

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I. CONCEPTS GENERAUX DE LA PIEZOELECTRICITE</b> .....	<b>2</b>
1. Théorie de la piézoélectricité .....	3
a. Phénomène piézoélectrique .....	3
b. Ondes acoustiques .....	3
c. Equations mathématiques fondamentales .....	4
2. Notions générales sur les microsystèmes électromécaniques .....	5
a. Contexte historique des microsystèmes électromécaniques ou MEMS .....	5
b. Résonateurs piézoélectriques .....	5
c. Modèles de simulation des résonateurs BAW unidimensionnels .....	7
• Méthode analytique unidimensionnelle .....	7
• Méthode de matrice de transfert .....	8
3. Conclusion .....	9
<b>CHAPITRE II. MODELISATION POLYNOMIALE DES RESONATEURS BAW</b> .....	<b>11</b>
1. Description de la structure .....	12
2. Formulation mathématique du problème .....	12
3. Conditions aux limites et de continuité .....	13
4. Résolution polynomiale .....	13
a. Incorporation des conditions aux limites et de continuité .....	13
b. Développement polynomial .....	14
5. Résultats analytiques .....	16
a. Analyse harmonique .....	16
b. Analyse modale .....	17
6. Conclusion .....	18
<b>CHAPITRE III. VALIDATION ET EXPLOITATION DE LA METHODE METHODE POLYNOMIALE</b> .....	<b>19</b>

1. Convergence et validation du modèle .....	20
a. Donnée des simulations .....	20
b. Convergence de la méthode polynomiale .....	20
c. Validation de la méthode polynomiale .....	21
• Résonateur à électrodes minces .....	21
• Résonateur à électrodes épaisses .....	25
2. Exploitation de la méthode polynomiale .....	28
3. Conclusion .....	30
<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>31</b>
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	32
ANNEXES .....	34

ABBREVIATIONS UTILISEES	SIGNIFICATIONS
Al .....	Aluminium
AlN .....	Nitride d'aluminium
BAW .....	Bulk Acoustic Waves resonators
bioMEMS .....	biologic MicroElectroMechanical Systems
FBAR .....	Film Bulk Acoustic waves Resonators
IDT .....	InterDigitated Transducers
PZT .....	Titano-zirconate de plomb d'aluminium
MATLAB .....	MATrix LABoratory
MEMS .....	MicroElectroMechanical Systems
MOEMS .....	Micro OptoElectroMechanical Systems
NEMS .....	NanoElectroMechanical Systems
SAW .....	Surface Acoustic Waves resonators
SMR .....	Solidly Mounted Resonator
SONAR .....	SOund Navigated And Ranging
WLAN .....	Wireless Local Area Network
WiMax .....	Worldwide Interoperability for Microwave ACCess
ZnO .....	Oxyde de Zinc

NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISES	SIGNIFICATIONS
$C_0$ .....	Capacité statique due à la métallisation
$C_{ijkl}^E$ .....	Composant du tenseur de rigidité élastique à champ électrique constant

$\frac{\partial}{\partial x_j}$	.....	Dérivée partielle suivant la coordonnée $x_j$
$\delta_{jm}$	.....	Symbole de Kronecker
$\delta(q - q_1)$	.....	Distribution de Dirac en un point $q = q_1$
$D_j^S$	.....	Composant de déplacement électrique global
$\Delta Y$	.....	Précision relative au calcul d'admittance électrique
$\phi$	.....	Potentiel électrique
$\epsilon_{ij}^S$	.....	Composant du tenseur de permittivité à déformation mécanique constante
$e_{ijk}$	.....	Composant du tenseur piézoélectrique
$\epsilon_r$	.....	Précision relative au calcul des fréquences de résonance
$\epsilon_p$	.....	Précision relative au calcul des fréquences d'antirésonance
$\vec{E}$	.....	Champ électrique
$\eta$	.....	Viscosité élastique de la lame piézoélectrique
$h_1$ et $h_2$	.....	Epaisseurs des électrodes inférieure et supérieure du résonateur BAW
$i, j, k$ et $l$	.....	Indices
$I_0$	.....	Courant électrique traversant le résonateur BAW
$k_t^2$	.....	Coefficient de couplage électromécanique
$L$ et $H$	.....	Epaisseurs de la lame piézoélectrique et du résonateur BAW
$\mathcal{M}$	.....	Ordre de troncature
$MM_{jm}$	.....	Composante de la matrice $MM$
$\omega_r$ et $\omega_p$	.....	Pulsations de résonance et d'antirésonance
$\Pi^{\alpha,\beta}(q)$	.....	Fonction porte ou fonction porte définie dans $[\alpha, \beta]$
$P$	.....	Matrice de transfert globale
$P_m$ et $Q_m$	.....	Polynôme de Legendre et polynôme de Legendre "modifié"
$p_m$ et $r_m$	.....	Vecteurs de développements polynomiaux
$q$	.....	Coordonnée réduite sans dimension
$\rho_n$	.....	Masse volumique de la couche $n^\circ$
$S$	.....	Déformation mécanique
$\mathcal{S}$	.....	Surface de l'électrode métallique
$T$	.....	Temps
$\tau$	.....	Vecteur d'état
$T_{ij}^S$	.....	Composant de contrainte mécanique globale
$\tau_{ei}$ et $\tau_{es}$	.....	Taux de métallisation des électrodes inférieure et supérieure
$u_i$	.....	Composant de déplacement mécanique
$v$	.....	Vitesse de déplacement des particules
$V_0$	.....	Amplitude de la source de tension sinusoïdale utilisée
$V_p$	.....	Vitesse de propagation de l'onde dans la lame

(X, Y, Z) .....	piézoélectrique
(x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ) .....	Axes cristallographiques
z <sub>1</sub> , z <sub>p</sub> , z <sub>3</sub> .....	Coordonnées cartésiennes
	Impédances mécaniques de l'électrode inférieure, de la lame piézoélectrique, de l'électrode supérieure
Z(ω), Y(ω) .....	Impédance électrique, admittance électrique

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

Depuis la fin du XX<sup>ème</sup> siècle, la technologie des couches minces s'accélère et occupe une place très importante dans les domaines de la télécommunication mobile et sans fils, médicale, informatique et surtout l'électronique... Ces développements sont acquis dus à l'optimisation et à l'amélioration de performance des composants obtenus par cette technologie telle que la miniaturisation et l'intégration monolithique...

La piézoélectricité <sup>[1]</sup> a apportée une évolution sur ces composants vue à la conception des microsystemes. C'est une propriété fondamentale des microsystemes électromécaniques appelés MEMS <sup>[2]</sup> (MicroElectroMechanical Systems) qui ont des avenir très prometteurs. Grace à ce progrès, les industries peuvent favoriser leurs produits comme l'élévation de la fréquence d'utilisation, l'amélioration de la bande passante, la production à grande échelle... C'est pourquoi l'axe de recherches s'oriente de plus en plus à ces microsystemes.

Dans le domaine de la téléphonie mobile et sans fil, l'amélioration de la performance ne peut être obtenue qu'en montant la fréquence d'exploitation à l'ordre de Gigahertz, voire bien plus pour certaines applications et en optimisant la bande passante. Or dans cette gamme de fréquences, l'épaisseur des électrodes métalliques devient comparable à celle de la lame piézoélectrique. Il y a alors un effet mécanique qui trouble <sup>[3]</sup> le fonctionnement du dispositif.

Pour optimiser cet effet mécanique, plusieurs méthodes sont déjà proposées comme la méthode analytique <sup>[3, 4]</sup> unidimensionnelle, la méthode de matrices de transfert <sup>[5, 6]</sup>, ... Vue des différents avantages <sup>[7-9]</sup> dans la description de la structure, l'incorporation des conditions aux limites et de continuité et la résolution par le système d'équations aux valeurs propres, nous choisissons la méthode polynomiale de Legendre. L'objectif est alors de se familiariser avec cette approche en vue d'établir un outil de simulation capable de tenir compte les influences de la métallisation sur la performance des résonateurs à ondes de volume.

Pour atteindre cet objectif, nous subdivisons ce mémoire en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons un bref rappel sur les concepts généraux de la piézoélectricité tels que la théorie de la piézoélectricité, les résonateurs à ondes de surface ou SAW <sup>[3-5]</sup> (Surface Acoustic Wave) et à ondes de volume ou BAW <sup>[3-5]</sup> (Bulk Acoustic Wave) et quelques principes des méthodes utilisées à l'étude et à l'optimisation des résonateurs BAW.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une approche par la méthode polynomiale de Legendre en faisant une description simplifiée d'un résonateur BAW et la mise en équations associée à la résolution du problème en tenant compte la métallisation suivie des résultats qui permettent de calculer les différentes caractéristiques du résonateur considéré.

