

SOMMAIRE

NOMENCLATURE	3
LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES	5
INTRODUCTION GENERALE	7
INTRODUCTION.....	10
I.1 Vitesses de recombinaison intrinsèques d'une photopile bifaciale à jonction horizontale et à trois dimension [3-4]	10
I. 1.1 les défauts cristallographiques relatifs aux joints de grain.....	10
I.1.2 Caractérisation des joints de grain	10
I.1.4 Effet des joints de grain sur la vitesse de recombinaison à la face arrière.....	13
I-2 FREQUENCY DOMAIN PHOTOLUMINESCENCE METHOD AS A TECHNIQUE OF EVALUATION OF LOG MINORITY CARRIER LIFETIME [7].....	14
I.3 Measurement of AC parameters of Gallium Arsenide (GaAs/Ge) solar by Impedance Spectroscopy.....	15
I.4 A new characterization method for Solar Cell dynamic impedance	16
(Nouvelle méthode de caractérisation d'impédance dynamique d'une cellule solaire) [7]	16
I-5 PV module dynamic impedance and its voltage and frequency dependencies [10]	18
I-6 Measurement of solar Cell AC parameters using Impedance Spectroscopy [11]	18
CONCLUSION.....	21
INTRODUCTION.....	23
II-1 STRUCTURE DES CELLULES SOLAIRES	23
II -2 EXPRESSION DE LA DENSITE DES PORTEURS PHOTOCREES DANS LA BASE :	24
II-2-1 Profil des modules du coefficient de diffusion et de la longueur de diffusion complexe en fonction du logarithme de la fréquence.....	28
II-2-2 Etude du profil de la densité des porteurs de charges photocréés dans la base	29
II-3 Etude du profil de la densité de photocourant :.....	32
L'expression de la densité du photocourant est obtenue en résolvant l'équation de transport des porteurs minoritaires donnée par la relation (II-19).....	32
II-3-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.	33
II-4 Etude du profil de la phototension.	34
II-4-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.	36
II-5 Photocourant de court circuit.....	36

II-6 Phototension de circuit ouvert	37
INTRODUCTION.....	40
III-1 Impédance dynamique	40
III.2 Représentation de Nyquist.....	40
III-3.1 Diagramme de Bode du module de l'impédance	44
III.3.1.1 Effet de la taille de grain	44
III-4-1-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.....	45
III-3.2 Diagramme de Bode de la phase de l'impédance	47
III.3.2.1 Effet de la taille de grain	47
III-3-2-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.....	48
CONCLUSION.....	49
CONCLUSION GENERALE	50
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	51
ANNEXE MATHEMATIQUE	53

NOMENCLATURE

τ	Durée de vie moyenne des porteurs minoritaires dans la base -----	(μs)
D	Coefficient de diffusion des porteurs minoritaires dans la base -----	($\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$)
L	Longueur de diffusion des porteurs minoritaires dans la base -----	(cm)
$L(\omega)$	Longueur de diffusion complexe des porteurs minoritaires dans la base -----	(cm)
ω	Fréquence angulaire -----	($\text{rad}.\text{s}^{-1}$)
ω_c	Fréquence angulaire de coupure-----	($\text{rad}.\text{s}^{-1}$)
x	Abscisse dans le grain, à la profondeur z -----	(cm)
y	Ordonnée dans le grain, à la profondeur z -----	(cm)
z	Profondeur de la base de la photopile mono faciale -----	(μm)
H	Epaisseur totale de la photopile bifaciale -----	(μm)
q	Charge élémentaire de l'électron -----	(C)
n_i	Concentration intrinsèque du matériau Si-----	(cm^{-3})
N	Taux de dopage des impuretés dans la base -----	(cm^{-3})
t	Temps -----	(s)
$G(z,t)$	Taux de génération monochromatique en modulation de fréquence en fonction de la profondeur z et du temps t -----	($\text{cm}^{-3}.\text{s}^{-1}$)
$g(z)$	Taux de génération en fonction de la profondeur z -----	($\text{cm}^{-3}.\text{s}^{-1}$)
$\alpha(\lambda)$	Coefficient d'absorption à la longueur d'onde λ	
$R(\lambda)$	Coefficient de réflexion du matériau à la longueur d'onde λ	
$\delta(x,y,z,t)$	Densité des porteurs minoritaires photocrétés dans la base en fonction de l'espace et du temps t -----	(cm^{-3})
S_f	Vitesse de recombinaison à la jonction -----	($\text{cm}.\text{s}^{-1}$)
S_b	Vitesse de recombinaison à la face arrière -----	($\text{cm}.\text{s}^{-1}$)
J_{ph}	Densité de photocourant -----	($\text{A}.\text{cm}^{-2}$)
J_{CC}	Densité de photocourant de court-circuit -----	($\text{A}.\text{cm}^{-2}$)
V_{ph}	Phototension -----	(V)

Nomenclature

V_{CO}	Phototension de circuit ouvert -----	(V)
V_T	Tension thermique -----	(V)
T	Température absolue -----	(K)
R_s	Résistance série -----	$(\Omega.cm^{-2})$
R_{sh}	Résistance shunt -----	$(\Omega.cm^{-2})$
R_C	Résistance de charge -----	(Ω)
$C_k; C_j$	Solutions des équations transcendantes	
R_p	Résistance parallèle -----	$(\Omega.cm^{-2})$
Z	Impédance dynamique de la photopile -----	$(\Omega.cm^{-2})$
C_1	Capacité -----	$(\mu F.cm^{-2})$
C_2	Capacité -----	$(\mu F.cm^{-2})$
C	Capacité -----	$(\mu F.cm^{-2})$
K	Constante de Boltzmann -----	(J/K)
$I_0(\lambda)$	Flux incident lumière monochromatique à la longueur d'onde -----	λ
λ	Longueur d'onde -----	(μm)

LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES

Liste des figures

I.1	11
I.2	12
I.3	13
I.4	16
I.5	17
I.6	18
I.7	18
I.8	19
I.9	19
I.10	19
II.11	20
I.12	20
I.13	20
II.1	23
II.2	24
II.3; II.4	29
II.5	30
II.6	31
II.7	33
II.8	34
II.9	35
II.10	36
III.1a	41
III.1b	41
III.1.c	42

III.2.a-----	44
III.2b-----	45
III.3.a-----	47
III.3b-----	48
III.4.-----	49
Liste des tableaux	
I.1 -----	17
III.1 -----	43
III.2-----	45
III.3-----	46
III.4-----	46

INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui, la maîtrise de l'énergie reste un atout fondamental pour le développement d'un pays. En effet l'augmentation du coût des énergies classiques, la limitation de leurs ressources mais aussi les contraintes écologiques conduisent à la recherche et à l'optimisation des énergies renouvelables pour résoudre une partie du problème énergétique mondiale.

C'est ainsi qu'actuellement on assiste à un regain d'intérêt pour les installations utilisant l'énergie solaire.

En effet l'énergie solaire se présente comme une source d'énergie inépuisable, non polluante, disponible aux quatre coins du globe, abondante et suffisante pour couvrir tous les besoins en énergie de la planète.

La conversion photovoltaïque est un moyen direct de transformation de l'énergie solaire en énergie électrique. Le dispositif utilisé est appelé cellule solaire ou photopile constituée de matériaux semi-conducteurs en particulier le silicium. La photopile est une diode à jonction (p-n) où règne un champ électrique intense qui sépare les charges photo générées dans la base et par la lumière solaire.

Le rendement très modeste et les coûts de revient très élevés font que l'énergie photovoltaïque reste très peu exploitée par rapport aux énergies classiques.

Dans le but de contrôler les paramètres électriques et électroniques pour une éventuelle exploitation à grande échelle, différentes techniques de caractérisation des cellules solaires en régime statique ou dynamique ont été élaborées. Ces techniques sont basées sur des mesures des effets optiques [1] ou électriques [2].

Dans ce travail, nous présenterons :

Au chapitre I, une étude bibliographique sur les méthodes de caractérisation et de détermination des paramètres électriques d'une photopile monofaciale en régime dynamique fréquentiel.

Au chapitre II, une étude théorique dans la base de la photopile sous éclairage monochromatique en modulation de fréquence est faite sur la densité de porteurs minoritaires en excès sur le photo courant et la phototension mais aussi on procédera à la détermination des expressions du photo courant de court circuit et la phototension en circuit ouvert de la photopile en fonction de la pulsation.

Au chapitre III, nous allons faire une étude de l'impédance dynamique de la photopile mais aussi des méthodes de détermination des paramètres électriques seront proposées.

Enfin, dans la conclusion, nous présenterons quelques perspectives de poursuite de ce travail.



CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons quelques études importantes sur les méthodes de détermination des paramètres électriques et de caractérisation des photopiles en régime dynamique fréquentiel.

Pour améliorer le rendement des systèmes photovoltaïques, plusieurs études portant sur les paramètres électriques de la photopile ont été faites.

Dans cette partie, des modèles électriques ou électroniques équivalentes d'une photopile fonctionnant comme un générateur de puissance sont présentés afin de ressortir les principales méthodes et hypothèses pour la détermination des paramètres électriques de la photopile.

I.1 Vitesses de recombinaison intrinsèques d'une photopile bifaciale à jonction horizontale et à trois dimension [3-4]

I. 1.1 les défauts cristallographiques relatifs aux joints de grain

Par définition un joint de grain est le lieu de contact de deux cristaux de même nature mais désorientés l'un par rapport à l'autre.

I.1.2 Caractérisation des joints de grain

La structure du joint de grain dépend de son axe de rotation et de la translation entre les origines des deux réseaux en jonction ainsi que de la géométrie de leur interface.

On distingue :

- Le joint de torsion si la rotation s'effectue autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'interface ;
- Le joint de flexion si l'axe de rotation est contenu dans le plan du joint ;
- Le joint quelconque qui est la résultante des deux précédentes.

Toutefois, ces joints de grain deviennent des sous joints de grain si la désorientation est faible (angle de rotation $< 10^0$). [5]

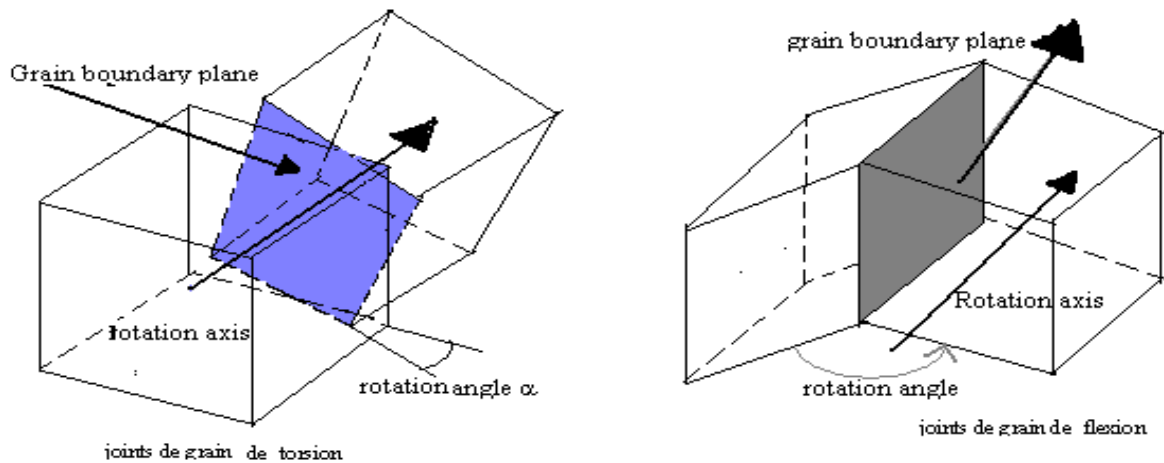


Figure I-1 : Schéma descriptif des joints de grain de torsion et de flexion

Au niveau de ces joints de grain existent des vitesses de recombinaison des porteurs de charges minoritaires en excès dans la base. Ce qui diminue considérablement le rendement de la photopile.

Aussi, le nombre de joints de grain est proportionnel à la taille des grains. Par suite, nous pouvons élucider l'effet de cette dernière sur les vitesses de recombinaison à la jonction et à la face arrière.

I.1.3 Effet des joints de grain sur la vitesse de recombinaison intrinsèque S_f . [6]

Les courbes de variation de la densité de photo courant en fonction des vitesses de recombinaison S_b et S_f montrent que pour les grandes valeurs de S_b et de S_f la densité de photo courant présente un gradient nul. Nous pouvons donc déterminer l'expression de S_f à partir de l'équation (I-1) suivante :

$$\left[\frac{\partial J}{\partial S_b} \right]_{S_b > 10^4} = 0 \quad \text{(I-1)}$$

D'où, sous éclairage poly chromatique, S_{f0} s'écrit :

$$Sf_0 = D \cdot \frac{\sum_k \sum_j \left[\frac{R_{k,j}}{\cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \beta_i \cdot \left[b_i - \left(\frac{1}{L_{k,j}} \cdot \sinh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) + b_i \cdot \cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) \right) \cdot \exp(-b_i \cdot H) \right] \right]}{\sum_k \sum_j \left[\frac{R_{k,j}}{\cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \beta_i \cdot \left[\left(\cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) + b_i \cdot L_{k,j} \cdot \sinh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) \right) \cdot \exp(-b_i \cdot H) - 1 \right] \right]} \quad (\text{I-2})$$

L_{kj} est la longueur de diffusion effective

Sf_0 ne dépend que des paramètres intrinsèques de la photopile. La figure (I-2) suivante montre la variation de la vitesse de recombinaison intrinsèque à la jonction en fonction de la vitesse de recombinaison aux joints de grain sous éclairage poly chromatique pour différentes tailles de grain.

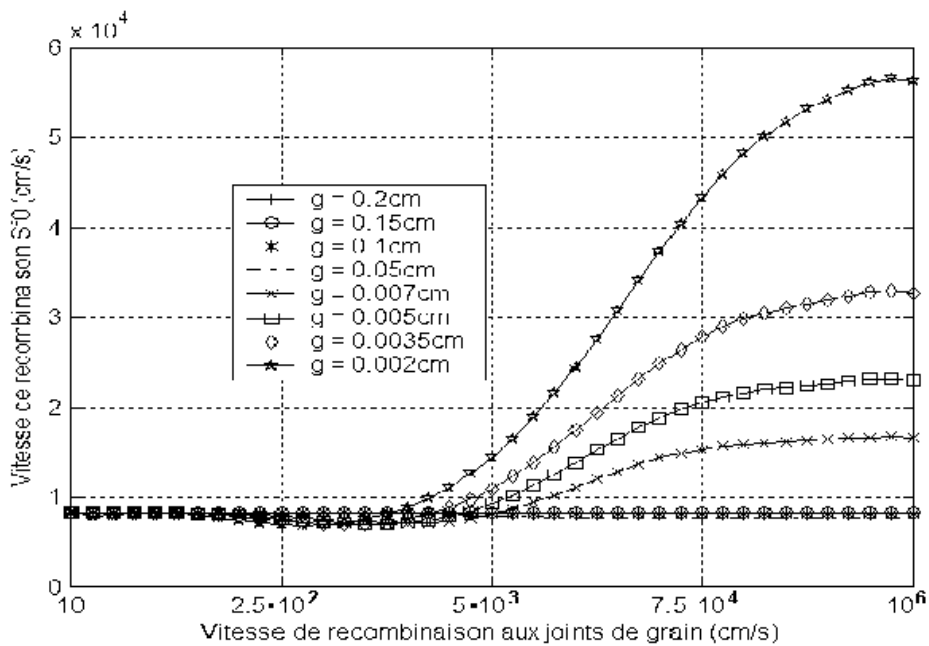


Figure I-2 : profil de la vitesse de recombinaison intrinsèque à la jonction en fonction de celle aux joints de grain pour différentes tailles de grain, $D=26\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $H= 0.03 \text{ cm}$ et $AM= 1,5$

La figure (I-2) ci-dessus montre que la vitesse de recombinaison intrinsèque à la jonction diminue avec la taille de grain et augmente avec la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

I.1.4 Effet des joints de grain sur la vitesse de recombinaison à la face arrière.

