$a = \frac{\lambda_w (\theta_w - \theta_{sat})}{2 \rho_d \mathcal{Q}_v \sqrt{\pi a_w}} \quad (7.34b)$$

$$b = \frac{\rho_c (\theta_{sat} - \theta_c)}{2 (\rho_c - \rho_d)} \quad (7.34c)$$

$$\varphi_V = \begin{cases} \left(\frac{V_c}{V_0} \right)^{0.47} & \text{si } V_c > V_0 = 0,61 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.34d)$$

où P désigne la pression moyenne du mélange diphasique et λ_w et a_w désignent respectivement la conductivité thermique et la diffusivité thermique du matériau composant la paroi. θ_c et V_c correspondent quant à eux à la température et à la norme de la vitesse du liquide au voisinage de la paroi.

Cette corrélation a été légèrement modifiée par les développeurs de NEPTUNE_CFD afin d'éviter que la diamètre de détachement ne tende vers l'infini lorsque θ_c tend vers θ_{sat} . Ainsi, la constante b de la corrélation est remplacée par :

$$b^* = \frac{\Phi_w}{2 (\rho_c - \rho_d) \text{Sn}_{cr} C_{p_c} V_c} \quad (7.35)$$

lorsque le nombre de Stanton Sn dépasse la valeur critique $\text{Sn}_{cr} = 6,5 \cdot 10^{-4}$, ce nombre adimensionnel étant défini par :

$$\text{Sn} \triangleq \frac{\Phi_w}{\rho_c C_{p_c} V_c (\theta_{sat} - \theta_c)} \quad (7.36)$$

où Φ_w désigne le flux de chaleur surfacique pariétal.

• Flux de chaleur et température de paroi

Le modèle de nucléation implanté dans NEPTUNE_CFD est basé sur la théorie de Kurul et Podowski (1990), selon laquelle le flux de chaleur pariétal Φ_w se divise en trois contributions distinctes (cf. figure 7.1) :⁴

$$\Phi_w = \Phi_c + \Phi_v + \Phi_q. \quad (7.37)$$

La définition et la modélisation de ces trois flux est détaillée ci-dessous.

- a) Le *flux monophasique* Φ_c transfère de la chaleur vers le liquide uniquement et est proportionnel à la fraction de la paroi non affectée par la présence des bulles nucléées :

$$\Phi_c = \mathcal{A}_c h_{log} (\theta_w - \theta_c) \quad (7.38)$$

où h_{log} désigne un coefficient de transfert thermique par convection forcée dans la couche limite thermique et $\mathcal{A}_c$ désigne la fraction de la surface de la paroi en contact avec uniquement du liquide ; cette dernière est déterminée à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_c + \mathcal{A}_q = 1 \end{cases} \quad (7.39a)$$

$$\mathcal{A}_q = \min(1, \pi D_n^2 n_s) \quad (7.39b)$$

4. Notons que ces trois flux sont des flux par unité de surface pariétale.

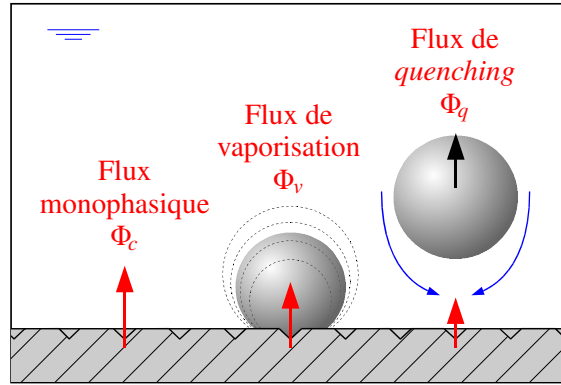


FIG. 7.1 – Schématisation de la répartition du flux de chaleur en paroi, selon la théorie de Kurul et Podowski (1990) (adapté de Laviéville *et al.*, 2006).

où $\mathcal{A}_q$ correspond à la somme des aires d'influence de chaque bulle nucléée par unité de surface pariétale.

- b) Le *flux de vaporisation* Φ_v correspond au flux de chaleur nécessaire à la formation de la vapeur des bulles nucléées :

$$\Phi_v = \rho_d \frac{\pi}{6} D_n^3 n_s \phi^{NU} (i_{d,l} - i_{c,l}) \cong \rho_d \frac{\pi}{6} D_n^3 n_s \phi^{NU} \mathcal{L}_v \quad (7.40)$$

où l'on retrouve le diamètre et la fréquence de détachement des bulles nucléées et la densité de sites actifs définis précédemment.

- c) Le *flux de conduction instationnaire*, ou *quenching* en anglais, Φ_q correspond au flux de chaleur supplémentaire lié au brassage de la couche limite thermique par les bulles qui se détachent et s'éloignent de la paroi :

$$\Phi_q = \mathcal{A}_q \tau_q \phi^{NU} \frac{2 \lambda_c (\theta_w - \theta_c)}{\sqrt{\pi a_c \tau_q}} \quad (7.41)$$

où a_c désigne la diffusivité thermique du liquide et τ_q désigne le temps d'attente entre le départ d'une bulle et le début de la croissance d'une nouvelle bulle. En supposant la croissance d'une bulle infiniment rapide devant ce temps caractéristique, Kurul et Podowski (1990) prennent $\tau_q \cong 1/\phi^{NU}$.

Ces différentes définitions font apparaître le lien reliant le flux de chaleur pariétal Φ_w et la température de paroi θ_w . Si l'on choisit la température de la paroi comme une condition à la limite, le calcul de Φ_w via la relation (7.37) est direct. Dans le cas contraire où l'on préférerait imposer le flux en paroi, θ_w ne peut être obtenue que par le biais d'une résolution itérative du système composé des relations (7.37) à (7.41), ce qui sera le cas dans nos calculs.

Notons également que, pour les cellules du maillage en contact avec la paroi, le flux de chaleur pariétal est ajouté au second membre de l'équation de bilan d'énergie du liquide (7.11a) par l'intermédiaire de la source de chaleur volumique suivante :

$$\dot{Q}_c = \Phi_w \frac{S_{cel,w}}{V_{cel}}. \quad (7.42)$$

7.3 Conclusion

Les équations de bilan implantées dans NEPTUNE_CFD ainsi que les modèles de turbulence et de nucléation pariétale propre au code de calcul ont été présentés dans ce chapitre.

Le modèle polydisperse a pu être intégré en partie dans le code : les termes sources polydisperses remplacent les expressions monodisperses initialement codées et deux équations de bilans géométriques sont résolues en plus des équations habituelles.

Quelques aménagements ont tout de même dû être effectués pour que notre modèle soit compatible avec la structure du code. Le premier est bien sûr la résolution d'une équation de bilan d'énergie factice pour la phase dispersée qui a entraîné une légère modification des termes sources de masse Γ et Γ_γ . Les autres aménagements de notre modèle polydisperse sont la réécriture des équations de bilan géométriques en fonction d'une nouvelle variable géométrique et la modification des équations de bilan de quantité de mouvement par l'ajout de la force de recul et la suppression du tenseur des contraintes visqueuses de la phase dispersée.

Notons également que l'influence de la polydispersion de vitesse sur le transport des différentes densités de moments géométriques n'a pas été prise en compte, ces dernières étant toutes transportées à la vitesse moyenne de la phase dispersée.

7.4 Références

- GUELF, A., BESTION, D., BOUCKER, M., BOUDIER, P., FILLION, P., GRANDOTTO, M., HERARD, J.-M., HERVIEU, E. et PETURAUD, P. : NEPTUNE: A new software platform for advanced nuclear thermal hydraulics. *Nuclear Science and Engineering*, 156(3):281–324, 2007. ISSN 0029-5639.
- ISHII, M. : *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- KURUL, N. et PODOWSKI, M.Z. : Multidimensional effects in forced-convection subcooled boiling. *Proceedings of the 9th International Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israel – August 19-24, Heat Transfer 1990*, volume 1-7. Hemisphere Publication Corporation, New York, 1990.
- LAVIÉVILLE, J., QUÉMÉRAIS, E., MIMOUNI, S., BOUCKER, M. et MÉCHITOUA, N. : NEPTUNE CFD v1.0 theory manual. Rapport technique HI-81/05/032/P, Nept_2004_L1.2/3/P, EDF, 2006.
- LHUILIER, D., THEOFANOUS, T.G. et M.-S.LIOU : Multiphase flows: Compressible multi-hydrodynamics. CACUCI, D.G., éditeur : *Handbook of Nuclear Engineering*, volume 3, chapitre 25. Springer, 2010.
- MÉCHITOUA, N., BOUCKER, M., LAVIÉVILLE, J., HÉRARD, J.M., PIGNY, S. et SERRE, G. : An unstructured finite volume solver for two phase water/vapour flows based on an elliptic oriented fractional step method. *Proceedings of the 10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10), Seoul, South Korea – October 5-9, 2003*.
- MOREL, C. : *Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1997.
- OESTERLÉ, B. : *Écoulements Multiphasiques – Des fondements aux méthodes d'ingénierie*. Lavoisier. Hermes Science Publication, 2006.

POUVREAU, J. : Formes des lois de fermeture de la version 0.0 de Neptune 3D-local. Rapport technique DTP/SMTH/LMDS/2003-018, Nept_2002_L1.2/6, CEA, 2003.

ÜNAL, H.C. : Maximum bubble diameter, maximum bubble-growth rate during the subcooled nucleate flow boiling of water up to 17.7 MN/m². *International Journal of Multiphase Flow*, 19:643–649, 1976.

YAO, W. et MOREL, C. : Prediction of parameters distribution of upward boiling two-phase flow with two-fluid models. *Proceedings of the 10th International Conference on Nuclear Engineering (ICONE10)*, Hyatt Regency Crystal City, Arlington, VA USA – April 14-18, 2002.

Chapitre 8

Simulation numérique de l'expérience DEBORA

Ce dernier chapitre aborde la simulation de l'expérience DEBORA avec le modèle polydisperse présenté dans les chapitres précédents et implanté dans le code de calcul NEPTUNE_CFD. Une présentation détaillée de l'expérience DEBORA ayant déjà été effectuée au chapitre 5 (*cf.* paragraphe 5.3.1), on ne reviendra pas dessus dans ce chapitre.

La simulation de l'expérience DEBORA *via* les quatre essais déjà retenus précédemment (*cf.* tableau 5.2 page 115) va se dérouler en trois temps. Tout d'abord, on présentera dans la section 8.1 le paramétrage général du modèle numérique. Les différents modèles de fermetures présentés dans les chapitres précédents seront confrontés dans cette première section afin de déterminer la meilleure combinaison de modèles pour la simulation de DEBORA. Les résultats des simulations des quatre essais DEBORA retenus avec notre modèle polydisperse Q2 seront ensuite présentés et analysés dans la section 8.2 ; on pourra alors évaluer la capacité de notre modèle à modéliser les écoulements bouillants sous-saturés. Enfin, dans la section 8.3 seront confrontés le modèle polydisperse Q2, les différents modèles polydisperses implantés auparavant dans le code NEPTUNE ainsi qu'une approche monodispersée. Cette dernière section permettra donc de conclure sur l'apport du modèle Q2.

Notons que ce chapitre ne traitera que la modélisation de la polydispersion en taille avec la loi Q2, la loi C2 n'ayant pas pu être implantée dans le code de calcul par manque de temps. La loi C2 étant en de nombreux points similaire à la loi Q2, son intégration dans le code sera néanmoins assez facile à mener. Les aménagements du code nécessaires à l'implantation de la loi Q2 étant les mêmes que pour la loi C2, il ne reste finalement à coder que les formes des différents modèles de fermetures (forces moyennes, coalescence/fragmentation et taux de changement de phase) et le conditionnement géométrique propres à la loi C2.

Un dernier mot sur la présentation des résultats ; la majorité des planches de résultats sera placée à l'annexe E, et ce afin de ne pas surcharger le présent chapitre.

8.1 Paramétrage du modèle numérique

Cette première section décrit le paramétrage de notre modèle numérique de l'expérience DEBORA. On présentera dans un premier temps le domaine de calcul, ses conditions aux limites et sa discrétisation spatiale, puis, dans un second temps, on confrontera les différents modèles de fermetures présentés dans

les chapitres précédents afin d'en déterminer le jeu le plus représentatif de la physique de l'expérience DEBORA.

8.1.1 Domaine et grilles de calcul

La section d'essai de l'expérience DEBORA (cf. figure 5.2) est modélisée par un simple tube cylindrique vertical. Les écoulements observés dans DEBORA pouvant être considérés comme étant axisymétriques (Manon, 2000 ; Garnier *et al.*, 2001), un domaine *cylindrique bidimensionnel* a été choisi. Les frontières du domaine de calcul sont les suivantes (cf. figure 8.1) :

- axe de la conduite : $r = 0,192 \text{ mm}$;
- paroi latérale de la conduite : $r = 9,6 \text{ mm}$;
- entrée de la conduite : $z = 0$;
- sortie de la conduite : $z = 5 \text{ m}$.

L'abscisse radiale du premier point du domaine ne pouvant être nulle pour des raisons propres au code de calcul, elle a été fixée arbitrairement à $1/50$ du rayon de la conduite.

• Conditions aux limites

Précisons à présent les conditions aux limites du domaine de calcul. Celles-ci sont de cinq types différents (cf. figure 8.1).

Axe de la conduite

Les conditions aux limites sur les différentes grandeurs au niveau de l'axe de la conduite sont une conséquence de l'hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement. Elles consistent en l'annulation des composantes radiales des vitesses des deux phases au niveau de l'axe ; il en va de même pour les dérivées par rapport à la coordonnée radiale des différentes grandeurs.

Entrée de la conduite

Les différentes variables imposées en entrée de la conduite sont détaillées ci-dessous.

- a) Le *taux de présence* des deux phases : le fluide injecté dans DEBORA étant à l'état liquide uniquement, on a logiquement imposé $\alpha_c = 1$ et $\alpha_d = 0$.
- b) La *vitesse* des deux phases : la même vitesse a été appliquée aux deux phases, celle-ci étant supposée purement verticale ; la valeur renseignée a été déduite du débit massique entrant expérimental donné pour chaque essai dans le tableau 5.2 (page 115).
- c) La *température* des deux phases : la température du liquide a été imposée à la température expérimentale (cf. tableau 5.2 page 115), celle de la vapeur étant fixée à la température de saturation.
- d) L'*énergie cinétique turbulente* du liquide : aucune mesure de la turbulence n'est effectuée sur DEBORA, mais, à partir de corrélations empiriques, les expérimentateurs estiment l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse à environ 10 % de la vitesse débitante. En supposant en outre une turbulence isotrope en entrée ($v'_{c,r} = v'_{c,\theta} = v'_{c,z} = v'_c$), on peut évaluer K_c grâce à la relation suivante :

$$K_c \triangleq \frac{1}{2} (v'_{c,r} v'_{c,r} + v'_{c,\theta} v'_{c,\theta} + v'_{c,z} v'_{c,z}) \cong \frac{3}{2} (v'_c)^2 \approx 0,015 V_c^2 \quad (8.1)$$

où V_c désigne la vitesse débitante du liquide imposée à l'entrée de la conduite.

- e) Le *taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente* du liquide : pour la même raison que K_c , ε_c est estimé à l'aide d'une relation approchée :

$$\varepsilon_c \approx \frac{(v'_c)^3}{\Lambda} \quad (8.2)$$

où Λ désigne l'échelle intégrale de la turbulence. Pour un écoulement turbulent en conduite, celle-ci peut être estimée à l'aide d'une relation proposée initialement par Hinze (1959) :

$$\Lambda \approx \kappa R \quad (8.3)$$

où κ désigne la constante de von Kármán ($\kappa = 0,41$) et R le rayon de la conduite. On en déduit que dans l'expérience DEBORA, le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente peut être approché par :

$$\varepsilon_c \approx \frac{(0,1 V_c)^3}{\kappa R} \approx 0,254 V_c^3. \quad (8.4)$$

- f) Les *densités de moments géométriques* : aucune bulle n'étant présente à l'entrée de la conduite, une valeur nulle est imposée en entrée pour les deux densités de moments.

Toutes ces conditions aux limites sont de type Dirichlet.

Sortie de la conduite

Seule la pression du système est imposée en sortie, la valeur choisie étant bien sûr celle de l'essai expérimental simulé (cf. tableau 5.2 page 115).

Paroi adiabatique

Les sections non chauffées de la paroi sont supposées adiabatiques : un flux de chaleur nul y est donc imposé (condition à la limite de type Neumann).

Les parois étant en outre supposées imperméables, les composantes normales à la paroi des vitesses liquide et gaz sont également annulées. Les composantes tangentielles des vitesses sont quant à elles renseignées par une loi de paroi.

Paroi chauffante

En plus des conditions sur les vitesses décrites dans le paragraphe précédent, un flux de chaleur est imposé sur cette section de la paroi (condition à la limite de type Neumann), la valeur renseignée étant celle indiquée dans le tableau 5.2 (page 115).

Temps physique simulé

Le code NEPTUNE_CFD est un code de calcul instationnaire ; la solution stationnaire de l'écoulement est donc atteinte à l'issue d'une phase de calcul transitoire. Par ailleurs, le flux de chaleur en paroi nécessite d'être imposé progressivement au début du calcul afin d'éviter un changement trop brusque des conditions initiales et garantir ainsi la convergence du calcul.

Après quelques tests, il a été décidé de simuler 20 s de temps physique dont 5 s sont dédiées à l'application progressive du flux de chaleur en paroi, ce jeu de paramètres permettant d'atteindre l'état stationnaire pour les différents écoulements simulés.

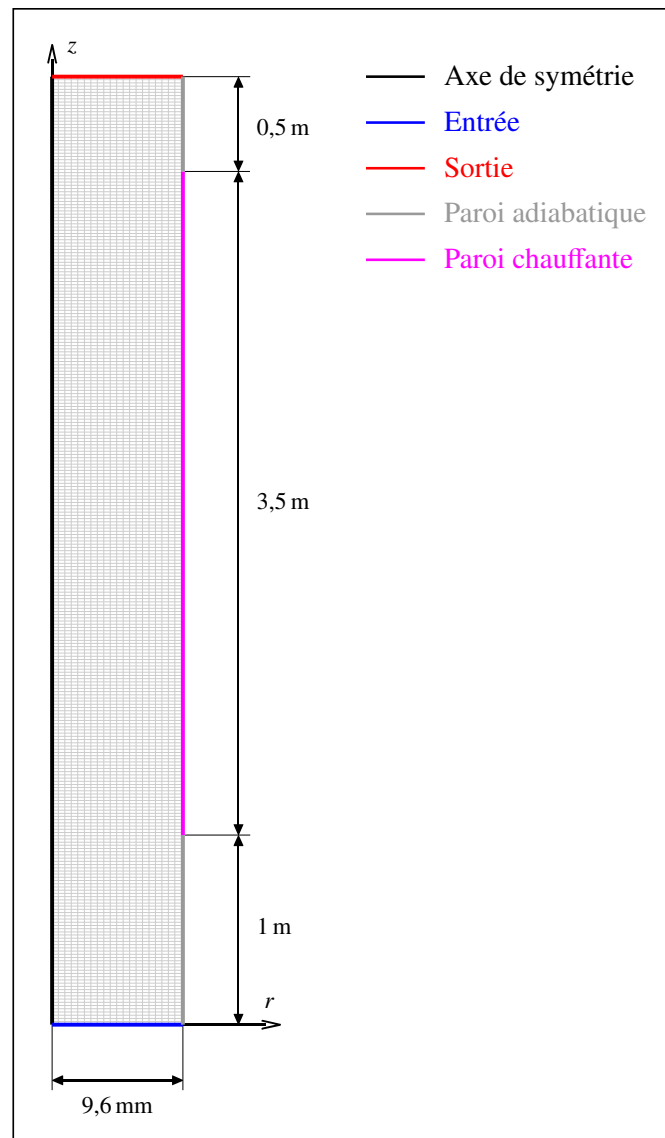


FIG. 8.1 – Schématisation de la grille de calcul et des différents types de conditions aux limites

Nom	Nombre de cellules			Dimensions d'une cellule		Facteur de forme
	selon r	selon z	total	Δr (mm)	Δz (mm)	
Maillage 1	10	80	800	0,9408	62,5	66,4
Maillage 2	20	400	8000	0,4704	12,5	26,6
Maillage 3	30	800	24000	0,3136	6,25	19,9
Maillage 4	40	1600	64000	0,2352	3,125	13,3

TAB. 8.1 – Caractéristiques géométriques des différents maillages utilisés.

• Discrétisation spatiale du domaine de calcul

Le domaine de calcul a été discrétisé selon une grille structurée d'éléments rectangulaires. Différents raffinements ont été réalisés ; les caractéristiques géométriques des différents maillages sont données dans le tableau 8.1.

Un des premiers tests à effectuer est la sensibilité en maillage du modèle numérique. Les quatre maillages décrits dans le tableau 8.1 ont ainsi été confrontés à un même calcul de référence dont le paramétrage est donné ci-dessous.

- Essai : DEBORA 1
- Maillage : Maillage 1 / Maillage 2 / Maillage 3 / Maillage 4
- PDF : loi Q2
- Forces moyennes :
 - traînée : C_{Q2}^D , modèle d'Ishii et Hibiki (2006)
 - portance : C_{Q2}^L , modèle de Tomiyama (1998)
 - masse ajoutée : C_{**}^{VM} , modèle de Zuber (1964)
 - paroi : non
 - dispersion turbulente : $C^{TD} = 1$
- Coalescence et fragmentation :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001)
 - fragmentation homogène : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,65$
- Changement de phase : corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

Notons que l'on ne prendra pas en compte la force de paroi dans nos différents calculs, cette force ne semblant pas applicable aux écoulements présentant de la nucléation en paroi.¹

La figure 8.2 regroupe les résultats obtenus avec les quatre maillages sur les profils radiaux des quatre grandeurs suivantes :

- a) le taux de vide α_d ;
- b) l'aire interfaciale a_I ;
- c) la composante axiale de la vitesse moyenne du gaz V_d ;
- d) la température moyenne du mélange diphasique $\theta_m \hat{=} \alpha_d \theta_d + (1 - \alpha_d) \theta_c$.

Les profils radiaux ont été relevés en fin de section chauffée, c'est-à-dire au même endroit que les données expérimentales ($z = 4,485$ m).

Mis à part le premier maillage qui semble vraiment trop grossier, les trois autres maillages semblent converger vers une même solution. Si la convergence semble atteinte avec le Maillage 2 sur le taux de vide et la vitesse moyenne du gaz, il en va autrement pour l'aire interfaciale à proximité de la paroi. *Ce problème connu par les développeurs du code NEPTUNE_CFD a été attribué au modèle de nucléation en paroi.* On remarquera également que les résultats sur la température du mélange diphasique convergent également plus difficilement au niveau de l'axe du tube ; l'écart entre les résultats du Maillage 2 et ceux du Maillage 4 n'est cependant que de $0,3^\circ\text{C}$ au maximum.

À la vue des temps CPU² des différents calculs (*cf.* tableau 8.2), on utilisera le Maillage 2 pour le paramétrage des fermetures de notre modèle polydisperse, ce maillage représentant le meilleur compromis

1. Comme énoncé au chapitre 3, l'existence de cette force est liée au drainage du film liquide entre une bulle et la paroi. Si des bulles sont nucléées à la paroi, la configuration de l'écoulement et la physique sous-jacente sont bien différentes des hypothèses qui ont permis à Antal *et al.* (1991) d'établir l'expression de la force de paroi.

DEBORA – Essai 1

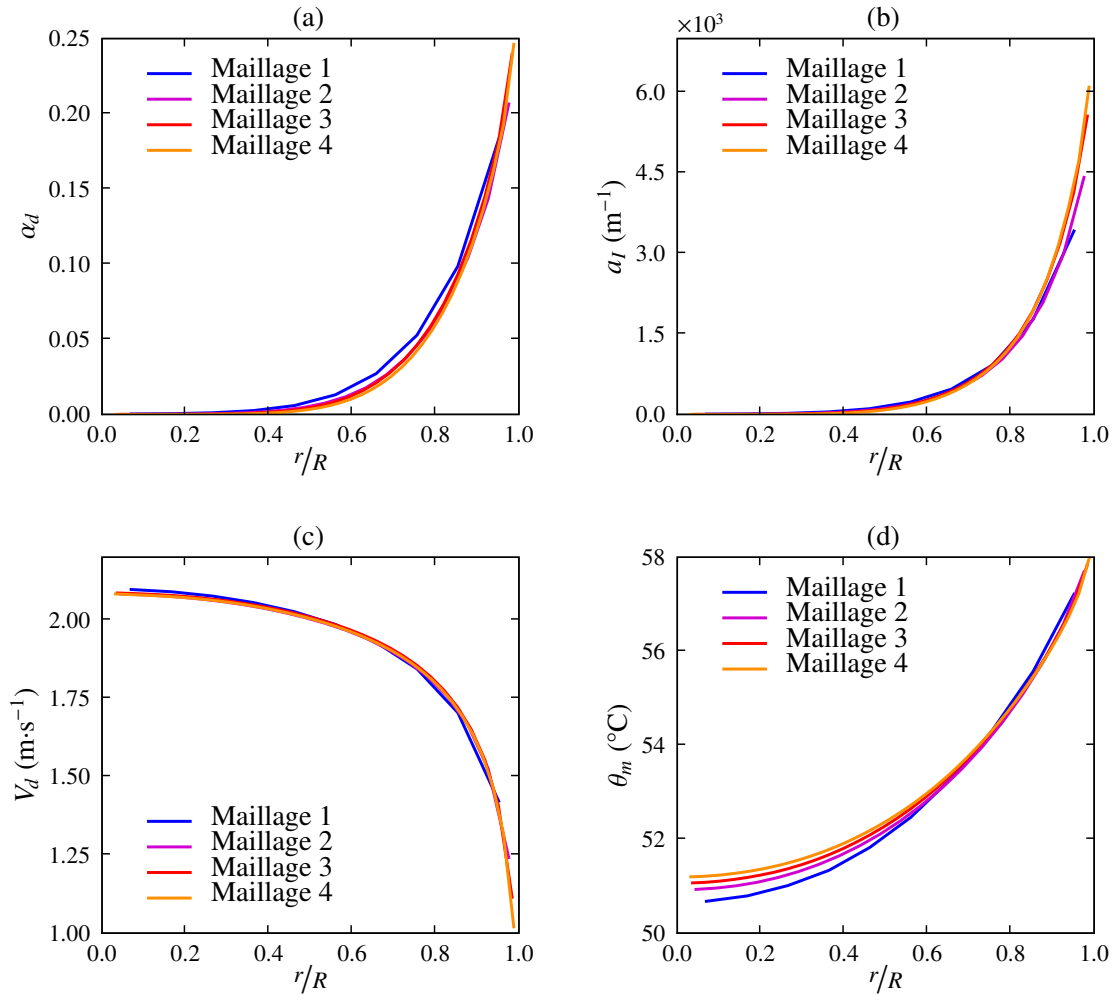


FIG. 8.2 – Test de sensibilité en maillage du modèle numérique de DEBORA ; les caractéristiques des maillages utilisés sont données dans le tableau 8.1.

Maillage	Nombre de cellules			Nombre de processeurs	Temps CPU
	selon r	selon z	total		
1	10	80	800	4	2 min 41 s
2	20	400	8000	4	48 min 47 s
3	30	800	24000	4	4 h 45 min 59 s
4	40	1600	64000	4	22 h 58 min 43 s

TAB. 8.2 – Temps CPU des calculs effectués pour le test de sensibilité en maillage.

entre précision des résultats et rapidité du calcul. On supposera donc que ce maillage sera suffisamment précis pour capter les grandes tendances nécessaires au choix des différents modèles de fermetures. Le Maillage 3 sera quant à lui utilisé dans la prochaine section lorsqu'une solution plus précise sera recherchée.

8.1.2 Choix des modèles de fermeture du modèle polydisperse Q2

Le paramétrage numérique du modèle étant effectué, nous allons à présent nous intéresser au paramétrage physique de notre modèle et chercher à déterminer le jeu de modèle de fermetures le plus représentatif de la physique de l'expérience DEBORA.

Deux familles de fermetures vont être explorées dans ce paragraphe : les différents modèles de coalescence et de fragmentation présentés au chapitre 4, ainsi que les différentes corrélations du nombre de Nusselt vues au chapitre 5.

• Modèles de coalescence et de fragmentation

Intéressons-nous à la modélisation des phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles ; les différents modèles présentés au chapitre 4, à savoir deux modèles de coalescence et trois modèles de fragmentation, vont à présent être testés et confrontés à l'expérience DEBORA. Les acronymes suivants seront utilisés sur les différents graphiques à venir pour désigner les différentes combinaisons de modèles possibles :

- PB+LS :
 - coalescence : modèle de Prince et Blanch (1990) ;
 - fragmentation : modèle de Luo et Svendsen (1996) ;
- K+LS :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001) ;
 - fragmentation : modèle de Luo et Svendsen (1996) ;
- PB+PB65 :
 - coalescence : modèle de Prince et Blanch (1990) ;
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,65$;
- K+PB65 :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001) ;
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,65$;
- PB+PB79 :
 - coalescence : modèle de Prince et Blanch (1990) ;
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$;
- K+PB79 :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001) ;
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$.

Pour confronter ces différents modèles à l'expérience, nous allons nous tourner vers l'essai DEBORA 4 (*cf.* tableau 5.2 page 115). Parmi les quatre essais retenus pour cette étude, cet essai présente la plus faible sous-saturation du liquide au centre de la conduite (Garnier *et al.*, 2001) ; le changement de phase y est

2. Le *temps CPU*, de l'anglais *Central Processing Unit*, désigne le temps mis par l'outil de calcul pour effectuer une simulation ; il constitue ainsi une indication du coût de la simulation.

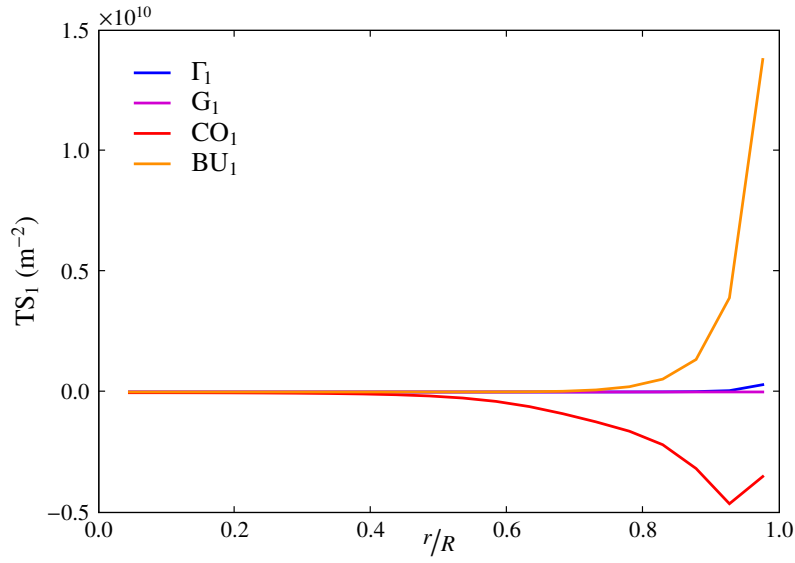


FIG. 8.3 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_1$ pour l'essai DEBORA 4. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,65$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

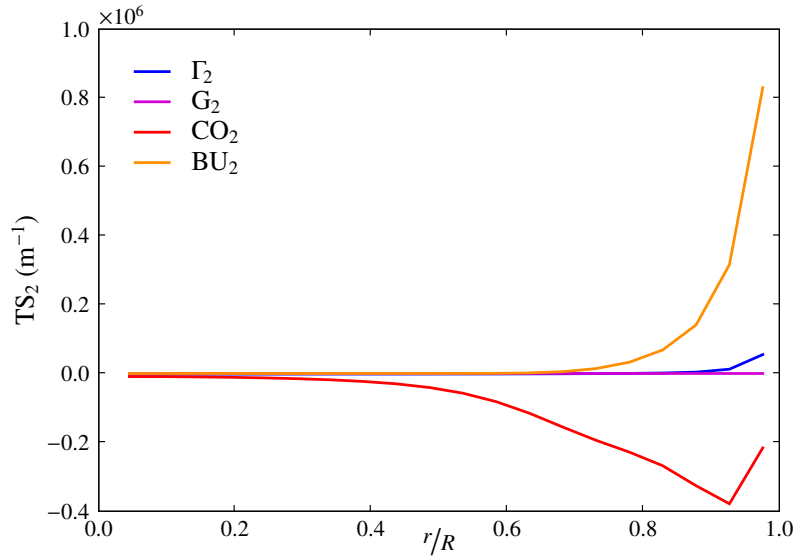


FIG. 8.4 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour l'essai DEBORA 4. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,65$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

donc supposé être largement dominé par les phénomènes de coalescence et de fragmentation. Cette assertion est confirmée par les figures 8.3 et 8.4³ représentant l'évolution radiale en fin de section chauffée des quatre termes sources des équations de bilan sur les densités de moments d'ordre 1 et 2 (cf. équation 7.17) : on y voit clairement que le changement de phase joue un rôle mineur. Le paramétrage du modèle numérique utilisé pour ce test des modèles de coalescence et de fragmentation est le suivant :

- Essai : DEBORA 4
- Maillage : Maillage 2
- PDF : loi Q2
- Forces moyennes :
 - traînée : C_{Q2}^D , modèle d'Ishii et Hibiki (2006)
 - portance : C_{Q2}^L , modèle de Tomiyama (1998)
 - masse ajoutée : C_{**}^{VM} , modèle de Zuber (1964)
 - paroi : non
 - dispersion turbulente : $C^{TD} = 1$
- Coalescence et fragmentation :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001) / modèle de Prince et Blanch (1990)
 - fragmentation : modèle de Luo et Svendsen (1996) / modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,65$ / modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$
- Changement de phase : corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

Comparaison des termes sources de coalescence et de fragmentation

La figure 8.5 montre l'évolution radiale en fin de section chauffée du terme source BU_2 obtenu avec les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation. Cette figure met en évidence le fait que, quelque soit le jeu de modèles utilisé, la fragmentation de bulles est localisée uniquement à proximité de la paroi (à partir de $r/R = 0,8$), suivant ainsi le profil du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (cf. figure 8.7).

Globalement, le modèle de Luo et Svendsen (1996) modélise moins d'événements de fragmentation que les deux autres modèles, excepté dans la zone proche de la paroi où le modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$ est celui autorisant le moins d'événements de fragmentation. On remarquera également que le terme source de fragmentation est peu dépendant du modèle de coalescence associé.

La figure 8.6 donne quant à elle l'évolution radiale en fin de section chauffée des différents termes sources CO_2 . Cette figure montre que le terme source de coalescence dépend assez fortement du modèle de fragmentation choisi. Cela peut être expliqué par l'augmentation de la densité numérique de bulles due à la fragmentation qui augmente la probabilité des collisions entre bulles et donc celle des phénomènes de coalescence.

Il apparaît également sur cette figure que l'intensité du terme source de coalescence décroît au voisinage de la paroi, une trop forte turbulence du liquide ne permettant pas aux bulles de rester en contact suffisamment longtemps pour coalescer. Le modèle de Kamp *et al.* (2001) montre d'ailleurs une plus grande sensibilité à ce phénomène que le modèle de Prince et Blanch (1990).

Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Intéressons-nous à présent aux résultats obtenus avec les différents modèles de coalescence et de fragmentation sur les grandeurs principales de l'écoulement que sont :

3. Sur ces figures, G_1 et G_2 désignent les termes sources de compressibilité du gaz, c'est-à-dire le deuxième terme du second membre de (7.17).

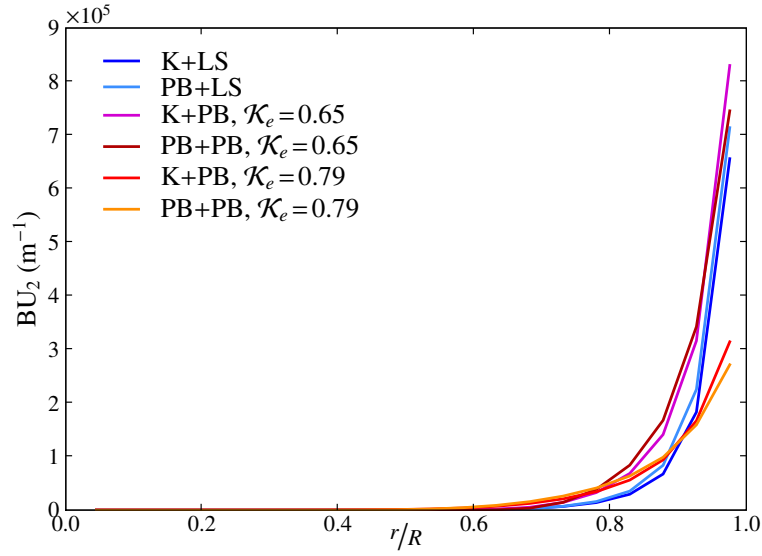


FIG. 8.5 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) du terme source de fragmentation de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.

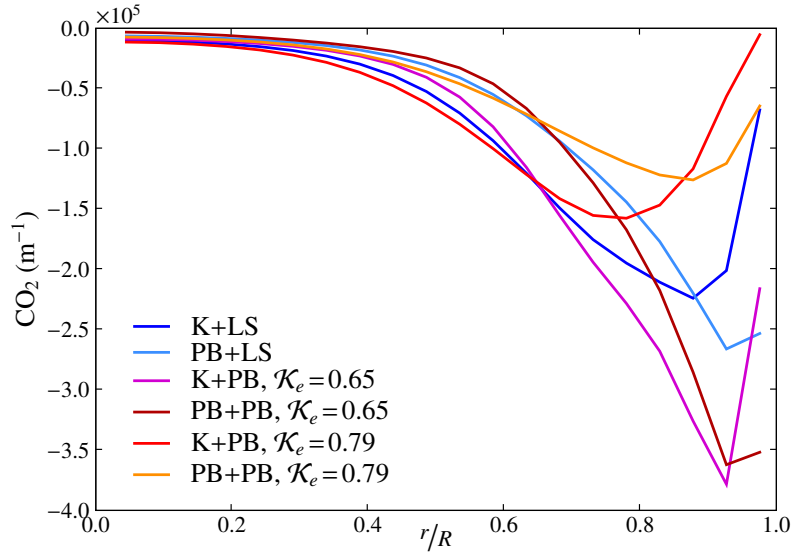


FIG. 8.6 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) du terme source de coalescence de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.

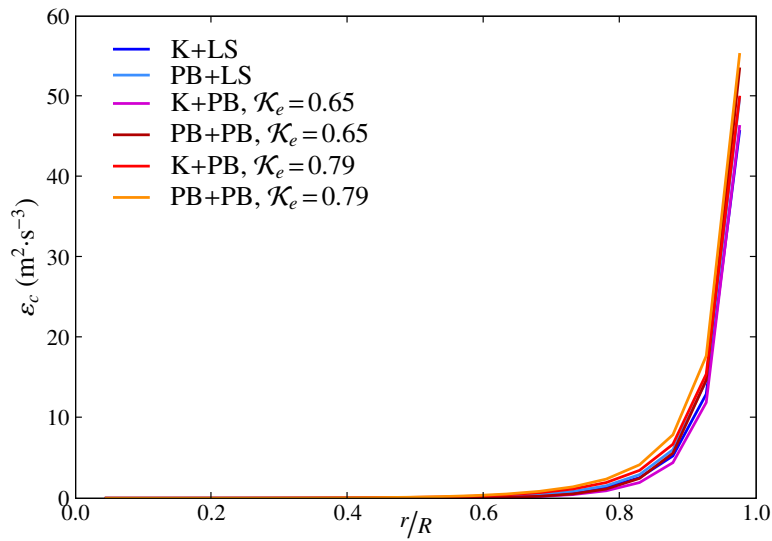


FIG. 8.7 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour les différentes combinaisons de modèles de coalescence et de fragmentation.

- a) le taux de vide α_d ;
- b) l'aire interfaciale a_I ;
- c) la composante axiale de la vitesse moyenne du gaz V_d ;
- d) la température moyenne du mélange diphasique $\theta_m \hat{=} \alpha_d \theta_d + (1 - \alpha_d) \theta_c$.
- e) le diamètre de Sauter d_{32} ;
- f) les paramètres de la loi Q2 d_{10} et $\tilde{\sigma}$;

Les résultats obtenus avec NEPTUNE_CFD sont confrontés aux résultats expérimentaux sur les figures E.1 à E.4 (pages 202 à 205).

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux sur les figures E.1 à E.3 montre que le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001) donne de meilleurs résultats que le modèle de Prince et Blanch (1990) sur le profil radial du taux de vide et surtout sur celui du diamètre de Sauter ; ce dernier est en effet systématiquement et fortement sous-évalué avec le modèle de coalescence de Prince et Blanch (1990). La température du mélange est systématiquement surévaluée quelque soit le jeu de modèles utilisé, cette tendance étant légèrement moins accentuée avec le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001).

La figure E.4 montre quant à elle que les résultats les moins bons sur α_d et a_I sont obtenus en prenant le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) et $\mathcal{K}_e = 0,65$. Les modèles de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) et Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$ donnent des résultats similaires, l'aire interfaciale étant toutefois mieux évaluée près de la paroi avec le deuxième modèle.