En dernier chapitre, nous validons, par des simulations numériques, nos résultats en les confrontant avec ceux de la méthode analytique unidimensionnelle et nous exploitons notre outil de simulation à l'étude des influences de la métallisation sur la performance des résonateurs BAW à électrodes minces. Nous terminons ce mémoire par une conclusion en résumant les principaux résultats suivis des perspectives.

**CHAPITRE I.**  
**CONCEPTS GENERAUX DE LA**  
**PIEZOELECTRICITE**

---

## CHAPITRE I.

### CONCEPTS GENERAUX DE LA PIEZOELECTRICITE

---

Le phénomène piézoélectrique attire beaucoup d'attention des nombreux chercheurs et ingénieurs depuis une trentaine d'années. Elle donne lieu à des travaux colossaux sur les structures cristallines. Vue son importance dans la technologie, la compréhension de la théorie de la piézoélectricité est indispensable.

Dans ce chapitre, nous faisons un bref rappel sur les notions nécessaires aux matériaux piézoélectriques. Nous voyons, d'abord, la théorie de la piézoélectricité dans laquelle nous parlons du phénomène piézoélectrique, les ondes acoustiques et les équations fondamentales.

Ensuite, nous exposons la représentation générale des résonateurs SAW et BAW. A la fin de ce chapitre, nous présentons quelques principes des méthodes (méthode analytique unidimensionnelle et méthode de matrice de transfert) utilisées à la modélisation de résonateurs BAW.

#### 1. Théorie de la piézoélectricité :

##### a. Phénomène piézoélectrique :

La piézoélectricité a été observée pour la première fois en 1871 par Abbé René Haiüy. La première démonstration de l'effet direct <sup>[1]</sup> est faite par les frères Curie en 1880 et l'effet inverse <sup>[10]</sup> prédit par Gabriel Lippmann en 1881. De nombreux cristaux naturels présentent des propriétés piézoélectriques tels que le quartz, la tourmaline, ...

La *piézoélectricité* (du grec *piézen* : presser, appuyer) est l'aptitude de certains cristaux de se polariser sous une contrainte mécanique et de se déformer sous un champ électrique. Ces deux propriétés sont indissociables. La première est connue sous l'effet direct qui est mis à profit à la conception des capteurs, des micromoteurs..., la seconde connue sous l'effet inverse qui permet de fabriquer des transducteurs, des résonateurs piézoélectriques...

Dans la pratique, ces propriétés trouvent un grand nombre d'applications dans la vie quotidienne : dans le domaine de télécommunication comme les téléphones cellulaires, dans le domaine maritime comme les sonars, dans le domaine médical comme les échographies, dans le domaine d'automobile comme les airbags...

##### b. Ondes acoustiques :

Une onde est une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales. Elle se déplace avec une vitesse qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation. D'une façon générale, une onde transporte de l'énergie sans transporter de matière. Nous pouvons classer les ondes selon leurs vitesses de propagation : les ondes électromagnétiques qui se propagent à des vitesses de l'ordre de  $10^8 \text{ m.s}^{-1}$  et les ondes acoustiques à des vitesses très petites de l'ordre de  $10^4 \text{ m.s}^{-1}$ . Nous nous intéressons

particulièrement ici aux ondes acoustiques. Elles ne peuvent se propager que dans un milieu matériel selon une onde longitudinale, transversale et même superficielles si le milieu est solide. Elles peuvent être trouvées à la surface ou au cœur d'un matériau :

- les ondes de surface sont des ondes guidées par la surface d'un matériau. Elles sont moins rapides mais généralement de fortes amplitudes. On peut distinguer l'onde de Love et l'onde de Rayleigh que nous trouvons dans les résonateurs SAW,
- les ondes de volume sont des ondes qui peuvent se déplacer dans un milieu illimité. Elles peuvent être purement longitudinales, transversales, ou les deux à la fois, si le matériau est isotrope. Dans les matériaux anisotropes, elles peuvent être quasi-longitudinales ou quasi-transversales, ou les deux à la fois. Ces ondes sont rencontrées dans les résonateurs BAW.

La propagation des ondes acoustiques obéit aux mêmes lois que la plupart des phénomènes relevant de la théorie des ondes. Elle est entièrement décrite par une équation aux dérivées partielles de l'espace et du temps.

c. Equations mathématiques fondamentales :

Dans les matériaux piézoélectriques, l'interdépendance entre les grandeurs électromécaniques implique un couplage entre les ondes électromagnétiques et acoustiques. Or même dans un matériau fortement piézoélectrique, cette interaction est très faible car leurs vitesses sont différentes. Il est alors possible d'étudier la propagation des ondes acoustiques en admettant le champ électrique associé à ces ondes est statique par rapport au phénomène de propagation électromagnétique <sup>[11]</sup>. Dans cette hypothèse, le champ électrique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$ . Ce phénomène est traduit par les équations constitutives <sup>[4]</sup> :

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \quad (1a)$$

$$D_j = e_{jkl} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \epsilon_{jk}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \quad (1b)$$

avec T, D, u,  $\phi$  et x indiquent respectivement la contrainte mécanique, le déplacement électrique, le déplacement mécanique, le potentiel électrique et la position.  $c^E$ , e et  $\epsilon^S$  sont les tenseurs de rigidité élastique à champ électrique  $\vec{E}$  constant, piézoélectrique et de la permittivité à déformation mécanique S constante. Le long de ce mémoire, nous adoptons la convention d'Einstein où la sommation s'applique sur les indices répétés.

Les ondes acoustiques vérifient les équations de Newton et de Gauss <sup>[4]</sup> :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2b)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du matériau considéré.

L'équation (2b) est valable pour les milieux de densité volumique de charge nulle. Ces quatre équations constituent les expressions mathématiques fondamentales de la théorie de la piézoélectricité. Ses résolutions permettent de trouver les différents paramètres caractéristiques comme l'impédance électrique d'entrée, les fréquences propres et les profils des champs à l'intérieur du dispositif considéré...

## 2. Notions générales sur les microsystèmes électromécaniques :

### a. Contexte historique des microsystèmes électromécaniques ou MEMS :

Au début des années 70, les MEMS ont été développés en tant que dérivés de la micro-électronique. Sa première commercialisation remonte aux années 80. Un microsystème électromécanique est un dispositif contenant un ou plusieurs éléments mécaniques, en vue de réaliser une fonction de capteur et/ou d'actionneur avec au moins une structure présentant des dimensions micrométriques.

Les MEMS ont connu un développement important et restent encore en plein essor. Leur fabrication fait appel aux micro-technologies qui permettent une production à grande envergure. Ils sont utilisés dans des domaines aussi variés que l'automobile, l'aéronautique, la médecine, la biologie, la télécommunication, ainsi que dans certaines applications telles que les vidéoprojecteurs et les téléviseurs haute-définition.

C'est un axe de recherche relativement récent qui combine l'utilisation des techniques électroniques, informatiques, chimiques, mécaniques, optiques ... Face au développement, nous voyons apparaître, actuellement, des termes dérivés pour désigner des MEMS comme MOEMS <sup>[2]</sup> (Micro OptoElectroMechanical Systems) ou microsystèmes optoélectroniques, bioMEMS <sup>[2]</sup> (biologic MicroElectroMechanical Systems) ou microsystèmes biologiques, NEMS <sup>[2]</sup> (NanoElectroMechanical Systems) ou nanosystèmes électromécaniques...

### b. Résonateurs piézoélectriques :

Vers 1920, un de représentant des MEMS le plus connu est les résonateurs piézoélectriques. Ils présentent un grand coefficient de qualité dans les circuits électroniques. Nous pouvons classer généralement les résonateurs piézoélectriques en deux groupes : les résonateurs SAW et les résonateurs BAW.

- Les **résonateurs SAW** <sup>[3-4]</sup> sont constitués par un ou plusieurs transducteurs interdigités (IDT) qui servent à générer des ondes acoustiques et des réflecteurs qui jouent le rôle de miroirs de Bragg pour créer une cavité résonante (figure 1.1). Les transducteurs et les réflecteurs sont déposés sur une couche mince de matériau piézoélectrique déposés ensuite sur un substrat jouant le rôle de support. L'application d'un champ électrique sur les transducteurs entraîne l'excitation des ondes acoustiques de surface.

A la fréquence centrale, la distance acoustique entre les électrodes du transducteur correspond à la demi-longueur d'onde. Ceci crée une perturbation acoustique constructive connue sous un phénomène de résonance et pour les autres fréquences, cette perturbation a tendance à s'atténuer.