De même, compte tenu du gradient nul présenté par la courbe de variation de la densité de courant en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction, nous posons :

$$\left[\frac{\partial J}{\partial S_f} \right]_{S_f > 10^4} = 0 \tag{I-3}$$

En résolvant cette équation (I-30), nous déduisons l'expression de S_b . Lorsque la photopile est éclairée par une lumière poly chromatique, elle s'écrit :

$$S_b = D \cdot \frac{\sum_k \sum_j \left(R_{k,j} \cdot \left(\frac{D}{L_{k,j}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \beta_i \cdot \left[b_i \cdot \exp(-b_i \cdot H) - b_i \cdot \cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) + \frac{1}{L_{k,j}} \cdot \sinh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) \right] \right)}{\sum_k \sum_j \left(R_{k,j} \cdot \left(\frac{D}{L_{k,j}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \beta_i \cdot \left[\exp(-b_i \cdot H) - \cosh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) + b_i \cdot L_{k,j} \cdot \sinh\left(\frac{H}{L_{k,j}}\right) \right] \right)} \tag{I-4}$$

La figure (I-3) suivante montre la variation de la vitesse de recombinaison à la face arrière S_b en fonction de la vitesse de recombinaison aux joints de grain pour différentes tailles de grain.

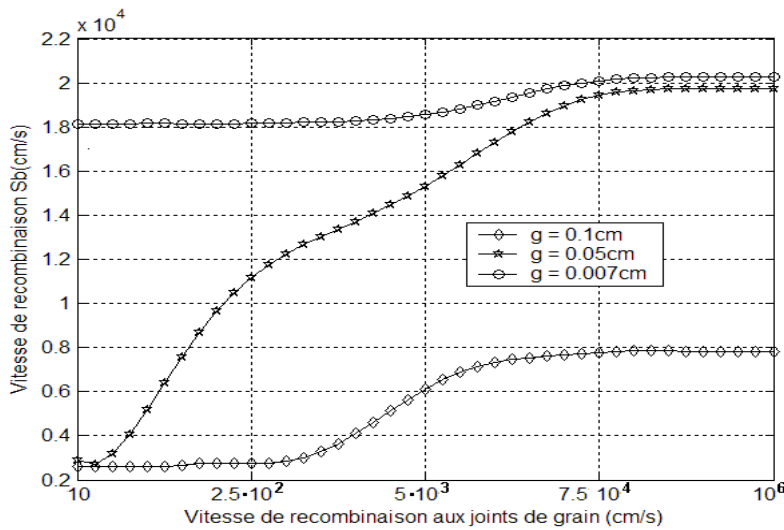


Figure I-3 : Profil de la vitesse de recombinaison en fonction de la vitesse de recombinaison aux joints de grain pour différentes tailles de grain. ($D = 26 \text{ cm}^2/\text{s}$, $H = 0.03 \text{ cm}$ et $AM = 1,5$)

Les courbes de la figure (I-3) ci-dessus, montrent que la vitesse de recombinaison à la face arrière croît lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente. Cette hausse est beaucoup plus significative lorsque la taille de grain diminue. Les études relatives aux grains du substrat poly cristallin sont réalisées dans les modèles à trois dimensions d'une photopile.

I-2 FREQUENCY DOMAIN PHOTOLUMINESCENCE METHOD AS A TECHNIQUE OF EVALUATION OF LOG MINORITY CARRIER LIFETIME [7]

Une technique d'évaluation des grandes durées de vie τ des porteurs minoritaires par photoluminescence est proposée dans cette étude. Le dispositif étudié est une plaquette au silicium de haute qualité.

Un flux de photons ϕ_0 de lumière monochromatique y génère des porteurs minoritaires de charge dont la densité est donnée par :

$$\Delta n(x) = \frac{(1-R) \cdot \Phi_0 \cdot \alpha \cdot \tau}{\alpha^2 \cdot L^2 - 1} \left\{ A \cdot e^{-\frac{x}{L}} + B \cdot e^{\frac{x}{L}} + e^{-\alpha \cdot x} \right\} \quad (\text{I-5})$$

L'expression ci dessus est obtenue après résolution de l'équation de continuité et en tenant compte des conditions aux limites.

R représente le coefficient de réflexion de la lumière excitatrice dans le semi-conducteur et α son coefficient d'absorption ;

τ la durée de vie des porteurs minoritaires et L leur longueur de diffusion ;

Les coefficients A et B s'obtiennent à partir conditions aux limites ;

La photoluminescence PL devant être proportionnelle a $\Delta n(x)$; son intensité I_{PL} sera donnée par l'intégrale suivante :

$$I_{PL} = \gamma(\lambda) \int_0^w C \cdot \Delta n(x) \cdot e^{-\beta \cdot x} dx \quad (\text{I-6})$$

Avec

W est l'épaisseur de la plaquette,

C est une constante

$\gamma(\lambda)$ le spectre de la photoluminescence

β le coefficient d'absorption de PL dans le semi-conducteur

En modulation de fréquence, l'intensité de la photoluminescence est obtenue en changeant

respectivement τ et L en $\tau' \left(= \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} \right)$ et $L' \left(= \frac{L}{(1 + j\omega\tau)^{\frac{1}{2}}} \right)$, ou ω est la pulsation angulaire.

En insérant l'équation donnant $\Delta n(x)$ dans l'expression de I_{PL} on obtient finalement l'expression de I_{PL} en modulation de fréquence :

$$I_{PL}(\omega, \lambda) = C \cdot \gamma(\lambda) \cdot \frac{(1-R) \cdot \Phi_0 \cdot \tau'}{\alpha^2 \cdot L^2 - 1} \left\{ \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot (1 - e^{-(\alpha + \beta)w}) + \frac{A}{\frac{1}{L'} - \beta} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{L'} + \beta\right)w} \right) + \frac{B}{\frac{1}{L'} - \beta} \cdot \left(e^{\left(\frac{1}{L'} - \beta\right)w} - 1 \right) \right\} \quad \text{(I-7)}$$

Pour le silicium, on considère $\beta \ll \alpha$. De plus en se plaçant dans la limite des faibles fréquences, on déduit une approximation de l'intensité normalisée de PL selon l'équation :

$$\frac{I_{PL}(\omega)}{I_{PL}(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + j\omega\tau}} \quad \text{(I-8)}$$

On peut dire théoriquement que pour les fréquences faibles, l'amplitude de l'intensité normalisée diminue d'autant plus que la durée de vie augmente. Ce qui est conforme avec l'étude expérimentale.

En définitive, on peut dire que la connaissance de l'amplitude de l'intensité normalisée de PL permet de déterminer les grandes durées de vie des porteurs minoritaires.

I.3- Measurement of AC parameters of Gallium Arsenide (GaAs/Ge) solar by Impedance Spectroscopy

(Mesure des paramètres électriques d'une cellule en Arséniure de Gallium « GaAs/Ge », par spectroscopie d'impédance) [8]

Dans cet article, il est proposé une méthode expérimentale de détermination des paramètres électriques. L'étude est faite sur une cellule solaire en Arséniure de Gallium par la méthode d'Impédance spectroscopique.

Les mesures sont réalisées sur une cellule GaAs/Ge de taille (20 x 40 mm), la température de la salle est de 22°C ± 1°C. La cellule est polarisée à l'obscurité, la tension de polarisation est comprise entre 0,3V et 0,9V et l'amplitude du signal alternatif est de 10 mV avec une fréquence variant de 1Hz à 60 kHz.

Le spectre d'impédance obtenue est un demi-cercle (diamètre R_p), il permet de déterminer les paramètres électriques de la cellule (R_s, R_p, C_s)

En examinant sa méthode, nous pouvons dire que lorsque la cellule est en situation de circuit ouvert, les demi-cercles ne sont plus parfaits.

La résistance parallèle R_p qui est un paramètre important de la cellule est la combinaison de deux résistances : la résistance dynamique et la résistance shunt R_{sh} . En générale $R_{sh} \gg R_D$ lorsque ces cellules sont en situation de circuit ouvert, ce qui entraîne que $R_p = R_D$.

L'expression de la résistance dynamique est donnée par la relation suivante :

$$R_D = \frac{V_T}{I} \eta$$

V_T la tension thermique

η diode factor (facteur d'idéalité)

I le photocourant de la cellule solaire

I.4 A new characterization method for Solar Cell dynamic impedance

(Nouvelle méthode de caractérisation d'impédance dynamique d'une cellule solaire) [7]

Cet article présente une technique de caractérisation d'impédance dynamique d'une cellule solaire par une méthode basée sur la spectroscopie d'impédance.

Pour cette nouvelle méthode de caractérisation d'impédance dynamique, on utilise un courant continu modulé d'un petit signal carré en lieu et place d'un signal sinusoïdal fréquemment utilisé en spectroscopie d'impédance.

Cette méthode permet de réduire le matériel expérimental, de simplifier en rendant plus accessibles les mesures de l'impédance.

Les mesures sont effectuées sur une cellule en silicium cristalline de surface (10 cm x 10 cm)

Les conditions expérimentales sont :

- La température de la cellule est égale à la température ambiante de la salle
- La cellule est polarisée à l'obscurité
- Les courants et les tensions d'entrée et de sortie de la cellule test peuvent être visualisés par un oscilloscope numérique. Les données sont transférées au PC par l'intermédiaire du port de transmission de données de GPIB. L'impédance dynamique de la cellule solaire est calculée par MATLAB en utilisant la technique de FFT.

Dispositif expérimental :

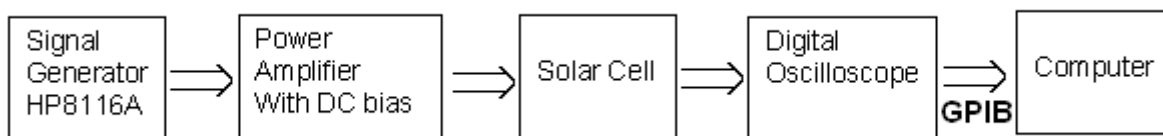


Figure I.4 : Dispositif expérimental utilisé en spectroscopie d'impédance

Le schéma électrique équivalent d'une cellule solaire en régime dynamique est représenté à la figure I.5 :

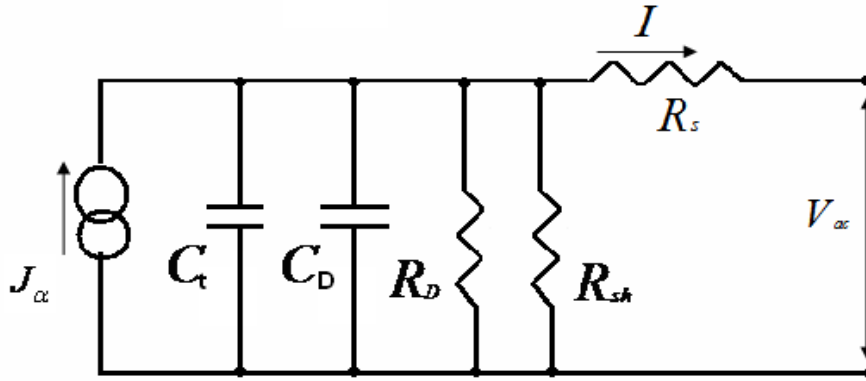


Figure I.5 : schéma électrique équivalent d'une cellule solaire

L'impédance dynamique du circuit ci-dessus s'écrit sous la forme suivant :

$$R_{pv} + i \cdot X_{pv} = R_S + \frac{R_D \cdot R_{Sh} \cdot (R_{Sh} + R_D)}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} - \frac{i \cdot \omega \cdot (R_{Sh} \cdot R_D)^2 \cdot C}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} \quad (I-2)$$

Avec :

R_{pv} étant le composant résistive de l'impédance dynamique

et X_{pv} étant composant réactive de l'impédance dynamique

Les valeurs de la résistance dynamique obtenues à partir des méthodes de caractérisation de l'impédance dynamique sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Tableau I.1 : résistance dynamique

Tension (v)	0,2	0,3	0,4
R_{d1} (Ω)	15,53	4,90	1,40
R_{d2} (Ω)	15,53	4,71	1,39

R_{d1} est obtenue à partir de la méthode de détermination qui utilise un courant continu modulé d'un petit signal carré.

R_{d2} est obtenue à partir de la méthode de détermination qui utilise un signal sinusoïdal.

Cet article montre une nouvelle méthode simple pour mesurer les impédances des cellules solaires en utilisant un signal carré au lieu d'un signal sinusoïdal. Les résultats expérimentaux de la nouvelle méthode donnent des valeurs d'impédance comparables à celles des études précédentes. Cette étude compare deux techniques de mesure basées sur le même principe, en utilisant un signal entré sinusoïdal et un signal entré carré, plutôt qu'une mesure absolue qui dépend-elle de l'exactitude et de la qualité de l'équipement d'essai.

I.5- PV module dynamic impedance and its voltage and frequency dependencies [10]

Cet article présente une méthode de détermination de l'impédance dynamique à partir du modèle électrique équivalent suivant:

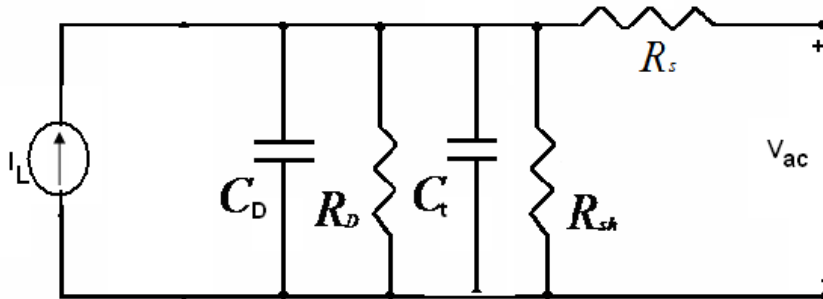


Figure I.6 schéma électrique équivalent d'une cellule solaire

Ainsi à partir des représentations de Nyquist et de Bode, il a présenté les spectres de l'impédance et de la phase pour différentes valeurs de la fréquence.

L'étude des résistances dynamique et parallèle en fonction de la phototension a été aussi présentée.

I.6- Measurement of solar Cell AC parameters using Impedance Spectroscopy [11]

(Mesure des paramètres électriques d'une photopile par la méthode des impédances Spectroscopiques)

Dans ce document, l'auteur présente une méthode de détermination des paramètres d'une photopile.

Ainsi en utilisant le diagramme de Nyquist, il a représenté les spectres de l'impédance spectroscopique de quelques modèles électriques dont:

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'une résistance pure (R) que nous présentons à la figure I.7

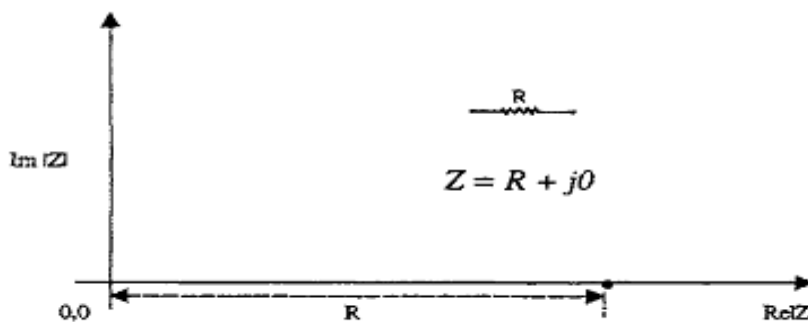


Figure I-7 Impédance spectroscopique d'une résistance pure (R)

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'une capacité pure (C) que nous présentons à la figure I.8

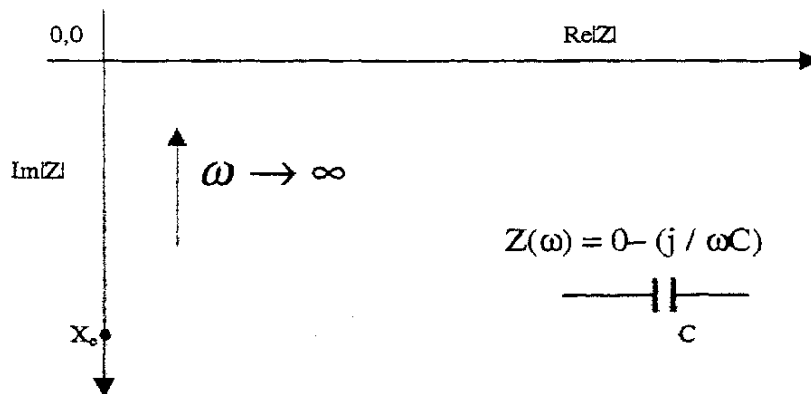


Figure I-8 Impédance spectroscopique d'une capacité pure (C)

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'une inductance pure (L) que nous présentons à la figure I.9

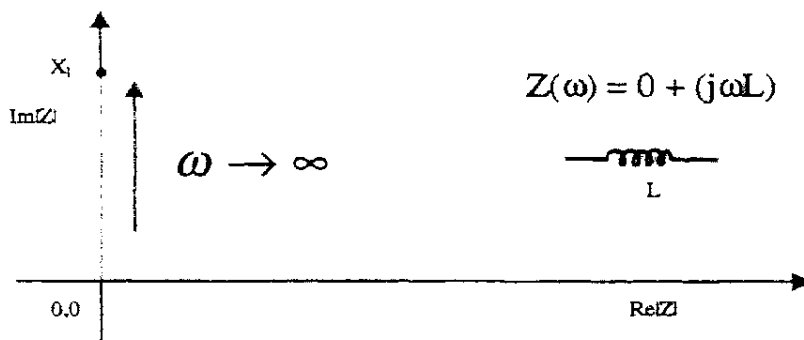


Figure I-9 Impédance spectroscopique d'une inductance pure (L)

