

# SOMMAIRE

CHAPITRE1.....	
<b>I. DESCRIPTION ET FORMULATION DU PROBLEME.....</b>	<b>1</b>
-1 DESCRIPTION DU PROBLEME.....	1
-2 HYPOTHESES SYMPLIFICATRICES.....	3
-3 FORMULATION VECTORIELLE DU PROBLEME.....	3
-3-1 EQUATION DE CONTINUTE.....	3
-3-2 EQUATION DU MOUVEMENT.....	3
-3-3 EQUATION DE LA CHALEUR.....	3
-4 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT ET DE LA VORTICITE EN COORDONNES BISPHERIQUES.....	4
-4-1 DEFINITION DES COORDONNES BISPHERIQUES.....	4
-4-2 FONCTION DE COURANT.....	7
-4-3 VORTICITE.....	8
-5 EQUATIONS DE TRANSFERT AVEC LA FORMULATION VORTICITE ET FONCTION DE COURANT.....	8
-5-1 EQUATION DU MOUVEMENT.....	8
-5-2 EQUATION DE LA CHALEUR.....	9
-5-3 EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	9
-6 CONDITIONS INNITIALES.....	9
-7 CONDITIONS AUX LIMITES.....	10
-8 ADIMENTIONNALISATION.....	11
-8-1 CHOIX DES GRANDEURS.....	11
-8-2 EQUATIONS DU MOUVEMENT.....	12
-8-3 EQUATION DE LACHALEUR.....	12
-8-4EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	14
-9 COEFFICIENT D'ECHANGE DE CHALEUR : NOMBRE DE NUISSELT.....	15
-9-1 DEFINITION.....	15
-9-2 NOMBRE DE NUISSELT PARIETAUX.....	15
-10 CONCLUSION.....	16
<b>II. RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS.....</b>	<b>17</b>
-1 DISCRETISATION DU DOMAINE ET DES FONCTIONS.....	17
-1-1 MAILLAGE.....	17
-1-2 DISCRETISATION DES FONCTIONS.....	18
-2 FORMULATION NUMERIQUE DU PROBLEME.....	19

-3 DISCRETISATION DES EQUATIONS.....	20
-3-1 DISCRETISATION DES EQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE.....	21
➤ DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR.....	21
➤ DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA VORTICITE.....	21
-3-2 DISCRETISATION DE L'EQUATION DE TYPE HYPERBOLIQUE : EQUATION DE LA FONCTION DECOURANT.....	23
-4 DISCRETISATION DES CONDITIONS INITIALES ET AUX NIVEAUX DES FRONTIERES.....	23
-5 DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS DANS LE DOMAINE.....	25
-5-1 EQUATION PARABOLIQUE.....	25
-5-1-1 EQUATION DE LA CHALEUR.....	25
-5-1-2 EQUATION DE LA VORTICITE.....	27
-5-2 EQUATION ELLYPTIQUE : EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	29
-6 DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS SUR LES FRONTIERES.....	30
-6-1 EQUATION DE LA CHALEUR.....	30
-6-2 EQUATION DE LA VORTICITE.....	32
-6-3 EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	35
-7 RESOLUTION DES EQUATIONS.....	35
-7-1 RESOLUTION DES EQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE.....	35
-7-1-1 METHODE ADI.....	36
-7-1-2 RESOLUTION.....	36
-7-2 RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	37
-8 TEST DE CONVERGENCE DES CALCULS.....	37
-9 ORGANIGRAMME GENERAL DES CALCULS.....	38
-10 CONCLUSION.....	39

### III. CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....40

## NOMENCLATURE

$a$  = distance qui sépare les deux sphères

$C_{i,j,k}$  = tableau des coefficients du système tridiagonal des équations paraboliques. Il représente le  $k^{\text{ième}}$  du  $j^{\text{ième}}$  demi temps de la  $i^{\text{ième}}$  équation

$D_{i,j,k}$  = tableau des coefficients du second membre du système tridiagonal des équations paraboliques. Il représente le  $k^{\text{ième}}$  du  $j^{\text{ième}}$  demi temps de la  $i^{\text{ième}}$  équation

$C_p$  = capacité calorifique massique a pression constante [ $\text{Jkg}^{-1}\text{k}^{-1}$ ]

$f$  = la fonction symbolique représentant soit la vorticité, soit température, soit la fonction de courant

$g$  = accélération de la pesanteur [ $\text{ms}^{-2}$ ]

$h, k$  = des facteurs d'échelle

$h_{i,j}, k_{i,j}$  = facteurs d'échelle aux nœud  $i, j$

$N$  = nombre de points du maillage suivant la direction radiale  $\eta$

$M$  = nombre de points du maillage suivant la direction angulaire  $\theta$

$P$  = la pression [ $\text{Nm}^{-2}$ ]

$Pr$  = ombre adimensionnel de PRANDLT

$Ra$  = nombre adimensionnel RAYLEIY

$T$  = température [ $\text{k}$ ]

$T_0$  = température initiale [k]

$T_1$  = température sur la paroi intérieur [k]

$T_2$  = température sur la paroi extérieure [k]

$V_\eta$  = Composante de la vitesse suivant la direction radiale  $\eta$

$V_\theta$  = Composante de la vitesse suivant la direction angulaire  $\theta$

### **Lettres grecques**

$\alpha$  = diffusivité thermique [ $m^2s^{-1}$ ]

$\beta$  = coefficient d'expansion thermique [ $k^{-1}$ ]

$\eta$  = coordonnée radiale [m]

$\theta$  = coordonnée angulaire [rad]

$\Delta T$  = gradient de température

$\Delta t$  = pas de temps

$\lambda$  = conductivité thermique du fluide [ $Wm^{-1}k^{-1}$ ]

$\nu$  = viscosité cinématique du fluide [ $m^2s^{-1}$ ]

$\rho$  = masse volumique [ $kgm^{-3}$ ]

## INTRODUCTION

L'étude de la convection naturelle occupe une place de choix vue son importance dans de nombreuses applications naturelles et industrielles.

La convection naturelle thermique est définie comme le mouvement d'ascension des fluides dû à un gradient de température. Elle représente, avec les transferts de chaleur par conduction et par rayonnement un des trois modes de transfère de chaleur.

Beaucoup de chercheurs ont travaillé théoriquement ou expérimentalement sur la convection naturelle dans un espace annulaire situé entre deux cylindres ou de ux sphères. Weber et al. [1], Powe et al. [2], Astill et al. [3] ont étudié la convection naturelle entre deux sphères excentrées verticalement. D'autres auteurs Sarr et al. [4], Ingham et al. [5], Garg et al. [6], Fujii et al. [7] ainsi que Sanjai et al. [8] ont étudié le cas de deux cylindres ou 2 sphères. Sow et al. [9] ont eu à traiter récemment le cas de la convection naturelle d'un fluide entre deux sphères excentrées verticalement, la sphère interne étant soumise à une densité de flux de chaleur constante en utilisant mais l'application dans un espace annulaire situé entre deux hémisphères excentrées verticalement n'a pas encore fait l'objet d'études poussées. Notons qu'elle est intéressante car elle constitue une généralisation de la cavité annulaire utilisée par exemple comme échangeur dans la conversion énergétique.

L'objectif de ce présent travail est d'étudier « la convection naturelle dans l'espace situé entre deux hémisphères isothermes excentrées verticalement ». Ce mémoire sera divisé en deux principaux chapitres. Dans le premier, qui est consacré à la modélisation mathématique du problème, nous allons d'abord poser le problème, choisir un système de coordonnées adapté puis établir les équations de Navier et Stokes et de la chaleur sous forme de variables primitives. Afin d'éliminer le terme de pression et de réduire le nombre d'équations nous allons reformuler notre problème avec les variables vorticité et fonction de courant. Les systèmes obtenus qui régissent les transferts sont (ensuite fermés par des conditions initiales et aux limites

Le deuxième chapitre sera consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et un algorithme de calcul y seront développés. L'équation de la fonction de courant sera résolue par la méthode SOR (Successive Overrelaxation), les équations du mouvement et de la chaleur seront résolues par la méthode ADI (Alternative Direction Implicit). Enfin un organigramme numérique général réglé par des tests de convergence appropriés sera proposé.

# I. Chapitre 1 :

## I. DESCRIPTION ET FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

### I. 1 : description du problème

Cette étude a pour objet l'étude de la convection naturelle d'un fluide dans l'espace situé entre deux hémisphères excentrés verticalement.

Les frontières du domaine sont solides, immobiles et imperméables. Les parois verticales de l'enceinte sont adiabatiques tandis que celles qui sont sphériques sont isothermes.