Finalement, à la vue de toutes ces observations, *on choisira dans la suite de cette étude de modéliser la coalescence avec le modèle de Kamp et al. (2001) et la fragmentation avec le modèle de Prince et Blanch (1990) en prenant $\mathcal{K}_e = 0,79$.*

• Corrélation du nombre de Nusselt

Ce paragraphe s'intéresse à la fermeture du flux de chaleur moyen entre les interfaces et le liquide et donc du taux de changement de phase hors nucléation. Nous avons vu au chapitre 5 que ce flux moyen était

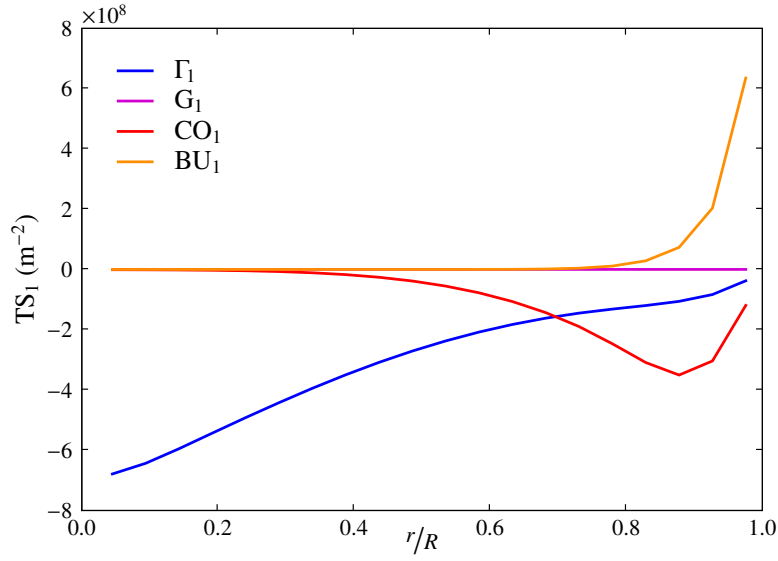


FIG. 8.8 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_1$ pour l'essai DEBORA 1. Résultats obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,79$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

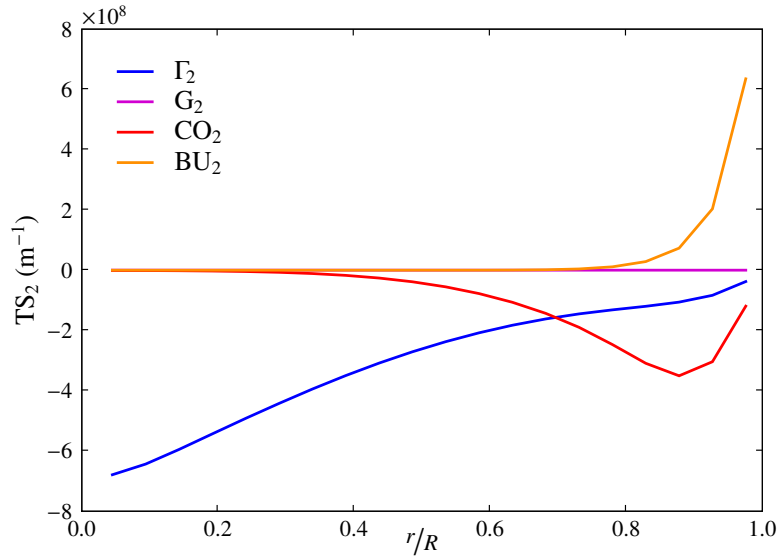


FIG. 8.9 – Évolution radiale ($z=4,485$ m) des différents termes sources de l'équation de bilan sur $\mathcal{M}_2$ pour l'essai DEBORA 1. Résultats obtenus avec la modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001), le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e=0,79$) et la corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b).

modélisé en faisant intervenir un nombre de Nusselt renseigné à l'aide d'une corrélation empirique ou analytique. Quatre corrélations ont été proposées précédemment (*cf.* tableau 5.1 page 109) ; nous allons à présent chercher à déterminer laquelle de ces quatre corrélations est la plus représentative du changement de phase dans DEBORA.

Pour confronter les différentes corrélations à l'expérience, nous allons nous tourner vers l'essai DEBORA 1 (*cf.* tableau 5.2 page 115), qui, parmi les quatre essais retenus pour cette étude, présente la plus forte sous-saturation du liquide au centre de la conduite (Garnier *et al.*, 2001) et donc l'essai où la condensation est *a priori* la plus significative. Les figures 8.8 et 8.9, représentant l'évolution radiale des quatre termes sources de l'équation de bilan sur les densités de moments 1 et 2, montrent en effet que le changement de phase domine largement les phénomènes de coalescence et de fragmentation au centre de la conduite (de $r/R=0$ à $r/R=0.5$).

Le paramétrage du modèle numérique utilisé pour ce test des corrélations de Nusselt est le suivant :

- Essai : DEBORA 1
- Maillage : Maillage 2
- PDF : loi Q2
- Forces moyennes :
 - traînée : C_{Q2}^D , modèle d'Ishii et Hibiki (2006)
 - portance : C_{Q2}^L , modèle de Tomiyama (1998)
 - masse ajoutée : C_{**}^{VM} , modèle de Zuber (1964)
 - paroi : non
 - dispersion turbulente : $C^{TD} = 1$
- Coalescence et fragmentation :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001)
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$
- Changement de phase : corrélations de Ranz et Marshall (1952a,b) / Rückenstein (1959) / Akiyama (1973) / Chen et Mayinger (1992).

Les résultats obtenus avec les quatre corrélations sur les grandeurs principales de l'écoulement sont confrontés aux résultats expérimentaux sur la figure E.5. Les différentes corrélations y sont désignées par les acronymes suivants :

- RM52 : corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b) ;
- R59 : corrélation de Rückenstein (1959) ;
- A73 : corrélation de Akiyama (1973) ;
- CM92 : corrélation de Chen et Mayinger (1992).

Comme on peut le voir sur cette figure, les données expérimentales ne couvrent pas tout le rayon de la conduite, trop peu de gaz étant présent dans le cœur de l'écoulement pour en permettre la mesure. Le modèle numérique présente pour sa part un bon comportement dans cette zone où la vapeur est résiduelle, les résultats numériques extrapolant les résultats expérimentaux manquants de façon satisfaisante.

Concernant les différentes corrélations de Nusselt testées, la première observation que l'on peut tirer de la figure E.5 (page 206) est que les corrélations de Ranz et Marshall (1952a,b), d'Akiyama (1973) et de Chen et Mayinger (1992) donnent des résultats similaires sur les grandeurs α_d , a_I , V_d et θ_m . Avec ces trois corrélations, Le taux de vide est correctement prédit, mais l'aire interfaciale est surestimée. À l'opposé, la corrélation de Rückenstein (1959) prédit correctement l'aire interfaciale mais pas le taux de vide qu'elle sous-estime.

Cette divergence des résultats numériques et expérimentaux, soit sur a_I , soit sur α_d , font que le diamètre de Sauter est largement sous-estimé par les quatre corrélations.⁴ La valeur près de la paroi est cependant correctement prédite ce qui laisse supposer que la nucléation est correctement traitée.

En ce qui concerne la température du mélange diphasique et celle de la paroi (figure E.5(d)), elles sont correctement prédites quelle que soit la corrélation de Nusselt utilisée : θ_m est surestimée d'environ 1 °C, soit environ 2 %, et θ_w est surestimée d'environ 3,5 °C, soit environ 6 %.

Finalement, on ne retiendra pas la corrélation de Ruckenstein (1959), en raison de sa tendance à sous-estimer α_d . Les résultats étant similaires pour les trois autres corrélations, *notre choix se portera sur la corrélation de Chen et Mayinger (1992) pour la suite de cette étude*, son domaine de validité et son champ d'application étant plus en adéquation avec l'expérience DEBORA que ceux des corrélations de Ranz et Marshall (1952a,b) et d'Akiyama (1973) (cf. tableau 5.1 page 109).

8.2 Simulation et analyse des différents essais DEBORA

Dans cette section, les quatre essais DEBORA retenus précédemment (cf. tableau 5.2 page 115) vont être simulés afin de tester la capacité de notre modèle polydisperse à représenter les écoulements bouillants sous-saturés.

Le paramétrage du modèle numérique utilisé dans cette section est le suivant :

- Essai : DEBORA 1 / DEBORA 2 / DEBORA 3 / DEBORA 4
- Maillage : Maillage 3
- PDF : loi Q2
- Forces moyennes :
 - traînée : C_{Q2}^D , modèle d'Ishii et Hibiki (2006)
 - portance : C_{Q2}^L , modèle de Tomiyama (1998)
 - masse ajoutée : C_{**}^{VM} , modèle de Zuber (1964)
 - paroi : non
 - dispersion turbulente : $C^{TD} = 1$
- Coalescence et fragmentation :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001)
 - fragmentation : modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$
- Changement de phase : corrélation de Chen et Mayinger (1992).

Avant de passer à une analyse plus détaillée des différents résultats, vérifions tout d'abord la validité de notre hypothèse de haut Reynolds ($0,1 \text{ Re}_b(d)^{3/4} \gg 1$), hypothèse formulée au chapitre 3 pour simplifier l'expression de la vitesse relative de bulle du premier régime de traînée (cf. section 3.2.1). Cette vitesse relative intervenant également dans le taux de changement de phase moyen *via* le nombre de Nusselt, elle est de toute première importance. La figure 8.10 montre l'évolution radiale du nombre de Reynolds moyen⁵ pour les quatre essais simulés ; la zone hachurée correspondant à la gamme de nombres de Reynolds non autorisée par notre hypothèse de haut Reynolds, on voit que *l'hypothèse de haut Reynolds est respectée pour les quatre essais*.

4. On rappelle que le diamètre de Sauter est donné par la relation $d_{32} = \frac{6\alpha_d}{a_I}$.

5. Le nombre de Reynolds moyen est ici défini par la relation $\text{Re}_{10} \triangleq \frac{\|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| d_{10}}{\nu_c}$

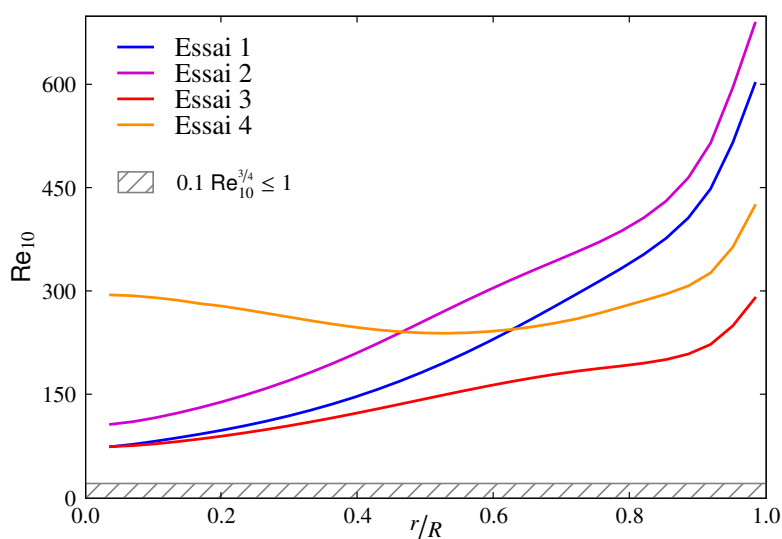


FIG. 8.10 – Nombre de Reynolds moyen obtenu pour les différents essais en fin de longueur chauffée ($z=4,485$ m).

8.2.1 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Les résultats des différents calculs sur α_d , a_I , V_d , θ_m , θ_w et d_{32} sont comparés aux résultats expérimentaux sur les figures E.6 (page 207), E.8 (page 209), E.10 (page 211) et E.12 (page 213). On rappelle que les différents profils sont relevés en fin de longueur chauffée ($z=4,485$ m).

Une comparaison des résultats obtenus sur les quatre essais montre que la vitesse moyenne de la vapeur est assez bien prédite pour les quatre essais : si le profil radial expérimental n'est pas retrouvé avec précision, le profil de vitesse obtenu par la simulation reste dans la zone d'incertitude des résultats expérimentaux.

La température du mélange est quant à elle systématiquement surévaluée d'environ 1 ou 2 °C et la température de paroi l'est d'environ 4 ou 5 °C. Ces écarts peuvent être mis sur le compte d'incertitudes portant sur les propriétés thermophysiques du fréon R-12 sous-saturé, les tables donnant ces propriétés implantées dans le code de calcul résultant d'extrapolations en liquide sous-saturé.

Une autre tendance qui se dégage des calculs des quatre essais est qu'il semble assez difficile de retrouver à la fois un bon profil de taux de vide et un bon profil d'aire interfaciale. Cette divergence résulte en une mauvaise estimation du diamètre de Sauter, toujours sous-évalué, excepté peut-être pour l'essai 4 où la concordance simulation/expérience est un peu meilleure. Concernant α_d et a_I , les mêmes tendances sont retrouvées pour les essais 1 et 4, à savoir un taux de vide globalement correctement prédit, mais surestimé près de la paroi et une aire interfaciale largement surestimée sur tout le profil radial. L'aire interfaciale est en revanche assez bien prédite pour l'essai 2, mais le taux de vide y est sous-estimé sur la majorité du profil. Notons également que la décroissance du taux de vide près de la paroi n'est pas retrouvée par la simulation. Enfin, en ce qui concerne l'essai 3, le taux de vide et l'aire interfaciale sont largement surestimés (de plus d'un facteur 2). La surestimation globale du taux de vide pour cet essai laisse entendre, soit une production de vapeur trop importante et donc un mauvais comportement du modèle de nucléation, soit une condensation pas assez importante et une corrélation de Nusselt peu adaptée à l'essai. Remarquons toutefois que pour cet essai le rapport de α_d et a_I donne une meilleure approximation du diamètre de Sauter que pour les essais 1 et 2.

Les figures E.7 (page 208), E.9 (page 210), E.11 (page 212) et E.13 (page 214) montrent l'évolution radiale à l'altitude $z = 4,485$ m des fonctions de distribution en taille des bulles pour les différents essais DEBORA calculés. Comme le laissait présager la large sous-estimation du diamètre de Sauter pour les essais 1 et 2, le diamètre maximal des bulles obtenu par la simulation est lui aussi largement sous-estimé, tout comme l'écart type de la fonction de distribution. L'évolution radiale globale de la fonction de distribution semble néanmoins retrouvée par la simulation : l'écart type de la PDF étant moindre au centre de la conduite et à proximité de la paroi. La correspondance entre les PDF numériques et expérimentales est bien meilleure pour les essais 3 et 4, même si le diamètre maximal est systématiquement sous-estimé par la simulation.

8.2.2 Évolution axiale de l'écoulement

On se propose à présent de s'intéresser à ce qui se passe en amont de la section de mesure expérimentale, données uniquement accessibles par la simulation. Aussi, en plus du profil correspondant à la section de mesure expérimentale ($z = 4,485$ m), trois autres profils radiaux ont été extraits des résultats de la simulation. Ces derniers ont été pris en $z = 4$ m, $z = 3$ m et $z = 2$ m.⁶

Les différents profils obtenus pour α_d , a_I , V_d , θ_c , θ_w , d_{32} ainsi que pour d_{10} et $\tilde{\sigma}$ sont donnés sur les figures E.14 (page 215), E.16 (page 217), E.18 (page 219) et E.20 (page 221) pour les quatre essais DEBORA simulés. Logiquement, le taux de vide et l'aire interfaciale, et donc le nombre de bulles dans la conduite, augmentent avec la position axiale dans la conduite. Il en va de même pour la température du liquide, celui-ci se réchauffant progressivement le long de la section chauffée. La température de paroi n'évolue par contre que très peu : une augmentation maximum de 2 °C est observée entre notre position la plus basse et la section de mesure pour l'essai 1.

Notons qu'en vapeur résiduelle, le profil de la vitesse moyenne V_d présente des singularités. Ces singularités sont dues à une explosion fictive du diamètre de Sauter lorsque α_d et a_I tendent simultanément vers 0. Le diamètre d_{32} intervenant notamment dans les expressions des forces moyennes, il influe sur le bilan moyen de quantité de mouvement et donc V_d .

Concernant les diamètres moyens, on remarque que d_{32} comme d_{10} tendent vers une même valeur en paroi, caractérisant ainsi la monodispersion des bulles nucléées. Cela est également confirmé par les figures E.15 (page 216), E.17 (page 218), E.19 (page 220) et E.21 (page 222) montrant l'évolution spatiale de la fonction de distribution en taille des bulles. La fonction de distribution part d'une distribution à écart type réduit autour du diamètre de nucléation au bas de la colonne, l'écart type augmentant ensuite à proximité de la paroi avec l'altitude, sans doute à cause des phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles (on a vu que ces phénomènes étaient surtout localisés à proximité de la paroi). Radialement, l'écart type et le diamètre moyen augmentent en s'éloignant de la paroi avant éventuellement de diminuer si la condensation est assez forte pour le permettre.

Il apparaît également sur ces différentes figures que la loi Q2 a souvent tendance à se confondre avec une loi Q1, autrement dit à avoir un diamètre minimal nul. La présence de condensation y est sans doute pour beaucoup, ce phénomène faisant forcément tendre le diamètre minimal des bulles vers un diamètre nul. L'intérêt de la loi Q2 est surtout visible au bas de la colonne où le diamètre minimal n'est pas toujours nul et surtout sur l'essai 3 (cf. figure E.19 page 220) qui illustre bien la capacité de la loi Q2 à dégénérer vers une distribution monodisperse quelconque.

6. On rappelle que le début de la section chauffée est situé à l'altitude $z = 1$ m.

8.3 Comparaison du modèle polydisperse Q2 aux autres modèles implantés dans NEPTUNE_CFD

Cette dernière section a pour objectif d'évaluer le modèle polydisperse Q2 par rapport à d'autres modèles déjà implantés dans NEPTUNE_CFD. Les différents modèles qui seront confrontés au modèle Q2 sont les suivants.

Modèle polydisperse à deux équations de densités de moments de Morel et Laviéville (2009)

- PDF : loi log-normale (LN)
- Forces moyennes : forces exprimées en fonction du diamètre de Sauter
- Coalescence et fragmentation :
 - coalescence : modèle de Kamp *et al.* (2001)
 - fragmentation : non prise en compte, incompatible avec la loi log-normale
- Changement de phase :
 - corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b)
 - prise en compte de la dépendance en diamètre de la vitesse relative de bulles dans le nombre de Nusselt.

Modèle polydisperse à une équation d'aire interfaciale de Ruyer et Seiler (2009)

- PDF : loi quadratique à un paramètre (Q1)
- Forces moyennes : forces moyennes polydisperses
- Coalescence et fragmentation : modèles propres (*cf.* Ruyer et Seiler, 2009)
- Changement de phase :
 - corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b)
 - pas de prise en compte de la dépendance en diamètre de la vitesse relative de bulles dans le nombre de Nusselt.

Modèle monodisperse à une équation d'aire interfaciale de Yao et Morel (2004)

- PDF : distribution de Dirac centrée sur le diamètre de Sauter
- Forces moyennes : forces exprimées en fonction du diamètre de Sauter
- Coalescence et fragmentation : modèles propres (*cf.* Yao et Morel, 2004)
- Changement de phase :
 - corrélation de Ranz et Marshall (1952a,b)
 - pas de prise en compte de la dépendance en diamètre de la vitesse relative de bulles dans le nombre de Nusselt.

Les différents modèles comparés n'auront donc pas tout à fait les mêmes fermetures. Le paramétrage du modèle polydisperse Q2 sera celui utilisé à la section 8.2, les différents calculs étant effectués avec le Maillage 2 (*cf.* tableau 8.1).

La comparaison des trois modèles polydisperses est donnée sur les figures E.22 à E.25 (pages 223 à 226). La différence entre les trois modèles est particulièrement visible sur l'essai 4 (figure E.25), autrement dit l'essai le plus sensible aux modèles de coalescence et de fragmentation. L'absence de modèle de fragmentation dans le modèle polydisperse LN résulte logiquement en une surestimation assez importante de la taille des bulles et donc une sous-estimation de l'aire interfaciale. Le modèle polydisperse Q1 sous-estime également l'aire interfaciale en paroi, mais de façon moins importante que le modèle LN.

Concernant le taux de vide, il semble mieux prédit par le modèle polydisperse Q2, tout comme la température du mélange diphasique. Un dernier mot sur les diamètres moyens d_{32} et d_{20} , ceux-ci semblent en revanche mieux estimés par le modèle LN, bien que la meilleure valeur en paroi soit obtenue avec le modèle Q2.

En ce qui concerne les trois autres essais DEBORA simulés, les mêmes tendances y sont retrouvées, à savoir un comportement similaire des modèles polydisperses Q1 et Q2 et un modèle polydisperse LN prédisant mieux les diamètres moyens mais pas forcément les autres grandeurs moyennes de l'écoulement. Tous ces calculs ne permettent malheureusement pas de tirer de conclusion claire : aucun modèle polydisperse n'émerge comme étant le modèle donnant les meilleurs résultats sur toutes les grandeurs de tous les essais. Si le modèle Q2 ne donne pas toujours les meilleurs résultats, il apparaît comme étant un modèle polydisperse assez polyvalent sur les différents essais simulés.

Les figures E.26 à E.29 (pages 227 à 230) permettent de comparer le modèle polydisperse Q2 et le modèle monodisperse à une équation d'aire interfaciale implanté dans NEPTUNE_CFD. Il apparaît clairement que le modèle Q2 donne de meilleurs résultats que le modèle monodisperse, et ce pour les six grandeurs comparées sur les essais 1,2 et 3. L'essai 3 fait figure d'exception, les résultats sur les profils de taux de vide et d'aire interfaciale étant moins mauvais avec l'approche monodisperse.

Si le modèle polydisperse semble globalement améliorer la qualité des résultats numériques par rapport à l'approche monodisperse de Yao et Morel (2004), on rappelle néanmoins que les modèles de fermetures des deux approches diffèrent quelque peu. Une conclusion définitive sur l'apport de notre approche polydisperse par rapport à une approche monodisperse *équivalente* ne peut donc être tirée.

8.4 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs essais DEBORA ont été simulés à l'aide du modèle polydisperse développé dans ce document et implanté dans le code NEPTUNE_CFD. Dans un premier temps, le paramétrage du modèle numérique aura permis de choisir desquels entre les différents modèles de fermeture proposés dans les précédents chapitres apparaissait comme les plus adaptés à la physique des écoulements sous-saturés observés dans l'expérience DEBORA.

Trois modèles de fragmentation ont ainsi été testés, notre choix s'est porté sur le modèle de Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$. Bien que plus élaboré du point de vue de la physique puisqu'il prend en compte la caractère hétérogène du processus, le modèle de Luo et Svendsen (1996) n'a pas été retenu ici. Ce modèle donne des résultats similaires au modèle de Prince et Blanch (1990) finalement retenu, mais il semble engendrer trop de fragmentation près de la paroi. Il faut dire que la constante $\mathcal{K}_{LS}$ intervenant dans le modèle de Luo et Svendsen (1996) a été ajustée sur les paramètres de DEBORA de façon quelque peu grossière et nécessiterait sans doute quelques ajustements. Le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001) a pour sa part montré de meilleures performances que le modèle de Prince et Blanch (1990) et a donc été choisi pour notre étude numérique.

Concernant le changement de phase, quatre corrélations caractérisant le nombre de Nusselt du liquide ont été testées. On a pu voir que les corrélations de Ranz et Marshall (1952a,b), Akiyama (1973) et Chen et Mayinger (1992) donnait des résultats similaires, et meilleurs sur le profil du taux de vide que les résultats obtenus avec la corrélation de Ruckenstein (1959). La corrélation de Chen et Mayinger (1992) a finalement été choisie pour sa gamme de validité et son champ d'application plus en adéquation avec les essais DEBORA simulés que celle des autres corrélations.

La simulation des quatre essais DEBORA avec le modèle polydisperse Q2 a montré que, mis à part pour l'essai 3, les grandeurs moyennes sont globalement assez bien retrouvées par la simulation : c'est le

cas pour le taux de vide, la vitesse moyenne du gaz et dans une moindre mesure l'aire interfaciale. Une surestimation systématique de la température du mélange diphasique de quelques degrés a également pu être observée, surestimation attribuée notamment aux incertitudes portant sur les propriétés thermophysiques du fréon R-12 en liquide sous-saturé.

Ces simulations ont mis en évidence qu'il était difficile d'obtenir simultanément une bonne estimation des profils radiaux de taux de vide et d'aire interfaciale, induisant de ce fait une mauvaise estimation systématique du diamètre de Sauter. Cela peut éventuellement être expliquée par la mise en défaut de l'hypothèse de sphéricité dans la réalité. En plus d'avoir été formulée lors de l'écriture de notre modèle polydisperse, cette hypothèse simplificatrice est aussi formulée par les expérimentateurs de DEBORA pour le traitement de leurs données expérimentales.^{7, 8} En supposant le taux de vide correctement prédit et si les bulles n'étaient pas sphériques dans la réalité, le modèle numérique et les résultats expérimentaux présenteraient tous les deux une erreur systématique sur l'aire interfaciale. La combinaison de ces deux erreurs pourrait ainsi expliquer notre difficulté à obtenir des données expérimentales et numériques concordantes sur α_d et a_I simultanément.

La comparaison des fonctions de distribution obtenues par l'expérience et la simulation a également montré que le diamètre de Sauter, et plus généralement le diamètre maximal des bulles probables, était en général sous-estimé dans nos simulations. Cette tendance pourrait être expliquée par des termes sources de fragmentation trop puissants ou des termes sources de coalescence trop faibles. Une autre explication de cette sous-estimation pourrait être de nature géométrique. En effet, la loi Q2 montre une tendance à favoriser les petits diamètres de bulles pour compenser sa symétrie de forme donnant la même part aux diamètres inférieurs et supérieurs à d_{10} . Visible sur la figure 2.3 (page 50), cette compensation géométrique permet à la loi Q2 de se rapprocher de la réalité expérimentale où les fonctions de distributions sont très rarement symétriques et présentent généralement un pic de probabilité décalé vers les plus petites bulles. L'utilisation d'une loi dissymétrique comme la loi C2 pour modéliser la fonction de distribution des bulles pourrait éventuellement corriger cette tendance.

Enfin, la comparaison de notre modèle polydisperse aux autres modèles implantés dans NEPTUNE_CFD a pu montrer que le modèle Q2 n'améliorait pas de façon significative la modélisation de DEBORA. Même si ce modèle n'est pas toujours celui permettant de se rapprocher au mieux des résultats expérimentaux, il semble faire néanmoins preuve d'une certaine polyvalence sur les quatre essais simulés.

8.5 Références

- AKIYAMA, M. : Bubble collapse in subcooled boiling. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 16(93):570–575, 1973.
- ANTAL, S.P., LAHEY JR., R.T. et FLAHERTY, J.E. : Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 17(5):635–652, 1991.
- CHEN, Y.M. et MAYINGER, F. : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877–890, 1992.

7. L'hypothèse de sphéricité permet de transformer la distribution des temps vapeur acquise par sonde optique en une distribution des tailles de bulles, de laquelle sont déduites les grandeurs géométriques moyennes de l'écoulement comme l'aire interfaciale et les différents diamètres moyens (cf. Cubizolles, 1996).

8. La paroi de la section d'essai étant opaque, l'hypothèse de sphéricité n'est malheureusement pas vérifiable visuellement sur DEBORA.

- CUBIZOLLES, G. : *Étude stéréologique de la topologie des écoulements diphasiques à haute pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 1996.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- HINZE, J.O. : *Turbulence: An Introduction to its Mechanisms and Theory*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- KAMP, A.M., CHESTERS, A.K., COLIN, C. et FABRE, J. : Bubble coalescence in turbulent flows : a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1363–1396, 2001.
- LUO, H. et SVENDSEN, H.F. : Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 42(5):1225–1233, 1996.
- MANON, E. : *Contribution à l'analyse et à la modélisation locale des écoulements bouillants sous-saturé dans les conditions des Réacteurs à Eau sous Pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2000.
- MOREL, C. et LAVIÉVILLE, J.M. : Modeling of multi-size bubbly flow and application to the simulation of boiling flows with the NEPTUNE_CFD code. *Science and Technology of Nuclear Installations*, Article ID 953527, 2009.
- PRINCE, M.J. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36(10):1485–1499, 1990.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part II. *Chemical Engineering Progress*, 48 (4):173–180, 1952a.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part I. *Chemical Engineering Progress*, 48 (3):141–146, 1952b.
- RUYER, P. et SEILER, N. : Advanced model for polydispersion in size in boiling flows. *La Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, 4:65–71, 2009. ISSN 0018-6368.
- RÜCKENSTEIN, E. : On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chemical Engineering Science*, 10:22–30, 1959.
- TOMIYAMA, A. : Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, 10 (4):369–405, 1998.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.
- ZUBER, N. : On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. *Chemical Engineering Science*, 19:897–919, 1964.

Conclusion générale

Cette thèse fait partie intégrante d'un projet à long terme donc l'objectif est l'amélioration de la modélisation moyennée des écoulements bouillants sous-saturés et plus particulièrement des écoulements à bulles. C'est dans ce but que nous avons développé un nouveau modèle moyenné prenant en compte la polydispersion en taille et en vitesse de la population de bulles.

Un modèle moyenné spécialement adapté aux écoulements à bulles

Parmi la grande diversité des écoulements diphasiques, les écoulements à bulles présentent la particularité d'avoir une topologie déjà connue puisqu'une des deux phases est dispersée en un ensemble d'inclusions de formes semblables. Le modèle moyenné polydisperse présenté dans la première partie de cette thèse s'appuie ainsi sur une *approche moyennée hybride* mixant un modèle classique, le modèle à deux fluides, et un modèle dérivé de la théorie cinétique spécialement adapté aux écoulements à phase dispersée.

Si le premier modèle cité présente l'avantage de pouvoir traiter la phase continue comme la phase dispersée, les termes d'échanges entre phases qu'il fait intervenir ne sont pas très intuitifs, d'où une fermeture difficile. Même si elle ne permet pas de traiter la phase continue, l'approche moyenne dérivée de la théorie cinétique est par contre beaucoup plus naturelle pour traiter la population de bulles ; les termes d'échanges qu'elle engendre sont ainsi beaucoup plus faciles à interpréter et donc à fermer. Afin de tirer parti des avantages de chacune de ces deux approches, le modèle moyenné hybride présenté dans le premier chapitre de cette thèse, peut être vu comme un modèle à deux fluides dont les termes d'échanges moyens entre phases sont écrits à l'aide d'un formalisme statistique issu de la théorie cinétique. On a pu voir cependant que le lien entre les deux approches n'était pas trivial, et nécessitait l'emploi de formules de transformation reliant les différentes quantités moyennes.

Le deuxième chapitre de cette thèse a permis d'introduire la notion de fonction de distribution de la population de bulles, fonction indiquant en un point et à un instant donnés comment sont distribuées les bulles selon différents paramètres caractéristiques de leur état (dans notre cas la taille et la vitesse). Les moyennes de population introduites au premier chapitre pouvant être redéfinies en faisant intervenir une telle fonction. La prise en compte de la polydispersion en taille et en vitesse de la population de bulles dans les termes d'échange est donc assurée si l'on sait se donner la fonction de distribution des bulles.

L'évolution spatio-temporelle de cette dernière a été obtenue en utilisant la *méthode des moments*. Dans cette méthode, plutôt qu'une équation de bilan sur la fonction de distribution elle-même difficile à fermer, ce sont des équations de bilan sur les différentes *densités de moment* de la fonction de distribution qui sont résolues. Cette dernière est ensuite *modélisée* par une expression mathématique *présupposée* et choisie telle que ses paramètres soient des fonctions des différentes densités de moments résolues. Les équations de bilan supplémentaires sur les densités de moments peuvent être déduites de l'équation de

Liouville-Boltzmann tirée la théorie cinétique des gaz. Cette équation de la mécanique statistique permet d'introduire aisément les différents phénomènes de variation de l'inventaire de la population de bulles que sont par exemple la coalescence et la fragmentation de bulles.

En supposant la *polydispersion en vitesse uniquement liée à la polydispersion en taille* par l'intermédiaire des forces entre phases, la fonction de distribution des bulles a été modélisée comme le produit d'une fonction de distribution en taille et d'une distribution de Dirac en vitesse centrée sur la vitesse moyenne des bulles ayant un même diamètre. Suite à différents travaux portant sur l'application de la méthode des moments aux écoulements à bulles, deux nouvelles lois mathématiques ont été développées pour la modélisation de la fonction de distribution en taille des bulles : une loi quadratique à deux paramètres (loi Q2), et une loi cubique à deux paramètres (loi C2). Ces deux lois ont été écrites afin de pallier les défauts des lois utilisées précédemment : d'une part, elles présentent un support borné, de façon à être en mesure de traiter la fragmentation des bulles, et, d'autre part, elles sont fonctions d'au moins deux paramètres et peuvent de ce fait dégénérer vers une distribution monodisperse quelconque. Ces deux lois ne dépendant que de deux paramètres, seulement deux équations de moments nécessitent d'être résolues en plus des équations du modèle hybride.

Fermetures polydisperses du modèle

La deuxième partie de cette thèse a traité des fermetures de notre modèle polydisperse, fermetures spécifiques aux *écoulement à bulles bouillants sous-saturés*. Grâce au formalisme développé dans la première partie, on a pu voir que les termes de transferts moyens à fermer s'écrivaient comme de simples intégrales sur les différentes tailles de bulles possibles. En conséquence les termes d'échanges moyens de quantité de mouvement ont pu être écrits en prenant en compte les différents régimes de traînée et de portance possibles, ceux-ci étant fonctions de la taille des bulles ; des *forces moyennes polydisperses* ont ainsi été obtenues.

En ce qui concerne la modélisation des phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles, plusieurs modèles ont été intégrés dans notre modèle polydisperse, à savoir deux modèles de coalescence, les modèles de Prince et Blanch (1990) et de Kamp *et al.* (2001), ainsi que deux modèles de fragmentation, le modèle homogène de Prince et Blanch (1990) et le modèle hétérogène de Luo et Svendsen (1996). Les différentes intégrales obtenues ont pu être approchées grâce à une méthode d'interpolation inspirée de celle utilisée par Kamp *et al.* (2001) et adaptée au cas particulier des loi Q2 et C2 afin de tirer parti de leurs propriétés géométriques particulières.

Les différents termes d'échanges moyens liés au changement de phase hors nucléation ont été écrits comme des fonctions du nombre de Nusselt, celui-ci étant renseigné par une corrélation empirique ou analytique. Quatre corrélations ont été retenues dans cette étude : les corrélations de Ranz et Marshall, de Ruckenstein, d'Akiyama et de Chen et Mayinger, ces corrélations dépendant du nombre de Prandtl du liquide et du nombre de Reynolds de bulle. En plus de la dépendance en diamètre explicite du nombre de Reynolds de bulle, celui-ci a également pu être écrit comme une fonction des différents régimes de traînée par l'intermédiaire de la vitesse relative de bulle. Les différents termes d'échanges moyens liés au changement de phase que nous avons écrits ici ont donc une réelle dimension polydisperse, puisque dépendant entre autres des paramètres statistiques de la population de bulles.

Toujours dans la deuxième partie de la thèse, une fermeture des termes sources induits par la polydispersion en vitesse dérivée de la polydispersion en taille a également été tentée. Si les différents termes sources ont pu être clairement identifiés, ils n'ont malheureusement pas pu être complètement fermés par manque d'informations.

Test et validation du modèle

La dernière partie de cette thèse aura permis de tester le modèle polydisperse développé grâce au concours de la simulation numérique. Le modèle polydisperse basé sur la loi quadratique à deux paramètres a ainsi été implanté dans le code de calcul NEPTUNE_CFD de façon à pouvoir simuler plusieurs essais de la banque de donnée DEBORA.

Dans un premier temps, l'étude numérique aura permis de choisir les fermetures les plus adaptées à la modélisation des écoulements bouillants sous-saturés du type DEBORA. Les modèles de Kamp *et al.* (2001) et Prince et Blanch (1990) avec $\mathcal{K}_e = 0,79$ ont ainsi semblé présenter le meilleur compromis pour modéliser respectivement les phénomènes de coalescence et de fragmentation de bulles. La corrélation de Chen et Mayinger (1992) a quant à elle été choisie pour la modélisation des termes sources de changement de phase, plus pour sa gamme de validité et son champ d'application, que pour la qualité des résultats obtenus, ces derniers étant similaires pour les corrélations de Ranz et Marshall, d'Akiyama et de Chen et Mayinger.

La simulation avec le modèle polydisperse Q2 des quatre essais DEBORA retenus aura montré que les grandeurs moyennes sont globalement assez bien retrouvées par la simulation. Des biais systématiques ont été toutefois observés, sur la température du mélange diphasique par exemple, mais aussi sur le couple aire interfaciale/taux de vide pour lequel il est apparu qu'il était difficile d'obtenir une bonne estimation de ces deux quantités simultanément. La mise en défaut de l'hypothèse de sphéricité a été avancée pour tenter d'expliquer cette erreur systématique, hypothèse que, d'une part nous avons utilisé comme point de départ de tous nos développements, et qui, d'autre part a été posée par les expérimentateurs pour traiter les données expérimentales.

Enfin, la confrontation du modèle polydisperse Q2 aux modèles dont nous disposons a montré que le nouveau modèle développé dans ce manuscrit ne permettait pas d'obtenir des résultats sensiblement meilleurs que ceux obtenus avec les modèles précédemment implantés dans le code.

Perspectives

Si ce dernier point est finalement assez décevant au regard de tous les efforts déployés dans cette thèse pour arriver à écrire un modèle polydisperse plus complet et plus fiable que les modèles précédemment développés, plusieurs axes de développements peuvent néanmoins être envisagés pour tenter d'améliorer la modélisation de la polydispersion pour les écoulements à bulles.

Tout d'abord, l'implantation du modèle polydisperse C2 dans le code NEPTUNE_CFD devrait être menée à son terme afin de pouvoir tester les capacités de cette autre loi ; sa forme dissymétrique est en effet plus en phase avec les formes des distributions de taille de bulles habituellement obtenues par l'expérience. Les différentes simulations effectuées dans notre chapitre 8, ont cependant semblé montrer que les modèles de fermeture avaient plus d'influence sur la qualité des résultats que la forme de la loi utilisée pour modéliser la fonction de distribution. Une autre piste d'amélioration serait donc de travailler sur la constante $\mathcal{K}_{LS}$ du modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) : soit estimer plus précisément la constante en fonction de l'écoulement simulé, soit la calculer à chaque instant et en chaque point de l'écoulement. Quelque soit la piste choisie, cela nécessiterait de recalculer l'intégrale du terme source de fragmentation, soit pour chaque écoulement simulé, soit à chaque instant et en chacun des points du domaine.

D'autres perspectives sont également apparues au cours de cette thèse. La première est la prise en compte complète de la polydispersion de vitesse pour les écoulements à bulles ; les différents termes à

fermer ont été identifiés dans cette étude, mais leur fermeture proprement dite a été laissée à une prochaine étude. L'exploitation de travaux DNS comme ceux de Magdeleine *et al.* (2010) pourrait permettre d'y parvenir. Une autre piste évoquée au chapitre 5 de cette thèse est l'utilisation d'une corrélation de Nusselt prenant en compte l'effet collectif des bulles pour améliorer la modélisation du taux de changement de phase. Ce type de corrélation restant à écrire, l'utilisation de travaux DNS seraient là aussi d'une grande aide, comme a pu récemment le montrer Bois dans sa thèse (2011).

Enfin, d'un point de vue plus général, la modélisation de la polydispersion pourrait être envisagée avec une méthode QMOM ou DQMOM (McGraw, 1997 ; Marchisio et Fox, 2005 ; Marchisio, 2007), où la fonction de distribution des bulles est modélisée par une *somme pondérée* de différentes *distributions de Dirac* (approximation par quadrature). Ces deux méthodes peuvent donc être vue comme des méthodes hybrides entre une méthode des classes et une méthode des moments à loi présupposée. Les paramètres dont l'évolution est résolue, directement ou indirectement, par ces deux méthodes sont les poids associés aux différentes distributions de Dirac ainsi que les abscisses de ces dernières ; l'allure de la fonction de distribution reconstruite peut donc évoluer en temps et en espace. Différents travaux sur les méthodes QMOM et DQMOM ont été publiés récemment (Fox, 2009 ; Bruyat *et al.*, 2010 ; Le Lostec *et al.*, 2010 ; Passalacqua et Fox, 2010), montrant ainsi les performances et surtout la maturité acquise aujourd'hui par ces deux méthodes.¹ Néanmoins, ayant été développées essentiellement pour les écoulements gaz/particules ou les sprays, de nombreuses fermetures devront sans doute être revues pour que les méthodes QMOM et DQMOM soient également applicables aux écoulements à bulles.

Références

- BOIS, G. : *Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2011.
- BRUYAT, A., LAURENT, C. et ROUZAUD, O. : Direct quadrature method of moments for multicomponent droplet spray vaporization. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010)*, Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010.
- CHEN, Y.M. et MAYINGER, F. : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877–890, 1992.
- DESJARDINS, O., FOX, R.O. et VILLEDIEU, P. : A quadrature-based moment closure for the williams spray equation. *Proceedings of the Summer Program 2006*, pages 223–234. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 2006.
- FOX, R.O. : Higher-order quadrature-based moment methods for kinetic equations. *Journal of Computational Physics*, 228:7771–7791, 2009.
- KAMP, A.M., CHESTERS, A.K., COLIN, C. et FABRE, J. : Bubble coalescence in turbulent flows : a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1363–1396, 2001.
- LE LOSTEC, N., VILLEDIEU, P. et SIMONIN, O. : Quadrature-based third order moment models for the simulation of particle-laden flows. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010)*, Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010.

1. Deux caractéristiques intéressantes de la méthode DQMOM sont sa capacité à traiter les populations de bulles bidisperses ainsi que le croisement de trajectoires (Desjardins *et al.*, 2006).

- LUO, H. et SVENDSEN, H.F. : Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 42(5):1225–1233, 1996.
- MAGDELEINE, S., MATHIEU, B., LEBAGUE, O., TOUTANT, A. et MOREL, C. : DNS up-scaling applied to two-phase momentum balance and volumetric interfacial area transport equation for a vertical bubbly flow. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- MARCHISIO, D.L. : Quadrature method of moments for poly-disperse flows. MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 41–78. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O. : Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments. *Journal of Aerosol Science*, 36:43–73, 2005.
- MCGRAW, R. : Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments. *Aerosol Science and Technology*, 27(2):255–265, 1997.
- PASSALACQUA, A. et FOX, R.O. : Numerical simulation of turbulent gas-particle flow in a riser using a quadrature-based moment method. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- PRINCE, M.J. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36(10):1485–1499, 1990.

ANNEXES

Annexe A

Loi cubique à deux paramètres

Cette annexe présente la loi C2, une loi cubique à deux paramètres pouvant être utilisée pour caractériser la polydispersion en taille d'une population de bulles dans le cadre de la méthode des moments (*cf.* chapitre 2, section 2.3). Rappelons l'expression de cette loi telle qu'elle a été présentée au paragraphe 2.3.3 :

$$\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta; \mathbf{x}, t) \hat{=} \begin{cases} \frac{12 (d_{\max}(\mathbf{x}, t) - \beta)^2 (\beta - d_{\min}(\mathbf{x}, t))}{(d_{\max}(\mathbf{x}, t) - d_{\min}(\mathbf{x}, t))^4} & \text{pour } d_{\min}(\mathbf{x}, t) \leq \beta \leq d_{\max}(\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.73)$$

où les deux paramètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$ correspondent respectivement aux diamètres minimal et maximal pour lesquels $\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta) = 0$. Cette loi étant normalisée par définition, elle vérifie la propriété (2.30).