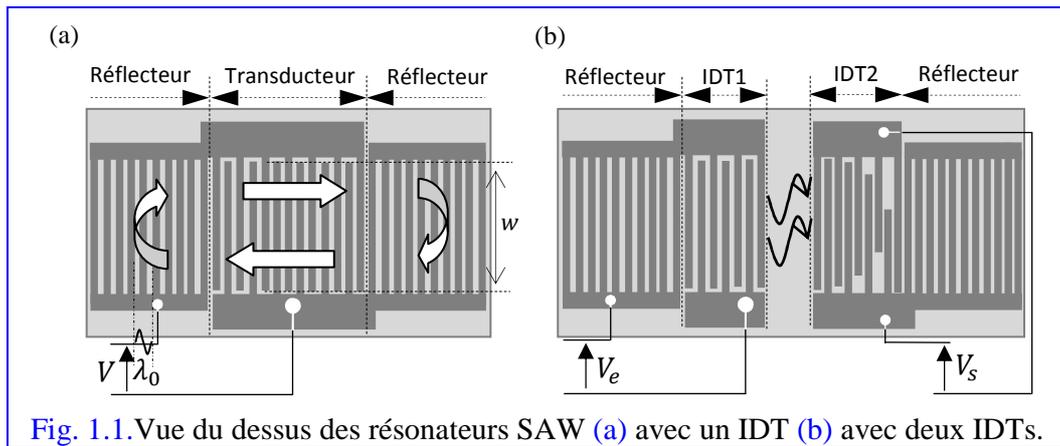


Fig. 1.1. Vue du dessus des résonateurs SAW (a) avec un IDT (b) avec deux IDTs.

- Les **résonateurs BAW** [3-4] sont des composants particulièrement attractifs pour les communications radiofréquences (l'ordre de GHz). La technologie de ces résonateurs est la seule capable d'allier d'excellentes performances accrues, aux encombrements et aux coûts réduites, à une technique de réalisation compatible avec les procédés de fabrication des circuits intégrés de références à très faible consommation.

Cette technologie permet de concevoir des filtres à faibles pertes dans une gamme de fréquences déterminées par l'épaisseur de la lame piézoélectrique, citons comme exemple, le résonateur acoustique isolé du substrat par un miroir de Bragg. Depuis l'apparition des résonateurs BAW, les systèmes de communications ont connu une croissance explosive. Afin de répondre aux exigences du marché de communications mobiles, nous avons assisté à une reproduction massive des standards tels que le Bluetooth, le WLAN, le WiMAX ...

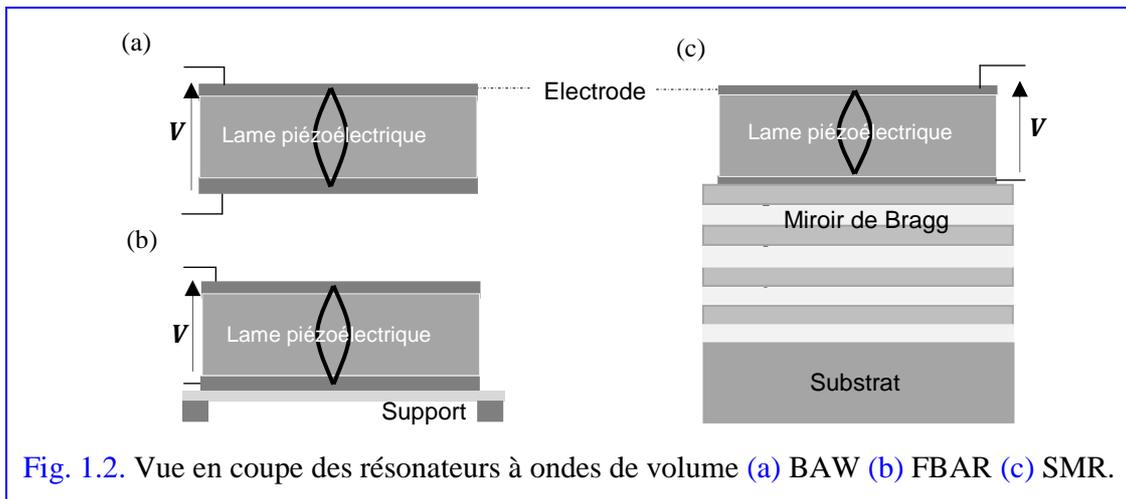


Fig. 1.2. Vue en coupe des résonateurs à ondes de volume (a) BAW (b) FBAR (c) SMR.

En quelques mots, dans les résonateurs SAW, le matériau piézoélectrique est situé sur la surface d'un substrat semi-conducteur tandis que dans les résonateurs BAW, il est disposé à l'intérieur d'un volume délimité entre deux électrodes de sorte que l'onde acoustique se développe dans ce même volume.

Pour répondre à des gabarits de filtrage particulier, les résonateurs piézoélectriques peuvent être associés en échelle ou en treillis.

c. Modèles de simulation des résonateurs BAW unidimensionnels :

Pour modéliser les résonateurs BAW unidimensionnels, de nombreuses méthodes ont été présentées dans la littérature telles que la méthode analytique unidimensionnelle, la méthode de matrice de transfert...

Dans le cas unidimensionnel, seules les composantes normales sont non nulles. Nous allons adopter les notations :  $x = x_3$ ,  $u = u_3$ ,  $D = D_3$ ,  $T = T_3$ ,  $c^E = c_{33}^E$ ,  $e = e_{33}$  et  $\epsilon^S = \epsilon_{33}^S$ .

- Méthode analytique unidimensionnelle <sup>[3]</sup>:

La méthode analytique unidimensionnelle ne permet de modéliser qu'uniquement les résonateurs BAW semi-infini. Alors, les équations constitutives (1) deviennent :

$$T(x) = c^E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3a)$$

$$D(x) = e \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon^S \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3b)$$

En substituant ces expressions dans les équations de mouvement (équation de Newton et équation de Gauss pour un milieu de densité volumique de charge nulle), nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$c^E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4a)$$

$$e \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon^S \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (4b)$$

Nous travaillons ici en régime harmonique où la dépendance temporelle est sous forme  $\exp(j\omega t)$  avec  $\omega$  est la pulsation de l'onde. En substituant l'expression (4b) dans (4a), nous obtenons l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{V_p^2} \cdot u(x) = 0, \quad (5)$$

où  $V_p$  indique la vitesse de propagation de l'onde dans la lame piézoélectrique. La solution de l'équation de propagation (5) est une onde stationnaire de la forme :  $u(x, t) = A e^{-j\omega(t+\frac{x}{V_p})} + B e^{j\omega(t-\frac{x}{V_p})}$  où les constantes A et B sont calculées à partir des conditions aux limites. Le courant électrique traversant la surface  $S$  de l'électrode est donné par le théorème d'Ampère :

$$I_0 = -j\omega \iint_{(S)} D(x) dS, \quad (6)$$

Or l'équation de Gauss montre que le déplacement électrique  $D$  est indépendant de la position  $x$ . Cela nous permet d'établir une équation reliant le potentiel électrique et le courant électrique traversant le résonateur  $I_0$  suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon^S} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{I_0}{j\omega \epsilon^S \mathcal{S}}, \quad (7)$$

En intégrant cette relation et en utilisant les conditions aux limites, nous pouvons trouver l'impédance électrique du résonateur BAW à électrodes épaisses <sup>[12]</sup> :

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_0} \left[ 1 - \frac{k_t^2 z_p V_p}{\omega L} \cdot \frac{2z_p \left( 1 - \cos\left(\frac{\omega L}{V_p}\right) \right) - j(z_1 + z_3) \sin\left(\frac{\omega L}{V_p}\right)}{(z_p^2 + z_1 z_3) \sin\left(\frac{\omega L}{V_p}\right) - jz_p(z_1 + z_3) \cos\left(\frac{\omega L}{V_p}\right)} \right],$$

D'où : (8)

$$z_p = j\mathcal{S} \sqrt{\rho \left( c + \frac{e^2}{\epsilon} \right)} ; z_1 = j\mathcal{S} \sqrt{\rho_1 c_1} \cdot \text{tg} \left[ \frac{\omega h_1}{\sqrt{\frac{\rho_1}{c_1}}} \right] ; z_3 = j\mathcal{S} \sqrt{\rho_3 c_3} \cdot \text{tg} \left[ \frac{\omega h_3}{\sqrt{\frac{\rho_3}{c_3}}} \right].$$

avec  $C_0 = \epsilon_2 \mathcal{S} / L$ ,  $L$  et  $k_t^2$  désignent respectivement la capacité statique due à la métallisation, l'épaisseur de la lame piézoélectrique et le coefficient de couplage électromécanique.  $z_p$ ,  $z_1$  et  $z_3$  sont les impédances mécaniques de la lame piézoélectrique et les électrodes inférieure et supérieure caractérisées respectivement par les constantes élastiques,  $c_1$  et  $c_3$ , les masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_3$  et les épaisseurs  $h_1$  et  $h_2$ . Ces impédances mécaniques sont définies par :

Pour calculer les fréquences propres, nous annulons respectivement l'impédance électrique du dispositif pour les fréquences de résonance et l'admittance électrique pour les fréquences d'antirésonance. Ce qui nous amène à la résolution des équations caractéristiques en utilisant la fonction prédéfinie "fzero" du logiciel MATLAB.

