## **TABLES DES MATIERES**

FISAORAN	Ai
REMERCIE	MENTSii
TABLES DI	ES MATIERESiii
NOTATION	JSviii
LISTE DES	FIGURES xii
INTRODUC	CTION ET POSITION DU PROBLEME1
chapta i.	MODELISATIONS ET REPRESENTATION D'ETAT DES SYSTEMES S AVEC RETARD A TEMPS CONTINU
1.1. Intr	roduction
1.2. No	tions fondamentales sur les systèmes linéaires avec retard à temps continu3
1.2.1.	Modélisation d'un système
1.2.2.	Les systèmes
1.2.3.	Différents types de systèmes
1.2.4.	Équation différentielle et fonction de transfert
1.2.5.	Retard de temps
1.3. Mo	délisation et représentation des systèmes à retard
1.3.1.	Définition et représentation dans le domaine de l'espace d'état
1.3.2.	Représentation par la fonction de transfert
1.3.3.	Système linéaire à retard du premier ordre
1.3.4.	Système linéaire à retard du second ordre
1.3.5.	Système linéaire à retard d'ordre 3 ou d'ordre supérieur
1.4. Les	s différents types de systèmes à retard
1.4.1. retard	Equation différentielles fonctionnelles pour la représentation des systèmes à 14
1.4.2.	Équations différentielles fonctionnelles

1.4.3.	Équation avec des coefficients dans un anneau d'opérateurs
1.4.4.	Représentation abstraite au-dessus d'un espace linéaire de dimension infini 17
1.5. La retard 17	solution, la méthode d'étape, la matrice fondamentale des systèmes linéaires à
1.5.1.	Solution de l'équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre
1.5.2.	Matrice de transfert des systèmes à retard
1.5.3.	La formule de variation de constantes des systèmes linéaires à retard
1.6. Cor	nelusion23
Chapitre 2. SYSTEMES	LES OUTILS MATHEMATIQUES FONDAMENTAUX POUR LES A RETARD
2.1 Intr	roduction24
2.2 Equ	nations caractéristiques, fonction de transfert et transformations des systèmes à
2.2.1	Fonctions de transfert et détermination des racines caractéristiques24
2.2.2	Les équations différentielles fonctionnelles à retard mixte et détermination de
ses raci	nes caractéristiques
	ard de transport d'eau chaude et réglage d'état pour une personne désirant une empérature $Td(t)$ dans une douche
2.3.1 modèle	Fonction de transfert et localisation des racines de l'équation caractéristique du 30
2.3.2	Comportement de la réponse de la commande $Td(t)$
	dèle mathématique et utilisation d'un système à retard pour le remplissage d'un à sciure de bois à partir d'une vis sans fin
2.4.1	Modélisation mathématique du système
2.4.2	Equation caractéristique et fonction de transfert du modèle
2.5 Cor	nelusion
Chamitus 2	ANALVSE DES SYSTEMES LINEAIDES A DETARD 38

3.1 Intr	roduction
3.2 Con	mmandabilité et observabilité d'un système à retard
3.2.1	Système commandable
3.2.2	Commandabilité spectrale
3.2.3	Observabilité du système à retard
3.3 Sta	bilité du système à retard41
3.3.1	Stabilité via l'équation caractéristique
3.3.2	Tests de stabilité et quelques normes
3.3.3	La méthode directe de Lyapunov
3.3.4	La méthode de Razumikhin [13]
3.3.5	Essais de stabilité indépendante des retards
3.3.6	Essai de stabilité dépendante du retard
3.3.7	Essais de stabilité du système à retard selon la théorie de Lyapunov-Razumikhin 50
3.3.8	Essai de stabilité du système à retard par les méthodes de Lyapunov-Krasovskii 51
3.4 Exe	emple fondamentale
3.5 Con	nclusion55
Chapitre 4. A RETARI CONTINU	APPLICATIONS DE LA SYNTHESE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES D SUR LE RETARD DE DEMARRAGE D'UN MOTEUR A COURANT 56
4.1 Intr	roduction56
4.2 Mo	délisation et fonction de transfert du moteur à courant continu non retardé et sans
4.2.1	Modèle sans charge
4.2.2	Commande par la variation de la tension d'induite
4.2.3	Commande par la variation du flux inducteur ou commande par l'inducteur 61

	Addelisation et fonction de transfert du moteur a courant continu sans retard en
charge6	
4.3.1	Commande de la vitesse de la machine par la variation de la tension d'induite 63
4.3.2	Calcul de la fonction de transfert du moteur à courant continu
4.4 A	Analyse temporelle du comportement d'un moteur à courant continu
4.4.1	Réponse impulsionnelle du premier ordre
4.4.2	Réponse indicielle du premier ordre
4.4.3	Applications numériques69
4.5 N	Modèle de connaissance d'un système de second ordre72
4.5.1	Etude de la réponse indicielle
4.5.2	Etude harmonique
4.5.3	Commande de la vitesse de la machine par la variation de la tension d'induite
avec	considération de l'inductance
4.5.4	
de ro	tor du moteur83
4.5.5	Applications numériques85
4.6 A	Analyse d'état du moteur sans retard
4.6.1	Représentation d'état du système sans retard
4.6.2	Commandabilité du modèle sans retard
4.6.3	Observabilité du système sans retard
4.6.4	Applications numériques90
	Analyse et représentation d'état du moteur à courant continu avec retard de ge
4.7.1 prem	Représentation par la fonction de transfert du modèle avec retard sous forme de ier ordre
4.7.2	Applications numériques pour la commande de vitesse

4	1.7.3	Fonction de transfert du moteur à courant continu avec retard sous for	me de
S	second o	ordre	95
4	1.7.4	Applications numériques	96
4	1.7.5	Représentation sous forme d'espace d'état	99
4	1.7.6	Commandabilité spectrale du modèle avec retard	100
4	1.7.7	Observabilité du système avec retard	100
4	1.7.8	Stabilité	101
4.8	Con	nclusions	104
CON	CLUSIO	ONS ET PERSPECTIVES	105
ANN]	EXES		107
A. (	Quelque	es notions utiles sur l'automatique	107
1.	Auton	natique	107
2.	La stal	bilité au sens de Lyapunov	107
3.	Exemp	ple d'application	112
B. I	Rappel s	sur la parité de la transformée de Laplace	114
C. I	Représe	entation d'état des systèmes multivariables à temps continu	115
1.	Infinit	té de la représentation d'état	118
2.	Exemp	ples de système de base	118
3.	Résolu	ution des équations d'état	119
BIBL	IOGRA	APHIES	126
FICH	E DE R	RENSEIGNEMENT	I
RESU	ЈМЕ		II
ABST	TRACT	·	II

### **NOTATIONS**

#### • Minuscules latines

e(t): Vecteur de commande

f : Fonction à valeur vectorielle non linéaire

 $f_{ch}$ : Coefficient de frottement fluide (visqueux) de la charge

 $f_r$ : Coefficient de frottement fluide (visqueux) du rotor

g : Fonction à valeur vectorielle non linéaire

*l* : Longueur d'un tuyau

*ln* : Logarithme népérien

n : Nombre ou ordre d'état du système

*m* : Nombre ou ordre de commandes

 $m_s$ : masse de sciure de bois

 $m_{out}$ : Masse de sortie

n : Rapport de réduction

p : Variable de Laplace

r : Nombre ou ordre de sorties

s(t): Vecteur de sorties (ou d'observation)

t: Temps

x(t): Variables d'état

 $\dot{v}$ : Variation de volume de sciure dans le réservoir

w : Entrée de la perturbation

## Majuscules latines

 $A, A_i$ : Matrice dynamique (ou d'état) du système

 $B, B_i$ : Matrice d'application de la commande du système

C,  $C_i$ : Matrice d'observation

 $C_e(t)$  Couple de force électromécanique

 $C_r$ : Couple de charge totale sur le moteur ou l'ensemble de toutes les perturbations

D,  $D_i$ : Matrice d'application directe de la commande

*E* : force électromotrice

G: Fonction de transfert ou processus

 $I_a$ : Courant de l'induit

Im: Imaginaire

 $I_n$ : Matrice unitaire à  $n \times n$  dimensions

 $J_{ch}$ : Moment d'inertie de la charge

 $J_r$ : Moment d'inertie du rotor

*K* : Constante quelconque

 $K_s$ : Constante de la vis

 $L_a$ : Inductance de l'induit

P: Matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov, satisfaisant l'ARI et la LMI

Q : Débit de l'eau

R: Rayon d'un tuyau

 $T_d$ : Température désirée

T(t): Température

 $V_a$ : tension d'induite

 $R_a$ : Résistance de l'induit

Z : Variable de Fourier

#### Minuscules grecs

 $\gamma$ : gain ou atténuation

 $\mu$ : Viscosité du liquide

 $\phi$ : Condition initiale fonctionnelle

 $\phi_e$ : Etat d'équilibre

 $\theta$ : Variable

 $\tau$ : Retard de temps

 $\lambda_i$ : Valeur propre

 $au_{cute{e}l}$  : Constante de temps électrique

 $\tau_{m\acute{e}c}$ : Constante de temps mécanique

 $\tau_m$ : temps de montée

### • Majuscules grecs

7: Opérateur de décalage à retard

Δ : Déterminant ou erreur de perturbation

 $\Phi$ : Flux utile

 $\Omega$ : vitesse angulaire

#### • Notations spéciales

 $\mathcal{A}$  : Opérateur de retard

col{.}: Matrice colonne

det[.]: Déterminant

diag(.): Diagonale

 $H_{\infty}$ : Norme H infini

L: Transformée de Laplace

 $\mathcal{L}_2[0,+\infty[$  : Ensemble des fonctions carrées intégrables sur  $[0,+\infty[$ 

 $\phi(t) \in \mathcal{C}[-\tau_{max}, 0]$ : Fonction initiale continue à valeur vectorielle appartenant à la courbe de  $[-\tau_{max}, 0]$ 

N : Ensembles des nombres entiers

 $\mathbb{R}^+$ : Tous les réels positifs

 $\mathbb{R}^n$ : Espace euclidienne

 $\mathbb{R}^{n \times n}$ : Ensembles des réelles à des dimensions  $n \times n$ 

 $\mathbb{R}^n \times L_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ : Ensemble de fonctions carrées intégrables sur  $[-\tau, 0]$  de la famille de fonctions continues  $[-\tau, 0]$  vers  $\mathbb{R}^n$ .

Re(.): Partie réelle de (.)

*Im*(.): Partie imaginaire de (.)

||. || : Norme d'une matrice

 $\lambda_{max}(A)$ : La plus grande valeur des valeurs propres de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ 

 $\lambda_{min}$ : La plus petite valeur des valeurs propres d'une matrice

 $\bar{\sigma}$ : Norme spectrale ou la plus grande valeur des valeurs singulière

 $\mu A$ : Mesure de la matrice  $\mu(A)_1$ 

 $\rho$ : Rayon spectral

V(x): Fonction de Lyapunov

#### Abréviations

AFDE: Advanced functional differential equations

DDE: Differential Differences Equation

EDFR: Equations différentielles Fonctionnelles Retardées

FDE: Functional Differential Equation

LTI: Linear Time Invariant

MIMO: Multi-Input/Multi-Output

MCC: Moteur à courant continu

SISO: Single-Input/Single-Output

NFDE: Neutral Functional Differential Equation

RFDE: Retarded functional differential equations

TDS: Time delay system

## **LISTE DES FIGURES**

Figure 1-1: Modèle du retard pur	6
Figure 1-2: Diagramme bloc du système à retard	11
Figure 1-3: Classification des équations différentielle fonctionnelles	15
Figure 1-4 : Solutions de l'équation différentielle avec retard	18
Figure 1-5: Approximation discrète des solutions de l'équation différentielle	20
Figure 2-1: Localisation des racines de l'équation caractéristique des systèmes à retard	26
Figure 2-2: Localisation des racines de l'équation caractéristique des systèmes à rettemps de type neutre ou mixte	
Figure 2-3: une personne dans une douche	29
Figure 2-4: Schéma bloc de la commande de température de l'eau pour une personnune douche	
Figure 2-5: Diagramme bloc du système	31
Figure 2-6: Localisation des spectres du système	31
Figure 2-7: Variation de la température $T(t)$ [° $C$ ] avec un retard unitaire	32
Figure 2-8 : Utilisation d'un système à retard	33
Figure 2-9 : Diagramme de blocs d'entrée et de sortie global du système	34
Figure 2-10 : diagrammes en bloc mathématiques détaillés	35
Figure 2-11: Les racines de l'équation caractéristique	36
Figure 4-1: Induit d'un moteur à courant continu	57
Figure 4-2: Schéma équivalent de l'induit du moteur à courant continu en régime pern	
Figure 4-3: Commande du moteur par l'induit	59
Figure 4-4: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu commandé par la t d'induite	
Figure 4-5: Caractéristiques mécaniques de la commande par la tension d'induite	60
Figure 4-6: Modèle de commande par l'inducteur	61

Figure 4-7: Variation du flux inducteur	61
Figure 4-8: Modèle de l'inducteur d'un moteur à courant continu	62
Figure 4-9: Caractéristiques mécaniques de la commande du moteur à courant continu	par
l'inducteur	63
Figure 4-10: Schéma fonctionnel du moteur à courant continu commandé par le courant l'inducteur	
Figure 4-11: Moteur à courant continu entraînant une charge	64
Figure 4-12: Schéma fonctionnel de l'ensemble mécanique (rotor + charge)	. 66
Figure 4-13: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu en charge commandé partension d'induite	
Figure 4-14: Schéma fonctionnel de la commande d'un moteur à courant continu avec paramètres	
Figure 4-15: Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse du moteur	. 71
Figure 4-16: Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu sans retard	. 72
Figure 4-17: Réponses des systèmes hyper-amortis.	. 75
Figure 4-18: Systèmes du second ordre sous-amortis	. 76
Figure 4-19: Systèmes du second ordre sous-amortis	. 76
Figure 4-20: Spécifications temporelles d'un second ordre	. 80
Figure 4-21: Moteur à courant continu à excitation indépendante	. 82
Figure 4-22: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu en charge commandé par tension d'induite	
Figure 4-23: Placement des pôles du système sur le plan complexe	. 85
Figure 4-24: Réponse impulsionnelle d'un moteur à courant continu sous forme d'équation second ordre	
Figure 4-25: Réponse indicielle d'un MCC sous forme d'équation de second ordre	. 87
Figure 4-26: Diagramme de Bode de la commande d'un moteur à courant continu	. 87
Figure 4-27: Schéma fonctionnel de la représentation d'état du moteur à courant continu	89

<b>Figure 4-28</b> : Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse du moteur
Figure 4-29: Réponse indicielle de la Commande de vitesse d'un MCC avec retard de
démarrage
Figure 4-30: Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse d'un MCC sous forme de
second ordre
Figure 4-31: Réponse indicielle de la commande de vitesse d'un MCC sous forme de second
ordre avec retard de démarrage
Figure 4-32: Diagramme de Bode du système avec retard de démarrage
Figure 4-33: Schéma fonctionnel du système stable avec un retard de la commande
Figure C-1: Schéma bloc de la représentation d'état d'un système
Figure C-2 : Système multivariable à $n$ états, à $r$ entrées et $m$ sorties

### INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

Ce mémoire d'initiation en recherche contribue à la compréhension et à la modélisation des systèmes linéaires monovariables à retard à temps continu. Ces domaines d'existence, sa commandabilité et sa stabilité, ainsi qu'une simulation de modèle seront donc les contenus essentiels de ce travail.

#### Problématiques:

- La présence de retards rend l'analyse fonctionnelle et la conception de la commande beaucoup plus complexe. Ce qui est plus mauvais et que quelques retards sont trop longs à percevoir et le système est perçu en tant que sans retard.
- L'existence du retard peut entraîner ou produire un effet indésirable sur la stabilité du système.

#### Objectifs du mémoire d'initiation en recherche :

- Comprendre le retard, ses effets et aussi ses domaines d'existence
- Modéliser le système à retard
- Faire la synthèse de commande des systèmes à retard
- Simuler un système linéaire à retard

Dans les débuts de la première décennie du XXè siècle, diverses théories de l'automatique et de ses évolutions ont été longuement testées et appliquées. Dans ces deux domaines, la nécessité d'un raisonnement analytique explicite est apparue rapidement. Et puis, la description mathématique de certains processus au sein de ces sujets a conduit à une étude des systèmes avec des retards.

Rivalisant avec la commande classique, la théorie de commande multivariable est un outil puissant à traiter les issues de stabilité des systèmes à retard. Cependant, il reste beaucoup de difficultés en appliquant ces théories de commande aux processus industriels.

En effet, non seulement beaucoup de systèmes physiques incluent des retards dans leur mécanisme, mais signalent également la transmission ou le transport des retards dans les processus. L'existence des systèmes d'applications ayant des retards de temps peuvent être trouvées dans le réseau neurologique, dans la commande des dispositifs des satellites, dans des réacteurs chimiques, dans les systèmes technologiques de communications, dans les

systèmes de distributions de réseaux des puissances électriques, dans la suivie de la direction automatique des avions à de vitesse très élevées, ou encore les systèmes de stabilisation dans des bateaux et sous-marin.

Motivé alors par le besoin d'améliorer la compréhension et la conception de contrôle des systèmes à retard de temps, on va se concentrer sur la modélisation, l'analyse de stabilité et la synthèse des systèmes linéaires, et pour bien assimiler les théories, une application sur le retard de commande dans les moteurs à courants continus est modélisée et simulée.

Pour commencer, on va essayer de décrire et de représenter le système à retard, et de le modéliser afin d'avoir une notion et maîtrise de base dans le premier chapitre. Et dans le second chapitre, on abordera les outils mathématiques essentiels et fondamentaux, ainsi que le domaine où l'on retrouve les systèmes à retard et ses applications. Dans le troisième chapitre, la question de commandabilité, observabilité et la stabilité d'un système à retard seront discutés. Le dernier chapitre qui est le quatrième consiste sur l'étude d'un modèle des systèmes à retard à temps continu.



# CHAPITRE 1. MODELISATIONS ET REPRESENTATION D'ETAT DES SYSTEMES LINEAIRES AVEC RETARD A TEMPS CONTINU

#### 1.1. Introduction

La première étape en étudiant un système physique est de le traduire par des équations mathématiques qui le décrivent et qui devraient convenir aussi informatiquement et, en même temps, de représenter adéquatement le système, d'où la modélisation. La maîtrise de la notion fondamentale de l'automatique, de l'analyse numérique, plus précisément sur les différentes méthodes de la résolution analytique et numérique d'une équation différentielle et modélisation sont indispensable pour ce chapitre.

## 1.2. Notions fondamentales sur les systèmes linéaires avec retard à temps continu

## 1.2.1. Modélisation d'un système

### Définition 1-1

La modélisation est la représentation d'un système par un autre, plus facile à appréhender. Il peut s'agir d'un système mathématique ou physique. Le modèle sera alors analogique ou numérique.

La modélisation analogique consiste à construire un système physique qui reproduit plus ou moins un phénomène que l'on souhaite étudier. L'observation du comportement du modèle permet de tirer des enseignements sur son intérêt. Tandis que la modélisation numérique consiste à construire un ensemble de fonctions mathématiques décrivant un phénomène. En modifiant les variables de départ, on peut ainsi prédire les comportements dans le temps d'un système physique.

## 1.2.2. Les systèmes

#### Définition 1-2

Un système est une modélisation d'un procédé, possédant une ou plusieurs entrées, et une ou plusieurs sorties. Les entrées du système rassemblent les perturbations et les variables

manipulées, commandes ou grandeurs de réglage. Elles sont reliées au procédé en tant que tel par un actionneur. Les sorties du système sont appelées variables contrôlées, mesures ou grandeurs réglées. Le procédé est relié à la sortie du système par un capteur.

#### Définition 1-3

Le mot système fait référence étymologiquement à un ensemble organisé. En Automatique, on désigne par système un procédé de nature quelconque qui évolue sous l'action de son entrée e et dont l'évolution est caractérisée par sa sortie s. Si ces deux grandeurs sont des fonctions d'une variable continue t, on parle de système à temps continu, d'entrée e(t) et de sortie s(t).

Dans le cas d'un système échantillonné, les entrées et sorties sont à temps discret, mais le système en lui-même demeure à temps continu. Le système inclut donc un convertisseur numérique-analogique en entrée, un convertisseur analogique-numérique en sortie et une horloge permettant de fixer la fréquence d'échantillonnage. Il existe une infinité d'exemples de systèmes : les systèmes mécaniques, les systèmes électriques ou les systèmes de procédés chimiques, les systèmes de télécommunications. La représentation du système ne pourra alors se faire qu'avec de bonnes connaissances dans le domaine physique correspondant.

## 1.2.3. Différents types de systèmes

Les systèmes peuvent être classés en plusieurs catégories.

#### Propriété 1.1

- ❖ Système à temps continus: on parle d'automatique. Il s'agit d'asservir, de commander des grandeurs physiques de façon précise. Ce sont des systèmes qui existent naturellement. Pour ces systèmes, le temps t décrit la droite réelle.
- ❖ Systèmes à temps discret : ce sont des systèmes pour lequel le temps k est une variable discrète (on se ramène généralement au cas où k décrit l'ensemble des nombres entiers). Ces systèmes n'existent pas à l'état naturel (la majorité des systèmes physiques naturels sont à temps continu), mais étant donné que la plupart des contrôleurs utilisés en automatique sont calculés par des processeurs numériques, il est parfois aussi intéressant de modéliser le système commandé comme un système à temps discret.

- ❖ Systèmes à événements discrets: On parle d'automatisme (séquence d'actions dans le temps), systèmes dont le fonctionnement peut être modélisé par des événements discrets. Généralement, ces systèmes sont modélisés par des réseaux de Pétri, des grafcet (qui en sont des cas particuliers très répandus, notamment dans l'industrie). Exemple: chaîne de montage, les distributeurs automatiques, les ascenseurs, les automates dans le milieu industriel, les feux de croisement, les passages à niveaux.
- Systèmes hybrides: systèmes dont la modélisation nécessite l'utilisation des techniques liées aux systèmes continus et aux systèmes à évènements discrets, par exemple: une boîte de vitesse électronique d'une voiture.
- Système invariant (ou stationnaire): Ce sont des systèmes dont les paramètres du modèle mathématique ne varient pas au cours du temps.
- Systèmes linéaires ou non linéaires: on dit qu'un système est linéaire s'il est régi par un système d'équations différentielles linéaires. En pratique, aucun système n'est linéaire, ne serait-ce que par les saturations. Toutefois, un système non linéaire peut être considéré comme linéaire dans une certaine plage d'utilisation.

## 1.2.4. Équation différentielle et fonction de transfert

Un système physique se décrit généralement avec des équations différentielles (par exemple le principe fondamental de la dynamique, caractéristique d'un condensateur ou d'une bobine...). La transformation de Laplace permet alors de passer de l'équation différentielle temporelle à une fonction de transfert, l'inverse n'étant exact que sous certaines hypothèses, car l'obtention d'une fonction de transfert suppose qu'on travaille à conditions initiales nulles.

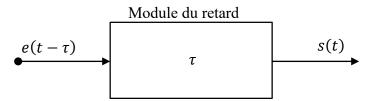
Pour un système à temps discret on utilise la transformation en Z. Ces transformations permettent d'étudier le comportement entrée-sortie du système, mais risquent de faire apparaître des modes cachés, du fait de l'impasse faite sur les conditions initiales.

Ces différentes notions sont essentielles pour l'étude d'un système, et qui sera utile pour l'élaboration d'un développement de telles descriptions mathématiques ainsi que leurs applications sur les systèmes à retard de temps continu dans la section suivante.

### 1.2.5. Retard de temps

## Définition 1-4

Le retard de temps est la propriété d'un système physique par laquelle la réponse à une action appliquée est retardée dans son effet [23], c'est-à-dire, on définit ainsi qu'un **retard** est le fait d'arriver, de se produire plus tard que prévu. Toutes fois le matériel, l'information ou l'énergie est physiquement transmis d'un endroit à l'autre, il y a un retard lié à la transmission.



On a la définition générale du retard selon l'équation

$$s(t) = f(t)e(t - \tau) \tag{1-1}$$

Tandis que celui du système sans retard est défini

$$s(t) = f(t)e(t) \tag{1-2}$$

Ces équations sont définies graphiquement sur la figure suivante comme

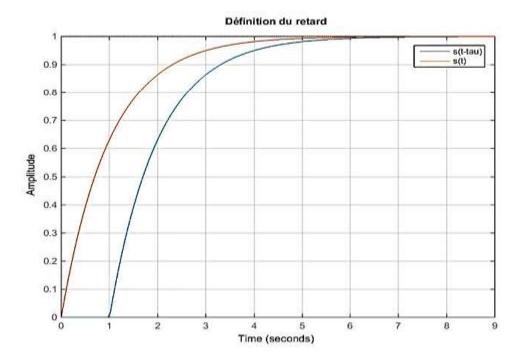


Figure 1-1: Modèle du retard pur

La valeur du retard est déterminée par la distance et la vitesse de transmission. Quelques retards sont courts, certains sont très longs.

## 1.3. Modélisation et représentation des systèmes à retard

Un *modèle* est donc un outil essentiel pour l'idéalisation d'un système physique. Il est employé pour organiser et/ou réduire l'effort de calcul nécessaire à l'analyse et à la conception des systèmes qui exigent la capacité de déterminer quelles sont les variables physiques ou les relations qui sont cruciales pour la précision du modèle et celles qui peuvent être négligées. Ceci implique que d'après l'infinité de la représentation d'état, un système physique peut alors avoir différents modèles selon les questions d'intérêt à son sujet. Dans notre cas, les descriptions mathématiques des systèmes linéaires à retard, ses comportements et ses applications, ainsi que ses stabilités vont être le sujet essentiel de cette initiation à la recherche.

L'état d'un système est une collecte d'informations qui contient l'histoire du système (son passé, ses comportements et la prédiction de son comportement à l'avenir) ; c'est-à-dire que la connaissance de l'état et les entrées d'un système seront suffisants pour calculer ses sorties. Plus précisément, on a la définition suivante [1].

#### 1.3.1. Définition et représentation dans le domaine de l'espace d'état

Les critères pour les systèmes à retards de temps constants impliquent habituellement un certain type de la méthode de représentation et l'ordre du retard. Pour les retards constants à temps continu, on va donner quelques ordres de retard de temps pour les études des systèmes multivariables qui utilisent généralement un modèle fixe dans le domaine du temps (domaine temporel).

#### Définition 1-5

L'état d'un système au temps  $t_0$  est une collecte d'informations qui ainsi que la connaissance des entrées pour  $t \ge t_0$  est suffisant pour déterminer uniquement les sorties du système.

Pour les systèmes à retard, l'état au temps t est défini sur l'intervalle [t',t] où t' dépend des retards présents dans le système. Une valeur réelle de dimension n du vecteur d'état x(t) sera employé pour exprimer l'état du système au temps t. Si  $\tau_{max}$  est le plus grand retard de temps dans le système, alors la connaissance de x(t) sur  $[t_0 - \tau_{max}, t_0]$  ainsi que la connaissance du

vecteur de commande e(t) pendant  $[t_0, t_1]$  sont nécessaire et suffisante pour déterminer l'état x(t) ou la sortie s(t) pour tout  $t_1 \ge t_0$ . Ainsi pour les systèmes à retard, l'état initial ou la fonction initiale  $\phi(t)$  doit être donné pour  $t \in [t_0 - \tau_{max}, t_0]$  où  $t_0$  est la période initiale de l'observation du système [9]. Notons toujours que l'état du système n'est pas nécessairement unique.