A.1 Propriétés géométriques

Le calcul des premières densités de moment en diamètre par la relation (2.74) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_0 = n \end{array} \right. \quad (A.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_1 = \frac{n}{5} (2 d_{\max} + 3 d_{\min}) \end{array} \right. \quad (A.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_2 = \frac{n}{5} (d_{\max}^2 + 2 d_{\max} d_{\min} + 2 d_{\min}^2) \end{array} \right. \quad (A.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_3 = \frac{n}{35} (4 d_{\max}^3 + 9 d_{\max}^2 d_{\min} + 12 d_{\max} d_{\min}^2 + 10 d_{\min}^3) \end{array} \right. \quad (A.1d)$$

l'inversion de ce système permettant d'obtenir l'expression de $d_{\min}$ et $d_{\max}$ en fonction des premières densités de moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{\min} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} - 2 \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} \end{array} \right. \quad (A.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{\max} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} + 3 \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n}\right)^2} \end{array} \right. \quad (A.2b)$$

À partir des relations (A.1), on peut obtenir une *relation géométrique* reliant les différentes densités de moments entre elles :

$$n^2 \mathcal{M}_3 + 2 \mathcal{M}_1^3 - 3 \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 n - \frac{2}{7} (\mathcal{M}_2 n - \mathcal{M}_1^2)^{3/2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir une relation nous donnant n en fonction des autres densités de moments, relation essentielle dans le formalisme de la méthode des moments. Cela étant impossible analytiquement, il a été supposé pour contourner le problème que n pouvait s'exprimer sous une forme similaire pour les lois Q2 et C2, à savoir :

$$n = \frac{\mathcal{M}_2^3}{\mathcal{M}_3^2} f(\mathcal{Y}^*) \quad (\text{A.4})$$

où l'on rappelle que $\mathcal{Y}^*$ est une fonction adimensionnelle de $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ donnée par (2.57), la relation donnant n en fonction des autres densité de moment pour la loi Q2 étant donnée par (2.56). Une résolution numérique de l'équation (A.3) pour différents triplets $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ montre que l'on peut finalement approcher la fonction $f(\mathcal{Y}^*)$ par un polynôme de degré 4 (cf. figure A.1) :

$$n \cong \frac{\mathcal{M}_2^3}{\mathcal{M}_3^2} (1,828 \mathcal{Y}^{*4} - 7,040 \mathcal{Y}^{*3} + 10,175 \mathcal{Y}^{*2} - 6,545 \mathcal{Y}^* + 1,583) \times 10^3. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Formulations alternatives de la loi C2

A.2.1 Diamètre moyen arithmétique et écart type

Une formulation alternative de la loi C2 peut être écrite en utilisant son diamètre moyen arithmétique d_{10} et son écart type $\tilde{\sigma}$ comme paramètres plutôt que d_{min} et d_{max} . À partir des définitions de d_{10} et de $\tilde{\sigma}$ (2.40) et (2.41), on obtient :

$$\begin{cases} d_{10} = \frac{2 d_{max} + 3 d_{min}}{5} \\ \tilde{\sigma} = \frac{d_{max} - d_{min}}{5} \end{cases} \quad (\text{A.6a})$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{d_{max} - d_{min}}{5} \quad (\text{A.6b})$$

système que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\begin{cases} d_{min} = d_{10} - 2 \tilde{\sigma} \\ d_{max} = d_{10} + 3 \tilde{\sigma}. \end{cases} \quad (\text{A.7a})$$

$$d_{max} = d_{10} + 3 \tilde{\sigma}. \quad (\text{A.7b})$$

En injectant ces relations dans la définition de la loi C2, on obtient finalement :

$$\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta) = \begin{cases} \frac{12}{625} \frac{1}{\tilde{\sigma}^4} (\beta - d_{10} - 3 \tilde{\sigma})^2 (\beta - d_{10} + 2 \tilde{\sigma}) & \text{pour } d_{min} \leq \beta \leq d_{max} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Les densités de moments exprimées en fonction de ces nouveaux paramètres sont obtenues de la même manière :

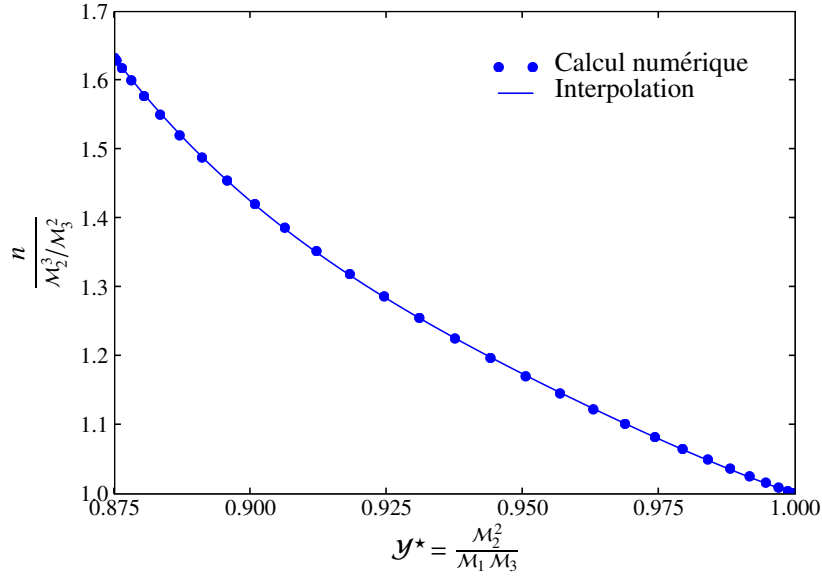


FIG. A.1 – Calcul numérique et interpolation de la relation géométrique donnant n en fonction des autres densités de moments pour la loi C2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_0 = n \\ \mathcal{M}_1 = n d_{10} \\ \mathcal{M}_2 = n (d_{10}^2 + \tilde{\sigma}^2) \\ \mathcal{M}_3 = n \left(d_{10}^3 + 3 d_{10} \tilde{\sigma}^2 + \frac{2}{7} \tilde{\sigma}^3 \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.9a)} \\ \text{(A.9b)} \\ \text{(A.9c)} \\ \text{(A.9d)} \end{array}$$

A.2.2 Écart type adimensionnel

On définit l'écart type adimensionnel $\tilde{\sigma}^*$ tel que :

$$\tilde{\sigma}^* \triangleq \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = \frac{5 \tilde{\sigma}}{2 d_{10} + \tilde{\sigma}}. \quad \text{(A.10)}$$

En injectant $\tilde{\sigma}^*$ dans l'expression de $\mathcal{P}_\beta^{C2}$, on obtient :

$$\mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta^*) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{1}{d_{10}} (C_3^* \beta^{*3} + C_2^* \beta^{*2} + C_1^* \beta^* + C_0^*) & \text{pour } d_{\min}^* \leq \beta^* \leq d_{\max}^* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{(A.11a)}$$

avec les coefficients adimensionnels :

$$C_3^*(\tilde{\sigma}^*) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5 \tilde{\sigma}^*} \right)^4 \quad \text{(A.11b)}$$

$$C_2^*(\tilde{\sigma}^*) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 3}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5 \tilde{\sigma}^*} \right)^3 \quad \text{(A.11c)}$$

$$C_1^*(\tilde{\sigma}^*) = - \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 1}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 3}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5 \tilde{\sigma}^*} \right)^2 \quad \text{(A.11d)}$$

$$C_0^*(\tilde{\sigma}^*) = - \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 1}{\tilde{\sigma}^*} \right) \left(\frac{\tilde{\sigma}^* + 1}{\tilde{\sigma}^*} \right)^2 \left(\frac{\tilde{\sigma}^* - 5}{5 \tilde{\sigma}^*} \right). \quad (\text{A.11e})$$

On rappelle que le diamètre de bulle adimensionnalisé β^* est donné par $\beta^* = \frac{\beta}{d_{10}}$, les diamètres minimal et maximal adimensionnels de la loi C2 sont quant à eux donnés par les relations :

$$\begin{cases} d_{min}^* = 5 \left(\frac{1 - \tilde{\sigma}^*}{5 - \tilde{\sigma}^*} \right) \\ d_{max}^* = 5 \left(\frac{1 + \tilde{\sigma}^*}{5 - \tilde{\sigma}^*} \right) \end{cases} \quad (\text{A.12a})$$

$$(\text{A.12b})$$

où l'on retrouve une forme similaire aux diamètres minimal et maximal adimensionnels obtenus pour la loi Q2.

A.3 Conditionnement géométrique des densités de moments de la loi C2

À l'instar de la loi Q2, le paramètre $\tilde{\sigma}^*$ permet de caractériser les deux configurations géométriques limites de la loi C2, à savoir un diamètre minimal nul ou un écart type nul. Ces deux configurations peuvent en outre être traduites en terme de conditions sur les densités de moments de $\mathcal{P}_\beta^{C2}$ par l'intermédiaire du paramètre géométrique adimensionnel $\mathcal{Y}^*$.

Lorsque le *diamètre minimal est nul*, on peut écrire :

$$\begin{cases} d_{min} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} - 2 \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n} \right)^2} = 0 \\ d_{max} = \frac{\mathcal{M}_1}{n} + 3 \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{n} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{n} \right)^2} = \frac{5}{2} d_{10} \end{cases} \quad (\text{A.13a})$$

$$(\text{A.13b})$$

la première équation pouvant être mise sous la forme :

$$n = \frac{5}{4} \frac{\mathcal{M}_1^2}{\mathcal{M}_2}. \quad (\text{A.14})$$

En injectant cette relation dans l'équation (A.3), on obtient la valeur suivante pour $\mathcal{Y}^*$:

$$\mathcal{Y}^* = \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3} = \frac{7}{8}. \quad (\text{A.15})$$

La condition de *nullité de l'écart type* se traduit quant à elle par la relation :

$$n = \frac{\mathcal{M}_1^2}{\mathcal{M}_2}. \quad (\text{A.16})$$

En injectant cette relation dans l'équation (A.3), on obtient la seconde valeur limite pour $\mathcal{Y}^*$:

$$\mathcal{Y}^* = \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3} = 1. \quad (\text{A.17})$$

Comme pour la loi Q2, le conditionnement géométrique de la loi C2 se réduit finalement à un simple conditionnement sur le paramètre géométrique adimensionnel $\mathcal{Y}^*$:

$$0,875 \leq \mathcal{Y}^* \leq 1. \quad (\text{A.18})$$

Notons que la gamme de validité de $\mathcal{Y}^*$ est plus large pour la loi C2 que pour la loi Q2.¹

1. Pour la loi Q2, on a $0,9 \leq \mathcal{Y}^* \leq 1$.

Annexe B

Calcul des forces moyennes polydisperses

Dans cette annexe, on se propose de détailler les calculs qui permettent d'établir les forces hydrodynamiques moyennes présentées au chapitre 3. Avant toute chose, définissons les fonctions φ_{Q2} et φ_{C2} :¹

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Q2}(\gamma, d_1^*, d_2^*; \bar{\sigma}^*) &\triangleq \int_{d_1^*}^{d_2^*} \mathcal{P}_\beta^{Q2}(\beta^*) \beta^{*\gamma} d_{10} d\beta^* \\
 &= \frac{3}{4} \int_{d_1^*}^{d_2^*} (Q_2^*(\bar{\sigma}^*) \beta^{*2} + Q_1^*(\bar{\sigma}^*) \beta^* + Q_0^*(\bar{\sigma}^*)) \beta^{*\gamma} d\beta^* \\
 &= \frac{3}{4} \left(Q_2^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+3}}{\gamma+3} + Q_1^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+2}}{\gamma+2} + Q_0^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right)
 \end{aligned} \tag{B.1a}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{C2}(\gamma, d_1^*, d_2^*; \bar{\sigma}^*) &\triangleq \int_{d_1^*}^{d_2^*} \mathcal{P}_\beta^{C2}(\beta^*) \beta^{*\gamma} d_{10} d\beta^* \\
 &= \frac{3}{4} \int_{d_1^*}^{d_2^*} (C_3^*(\bar{\sigma}^*) \beta^{*3} + C_2^*(\bar{\sigma}^*) \beta^{*2} + C_1^*(\bar{\sigma}^*) \beta^* + C_0^*(\bar{\sigma}^*)) \beta^{*\gamma} d\beta^* \\
 &= \frac{3}{4} \left(C_3^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+4}}{\gamma+4} + C_2^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+3}}{\gamma+3} \right. \\
 &\quad \left. + C_1^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+2}}{\gamma+2} + C_0^*(\bar{\sigma}^*) \frac{(d_2^* - d_1^*)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right)
 \end{aligned} \tag{B.1b}$$

où β^* est un diamètre adimensionnel défini tel que :

$$\beta^* \triangleq \frac{\beta}{d_{10}}. \tag{B.2}$$

Notons que ces deux fonctions ne sont plus valables si $\gamma \in \{-1, -2, -3\}$.

B.1 Force de traînée moyenne

La force de traînée moyenne telle que définie au paragraphe 3.2.1 s'écrit :

1. On rappelle que les coefficients Q_i^* et C_i^* sont des fonctions de $\bar{\sigma}^*$ données respectivement par (2.65) et (2.78).

$$\mathbf{M}^D = -\frac{\pi}{8} \overline{\rho_c}^c \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \times n \left(\underbrace{\int_{d_{min}}^{d_{rac}^{D_{12}}} C_1^D(\beta) \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_1^D} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{D_{12}}}^{d_{rac}^{D_{23}}} C_2^D(\beta) \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_2^D} + \underbrace{C_3^D \int_{d_{rac}^{D_{23}}}^{d_{max}} \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_3^D} \right). \quad (3.35)$$

Avant de passer au calcul des intégrales $\mathcal{I}_i^D$, on effectue le changement de variable (B.2). On définit ainsi les diamètres adimensionnalisés d_{min}^* , $d_{rac}^{D_{12}*}$, $d_{rac}^{D_{23}*}$ et d_{max}^* ; on obtient :

$$\mathcal{I}_1^D = d_{10}^2 C_1^D(d_{10}) \int_{d_{min}^*}^{d_{rac}^{D_{12}*}} \mathcal{P}_\beta(\beta^*) \beta^{*11/7} d_{10} d\beta^* \quad (B.3)$$

$$\mathcal{I}_2^D = d_{10}^2 C_2^D(d_{10}) \int_{d_{rac}^{D_{12}*}}^{d_{rac}^{D_{23}*}} \mathcal{P}_\beta(\beta^*) \beta^{*3} d_{10} d\beta^* \quad (B.4)$$

$$\mathcal{I}_3^D = d_{10}^2 C_3^D \int_{d_{rac}^{D_{23}*}}^{d_{max}^*} \mathcal{P}_\beta(\beta^*) \beta^{*2} d_{10} d\beta^* \quad (B.5)$$

où l'on voit apparaître les fonctions φ_I définies plus haut. Le calcul des intégrales $\mathcal{I}_i^D$ donne donc pour la loi Q2 :

$$\mathcal{I}_1^D = d_{10}^2 C_1^D(d_{10}) \varphi_{Q2}(\frac{11}{7}, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}*}) \quad (B.6a)$$

$$\mathcal{I}_2^D = d_{10}^2 C_2^D(d_{10}) \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{D_{12}*}, d_{rac}^{D_{23}*}) \quad (B.7a)$$

$$\mathcal{I}_3^D = d_{10}^2 C_3^D \varphi_{Q2}(2, d_{rac}^{D_{23}*}, d_{max}^*). \quad (B.8a)$$

Des expressions similaires sont obtenues pour la loi C2 : il suffit en effet de remplacer φ_{Q2} par φ_{C2} , les variables de ces deux fonctions restant inchangées :

$$\mathcal{I}_1^D = d_{10}^2 C_1^D(d_{10}) \varphi_{C2}(\frac{11}{7}, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}*}) \quad (B.6b)$$

$$\mathcal{I}_2^D = d_{10}^2 C_2^D(d_{10}) \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{D_{12}*}, d_{rac}^{D_{23}*}) \quad (B.7b)$$

$$\mathcal{I}_3^D = d_{10}^2 C_3^D \varphi_{C2}(2, d_{rac}^{D_{23}*}, d_{max}^*). \quad (B.8b)$$

Par ailleurs, en manipulant les relations donnant les moments en diamètre des PDF en fonction de leurs paramètres (respectivement les relations 2.61 et A.9 pour les lois Q2 et C2), on arrive à déterminer des relations géométriques donnant d_{10}^2 :

a) pour la loi Q2 :

$$d_{10}^2 = \frac{a_I}{n \pi} \frac{5}{\overline{\sigma}^{*2} + 5} \quad (B.9a)$$

b) pour la loi C2 :

$$d_{10}^2 = \frac{a_I}{n \pi} \frac{(\overline{\sigma}^* - 5)^2}{5(\overline{\sigma}^{*2} - 2\overline{\sigma}^* + 5)} \quad (B.9b)$$

où l'on rappelle que a_I correspond à la concentration d'aire interfaciale.

Finalement, en combinant toutes ces relations, on arrive à l'expression classique de la force de traînée moyenne :

$$\mathbf{M}^D = -\frac{1}{8} \bar{\rho}_c^c a_I C_{**}^D \|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c\| (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \quad (\text{B.10})$$

où C_{**}^D est un *coefficient de traînée polydisperse* dépendant notamment de la forme mathématique choisie pour modéliser $\mathcal{P}_\beta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{Q2}^D = \frac{5}{\bar{\sigma}^{*2} + 5} \left(C_1^D(d_{10}) \varphi_{Q2}(\frac{11}{7}, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}*}) \right. \\ \quad \left. + C_2^D(d_{10}) \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{D_{12}*}, d_{rac}^{D_{23}*}) + C_3^D \varphi_{Q2}(2, d_{rac}^{D_{23}*}, d_{max}^*) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.11a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{C2}^D = \frac{(\bar{\sigma}^* - 5)^2}{5(\bar{\sigma}^{*2} - 2\bar{\sigma}^* + 5)} \left(C_1^D(d_{10}) \varphi_{C2}(\frac{11}{7}, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}*}) \right. \\ \quad \left. + C_2^D(d_{10}) \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{D_{12}*}, d_{rac}^{D_{23}*}) + C_3^D \varphi_{C2}(2, d_{rac}^{D_{23}*}, d_{max}^*) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.11b})$$

où l'on rappelle que d_{min}^* et d_{max}^* sont des fonctions de $\bar{\sigma}^*$ données respectivement par les systèmes (2.66) et (A.12) pour les lois Q2 et C2.

B.2 Force de portance moyenne

La force de portance moyenne telle que définie au paragraphe 3.2.2 s'écrit :

$$\mathbf{M}^L = -\frac{\pi}{6} \bar{\rho}_c^c (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \wedge \nabla \wedge \mathbf{V}_c \\ \times n \left(\underbrace{C_1^L \int_{d_{min}}^{d_{rac}^{L_{12}}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_1^L} + \underbrace{\int_{d_{rac}^{L_{12}}}^{d_{rac}^{L_{23}}} C_2^L(\beta) \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_2^L} + \underbrace{C_3^L \int_{d_{rac}^{L_{23}}}^{d_{max}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{I_3^L} \right). \quad (\text{3.40})$$

En effectuant le même changement de variable que pour le calcul de la force de traînée moyenne, le calcul des intégrales I_i^L donne pour la loi Q2 :

$$I_1^L = d_{10}^3 C_1^L \varphi_{Q2}(3, d_{min}^*, d_{rac}^{L_{12}*}) \quad (\text{B.12a})$$

$$I_2^L = d_{10}^3 \left(-0,09233 \text{Eo}(d_{10}) \varphi_{Q2}(5, d_{rac}^{L_{12}*}, d_{rac}^{L_{23}*}) + 0,5597 \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{L_{12}*}, d_{rac}^{L_{23}*}) \right) \quad (\text{B.13a})$$

$$I_3^L = d_{10}^3 C_3^L \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{L_{23}*}, d_{max}^*). \quad (\text{B.14a})$$

où les diamètres de raccord $d_{rac}^{L_{12}*}$ et $d_{rac}^{L_{23}*}$ ont été adimensionnalisés à l'aide de la relation (B.2). Comme pour la force de traînée moyenne, les expressions de I_1^L , I_2^L et I_3^L pour la loi C2 sont obtenues en remplaçant simplement φ_{Q2} par φ_{C2} , les variables fonctionnelles restant inchangées :

$$I_1^L = d_{10}^3 C_1^L \varphi_{C2}(3, d_{min}^*, d_{rac}^{L_{12}*}) \quad (\text{B.12b})$$

$$I_2^L = d_{10}^3 \left(-0,09233 \text{Eo}(d_{10}) \varphi_{C2}(5, d_{rac}^{L_{12}*}, d_{rac}^{L_{23}*}) + 0,5597 \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{L_{12}*}, d_{rac}^{L_{23}*}) \right) \quad (\text{B.13b})$$

$$\mathcal{I}_3^L = d_{10}^3 C_3^L \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{L23*}, d_{max}^*). \quad (\text{B.14b})$$

À nouveau, on peut déterminer des relations géométriques nous donnant d_{10}^3 en manipulant les expressions donnant les moments en diamètre des PDF en fonction de leurs paramètres (respectivement les relations 2.61 et A.9 pour les lois Q2 et C2) :

a) pour la loi Q2 :

$$d_{10}^3 = \frac{6 \alpha_d}{n \pi} \frac{5}{3 \tilde{\sigma}^{*2} + 5} \quad (\text{B.15a})$$

b) pour la loi C2 :

$$d_{10}^3 = \frac{6 \alpha_d}{n \pi} \frac{7(\tilde{\sigma}^* - 5)^3}{25(3 \tilde{\sigma}^{*3} - 21 \tilde{\sigma}^{*2} + 21 \tilde{\sigma}^* - 35)} \quad (\text{B.15b})$$

où l'on rappelle que α_d correspond au taux de présence des bulles.

Finalement, on arrive à l'expression classique de la force de portance moyenne :

$$\mathbf{M}^L = -\overline{\rho_c}^c \alpha_d C_{**}^L (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c) \wedge \nabla \wedge \mathbf{V}_c \quad (\text{B.16})$$

où C_{**}^L est un *coefficient de portance polydisperse* dépendant notamment de la forme mathématique choisie pour modéliser $\mathcal{P}_\beta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{Q2}^L = \frac{5}{3 \tilde{\sigma}^{*2} + 5} \left(0,288 \varphi_{Q2}(3, d_{min}^*, d_{rac}^{L12*}) - 0,09233 \text{Eo}(d_{10}) \varphi_{Q2}(5, d_{rac}^{L12*}, d_{rac}^{L23*}) \right. \\ \quad \left. + 0,5597 \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{L12*}, d_{rac}^{L23*}) - 0,27 \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{L23*}, d_{max}^*) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.17a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{C2}^L = \frac{7(\tilde{\sigma}^* - 5)^3}{25(3 \tilde{\sigma}^{*3} - 21 \tilde{\sigma}^{*2} + 21 \tilde{\sigma}^* - 35)} \\ \quad \times \left(0,288 \varphi_{C2}(3, d_{min}^*, d_{rac}^{L12*}) - 0,09233 \text{Eo}(d_{10}) \varphi_{C2}(5, d_{rac}^{L12*}, d_{rac}^{L23*}) \right. \\ \quad \left. + 0,5597 \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{L12*}, d_{rac}^{L23*}) - 0,27 \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{L23*}, d_{max}^*) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.17b})$$

où d_{min}^* et d_{max}^* sont des fonctions de $\tilde{\sigma}^*$ données respectivement par les systèmes (2.66) et (A.12) pour les lois Q2 et C2.

B.3 Force de paroi moyenne

La force de paroi moyenne telle que définie au paragraphe 3.2.4 s'écrit :

$$\mathbf{M}^W = -\frac{\pi}{3} \overline{\rho_c}^c n \left(\underbrace{C_1^W \int_{d_{rac}^W}^{d_{max}} \beta^2 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_1^W} + \underbrace{\frac{C_2^W}{2 y_w} \int_{d_{rac}^W}^{d_{max}} \beta^3 \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta}_{\mathcal{I}_2^W} \right) \|\mathbf{V}_\parallel\|^2 \mathbf{n}_w \quad (\text{3.52})$$

À l'aide du changement de variable (B.2), on en déduit les expressions des intégrales $\mathcal{I}^W$ pour la loi Q2 :

$$\mathcal{I}_1^W = d_{10}^2 C_1^W \varphi_{Q2}(2, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \quad (\text{B.18a})$$

$$\mathcal{I}_2^W = d_{10}^2 \frac{C_2^W}{2 y_w^\star} \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \quad (\text{B.19a})$$

où $d_{rac}^{W\star}$ et $y_w^\star$ ont été adimensionnalisés à l'aide de la relation (B.2). Les expressions des intégrales $\mathcal{I}^W$ pour la loi C2 sont obtenues en remplaçant simplement φ_{Q2} par φ_{C2} :

$$\mathcal{I}_1^W = d_{10}^2 C_1^W \varphi_{C2}(2, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \quad (\text{B.18b})$$

$$\mathcal{I}_2^W = d_{10}^2 \frac{C_2^W}{2 y_w^\star} \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \quad (\text{B.19b})$$

Grâce aux relations (B.9) nous donnant d_{10}^2 , on peut finalement écrire la force de paroi moyenne comme suit :

$$\mathbf{M}^W = -\frac{1}{3} \bar{\rho}_c^c a_I C_{**}^W \|\mathbf{V}_\parallel\|^2 \mathbf{n}_w \quad (\text{B.20})$$

où C_{**}^W désigne un *coefficient de distance à la paroi polydisperse* dépendant notamment de la forme mathématique choisie pour modéliser $\mathcal{P}_\beta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{Q2}^W = \frac{5}{\tilde{\sigma}^{\star 2} + 5} \left(C_1^W \varphi_{Q2}(2, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) + \frac{C_2^W}{2 y_w^\star} \varphi_{Q2}(3, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.21a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{C2}^W = \frac{(\tilde{\sigma}^\star - 5)^2}{5(\tilde{\sigma}^{\star 2} - 2\tilde{\sigma}^\star + 5)} \left(C_1^W \varphi_{C2}(2, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) + \frac{C_2^W}{2 y_w^\star} \varphi_{C2}(3, d_{rac}^{W\star}, d_{max}^\star) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.21b})$$

où $d_{min}^\star$ et $d_{max}^\star$ sont des fonctions de $\tilde{\sigma}^\star$ données respectivement par les systèmes (2.66) et (A.12) pour les lois Q2 et C2.

Annexe C

Calcul des termes sources de coalescence et fragmentation

On a vu au chapitre 4 que les intégrales doubles ou triples des termes sources de coalescence et fragmentation pouvaient être approximées par des combinaisons de fonctions simples suite à différentes interpolations. Dans cette annexe, on se propose de détailler quelque peu les calculs qui permettent d'arriver aux expressions approchées des termes sources.

C.1 Détermination des termes sources de coalescence

Commençons par rappeler la forme des termes sources de coalescence établis à la section 4.2 et que l'on va chercher à déterminer maintenant.

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\begin{aligned} \text{CO}_\gamma = 0,139 \, n^2 \, \varepsilon_c^{1/3} \iint_{d_{\min}}^{d_{\max}} & \left((d_1^3 + d_2^3)^{1/3} - d_1^\gamma - d_2^\gamma \right) (d_1 + d_2)^2 \sqrt{d_1^{2/3} + d_2^{2/3}} \\ & \times \exp \left(-1,29 \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{eq}^{5/6}(d_1, d_2) \right) \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2) \, dd_1 \, dd_2. \end{aligned} \quad (4.25a)$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\begin{aligned} \text{CO}_\gamma = 0,453 \, C_t \, n^2 \, \varepsilon_c^{1/3} \iint_{d_{\min}}^{d_{\max}} & \left((d_1^3 + d_2^3)^{1/3} - d_1^\gamma - d_2^\gamma \right) (d_1 + d_2)^{7/3} \\ & \times \exp \left(-1,11 \, C_t \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \, \varepsilon_c^{1/3} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{d_{eq}(d_1, d_2)}{C_{1,2}^{VM}(d_1, d_2)} \right)^{1/2} \right) \\ & \times \mathcal{P}_\beta(d_1) \mathcal{P}_\beta(d_2) \, dd_1 \, dd_2. \end{aligned} \quad (4.25b)$$

Pour calculer ces termes intégraux, on effectue en premier lieu un changement de variables en introduisant les diamètres adimensionnels $d_1^\star$, $d_2^\star$ et $d_{eq}^\star$ définis par :

$$d_i^\star \triangleq \frac{d_i}{d_{10}}. \quad (C.2)$$

Le terme source peut ainsi être réécrit en introduisant des *efficacités de collision monodisperses* η_{10}^{CO} .

a) Modèle de Prince et Blanch (1990) :

$$\begin{aligned} \text{CO}_\gamma = 0,139 \, n^2 \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{10}^{\gamma+13/3} \int_{d_{\min}^*}^{d_{\max}^*} \left((d_1^{*3} + d_2^{*3})^{\gamma/3} - d_1^{*\gamma} - d_2^{*\gamma} \right) (d_1^* + d_2^*)^2 \sqrt{d_1^{*2/3} + d_2^{*2/3}} \\ \times (\eta_{10}^{CO})^{\eta(d_1^*, d_2^*)} \mathcal{P}_\beta(d_1^*) \mathcal{P}_\beta(d_2^*) \, dd_1^* \, dd_2^* \end{aligned} \quad (\text{C.3a.1})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_{10}^{CO} &= \exp \left(-1,29 \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{10}^{5/6} \right) = \exp \left(-0,912 \sqrt{\text{We}_{10}^T} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.3a.2})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(d_1^*, d_2^*) &= \left(\frac{2 \, d_1^* \, d_2^*}{d_1^* + d_2^*} \right)^{5/6} \end{aligned} \right. \quad (\text{C.3a.3})$$

où l'on a défini un nombre de Weber turbulent moyen :

$$\text{We}_{10}^T \triangleq \text{We}_b^T(d_{10}) = \frac{2 \, \rho_c \, \varepsilon_c^{2/3} \, d_{10}^{5/3}}{\sigma}. \quad (\text{C.3a.4})$$

b) Modèle de Kamp *et al.* (2001) :

$$\begin{aligned} \text{CO}_\gamma = 0,453 \, C_t \, n^2 \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{10}^{\gamma+13/3} \int_{d_{\min}^*}^{d_{\max}^*} \left((d_1^{*3} + d_2^{*3})^{\gamma/3} - d_1^{*\gamma} - d_2^{*\gamma} \right) (d_1^* + d_2^*)^{7/3} \\ \times (\eta_{10}^{CO})^{\eta(d_1^*, d_2^*)} \mathcal{P}_\beta(d_1^*) \mathcal{P}_\beta(d_2^*) \, dd_1^* \, dd_2^* \end{aligned} \quad (\text{C.3b.1})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_{10}^{CO} &= \exp \left(-\frac{1,25 \, C_t}{\sqrt{C_{10}^{VM}}} \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{10}^{5/6} \right) = \exp \left(-0,987 \, C_t \sqrt{\text{We}_{10}^T} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.3b.2})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(d_1^*, d_2^*) &= \sqrt{\frac{C_{10}^{VM}}{C_{1,2}^{VM}(d_1^*, d_2^*)} \frac{d_1^* \, d_2^*}{(d_1^* + d_2^*)^{1/3}}} \end{aligned} \right. \quad (\text{C.3b.3})$$

$$C_{10}^{VM} \triangleq C_{1,2}^{VM}(d_{10}, d_{10}) \cong 0,803. \quad (\text{C.3b.4})$$

Comme mentionné au chapitre 4, on peut remarquer que l'on obtient dans les deux cas la même efficacité η_{10}^{CO} à une constante près, et ce bien que l'approche de la modélisation du mécanisme de coalescence diffère selon le modèle utilisé.

Détaillons à présent le calcul du terme de source de coalescence avec le modèle Kamp *et al.* (2001) et la PDF Q2,¹ soit le calcul de (C.3b) en remplaçant $\mathcal{P}_\beta(d_i^*)$ par l'expression adimensionnelle de la PDF Q2 (2.64). On obtient ainsi :

$$\text{CO}_\gamma = 0,255 \, C_t \, n^2 \, \varepsilon_c^{1/3} \, d_{10}^{\gamma+7/3} \, \mathcal{I}_\gamma^{CO}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{CO}) \quad (\text{C.4})$$

avec $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$ une intégrale double fonction des deux paramètres sans dimension $\tilde{\sigma}^*$ et η_{10}^{CO} :^{2,3}

1. Les calculs de CO_γ en utilisant le modèle de coalescence de Prince et Blanch (1990) et/ou la PDF C2 étant similaires, ils ne seront pas détaillés ici.

2. En plus d'être sans dimension, ces deux paramètres présentent l'avantage d'avoir une valeur comprise entre 0 et 1.

3. On rappelle que Q_0^* , Q_1^* et Q_2^* sont des fonctions de $\tilde{\sigma}^*$ données par (2.65)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^{CO}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{CO}) = & \iint_{1-\tilde{\sigma}^*}^{1+\tilde{\sigma}^*} \left((d_1^{*3} + d_2^{*3})^{\gamma/3} - d_1^{*\gamma} - d_2^{*\gamma} \right) (d_1^* + d_2^*)^{7/3} (\eta_{10}^{CO})^{\eta(d_1^*, d_2^*)} \\ & \times (Q_2^* d_1^{*2} + Q_1^* d_1^* + Q_0^*) (Q_2^* d_2^{*2} + Q_1^* d_2^* + Q_0^*) dd_1^* dd_2^* \end{aligned} \quad (C.5)$$

Cette intégrale ne pouvant être résolue analytiquement, on va employer une méthode approchée semblable à celle utilisée par Kamp dans sa thèse (1996) et dont la méthodologie est détaillée ci-dessous.

- 1) Pour les deux valeurs de γ qui nous intéressent ($\gamma = 1$ et 2), on résout numériquement l'intégrale $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$ pour différents couples $(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{CO})$, de façon à obtenir une *tabulation* de la valeur de $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$ en fonction de $\tilde{\sigma}^*$ et η_{10}^{CO} .
- 2) Pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$, on interpole les valeurs tabulées par rapport à η_{10}^{CO} selon une loi puissance (cf. figure C.1) :

$$\mathcal{I}_\gamma^{CO}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{CO}) \cong c_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{10}^{CO c_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*)} \quad (C.6)$$

où les coefficients d'interpolation $c_{\gamma 1}$ et $c_{\gamma 2}$ dépendent de la valeur de $\tilde{\sigma}^*$.

- 3) On interpole ensuite les coefficients $c_{\gamma 1}$ et $c_{\gamma 2}$ par rapport à $\tilde{\sigma}^*$, également selon des lois puissances (cf. figure C.2) :

$$\begin{cases} c_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \cong c_{\gamma 11} + c_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 13}} \\ c_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \cong c_{\gamma 21} + c_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 23}} \end{cases} \quad (C.7a)$$

$$(C.7b)$$

- 4) Puis, on en déduit une expression mathématique approchée permettant d'évaluer $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$:

$$\mathcal{I}_\gamma^{CO}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{CO}) \cong (c_{\gamma 11} + c_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 13}}) \eta_{10}^{CO (c_{\gamma 21} + c_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 23}})} \quad (C.8)$$

Finalement, le terme source de coalescence peut être approché par l'expression suivante :

$$CO_\gamma \cong 0,255 C_i n^2 \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma+7/3} (c_{\gamma 11} + c_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 13}}) \eta_{10}^{CO (c_{\gamma 21} + c_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{* c_{\gamma 23}})} \quad (C.9)$$

où les valeurs des différents coefficients d'interpolation sont données dans le tableau C.1 pour les deux modèles de coalescence et les deux PDF qui nous intéressent.

C.2 Détermination du terme source de fragmentation homogène

Comme on l'a montré au paragraphe 4.3.2, le modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990) appliqué à notre formalisme donne le terme source suivant :

$$\begin{aligned} BU_\gamma = & 0,222 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \\ & \times \int_{d_{min}}^{d_{max}} \int_{\mathcal{K}_e}^d \frac{d^\gamma}{d_e^4} (d + d_e)^2 \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}} \exp \left(- \frac{We_{cr}^T \sigma}{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}} \right) \mathcal{P}_\beta(d) dd_e dd. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En suivant le même raisonnement que pour le calcul du terme source de coalescence, on effectue le changement de variables (C.2) et on introduit les diamètres adimensionnels d^* et d_e^* . Le terme source de fragmentation s'écrit désormais :

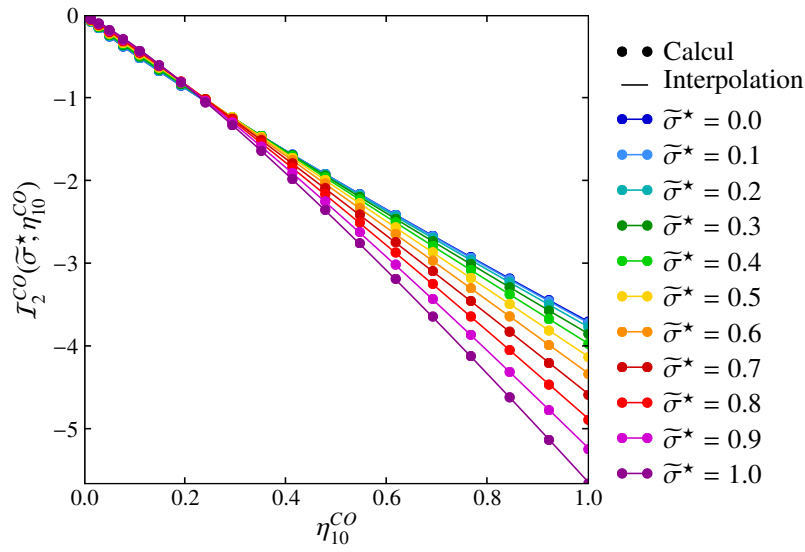


FIG. C.1 – Calcul numérique et interpolation de l'intégrale I_2^{CO} en fonction de η_{10}^{CO} et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001) avec la PDF Q2.

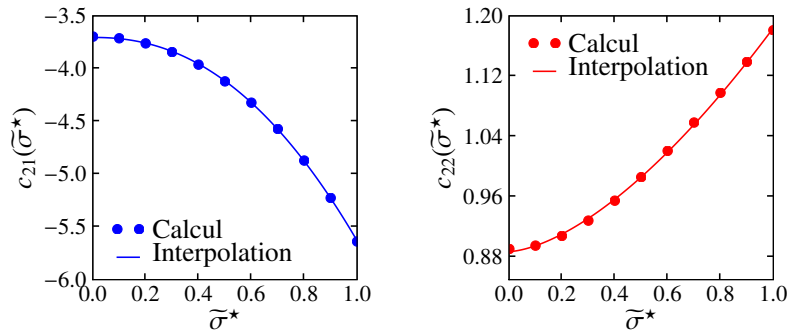


FIG. C.2 – Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation c_{21} et c_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001) avec la PDF Q2.

	γ	PDF	$c_{\gamma 11}$	$c_{\gamma 12}$	$c_{\gamma 13}$	$c_{\gamma 21}$	$c_{\gamma 21}$	$c_{\gamma 23}$
PB90	1	Q2	-7,448	-1,755	2,159	1,000	0,142	2,035
		C2	-7,460	-2,182	2,597	1,000	0,174	2,390
	2	Q2	-4,158	-2,136	2,230	1,000	0,215	1,940
		C2	-4,176	-2,724	2,725	1,000	0,267	2,287
KCCF01	1	Q2	-6,635	-1,615	2,155	0,888	0,255	1,611
		C2	-6,647	-2,007	2,597	0,890	0,312	1,917
	2	Q2	-3,705	-1,928	2,224	0,887	0,297	1,585
		C2	-3,720	-2,458	2,720	0,889	0,370	1,890

TAB. C.1 – Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source CO_γ pour les modèles de coalescence PB90 (Prince et Blanch, 1990) et KCCF01 (Kamp *et al.*, 2001).

$$\begin{aligned} \text{BU}_\gamma &= 0,222 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma+1/3} \\ &\times \int_{d_{\min}^*}^{d_{\max}^*} \int_{\mathcal{K}_e d^*}^{d^*} \frac{d^{\star\gamma}}{d_e^{\star 4}} (d^* + d_e^*)^2 \sqrt{d^{\star 2/3} + d_e^{\star 2/3}} (\eta_{10}^{BU})^{\eta(d^*)} \mathcal{P}_\beta(d^*) dd_e^* dd^* \end{aligned} \quad (\text{C.10a})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_{10}^{BU} &\triangleq \exp \left(- \frac{\text{We}_{cr}^T \sigma}{2 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d_{10}^{5/3}} \right) = \exp \left(- \frac{\text{We}_{cr}^T}{\text{We}_{10}^T} \right) \\ \eta(d^*) &\triangleq d^{\star -5/3} \end{aligned} \right. \quad (\text{C.10b})$$

$$(\text{C.10c})$$

où l'on rappelle que le nombre de Weber turbulent moyen We_{10}^T est donné par la relation (C.3a.4).

À nouveau, seul le calcul du terme source avec la PDF Q2 sera présenté ici, l'expression obtenue en prenant la PDF C2 pouvant facilement en être déduite. En remplaçant $\mathcal{P}_\beta(d^*)$ par l'expression adimensionnelle de la PDF Q2 (2.64), on peut écrire le terme source de fragmentation sous la forme suivante :

$$\text{BU}_\gamma = 0,167 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma-2/3} \mathcal{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \quad (\text{C.11})$$

avec $\mathcal{I}_\gamma^{BU}$ une intégrale fonction des deux paramètres sans dimension $\tilde{\sigma}^*$ et η_{10}^{BU} :³

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) &= \int_{1-\tilde{\sigma}^*}^{1+\tilde{\sigma}^*} \int_{\mathcal{K}_e d^*}^{d^*} \frac{d^{\star\gamma}}{d_e^{\star 4}} (d^* + d_e^*)^2 \sqrt{d^{\star 2/3} + d_e^{\star 2/3}} (\eta_{10}^{BU})^{\eta(d^*)} \\ &\times (Q_2^* d^{\star 2} + Q_1^* d^* + Q_0^*) dd_e^* dd^* \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

L'évaluation de cette intégrale double peut être effectuée de la même façon que celle du terme source de coalescence. Pour des raisons numériques, plutôt que d'interpoler directement $\mathcal{I}_\gamma^{BU}$ préférera cependant interpoler l'intégrale $\tilde{\mathcal{I}}_\gamma^{BU}$ définie telle que :

$$\tilde{\mathcal{I}}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \tilde{\eta}_{10}^{BU}) = \tilde{\sigma}^* \mathcal{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \quad (\text{C.13a})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{1-\tilde{\sigma}^*}^{1+\tilde{\sigma}^*} \int_{\mathcal{K}_e d^*}^{d^*} \tilde{\sigma}^* \frac{d^{\star\gamma}}{d_e^{\star 4}} (d^* + d_e^*)^2 \sqrt{d^{\star 2/3} + d_e^{\star 2/3}} (\tilde{\eta}_{10}^{BU})^{\tilde{\eta}(d^*)} \\ &\times (Q_2^* d^{\star 2} + Q_1^* d^* + Q_0^*) dd_e^* dd^* \end{aligned} \quad (\text{C.13b})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\eta}_{10}^{BU} &\triangleq \exp \left(- \frac{\text{We}_{cr}^T}{2 \text{We}_{10}^T} \right) = \sqrt{\eta_{10}^{BU}} \\ \tilde{\eta}(d^*) &\triangleq 2 d^{\star -5/3} = 2 \eta(d^*). \end{aligned} \right. \quad (\text{C.13b})$$

$$(\text{C.13c})$$

On procède ensuite comme indiqué ci-dessous.