- Méthode de matrice de transfert <sup>[5-6]</sup> :

Le principe de la méthode de matrice de transfert se repose sur l'écriture des équations constitutives et des équations de mouvement associées à la structure étudiée sous une forme matricielle. En vue d'une résolution par cette méthode, les variables choisies sont des grandeurs continues aux interfaces.

Alors, les équations constitutives utilisées dans cette méthode sont écrites sous la forme suivante :

$$j\omega T(x) = c^E \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + e \frac{\partial j\omega \phi}{\partial x}, \quad (9a)$$

$$j\omega D(x) = e \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon^S \frac{\partial j\omega \phi}{\partial x}, \quad (9b)$$

avec  $v(x) = j\omega u(x)$  est la vitesse de déplacement des particules. En utilisant les équations de Newton et de Gauss (2) et les équations constitutives (9), nous pouvons établir l'équation matricielle suivante :

$$\frac{d\tau}{dx} = j\omega\lambda\tau. \quad (10)$$

où  $\tau = [T D v j\omega\phi]^t$ ,  $t$  indique la transposition, est appelé le vecteur d'état qui reflète les composantes continues des grandeurs physiques à l'interface de la structure multicouche.  $\lambda$  est une matrice ( $8 \times 8$ ) dans laquelle intervient tous les paramètres caractéristiques des couches constitutives de la structure.

En intégrant cette équation, pour une couche d'épaisseur  $L$ , la solution est la suivante :

$$\tau(x + L) = e^{j\omega\lambda L} \cdot \tau(x), \quad (11)$$

Pour un résonateur BAW d'épaisseur  $H$ , la solution de l'équation (10) est :

$$\tau(0) = P \cdot \tau(H), \quad (12)$$

avec  $P$  la matrice de transfert globale donnée par le produit des matrices de transfert de l'électrode supérieure, de la lame piézoélectrique et de l'électrode inférieure. En tenant compte des conditions aux limites sur la contrainte mécanique et le théorème d'Ampère, l'équation (12) devient :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_0 \\ \frac{j\omega\mathcal{S}}{v} \\ -j\omega\frac{V_0}{2} \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I_0 \\ \frac{j\omega\mathcal{S}}{v} \\ j\omega\frac{V_0}{2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Nous pouvons calculer, à partir de cette relation, l'impédance électrique du résonateur qui est définie par  $Z(\omega) = V_0/I_0$ .

La méthode analytique unidimensionnelle et la méthode de matrice de transfert sont des méthodes rapides et précises aux études des structures multicouches comme le cas des résonateurs BAW semi-infinis. Elles permettent d'expliciter, d'une manière analytique et d'une forme matricielle, l'impédance électrique de la structure considérée. Cependant, les résultats obtenus ne sont pas valables que pour l'étude unidimensionnelle. C'est la limite de ces deux méthodes. Pour la première, il est impossible de donner la forme analytique bidimensionnelle des champs et pour la seconde, l'équation différentielle du vecteur d'état  $\tau$  est impossible à résoudre.

### 3. Conclusion :

Nous avons vu, dans ce chapitre, la théorie de la piézoélectricité. C'est une théorie fondamentale à la compréhension du phénomène de couplage électromécanique. Nous avons

abordé les notions générales et essentielles sur les ondes acoustiques, les résonateurs piézoélectriques et les méthodes existantes à l'étude unidimensionnelle des résonateurs BAW.

Dans le prochain chapitre, nous allons établir une nouvelle approche basée sur les développements polynomiaux des champs tels que le déplacement mécanique et le potentiel électrique. Cette approche conduit plutôt à la résolution des équations aux valeurs propres qu'à la résolution des équations caractéristiques. Elle permet de décrire les grandeurs et les paramètres physiques au niveau global c'est-à-dire dans la totalité de la structure. Les conditions aux limites et de continuité sont automatiquement incluses dans cette méthode. Ces différents avantages sont très importants par rapport aux méthodes analytique et de matrice de transfert. En plus, elle est extensible à l'étude bi- et tridimensionnelle des résonateurs MEMS.

**CHAPITRE II.**  
**MODELISATION POLYNOMIALE DES**  
**RESONATEURS BAW**

Rapport-Gratuit.com

---

## CHAPITRE II.

### MODELISATION POLYNOMIALE DES RESONATEURS BAW

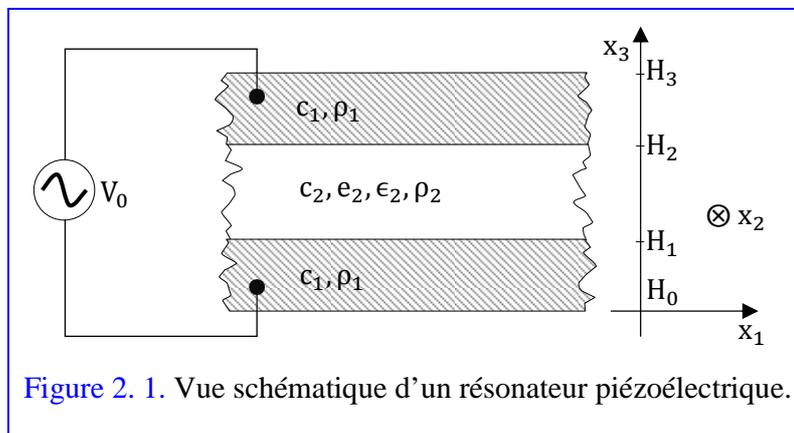
---

Ce travail s'intéresse plus particulièrement à l'étude des comportements des ondes stationnaires dans les résonateurs à ondes de volume. Dans ce chapitre, l'étude est basée aux développements polynomiaux des grandeurs physiques choisis comme étant des variables indépendantes caractérisant le dispositif considéré.

Ce chapitre a pour but d'établir un modèle mathématique des résonateurs BAW en considérant l'épaisseur des électrodes. Dans cette modélisation, d'abord, nous allons décrire d'une manière simplifiée la structure à étudier. Ensuite, nous présentons toutes les équations mathématiques correspondantes et bien évidemment la résolution analytique de ces équations, selon les conditions aux limites et de continuité imposées, dans laquelle nous présentons leurs paramètres caractéristiques.

#### 1. Description de la structure :

La structure étudiée est une lame piézoélectrique parfaitement isolant prise en sandwich entre deux électrodes métalliques parfaitement conductrice. La lame piézoélectrique est caractérisée par des paramètres physiques tels que la rigidité élastique  $c_2$ , la constante piézoélectrique  $e_2$ , la permittivité diélectrique  $\epsilon_2$  et la masse volumique  $\rho_2$  et les électrodes métalliques par  $c_1$  et  $\rho_1$ .



Le résonateur considéré est polarisé par une source de tension sinusoïdale d'amplitude  $V_0$ . La direction de propagation des ondes acoustiques générées dans la structure se fait suivant la normale aux interfaces des couches constitutives. Les axes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus avec les axes cristallographiques X, Y et Z. Nous supposons que la structure est latéralement infinie.

#### 2. Formulation mathématique du problème :

Nous travaillons ici en régime harmonique où la dépendance temporelle est sous forme  $\exp(j\omega t)$ , avec  $\omega$  est la pulsation dans l'approximation quasi-statique, le champ

électrique associé à l'onde acoustique est statique par rapport au phénomène de propagation électromagnétique.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous adoptons les notations sur les composantes :  $x = x_3$ ,  $u = u_3$ ,  $D = D_3$ ,  $T = T_3$ ,  $c = c_{33}^E$ ,  $e = e_{33}$  et  $\epsilon = \epsilon_{33}^S$ .

Dans les matériaux piézoélectriques, un phénomène de couplage électromécanique se manifeste. Ce phénomène est traduit par une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa. Mathématiquement, il est interprété par des équations constitutives :

$$T(x) = c(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + e(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1a)$$

$$D(x) = e(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1b)$$

où  $T$ ,  $D$ ,  $u$  et  $\phi$  représentent respectivement la contrainte mécanique, le déplacement électrique, le déplacement mécanique et le potentiel électrique. Les ondes acoustiques générées dans la structure satisfont les équations de Newton et de Gauss :

$$\frac{\partial T^G}{\partial x} = -\rho^G \omega^2 \cdot u(x), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial D^G}{\partial x} = 0. \quad (2b)$$

L'exposant  $G$  indique qu'il s'agit ici des grandeurs globales. L'équation (2b) est valable uniquement pour une lame piézoélectrique parfaitement isolant.