L'utilisation de l'espace d'état permet de décrire tout système de retard par un différentiel de vecteur et/ou une équation à différences, c'est-à-dire la manière la plus commune pour représenter les systèmes à retard est au moyen d'équations différentielles fonctionnelles [3].

Pour les systèmes linéaires à retard, l'équation d'état dans le cas le plus général a la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f \begin{pmatrix} x(t), x(t - \tau_i), t \\ e(t), e(t - \tau_i), t \end{pmatrix}$$
 (1-3)

Où f est une fonction à valeur vectorielle non linéaire et  $\tau_i > 0$ , i = 1,2,...,n, représente généralement tout le retard, c'est-à-dire le retard dans l'état et le retard de commande du système. L'équation de sortie exprime le vecteur de sortie s(t) en fonction des vecteurs d'état et de commande :

$$s(t) = g\begin{pmatrix} x(t), x(t-\tau_i), t \\ e(t), e(t-\tau_i), t \end{pmatrix}$$
 (1-4)

Où g, en général, est une fonction à valeur vectorielle non linéaire aussi. Ainsi le système est invariant dans le temps (ou stationnaire), alors les fonctions f et g ne dépendra pas explicitement du temps t.

#### Définition 1-6

La définition, pour les systèmes linéaires à retard, avec les équations d'état et de sortie est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) x(t - \tau_i) + B(t)e(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t) e(t - \tau_i) \\ s(t) = C(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x(t - \tau_i) + D(t)e(t) + \sum_{i=1}^{n} D_i(t) e(t - \tau_i) \end{cases}$$
(1-5)

Puisque, le système est invariant dans le temps, les matrices d'état retardé  $A, B, C, D; A_i, B_i, C_i, D_i, i = 1, ..., n$  seront donc constante.

- x : vecteur d'état (variables d'état ou encore variables internes)
- *e* : vecteur des entrées (ou de commande)

- s : vecteur de sorties (ou d'observation)
- $A, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : matrice dynamique (ou d'état) du système
- *t* : est le variable temps
- $\tau$ ,  $\tau_i$ : le retard de temps
- $B, B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : matrice d'application de la commande du système
- $C, C_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$ : matrice d'observation
- $D, D_i \in \mathbb{R}^{r \times m}$ : matrice d'application directe de la commande
- *n* : nombre ou ordre d'état du système
- m: nombre ou ordre de commandes
- r : nombre ou ordre de sorties

#### 1.3.2. Représentation par la fonction de transfert

L'une des méthodes de décrire un système linéaire à temps invariant (*LTI: Linear Time Invariant*) dans le formulaire monovariable utilise la fonction de transfert. La fonction de transfert rapporte la transformée de Laplace ou la transformée en Z de la sortie à la transformée de Laplace ou la transformée en Z de l'entrée. Pour les systèmes linéaires à retard, c'est la transformée de Laplace de la sortie à la transformée de Laplace de l'entrée lorsque toutes les conditions initiales sont nulles. La fonction de transfert peut être exprimée en termes de matrices dans les équations d'état et de sortie du système.

Considérons un système à retard stationnaire ayant un seul retard dans l'état. C'est,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Be(t)$$
  $t \ge t_0$  (1-7)

$$s(t) = Cx(t) + De(t)$$
 (1-8)

Démonstration :

\*

En prenant la transformée de Laplace des équations ci-dessus,

$$pX(p) - X(t_0) = AX(p) + A_1X(p)e^{-\tau p} + BE(p)$$
 (1-9)

$$S(p) = CX(p) + DE(p) \tag{1-10}$$

Considérons l'état initial nul. On a S(p) = G(p)E(p) où

$$G(p) = C(pI_n - A - A_1e^{-\tau p})^{-1}B + D$$
(1-11)

G(p) est une fonction à valeur scalaire connue sous le nom de fonction de transfert du système. On note que G(p) dans (1.11) à la différence de cas de systèmes non retarder, n'est pas une fonction rationnelle de p. Les poles du système sont les valeurs (complexe) de p pour lesquelles G(p) tend à l'infini. Pour les systèmes non retarder, c'est-à-dire, ils seront les racines du det(pI - A) = 0. Pour les systèmes à retard de temps (TDSs: Time Delay Systems) cependant, les pôles seront les valeurs complexes de p qui satisfera l'équation caractéristique

$$\det(pI - AI - A_1 e^{-\tau p}) = 0 (1-12)$$

Pour  $\tau \neq 0$ , cette équation (1-12) a une *infinité de nombre de racines*. Ceux-ci s'appellent le spectre du système à retard de temps. Cette observation est compatible au fait que l'espace d'état du système à retard à temps continu est à dimension infini.

## 1.3.3. Système linéaire à retard du premier ordre

Considérons un système à retard de temps du premier ordre décrit par

$$\dot{x}(t) = -Kx(t - \tau) + e(t) \tag{1-13}$$

$$s(t) = Kx(t) \tag{1-14}$$

Démonstration :

\*

$$pX(p) - X(t_0) = -KX(p)e^{-\tau p} + E(p)$$

$$(p + Ke^{-\tau p})X(p) = E(p)$$

$$X(p) = (p + Ke^{-\tau p})^{-1}E(p)$$
(1-15)

Où K est une constante positive. Les équations  $\dot{x}(t) = -Kx(t-\tau) + e(t)$  et s(t) = Kx(t) sont l'équation d'état et l'équation de sortie d'un système avec intégrateur à gain K dans le chemin vers l'avant, et un retard de temps  $\tau$  dans le chemin du boucle de retour, dont le schéma fonctionnel est montré sur la figure 1-2. La fonction de transfert de ce système est

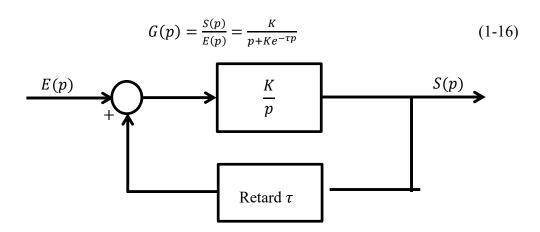


Figure 1-2: Diagramme bloc du système à retard

Les pôles du système sont les racines de

$$p + Ke^{-\tau p} = 0 \tag{1-17}$$

$$p = \sigma + j\omega = \rho e^{j\phi}$$
 où  $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ ,  $\phi = tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$  (1-18)

En utilisant  $p + Ke^{-\tau p} = 0$ 

$$(1-17)$$
, on a

$$\rho e^{j\phi} e^{(\sigma+j\omega)\tau} = -K = K e^{j\pi(1+2k)}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$
 (1-19)

$$\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma \tau} = K \tag{1-20}$$

$$tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}+\omega\tau=\pi(1+2k),\,k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$\tau = \omega^{-1} \left[ \pi (1 + 2k) - Arctan \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) \right]$$
 (1-21)

Les valeurs de  $p = \sigma + j\omega$  qui satisfera (1-17) peuvent être trouvées par (1-20). Notons qu'il existe une infinité de nombre pour chaque valeur qui existe. La fonction de transfert pour les systèmes à retard monovariable peut être prolongée pour le cas de systèmes à multivariables (MIMO: Multiple Input/Multiple Output) avec retard multiple dans l'état et le contrôle ou la commande. Notons que pour les systèmes multivariables avec r entrées et m sorties, la fonction de transfert G(p) est une matrice  $m \times r$ , appelée matrice de la fonction de transfert.

### 1.3.4. Système linéaire à retard du second ordre

Soit l'équation du second ordre d'un système à retard d'état :

11

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + A_1 x(t - \tau) \tag{1-22}$$

Le dérivé de x en t est noté comme x' ou  $\dot{x}$ , le second dérivé comme x'' ou  $\ddot{x}$ , et ainsi x (t) a les éléments  $x_1, x_2$  comme composante. On doit ramener les dérivés second du système à l'ordre 1, d'où l'équation du système transformé est définie par

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1-23}$$

Démonstration:

\*

En effectuant un changement de variable, on a

$$x_1 = x,$$
  $x_2 = x'$ 

Le résultat est un système équivalent d'équation différentielle du premier ordre.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f(t, x_2)$$

En arrangeant l'écriture, l'équation devient, après substitution :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'(t) = Ax_2(t) + A_1x_1(t - \tau) \end{cases}$$
 (1-24)

**♦** 

#### 1.3.5. Système linéaire à retard d'ordre 3 ou d'ordre supérieur

Une équation différentielle ordinaire (ODE: Ordinary Differential Equation) contient un ou plusieurs dérivés d'une variable dépendante x, la variable indépendante simple t, habituellement désigne le temps. Souvent x(t) est un vecteur, ayant les éléments  $x_1, x_2, ..., x_n$ . Pour faciliter le calcul, on doit ramener les dérivés d'ordre n, c'est-à-dire  $x^{(n)}$  à des équations du premier ordre. Et on réécrit l'équation comme système équivalent des équations du premier ordre de la forme de x'(t) = f(t, x).

Démonstration :

\*

On peut écrire n'importe quelle équation différentielle ordinaire d'ordre n

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots x^{(n-1)})$$
(1-25)

comme n système des équations du premier ordre en effectuant un changement de variable

$$x_1 = x,$$
  $x_2 = x',$  ...,  $x_n = x^{(n-1)}$  (1-26)

Le résultat est un système équivalent de n équation différentielle du premier ordre.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Soit l'équation d'ordre n d'un système à retard d'état :

$$x^{(n)}(t) = Ax^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-\tau)$$
 (1-27)

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x' \\ x_2' = x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x'' \end{cases} \dots \Rightarrow \begin{cases} x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = x'^{(n)} \end{cases}$$
(1-28)

D'où, après substitutions

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n(t) = Ax_n(t) + \sum_{i=1}^n A_i x_i(t-\tau) \end{cases}$$
 (1-29)

On revient à une équation de la forme d'ordre 1, c'est qui conduit à résoudre le système à n équations différentielles ordinaire du premier ordre.

## 1.4. Les différents types de systèmes à retard

Il existe des différents types de systèmes à retard et différents types de retards qui peuvent être distingués, d'après la dénomination généralement admise et présentée par Kolmanovskii [4], quatre types de systèmes à retard peuvent être définis, qui sont les systèmes avec retard discret, avec retard distribué, retard neutre et retard mixte. On va donner quelques

représentations générales de ces types de systèmes, et aussi les familles de retard, sans oublier que notre étude concernera uniquement les systèmes linéaires invariants avec retard à temps continu (*TDS*), qui font partie des équations différentielles fonctionnelles retardées. Trois représentations différentes sont utilisées généralement pour modeler les systèmes à retard de temps :

- Équation différentielle avec coefficients dans un anneau d'opérateurs ;
- Équation différentiel sur un espace linéaire abstrait à dimension infini ;
- Équation différentielle fonctionnelle

Il est important de définir les différentes catégories ou familles de retards, c'est-à-dire que le temps peut être constant ou variable dans le temps, proportionnel ou non proportionnel, distribué, et enfin en fonction de l'état [Verriest, 2002].

## 1.4.1. Equation différentielles fonctionnelles pour la représentation des systèmes à retard

Une représentation mathématique d'un système physique est les dérivées en décrivant mathématiquement les interactions et les phénomènes entre les différents composants du système. Ceci est fait par l'application des lois physiques régissant ces interactions aux modèles des composants du système. Il existe différents types d'équations différentielles fonctionnelles (FDE: Functional Differential Equation) qui découlent d'applications importantes : les équations différentielles à différences (DDE : Differential Differences Equations) (également appelée équation différentielle fonctionnelle ([RFDE]: Retarded functional Differential Equation), les équations différentielles fonctionnelles neutres (NFDE: Neutral Functional Differential Equation) et les équations différentielles fonctionnelles mixtes (MFDE: Mixt Functional Differential Equation). La classification dépend de la façon dont le taux de changement actuel de l'état du système dépend de l'historique (historique de l'état seulement ou du taux de changement historique) ou si le taux de changement actuel de l'état du système dépend de l'attente future du système [5].

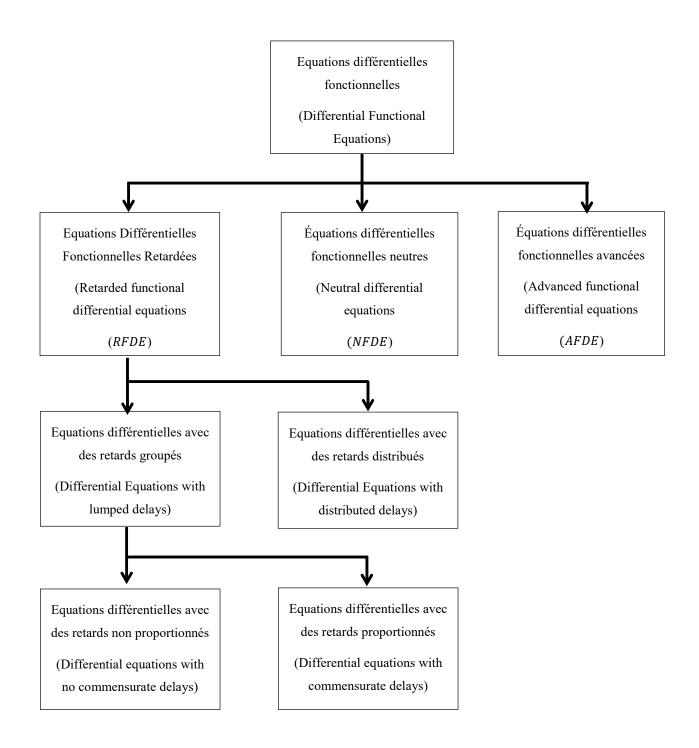


Figure 1-3: Classification des équations différentielle fonctionnelles

### 1.4.2. Équations différentielles fonctionnelles

Comme on avait dit que la manière la plus commune pour représenter les systèmes à retard de temps est alors au moyen d'équations différentielles fonctionnelles.

De façon général, le système linéaire à retard est donné dans ce cas par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t - \tau) \tag{1-30}$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \tag{1-31}$$

où x est l'état du système,  $\tau > 0$  est le retard constant et  $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  est la condition fonctionnelle initiale. La solution d'un système à retard n'est pas uniquement défini par la seule connaissance de la condition initiale  $x_0$  à t = 0 mais par une fonction  $\phi(t)$  de condition fonctionnelle initiale définie dans l'intervalle  $[-\tau, 0]$ .

Cette différence indique que les systèmes à retard ne sont pas des systèmes à dimension fini, mais de dimension infini et que leur état, c'est-à-dire l'information minimale requise pour définir correctement la notion des solutions, n'est pas un unique point x (t) dans  $\mathbb{R}^n$ , mais la fonction  $x_t$  définie comme

$$x_t(s) = x(t+s), s \in [-\tau, 0]$$
 (1-32)

## 1.4.3. Équation avec des coefficients dans un anneau d'opérateurs

Ce cadre a été développé tout à fait tôt et a mené à plusieurs résultats algébriques importants sur l'analyse, la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité, la commandabilité et l'observation des systèmes. Les contreparties de (1-30) dans ce cas est données par l'équation suivante avec des coefficients dans un anneau

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\nabla)x(t) \tag{1-33}$$

où  $\bar{A}(\nabla) = A + A_h(\nabla)$  et  $\nabla$  est l'opérateur de décalage défini comme

$$(\nabla x)(t) = x(t - \tau). \tag{1-34}$$

Il est important de mentionner ici que le fait que l'opérateur  $\nabla$  appartient à un anneau est primordial d'une perspective de technologie. L'inverse de  $\nabla$ , dénoté par  $\nabla^{-1}$ , est l'opérateur anticipé

$$(\nabla^{-1}x)(t) = x(t+h)$$
 (1-35)

## 1.4.4. Représentation abstraite au-dessus d'un espace linéaire de dimension infini

Le cas est typiquement de cadre général des systèmes à dimensionnels infinis appliqués au cas spéciale des systèmes à retard.

Dans ce cas, l'espace d'état est défini comme,  $\mathbb{R}^n \times L_2([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$  et s'écrit Erreur! Source du renvoi introuvable.:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(.) \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(.) \end{bmatrix} \tag{1-36}$$

Où l'opérateur  $\mathcal{A}$  est défini comme

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_t(.) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) + A_h x_t(-\tau) \\ \frac{dx_t(\theta)}{d\theta} \end{bmatrix}$$
 (1-37)

L'opératrice  $\mathcal{A}$  est les contreparties dimensionnelles infinies de l'opérateur dimensionnel fini A décrivant les systèmes dynamiques de la transformation linéaire invariant (LTI: Linear Time Invariant) de la forme  $\dot{x} = Ax$ . Beaucoup d'outils ont été développés pour traiter de tels systèmes abstraits, un bon nombre d'eux se fondent sur l'analyse fonctionnelle et théorie d'opérateur.

# 1.5. La solution, la méthode d'étape, la matrice fondamentale des systèmes linéaires à retard

Dans cette section on va considérer la solution, et la méthode d'étape ainsi que la matrice fondamentale pour un système à retard, pour qu'on puisse les utiliser pour des études de stabilité.

#### 1.5.1. Solution de l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre

Démonstration :

\*

On considère l'équation de retard :

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0, \qquad t \ge 0$$
 (1-38)

Afin de définir sa solution pour  $t \in [0, \tau]$ , on doit définir  $x(t - \tau)$ , quels résultats dans la valeur de la fonction initiale :

$$x(t) = \phi(t), \ t \in [-\tau, 0] \tag{1-39}$$

au lieu de la valeur initiale x(0) pour l'équation différentielle ordinaire avec  $\tau = 0$ . Afin de trouver une solution à ce problème, on va utiliser la *méthode d'étape* (Bellman [11]. D'abord, trouvons une solution pour résoudre :

$$t \in [0, \tau], \quad \dot{x}(t) = -\phi(t - \tau), \quad x(0) = \phi(0)$$
 (1-40)

Continuons ce procédé pour  $t \in [\tau, 2\tau]$ ,  $t \in [2\tau, 3\tau]$ ,.... Pour la constante  $\phi \equiv \phi_0$  la méthode d'étape donne le polynôme à t solutions.

Les solutions résultants pour  $\tau=1$  et pour les fonctions initiales  $\phi\equiv 1$  et  $\phi=0.5t$  sont donnés dans la figure ci-après. Comme on le voit de la figure 1-3, plusieurs solutions qui réalisent la même valeur  $x(t^*)$  à quelques instants  $t^*$ . Ceci est différent des équations différentielles ordinaires, par exemple  $\dot{x}(t)=-x(t)$  où chaque  $x(t^*)$  a une seule solution de passages. Par conséquent, dans les systèmes à retard de temps, un état approprié est une fonction

$$x_t: [-\tau, 0] \to \mathbb{R}: \qquad x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$
 (1-41)

D'où la représentation sur graphe de la solution de l'équation différentielle à retard avec

 $\tau = 1$  et  $\phi \equiv 1$  (bleue plaine) où  $\phi = 0.5t$  (rouge pointillé):

$$\dot{x}(t) = -x(t-\tau)$$

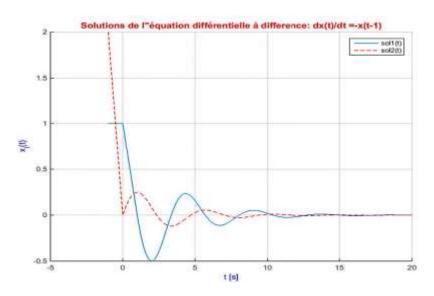


Figure 1-4 : Solutions de l'équation différentielle avec retard

La correspondance à l'intervalle de temps passé  $[t-\tau,t]$ où il y a seulement une solution passant à travers  $x_t^*$  pour tout  $t^* \ge 0$ . C'est un système à dimension infini, où  $x_t$  est la solution au temps t.

Différemment des équations différentielles fonctionnelles ordinaires, les solutions des systèmes linéaires à retard peuvent disparaître dans un temps fini. On considère le système :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t - \tau), \qquad \dot{x}_2(t) = 0$$
 (1-42)

avec une fonction initiale continue  $x_0 = \phi = [\phi_1, \phi_2]^T$  qui satisfait les relations suivantes :

$$\phi_1 \equiv 0, \qquad \phi_2 = 0, \qquad \int_{-\tau}^0 \phi_2(p) dp = 0$$
 (1-43)

En appliquant la méthode d'étape, on a [6]:

$$t \in [0,\tau] \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \phi_2(t-\tau), \qquad x_2(t) \equiv 0,$$
  
$$t \in [\tau, 2\tau] \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0, x_1(t) = 0, \qquad x_2(t) \equiv 0,$$
  
$$\vdots$$

On a vu que  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ , pour  $t \ge \tau$ , c'est-à-dire, différentes fonctions initiales  $\phi \in [-\tau, 0]$  se transforment en le même état  $x_t = 0$  pour  $t \ge \tau$ . Par conséquent, la suite en arrière des solutions aux systèmes à retard de temps n'est en général pas possible. Considérons l'équation différentielle scalaire retardée,

$$\dot{x}(t) = -x(t-\tau), \quad x(t) \in R, \qquad \tau > 0, \ t \ge 0$$
 (1-44)

Considérons d'abord la première version non-retardée de cette équation :

$$\dot{x}(t) = -x(t) \tag{1-45}$$

On va essayer de trouver les solutions graphiques de  $\dot{x}(t) = -x(t-\tau)$ , pour  $\tau = 0$  et x(0) = 0

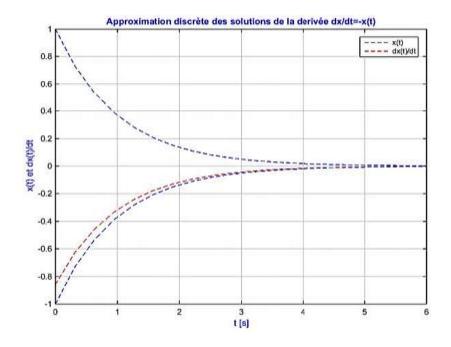


Figure 1-5: Approximation discrète des solutions de l'équation différentielle

En utilisant la méthode des pas, qu'on a déjà auparavant trouvons la solution $\dot{x}(t) = -x(t-\tau), \quad x(t) \in R, \quad \tau > 0, \ t \ge 0$  (1-44) avec  $\tau = 1$  et la fonction initiale  $\phi \equiv 0.5$ .

#### 1.5.2. Matrice de transfert des systèmes à retard

On peut donc avoir la forme générale d'un système à retard, ainsi que ses équations caractéristiques selon les formules suivantes en considérant le système [2]:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{n} B_i e(t - \tau_i)$$
 (1-46)

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{n} D_i x(t - \tau_i)$$
 (1-47)

Avec matrices constantes, où  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \tau$ . En appliquant la transformée de Laplace à ce système d'équation ci-dessus, on aura S(p) = G(p)E(p), d'où la matrice de la fonction de transfert G est donnée par

$$G(p) = \sum_{i=0}^{n} C_i e^{-\tau_i p} \left[ \sum_{i=0}^{n} (p I_i - A_i) e^{-\tau_i p} \right]^{-1} \sum_{i=0}^{n} B_i e^{-\tau_i p} + \sum_{i=0}^{n} D_i e^{-p \tau_i}$$
(1-48)

Ainsi l'équation caractéristique est de la forme :

$$det[pI - A - \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\tau_i p}] = 0$$
 (1-49)

#### 1.5.3. La formule de variation de constantes des systèmes linéaires à retard

L'équation différentielle linéaire retardée avec un retard  $\tau > 0$  a la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau) + f(t) \qquad t \ge 0 \tag{1-50}$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , A et  $A_1$  sont des matrices constantes,  $f:[0,+\infty] \to \mathbb{R}^n$  est une fonction intégrale localement donnée (c'est-à-dire intégrable dans un intervalle fini [0,T] pour tout T > 0). La condition initiale qui est définie par

$$x(\theta) = \phi(\theta), \qquad \theta \in [-\tau, 0], \quad \phi \in C[-\tau, 0]. \tag{1-51}$$

Démonstration :

\*

La solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(t)$  avec  $A_1 = 0$  est donnée par

$$x(t) = e^{At}\phi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(p)dp$$
 (1-52)

Afin de prolonger  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(t)$  pour  $A_1 \neq 0$ . On définit x(t) la matrice fondamentale  $n \times n$  qui satisfait l'équation homogène

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau)$$
 (1-53)

Avec les conditions initiales suivantes :

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I, & t = 0 \end{cases}$$
 (1-54)

Et la solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(t)$  et  $x(\theta) = \phi(\theta)$  est donnée par

$$x(t) = X(t)\phi(0) + \int_{-\tau}^{0} X(t - \theta - \tau)A_{1}\phi(\theta)d\theta + \int_{0}^{t} X(t - p)f(p)dp$$
 (1-55)

Cette équation peut être présentée comme :

$$x(t) = x(t,\phi) + \int_0^t X(t-p)f(p)dp$$
 (1-56)

D'où  $x(t,\phi)$  est la solution de l'équation homogène avec  $x_0 = \phi$ . La représentation  $x(t) = x(t,\phi) + \int_0^t X(t-p)f(p)dp$  désigne la *formule de variation de constantes*. On peut la prouver en utilisant la transformée de Laplace :

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Où f est supposée être exponentiellement liée avec  $|f(t)| \le Ke^{ct}$  pour tout K > 0, c > 0. Notons que cette formule peut être dérivée en utilisant l'équation adjointe ou par la méthode de pas. On a

$$\mathcal{L}(x(t-\tau))(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t-\tau) dt = e^{-\tau p} \mathcal{L}(x)(p) + \int_{-\tau}^0 e^{-p(\theta+h)} \phi(\theta) d\theta \quad (1-57)$$

En appliquant la transformée de Laplace à  $det[pI - A - \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\tau_i p}] = 0$ 

$$p\mathcal{L}(x)(p) - \phi(0) = A\mathcal{L}(x)(p) + A_1 \left[ e^{-\tau p} \mathcal{L}(x)(p) + \int_{-h}^{0} e^{-p(\theta+h)} \phi(\theta) d\theta \right] + F(p)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(p) = \Delta^{-1}(p) \left[ \phi(0) + \int_{-\tau}^{0} e^{-p(\theta+h)} A_1 \phi(\theta) d\theta + F(p) \right]$$
 (1-58)

Οù

$$\Delta(s) = pI - A - A_1 e^{-\tau p} \tag{1-59}$$

On peut voir à partir de l'équation  $\mathcal{L}(x(t-\tau))(p)$  que  $X(t) = \mathcal{L}^{-1}(\Delta^{-1})$  car  $\mathcal{L}^{-1}(\Delta^{-1})$  correspond à la solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(t)$  avec f = 0 et  $\phi$  donné par  $X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I, & t = 0 \end{cases}$ . Pour  $\mathcal{L}(x(t-\tau))(p)$ , on a

$$\mathcal{L}(X(t-\theta-\tau))(p) = e^{-p(\theta+\tau)}\mathcal{L}(X)(p) = e^{-s(\theta+h)}\Delta^{-1}(p)$$
 (1-60)

En appliquant la transformée de Laplace inverse pour  $\mathcal{L}(x)(p)$  et en utilisant le théorème de convolution

$$\mathcal{L}^{-1}(\Delta^{-1}F) = \int_0^t X(t-p)f(p)dp$$
 (1-61)

On revient à x(t). Les équations différentielles linéaires à retard non homogène avec n retards discrets et avec un retard distribué ont la forme:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{K} A_n x(t - \tau_n) + \int_{-\pi}^{0} A(\theta) x(t + \theta) d\theta + f(t)$$
 (1-62)

Où  $0 = \tau_0 < \tau_1 \dots < t_n$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_n$  sont des matrices constantes et  $A(\theta)$  est intégrable sur  $[-\tau, 0]$ , et f est une fonction localement intégrable.