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'un circuit R-C en série que nous présentons à la figure I-10

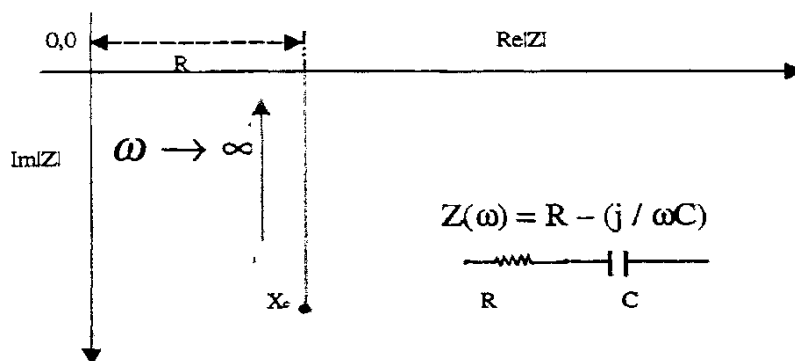


Figure I-10 Impédance spectroscopique d'un circuit R-C en série

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'un circuit R-L en série que nous présentons à la figure I.11

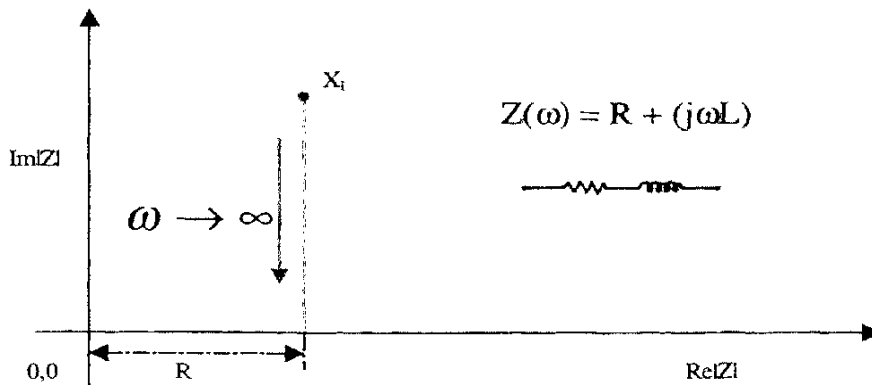


Figure I-11 : Impédance spectroscopique d'un circuit R-L en série

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'un circuit R-C en parallèle que nous présentons à la figure I.12

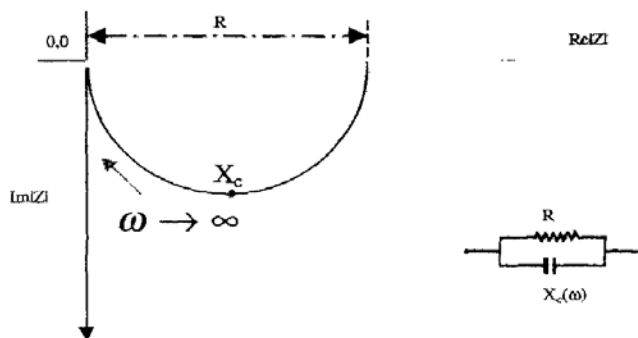


Figure I-12 : Impédance spectroscopique d'un circuit R-C en parallèle

- Le Spectre de l'impédance spectroscopique d'un circuit R-L en parallèle que nous présentons à la figure I.13

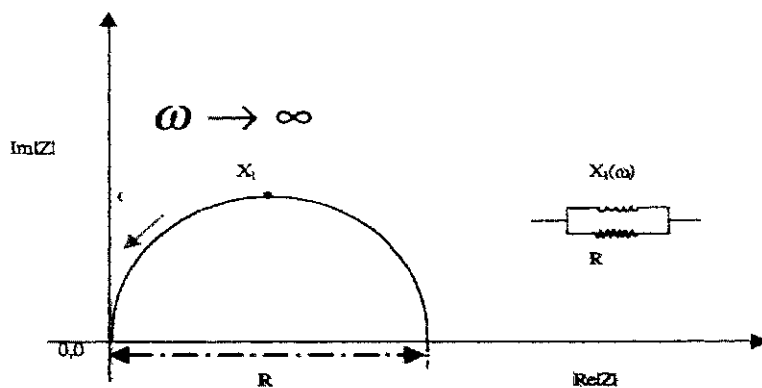


Figure I-13 : Impédance spectroscopique d'un circuit R-L en parallèle

Après cette étude théorique sur les circuits, l'auteur a déterminé quelques paramètres électriques de la photopile par la méthode des impédances spectroscopiques.

CONCLUSION

Dans cette étude bibliographique, une étude sur les vitesses de recombinaisons intrinsèques d'un modèle mathématique à trois dimensions de la photopile a été effectuée. Aussi des méthodes expérimentales de détermination des paramètres électriques en régime dynamique fréquentiel ont été présentées. Ces méthodes sont basées sur la spectroscopie d'impédance.

C'est ainsi que nous allons faire une étude théorique d'un grain d'une photopile sous éclairage monochromatique par la face avant et en modulation de fréquence. Par la suite nous allons déterminer le coefficient de diffusion, la longueur de diffusion, la densité des porteurs minoritaires dans la base, le photocourant et la photo tension. La technique de la spectroscopie d'impédance sera utilisée pour la détermination des paramètres électriques.

CHAPITRE II : ETUDE THEORIQUE DE LA PHOTOPILE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous faisons une étude de la photopile sous éclairage monochromatique et en modulation de fréquence.

L'étude se fera à trois dimensions et dans un premier temps nous allons donner l'expression de la densité des porteurs minoritaires dans la base de la photopile, du photocourant et de la phototension ; dans un second temps nous allons étudier l'effet des tailles de grain et des vitesses de recombinaisons aux joints de grain en fréquence de modulation sur ces paramètres cités ci-dessus ; enfin nous allons procéder à la détermination du courant de court circuit, de la phototension de circuit ouvert :

II-1 STRUCTURE DES CELLULES SOLAIRES

Une cellule solaire conventionnellement est généralement représentée par trois régions :

La première, que l'on nomme émetteur est de faible épaisseur (de l'ordre de $1\mu\text{m}$) et très dopée en atomes donneurs (10^{17} à 10^{19} atomes cm^{-3}). Sur cette dernière est posée une grille électrique métallique en forme de peigne pour collecter les porteurs minoritaires de charge photogénérées.

La deuxième, d'épaisseur importante (150 à $400\mu\text{m}$) appelée base dopée en atomes accepteurs (10^{15} à 10^{17} atomes cm^{-3}).

La troisième est la zone de charge d'espace (jonction émetteur-base) où règne un champ électrique intense qui sépare les paires électrons trous qui arrivent à la jonction [12]

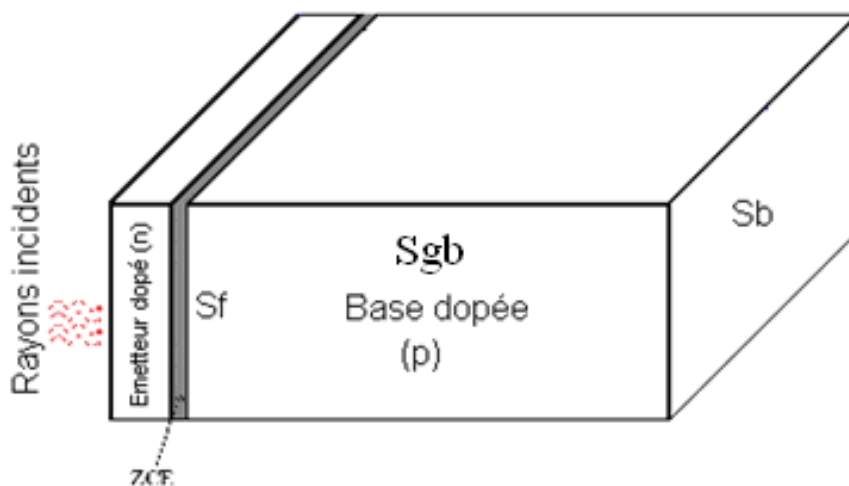


Figure II -1 : Photopile à jonction horizontale

Avec :

Sf est la vitesse de recombinaison à la jonction

Sb est la vitesse de recombinaison à la face arrière

Sgb est la vitesse de recombinaison aux joints de grain

II -2 EXPRESSION DE LA DENSITE DES PORTEURS PHOTOCREES DANS LA BASE :

Dans l'étude que nous allons présenter, la contribution de l'émetteur peut être supposé négligeable [13] et que la théorie de la quasi neutralité de la base (QNB) est satisfaite.

Le modèle mathématique utilisé est tridimensionnel, l'origine du repère est prise au centre de la jonction et ceci est illustré à la figure II-2

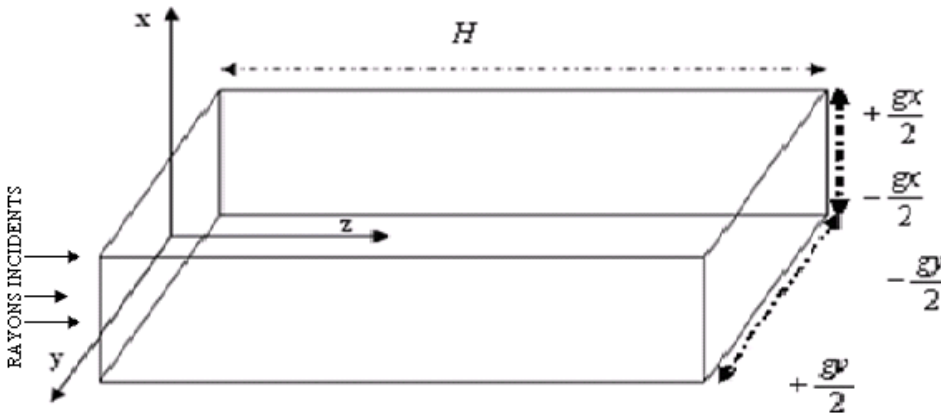


Figure II-2 : Orientation de la photopile

g_x , g_y et H étant respectivement les épaisseurs du grain suivant les axes x, y et z

Lorsque la base de la photopile à jonction horizontale est éclairée par une lumière monochromatique par la face avant et en modulation de fréquence la densité de porteurs de charge photocrée est régie par l'équation de continuité dont l'expression est :

$$\frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{\tau}{L^2} \cdot \frac{\partial \delta(x, y, z, t)}{\partial t} = - \frac{G(z, t)}{D} \quad \text{(II-1)}$$

$\delta(x, y, z, t)$ Représente la densité de porteurs minoritaires dans la base en fonction de (x, y, z) et à l'instant t , qui s'écrit sous la forme :

$$\delta(x, y, z, t) = \delta(x, y, z) e^{i\omega t} \quad \text{(II-2)}$$

avec $\delta(x, y, z)$ représente la composante spatiale et $e^{i\omega t}$ la composante temporelle de la densité de porteurs minoritaires de charge.

$G(z, t)$ Représente le taux de génération des porteurs minoritaires de charge à la profondeur z et à l'instant t , donné par l'expression :

$$G(z, t) = g(z) e^{i\omega t} \quad (\text{II-3})$$

où $g(z)$ la composante spatiale et $e^{i\omega t}$ la composante temporelle

Pour un éclairage par la face avant $g(z)$ est donné par la relation suivante :

$$g(z) = \alpha(\lambda) I_0(\lambda) (1 - R(\lambda)) \exp(-\alpha(\lambda) z) \quad (\text{II-4})$$

$\alpha(\lambda)$ est le coefficient d'absorption monochromatique

$R(\lambda)$ est le coefficient de réflexion du matériau à la longueur d'onde (λ)

D est le coefficient de diffusion

τ est la durée de vie moyenne des porteurs de charge

$I_0(\lambda)$ est la puissance incidente de la lumière à la longueur d'onde sur la face avant de la base ($z=0$)

z est la profondeur de pénétration de la lumière

L est La longueur de diffusion des porteurs minoritaires de charge dans la base

En introduisant (2) et (3) dans (1) nous avons :

$$\frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial z^2} - \frac{\delta(x, y, z)}{Lc^2(\omega)} = -\frac{g(z)}{D} \quad (\text{II-5})$$

Avec

$$L^2 c(\omega) = \frac{L^2}{1 + i\omega\tau} \quad (\text{II-6})$$

$Lc(\omega)$ est la longueur de diffusion complexe

La solution générale de l'équation (5) s'écrit sous la forme :

$$\delta(x, y, z) = \sum_k \sum_j Z_{kj}(z) \cos(C_k \cdot x) \cos(C_j \cdot y) \quad (\text{II-7})$$

$Z_{kj}(z)$ représente la fonction spatiale de la densité des porteurs minoritaires en excès dépendant de la variable z (profondeur de la base).

C_k et C_j sont des valeurs propres déterminées par la résolution des équations transcendantes

Les conditions limites aux joints de grain sont :

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=\pm \frac{gx}{2}} = \pm \frac{Sgb}{D} \delta\left(\pm \frac{gx}{2}, y, z\right) \quad (\text{II-8})$$

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial y} \right]_{y=\pm \frac{gy}{2}} = \pm \frac{Sgb}{D} \delta\left(x, \pm \frac{gy}{2}, z\right) \quad (\text{II-9})$$

En remplaçant $\delta(x, y, z)$ par son expression (7) dans (8) nous obtenons les équations transcendantes :

$$C_k \cdot \tan\left(C_k \cdot \frac{gx}{2}\right) = \frac{Sgb}{D} \quad (\text{II-10})$$

$$C_j \cdot \tan\left(C_j \cdot \frac{gy}{2}\right) = \frac{Sgb}{D} \quad (\text{II-11})$$

En remplaçant l'expression (7) dans (5) nous obtenons :

$$\sum_k \sum_j \left(Z_{kj}'' - \frac{Z_{kj}}{L_{kj}^2} \right) \cdot \cos(C_k x) \cdot \cos(C_j y) = \frac{-g(z)}{Dn} \quad (\text{II-12})$$

Nous allons multiplier l'expression (12) par le terme $\cdot \cos(C_n x) \cdot \cos(C_m y)$ en intégrant suivant les épaisseurs des joints de grain et puis considérant que les conditions d'orthogonalité sont satisfaites (cf. annexe).

Nous aurons finalement Z_{kj} qui est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 Z_{kj}}{\partial z^2} - \frac{1}{L_{kj}^2} \cdot Z_{kj} = -\frac{g(z)}{D_{kj}} \quad (\text{II-13})$$

D_{kj} et L_{kj} sont définis respectivement par les expressions suivantes :

$$\frac{1}{L_{kj}^2} = C_k^2 + C_j^2 + \frac{1}{L^2(\omega)} \quad (\text{II-14})$$

$$\frac{1}{D_{kj}} = \frac{16 \cdot \sin\left(C_k \cdot \frac{gx}{2}\right) \cdot \sin\left(C_j \cdot \frac{gy}{2}\right)}{D \cdot (\sin(C_k \cdot gy) + C_k \cdot gx) (\sin(C_j \cdot gy) + C_j \cdot gy)} \quad (\text{II-15})$$

Sachant que $L = \sqrt{\tau \cdot D}$ est la longueur de diffusion des électrons dans la base

L_{kj} et D_{kj} sont respectivement la longueur et le coefficient de diffusion effective [14].

La solution générale de (14) est :

$$Z_{kj} = A_1 \cdot \cosh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) + B_1 \cdot \sinh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) - \frac{I_0(\lambda) \cdot \alpha(\lambda) \cdot (1 - R(\lambda) \cdot L_{kj}^2)}{D_{kj} \cdot (\alpha^2(\lambda) \cdot L_{kj}^2 - 1)} \cdot \exp(-\alpha(\lambda) \cdot z) \quad (\text{II-16})$$

Connaissant l'expression de Z_{kj} , nous en déduisons celle de la densité des porteurs minoritaires dans la base qui est :

$$\delta(x, y, z) = \left[\sum_k \sum_j \left\{ A_1 \cosh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) - \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1 - R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha^2(\lambda) L_{kj}^2 - 1)} \exp(-\alpha(\lambda) z) \right\} \times \cos(C_k x) \cos(C_j y) \right] \quad (\text{II-17})$$

A_1 et B_1 sont obtenues à l'aide des équations aux conditions limites (17) et (18) en remplaçant $\delta(x, y, z)$ par son expression (16).