### 3. Conditions aux limites et de continuité :

Les conditions aux limites et de continuité imposées par la structure sont (i) l'annulation de la contrainte mécanique sur les surfaces mécaniquement libres ; (ii) la continuité de la contrainte mécanique, le déplacement électrique, le déplacement mécanique et le potentiel électrique aux interfaces ; (iii) une différence de potentiel électrique appliquée aux bornes de la structure.

### 4. Résolution polynomiale :

Pour simplifier notre approche, nous allons choisir  $q = -1 + 2x/H$ ,  $H = H_3 - H_0$  épaisseur de la structure, comme une coordonnée réduite sans dimension.

#### a. Incorporation des conditions aux limites et de continuité :

Pour tenir compte des conditions aux limites et de continuité, nous définissons une fonction porte ou fonction porte définie par, ANNEXE 1:

$$\Pi^{\alpha,\beta}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq q \leq \beta, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3)$$

La structure étudiée est un matériau hexagonal isotrope de classe 6mm où les paramètres physiques  $c$ ,  $e$ ,  $\epsilon$  et  $\rho$  sont constants dans chaque couche constitutive du résonateur. La distribution spatiale des grandeurs physiques et la masse volumique de la structure s'écrit :

$$T^G(q) = \frac{2}{H} \left[ c_1 \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \Pi^{-1,q_1}(q) + \left( c_2 \frac{\partial u}{\partial q} + e_2 \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \Pi^{q_1,q_2}(q) + c_1 \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \Pi^{q_2,1}(q) \right] \quad (4a)$$

$$D^G(q) = \frac{2}{H} \left[ e_2 \frac{\partial u}{\partial q} - \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial q} \right], \quad (4b)$$

$$\rho^G(q) = \rho_1 \cdot \Pi^{-1,q_1}(q) + \rho_2 \cdot \Pi^{q_1,q_2}(q) + \rho_1 \cdot \Pi^{q_2,1}(q), \quad (4c)$$

où  $q_1 = -1 + 2H_1/H$  et  $q_2 = -1 + 2H_2/H$ .

En remplaçant la contrainte mécanique globale  $T^G$  avec les contraintes mécaniques locales  $T_1$  de l'électrode inférieure,  $T_2$  de la lame piézoélectrique et  $T_3$  de l'électrode supérieure dans l'équation de Newton, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial q} \Pi^{-1,q_1}(q) + \frac{\partial T_2}{\partial q} \Pi^{q_1,q_2}(q) + \frac{\partial T_3}{\partial q} \Pi^{q_2,1}(q) + T_1(q)\delta(q+1) + [T_2(q) - T_1(q)]\delta(q-q_1) \\ + [T_3(q) - T_2(q)]\delta(q-q_2) - T_3(q)\delta(q-1) = -\frac{\omega^2 H}{2} \rho^S \cdot u(q). \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\delta(q - q_0)$  est la distribution de Dirac en  $q = q_0$ . Elle peut être calculée à partir de :

$$\frac{\partial \Pi^{\alpha,\beta}}{\partial q} = \delta(q - \alpha) - \delta(q - \beta).$$

$T_1(q) \cdot \delta(q+1)$  et  $T_3(q) \cdot \delta(q-1)$  assurent l'annulation de la contrainte mécanique globale aux surfaces mécaniquement libres ;  $[T_2(q) - T_1(q)]\delta(q - q_1)$  et  $[T_3(q) - T_2(q)] \cdot \delta(q - q_2)$  interprètent la continuité de  $T^G$  respective aux interfaces  $q = q_1$  et  $q = q_2$  ; les termes restants représentent la dérivée de  $T^G$  dans les couches constitutives. La méthode polynomiale de Legendre permet alors, avec un formalisme unique, de décrire les paramètres et grandeurs physiques au niveau global, les conditions aux limites et de continuité aux interfaces.

#### b. Développement polynomial :

L'approche polynomiale est basée sur un développement des champs en série infinie des polynômes. Ces polynômes et leurs dérivées sont continus dans l'intervalle de travail. Pour le cas des résonateurs, les champs tels que le déplacement mécanique et le potentiel électrique sont continus aux interfaces mais ne sont pas continûment dérivables.

Il faut donc un grand nombre de termes pour restituer ces discontinuités. La convergence s'avère impossible alors difficile due à la capacité de calculateur par le manque de mémoire vive et la précision sur la recherche des valeurs propres sur les systèmes de dimensions importantes.

Pour contourner ce problème, la solution que nous proposons est alors des développements polynomiaux différents de déplacement mécanique et du potentiel électrique pour chaque couche pour anticiper dès le départ cette discontinuité <sup>[13]</sup>. ANNEXE 2:

$$\phi(q) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \text{si } -1 \leq q \leq q_1, \\ \frac{V_0}{2} \left( \frac{2q - q_1 - q_2}{q_2 - q_1} \right)^3 + (q - q_1)(q - q_2)Q_m(q) \cdot r_m & \text{si } q_1 \leq q \leq q_2, \\ +\frac{V_0}{2} & \text{si } q_2 \leq q \leq 1. \end{cases} \quad (6a)$$

$$u(q) = \begin{cases} \left[ \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} Q_m(q) + \left( 1 - \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} \right) Q_m(q_1) + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial Q_m}{\partial q} \Big|_{q=q_1} \cdot (q - q_1) \right] \cdot p_m + \left[ \frac{\rho_1 e_2}{\rho_2 c_1} (q - q_1)(q - q_2) Q_m(q) + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right. \\ \left. \times \frac{e_2}{c_1} (q_1 - q_2)(q - q_1) Q_m(q_1) \right] \cdot r_m + \left\{ \frac{\rho_1 e_2}{\rho_2 c_1} \left[ \left( \frac{2q - q_1 - q_2}{q_2 - q_1} \right)^3 + 1 \right] + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{e_2}{c_1} \cdot \frac{6(q - q_1)}{(q_2 - q_1)^3} \right\} \cdot \frac{V_0}{2} & \text{si } -1 \leq q \leq q_1, \\ Q_m(q) \cdot p_m & \text{si } q_1 \leq q \leq q_2, \\ \left[ \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} Q_m(q) + \left( 1 - \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} \right) Q_m(q_2) + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial Q_m}{\partial q} \Big|_{q=q_2} \cdot (q - q_2) \right] \cdot p_m + \left[ \frac{\rho_1 e_2}{\rho_2 c_1} (q - q_1)(q - q_2) Q_m(q) + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right. \\ \left. \times \frac{e_2}{c_1} (q_2 - q_1)(q - q_2) Q_m(q_2) \right] \cdot r_m + \left\{ \frac{\rho_1 e_2}{\rho_2 c_1} \left[ \left( \frac{2q - q_1 - q_2}{q_2 - q_1} \right)^3 - 1 \right] + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{e_2}{c_1} \cdot \frac{6(q - q_2)}{(q_2 - q_1)^3} \right\} \cdot \frac{V_0}{2} & \text{si } q_2 \leq q \leq 1, \end{cases} \quad (6b)$$

La forme du potentiel électrique <sup>[13]</sup> choisie permet d'incorporer la source de tension sinusoïdale  $V_0$  et on laisse le soin au coefficient  $r_m$  d'ajuster le gradient du potentiel dans la lame piézoélectrique.