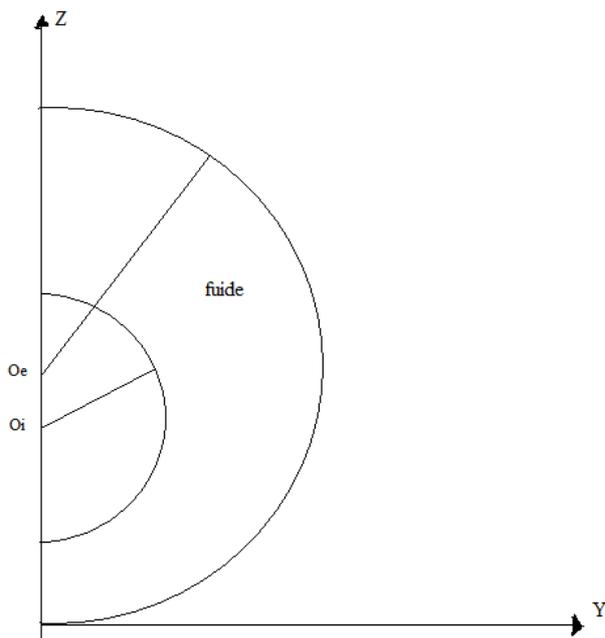


Figure 1

## I. 2-hypothèses simplificatrices

Nous faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- l'écoulement est bidimensionnel
- les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique dans l'équation du mouvement approchée par la loi de Boussinesq suivante:  
 $\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0))$
- dans l'équation de la chaleur, on néglige l'effet de pression, la fonction de dissipation et le rayonnement

## I. 3-formulation vectorielle du problème

Le mouvement est régi par les trois équations suivantes [8] :

### I. -3-1 : Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit en fonction de la vitesse notée  $\vec{V}$

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (1-1)$$

### -3-2 Equation du mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\beta (T - T_0) \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{V} \quad (1-2)$$

### I. -3-3 : Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = \alpha \Delta T \quad (1-3)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{ Le coefficient de diffusion thermique}$$

$\rho$  : Masse volumique,

$\lambda$  : Conductivité thermique

$\nu$  : Viscosité cinématique,

$\beta$  : Coefficient thermique

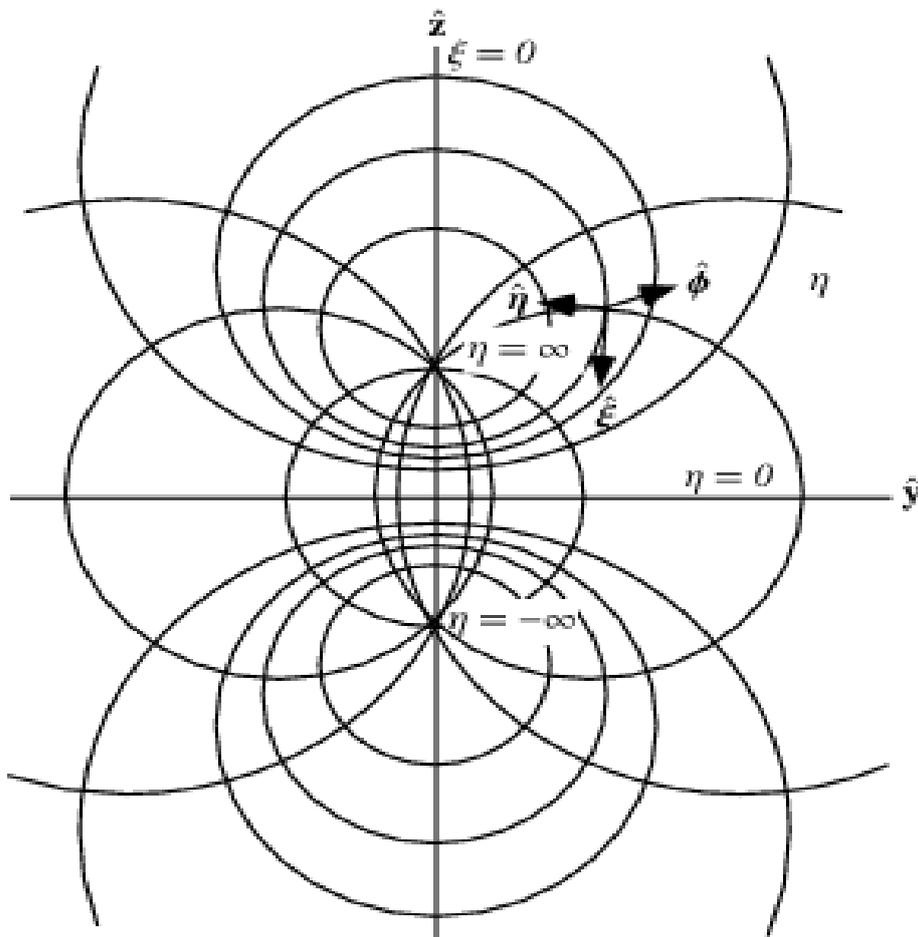
$c_p$  : Capacité calorifique thermique à pression constante,

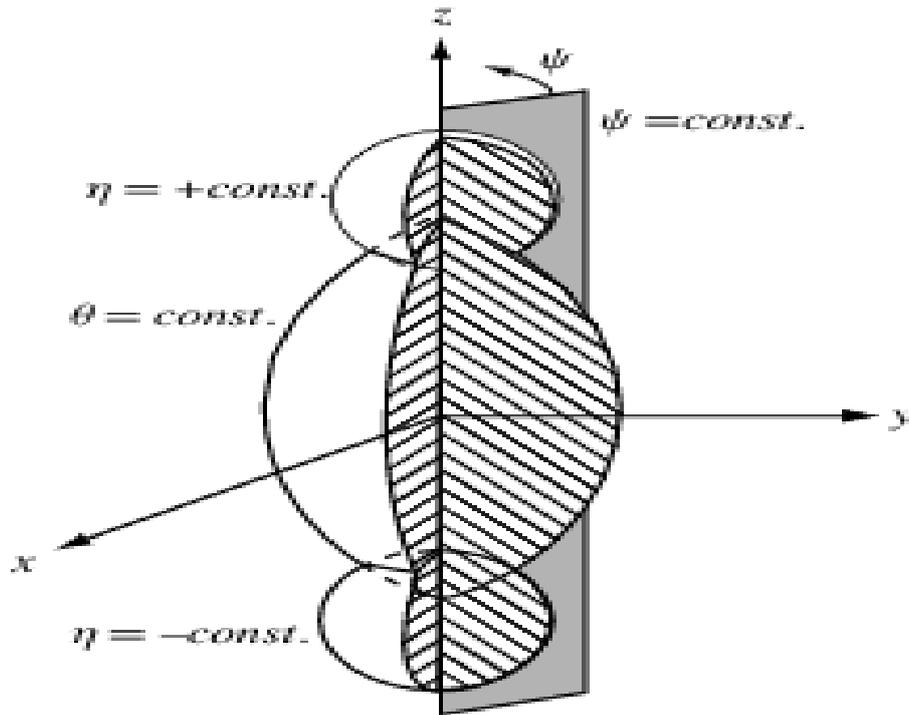
T : Température du fluide

$\vec{V}$  : Vecteur vitesse du fluide,

## I. -4 Introduction de la fonction de courant et de la vorticité en coordonnées bisphériques

### I. 4-1 définition des coordonnées bisphériques





On considère d'abord les coordonnées bipolaires.

$$y = a \frac{\sin \theta}{ch\eta - \cos \theta}$$

$$z = a \frac{sh\eta}{ch\eta - \cos \theta}$$

Les  $\eta$  constantes sont des cercles axés sur l'axe  $oz$  de centre  $(O ; \frac{a}{sh\eta})$ . Les

lignes géométriques des  $\theta$  constantes sont des cercles d'axe  $Oy$  de centre  $O$   $(\frac{a}{\tan \theta}; 0)$  et de rayon  $r = \frac{a}{|\sin \theta|}$  passant par les poles  $+a$  et  $-a$ .

Pour générer les coordonnées bisphériques [11], nous effectuons une rotation autour de l'axe verticale  $Oz$ , nous obtenons alors

$$y = a \frac{\sin \theta \sin \xi}{ch\eta - \cos \theta}$$

$$x = a \frac{\sin \theta \cos \xi}{ch\eta - \cos \theta}$$

$$z = a \frac{sh\eta}{ch\eta - \cos \theta}$$

Les  $\eta$  constantes des sphères centre  $O(0, 0, \frac{a}{th\eta})$

Les  $\theta$  constantes sont des tores de révolution d'ordre deux verticales d'axe Ox.

Les  $\xi$  verticales sont des plans verticaux qui contiennent l'axe Oz.

Les vecteurs de base sont :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \overline{OM}}{\partial x_i} \quad x_1=x=\eta ; x_2=y=\theta ; x_3=z=\xi$$

$$\vec{e}_\eta = \frac{a}{(ch\eta - \cos\theta)^2} \left[ -\sin\theta (\vec{e}_y \cos\xi + \vec{e}_z \sin\xi) + (1 - ch\eta \cos\theta) \vec{e}_x \right]$$

$$\vec{e}_\xi = -\frac{a}{(ch\eta - \cos\theta)^2} \left[ (1 - ch\eta \cos\theta) (\vec{e}_y \cos\xi + \vec{e}_z \sin\xi) + sh\eta \sin\theta \vec{e}_y \right]$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{a}{(ch\eta - \cos\theta)^2} \left[ (\vec{e}_y \sin\xi + \vec{e}_z \cos\xi) \sin\theta \right]$$

Les coefficients métriques s'écrivent :

$$g_{\eta\eta} = \frac{a^2}{(ch\eta - \cos\theta)^2} = g_{\theta\theta}$$

$$g_{\xi\xi} = \frac{a^2 \sin^2\theta}{(ch\eta - \cos\theta)^2}$$

$\eta$  matérialise le rayon de chacune des différentes sphères. La variable  $\eta$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Les valeurs positives de  $\eta$  sont associées aux sphères dont les centres se trouvent dans le plan oxy.

$\theta$  matérialise les tores de révolution, sa valeur est comprise entre  $0$  et  $\pi$

Les surfaces pour lesquelles  $\xi$  constantes sont des demis plans.

