SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NOMENCLATURE

C Chaleur spécifique-- $J.kg^{-1}.°C^{-1}$

h Coefficient d'échange thermique--$W.m^{-2}.°C^{-1}$

T Température---$°C$

L_1 Longueur du matériau-- m

L_2 Largeur du matériau--- m

L_3 Profondeur du matériau--- m

t Temps-- s

Z Impédance thermique équivalente--$°C.W^{-1}$

$\vec{j}_q$ Vecteur densité de flux thermique---$W.m^{-2}$

ω Pulsation excitatrice---$rad.s^{-1}$

α Diffusivité thermique--- $m^2.s^{-1}$

λ Conductivité thermique---$W.m^{-1}.°C^{-1}$

ρ Masse volumique--$kg.m^{-3}$

ϕ_1 Densité de flux de chaleur suivant la direction (ox)-------------------------------------$W.m^{-2}$

ϕ_2 Densité de flux de chaleur suivant la direction (oy)-----------------------------------$W.m^{-2}$

ϕ_3 Densité de flux de chaleur suivant la direction (oz)------------------------------------$W.m^{-2}$

ϕ Densité de flux thermique à travers le matériau---$W.m^{-2}$

Kapok Fibre végétale que l'on tire du kapokier ou fromager---------------------------------------

$\vec{e}_x$ Vecteur unitaire de l' axe (ox)---

$\vec{e}_y$ Vecteur unitaire de l'axe (oy)---

$\vec{e}_z$ Vecteur unitaire de l'axe (oz)---

Indice (1x) correspond à la face avant orthogonale à l'axe (ox)-----------------------------------

Indice (2x) correspond à la face arrière orthogonale à l'axe (ox)----------------------------------

Indice (1y) correspond à la face avant orthogonale à l'axe (oy)-----------------------------------

Indice (2y) correspond à la face arrière orthogonale à l'axe (oy)----------------------------------

Indice (1z) correspond à la face avant orthogonale à l'axe (oz)-------------------------------------

Indice (2z) correspond à la face arrière orthogonale à l'axe (oz)-------------------------

INTRODUCTION GENERALE

Depuis la révolution industrielle la production de matériaux tels que la laine de roche, la laine de verre, les polystyrènes, dans le cadre de l'isolation thermique, n'a jamais cessée d'augmenter. Ces matériaux à la toxicité et aux inconvénients avérés et, qui coûtent chers sont déjà suspectés d'être à l'origine de la dégradation de l'environnement et de certains cancers tels que ceux de poumons. Ces effets de l'activité humaine sur l'environnement posent le problème de confort dans l'habitat, de santé et d'économies **[1]**.

Afin de minimiser ces fléaux, on revient au naturel et l'on opte pour des matériaux qui doivent avoir certaines qualités : réduire les échanges thermiques avec l'extérieur, être sains et peu coûteux. C'est dans ce sens que nous avons porté notre étude sur le Kapok qui est un matériau local biodégradable. L'objet de ce travail est d'acquérir des données sur le comportement thermique du Kapok dont le sujet est intitulé comme suit :«étude à trois dimensions de la propagation de la chaleur à travers un matériau en régime dynamique fréquentiel ; application au Kapok».

Ce travail de mémoire s'articule sur deux points.

La première partie est consacrée à la présentation du matériau Kapok. Dans cette partie nous avons fait la description du Kapok. Nous avons présenté quelques études faites sur les domaines d'utilisation du Kapok et son impact sur l'environnement. Ces caractéristiques thermiques y sont exposées.

La seconde se penchera sur l'étude de la diffusion de la chaleur. Les expressions de la température, du flux thermique et de l'impédance thermique équivalente sont données. Nous y présentons aussi les profils de la température et du flux de chaleur en fonction des variables d'espace et des paramètres thermo physiques. Les diagrammes de Bode de l'impédance et de la phase de l'impédance sont aussi présentés.

A la fin de ce manuscrit, un bilan général dressera les résultats obtenus, avant que les perspectives de ce travail ne soient présentées.

CHAPITRE I : PRESENTATION DU MATERIAU KAPOK

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une étude théorique du matériau kapok est faite. Nous présentons le Kapok. Son origine et ses caractéristiques sont données. Nous présentons des exemples d'utilisation et quelques domaines d'application du kapok. L'impact de l'exploitation de ce matériau sur l'environnement est présenté surtout dans le domaine de l'habitat, de l'habillement et de l'isolation thermique.

I-1/ DESCRIPTION ET ORIGINE DU KAPOK

Le Kapok est une fibre végétale provenant des poils séminaux de graines que l'on tire d'arbre appelé Kapokier de la famille des Bombacaceae. Ces fibres végétales ont des structures biologiques principalement composées de celluloses, d'hémicelluloses. La cellulose possède une structure en grande partie cristalline. La cellulose cristalline est l'un des polymères ayant le module d'élasticité le plus élevé.

Le kapokier communément appelé fromager serait originaire de l'Amérique centrale et de l'Amérique du Sud et s'est propagé dans le reste du globe notamment en Asie du Sud-est, en Australie, en Afrique de l'Ouest etc. Il pousse dans les zones tropicales humides, dans les milieux humides côtiers ou les zones savanes. Au Sénégal on retrouve cet arbre au centre ouest et en Casamance. Les premiers échantillons étudiés au LASES du département de physique de la FST nous viennent du Burkina Faso. C'est un arbre géant pouvant être centenaire à écorce couverte d'épines surtout quand il est jeune (figure I.1). Il a la particularité de fleurir de manière irrégulière, il peut se passer plusieurs années entre deux floraisons. La floraison est nocturne épisodiquement en hiver (Janvier à Février) lorsque l'arbre est dépourvu de feuillage. La pollinisation est effectuée par les abeilles, les colibris et/ou les chauves-souris (figure I.2). Le fruit est une capsule pendante, longue et étroite (figure I.3). La capsule contient de nombreuses graines oléagineuses **[1]**.

Figure I.1 : Kapokier ou fromager

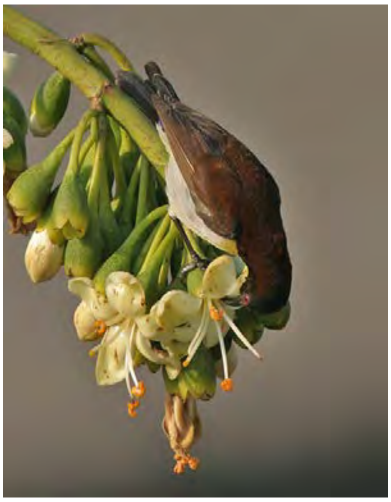

Figure I.2 : Floraison du kapokier

Figure I.3 : Fruits du kapokier

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la classification classique du kapokier .

Tableau I.1 : Classification classique

Règne	Plantae
Division	Magnoliophyta
Classe	Magnoliopsida
Ordre	Malvales
Famille	Bombacaceae
Genre	Ceiba
Nom binominal	Ceiba pentadra

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les propriétés du kapok et quelques domaines de son utilisation.

I-2/ PROPIETES ET UTILISATION

La fibre de kapok a pour caractéristique son imperméabilité et son putrescibilité. Elle est douce légère et est un bon isolant thermique (figure I.4). Le kapok est utilisé dans le domaine de l'habillement, la décoration (draperie, œuvres d'art) (figure I.6). En thermique, il est utilisé comme isolant dans les chambres froides, les cercueils (figures I.5 et I.7) etc.

Figure I.4 : Fibres du kapokier

Figure I.5 : Pose d'isolant en kapok sur un mur

Figure I.6 : Coussin de kapok

Figure I.7 : Utilisation du kapok Comme isolant thermique dans un cercueil

Le tronc du kapokier est utilisé pour la confection de pirogues en Afrique (figure I.8), d'allumettes, de coffres d'instruments de musique et pour faire des sculptures. Il est transformé en contre-plaqué léger.

Le feuillage sert de fourrage pour les cabris. Il est aussi utilisé en cataplasme pour traiter certaines tumeurs en Afrique et en Amérique du Sud (figure I.9).

Les fleurs sont réputées traiter les constipations en Afrique.

Figure I.8 : Confection de pirogue à partir du tr onc du kapokier

Figure I.9 : Feuillage du kapokier

Figure I.10 : Ecorce du kapokier

Des graines, est extraite une huile comestible pouvant être utilisée comme combustible (électricité). Elles contiennent de la saponine utilisée pour confectionner du savon.

L'écorce (figure I.10), le feuillage et les fleurs ont des propriétés antiseptique, anti-inflammatoire et soignent l'asthme et les maladies vénériennes en Afrique et en Amérique centrale.

Les domaines d'application du kapok sont :

►fabrication de produits de construction (planchers, panneaux décoratifs…),

►infrastructures (trottoirs, digues, signalisations routières…),

►automobiles (garnitures de toits, panneaux de sièges…),

►divers (tables de pique-nique, équipement de jeux publics).

Dans le paragraphe suivant, nous présentons quelques avantages et inconvénients du kapok.

I-3/ IMPACTS SUR L'ENVIRONNEMENT

Le kapok (fibres végétales) présente de nombreux atouts si l'on s'intéresse aux impacts environnementaux. Nous présentons dans le tableau ci-dessous les avantages et les inconvénients du kapok sur l'environnement **[1]**.

Tableau I.2 : avantages et inconvénients du kapok

AVANTAGES	INCONVENIENTS
-coût plus faible ; -biodégradable ; -ressource renouvelable ; -bonne isolation thermique et acoustique ; -pas d'émission de CO_2 ; -faible besoin en énergie pour la production ; -pas de déchet après incinération.	-absorption de l'eau ; -qualité variable ; -niveau de connaissance insatisfaisant ; -tendance à s'agglomérer ; -se réduire en poussière.

CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons fait une présentation du matériau kapok. Son origine, ses caractéristiques et sa classification classique sont données. Nous avons aussi présenté quelques domaines d'utilisation du kapok et les effets de cette utilisation sur l'environnement.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier la diffusion de la chaleur à travers le matériau kapok à trois dimensions.

CHAPITRE II : ETUDE DE LA DIFFUSION DE LA CHALEUR

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédant, nous avons présenté les caractéristiques du kapok qui peut être utilisé comme isolant thermique.

Dans cette partie, nous faisons une présentation du modèle étudié en régime dynamique fréquentiel. Nous étudions l'évolution de la température et du flux thermique dans le kapok. A partir de l'analogie électrique/thermique, nous exprimons l'impédance thermique équivalente du kapok.

Dans toute cette partie nous fixons $\lambda = 0,035 W.m^{-1}.°C^{-1}$; $\rho = 12,35 kg.m^{-3}$; $\alpha = 17,1.10^{-7} m^2.s^{-1}$ **[1,2]**.

II-1/ MODELE MATHEMATIQUE

II-1-1/ Schéma et description du modèle

Le matériau étudié est un solide de forme parallélépipède de longueur L_1, de largeur L_2 et de profondeur L_3 et dont l'un des sommets est pris pour origine des coordonnées rectangulaires (figure II.1). C'est un matériau homogène, isotrope, sans source interne de chaleur, de masse volumique ρ, de chaleur spécifique C, de conductivité thermique λ et de diffusivité thermique α **[3,4,5,6]**.