•

### 1.6. Conclusion

Ce chapitre fournit la connaissance de base fondamentale et des concepts sur la transformation de Laplace des systèmes à retard de temps. On peut voir à travers toute ces théories que le système à retard est un peu différent des systèmes sans retard avec l'existence de la fonction de retard, qui est traduite par la fonction  $e^{-\tau p}$ . Cette fonction caractérise le retard, c'est-à-dire, on peut caractériser un système à retard par l'existence de cette fonction dans un modèle.

## CHAPITRE 2. LES OUTILS MATHEMATIQUES FONDAMENTAUX POUR LES SYSTEMES A RETARD

#### 2.1 Introduction

La commande des processus avec des retards implique des périodes de retard, référé également à de retard de transport ou des délais. Le contrôle de tels processus est difficile car les retards causent des déphasages linéaires qui limitent la largeur de bande de commande et affectent la stabilité en boucle fermée. En utilisant la représentation sous forme d'espace d'état, ou de fonction de transfert, on peut créer des modèles précis de système de contrôle avec des retards et analyser leur stabilité et l'exécuter sans approximation via son équation caractéristique.

## 2.2 Equations caractéristiques, fonction de transfert et transformations des systèmes à retard

#### 2.2.1 Fonctions de transfert et détermination des racines caractéristiques

On considère une équation différentielle matricielle linéaire retardée [29]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) \tag{2-1}$$

Avec des coefficients réels et retard constant  $\tau > 0$ .

En appliquant la transformée de Laplace, on peut dire que ceci satisfait l'équation (2-1) si p est la racine de l'équation caractéristique

$$\Delta(p) = pI - AI - A_1 I p e^{-\tau p} = 0 \tag{2-2}$$

Comparer à un système sans retards, l'équation transcendantale  $\Delta(p) = 0$  a généralement une infinité de nombre de solutions. Ceci reflète également la nature à dimension infini du système à retard. Cependant, puisque  $\Delta(p)$  est une fonction entière (la fonction analytique déterminée pour tout complexe p), pour comprendre la localisation des racines caractéristiques, c'est-à-dire, les solutions de l'équation caractéristique, on a

$$|pI| \le |AI| + |A_1I|e^{-\tau Re(p)}$$
 (2-3)

Où  $|pI| \to \infty$ , c'est-à-dire  $\lim_{|p| \to \infty} Re(p) = -\infty$ 

#### Démonstration :

\*

La fonction de Lambert W est appliquée pour résoudre  $\Delta(p) = 0$ , l'équation caractéristique transcendantale de  $\Delta(p)$ , peut être écrite comme :

$$(pI - AI)e^{-\tau p} = A_1I (2-4)$$

En multipliant membre à membre par  $\tau e^{-\tau A}$ , cette équation dévient

$$\tau(pI - AI)e^{\tau(p-AI)} = A_1 I \tau e^{-\tau AI}$$
 (2-5)

.

Basée sur la définition de la fonction de Lambert W qui est :

Définition 2-1

La fonction de Lambert W(x) est un ensemble de solutions de l'équation

$$x = W(x) e^{W(x)} (2-6)$$

Démonstration :

•

Alors l'équation  $\tau(pI - AI)e^{\tau(p-AI)} = A_1I\tau e^{-\tau AI}$  a cette forme

$$x = A_1 I \tau e^{-\tau A I}$$

$$W (A_1 I \tau e^{-\tau A I}) e^{W (A_1 I \tau e^{-\tau A I})} = A_1 I \tau e^{-\tau A I}$$

$$(2-7)$$

Par identification:

$$\tau(pI - AI) = W (A_1 I \tau e^{-\tau AI})$$
 (2-8)

•

La solution de l'équation caractéristique  $\Delta(p)=0$  peut être exprimée en fonction de la fonction de Lambert :

$$p = \frac{1}{\tau}W(A_1I\tau e^{-\tau AI}) + AI \tag{2-9}$$

Le spectre infini du l'équation différentielle scalaire  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau)$  est ainsi obtenu par les branches infinies de la fonction de Lambert W, et est donné explicitement en

termes de paramètres A,  $A_1$  et du retard  $\tau$  du système. Les racines de l'équation caractéristique pour  $k=\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \infty$ , sont

$$p_k = \frac{1}{\tau} W_k (A_1 I \tau e^{-\tau A I}) + A I \tag{2-10}$$

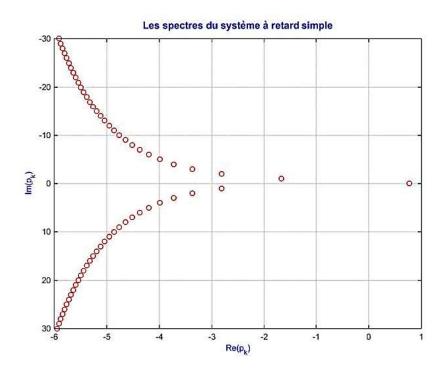


Figure 2-1: Localisation des racines de l'équation caractéristique des systèmes à retard Il existe un nombre infini de racines caractéristiques (voir la figure 2-1), il existe un nombre infini de racines dans les domaines complexes et il existe une seule réelle positive.

## 2.2.2 Les équations différentielles fonctionnelles à retard mixte et détermination de ses racines caractéristiques

Définition 2-2

Si on considère, l'équation différentielle fonctionnelle neutre :

$$\dot{x}(t) - d\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau) \tag{2-11}$$

Démonstration:

\*

Avec coefficients à matrices constantes réelles et un retard constant  $\tau > 0$ . Son polynôme caractéristique est donné par la transformée de Laplace :

$$pX(p) - dpX(p)e^{-\tau p} = AX(p) + A_1X(p)e^{-\tau p}$$

$$\Delta(p) = p(1 - de^{-\tau p}) - A - A_1e^{-\tau p}$$
(2-12)

Pour comprendre la localisation des solutions de l'équation caractéristique :

$$\Delta(p) = p(1 - de^{-\tau p}) - A - A_1 e^{-\tau p} = 0$$
 (2-13)

$$=> \Delta(p) = 1 - de^{-\tau p} - \frac{A}{p} - \frac{A_1 e^{-\tau p}}{p} = 0$$

$$\Delta(p) = 1 - \frac{A}{p} - e^{-\tau p} \left( d + \frac{A_1}{p} \right) = 0$$
 (2-14)

D'où l'équation caractéristique à considérer est

$$1 - de^{-\tau p} = 0 (2-15)$$

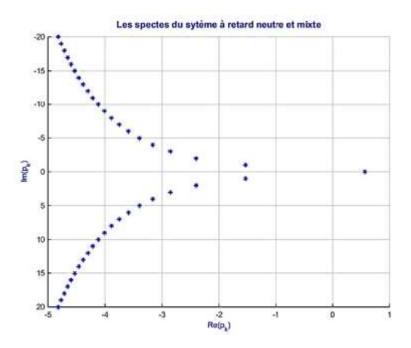
Qui correspond à l'équation de différence

$$x(t) - dx(t - \tau) = 0 (2-16)$$

Il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tels que toutes les solutions de  $\dot{x}(t) - d\dot{x}(t-\tau) = Ax(t) + A_1x(t-\tau)$  satisfaisaient  $Re(p) < \alpha$ . Si  $d \neq 0$ , puis toute ces solutions se trouvent dans une bande verticale  $\beta Re(p) < \alpha$ . Et il y a une séquence  $p_i$  des racines de l'équation caractéristique  $\Delta(p) = p(1 - de^{-\tau p}) - A - A_1e^{-\tau p} = 0$  que  $|p_i| \to \infty$  quand  $i \to \infty$ , puis il y aura alors une ordre de séquence  $p_i'$  des racines de  $1 - de^{-\tau p}$ , que  $p_i - p_i' \to 0$  quand  $i \to \infty$ . Pour  $d \neq 0$ , les racines de  $1 - de^{-\tau p} = 0$  sont données par

$$p = \begin{cases} \frac{\ln d}{\tau} + i \frac{2k\pi}{\tau} & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad si \ d \ge 0 \\ \frac{\ln|d|}{\tau} + i \frac{(2k+1)\pi}{\tau} & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad si \ d < 0 \end{cases}$$
(2-17)

Par l'utilisation de la fonction de Lambert pour avoir les spectres du système à retard mixte, on a la figure ci-après :



**Figure 2-2**: Localisation des racines de l'équation caractéristique des systèmes à retard de temps de type neutre ou mixte

# 2.3 Retard de transport d'eau chaude et réglage d'état pour une personne désirant une certaine température $T_d(t)$ dans une douche

Une situation simple du système à retard à temps continu (TDS) est décrite comme suit [12]. Soit une personne dans une douche souhaitant réaliser la valeur désirée  $T_d$  de la température de l'eau en appuyant sur la mitigeur. La plupart des personnes ont eu des difficultés à déterminer le réglage optimal de la température de l'eau : elles n'obtiennent pas la température désirée instantanément, mais avec un certain retard instable. Ce temps de retard dépend de la pression d'eau et de la longueur du tuyau de conduite. On suppose que l'eau est un fluide incompressible et a un écoulement stationnaire.

Une deuxième cause de retard correspondant au refroidissement de l'eau chaude dû aux échanges thermiques avec les tuyauteries froides : ce refroidissement d'abord important diminue progressivement jusqu'au moment où les tuyauteries se sont réchauffées et où s'établit un équilibre thermique. On met donc ici en évidence la notion de constante de temps et de temps de réponse du système.

#### Définition 2-3

Selon la loi de Poiseuille, le débit de l'eau est

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l} \tag{2-18}$$

où  $\mu = 0.01$  est la viscosité cinématique de l'eau, R est le rayon du tuyau de longueur l,  $\Delta p$  est la différence de pression entre les deux extrémités du tuyau de conduite. Le retard de temps  $\tau$  peut alors être obtenu :

$$\tau = \frac{\pi R^2 l}{Q} = \frac{8\mu}{\Delta p} \left(\frac{l}{R}\right)^2 \tag{2-19}$$

On va noter T(t) la température de l'eau et soit  $\tau$  le temps constant requis par l'eau pour sortir du mitigeur jusqu'à la tête de la personne (voir la figure 2-3). On suppose que la variation de température est proportionnelle à l'angle de la rotation de la vanne de commande, tandis que le taux de rotation de celui-ci est proportionnel à  $T(t) - T_d$ . Au temps t la personne observe que la température de l'eau a changé et est parti du mixeur au temps  $t - \tau$ , qui a comme conséquence l'équation suivante avec le retard de temps constant  $\tau$ :

$$\dot{T}(t) = -k[T(t-\tau) - T_d], \ k \in \mathbb{R}$$
 (2-20)

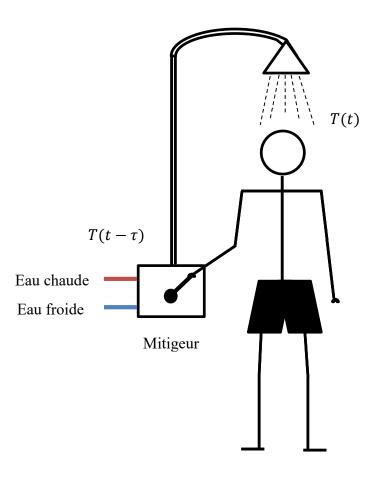
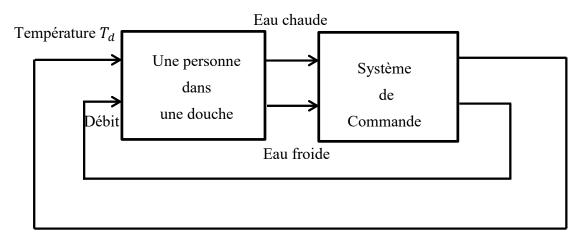


Figure 2-3: une personne dans une douche

Un schéma fonctionnel du système est illustré à la figure 2-5. La personne qui prend une douche détecte la température et le débit (signaux de mesure) et règle la poignée de douche (signal de commande) pour obtenir la température  $T_d$  et le débit souhaités. Le retour d'information est primordialement utile à raison des perturbations qui peuvent être des variations de la pression de l'eau et de la température dans les conduites d'eau.



**Figure 2-4**: Schéma bloc de la commande de température de l'eau pour une personne dans une douche

## 2.3.1 Fonction de transfert et localisation des racines de l'équation caractéristique du modèle

Définition 2-4

L'équation d'état et l'équation d'observation du système sont définies ci-dessous

$$\begin{cases}
\dot{T}(t) = -KT(t-\tau) + KT_d(t) \\
s(t) = T(t)
\end{cases}$$
(2-21)

Démonstration :

\*

Par transformation, on a:

$$pT(p) - T(t_0) = -KT(p)e^{-\tau p} + KT_d(p)$$

$$(p + Ke^{-\tau p})T(p) = T_d(p)$$

$$T(p) = (p + Ke^{-\tau p})^{-1}T_d(p)$$
(2-22)

Où K est une constante positive. L'équation qui exprime l'équation d'état et l'équation de sortie d'un système avec intégrateur à gain K dans le chemin vers l'avant et un retard de temps  $\tau$  dans le chemin du boucle de retour dont le schéma fonctionnel est montré sur la figure 2-6. La fonction de transfert de ce système est

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{S(p)}{T_d(p)} = \frac{KT_d(p)}{p + Ke^{-\tau p}}$$
(2-23)

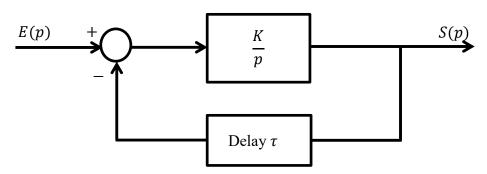


Figure 2-5: Diagramme bloc du système

#### Propriété 2.1

Les pôles du système sont les racines de

$$p + Ke^{-\tau p} = 0 \tag{2-24}$$

Les racines caractéristiques sont déterminées par la fonction de Lambert W, qu'on a déjà utilisée précédemment pour avoir les spectres du système ci-dessus dans MATLAB, et sont tracés sur la figure 2-7.

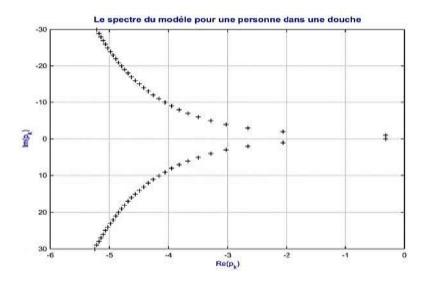
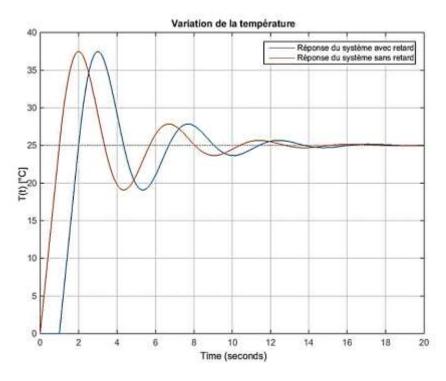


Figure 2-6: Localisation des spectres du système

#### 2.3.2 Comportement de la réponse de la commande $T_d(t)$

La réponse exacte et la réponse avec retard est représentée selon la figure ci-dessous. La température réelle dépasse souvent la température désirée et, parfois, cela prend un moment pour obtenir la droite de la température.



**Figure 2-7**: Variation de la température T(t) [ ${}^{\circ}C$ ] avec un retard unitaire

Le changement de la position de la vanne de commande est presque immédiat, cependant, le changement de la température de l'eau doit attendre jusqu'à ce que le retard se soit écoulé. Si la position de la vanne de commande est constamment ajustée selon la température actuellement perçue, alors il est très probable que la température oscille avant d'avoir la stabilité c'est-à-dire la température désirée  $T_d(t)$ .

## 2.4 Modèle mathématique et utilisation d'un système à retard pour le remplissage d'un réservoir à sciure de bois à partir d'une vis sans fin

#### 2.4.1 Modélisation mathématique du système

La figure 2-9 montre un réservoir à sciure de bois avec une vis d'alimentation et une bande transporteuse (la courroie a une vitesse constante). Il y a une sortie de sciure via une sortie au fond du réservoir. Le débit massique  $m_s$  de la vis d'alimentation à la courroie est proportionnel au signal de commande de vis e:

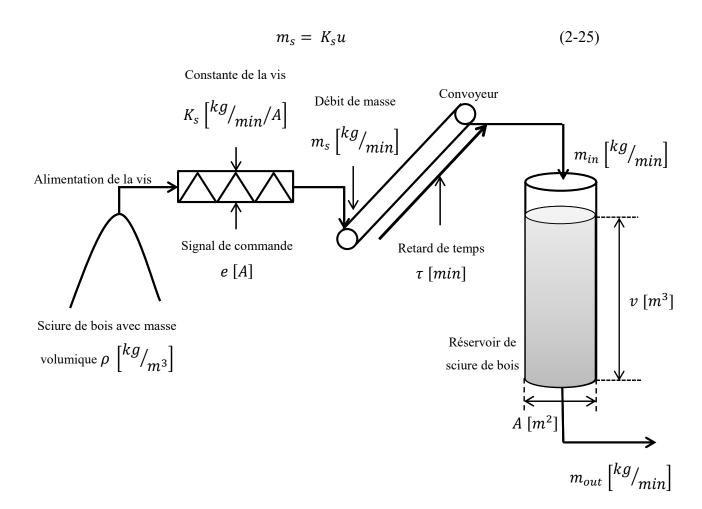


Figure 2-8: Utilisation d'un système à retard

#### Définition 2-5

Le débit de masse  $m_{in}$  dans le réservoir est égal à  $m_s$  mais avec un retard de temps  $\tau$  :

$$m_{in}(t) = m_{s}(t - \tau)$$

La figure 2-10 montre le diagramme général des blocs des entrées et de sortie global du système. e et  $m_s$  sont les variables d'entrée, v est la variable de sortie c'est-à-dire le volume de sciure dans le réservoir et ce qui nous intéresse particulièrement.

e : signal de commande du vis [A]

 $m_s$ : masse de sciure de bois  $[{}^{kg}/_{min}]$ 

 $m_{in}$ : débit de masse dans le réservoir  $[{}^{kg}/_{min}]$ 

 $\tau$ : est toujours le retard de temps [min]

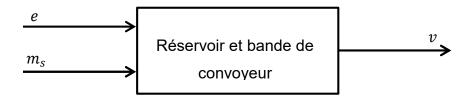


Figure 2-9 : Diagramme de blocs d'entrée et de sortie global du système

Comme il y a un retard dans le système (en raison du retard de transport de la bande transporteuse), pour élaborer un modèle mathématique décrivant le comportement du volume de sciure v, il est donc important d'inclure l'argument de temps dans les équations.

#### Définition 2-6

Le bilan de masse si le contenu de sciure du réservoir est

$$\frac{d}{dt}[\rho A v(t)] = \rho A \dot{v}(t) = m_{in}(t) - m_{out}(t)$$

$$= m_s(t - \tau) - m_{out}(t) \qquad (2-26)$$

$$= K_s u(t - \tau) - m_{out}(t) \qquad (2-27)$$

 $\dot{v}$ : Variation de volume de sciure dans le réservoir  $[m^3]$ 

 $K_s$ : Constante de la vis

 $\rho$ : Masse volumique  $\left[ {}^{kg}/_{m^3} \right]$ 

 $m_{out}$ : Masse de sortie [kg]

Un schéma des diagrammes en bloc mathématiques détaillés dérivés à partir du modèle mathématique, en supposant que toutes les variables et paramètres indépendants sont des variables d'entrée, peut être présenté de plusieurs autres manières.

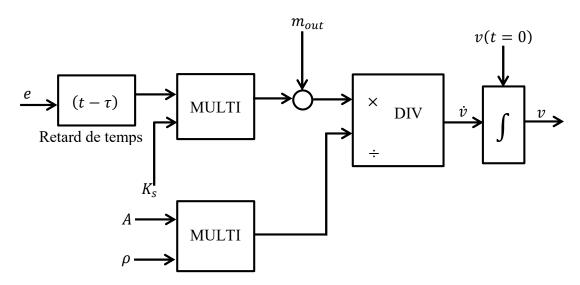


Figure 2-10 : diagrammes en bloc mathématiques détaillés

#### 2.4.2 Equation caractéristique et fonction de transfert du modèle

Démonstration :

\*

Le modèle mathématique d'un réservoir de sciure de bois a été dérivé de l'équation :

$$\rho A \dot{v}(t) = K_s e(t - \tau) - m_{out}(t) \tag{2-28}$$

La transformée de Laplace de cette équation  $\rho A \dot{v}(t) = K_s e(t - \tau) - m_{out}(t)$ 

(2-28) est

$$\rho A[pv(p) - v_0] = K_s e^{-\tau p} E(p) - m_{out}(p)$$
 (2-29)

Les calculs de la fonction de transfert  $G_1(s)$  du signal de commande de vis u au volume v et la fonction de transfert  $G_2(s)$  de la sortie  $m_{out}$  dépasse le volume v. La solution pour la variable de sortie v donne :

$$V(p) = \frac{1}{p}v_0 + \frac{K_S}{\rho A p}e^{-\tau p}E(p) + \left(-\frac{1}{\rho A p}\right)m_{out}(p)$$
 (2-30)

Pour condition initiale nulle:

$$V(p) = \frac{K}{p} [K_s e^{-\tau p} - m_{out}(t)]$$
 (2-31)

Où,

$$K = \frac{1}{\rho A} \tag{2-32}$$

qui est la transformé de Laplace de u(t)

$$V(p) = G(p)E(p)$$

$$G(p) = \frac{1}{p} [K_s e^{-\tau p} - m_{out}(t)]$$
(2-33)

#### Propriété 2.2

Et l'équation caractéristique transcendantale du système, est :

$$\Delta(p) = p$$

Où p = x + iy, qui a une infinité de solution dans le corps des nombres complexes, telle que selon la figure 2-12, qui montre les spectres du sytème à retard.

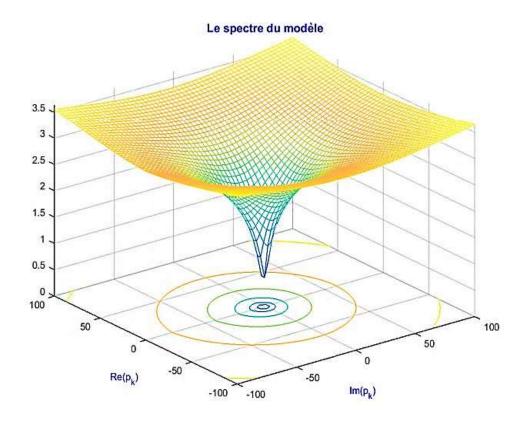


Figure 2-11: Les racines de l'équation caractéristique

#### 2.5 Conclusion

On peut dire que l'analyse du spectre des systèmes à retard et son applications sont très différentes des systèmes sans retard. Mais ils ont quand même des points communs comme si seul le comportement terminal du système est intéressant, une description par l'équation différentielle ou une fonction de transfert suffira pour représenter le système. Mais si le comportement interne des systèmes est également intéressant, alors une représentation de l'espace d'état du système est très utile comme celui des systèmes sans retard. Donc, comparer à un système sans retards, l'équation transcendantale  $\Delta(p) = 0$  a généralement une infinité de nombre de solutions, ce qui lui permet d'être un système à dimension infini. Cependant, l'analyse et synthèse des systèmes linéaires à retard seront discutées dans le chapitre suivant.

#### CHAPITRE 3. ANALYSE DES SYSTEMES LINEAIRES A RETARD

#### 3.1 Introduction

Une partie intégrale de la science et de la technologie de contrôle de systèmes dépendront toujours de celle de la modélisation. L'ingénierie de contrôle peut être cruciale pour chacune de ses applications, comme par exemple dans l'électricité, les procédés industriels, la qualité, l'économie, la sécurité, le soin de l'environnement, le confort, la faisabilité, ou encore d'autres domaines. Pourtant, il faut chercher à appliquer la théorie de commande des systèmes pour pouvoir observer les phénomènes autour du système afin d'interconnecter certains composants pour effectuer certaines tâches et rapporter une réponse désirée, c'est-à-dire pour produire le signal désiré ou réglé qui est la sortie, on doit savoir si le système est accessible, commandable, observable, et stable quand il est sous la manipulation du signal de l'entrée ou de commande.

Des applications très concrètes sont par exemple, le pilotage automatique d'un avion qui peut être crucial pour la sécurité, la position et la vitesse de l'avion doivent être contrôlées ; la commande ou réglage d'état de la puissance motrice générer par le moteur d'un véhicule, pour déterminer sa position, sa vitesse, son accélération, ou encore la commande d'un moteur à courant continu. Tout d'abord, il faut donc une connaissance de ce qu'est la commandabilité et l'observabilité ainsi que la stabilité pour le système linéaire à retard à temps invariant.

#### 3.2 Commandabilité et observabilité d'un système à retard

#### Définition 3-1

La commandabilité est une caractéristique d'une représentation d'état d'un système, ou un attribut structural fondamental de n'importe quel système de contrôle, traitant le rapport entre l'entrée et l'état du système, c'est-à-dire qu'elle nous indique si une ou plusieurs de ces dynamiques peuvent être modifiées par les entrées. Elle est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue un rôle très important dans la théorie de commande des systèmes dans l'espace d'état.

Plus spécifiquement, la contrôlabilité de système aborde s'il existe toujours une commande *e* qui peut transférer l'état initial du système à n'importe quel état désiré du système dans un temps fini.

Dans la théorie de commande à temps-optimale, on suppose qu'à partir d'un certain état initial le point cible peut être atteint dans un temps fini en employant une certaine commande admissible. On considère comme étant une cible un point dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . La commandabilité des systèmes à retard est un peu plus difficile que leurs contreparties à dimensionnelles finies : plusieurs propriétés de la commandabilité peuvent être définies et dépende du type de représentation employé pour modeler les systèmes à retard [14].

On note que la *commandabilité* d'un système de matrices caractéristiques (A, B) sera appelée *commandabilité de la paire* (A, B).

Soit le système à retard sous sa forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{n} B_i e(t - \tau_i) \\ s(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{n} D_i x(t - \tau_i) \end{cases}$$
(3-1)

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état, e(t) est le vecteur d'entrée connu, y(t) est le vecteur de sortie, n représente le retard maximal dans la variable d'état, d'entrée, de sortie, ainsi que dans l'observation directe si elle existe. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  sont de matrices à des dimensions appropriées.  $x(t) = \phi(t)$ ,  $t \in [-\tau_n, 0]$  est l'état initial fonctionnel du système retardé. Cela peut être écrit comme dans des modèles d'anneaux d'opérateurs :

$$\begin{cases}
\dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)x(t) \\
s(t) = C(\nabla)x(t)
\end{cases}$$
(3-2)

#### 3.2.1 Système commandable

#### Propriété 3.1

Le système peut être commandable au-dessus d'un espace d'anneaux d'opérateur  $\mathbb{R}(\nabla)$  si, Morse [1976], Sontag [1976] :

$$Im < A(\nabla)/B(\nabla) >= \mathbb{R}^n(\nabla)$$
 (3-3)

Où la matrice de commandabilité est

$$\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle = [B(\nabla) \quad A(\nabla)B(\nabla) \quad \dots \quad A^{n-1}(\nabla)B(\nabla)]$$
 (3-4)

La possibilité pour rechercher tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n(\nabla)$ , tout élément du module d'état  $\mathbb{R}^n(\nabla)$  utilisant une « loi de commande polynômiale ».