- 1) Pour les deux valeurs de γ qui nous intéressent ($\gamma = 1$ et 2), on résout numériquement l'intégrale $\tilde{\mathcal{I}}_\gamma^{BU}$ pour différents couples $(\tilde{\sigma}^*, \tilde{\eta}_{10}^{BU})$.
- 2) Pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$, on interpole les valeurs tabulées par rapport à $\tilde{\eta}_{10}^{BU}$ selon une loi polynomiale (cf. figure C.3) :

$$\tilde{\mathcal{I}}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \cong b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \tilde{\eta}_{10}^{BU} + b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \tilde{\eta}_{10}^{BU 3}. \quad (\text{C.14})$$

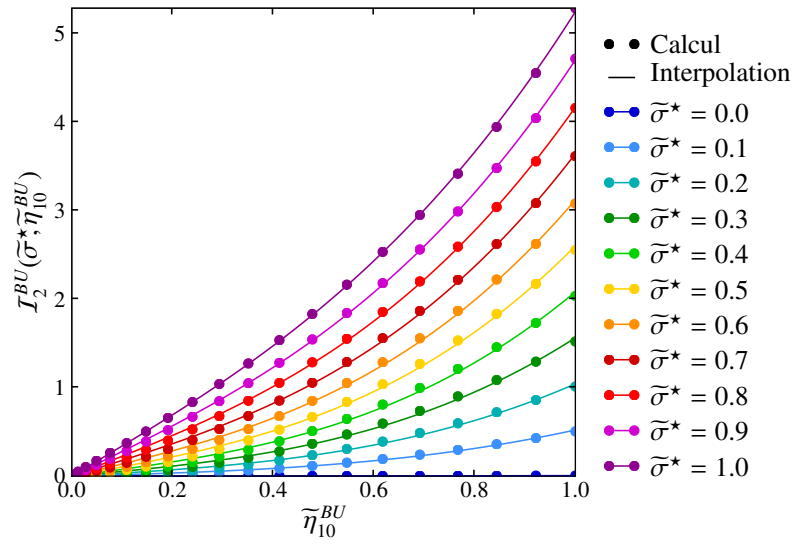


FIG. C.3 – Calcul numérique et interpolation de l'intégrale I_2^{BU} en fonction de $\tilde{\eta}_{10}^{BU}$ et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_e=0,65$.

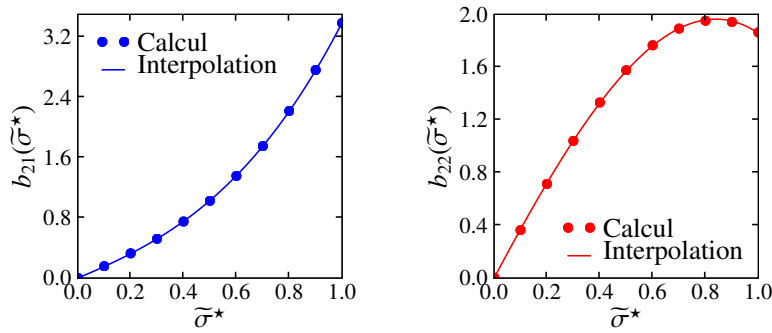


FIG. C.4 – Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation b_{21} et b_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_e=0,65$.

	γ	PDF	$b_{\gamma 11}$	$b_{\gamma 12}$	$b_{\gamma 13}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 23}$
$\mathcal{K}_e = 0,65$	1	Q2	1,587	-0,165	0,690	3,653	0,065	-1,079
		C2	1,658	-0,519	1,032	3,537	0,672	-1,707
	2	Q2	1,480	0,408	1,502	3,780	-0,635	-1,288
		C2	1,658	-0,610	2,728	3,623	0,300	-2,454
$\mathcal{K}_e = 0,79$	1	Q2	0,703	-0,073	0,306	1,617	0,029	-0,478
		C2	0,734	-0,230	0,457	1,566	0,297	-0,756
	2	Q2	0,655	0,181	0,665	1,673	-0,281	-0,570
		C2	0,734	-0,270	1,208	1,604	0,133	-1,087

TAB. C.2 – Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation homogène de Prince et Blanch (1990).

- 3) On interpole ensuite les coefficients $b_{\gamma 1}$ et $b_{\gamma 2}$ par rapport à $\tilde{\sigma}^*$, également selon des lois polynomiales (cf. figure C.4) :

$$\begin{cases} b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 11} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{*2} + b_{\gamma 13} \tilde{\sigma}^{*3} \\ b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 21} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{*2} + b_{\gamma 23} \tilde{\sigma}^{*3} . \end{cases} \quad \begin{matrix} (C.15a) \\ (C.15b) \end{matrix}$$

- 4) On en déduit une expression permettant d'évaluer $\tilde{\mathcal{I}}_{\gamma}^{BU}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_{\gamma}^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \tilde{\eta}_{10}^{BU}) \\ \cong (b_{\gamma 11} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{*2} + b_{\gamma 13} \tilde{\sigma}^{*3}) \tilde{\eta}_{10}^{BU} + (b_{\gamma 21} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{*2} + b_{\gamma 23} \tilde{\sigma}^{*3}) \tilde{\eta}_{10}^{BU3} . \end{aligned} \quad (C.16)$$

- 5) Enfin, on en déduit une expression mathématique approchée permettant d'évaluer $\mathcal{I}_{\gamma}^{BU}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\gamma}^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \\ \cong (b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 13} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 23} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU3/2} . \end{aligned} \quad (C.17)$$

Finalement, le terme source de fragmentation homogène s'écrit :

$$\begin{aligned} BU_{\gamma} \cong 0,167 \left(2^{1-\gamma/3} - 1 \right) (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma-2/3} \\ \times \left((b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 13} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 23} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU3/2} \right) \end{aligned} \quad (C.18)$$

où les valeurs des différents coefficients d'interpolation sont données dans le tableau C.2 pour les deux PDF et pour différentes valeurs du coefficient $\mathcal{K}_e$.

C.3 Détermination du terme source de fragmentation hétérogène

Le terme source de fragmentation hétérogène écrit au paragraphe 4.3.2 et que l'on cherche maintenant à approcher est le suivant :

$$\begin{aligned} BU_{\gamma} = 0,923 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} \int_0^{1/2} \int_{d_{min}}^{d_{max}} \int_{\xi_{min}^*(d)}^1 d^{\gamma-2/3} \left(f_{BV}^{\gamma/3} + (1 - f_{BV})^{\gamma/3} - 1 \right) \mathcal{P}_{\beta}(d) \frac{(1 + \xi^*)^2}{\xi^{*11/3}} \\ \times \exp \left(- \frac{12 \left(f_{BV}^{2/3} + (1 - f_{BV})^{2/3} - 1 \right)}{We_b^T(d) \xi^{*11/3}} \right) d\xi^* dd df_{BV} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pour évaluer l'intégrale triple, commençons tout d'abord par effectuer un changement de variable sur la deuxième intégrale. Comme précédemment, on pose $d^* \triangleq d/d_{10}$, et en prenant en outre $\xi_{min}^*(d_{10}) \approx 0,25$ (cf. paragraphe 4.3.2), le terme source s'écrit :

$$BU_{\gamma} = 0,923 (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma+1/3} \mathcal{I}_{\gamma}^{BU} \quad (C.19)$$

192

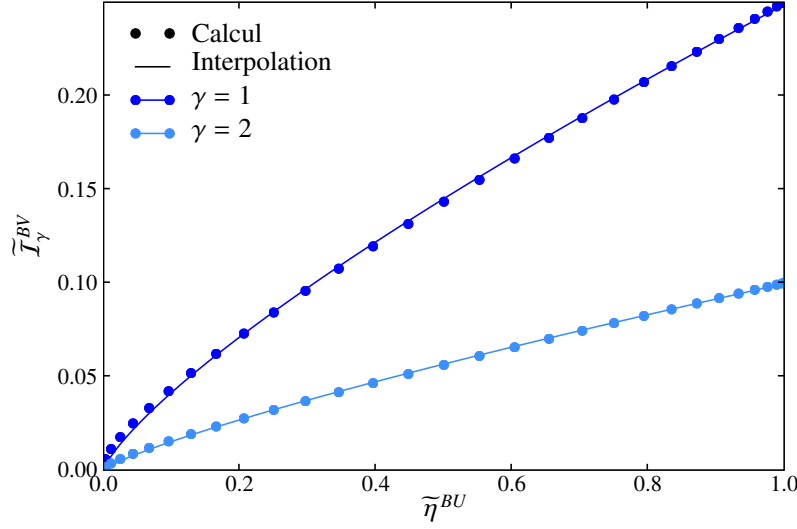


FIG. C.5 – Calcul numérique et interpolation de l'intégrale $\tilde{I}_\gamma^{BU}$ en fonction de $\tilde{\eta}^{BU}$ (modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec $\mathcal{K}_{LS} = 0,25$).

$$\tilde{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \triangleq \int_{1-\tilde{\sigma}^*}^{1+\tilde{\sigma}^*} \int_{\mathcal{K}_{LS}/d^*}^1 \tilde{\sigma}^* d^{*\gamma-2/3} (Q_2^* d^{*2} + Q_1^* d^* + Q_0^*) \frac{(1 + \xi^*)^2}{\xi^{*11/3}} (\eta_{10}^{BU})^{\frac{b_\gamma}{d^{*5/3} \xi^{*11/3}}} d\xi^* dd^* \quad (C.25)$$

puis on suit la démarche ci-dessous.

- 1) Pour les deux valeurs de γ qui nous intéressent ($\gamma = 1$ et 2), on résout numériquement l'intégrale $\tilde{I}_\gamma^{BU}$ pour différents couples $(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU})$.
- 2) Pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$, on interpole les valeurs tabulées par rapport à η_{10}^{BU} avec la fonction suivante (cf. figure C.6) :

$$\tilde{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \cong b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{10}^{BU 1/2} + b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{10}^{BU 2} + b_{\gamma 3}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{10}^{BU 15}. \quad (C.26)$$

- 3) On interpole ensuite les coefficients $b_{\gamma 1}$, $b_{\gamma 2}$ et $b_{\gamma 3}$ par rapport à $\tilde{\sigma}^*$, également selon des lois polynomiales (cf. figure C.7) :

$$\begin{cases} b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 11} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{*3} \end{cases} \quad (C.27a)$$

$$\begin{cases} b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 21} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{*2} \end{cases} \quad (C.27b)$$

$$\begin{cases} b_{\gamma 3}(\tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 31} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 32} \tilde{\sigma}^{*2}. \end{cases} \quad (C.27c)$$

- 4) On en déduit une expression permettant d'évaluer $\tilde{I}_\gamma^{BU}$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{10}^{BU}) \cong & (b_{\gamma 11} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{*3}) \eta_{10}^{BU 1/2} \\ & + (b_{\gamma 21} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU 2} + (b_{\gamma 31} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 32} \tilde{\sigma}^{*2}) \eta_{10}^{BU 15}. \end{aligned} \quad (C.28)$$

- 5) Enfin, on en déduit une expression mathématique approchée permettant d'évaluer $\mathcal{I}_\gamma^{BU}$:

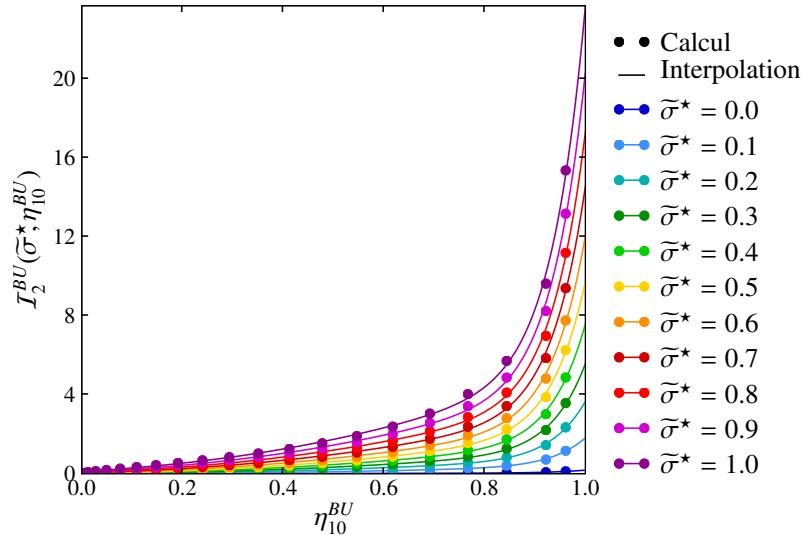


FIG. C.6 – Calcul numérique et interpolation de l'intégrale I_2^{BU} en fonction de η_{10}^{BU} et pour différentes valeurs de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_{LS} = 0,25$.

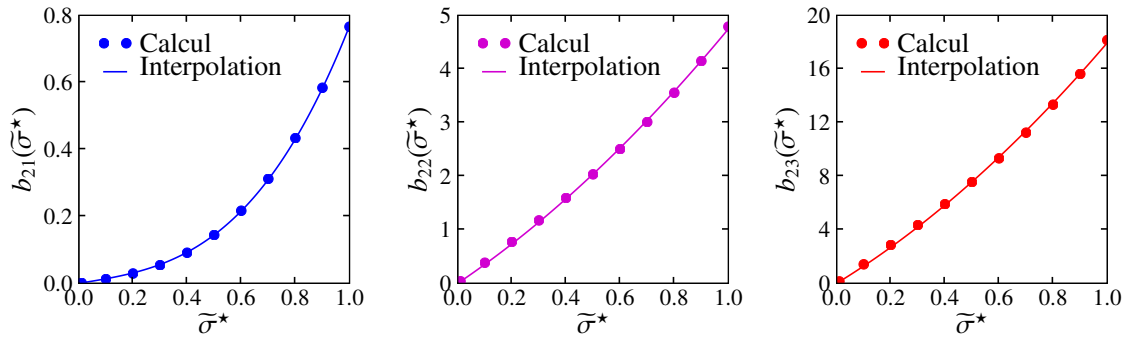


FIG. C.7 – Calcul numérique et interpolation des coefficients d'interpolation b_{21} et b_{22} en fonction de $\tilde{\sigma}^*$. Modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) avec la PDF Q2 et $\mathcal{K}_{LS} = 0,25$.

γ	$\mathcal{K}_{BV\gamma}$	PDF	$b_{\gamma 11}$	$b_{\gamma 12}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 22}$	$b_{\gamma 31}$	$b_{\gamma 32}$
1	0,249	Q2	0,169	0,357	3,948	-0,074	14,361	0,317
		C2	0,138	0,458	3,965	-0,116	14,288	0,480
2	0,100	Q2	0,130	0,639	3,409	1,340	12,347	5,613
		C2	0,062	0,892	3,217	1,703	11,369	7,543

TAB. C.3 – Valeurs des coefficients d'interpolation du terme source BU_γ pour le modèle de fragmentation hétérogène de Luo et Svendsen (1996) ($\mathcal{K}_{LS} = 0,25$).

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^{BU}(d_{10}, \tilde{\sigma}^\star, \eta_{10}^{BU}) \\ \cong \frac{3}{4} \frac{\mathcal{K}_{BV\gamma}}{d_{10}} \left((b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{\star 2}) \eta_{10}^{BU \ 1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^\star) \eta_{10}^{BU \ 2} + (b_{\gamma 31} + b_{\gamma 32} \tilde{\sigma}^\star) \eta_{10}^{BU \ 15} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Le terme source de fragmentation hétérogène s'écrit finalement comme suit :

$$\begin{aligned} \text{BU}_\gamma \cong 0,692 \mathcal{K}_{BV\gamma} (1 - \alpha_d) n \varepsilon_c^{1/3} d_{10}^{\gamma-2/3} \\ \times \left((b_{\gamma 11} + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{\star 2}) \eta_{10}^{BU \ 1/2} + (b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^\star) \eta_{10}^{BU \ 2} + (b_{\gamma 31} + b_{\gamma 32} \tilde{\sigma}^\star) \eta_{10}^{BU \ 15} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

où les valeurs des différents coefficients d'interpolation pour les deux PDF qui nous intéressent sont données dans le tableau C.3.

Annexe D

Calcul du taux de changement de phase géométrique moyen

Cette annexe, détaille l'obtention du taux de changement de phase géométrique moyen, Γ_γ , établi au chapitre 5. Celui-ci est donné par la relation (5.13) rappelée ci-dessous :

$$\Gamma_\gamma \triangleq -\frac{2\gamma}{\rho_d} \lambda_c \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\Omega_v} \right) n \left(c_0 \mathcal{I}_{\gamma 0}^{PC} + c_1 \text{Pr}_c^{c_3} \left(\mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC} + \mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC} + \mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC} \right) \right) \quad (\text{D.1a})$$

avec les définitions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{\gamma 0}^{PC} \triangleq \int_{d_{min}}^{d_{max}} \beta^{\gamma-2} \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \end{array} \right. \quad (\text{D.1b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC} \triangleq \int_{d_{min}}^{d_{rac}^{p_{12}}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_1}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \end{array} \right. \quad (\text{D.1c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC} \triangleq \int_{d_{rac}^{p_{12}}}^{d_{rac}^{p_{23}}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_2}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \end{array} \right. \quad (\text{D.1d})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC} \triangleq \int_{d_{rac}^{p_{23}}}^{d_{max}} \beta^{\gamma-2} \text{Re}_{b_3}^{c_2}(\beta) \mathcal{P}_\beta(\beta) d\beta \end{array} \right. \quad (\text{D.1e})$$

Détaillons à présent le calcul des quatre intégrales $\mathcal{I}_{\gamma 0}^{PC}$, $\mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC}$, $\mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC}$ et $\mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC}$.

D.1 Calcul des différentes intégrales

L'intégrale $\mathcal{I}_{\gamma 0}^{PC}$ est particulière car elle est égale au rapport de la densité de moment d'ordre $(\gamma-2)$ sur la densité de moment d'ordre 0. Pour les deux ordres qui nous intéressent dans le cadre de la méthode des moments ($\gamma=2$ et 1), il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{10}^{PC} = \frac{\mathcal{M}_{-1}}{\mathcal{M}_0} = \frac{1}{d_{10}} \int_{d_{min}^*}^{d_{max}^*} \frac{\mathcal{P}_\beta(\beta^*)}{\beta^*} d_{10} d\beta^* \triangleq \mathcal{I}_{10}^{PC*} \end{array} \right. \quad (\text{D.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{20}^{PC} = 1. \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

où l'on a effectué le même changement de variable qu'à l'annexe B pour le calcul des forces moyennes polydisperses ($\beta^* \triangleq \beta/d_{10}$). Le calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_{10}^{PC*}$ donne ainsi :

a) pour la PDF Q2 : ¹

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{10}^{PC*} &= \frac{1}{d_{10}} \frac{3}{4} \int_{1-\bar{\sigma}^*}^{1+\bar{\sigma}^*} \left(Q_2^*(\bar{\sigma}^*) \beta^* + Q_1^*(\bar{\sigma}^*) + Q_0^*(\bar{\sigma}^*) \frac{1}{\beta^*} \right) d\beta^* \\ &= \frac{1}{d_{10}} \frac{3}{4 \bar{\sigma}^{*3}} \left(2 \bar{\sigma}^* - (\bar{\sigma}^{*2} - 1) \ln \left| \frac{\bar{\sigma}^* - 1}{\bar{\sigma}^* + 1} \right| \right)\end{aligned}\quad (\text{D.4a})$$

b) pour la PDF C2 : ¹

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{10}^{PC*} &= \frac{1}{d_{10}} \frac{3}{4} \int_{\frac{5(1-\bar{\sigma}^*)}{5-\bar{\sigma}^*}}^{\frac{5(1+\bar{\sigma}^*)}{5-\bar{\sigma}^*}} \left(C_3^*(\bar{\sigma}^*) \beta^{*2} + C_2^*(\bar{\sigma}^*) \beta^* + C_1^*(\bar{\sigma}^*) + C_0^*(\bar{\sigma}^*) \frac{1}{\beta^*} \right) d\beta^* \\ &= \frac{1}{d_{10}} \frac{3}{20 \bar{\sigma}^{*4}} \left(2 \bar{\sigma}^* (2 \bar{\sigma}^{*2} - 3 \bar{\sigma}^* - 3) + 3 (\bar{\sigma}^* - 5) (\bar{\sigma}^* - 1) (\bar{\sigma}^* + 1)^2 \ln \left| \frac{\bar{\sigma}^* - 1}{\bar{\sigma}^* + 1} \right| \right).\end{aligned}\quad (\text{D.4b})$$

Le calcul des intégrales $\mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC}$, $\mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC}$ et $\mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC}$ s'effectue en suivant la même démarche que pour le calcul des forces hydrodynamiques moyennes (cf. annexe B). Aussi, après avoir appliqué le changement de variable $\beta^* \triangleq \beta/d_{10}$, l'intégrale $\mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\gamma 1}^{PC} &= d_{10}^{\gamma-2} \text{Re}_{110}^{c_2} \int_{d_{min}^*}^{d_{rac}^{D_{12}^*}} \mathcal{P}_{\beta}(\beta^*) \beta^{*c_{\gamma 1}^*} d_{10} d\beta^* \\ &= d_{10}^{\gamma-2} \text{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{**}(c_{\gamma 1}^*, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}^*})\end{aligned}\quad (\text{D.5a})$$

avec :

$$\begin{cases} c_{\gamma 1}^* \triangleq \frac{12}{7} c_2 + \gamma - 2 \\ \text{Re}_{110} \triangleq \text{Re}_{b1}(d_{10}) = \left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g d_{10}^3}{\nu_c^2} \right)^{4/7} \end{cases}\quad (\text{D.5b})$$

$$\quad \quad \quad \left(\frac{5}{9} (1 - \alpha_d) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g d_{10}^3}{\nu_c^2} \right)^{4/7} \quad (\text{D.5c})$$

et où l'on voit apparaître la fonction φ_{**} définie au début de l'annexe B pour les deux types de PDF (cf. équations B.1a et B.1b). En suivant la même démarche, l'intégrale $\mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC}$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\gamma 2}^{PC} &= d_{10}^{\gamma-2} \text{Re}_{210}^{c_2} \int_{d_{rac}^{D_{12}^*}}^{d_{rac}^{D_{23}^*}} \mathcal{P}_{\beta}(\beta^*) \beta^{*c_{\gamma 2}^*} d_{10} d\beta^* \\ &= d_{10}^{\gamma-2} \text{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{**}(c_{\gamma 2}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}, d_{rac}^{D_{23}^*})\end{aligned}\quad (\text{D.6a})$$

avec :

$$\begin{cases} c_{\gamma 2}^* \triangleq c_2 + \gamma - 2 \\ \text{Re}_{210} \triangleq \text{Re}_{b2}(d_{10}) = \left(2 \left(\frac{1 - \alpha_d}{\varphi^D(\alpha_d)} \right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \zeta^* \frac{g d_{10}^3}{\nu_c^2} \right)^{1/2} \end{cases}\quad (\text{D.6b})$$

$$\left(2 \left(\frac{1 - \alpha_d}{\varphi^D(\alpha_d)} \right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \zeta^* \frac{g d_{10}^3}{\nu_c^2} \right)^{1/2} \quad (\text{D.6c})$$

où la longueur capillaire adimensionnelle est définie par $\zeta^* \triangleq \zeta/d_{10}$. Enfin, le calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC}$ donne :

1. On rappelle que les coefficients Q_i^* et C_i^* sont des fonctions de $\bar{\sigma}^*$ données respectivement par (2.65) et (2.78).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{\gamma 3}^{PC} &= d_{10}^{\gamma-2} \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \int_{d_{rac}^{D_{23}^*}}^{d_{max}^*} \mathcal{P}_{\beta}(\beta^*) \beta^* c_{\gamma 3}^* d_{10} d\beta^* \\
 &= d_{10}^{\gamma-2} \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{**}(c_{\gamma 3}^*, d_{rac}^{D_{23}^*}, d_{max}^*)
 \end{aligned} \tag{D.7a}$$

avec :

$$\begin{cases} c_{\gamma 3}^* \triangleq \frac{3}{2} c_2 + \gamma - 2 \\ \operatorname{Re}_{310} \triangleq \operatorname{Re}_{b3}(d_{10}) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha_d} \right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right) \frac{g d_{10}^3}{\nu_c^2} \right)^{1/2} \end{cases} \tag{D.7b}$$

D.2 Écriture finale du terme source

Compte tenu des résultats précédents, le taux de changement de phase géométrique moyen peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\Gamma_{\gamma} = - \frac{2\gamma}{\rho_d} \frac{\lambda_c \operatorname{Nu}_{c\gamma}^{**}}{d_{10}^2} \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{\mathfrak{L}_v} \right) \mathcal{M}_{\gamma} \tag{D.8}$$

où $\operatorname{Nu}_{c\gamma}^{**}$ désigne un *nombre de Nusselt géométrique* défini par :

a) pour la loi Q2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Nu}_{c1}^{Q2} &\triangleq c_0 \mathcal{I}_{10}^{PC*} + c_1 \operatorname{Pr}_c^{c_3} \left(\operatorname{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{11}^*, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}) + \operatorname{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{12}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}, d_{rac}^{D_{23}^*}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{13}^*, d_{rac}^{D_{23}^*}, d_{max}^*) \right) \end{aligned} \right. \tag{D.9a.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Nu}_{c2}^{Q2} &\triangleq \left(\frac{5}{\tilde{\sigma}^{*2} + 5} \right) \left(c_0 + c_1 \operatorname{Pr}_c^{c_3} \left(\operatorname{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{21}^*, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}) + \operatorname{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{22}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}, d_{rac}^{D_{23}^*}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{Q2}(c_{23}^*, d_{rac}^{D_{23}^*}, d_{max}^*) \right) \right) \end{aligned} \right. \tag{D.9a.2}$$

b) pour la loi C2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Nu}_{c1}^{C2} &\triangleq c_0 \mathcal{I}_{10}^{PC*} + c_1 \operatorname{Pr}_c^{c_3} \left(\operatorname{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{11}^*, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}) + \operatorname{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{12}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}, d_{rac}^{D_{23}^*}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{13}^*, d_{rac}^{D_{23}^*}, d_{max}^*) \right) \end{aligned} \right. \tag{D.9b.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Nu}_{c2}^{C2} &\triangleq \frac{(\tilde{\sigma}^* - 5)^2}{5(\tilde{\sigma}^{*2} - 2\tilde{\sigma}^* + 5)} \left(c_0 + c_1 \operatorname{Pr}_c^{c_3} \left(\operatorname{Re}_{110}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{21}^*, d_{min}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Re}_{210}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{22}^*, d_{rac}^{D_{12}^*}, d_{rac}^{D_{23}^*}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Re}_{310}^{c_2} \varphi_{C2}(c_{23}^*, d_{rac}^{D_{23}^*}, d_{max}^*) \right) \right) \end{aligned} \right. \tag{D.9b.2}$$

où l'on s'est servi des relations géométriques (B.9) pour éliminer n dans les expressions de $\operatorname{Nu}_{c2}^{**}$.

On rappelle également que d_{min}^* et d_{max}^* sont des fonctions de $\tilde{\sigma}^*$ données respectivement par les systèmes (2.66) et (A.12) pour les lois Q2 et C2.

Annexe E

Résultats des différents calculs DEBORA

Dans cette annexe sont regroupées les différentes planches de résultats issues de la simulation de l'expérience DEBORA traitée au chapitre 8.

DEBORA – Essai 4

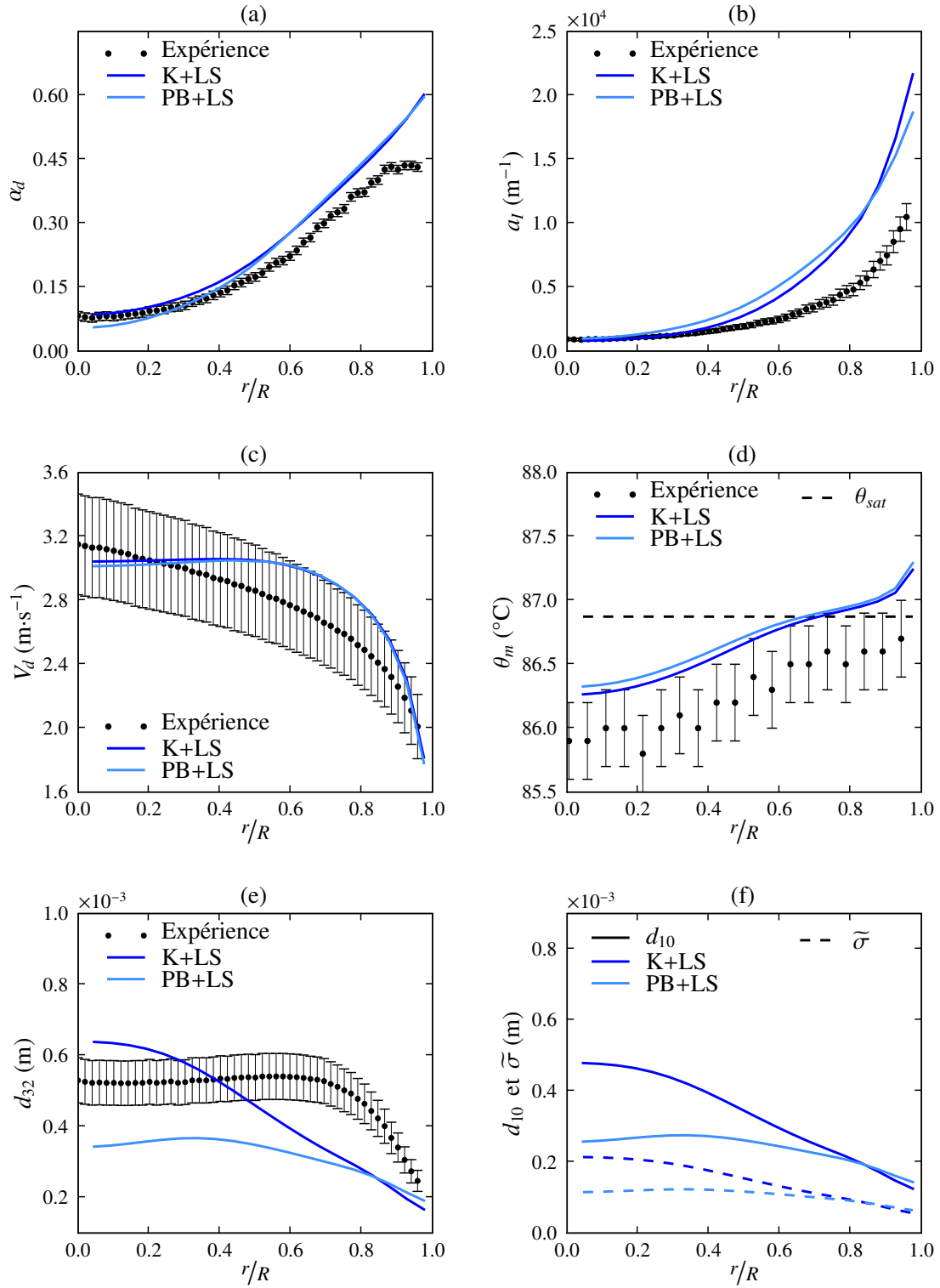


FIG. E.1 – Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Luo et Svendsen (1996) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 4

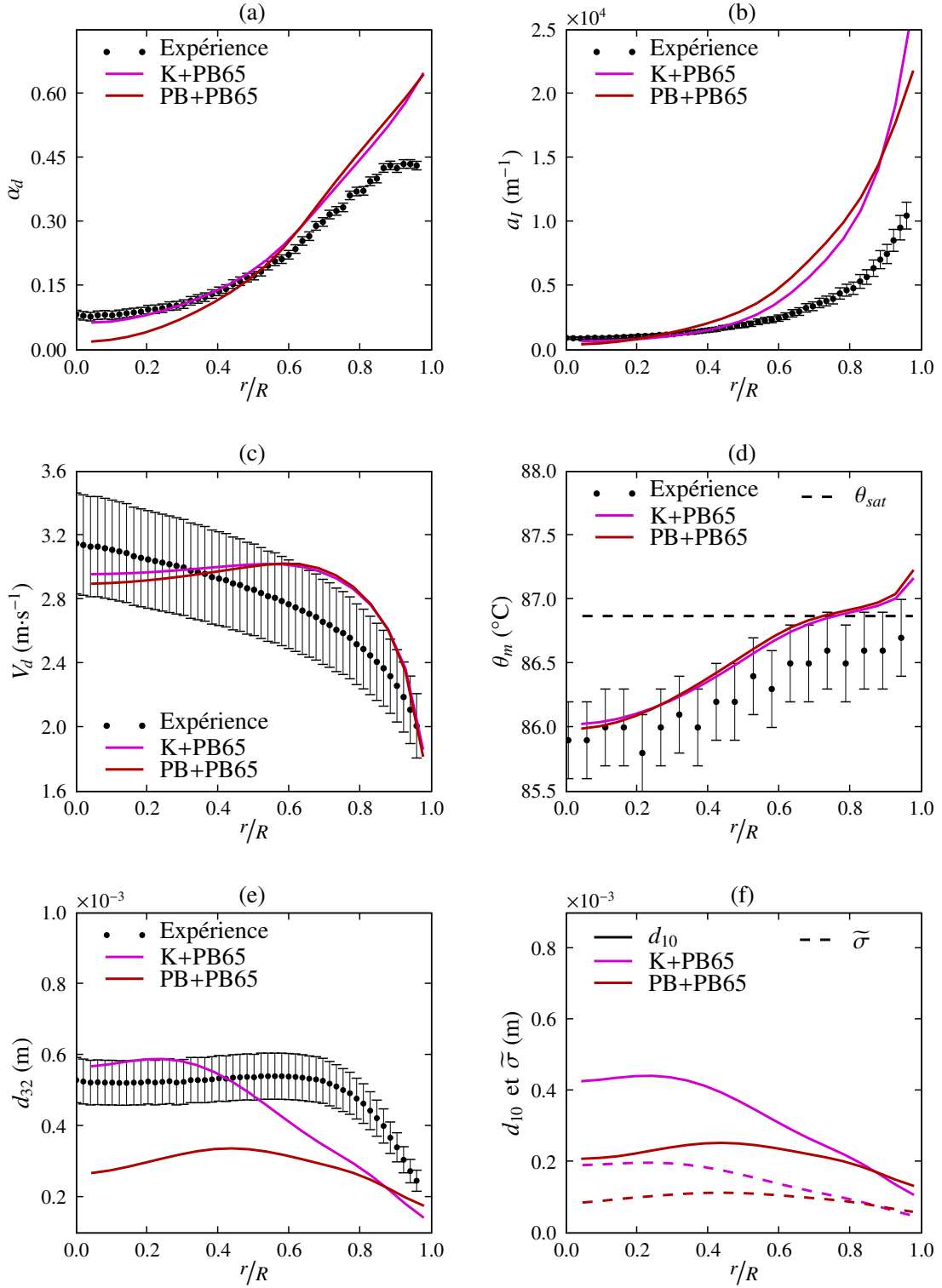


FIG. E.2 – Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e = 0,65$) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z = 4,485$ m.

DEBORA – Essai 4

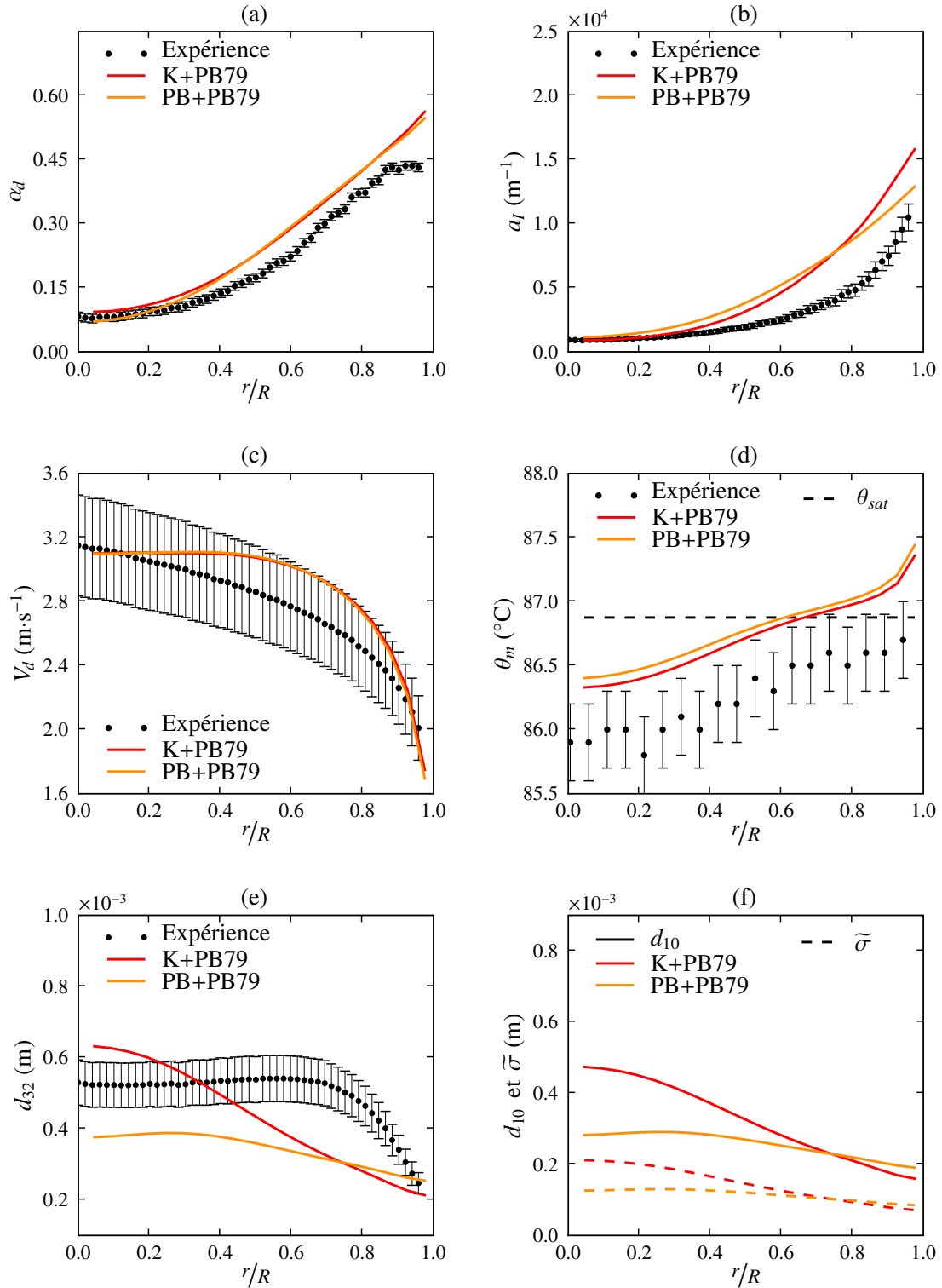


FIG. E.3 – Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de fragmentation de Prince et Blanch (1990) ($\mathcal{K}_e = 0,79$) et les deux modèles de coalescence. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z = 4,485 \text{ m}$.