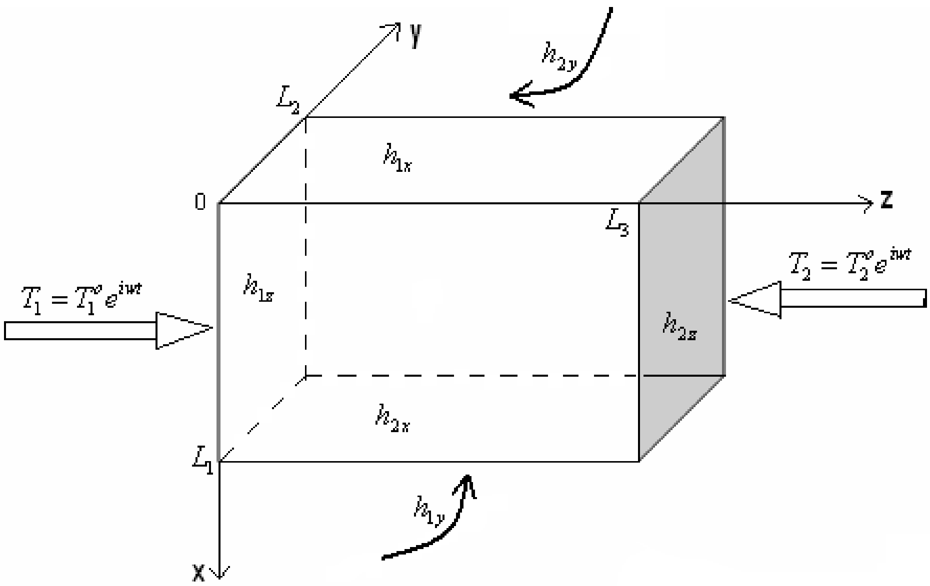

Figure II.1 : Schéma du modèle d'étude

$L_1 = 0,08m$; $L_2 = 0,06m$ et $L_3 = 0,04m$.

$0 \le x \le L_1$; $0 \le y \le L_2$ et $0 \le z \le L_3$.

Le transfert de chaleur dans le matériau se fait par conduction suivant les trois directions (ox), (oy) et (oz) **[5]**.

Nous imposons sur chaque face un coefficient d'échange. Le matériau est soumis sur les deux faces orthogonales à l'axe (oz) à une variation sinusoïdale de la température $T_a = T_a^0 e^{i\omega t}$; avec $a = 1; 2$ **[7,8]**.

$T(x, y, z, t)$ est la température en tout point du matériau de coordonnées (x, y, z) à tout instant t.

T_1 est la température en régime dynamique fréquentiel à la face avant dans la direction (oz).

T_2 est la température en régime dynamique fréquentiel à la face arrière dans la direction (oz).

h_{1x} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant, suivant la direction (ox).

h_{2x} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière, suivant la direction (ox).

h_{1y} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant, suivant la direction (oy).

h_{2y} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière, suivant la direction (oy).

h_{1z} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant, suivant la direction (oz).

h_{2z} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière, suivant la direction (oz).

A l'état initial où le temps $t = 0$)

II-1-2/ Equation de la chaleur

La quantité de chaleur à travers une paroi est donnée par la loi de Fourier **[9,10]**, dans un milieu isotrope :

$$\vec{\phi} = \vec{j} = -\lambda \cdot gr\vec{a}d\left(T\left(x, y, z, t\right)\right) \qquad \text{(II.1)}$$

$\vec{\phi}$ est le vecteur densité surfacique de flux thermique.

Le bilan thermique dans un système de volume V nous permet d'écrire :

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T\left(x, y, z, t\right) + P_p \qquad \text{(II.2)}$$

p_p représente le puit ou source interne de chaleur. Nous posons $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot C}$.

Sans puit de chaleur ni source interne de chaleur **[5,9,10]**, on a $p_p = 0$; d'où l'équation (II.2) qui représente l'équation de la chaleur, devient :

$$\Delta T\left(x, y, z, t\right) - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

L'équation (II.3) représente la diffusion de la chaleur dans le matériau. C'est une équation différentielle aux dérivées partielles.

Nous étudierons dans le paragraphe suivant l'évolution de la température dans le matériau.

II-2/ ETUDE DE L'EVOLUTION DE LA TEMPERATURE

II-2-1/ Expression de la température

Finalement, l'équation (II.3) s'écrit sous la forme **[8,11]**:

$$\frac{\partial^2 T\left(x, y, z, t\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T\left(x, y, z, t\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T\left(x, y, z, t\right)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial x}\right|_{x=0} - h_{1x} \cdot T\left(0, y, z, t\right) = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial x}\right|_{x=L_1} + h_{2x} \cdot T\left(L_1, y, z, t\right) = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T\left(x, y, z, t\right)}{\partial y}\right|_{y=0} - h_{1y} \cdot T\left(x, 0, z, t\right) = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

$$\lambda \cdot \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} + h_{2y} \cdot T(x,L_2,z,t) = 0 \tag{II.8}$$

$$\lambda \cdot \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} - h_{1z} \cdot \left[T(x,y,0,t) - T_1 \right] = 0 \tag{II.9}$$

$$\lambda \cdot \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} + h_{2z} \cdot \left[T(x,y,L_3,t) - T_2 \right] = 0 \tag{II.10}$$

Par la méthode de séparation des variables **[5,9]**, nous posons :

$$T(x,y,z,t) = F(x,y,z) \cdot \psi(t) = \theta_1(x) \cdot \theta_2(y) \cdot \theta_3(z) \cdot \psi(t) \tag{II.11}$$

La fonction cherchée, qui exprime le mouvement varié de la chaleur dans l'intérieur du solide de forme parallélépipédique, doit donc être déterminée par les conditions (II.4), (II.5), (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) et (II.10).

D'où l'expression de la température est :

$$T(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\cos(\beta_m x) + \dfrac{h_{1x}}{\lambda \beta_m} \sin(\beta_m x) \right] \left[\cos(\gamma_n y) + \dfrac{h_{1y}}{\lambda \gamma_n} \sin(\gamma_n y) \right] \\ \times \left[A_{mn} \cosh(L_{mn} z) + B_{mn} \sinh(L_{mn} z) \right] e^{i\omega t} \end{array} \right\} \tag{II.12}$$

Les expressions des constantes A_{mn} et B_{mn} sont :

$$A_{mn} = \frac{K_{mn} \left[\lambda L_{mn} \left(h_{2z} T_2^0 - T_1^0 R_{mn} \right) + T_1^0 D_{mn} \right]}{H_{mn} D_{mn}} \tag{II.13}$$

$$B_{mn} = \frac{h_{1z} K_{mn} \left(h_{2z} T_2^0 - T_1^0 R_{mn} \right)}{H_{mn} D_{mn}} \tag{II.14}$$

Avec :

$$H_{mn} = \left(\begin{array}{l} \left\{ \lambda \beta_m \left[\sin(2\beta_m L_1) + 2\beta_m L_1 \right] + h_{1x} \left[1 - \cos(2\beta_m L_1) \right] \right\} \\ \times \left\{ \lambda \gamma_n \left[\sin(2\gamma_n L_2) + 2\gamma_n L_2 \right] + h_{1y} \left[1 - \cos(2\gamma_n L_2) \right] \right\} \end{array} \right) \tag{II.15}$$

$$K_{mn} = 16 \lambda^2 \beta_m \gamma_n \sin(\beta_m L_1) \sin(\gamma_n L_2) \tag{II.16}$$

$$D_{mn} = \left(\lambda^2 L_{mn}^2 + h_{1z} h_{2z} \right) \sinh(L_{mn} L_3) + \lambda L_{mn} \left(h_{1z} + h_{2z} \right) \cosh(L_{mn} L_3) \tag{II.17}$$

$$R_{mn} = \lambda L_{mn} \sinh(L_{mn} L_3) + h_{2z} \cosh(L_{mn} L_3) \tag{II.18}$$

Les coefficients β_m et γ_n sont des valeurs propres déterminées graphiquement à partir des équations transcendantes suivantes :

$$\tan\left(\beta_m L_1\right)=\frac{\lambda\beta_m\left(h_{1x}+h_{2x}\right)}{\lambda^2\beta_m{}^2-h_{1x}h_{2x}} \quad \text{(II.19)}$$

$$\tan\left(\gamma_n L_2\right)=\frac{\lambda\gamma_n\left(h_{1y}+h_{2y}\right)}{\lambda^2\gamma_n{}^2-h_{1y}h_{2y}} \quad \text{(II.20)}$$

II-2-2/ Détermination graphique des valeurs propres

Pour déterminer graphiquement les valeurs propres, nous posons :

$$f_1\left(\beta_m\right)=\tan\left(\beta_m L_1\right) \quad \text{(II.21)}$$

$$f_2\left(\beta_m\right)=\frac{\lambda\beta_m\left(h_{1x}+h_{2x}\right)}{\lambda^2\beta_m{}^2-h_{1x}h_{2x}} \quad \text{(II.22)}$$

$$g_1\left(\gamma_n\right)=\tan\left(\gamma_n L_2\right) \quad \text{(II.23)}$$

$$g_2\left(\gamma_n\right)=\frac{\lambda\gamma_n\left(h_{1y}+h_{2y}\right)}{\lambda^2\gamma_n{}^2-h_{1y}h_{2y}} \quad \text{(II.24)}$$

Nous obtenons les courbes des figures ci-dessous :

►**Les valeurs propres** β_m : en traçant sur le même graphe les fonctions (II.21) et (II.22) en fonction de β_m, on obtient les courbes de la figure (II.2) suivante **[2,12]**.

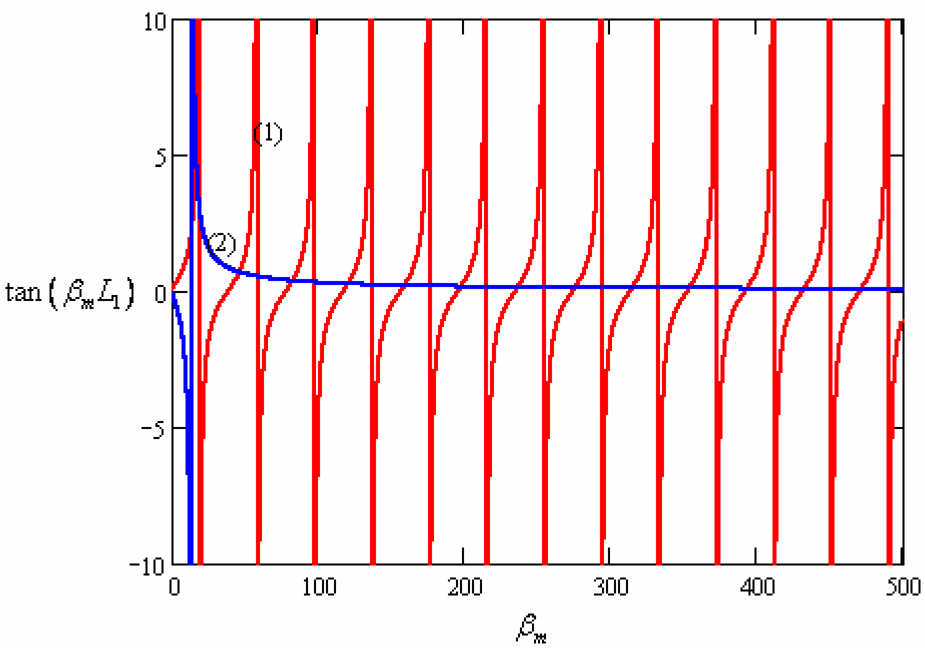

Figure II.2 : Détermination graphique des valeurs propres β_m

$h_{1x} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$ et $h_{2x} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$

La courbe (1) correspond à la courbe de la fonction $f_1(\beta_m)$.