Le mouvement étant plan nous allons travailler avec l'hypothèse suivante :

$$\xi = \frac{\pi}{2} \text{ Pour le plan (Oy ; Oz).}$$

Ainsi les équations se mettent sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{a \sin \theta}{ch\eta - \cos \theta} \\ z = \frac{ash\eta}{ch\eta - \cos \theta} \\ x = 0 \end{array} \right\} \dots$$

**I. 4-2 Fonction de courant :**

$V_\eta$  Et  $V_\theta$  représentent les composantes du vecteur vitesse respectivement suivant les vecteurs  $\vec{e}_\eta$  et  $\vec{e}_\theta$ . La fonction de courant notée  $\Psi(\eta, \theta, t)$  est telle que la vitesse représente son rotationnel. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \text{rot} \vec{\psi} \\ \frac{1}{h^2 k} \begin{vmatrix} \vec{h}e_\eta & \vec{h}e_\theta & \vec{k}e_\xi \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & k\psi \end{vmatrix} &= \frac{1}{h^2 k} \left( \vec{h}e_\eta \frac{\partial(k\psi)}{\partial \theta} - \vec{h}e_\theta \frac{\partial(k\psi)}{\partial \eta} \right) \\ &= V_\eta \vec{e}_\eta + V_\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Avec h et k des facteurs d'échelles définis par

$$h = \frac{a}{ch\eta - \cos \theta} = \sqrt{g_{\eta\eta}} = \sqrt{g_{\theta\theta}}$$

et

$$k = \frac{a \sin \theta}{ch\eta - \cos \theta} = \sqrt{g_{\xi\xi}}$$

Alors

$$V_\eta = \frac{1}{hk} \frac{\partial(k\psi)}{\partial \theta}$$

et

$$V_\theta = -\frac{1}{hk} \frac{\partial(k\psi)}{\partial \eta}$$

## I. 4-3 Vorticité

La vorticité est le vecteur noté  $\vec{\Omega}$  représentant le rotationnel du vecteur vitesse : elle est dirigée suivant l'axe  $\vec{e}_\xi$ .

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{V}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{h^2 k} \begin{vmatrix} h\vec{e}_\eta & h\vec{e}_\theta & k\vec{e}_\xi \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ hV_\eta & hV_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{h^2 k} [k\vec{e}_\xi] \left( \frac{\partial(hV_\theta)}{\partial \eta} - \frac{\partial(hV_\eta)}{\partial \theta} \right)$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_\xi$$

$$\text{Alors : } \Omega = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hV_\theta)}{\partial \eta} - \frac{\partial(hV_\eta)}{\partial \theta} \right] \quad (1-4)$$

## I. -5- Equations de transferts avec la formulation vorticité- fonction de courant

En introduisant la vorticité dans l'équation du mouvement, le terme de pression disparaît de plus la projection sur les axes nous amènent à une et une seule équation suivant l'axe  $\vec{e}_\xi$  et

non deux suivant  $\vec{e}_\eta$  et  $\vec{e}_\theta$  et les équations de transfères deviennent :

## I. 5-2 Equation du mouvement

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{h} \left( V_\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = -\frac{\beta g}{h} \left( -G_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} + G_1 \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{v}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial(k\Omega)}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial(k\Omega)}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{h^2 k} \left[ \frac{\partial(hkV_\eta \Omega)}{\partial \eta} + \frac{\partial(hkV_\theta \Omega)}{\partial \theta} \right] + \frac{\beta g}{h} \left( -G_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} + G_1 \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{v}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial(k\Omega)}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial(k\Omega)}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1-6)$$

### I. 5-3 Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h} \left( V_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{\alpha}{h^2 k} \left[ \frac{\partial \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} + \frac{\partial \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right] \quad (1-7)$$

Cette équation peut aussi être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h^2 k} \left[ \frac{\partial (hkV_{\eta}T)}{\partial \eta} + \frac{\partial (hkV_{\theta}T)}{\partial \theta} \right] = \frac{\alpha}{kh^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1-8)$$

### I. 5-4 Equation de la fonction de courant

$$\Omega + \frac{1}{k^2} (G_1^2 + G_2^2) \psi + \frac{2}{hk} \left( G_2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - G_1 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (1-9)$$

Avec

$$G_1 = \frac{1 - ch\eta \cos \theta}{ch\eta - \cos \theta}$$

et

$$G_2 = -\frac{sh\eta \sin \theta}{ch\eta - \cos \theta}$$

### I. 6- conditions initiales (à t=0)

-Vitesse

$$V_{\eta} = V_{\theta} = 0$$

-Vorticité et fonction :

$$\Omega = \Psi = 0$$

-Température :

$$T = T_0$$

**I. 7- conditions aux limites (à  $t > 0$ )**

**I. 7-1-Sur la paroi intérieur ( $\eta=\eta_1$ )**

-Vitesse

$$V_\eta = V_\theta = 0$$

-Vorticité:

$$\Omega = -\frac{1}{h} \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta}$$

- fonction de courant

$$\Psi = 0$$

-Température :

$$T = T_1$$

**I. 7-2-Sur la paroi extérieur ( $\eta=\eta_2$ )**

-Vitesse :

$$V_\eta = V_\theta = 0$$

-Vorticité :

$$\Omega = -\frac{1}{h} \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta}$$

- fonction de courant :

$$\Psi = 0$$

-Température :

$$T = T_2$$

### I. 7-3-Sur les parois verticales $\theta=\pi$ ou $\theta = 0$

-Vitesse :

$$V_{\eta} = V_{\theta} = 0$$

-Vorticité :

$$\Omega = \frac{1}{h} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \eta}$$

$$T = T_2$$

- la fonction de courant

$$\psi = 0$$

- Densité de chaleur :

$$Q = 0$$

### I. 8 Addimensionalisation

Les nombres adimensionnels seront écrits avec des Astérix

#### I. 8-1 Choix des grandeurs de référence

Grandeur de référence géométrique D est le diamètre hydraulique : elle représente la différence entre les rayons des deux sphères.

Grandeur de référence de la vitesse  $\frac{\alpha}{D}$

Grandeur de référence de l'écart de température T1 – T2

Dans ces conditions le temps de référence est  $\frac{D^2}{\alpha}$

Posons

$$V_\eta = \frac{\alpha}{D} V_\eta^* ; V_\theta = \frac{\alpha}{D} V_\theta^*$$

$$\Omega = \frac{\alpha}{D^2} \Omega^*$$

$$t = \frac{D^2}{\alpha} t^* ;$$

$$h = Dh^* ;$$

$$k = Dk^*$$

$$\Psi = \alpha \psi^*$$

$$T - T_2 = T^* (T_1 - T_2)$$

Les équations des transferts deviennent

### I. 8-2 Equation du mouvement

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^*} \left( V_\eta^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} + V_\theta^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{Pr} Ra}{h^*} \left( -G_2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} + G_1 \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} \right) - \frac{\text{Pr} \Omega^*}{h^2 k} \left( \frac{\partial^2 k^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 k^*}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial k^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ & - \frac{\text{Pr}}{(h^*)^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \theta^2} \right] - \frac{2 \text{Pr}}{(h^*)^2} \left[ \frac{\partial k^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} + \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^*} \left( V_\eta^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} + V_\theta^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{Pr} Ra}{h^*} \left( -G_2 \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G_1 \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) - \frac{\text{Pr} \Omega^*}{k^*} (G_1^2 + G_2^2) - \frac{\text{Pr}}{(h^*)^2} \left( \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \theta^2} \right)$$

$$- \frac{2 \text{Pr}}{h^*} \left( G_2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} - G_1 \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1-12)$$

Regroupons les dérivées semblables

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^*} (V_\eta^* - 2 \text{Pr} G_2) \frac{\partial \Omega^*}{\partial \eta} + \frac{1}{h^*} (V_\theta^* + 2 \text{Pr} G_1) \frac{\partial \Omega^*}{\partial \theta} = \frac{\text{Pr}}{(h^*)^2} \left( \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{k^*} (G_1^2 + G_2^2) \Omega^* - \frac{\text{Pr} Ra}{h^*} \left( -G_2 \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G_1 \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \quad (1-13)$$

### I. 8-3 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur adimensionnalisée est la suivante

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^*} \left( V_\eta^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + V_\theta^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{(h^*)^2} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{h^* k^*} \left( G_1 \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - G_2 \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1-14)$$

### I. 8-4 Equation de la fonction de courant

L'équation adimensionnalisée de la fonction de courant est la suivante :

$$-\frac{G_2}{h^* k^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} + \frac{G_1}{h^* k^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \Omega^* + \frac{1}{(h^*)^2} (G_1^2 + G_2^2) \Psi^* + \frac{1}{(h^*)^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad (1-15)$$

Avec

$$Ra = \frac{g \beta D^3}{\nu \alpha} \Delta T \quad \text{Le nombre de Rayleigh :}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Le nombre Prandtl}$$

### I. 8-5 conditions aux limites (à $t > 0$ )

#### I. 8-5-1-Sur la paroi intérieur ( $\eta = \eta_1$ )

**-Vitesse**

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = 0$$

**-Vorticité:**

$$\Omega^* = -\frac{1}{h} \frac{\partial V_{\eta}^*}{\partial \theta} \quad \Omega^* = \frac{1}{h} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \eta}$$

**- fonction de courant**

$$\Psi^* = 0$$

**-Température :**

$$T^* = 1$$

### **I. 8-5-2-Sur la paroi extérieur ( $\eta=\eta_2$ )**

**-Vitesse :**

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = 0$$

**-Vorticité :**

$$\Omega^* = \frac{1}{h} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \eta}$$