La condition limite à la jonction conduit à :

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{Sf}{D} \delta(x, y, 0) \quad (\text{II-18})$$

La condition limite à la face arrière conduit à :

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=H} = \frac{Sb}{D} \delta(x, y, H) \quad (\text{II-19})$$

Sf et Sb sont les vitesses de recombinaisons respectivement à la jonction et à la face arrière.

Pour tout calcul fait on trouve :

$$A_1 = \frac{\frac{I_0(\lambda)\alpha(\lambda)(1-r(\lambda))L_{kj}^2}{D_{kj}(\alpha^2(\lambda)L_{kj}^2-1)} \left\{ \begin{aligned} & \left[L_{kj}^2 Sb \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) \right] (Sf + D\alpha(\lambda)) \\ & + DL_{kj} e^{-\alpha(\lambda)H} (Sb - D\alpha(\lambda)) \end{aligned} \right\}}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) (Sf + Sb) + (D^2 + SfSbL_{kj}^2) \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} \quad (\text{II-20})$$

$$B_1 = \frac{\frac{I_0(\lambda)\alpha(\lambda)(1-r(\lambda))L_{kj}^2}{D_{kj}(\alpha^2(\lambda)L_{kj}^2-1)} \left\{ \begin{aligned} & \left[L_{kj}^2 Sb \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + DL_{kj} \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) \right] (-Sf - D\alpha(\lambda)) \\ & + L_{kj}^2 Sfe^{-\alpha(\lambda)H} (Sb - D\alpha(\lambda)) \end{aligned} \right\}}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) (Sf + Sb) + (D^2 + SfSbL_{kj}^2) \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} \quad (\text{II-21})$$

II-2-1 Profil des modules du coefficient de diffusion et de la longueur de diffusion complexe en fonction du logarithme de la fréquence :

En régime dynamique l'expression du coefficient de diffusion et de la longueur de diffusion complexe sont données respectivement par les relations (II-22) et (II-23) :

$D = D_0 \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$	(II-22)
--	----------------

$Lc(\omega) = L \sqrt{\frac{1}{1 + i\omega\tau}}$	(II-23)
---	----------------

où $L = \sqrt{D\tau}$

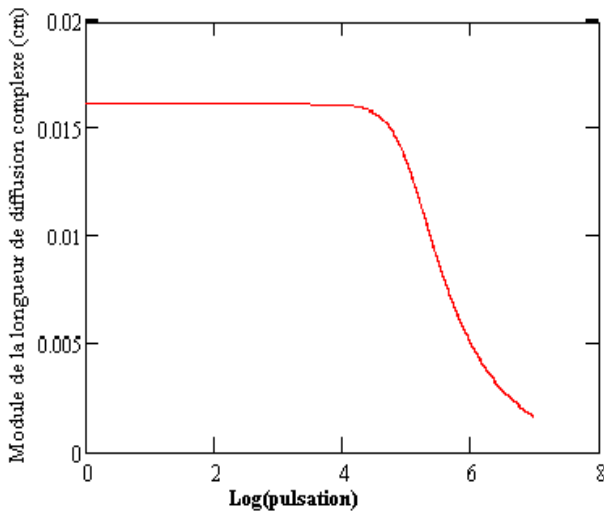


Figure II-3 : Module de la longueur de Diffusion en fonction de log (pulsation)

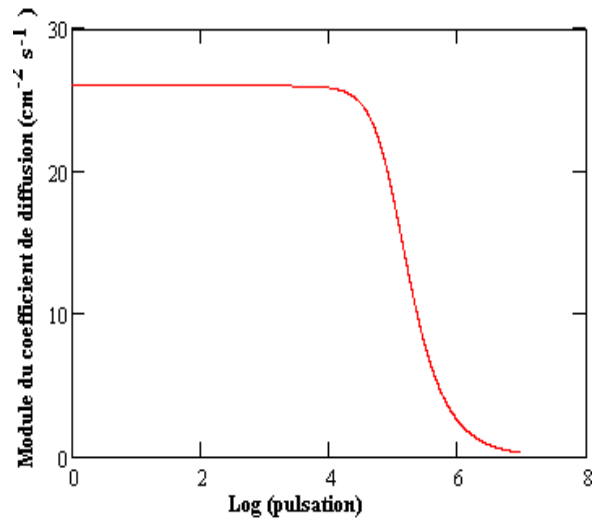


Figure II-4 : Module du coefficient de Diffusion en fonction de log (pulsation)

A la figure (II-3) et (II-4) sont représentés respectivement le module du coefficient de diffusion et le module de la longueur de diffusion complexe en fonction du logarithme de la pulsation.

Nous constatons que le module du coefficient de diffusion et le module de la longueur de diffusion complexe diminuent en fonction du logarithme de la pulsation. On distingue ainsi deux zones :

La première zone où la pulsation est comprise entre 1rad/s et 10^4 rad/s où le coefficient de diffusion et la longueur de diffusion complexe reste pratiquement constants (le régime quasi statique).

La deuxième zone où la pulsation est comprise entre 10^4 à 10^7 , le coefficient de diffusion et la longueur de diffusion complexe diminuent de manière considérable (forte dépendance de la fréquence de modulation). De manière générale on peut dire que la fréquence de modulation diminue les propriétés optoélectroniques des porteurs défectés.

Connaissant les valeurs des deux paramètres cités en fonction de la modulation de fréquence, l'étude de la densité des porteurs minoritaires en excès photogénérés dans la base de la photopile est proposée.

II-2-2 Etude du profil de la densité des porteurs de charges photocréés dans la base

Dans ce paragraphe, nous faisons une étude en modélisation de la densité des porteurs photogénérés dans la base. Ainsi nous nous proposons d'étudier l'effet de la taille de grain et

de la vitesse de recombinaison aux joints de grain sur la densité des porteurs photocréés en fonction de la profondeur de la base.

II-2-2-1 Effet de la taille de grain

Nous présentons à la figure II-5 le profil de la densité des porteurs de charge en excès en fonction de la profondeur pour différentes valeurs de tailles de grain.

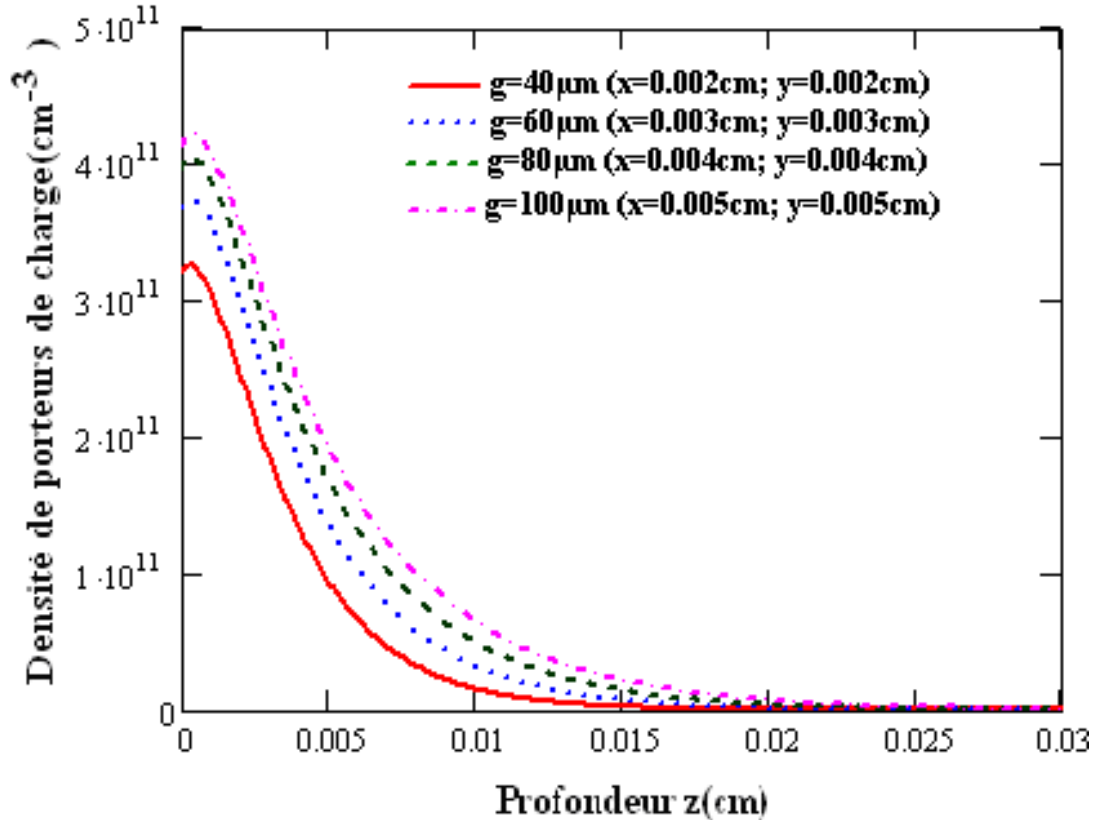


Figure II-5 : Module de la densité des porteurs de charge en fonction de la profondeur de la base pour différentes tailles de grain

$$S_{gb} = 2500\text{cm/s}; \quad f = 2 \cdot 10^4\text{Hz}; \quad \lambda = 0.8\mu\text{m}; \quad H = 0.03\text{cm}; \quad D = 26\text{cm}^2/\text{s}; \quad S_f = 3 \cdot 10^3\text{cm/s};$$

Pour une taille de grain donnée le module de la densité des porteurs minoritaires photocréés augmente jusqu'à atteindre un maximum correspondant à une profondeur z_0 de la base et lorsque la profondeur z de la base est supérieure à z_0 le module de la densité des porteurs photocréés diminue. De cette analyse, nous distinguons deux zones délimitées par z_0 .

- i) zone où $z \in [0 ; z_0 [$

Le gradient de la densité des porteurs minoritaires photocréés dans la base est positif : ceci correspond au passage d'un flux d'électrons occasionnant un photocourant à travers la jonction émetteur-base.

- ii) zone où $z \in]z_0 ; H]$

Le module de la densité des porteurs minoritaires diminue impliquant ainsi un gradient négatif : dans cette zone les porteurs minoritaires de charge sont bloqués et subissent des recombinaisons en volume et en surface arrière (S_b) et latérale (S_{gb}).

Pour la profondeur z_0 le gradient de la densité des porteurs minoritaires de charges en excès dans la base est maximale et de gradient nul : il y'a donc un stockage de porteurs minoritaires de charges en excès qui va créer une capacité de zone de charge d'espace qui s'étend de la jonction à la valeur z_0 .

Nous remarquons aussi lorsque la taille de grain augmente, l'amplitude de la densité des porteurs minoritaires dans la base augmente. Cette croissance s'attribue à la diminution des centres de recombinaison que sont les joints de grain ; c'est-à-dire à l'augmentation de la surface du grain. Ainsi, le nombre de porteurs qui participent aux photocourant croît lorsque la taille de grain augmente.

II-2-2-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain :

Nous représentons à la figure (II-6) le profil du module de la densité des porteurs photocréés dans la base en fonction de la profondeur z de la photopile pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

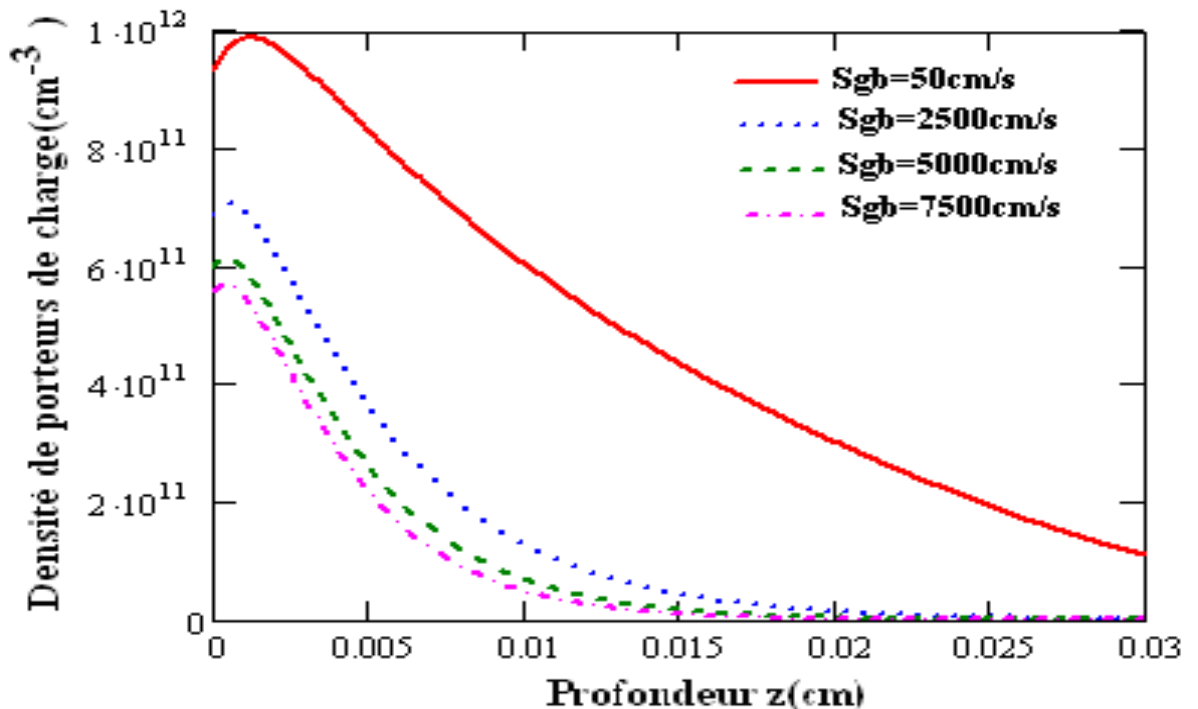


Figure II-6 : Profil du module de la densité des porteurs de charges en fonction de la profondeur de la base pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain
 $g=100\mu\text{m}$; $f=2 \cdot 10^4 \text{ Hz}$; $\lambda = 0.8\mu\text{m}$; $H=0.03\text{cm}$; $D=26\text{cm}^2/\text{s}$; $S_f=3 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$; $S_b=3 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$; $x=0.002\text{cm}$
 $y=0.002\text{cm}$

De l'observation de la figure (II-6), nous en déduisons que la densité des porteurs de charge minoritaires décroît lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente. Ce qui décrit, en quelques sortes, l'effet négatif de l'activité recombinante des joints de grain.

En effet, la diminution de la densité des électrons dans la base lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente peut s'expliquer du fait que les joints de grain sont des centres de recombinaison. Ainsi, une augmentation de la vitesse de recombinaison aux joints de grain induit nécessairement des pertes d'électrons dans la base.

Connaissant l'expression de la densité de porteurs minoritaires, nous pouvons déterminer respectivement la densité du photocourant en utilisant la loi de FICK et la densité de la phototension en utilisant la relation de BOLTZMANN

II-3 Etude du profil de la densité de photocourant :

L'expression de la densité du photocourant est obtenue en résolvant l'équation de transport des porteurs minoritaires donnée par la relation (II-19).

$$J_{ph} = \frac{qD}{g_x g_y} \int_{-\frac{g_x}{2}}^{+\frac{g_x}{2}} \int_{-\frac{g_y}{2}}^{+\frac{g_y}{2}} \left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0} dx dy \quad (II-24)$$

q est la charge élémentaire de l'électron

II-3-1 Effet de la taille de grain

Nous présentons à la figure (II-7) le profil du module de la densité de photocourant en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes tailles de grain.

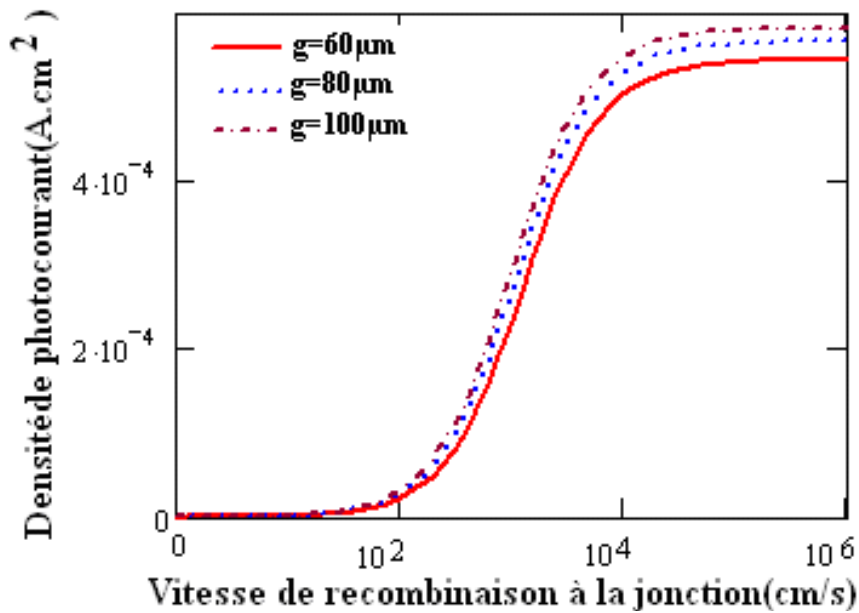


Figure II-7 : Profil du module de la densité de photocourant en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la taille de grain
 $S_{gb}=2500\text{cm/s}$; $f=2.10^4\text{Hz}$; $S_b=3.10^3\text{cm/s}$; $\lambda =0.8\mu\text{m}$; $D=26\text{cm}^2/\text{s}$

Nous remarquons que pour des faibles valeurs de la vitesse de recombinaison à la jonction, la densité de photocourant est quasi nulle, il n'y a pratiquement pas 'passage' des électrons à travers la jonction : C'est le fonctionnement de la photopile en circuit ouvert.