La courbe (2) correspond à la courbe de la fonction $f_2(\beta_m)$.

D'après ce graphe on voit bien qu'il excite une solution par intervalle. Cette solution est l'intersection de la courbe $f_1(\beta_m)$ avec celle de $f_2(\beta_m)$. D'où, pour l'intervalle $[0;500]$ comme cela est indiqué sur la figure (II.2), on a les treize racines de β_m pour une valeur de $h_{1x} = h_{2x} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$. Ce qui nous donne le tableau suivant :

Tableau II.1 : Valeurs propres β_m

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
β_k	17,2 64	46,6 69	82,8 26	120, 75	159, 29	198, 13	237, 11	273, 13	315, 28	354, 43	393, 61	432, 76	471, 94

►**Les valeurs propres** γ_n **:** de la même manière on trace les fonctions (II.23) et (II.24) en fonction de γ_n. Ce qui nous donne la figure (II.3) ci-dessous.

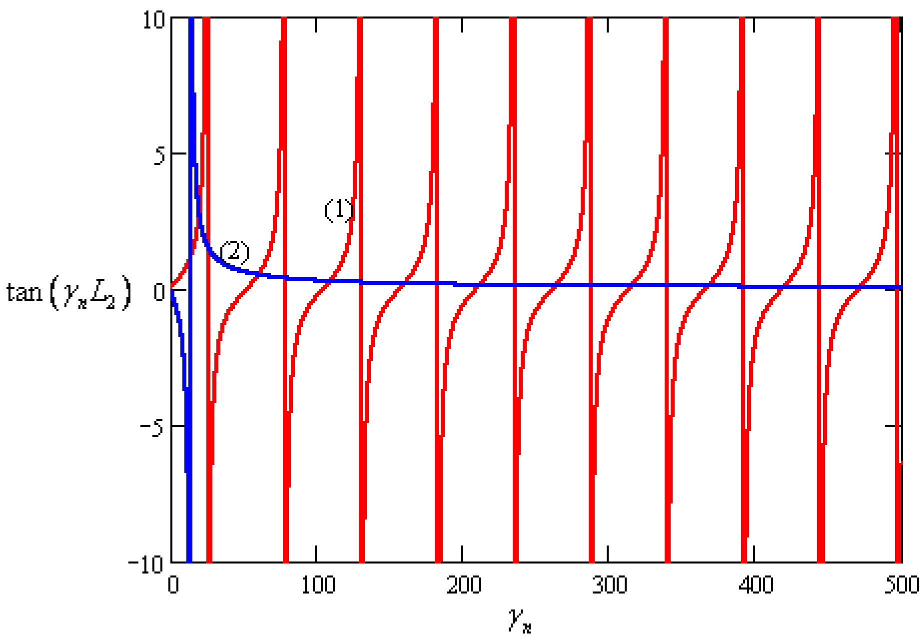

Figure II.3 :Détermination graphique des valeurs propres γ_n

$h_{1y} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$ et $h_{2y} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$

La courbe (1) correspond à la fonction $g_1(\gamma_n)$.

La courbe (2) correspond à la fonction $g_2(\gamma_n)$.

La solution correspond à l'intersection des courbes $g_1(\gamma_n)$ et $g_2(\gamma_n)$. D'où pour l'intervalle $[0;500]$ comme cela est indiqué sur ce graphe et pour une valeur de $h_{1y} = h_{2y} = 0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$; nous avons les dix racines de γ_n. Ces valeurs sont énumérées dans le tableau suivant qui représente la gamme de valeurs propres γ_n obtenues **[12,13]**.

Tableau II.2 : Valeurs propres γ_n

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	20,32 3	60,08 6	109,0 9	160,0 1	211,6 3	263,6 1	315,6 3	367,7 8	419,9 8	472,1 8

Dans toute la suite, nous fixons les coefficients d'échange h_{1x}, h_{2x}, h_{1y} et h_{2y} à $0,5W.m^{-2}.°C^{-1}$.

II-2-3/ Profils de la température

Dans cette partie nous montrons l'influence des variables d'espace, de la fréquence excitatrice et des coefficients h_{1z} et h_{2z} sur la température.

II-2-3-a/ Evolution de la température en fonction de la longueur x

Nous étudions l'évolution de la température suivant la direction (ox) du matériau, pour différentes valeurs de la pulsation ω et des valeurs de h_{1z} et h_{2z} fixées. Sur les figures (II.4) et (II.5), les courbes sont obtenues en fixant $y = 0,01m$ et $z = 0,01m$. Nous avons fait varier la pulsation ω et les coefficients d'échange pour mettre en exergue leurs influences sur la diffusion de la température.

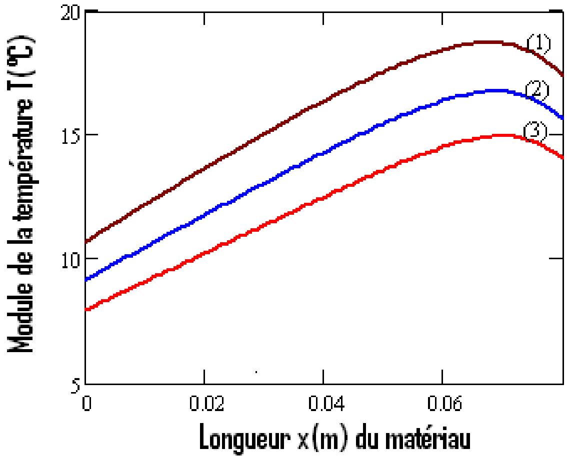

Figure II.4 : Variation de la température en fonction de la longueur x.

$y = 0,01m$ et $z = 0,01m$;
$h_{1z} = 30 W.m^{-2}.°C^{-1}$
$h_{2z} = 0,05 W.m^{-2}.°C^{-1}$
(1) $\omega = 0,001 rad/s$
(2) $\omega = 0,003 rad/s$
(3) $\omega = 0,006 rad/s$

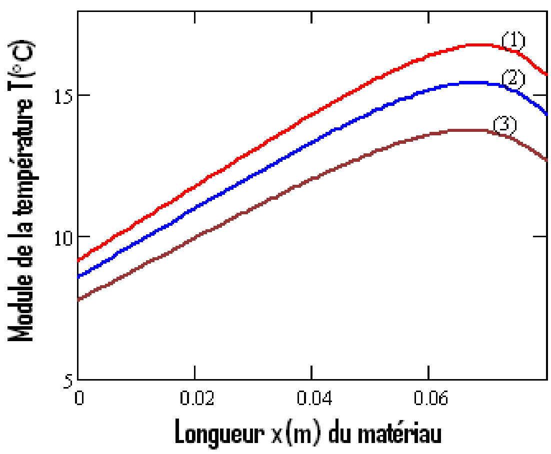

Figure II.5 : Variation de la température en fonction de la longueur x.

$y = 0,01m$ et $z = 0,01m$
$\omega = 0,003 rad/s$
$h_{2z} = 0,05 W.m^{-2}°C^{-1}$
(1) $h_{1z} = 30 W.m^{-2}.°C^{-1}$
(2) $h_{1z} = 10 W.m^{-2}.°C^{-1}$
(3) $h_{1z} = 5 W.m^{-2}.°C^{-1}$

Au niveau de la figure (II.4), où le coefficient d'échange h_{1z} à la face avant orthogonale à l'axe (oz) est élevé et celui h_{2z} à la face arrière orthogonale à l'axe (oz) faible, la température croit considérablement pour ensuite diminuer quand x tend vers L_1. Or à ce niveau la direction (ox) considérée est proche de la face où h_{1z} est élevé. Pour une valeur de $x = 0,07m$ nous avons un point d'inflexion.

Au niveau de la figure (II.5), où h_{2z} est maintenu faible, nous avons fait varier h_{1z}. Nous constatons la même chose qu'à la figure (II-4), la température croit considérablement puis diminue suivant la direction (ox) proche de la face où h_{1z} est considéré.

L'ensemble des deux figures (II.4) et (II.5) montrent que l'évolution de la température en fonction de la longueur x est importante si la direction de la longueur considérée dans le matériau est proche de la face orthogonale à l'axe (oz) où le coefficient d'échange est élevé. Plus la pulsation excitatrice ω est faible plus l'évolution de la température suivant x est importante **[7]**. Cet évolution est aussi importante quand le coefficient d'échange h_{1z} est élevé, pour h_{2z} faible.

II-2-3-b/ Evolution de la température en fonction de la profondeur z

L'évolution de la température suivant la direction (oz) du matériau, pour différentes valeurs de ω et des valeurs de h_{1z} et h_{2z} fixées, est donnée aux figures (II.6) et (II.7).

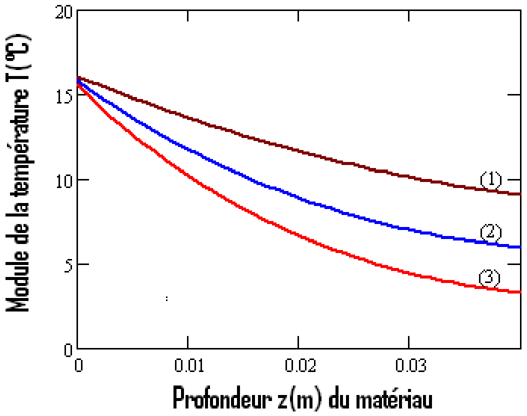

Figure II-6 : Variation de la température en fonction de la profondeur z.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$

$h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $\omega = 0,001rad/s$

(2) $\omega = 0,003rad/s$

(3) $\omega = 0,006rad/s$

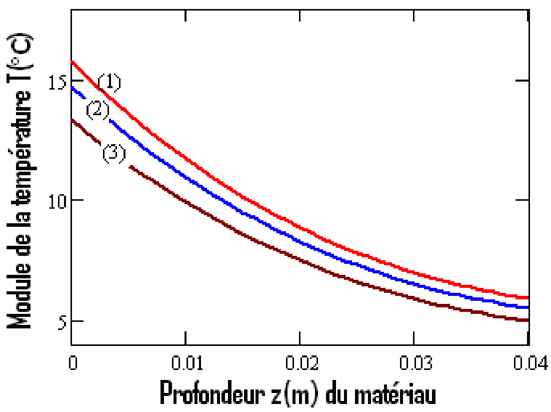

Figure II-7 : Variation de la température en fonction de la profondeur z.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$

$\omega = 0,003rad/s$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

(2) $h_{1z} = 10W.m^{-2}.°C^{-1}$

(3) $h_{1z} = 5W.m^{-2}.°C^{-1}$

Au niveau des figures (II.6) et (II-7), nous constatons que la température diminue de la face avant où h_{1z} est important à l a face arrière où h_{2z} est faible. La température de la face excitée est d'autant plus élevée que le coefficient d'échange de cette face est élevée.

Pour h_{2z} faible, plus h_{1z} est élevé plus la quantité de chaleur échangée au niveau de cette face est importante (figure II-7). La quantité de chaleur transmise au niveau d'une face dépend de l'importance du coefficient d'échange de la face considérée du matériau. La quant ité de c haleur emmagasinée dans le matériau dépend du coefficient d'échange.