D'où, avec n étant le rang de la matrice de commandabilité  $< A(\nabla)/B(\nabla) >$  du système

$$rang < A(\nabla)/B(\nabla) >= n \tag{3-5}$$

#### 3.2.2 Commandabilité spectrale

#### Définition 3-2

La commandabilité spectrale est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité d'un système à retard. Cependant la loi de commande à employer pour la stabilisation doit inclure le retard. Le système à retard est spectralement commandable s'il satisfait la caractérisation suivante avec  $\nabla = e^{-\tau p}$ :

$$rang[pI_n - A(\nabla) \quad B(\nabla)] = n, \forall p \in \mathbb{C}$$
 (3-6)

#### Propriété 3.2

On rappelle que le rang d'une matrice M est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants, et peut se calculer par la taille du plus grand mineur non nul de M.

#### 3.2.3 Observabilité du système à retard

#### Définition 3-3

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

#### Propriété 3.1

Un système linéaire (x = Ax + Be; s = Cx) est complètement observable si, une commande donnée et une sortie sur l'intervalle  $t_0 \le T \le t$ , on peut déterminer n'importe quel état initial  $x(t_0)$ , qui est l'équivalent de la reconstruction de l'état x(T).

#### Propriété 3.2

- Pour un système à retard de temps, le prolongement de la base est l'observabilité initiale, c'est-à-dire, tout état initial (x(0), φ(t), t ∈ [-τ<sub>n</sub>, 0]) est observable si le système autonome n'est pas identiquement nulle sur [0, +∞[. De sorte que, connaître l'état initial n'est pas nécessaire pour le but de commande : ce qui est important est de pouvoir reconstruire x(t) à tout moment t.
- Par opposition aux systèmes linéaires sans retard, la notion de l'observabilité initiale n'est pas équivalente à la reconstruction des variables d'état, en effet le retard doit avoir un comportement passager de durée finie.

Ainsi l'observabilité du système 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{n} B_i e(t-\tau_i) \\ s(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{n} D_i x(t-\tau_i) \end{cases}$$
(3-1)

se défini comme

$$rang < C/A >= rang \begin{bmatrix} C(\nabla) \\ C(\nabla)A(\nabla) \\ \vdots \\ C(\nabla)A^{n-1}(\nabla) \end{bmatrix} = n$$
 (3-7)

D'une façon sous forme spectrale, on a

$$rang \begin{bmatrix} C(e^{-\tau p}) \\ C(pI_{i} - \sum_{i=0}^{n} A_{i}(e^{-\tau_{i}p})) \\ \vdots \\ C(pI_{i} - \sum_{i=0}^{n} A_{i}(e^{-\tau_{i}p}))^{n-1} \end{bmatrix} = n$$
 (3-8)

#### 3.3 Stabilité du système à retard

L'analyse de stabilité des systèmes à retard est un problème très étudié et a mené à un bon nombre d'approches qui peuvent être classifiées en deux cas : le domaine fréquentiel et l'analyse dans le domaine de temps, Niculescu [2001], Gu et al. [2003] [8], [18]. Tandis que le premier traite la caractéristique polynomiale du système, le second considère directement le domaine de l'espace d'état et les matrices.

#### Définition 3-4

En général, la stabilité d'un système est sa capacité de résister à toutes les petites influences inconnues. Puisqu'en réalité des perturbations sont toujours produites, la stabilité est une

propriété importante de n'importe quel système de contrôle, retardé ou non retardé. On considère le problème à condition initiale de Cauchy :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad \qquad t \ge t_0 \tag{3-9}$$

$$x(t) = x_0 \qquad \qquad t = 0 \tag{3-10}$$

$$x(t) = \phi(t) \qquad \qquad t_0 - \tau_{max} \le t \le t_0 \tag{3-11}$$

#### Définition 3-5

Une fonction constante  $\phi_e$  s'appelle un état d'équilibre si  $f(t,\phi_e)=0$  pour tout  $t\geq t_0$ . Même dans le cas linéaire de  $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ , le système peut avoir plus d'un état d'équilibre en général. Mais l'analyse de stabilité de n'importe quelle fonction d'équilibre  $\phi_e$  peut être réduite à l'analyse de l'équilibre nul par la substitution :

$$x(t) - \phi_{\rho}, \psi(\theta) = \phi(\theta) - \phi_{\rho} \tag{3-12}$$

Pour z, on obtient

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + \phi_e) \qquad \qquad t \ge t_0 \tag{3-13}$$

$$z_0(t) = 0 t = 0 (3-14)$$

$$z(t) = \psi(t) \qquad \qquad t_0 - \tau_{max} \le t \le t_0 \tag{3-15}$$

Par conséquent, ce n'est aucune restriction si on pose à la suite que f(t,0) = 0.

#### Propriété 3.3

L'état d'équilibre  $\phi_e = 0$  est stable dans le sens de Lyapunov, si pour n'importe quels nombres positifs  $t_0$  et  $\varepsilon$  où il existe  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tels que chaque solution continue de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  qui satisferaient

$$\max |x(t)| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$
  $t_0 \le t \le t_0 + \tau_{max}$  (3-16)

et satisfera également

$$\max |x(t)| \le \varepsilon$$
  $t_0 \le t \le +\infty$  (3-17)

#### Propriété 3.3

L'état d'équilibre stable  $\phi_e = 0$  est asymptotiquement stable si chaque solution continue de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  satisfait également  $\lim_{t \to +\infty} x(t) \to 0$ .

#### 3.3.1 Stabilité via l'équation caractéristique

#### Propriété 3.4

L'équation différentielle fonctionnelle retardée est exponentiellement stable si toutes les racines de l'équation caractéristique polynômiale sont à partie réelle négative.

$$Re(p) < 0 \tag{3-18}$$

$$det(\Delta(p)) = [pI - AI - \sum_{i=1}^{n} A_i I e^{-\tau_i p}] = 0$$
(3-19)

Pour tout  $p \in \mathbb{C}$  satisfaisant l'équation  $det(\Delta(p)) = 0$ .

#### 3.3.2 Tests de stabilité et quelques normes

#### Propriété 3.5

On dit qu'un critère de stabilité est à retard indépendant ou indépendant de retard si, pour un système avec des retards constants multiples, le rapport des retards ne doit pas être connu pour que ce critère soit applicable. On distingue les types d'essais de stabilité suivants :

- Retard indépendant ou indépendant du retard des critères de stabilité de retard (les retards peuvent être constants ou variables)
- Critères de stabilité dépendants de retard.

Avant d'entamer les sous-sections suivantes, une certaine notation est présentée :

 $\lambda_i(A)$ : Valeur propre de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ 

 $\lambda_{max}(A)$ : La plus grande valeur de la partie réelle des valeurs propres de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ 

 $\lambda_{min}(A)$ : La plus petite valeur de la partie réelle des valeurs propres de la matrice A

Re(.): Partie réelle de (.)

*Im*(.): Partie imaginaire de (.)

|x|: Norme du vecteur  $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \tag{3-20}$$

$$|x|_{\infty} = \max_{i} |x_i| \tag{3-21}$$

$$||A||$$
: Norme de la matrice :  $||A||_1 = \max_i \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (3-22)

#### Définition 3-6

La norme spectrale ou la plus grande valeur des valeurs singulière de A se définie :

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sigma \tag{3-23}$$

La norme de Frobenius et la norme  $H_{\infty}$  est

$$||A||_F = \sqrt{trace(A^T A)}$$
 (3-24)

$$||A||_{\infty} = \max_{i} \bar{\sigma}[A] \tag{3-25}$$

 $\mu A$ : Mesure de la matrice  $\mu(A)_1 = \max_{j} \left[ Re(a_{jj}) + \sum_{\substack{i=1 \ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right]$ 

$$\mu(A)_2 = 0.5\lambda_{max}(A^T A)$$

$$\mu(A)_{\infty} = \max_{i} \left[ Re(a_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right]$$

 $\rho$ : désigne le rayon spectral, et  $\lambda_i$  qui est le spectre d'une matrice A, on note que ceci n'est pas une norme

$$\rho = \max_{i} \lambda_{i} \tag{3-26}$$

#### 3.3.3 La méthode directe de Lyapunov

De la stabilité des équations différentielles ordinaires, l'efficacité de la méthode directe de Lyapunov (ou la deuxième méthode) pour analyser des problèmes de stabilité est bien connue. (La première méthode de Lyapunov fournit qu'une solution explicite de l'équation considérée soit connue). Krasovskii [5] était le premier qui a généralisé cette méthode pour les équations différentielles fonctionnelles retardées (EDFR ou RDFEs). Puis à chaque solution d'une EDFR, il y a une courbe intégrale dans l'espace  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ , c'est une généralisation normale pour utiliser les fonctionnelles de Lyapunov. Ces fonctionnelles s'appellent souvent les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

#### Propriété 3.6

Il existe une fonction de Lyapunov  $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , telle que :

Il existe  $V_1, V_2, V_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$  non décroissante où

$$V_1(||x||) < V(x) < V_2(||x||)$$

Et  $V_3 > 0$ , 0 < x, alors,

$$\dot{V}(t) \le -V_3(\|x\|) \tag{3-27}$$

Alors la solution triviale de  $\dot{x}(t)$  est uniformément asymptotiquement stable.

Pour cette première condition [27], le système est entièrement indépendant du temps. Généralement, la fonction de Lyapunov possède la forme quadratique en x:

$$V(x) = x^T P x$$
, où P est définie positive,  $P = P^T > 0$  (3-28)

Pour un système linéaire de la forme  $\dot{x} = Ax$ . Le théorème de Lyapunov est le suivant :

Propriété 3.7

$$\forall P = P^T > 0 \tag{3-29}$$

$$A^T P + PA + Q = 0 \text{ où } Q = Q^T > 0$$
 (3-30)

On résout à chercher la matrice *P* solution de cette équation, et le système est alors asymptotiquement stable (on rappelle que la stabilité asymptotique est la convergence du système vers le point d'équilibre).

Propriété 3.8

• Une fonction de Lyapunov est une fonction continue telle que

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0, \text{ pour } x = 0$$
 (3-31)

Et

$$\dot{V}(x) \le 0 \ \forall x \ne 0 \ \text{et} \ \dot{V}(x) = 0 \ \text{pour} \ x = 0 \tag{3-32}$$

• Si

$$||x|| \in \mathbb{R}^n \to \infty, V(x) \to \infty$$
 (3-33)

• V décroît le long de toute sa trajectoire, telle que  $\frac{dV}{dt} \le 0$ 

En résumant, si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné, alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que  $\dot{V}(x) < 0$ , la stabilité asymptotique du système est assuré [7],[15].

#### 3.3.4 La méthode de Razumikhin [13]

L'idée du type du théorème de Razumikhin est de traiter le problème de stabilité avec des fonctions plutôt qu'avec des fonctionnelles. Dans le commencement de sa recherche, Razumikhin (1958) [13] a considéré le système de retard  $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))$  et étudia le problème de stabilité sur la base des premières approximations. Il a démontré que la solution zéro de ce système est asymptotiquement stable si une fonction définie positive V(t,x) a un dérivé défini négatif de la solution de V(x) = 0 avec l'état additionnel  $V(t-\tau,x(t-\tau)) < V(t,x(t))$ . Vers la fin des années 70, Hale [15] a présenté une version plus forte du type de théorème de Razumikhin. Selon lui, « Quelques moments de réflexion dans la direction appropriée indiquent qu'il est inutile d'exiger que  $\dot{V}$  soit non positif pour toutes les données initiales afin d'avoir la stabilité ». En fait, si une solution d'une équation différentielle fonctionnelle retardée commence dans une boule et est de laisser cette boule à un moment donné t, puis  $|x_t| = |x(t)|$ , c'est  $|x + \theta| = |x(t)|$  pour tout  $\theta \in [-\tau_{max}, 0]$ . En conséquence, on doit seulement considérer des données initiales satisfaisant cette dernière propriété.

#### Propriété 3.9

On considère qu'il existe une fonction continue V(t, x), tel que

$$w_1(|x|) \le V(t, x_t) \le w_2(|x|) \tag{3-34}$$

Et

$$\dot{V}(t, x) \le -w_3(|x|) \tag{3-35}$$

Si

$$V(t+\theta,x(t+\theta)) \le w_4(V(t,x(t))) \tag{3-36}$$

Pour tout  $p \in [-\tau_{max}, 0]$  et  $\lim_{p \to \infty} w_1(p) \to \infty$ , alors la solution triviale de V(x) = 0 est uniformément asymptotiquement stable.

#### 3.3.5 Essais de stabilité indépendante des retards

#### Propriété 3.4

Pour le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau)$ ;  $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , avec retard constant  $\tau$ , Mori et al. (1981) a présenté le critère de stabilité bien connu  $\mu A_1 + \|A_1\|_1 < 0$ . Cheres et al. (1989)

Erreur! Source du renvoi introuvable. [24] a indiqué que cette condition de stabilité est également valide si le retard est dépendant du temps. Wang et al. [17] ont montré ce type de critère peuvent également être formulés pour des systèmes avec des retards constants multiples.

En effet, on peut avoir une généralisation du système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t - \tau_i) & t_0 \le t \\ x(t) = \phi(t) & \tau_{max} \le t \le t_0 \end{cases}$$
(3-37)

On suppose que le retard est continu et satisfait l'inégalité suivante :  $0 \le \tau_i \le \tau_{max}$ . Le premier état de stabilité est établi en utilisant des techniques de comparaison, alors que les autres critères de stabilité sont dérivés de celui du concept de Razumikhin.

#### Propriété 3.10

Le système ci-dessus est asymptotiquement stable indépendant des retards si l'inégalité, valide pour tout . = 1,2, ..., ∞

$$\mu A_1 + \|A_1\|_1 < 0 \tag{3-38}$$

Démonstration:

\*

La solution de ce système peut être représentée par

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-p)} \left[\sum_{i=1}^n A_i x(p-\tau_i)\right] dp \qquad t_0 \le t$$
 (3-39)

Où  $x_0 = \phi(0)$ . L'utilisation de la norme des deux côtés de l'équation donne

$$|x(t)| \le ||e^{At}|||x_0| + \int_{t_0}^t ||e^{A(t-p)}|| [\sum_{i=1}^n ||A_i|||x(p-\tau_i)|] dp$$
 (3-40)

Maintenant, l'inégalité:  $\|e^{At}\| \le e^{\mu At}$  pour  $t \ge t_0$  et on définie

$$v(t) = |x(t)|$$
 et  $v_0 = |x(t_0)|$ 

$$\begin{cases} v(t) \leq e^{\mu A t} v_0 + \int_{t_0}^t e^{\mu A (t-p)} [\sum_{i=1}^n ||A_i|| ||v(p-\tau_i)||] dp & t_0 \leq t \\ v(t) = |\phi(t)| & t_0 - \tau_{max} \leq t \leq t_0 \end{cases}$$
(3-41)

Correspondant à l'inégalité ci-dessus, l'équation intégrale suivante est considérée

$$\begin{cases} z(t) = e^{\mu At} v_0 + \int_{t_0}^t e^{\mu A(t-p)} [\sum_{i=1}^n ||A_i|| ||z(p-\tau_i)||] dp & t_0 \le t \\ z(t) = |\phi(t)| & t_0 - \tau_{max} \le t \le t_0 \end{cases}$$
(3-42)

Le variable z(t) est la solution de l'équation à différences différentielle scalaire suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = e^{\mu A t} z(t) + \int_{t_0}^t e^{\mu A(t-p)} [\sum_{i=1}^n ||A_i||| |z(p-\tau_i)|] dp & t_0 \le t \\ z(t) = |\phi(t)| & t_0 - \tau_{max} \le t \le t_0 \end{cases}$$
(3-43)

En utilisant le théorème de comparaison, on obtient

$$|x(t)| = v(t) \le z(t) \tag{3-44}$$

On peut écrire selon [14] que la solution de l'équation à différences différentielle scalaire de la forme

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x(t - \tau_i)$$
 (3-45)

Est asymptotiquement stable si l'inégalité

$$a + \sum_{i=1}^{n} |a_i| < 0 \tag{3-46}$$

#### Propriété 3.11

Le système  $\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x(t - \tau_i)$  est stable indépendante du retard si

- A est stable;
- $A + A_i$  est stable;

$$\rho[(j\omega I - A)^{-1}A_1] < 1 \qquad 0 \le \omega \tag{3-47}$$

Où  $\rho$  désigne le rayon spectral, et  $\lambda_i$  qui est le spectre, de la matrice

$$[(j\omega I - AI)^{-1}A_1I] \qquad \qquad \rho = \max_i \lambda_i$$

#### Définition 3-7

En considérant l'opérateur de retard  $\nabla=e^{-p au}$  comme incertitude, cela mène au résultat :

$$\|(pI - A)^{-1}A_1\|_{\infty} < 1 \tag{3-48}$$

#### Propriété 3.12

Le système (3-37) est asymptotiquement stable si l'inégalité

$$\mu(PA)_2 + \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \sum_{i=1}^{n} ||PA_i||_2 < 0$$
 (3-49)

prises pour une certaine matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 

Démonstration :

\*

La fonction de *Lyapunov-Razumikhin* est choisie pour être l'équation quadratique

$$V(x) = x(t)^T P x(t)$$
(3-50)

Où P est la matrice symétrique définie positive.

Le système (3-37) est asymptotiquement stable indépendant du retard si l'inégalité

$$\mu(PA)_2 + \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)^3}} \sum_{i=1}^{n} ||A_i||_2 < 0$$
 (3-51)

Propriété 3.13

Le système (3-37) est asymptotiquement stable s'ils existent des matrices symétriques définies positives  $P, P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que

$$A^{T}P + PA + \sum_{i=1}^{n} P_{i} + PA_{i}P_{i}^{-1}P < 0$$
 (3-52)

On suppose que A < 0. Si la matrice définie positive, symétrique, P et Q associés à l'équation de Lyapunov

$$A^{T}P + PA = -(n+1)Q (3-53)$$

Qui satisfait l'inégalité

$$-Q + \sum_{i=1}^{k} P A_i Q^{-1} A_i^T P < 0 (3-54)$$

alors le système 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t - \tau_i) & t_0 \le t \\ x(t) = \phi(t) & \tau_{max} \le t \le t_0 \end{cases}$$

(3-37) est asymptotiquement stable.

On suppose que  $\mu(A) < 0$ , puis le système (3-37) est asymptotiquement stable si l'inégalité

$$\lambda_{max}[A + A^T - 4n\sum_{i=1}^n A_i (A + A^T)^{-1} A_i^T] < 0$$
 (3-55)

#### 3.3.6 Essai de stabilité dépendante du retard

Définition 3-8

Le système à retard de temps considéré est décrit par l'équation à différences différentielle suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x (t - \tau(t))$$
 (3-56)

Où  $0 < \tau(t) < \tau_{max}$  est continu. De *Sugujama* (1961), on peut savoir que si le système  $\dot{x}(t) = (A + A_1)x(t)$  est asymptotiquement stable, alors le système l'est aussi bien pour des valeurs suffisamment petites de  $\tau_{max}$ . Su et *Huang* (1992) pouvaient donner à une évaluation de  $\tau_{max}$  de valeurs tel que ce système est asymptotiquement stable.

#### Propriété 3.14

Supposons que  $A + A_1$  est asymptotiquement stable. Alors le système est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive P tel que l'inégalité

$$\tau_{max} < \frac{-\mu(P(A+A_1))_2}{\|A_1(A+A_1)\|_2} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{min}P}{\lambda_{max}^3P}}$$
 (3-57)

Le critère de stabilité est moins conservateur que le critère de stabilité à retard indépendant quand le retard est petit.

### 3.3.7 Essais de stabilité du système à retard selon la théorie de Lyapunov-Razumikhin

On considère un système linéaire à retard de temps de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t - \tau_i) & t_0 \le t \\ x(t) = \phi(t) & \tau_{max} \le t \le t_0 \end{cases}$$
(3-58)

D'après la théorie de *Lyapunov-Razumikhin* sur la fonction quadratique, on a une stabilité pour toute condition initiale s'il existe une fonction V(x) telle que pour  $x \ne 0$  V(x) > 0 et  $\dot{V}(x) < 0$ . Une telle fonction V(x) est dite fonction d'énergie du système.

D'où

$$\begin{cases} V(x(t)) > 0 \\ \dot{V}(x(t)) < 0 \end{cases} <=> \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases} <=> \begin{bmatrix} A^T P + PA & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} < 0$$
 (3-59)

#### Définition 3-9

La stabilité indépendante du retard est alors définie comme la fonction de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$$
(3-60)

Le dérivé de V par rapport au temps t le long des solutions de la trajectoire du système est donné par

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_1 \\ A_1^T & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$
(3-61)

Application du théorème de Lyapunov-Razumikhin:

#### Propriété 3.15

Le système (3-58) est asymptotiquement stable indépendant du retard s'il existe  $P = P^T > 0$  et un scalaire  $\tau > 0$  tels que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \tau P & PA_1 \\ A_1^T & -\tau P \end{bmatrix} < 0 \tag{3-62}$$

On note que cette équation n'est pas une inégalité linéaire matricielle (*LMI*) dû au terme bilinéaire  $\tau P$ . Néanmoins, le problème est quasi-convexe quand  $\tau$  est fixe, alors  $\begin{bmatrix} A^T P + PA + \tau P & PA_1 \\ A_1^T & -\tau P \end{bmatrix} < 0 \tag{3-62} devienne une inégalité linéaire$ 

matricielle (LM I : Linear Matrix Inequality). En réécrivant cette condition comme suit

$$A^{T}P + PA + \tau P + \tau^{-1}PA_{1}P^{-1}A_{1}^{-T}P < 0$$
 (3-63)

## 3.3.8 Essai de stabilité du système à retard par les méthodes de Lyapunov-Krasovskii

On considère la fonctionelle de Lyapunov-Krasovskii suivante

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-h}^t x(\theta)^T Q x(\theta) d\theta$$
 (3-64)

Où P, Q sont des matrices constantes, définie positive.

Le calcul de la dérivé de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V(x_t)$  sur toute les solutions de la trajectoire du système est

Démonstration:

\*

$$\dot{V}(x_t) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau)$$

$$\dot{V}(x_t) = [Ax(t) + A_1x(t-\tau)]^T Px(t) + x(t)^T P[Ax(t) + A_1x(t-\tau)] + x(t)^T Qx(t) - x(t-\tau)^T Qx(t-\tau)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_1 \\ A_1^T & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$
(3-65)

Propriété 3.16

Le système à retard de temps où  $0 < \tau$  est un retard constant inconnu est globalement asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  qui satisfait 1'ARI (Algebraic Riccati Inequality), telle que

$$A^{T}P + PA + Q + PA_{1}Q^{-1}A_{1}^{-T}P < 0 (3-66)$$

Le système à retard est asymptotiquement stable pour n'importe quel retard s'il existe une inégalité matricielle linéaire, pour  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  tels que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \tau Q & PA_1 \\ A_1^T P & -\tau Q \end{bmatrix} < 0 \tag{3-67}$$

Ce qui signifie que toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  (réelles) de la matrice symétrique ci-dessus sont strictement négatives ( $\lambda_i < 0$ ). La stabilité quadratique peut ainsi se caractériser par un système de *LMI* dont l'inconnue est la matrice symétrique P.

#### 3.4 Exemple fondamentale

Les fonctionnelles de Lyapunov sont employées pour traiter le problème de stabilité pour les systèmes à retard. Le principe de Lyapunov rapporterait les critères de stabilité qui exigerait dont la connaissance complète du retard  $\tau$ .

Avec des applications numériques, pour un système quelconque, le système à retard de temps de la forme général  $\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x(t-\tau_i)$  n'est pas stable après avoir appliqué une de ces propriétés, comme par exemple celui de l'équation de Lyapunov et ou selon l'inégalité matricielle linéaire. Pour i=1; retard unitaire  $\tau$ 

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t - \tau)$$
 (3-68)

$$A^{T}P + AP + P = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Les valeur propres de  $\begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$  sont

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autre valeur étant nulle, le système n'est pas stable la stabilité via l'inégalité matricielle linéaire

$$A^{T}P + PA + \tau P + \tau^{-1}PA_{1}P^{-1}A_{1}^{-T}P < 0$$

$$A^{T}P + PA + \tau P + \tau^{-1}PA_{1}P^{-1}A_{1}^{-T}P = \begin{bmatrix} 3.1 & -0.05\\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$
(3-69)

Dont les valeurs propres sont  $\begin{bmatrix} 3.0963 & 0 \\ 0 & 0.4037 \end{bmatrix} > 0$ , qui affirme l'instabilité

Ce système n'a pas de stabilité donc, il faut passer dans ce cas-là à une transformation de la représentation d'état, en procédant par le changement de variable d'état ou un changement de base. Alors une écriture du problème sous forme LMI est possible et une loi de commande u(t) = Kx(t) stabilisant le système peut être effectué.

Démonstration:

•

Pour faciliter la compréhension du comportement de la stabilité d'un système dynamique à retard, on va établir une autre équation d'état du système à retard, supposé stable, mais qu'on va prouver et rechercher ces stabilités.

Soit le système

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 1\\ 0 & -5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t - \tau)$$
 (3-70)

On va appliquer quelques-uns de ces théorèmes et corollaires pour voir la stabilité de ce système à retard,

$$a + \sum_{i=1}^{n} |a_i| < 0$$

$$\implies a + |a_1| < 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| < 0$$

 $\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} < 0$  car le diagonale des valeurs propres de cette

matrice sont tous à valeurs réelles négatives :

$$diag(\lambda_i) = \begin{pmatrix} -8 & 0\\ 0 & -6 \end{pmatrix} < 0$$

Par considération d'autre théorème avec supposition de la connaissance de la fonction de Lyapunov, on peut avoir la stabilité. Tout d'abord, il faut chercher *P*, tel que

$$A^{T}P + PA + \sum_{i=1}^{n} P_{i} + PA_{i}P_{i}^{-1}P < 0$$

$$\lambda_{max}[A + A^T - 4n\sum_{i=1}^n A_i(A + A^T)^{-1}A_i^T] < 0$$

D'où

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} -5.2626 + 0.9275i & 0\\ 0 & -5.2626 - 0.9275i \end{pmatrix}$$

On voit bien que

$$\lambda_{max} < 0$$

On peut en déduire que tout cela revient au même cas que celui du système sans retard, qu'un système décrit par son équation d'état est asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice d'état du système sont à partie réelle négative.

$$A^{T}P + PA + \tau P + \tau^{-1}PA_{1}P^{-1}A_{1}^{-T}P < 0$$
 (3-71)

On continuera toujours comme application numérique, l'équation d'état à retard (3-70), où

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1\\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La résolution de l'inégalité matricielle linéaire pour ce système, pour  $\tau=1$ , nous donne P, telle que

$$A^TP + PA + \tau P < 0$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0.1020 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.1000 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'équation 
$$A^TP + PA + \tau P + \tau^{-1}PA_1P^{-1}A_1^{-T}P = \begin{pmatrix} -0.9258 & -0.0580 \\ -0.0560 & -0.4702 \end{pmatrix} < 0$$

Qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \tau Q & PA_1 \\ A_1^T P & -\tau Q \end{bmatrix} < 0$$

Ce qui signifie que toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  (réelles) de la matrice symétrique sont strictement négatives ( $\lambda_i < 0$ ). La stabilité quadratique peut ainsi se caractériser par un système de *LMI* dont l'inconnue est la matrice symétrique P.