Pour des grandes valeurs de la vitesse de recombinaison à la jonction, la densité de photocourant croît très rapidement pour atteindre un palier où le courant est maximal : c'est le fonctionnement de la photopile en court circuit.

Nous remarquons également que la densité de photocourant augmente lorsque la taille de grain augmente. L'augmentation de la taille de grain diminue considérablement les effets des interfaces recombinantes, ce qui se traduit par une densité de courant plus importante pour les grandes tailles de grain.

II-3-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

Nous représentons à la figure (II-8) le profil du module de la densité de photocourant en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain et pour une taille de grain donnée.

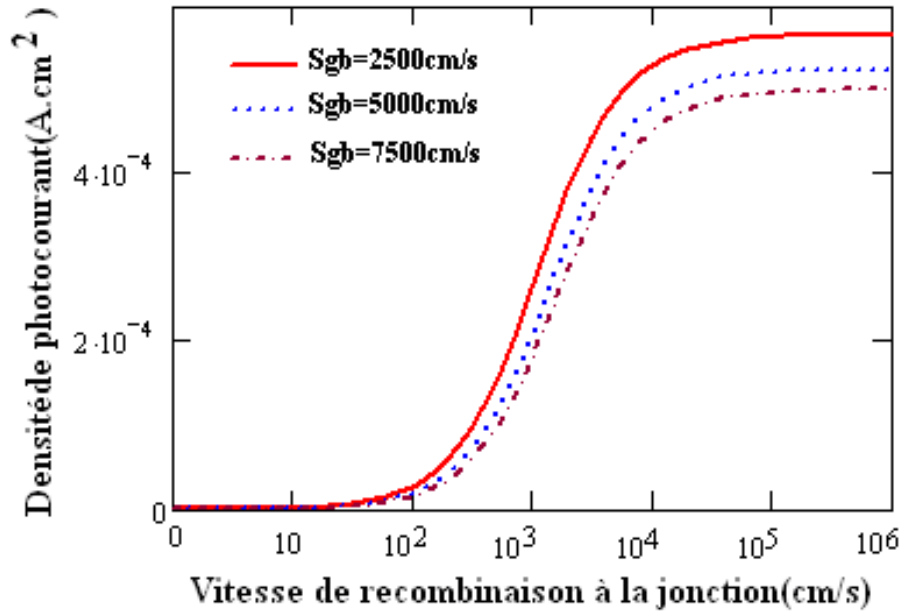


Figure II-8 : Profil du module de la densité de photocourant en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain $g=80\mu\text{m}$; $f=2.10^4\text{Hz}$; $S_b=3.10^3\text{cm/s}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$; $D=26\text{cm}^2/\text{s}$

Nous remarquons que lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente la densité de photocourant diminue. L'augmentation de la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente considérablement les effets des interfaces recombinantes, ce qui se traduit par une densité de courant moins importante pour les grandes vitesses de recombinaison aux joints de grain.

II-4 Etude du profil de la phototension.

L'expression de la densité de photo tension est donnée par la relation de Boltzmann :

$$V_{ph} = \frac{KT}{q} \ln \left[1 + \frac{1}{n_0} \int_{-\frac{gx}{2}}^{+\frac{gx}{2}} \int_{-\frac{gy}{2}}^{+\frac{gy}{2}} \delta(x, y, 0) dx dy \right] \quad (\text{II-25})$$

Avec : $n_0 = \frac{n_i^2}{N}$

K est la constante de Boltzmann

T est la température absolue

q est la charge de l'électron

n_i est la densité des porteurs intrinsèques

N est le taux de dopage des impuretés dans la base

II-4-1 Effet de la taille de grain

Nous présentons à la figure (II-9) le profil du module de la phototension en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes tailles de grain

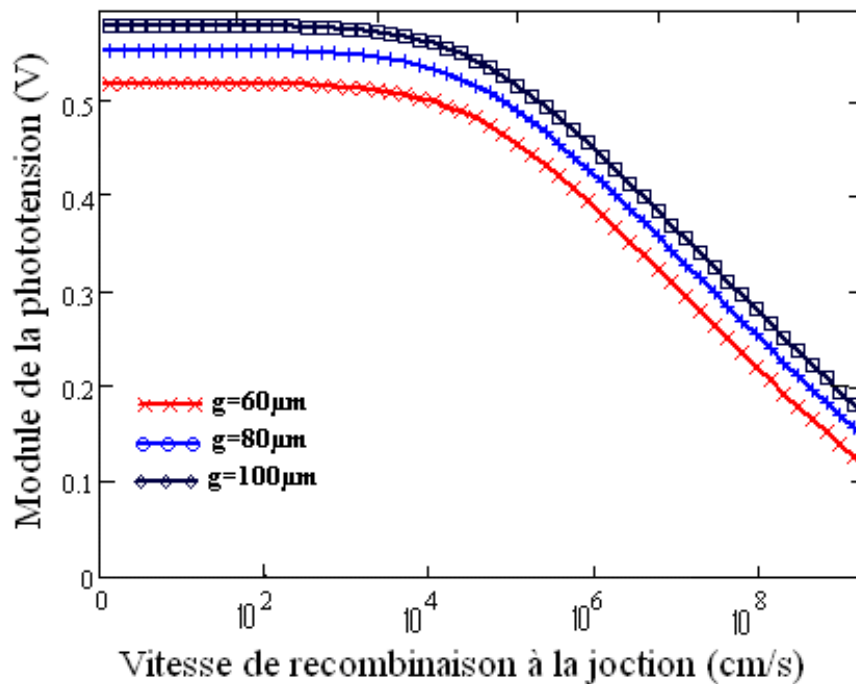


Figure II-9 : Profil du module de la phototension en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la taille de grain

$S_{gb}=50\text{cm/s}$; $f=2.10^4\text{Hz}$; $S_b=3.10^3\text{cm/s}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$; $D=26\text{cm}^2/\text{s}$

A travers cette figure, nous remarquons que le profil de la phototension pour une taille de grain présente deux parties :

- une première partie, correspondant aux faibles vitesses de recombinaison à la jonction $Sf < 10^2\text{cm/s}$ où la phototension est maximale et constante (V_{co}).
- une deuxième partie, où la phototension diminue considérablement pour atteindre un second palier correspondant à une valeur nulle : c'est une zone qui correspond au fonctionnement de la photopile en court circuit.

La figure nous montre que la phototension augmente lorsque la taille de grain augmente. Lorsque la taille de grain augmente, les effets recombinants diminuent. D'où une phototension plus importante pour les grandes tailles de grain.

II-4-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

Nous représentons à la figure II-10 le profil du module de la phototension en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

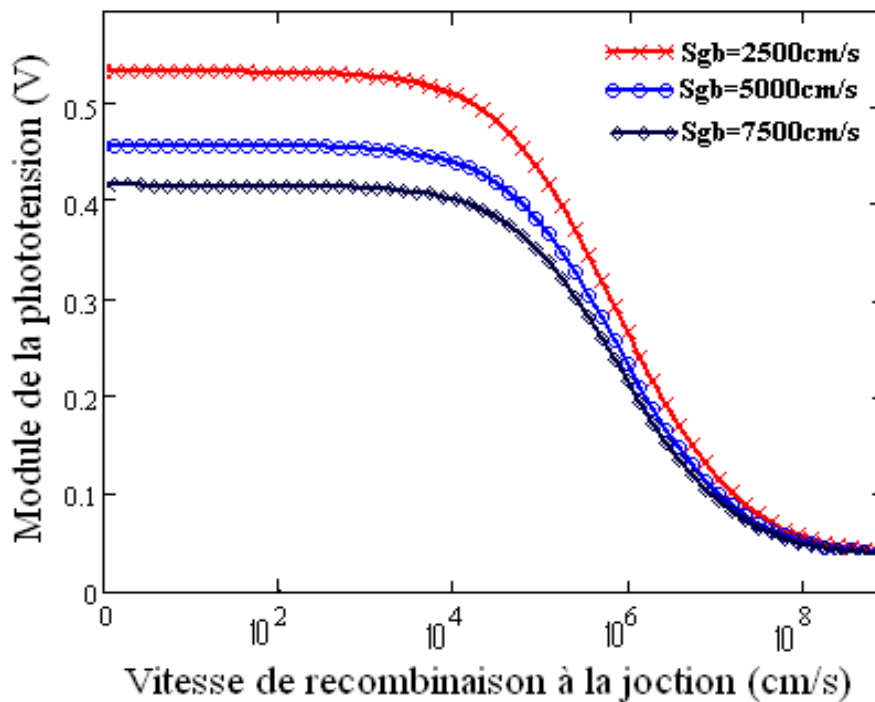


Figure II-10 : Profil du module de la phototension en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain
 $g=60\mu\text{m}$; $f=1, 6.104\text{Hz}$; $S_b=3.10^3\text{cm/s}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$; $D=26\text{cm}^2/\text{s}$

Nous remarquons que lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente la phototension diminue cela montre l'aspect négatif des joints de grain dans la photopile.

Après avoir donné, les expressions de la densité de photocourant et de la phototension, nous avons étudié l'influence de la taille de grain et de la vitesse de recombinaison aux joints de grain sur le profil de leurs modules.

Nous procédons à la détermination du courant de court circuit et de la phototension de circuit ouvert :

II-5 Photocourant de court circuit

Le photocourant de court-circuit est obtenu à partir de l'expression du photocourant (II-25) en faisant tendre la vitesse de recombinaison à la jonction S_f vers une limite très grande.

$$J_{cc} = [J_{ph}]_{S_f \rightarrow 10^6 \text{ cm/s}} \quad (\text{II-26})$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$J_{cc} = \frac{q}{D} \sum_k \sum_j \left\{ R_{kj} \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1-R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \left[\frac{L_{kj}^2 \exp(-\alpha(\lambda)H) (Sb - D\alpha(\lambda)) - L_{kj} Sb \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) - D \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + SbL_{kj}^2 \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} + \alpha(\lambda) \right] \right\} \quad (\text{II-27})$$

II-6 Phototension de circuit ouvert

La phototension de circuit ouvert est obtenue à partir de l'expression (II-24) en faisant tendre la vitesse de recombinaison à la jonction S_f vers zéro (photopile idéale à la jonction)

$$V_{co} = [V_{ph}]_{S_f \rightarrow 0} \quad (\text{II-28})$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$V_{co} = \frac{RT}{q} \ln \left[1 + \frac{1}{n_0} \sum_k \sum_j \left\{ \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1-R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \left[\frac{D^2 L_{kj} \alpha(\lambda) \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + SbL_{kj}^2 \alpha(\lambda) D \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) - DL_{kj} (D\alpha(\lambda) - Sb) \exp(-\alpha(\lambda)H)}{DL_{kj} Sb \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + D^2 \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} - 1 \right] \right\} \times \frac{4 \sin\left(C_k \frac{gx}{2}\right) \sin\left(C_j \frac{gy}{2}\right)}{C_k C_j} \right] \quad (\text{II-29})$$

CONCLUSION

Nous venons de faire une étude théorique de la photopile monofaciale en régime dynamique fréquentiel sous éclairage monochromatique. Dans ce travail nous avons analysé l'influence de la taille de grain et de la vitesse de recombinaison aux joints de grain sur la densité de porteurs minoritaires de charge, sur le photocourant, sur la phototension.

Il ressort de cette étude, une augmentation de la densité de porteurs minoritaires de charges, de la densité de photocourant et de la phototension avec l'augmentation de la taille de grain et une diminution de la densité de porteurs minoritaires de charges, de la densité de photocourant et de la phototension avec l'augmentation de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

Le chapitre suivant sera réservé à la détermination des paramètres électriques

**CHAPITRE III : DETERMINATION DES PARAMETRES ELECTRIQUES
D'UNE PHOTOPILE MONOFACIALE AU SILICIUM**

INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la détermination des paramètres électriques de la photopile monofaciale éclairée par une lumière monochromatique en modulation de fréquence, en utilisant la méthode de la spectroscopie d'impédance. Nous proposerons également des techniques de détermination des paramètres électriques. Nous étudierons aussi l'effet des tailles de grain sur les paramètres électriques de cette photopile monofaciale.

III-1 Impédance dynamique

L'impédance dynamique de notre modèle électrique est donnée par l'équation ci-dessous [15]:

$$Z_{ph} = \frac{V_{ph}}{J_{ph}} \quad \text{(III-1)}$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous intéresserons aux méthodes de détermination des paramètres électriques, en utilisant la représentation de Nyquist et les diagrammes de Bode de l'impédance dynamique.

III.2 Représentation de Nyquist

Le diagramme de Nyquist [16-20] est la représentation de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de la fonction complexe Z_{ph} . On reporte du complexe la partie réelle selon l'axe horizontal et la partie imaginaire selon l'axe vertical.

$$\text{Im}\left(Z_{ph}\right) = f\left(\text{Re}\left(Z_{ph}\right)\right) \quad \text{(III-2)}$$

Une étude du diagramme de Nyquist nous permet de déterminer la résistance série et la résistance shunt.

Ainsi le profil de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de l'impédance dynamique pour différentes valeurs de la taille de grain sera représenté.

Pour les photopiles de bonne qualité, Il faut que la résistance série soit faible et la résistance parallèle soit élevée [21].

a représentation de Nyquist de l'impédance dynamique de la photopile pour différentes valeurs de la taille de grain est donnée aux figures(III.1a) ; (III.1b) et(III.1c).