**- fonction de courant :**

$$\Psi^* = 0$$

**-Température :**

$$T^* = 0$$

### **I. 8-5-3-Sur les parois verticales $\theta=\pi$ ou $\theta = 0$**

-Vitesse :

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = 0$$

-Vorticité :

$$\Omega^* = \frac{1}{h} \frac{\partial V_{\eta}^*}{\partial \eta}$$

- la fonction de courant

$$\psi^* = 0$$

- Densité de chaleur :

$$q = 0$$

## I. 9-Coefficient d'échange de chaleur : Nombre de Nusselt

### I. 9-1- définition

Le nombre de Nusselt noté Nu est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transferts thermiques. Il représente le rapport entre le transfert thermique total et le transfert par conduction. Si la conduction est seule responsable du transfert de chaleur alors Nu=1

On le définit par la relation suivante :

$$Nu = \frac{\tau D}{\lambda} \quad \text{Avec } \tau = \frac{q}{\Delta T}$$

$\tau$  : le coefficient de transfert thermique ;

D : la longueur caractéristique ou diamètre hydraulique ;

$\lambda$  : la conductivité thermique du fluide ;

### I. 9-2- Nombre de Nusselt pariétaux :

➤ Sur la paroi intérieure  $\eta = \eta_i$

$$Nu_1 = \frac{\tau_1 D}{\lambda} \quad \text{Avec } \tau_1 = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta}}{T_1 - T_f}$$

➤ Sur la paroi extérieur  $\eta = \eta_e$

$$Nu_2 = \frac{\tau_2 D}{\lambda} \quad \text{avec } \tau_2 = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta}}{T_2 - T_f}$$

**Conclusion :**

Cette partie est consacrée d'abord à une présentation schématique du modèle de l'espace ou l'étude se fera mais aussi à la formulation vectorielle des équations qui régissent le mouvement du fluide. Ainsi, nous avons utilisé le principe de bidimensionnelle et les hypothèses de Boussinesq, dans le but réduire ces équations afin d'atténuer la résolution.

Ensuite, nous avons introduit les notions de vorticité et de fonction de courant dans le système de coordonnées bi sphérique. Nous obtenons en effet trois équations que sont l'équation de la vorticité, l'équation de la chaleur et l'équation de la fonction de courant. Ainsi nous avons utilisé les conditions initiales et aux limites des parois du domaine d'étude

Enfin, nous avons procédé à l'adimensionnalisation des trois équations précitées afin d'alléger la résolution des équations en faisant disparaître les paramètres physiques. Cependant, nous avons utilisé des paramètres de référence caractéristiques de l'écoulement et des nombres adimensionnels. Après nous avons introduit le nombre de Nusselt.

## II. CHAPITRE 2

### II. RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS

#### II. 1- Discrétisations du domaine et des fonctions

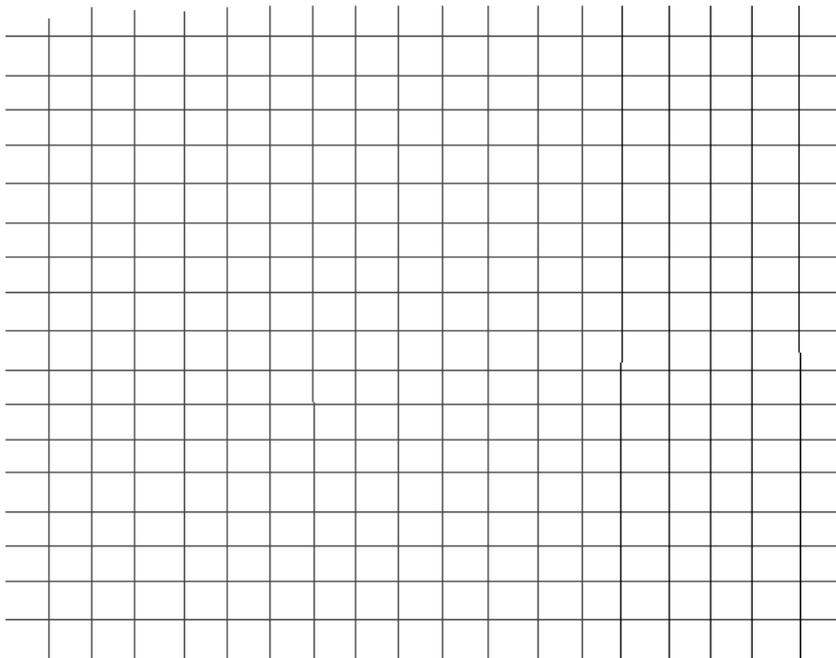
##### II. 1-1-Maillage

Considérons un maillage rectangulaire ayant  $N$  nœuds sur l'axe  $\eta$  et  $M$  nœuds sur l'axe  $\theta$ . Si les pas d'espace sont respectivement  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$  dans ces deux directions, on obtient un rectangle dont la superficie est  $(N-1)\Delta\eta \cdot (M-1)\Delta\theta$ . Pour chaque nœud situé dans le domaine étudié, les valeurs discrètes des variables  $\eta$  et  $\theta$  peuvent s'écrire :

$$\eta_i = \eta_1 + (i-1)\Delta\eta \quad \text{Et} \quad \theta_j = \theta_1 + (j-1)\Delta\theta.$$

Pour le temps, on a  $t^n = n\Delta t$

Les limites du domaine sont ainsi  $\eta_1$  et  $\eta_N$  sur l'axe  $\eta$  et  $\theta_1$  et  $\theta_M$  sur l'axe  $\theta$ .



**Figure 2 : Maillage**

## II. 1-2-Discretisations des fonctions. Approximations des dérivées

Soit une fonction  $f(\eta, \theta, t)$  continue et suffisamment dérivable dans le domaine continu étudié

. Ecrivons le développement en série de Taylor de cette fonction au voisinage de  $\eta_0$ . Nous

allons encadrer  $\eta_0$  par  $\eta_0 + \Delta\eta$  et  $\eta_0 - \Delta\eta$ . On obtient les relations suivantes à l'ordre 2 :

$$f(\eta_0 + \Delta\eta, \theta, t) = f(\eta_0, \theta, t) + \Delta\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + (\Delta\eta)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + o(\Delta\eta)^2 \quad (2-1)$$

$$f(\eta_0 - \Delta\eta, \theta, t) = f(\eta_0, \theta, t) - \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} + o(\Delta\eta)^2 \dots \quad (2-2)$$

Soit  $f_{i,j}^n$  la valeur de la fonction  $f$  au nœud  $(i, j, n)$  du maillage défini. En additionnant ou en retranchant les deux équations précédentes on obtient les expressions des dérivées partielles premières et secondes sous forme discrétisées :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(i, j, n) = \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2\Delta\eta} + o(\Delta\eta)^2 \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(i, j, n) = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta\eta)^2} + o(\Delta\eta)^2 \quad (2-4)$$

En appliquant la même procédure au voisinage de  $\theta_0$ , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(i, j, n) = \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2\Delta\theta} + o(\Delta\theta)^2 \quad (2-5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(i, j, n) = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta\theta)^2} + o(\Delta\theta)^2 \quad (2-6)$$

Pour écrire les conditions aux limites, aux niveaux des parois, nous discrétisons les dérivées premières au moyen de trois points déduites du développement de Taylor :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(i, j, n) = \frac{-3f_{i,j}^n + 4f_{i+1,j}^n - f_{i+2,j}^n}{2\Delta\eta} + 0(\Delta\eta)^2 \quad (2-7)$$

$$\text{Ou} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(i, j, n) = \frac{3f_{i,j}^n - 4f_{i-1,j}^n + f_{i-2,j}^n}{\Delta\eta} + 0(\Delta\eta)^2 \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(i, j, n) = \frac{-7f_{i,j}^n + 8f_{i+1,j}^n - f_{i+2,j}^n - 6\Delta\eta \frac{\partial f}{\partial \eta}(i, j, n)}{2(\Delta\eta)^2} + 0(\Delta\eta)^2 \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(i, j, n) = \frac{-7f_{i,j}^n + 8f_{i-1,j}^n - f_{i-2,j}^n + 6\Delta\eta \frac{\partial f}{\partial \eta}(i, j, n)}{2(\Delta\eta)^2} + 0(\Delta\eta)^2 \quad (2-10)$$

**Dérivée première par rapport au temps**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1}(i, j) - f^n(i, j)}{\Delta t} \quad (2-11)$$

## II. 2-Formulation numérique du problème

### Equations sous forme générale

Soit  $f(\eta, \theta, t)$  la température ou la vorticité : leurs équations générales s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} + a_2 \frac{\partial f}{\partial \theta} = b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + F(\eta, \theta) \quad (2-12)$$

Soit  $q(\eta, \theta)$  la fonction de courant : son équation générale est sous la forme

$$a \left( G_2 \frac{\partial q}{\partial \eta} - G_1 \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) + b \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \right) = \Omega + cq \quad (2-13)$$

### Equation de type parabolique

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} + a_2 \frac{\partial f}{\partial \theta} = b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + F(\eta, \theta)$$

### Equations de type elliptique

$$a \left( G_2 \frac{\partial q}{\partial \eta} - G_1 \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) + b \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \right) = \Omega + cq$$

## II. 3-Discrétisation des équations :

### II. 3-1-Discrétisation des équations de type parabolique

Nous utilisons la méthode ADI (Alternative Directions Implicit) [ 12]

#### -Premier demi temps (suivant l'axe $\eta$ )

On divise le temps en deux demis pas de temps égaux. Dans le premier demi temps, nous discrétisons suivant l'axe  $\eta$

$$\frac{f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + a_1 \frac{f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + a_2 \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2\Delta\theta} = b_1 \frac{f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + b_2 \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(H\Delta\theta)^2} + F_1(i, j) \quad (2-14)$$