#### 3.5 Conclusion

On peut dire que la commandabilité et l'observabilité sont des concepts développés pour la représentation d'état des systèmes qui permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Cependant leur concept peut être utilisé dans d'autres représentations. Le théorème de Lyapunov permet de conclure sur la stabilité d'un système dynamique grâce à une équation algébrique. Toute la difficulté est de trouver une fonction donc, la fonction de Lyapunov V(x(t)) dans le cas général ou la matrice P dans le cas linéaire. C'est à partir de ce théorème qu'on peut formuler les inégalités matricielles linéaires et les inégalités algébriques de Riccati permettant de trouver les matrices adéquates en utilisant des méthodes d'optimisation pour conclure sur la stabilité.

# CHAPITRE 4. APPLICATIONS DE LA SYNTHESE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES A RETARD SUR LE RETARD DE DEMARRAGE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

#### 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est alors de montrer une application réelle de ces théories du système linéaire à retard pour la modélisation du phénomène de retard de démarrage dans la commande d'un moteur à courant continu. On s'intéresse à la vitesse de rotation de son rotor (sortie du système) ou de la position de l'axe du rotor.

Dans le domaine des puissances supérieures de l'ordre de mégawatt, les sous-marins sont les seuls utilisateurs de machines à courant continu pour assurer leur propulsion. En effet, pour éviter de "rayonner", la fréquence de 50 ou 60 [Hz] les rendraient facilement détectables, les sous-marins utilisent des systèmes de distribution de l'énergie électrique à tensions continues.

Ces moteurs sont donc très utilisés aussi dans le domaine de l'asservissement. Ils assurent en particuliers des démarrages et arrêts fréquents, comme dans les automobiles, dans l'électroménager et de l'outillage.

On va illustrer l'application de commandes des systèmes à retard dans le modèle de la commande de vitesse où il y a la présence du retard. Le moteur étant accouplé à une charge.

# 4.2 Modélisation et fonction de transfert du moteur à courant continu non retardé et sans charge

On doit donc prendre connaissance du problème et ces diverses spécifications. Définir clairement le système (avec ses entrées et ses sorties) et de le décrire grâce aux lois de la physique et obtenir un ensemble d'équations algébriques et différentielles.

On a deux types de commande pour ces types de moteur :

- Commande à flux constant par la tension d'induite variable (dit simplement, commande par l'induit),
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable (ou commande par l'inducteur)

#### 4.2.1 Modèle sans charge

Pour le moteur à courant continu sans charge, les équations régissant son fonctionnement sont les suivantes [30] :

La force électromotrice E, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre du moteur:

$$E = -\frac{p}{a} \text{nN}\Phi \tag{4-1}$$

p : Nombre de paires de pôles

2a: Nombre

n: Nombre de brins actifs

N: vitesse de rotation  $[tr/_S]$ 

 $\Phi$ : Flux utile [Wb]

Avec

$$N = \frac{\Omega}{2\pi}$$
  $\rightarrow$   $E = \frac{p}{a}n\frac{\Omega}{2\pi}\Phi$  (4-2)

$$k = \frac{p}{2\pi} \frac{n}{a} = constante \tag{4-3}$$

Où k dépend de la machine à considérée

A partir de la vitesse de rotation, on a la relation électromécanique

$$E = k \Phi \Omega \tag{4-4}$$

En régime permanent, l'induit est modélisé de manière telle que (pas d'effet de l'inductance) :

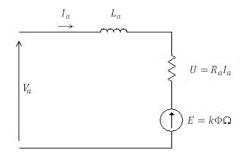


Figure 4-1: Induit d'un moteur à courant continu

On a donc

$$V_a = R_a I_a + k\Phi\Omega + L_a \frac{dI_a}{dt}$$
 (4-5)

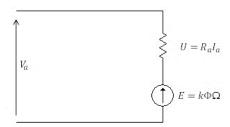
Démonstration:

\*

En multipliant par  $I_a$ 

$$V_a I_a = R_a I_a^2 + k \Phi \Omega I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} I_a$$

 $I_a$  est constant en régime permanent, alors  $L_a \frac{dI_a}{dt} = 0$ , l'inductance n'intervienne pas, alors, on a le schéma équivalent



**Figure 4-2**: Schéma équivalent de l'induit du moteur à courant continu en régime permanent Or, on a  $P_a = V_a I_a$  la puissance absorbée par l'induit et  $R_a I_a^2$ , la puissance dissipée par effet Joule dans l'induit.

•

La puissance électrique susceptible d'être transformée en puissance mécanique est

$$P_e = V_a I_a - R_a I_a^2 = (V_a - R_a I_a) I_a = E I_a$$
 (4-6)

 $P_e$  est appelée puissance électromagnétique qui fournit le couple électromagnétique.

$$P_e = C_e \Omega$$
  $\rightarrow$   $C_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{k\Phi\Omega I_a}{\Omega} = k\Phi I_a$ 

D'où le couple utile

$$C_e = k\Phi I_a$$

#### 4.2.2 Commande par la variation de la tension d'induite

Un moteur à courant continu commandé par la variation de la tension d'induite  $v_a$  et parcouru par un courant d'induit  $i_a$ , l'inducteur est alimenté par une tension constante  $V_0$ , parcouru par un courant inducteur  $I_c$ . Le schéma équivalent du système est :

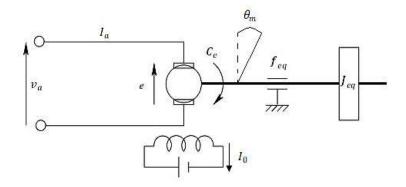


Figure 4-3: Commande du moteur par l'induit

 $\theta_m$  étant la position angulaire maximale de l'arbre de rotor du moteur par rapport à la position d'équilibre, proportionnelle au couple résistant. On règle le flux à sa valeur maximale, l'intensité absorbé par l'induit pour un couple résistant donné est donc minimum, alors, le courant d'induit est obtenu par

$$I_a = \frac{C_e - C_r}{k \Phi_{max}} \tag{4-7}$$

Les deux équations électromécaniques fondamentales s'écrivent

$$\begin{cases} E = k_{max} \Omega \\ C_e = k_{max} I_a \end{cases} \text{ avec } k_{max} = k \Phi = constante$$
 (4-8)

L'application de la Transformée de Laplace à ce système d'équation (4-8) et à  $V_a$  de l'équation  $V_a = R_a I_a + k\Phi\Omega + L_a \frac{dI_a}{dt}$  (4-5), en considérant la variation du courant  $\frac{dI_a}{dt}$  car  $I_a$  n'est plus constante.

Démonstration:

÷

$$\begin{cases} E(p) = k_{max}\Omega(p) \\ C_e(p) = k_{max}I_a(p) \\ V_a(p) = R_aI_a(p) + L_apI_a(p) + E(p) \\ = (R_a + L_ap)I_a(p) + E(p) \end{cases}$$
(4-9)

De cette dernière équation du système d'équation, on tire

$$I_a(p) = \frac{V_a(p) - E(p)}{R_a + L_a p}$$
 (4-10)

Et on a  $C_e(p) = k_{max} \left( \frac{V_a(p) - E(p)}{R_a + L_a p} \right)$ 

D'où, le couple électromagnétique

$$C_e(p) = \frac{k_{max}}{R_a + L_a p} V_a(p) - \frac{k_{max}^2}{R_a + L_a p} \Omega(p)$$
 (4-11)

D'après cette relation, on montre qu'une machine commandée par la variation de la tension d'induite est équivalente à une machine idéale produisant le couple

$$C_e(p) = \frac{k_{max}}{R_a + L_a p} V_a(p) \tag{4-12}$$

Indépendant de la vitesse de rotation de la machine et d'un défaut (frottement fluide) stabilisant la vitesse (le terme négatif). Le schéma fonctionnel du moteur à courant continu commandé par la tension d'induite est alors la suivante

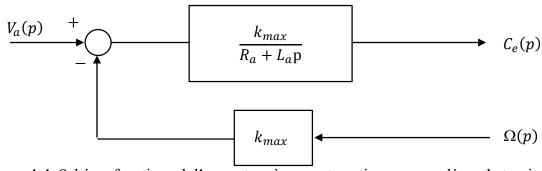


Figure 4-4: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu commandé par la tension

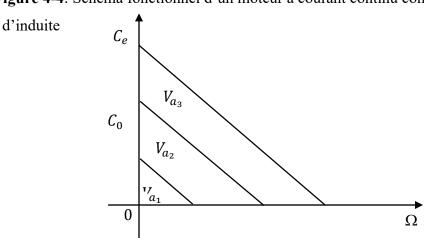


Figure 4-5: Caractéristiques mécaniques de la commande par la tension d'induite

### 4.2.3 Commande par la variation du flux inducteur ou commande par l'inducteur

Soit un moteur à courant continu, dont le modèle est sur la figure ci-dessous, commandé par l'inducteur

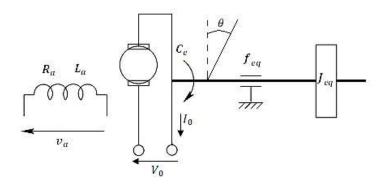


Figure 4-6: Modèle de commande par l'inducteur

Les équations différentielles qui régit le mouvement du système électromécanique sont

$$\begin{cases} v_a = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} \\ C_e = J_{eq} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f\Omega \end{cases}$$
(4-13)

On maintient le courant d'induit constant. Le flux va donc varier puisqu'il est proportionnel au courant inducteur. On peut constater que pour des valeurs élevées de ce courant, la machine va être saturée. On a alors comme solutions pour son utilisation :

- On l'utilise à des valeurs faibles du courant, mais cela va limiter ces domaines d'utilisations.
- On utilise des circuits magnétiques ayant de forte section ce qui permet de reculer le coude de saturation mais augmente la taille des moteurs.

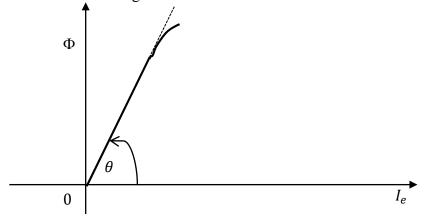


Figure 4-7: Variation du flux inducteur

Dans la zone linéaire, la courbe est une droite linéaire de pente  $\tan \theta$ .

$$\Phi = \tan \theta I_e$$

$$C_e = k_{max} \Phi I_a = k_{max} I_a \tan \theta I_e$$

Définition 4-1

D'où par définition

$$C_e = k_{ind}I_e (4-14)$$

Avec  $k_{ind} = k_{max}I_a \tan \theta$  est une constante.

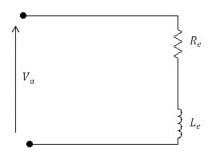


Figure 4-8: Modèle de l'inducteur d'un moteur à courant continu

La loi de maille au niveau de l'inducteur permet d'écrire

$$V_e = R_e I_e + L_e \frac{dI_e}{dt} \tag{4-15}$$

Démonstration :

\*

Et par la transformée de Laplace de cette équation, on a

$$V_e(p) = (R_e + L_e p)I_e(p)$$

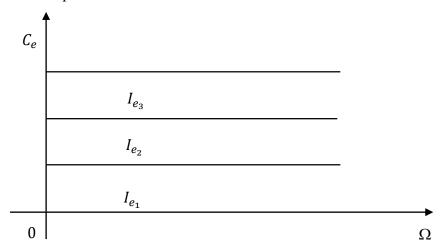
Le couple est donc

$$C_e = k_{ind}I_e(p)$$

On définit ainsi le couple électromagnétique par la commande de l'inducteur

$$C_e = \frac{k_{ind}}{R_e + L_e p} V_e(p) \tag{4-16}$$

Les caractéristiques mécaniques de la commande sont les suivantes



**Figure 4-9**: Caractéristiques mécaniques de la commande du moteur à courant continu par l'inducteur

La caractéristique mécanique ne comporte de frottement visqueux. Il sera donc nécessaire de stabiliser la vitesse sinon la machine risque de s'emballer. Ce type de commande est peu utilisable en automatique.

Le schéma fonctionnel est réduit selon le suivant

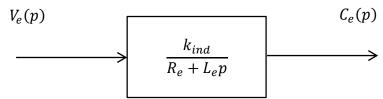


Figure 4-10: Schéma fonctionnel du moteur à courant continu commandé par le courant de l'inducteur

# 4.3 Modélisation et fonction de transfert du moteur à courant continu sans retard en charge

### 4.3.1 Commande de la vitesse de la machine par la variation de la tension d'induite

Un moteur à courant continu commandé par l'induit, entraîne par l'intermédiaire d'un réducteur une charge. Notons que le réducteur permet de réduire la vitesse de rotation et d'augmenter le couple au niveau de la charge. Il est généralement placé entre le moteur et la charge.

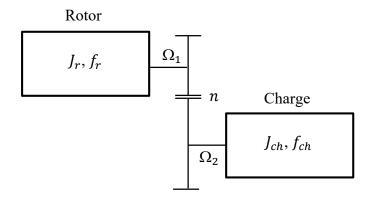


Figure 4-11: Moteur à courant continu entraînant une charge

*n* : Rapport de réduction

 $J_{ch}$ : Moment d'inertie de la charge

 $J_r$ : Moment d'inertie du rotor

 $f_{ch}$  : Coefficient de frottement fluide (visqueux) de la charge

 $f_r$ : Coefficient de frottement fluide (visqueux) du rotor

Définition 4-2

On a par définition le rapport de réduction

$$n = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tag{4-17}$$

R étant le nombre de dents d'un pignon.

Si on suppose que les frottements et les jeux sont nuls dans le réducteur, alors toute la puissance mécanique instantanée appliquée à l'arbre d'entrée du réducteur se retrouve sur l'arbre de sortie

$$C_1\Omega_1 = C_2\Omega_2 \tag{4-18}$$

 $C_1$  est le couple du moteur  $C_e$ ,  $C_2$  est le couple disponible sur l'arbre de sortie pour entraîner la charge.

Le couple moteur  $\mathcal{C}_e$  doit équilibrer l'ensemble des couples résistants :

$$C_e - \sum C_{r\acute{e}sistant} = J \frac{d\Omega}{dt}$$
 (4-19)

Avec

$$\sum C_{r\acute{e}sistant} = f\Omega + C_r \tag{4-20}$$

 $f\Omega$ : Frottements fluides

 $C_r$ : Frottements secs

f : Coefficient de frottements fluides de l'ensemble moteur + charge

*J* : Moment d'inertie de l'ensemble moteur + charge

Afin d'obtenir J et f, on ramène d'abord la charge sur l'arbre moteur.

Démonstration:

\*

$$\begin{split} C_1\Omega_1 &= C_2\Omega_2 \to C_{ch} = C_{ch.ramen\acute{e}e} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = n. \, C_{ch.ramen\acute{e}e} \end{split}$$
 Or  $C_{ch} = J_{ch} \frac{d\Omega_2}{dt} + f_{ch}\Omega_2$  et  $\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{n} \frac{d\Omega_1}{dt}$  
$$n. \, C_{ch. \ ramen\acute{e}e} = \frac{J_{ch}}{n} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{f_{ch}}{n} \Omega_1$$
 
$$\to C_{ch. \ ramen\acute{e}e} = \frac{J_{ch}}{n^2} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{f_{ch}}{n^2} \Omega_1$$

En remplaçant  $C_e - \sum C_{résistant} = J \frac{d\Omega}{dt}$ , on a

$$C_{e} - f_{r}\Omega_{1} - C_{r} - C_{ch. \ ramen\acute{e}} = J_{r} \frac{d\Omega_{1}}{dt}$$

$$\rightarrow C_{e} - f_{r}\Omega_{1} - \frac{f_{ch}}{n^{2}}\Omega_{1} - \frac{J_{ch}}{n^{2}} \frac{d\Omega_{1}}{dt} - C_{r} = J_{r} \frac{d\Omega_{1}}{dt}$$

$$\rightarrow C_{e} - f_{r}\Omega_{1} - \frac{f_{ch}}{n^{2}}\Omega_{1} - C_{r} = J_{r} \frac{d\Omega_{1}}{dt} + \frac{J_{ch}}{n^{2}} \frac{d\Omega_{1}}{dt}$$

$$\rightarrow C_{e} - C_{r} = \left(J_{r} + \frac{J_{ch}}{n^{2}}\right) \frac{d\Omega_{1}}{dt} + \left(f_{r} + \frac{f_{ch}}{n^{2}}\right)\Omega_{1}$$

$$J_{eq} = \left(J_{r} + \frac{J_{ch}}{n^{2}}\right) \quad \text{et} \quad f_{eq} = \left(f_{r} - \frac{f_{ch}}{n^{2}}\right)$$

$$\rightarrow C_{e} - C_{r} = J_{eq} \frac{d\Omega_{1}}{dt} + f_{eq}\Omega_{1} \qquad (4-22)$$



Par la transformée de Laplace et en arrangeant l'écriture de cette équation, on aura comme sortie la vitesse de rotation de l'arbre du moteur  $\Omega_1(p) = \Omega(p)$  et l'entrée sera le couple moteur  $C_e(p)$ .

$$\frac{\Omega(p)}{C_e(p) - C_r(p)} = \frac{1}{pJ_{eq} + f_{eq}}$$
 (4-23)

D'où le schéma fonctionnel suivant

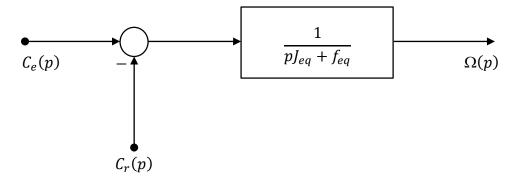
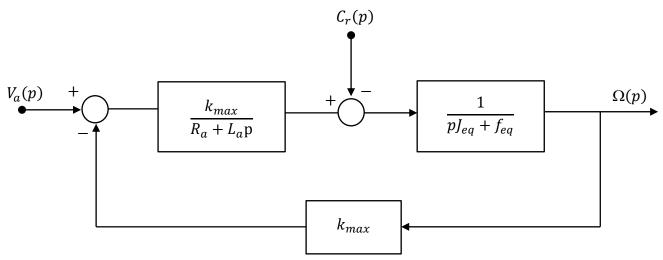


Figure 4-12: Schéma fonctionnel de l'ensemble mécanique (rotor + charge)

Le schéma fonctionnel pour la commande de vitesse d'un moteur à courant continu par le réglage de la tension d'induite est alors



**Figure 4-13**: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu en charge commandé par la tension d'induite

D'une façon un peu plus détaillée cette représentation sera comme la suivante

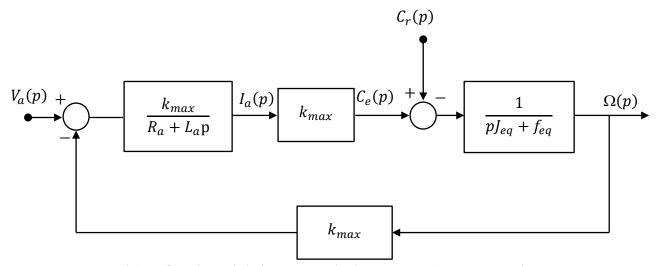


Figure 4-14: Schéma fonctionnel de la commande d'un moteur à courant continu avec ses paramètres

Un moteur commandé par la tension d'induite possède une contre-réaction interne. Il ne risque pas de s'emballer.

### 4.3.2 Calcul de la fonction de transfert du moteur à courant continu

L'élaboration du schéma fonctionnel s'obtient donc à partir des équations physiques du système. On obtient alors le modèle de connaissance. Pour avoir la fonction de transfert de l'ensemble, on supposera que le couple résistant étant nul. C'est-à-dire,  $C_r = 0$ ,

Démonstration:

\*

On a, 
$$C_e(p) = \frac{k_{max}}{R_a + L_a p} V_a(p) - \frac{k_{max}^2}{R_a + L_a p} \Omega(p)$$

D'après l'équation (4-23),

$$\frac{\Omega(p)}{C_e(p) - C_r(p)} = \frac{1}{pJ_{eq} + f_{eq}}$$

$$\Omega(p) = \frac{1}{pJ_{eq} + f_{eq}} \left( \frac{k_{max}}{R_a + L_a p} V_a(p) - \frac{k_{max}^2}{R_a + L_a p} \Omega(p) \right)$$

67

Ainsi, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu accouplé à une charge, commandée par la tension d'induite est définie et peut être déduite selon le modèle général ayant la fonction de transfert de la forme :

$$\frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{k_{max}}{(p_{Jeq} + f_{eq})(R_a + L_a p) + k_{max}^2}$$
(4-24)

### 4.4 Analyse temporelle du comportement d'un moteur à courant continu

### 4.4.1 Réponse impulsionnelle du premier ordre

Définition 4-3

C'est la réponse à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . On aura  $u(t) = \delta(t)$ . Alors la fonction de transfert de la vitesse est ainsi

$$\Omega(p) = \frac{k}{\tau_{m\acute{e}c} \left(p + \frac{1}{\tau_{m\acute{e}c}}\right)} \tag{4-25}$$

D'où la réponse impulsionnelle sur la commande de vitesse est

$$\Omega(t) = \frac{k}{\tau_{m\acute{e}c}} e^{-\frac{t}{\tau_{m\acute{e}c}}} \tag{4-26}$$

### 4.4.2 Réponse indicielle du premier ordre

Définition 4-4

La réponse indicielle est la réponse d'un échelon u(t) = 1 appliqué à l'entrée, telle que la fonction de transfert du moteur est généralement la suivante [31]

$$\Omega(p) = \frac{k}{1 + \tau_{m\acute{e}c} p} V_a(p) \tag{4-27}$$

Démonstration:

\*

La fonction de transfert du système pour un échelon unité est

$$\Omega(p) = \frac{k}{p(1 + \tau_{m\acute{e}c}p)} \tag{4-28}$$

En décomposant en éléments simple :

$$\Omega(p) = k \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_{méc}}} \right) \tag{4-29}$$

D'où la sortie est

$$\Omega(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{méc}}} \right) \tag{4-30}$$

### a. Temps de réponse

La valeur finale (régime permanent) étant k, au bout d'une constante de temps, on est au  $\frac{2}{3}$  environ de celle-ci (63%). On peut avoir tout de suite que le temps de réponse ( $\pm 5$  % de la valeur finale) est :

$$t_r = 3\tau_{m\acute{e}c} \tag{4-31}$$

### b. Temps de montée

La courbe de la réponse est monotone croissante, on définit le temps de montée comme le temps pour que celui-ci atteigne 90 [%] de la valeur finale, on l'écrit sous la forme : (0.9k)

$$0.9k = k \left( 1 - e^{-\frac{t_m}{\tau_{m\acute{e}c}}} \right)$$

$$e^{\frac{t_m}{\tau_{m\acute{e}c}}} = 0.1$$

$$t_m = 2.3\tau_{m\acute{e}c} \tag{4-32}$$

### 4.4.3 Applications numériques

Si on suppose que la constante de temps du circuit électrique du système est largement très petite que la constante de temps mécanique de la dynamique des charges, la fonction de transfert de l'équation (4-24) peut être réduite à une fonction de transfert du premier ordre telle que

$$\frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{\frac{k_{max}}{J_{eq}R_a}}{p + \frac{f_{eq}R_a + k_{max}^2}{J_{eq}R_a}}$$
(4-33)

Ainsi, on peut avoir le pôle du système  $p=-\frac{f_{eq}R_a+k_{max}^2}{J_{eq}R_a}$ , et le gain statique  $k=\frac{k_{max}}{J_{eq}R_a}$ , avec la constante de temps mécanique  $\tau_m=\frac{J_{eq}R_a}{f_{eq}R_a+k_{max}^2}$ .

Numériquement, pour la simulation, on a les paramètres du moteur

 $L \approx 0$ ;  $R = 6[\Omega]$ ;  $k_{max} = 6$  (si c'est une constante de temps mécanique, alors l'unité de kest [N.m/A], si la constante est électrique, k sera [V.s];  $J = 2[kg.m^2]$ ; u(t) = 30[V]

D'où

$$\frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{0.5}{p+3} \tag{4-34}$$

La constante de temps est  $\tau_{m\acute{e}c}=1.5$  ; k=12 ; p=-0.6667;

Démonstration :

\*

En valeurs numériques

$$\mathcal{L}\{v_a(t)=30u(t)\} \to V_a(p) = \frac{30}{p}$$
 
$$\Omega(p) = \frac{15}{p(p+3)}$$
 
$$\to \Omega(p) = 15\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right)$$
 
$$\Omega(t) = 15(1-e^{-3t})$$

a. Placement de pôle

Tout d'abord, on peut dire que le système de premier ordre est stable, car on a : p = -3

### b. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système sera selon la figure :

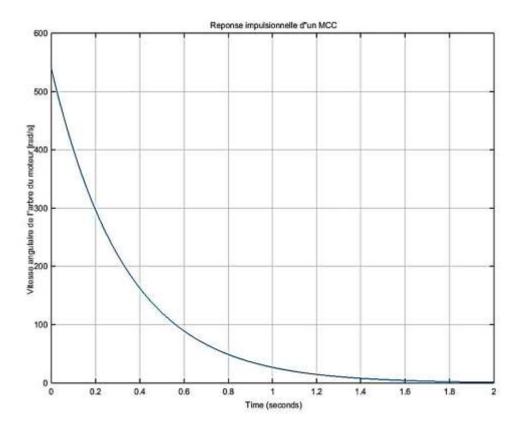


Figure 4-15: Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse du moteur

L'impulsion permet de connaître la stabilité d'un système. On peut dire que la réponse impulsionnelle d'un premier ordre est donc stable car il revient à sa position d'équilibre au bout d'un certain temps.

### c. Temps de réponse

Alors pour la commande d'une machine à courant continu ayant les paramètres ci-dessus.

$$t_r = 1[s]$$

### d. Tracé de la réponse indicielle

Par le tracé de l'évolution de la réponse dans le temps, on caractérise le régime transitoire par le temps de réponse.

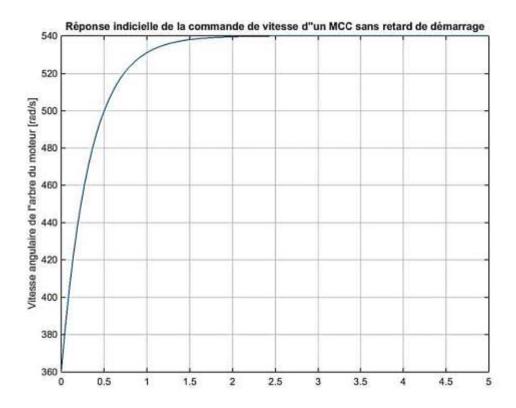


Figure 4-16: Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu sans retard

### e. Temps de monté

Pour notre application, le temps de monté  $t_m = 0.767[s]$ 

## 4.5 Modèle de connaissance d'un système de second ordre

Un système du second ordre est décrit par l'équation différentielle ci-dessous [32]

$$a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e(t)$$
 (4-35)

Avec des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de cette équation différentielle est

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \tag{4-36}$$

Cette équation peut être écrite comme

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \frac{a_2}{a_0} p^2}$$
(4-37)

Ces paramètres peuvent être identifiés de la façon suivante

- $k = \frac{b_0}{a_0}$  où on peut reconnaître le gain statique
- $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$  est la pulsation propre non amortie, exprimé en  $\left[ \frac{rad}{s} \right]$
- $\xi = \frac{a_1}{2} \frac{1}{\sqrt{a_0 a_2}}$ , qui est le coefficient d'amortissement

La forme canonique de l'équation de transfert du second ordre s'écrit ainsi

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$
(4-38)

En d'autre terme aussi, la forme normalisée de la fonction de transfert du deuxième ordre qui est

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \tag{4-39}$$

Afin de déterminer la nature des pôles associés à ce système du second ordre, on étudie l'équation caractéristique.

$$\to p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 \tag{4-40}$$

On a comme discriminant réduit

$$\Delta' = \omega_n^2(\xi^2 - 1) \tag{4-41}$$

 $\xi$  est un coefficient sans dimension, on aura trois forme de réponse distincte selon sa valeur.