## 5. Résultats analytiques :

Pour montrer les influences de la métallisation sur la performance d'un résonateur BAW, nous exprimons les paramètres  $q_1$  et  $q_2$  en fonction des taux de métallisation  $\tau_1$  en (%) de l'électrode inférieure et  $\tau_2$  en (%) de l'électrode supérieure par rapport à l'épaisseur de la lame piézoélectrique :

$$q_1 = -1 + \frac{2\tau_1}{\tau_1 + 100 + \tau_2}, q_2 = 1 - \frac{2\tau_2}{\tau_1 + 100 + \tau_2} \text{ où } \tau_1 = \frac{H_1}{H_2 - H_1}, \tau_2 = \frac{H - H_2}{H_2 - H_1}.$$

Nous remplaçons la contrainte mécanique et le déplacement électrique globaux dans les équations de mouvement, nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$c_1 \frac{\partial}{\partial q} \left[ (\Pi^{-1, q_1}(q) + \Pi^{q_2, 1}(q)) \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial q} \right] + c_2 \frac{\partial}{\partial q} \left[ \Pi^{q_1, q_2}(q) \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial q} \right] + e_2 \frac{\partial}{\partial q} \left[ \Pi^{q_1, q_2}(q) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q} \right] \\ = - \left( \frac{\omega H}{2} \right)^2 [\rho_1 (\Pi^{-1, q_1}(q) + \Pi^{q_2, 1}(q)) + \rho_2 \Pi^{q_1, q_2}(q)] \cdot \varpi(q), \quad (7a)$$

$$e_2 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial q^2} - \epsilon_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} = 0. \quad (7b)$$

Nous multiplions ce système d'équations différentielles avec le polynôme  $Q_j^*(q)$ , ANNEXE 3, \* désigne un complexe conjugué, en intégrant ensuite les équations obtenues sur  $q$  de  $-1$  à  $1$  la première équation et de  $q_1$  et  $q_2$  la deuxième, nous obtenons un système d'équations linéaires comme paramètre  $\omega H$  et inconnus  $p_m$  et  $r_m$  :

$$AA_{jm} \cdot p_m + BB_{jm} \cdot r_m + CC_{j0} \cdot V_0 = - \left( \frac{\omega H}{2} \right)^2 \cdot [MM_{jm} \cdot p_m \\ + NN_{jm} \cdot r_m + OO_{j0} \cdot V_0], \quad (8a)$$

$$DD_{jm} \cdot p_m + EE_{jm} \cdot r_m + FF_{j0} \cdot V_0 = 0. \quad (8b)$$

Les matrices  $AA_{jm}$ ,  $BB_{jm}$ ,  $CC_{j0}$ ,  $DD_{jm}$ ,  $EE_{jm}$ ,  $FF_{j0}$ ,  $MM_{jm}$ ,  $NN_{jm}$  et  $OO_{j0}$  sont données dans l'ANNEXE 3.

## a. Analyse harmonique :

Le courant électrique  $I_0$  traversant le résonateur BAW, en fonction du déplacement électrique global  $D^S$ , est donné par le théorème d'Ampère :

$$I_0 = -j\omega \cdot \iint_{(S)} D^S(q) \cdot dS, \quad (9)$$

avec  $S$  est l'aire de l'électrode métallique. L'équation de Gauss montre que le déplacement électrique  $D^S$  est indépendant de  $q$ . Nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{e_2}{\epsilon_2} \frac{\partial \varpi}{\partial q} + \frac{I_0}{j\omega \epsilon_2 S}. \quad (10)$$

En intégrant l'équation (10) sur  $q$  de  $q_1$  à  $q_2$ , nous pouvons établir l'expression de l'admittance électrique du résonateur BAW en fonction des taux de métallisation des électrodes :

$$Y(\omega) = \frac{I_0}{V_0} = j\omega C_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2} \left[ Q_m \left( 1 - \frac{2\tau_2}{\tau_1 + 100 + \tau_2} \right) - Q_m \left( -1 + \frac{2\tau_1}{\tau_1 + 100 + \tau_2} \right) \right] \cdot \frac{p_m}{V_0} \right\}, \quad (11)$$

avec  $C_0 = 2\epsilon_2 S / [H(q_2 - q_1)]$  est la capacité statique due à la métallisation.

Le vecteur  $p_m$  est la solution du système d'équations linéaires (8). Pour tenir compte les phénomènes de dissipation causés par les défauts du milieu, nous exprimons la rigidité élastique dans la lame piézoélectrique comme étant un nombre complexe,  $c_2 = c_2' + j\omega\eta$ , avec  $\eta$  la viscosité élastique, qui permet de représenter les pertes mécaniques responsables de l'atténuation des ondes acoustiques. Nous négligeons les autres pertes. Par conséquent, le vecteur  $p_m$  est un complexe. Alors, l'admittance électrique  $Y(\omega)$  est aussi un nombre complexe dont sa partie réelle désigne la conductance et sa partie imaginaire dénote la susceptance.

#### b. Analyse modale :

L'analyse modale est un cas particulier de l'analyse harmonique. Elle est obtenue par la suppression des sources électriques. Pour un résonateur avec ou sans pertes, les fréquences propres sont quasi-identiques <sup>[14]</sup>. Dans ce paragraphe, nous faisons des calculs avec des résonateurs BAW sans pertes ( $\eta = 0$ ).

L'annulation de source de tension  $V_0$  sur le système d'équations (8), nous avons le système d'équations linéaires suivant :

$$AA_{jm} \cdot p_m + BB_{jm} \cdot r_m = - \left( \frac{\omega_r H}{2} \right)^2 \cdot [MM_{jm} \cdot p_m + NN_{jm} \cdot r_m], \quad (12a)$$

$$DD_{jm} \cdot p_m + EE_{jm} \cdot r_m = 0. \quad (12b)$$

En substituant le vecteur  $r_m$  de (12b) dans l'équation (12a), nous avons un système d'équations aux valeurs propres :

$$\left( \frac{\omega_r H}{2} \right)^2 \cdot \delta_{jm} \cdot p_m = - [MM_{jm} - NN_{jm} \cdot EE_{jm}^{-1} \cdot DD_{jm}]^{-1} \cdot [AA_{jm} - BB_{jm} \times EE_{jm}^{-1} \cdot DD_{jm}] \cdot p_m. \quad (13)$$

$\delta_{jm}$  est un symbole de Kronecker. Les valeurs propres  $(\omega_r H)$  donnent les fréquences de résonance et les vecteurs propres  $p_m$  permettant de tracer les profils des champs tels que le déplacement mécanique, le potentiel électrique, la contrainte mécanique, ... dans le résonateur BAW.

De même, en supprimant le courant électrique  $I_0$ , l'admittance électrique (11) est zéro. Nous pouvons trouver ainsi le système d'équations aux valeurs propres suivant :

$$\left(\frac{\omega_p H}{2}\right)^2 \cdot \delta_{jm} \cdot p_m = -[MM_{jm} - NN_{jm} \cdot EE_{jm}^{-1} \cdot D_{jm} + HH_{jm}]^{-1} \cdot [AA_{jm} - BB_{jm} \cdot EE_{jm}^{-1} \cdot D_{jm} + GG_{jm}] \cdot p_m. \quad (14)$$

Les matrices  $HH_{jm}$  et  $GG_{jm}$  sont données dans l'annexe. La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir des valeurs propres et des vecteurs propres.  $(\omega_p H)$  donne accès aux fréquences d'antirésonance et les vecteurs  $p_m$  permettent de trouver les profils des champs dans le résonateur considéré.

#### 6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche mathématique de la méthode polynomiale de Legendre qui est basée sur les développements en série de polynômes des champs tels que le déplacement mécanique et le potentiel électrique. Grâce à cette approche, nous avons pu déterminer analytiquement, à travers l'analyse harmonique, l'admittance électrique d'entrée d'un résonateur BAW en tenant compte des pertes mécaniques et des taux de métallisations des électrodes et établir les équations aux valeurs propres, avec l'analyse modale, permettant de calculer les fréquences de résonance et d'antirésonance et de tracer les profils des champs dans ce même dispositif.

Pour montrer l'aptitude et la potentialité de l'approche polynomiale faite, dans le prochain chapitre, nous allons, en premier lieu, confronter les résultats obtenus avec ce modèle, en précisant les erreurs relatives aux calculs de l'admittance électrique et les fréquences propres du résonateur BAW avec électrodes minces et épaisses, avec ceux de la méthode analytique unidimensionnelle que nous utilisons comme le modèle de référence. En dernier lieu, nous allons exploiter cette méthode en calculant les différents paramètres caractéristiques du résonateur BAW en considérant les influences de la métallisation.

**CHAPITRE III.**

**VALIDATION ET EXPLOITATION DE  
LA METHODE POLYNOMIALE**

---

## CHAPITRE III.

### VALIDATION ET EXPLOITATION DE LA METHODE POLYNOMIALE

---

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode polynomiale de Legendre est définie par des développements en série infinie des polynômes du déplacement mécanique et du potentiel électrique. Dans la pratique, la sommation infinie sur ces développements est irréalisable. Par conséquent, elle sera tronquée à un certain rang  $\mathcal{M}$  que nous allons appeler ordre de troncature où la variation des résultats obtenus pour les termes d'ordre supérieur devient négligeable. Ceci génère au niveau des résultats  $(\mathcal{M} + 1)$  solutions et parmi ces  $(\mathcal{M} + 1)$  solutions, nous ne retiendrons que celles où la convergence est atteinte.