#### -Deuxième demi temps (suivant l'axe $\theta$ )

Dans le deuxième demi pas temps de temps, nous discrétisons suivant l'axe  $\theta$

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + a_1 \frac{f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + a_2 \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} = b_1 \frac{f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + b_2 \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(H\Delta\theta)^2} + F_2(i, j) \quad (2-15)$$

➤ **Discrétisation de l'équation de la chaleur :**

-Premier demi temps (suivant l'axe  $\eta$ )

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + a_{p11} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2HK\Delta\eta} + a_{p12} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2HK\Delta\theta} = \\ b_{p11} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + b_{p12} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(H\Delta\theta)^2} \end{aligned} \quad (2-16)$$

-Deuxième demi temps (suivant l'axe  $\theta$ )

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + a_{p11} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + a_{p12} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} = \\ b_{p11} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + b_{p12} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{(H\Delta\theta)^2} \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$a_{p11} = \frac{(KV_\eta - \alpha G_1)}{HK}, \quad a_{p12} = \frac{KV_\theta + \alpha G_1}{HK}, \quad b_{p11} = b_{p12} = \alpha, \quad F(i,j) = 0$$

➤ **Discrétisation de l'équation de la vorticité dans le domaine**

- premier demi temps :(suivant  $\eta$  entre  $n$  et  $n + 1/2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + a_{p21} \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + a_{p22} \frac{\Omega_{i,j+1}^n - \Omega_{i,j-1}^n}{2\Delta\theta} = b_{p21} \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + \\ b_{p22} \frac{\Omega_{i,j+1}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i,j-1}^n}{(H\Delta\theta)^2} + F_1(\eta, \theta) \end{aligned} \quad (2-18)$$

Deuxième demi temps (suivant l'axe  $\theta$  et  $n$  entre  $n+\frac{1}{2}$ )

$$\frac{\Omega_{i,j}^{n+1} - \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + a_{p21} \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + a_{p22} \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} = b_{p21} \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(H\Delta\eta)^2} + b_{p23} \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\Omega_{i,j}^{n+1} + \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{(H\Delta\theta)^2} + F_2(\eta, \theta) \quad (2-19)$$

Avec :  $a_{p21} = \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_1}{H}$  ,  $a_{p22} = \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_2}{H}$  ,  $a_{p22} = b_{p22} = \text{Pr}$  et

$$F_1(\eta, \theta) = \text{Pr} \frac{G_1^2 + G_2^2}{H} \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \text{Pr} Ra \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i-1,j}^n}{2H\Delta\theta} \right)$$

Dans le premier demi temps et

$$F_2(\eta, \theta) = \text{Pr} \frac{G_1^2 + G_2^2}{H} \Omega_{i,j}^{n+1} + \text{Pr} Ra \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2H\Delta\theta} \right)$$

Dans le deuxième demi temps

### 3-2 Discrétisation de type hyperbolique : l'équation de la fonction de courant

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{HK} \left( G_2 \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{2\Delta\eta} - G_1 \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{2\Delta\theta} \right) + \left( \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(H\Delta\eta)^2} \right) + \\
& \left( \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(H\Delta\theta)^2} \right) = \Omega(j, i) + \frac{G_1^2 + G_2^2}{H^2} \psi(i, j) \\
& \left[ \frac{(G_1^2 + G_2^2)(\Delta\eta)^2(\Delta\theta)^2 + 2((\Delta\eta)^2 + (\Delta\theta)^2)}{H^2(\Delta\eta)^2(\Delta\theta)^2} \right] \psi(i, j) = \Omega(i, j) + \left( \frac{G_2}{2HK\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right) (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + \\
& \left( -\frac{G_1}{2HK\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right) (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \tag{2-20}
\end{aligned}$$

### 4- Discrétisation des conditions initiales et aux niveaux des limites

#### 4-1 Conditions initiales

$$V_{\eta(i,j)}^0 = V_{\theta(i,j)}^0 = 0$$

$$\Omega_{i,j}^0 = \Psi_{i,j}^0 = 0$$

$$T_{i,j}^0 = T_0$$

#### 4-2 Conditions aux limites

-Vitesse

$$V_{\eta(1,j)}^n = V_{\eta(N,j)}^n = V_{\theta(1,j)}^n = V_{\theta(N,j)}^n = 0$$

$$V_{\eta(i,1)}^n = V_{\eta(i,M)}^n = V_{\theta(i,1)}^n = V_{\theta(i,M)}^n = 0$$

### -Vorticité

➤ Sur la parois sphérique intérieur (  $\eta = \eta_1$  )

$$\Omega_{1,j} = \frac{-3V_{\theta(1,j)}^n + 4V_{\theta(1,j+1)}^n - V_{\theta(1,j+2)}^n}{2\Delta\theta}$$

➤ Sur la parois sphérique extérieur (  $\eta = \eta_2$  )

$$\Omega_{N,j} = \frac{-3V_{\theta(N,j)}^n + 4V_{\theta(N,j+1)}^n - V_{\theta(N,j+2)}^n}{2\Delta\theta} =$$

➤ Sur la parois verticale inférieur (  $\theta = 0$  )

$$\Omega_{i,M} = \frac{3V_{\eta(i,M)}^n - 4V_{\eta(i-1,M)}^n + V_{\eta(i-2,M)}^n}{2\Delta\eta}$$

➤ Sur la parois verticale extérieur (  $\theta = \pi$  )

$$\Omega_{i,1} = \frac{3V_{\eta(i,1)}^n - 4V_{\eta(i-1,1)}^n + V_{\eta(i-2,1)}^n}{2\Delta\eta}$$

### -Fonction de courant

On discrétisera l'équation de la fonction de courant aux niveaux des frontières ;  
on obtient alors :

$$\frac{\partial\Psi_{1,j}}{\partial\eta} = \frac{-3\Psi_{1,j} + 4\Psi_{2,j} - \Psi_{3,j}}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\frac{\partial\Psi_{N,j}}{\partial\eta} = \frac{-3\Psi_{N,j} - 4\Psi_{N-1,j} + \Psi_{N-2,j}}{2\Delta\eta}$$

Ce qui entraîne alors que

$$\Psi_{1,j} = \frac{4\Psi_{2,j} - \Psi_{3,j}}{3}$$

$$\Psi_{N,j} = \frac{-4\Psi_{N-1,j} + \Psi_{N-2,j}}{3}$$

$$\Psi_{i,1} = \frac{4\Psi_{i,2} - \Psi_{i,3}}{3}$$

$$\Psi_{i,M} = \frac{-4\Psi_{i,M-1} + \Psi_{i,M-2}}{3}$$

Les conditions aux limites entraînent l'équation de la fonction de courant suivante sur les parois

**5-2-1-Sur la paroi (i=1, j) on a :**

$$\frac{-3\Psi_{1,j} + 4\Psi_{1,j+1} - \Psi_{1,j+2}}{2\Delta\theta} + \frac{KG_1}{a} \Psi_{1,j} = 0$$

**5-2-2-Sur la paroi (i=N, j) on a :**

$$\frac{3\Psi_{N,j} - 4\Psi_{N,j-1} + \Psi_{N,j-2}}{2\Delta\theta} + \frac{KG_1}{a} \Psi_{N,j} = 0$$

**5-2-3-Sur la paroi (i, j=1) on a :**

$$\frac{-3\Psi_{i,1} + 4\Psi_{i+1,1} - \Psi_{i+2,1}}{2\Delta\eta} + HG_1 \Psi_{i,1} = 0$$

**5-2-4-Sur la paroi (i, j=N) on a :**

$$\frac{3\Psi_{i,M} - 4\Psi_{i-1,M} + \Psi_{i-2,M}}{2\Delta\eta} + HG_1 \Psi_{i,M} = 0$$

**5- Développement des équations dans le domaine :**

**5-1Equations paraboliques :**

**5-1-1Equation de la chaleur**

**-Premier demi temps :**

$$T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] =$$

$$T_{i,j-1}^n \left[ \frac{a_{p12}}{2\Delta\eta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,j+1}^n \left[ -\frac{a_{p12}}{2\Delta\theta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \quad (2-21)$$

(33)

Ce qui équivaut à l'équation suivante

$$C_{111} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{112} T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{113} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = C_1 \text{ Avec}$$

$$C_{111} = \left[ -\frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right]; C_{112} = \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right];$$

$$C_{13} = \left[ \frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right]$$

Et  $C_1 = D_{121} T_{i,j-1}^n + D_{122} T_{i,j}^n + D_{123} T_{i,j+1}^n$

Avec

$$D_{111} = \left[ \frac{a_{p12}}{2\Delta\eta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right]; D_{112} = \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right];$$

$$D_{213} = \left[ -\frac{a_{p12}}{2\Delta\theta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right]$$

-Deuxième demi temps :

$$T_{i-1,j}^{n+1} \left[ \frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,j}^{n+1} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,j}^{n+1} \left[ \frac{a_{p11}}{2\Delta\eta} - \frac{b_{p11}}{(H\Delta\eta)^2} \right] =$$

$$T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p12}}{2\Delta\eta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{a_{p12}}{2\Delta\theta} + \frac{b_{p12}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \quad (2-22)$$

Ce qui équivaut à l'équation suivante :