La température d'une face est d'autant plus élevée, pour un coefficient d'échange fixé, que la pulsation ω imposée au matériau est faible (figure II-6), c'est-à-dire la fréquence excitatrice imposée au matériau est faible. Plus la fréquence excitatrice imposée au matériau est faible plus la chaleur transportée d'une face à l'autre est importante.

II-2-3-c/ Evolution de la température en fonction des coefficients d'échange thermiques

Cette évolution est faite en fonction de h_{1z} et h_{2z} pour différentes valeurs de la profondeur z du matériau.

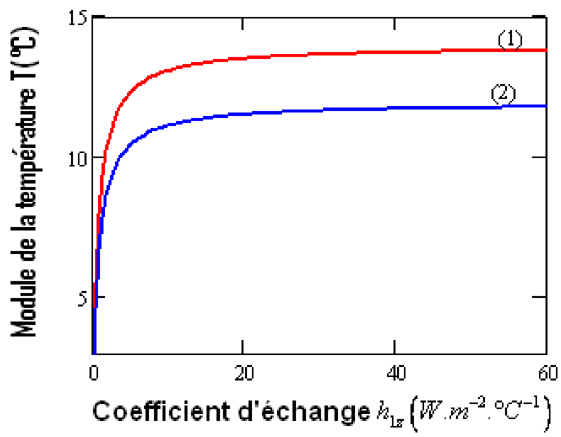

Figure II.8 : Variation de la température en fonction du coefficient d'échange h_{1z}.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$;
$\omega = 0,001 rad/s$
$h_{2z} = 0,05 W.m^{-2}.°C^{-1}$
(1) $z = 0,01m$
(2) $z = 0,02m$

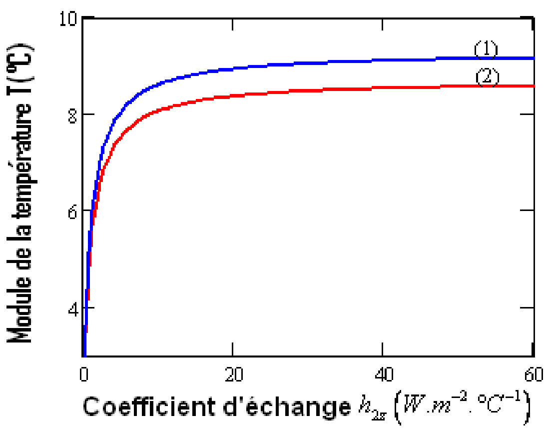

Figure II.9 : Variation de la température en fonction du coefficient d'échange h_{2z}.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$;
$\omega = 0,001 rad/s$
$h_{1z} = 0,05 W.m^{-2}.°C^{-1}$
(1) $z = 0,02m$
(2) $z = 0,01m$

Les courbes de température ci-dessus correspondent à l'évolution de la température d'un point du matériau en fonction des coefficients d'échange h_{1z} et h_{2z}. Nous observons pratiquement le même profil de courbes de température pour les deux figures. En un point du matériau, la température croit exponentiellement en fonction de h_{1z} (figure II.8) ou de h_{2z} (figure II.9) puis atteint un palier qui correspond à la température maximale que peut prendre ce point ou à l'énergie maximale emmagasinée en ce point. Ces courbes montrent que la température dépend de la profondeur z du matériau. Les positions les plus proches de la face où le coefficient d'échange est élevé sont plus sensibles à l'influence du coefficient d'échange de cette face considérée. D'où ces positions emmagasinent plus la chaleur (figures II.8 et II.9). En effet la présence du palier montre qu' il y a une situation de saturation de l'énergie stockée quand le coefficient d'échange devient important. Nous pouvons ainsi dire que le matériau possède une capacité de stockage d'énergie.

L'étude faite sur la transmission de la température montre qu' en régime dynamique fréquentiel, la diffusion de la chaleur est plus importante pour les faibles fréquences excitatrices et pour les coefficients d'échange (h_{1z} et h_{2z}) élevés. Cette étude nous a permis de mettre en évidence l'effet capacitive du matériau en régime dynamique fréquentiel **[7]**.

Dans la parie suivante nous étudions l'influence des variables d'espace, des paramètres thermo physiques sur le flux de chaleur à travers le matériau.

II-3/ ETUDE DU FLUX THERMIQUE

Dans cette partie nous présentons, à partir des expressions de la densité de flux, les profils de courbes de flux de chaleur à travers le matériau. Nous montrons l'influence des variables d'espaces et des paramètres ω, h_{1z} et h_{2z}.

II-3-1/ Expression de la densité de flux de chaleur

La quantité de chaleur traversant une surface unité dans les trois directions par unité de temps est donnée par :

$$\vec{\phi}(x,y,z,t)=\phi_1(x,y,z,t)\vec{e}_x+\phi_2(x,y,z,t)\vec{e}_y+\phi_3(x,y,z,t)\vec{e}_z \qquad \text{(II.25)}$$

A partir de la loi de Fourier, on a :

$$\vec{\phi}=-\lambda\cdot gr\vec{a}dT=-\lambda\left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\vec{e}_z\right) \qquad \text{(II.26)}$$

D'où , on obtient :

$$\phi_1(x,y,z,t)=-\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\beta_m\left\{\begin{array}{l}\left[-\sin(\beta_m x)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\cos(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right]\\ \times\left[A_{mn}\cosh(L_{mn}z)+B_{mn}\sinh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t}\end{array}\right\} \qquad \text{(II.27)}$$

$$\phi_2(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\gamma_n \left\{ \begin{array}{l} \left[\cos(\beta_m x)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[-\sin(\gamma_n y)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\cos(\gamma_n y)\right] \\ \times\left[A_{mn}\cosh(L_{mn}z)+B_{mn}\sinh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t} \end{array} \right\} \quad \text{(II.28)}$$

$$\phi_3(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda L_{mn} \left\{ \begin{array}{l} \left[\cos(\beta_m x)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right] \\ \times\left[A_{mn}\sinh(L_{mn}z)+B_{mn}\cosh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t} \end{array} \right\} \quad \text{(II.29)}$$

Finalement, l'expression de la densité surfacique de flux de chaleur équivalente transportée dans le matériau en tout point de coordonnée (x,y,z) et à tout instant t s'écrit :

$$\phi(x,y,z,t) = \sqrt{\phi_1(x,y,z,t)^2 + \phi_2(x,y,z,t)^2 + \phi_3(x,y,z,t)^2} \quad \text{(II.30)}$$

II-3-2/ Profils de la densité de flux thermique

II-3-2-a/ Influence de la longueur x

L'étude de la densité de flux est faite suivant la direction (ox) en fixant y et z. Nous faisons varier la pulsation ω et les coefficients d'échange h_{1z} et h_{2z} pour mettre en exergue leur influence sur l'évolution du flux thermique.

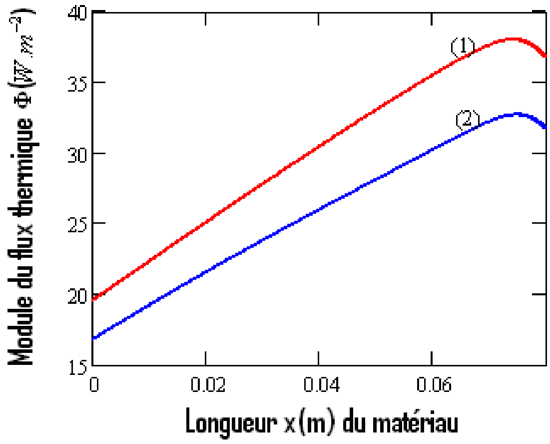

Figure II.10 : Variation du flux thermique en fonction de la longueur x.

$y = 0,01m$ et $z = 0,01m$

$h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $\omega = 0,01rad/s$

(2) $\omega = 0,005rad/s$

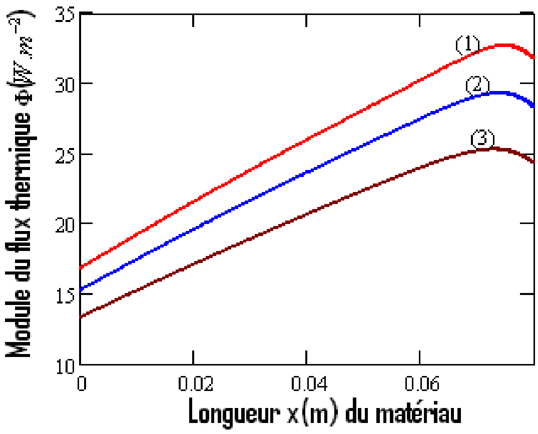

Figure II.11 : Variation du flux thermique en fonction de la longueur x.

$y = 0,01m$ et $z = 0,01m$

$\omega = 0,005rad/s$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

(2) $h_{1z} = 10W.m^{-2}.°C^{-1}$

(3) $h_{1z} = 5W.m^{-2}.°C^{-1}$

Nous constatons que le flux se comporte comme la température en fonction de la longueur x du matériau. Sur les figures (II-10) et (II-11), l'ensemble des courbes montre que la densité de flux croît considérablement en fonction de la longueur x pour atteindre un point d'inflexion puis décroît quand x est importante. Cette transmission est plus importante quand la direction (ox) considérée est proche de la face où le coefficient d'échange est élevé.

La densité de flux transmise est importante quand la fréquence excitatrice est élevée (figure II-10). La transmission du flux thermique est aussi importante si le coefficient d'échange h_{1z} est élevé pour h_{2z} maintenu faible (figure II-11).

II-3-2-b/ Influence de la profondeur z

L'évolution de la densité de flux suivant la direction (oz) est présentée dans les figures (II-12) et (II-13), en fixant x et y. Nous avons fait varier la pulsation ω et les coefficients d'échange pour mettre en exergue leur influence sur la transmission du flux thermique.

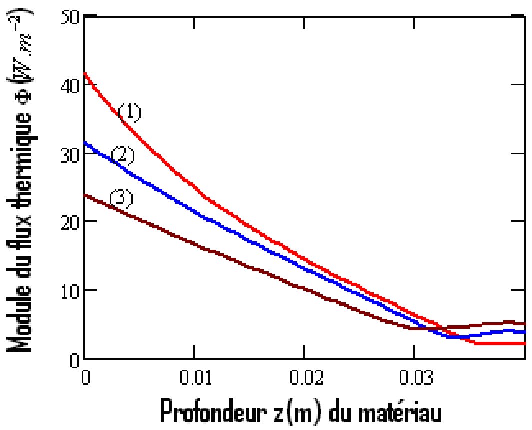

Figure II-12 : Variation du flux thermique en fonction de la profondeur z.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$

$h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $\omega = 0,01rad/s$

(2) $\omega = 0,005rad/s$

(3) $\omega = 0,003rad/s$

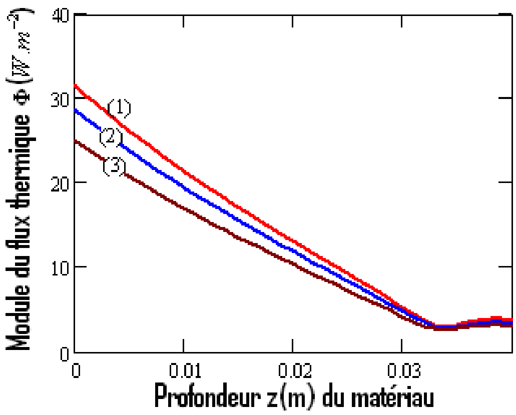

Figure II-13 : Variation du flux thermique en fonction de la profondeur z.