DEBORA – Essai 4

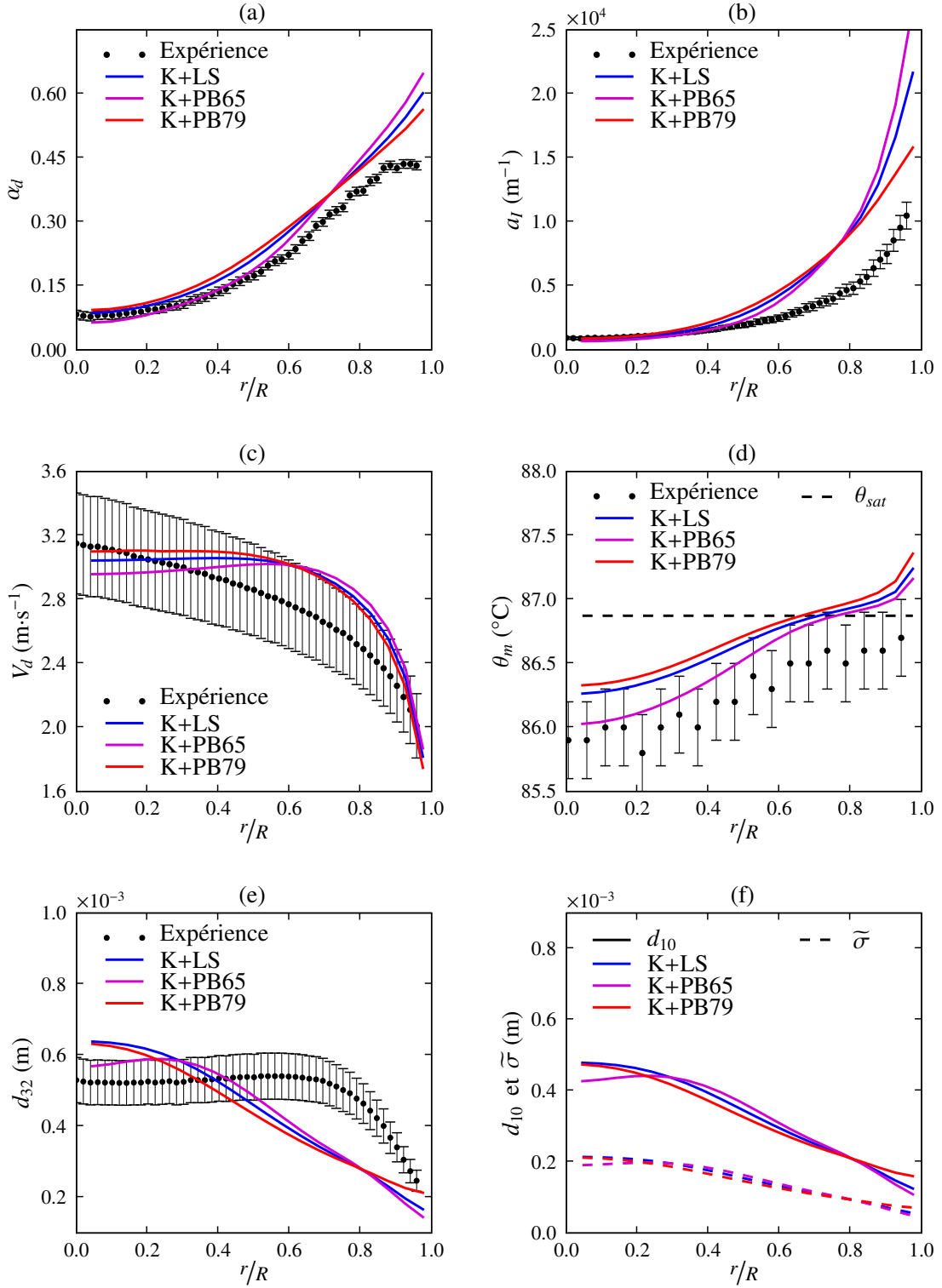


FIG. E.4 – Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 4 et des résultats numériques obtenus avec le modèle de coalescence de Kamp *et al.* (2001) et les différents modèles de fragmentation. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 1

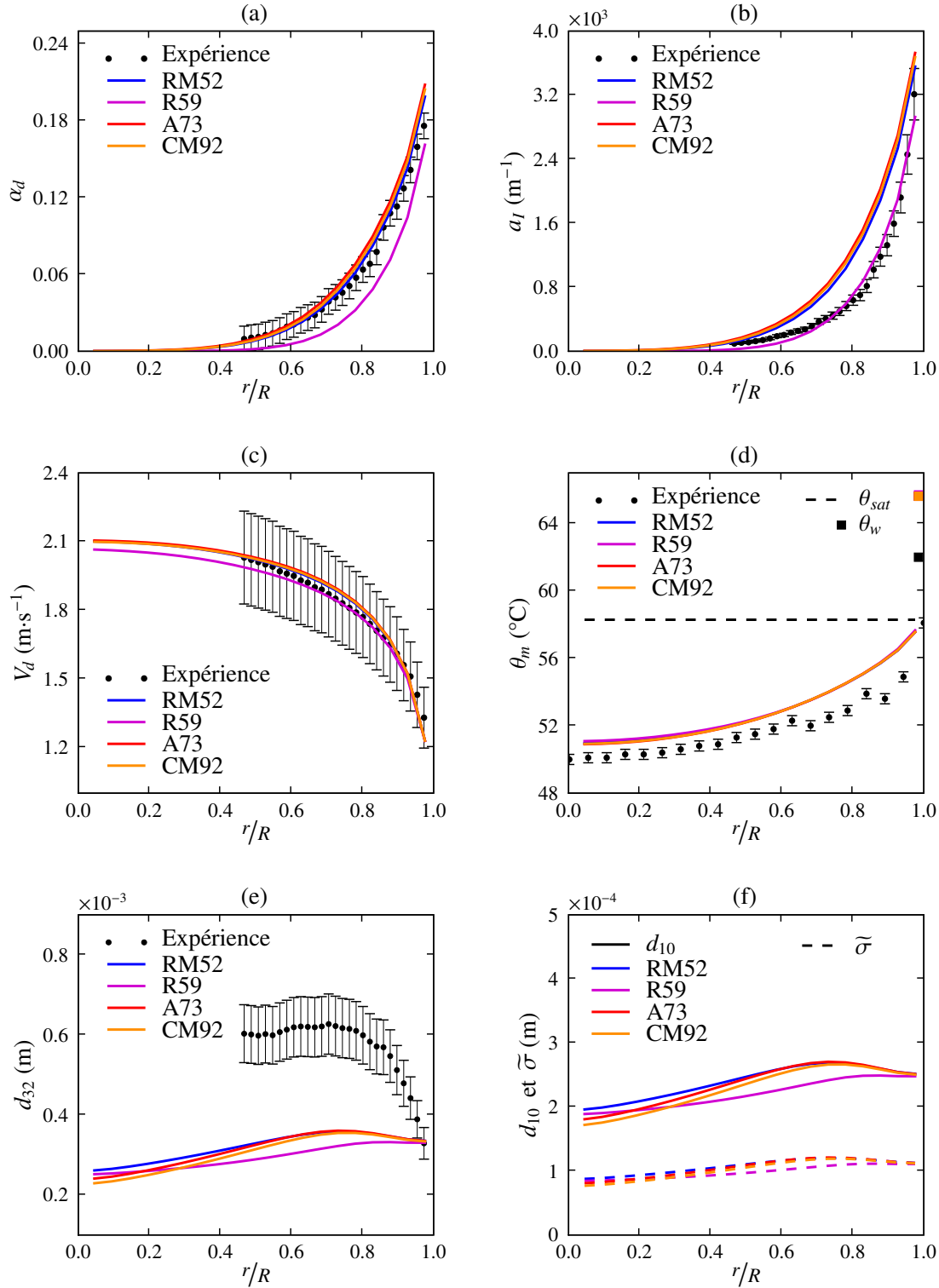
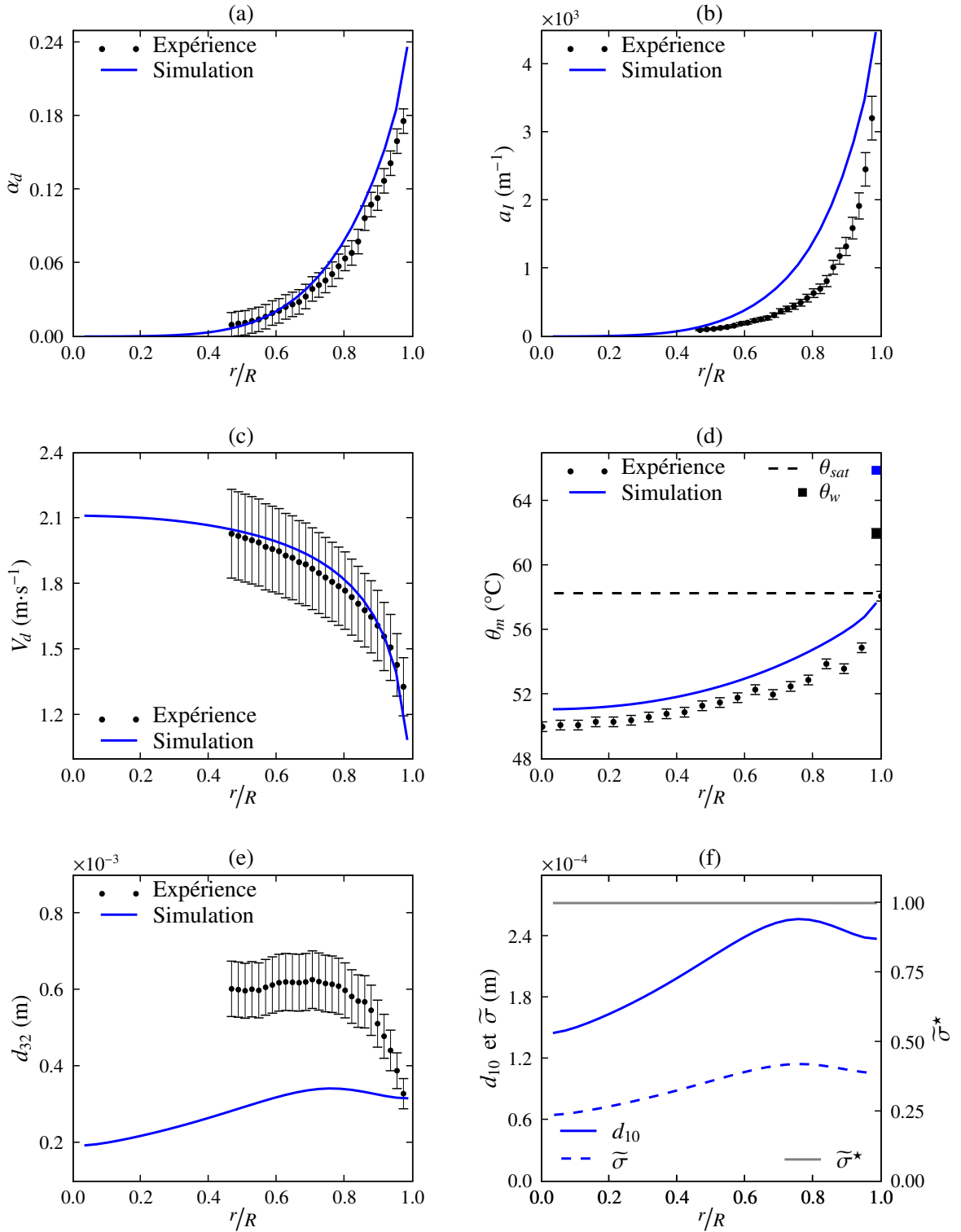


FIG. E.5 – Comparaison des données expérimentales de l'essai DEBORA 1 et des résultats numériques obtenus avec différentes corrélations de Nusselt. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 1


 FIG. E.6 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 1 à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 1

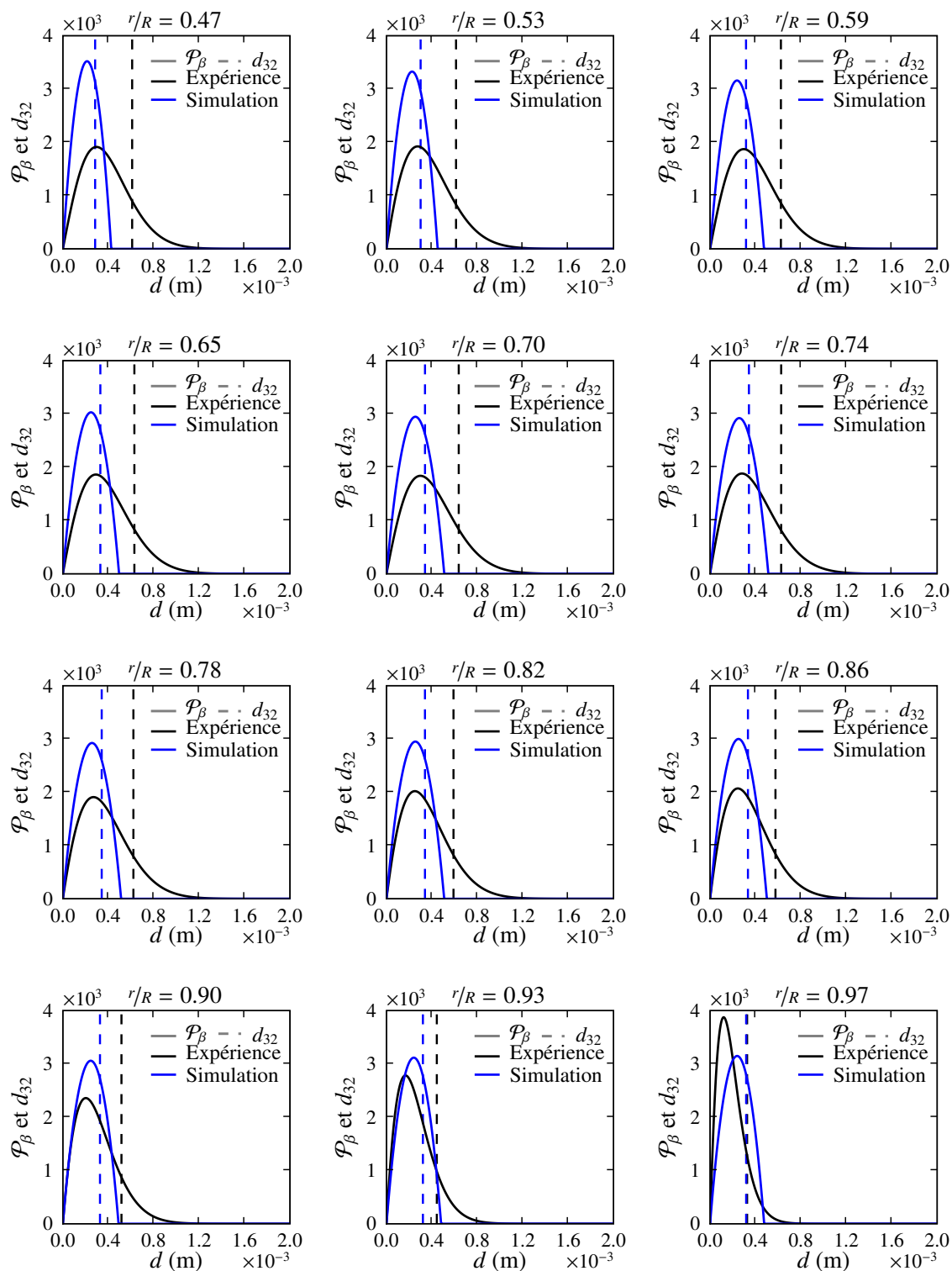


FIG. E.7 – Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 1 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 2

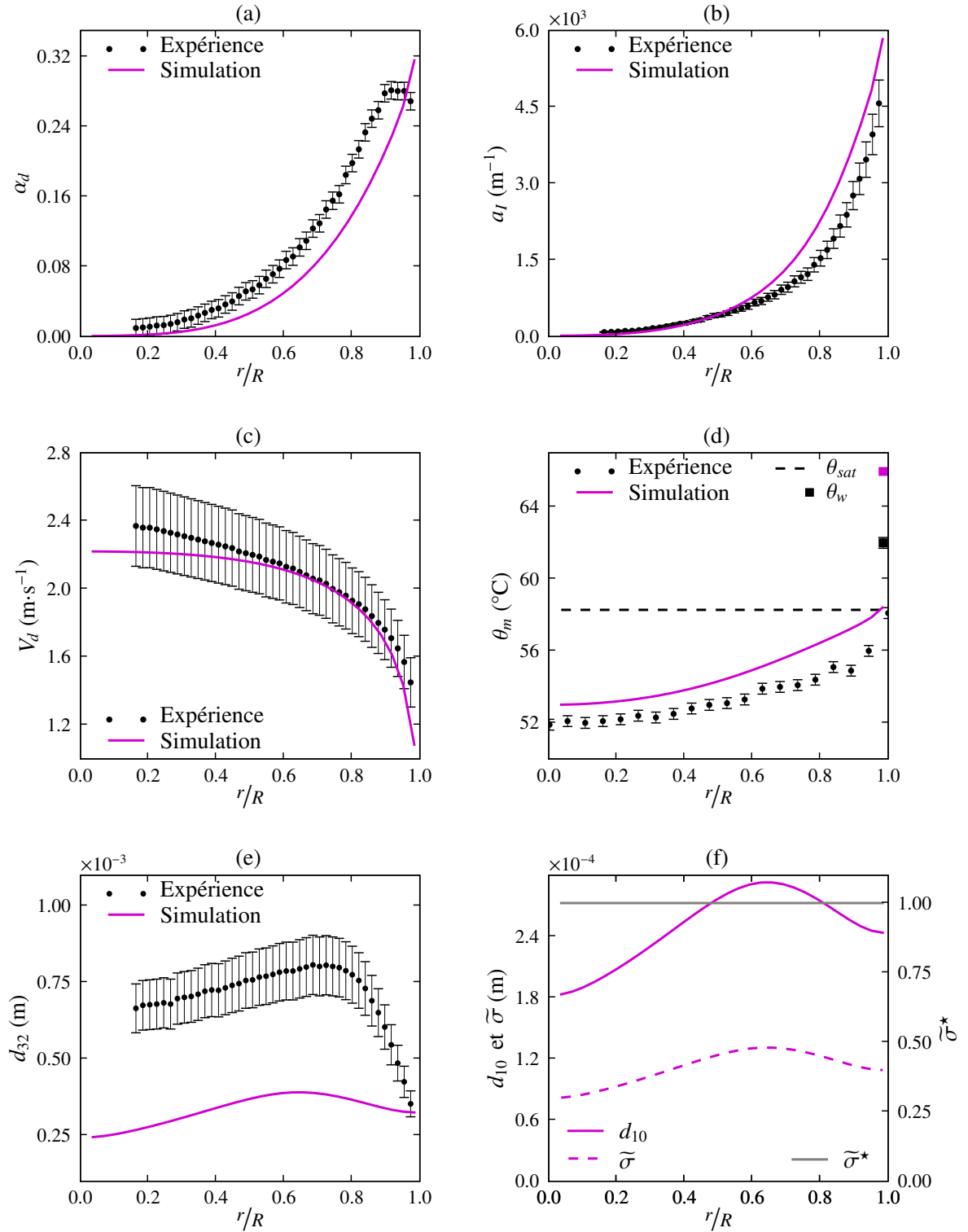


FIG. E.8 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 2 à l'altitude $z = 4,485$ m.

DEBORA – Essai 2

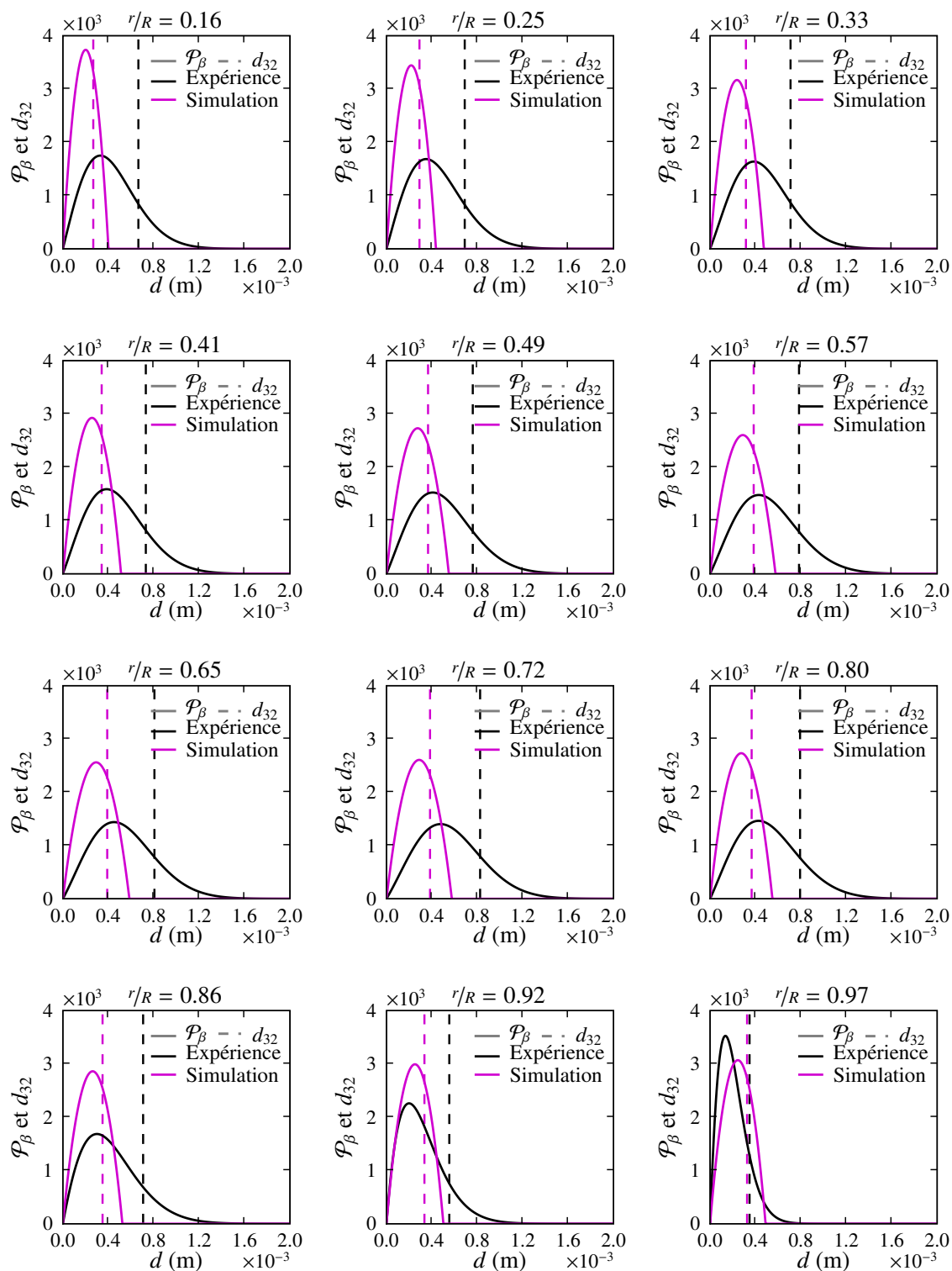


FIG. E.9 – Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 2 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 3

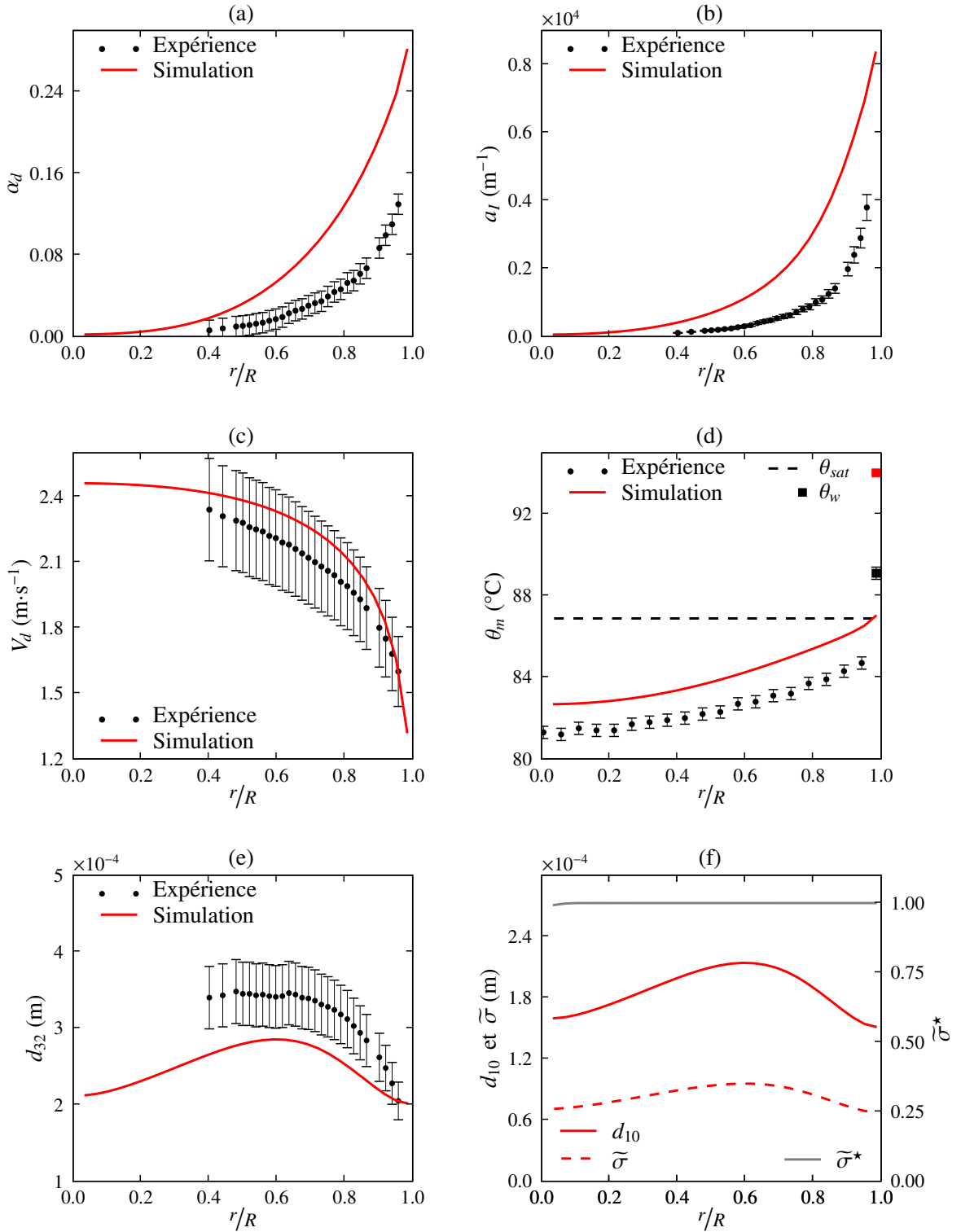


FIG. E.10 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 3 à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 3

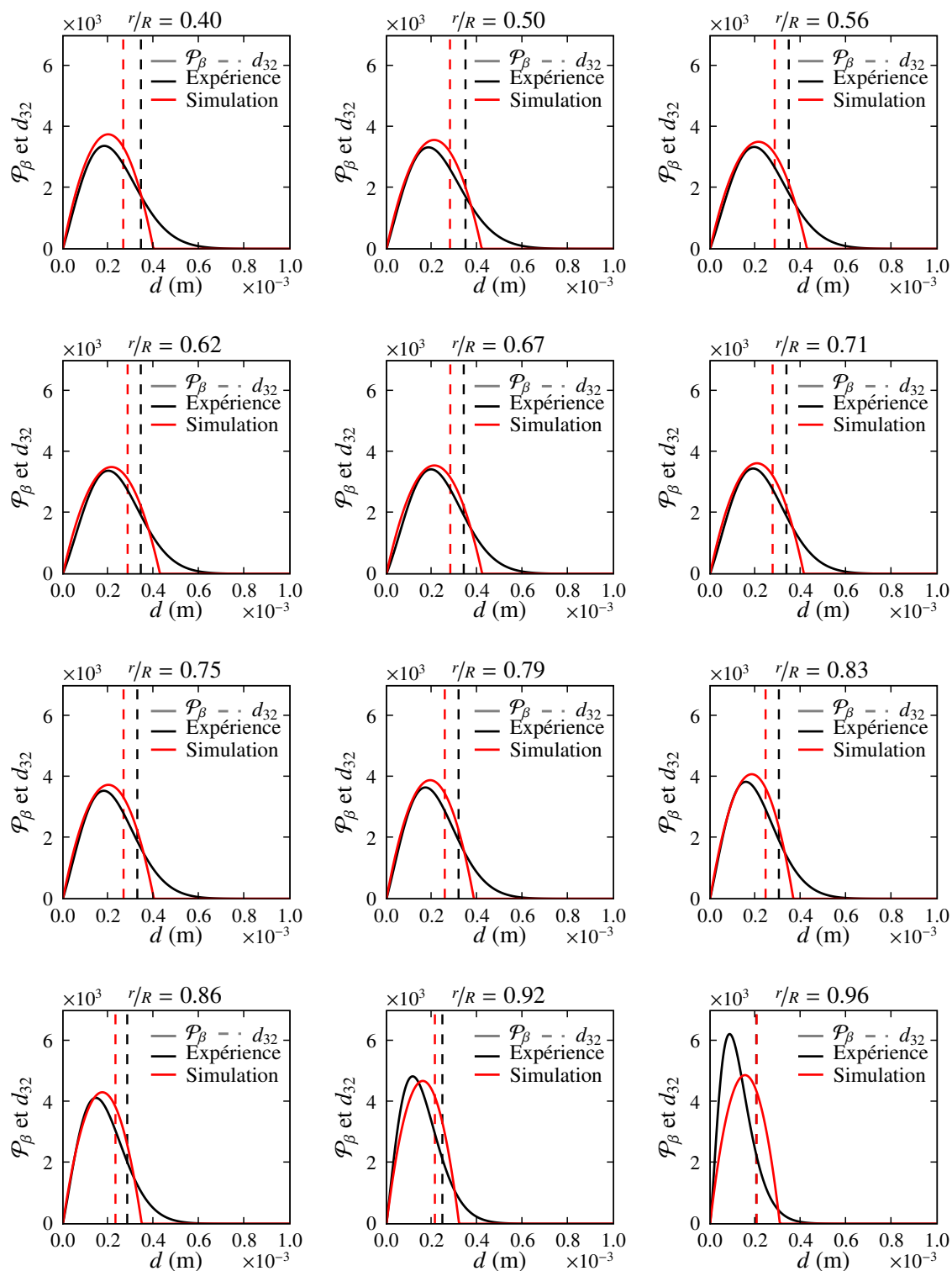
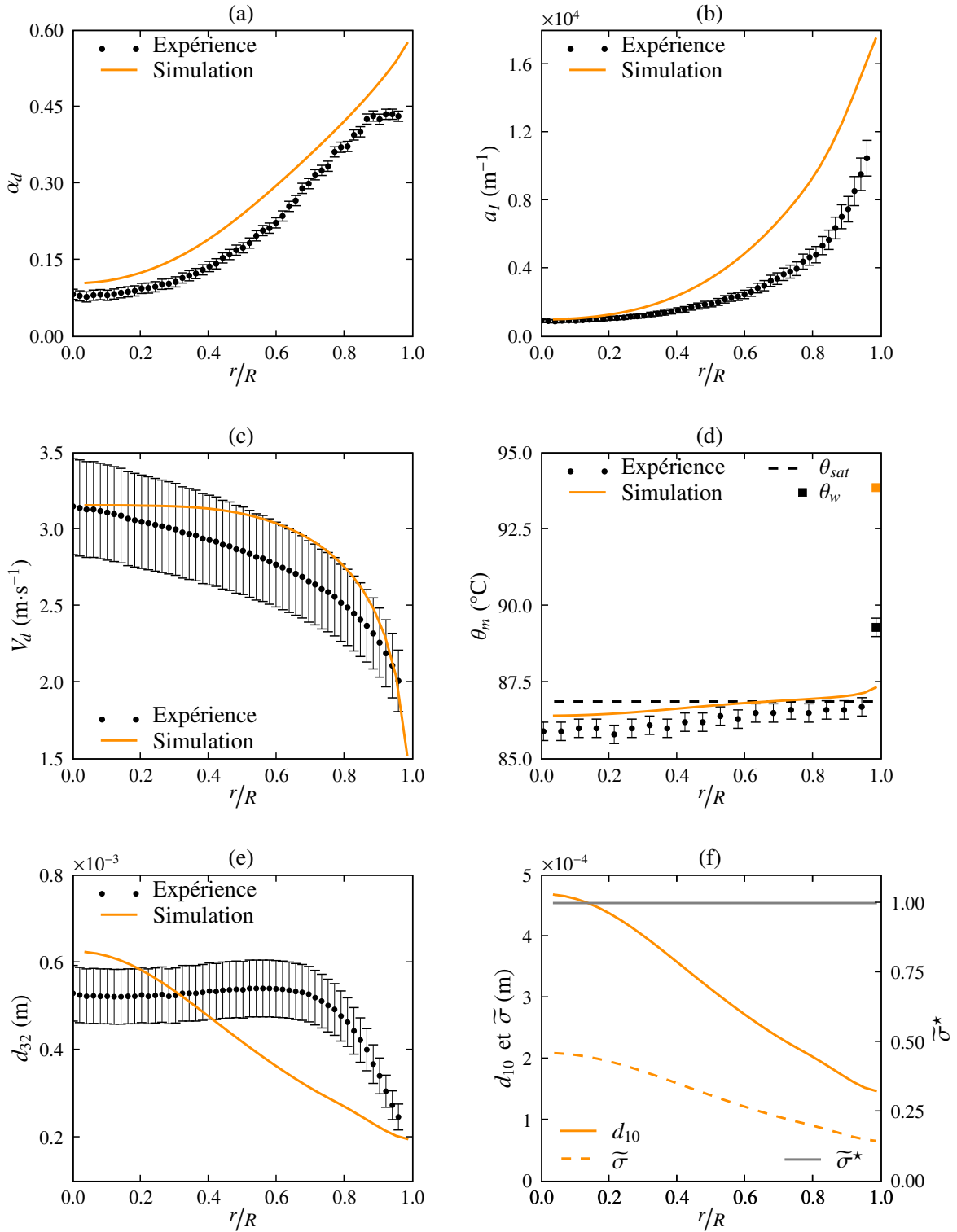


FIG. E.11 – Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 3 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 4


 FIG. E.12 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'essai DEBORA 4 à l'altitude $z = 4,485$ m.

DEBORA – Essai 4

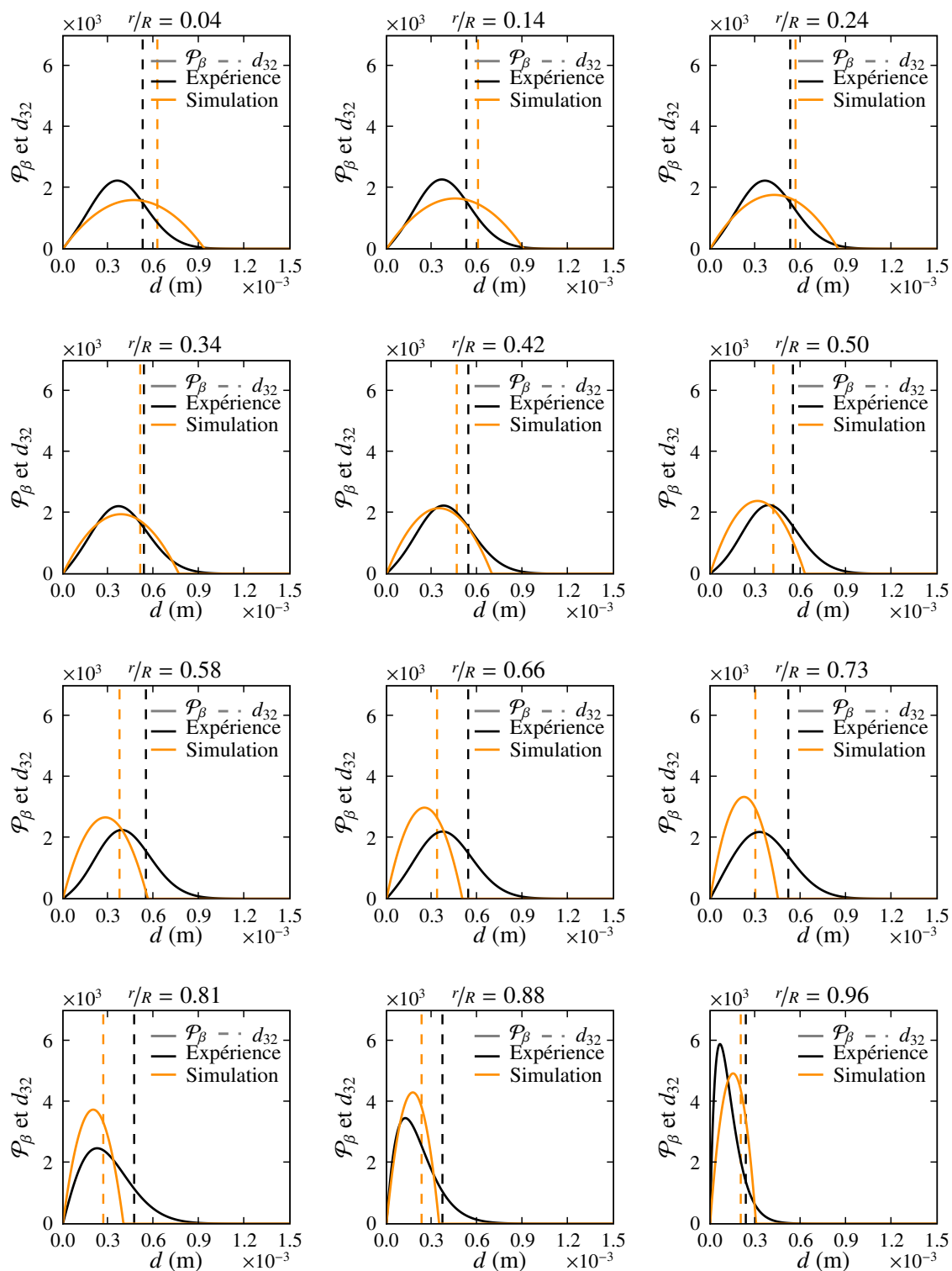


FIG. E.13 – Comparaison de la PDF expérimentale et de la PDF Q2 obtenue avec la simulation pour l'essai DEBORA 4 et pour différentes positions radiales. Données expérimentales et numériques relevées à l'altitude $z=4,485$ m.

DEBORA – Essai 1

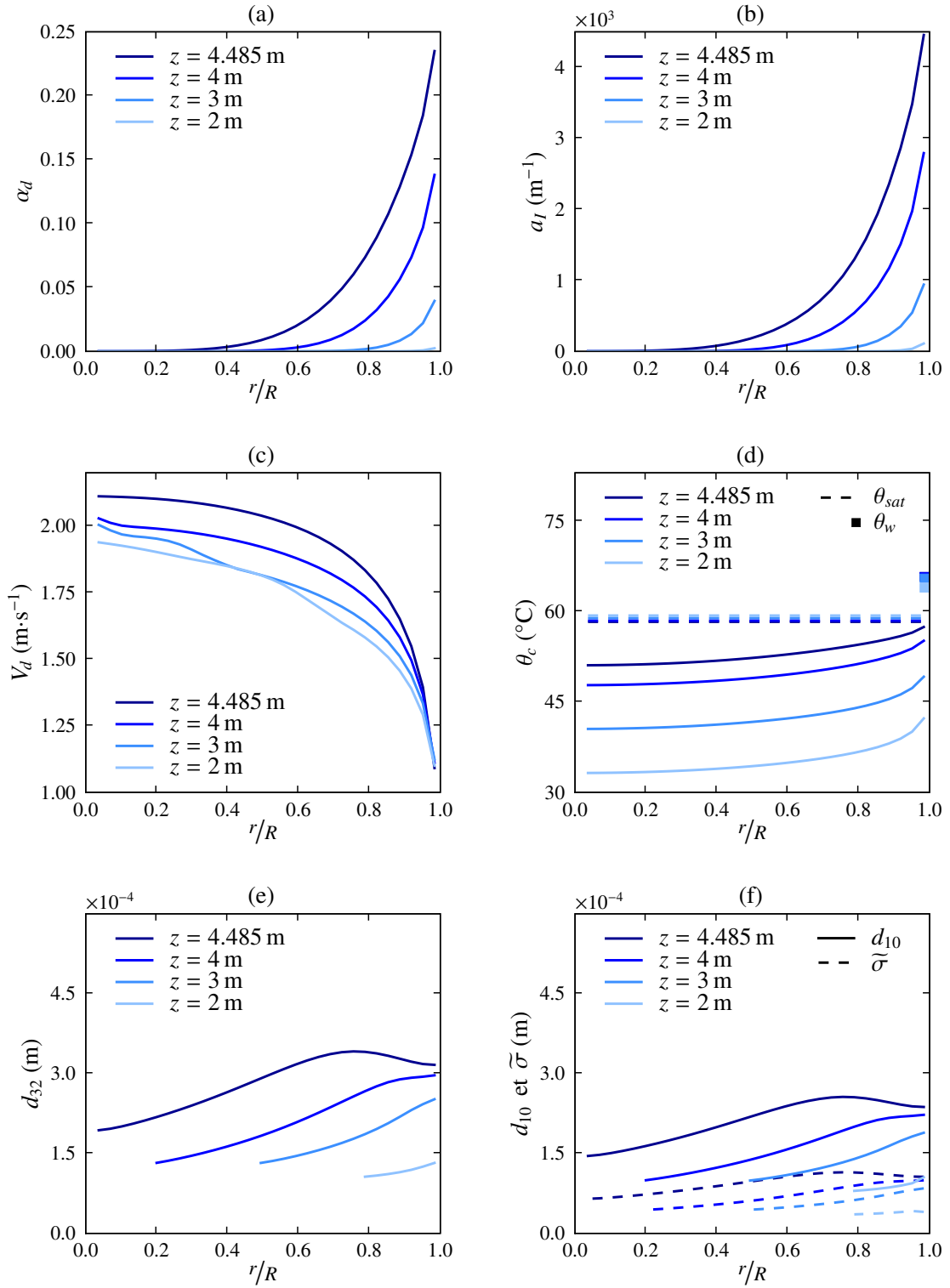


FIG. E.14 – Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 1 pour quatre positions axiales différentes

DEBORA – Essai 1

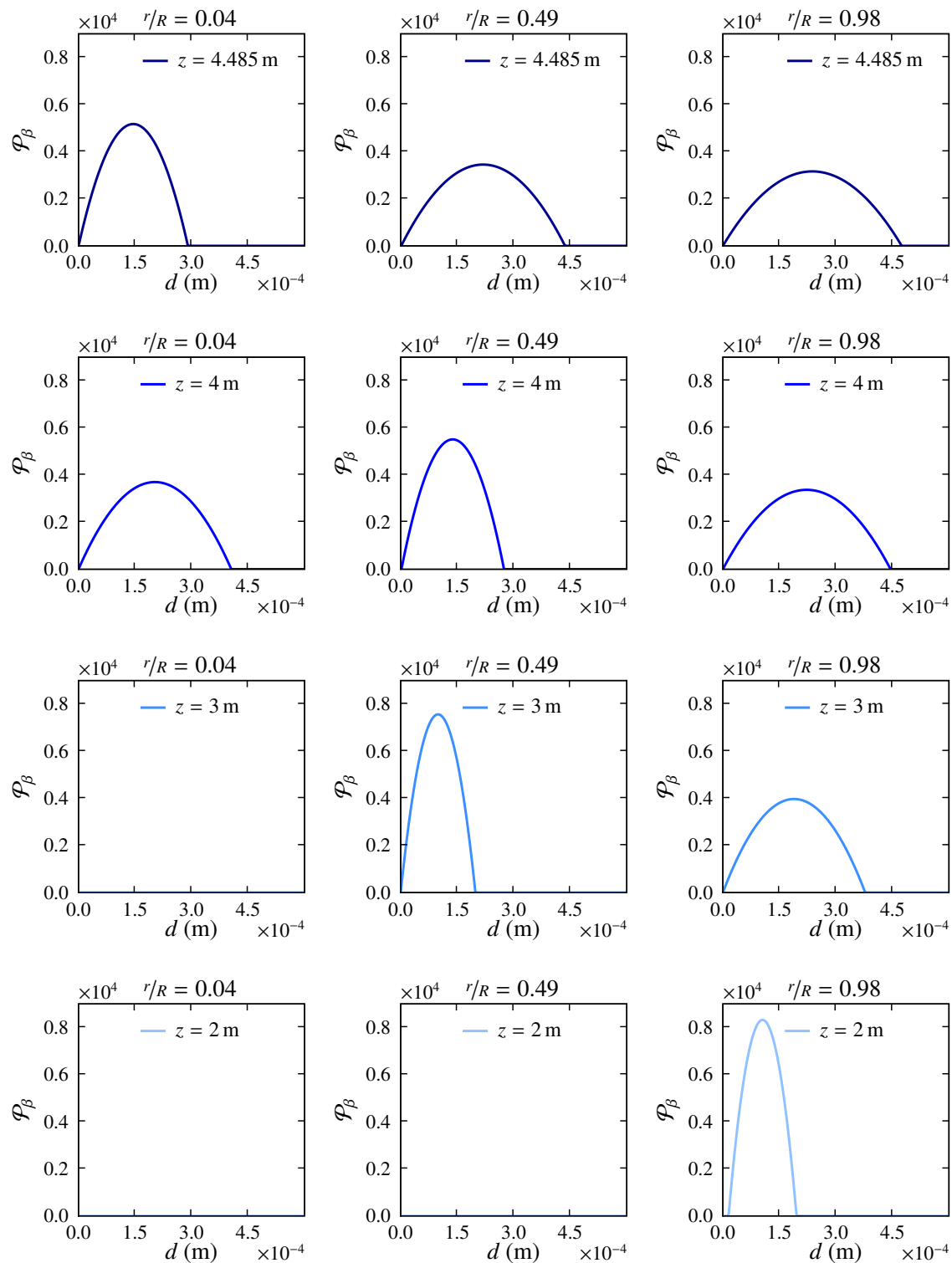


FIG. E.15 – Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 1.