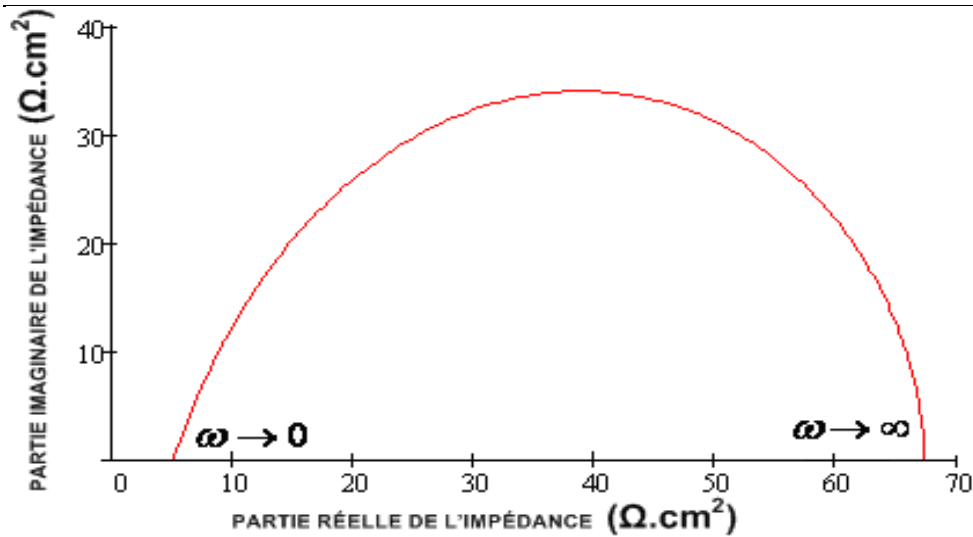


Figure III.1a Partie imaginaire en fonction de la partie réelle de l'impédance pour un éclairage par la face avant de la photopile ($S_{gb}=50\text{cm/s}$; $S_f=1000\text{cm/s}$; $S_b=1000\text{cm/s}$; $g=40\text{cm}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$)

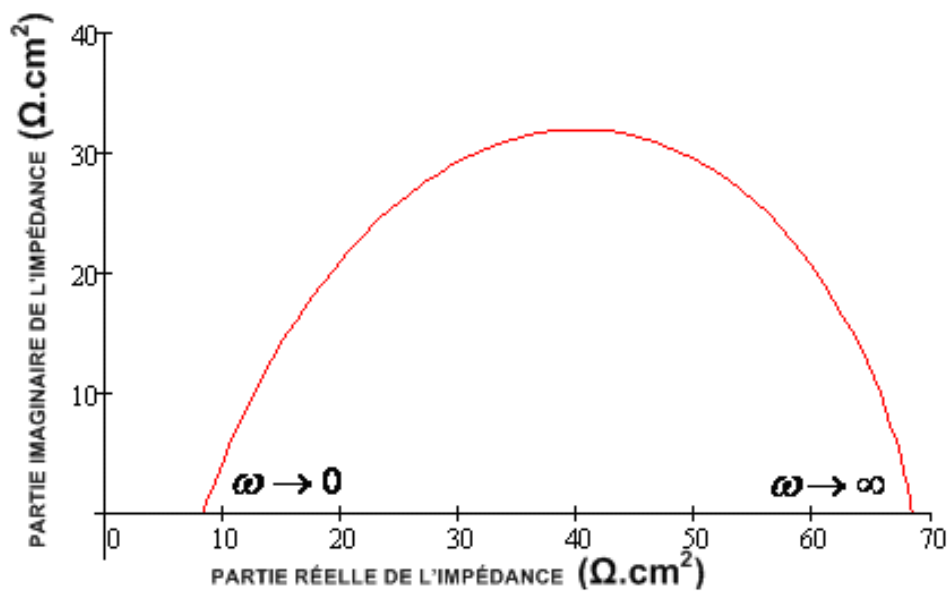


Figure III.1b Partie imaginaire en fonction de la partie réelle de l'impédance pour un éclairage par la face avant de la photopile ($S_{gb}=50\text{cm/s}$; $S_f=1000\text{cm/s}$; $S_b=1000\text{cm/s}$; $g=80\text{cm}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$)

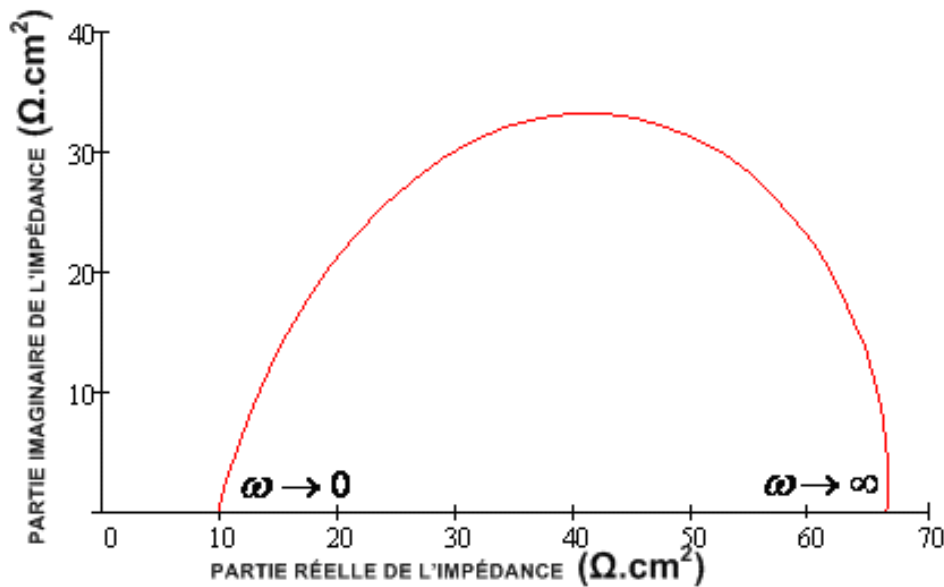


Figure III.1c : Partie imaginaire en fonction de la partie réelle de l'impédance pour un éclairage par la face avant de la photopile ($S_{gb}=50\text{cm/s}$; $S_f=1000\text{cm/s}$; $S_b=1000\text{cm/s}$; $g=120\text{cm}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$)

Nous obtenons des demi-cercles de centre $\left(\begin{matrix} \frac{R_{sh}}{2} + R_s \\ 0 \end{matrix} \right)$ et de rayon $\frac{R_{sh}}{2}$ en variant la pulsation

de ses valeurs les plus basses aux plus hautes. Pour les faibles valeurs de la pulsation la composante réelle de l'impédance (résistance) est égale à la somme de la résistance série et de la résistance parallèle et la composante imaginaire de l'impédance (réactance) tend vers zéro. Lorsque la pulsation $\omega \rightarrow \omega_0$ la partie

Imaginaire est égale à $\frac{R_{sh}}{2}$ et la partie réelle est égale $\frac{R_{sh}}{2} + R_s$, ce point correspond à un maximum sur les courbes.

Enfin pour les grandes valeurs de la pulsation ($\omega \rightarrow \infty$) la composante réelle de l'impédance est égale la résistance série et la composante imaginaire de l'impédance tend vers zéro.

On constate que pour les grandes valeurs de la pulsation la photopile a un comportement ohmique du fait que son impédance se résume seulement à sa partie résistive.

Dans le tableau (III.1) nous présentons des valeurs de la résistance série et shunt pour différentes valeurs de la taille de grain.

Taille de grain (μm)	R_s ($\Omega.\text{cm}^2$)	R_{sh} ($\Omega.\text{cm}^2$)
40	5	61,82
80	8,2	57,7
120	10	56,36

Tableau (III.1) : Valeurs des résistance série et résistance shunt d'une photopile pour différentes tailles de grain

On observe lorsque la taille de grain augmente, la résistance série augmente, par contre la résistance shunt diminue.

La représentation de Nyquist, nous a permis de déterminer la résistance série et la résistance shunt d'une photopile. Dans le paragraphe suivant nous allons déterminer la capacité de la photopile à partir du diagramme de Bode après avoir déterminé la pulsation de coupure (ω_c).

III.3 Diagramme de Bode du module de l'impédance et validation du modèle électrique

Le diagramme de Bode du module [18-20] est une méthode mise au point pour simplifier l'obtention des tracés de réponse en fréquence.

Il s'agit, dans notre travail d'adapter le concept de Bode aux tracés de l'amplitude de l'impédance de la photopile (en décibels) et de la phase de l'impédance (en degré) en fonction du logarithme de la fréquence angulaire.

$$A_{dB} = 20 \cdot \log(|Z_{ph}|) \quad \text{(III-3)}$$

A_{dB} Représente l'amplitude de l'impédance

$$\phi = \arg(Z_{ph}) \quad \text{(III-4)}$$

ϕ La phase de l'impédance III.4.1 Diagramme de Bode du module

III-3.1 Diagramme de Bode du module de l'impédance

III.3.1.1 Effet de la taille de grain

Le diagramme de Bode du module de l'impédance pour un éclairage de la face avant et pour différentes valeurs de la taille de grain est donné à la figure III.3.a

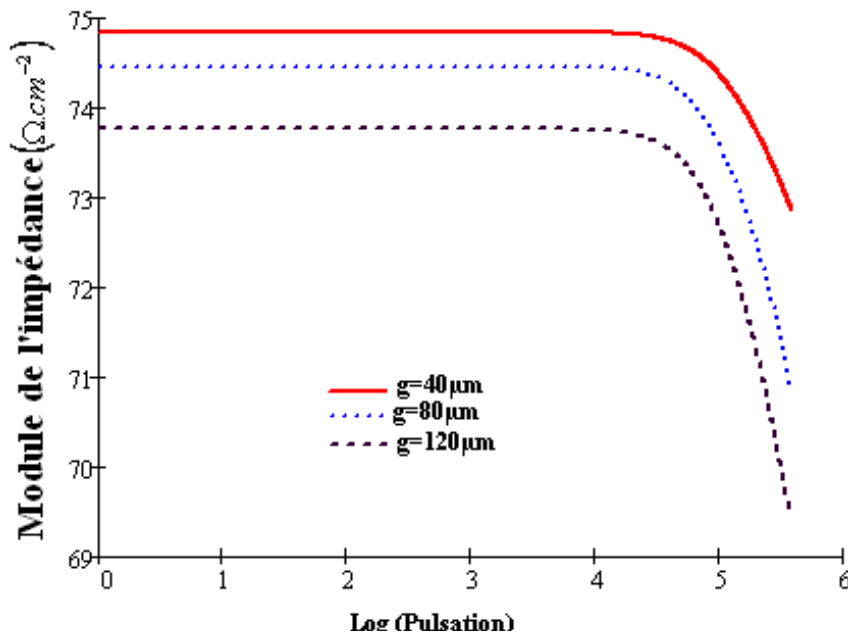


Figure III-2a : Module de l'impédance en fonction de Log (Pulsation) pour différentes valeurs de la taille de grain

$$\lambda = 0.8 \mu\text{m} ; S_{gb} = 2500 \text{cm/s} ; S_b = 3000 \text{cm/s} ; S_f = 3000 \text{cm/s}$$

Pour les pulsations comprises dans l'intervalle $0 < \omega < \omega_c$, le module de l'impédance est indépendant de la fréquence. Et pour les valeurs de la pulsation telle que $\omega > \omega_c$ le module de l'impédance décroît avec la pulsation. Ainsi l'intersection des prolongements de chacune des deux parties linéaires de la courbe permet d'obtenir la fréquence angulaire de coupure ω_c . Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la pulsation de coupure en fonction de la taille de grain.

Nous présenterons dans le tableau III-2 les valeurs de la pulsation de coupure en fonction de la taille de grain.

Taille de grain g (μm)	Pulsation de coupure (rad/s)
40	$5,62 \cdot 10^4$
80	$4,36 \cdot 10^4$
120	3, 98.104

Le tableau III-2 : Pulsation de coupure pour différentes valeurs de la taille de grain

Les résultats obtenus dans le tableau (III.2) révèlent que la pulsation coupure diminue avec la taille de grain.

III-4-1-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain

Le diagramme de Bode du module de l'impédance pour un éclairage de la face avant et pour différentes valeurs de la taille de grain est donné à la figure III.3.b

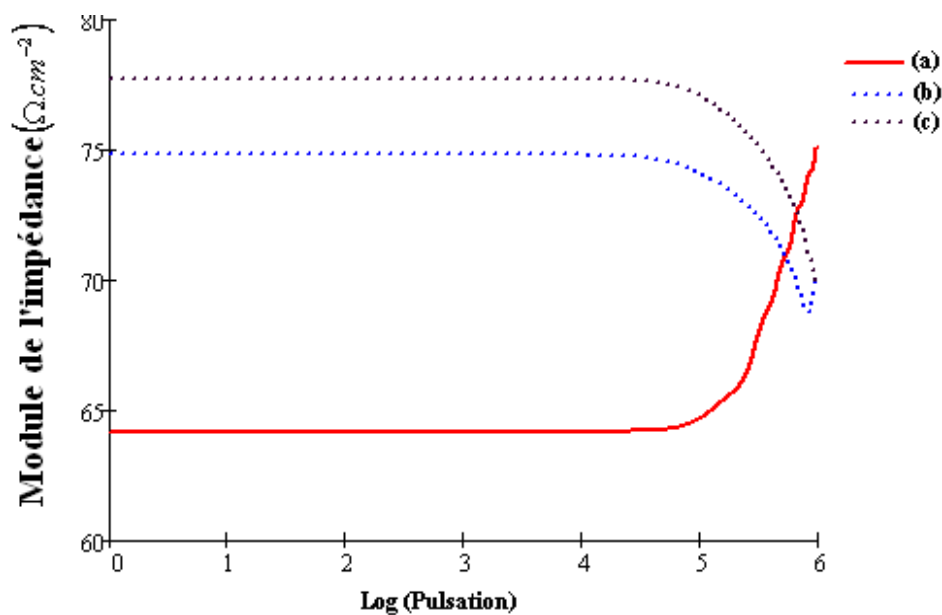


Figure III-2b : Module de l'impédance en fonction de Log (Pulsation) pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain $g=60\mu\text{m}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$; $S_b=3000\text{cm/s}$; $S_f=3000\text{cm/s}$

Pour les pulsations comprises dans l'intervalle $0 < \omega < \omega_c$, le module de l'impédance est indépendant de la fréquence et ceci est valable pour les différentes valeurs de la taille de grain. Pour les valeurs de la pulsation telles que $\omega > \omega_c$, le module de l'impédance croît avec

la pulsation lorsque $S_{gb}=50\text{cm/s}$, le module de l'impédance décroît avec la pulsation lorsque $S_{gb}=2500\text{cm/s}$ et $S_{gb}=5000\text{cm/s}$.

L'intersection des prolongements de chacune des deux parties linéaires de la courbe, nous permet d'obtenir la fréquence angulaire de coupure ω_c . Nous présenterons dans le tableau

III-3 les valeurs de la pulsation de coupure en fonction de la vitesse de recombinaison aux joints de grain.

Vitesse de recombinaison aux joints de grain (cm/s)	Pulsation de coupure
50	$9,53.10^4$
2500	$1,44.10^5$
5000	$2,13.10^5$

Le tableau III-3 : fréquence de coupure pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain

Les résultats obtenus dans le tableau (III.3) révèlent que la fréquence coupure augmente avec la vitesse de recombinaison aux joints de grain

La fréquence de coupure nous permet de déterminer la capacité de la photopile en connaissant la résistance shunt grâce à la relation (III-5) [22] :

$R_{sh} \cdot C = \frac{2\pi}{\omega_c}$	(III-5)
--	----------------

Nous représentons dans le tableau (III-4) les valeurs de la capacité d'une photopile polarisée sous une lumière monochromatique pour différentes valeurs de la taille de grain.

Taille de grain g (μm)	C ($\mu\text{F.cm}^{-2}$)
40	1,8
80	2.5
120	2.8

Le tableau III-4 : valeurs de la capacité d'une photopile polarisée sous une lumière monochromatique pour différentes valeurs de la taille de grain

III-3.2 Diagramme de Bode de la phase de l'impédance

III.3.2.1 Effet de la taille de grain

Le diagramme de Bode de la phase de l'impédance pour un éclairage de la face avant et pour différentes valeurs de la taille de grain est donné à la figure III.3.a

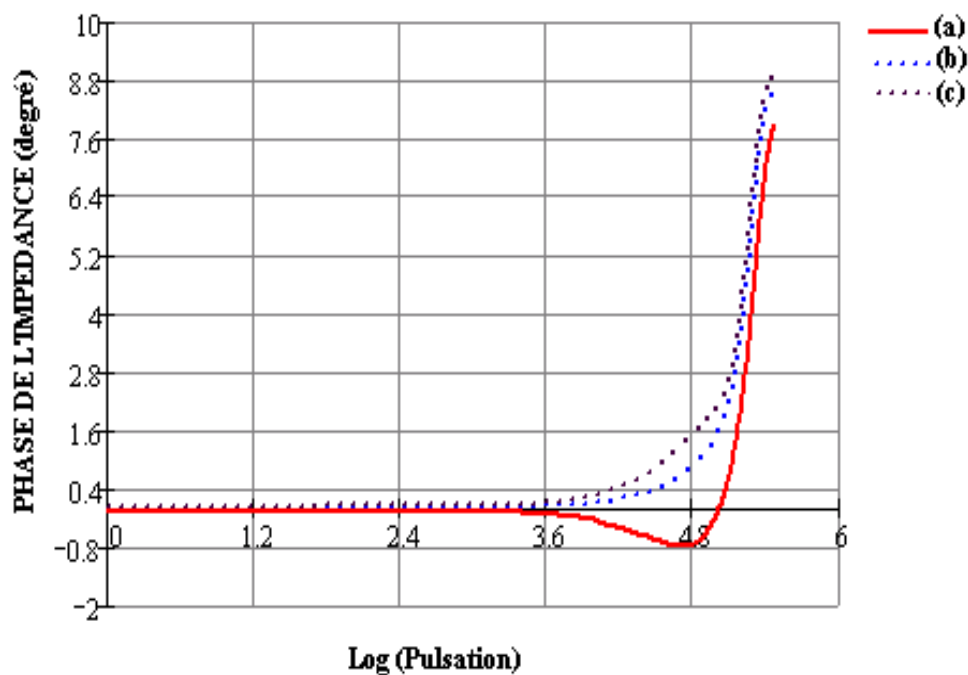


Figure III-3a : Phase de l'impédance en fonction de Log (Pulsation) pour différentes valeurs de la taille de grain

$\lambda = 0.8\mu\text{m}$; $S_{gb} = 2500\text{cm/s}$; $S_b = 3000\text{cm/s}$; $S_f = 3000\text{cm/s}$ (a) $g = 40\mu\text{m}$; (b) $g = 80\mu\text{m}$; (c) $g = 120\mu\text{m}$

La représentation de Bode de la phase de l'impédance en fonction du logarithme de la fréquence pour différentes valeurs de la taille de grain, montre qu'il existe une fréquence en dessous de laquelle la phase est nulle quelque soit la taille de grain. Dans cette zone les phénomènes inductifs et capacitifs sont nuls.