Avec :

$$C_{111}T_{i-1,j}^{n+1} + C_{112}T_{i,j}^{n+1} + C_{113}T_{i+1,j}^{n+1} = C_2$$

$$C_2 = D_{121}T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + D_{122}T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + D_{123}T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}$$

### 65-1-2-Equation de vorticité

-Premier demi temps :

$$\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] =$$

$$\Omega_{i,j-1}^n \left[ \frac{b_{p21}}{2\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{b_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] +$$

$$\Omega_{i,j+1}^n \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2\Delta\theta} \right] + \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i-1,j}^n}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-23)$$

en faisant

$$C_{211}\Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{212}\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{213}\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = C_3$$

Avec :

$$C_{211} = \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right]; C_{212} = \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right]$$

$$C_{213} = \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right]$$

$$C_3 = D_{211}\Omega_{i,j-1}^n + D_{212}\Omega_{i,j}^n + D_{213}\Omega_{i,j+1}^n + D_{214}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
D_{211} &= \left[ \frac{b_{p21}}{2\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
D_{212} &= \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{b_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right]; D_{213} = \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2\Delta\theta} \right] \\
D_{214} &= \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i-1,j}^n}{2H\Delta\theta} \right)
\end{aligned}$$

**-Deuxième demi temps :**

$$\begin{aligned}
&\Omega_{i-1,j}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H_{i,j}} - \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i,j}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2 \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\eta)^2} - \frac{\text{Pr}}{H_{i,j}} (G_1^2 + G_2^2) \right] \\
&+ \Omega_{i+1,j}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H_{i,j}} - \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H_{i,j}} + \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\theta)^2} \right] \\
&+ \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H_{i,j}} + \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j}\Delta\theta)^2} \right] \\
&+ \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-24)
\end{aligned}$$

$$C_{211}\Omega_{i-1,j}^{n+1} + C_{212}\Omega_{i,j}^{n+1} + C_{213}\Omega_{i+1,j}^{n+1} = C_{214}$$

Avec :

$$C_{211} = \left[ -\frac{V_\eta - 2 \text{Pr} G_2}{H_{i,j}} - \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j} \Delta \eta)^2} \right]; C_{212} = \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2 \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j} \Delta \eta)^2} - \frac{\text{Pr}}{H_{i,j}} (G_1^2 + G_2^2) \right]$$

$$C_{213} = \left[ \frac{V_\eta - 2 \text{Pr} G_2}{H_{i,j}} - \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j} \Delta \eta)^2} \right]$$

Et

$$C_{214} = D_{211} \Omega_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + D_{212} \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + D_{213} \Omega_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + D_{214}$$

$$D_{211} = \left[ \frac{V_\theta + 2 \text{Pr} G_1}{H_{i,j}} + \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j} \Delta \theta)^2} \right]; D_{212} = \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H_{i,j} \Delta \theta)^2} \right]$$

$$D_{213} = \left[ -\frac{V_\theta + 2 \text{Pr} G_1}{H_{i,j}} + \frac{\text{Pr}}{(H_{i,j} \Delta \theta)^2} \right]$$

$$D_{214} = \text{Pr} Ra \left( G_1 \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right)$$

**5-2- équation elliptique : équation de la fonction de courant**

$$\left[ \frac{(G_1^2 + G_2^2)(\Delta \eta)^2 (\Delta \theta)^2 + 2((\Delta \eta)^2 + (\Delta \theta)^2)}{H^2 (\Delta \eta)^2 (\Delta \theta)^2} \right] \psi(i,j) = \Omega(i,j) + \left( \frac{G_2}{2HK\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right) (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) +$$

$$\left( -\frac{G_1}{2HK\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right) (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \quad (2-25)$$

**6-Développement des équations paraboliques aux niveaux des frontières :**

**6-1- Equation de la chaleur :**

**-Sur la paroi (i=2, j) ; 2 < j < M-1**

**-Premier demi temps :**

$$\begin{aligned}
 & T_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_{\eta}+G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_{\eta}+G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
 & T_{2,j-1}^n \left[ \frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{2,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{2,j+1}^n \left[ -\frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2-26}$$

**-Deuxième demi temps :**

$$\begin{aligned}
 & T_{1,j}^{n+1} \left[ -\frac{KV_{\eta}+G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{2,j}^{n+1} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{3,j}^{n+1} \left[ \frac{KV_{\eta}+G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
 & T_{2,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H_{i,j}\Delta\theta)^2} \right] + T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2-26}$$

**-Sur la paroi (i=N-1, j) ; 2 < j < M-1**

**-Premier demi temps :**

$$\begin{aligned}
 & T_{N-2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_{\eta}+G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_{\eta}+G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
 & T_{N-1,j-1}^n \left[ \frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{N-1,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{2,j+1}^n \left[ -\frac{KV_{\theta}-G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2-27}$$

**-Deuxième demi temps :**

$$\begin{aligned}
& T_{N-2,j}^{n+1} \left[ -\frac{KV_\eta + G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{N-1,j}^{n+1} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{N,j}^{n+1} \left[ \frac{KV_\eta + G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& T_{N-1,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H_{i,j}\Delta\theta)^2} \right] + T_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{N-1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] \quad (2-28)
\end{aligned}$$

**-Sur la paroi (i, j=2), 2 < i < N-1**

**-Premier demi temps :**

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_\eta + G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_\eta + G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& T_{i,1}^n \left[ \frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,2}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,3}^n \left[ -\frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] \quad (2-28)
\end{aligned}$$

**-Deuxième demi temps**

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,2}^{n+1} \left[ -\frac{KV_\eta + G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,2}^{n+1} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,2}^{n+1} \left[ \frac{KV_\eta + G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& T_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,3}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] \quad (2-29)
\end{aligned}$$

**-Sur la paroi (i, j=M-1) , 2 < i < N-1**

**-Premier demi temps :**

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_\eta + G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_\eta + G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& T_{i,M-2}^n \left[ \frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,M-1}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,M}^n \left[ -\frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2-30}$$

**-Deuxième demi temps**

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,M}^{n+1} \left[ -\frac{KV_\eta + G_2}{2(KH)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i,M}^{n+1} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(H\Delta\eta)^2} \right] + T_{i+1,M}^{n+1} \left[ \frac{KV_\eta + G_1}{2(HK)\Delta\eta} - \frac{1}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& T_{i,M-2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\eta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(H\Delta\theta)^2} \right] + T_{i,M}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{KV_\theta - G_2}{2(HK)\Delta\theta} + \frac{1}{(H\Delta\theta)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2-31}$$

## 6-2-Equation de la vorticité :

**-Sur la paroi (i=2,j) ; 2 < j < M-1**

**-Premier demi temps :**

$$\begin{aligned}
& \Omega_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta H_{2,j}} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2H\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& \Omega_{2,j-1}^n \left[ \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{2,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{a_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] + \\
& \Omega_{2,j+1}^n \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} \right] + \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{2,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2H\Delta\theta} \right)
\end{aligned} \tag{2-32}$$

**-Deuxième demi temps :**

$$\begin{aligned}
& \Omega_{1,j}^{n+1} \left[ -\frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{2,j}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2\frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} - \frac{\text{Pr}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] \\
& + \Omega_{3,j}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{2,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Omega_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{2,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
& + \text{Pr} Ra \left( G_1 \frac{T_{3,j}^{n+1} - T_{1,j}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{2,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-33)
\end{aligned}$$

-Sur la paroi (i=N-1, j) 2 < j < M-1 :

-Premier demi temps :

$$\begin{aligned}
& \Omega_{N-2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta H_{N-1,j}} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
& + \Omega_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2H\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{N-1,j}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{a_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] + \\
& \Omega_{N-1,j-1}^n \left[ \frac{b_{p21}}{2H_{N-1,j}\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H_{N-1}\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{N-1,j+1}^n \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} \right] \\
& + \text{Pr} Ra \left( G_1 \frac{T_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{N-2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{N-1,j+1}^n - T_{N-1,j-1}^n}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-34)
\end{aligned}$$

-Deuxième demi temps :

$$\begin{aligned}
& \Omega_{N-2,j}^{n+1} \left[ -\frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{N-1,j}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2\frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} - \frac{\text{Pr}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] \\
& + \Omega_{N,j}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{N-1,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
& + \Omega_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{2,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{N,j}^{n+1} - T_{N-2,j}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{N-1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{N-1,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-35)$$

-Sur la paroi (i,j=2) , 2<i<N-1

-Premier demi temps :

$$\begin{aligned} & \Omega_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta H} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2H\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\ & \Omega_{i,1}^n \left[ \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i,2}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{a_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] + \\ & \Omega_{i,3}^n \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} \right] + \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,3}^n - T_{i,3}^n}{2H\Delta\theta} \right) \quad (2-36) \end{aligned}$$

-Deuxième demi temps :

$$\begin{aligned} & \Omega_{i-1,2}^{n+1} \left[ -\frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i,2}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2\frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} - \frac{\text{Pr}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] \\ & + \Omega_{i+1,2}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\text{Pr}G_2}{H} - \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\ & + \Omega_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i,3}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{V_\theta + 2\text{Pr}G_1}{H} + \frac{\text{Pr}}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\ & + \text{Pr Ra} \left( G_1 \frac{T_{i+1,2}^{n+1} - T_{i-1,2}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i,3}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,1}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right) \end{aligned}$$

(1.1)

(2-37)

-Sur la paroi (i, j=M-1)  $2 < i < N-1$  :