DEBORA – Essai 2

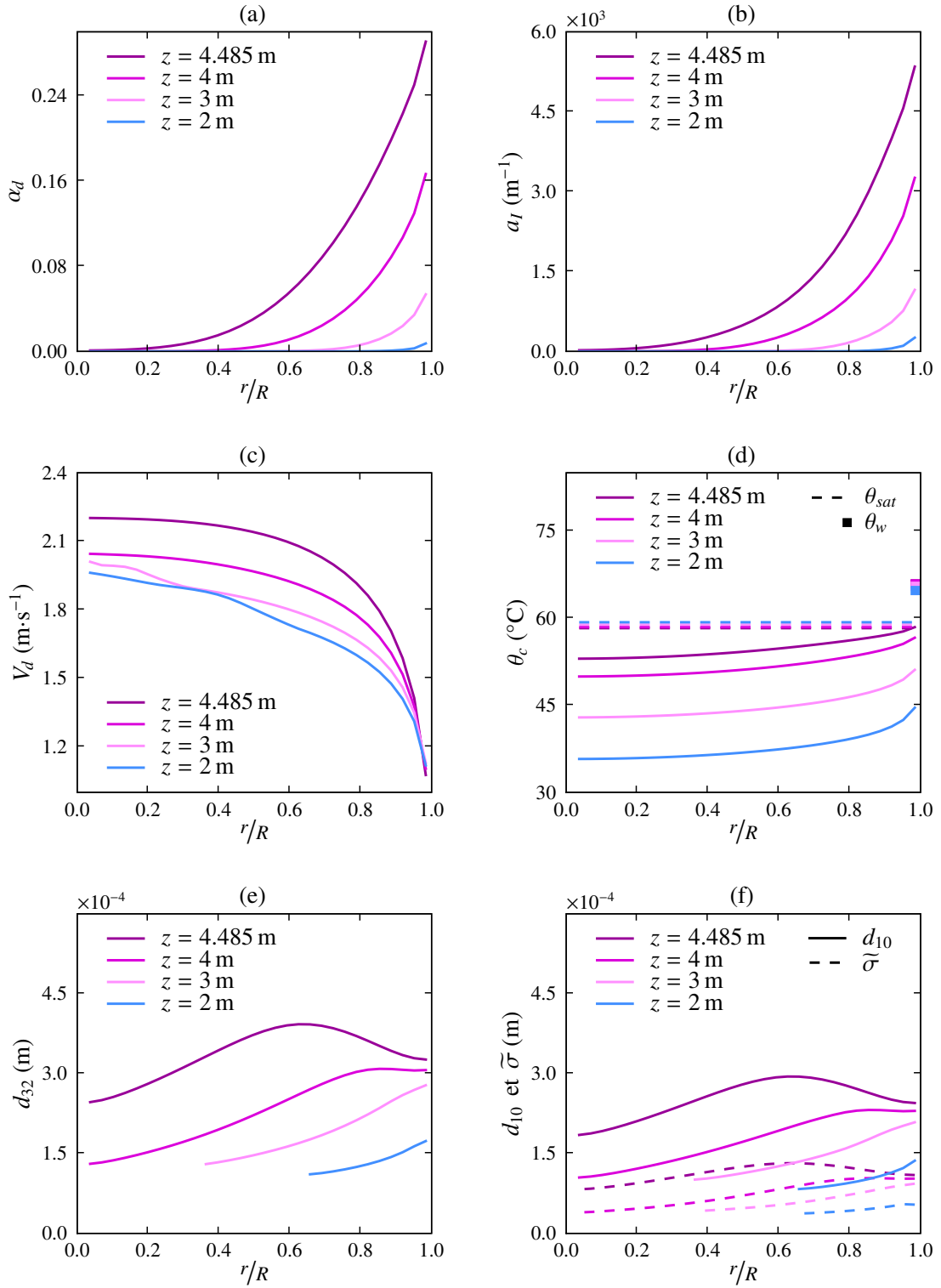


FIG. E.16 – Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 2 pour quatre positions axiales différentes

DEBORA – Essai 2

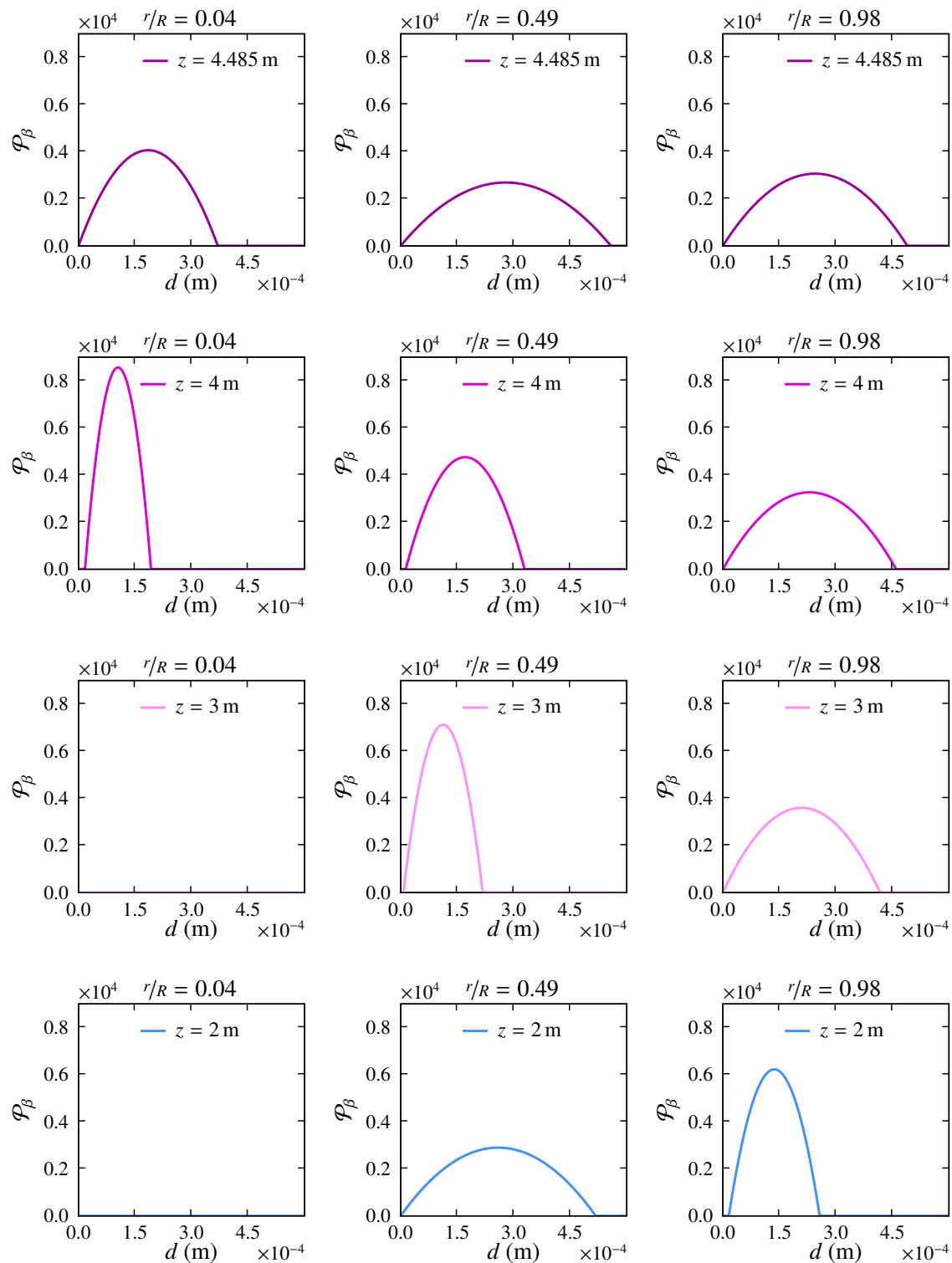


FIG. E.17 – Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 2.

DEBORA – Essai 3

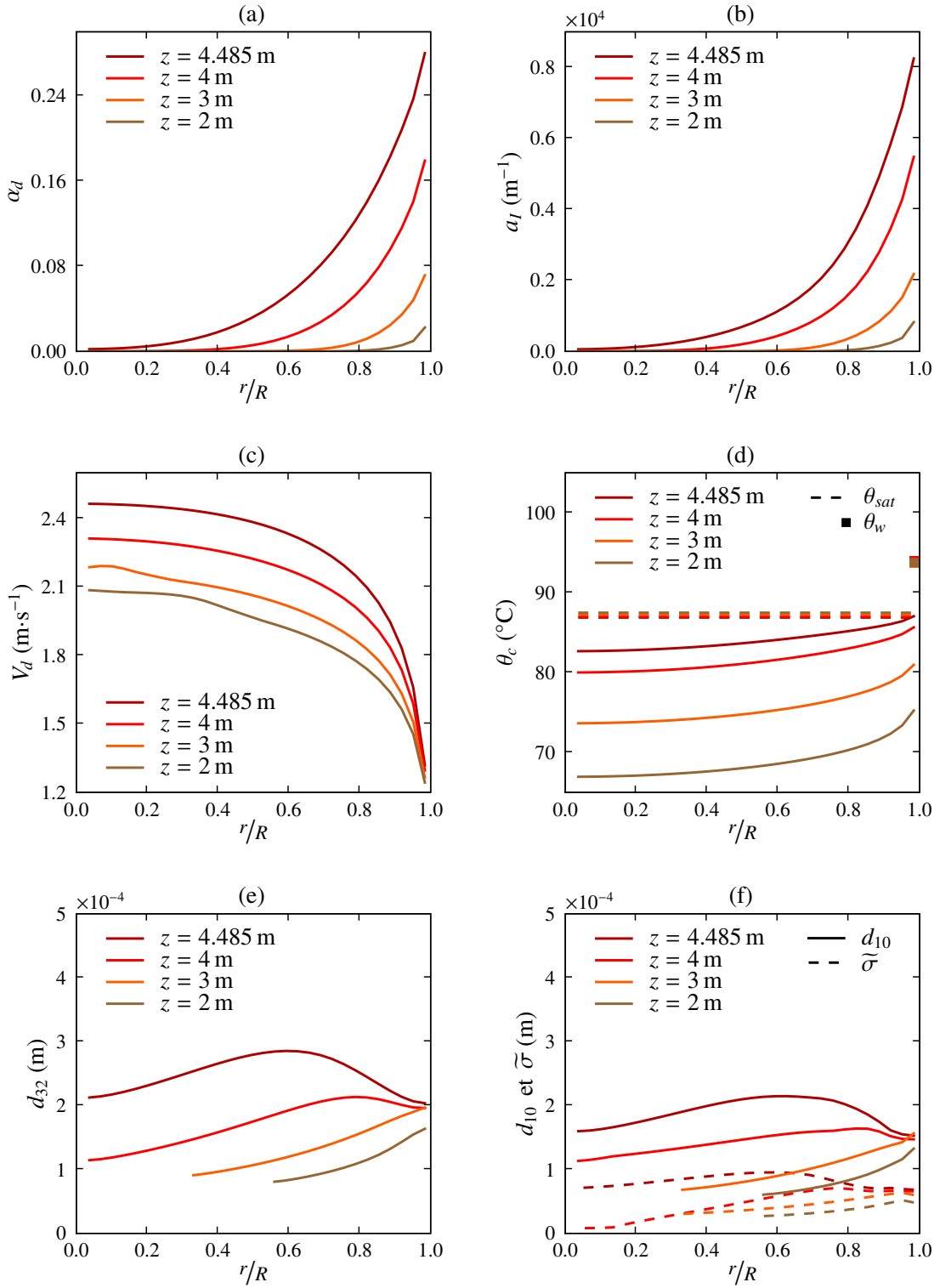


FIG. E.18 – Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 3 pour quatre positions axiales différentes

DEBORA – Essai 3

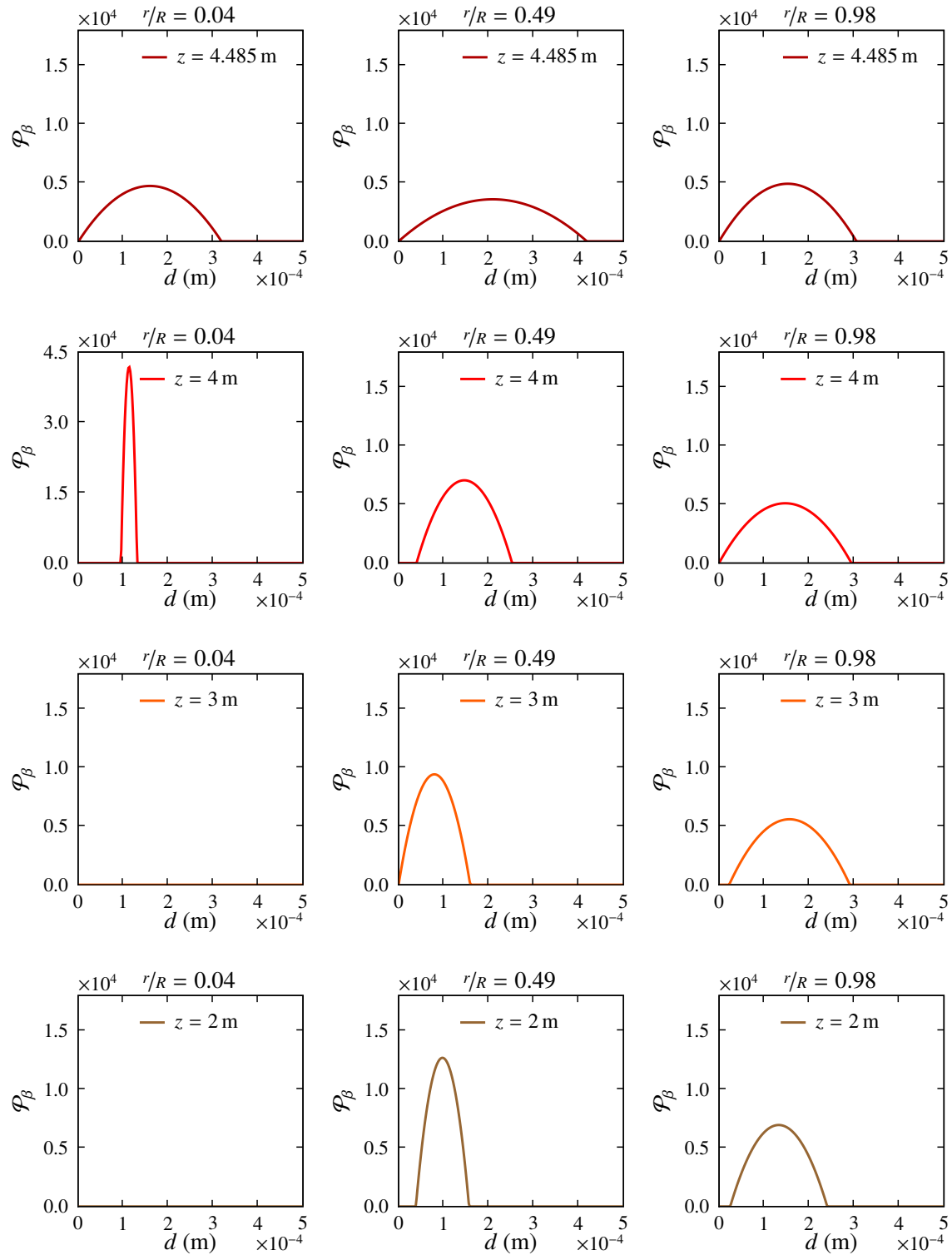


FIG. E.19 – Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 3.

DEBORA – Essai 4

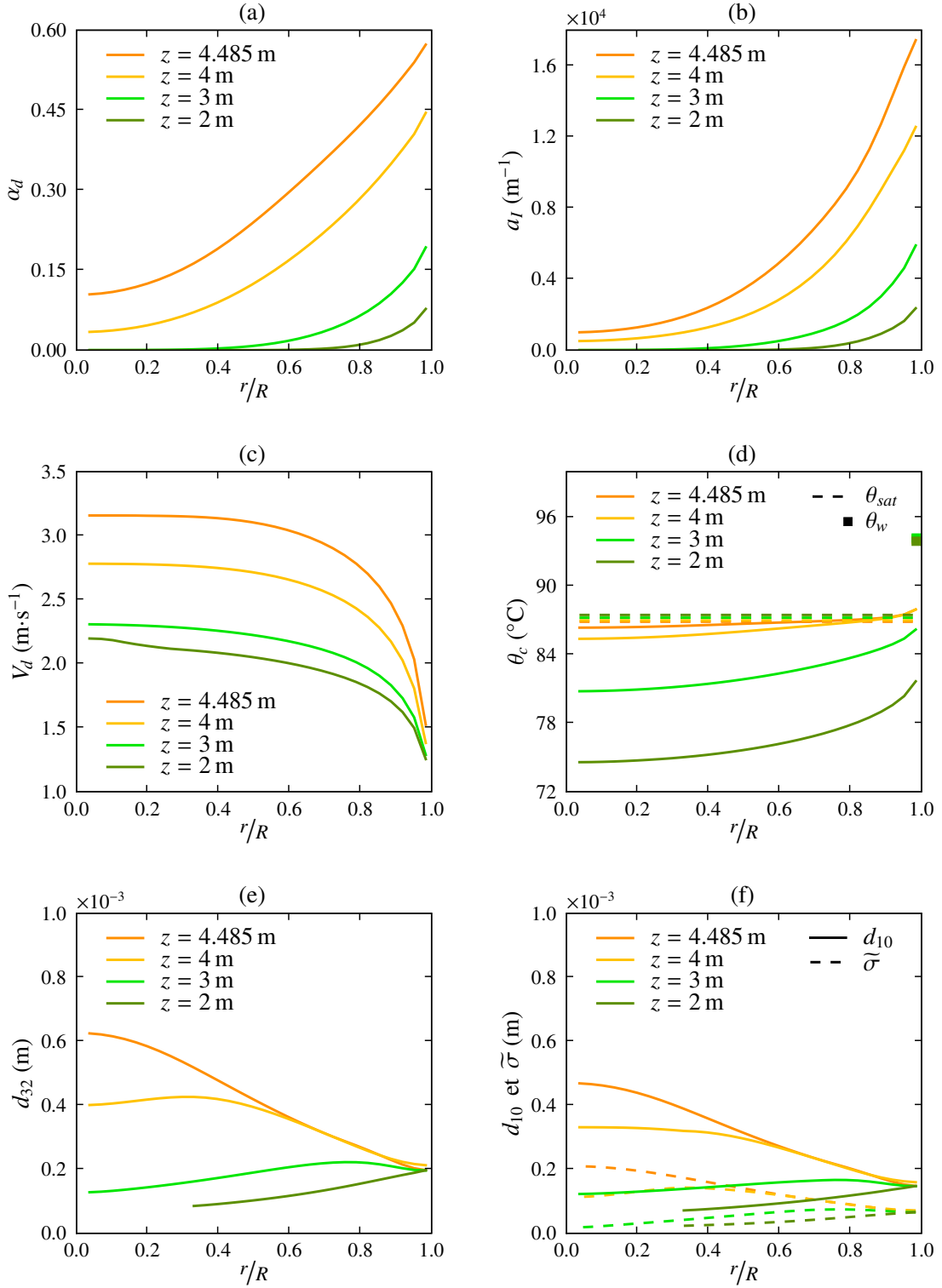


FIG. E.20 – Comparaison des résultats numériques obtenus pour l'essai DEBORA 4 pour quatre positions axiales différentes.

DEBORA – Essai 4

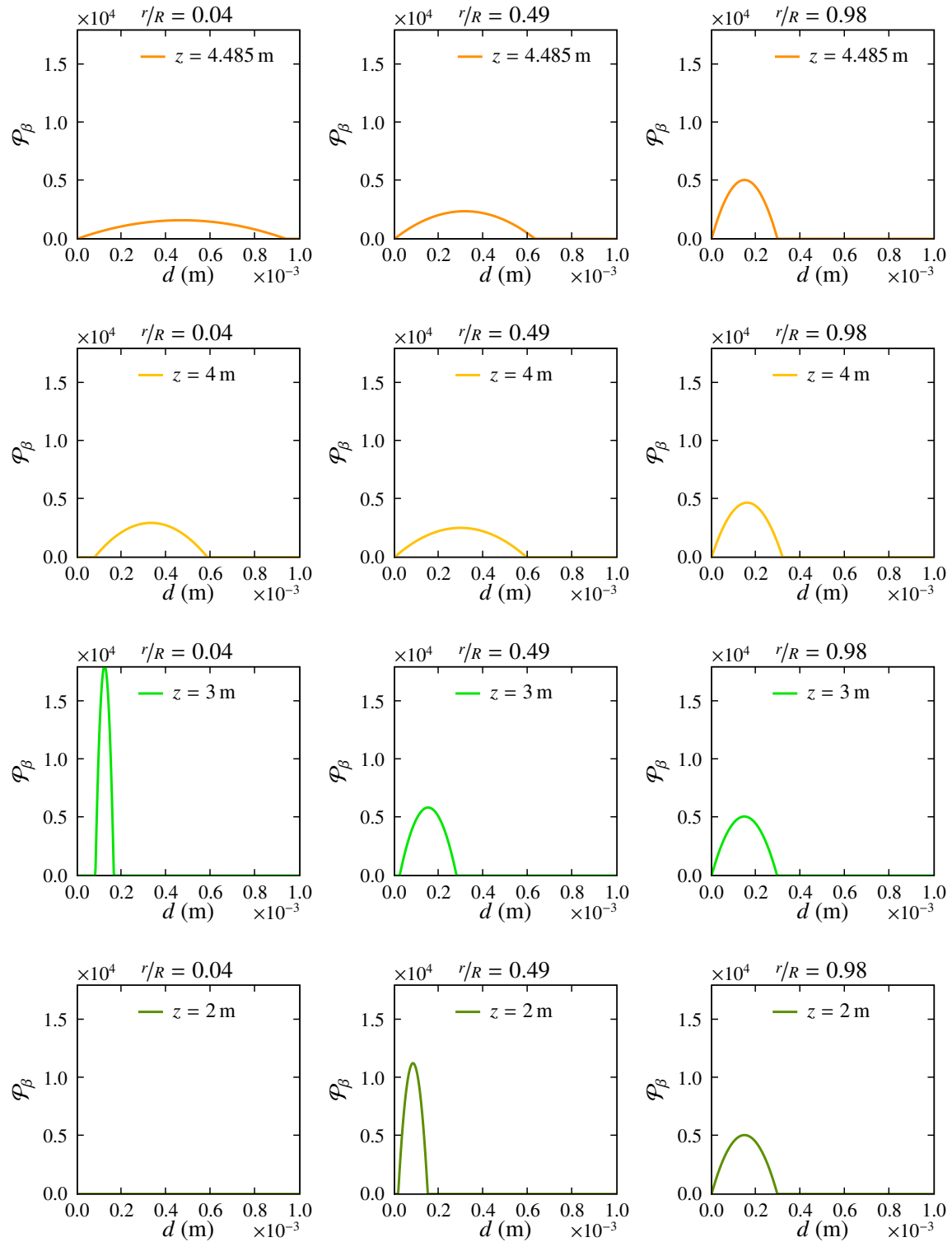


FIG. E.21 – Fonctions de distribution en taille des bulles obtenues pour trois positions radiales et quatre positions axiales différentes pour l'essai DEBORA 4.

DEBORA – Essai 1

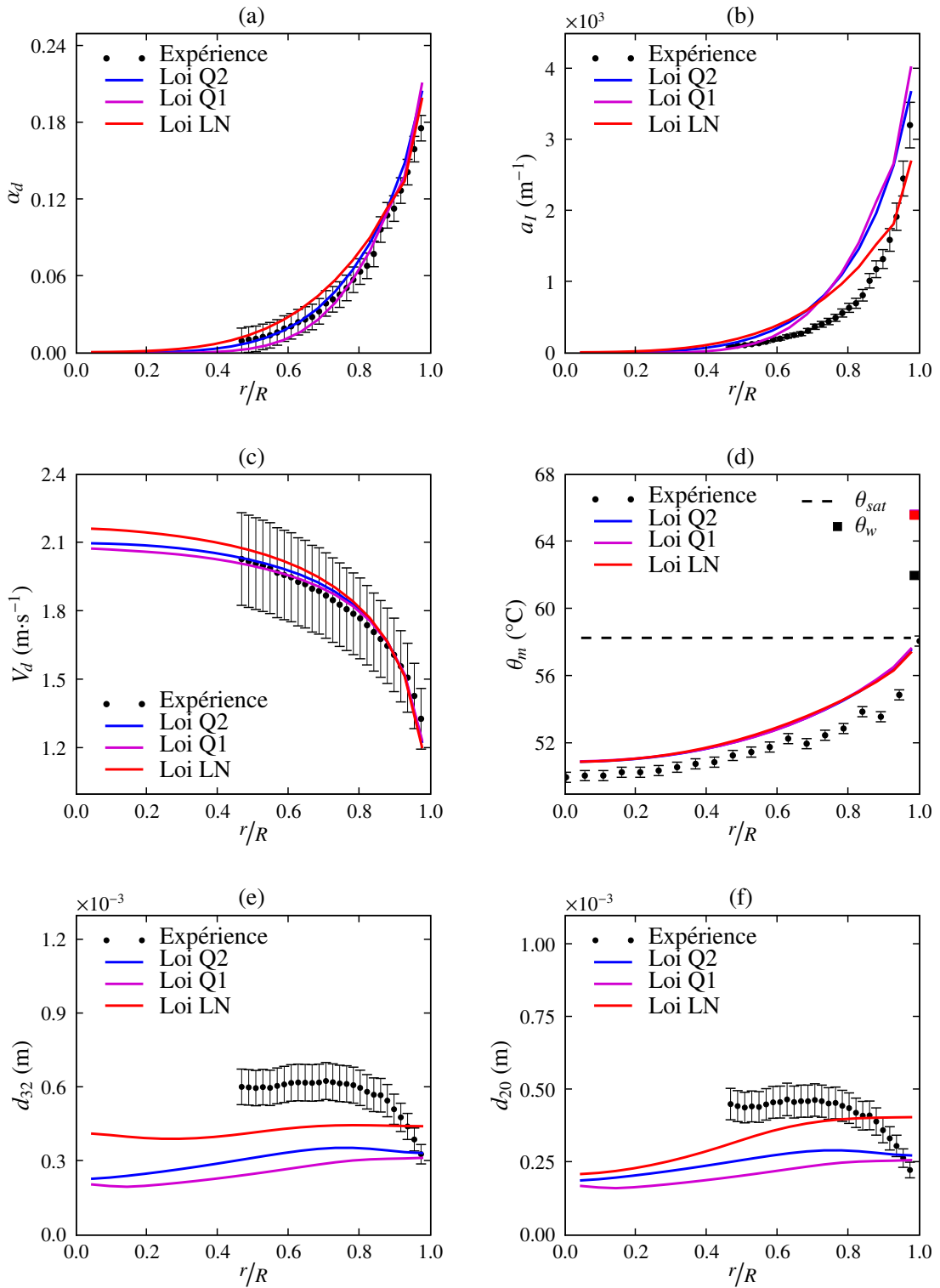


FIG. E.22 – Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 1 ($z=4,485$ m).

DEBORA – Essai 2

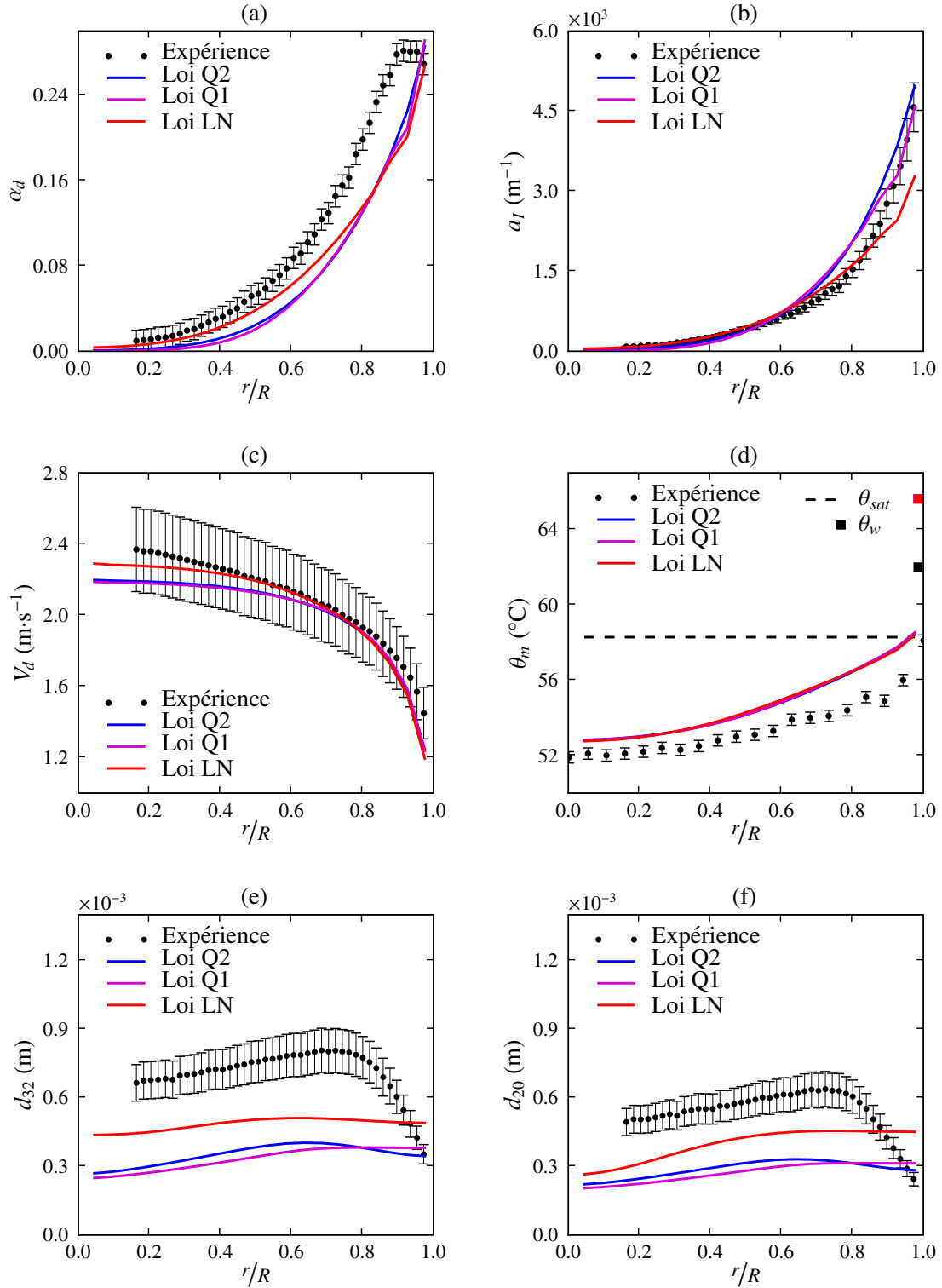


FIG. E.23 – Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 2 ($z=4,485$ m).

DEBORA – Essai 3

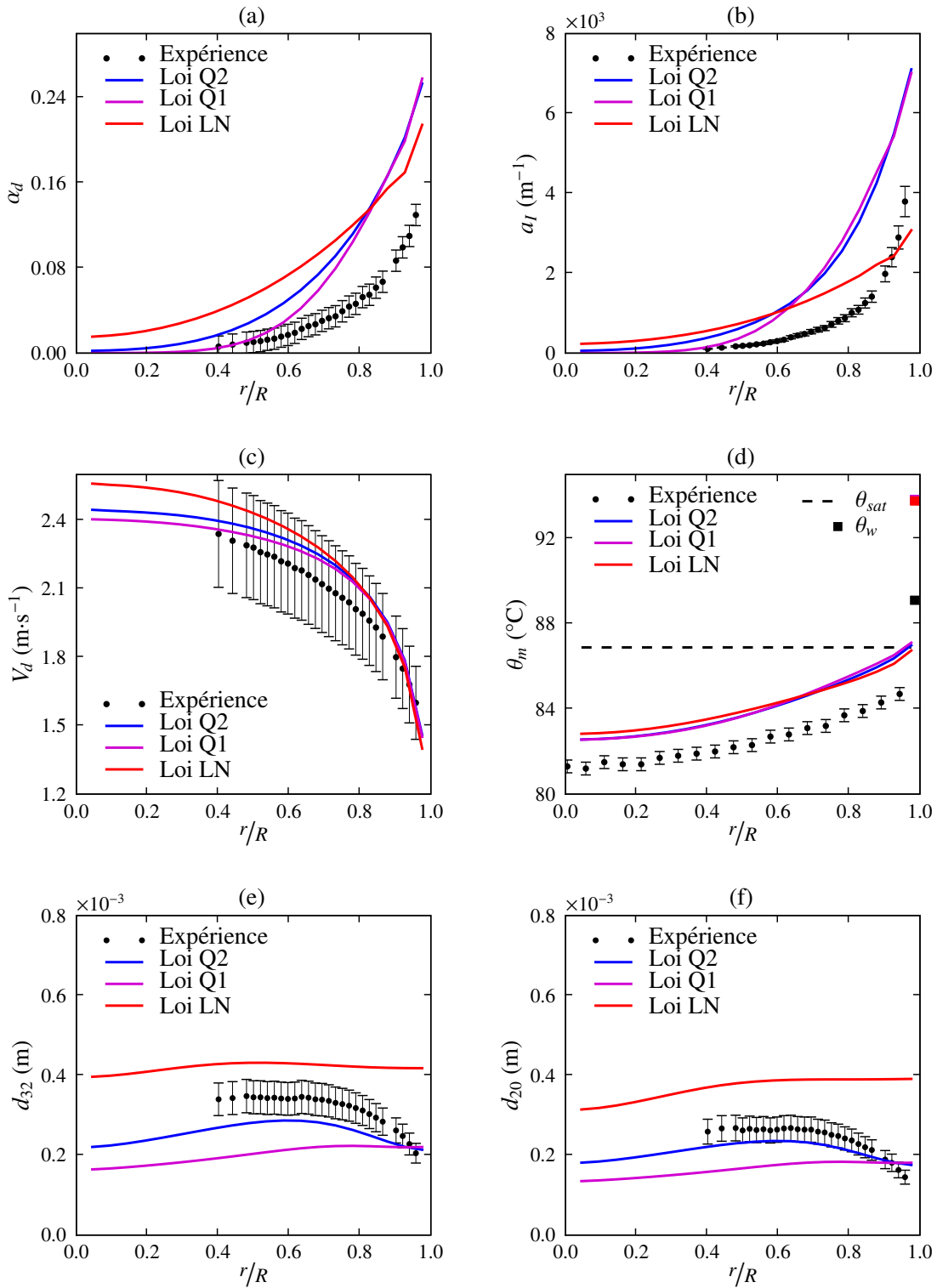


FIG. E.24 – Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 3 ($z=4,485$ m).

DEBORA – Essai 4

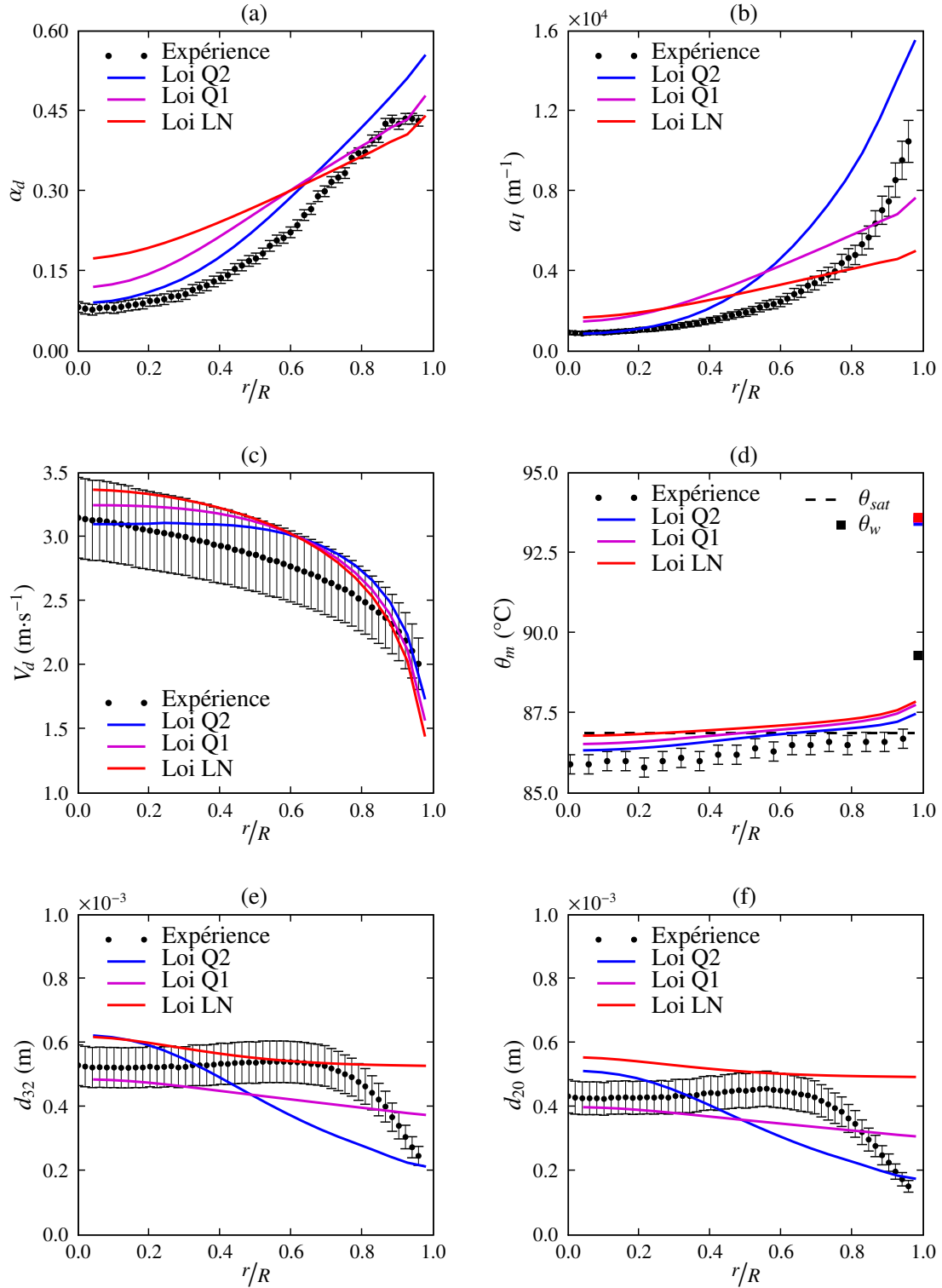


FIG. E.25 – Comparaison des différents modèles polydisperses implantés dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 4 ($z=4,485$ m).