$x = 0,02m$ et $y = 0,01m$

$\omega = 0,005rad/s$

$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$

(2) $h_{1z} = 10W.m^{-2}.°C^{-1}$

(3) $h_{1z} = 5W.m^{-2}.°C^{-1}$

Sur les figures (II-12) et (II-13), l'ensemble des courbes montre que la transmission du flux de chaleur décroît de la face où le coefficient d'échange h_{1z} est élevé à la face où h_{2z} est faible. La densité de flux transmise au niveau d'une face est importante si le coefficient d'échange de cette face considérée est élevé.

Quand le coefficient d'échange h_{1z} est élevé par rapport à h_{2z} (figure II.12), la transmission du flux thermique est importante si la pulsation excitatrice est élevée. Pour une pulsation ω fixée et h_{2z} maintenu faible (figures II-13), le flux de chaleur transmis augmente quand h_{1z} augmente **[7]**.

Le flux thermique traversant le matériau dépend des quantités de chaleur échangées au niveau des deux faces.

Dans la partie suivante, nous présentons les profils du flux en un point du matériau.

II-3-2-c/ Evolution du flux thermique en fonction des coefficients d'échange thermique

Nous présentons dans cette partie les profils du flux en fonction des coefficients d'échange h_{1z} et h_{2z}. Nous faisons varier la pulsation ω pour mettre en exergue son influence sur transmission du flux de chaleur.

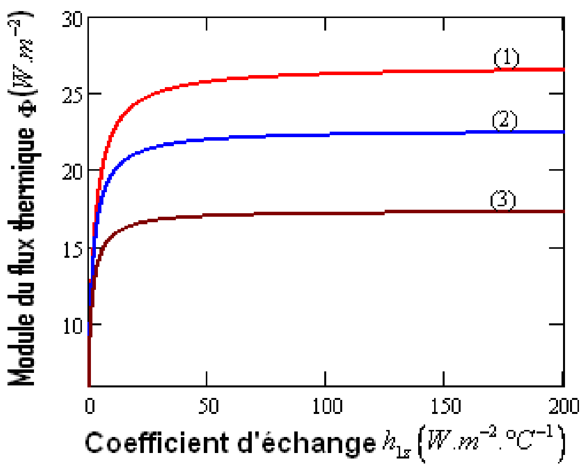

Figure II.14 : Variation du flux en fonction du coefficient d'échange h_{1z}.

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$; $z = 0,01m$ et $h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$.

(1) $\omega = 0,01 rad/s$

(2) $\omega = 0,005 rad/s$

(3) $\omega = 0,003 rad/s$

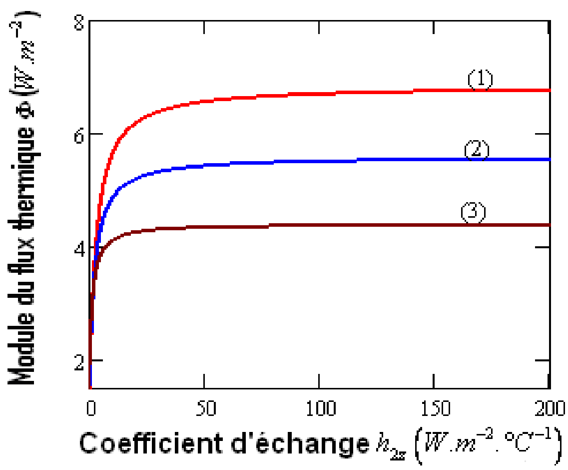

Figure II.15 : Variation du flux en fonction du coefficient d'échange h_{2z}

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$; $z = 0,01m$ et $h_{1z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$

(1) $\omega = 0,01 rad/s$

(2) $\omega = 0,005 rad/s$

(3) $\omega = 0,003 rad/s$

Le flux est important quand la fréquence excitatrice est élevée. Le flux augmente exponentiellement en fonction de h_{1z} et de h_{2z} aussi, puis atteint un palier. C'est le phénomène de stockage de l'énergie.

Comparée à l'étude faite par rapport à la diffusion de la chaleur, nous constatons que la pulsation ω agit différemment sur la température et le flux thermique. Nous pouvons ainsi dire qu'il existe une plage optimale de fréquences pour la diffusion de la chaleur.

Dans la partie suivante, nous faisons une étude de l'impédance thermique équivalente du matériau.

II-4/ ETUDE DE L'IMPEDANCE THERMIQUE DU MATERIAU

Dans cette partie, nous présentons à partir de l'expression de l'impédance thermique les diagrammes de Bode de l'impédance et ceux de la phase de l'impédance. Nous présentons dans le tableau suivant l'analogie thermique-électrique **[3,5,12,14]**.

Tableau II.3 : équivalence thermique-électrique.

GRANDEURS ELECTRIQUES			GRANDEURSTHERMIQUES EQUIVALENTES		
Intensité	$\mathrm{I} = \dfrac{dq}{dt}$	**(A)**	**Flux**	$\phi = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{\partial(\lambda T)}{\partial x}$	**(w)**
Potentiel électrique	V	**(V)**	**Température**	T	**(°K)**
Impédance électrique	$Z = \dfrac{\Delta V}{I}$	**(Ω)**	**Impédance thermique**	$\mathrm{Ze} = \dfrac{\Delta T}{\phi}$	**(°K.w^{-1})**

II-4-1/ Expression de l'impédance thermique équivalente (Z)

Pour une profondeur $M(x,y,z)$ du matériau, on a :

$$\Delta T(x,y,z,t) = Z(x,y,z) \cdot \phi(x,y,z,t) \tag{II.31}$$

Avec ΔT la variation de température entre les points $M_0(x,y,0)$ et $M(x,y,z)$ dans le matériau et, $\phi(x,y,z)$ la densité de flux de chaleur transmise entre ces deux points. Ainsi $\Delta T(x,y,z,t) = T(x,y,0,t) - T(x,y,z,t)$ (II.32)

$$\Delta T=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\cos\left(\beta_m x\right)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\left[\cos\left(\gamma_n y\right)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right]\\ \times\left[A_{mn}\left(1-\cosh\left(L_{mn}z\right)\right)-B_{mn}\sinh\left(L_{mn}z\right)\right]\end{array}\right\}e^{i\omega t} \qquad \text{(II.33)}$$

D'où l'impédance est $Z\left(x,y,z\right)=\dfrac{\Delta T\left(x,y,z,t\right)}{\phi\left(x,y,z,t\right)}$ (II.34)

Finalement l'impédance thermique s'écrit :

$$Z\left(x,y,z\right)=\frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\cos\left(\beta_m x\right)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\left[\cos\left(\gamma_n y\right)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right]\\ \times\left[A_{mn}\left(1-\cosh\left(L_{mn}z\right)\right)-B_{mn}\sinh\left(L_{mn}z\right)\right]\end{array}\right\}e^{i\omega t}}{\sqrt{\phi_1\left(x,y,z,t\right)^2+\phi_2\left(x,y,z,t\right)^2+\phi_3\left(x,y,z,t\right)^2}} \qquad \text{(II.35)}$$

II-4-2/ Diagrammes de bode de l'impédance et de la phase

Dans cette partie nous présentons l'évolution de l'impédance et de la phase de l'impédance en fonction du logarithme de la pulsation ω. Les diagrammes de bode permettent de mettre en évidence les fréquences de coupure ω_c **[15,16]**.

II-4-2-a/ Diagrammes de bode de l'impédance thermique

Les diagrammes de bode de l'impédance sont représentés par les figures ci-dessous. Au niveau de ces figures, nous étudions l'évolution de l'impédance en fonction du logarithme de la pulsation. Nous avons fait varier la profondeur z du matériau pour mettre en exergue son influence sur l'impédance. Au niveau de chaque figure, la courbe (1) correspond à une profondeur $z=0,02m$ et la courbe (2) à $z=0,01m$. Nous constatons que l'impédance thermique du matériau est faible et elle augmente quand on va en profondeur dans le matériau. L'impédance devient importante quand le coefficient d'échange h_{1z} est élevé par rapport à h_{2z}. Les profils des courbes montrent la présence de deux points d'inflexion avec changement de concavité de la courbe**[7,15,16]**.

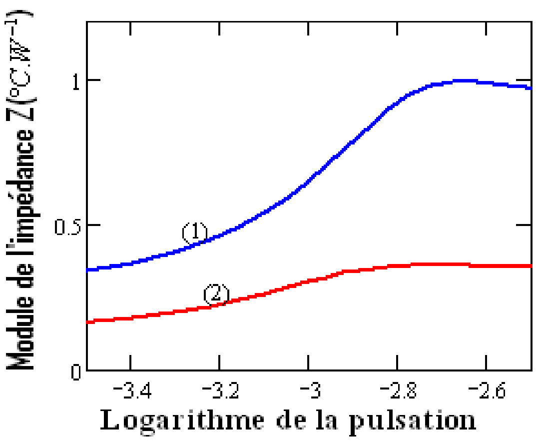

Figure II.16 : Diagramme de bode de l'impédance équivalente du matériau pour

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$;
$h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$
$h_{2z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$.
(1) $z = 0,02m$
(2) $z = 0,01m$

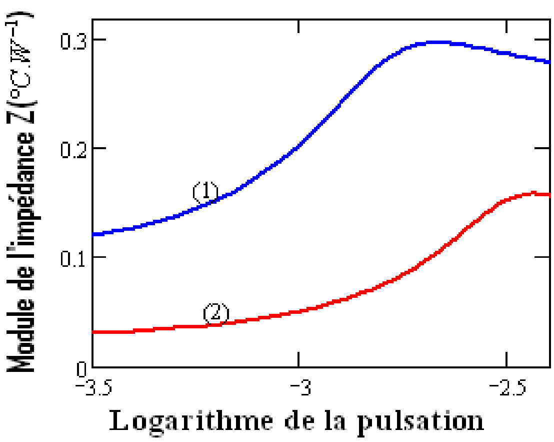

Figure II.17 : Diagramme de bode de l'impédance équivalente du matériau pour

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$;
$h_{1z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$
$h_{2z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$.
(1) $z = 0,02m$
(2) $z = 0,01m$

Chaque courbe présente deux fréquences de coupure : ω_{c_1} la plus petite et ω_{c_2} la plus grande. Les fréquences de coupures sont obtenues en c onsidérant chaque point d'intersection entre les tangentes de deux parties successives de l a courbe pratiquement rectiligne.

Nous étudierons ci-dessous l'évolution des diagrammes de bode de l a phase de l'impédance.

II-4-2-b/ Diagrammes de bode de la phase de l'impédance thermique

Nous présentons dans cette partie l'évolution de la phase de l'impédance en fonction du logarithme de la pulsation ; ceci dans le sens de confirmer le caractère capacitif et inductif du matériau.