-Premier demi temps

$$\begin{aligned}
& \Omega_{i-1, M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2\Delta\eta H} + \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i, M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i+1, M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{a_{p21}}{2H\Delta\eta} - \frac{a_{p22}}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \\
& \Omega_{i, M-2}^n \left[ \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} + \frac{b_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i, M-1}^n \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} + \frac{a_{p22}}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] + \\
& \Omega_{i, M}^n \left[ \frac{a_{p22}}{(H\Delta\theta)^2} - \frac{b_{p21}}{2H\Delta\theta} \right] \\
& + \Pr Ra \left( G_1 \frac{T_{i+1, M-1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1, M-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i, M}^n - T_{i, M-2}^n}{2H\Delta\theta} \right) \tag{2-38}
\end{aligned}$$

-Deuxième demi temps :

$$\begin{aligned}
& \Omega_{i-1, M-1}^{n+1} \left[ -\frac{V_\eta - 2\Pr G_2}{H} - \frac{\Pr}{(H\Delta\eta)^2} \right] + \Omega_{i, M-1}^n \left[ \frac{\Delta t}{2} + 2\frac{\Pr}{(H\Delta\eta)^2} - \frac{\Pr}{H} (G_1^2 + G_2^2) \right] \\
& + \Omega_{i+1, M-1}^{n+1} \left[ \frac{V_\eta - 2\Pr G_2}{H} - \frac{\Pr}{(H\Delta\eta)^2} \right] = \Omega_{i, M-2}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{V_\theta + 2\Pr G_1}{H} + \frac{\Pr}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
& + \Omega_{i, M-1}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2\Pr}{(H\Delta\theta)^2} \right] + \Omega_{i, M}^{n+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{V_\theta + 2\Pr G_1}{H} + \frac{\Pr}{(H\Delta\theta)^2} \right] \\
& + \Pr Ra \left( G_1 \frac{T_{i+1, 2}^{n+1} - T_{i-1, 2}^{n+1}}{2H\Delta\eta} + G_2 \frac{T_{i, 3}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i, 1}^{n+\frac{1}{2}}}{2H\Delta\theta} \right) \tag{2-39}
\end{aligned}$$

7- résolution des équations :

7-1 résolution des équations paraboliques :

Les équations paraboliques ayant se feront résoudre en deux étapes selon la méthode appelée en anglais méthode « ADI » (Alternative Direction Implicite). Cette méthode a déjà été utilisée par PEACEMAN et RACHFORD en 1955. Elle consiste à discrétiser les paramètres de l'équation en deux demis pas de temps en utilisant le développement de Taylor

### 7-1-1 Méthode A D I

#### - Algorithme de Thomas pour les équations de type parabolique

Ces équations permettent d'aboutir chacune à un système tri diagonal qu'on résout avec la méthode d'élimination de THOMAS lorsqu'elles sont appliquées à un point du domaine. Comme hypothèse de départ, nous considérons que pendant un certain temps  $\Delta t$  étudié les gradients de température dans les deux équations paraboliques sont constantes. Il en sera de même aux niveaux des frontières. Cette approximation, adoptée par de nombreux auteurs comme WILKES et CHURCHILL, SAMUELS et CHURCHILL ...etc.

### 8-1-2 Résolution :

#### - première demi temps (implicite suivant $\eta$ entre $n$ et $n+1/2$ )

Pour une valeur de l'indice  $j$  donnée on fait varier l'indice  $i$  de 2 à  $N-1$ , on obtient un système tri diagonal de  $N-2$  équations à  $N-2$  inconnues à résoudre. En faisant varier  $j$  de 1 à  $M-1$ , on obtient  $M-1$  systèmes de  $N-2$  équations à  $N-2$  inconnues.

$$\begin{aligned}
 & C_{1,j,1} f_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{2,j,2} f_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{3,j,3} f_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} \dots\dots\dots = C_{2,j,4} \\
 & \dots\dots\dots + C_{2,j,1} f_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{3,j,2} f_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{4,j,3} f_{4,j}^{n+\frac{1}{2}} \dots\dots\dots = C_{3,j,4} \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \dots\dots\dots C_{N-3,j,1} f_{N-3,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N-2,j,2} f_{N-2,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N-1,j,3} f_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \dots\dots = C_{N-2,j,4} \\
 & \dots\dots\dots C_{N-2,j,1} f_{N-2,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N-1,j,2} f_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{N,j,3} f_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} = C_{N,j,4}
 \end{aligned}$$

Les  $C_{i,j,k}$  représentent les coefficients dans les équations de la chaleur et de la vortacité

#### - Deuxième équation (implicite suivant $\theta$ entre $n+1/2$ et $n+1$ )

Pour une valeur de l'indice i donnée on fait varier l'indice j de 2 à M-1, on obtient un système

$$\begin{aligned}
 & C_{i,1,1}f_{i,1}^{n+1} + C_{i,2,2}f_{i,2}^{n+1} + C_{i,3,3}f_{i,3}^{n+1} \dots\dots\dots = C_{i,2,4} \\
 & \dots\dots\dots + C_{i,2,1}f_{i,2}^{n+1} + C_{i,3,2}f_{i,3}^{n+1} + C_{i,4,3}f_{i,4}^{n+1} \dots\dots\dots = C_{i,3,4} \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \dots\dots\dots C_{i,M-3,1}f_{i,M-1}^{n+1} + C_{i,M-2,2}f_{i,M-2}^{n+1} + C_{i,M-1,3}f_{i,M-1}^{n+1} \dots\dots = C_{i,M-1,4} \\
 & \dots\dots\dots C_{i,M-2,1}f_{i,M-1}^{n+1} + C_{i,M-1,2}f_{i,M-1}^{n+1} + C_{i,M,3}f_{i,M}^{n+1} = C_{i,M,4}
 \end{aligned}$$

tridiagonale de M-1 équations à M-2 inconnues. En faisant varier i de 1 à N, on obtient N systèmes d'équation de M-1 équations à M-2 inconnues.

**8-1-2-résolution de l'équation elliptique : équation de la fonction de courant**

cette équation va se résoudre par la méthode de surrelaxation notée méthode ( S O R )

$$\begin{aligned}
 \Psi_{k,j}^{p+1} = & \frac{kh^2(\Delta\theta)^2}{(\Delta\theta)^2(G_1^2 + G_2^2) - 2k\left(1 + \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}\right)^2\right)} \left[ \Omega_{k,j}^{p+1} + \Psi_{k+1,j}^p \left( \frac{G_2}{2hk\Delta\eta} - \frac{1}{(h\Delta\eta)^2} \right) + \Psi_{k-1,j}^{p+1} \left( -\frac{G_2}{2hk\Delta\eta} + \frac{1}{(h\Delta\eta)^2} \right) + \right] \\
 & + \frac{kh^2(\Delta\theta)^2}{(\Delta\theta)^2(G_1^2 + G_2^2) - 2k\left(1 + \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}\right)^2\right)} \left[ \Psi_{k,j+1}^p \left( -\frac{G_1}{2hk\Delta\theta} - \frac{1}{(h\Delta\theta)^2} \right) + \Psi_{k,j-1}^{p+1} \left( \frac{G_1}{2hk\Delta\theta} - \frac{1}{(h\Delta\theta)^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2-40}$$

p= l'indice d'itération

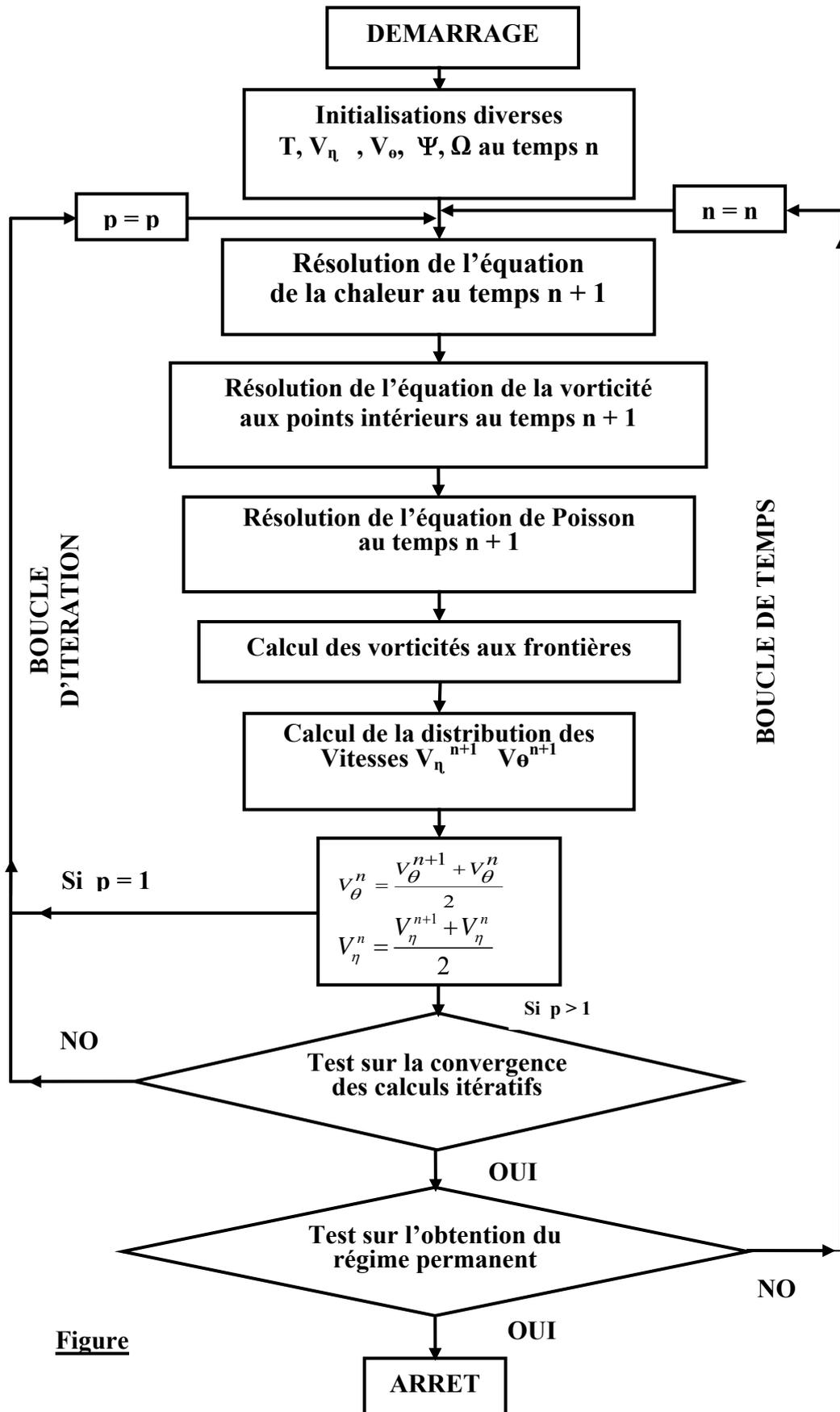
**II. 8- Test de convergences des calculs**