DEBORA – Essai 1

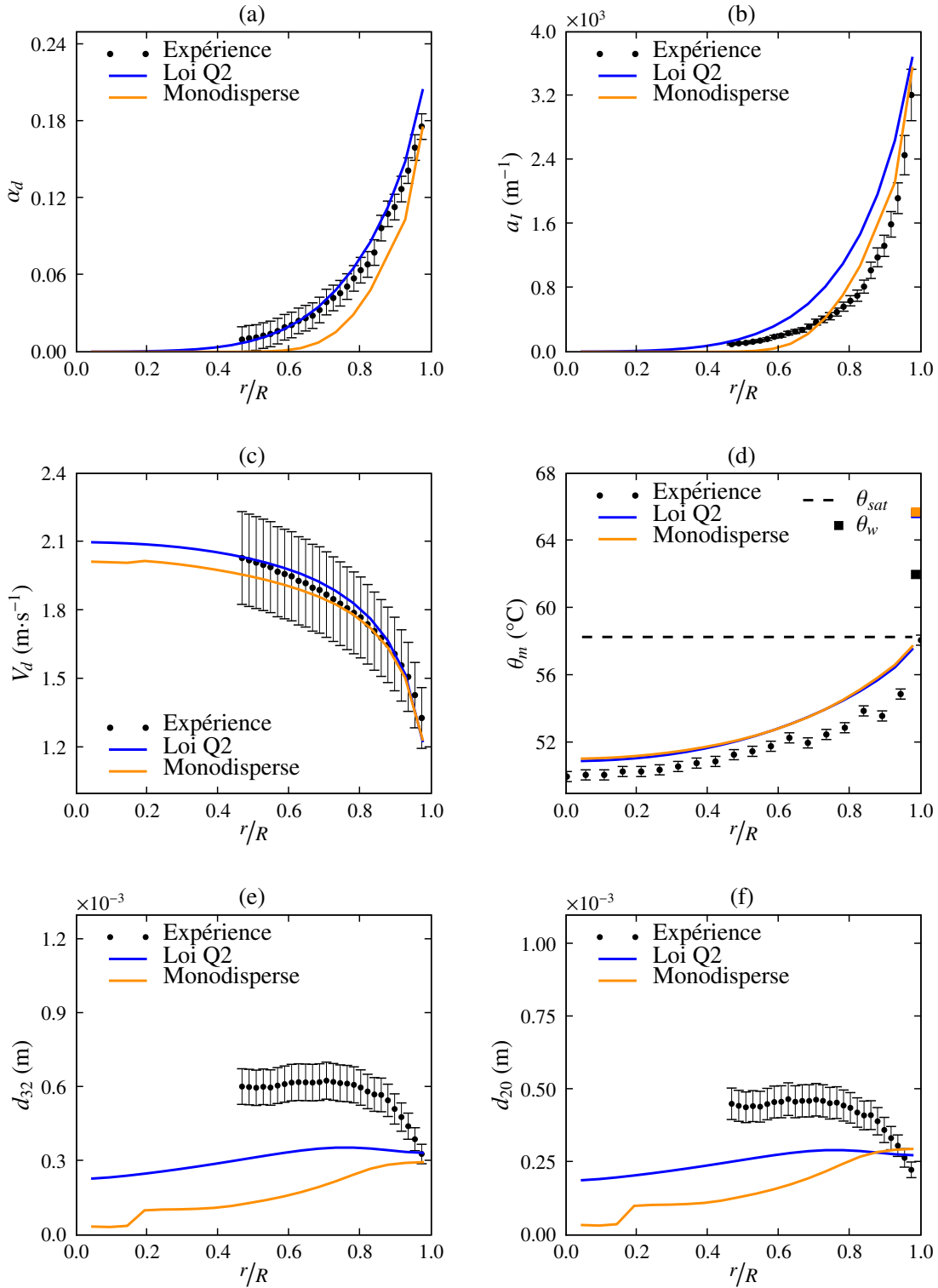
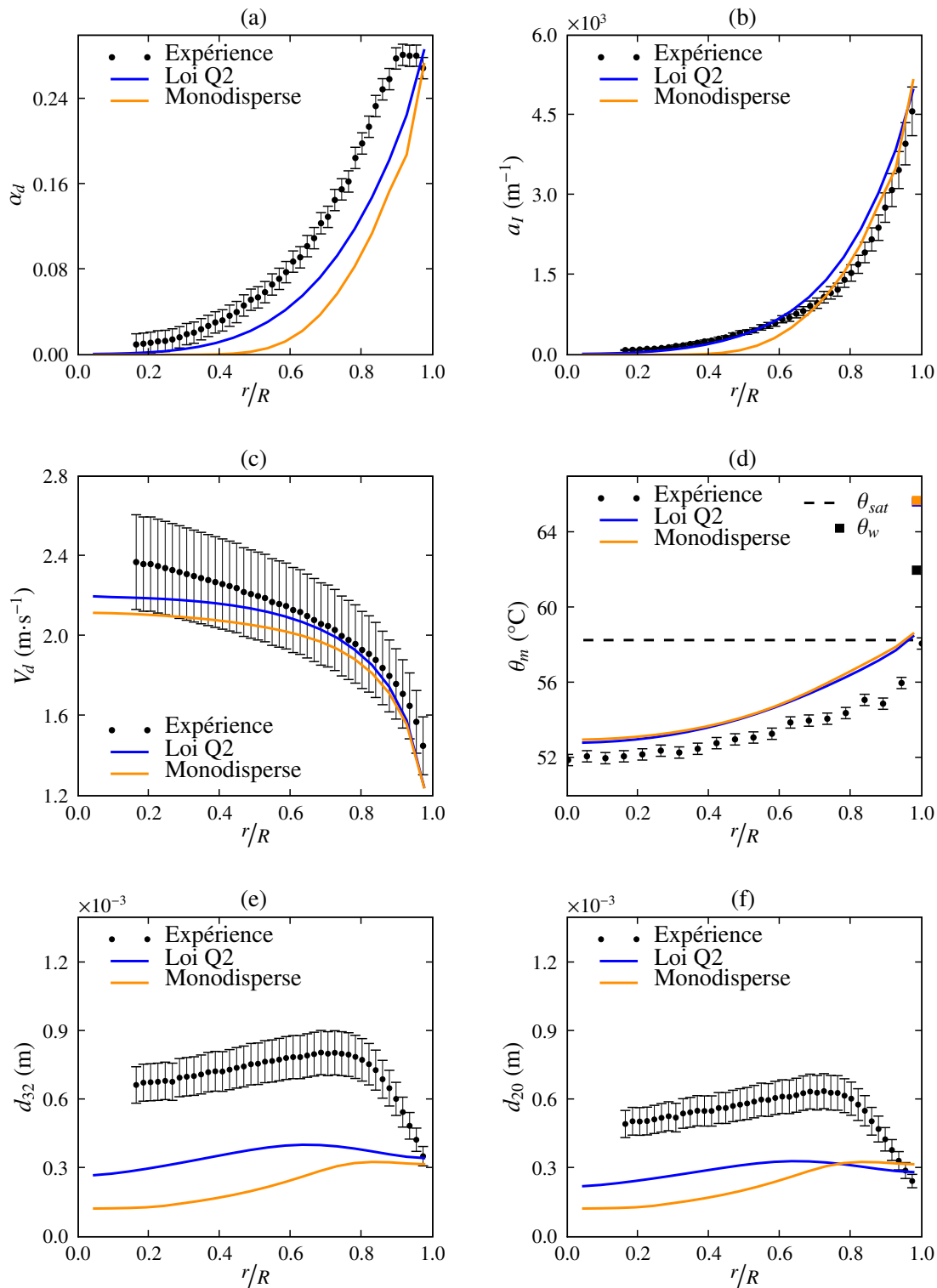


FIG. E.26 – Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 1 ($z = 4,485$ m).

DEBORA – Essai 2


 FIG. E.27 – Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 2 ($z=4,485$ m).

DEBORA – Essai 3

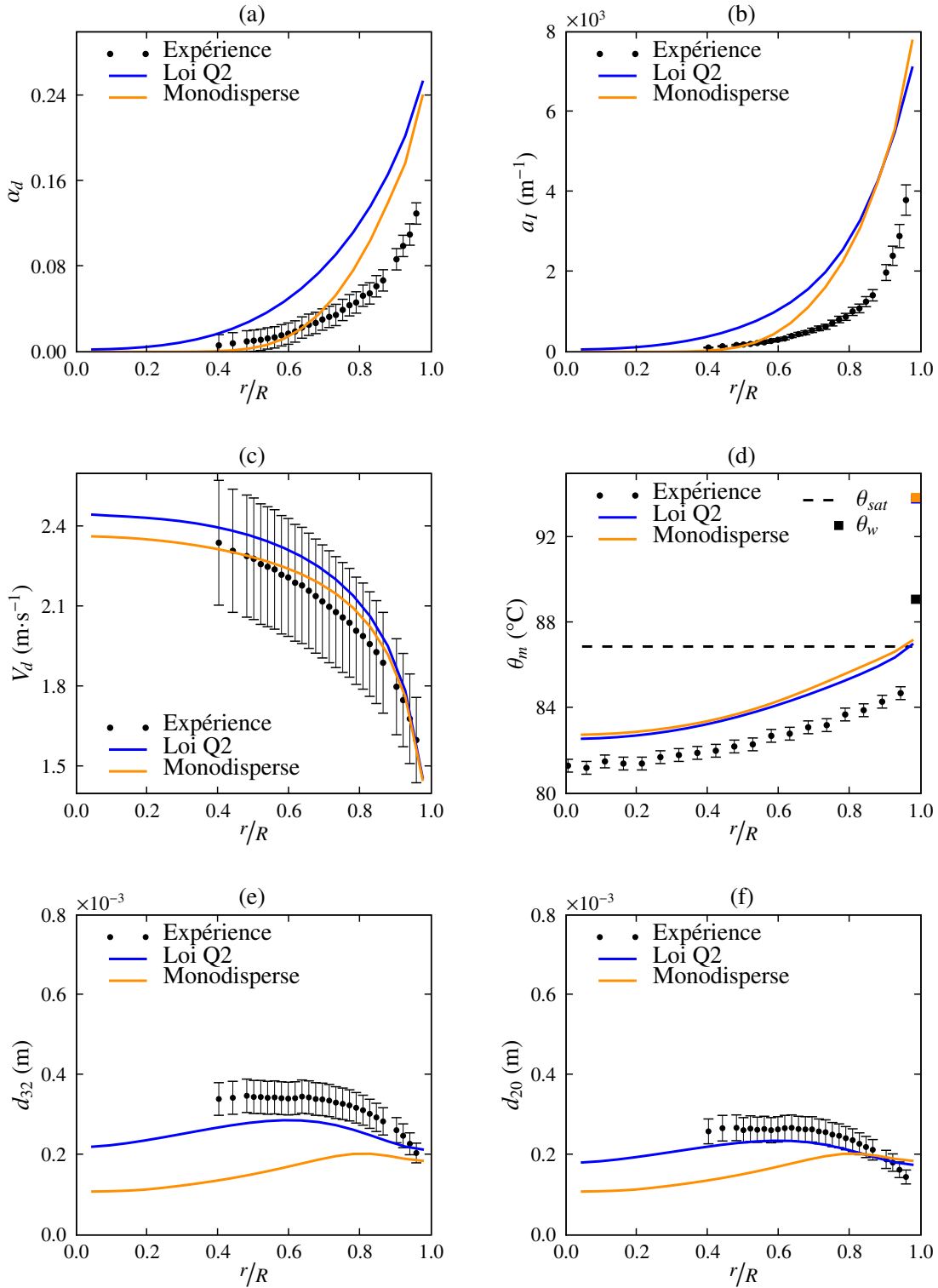
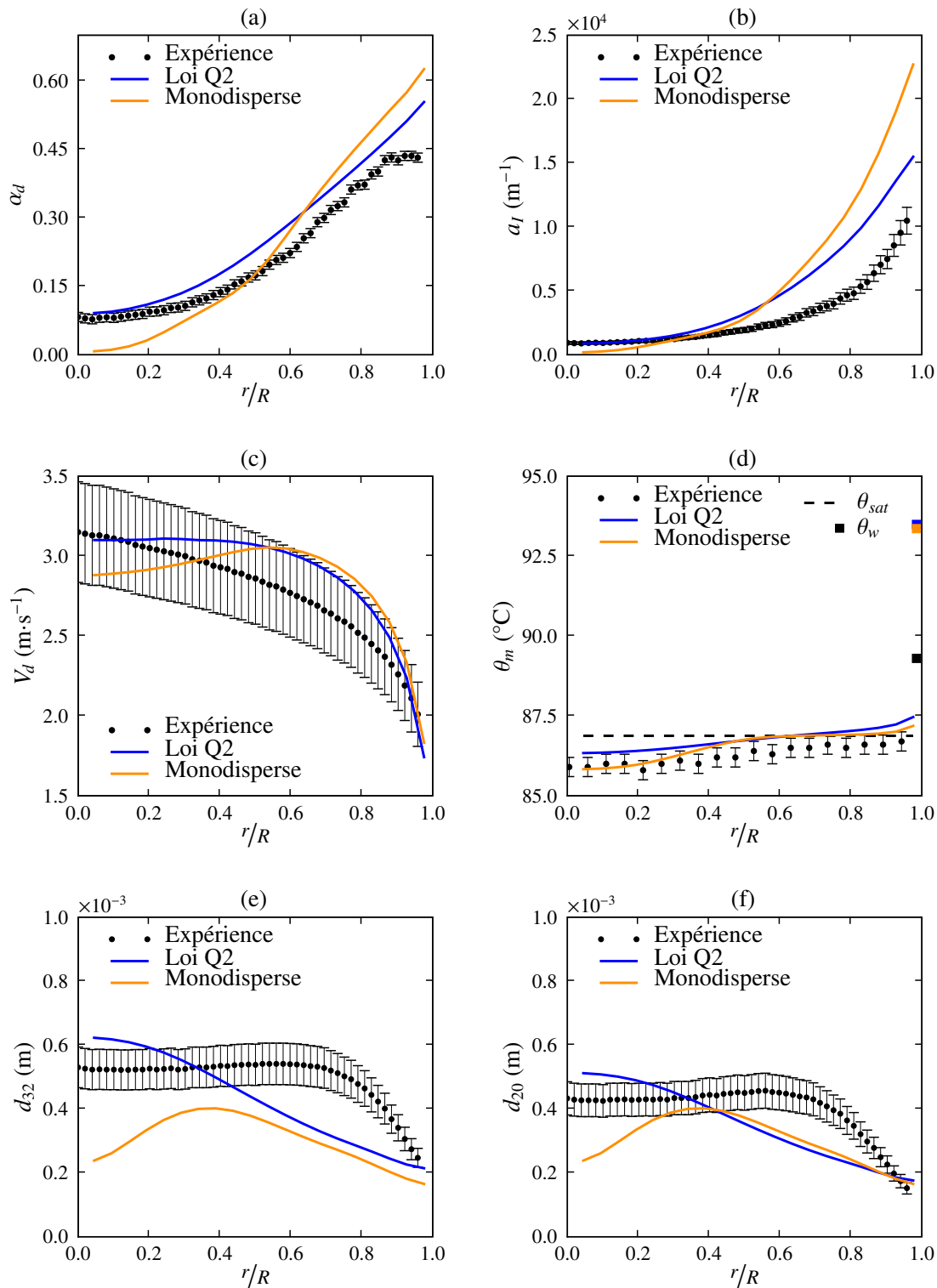


FIG. E.28 – Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 3 ($z = 4,485$ m).

DEBORA – Essai 4


 FIG. E.29 – Comparaison du modèle polydisperse Q2, du modèle monodisperse implanté dans NEPTUNE_CFD et des résultats expérimentaux de l'essai DEBORA 4 ($z=4,485$ m).

Annexe F

Article présenté à la conférence ICAPP 2011

Cette annexe retranscrit l'article présenté à la conférence ICAPP 2011 (International Congress on Advances in Nuclear Power Plants) qui s'est tenue à Nice (France) du 2 au 5 mai 2011.

A Multi-size Model for Sub-cooled Boiling Bubbly Flows

Didier Zaepffel,^a Christophe Morel,^a Daniel Lhuillier^b

^aCEA, DEN, DER/SSTH/LDLD, F-38054 Grenoble, France.

Tel: +33 (0)4.38.78.97.84, Fax: +33 (0)4.38.79.94.53, Email: didier.zaepffel@cea.fr

^bInstitut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS (UMR 7190) and UPMC, F-75252 Paris, France.

Abstract – In this paper we present a model which takes into account the multi-size aspect of a bubble population in a two-phase flow. Several methods exist in the literature to deal with such problematic. For its relative simplicity, the method of moments is here used in addition to a classical two-fluid model. It consists in determining the evolution of the topological and statistical quantities of the two-phase flow by solving additional transport equations on the bubble size distribution moment densities. These so-called geometrical equations involve all phenomena responsible for the changes in the bubble size distribution, namely coalescence and break-up but also dispersed phase compressibility and phase change. To close the bubble size distribution appearing in different source terms of the geometrical equations, a two-parameter quadratic expression is here proposed. The simplicity of this quadratic law allows to derived quite easily the geometrical equation source terms and implies to solve only two additional equations. The resulting multi-size model is therefore easy to implement and numerically efficient. Numerical simulation of a DEBORA test case (upward bubbly boiling flow in a vertical tube) has been performed with the NEPTUNE_CFD code to test the ability of the multi-size model to represent sub-cooled boiling bubbly flows.

I. INTRODUCTION

Two-phase bubbly flows occur in various industrial systems, such as petroleum, chemical or nuclear energy-producing industries. Design optimization or safety analysis in these domains often involve an accurate prediction of the local flow structure, as spatial distribution of phases or morphology of exchange surface areas between phases. The present work focuses on the modeling of sub-cooled boiling bubbly flows encountered in the context of nuclear power plant safety studies. The multi-size aspect of such bubbly flows is of particular interest since the flow structure is directly related to inter-phase transfers (e.g. heat and mass transfers, coalescence and break-up phenomena).

Several methods are available to deal with multiple sizes in bubbly flows. A classic approach is the so-called multi-group method (MGM)^{1,2} in which the bubble size spectrum is discretized in a finite number of bubble groups. Three equations (mass, momentum and energy) are solved for each bubble group, the bubble group diameter being known and remaining constant during the simulation. Minimal and maximal diameters of the bubble size spectrum are presumed and also remain constant. This is clearly a weakness of the method because the results are inevitably sensitive to

the spectrum segmentation adopted to represent the bubble size distribution (BSD).³ Moreover, as the MGM consists in solving three equations for each bubble group, a substantial number of equations need generally to be solved in order to obtain a reasonable BSD representation. This often involves prohibitive computational costs for dealing with real cases of particular interest.

An alternative to the MGM is the so-called method of moments (MOM),⁴ which is based on the idea of tracking only lower-order moment densities of the BSD, rather than the BSD itself. The main advantage of this method is its numerical efficiency, since only few BSD moment densities need generally to be solved in addition to the usual mass, momentum and energy equations. However, the moment density transport equations need to be written in a closed form, that is, involving only functions of the moment densities themselves. As a consequence, the BSD must be closed. Two main categories of BSD closure methods can be cited: the use of a quadrature approximation,^{5,6,7} or a presumed expression (e.g. Laguerre polynomials or distribution laws).^{4,8,9,10}

The second alternative has been chosen in the present study. BSD modeling with a presumed log-normal law has been widely addressed in the context of various flow struc-

tures (drops, bubbles, as well as solid particles).^{8,9,11} Unfortunately, the inability of this law to deal with bubble break-up phenomenon do not allow to use it in the context of bubbly flow modeling we are interested in. To cope with this difficulty, a two-parameter quadratic BSD is presented here. Of course, a quadratic-shaped BSD is not always representative of experimentally observed BSD, but the evolution of bubble population statistics (*e.g.* average size, standard deviation) is generally more essential than an exact representation of the BSD itself. Besides, it has been shown that an exact representation of the BSD is not always necessary to obtain results of a reasonable accuracy.³

The paper is organized as follows. In the next section, the additional geometrical equations of the multi-size model are presented. Then, a two-parameter quadratic law is proposed for modeling the BSD of the bubble population. In section IV., closure relationships for the particular case of sub-cooled boiling bubbly flows are derived by taking into account the multi-size aspect of the bubble population. Finally, the NEPTUNE_CFD code is used to evaluate the present model and a validation test case with the DEBORA experimental database (upward sub-cooled boiling bubbly flow in a vertical pipe) is presented in a last part.

II. GOVERNING EQUATIONS

In this study, a two-fluid approach is used to model the multi-phase system, that is, both phases are described by three averaged balance equations (mass, momentum and energy).^{12,13} Two-fluid equations used in this study are the ones implemented in the NEPTUNE_CFD code.^{14,15}

In addition to these six equations, an equation on the interfacial area concentration (IAC), sometimes called geometrical equation, is generally written to take into account the flow structure variation.¹⁵ To take into account the poly-dispersion in size of a bubbly flow, more than a single IAC equation is however necessary. Additional geometrical equations have to be derived, what is generally carried out using the kinetic theory.^{9,16}

II.A. Kinetic theory and ensemble averaging

For bubbly flows, geometrical equations can be written as well using the two-fluid approach as using a kinetic theory approach.¹⁷ Both methods are equivalent in this particular case, but the dispersed aspect of the bubble population makes a kinetic theory approach more relevant. The main advantage of this kind of model is clearly a best readability and understanding of the averaged quantities and closure terms.

In kinetic theory, we consider a bubble population associated to a particular realization of the two-phase flow. Making the assumptions that bubbles are *spherical* and that all of them behave similarly in the flow, we introduce the BSD

$\mathcal{P}(d)$. This normalized function represents the probability of a bubble to have a diameter between d and $d + dd$, at a given time t and in the spatial range $d\mathbf{x}$ about a position $\mathbf{x}$. Based on this BSD, ensemble averaging of a quantity $\psi(d)$ is given by:

$$\langle \psi(d) \rangle \triangleq \int \psi(d) \mathcal{P}(d) dd. \quad (1)$$

II.B. Moment densities and their transport equation

The multi-size aspect of the bubble population is addressed here through the MOM, we chose because of its relative simplicity. This method consists in solving additional balance equations on some moment densities of the BSD. The γ^{th} order moment density of $\mathcal{P}(d)$ is defined as:

$$\mathcal{M}_\gamma \triangleq n \int d^\gamma \mathcal{P}(d) dd = n \langle d^\gamma \rangle \quad (2)$$

where n stands for the bubble number density.

Some moment densities are related to geometrical and statistical quantities of the bubble population. Actually, by defining the IAC a_I as the bubble surface ensemble average and the void fraction α_d as the bubble volume ensemble average, the following relationships are derived:

$$a_I \triangleq n \langle \pi d^2 \rangle = \pi \mathcal{M}_2 \quad (3)$$

$$\alpha_d \triangleq n \langle \frac{\pi}{6} d^3 \rangle = \frac{\pi}{6} \mathcal{M}_3. \quad (4)$$

Rigorously, these definitions of a_I and α_d are different to those derived with the two-fluid model, but for slightly non-homogeneous bubble distributions they are equivalent.^{17,18} In addition to a_I and α_d , an infinity of mean diameter can be written using the following definition:¹⁹

$$d_{pq} \triangleq \left(\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_q} \right)^{\frac{1}{p-q}} \quad (5)$$

from which the commonly used Sauter mean diameter d_{32} can be deduced ($d_{32} = 6 \alpha_d / a_I$).

The transport equation of $\mathcal{M}_\gamma$ obeys to a Liouville-Boltzmann-type equation and reads:^{9,11}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{M}_\gamma \mathbf{V}_d) \\ = n \frac{2\gamma}{\rho_d} \int d^{\gamma-1} \dot{m}_d(d) \mathcal{P}(d) dd \\ - \frac{\gamma}{3\rho_d} \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \mathbf{V}_d \cdot \nabla \rho_d \right) \mathcal{M}_\gamma \\ + \Phi_\gamma^{CO} + \Phi_\gamma^{BU} + \Phi_\gamma^{NU} \end{aligned} \quad (6)$$

where ρ_d denotes the dispersed phase density, $\mathbf{V}_d$ the averaged velocity of the dispersed phase and $\dot{m}_d$ the bubble mass gain per unit surface due to phase change at the bubble interface. In this equation, the first term of the right-hand

side corresponds to the phase change contribution, the second one to the vapor compressibility and the last three terms to the coalescence, break-up and (wall) nucleation contributions respectively. All of these terms are closed in section IV.

In the next section, a two-parameter expression is proposed for modeling $\mathcal{P}(d)$. Both of these parameters being analytically related to some moment densities $\mathcal{M}_\gamma$, the system is close by solving two additional balance equation, namely on $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$.

III. BUBBLE SIZE DISTRIBUTION APPROXIMATION

III.A. Two-parameter quadratic BSD

By following Ruyer & al.¹⁰, a quadratic shaped-BSD is here assumed. The one-parameter quadratic law introduced by these authors to model $\mathcal{P}(d)$ has its median diameter and standard deviation analytically related. To avoid this unrealistic BSD behavior, the following two-parameter quadratic law, let us say the Q2 law, is proposed:

$$\mathcal{P}(d) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}\tilde{\sigma}} \left(1 - \left(\frac{d-d_{00}}{\sqrt{5}\tilde{\sigma}} \right)^2 \right) & \text{for } d_{min} \leq d \leq d_{max} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

d_{00} and $\tilde{\sigma}$ respectively denote the median mean diameter and the standard deviation of $\mathcal{P}(d)$ and are defined as:

$$d_{00} \triangleq \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_0} \quad (8)$$

$$\tilde{\sigma} \triangleq \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_0} - \left(\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_0} \right)^2}. \quad (9)$$

In the definition of $\mathcal{P}(d)$, d_{min} and d_{max} stand for the minimum and maximum diameter respectively; they are given by:

$$d_{min} = d_{00} - \sqrt{5}\tilde{\sigma} \quad (10)$$

$$d_{max} = d_{00} + \sqrt{5}\tilde{\sigma}. \quad (11)$$

By using the Q2 law expression for $\mathcal{P}(d)$, the following relationships relating d_{00} and $\tilde{\sigma}$ to the lower-order moment densities of $\mathcal{P}(d)$ can be derived:

$$\mathcal{M}_1 = n d_{00} \quad (12a)$$

$$\mathcal{M}_2 = n (\tilde{\sigma}^2 + d_{00}^2) \quad (12b)$$

$$\mathcal{M}_3 = n d_{00} (3\tilde{\sigma}^2 + d_{00}^2). \quad (12c)$$

Rearranging these equations leads to a *geometrical relationship* giving n :

$$n = \frac{1}{36\pi} \frac{a_I^3}{\alpha_d^2} \frac{5(5 + 3\tilde{\sigma}^{*2})^2}{(5 + \tilde{\sigma}^{*2})^3} \quad (13)$$

where a_I and α_d have been introduced through (3) and (4) and $\tilde{\sigma}^*$ denotes a non-dimensional standard deviation defined as:

$$\tilde{\sigma}^* \triangleq \frac{\sqrt{5}\tilde{\sigma}}{d_{00}}. \quad (14)$$

III.B. Numerical conditioning of the Q2 law

Two limit cases must be avoided so that the Q2 law keeps a consistent behavior, namely $d_{min} < 0$ and $\tilde{\sigma} < 0$. Taking into account both of these limit cases and rearranging (8), (9), (10) and (12) leads to the following condition on the moment densities:

$$0.9 < \frac{\pi}{6} \frac{\mathcal{M}_2^2}{\mathcal{M}_1 \alpha_d} < 1. \quad (15)$$

Respect of this condition implies the following interval definition for $\tilde{\sigma}^*$:

$$0 < \tilde{\sigma}^* < 1 \quad (16)$$

In other words, the limit case $\tilde{\sigma}^* = 0$ is equivalent to $\tilde{\sigma} = 0$ (*i.e.* single-size assumption) and the limit case $\tilde{\sigma}^* = 1$ is equivalent to $d_{min} = 0$ (*i.e.* one-parameter quadratic law of Ruyer & al.¹⁰).

IV. CLOSURE RELATIONSHIPS

This section describes the closure of the different source terms of (6).

IV.A. Coalescence and Break-up

A very large amount of coalescence and break-up models can be found in literature. Unfortunately, the physics underlying these phenomena is often speculative, what can sometimes lead to self-contradictory models.

Although numerous sources of bubble coalescence and break-up have been reported,^{20,21} only turbulent induced coalescence and break-up events are addressed hereafter. In case of turbulent flows we are interested in, these kinds of events are assumed to be predominant with respect to the other sources of coalescence and break-up¹⁵.

IV.A.1. Bubble coalescence

Binary turbulence induced coalescence is here considered. Such coalescence event then involves a couple of colliding bubbles with different diameters, let us say d_1 and d_2 . The coalescence source term of (6) is modeled by summing the coalescence contributions of all combinations of colliding bubble couples $\{d_1; d_2\}$:

$$\Phi_\gamma^{CO} = \frac{1}{2} \iint_{d_{min}}^{d_{max}} \Delta \mathcal{M}_\gamma^{CO}(d_1, d_2) \phi^{CO}(d_1, d_2) dd_1 dd_2 \quad (17)$$

where ϕ^{CO} denotes the elementary coalescence frequency and $\Delta\mathcal{M}_\gamma^{CO}$ corresponds to the decrease in $\mathcal{M}_\gamma$ due to one coalescence event. The factor $1/2$ in (17) avoids double counting of the same coalescence event. By assuming conservation of the gas volume during the coalescence process, $\Delta\mathcal{M}_\gamma^{CO}$ reads:

$$\Delta\mathcal{M}_\gamma^{CO} = (d_1^3 + d_2^3)^{1/3} - d_1 - d_2. \quad (18)$$

The coalescence frequency can be written as the product of a collision frequency ϕ^{CL} and a coalescence probability η^{CO} (also sometimes called collision efficiency):

$$\phi^{CO}(d_1, d_2) = \phi^{CL}(d_1, d_2) \eta^{CO}(d_1, d_2). \quad (19)$$

We chose here to use the model of Kamp & al.⁹ for the modeling of ϕ^{CL} and η^{CO} :

$$\phi^{CL}(d_1, d_2) = 2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} n^2 \mathcal{P}(d_1) \mathcal{P}(d_2) \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \times \frac{C_t}{\sqrt{1.61}} \left(\varepsilon_c \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \quad (20)$$

$$\eta^{CO}(d_1, d_2) = \exp \left(-\frac{K_\eta}{\sqrt{6}} \frac{C_t}{\sqrt{1.61}} \left(\varepsilon_c \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{1/3} \times \sqrt{\frac{3\rho_c d_{eq}}{C_{vm} \sigma}} \right) \quad (21)$$

where ρ_c and ε_c respectively denote the density and the dissipation rate of the turbulent kinetic energy of the continuous phase and σ the surface tension. In this model, K_η is a constant set equal to 2 by the authors and d_{eq} stands for an equivalent bubble diameter defined as:

$$d_{eq} \triangleq \frac{2 d_1 d_2}{d_1 + d_2}. \quad (22)$$

C_t denotes the ratio between the bubble velocity fluctuations and the liquid velocity fluctuations and can be expressed, among others, as a function of d_{00} . C_{vm} corresponds to the virtual mass coefficient of two touching spheres and can be expressed as a function of the ratio d_1/d_2 . Detailed expressions of both of these coefficients can be found in the original paper of Kamp & al.⁹

Coalescence source term Φ_γ^{CO} can be rearranged as:

$$\Phi_\gamma^{CO} = 0.2546 C_t(d_{00}) d_{00}^{\gamma+7/3} n^2 \varepsilon^{1/3} \times \mathcal{I}_\gamma^{CO}(\eta_{00}^{CO}, \tilde{\sigma}^*) \quad (23)$$

where $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$ stands for the double integral over all bubble sizes of all terms depending on d_1 and d_2 . This integral is function of the two non-dimensional parameters $\tilde{\sigma}^*$ and η_{00}^{CO} , the latter being defined as:

$$\eta_{00}^{CO} \triangleq \exp \left(-K_\eta \frac{C_t}{\sqrt{1.61}} \left(\frac{\varepsilon_c}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{\rho_c}{\sigma}} d_{00}^{5/6} \right). \quad (24)$$

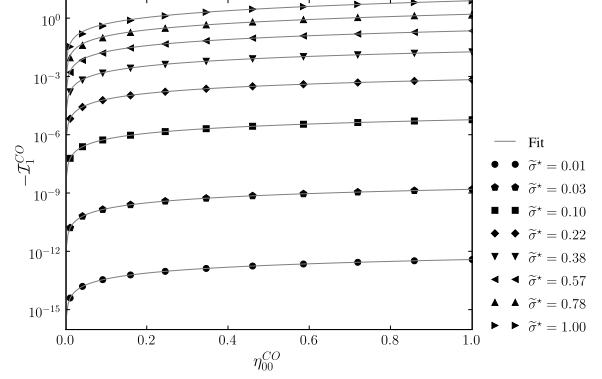


Fig. 1. Computed and fitted values of the integral $-\mathcal{I}_1^{CO}$.

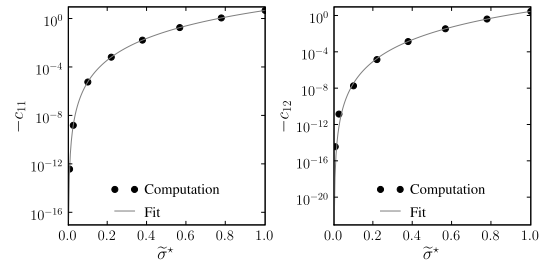


Fig. 2. Computed and fitted values of the coefficients $-c_{11}$ and $-c_{12}$.

A similar numerical method of Kamp & al.'s one is used here to estimate $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$. In Fig. 1, $-\mathcal{I}_1^{CO}$ is plotted against η_{00}^{CO} , for several values of $\tilde{\sigma}^*$ and for $\gamma = 1$.

Similar computation for $\gamma = 2$ shows $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$ can be well approximated by a polynomial expression:

$$\mathcal{I}_\gamma^{CO}(\eta_{00}^{CO}, \tilde{\sigma}^*) \cong c_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{00}^{CO} + c_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{00}^{CO^2} \quad (25)$$

where $c_{\gamma 1}$ and $c_{\gamma 2}$ are polynomial functions of $\tilde{\sigma}^*$ (see Fig. 2 for the case $\gamma = 1$):

$$c_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) = c_{\gamma 11} + c_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^* \quad (26a)$$

$$c_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) = c_{\gamma 21} \tilde{\sigma}^{*2} + c_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^{*3} \quad (26b)$$

whose coefficients are given in Table I.

TABLE I
Values of the coalescence source term integral coefficients

γ	$c_{\gamma 11}$	$c_{\gamma 12}$	$c_{\gamma 21}$	$c_{\gamma 22}$
1	-7.0431	1.9557	-4.3631	1.0821
2	-3.7261	0.5477	-2.6682	0.1248

IV.A.2. Bubble break-up

For the sake of simplicity, we only focus on the modeling of homogeneous binary bubble break-up, that is, the break-up of one bubble into two daughter bubbles of equal size. Non-homogeneous binary break-up will be addressed in a future work, using a similar approach to the one of Luo & Svendsen²².

The break-up source term of (6) is modeled by summing the contributions on $\mathcal{M}_\gamma^{BU}$ of all breaking bubbles:

$$\Phi_\gamma^{BU} = \int_{d_{min}}^{d_{max}} \Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}(d) \phi^{BU}(d) dd \quad (27)$$

where ϕ^{BU} denotes the elementary break-up frequency and $\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}$ corresponds to the increase in $\mathcal{M}_\gamma$ due to one break-up event. By assuming conservation of the gas volume during the break-up process, $\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU}$ reads:

$$\Delta \mathcal{M}_\gamma^{BU} = d^\gamma \left(2^{1-\frac{\gamma}{3}} - 1 \right). \quad (28)$$

Several authors consider that the turbulent induced bubble break-up occurs through collision of bubbles with turbulent eddies of the liquid. Prince & Blanch²⁰ therefore proposed to model the break-up frequency similarly to the coalescence one:

$$\phi^{BU}(d) = \phi_e^{CL}(d) \eta^{BU}(d). \quad (29)$$

where ϕ_e^{CL} denotes the collision frequency of bubble with a turbulent eddy and η^{BU} the probability this collision results in a break-up event. According to these authors, ϕ_e^{CL} and η^{BU} are given by:

$$\phi_e^{CL}(d) = \int_{d_{e,min}}^{d_{e,max}} \sqrt{2} \frac{\pi}{4} n \mathcal{P}(d) \mathcal{F}_e(d_e) \left(\frac{d+d_e}{2} \right)^2 \times \varepsilon_c^{1/3} \sqrt{d^{2/3} + d_e^{2/3}} dd_e \quad (30)$$

$$\eta^{BU}(d) = \exp \left(-\frac{\text{We}_{cr}}{\text{We}(d)} \right) \quad (31)$$

where We denotes the turbulent bubble Weber number:

$$\text{We}(d) = \frac{2.0 \rho_c \varepsilon_c^{2/3} d^{5/3}}{\sigma}. \quad (32)$$

The critical Weber number We_{cr} appearing in (31) can be estimated by balancing the natural frequency of a bubble with the characteristic frequency of the turbulent flow:²³

$$\text{We}_{cr} = \frac{2 \iota (\iota + 1) (\iota - 1) (\iota + 2)}{\pi^2 \left((\iota + 1) \frac{\rho_d}{\rho_c} + \iota \right)} \approx 2.4 \Big|_{\iota=2} \quad (33)$$

where ι stands for the bubble oscillation mode.

In (30), $\mathcal{F}_e$ denotes the distribution function in size of the turbulent eddies in the liquid and can be approximated by:^{15,22}

$$\mathcal{F}_e(d_e) = 0.8 \left(1 - \alpha_d \right) d_e^{-4}. \quad (34)$$

Assuming that only equal-sized eddies or marginally smaller ones can cause a break-up event, $d_{e,max}$ is chosen equal to d and $d_{e,min}$ has been set to $0.65 \cdot d$ by Yao & Morel¹⁵ (adjusted with experimental data of the DEBORA database).

Finally, break-up source term Φ_γ^{BU} can be rewritten as:

$$\Phi_\gamma^{BU} = 0.1666 \left(2^{1-\frac{\gamma}{3}} - 1 \right) n \left(1 - \alpha_d \right) d_{00}^{\gamma-2/3} \varepsilon_c^{1/3} \times \mathcal{I}_\gamma^{BU}(\tilde{\sigma}^*, \eta_{00}^{BU}) \quad (35)$$

where $\mathcal{I}_\gamma^{BU}$ stands for the integral over all bubble sizes of all terms depending on d . This integral is function of the two non-dimensional parameters $\tilde{\sigma}^*$ and η_{00}^{BU} , the latter being defined as:

$$\eta_{00}^{BU} \triangleq \exp \left(-\frac{\text{We}_{cr}}{\text{We}(d_{00})} \right). \quad (36)$$

$\mathcal{I}_\gamma^{BU}$ can be estimated similarly to $\mathcal{I}_\gamma^{CO}$:

$$\mathcal{I}_\gamma^{BU}(\eta_{00}^{BU}, \tilde{\sigma}^*) \cong b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{00}^{BU 1/2} + b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) \eta_{00}^{BU 3/2} \quad (37)$$

where $b_{\gamma 1}$ and $b_{\gamma 2}$ are polynomial functions of $\tilde{\sigma}^*$:

$$b_{\gamma 1}(\tilde{\sigma}^*) = b_{\gamma 11} \tilde{\sigma}^* + b_{\gamma 12} \tilde{\sigma}^{*2} \quad (38a)$$

$$b_{\gamma 2}(\tilde{\sigma}^*) = b_{\gamma 21} + b_{\gamma 22} \tilde{\sigma}^* \quad (38b)$$

whose coefficients are given in Table II.

TABLE II
Values of the break-up source term integral coefficients

γ	$b_{\gamma 11}$	$b_{\gamma 12}$	$b_{\gamma 21}$	$b_{\gamma 22}$
1	3.6795	-1.5726	4.4491	-1.8453
2	4.0258	-0.6557	4.6578	-2.7944

IV.B. Phase change

The different closures proposed in this section are written in the framework of sub-cooled boiling bubbly flows. In this case, the phase change can be divided schematically into two contributions: the nucleation of new bubbles near the walls and the condensation of these bubbles in the sub-cooled bulk liquid.

IV.B.1. Bulk phase change

Bulk phase change source term of the $\mathcal{M}_\gamma$ transport equation (6) involves the interfacial rate of phase change of a single bubble $\dot{m}_d$. An expression for $\dot{m}_d$ can be determined from the local instantaneous interfacial balance of total energy integrated on the surface of a spherical bubble:^{11,12}

$$\dot{m}_d = \frac{-q_d^i - q_c^i}{\pi d^2 (H_d^i - H_c^i)} \quad (39)$$

where H_d^i and H_c^i denote the vapor and liquid enthalpies at bubble surface respectively; they are generally assumed to be equal to corresponding saturation enthalpies. In this equation q_k^i stands for the heat flux between the bubble surface and phase k .

We assume that the bubbles are small enough so that all the vapor inside them is at the same temperature as the bubble surface, namely the saturation temperature. The bubbles are small enough to be always at the saturation temperature. The heat exchange between the vapor inside the bubble and the interface can therefore be neglected ($q_d^i = 0$).

As for q_c^i , a classical modeling is to introduce a Nusselt number:

$$q_c^i = \frac{\text{Nu}_c \lambda_c}{d} \pi d^2 (\theta_{sat} - \theta_c) \quad (40)$$

where θ_{sat} denotes the saturation temperature and λ_c the liquid thermal conductivity. Numerous correlations can be found in the literature to model the condensation Nusselt number Nu_c .²⁴ After several tests, we chose the correlation of Chen & Mayinger:²⁵

$$\text{Nu}_c = 0.185 \text{Re}_b^{0.7} \text{Pr}_c^{0.5} \quad (41)$$

where Pr_c stands for the liquid Prandtl number:

$$\text{Pr}_c \triangleq \frac{\rho_c C_{p_c} \nu_c}{\lambda_c} \quad (42)$$

and Re_b stands for the bubble Reynolds number:

$$\text{Re}_b \triangleq \frac{d \Delta V}{\nu_c} \quad (43)$$

C_{p_c} denotes the liquid heat capacity at constant pressure, ν_c the liquid kinematic viscosity and ΔV the bubble relative velocity.

An usual approximation of this relative velocity is the norm of the averaged velocity difference $|\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_c|$. By making some assumption on the flow configuration, a diameter-dependent expression for ΔV can however be derived. Thus, for a mostly ascendant flow, the balance between buoyancy and drag forces acting on a single bubble leads to the following diameter-dependent bubble terminal velocity:

$$\Delta V(d) \cong \sqrt{\frac{4}{3} g \left(1 - \alpha_d\right) \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_c}\right) \frac{d}{C_D(d)}} \quad (44)$$

where the gas volume fraction α_d has been introduced through the mixture density $\rho_m = \alpha_d \rho_d + (1 - \alpha_d) \rho_c$. In equation (44), $C_D(d)$ denotes the bubble drag coefficient given by:¹²

$$C_D(d) = \frac{24}{\text{Re}_b} \left(1 + 0.1 \text{Re}_b^{3/4}\right) \approx \frac{24}{10} \text{Re}_b^{1/4} \quad (45)$$

where we assumed $0.1 \text{Re}_b^{3/4} \gg 1$ to simplify C_D .

Finally, rearranging all of these equations leads to the following bulk phase change source term for (6):

$$\begin{aligned} n \frac{2\gamma}{\rho_d} \int d\gamma^{-1} \dot{m}_d(d) \mathcal{P}(d) dd \\ = -2\gamma \frac{\lambda_c}{\rho_d} \frac{a_I}{\pi d_{32}^2} \left(\frac{\theta_{sat} - \theta_c}{H_d^i - H_c^i} \right) \\ \times \text{Nu}_{c,\gamma}^+(d_{00}, \tilde{\sigma}) \quad \gamma = 1, 2 \end{aligned} \quad (46)$$

where $\text{Nu}_{c,1}^+$ and $\text{Nu}_{c,2}^+$ are *polydisperse Nusselt numbers*.

IV.B.2. Wall nucleation

In our context of sub-cooled boiling flow, the nucleation of new vapor bubbles is assumed to be only located near the duct walls. Therefore, *only a thin layer of fluid in contact with the heated walls are concerned by wall nucleation source terms*.