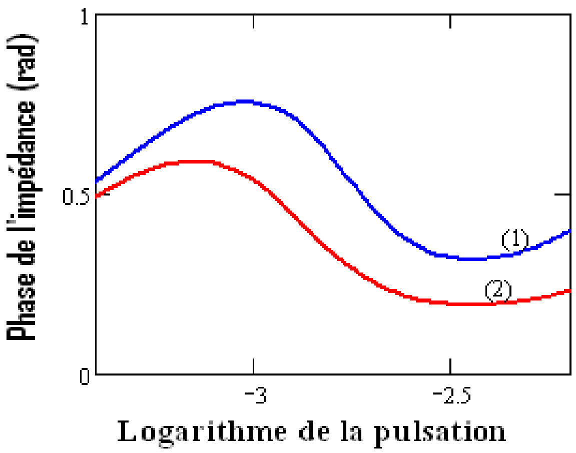

Figure II.18 : Diagramme de bode de la phase de l'impédance thermique pour

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$;
$h_{1z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$ et $h_{2z} = 0,05W.m^{-2}°C^{-1}$
(1) $z = 0,02m$
(2) $z = 0,01m$.

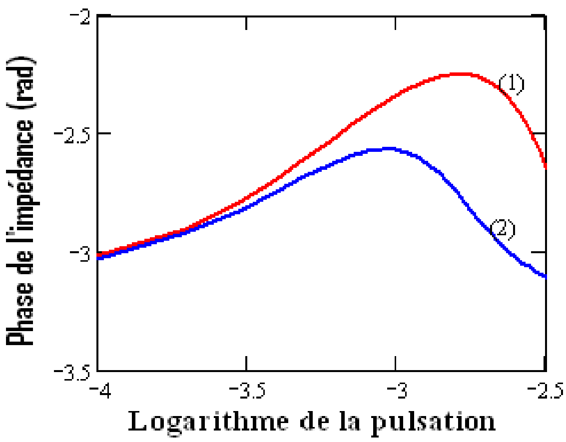

Figure II.19 : Diagramme de bode de la phase de l'impédance thermique pour

$x = 0,02m$; $y = 0,01m$;
$h_{1z} = 0,05W.m^{-2}.°C^{-1}$ et $h_{2z} = 30W.m^{-2}.°C^{-1}$
(1) $z = 0,01m$
(2) $z = 0,02m$.

On constate que la phase augmente quand on va en profondeur dans le matériau pour un coefficient d'échange h_{1z} élevé par rapport à h_{2z} (figure II.18), alors qu'elle diminue en profondeur pour h_{2z} élevé par rapport à h_{1z} (figure II.19). Nous avons sur chaque courbe deux points d'inflexion correspondant aux fréquences de coupure ω_c .

La phase de l'impédance reste positive selon les profils observés au niveau de la figure (II.18) ; ce qui nous pousse à proposer un comportement inductif du matériau si h_{1z} est important devant h_{2z} .

La phase de l'impédance reste négative selon les courbes observées au niveau de la figure (II.19), ce qui nous pousse à proposer un comportement capacitif du matériau si h_{1z} est faible devant h_{2z} .

Les diagrammes de bode nous ont permis de mettre en évidence les fréquences de coupure à partir de l'impédance thermique du matériau ; mais aussi de mettre en évidence, à partir de la phase, les effets inductifs ou capacitifs du matériau en réqime dynamique fréquentiel **[7,15]**.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de matériau étudié.

Nous avons étudié l'évolution de la chaleur et du flux thermique dans le matériau. Nous avons montré l'influence de la fréquence excitatrice, des variables d'espace et des coefficients d'échange sur le comportement de la température et du flux.

L'analogie thermique/électricité nous a permis de tracer les diagrammes de bode de l'impédance et de la phase de l'impédance.

CONCLUSION GENERALE

Notre étude était orientée vers l'étude des paramètres thermo physiques d'isolation thermique en régime dynamique fréquentiel.

La première partie fut consacrée à la description et à la présentation du matériau kapok. Nous y avons présenté les domaines d'application du kapok et ses impacts environnementaux.

Dans un second temps, il fut question d'étudier la diffusion de la chaleur. Nous avons fait une description du modèle étudié. L'élément central du travail dans cette partie fut consacré à l'étude du comportement de la température et du flux thermique dans le matériau. Nous avons fait varier les variables d'espace, la pulsation excitatrice et les coefficients d'échange pour mettre en exergue leur influence sur ces comportements. Nous avons aussi étudié l'impédance thermique du matériau. Les profils des diagrammes de bode nous ont permis de mettre en évidence le caractère capacitif ou inductif du matériau **[7,15]**.

Nous proposons comme perspectives de :

¤ Faire l'étude en imposant sur chaque face une température sinusoïdale.

¤Bâtir une meilleur connaissance du matériau kapok telle que la maîtrise de la biodégradabilité et la performance du kapok.

¤Prendre en compte le phénomène de convection à l'intérieur de la structure à l'avenir dans le développement d'un modèle thermique/électrique.

¤Etudier d'autres matériaux tels que le filasse et les fibres de coco.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M.L.Voumbo, "Contribution à l'étude des caractéristiques thermo physiques des matériaux locaux : application au kapok", Thèse de Doctorat d'état, FST-UCAD Février 2008, Sénégal.

[2] B.Fleur, "Etude de la diffusion de la chaleur à travers une dalle en béton en régime transitoire", Thèse de Doctorat troisième cycle, FST-UCAD Mars 2008, Sénégal.

[3] J.C.Chevrier, "Transfert de chaleur par conduction", Ecole des Mines-Nancy-1979.

[4] Y.Jannot, P.Meukam, "Simplified estimation method for the determination of the thermal effusivity using a low cost hot strip", Science and Technology, Vol.15, 2004.

[5] Joseph Fourier, "Théorie analytique de la chaleur", Editions Jacques Gabay 2004.

[6] J.C.Marechal et J.M.Devisme, "Diffusivité thermique des matériaux de construction : Méthode du signal périodique", Anales I.T.B.T.P.n°357, Janvier 1978.

[7] I.Diagne, "Détermination de paramètres thermo physiques d'isolants thermiques en régime dynamique fréquentiel : application au kapok-platre", Thèse de Doctorat troisième cycle, FST-UCAD Mars 2008, Sénégal.

[8] P.Meukam, Y.Jannot, A.Noumowe and T .C.Kofane, "Thermo physical characteristics of economical building materials", Constuction and Building Materials, Volume18,issue 6, July 2004.

[9] A.Dieng, L.Ould Habiboulahy, A.S.Maïga, A.Diao, G.Sissoko, "Impedance spectroscopy method applied to electrical parameters determination on bifacial silicom solar cell under magnetic field", Journal des Sciences, Volume 7, n°3,pp. 48-52 (2007).

[10] G.Goudet, "Traité d'électricité", Editions Masson et C^{ie} , Paris 1975.

[11] M.R.Spiegel, "Transformé de Laplace, Cours et Problèmes", Schaum-1990.

[12] Tsirel'man (N.M), "Determining the convective heat transfer coefficient from the lows of constant-temperature front propagation", J.Eng, Physique vol 25, n°2, August 1973.

[13] D.Chenvidhya, K.Kirtikara, C.Jivacate, "Solar Energy Materials and Solar Cells 80", 2003, 459-464.

[14] J.Gunther, “Information numérique”, Ecole des Mines-Nancy-1982.

[15] I.Diagne, B.Fleur, M.O.Sidya, S.Gaye, G.Sissoko, “Détermination de paramètres thermiques d’un matériau en régime dynamique fréquentiel à partir de diagrammes de Bode et de représentations de Nyquist”, Journal des Sciences, Volume 8, n^{o}2, 2008.

[16] R.Anil Kumar, M.S.Suresh and J .Nagaraju, “IEEE transctions on Electron Divices”, Vol 48, n^{o}9, September 2001.

ANNEXE MATHEMATIQUE

1- Equation de la chaleur :

Pour de faible variation de température, la conduction thermique est donnée par la loi de Fourier, dans un milieu isotrope :

$$\vec{J}_q = -\lambda \cdot gr\vec{a}d\left(T\left(x, y, z, t\right)\right) \quad (1)$$

λ est la conductivité thermique $\left(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\right)$

$\vec{J}_q$ est le vecteur densité surfacique de flux thermique $\left(W \cdot m^{-2}\right)$

Ainsi le flux thermique transporté à l'instant t, par unité de surface S :

$$\phi_q = \vec{J}_q \cdot \vec{S} = J_q \cdot S = -\lambda \cdot S \cdot \nabla T \quad (2)$$

<u>Le bilan d'énergie dans un système de volume V</u> : on écrit le bilan d'énergie dans le volume V caractérisé par sa conductivité (λ), sa masse volumique (ρ) et sa chaleur spécifique (C). Nous considérons que la variation de température dans le volume (V) est due à la présence de sources internes et à la chaleur entrant dans (V).

$*$ Q_1 est la quantité de chaleur pénétrant dans le volume (V) à travers la surface (S) pendant le temps δt :

$$Q_1 = \iint_{(S)} \lambda \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} \cdot \delta t \quad (3)$$

$*$ Q_2 est la quantité de chaleur créée dans le volume (V) par les sources internes pendant le temps δt :

$$Q_2 = \iiint_{(V)} P \cdot dV \cdot \delta t \quad (4)$$

$*$ Q_3 est la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température dT, du volume (V) pendant le temps δt :

$$Q_3 = \iiint_{(V)} \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \cdot \delta t \quad (5)$$

C est la chaleur spécifique du matériau étudié $\left(J \cdot kg^{-1} \cdot {}^{o}C^{-1}\right)$

Le bilan d'énergie nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (6)$$

Ce qui équivaut à écrire :

$$\iint_{(S)} \lambda \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} \cdot \delta t + \iiint_{(V)} P \cdot dV \cdot \delta t = \iiint_{(V)} \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \cdot \delta t \qquad (7)$$

La relation de Green-Ostrogradsky nous permet de passer d'une intégrale surfacique à une intégrale volumique. Ainsi l'équation (7) va s'écrire sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \vec{\nabla}\left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T\right) \cdot dV \cdot \delta t + \iiint_{(V)} P \cdot dV \cdot \delta t = \iiint_{(V)} \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \cdot \delta t \qquad (8)$$

Localement et pour un instant δt, nous aurons :

$$\vec{\nabla}\left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T\right) + P = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (9)$$

D'où finalement, l'équation de la chaleur devient :

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + P_p + \vec{\nabla}\left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T\right) \qquad (10)$$

λ est considérée comme une constante lors du transfert thermique dans le matériau. L'équation de la chaleur devient :

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + P_p \qquad (11)$$

P_p représente le puit de chaleur.

2- Température en régime dynamique fréquentiel :

Sans puit de chaleur ni source interne de chaleur, on a $P_p = 0$. L'équation différentielle (11) devient :

$$\Delta T - \frac{\rho \cdot C}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (12)$$

Nous posons $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot C}$ qui est la diffusivité thermique.

L'équation (12) devient :

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

On écrit l'équation (13) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = 0 \qquad (14)$$

Par la méthode de séparation des variables nous déterminons la solution de l'équation différentielle (14). Nous posons :

$$T(x,y,z,t) = F(x,y,z)\cdot\psi(t) = \theta_1(x)\cdot\theta_2(y)\cdot\theta_3(z)\cdot\psi(t) \tag{15}$$

En tenant compte des relations ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \theta_1(x)\cdot\theta_2(y)\cdot\psi(t)\cdot\frac{\partial^2\theta_3(z)}{\partial z^2} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} = \theta_1(x)\cdot\theta_3(z)\cdot\psi(t)\cdot\frac{\partial^2\theta_2(y)}{\partial y^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} = \theta_2(y)\cdot\theta_3(z)\cdot\psi(t)\cdot\frac{\partial^2\theta_1(x)}{\partial x^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \theta_1(x)\cdot\theta_2(y)\cdot\theta_3(z)\cdot\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} \tag{19}$$

On obtient :

$$\alpha\cdot\left(\frac{1}{\theta_1(x)}\cdot\frac{\partial^2\theta_1(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\theta_2(y)}\cdot\frac{\partial^2\theta_2(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{\theta_3(z)}\cdot\frac{\partial^2\theta_3(z)}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{\psi(t)}\cdot\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=C \tag{20}$$

C est une constante.