Les tests de convergence sont utilisés pour apprécier la convergence des calculs dans ce cas d'espèce

-sur une période de temps  $\Delta t$  donné, les résultats ne sont pris en considération qu'après convergence des calculs itératifs sur les vorticité les températures.

-à la fin d'une période  $\Delta t$  donnée, les résultats sont comparés à ceux de l'instant précédent et les calculs sont arrêtés lorsque la solution stationnaire est atteinte

## II. 9 organigrammes généraux des calculs



Figure

## **Conclusion :**

Ce chapitre consacré a la partie numérique du problème posé se résume sur trois points essentielles.

D'abord, nous avons discrétisé les équations dans le domaine ainsi que sur les frontières grâce a la méthode des différences finis qui repose sur le développement de Taylor.

Ensuite nous les avons développés dans le domaine et enfin, nous avons procédé à la résolution des équations. Les deux équation paraboliques nous font aboutir à des systèmes d'équations tri diagonales tan disque l'équation elliptique résulte à une itération.

Ainsi, un organigramme établissant les résultats est mise en œuvre.

### III. Conclusion générale et perspective

Nous avons étudié la convection naturelle dans l'espace située entre deux hémisphères isothermes dont les parois verticales sont adiabatiques. Les parois externes et internes sont fixées respectivement aux températures  $T_1$  et  $T_2$ .

Une étude mathématique reposant sur les expressions analytiques des équations de Navier Stokes en coordonnées bisphériques a été mise en œuvre pour modéliser le mouvement du fluide à l'intérieur de l'enceinte ainsi que les transferts de chaleur à travers les parois actives. Ce modèle est basé sur les hypothèses de Bousinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Cependant, nous avons étudié les conditions aux limites mais nous avons introduit le nombre de Nusselt pariétal

L'analyse numérique proposée, qui repose sur une méthode de discrétisation des équations précitées dans le domaine et sur les parois, a été développée selon la méthode aux différences finies. Ensuite nous avons procédé à la résolution par la méthode ADI (Alternating Direction Implicit method) pour les équations de la vorticité et de la chaleur qui sont parabolique et par la méthode SOR (Successive Overrelaxation method) pour l'équation de la fonction de courant qui est elliptique. Enfin, un organigramme numérique est établi pour les résultats obtenus

La résolution de l'équation elliptique aboutit à un calcul itératif tan disque les équations paraboliques permettant de déterminer les champs de température et de la vorticité ont abouti à des systèmes d'équations tridiagonales dont les coefficients des différentes équations ont été explicités

La résolution de l'équation elliptique aboutit à un calcul itératif tan disque les équations paraboliques permettant de déterminer les champs de température et de la vorticité ont abouti à des systèmes d'équations tri diagonales dont les coefficients des différentes équations ont été explicités

La théorie et la résolution des équations devaient prédire le taux d'amplification, la localisation les caractéristiques (fréquentielles) des modes les plus instables ( ou les plus stables) apparaissant dans la route du chaos aux sein de cette cavité.

Mais il se trouve qu'à ce jour, il n'existe pas de modèle capable de simuler correctement les transfères par convection naturelle dans les enceintes. Les spécialistes évoquent, par exemple : « un déficit de stratification » c'est-à-dire l'impossibilité de bien recaler les modèles sur des expériences de laboratoire à partir de la comparaison des gradients de température rencontrés dans le volume intérieur à l'enceinte. Nous nous proposons donc de bâtir un programme de recherche qui permettrait de résoudre ce type d'énigme à travers l'étude des phénomènes rencontrés dans la convection naturelle en cavité

## BIBLIOGRAPHIE

1. Weber, N.; Powe, R.E.; Bishop, E.H., "Heat transfer by natural convection between vertically eccentric spheres", ASME J. Heat Transfert 95 (1973) 47-52.
2. Powe, E., Baughman, R.C.; Scanlan, J.A.; Teng, J.T., "Free convection flow patterns between a body and its spherical enclosure", ASME J. Heat Transfert 97 (1975) 296-298.
3. Astill. K.N.; Leong, H.; Martorana, R., "A numerical solution for natural convection in concentric spherical annuli", Proceedings of the 19<sup>th</sup> National Heat Transfer, ASME HTD-vol. 8 (1980) 105-113.
4. Sarr J.; Sall, M.; Kane, M.M.; BA, B.; Daguinet, M., "Numerical natural convection in a sector-shaped enclosure", Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 11(4) (2001), 342-357.
5. Ingham D.B., "Heat transfert by natural convection between spheres and cylinders", Numerical Heat Transfert 4 (1981) 53-67.
6. Garg V.K., "Natural convection between concentric spheres", Int. J. Heat Mass Transfert 35 (1992) 1935-1945.
7. Fujii T.; Honda, T.; Fujii, M., "A numerical analysis of laminar free convection around an isothermal sphere : finite difference solution of Navier-Stokes and energy equations between concentric spheres". Numerical Heat Transfert 7 (1984) 103-111.
8. Sanjay, K.R.; Subrata, S., "A numerical study of natural convection heat transfert in a vertically eccentric spherical annulus", Int. Comm. Heat Mass Transfer
- 9- Mamadou Lamine. SOW, Joseph SARR, Cheikh MBOW, Babacar MBOW, Bernard CLAUDET, Mamadou Mansour KANE " Geometrical and Rayleigh Number Effects in the Transient Laminar Free Convection Between Two Vertically Eccentric Spheres " International Journal of Numerical methods for Heat and Fluid Flows (2009) Vol 19 Issue 5 pp. 689-704.
- [10] Cheikh MBOW, Cours de DEA Mécanique des fluids (2007
11. Moon, P.; Spencer D., "Field theory handbook, Ed. Springer, (1971), Berlin.
- 12 Peaceman, D.W.; Rachford, H.H., "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations", J. Soc. Indust Appl. Math. 3(1) (1955) 28-41.
- 13 Joseph SARR, Thèse de Doctoat d'Etat (1993)

« ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS L'ESPACE SITUE ENTRE  
DEUX HEMISPHERES ISOTHERMES EXCENTRES VERTICALEMENT »

Mémoire présenté par  
Monsieur Diégane NDONG  
Maître ès Sciences

Pour l'obtention du diplôme d'Etudes Approfondies  
Mention : Mécanique des fluides et hydraulique  
Soutenu le 17 Août 2009 devant le jury composé de :

**Président** : Aboubaker Shadikh BEYE    Professeur titulaire FST /UCAD

**Membres** :

Joseph SARR	Maître de conférences	FST/UCAD
Cheikh MBOW	Maître Assistant	FST/UCAD
Soussou SAMBOU	Maître Assistant	FST/UCAD
Mamadou Lamine SOW	Maître Assistant	FST/UCAD

Résumé

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur l'aspect théorique de la convection dans l'espace situé entre deux hémisphères isothermes excentrées verticalement

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord décrit le modèle mathématique à travers les équations de Navier Stokes. Nous y avons introduit la notion de fonction de courant et de la vorticité après avoir utiliser les hypothèses suivantes : la bidimensionnalité et les hypothèses des Bousinesq.

Ensuite, les conditions aux limites et initiales imposées aux parois sont explicitées.

Enfin, les équations de continuité, du mouvement et de la chaleur ainsi que les conditions initiales et aux limites sont exprimées en coordonnées bisphériques puis addimensionnalisées.

Dans le second chapitre, une analyse numérique qui repose sur une discrétisation des équations est proposée.

D'abord, nous avons discrétisé l'équation de la continuité puis nous l'avons résolu par la méthode SOR (Successive Overrelaxation) qui repose sur une procédure numérique itérative.

Ensuite les équations du mouvement et de la chaleur sont discrétisées puis résolues par la méthode ADI (Alternating Directon Implicit) qui aboutit à une matrice tridiagonale  $M \times N$  pouvant être résolue par l'algorithme de Thomas.

Enfin, une discrétisation des conditions initiales et aux limites fournie puis un organigramme numérique général réglé par des tests de convergence approprié est proposé.

**MOTS CLES** : Convection naturelle, Bisphérique, Excentré, Emisphère, Isotherme, Naviers Stokes, Méthode ADI, Méthode SOR, Organigramme