Si la fréquence est supérieure à cette valeur, l'un des ces phénomènes est prédominant selon la taille de grain. Ainsi nous avons

- pour $g = 40\mu\text{m}$, la phase de l'impédance est négative (phénomènes capacitifs).
- pour $g = 80\mu\text{m}$ et $g = 120\mu\text{m}$, la phase de l'impédance est positive (phénomènes inductifs).

On constate que lorsque la taille de grain augmente les phénomènes inductifs prédominent.

III-3-2-2 Effet de la vitesse de recombinaison aux joints de grain

Le diagramme de Bode de la phase de l'impédance pour un éclairage de la face avant et pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain est donné à la figure III.3.b

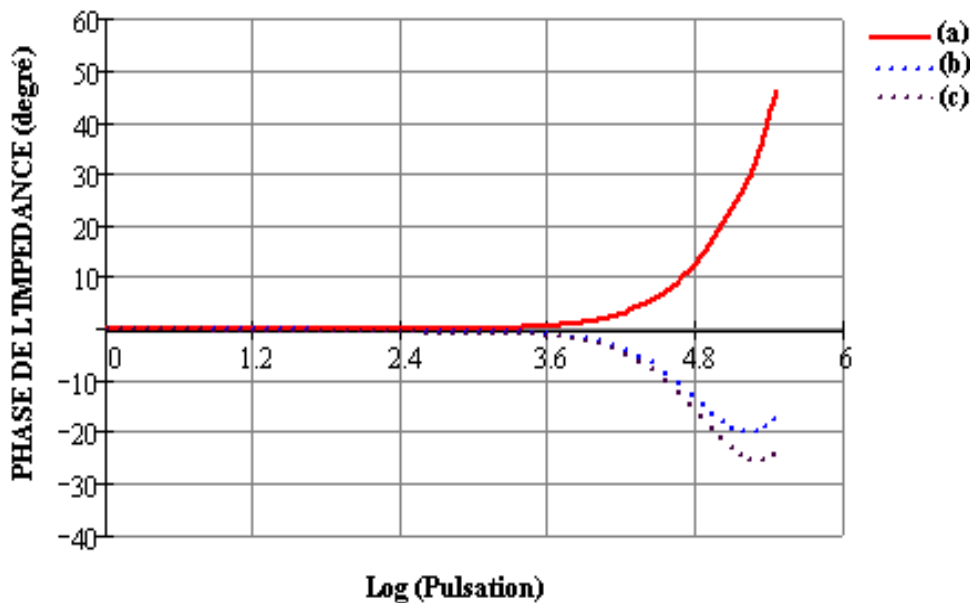


Figure III-3b : Phase de l'impédance en fonction de Log (Pulsation) pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain $g=60\mu\text{m}$; $\lambda=0.8\mu\text{m}$; $S_b=3000\text{cm/s}$; $S_f=3000\text{cm/s}$
 (a) $S_{gb}=50\text{cm/s}$; (b) $S_{gb}=2500\text{cm/s}$ (c); $S_{gb}=5000\text{cm/s}$

La représentation de Bode de la phase de l'impédance en fonction du logarithme de la fréquence pour différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain, montre qu'il existe une fréquence en dessous de laquelle la phase est nulle quelque soit la taille de grain. Dans cette zone les phénomènes inductifs et capacitifs sont nuls.

Si la fréquence est supérieure à cette valeur, l'un des ces phénomènes est prédominant selon la taille de grain. C'est ainsi que :

- pour $S_{gb}=50\text{cm/s}$, la phase de l'impédance est positive (phénomènes inductifs).
- pour $S_{gb}=2500\text{cm/s}$ et $S_{gb}=5000\text{cm/s}$ la phase de l'impédance est négative (phénomènes capacitifs).

On constate que lorsque la vitesse de recombinaison aux joints de grain augmente les phénomènes capacitifs prédominent.

A partir des observations notées ci- dessus, nous proposons le model électrique équivalent suivant

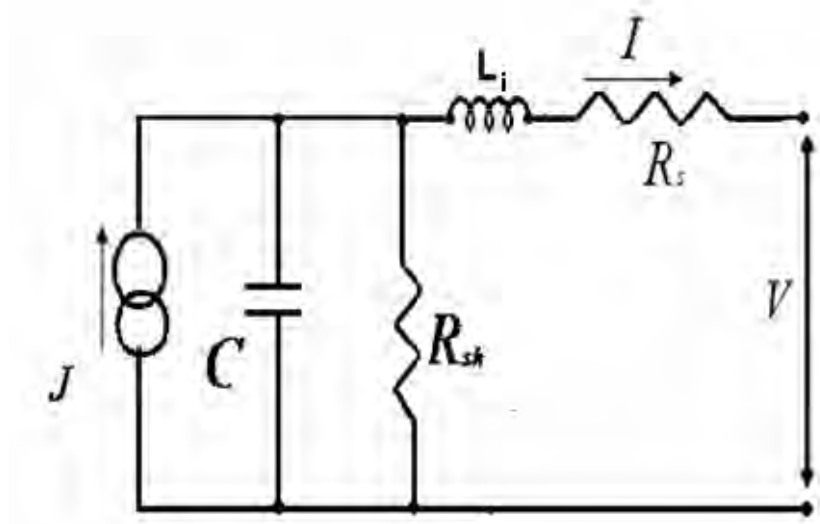


Figure III.4 : circuit équivalent

- R_{sh} est la résistance shunt qui modélise les courants de fuite existant au bord de la structure et l'ensemble des défauts au voisinage de la zone de charge d'espace (dislocation, joints de grains).
- R_s modélise les pertes résistives au sein de la photopile et donc des métallisations.
- C est la capacité équivalente
- L_i modélise les effets inductifs

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre, une étude théorique de détermination des paramètres électriques d'une photopile monofaciale au silicium en régime dynamique fréquentiel, sous éclairage monochromatique. Les paramètres électriques tel que la résistance série, la résistance shunt et la capacité ont été déterminés à partir de la méthode de la spectroscopie d'impédance. Cette étude nous a permis de constater que la résistance série et la capacité augmente avec la taille de grain alors que la résistance shunt diminue. L'augmentation de la résistance série reflète un accroissement de la résistivité du matériau semi-conducteur.

De plus, L'augmentation de la résistance shunt conduit à une diminution du courant de fuite dans la photopile.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons présenté une étude en modélisation à trois dimensions d'une photopile mono faciale en régime dynamique fréquentiel sous éclairage monochromatique. La densité de porteurs minoritaires de charge dans la base de la photopile est obtenue en résolvant l'équation de continuité. Son évolution en fonction de la profondeur dans la base a été présentée pour différentes valeurs de la taille de grain et différentes valeurs de la vitesse de recombinaison aux joints de grain pour un éclairage par la face avant.

L'influence de la taille de grain et de la vitesse de recombinaison aux joints de grain sur la densité de courant et la phototension en fonction de la vitesse de recombinaison à la jonction a été étudiée.

Le photocourant de court-circuit, la phototension de circuit ouvert et l'expression de l'impédance dynamique de la photopile ont été établis.

Ceci nous a permis de déterminer les paramètres électriques telles que la résistance série, la résistance shunt et la capacité équivalente de la photopile à partir de la méthode de la spectroscopie d'impédance.

Notre étude a été faite en éclairant uniquement la face avant. On peut envisager la détermination des paramètres électriques pour un éclairage par la face arrière ou simultanément les deux faces de la photopile.

Dans notre étude, la contribution de l'émetteur a été négligée car elle n'excède pas 1% [23], on peut donc envisager une étude où la contribution de l'émetteur et la zone de charge d'espace ne sera pas négliger.

Nous pouvons aussi envisager d'autres études par rapport à l'effet du champ magnétique et l'effet du champ électrique de polarisation.

Cette même étude pourrait être faite en considérant une photopile bifaciale à jonction verticale en présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique.

Nous pouvons étendre à d'autres longueurs d'onde et voir l'effet sur les paramètres électriques.

Cette même étude pourrait être faite en considérant une photopile bifaciale à jonction verticale en présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique.

Nous pouvons étendre à d'autres longueurs d'onde et voir l'effet sur les paramètres électriques. Cette même étude pourrait être faite avec la lumière excitatrice polychromatique puis voir l'effet sur les paramètres électriques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] B. Mazhari and H. Morkoç

J. Appl. Phys. 73(11), 1993, pp. 7509 – 7514.

[2] H. El Ghitani and S. Martinuzzis

J. Appl. Phys. 66(4), 1989, pp. 1717 – 1726.

[3] [4] G SISSOKO, C. MUSERUKA, A.CORREA, I. GAYE, A. L. NDIAYE.

World renewable energy congress (1996) part III, pp 1487 – 1490

[5] A.Barry, Thèse doctorat de troisième cycle, université de caen, 1984

[6]-H.L.DIALLO, A. Seidou MAIGA, A. WEREME and G.SISSOKO

Eur Phys J App Phys. 42 ,203-211 (2008)

[7] Eiichi Suzuki, hitoshi Kawanami, And Isao Sakata

2nd World Conference and Exhibition on Photovoltaic Solar Energy Con
Version.6-10 july 1998 (Vienna,Austria), pp.42-46

[8] R. Anil Kumar, M. S. Suresh and J. Nagaraju

IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. 48, No.9,(2001) pp.1177-1179

[9] D. Chenvidhya, K. Kirtikara, C. Jivacate

Solar Energy Materials and Solar Cells 80 (2003) 459-464

[10] D.Chenvidhya, K: Kirikara, C. Jivacate

Solar Energy Materials and Solar Cells 86 (2005) 243-251

[11] Measurement of solar Cell AC parameters using Impedance Spectroscopy

**A Thesis Submitted of the Degree of Master of Science (Engg.) In Faculty of Engineering
by R. Anil Kumar. Departement of Instrumentation Indian Institue of Science INDIAN
(2005), volume 85, issue 3 pp.397-406**

[12] M. ZOUNGRANA, I. LY, B. ZOUMA, F. I. BARRO, G. SISSOKO

3D Study of Bifacial Silicon Solar Cell Under Intense Light Concentration and Under
External constant Magnetic Field: Effect of Magnetic Field and Base Depth on excess
Minority Carrier Generation. J. Sci. Vol 7, N°4 (2007) 73-81

[13] H. EL GHITANI and S. MARTINUZZI

J. Appl. Phys., Vol 66, No. 4, 1989, pp. 1717-1726

[20] J.DUGAS

Solar Energy Materials and Solar Cells, 32 (1994), pp.71-88

[15] **A.J. Steckl and S.P. Sheu**

Solid. State Electronics Vol.23, 21 October, 1979, pp. 715 – 720.

[16] **R. Anil Kumar, M. S. Suresh and J. Nagaraju**

IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. 48, No.9, (2001) pp.1177-1179

[17] **D. Chenvidhya, K. Kirtikara, C. Jivacate**

Solar Energy Materials and Solar Cells 80 (2003) 459-464

[18] **Lathi, Bhagwandas Pannalal: SIGNALS, SYSTEMS AND CONTROLS**

[19] <http://www.gel.ulaval.ca/~odin/Chap20.doc> **1.html#HEADING1**

[20] <http://www-hadoc.ensieg.inpg.fr/hadoc/continuu/n21/r21-01.htm>

[21] **G.SISSOKO, B. DIENG, A. CORREA, M. ADJI, D. AZZILINO**

Silicon Solar cell Space region width determination by a study in modelling

Proc world Renewable Energy. pp 1852-1855 Florence (Italy), 1998

[22] **A. DIOUM, A. THIAM, L.OULD HABIBOULAHY, A. WEREME, A. DIAO, G. SISSOKO**

Journal des Sciences (2007), vol 7, N° 3 (2007) page 44

[23] **S. Madougou, B. Dieng, A. Diao, I. F. Barro, Nzonzolo, G. Sissoko**

Electrical parameters for bifacial silicon solar cell study in modelling:

Capacitance and space charge region width determination

Journal des Sciences pour l'ingénieur, (2005). pp.34-39

ANNEXE MATHEMATIQUE

I- Densité de porteurs minoritaires de charge au niveau de la base

I-1-Equation de continuité des porteurs minoritaires de charge

$$\frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial(x, y, z, t)}{L^2} - \frac{1}{D} \cdot G(z, t) + \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial \delta(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Posons :

$$\tau = \frac{L^2}{D}$$

L'expression (1) devient :

$$\frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{\tau}{L^2} \cdot \frac{\partial \delta(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{G(z, t)}{D} \quad (2)$$

$\delta(x, y, z, t)$ Représente la densité de porteurs minoritaires dans la base et qui s'écrit de la forme :

$$\delta(x, y, z, t) = \delta(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (3)$$

avec $\delta(x, y, z)$ représente la composante spatiale et $e^{i\omega t}$ la composante temporelle.

$G(z, t)$ Représente le taux de génération des porteurs donné par l'expression :

$$G(z, t) = g(z) e^{i\omega t} \quad (4)$$

où $g(z)$ la composante spatiale et $e^{i\omega t}$ celle temporelle

Pour un éclairage par la face avant :

$$g(z) = \alpha(\lambda) I_0(\lambda) (1 - R(\lambda)) \exp(-\alpha(\lambda) z) \quad (5)$$

$\alpha(\lambda)$ Est le coefficient d'absorption à la longueur d'onde ; $R(\lambda)$ est le coefficient de réflexion du matériau à la longueur d'onde

D Est le coefficient de diffusion

τ Est la durée de vie moyenne des porteurs de charge

$I_0(\lambda)$ Est la puissance incidente de la lumière à la longueur d'onde

z Est la profondeur de pénétration de la lumière

Cependant en introduisant (3) et (4) dans (2) nous avons :

$$\frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta(x, y, z)}{\partial z^2} - \frac{\delta(x, y, z)}{L^2(\omega)} = -\frac{g(z)}{D} \quad (6)$$

Avec

$$L^2(\omega) = \frac{L^2}{1 + i\omega\tau} \quad (7)$$

$L(\omega)$ Est la longueur de diffusion complexe

I-2-Solution de l'équation différentielle :

La solution générale de l'équation s'écrit sous la forme :

$$\delta(x, y, z) = \sum_k \sum_j Z_{kj}(z) \cos(C_k \cdot x) \cos(C_j \cdot y) \quad (8)$$

Conditions limites aux joints de grains

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=\pm \frac{gx}{2}} = \pm \frac{Sgb}{D} \delta\left(\pm \frac{gx}{2}, y, z\right) \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial y} \right]_{y=\pm \frac{gy}{2}} = \pm \frac{Sgb}{D} \delta\left(x, \pm \frac{gy}{2}, z\right) \quad (10)$$

En remplaçant $\delta(x, y, z)$ par son expression (8) nous obtenons les équations transcendantes :

$$C_k \cdot \tan\left(C_k \cdot \frac{gx}{2}\right) = \frac{Sgb}{D} \quad (11)$$

$$C_j \cdot \tan\left(C_j \cdot \frac{gy}{2}\right) = \frac{Sgb}{D} \quad (12)$$

Expression de Z_{kj}

Remplaçons dans (6) $\delta(x, y, z)$ par son expression, puis multiplions chaque membre de l'égalité par $\cos(C_n \cdot x) \cdot \cos(C_m \cdot y)$. utilisons le fait que les fonctions $\cos(C_n \cdot x)$ et $\cos(C_m \cdot y)$ sont orthogonales c'est-à-dire :

$$\int_{-\frac{gx}{2}}^{+\frac{gx}{2}} \cos(C_k \cdot x) \cdot \cos(C_n \cdot x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } (k \neq n) \\ \frac{\sin(C_k \cdot gx) + C_k \cdot gx}{2C_k} & \text{si } (k = n) \end{cases} \quad (13)$$

Et de même pour les fonctions $\cos(C_j \cdot y) \cdot \cos(C_m \cdot y)$

Nous auront finalement Z_{kj} qui est solution de :

$$\frac{\partial^2 Z_{kj}}{\partial z^2} - \frac{1}{L_{kj}^2} \cdot Z_{kj} = -\frac{g(z)}{D_{kj}} \quad (14)$$

avec :

$$\frac{1}{L_{kj}^2} = C_k^2 + C_j^2 + \frac{1}{L^2(\omega)} \quad \text{Et} \quad \frac{1}{D_{kj}} = \frac{16 \cdot \sin\left(C_k \cdot \frac{gx}{2}\right) \cdot \sin\left(C_j \cdot \frac{gy}{2}\right)}{D \cdot (\sin(C_k \cdot gy) + C_k \cdot gx)(\sin(C_j \cdot gy) + C_j \cdot gy)}$$

La solution générale de (14) est :

$$Z_{kj}(z) = Z_1(z) + Z_2(z) \quad (15)$$

$Z_1(z)$ Est la solution particulière de l'équation sans second membre :

$$Z_1(z) = A_1 \cdot \cosh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) + B_1 \cdot \sinh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) \quad (16)$$

$Z_2(z)$ est la solution générale de l'équation avec second membre sous la forme :

$$Z_2(z) = \Omega \cdot \exp(-\alpha(\lambda) \cdot z) \quad (17)$$

En introduisant (5) et (17) dans (14) nous avons :

$$\Omega = -\frac{I_0(\lambda) \cdot \alpha(\lambda) \cdot (1 - R(\lambda)) \cdot L_{kj}^2}{D_{kj} \cdot (\alpha^2(\lambda) \cdot L_{kj}^2 - 1)} \text{ en remplaçant dans (17) puis (16) et (17) dans (15) nous}$$

avons :

$$Z_{kj} = A_1 \cdot \cosh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) + B_1 \cdot \sinh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) - \frac{I_0(\lambda) \cdot \alpha(\lambda) \cdot (1 - R(\lambda)) \cdot L_{kj}^2}{D_{kj} \cdot (\alpha^2(\lambda) \cdot L_{kj}^2 - 1)} \cdot \exp(-\alpha(\lambda) \cdot z) \quad (18)$$

Finalement l'expression de la densité des porteurs minoritaires est :

$$\delta(x, y, z) = \left[\sum_k \sum_j \left\{ A_1 \cosh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{z}{L_{kj}}\right) - \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1 - R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha^2(\lambda) L_{kj}^2 - 1)} \exp(-\alpha(\lambda) z) \right\} \times \cos(C_k x) \cos(C_j y) \right] \quad (19)$$

A_1 et B_1 sont obtenues à l'aide des équations aux conditions limites (20) et (21) en remplaçant $\delta(x, y, z)$ par son expression (19).