#### 1. Convergence et validation du modèle :

Dans ce paragraphe, nous allons voir, en premier lieu, la convergence de la méthode en fonction de l'ordre de troncature  $\mathcal{M}$ . Ce travail nous paraît utile car il permet d'optimiser le temps de calcul et en obtenant une précision souhaitable. Pour valider notre modèle, nous allons confronter nos résultats avec ceux de la méthode de référence (méthode analytique unidimensionnelle) sur les deux configurations extrêmes suivantes : (i) résonateur BAW à électrodes minces ; (ii) résonateur BAW à électrodes épaisses.

##### a. Donnée des simulations :

Dans les industries, trois matériaux sont choisis comme étant une lame piézoélectrique à la fabrication des résonateurs BAW : AlN, PZT, ZnO <sup>[15]</sup>. Ces trois matériaux sont appréciés pour leur couplage électromécanique et leurs propriétés piézoélectriques qui sont relativement importants aux autres matériaux piézoélectriques non céramiques. Dans ce mémoire, nous choisissons ce dernier. Nous choisissons aussi l'Aluminium comme étant les électrodes métalliques du dispositif pour sa résistance remarquable à l'oxydation et sa faible densité volumique. Les données de simulation utilisées sont regroupées dans le tableau suivant :

Tableau 1. Données de simulation utilisées.

Paramètres physiques	ZnO	Al
Rigidité élastique $c$ (en $10^{10}$ N. m <sup>-2</sup> )	21,09	10,70
Viscosité élastique $\eta$ (en $10^{-3}$ Pa. s)	11,96	-
Constante piézoélectrique $e$ (en C. m <sup>-2</sup> )	1,140	-
Permittivité $\epsilon$ (en $10^{-10}$ F. m <sup>-1</sup> )	0,783	-
Masse volumique $\rho$ (en $10^3$ kg. m <sup>-3</sup> )	2,700	5,676
Ordre de troncature $\mathcal{M}$	11 ou 22	

##### b. Convergence de la méthode polynomiale :

Le [tableau 2](#) présente la variation de nombre de modes parfaitement restitués, avec une précision largement inférieure à  $10^{-5}$  %, et le temps de simulation en fonction de l'ordre

de troncature  $\mathcal{M}$ . Il montre que plus nous voulons beaucoup de modes plus le temps de simulation est énorme.

**Tableau 2.** Variation des nombres de modes restitués en fonction de l'ordre de troncature  $\mathcal{M}$ .

Ordre de troncature $\mathcal{M}$	5	8	10	15	20	22	40	60
Nombre de modes restitués	1	2	3	5	8	10	13	45
Temps de calcul (en s)	0,30	0,39	0,43	0,68	1,62	2,11	22,20	135,40

Dans le cas pratique, les ingénieurs travaillent très souvent sur les trois premiers modes. Le tableau indique bien qu'avec une précision très petite de l'ordre  $10^{-6}$  %, nous pouvons choisir l'ordre de troncature  $\mathcal{M}$  supérieur ou égal à 10. Or du point de vu temps de calcul, il ne vaut pas la peine de choisir un ordre de troncature élevé c'est-à-dire  $\mathcal{M}$  supérieur à 10 car la convergence est atteinte déjà en  $\mathcal{M}$  égal à 10.

**c.** Validation de la méthode polynomiale :

Pour valider notre méthode, nous l'appliquons au résonateur BAW *Al/ZnO/Al*. Pour illustrer la portée de l'anticipation des ruptures d'impédances dans la méthode, les résultats obtenus sont confrontés avec la méthode analytique unidimensionnelle exposée au premier chapitre. En effet, les modes sont calculés pour deux configurations :

- Résonateur à électrodes minces ( $\tau_1 = \tau_2 = 0\%$ ) ;
- Résonateur à électrodes épaisses ( $\tau_1 = \tau_2 = 100\%$ ).

Pour chaque cas, nous présentons la précision relative sur le calcul de l'admittance électrique, des fréquences de résonance et d'antirésonance définies respectivement :

$$\Delta Y(\%) = 100. \frac{|Y_{an}(\omega) - Y_{pol}(\omega)|}{Y_{an}(\omega)}, \quad (12a)$$

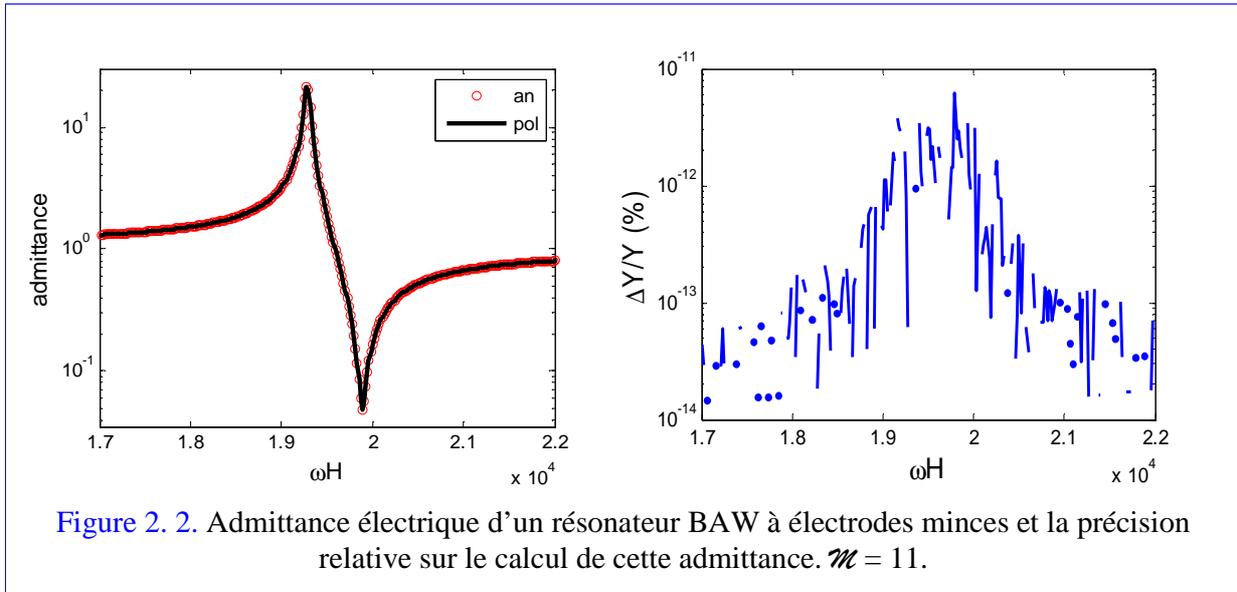
$$\varepsilon_r(\%) = 100. \frac{|(\omega_r H)_{an} - (\omega_r H)_{pol}|}{(\omega_r H)_{an}}, \quad (12b)$$

$$\varepsilon_p(\%) = 100. \frac{|(\omega_p H)_{an} - (\omega_p H)_{pol}|}{(\omega_p H)_{an}}, \quad (12c)$$

où les indices inférieures an et pol représentent respectivement les méthodes analytique unidimensionnelle et polynomiale.

- Résonateur à électrodes minces :
  - Analyse harmonique :

Les courbes de la [figure 2. 2](#) montrent les admittances électriques d'un résonateur BAW à électrodes minces ( $\tau_{ei} = \tau_{es} = 0\%$ ) obtenues avec la méthode analytique que nous avons pris comme modèle de référence et avec l'approche polynomiale et la précision relatives de notre modèle sur le calcul de cette admittance.



L'allure des courbes de la figure à gauche s'accordent parfaitement sur toute gamme de pulsations de présentation. Pour apprécier cette concordance, la courbe de la figure à droite dévoile que la précision relative est moins de  $10^{-11}\%$ . C'est un avantage de la méthode polynomiale. Autour des pulsations de résonance et d'antirésonance, la précision est grande par rapport aux autres mais, en tout cas, elle reste très faible du point de vue valeurs.