- $\xi > 1$ , le système a deux racines réelles distinctes et un comportement exponentiel.
- $\xi = 1$ , le système a un multiple de racine réelle, de comportement exponentiel.
- $\xi$  < 1, le système a deux racines complexes, ayant un comportement oscillatoire.

$$\xi_i = \left| \frac{Re(p_i)}{p_i} \right| = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_{p_i}^2}} \tag{4-42}$$

Pour  $p_i = \lambda_i + j\omega_{p_i}$ 

Propriétés 4.1

Amortissement  $\xi > 1$ : on a un système hyper-amorti, telle que

$$\begin{cases}
p_1 = \omega_n \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\
p_2 = \omega_n \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)
\end{cases}$$
(4-43)

### Amortissement $\xi = 1$ : systèmes à amortissement critique

Le polynôme caractéristique a une racine réelle double,

$$p = -\xi \omega_n = -\omega_n = -\frac{1}{\tau_1}$$
 (4-44)

La fonction de transfert s'écrit alors,

$$G(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)^2} \tag{4-45}$$

## Amortissement $0 \le \xi < 1$ : systèmes sous-amortis

Les racines du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées,

$$\begin{cases} p_1 = \omega_n \left( -\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \\ p_2 = \omega_n \left( -\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \end{cases}$$

$$(4-46)$$

et

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \tag{4-47}$$

La réponse transitoire est alors donnée par l'oscillation de pseudo-période  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$  amortie par une exponentielle de constante de temps :

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} \tag{4-48}$$

### 4.5.1 Etude de la réponse indicielle

La courbe de la réponse indicielle d'un système du second ordre possède un certain nombre de caractéristiques remarquables.

Propriété 4.1

## \* Amortissement $\xi > 1$ , système hyper-amorti:

La réponse indicielle du système est donnée par :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$
(4-49)

L'allure des réponses des systèmes hyper-amortis pour différentes valeurs des pôles est représentée selon la figure :

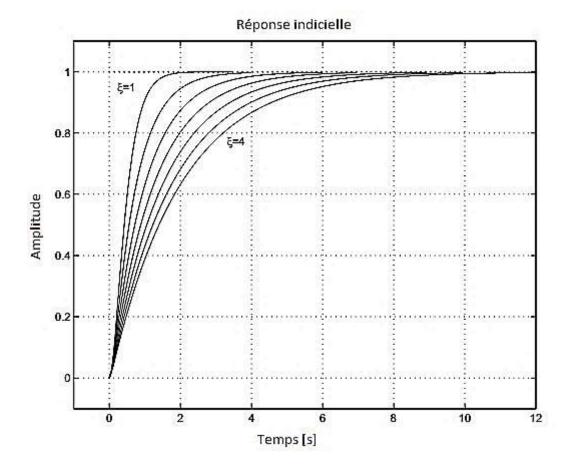


Figure 4-17: Réponses des systèmes hyper-amortis

### Propriété 4.2

## \* Amortissement $\xi = 1$ , systèmes à amortissement critique

Dans le cas critique ( $\xi = 1$ ) la réponse indicielle est :

$$s(t) = K \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \tag{4-50}$$

Propriété 4.3

## \* Amortissement $\leq \xi < 1$ , systèmes sous-amortis

On a:

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = k\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\xi\omega_n}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}\right]$$

La réponse indicielle du système sous-amorti est :

$$s(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right]$$
 (4-51)

$$\varphi = -Arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \tag{4-52}$$

L'allure de telles réponses est représentée sur les figures pour  $\omega_n=1$ 

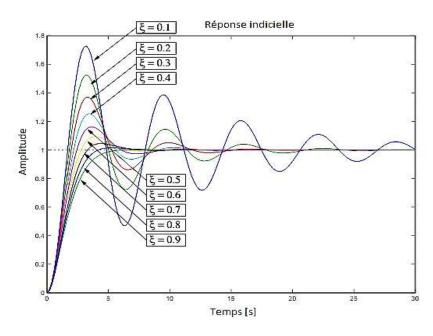


Figure 4-18: Systèmes du second ordre sous-amortis

Et puis, on peut avoir aussi d'autres formes de la réponse selon les différentes propriétés présentées sur la figure suivante pour  $\xi = 0.1$ ;

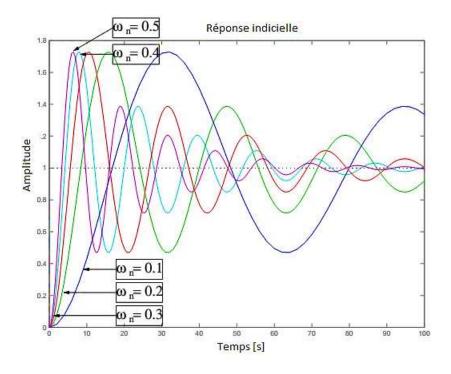


Figure 4-19: Systèmes du second ordre sous-amortis

La réponse indicielle est alors oscillatoire amortie, on définit ensuite :

Définition 4-5

### a. Temps de montée

C'est le temps mis pour que s(t) atteigne la valeur k, soit

$$t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \left( \frac{\pi}{2} + Arctan \frac{\xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right)$$
 (4-53)

Cette relation est approximée par la relation :

$$t_m \ge \frac{1.8}{\omega_n} \tag{4-54}$$

### b. Temps de crête $t_p$ ou temps du premier maximum :

Les valeurs de t qui annuleront la dérivée s'(t), correspondent aux temps des minima et maxima de la réponse s(t).

Démonstration :

÷

On a

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = k\omega_n \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \xi \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right) \right]$$

Cette dérivée s'annule pour

$$\xi \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right) = 0$$

En d'autre terme :

$$\tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi\right) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \tan\varphi$$

Alors

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi=\varphi+n\pi$$

Définition 4-6

On définit ainsi le temps du premier maximum :

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-55}$$

### Propriété 4.4

- Si n est pair,  $t_p$  correspond au temps de premier minimum
- Si n est impair, le premier maximum a donc lieu pour n = 1

### c. Calcul du dépassement D

De façon générale, il est possible de calculer la hauteur des minima et maxima, en remplaçant t par  $t_p$  dans l'expression de s(t).

Démonstration :

\*

$$s_p = k \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_p}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t_p + \varphi\right) \right]$$

$$s_p = k \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} + \varphi\right) \right]$$

$$s_p = k \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(n\pi + \varphi) \right]$$

La hauteur de (n pair) est donc donné pour  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \xi^2}$ , on a

$$s_{p_{min}} = k \left( 1 - e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \right) \tag{4-56}$$

Et la hauteur des minima (n impair) est

$$s_{p_{max}} = k \left( 1 + e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right) \tag{4-57}$$

Le premier dépassement aura lieu pour n = 1, donc

$$D = s_{p_{max}} - k = s_{p_{min}} = ke^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le dépassement relatif est  $\frac{D}{k}$ , que l'on exprime en pourcentage par rapport à la valeur finale, telle que

$$D[\%] = 100e^{-\xi \frac{n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$
 (4-58)

Propriété 4.5

$$D = \begin{cases} 5[\%] & \xi = 0.7\\ 16[\%] & \xi = 0.5\\ 35[\%] & \xi = 0.3 \end{cases}$$
 (4-59)

### d. Calcul de la pseudo-période

### Définition 4-7

C'est le temps qui s'écoule entre deux minima successifs, soit  $T_p = t_{2n+1} - t_{2n-1}$ . Mesurée entre les deux premiers, ayant l'expression

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-60}$$

### e. <u>Temps d'établissement</u>

Généralement, on choisit pour le temps d''établissement  $t_s$ :

$$t_{s_{5\%}} = \frac{3}{\xi \omega_n}$$
 (4-61) 
$$t_{s_{1\%}} = \frac{4.6}{\xi \omega_n}$$

### Propriété 4.6

On spécifie temporellement un système du second ordre, en supposant que le système est sous-amorti et caractérisé par la paire  $(\xi \omega_n)$ . La réponse temporelle a l'allure de la figure suivante, [32] :

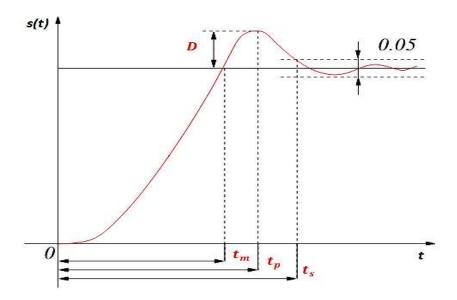


Figure 4-20: Spécifications temporelles d'un second ordre

 $\xi$  est généralement fixée en corrélation avec D alors que  $t_s$  est principalement déterminé par  $\omega_n$ . De plus, pour des réponses rapides,  $\omega_n$  doit être grand.

### 4.5.2 Etude harmonique

C'est la représentation par le diagramme de Bode. Afin de représenter  $|G(j,\omega)|$  et  $arg[G(j,\omega)]$ , on utilise principalement les représentations de Bode, qui est la représentation graphique de deux courbes :

- $G = 20log \log |G(j, \omega)|$  (le gain, en deciBel [dB]),
- $\varphi = (\text{le déphasage, en } degrés [°]).$

en fonction de  $\omega$ , sur une échelle logarithmique.

Le déphasage est un angle modulo  $2.\pi$ . Il est cependant considéré comme un "retard de phase" pour le bon respect du principe de causalité, ce qui conduit à le tracer sur  $[-2.\pi, 0]$ .

La fonction de transfert harmonique d'un système du second ordre s'écrit [33]

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
(4-62)

Le module et l'argument de ce nombre complexe sont données par :

$$\begin{cases}
\left| \frac{G(j\omega)}{\left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\
Arg\left[ \frac{G(j\omega)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = -Arc \tan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}
\end{cases} (4-63)$$

### a. Etude du gain

Démonstration :

Ļ

Le calcul de la dérivée du gain par rapport à  $\frac{\omega}{\omega_n}$  donne

$$\frac{d\left[\underline{G(j\omega)}\right]}{d\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]} = -\frac{1}{2}k\left[4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n}\left(1 - 2\xi^2\right)\right]\left[\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

La dérivée s'annule pour les valeurs de  $\frac{\omega}{\omega_n}$  annulant

$$4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n} \left(1 - 2\xi^2\right)$$

$$\rightarrow 4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 - 4\frac{\omega}{\omega_n} \left(1 - 2\xi^2\right) = \frac{\omega}{\omega_n} \left(4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 4\left(1 - 2\xi^2\right)\right)$$

- On obtient une seule racine  $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$  si  $\xi > 0.7$
- On a deux racines, telles que :  $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$  et  $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 2\xi^2}$  si  $\xi \approx 0.7$

### b. Pulsation de résonance

Démonstration :

.

On démontre que, pour  $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$\rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\xi^2} = \frac{\omega_R}{\omega}$$

La pulsation de résonance est alors

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \tag{4-64}$$

## 4.5.3 Commande de la vitesse de la machine par la variation de la tension d'induite avec considération de l'inductance

On considère le moteur à courant continu à excitation indépendante selon la figure 4-21 cidessous.

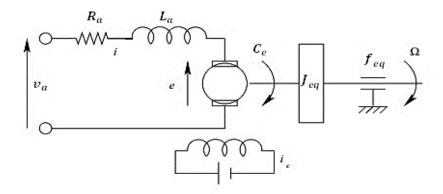


Figure 4-21: Moteur à courant continu à excitation indépendante

On va voir le comportement de la réponse pour :

•  $\xi > 1$ , afin de simplifier les calculs

On a le schéma fonctionnel pour la commande de vitesse d'un moteur à courant continu par le réglage de la tension d'induite précédemment

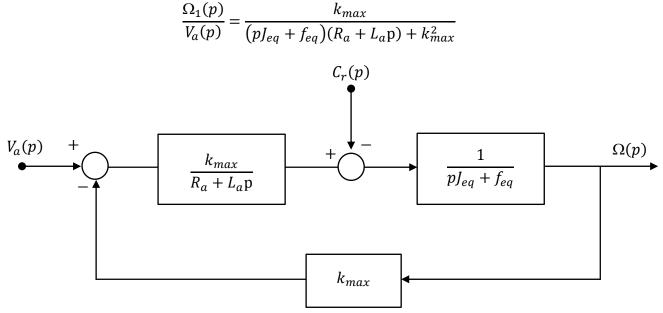


Figure 4-22: Schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu en charge commandé par la tension d'induite

## 4.5.4 Réponse du modèle pour la commande de la vitesse et de la position angulaire de rotor du moteur

La fonction de transfert reliant l'entrée  $u=v_a(t)=1$  et la sortie  $\Omega(t)$  du moteur à courant continu

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{\frac{K_{max}}{L_{aJeq}}}{p^2 + \frac{L_{afeq} + J_{eq}R_a}{L_{aJeq}} p + \frac{R_{afeq} + K_{max}^2}{L_{aJeq}}}$$
(4-65)

Cette forme de fonction de transfert peut être réécrite et peut se présenter comme

$$G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{\frac{K_{max}}{L_{aJeq}}}{1 + \frac{L_{afeq} + J_{eq}R_{a}}{R_{afeq} + K_{max}^2} p + \frac{L_{aJeq}}{R_{afeq} + K_{max}^2} p^2}$$
(4-66)

En modifiant cette écriture de la fonction de transfert, on obtient :

$$G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{\frac{K_{max}}{L_{aJeq}}}{1 + \left(\frac{L_{a}}{R_{a}} \frac{R_{afeq}}{R_{afeq} + K_{max}^{2}} + \frac{J_{eq}R_{a}}{R_{afeq} + K_{max}^{2}}\right) p + \frac{L_{a}}{R_{a}} \frac{J_{eq}R_{a}}{R_{afeq} + K_{em}^{2}} p^{2}}$$
(4-67)

Cette équation de transfert est de la forme

$$G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{K}{1 + (\tau_{em} + \mu \tau_{el})p + \tau_{el}\tau_{em}p^2}$$

$$\tag{4-68}$$

Définition 4-8

On définit le gain statique

$$K = \frac{K_{max}}{L_a J_{eq}}$$

La constante de temps électrique du moteur à courant continu est

$$\tau_{el} = \frac{L_a}{R_a} \tag{4-69}$$

Et où

$$\mu = \frac{R_a f_{eq}}{R_a f_{eq} + K_{max}^2} \tag{4-70}$$

Et la constante de temps électromécanique

$$\tau_{em} = \frac{J_{eq}R_a}{R_a f_{eq} + K_{max}^2} \tag{4-71}$$

Qui est très petit par rapport au terme de frottement. On peut arranger de telle sorte que

 $\tau_{el} \ll \tau_{em}:$ 

$$\tau_{em} + \mu \tau_{el} = \tau_{em} + \tau_{el} \tag{4-72}$$

Cela permet d'écrire finalement la fonction de transfert sous la forme :

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_{el}p)(1 + \tau_{em}p)}$$
(4-73)

On peut avoir clairement les pôles du système sans retard par

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_{el}} \qquad p_2 = -\frac{1}{\tau_{em}} \tag{4-74}$$

Définition 4-9

Pour  $V_a(p) = \frac{1}{p}$ ,  $\Omega(p)$  est de la forme  $\Omega(p) = \frac{K}{p(1+\tau_{el}p)(1+\tau_{em}p)}$ , sa transformée de Laplace inverse est  $K + \frac{K}{\tau_{em}-\tau_{el}} \left(e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}}\right)$ , on aura l'équation de la vitesse angulaire

$$\Omega(t) = K \left( 1 + \frac{1}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right) \right)$$
(4-75)

D'où le modèle pour la position angulaire de l'axe du moteur se déduisant de sa vitesse par intégration de la fonction de transfert reliant la tension de commande du moteur  $V_a(p)$  et la position de son rotor  $\Theta(p) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ , d'après les démonstrations précédentes

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{K}{p^2 (1 + \tau_{el} p)(1 + \tau_{em} p)}$$
(4-76)

Ainsi, le système possède trois pôles  $p_1=0$   $p_2=-\frac{1}{\tau_{el}}$ ,  $p_3=-\frac{1}{\tau_{em}}$ , et de gain statique K.

La transformée de Laplace inverse est  $t + \frac{1}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right)$ , d'où l'équation de la position angulaire du rotor, donnée par

$$\theta(t) = K \left( t - (\tau_{em} - \tau_{el}) + \frac{1}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right) \right)$$
(4-77)

 $\tau_{el}$  et  $\tau_{em}$ , que l'on ne peut faire apparaître que lorsque les pôles sont réels, sont donc la constante de temps électrique et la constante de temps électromécanique du système, respectivement, avec le gain statique K.

### 4.5.5 Applications numériques

On procèdera toujours avec les valeurs numériques suivantes pour faciliter l'application  $L \approx 0$ ;  $R = 6[\Omega]$ ;  $k_{max} = 2$  (si c'est une constante de temps mécanique, alors l'unité de kest [N.m/A], si la constante est électrique, k sera [V.s];  $J = 1[kg.m^2]$ ; u(t) = 30

Le modèle de connaissance étant  $G = \frac{60}{p^2 + 6p + 4}$ 

- Le gain statique K = 15;
- La pulsation  $\omega_n = 2$
- Le facteur d'amortissement  $\xi = 1,5$
- On a les pôles du système, telle que  $p_1 = -5.2361$ ;  $p_2 = -0.7639$
- Les constantes de temps  $au_{em} = 1.309$  ;  $au_{el} = 0.191$

Avec les placements de pôles dans le plan complexe, on a la figure

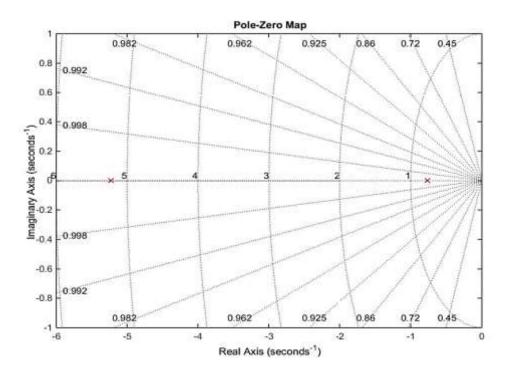


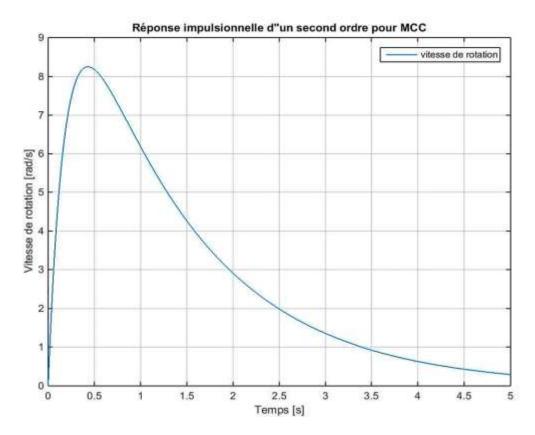
Figure 4-23: Placement des pôles du système sur le plan complexe

Les différentes réponses sont présentées selon les figures suivantes, toujours avec les valeurs numériques ci-dessus :

La réponse impulsionnelle est

$$\Omega(t) = \frac{\kappa}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right)$$
(4-78)

$$\Omega(t) = 13.4160(e^{-5.2361t} - e^{-0.7639t}) \tag{4-79}$$

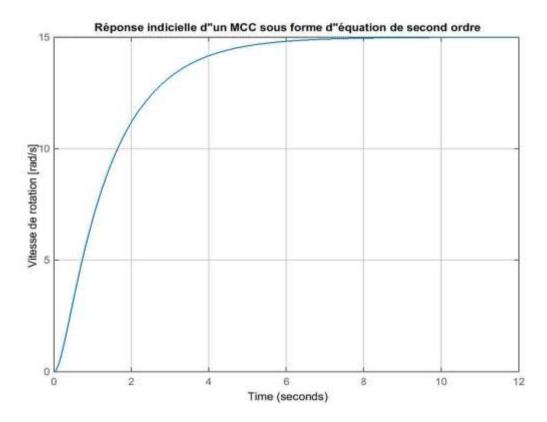


**Figure 4-24**: Réponse impulsionnelle d'un moteur à courant continu sous forme d'équation de second ordre

Tandis que, les constantes de temps mécanique et électrique sont respectivement  $\tau_{em}$  et  $\tau_{el}$ ,

$$\tau_{em}=1.309$$
 
$$\tau_{el}=0.191$$
 
$$\Omega(t)=15\big(1+0.8944(e^{-5.2361t}-e^{-0.7639t})\big) \eqno(4-80)$$

Ayant comme réponse indicielle de la forme :



**Figure 4-25**: Réponse indicielle d'un MCC sous forme d'équation de second ordre La réponse harmonique du système est présentée sur la figure suivante :

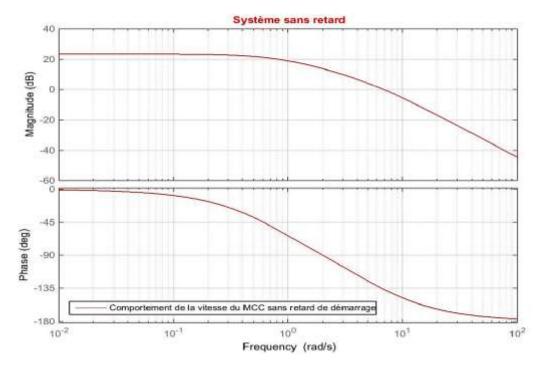


Figure 4-26: Diagramme de Bode de la commande d'un moteur à courant continu

pour 
$$\xi > 0.7$$

on a un diagramme de Bode d'un système d'ordre deux avec un amortissement égal à 1,5 et  $\omega_n=2$ . Le système se décompose alors sous la forme d'un produit de systèmes du premier ordre.

### 4.6 Analyse d'état du moteur sans retard

La commande par le réglage d'état, permet aussi de :

- Commander le moteur par l'inducteur : ce mode correspond évidemment au cas d'un inducteur bobiné dans lequel le courant pourra varier, entrainant un flux variable. Le courant d'induit est maintenu constant à l'aide d'une source extérieure que l'on peut représenter par une source de courant.
- Commander le système par l'induit : Dans ce cas le flux inducteur est maintenu constant, par l'utilisation soit d'un aimant permanent pour la création directe du flux, soit d'une source de courant réglable

Dans notre application, on va utiliser la commande du moteur par l'induit avec une tension d'excitation constante.

### 4.6.1 Représentation d'état du système sans retard

Mais pour une facilitation de la formation du système, on va revenir à l'équation électrique et mécanique, pour avoir la vitesse de rotation du moteur et le courant de démarrage

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}i(t) - \frac{k_{max}}{L_a}\Omega(t) + \frac{1}{L_a}u(t)$$
 (4-81)

et

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k_{max}}{J_{eq}}i(t) - \frac{f_{eq}}{J_{eq}}\Omega(t) - J_{eq}C_r$$
 (4-82)

$$\begin{cases}
\left[\frac{di(t)}{dt}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{max}}{L_a} \\ \frac{k_{max}}{J_{eq}} & -\frac{f_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ C_r \end{bmatrix} \\
s = \Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} \tag{4-83}$$

Le schéma fonctionnel du système est présenté selon la figure suivante avec ses différents paramètres :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} \qquad e(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ C_r \end{bmatrix}$$

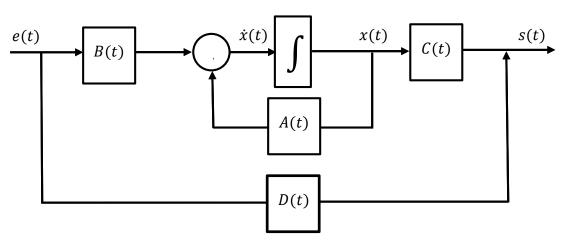


Figure 4-27: Schéma fonctionnel de la représentation d'état du moteur à courant continu

### 4.6.2 Commandabilité du modèle sans retard

Un système linéaire représenté par l'équation dynamique d'état,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \tag{4-84}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité,  $\mathcal{C}$  est de rang n,

$$rang(\mathcal{C}) = rang[A \quad B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{max}}{L_a} \\ \frac{k_{max}}{L_{cx}} & -\frac{f_{eq}}{L_{cx}} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{ca}} \end{bmatrix}$$

$$(4-85)$$

### 4.6.3 Observabilité du système sans retard

La notion d'observabilité fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C.

Un système linéaire représenté par l'équation dynamique, d'état et de sortie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) \end{cases}$$
 (4-86)

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est observable si et seulement si la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  est de rang n,

$$\operatorname{rang}(\mathcal{O}) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{4-87}$$

### 4.6.4 Applications numériques

Les valeurs des paramètres sont toujours les mêmes calculs (mais peu réalistes) suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

#### a. Commandabilité

On a

$$[A B] = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$C = rang[A \quad B] = 2$$

La représentation d'état du système est commandable.

### b. Observabilité

Avec,

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{O} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2$$

Le système est observable, avec la matrice d'observabilité  $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 

### c. Stabilité nominale

On a la fonction de transfert du système

$$G(p) = \frac{2}{p^2 + 6p + 4}$$

L'équation caractéristique du système est

$$\Delta(p) = p^2 + 6p + 4$$

Les pôles du système  $p_1 = -5.2361$ ;  $p_2 = -0.7639$ ; sont tous à parties réelles négatives, on peut déjà alors conclure sur la stabilité du système.

- D'après le calcul des valeurs propres de A,  $\lambda_i = \begin{bmatrix} -5.2361 & 0 \\ 0 & -0.7639 \end{bmatrix}$ , qui sont tous à valeurs réelles négatives, un système décrit par son équation d'état est stable si les valeurs propre de la matrice A sont à partie réel négative.
- Le système est stable, car  $\lim_{t\to +\infty} s(t) = \lim_{t\to +\infty} \Omega(t) = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{\kappa}{\tau_{em}-\tau_{el}} \left(e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} e^{-\frac{t}{\tau_{em}}}\right)\right) = 0$ , c'est-à-dire qu'on définit que la stabilité est la capacité du système à converger vers la valeur nulle lorsque  $t\to +\infty$ .