Condition limite à la jonction

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{Sf}{D} \delta(x, y, 0) \quad (20)$$

Condition limite à la face arrière

$$\left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=H} = \frac{Sb}{D} \delta(x, y, H) \quad (21)$$

Sf et Sb sont les vitesses de recombinaisons respectives à la jonction et à la face arrière.

Pour tout calcul fait on trouve :

$$A_1 = \frac{\frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1 - r(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha^2(\lambda) L_{kj}^2 - 1)} \left\{ \left[L_{kj}^2 Sb \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) \right] (Sf + D\alpha(\lambda)) \right.}{\left. + DL_{kj} e^{-\alpha(\lambda)H} (Sb - D\alpha(\lambda)) \right\}}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) (Sf + Sb) + (D^2 + SfSbL_{kj}^2) \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} \quad (22)$$

$$B_1 = \frac{\frac{I_0(\lambda)\alpha(\lambda)(1-r(\lambda))L_{kj}^2}{D_{kj}(\alpha^2(\lambda)L_{kj}^2-1)} \left\{ \begin{aligned} & \left[L_{kj}^2 Sb \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + DL_{kj} \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) \right] (-Sf - D\alpha(\lambda)) \\ & + L_{kj}^2 Sfe^{-\alpha(\lambda)H} (Sb - D\alpha(\lambda)) \end{aligned} \right\}}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) (Sf + Sb) + (D^2 + SfSbL_{kj}^2) \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} \quad (23)$$

II- Photocourant

II-1-Densité de photo courant :

La densité de photo courant est obtenue en utilisant la loi de FICK en résolvant l'équation de transport des porteurs minoritaires donnée par :

$$J_{ph} = \frac{qD}{g_x g_y} \int_{-\frac{g_x}{2}}^{+\frac{g_x}{2}} \int_{-\frac{g_y}{2}}^{+\frac{g_y}{2}} \left[\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0} dx dy \quad (24)$$

Avec q la charge de l'électron

Remplaçons l'expression (19) dans (24) on trouve :

$$J_{ph} = qD \sum_k \sum_j R_{kj} \left(\frac{B_1}{L_{kj}} + \frac{I_0(\lambda)\alpha(\lambda)^2(1-R(\lambda))L_{kj}^2}{D_{kj}(\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \right) \quad (25)$$

Où :

$$R_{kj} = \frac{4 \sin\left(C_k \frac{g_x}{2}\right) \sin\left(C_j \frac{g_y}{2}\right)}{g_x g_y \cdot C_k C_j}$$

I-2-Densité de photo courant de court circuit :

La densité de photo courant de court circuit est donnée par l'expression :

$$J_{cc} = [J_{ph}] \text{ lorsque } Sf \succ 10^6$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$J_{cc} = \frac{q}{D} \sum_k \sum_j \left\{ R_{kj} \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1-R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \frac{\left[L_{kj}^2 \exp(-\alpha(\lambda)H) (Sb - D\alpha(\lambda)) - L_{kj} Sb \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) - D \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) \right]}{DL_{kj} \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + SbL_{kj}^2 \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)} + \alpha(\lambda) \right\} \quad (26)$$

III- Phototension :

III-1- Densité de photo tension :

L'expression de la densité de photo tension est donnée par la relation de Boltzmann :

$$V_1 = \frac{KT}{q} \ln \left[1 + \frac{1}{n_0} \int_{-\frac{gx}{2}}^{+\frac{gx}{2}} \int_{-\frac{gy}{2}}^{+\frac{gy}{2}} \delta(x, y, 0) dx dy \right] \quad (27)$$

Avec :

$$n_0 = \frac{n_i^2}{N}$$

K est la constante de Boltzmann

T est la température absolue

q est la charge de l'électron

n_i est la densité des porteurs intrinsèques

N est le taux de dopage des impuretés dans la base

En introduisant la relation (19) dans (27) nous obtenons :

$$V_1 = \frac{KT}{q} \ln \left[1 + \frac{1}{n_0} \sum_k \sum_j \left(A_1 - \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1-R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \right) \times \frac{4 \sin\left(C_k \frac{gx}{2}\right) \sin\left(C_j \frac{gy}{2}\right)}{C_k C_j} \right] \quad (28)$$

III-2-Phototension en circuit ouvert :

La photo tension en circuit ouvert est obtenue à partir de l'expression (28) en faisant tendre Sf vers zéro :

$$V_{co} = [V_1]_{Sf \rightarrow 0}$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$V_{co} = \frac{RT}{q} \ln \left[1 + \frac{1}{n_0} \sum_k \sum_j \left\{ \frac{I_0(\lambda) \alpha(\lambda) (1 - R(\lambda)) L_{kj}^2}{D_{kj} (\alpha(\lambda)^2 L_{kj}^2 - 1)} \left[\frac{D^2 L_{kj} \alpha(\lambda) \cosh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right) + Sb L_{kj}^2 \alpha(\lambda) D \sinh\left(\frac{H}{L_{kj}}\right)}{-DL_{kj} (D\alpha(\lambda) - Sb) \exp(-\alpha(\lambda) H)} - 1 \right] \right. \right. \right. \quad (29)$$

$$\left. \left. \left. \times \frac{4 \sin\left(C_k \frac{gx}{2}\right) \sin\left(C_j \frac{gy}{2}\right)}{C_k C_j} \right\} \right]$$

IV- Calcul de l'impédance dynamique d'une cellule solaire et méthode de détermination des paramètres électriques

Schémas électriques équivalent de la cellule

Une première représentation est donnée par le modèle à une diode en régime dynamique (Figure 1)

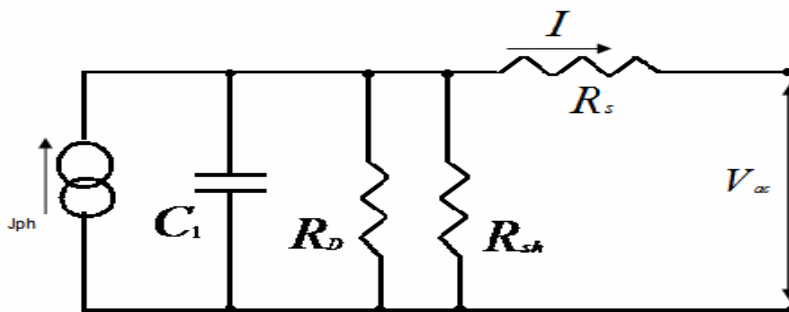


Figure 1 : circuit équivalent du modèle à une diode sous illumination en régime dynamique.

$$C = C_1 = C_D + C_T$$

Cette représentation est donnée par le modèle à deux diodes en régime dynamique (Figure 2), donne une description plus complète de la photopile

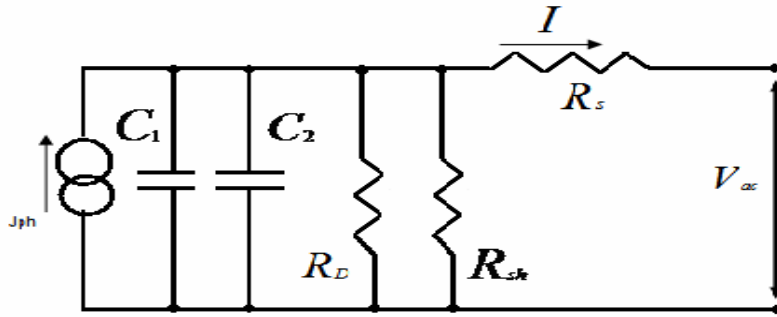


Figure 2 : circuit équivalent du modèle à deux diodes sous illumination en régime dynamique.

$$C = C_1 + C_2$$

Méthode de calcul de l'impédance dynamique - Méthode des complexes

Résistance	$Z_R = R$
Capacité	$Z_C = -\frac{i}{\omega \cdot c}$
inductance	$Z_L = i \cdot \omega \cdot L$

$$\frac{1}{Z_R} = \frac{R_{Sh} + R_D}{R_{Sh} \cdot R_D}$$

$$\frac{1}{Z_C} = i \cdot \omega \cdot C \tag{30}$$

$$Z = R_S + \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right)^{-1}$$

$$Z = R_S + \frac{R_D \cdot R_{Sh} \cdot (R_{Sh} + R_D)}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} - \frac{i \cdot \omega \cdot (R_{Sh} \cdot R_D)^2 \cdot C}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} \tag{31}$$

Partie réelle

$$R_{pv} = R_S + \frac{R_D \cdot R_{Sh} \cdot (R_{Sh} + R_D)}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} \tag{32}$$

Partie imaginaire

$$X_{pv} = -\frac{i \cdot \omega \cdot (R_{Sh} \cdot R_D)^2 \cdot C}{(R_{Sh} + R_D)^2 + (\omega \cdot R_D \cdot R_{Sh} \cdot C)^2} \tag{33}$$

Etude des extremumsSi $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S + \frac{R_D \cdot R_{Sh}}{(R_{Sh} + R_D)} \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S + \frac{R_D \cdot R_{Sh}}{(R_{Sh} + R_D)}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Si $R_{Sh} \gg R_D$ on a alors

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S + R_D \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S + R_D
 \end{aligned} \tag{35}$$

Si $R_{Sh} \ll R_D$ on a alors

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S + R_{Sh} \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S + R_{Sh}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Si $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S
 \end{aligned} \tag{37}$$

Si $R_{Sh} \gg R_D$ on a alors

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S
 \end{aligned} \tag{38}$$

Si $R_{Sh} \ll R_D$ on a alors

$$\begin{aligned}
 R_{pv} &\rightarrow R_S \\
 X_{pv} &\rightarrow 0 \\
 Z &= R_S
 \end{aligned} \tag{39}$$

Méthode de détermination des paramètres électriques

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \text{Re}(\omega) + i \cdot \text{Im}(\omega) \\ Z(\omega) &= A(\omega) \cdot e^{i \cdot \phi(\omega)} \\ A(\omega) &= |Z(\omega)| \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left((\text{Re}(\omega))^2 + (\text{Im}(\omega))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}\right) = \arg(Z(\omega)) \end{aligned} \tag{41}$$

On suppose que l'impédance peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{K}{1 + i \cdot \tau_0 \cdot \omega} \\ \text{Re}(\omega) &= \frac{K}{1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2} \\ \text{Im}(\omega) &= -\frac{K \cdot \tau_0 \cdot \omega}{1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2} \end{aligned} \tag{42}$$

On a :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{K}{(1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2)} \\ \phi(\omega) &= -\text{arctg}(\tau_0 \cdot \omega) \end{aligned} \tag{43}$$

Diagramme de Bode

$$\begin{aligned} A_{dB}(\omega) &= 20 \cdot \log(A(\omega)) \\ A_{dB}(\omega) &= 20 \cdot \log(K) - 10 \cdot \log\left(1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2\right) \end{aligned} \tag{44}$$

Etudes des asymptotes

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(K) \tag{45}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{\tau_0}\right) - 20 \cdot \log(\omega) \tag{46}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{\tau_0}} A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(\omega) - 10 \cdot \log(2) = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right) \quad (47)$$

Représentation de Nyquist

$$x = \operatorname{Re}(\omega) = \frac{K}{1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2} \quad (48)$$

$$y = \operatorname{Im}(\omega) = -\frac{K \cdot \tau_0 \cdot \omega}{1 + (\tau_0 \cdot \omega)^2} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} (\tau_0 \cdot \omega)^2 &= \frac{K}{x} - 1 & \Rightarrow & \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2 \\ y &= -x \cdot \tau_0 \cdot \omega \end{aligned}$$

La représentation de Nyquist est un demi cercle de centre $\begin{pmatrix} K/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $\left(\frac{K}{2}\right)$.

Détermination de K et τ_0

En utilisant les relations (32), (33), (48) et (49) on obtient :

$$\tau_0 = \frac{R_D \cdot R_{Sh} \cdot C}{R_{Sh} + R_D} \quad (50)$$

$$K = \frac{R_D \cdot R_{Sh}}{R_{Sh} + R_D} = R_p \quad (51)$$

L'impédance peut se mettre sous la forme suivant :

$$Z(\omega) = \frac{K}{1 + i\tau_0 \omega} \quad (52)$$

$$K = Rp \tag{53}$$

$$\tau_0 = Rp \cdot C = \frac{2\pi}{\omega_c} \tag{54}$$

ω_c correspond à la pulsation de coupure.

V- Calcul du coefficient de diffusion de la photopile en régime dynamique fréquentiel :

La relation fondamentale de la dynamique nous permet de déterminer l'expression de la vitesse des porteurs minoritaires. Ainsi lorsqu'on connaît la vitesse des porteurs minoritaires, on pourra déduire la mobilité. Le coefficient de diffusion des porteurs minoritaires est déduit de la relation d'EINSTEIN.

On suppose

$$E = E_0 \exp(i \omega t) \text{ champ électrique de l'onde lumineuse}$$

$$v = v_0 \exp(i \omega t) \text{ vitesse des porteurs minoritaires}$$

La relation fondamentale de la dynamique en absence de champ magnétique :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q \cdot E}{m^*} + \frac{q \cdot v \wedge B}{m^*} - \frac{v}{\tau} \quad \text{or } B = 0 \tag{55}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q \cdot E}{m^*} + -\frac{v}{\tau} \tag{56}$$

- m^* la masse effective de l'électron
- τ désigne le temps moyen au bout duquel la vitesse s'annule

- q la charge élémentaire de l'électron

$$i \cdot \omega \cdot v_0 = \frac{e \cdot E_0}{m^*} + -\frac{v_0}{\tau} \tag{57}$$

$$v_{\mathbf{O}} = \frac{\mu \cdot E_{\mathbf{O}}}{1 + i \cdot \omega \cdot \tau} \quad (58)$$

- $\mu = \frac{e \cdot \tau}{m^*}$ la mobilité de l'électron

La relation d'EINSTEIN nous permet de déduire l'expression du coefficient de diffusion.

$$\frac{D}{\mu_n^*} = \frac{KT}{e} \Rightarrow D = \frac{KT}{e} \mu_n^*$$

On suppose que :

$$v_p = E \mu_n^* \quad \text{avec} \quad v_p = \mu E_0 \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Des deux relations on obtient :

$$\mu_n^* = \frac{v_p}{E} \quad \text{et} \quad D = \frac{\mu KT}{e} \left(\frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right)$$

Posons :

$$D_0 = \frac{\mu KT}{e}$$

Finalement l'expression du coefficient de diffusion s'écrit :

$$D = D_0 \left(\frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) \quad (59)$$

La longueur de diffusion s'écrit alors d'après la relation $L = \sqrt{\tau D}$

$$L = \sqrt{D_0 \cdot \tau \left(\frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right)} \quad (60)$$