An homogeneous single-size wall nucleation is assumed here. Corresponding source terms is given by:

$$\Phi_\gamma^{NU} = D_d^\gamma \phi^{NU} n^{NU} \quad (47)$$

where ϕ^{NU} denotes the bubble departure frequency and n^{NU} the density of active nucleation sites. Modeling of ϕ^{NU} and n^{NU} is carried out with the model of Kurul & Podowski,²⁶ whereas the bubble departure diameter D_d is modeled with Ünal's correlation.²⁷

V. NUMERICAL SIMULATIONS OF A BOILING BUBBLY FLOW

The multi-size model described above has been implemented in the three dimensional multiphase CFD code NEPTUNE_CFD.¹⁴ Experimental tests of the DEBORA database have been chosen to evaluate numerical results.

Several multi-size models have already been implemented in NEPTUNE_CFD. Morel & al.³ carried out a comparative study of the performance of these multi-size models: a multi-group method and two MOM based models (log-normal and one-parameter quadratic law BSD modeling). This study was performed on an adiabatic experiment. Morel & Laviéville¹¹ also work of the modeling of boiling flows with a MOM based on a log-normal BSD modeling, whereas Ruyer & Seiler²⁸ carried out a similar study with a one-parameter quadratic BSD. Both of these latter studies

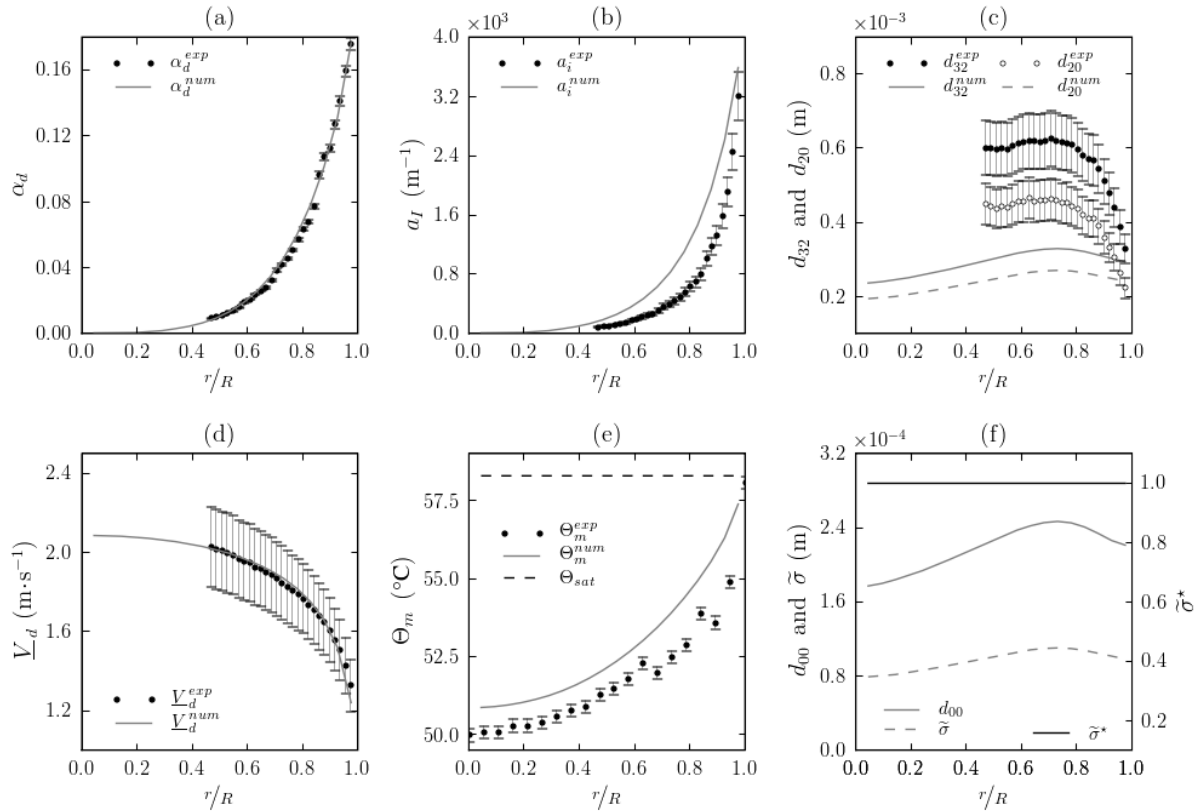


Fig. 3. Comparison of experimental (subscript *exp*) and numerical (subscript *num*) results ($r/R = 0$ stands for the duct center and $r/R = 1$ for the heated wall)

used the DEBORA database as experimental reference. The work presented in this paper is therefore the continuation of all of these studies.

V.A. Experimental and numerical details

The DEBORA experiment is carried out at the CEA Grenoble (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, Grenoble, France). It consists in a vertical pipe having an internal diameter equal to 19.2 mm inside which some liquid flows upwardly.

A part of the tube wall of 3.5 m long is electrically heated. As a consequence, numerous vapor bubbles are nucleated onto the heated wall surface and condense in the core of the flow, where the liquid is sub-cooled. *At the end of the heated section*, the radial profiles of the void fraction, bubble diameter and vertical bubble velocity are measured by means of an optical probe and the mixture temperature is measured by means of a thermocouple. In order to simulate the pressurized water reactor conditions under low pressure, the R-12 has been adopted as the working fluid. More de-

tails on the DEBORA experiment can be found in the paper of Garnier & al.²⁹

A specific DEBORA experimental test case, whose controlling parameters are detailed in Table III, has been chosen for this study.

TABLE III

Controlling parameters of the DEBORA selected test case

Pressure (bar)	Inlet mass flow rate ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$)	Liquid inlet temperature ($^{\circ}\text{C}$)	Wall to fluid heat flux density ($\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$)
14.59	2027	28.52	73.161

The flow being assumed axi-symmetric, a two-dimensional axi-symmetric computation grid has been used. After a mesh convergence test, a grid characterized by 400 axial meshes and 20 radial meshes has been chosen.

V.B. Results and discussion

Results of the simulated DEBORA test case are presented on Figure 3 and compared to experimental data at

the end of the heated section. The turbulent dispersion coefficient has been used as an adjustment parameter on the void fraction profile. For the selected test case, we set $C_{TD} = 1.25$.

Whereas the void fraction α_d , Fig. 3(a), is very well represented, the interfacial area concentration a_I , Fig. 3(b), is overestimated. This discrepancy results in a large underestimation of the Sauter mean diameter ($d_{32} = 6\alpha_d/a_I$), Fig. 3(c). The overestimation of a_I can be imputed to the coalescence and/or break-up models: the coalescence source terms are too weak and/or the break-up source terms are too strong, what leads to bubbles over-all too small.

Anyways, despite this point, the simulation is in good agreement with the experimental data. The vapor velocity, Fig. 3(d), is indeed also very well represented and the mixture temperature, Fig. 3(e), is only 1°C overestimated, what could be attributed to some uncertainties on the R-12 thermophysical properties.

VI. CONCLUSIONS

A two-parameter quadratic BSD (Q2 law) has been proposed for modeling the size spectrum of a bubble population in a two-phase bubbly flow. The MOM, which consists in solving moment density transport equations to deduce the evolution of the BSD itself, has been used to link this BSD to a classical two-fluid model. The form of the moment density transport equations derived makes these equations can be implemented as simple additional scalar transport equations. In addition, since only two of such equations are needed to close the system, this method appears to be quite simple to implement and numerically efficient. Thus the multi-size model proposed here is particularly convenient for dealing with CFD simulations where large computation domains are tackled.

A particular asset of the Q2 law is its simple polynomial expression. The different mechanisms involved in the geometrical equation source terms (phase change, bubble coalescence and break-up) can easily be computed, either analytically or using polynomial interpolations. Although it was not presented here, the simplicity of the Q2 law also allows to derived *polydisperse hydrodynamic forces*, as shown by Ruyer & al.¹⁰ for their one-parameter quadratic BSD. This is particularly interesting when all the bubbles have not the same hydrodynamic behavior in the flow. This can be observed when the BSD width is large, in other words when small bubbles coexist with much larger ones.

Numerical simulation carried out with the NEPTUNE_CFD code showed the ability of this multi-size model to deal with sub-cooled boiling flows. Although numerical results are in good agreement with experimental data of the DEBORA database, it appears that the coalescence and/or break-up models may not be realistic enough, what results in an overestimation of the IAC. Improvement of the

break-up source term can be envisaged by considering the non-homogeneous aspect of the mechanism: most of the time, a bubble breaks into two bubbles whose diameters are different.²² Taking into account of other source of coalescence and break-up events (*e.g.* buoyancy-driven, laminar shear, wake entrainment...) could also improve the IAC prediction.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been achieved in the framework of the NEPTUNE project, financially supported by CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives), EDF, IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) and AREVA-NP.

NOMENCLATURE

a_I	interfacial area concentration
Cp_k	heat capacity at constant pressure of phase k
d	bubble diameter
d_{00}	median diameter
d_{32}	Sauter mean diameter
D_d	wall nucleation bubble departure diameter
H_k^i	enthalpy at the bubble interface of phase k
$\mathcal{M}_\gamma$	γ^{th} order moment density of $\mathcal{P}$
$\dot{m}_d$	bubble mass gain per unit surface due to phase change
n	bubble number density
Nu	Nusselt number
$\mathcal{P}$	bubble size distribution
Pr	Prandtl number
q_k^i	heat flux between the surface of a single bubble and phase k
R	duct radius
r	position along the duct radius
Re	Reynolds number
t	time
$\underline{V}_k$	averaged velocity of phase k
We	Weber number
$\underline{x}$	position vector

Greek symbols

α_k	volume fraction of phase k
ε_k	dissipation rate of the turbulent kinetic energy of phase k
η	efficiency
ι	bubble oscillation mode
λ_k	thermal conductivity of phase k
ν_k	kinematic viscosity of phase k
ϕ	frequency
Φ_γ	source term of the $\mathcal{M}_\gamma$ transport equation
ρ_k	density of phase k
σ	surface tension

$\tilde{\sigma}$ standard deviation
 θ_k averaged temperature of phase k

Subscripts

b bubble
 c continuous phase
 cr critical
 d dispersed phase
 e turbulent eddy
 eq equivalent
 m mixture
 max maximum
 min minimum
 sat saturation

Superscripts

BU break-up
 CL collision
 CO coalescence
 exp experimental
 num numerical
 NU nucleation
 $+$ polydisperse
 $\star$ non-dimensional

Acronyms

BSD bubble size distribution
CFD computational fluid dynamics
IAC interfacial area concentration
MGM multi-group method
MOM method of moments

REFERENCES

1. P.M. CARRICA, D. DREW, F. BONETTO, and R.T. LAHEY JR., "A polydisperse model for bubbly two-phase flow around a surface ship," *International Journal of Multiphase Flow*, **25**, 257 (1999).
2. E. KREPPER, D. LUCAS, T. FRANK, H.-M. PRASSER, and P.J. ZWART, "The inhomogeneous MUSIG model for the simulation of polydispersed flows," *Nuclear Engineering and Design*, **238**, 7, 1690 (2008).
3. C. MOREL, P. RUYER, N. SEILER, and J.M. LAVIÉVILLE, "Comparison of several models for multi-size bubbly flows on an adiabatic experiment," *International Journal of Multiphase Flow*, **36**, 25 (2010).
4. H.M. HULBURT and S. KATZ, "Some problems in particle technology – A statistical mechanical formulation," *Chemical Engineering Science*, **19**, 555 (1964).
5. R. MCGRAW, "Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments," *Aerosol Science and Technology*, **27**, 2, 255 (1997).
6. D.L. MARCHISIO and R.O. FOX, "Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments," *Journal of Aerosol Science*, **36**, 43 (2005).
7. S.C.P. CHEUNG, G.H. YEOH, J.Y. TU, E. KREPPER, and D. LUCAS, "Numerical study of bubbly flows using direct quadrature method of moments," *Proc. of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010)*, Tampa, FL USA – May 30-June 4 (2010).
8. K.W. LEE, "Change of particle size distribution during Brownian coagulation," *Journal of Colloid and Interface Science*, **92**, 2, 315 (1983).
9. A.M. KAMP, A.K. CHESTERS, C. COLIN, and J. FABRE, "Bubble coalescence in turbulent flows: a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow," *International Journal of Multiphase Flow*, **27**, 1363 (2001).
10. P. RUYER, N. SEILER, M. BEYER, and F.-P. WEISS, "Bubble size distribution modelling for the numerical simulation of bubbly flows," *Proc. of the 6th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2007)*, Leipzig, Germany – July 9-13 (2007).
11. C. MOREL and J.M. LAVIÉVILLE, "Modeling of multi-size bubbly flow and application to the simulation of boiling flows with the NEPTUNE_CFD code," *Science and Technology of Nuclear Installations, Article ID 953527* (2009).
12. M. ISHII and T. HIBIKI, *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*, Springer (2006).
13. R.I. NIGMATULIN, *Dynamics of Multiphase Media*, Vol. 1 & 2, Hemisphere Publishing Corporation (1991).
14. A. GUELF, D. BESTION, M. BOUCKER, P. BOUDIER, P. FILLION, M. GRANDOTTO, J.-M. HERARD, E. HERVIEU, and P. PETURAUD, "NEPTUNE: A new software platform for advanced nuclear thermal hydraulics," *Nuclear Science and Engineering*, **156**, 3, 281 (2007).
15. W. YAO and C. MOREL, "Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **47**, 307 (2004).
16. J.-L. ACHARD, *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*, PhD thesis, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble (1978).

17. D. LHUILLIER, C. MOREL, and J.-M. DELHAYE, "Bilan d'aire interfaciale dans un mélange diphasique: approche locale vs approche particulaire," *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **328**, 143 (2000).
18. D. LHUILLIER and A. NADIM, "Fluid dynamics of particulate suspensions: selected topics," *Proc. of the 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems (CMDS9)*, Istanbul, Turkey – June 29-July 3 1998, World Scientific Publishing Corporation (1999).
19. R.A. MUGELE and H.D. EVANS, "Droplet size distribution in sprays," *Industrial and Engineering Chemistry*, **43**, 6, 1317 (1951).
20. M.J. PRINCE and H.W. BLANCH, "Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns," *AIChE Journal*, **36**, 10, 1485 (1990).
21. F. RISSO, "The mechanisms of deformation and breakup of drops and bubbles," *Multiphase Science and Technology*, **12**, 1 (2000).
22. H. LUO and H.F. SVENDSEN, "Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions," *AIChE Journal*, **42**, 5, 1225 (1996).
23. S. SEVIK and S.H. PARK, "The splitting of drops and bubbles by turbulent fluid flow," *Journal of Fluids Engineering – Transactions of the ASME*, **95**, 1, 53 (1973).
24. H.S. PARK, T.H. LEE, T. HIBIKI, W.P. BAEK, and M. ISHII, "Modeling of the condensation sink term in an interfacial area transport equation," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **50**, 5041 (2007).
25. Y.M. CHEN and F. MAYINGER, "Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles," *International Journal of Multiphase Flow*, **18**, 6, 877 (1992).
26. N. KURUL and M.Z. PODOWSKI, "Multidimensional effects in forced-convection subcooled boiling," *Proc. of the 9th International Heat Transfer Conference*, Jerusalem, Israel – August 19-24, Hemisphere Publication Corporation, New York (1990).
27. H.C. ÜNAL, "Maximum bubble diameter, maximum bubble-growth rate during the subcooled nucleate flow boiling of water up to 17.7 MN/m²," *International Journal of Multiphase Flow*, **19**, 643 (1976).
28. P. RUYER and N. SEILER, "Advanced model for polydispersion in size in boiling flows," *Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, **4**, 65 (2009).
29. J. GARNIER, E. MANON, and G. CUBIZOLLES, "Local measurements on flow boiling of refrigerant 12 in a vertical tube," *Multiphase Science and Technology*, **13**, 1 (2001).

Références bibliographiques

- ABID, S. et CHESTERS, A.K. : The drainage and rupture of partially-mobile films between colliding drops at constant approach velocity. *International Journal of Multiphase Flow*, 20(3):613–629, 1994.
- ACHARD, J.-L. : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- AKIYAMA, M. : Bubble collapse in subcooled boiling. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 16(93):570–575, 1973.
- ANTAL, S.P., LAHEY JR., R.T. et FLAHERTY, J.E. : Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 17(5):635–652, 1991.
- ARIS, R. : *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- AZBEL, D. et ATHANASIOS, L.L. : A mechanism of liquid entrainment. CHEREMISINOFF, N., éditeur : *Handbook of Fluids in Motion*. Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, USA, 1983.
- BABINSKI, E. et SOJKA, P.E. : Modeling drop size distributions. *Progress in Energy and Combustion Science*, 28:303–329, 2002.
- BANNARI, R., KERDOUSS, F., SELMA, B., BANNARI, A. et PROULX, P. : Three-dimensional mathematical modeling of dispersed two-phase flow using class method of population balance in bubble columns. *Computers and Chemical Engineering*, 32:3224–3237, 2008.
- BASSET, A.B. : *A Treatise on Hydrodynamics*, volume 2. Deighton, Bell and Co., London, 1888.
- BATCHELOR, G.K. : The stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(3):545–570, 1970.
- BDZIL, J.B., MENIKOFF, R., SON, S.F., KAPILA, A.K. et STEWART, D.S. : Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: A critical examination of modeling issues. *Physics of Fluids*, 11(2):378–402, 1999.
- BIRD, G.A. : *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow*. Oxford Engineering Science Series. Clarendon Press, Oxford, 2^e édition, 1994.
- BOIS, G. : *Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2011.

- BOIS, G., JAMET, D. et LEBAGUE, O. : Towards Large Eddy Simulation of two-phase flow with phase-change: Direct Numerical Simulation of a pseudo-turbulent two-phase condensing flow. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010.*
- BOUSSINESQ, J. : Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 1885.
- BRUYAT, A., LAURENT, C. et ROUZAUD, O. : Direct quadrature method of moments for multicomponent droplet spray vaporization. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010.*
- BUYEVICH, Y.A. : Statistical hydromechanics of disperse systems – 1. Physical background and general equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(3):489–507, 1971.
- BUYEVICH, Y.A. et SHCHELCHKOVA, I.N. : Flow of dense suspensions. *Progress in Aerospace Sciences*, 18(2):121–150, 1978.
- CARRICA, P.M., DREW, D., BONETTO, F. et LAHEY JR., R.T. : A polydisperse model for bubbly two-phase flow around a surface ship. *International Journal of Multiphase Flow*, 25:257–305, 1999.
- CHAPMAN, S. et COWLING, T.G. : *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, 2^e édition, 1952.
- CHEN, Y.M. et MAYINGER, F. : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877–890, 1992.
- CHESTERS, A.K. : The modelling of coalescence processes in fluid-liquid dispersions: A review of current understanding. *Chemical Engineering Research and Design*, 69(4):259–270, 1991.
- CHESTERS, A.K. et HOFMAN, G. : Bubble coalescence in pure liquids. *Applied Scientific Research*, 38:353–361, 1982.
- CHEVALLIER, J.P. et FABRE, J. : Écoulements diphasiques dispersés : établissement des équations de bilan et problèmes de fermeture. *La Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, 2:157–162, 1988.
- CLIFT, R., GRACE, J.R. et WEBER, M.E. : *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, New York, 1978.
- COULALOGLOU, C. et TAVLARIDES, L.L. : Description of interaction processes in agitated liquid-liquid dispersions. *Chemical Engineering Science*, 32:1289–1297, 1977.
- CUBIZOLLES, G. : *Étude stéréologique de la topologie des écoulements diphasiques à haute pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 1996.
- DELHAYE, J.-M. : Jump conditions and entropy sources in two-phase systems – Local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 1:395–409, 1974.
- DELHAYE, J.-M. : Local instantaneous equations. DELHAYE, J.-M., GIOT, M. et RIETHMULLER, M.L., éditeurs : *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*, pages 95–116. Hemisphere Publishing Corporation, 1981.

- DELHAYE, J.-M. : Some issues related to the modeling of interfacial areas in gas-liquid flows – 1. the conceptual issues. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 329:397–410, 2001.
- DELHAYE, J.-M. : *Thermohydraulique des Réacteurs*. Collection Génie Atomique. EDP Sciences, 2008.
- DEREVICH, I.V. et ZAICHIK, L.I. : An equation for the probability density, velocity, and temperature of particles in a turbulent flow modelled by a random gaussian field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 54(5):631–637, 1990.
- DESJARDINS, O., FOX, R.O. et VILLEDIEU, P. : A quadrature-based moment closure for the williams spray equation. *Proceedings of the Summer Program 2006*, pages 223–234. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 2006.
- DEUTSCH, E. : *Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire calculée par simulation numérique directe des grandes échelles*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 1992.
- DEUTSCH, E. et SIMONIN, O. : Large eddy simulation applied to the motion of particles in stationary homogeneous fluid turbulence. Dans *Turbulence Modification in Multiphase Flows*, volume 110, pages 35–42. ASME Fluids Engineering Division, 1991.
- DREW, D.A. et PASSMAN, S.L. : *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- FLORSCHUETZ, L.W. et CHAO, B.T. : On the mechanics of vapor bubble collapse. *Journal of Heat Transfer*, 87:209–220, 1965.
- FOX, R.O. : Introduction and fundamentals of modeling approaches for polydisperse multiphase flows. MARCHISIO, D.L. et FOX, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 1–40. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- FOX, R.O. : Higher-order quadrature-based moment methods for kinetic equations. *Journal of Computational Physics*, 228:7771–7791, 2009.
- FRISCH, U. : *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- FÉVRIER, P., SIMONIN, O. et SQUIRES, K.D. : Partitioning of particle velocities in gas-solid turbulent flows into a continuous field and a spatially uncorrelated random distribution : theoretical formalism and numerical study. *Journal of Fluid Mechanics*, 533:1–46, 2005.
- GARNIER, J., MANON, E. et CUBIZOLLES, G. : Local measurements on flow boiling of Refrigerant 12 in a vertical tube. *Multiphase Science and Technology*, 13:1–111, 2001.
- GATIGNOL, R. : The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(2):143–160, 1983.
- GREENBERG, J.B., SILVERMAN, I. et TAMBOUR, Y. : On the origins of spray sectional conservation equations. *Combustion and Flames*, 96(1-2):90–96, 1993.
- GUELF, A., BESTION, D., BOUCKER, M., BOUDIER, P., FILLION, P., GRANDOTTO, M., HERARD, J.-M., HERVIEU, E. et PETURAUD, P. : NEPTUNE: A new software platform for advanced nuclear thermal hydraulics. *Nuclear Science and Engineering*, 156(3):281–324, 2007. ISSN 0029-5639.
- HAGESAETHER, L., JAKOBSEN, H.A. et SVENDSEN, H.F. : A model for turbulent binary breakup of dispersed fluid particles. *Chemical Engineering Science*, 57:3251–3267, 2002.

- HESKETH, R.P., ETCHHELLS, A.W. et RUSSELL, T.W.F. : Experimental observations of bubble breakage in turbulent flow. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 30(5):835–841, 1991.
- HIBIKI, T. et ISHII, M. : One-group interfacial area transport of bubbly flows in vertical round tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(15):2711–2726, 2000.
- HILL, D.H. : *The computer simulation of dispersed two-phase flows*. Thèse de doctorat, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1998.
- HINZE, J.O. : Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. *AIChE Journal*, 1(3):289–295, 1955.
- HINZE, J.O. : *Turbulence: An Introduction to its Mechanisms and Theory*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- HOFFMAN, J.D. : *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., 2^e édition, 2001.
- HULBURT, H.M. et KATZ, S. : Some problems in particle technology – A statistical mechanical formulation. *Chemical Engineering Science*, 19:555–574, 1964.
- ISHII, M. : *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- ISHII, M. et HIBIKI, T. : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- JACKSON, R. : Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a newtonian fluid. *Chemical Engineering Science*, 52(15):2457–2469, 1997.
- JAKOBSEN, H.A. : *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Springer, 2008.
- KAMP, A.M. : *Écoulements turbulents à bulles dans une conduite en micropesanteur*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- KAMP, A.M., CHESTERS, A.K., COLIN, C. et FABRE, J. : Bubble coalescence in turbulent flows : a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1363–1396, 2001.
- KATAOKA, I. : Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5):745–758, 1986.
- KAUFMANN, A., MOREAU, M., SIMONIN, O. et HELIE, J. : Comparison between Lagrangian and mesoscopic Eulerian modelling approaches for inertial particles suspended in decaying isotropic turbulence. *Journal of Computational Physics*, 227:6448–6472, 2008.
- KIM, W.K. et LEE, K.L. : Coalescence behavior of two bubbles in stagnant liquids. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 20(5):448–453, 1987.
- KIRKPATRICK, R.D. et LOCKETT, M.J. : The influence of approach velocity on bubble coalescence. *Chemical Engineering Science*, 29(12):2363 – 2373, 1974.
- KOCAMUSTAFAOGULLARI, G. et ISHII, M. : Foundation of the interfacial area transport equation and its closure relations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(3):481–493, 1995.
- KOLMOGOROV, A.N. : Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 32:16–18, 1941.

- KOLMOGOROV, A.N. : On the disintegration of drops in a turbulent flow. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66:825–828, 1949.
- KURUL, N. et PODOWSKI, M.Z. : Multidimensional effects in forced-convection subcooled boiling. *Proceedings of the 9th International Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israel – August 19-24, Heat Transfer 1990*, volume 1-7. Hemisphere Publication Corporation, New York, 1990.
- LAHEY JR., R.T., LOPEZ DE BERTODANO, M. et JONES JR., O.C. : Phase distribution in complex geometry conduits. *Nuclear Engineering and Design*, 141:177–201, 1993.
- LAMB, H. : *Hydrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 6^e édition, 1932.
- LAVIÉVILLE, J., QUÉMÉRAIS, E., MIMOUNI, S., BOUCKER, M. et MÉCHITOUA, N. : NEPTUNE CFD v1.0 theory manual. Rapport technique HI-81/05/032/P, Nept_2004_L1.2/3/P, EDF, 2006.
- LE LOSTEC, N., VILLEDIEU, P. et SIMONIN, O. : Quadrature-based third order moment models for the simulation of particle-laden flows. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- LEE, C.H., ERICKSON, L.E. et GLASGOW, L.A. : Bubble breakup and coalescence in turbulent gas-liquid dispersions. *Chemical Engineering Communications*, 59:65–84, 1987.
- LEE, K.W. : Change of particle size distribution during Brownian coagulation. *Journal of Colloid and Interface Science*, 92(2):315–325, 1983.
- LEGENDRE, D., BORÉE, J. et MAGNAUDET, J. : Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 10(6):1256–1272, 1998.
- LEHR, F., MILLIES, M. et MEWES, D. : Bubble-size distributions and flow fields in bubble columns. *AIChE Journal*, 48(11):2426–2443, 2002.
- LHUIILLIER, D. : Ensemble averaging in slightly non-uniform suspensions. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 11(6):649–661, 1992.
- LHUIILLIER, D. : A mean-field description of two-phase flows with phase changes. *International Journal of Multiphase Flow*, 29(3):511–525, 2003.
- LHUIILLIER, D. et NADIM, A. : Fluid dynamics of particulate suspensions: Selected topics. *Proc. of the 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems (CMD9), Istanbul, Turkey – June 29-July 3 1998*. World Scientific Publishing Corporation, 1999.
- LHUIILLIER, D., THEOFANOUS, T.G. et M.-S.LIOU : Multiphase flows: Compressible multi-hydrodynamics. CACUCI, D.G., éditeur : *Handbook of Nuclear Engineering*, volume 3, chapitre 25. Springer, 2010.
- LIAO, Y. et LUCAS, D. : A literature review of theoretical models for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *Chemical Engineering Science*, 64:3389–3406, 2009.
- LIAO, Y. et LUCAS, D. : A literature review on mechanisms and models for the coalescence process of fluid particles. *Chemical Engineering Science*, 65:2851–2864, 2010.
- LOPEZ DE BERTODANO, M.A. : Two fluid model for two-phase turbulent jets. *Nuclear Engineering and Design*, 179:65–74, 1998.

- LUCAS, D., KREPPER, E. et PRASSER, H.-M. : Development of co-current air-water flow in a vertical pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 31:1304–1328, 2005.
- LUO, H. et SVENDSEN, H.F. : Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 42(5):1225–1233, 1996.
- MAGDELEINE, S. : *Démonstration de la potentialité des méthodes de SND diphasique à renseigner les modèles moyennés : Application à la colonne à bulles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- MAGDELEINE, S., MATHIEU, B., LEBAGUE, O., TOUTANT, A. et MOREL, C. : DNS up-scaling applied to two-phase momentum balance and volumetric interfacial area transport equation for a vertical bubbly flow. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- MAGNAUDET, J. : The forces acting on bubbles and rigid particles. *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, numéro FEDSM97-3522, 1997.
- MANON, E. : *Contribution à l'analyse et à la modélisation locale des écoulements bouillants sous-saturé dans les conditions des Réacteurs à Eau sous Pression*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2000.
- MARCHISIO, D.L. : Quadrature method of moments for poly-disperse flows. MARCHISIO, D.L. et Fox, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 41–78. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- MARCHISIO, D.L. et Fox, R.O. : Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments. *Journal of Aerosol Science*, 36:43–73, 2005.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., MONTAÑES, J.L. et LASHERAS, J.C. : On the breakup of an air bubble injected into a fully developed turbulent flow – Part 2. Size PDF of the resulting daughter bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 401:183–207, 1999.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., RODRÍGUEZ-RODRÍGUEZ, J., DEANE, G.B., MONTAÑES, J.L. et LASHERAS, J.C. : Considerations on bubble fragmentation models. *Journal of Fluid Mechanics*, 661:159–177, 2010.
- MASSOT, M. : Eulerian multi-fluid models for polydisperse evaporating sprays. MARCHISIO, D.L. et Fox, R.O., éditeurs : *Computational models for turbulent multiphase reacting flows*, pages 79–124. CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 2007.
- MAXEY, M.R. et RILEY, J.J. : Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- MCGRAW, R. : Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments. *Aerosol Science and Technology*, 27(2):255–265, 1997.
- MÉCHITOUA, N., BOUCKER, M., LAVIÉVILLE, J., HÉRARD, J.M., PIGNY, S. et SERRE, G. : An unstructured finite volume solver for two phase water/vapour flows based on an elliptic oriented fractional step method. *Proceedings of the 10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10), Seoul, South Korea – October 5-9, 2003*.
- MINIER, J.-P. et PEIRANO, E. : The PDF approach to turbulent dispersed two-phase flows. *Physics Reports*, 352(1-3):1–214, 2001.

- MORAGA, F.J., LARRETEGUY, A.E., DREW, D.A. et LAHEY JR., R.T. : Assessment of turbulent dispersion models for bubbly flows in the low stokes number limit. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:655–673, 2003.
- MOREL, C. : *Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1997.
- MOREL, C. : On the surface equations in two-phase flows and reacting single-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 33:1045–1073, 2007.
- MOREL, C. et LAVIÉVILLE, J.M. : Modeling of multi-size bubbly flow and application to the simulation of boiling flows with the NEPTUNE_CFD code. *Science and Technology of Nuclear Installations*, Article ID 953527, 2009.
- MOREL, C., RUYER, P., SEILER, N. et J.M. LAVIÉVILLE : Comparison of several models for multi-size bubbly flows on an adiabatic experiment. *International Journal of Multiphase Flow*, 36:25–39, 2010.
- MOSSA, J.-B. : *Extension polydisperse pour la description Euler-Euler des écoulements diphasiques réactifs*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- MUGELE, R.A. et EVANS, H.D. : Droplet size distribution in sprays. *Industrial and Engineering Chemistry*, 43(6):1317–1324, 1951.
- NIGMATULIN, R.I. : *Dynamics of Multiphase Media*. Hemisphere Publishing Corporation, 1991.
- OESTERLÉ, B. : *Écoulements Multiphasiques – Des fondements aux méthodes d’ingénierie*. Lavoisier. Hermes Science Publication, 2006.
- OOLMAN, T.O. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence in stagnant liquids. *Chemical Engineering Communications*, 43:237–261, 1986.
- OSEEN, C.W. : *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- PALERMO, T. : Le phénomène de coalescence – Étude bibliographique. *Revue de l’Institut Français du Pétrole*, 46(3):325–360, 1991.
- PALOPOSKI, T. : *Drop size distributions in liquid sprays*. Thèse de doctorat, Helsinki University of Technology, 1994.
- PARK, H.S., LEE, T.H., HIBIKI, T., BAEK, W.P. et ISHII, M. : Modeling of the condensation sink term in an interfacial area transport equation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:5041–5053, 2007.
- PASSALACQUA, A. et FOX, R.O. : Numerical simulation of turbulent gas-particle flow in a riser using a quadrature-based moment method. *Proceedings of the 7th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2010), Tampa, FL USA – May 30-June 4, 2010*.
- POUVREAU, J. : Formes des lois de fermeture de la version 0.0 de Neptune 3D-local. Rapport technique DTP/SMTH/LMDS/2003-018, Nept_2002_L1.2/6, CEA, 2003.
- PRINCE, M.J. et BLANCH, H.W. : Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36(10):1485–1499, 1990.

- RANI, S.L. et BALACHANDAR, S. : Evaluation of the equilibrium Eulerian approach for the evolution of particle concentration in isotropic turbulence. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:1793–1816, 2003.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part II. *Chemical Engineering Progress*, 48 (4):173–180, 1952a.
- RANZ, W.E. et MARSHALL, W.R. : Evaporation from drops: Part I. *Chemical Engineering Progress*, 48 (3):141–146, 1952b.
- REEKS, M.W. : Eulerian direct interaction applied to the statistical motion of particles in a turbulent fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(3):569–590, 1980.
- REEKS, M.W. : On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 3(3):446–456, 1991.
- REEKS, M.W. : On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 4(6):1290–1302, 1992.
- RIOU, X. : *Contribution à la modélisation de l'aire interfaciale en écoulement gaz-liquide en conduite*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- RISSE, F. : The mechanisms of deformation and breakup of drops and bubbles. *Multiphase Science and Technology*, 12:1–50, 2000.
- ROSS, S.L. : *Measurements and models of dispersed phase mixing process*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 1971.
- ROUMY, R. : Structure des écoulements diphasiques eau-air. Étude de la fraction de vide moyenne et des configurations d'écoulement. Rapport technique R-3892, CEA, 1969.
- BUYER, P. et SEILER, N. : Advanced model for polydispersion in size in boiling flows. *La Houille Blanche – Revue Internationale de l'Eau*, 4:65–71, 2009. ISSN 0018-6368.
- BUYER, P., SEILER, N., BEYER, M. et WEISS, F.-P. : Bubble size distribution modelling for the numerical simulation of bubbly flows. *Proceedings of the 6th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2007), Leipzig, Germany – July 9-13, 2007*.
- RÜCKENSTEIN, E. : On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chemical Engineering Science*, 10:22–30, 1959.
- SABONI, A., ALEXANDROVA, S., GOURDON, C. et CHESTERS, A.K. : Interdrop coalescence with mass transfer: Comparison of the approximate drainage models with numerical results. *Chemical Engineering Journal*, 88:127–139, 2002.
- SAGAUT, P. : *Introduction à la simulation numérique des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, volume 30 de *Mathématiques et Application*. Springer, 1998.
- SCHWARTZ, L. : *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, 1965.
- SEVIK, S. et PARK, S.H. : The splitting of drops and bubbles by turbulent fluid flow. *Journal of Fluids Engineering – Transactions of the ASME*, 95(1):53–60, 1973.

- SHIMIZU, K. et CROW, E.L. : History, genesis and properties. Crow, E.L. et SHIMIZU, K., éditeurs : *Log-normal Distributions: Theory and Applications*, volume 88 de *Statistics: Textbooks & Monographs*, chapitre 1, pages 1–26. Marcel Dekker, Inc., 1988.
- SIMONIN, O. : Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Combustion and turbulence in two-phase flows*, Von Karman Lecture Series 1996-02. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- SIMONIN, O., DEUTSCH, E. et MINIER, J.P. : Eulerian prediction of the fluid/particle correlated motion in turbulent two-phase flows. *Applied Scientific Research*, 51:275–283, 1993.
- SIMONIN, O., FÉVRIER, P. et LAVIÉVILLE, J. : On the spatial distribution of heavy-particle velocities in turbulent flows: From continuous field to particulate chaos. *Journal of Turbulence*, 3(40):1–18, 2002.
- TCHEN, C.M. : *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid*. Thèse de doctorat, University of Delft. Martinus Nijhoff, The Hague, 1947.
- TENNEKES, H. et LUMLEY, J.L. : *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- THEOFANOUS, T.G., BIASI, L., ISBIN, H.S. et FAUSKE, H.K. : Nonequilibrium bubble collapse: A theoretical study. *Proceedings of the 11th National Heat Transfer Conference, Minneapolis, Minnesota – 3 August 1969, Heat Transfer Minneapolis*, Chemical Engineering Science Symposium Séries 66. American Institute of Chemical Engineers, 1969.
- TOMIYAMA, A. : Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, 10(4):369–405, 1998.
- TSOURIS, C. et TAVLARIDES, L.L. : Breakage and coalescence models for drops in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, 40(3):395–406, 1994.
- ÜNAL, H.C. : Maximum bubble diameter, maximum bubble-growth rate during the subcooled nucleate flow boiling of water up to 17.7 MN/m². *International Journal of Multiphase Flow*, 19:643–649, 1976.
- VALENTAS, K.J., BILOUS, O. et AMUNDSON, N.R. : Analysis of breakage in dispersed phase systems. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 5(2):271–279, 1966.
- WANG, T., WANG, J. et JIN, Y. : A novel theoretical breakup kernel function for bubbles/droplets in a turbulent flow. *Chemical Engineering Science*, 58:4629–4637, 2003.
- WU, Q., KIM, S., ISHII, M. et BEUS, S.G. : One-group interfacial area transport in vertical bubble flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(8-9):1103–1112, 1998.
- YAO, W. et MOREL, C. : Prediction of parameters distribution of upward boiling two-phase flow with two-fluid models. *Proceedings of the 10th International Conference on Nuclear Engineering (ICONE10), Hyatt Regency Crystal City, Arlington, VA USA – April 14-18, 2002*.
- YAO, W. et MOREL, C. : Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:307–328, 2004.
- YOUNG, J.B. : The fundamental equations of gas-droplet multiphase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 21(2):175 – 191, 1995. ISSN 0301-9322.

- ZAICHIK, L.I. : An equation for the particle velocity probability density function in inhomogeneous turbulent flow. *Fluid Dynamics*, 31(2):261–267, 1996.
- ZEITOUN, O., SHOUKRI, M. et CHATOORGOON, V. : Interfacial heat transfert between steam bubbles and subcooled water in vertical upward flow. *Journal of Heat Transfer*, 117:402–407, 1995.
- ZHANG, D.Z. et PROSPERETTI, A. : Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 267:185–219, 1994a.
- ZHANG, D.Z. et PROSPERETTI, A. : Ensemble phase-averaged equations for bubbly flows. *Physics of Fluids A – Fluid Dynamics*, 6(9):2956–2970, 1994b.
- ZUBER, N. : The dynamics of vapor bubbles in nonuniform temperature fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2(1-2):83–98, 1961.
- ZUBER, N. : On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. *Chemical Engineering Science*, 19:897–919, 1964.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Doctorat d'Université, spécialité *Mécanique des fluides, Énergétique, Procédés*

Thèse soutenue publiquement le 19 décembre 2011 par

Didier ZAEPFFEL

Modélisation des écoulements bouillants à bulles polydispersées

Cette thèse porte sur l'amélioration de la modélisation des écoulements à bulles, et plus particulièrement des écoulements bouillants, dont la compréhension et la prédiction est essentielle pour de nombreuses applications industrielles. L'axe de recherche choisi ici est la prise en compte du caractère polydisperse de la population de bulles, autrement dit du fait que toutes les bulles n'aient ni la même taille, ni la même vitesse. Divers mécanismes peuvent être cités pour expliquer l'existence de la variété de tailles de bulles ; dans notre cas on peut principalement citer la coalescence et la fragmentation de bulles, la cinématique de changement de phase ou encore la compressibilité du gaz à l'intérieur des bulles. De cette polydispersion en taille découle également une polydispersion en vitesse, puisqu'il est bien connu que la vitesse de déplacement d'une bulle est fonction de sa taille.

Un modèle moyenné spécialement adapté aux écoulements à phase dispersée est présenté dans ce manuscrit, modèle que l'on pourra caractériser de polydisperse puisque prenant en compte une fonction de distribution en taille et en vitesse des bulles. Deux lois mathématiques particulières, une loi quadratique et une loi cubique, sont proposées dans ce manuscrit pour modéliser la fonction de distribution en taille des bulles, son évolution spatio-temporelle étant obtenue à l'aide la méthode des moments. Ces deux lois ayant une expression mathématique relativement simple, les différents termes d'échanges entre phases ont pu être fermés dans un cadre polydisperse. Ce modèle moyenné polydisperse a été implanté dans le code de calcul NEPTUNE_CFD, puis testé en tentant de reproduire par la simulation l'expérience DEBORA du CEA Grenoble, expérience dédiée à l'étude des écoulements bouillants sous-saturés.

Mots-clés : Modélisation, écoulements diphasiques, bulles, polydispersion, méthode des moments, coalescence, fragmentation, changement de phase, simulation numérique.

Modelling of boiling bubbly flows using a polydisperse approach

The objective of this work was to improve the modelling of boiling bubbly flows. We focused on the modelling of the polydisperse aspect of a bubble population, *i.e.* the fact that bubbles have different sizes and different velocities. The multi-size aspect of a bubble population can originate from various mechanisms. For the bubbly flows we are interested in, bubble coalescence, bubble break-up, phase change kinematics and/or gas compressibility inside the bubbles can be mentioned. Since, bubble velocity depends on bubble size, the bubble size spectrum also leads to a bubble velocity spectrum.

An averaged model especially dedicated to dispersed flows is introduced in this thesis. Closure of averaged inter-phase transfer terms are written in a polydisperse framework, *i.e.* using a distribution function of the bubble sizes and velocities. A quadratic law and a cubic law are here proposed for the modelling of the size distribution function, whose evolution in space and time is then obtained with the use of the moment method. Our averaged model has been implemented in the NEPTUNE_CFD computation code in order to simulate the DEBORA experiment. The ability of our model to deal with sub-cooled boiling flows has therefore been evaluated.

Keywords: Modelling, two-phase flows, bubbles, polydisperse approach, moment method, coalescence, break-up, phase change, numerical simulation.

CEA/Grenoble
DEN/DM2S/STMF/LMES
17 rue des Martyrs
38054 GRENOBLE Cedex 9 – France