L'excitation (température imposée) étant de nature périodique, on recherche une solution périodique de même fréquence que l'excitation en imposant $C = i\omega$; avec ω la pulsation excitatrice.

Soit :

$$\psi(t) = K\cdot e^{i\omega t} \tag{21}$$

K est une constante.

La deuxième égalité de l'équation (20) donne :

$$\frac{1}{\theta_1}\cdot\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+\frac{1}{\theta_2}\cdot\frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2}+\frac{1}{\theta_3}\cdot\frac{\partial^2\theta_3}{\partial z^2}=\frac{C}{\alpha}=\frac{i\omega}{\alpha} \tag{22}$$

Cette égalité est vérifiée si chaque terme est à une constante. Soient :

$$\frac{1}{\theta_1(x)}\cdot\frac{d^2\theta_1(x)}{dx^2} = -\beta^2 \tag{23}$$

$$\frac{1}{\theta_2(y)}\cdot\frac{d^2\theta_2(y)}{dy^2} = -\gamma^2 \tag{24}$$

$$\frac{1}{\theta_3(z)}\cdot\frac{d^2\theta_3(z)}{dz^2} = -\eta^2 \tag{25}$$

Avec : $\beta^2+\gamma^2+\eta^2 = -\frac{i\omega}{\alpha}$

Nous imposons sur chaque face du matériau un coefficient d'échange. Le matériau est soumis à une variation sinusoïdale de la température seulement sur les 2 faces

orthogonales à la direction (oz) c'est-à-dire sur la face avant $z=0$ et la face arrière $z=L_3$.

Les conditions aux limites sont :

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - h_{1x} \cdot T(0,y,z,t) = 0 \tag{26}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x=L_1} + h_{2x} \cdot T(L_1,y,z,t) = 0 \tag{27}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=0} - h_{1y} \cdot T(x,0,z,t) = 0 \tag{28}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=L_2} + h_{2y} \cdot T(x,L_2,z,t) = 0 \tag{29}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} - h_{1z} \cdot \left[T(x,y,0,t) - T_1\right] = 0 \tag{30}$$

$$\lambda \cdot \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=L_3} + h_{2z} \cdot \left[T(x,y,L_3,t) - T_2\right] = 0 \tag{31}$$

Avec :

$$T_1 = T_1^0 \cdot e^{i\omega t} \tag{32}$$

$$T_2 = T_2^0 \cdot e^{i\omega t} \tag{33}$$

T_1 est la température en régime dynamique fréquentiel à la face avant dans la direction (oz).

T_2 est la température en régime dynamique fréquentiel à la face arrière dans la direction (oz).

h_{1x} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant suivant la direction (ox).

h_{2x} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière suivant la direction (ox).

h_{1y} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant suivant la direction (oy).

h_{2y} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière suivant la direction (oy).

h_{1z} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face avant suivant la direction (oz).

h_{2z} est le coefficient d'échange thermique imposé à la face arrière suivant la direction (oz).

$\Rightarrow$ La résolution de l'équation (23) nous donne :

$$\theta_1(x) = A_1 \cdot \cos(\beta x) + B_1 \cdot \sin(\beta x) \tag{34}$$

A_1 et B_1 sont des constantes.

Les conditions aux limites (28) et (29) permettent d'écrire :

$$B_1 = \frac{A_1 \cdot h_{1x}}{\lambda \cdot \beta} \tag{35}$$

$$\lambda \cdot \beta \cdot \left[-A_1 \cdot \sin(\beta L_1) + B_1 \cdot \cos(\beta L_1)\right] + h_{2x} \cdot \left[A_1 \cdot \cos(\beta L_1) + B_1 \cdot \sin(\beta L_1)\right] = 0 \tag{36}$$

L'équation (35) dans l'équation (36) donne l'équation transcendante suivante qui nous permet de trouver les différentes valeurs du coefficient β :

$$\tan(\beta L_1) = \frac{\lambda\beta(h_{1x} + h_{2x})}{\lambda^2\beta^2 - h_{1x}h_{2x}} \tag{37}$$

L'équation (34) devient :

$$\theta_1(x) = A_1\left[\cos(\beta x) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta} \cdot \sin(\beta x)\right] \tag{38}$$

Posons $\theta_1(x) = A_1 \cdot \theta_1(\beta, x)$; on a :

$$\theta_1(\beta, x) = \cos(\beta x) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta}\sin(\beta x) \tag{39}$$

$\Rightarrow$ La résolution de l'équation (24) :

De la même manière que la résolution de l'équation (23) , nous obtenons :

$$\theta_2(y) = A_2 \cdot \cos(\gamma y) + B_2 \cdot \sin(\gamma y) \tag{40}$$

A_2 et B_2 sont des constantes.

Le coefficient γ est déterminé à partir de l'équation transcendante obtenue des conditions aux limites (30) et (31) :

$$B_2 = \frac{A_2 \cdot h_{1y}}{\lambda \cdot \gamma} \tag{41}$$

$$\tan\left(\gamma L_2\right) = \frac{\lambda\gamma\left(h_{1y} + h_{2y}\right)}{\lambda^2\gamma^2 - h_{1y}h_{2y}} \tag{42}$$

En posant $\theta_2\left(y\right) = A_2 \cdot \theta_2\left(\gamma, y\right)$; on obtient :

$$\theta_2\left(\gamma, y\right) = \cos\left(\gamma y\right) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma}\sin\left(\gamma y\right) \tag{43}$$

D'où l'expression de la température s'écrit :

$$T\left(x, y, z, t\right) = K \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \theta_3\left(z\right) \cdot \left[\cos\left(\beta x\right) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta}\sin\left(\beta x\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\gamma y\right) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma}\sin\left(\gamma y\right)\right] \cdot e^{i\omega t} \tag{44}$$

En posant $Z\left(z\right) = K \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \theta_3\left(z\right)$ et $T\left(x, y, z, t\right) = F\left(x, y, z, t\right) \cdot e^{i\omega t}$; on a :

$$F\left(x, y, z\right) = Z\left(z\right) \cdot \left[\cos\left(\beta x\right) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta}\sin\left(\beta x\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\gamma y\right) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma}\sin\left(\gamma y\right)\right] \tag{45}$$

L'expression $T\left(x, y, z, t\right) = F\left(x, y, z\right) \cdot e^{i\omega t}$ dans l'équation (14) , nous donne :

$$\frac{\partial^2 F\left(x, y, z\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F\left(x, y, z\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F\left(x, y, z\right)}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{\alpha} \cdot F\left(x, y, z\right) = 0 \tag{46}$$

A partir des dérivées secondes de $F\left(x, y, z\right)$ par rapport à x , y ,z ; on obtient :

$$\frac{d^2 Z\left(z\right)}{dz^2} - \left(\beta^2 + \gamma^2 + \frac{i\omega}{\alpha}\right) Z\left(z\right) = 0 \tag{47}$$

En posant $L^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{i\omega}{\alpha}$, l'équation (47) devient :

$$\frac{d^2 Z\left(z\right)}{dz^2} - L^2 \cdot Z\left(z\right) = 0 \tag{48}$$

La résolution de l'équation (48) donne :

$$Z\left(z\right) = A \cdot \cosh\left(Lz\right) + B \cdot \sinh\left(Lz\right) \tag{49}$$

L'équation (14) étant une équation aux dérivées partielles , elle possède un nombre infini de solutions partielles . Pour obtenir la solution générale de l'équation de conductivité thermique (14) susceptible de satisfaire aux conditions aux limites , on prend la somme des solutions partielles :

$$T(x,y,z,t)=\sum_m\sum_n\left\{\begin{array}{l}\left[\cos(\beta_m x)+\frac{h_1}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\frac{h_3}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right]\\ \times\left[A_{mn}\cosh(L_{mn}z)+B_{mn}\sinh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t}\end{array}\right\} \quad (50)$$

Les coefficients A_{mn} et B_{mn} sont déterminés à partir des équations (32) et (33) ; ce qui donne :

$$\lambda\cdot\left.\frac{dF(x,y,z)}{dz}\right|_{z=0}-h_{1z}\cdot\left[F(x,y,0)-T_1^0\right]=0 \quad (51)$$

$$\lambda\cdot\left.\frac{dF(x,y,z)}{dz}\right|_{z=L_3}+h_{2z}\cdot\left[F(x,y,L_3)-T_2^0\right]=0 \quad (52)$$

Ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_m\sum_n(\lambda L_{mn}B_{mn}-h_{1z}A_{mn})\left[\cos(\beta_m x)+\frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right]\\ =-h_{1z}T_1^0\end{array}\right\} \quad (53)$$

$$\sum_m\sum_n\left(A'_{mn}+B'_{mn}\right)\left[\cos(\beta_m x)+\frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right]=h_{2z}T_2^0 \quad (54)$$

Avec : $\begin{cases}A'_{mn}=A_{mn}\left[\lambda L_{mn}\sinh(L_{mn}L_3)+h_{2z}\cosh(L_{mn}L_3)\right]et\\ B'_{mn}=B_{mn}\left[\lambda L_{mn}\cosh(L_{mn}L_3)+h_{2z}\sinh(L_{mn}L_3)\right]\end{cases}$

Les fonctions $\cos(\beta_k x)$ et $\cos(\gamma_j y)$ sont orthogonales ; ce qui donne :

$$\int_0^{L_1}\cos(\beta_m x)\cos(\beta_k x)\,dx=\begin{cases}0; m\neq k\\ \frac{\sin(2\beta_m L_1)+2\beta_m L_1}{4\beta_m}; m=k\end{cases} \quad (55)$$

$$\int_0^{L_2}\cos(\gamma_n y)\cos(\gamma_j y)\,dy=\begin{cases}0; n\neq j\\ \frac{\sin(2\gamma_n L_2)+2\gamma_n L_2}{4\gamma_n}; n=j\end{cases} \quad (56)$$

En multipliant chaque membre des égalités (53) et (54) par $\cos(\beta_k x)\cos(\gamma_j y)$ et en normalisant , on obtient les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_m\sum_n(h_{1z}A_{mn}-\lambda L_{mn}B_{mn})\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left[\cos(\beta_m x)+\frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y)+\frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right]\\ \times\cos(\beta_k x)\cos(\gamma_j y)\,dxdy=\sum_m\sum_n\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}h_{1z}T_1^0\cos(\beta_k x)\cos(\gamma_j y)\,dxdy\end{array}\right. \quad (57)$$

$$\begin{cases} \sum_m \sum_n \left(A'_{mn} + B'_{mn}\right) \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left[\cos\left(\beta_m x\right) + \frac{h_{1x}}{\lambda \beta_m} \sin\left(\beta_m x\right)\right] \left[\cos\left(\gamma_n y\right) + \frac{h_{1y}}{\lambda \gamma_n} \sin\left(\gamma_n y\right)\right] \\ \times \cos\left(\beta_k x\right) \cos\left(\gamma_j y\right) dxdy = \sum_m \sum_n \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} h_{2z} T_2^0 \cos\left(\beta_k x\right) \cos\left(\gamma_j y\right) dxdy \end{cases} \tag{58}$$