# 4.7 Analyse et représentation d'état du moteur à courant continu avec retard de démarrage

Les propriétés qui sont pour les systèmes à non retard sont aussi applicables au modèle des systèmes avec de retard. Le théorème du retard permet de calculer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps  $\tau$  si l'on connaît la transformée de Laplace de la fonction non retardée. Ainsi, on peut procéder aux propriétés des systèmes non retards, telles que :

## 4.7.1 Représentation par la fonction de transfert du modèle avec retard sous forme de premier ordre

### a. <u>Réponse impulsionnelle</u>

C'est la réponse à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . On aura  $u(t-\tau)=\delta(t)$ . Alors la fonction de transfert de la vitesse est ainsi

$$\Omega(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{\tau_{m\acute{e}c}\left(p + \frac{1}{\tau_{m\acute{e}c}}\right)} \tag{4-88}$$

D'où la réponse impulsionnelle sur la commande vitesse est

$$\Omega(t) = \frac{ku(t-\tau)}{\tau_{m\acute{e}c}} e^{-\frac{t}{\tau_{m\acute{e}c}}}$$
(4-89)

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité, il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

On peut avoir la position angulaire de l'axe du rotor de la même manière que précédemment en utilisant le terme de retard, qui est obtenue en intégrant la vitesse

$$\Theta(p) = \frac{1}{p} \times \frac{ke^{-\tau p}}{1 + \tau_{m\acute{e}c}p} V_a(p) \tag{4-90}$$

### b. Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse d'un échelon  $v_a(t-\tau)=u(t-\tau)=1$  appliqué à l'entrée ayant le terme du retard, telle que la fonction de transfert du moteur est généralement la suivante

$$\Omega(p) = \frac{k}{1 + \tau_{m\acute{e}c}p} V_a(p) e^{-\tau p} \tag{4-91}$$

On définit la fonction de transfert du système ayant un retard pour un échelon

$$\Omega(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{p(1+\tau_{m\acute{e}c}p)} \tag{4-92}$$

La décomposition en éléments simple permet d'avoir l'équation suivante

$$\Omega(p) = ke^{-\tau p} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_{méc}}} \right) \tag{4-93}$$

D'où la sortie est

$$\Omega(t) = ku(t - \tau) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{m\acute{e}c}}} \right) \tag{4-94}$$

#### c. <u>Temps de réponse</u>

La valeur finale (régime permanent) est toujours k, au bout d'une constante de temps, mais présentant un retard  $\tau$ .

$$t_r = 3\tau_{m\acute{e}c} + \tau \tag{4-95}$$

### d. Temps de montée

Définition 4-10

On définit le temps de montée comme celui d'un système non retard mais en ajoutant le temps de retard

$$t_m = 2.3\tau_{m\acute{e}c} + \tau \tag{4-96}$$

### 4.7.2 Applications numériques pour la commande de vitesse

Démonstration :

\*

En valeurs numériques, avec un retard de 0.5 [s],  $v_a(t-\tau) = u(t-\tau) = 30$ ;

$$\mathcal{L}\{v_a(t) = 30u(t-\tau)\} \to V_a(p) = \frac{30e^{-\tau p}}{p}$$

$$\Omega(p) = \frac{15e^{-\tau p}}{p(p+3)}$$

$$\to \Omega(p) = 15e^{-\tau p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right)$$

$$\Omega(t) = 15u(t-\tau)(1-e^{-3t})$$
(4-97)

### a. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système avec retard est :

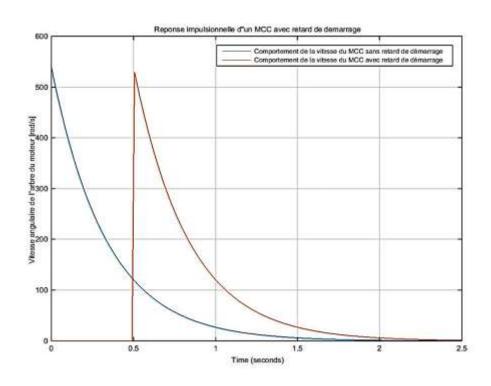


Figure 4-28 : Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse du moteur

L'impulsion permet de connaître la stabilité d'un système. On peut dire que la réponse impulsionnelle d'un premier ordre est donc stable car :

$$\lim_{t\to +\infty} s(t) = \lim_{t\to +\infty} \Omega(t) = \lim_{t\to +\infty} \left( \frac{K}{\tau_{em}-\tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right) \right) = 0$$

D'après la figure ci-dessus figure 4-27. Le retard n'influence pas le comportement du système.

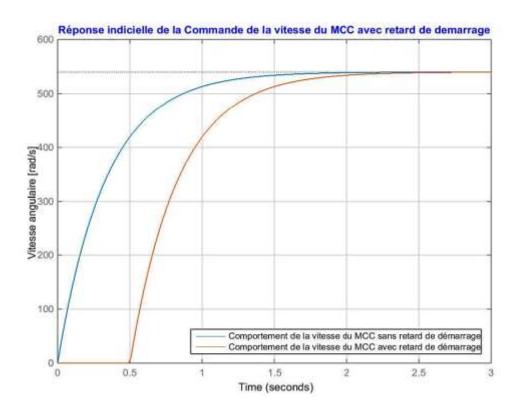
### b. Temps de réponse

Alors pour la commande d'une machine à courant continu ayant de retard, le système ne répond qu'après un temps de

$$t_r = 1.5[s]$$

### c. Réponse indicielle

Le tracé de la réponse indicielle retardée d'un temps  $\tau$  est



**Figure 4-29**: Réponse indicielle de la Commande de vitesse d'un MCC avec retard de démarrage

Sur ce figure, on voit bien que la commande représente un retard de temps de  $\tau=0.5$  par rapport à ceux du sans retard.

### d. Temps de montée

Le temps de montée  $t_m = 1.267[s]$ 

## 4.7.3 Fonction de transfert du moteur à courant continu avec retard sous forme de second ordre

Puisqu'il s'agit d'un retard pur, on va prendre la fonction de transfert du système sans retard. Et on peut avoir le système en insérant le facteur  $e^{-\tau p}$ qui est le modèle du retard. On a l'équation de la fonction de transfert du système sous forme du second degré, avec un retard

### a. Réponse impulsionnelle

La transformée de Laplace correspond très exactement à la fonction de transfert du système ce qui est la particularité essentielle de la réponse impulsionnelle. Ainsi, la fonction de transfert de la vitesse répondant à une impulsion est

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{V_a(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_{el}p)(1 + \tau_{em}p)}$$

Où 
$$V_a(p) = e^{-\tau p}$$

On peut définir ainsi G, telle que

$$\Omega(p) = G(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{(1 + \tau_{el}p)(1 + \tau_{em}p)}$$
 (4-98)

Donc

$$\Omega(t) = Ku(t - \tau) \left( \frac{1}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right) \right)$$
(4-99)

### b. Réponse indicielle

La fonction de transfert de la vitesse du moteur à retard de démarrage et pour  $v_a(t-\tau)=u(t-\tau)=1$ ,  $\Omega(p)$  est de la forme  $\Omega(p)=\frac{Ke^{-\tau p}}{p(1+\tau_{el}p)(1+\tau_{em}p)}$ , sa transformée de Laplace inverse est  $Ku(t-\tau)+\frac{Ku(t-\tau)}{\tau_{em}-\tau_{el}}\Big(e^{-\frac{t}{\tau_{el}}}-e^{-\frac{t}{\tau_{em}}}\Big)$ , l'équation de la vitesse angulaire est

$$\Omega(t) = Ku(t-\tau) \left( 1 + \frac{1}{\tau_{em} - \tau_{el}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{em}}} \right) \right)$$
(4-100)

### c. Réponse harmonique du système à retard

La fonction de transfert harmonique d'un système du second ordre s'écrit

$$G(j\omega) = \frac{ke^{-\tau j\omega}}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
(4-101)

Le module et l'argument de ce nombre complexe sont données par :

$$\begin{cases} \left| \underline{G(j\omega)} \right| = \frac{ke^{\tau\omega^{2}}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n}}\right)^{2}\right]^{2} + 4\xi^{2}\left(\frac{\omega}{\omega_{n}}\right)^{2}}} \\ Arg\left[\underline{G(j\omega)}\right] = -Arc\tan\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_{n}}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n}}\right)^{2}} \end{cases}$$
(4-102)

### 4.7.4 Applications numériques

D'après les calculs numériques de la fonction de transfert pour le modèle du second ordre dans le sous-section 4.5.5, on la fonction de transfert sans retard :

$$G = \frac{60}{p^2 + 6p + 4}$$

En insérant le facteur de retard, on a la définition de G :

$$G = \frac{60e^{-\tau p}}{n^2 + 6n + 4} \tag{4-103}$$

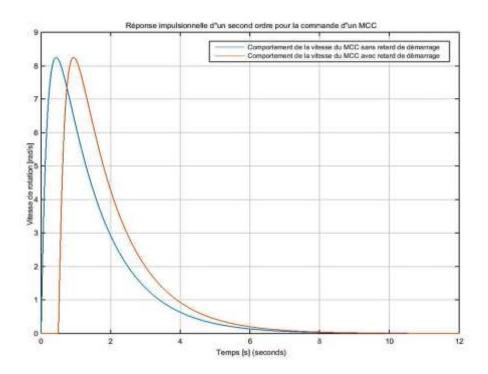
Les propriétés de la forme d'un second ordre pour le système resteront toujours les mêmes, on a les différentes réponses :

### a. Réponse impulsionnelle

L'équation de la vitesse pour une réponse impulsionnelle est

$$\Omega(t) = 13.416u(t - \tau)(e^{-5.2361t} - e^{-0.7639t})$$
 (4-104)

# D'où sa figure:



**Figure 4-30**: Réponse impulsionnelle de la commande de vitesse d'un MCC sous forme de second ordre

On peut tirer une conclusion à partir de ce graphe de la réponse impulsionnelle que quand :

$$\lim_{t\to +\infty} \Omega(t) = \lim_{t\to +\infty} \left(13.416 u(t-\tau) (e^{-5.2361 t} - e^{-0.7639 t})\right) = 0$$

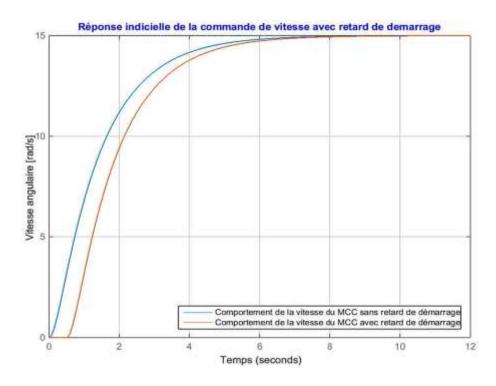
Le système est toujours stable même s'il y a la présence du terme de retard. Le retard n'a pas d'influence sur le système de second ordre.

# b. Réponse indicielle

La figure de la réponse indicielle répondant à l'équation de la vitesse :

$$\Omega(t) = 15u(t - \tau) \left( 1 + 0.8944 (e^{-5.2361t} - e^{-0.7639t}) \right)$$
(4-105)

Est



**Figure 4-31**: Réponse indicielle de la commande de vitesse d'un MCC sous forme de second ordre avec retard de démarrage

Le facteur du retard n'a pas d'effet sur le comportement en gain du système de second ordre, on obtient le même gain statique K mais en présence d'un retard de temps  $\tau$ .

# c. Réponse harmonique du système avec retard

La réponse harmonique de la commande avec retard de démarrage est

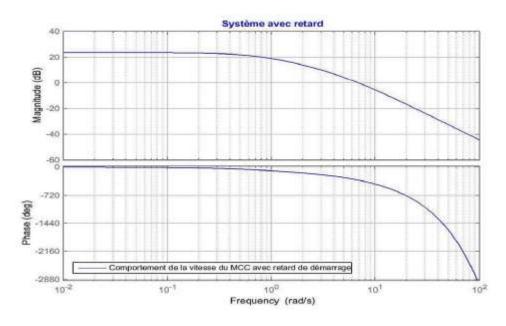


Figure 4-32: Diagramme de Bode du système avec retard de démarrage

Les courbes d'amplitude et de phase de la fonction de transfert du système à retard sont identiques à ceux du système sans retard. On constate un écart faible sur la phase.

# 4.7.5 Représentation sous forme d'espace d'état

Les descriptions de variable d'état permettent une conception de réglage du système et l'intérêt de son comportement dans le domaine temporel, à partir des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques qui régissent les comportements dynamiques du moteur à courant continu sont donc les variations du courant d'induite et la variation de la vitesse utilisant des lois physiques telles que la deuxième loi de Newton et la loi de Kirchhoff.

L'équation de l'évolution de l'état du système électromécanique avec retard d'état (variation du courant et variation de vitesse ayant respectivement du retard) est

$$\begin{cases}
\left[\frac{di(t)}{dt}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{max}}{L_a} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t-\tau) \\ C_r(t-\tau) \end{bmatrix} \\
y = \Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}
\end{cases} (4-106)$$

Le schéma fonctionnel du système est généralisé selon la figure suivante avec :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{max}}{L_a} \\ \frac{k_{max}}{J_{eq}} & -\frac{f_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} u(t-\tau) \\ C_r(t-\tau) \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$e(t) \qquad B(t-\tau) \qquad \dot{x}(t) \qquad C(t) \qquad + \qquad + \qquad + \qquad A(t)$$

Figure 4-33: Schéma fonctionnel du système stable avec un retard de la commande

# 4.7.6 Commandabilité spectrale du modèle avec retard

On va appliquer directement la théorie sur le modèle ci-dessus qui est la commande de vitesse d'un moteur à courant continu

$$\langle A(\nabla)/B(\nabla) \rangle = [B(\nabla) \quad A(\nabla)B(\nabla)]$$

Ainsi, la matrice de commandabilité, pour les mêmes valeurs de matrices, telle que

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\tau p}$$

$$[pI_n - A(e^{-\tau p}) \qquad B(e^{-\tau p})] = \begin{pmatrix} -6 & -2 & e^{-0.5p} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -e^{-0.5p} \end{pmatrix} \qquad (4-107)$$

$$rang[pI_n - A(e^{-\tau p}) \qquad B(e^{-\tau p})] = 2$$

## 4.7.7 Observabilité du système avec retard

Le système est observable si est seulement si le rang de la matrice  $\langle C/A \rangle$  est égale à l'ordre du système,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rang < C/A >= rang \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Ce qui est du rang  $2, \forall p \in \mathbb{C}$ , excepté p = 0. Le système de commande de la vitesse de moteur à courant continu est dans notre cas spéctralement observable.

Démonstration :

\*

Par contre, il existe aussi de système qui n'est pas observable, si on lui applique le critère d'observabilité, tel que

$$A = 0$$
  $C = 1 - e^{-\tau p}$  (4-108)  
  $< C/A >= 1 - \nabla$ 

Ce genre de système n'est pas observable.

#### 4.7.8 Stabilité

On considère un système linéaire à temps invariant de dimension n, telle que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad t \ge 0 
x(0) = 0$$
(4-109)

Les termes de stabilité suivants sont équivalent :

- 1. Le système est globalement asymptotiquement stable.
- 2. Le système est globalement exponentiellement stable.
- 3. La matrice A est Hurwitz, c'est-à-dire  $\lambda A \subset \mathbb{C}$
- 4. Ils éxistent des matrices P > 0, telle que l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Q = 0 (4-110)$$

5. Il existe une matrice P > 0 tel que l'inégalité de Lyapunov ou l'inégalité linéaire matricielle (LMI)

$$A^T P + PA < 0 \tag{4-111}$$

On définie P, comme

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \tag{4-112}$$

On peut écrire la LMI de la sorte

$$A^{T}P + PA = \begin{bmatrix} 2(p_{2} - p_{1}) & -2p_{2} + p_{3} \\ * & -2p_{2} \end{bmatrix} < 0$$
 (4-113)

Ces conditions de LMI sont équivalentes aux inégalités suivantes

$$P > 0 <=> \begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_3 - p_3^2 > 0 \end{cases}$$
 (4-114)

$$A^{T}P + PA < 0 <=> \begin{cases} p_{2}p_{3} - p_{2}^{2} > 0\\ -4p_{3}(p_{2} - p_{1}) - (p_{3} - 2p_{2})^{2} < 0 \end{cases}$$
 (4-115)

#### Remarque

P peut être définie negative ou positive si est seulement si tout ces principales mineurs sont négatives ou positives respectivement.

Alors, le moteur à courant continu ayant un retard de de demarrage  $0 < \tau$ , est stable asymptotiquement s'ils existent des matrices  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$ , c'est-à-dire la stabilité quadratique au sens de Lyapunov qui est équivalente à la stabilité classique au sens

des systèmes linéaires (valeurs propres à parties réelles négatives) est assurée, si et seulement si :

- P vérifiant le système à LMI suivant :

$$A^T P + AP + Q = 0$$
, où  $Q = I_n$ 

On a : Avec  $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  et le retard est toujours supposé à  $\tau = 0.5$  et

$$P = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.9167 \end{bmatrix}$$

# Propriété 4.7

On peut vérifier aussi la stabilité du système via l'équation de l'énergie totale du système ou aussi bien via la forme quadratique de la fonction de Lyapunov en connaissant la matrice P, telle que  $P = P^T > 0$ .

# Théorème de la stabilité de Lyapunov :

Soit V(x) une fonction définie positive dans son domaine de définition,

Si le dérivé  $\dot{V}(x)$  de V(x) le long de la trajectoire du système est :

- a) définie semi-négative, l'état d'équilibre est stable au sens de Lyapunov
- b) définie négative, l'état d'équilibre est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapunov
- c) définie positive, l'état d'équilibre est instable

#### **Remarques:**

Le théorème de Lyapunov est une condition suffisante pour la condition de stabilité ou d'instabilité d'un système.

# Analyse de stabilité par la fonction de Lyapunov

- 1) Il faut trouver une fonction V(x), pour utiliser la stabilité, la fonction de Lyapunov candidate
- 2) Evaluer le dérivé  $\dot{V}(x)$  le long de la trajectoire du système

3) Appliquer le théorème pour conclure sur sa stabilité

Soit

$$V(x) = x^T P x$$
 (4-116)  
 $V(x) = [x_1 \quad x_2]^T P [x_1 \quad x_2]$ 

 $x_1, x_2$  étant l'intensité du courant d'induit i(t) et  $\Omega(t)$  respectivement.

Démonstration :

\*

Il faut d'abord calculer cette fonction V(x), pour pouvoir calculer son dérivé, on a

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.9167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$
(4-117)

En effectuant le calcul, on trouve :

$$V(x) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{11}{12}x_2^2$$
 (4-118)

On rappelle que V(x), la fonction de Lyapunov candidate est une fonction composée à plusieurs variables, selon notre cas, on a seulement deux variables, telle que

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{4-119}$$

Οù

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -6 & -2\\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \tag{4-120}$$

Et

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{5}{6}x_1 + \frac{13}{6}x_2$$

D'où le dérivé de V(x) est

$$\frac{dV(x)}{dt} = \left(\frac{5}{6}x_1 + \frac{13}{6}x_2\right) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^T$$

Finalement,

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{3}(10x_1^2 + 13x_2^2 + 31x_1x_2) < 0 \tag{4-121}$$

**♦** 

On peut dire que V(x) est décroissant le long de son trajectoire, car  $\dot{V}(x) < 0$ . La stabilité quadratique du système est assurée, et on peut dire que le système est alors asymptotiquement stable.

On peut en déduire que tout cela revient au même cas que celui du système sans retard, qu'un système décrit par son équation d'état est asymptotiquement stable si les parties réelles des pôles du système sont à valeurs négatives, même s'il y a l'existence du terme de retard.

#### 4.8 Conclusions

On a pu constater à travers les résultats de la simulation, que malgré l'existence du retard, l'état du système est toujours stable. Le retard n'influence pas alors l'état du système, mais agit sur la commande, Donc, dans ce cas il faut passer à une solution utilisant des synthèses de loi de commande et penser à la synthèse de commande robuste pour compenser ce retard.

Afin d'assurer la commande multivariable d'un système linéaire à retard, il faut d'abord que le système ait les caractéristiques de la stabilité selon l'équation de Lyapunov ou selon les inégalités matricielles linéaires ou encore par les inégalités algébriques de Riccati. On peut résumer alors que des connaissances de base en algèbre linéaires sont très essentielles pour pouvoir effectuer la synthèse de commande.

#### **CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

Ce mémoire d'initiation en recherche est construite sur la contribution à la modélisation des systèmes linéaires multivariables à retard à temps continu. On peut voir à travers toute ces théories que le système à retard est un peu différent des systèmes sans retard avec l'existence de la fonction de retard, la transformation de Laplace est toujours aussi essentielle. On peut caractériser alors un système à retard par l'existence de la fonction  $e^{-\tau p}$  dans un modèle.

Les systèmes qu'on a étudiés possèdent des caractéristiques intrinsèques que nous ne pouvons changer. Leur étude a nécessité donc des outils spécifiques, l'analyse du spectre des systèmes à retard et son applications aussi sont très différentes des systèmes sans retard. Mais ils ont quand même des points communs comme si seul le comportement terminal du système est intéressant, une description monovariable ou une fonction de transfert suffira pour représenter le système. Mais si le comportement interne des systèmes est également intéressant, alors une représentation de l'espace d'état du système est très utile comme celui des systèmes sans retard. La description mathématique des systèmes linéaires à retard de temps, comparer à un système sans retards, l'équation transcendantale  $\Delta(p) = 0$  a généralement une infinité de nombre de solutions.

Les concepts de commandabilité et d'observabilité qui ont été développés pour la représentation d'état des systèmes permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Le théorème de Lyapunov-Krasovski et de Lyapunov-Razumikhin permet de conclure sur la stabilité d'un système dynamique grâce à des équations algébriques. La difficulté réside sur le calcul de la fonction de Lyapunov V(x(t)) dans le cas général ou la matrice P dans le cas linéaire, ce qui permet de formuler les équations algébriques qui sont les inégalités matricielles linéaires et les inégalités algébriques de Riccati afin de pouvoir conclure et d'optimiser la stabilité d'un système.

Donc, on résume ainsi, malgré l'existence du retard le système est toujours stable. Le retard n'agit pas sur la stabilité de l'état du système mais sur la commande, alors afin d'assurer la commande multivariable d'un système linéaire à retard, il faut d'abord que le système ait les caractéristiques de la stabilité selon l'équation de Lyapunov ou selon les inégalités matricielles linéaires ou encore par les inégalités algébriques de Riccati. Les connaissances de

base en algèbre linéaires sont donc essentielles pour pouvoir effectuer des synthèses de commandes.

On rappelle à la fois qu'il faut toujours tenir compte que le système sur lequel on peut travailler n'est qu'un modèle mathématique de la réalité, et que par conséquent il y a des perturbations, de retard ou de perte d'information lors du passage au modèle. Bien sûr, il incombe à l'ingénieur de juger la pertinence de son modèle vis-à-vis des objectifs

#### Applications:

Le système à retard existe presque dans plusieurs domaines, que ce soit dans les commandes ou dans les transports des signaux ou encore dans les différents systèmes de transmissions. Leur niveau étant industriel ou autre.

#### **Perspectives**

L'initiation en recherche effectuée, nous a conduits à soulever des perspectives qui sont encore très vaste et qui ne sont pas encore vraiment appliquées :

- Il serait intéressant, par exemple, de considérer des chaînes d'intégrateurs à retard pur et de trouver une loi de commande compensant le retard dans la chaîne de commande du système.
- Il est aussi intéressant d'effectuer une synthèse des systèmes linéaires à retard à temps discret et d'appliquer les propriétés des commandes en temps discret.
- Et on peut aussi faire une comparaison sur les systèmes à retard à temps continu et ceux des systèmes à retard à temps discret.
- Est-ce toutes ces théories sont tous valables si on a un système linéaire à retard varié.
- Peut-on dire qu'un système à retard est stable si, et seulement si, il est stable selon les théorèmes de Lyapunov.
- Etudier les questions de la stabilité robuste, la performance robuste du système de contrôle d'un système linéaire à retard à temps invariant qui est encore un problème majeur pour les systèmes ayant des retards.

#### ANNEXES

# A. Quelques notions utiles sur l'automatique

# 1. Automatique

Définition A-1

C'est la discipline scientifique traitant de la caractérisation des systèmes automatisés et du choix, de la conception, de la réalisation du système de commande.

L'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur. Il s'agit de la science des systèmes. Plus précisément, cette discipline traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques. Elle inclut donc la cybernétique au sens étymologique du terme, et a pour fondements théoriques les mathématiques, la théorie du signal et l'informatique. L'automatique permet de contrôler un système en respectant un cahier des charges (rapidité, dépassement, stabilité ...).

#### Buts de l'automatique:

- Réaliser des tâches trop complexes ;
- Accomplir des tâches trop répétitives ou trop dures physiquement ;
- Accroître la précision.

Un exemple simple est celui du régulateur de vitesse d'une automobile, il permet de maintenir le véhicule à une vitesse constante prédéterminée par le conducteur, indépendamment des perturbations (pente de la route, résistance du vent...).

L'automatique est une science de l'ingénieur, et n'est pas à confondre avec les automatismes, qui sont les objets que l'automatique permet de concevoir pour procéder à l'automatisation d'un système (automates, régulateurs, etc.).

# 2. La stabilité au sens de Lyapunov

En mathématique et en automatique, la notion de **stabilité de Lyapunov** apparait dans l'étude des systèmes dynamiques. L'idée de Aleksandr Mikhaïlovitch Lyapunov consiste à dire que si tous les points d'un système démarrent autour d'un point x et que tous ces points restent

autour de ce point x, alors x est stable au sens de Lyapunov. De plus, si tous ces points convergent vers x, alors x est stable.

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système dissipe continûment (c'est à dire décroît avec le temps) alors ce système qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Avant d'énoncer le théorème de Lyapunov concernant la stabilité locale d'un point d'équilibre, nous allons tout d'abord donner quelques définitions.

#### Fonction de Lyapunov

Soit  $f \in C^1(U)$ ,  $x^* \in U$  tel que  $F(x^*) = 0$ 

Alors, la fonction  $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^1(U)$ , U ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ 

Telle que:

 $V(x^*) = 0$  et V(x) > 0,  $\forall x \in U | x \neq x^*$  est appelée fonction de Lyapunov de F en x.

Propriété A.1

Soit U un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x^*$  supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x^*)$  de F en  $x^*$ , alors

- Si  $\dot{V}(x) \le 0$ ,  $\forall x \in U$   $x^*$  est stable
- Si  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in U$   $x^*$  est asymptotiquement stable
- Si  $\dot{V}(x) > 0$ ,  $\forall x \in U$   $x^*$  est instable

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité.

Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour de point d'équilibre.

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques et les énergies électriques pour ceux des systèmes électriques.

#### Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{A-1}$$

Alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de A sont à partie réelle strictement négative ,soit :

$$Re(\lambda_i) < 0$$
 (A-2)

### Rappel sur les fonctions définies positives ou négatives

#### Propriété A.2

On a les propriétés des fonctions définies positive ou négative :

- -V(0)=0
- V est définie positive, si V(x) > 0,  $\forall x > 0$ ,  $\forall x \in D \{0\}$
- V est définie négative si  $V(x) < 0, \forall x \in D \{0\}$
- *V* est définie semi-positive si  $V(x) \ge 0$ ,  $\forall x \in D \{0\}$
- V est définie semi-négative si  $V(x) \le 0, \forall x \in D \{0\}$

#### Propriétés des formes quadratiques

On a:

$$x^T \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} x \tag{A-3}$$

# Propriété A.3

- a, b > 0, la forme quadratique est définie positive
- a, b < 0, la forme quadratique est définie négative
- a > 0, b = 0 ou a = 0, b > 0, la fonction quadratique est définie semi-positive
- a < 0, b = 0 ou a = 0, b < 0, la fonction quadratique est définie semi-négative

La fonction quadratique définie  $V(x) = x^T P x$ , ou P une matrice  $n \times n$  réelle symétrique, est dite définie selon ses propriétés, avec  $P^T = P$ . Si P n'est pas symétrique, on procède à la forme symétrique.