Or

$$\int_0^{L_1} \cos\left(\beta_m x\right) dx = \frac{\sin\left(\beta_m L_1\right)}{\beta_m} \tag{59}$$

et

$$\int_0^{L_2} \cos\left(\gamma_n y\right) dy = \frac{\sin\left(\gamma_n L_2\right)}{\gamma_n} \tag{60}$$

.Si $m = k$, nous avons :

$$\int_0^{L_1} \sin\left(\beta_m x\right) \cos\left(\beta_m x\right) dx = \frac{1 - \cos\left(2\beta_m L_1\right)}{4\beta_m} \tag{61}$$

et si $n = j$, nous avons :

$$\int_0^{L_2} \sin\left(\gamma_n y\right) \cos\left(\gamma_n y\right) dy = \frac{1 - \cos\left(2\gamma_n L_2\right)}{4\gamma_n} \tag{62}$$

En introduisant ces intégrales (59), (60), (61) et (62) ci-dessus dans (57) et (58), nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(h_{1z} A_{mn} - \lambda L_{mn} B_{mn}\right) \left[\frac{\sin\left(2\beta_m L_1\right) + 2\beta_m L_1}{4\beta_m} + \frac{h_{1x}\left(1 - \cos\left(2\beta_m L_1\right)\right)}{4\lambda \beta_m^2}\right] \\ \times \left[\frac{\sin\left(2\gamma_n L_2\right) + 2\gamma_n L_2}{4\gamma_n} + \frac{h_{1y}\left(1 - \cos\left(2\gamma_n L_2\right)\right)}{4\lambda \gamma_n^2}\right] = h_{1z} T_1^0 \frac{\sin\left(\beta_m L_1\right)}{\beta_m} \frac{\sin\left(\gamma_n L_2\right)}{\gamma_n} \end{cases} \tag{63}$$

$$\begin{cases} \left(A'_{mn} + B'_{mn}\right) \left[\frac{\sin\left(2\beta_m L_1\right) + 2\beta_m L_1}{4\beta_m} + \frac{h_{1x}\left(1 - \cos\left(2\beta_m L_1\right)\right)}{4\lambda \beta_m^2}\right] \\ \times \left[\frac{\sin\left(2\gamma_n L_2\right) + 2\gamma_n L_2}{4\gamma_n} + \frac{h_{1y}\left(1 - \cos\left(2\gamma_n L_2\right)\right)}{4\lambda \gamma_n^2}\right] = h_{2z} T_2^0 \frac{\sin\left(\beta_m L_1\right)}{\beta_m} \frac{\sin\left(\gamma_n L_2\right)}{\gamma_n} \end{cases} \tag{64}$$

En multipliant les expressions (63) et (64) par $16\lambda^2 \beta_m^2 \gamma_n^2$, on pose :

$$H_{mn} = \begin{pmatrix} \left\{\lambda \beta_m \left[\sin\left(2\beta_m L_1\right) + 2\beta_m L_1\right] + h_{1x}\left[1 - \cos\left(2\beta_m L_1\right)\right]\right\} \\ \times \left\{\lambda \gamma_n \left[\sin\left(2\gamma_n L_2\right) + 2\gamma_n L_2\right] + h_{1y}\left[1 - \cos\left(2\gamma_n L_2\right)\right]\right\} \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$K_{mn} = 16\lambda^2 \beta_m \gamma_n \sin\left(\beta_m L_1\right) \sin\left(\gamma_n L_2\right) \tag{66}$$

Les expressions (63) et (64) deviennent :

$$A_{mn} = \frac{\lambda L_{mn} B_{mn}}{h_{1z}} + \frac{T_1^0 K_{mn}}{H_{mn}} \tag{67}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_{mn}\left[\lambda L_{mn}\sinh\left(L_{mn}L_3\right) + h_{2z}\cosh\left(L_{mn}L_3\right)\right] \\ +B_{mn}\left[\lambda L_{mn}\cosh\left(L_{mn}L_3\right) + h_{2z}\sinh\left(L_{mn}L_3\right)\right] = \dfrac{h_{2z}T_2^0 K_{mn}}{H_{mn}} \end{array} \right) \tag{68}$$

Posons :

$$D_{mn} = \left(\lambda^2 L_{mn}^2 + h_{1z}h_{2z}\right)\sinh\left(L_{mn}L_3\right) + \lambda L_{mn}\left(h_{1z} + h_{2z}\right)\cosh\left(L_{mn}L_3\right) \tag{69}$$

$$R_{mn} = \lambda L_{mn}\sinh\left(L_{mn}L_3\right) + h_{2z}\cosh\left(L_{mn}L_3\right) \tag{70}$$

Par la méthode de substitution , on tire les expressions de A_{mn} et B_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{K_{mn}\left[\lambda L_{mn}\left(h_{2z}T_2^0 - T_1^0 R_{mn}\right) + T_1^0 D_{mn}\right]}{H_{mn}D_{mn}} \tag{71}$$

$$B_{mn} = \frac{h_{1z}K_{mn}\left(h_{2z}T_2^0 - T_1^0 R_{mn}\right)}{H_{mn}D_{mn}} \tag{72}$$

Finalement l'expression de la température s'écrit :

$$T\left(x,y,z,t\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{ \begin{array}{l} \left[\cos\left(\beta_m x\right) + \dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\left[\cos\left(\gamma_n y\right) + \dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right] \\ \times\left[A_{mn}\cosh\left(L_{mn}z\right) + B_{mn}\sinh\left(L_{mn}z\right)\right]e^{i\omega t} \end{array} \right\} \tag{73}$$

3- Calcul de la densité de flux thermique (ϕ) :

Soit $\vec{j}$ le vecteur densité surfacique de flux thermique de sens celui de la propagation et représentant la quantité de chaleur traversant une surface unité par unité de temps :

$\vec{j}\left(x,y,z,t\right) = \phi_1\left(x,y,z,t\right)\vec{e}_x + \phi_2\left(x,y,z,t\right)\vec{e}_y + \phi_3\left(x,y,z,t\right)\vec{e}_z$; avec :

$\phi_1\left(x,y,z,t\right)$ est la densité de flux thermique par unité de surface dans la direction (ox) de vecteur unitaire e_x

$\phi_2(x,y,z,t)$ est la densité de flux thermique par unité de surface dans la direction (oy) de vecteur unitaire $\vec{e}_y$

$\phi_3(x,y,z,t)$ est la densité de flux thermique par unité de surface dans la direction (oz) de vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

$$\vec{j} = -\lambda \cdot gr\vec{a}dT = -\lambda\left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\vec{e}_z\right) \tag{74}$$

$$\vec{\phi} = \vec{j} = -\lambda\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z\right)e^{i\omega t} \tag{75}$$

Donc nous avons :

$$\phi_1(x,y,z,t) = -\lambda \cdot \frac{dF(x,y,z)}{dx} \cdot e^{i\omega t} \tag{76}$$

$$\phi_2(x,y,z,t) = -\lambda \cdot \frac{dF(x,y,z)}{dy} \cdot e^{i\omega t} \tag{77}$$

$$\phi_3(x,y,z,t) = -\lambda \cdot \frac{dF(x,y,z)}{dz} \cdot e^{i\omega t} \tag{78}$$

Ce qui nous donne :

$$\phi_1(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\beta_m \left\{\begin{array}{l}\left[-\sin(\beta_m x) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\cos(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right] \\ \times\left[A_{mn}\cosh(L_{mn}z) + B_{mn}\sinh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t}\end{array}\right\} \tag{79}$$

$$\phi_2(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\gamma_n \left\{\begin{array}{l}\left[\cos(\beta_m x) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[-\sin(\gamma_n y) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\cos(\gamma_n y)\right] \\ \times\left[A_{mn}\cosh(L_{mn}z) + B_{mn}\sinh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t}\end{array}\right\} \tag{80}$$

$$\phi_3(x,y,z,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda L_{mn} \left\{\begin{array}{l}\left[\cos(\beta_m x) + \frac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin(\beta_m x)\right]\left[\cos(\gamma_n y) + \frac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin(\gamma_n y)\right] \\ \times\left[A_{mn}\sinh(L_{mn}z) + B_{mn}\cosh(L_{mn}z)\right]e^{i\omega t}\end{array}\right\} \tag{81}$$

La densité surfacique de flux de chaleur équivalente (ϕ) transportée dans le matériau à chaque instant t et à tout point de coordonnée M(x,y,z) s'écrit :

$$\phi(x,y,z,t) = \sqrt{\phi_1(x,y,z,t)^2 + \phi_2(x,y,z,t)^2 + \phi_3(x,y,z,t)^2} \tag{82}$$

4- **Calcul** de l'impédance thermique du solide :

Z est l'impédance équivalente exprimée en $\left(K \cdot w^{-1}\right)$. Soit ΔT l'écart de température entre le point $M_o\left(x,y,0\right)$ et un point $M\left(x,y,z\right)$ quelconque du matériau.

$\Delta T\left(x,y,z,t\right)=T\left(x,y,0,t\right)-T\left(x,y,z,t\right)$; avec :

$T\left(x,y,0,t\right)$ est la température à l'instant t au point $M_o\left(x,y,0\right)$.

$T\left(x,y,z,t\right)$ est la température à l'instant t en tout point de coordonnées (x,y,z) du matériau.

$$T\left(x,y,0,t\right)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l} A_{mn}\left[\cos\left(\beta_m x\right)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\times \\ \left[\cos\left(\gamma_n y\right)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right] \end{array}\right\}e^{i\omega t} \tag{83}$$

$$\Delta T=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l} \left[\cos\left(\beta_m x\right)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\left[\cos\left(\gamma_n y\right)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right] \\ \times\left[A_{mn}\left(1-\cosh\left(L_{mn}z\right)\right)-B_{mn}\sinh\left(L_{mn}z\right)\right] \end{array}\right\}e^{i\omega t} \tag{84}$$

Pour une profondeur $M\left(x,y,z\right)$ du matériau ; on a :

$\Delta T\left(x,y,z,t\right)=Z\left(x,y,z\right)\cdot\phi\left(x,y,z,t\right)$

D'où l'impédance donne : $Z\left(x,y,z\right)=\dfrac{\Delta T\left(x,y,z,t\right)}{\phi\left(x,y,z,t\right)}$.

Finalement , elle devient :

$$Z\left(x,y,z\right)=\frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l} \left[\cos\left(\beta_m x\right)+\dfrac{h_{1x}}{\lambda\beta_m}\sin\left(\beta_m x\right)\right]\left[\cos\left(\gamma_n y\right)+\dfrac{h_{1y}}{\lambda\gamma_n}\sin\left(\gamma_n y\right)\right] \\ \times\left[A_{mn}\left(1-\cosh\left(L_{mn}z\right)\right)-B_{mn}\sinh\left(L_{mn}z\right)\right] \end{array}\right\}e^{i\omega t}}{\sqrt{\phi_1\left(x,y,z,t\right)^2+\phi_2\left(x,y,z,t\right)^2+\phi_3\left(x,y,z,t\right)^2}} \tag{85}$$

Avec $\phi\left(x,y,z,t\right)$ le flux thermique qui est la densité de chaleur par unité de surface.

.