On note que

$$(x^T P x)^T = x^T P^T x = x^T P x = x P x^T$$
(A-4)

Forme symétrique de la forme quadratique :

$$x^T P x = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} x^T P x$$
$$= \frac{1}{2} x^T P^T x + \frac{1}{2} x^T P^T x$$

$$V(x) = x^T \left(\frac{P + P^T}{2}\right) x \tag{A-5}$$

On note que:

$$\left(\frac{P+P^T}{2}\right)^T = \left(\frac{P+P^T}{2}\right) \tag{A-6}$$

Tests de positivité ou de négativité :

- $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T$ , est définie positive si est seulement si tous les valeurs propres de P sont positives. On doit symétriser P dans le cas où les valeurs propres de P sont non négative.
- D'autres tests comme le critère de Sylvester, impliquent le signe de la principale mineure de *P*.
- $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T$ , est définie négative si est seulement si :

$$-x^T P x = x^T (-P) x$$

Est définie positive.

<u>Dérivé de la fonction de Lyapunov pour le système</u>  $\frac{dx}{dt} = Ax$ 

On a:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$$

En dérivant cette fonction,

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= x^T A^T P x + x^T P A x \qquad \text{et } \dot{x}^T = x^T A^T$$

$$\dot{V}(x(t)) = x^T (A^T P + P A) x$$

# Equation matricielle de Lyapunov

On note que:

$$A^T P + PA = -Q$$

Et le dérivé de la fonction de Lyapunov est

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(x(t))}{dt} = -x(t)^{T}Qx(t)$$

#### Propriétés de la fonction de Lyapunov

Propriété A.4

- La fonction de Lyapunov  $V(x) > 0, x \neq 0$ ; V(0) = 0
- V(x) décroît le long de la trajectoire du système.
- La dérivée de V(x) est négative (ou semi-négative)

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} < 0 \tag{A-7}$$

Théorème de la stabilité de Lyapunov :

Soit V(x) une fonction définie positive dans  $D \in \mathbb{R}^n$ ,

Si le dérivé de V(x) le long de la trajectoire du système est :

- a) définie semi-négative l'état d'équilibre est stable au sens de Lyapunov
- b) définie négative l'état d'équilibre est dite asymptotiquement stable au sens de Lyapunov
- c) définie positive, l'état d'équilibre est instable

#### **Remarques:**

Le théorème de Lyapunov est une condition suffisante pour la condition de stabilité ou d'instabilité d'un système.

#### Analyse de stabilité de Lyapunov

1) Il faut trouver une fonction V(x), pour utiliser la stabilité, la fonction de Lyapunov candidate

- 2) Evaluer le dérivé  $\dot{V}(x)$  le long de la trajectoire du système
- 3) Appliquer le théorème pour conclure sur sa stabilité

# 3. Exemple d'application

1) Système scalaire

$$\dot{x} = -c(x) 
xcx > 0 
x \neq 0$$
(A-8)

On va montrer que le système est asymptotiquement stable

La fonction de Lyapunov est supposée égale à

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

 $\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$ 

Où

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = x$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = -xc(x) < 0$$

#### 2) Mouvement d'un pendule

On a l'équation du système :

$$J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$
  $J = ml^2$   $x_1 = \theta$   $x_2 = \dot{\theta}$   $x_1' = \dot{\theta}$   $x_2' = \ddot{\theta}$ 

Le système est en équilibre si :  $x_e = 0$ 

A partir de l'énergie totale du système, on peut avoir V(x), telle que

$$V(x) = K + P = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}l)^2 + mgl(1 - \cos x_1) > 0 \qquad \forall x_1 \in [-\pi, \pi]$$

Analyse de stabilité :

$$V(x) = K + P = \frac{1}{2}m(x_2l)^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = mx_2l^2 + mgl\sin x_1 \qquad \dot{x} = [x_1 \quad x_2]^T$$

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 & mx_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix} = 0$$

L'état d'équilibre est vérifié.

# 3) Pendule avec frottement

On a l'équation du système :

$$ml^2\ddot{\theta} + fl\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$
  
 $x_1 = \theta$   $x_2 = \dot{\theta}$   
 $x_1' = \dot{\theta}$   $x_2' = \ddot{\theta}$ 

A l'équilibre :  $x_e = 0$ , et

$$V(x) = \frac{1}{2}m(x_2l)^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

Analyse de stabilité du système

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \begin{bmatrix} mgl\sin x_1 & mx_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 & -\frac{f}{ml}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = mglx_2 \sin x_1 - mx_2 l \sin x_1 - flx_2^2$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = -flx_2^2 < 0$$

Le système est stable.

# B. Rappel sur la parité de la transformée de Laplace

Soit la transformée de Laplace, F(s), on définit  $f(t) = e^{-t}$  dans l'intégrale qui définit la transformée de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+1)t} dt$$

$$= \frac{1}{-(s+1)} \left[ e^{-(s+1)t} \right]_{t=0}^{t=\infty}$$
(B-1)

$$= \frac{1}{-(s+1)}[0-1]$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$
(B-2)

Le propre transformé de Laplace paire est:

$$\frac{k}{Ts+1} \leftrightarrow \frac{ke^{-\frac{t}{T}}}{T} = e^{-t} \tag{B-3}$$

Dans notre cas, on va supposer que T=1 et k=1. Ainsi, la même réponse (F(s)) en utilisant une transformée de Laplace appropriée pair devient

$$F(s) = \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$
 (B-4)

Qui est le même que celui décrit plus haut en utilisant la définition de la transformée de Laplace.

# C. Représentation d'état des systèmes multivariables à temps continu

Lorsqu'on a accès aux équations d'évolution physique d'un système, on peut décrire son comportement par la dynamique de ses variables, qui est une approche caractérisant son état. La formulation par variables d'état est une approche directe dans le domaine du temps qui s'exprime par une équation différentielle matricielle du premier ordre. L'équation différentielle est de la forme matricielle pour bien représenter les informations à l'ordre et les différentes valeurs des entrées/sorties.

Les systèmes qui peuvent être représentés par des variables d'état sont régis par des équations différentielles et pourraient être multivariables (plusieurs entrées et plusieurs sorties, connus sous le nom de MIMO (Multiple Input/Multiple Output)). On dit qu'ils sont monovariable (mono-entrée et mono-sortie ou SISO (Single Input/Single Output)), s'il n'a qu'une seule entrée et une seule sortie.

La représentation générale pour les équations d'état employé dans toute la dynamique d'un système multivariable est la description mathématique du système selon l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)e(t) \\ s(t) = C(t)x(t) + D(t)e(t) \end{cases}$$
 (C-1)

La première équation s'appelle l'équation de commande tandis que la seconde équation est l'équation d'observation. Où :

- x: vecteur d'état (variables d'état ou encore variables internes)
- *e* : vecteur des entrées (ou de commande)
- s: vecteur des sorties (ou d'observation)
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : matrice dynamique (ou d'état) du système
- *t* : est le temps
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : matrice d'application de la commande du système
- $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ : matrice d'observation
- $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ : matrice d'application directe de la commande
- *n* : nombre ou ordre d'état du système
- *m* : nombre ou ordre de commandes

• r : nombre ou ordre de sorties

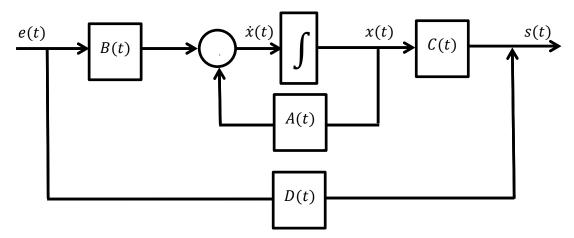


Figure C-1: Schéma bloc de la représentation d'état d'un système

Le vecteur d'état x(t) est formé par les variables d'état  $x_i(t)$  avec i=1,2,...,n,n définie l'ordre du système, qui représentent un ensemble de variables réelles nécessaires pour décrire le système. Le vecteur e(t) est l'entrée du système et s(t) sa sortie. Supposons que  $x(t_0)$  et l'instant  $t_0$  sont connus, telles que, leur connaissance ainsi que celle du signal d'entrée permettent de calculer le signal de sortie pour tout  $t \geq t_0$  où  $x(t_0)$  décrit l'état du système à l'instant  $t=t_0$  et  $e_{[t_0,t]}$  désigne les valeurs prises par l'entrée e(t) entre les instants  $t_0$  et t.

La représentation d'état est très adaptable au cas multivariable et donne une description des variables internes (d'où le nom aussi de représentation interne). Les variables d'état, ici, sont donc toutes des fonctions continues du temps.

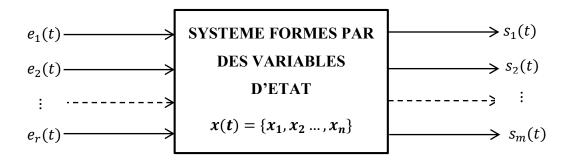


Figure C-2 : Système multivariable à n états, à r entrées et m sorties

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ e_r(t) \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad s(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ s_m(t) \end{bmatrix}$$

Dans le cas r = m = 1, le système est monovariable (SISO) ou un système scalaire, c'est-à-dire e et s sont des scalaires. Pour r > 1 et/ou m > 1, c'est-à-dire si l'un d'eux est un vecteur, le système est multivariable (MIMO). Si on suppose que les matrices A, B, C, D ne dépendent pas du temps t, on dit que le système est *invariant*, et on aura les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$
 (C-2)

Le passage d'une description interne du système (représentation d'état) à une description externe (fonction de transfert), si les conditions initiales sont nulles, est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Be \\ s = Cx + De \end{cases}$$
 (C-3)

Démonstration :

\*

En appliquant la transformée de Laplace au système ci-dessus :

$$p.X(p) - x(0) = AX(p) + Be(p)$$

$$\Rightarrow (p.I - A)X(p) = x(0) + Be(p)$$

$$\Rightarrow X(p) = (p.I - A)^{-1}x(0) + (p.I - A)^{-1}BE(p)$$

$$s(p) = CX(p) + De(p)$$

$$\Rightarrow s(p) = C(pI - A)^{-1}BE(p) + DE(p)$$
(C-5)

•

D'où la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D = \frac{C \cdot Adj(p.I - A)B + det(p.I - A)D}{det(p.I - A)}$$
(C-6)

# 1. Infinité de la représentation d'état

Il y a une infinité de représentation d'état, si on veut changer de base, on pose X = PZ:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Be \\ s = CX + De \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = APZ + Be \\ s = CPZ + De \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = P^{-1}APZ(t) + P^{-1}Be(t) \\ S(t) = CPZ(t) + De(t) \end{cases} \tag{C-7}$$

# 2. Exemples de système de base

Un système à temps continu fonctionne sur l'entrée pour produire une sortie et peut opérer dans différents opérateurs de base :

$$s(t) = [x(t)]^2$$

$$s(t) = x(t - \tau)$$

$$s(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

$$s(t) = x(-t)$$

$$s(t) = Bx(t)$$

$$s(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$s(t) = x_1(t) \times x_2(t)$$

• Temps gradué

$$s(t) = x(at)$$

Dans tous les cas ci-dessus, on peut calculer la sortie en fonction de l'entrée et de la définition de l'opérateur du système.

# 3. Résolution des équations d'état

Résoudre les équations d'état consiste à déterminer l'expression du vecteur d'état x(t) en fonction du temps, autrement dit à déterminer les expressions temporelles des n variables d'état, connaissant le système (c'est-à-dire connaissant [A],[B] et [C]) et connaissant l'entrée e(t) qui lui est appliquée. [Erreur! Source du renvoi introuvable.] **p. (300)** 

Si on avait affaire à un système décrit par une simple équation différentielle et non par un système différentiel, l'équation d'état se résumerait à :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + be(t) \tag{C-8}$$

#### 1. Le cas scalaire

Avec condition initiale  $x(t_0)$ ,

# Résolution du problème homogène :

$$\dot{x}(t) = ax(t), \qquad x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)}$$
 (C-9)

# Résolution du problème avec second membre :

En utilisant la variation de la constante, c'est-à-dire qu'on cherche une solution pour (C-8) sous la forme

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}z(t)$$
 (C-10)

# Forme générale de x(t)

On en déduit la forme générale de x(t). D'où la solution d'une telle équation différentielle est connue et a pour expression si  $t_0 = 0$ :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-0)} Be(\tau) d\tau$$
 (C-11)

Dans cette écriture,  $e^{at}$  représente une matrice exponentielle que l'on note en général  $\Phi(t)$  et que l'on appelle *matrice de transition* du système. Si on connaît l'état du système à un instant  $t_0$  différent de 0, on peut calculer son état à un instant t quelconque :

$$x(t) = e^{at}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}Be(\tau)d\tau$$
 (C-12)

Ce résultat peut également être obtenu en appliquant la transformation de Laplace à (C-8). En effet

$$pX(p) - x(0) = aX(p) + bE(p)$$

Où X(p) et E(p) représentent respectivement les transformées de Laplace de x(t) et e(t). De la relation précédente, on en déduit alors

$$X(p) = \frac{1}{p-a}x_0 + G(p)E(p)$$
 (C-13)

Où  $G(s) = \frac{b}{p-a}$ . Par application de la transformation de Laplace inverse, on a

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)e(\tau)d\tau = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-t_0)}Be(\tau)d\tau \quad (C-14)$$

#### 2. Le cas vectoriel

Par analogie au cas scalaire, on définit l'exponentielle d'une matrice carrée  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de la façon suivante

$$\exp(A) = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k \ge 0} \frac{A^k}{k!}, \quad \text{avec } A^0 = I_n$$
 (C-15)

 $I_n$ : représente la matrice identité de dimension  $n \times n$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0$$
 (C-16)

Et on démontre que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 (C-17)$$

Définition C-1

La matrice  $e^{A(t-t_0)}$  est désignée sous le nom de *matrice de transition* car elle établit la correspondance entre l'état du système à un instant t et l'état initial à l'instant  $t_0$ . On a alors comme notation souvent utilisée

$$\phi(t, t_0) = \phi(t - t_0) = e^{A(t - t_0)}$$
 (C-18)

Cette matrice joue un rôle très important dans la théorie des systèmes dynamiques linéaires. Dans ce qui suit, on va établir le calcul de la matrice de transition et donner ses principales propriétés.

#### 3. Calcul de la matrice de transition

L'opération la plus délicate, dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition. De nombreuses méthodes existent, mais on va rester à présenter ici les plus classiques.

# a) <u>Utilisation de la transformation de Laplace</u>

En appliquant la transformation de Laplace au système d'équations différentielles de la représentation d'état :

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + (B)e(t) \implies pX(p) - x(0) = [A]X(p) + (B)E(p)$$
$$(pI_n - [A])X(p) = x(0) + (B)E(p)$$

D'où:

$$X(p) = (pI_n - [A])^{-1} x(0) + (pI_n - [A])^{-1} (B)E(p)$$
 (C-19)

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée dans le paragraphe précédent, soit :

$$x(t) = e^{[A]t}x(0) + \int_0^t e^{[A](t-\tau)} (B)e(\tau) \, d\tau$$

que la matrice de transition  $e^{[A]t}$  possède pour transformée de Laplace la matrice  $(pI_n - [A])^{-1}$ .

Transformons l'expression de  $(pI_n - [A])^{-1}$ 

$$(pI_n - [A])^{-1} = \frac{1}{p} \left( I_n - \frac{[A]}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{I_n}{p} + \frac{[A]}{p^2} + \frac{[A]^2}{p^3} + \dots + \frac{[A]^n}{p^{n+1}} + \dots \right)$$

$$e^{[A]t} = \left( I_n + [A]t + \frac{[A]^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{[A]^n}{n!} + \dots \right)$$
(C-20)

Propriété C.1

#### 4. Propriétés de la matrice de transition

 $\forall t$ :

-  $\phi(t)$  satisfait l'équation linéaire homogène

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = A\phi(t) = \phi(t)A,\tag{C-21}$$

- $\phi(t_2 t_1)\phi(t_1 t_0) = \phi(t_2 t_0)$
- $\phi$  est toujours inversible, d'inverse  $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

On va maintenant essayer de résoudre le problème non homogène

$$\dot{x} = Ax + Be, \qquad x(0) = x_0 \tag{C-22}$$

Comme pour le cas scalaire on cherche une solution de la forme (méthode de la variation de la constante) :

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)}z(t)$$
 (C-23)

En remplaçant x(t) dans (C-22) on obtient immédiatement que

$$\dot{z}(t) = e^{-[A]t}Be(t) \tag{C-24}$$

Ainsi

$$z(t) = z(0) + \int_0^t e^{-[A]\tau} Bu(\tau) d\tau$$
 (C-25)

Soit finalement

$$x(t) = e^{[A]t}x(t_0) + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}Be(\tau)d\tau$$
 (C-26)

Dans le cas où le système est initialisé en  $x(t_0)$  au lieu de x(0), on démontre que :

#### Forme générale de x(t)

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)}Be(\tau)d\tau$$
 (C-27)

Un résultat équivalent peut être obtenu en utilisant la transformée de Laplace. Pour ce faire appliquons la transformée de Laplace à la relation (C-22)

$$pX(p) - x(0) = AX(p) + BE(p)$$

$$\Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x(0) + (pI - A)^{-1}Be(p)$$
 (C-28)

Or  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = A\phi(t)$ , soit par transformation de Laplace,  $\Phi(s) = (pI_n - A)^{-1}$ ,  $\Phi(p)$  resprésente la transformée de Laplace de  $\phi(t)$ . On en déduit que

$$X(p) = \Phi(p)x(0) + \Phi(p)BE(p) \tag{C-29}$$

En appliquant maintenant la transformation de Laplace inverse, on obtient immédiatement que

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)Be(\tau)d\tau$$
$$= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t - \tau)}Be(\tau)d\tau \tag{C-30}$$

# b) Application au calcul direct de la matrice de transition

On peut utiliser directement l'expression du développement de Taylor à condition que la matrice de commande soit nilpotente.

Remarque : Une matrice carrée est dite nilpotente si il existe un entier k positif tel que  $[A]^n = [0]$  pour tout n > k. Bien évidemment, plus k est petit, plus le calcul direct est simple et rapide.

Considérons par exemple la matrice de commande :  $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

On a:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En conséquence :  $A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\forall n \ge 2$ 

On aura alors d'après  $eAt \ \ \, = \left(I_n + [A]t + \frac{[A]^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{[A]^n}{n!} + \dots\right)$ (C-20):

$$e^{[A]t} = \left(I_n + [A]t + \frac{[A]^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{[A]^n}{n!} + \dots\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# c) Méthode de diagonalisation de la matrice de transition

On remarque que le calcul de la matrice de transition est très simple à effectuer si celle-ci est diagonale.

Soit:

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{[A]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$
(C-31)

Cette constatation nous conduit naturellement à imaginer une méthode relativement facile pour calculer  $e^{[A]t}$ : il suffit de diagonaliser la matrice [A]. Considérons une matrice de commande quelconque:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
 (C-32)

Les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice sont définis par :

$$[A]v_i = \lambda_i v_i \tag{C-33}$$

Les vecteurs non nuls  $v_i$  sont les vecteurs propres de [A], les  $\lambda_i$  sont ses valeurs propres. Pour déterminer ces granduers, étant donné que les  $\lambda_i$  sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice [A] définie par :

$$det(\lambda I_n - [A]) = 0 (C-34)$$

Si on appelle  $\Delta$  la matrice diagonale formée des valeurs propres de la matrice [A] et [T] la matrice modale formée de ses vecteurs propres, on a :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ et } [T] = [(v_1) \quad (v_2) \quad \dots \quad (v_n)]$$
 (C-35)

Dans ces conditions:

$$[A] = [T][\Delta][T]^{-1}$$
 (C-36)

On peut alors vérifier que :

$$[A]^n = ([T][\Delta][T]^{-1}) \times ([T][\Delta][T]^{-1}) \times \dots \times ([T][\Delta][T]^{-1}) = ([T][\Delta][T]^{-1}) \text{ (C-37)}$$

Comme 
$$e^{[A]t} = \left(I_n + [A]t + \frac{[A]^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{[A]^n}{n!} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow e^{[A]t} = [T] \left( I_n + [\Delta]t + \frac{[\Delta]^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{[\Delta]^n}{n!} + \dots \right) [T]^{-1} = [T] e^{[\Delta]t} [T]^{-1}$$
 (C-38)

Donc, on a

$$e^{[A]t} = [T] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} [T]^{-1}$$
 (C-39)

Les fonctions  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ , ...,  $e^{\lambda_n t}$  qui constituent la base de fonctions élémentaires du vecteur d'état, donc des signaux internes du système, sont appelées *les modes du système*.

#### d) Méthode de Cayley-Hamilton

Cette méthode, qui repose sur la propriété d'une matrice d'être toujours solution de son équation caractéristique, présente l'avantage d'être relativement rapide pour des matrices d'ordres peu élevés et de mettre en œuvre des calculs moins complexes, donc moins générateurs d'erreurs de calcul.

Considérons une matrice [A] et son équation caractéristique :

$$det(\lambda I_n - [A]) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$
 (C-40)

$$[A]^{n} + a_{n-1}[A]^{n-1} + \dots + [A]_{1}\lambda + a_{0}I = 0$$
 (C-41)

Cette équation permet d'affirmer que pour toute matrice carrée d'ordre n possédant n valeurs propres distinctes, toute puissance de [A] supérieure ou égale à n peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de [A] strictement inférieures à n.

On peut donc écrire :

$$e^{[A]t} = f_{n-1}(t)[A]^{n-1} + f_{n-2}(t)[A]^{n-2} + \dots + f_1(t)[A] + f_0(t)I$$
 (C-42)

La recherche des fonctions  $f_i(t)$  ne pose aucune difficulté : les valeurs propres de la matrice [A] vérifiant obligatoirement cette équation, on construit un système de n équations où les n fonctions  $f_i(t)$  sont le inconnues et la résolution de ce système permet de déterminer  $e^{[A]t}$ .

Soit

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = f_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} + f_{n-2}(t)\lambda_1^{n-2} + \dots + f_1(t)\lambda_1 + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = f_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} + f_{n-2}(t)\lambda_2^{n-2} + \dots + f_1(t)\lambda_2 + f_0(t) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = f_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} + f_{n-2}(t)\lambda_n^{n-2} + \dots + f_1(t)\lambda_n + f_0(t) \end{cases}$$
(C-43)

# **BIBLIOGRAPHIES**

- 1. **Shinskey, F.G.** "Process Control Systems". s.l.: McGraw-Hill Book Company, 1967.
- 2. Min Wu, Yong He, Jin Hua She. "Stability Analysis and Robust control of Time-Delay Systems". s.l.: Springer.
- 3. Fridman, Emilia School of Electrical Engineering. "Introduction to Time-Delay Systems. Analyses and control". [éd.] Birkhäuser. June 2014.
- 4. **S. Guo and J. Wu.** "Bifurcation Theory of Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 184". [éd.] © Springer Science+Business. 2013.
- 5. Granjon, Yves Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) et directeur. "AUTOMATIQUE Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. Cours et exercices corrigés". [éd.] DUNOD. 2010.
- 6. **Briat, Corentin.** "Linear Parameter Varying and Time Delay Systems. Analysis, Observation, Filtering & Control". Advances in Delays and Dynamics 3. s.l.: © Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.
- 7. **V. Kolmanovskii, A. Myshkis.** "Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations". s.l.: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- 8. **Gu, Silviu Iulian Niculescu and K.** "Advances in Time-Delay Systems, ser". [éd.] Springer-Verlag. 2004.
- 9. **Mahmoud, Magdi S.** "ROBUST CONTROL AND FILTERING FOR TIME-DELAY SYSTEMS". s.l.: Marcel DEKKER Inc., 2007.
- 10. Bellman R. and Cooke, K. L. "Differential Difference Equations". s.l.: Academic Press, 1963.
- 11. **G., Stépán.** "Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions". s.l.: Harlow: Longman Scientific & Technica, 1989.
- 12. **Razumikhin, B. S.** "On the stability of systems with a delay". s.l.: Journal of Applied Mathematics and Mechanics; Translation of the Sowjet Journal Prikladnaja Matematika Mechanika,, 1958. Vol. Vol. 22, pp. 215-227.
- 13. **D., Salamon.** "On controllability and observability of time-delay". s.l.: IEEE Transactions on Automatic Control, pp. 432-439. Vol. Vol. 29.

- 14. Hale, J. K. "Theory of Functional Differential Equations". s.l.: Springer Verlag, 1977.
- 15. **Krasovskii, N. N.** "On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags". s.l.: Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Translation of Prikladnaja Matematika, Mechanika, 1962. No. 1, pp. 50-67.
- 16. Wang, W.-J., and Song, C.-C. "A new stability criterion forlarge-scale systems with delays, Control-Theory Advanced Technology". 1989. pp. pp. 315-322. Vol. Vol. 5.
- 17. **T. Iwasaki, R.E. Skelton,.** "A unified approach to fixed order controller design via linear matrix inequalities". s.l.: Math. Probl. Eng., 1995.
- 18. **T. Iwasaki, R.E. Skelton.** "All controllers for the general H∞ control probblems: LMI existence conditions and state-space formula.". s.l.: Automatica, 1994.
- 19. R.A. Horn, C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. s.l.: Cambridge University Press, 1990.
- 20. C. Briat, O. Sename, J.-F. Lafay. "A full-block S-procedure application to delay-dependent H∞ state-feedback control of uncertain time-delay systems". s.l.: in 17th IFAC World Congress, 2008.
- 21. W.H. Chen, W.X. Zheng. "On improved robust stabilization of uncertain systems with unknown input delays". s.l.: Automatica 42, 2006.
- 22. Cheres, E. Palmor, Z. J. and Gutman S. "Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations". s.l.: IEEE Transactions on Automatic Control, 1989. pp. 1203-1204. Vol. Vol. 34. No. 11.
- 23. Coppel, W. A. "Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations". 1965.
- 24. **G.J., Nazaroff.** "Stability and stabilization of linear differential delay systems". 1973. pp. 317-318. Vol. 18. N° 6.
- 25. K., Hale J. "Theory of Functional Differential Equations". s.l.: Springer Verlag, 1977.
- 26. **Kojima A., Uchida, K. and Shimemura E.** "Robust stabilization of uncertain time-delay systems via combined internal-external approach". s.l.: Control, IEEE Transactions on Automatic, 1993. pp. 373-378. Vol. 38. 2.
- 27. Mori, Shinozoki et. " ". 2006.
- 28. Norman, S. "Control Systems Engineering". [éd.] ed. Hoboken. s.l.: NJ: John Wiley, 2004. Vol. 4th.

- 29. **Chen, Prof. Yon-Ping.** "Dynamic System Simulation and Implementationon". s.l.: Course, Spring, 2015.
- 30. Arzelier, D. "Représentation et analyse des systèmes linéaires". 2010. Version 6.
- 31. Manu.Malek-ZavareiI et Mohammed.Jamshidi. "TIME-DELAY SYSTEMS Analysis, Optimization and Applications". [éd.] HOLLAND- NORTH. 1987.
- 32. Manfred, Schoen Gerhard. "Stability and Stabilization of Time-Delay Systems". 1995.
- 33. Plestan, Franck. "COMMANDE". Année 2009/2010.