- Analyse modale :

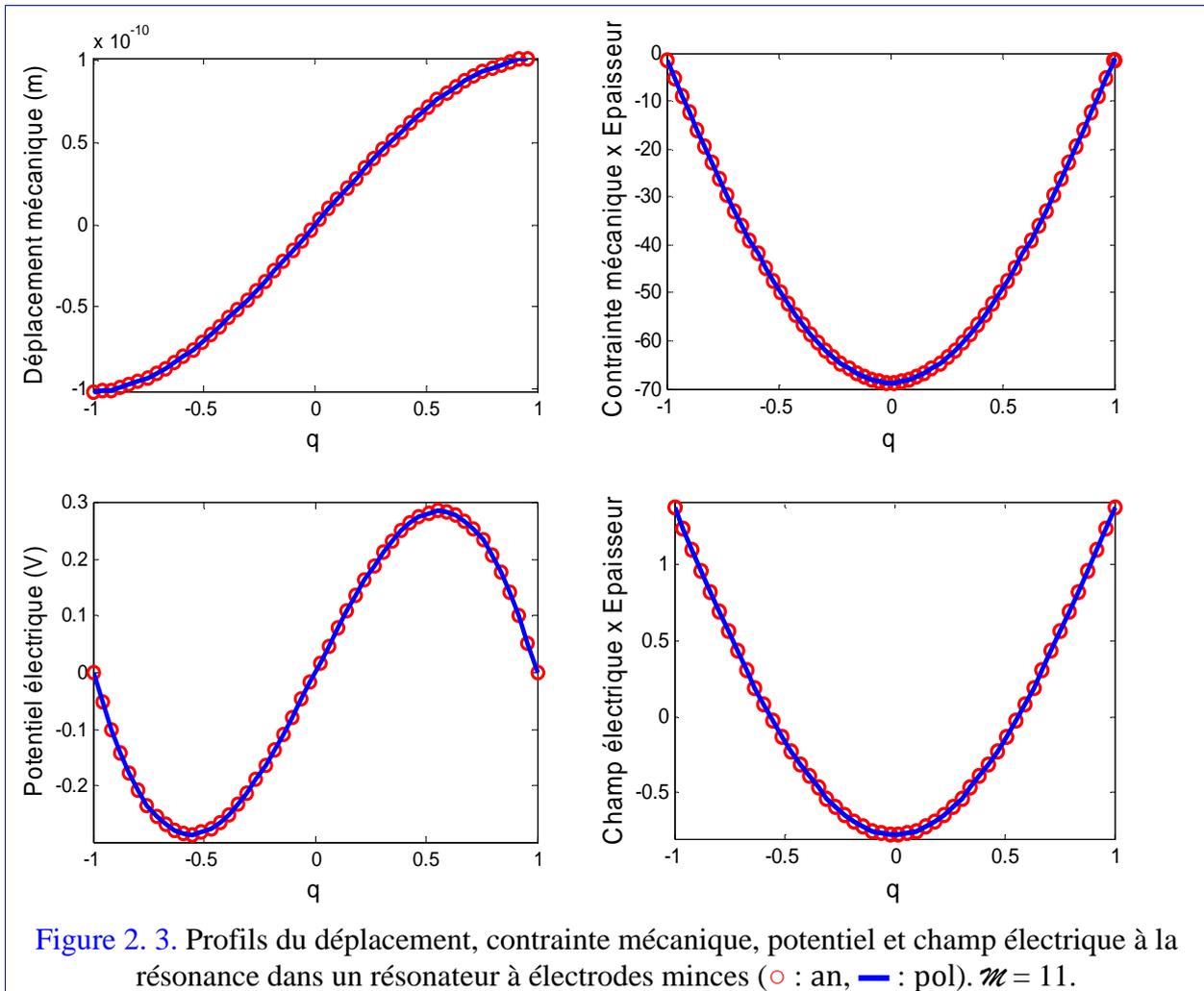
En appliquant la méthode polynomiale au résonateur BAW à électrodes minces, nous trouvons les résultats de [tableau 3](#). Ce tableau expose les pulsations de résonance et d'antirésonance de ce même dispositif pour les dix premiers modes. A première vue, nous remarquons sur les pulsations d'antirésonance l'existence des modes multiples entiers.

**Tableau 3.** Fréquences propres d'un résonateur BAW à électrodes minces.  $\mathcal{M} = 22$ .

Modes	$\omega_r H$	$\omega_p H$	$\varepsilon_r$ (%)	$\varepsilon_p$ (%)
1	19 283,08	19 889,19	0,00	0,00
2	39 778,39	39 778,39	0,00	0,00
3	59 470,92	59 667,58	0,00	0,00
4	79 556,78	79 556,78	0,00	0,00
5	99 328,22	99 445,97	0,00	0,00
6	119 335,16	119 335,16	0,00	0,00
7	139 140,30	139 224,36	0,00	0,00
8	159 113,55	159 113,55	0,00	0,00
9	178 937,38	179 002,76	0,00	0,00
10	198 891,79	198 891,79	0,00	0,00

En outre, pour les modes paires, les pulsations de résonance et d'antirésonance sont identiques. Alors, ces modes ne sont pas électriquement excités. Autrement dit, ce sont des modes non piézoactifs. En faisant une analyse simplifiée sur les précisions relatives sur les pulsations propres, toutes les valeurs sont égales à 0,00 %. Cela signifie que les résultats obtenus avec la méthode polynomiale se correspondent parfaitement avec ceux de la méthode de référence. Notre modèle restitue convenablement les pulsations propres d'un résonateur BAW à électrodes minces.

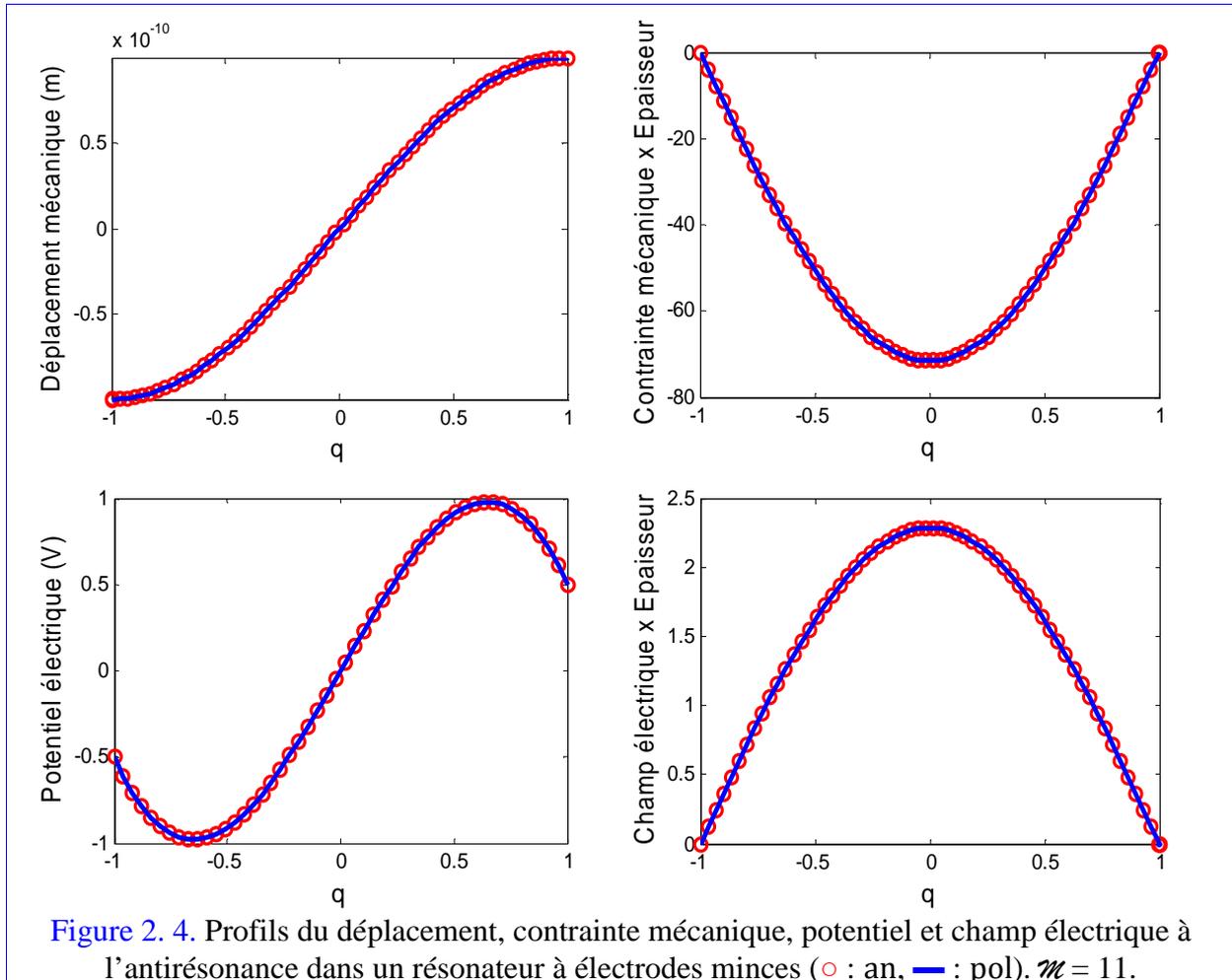
La figure ci-dessous montre les profils du déplacement mécanique, du potentiel électrique, de la contrainte mécanique et du champ électrique à l'intérieur d'un résonateur BAW avec des taux de métallisation 0% à la première résonance.



Les profils des champs obtenus avec la méthode polynomiale de Legendre et avec la méthode analytique se coïncident nettement dans tous les points du résonateur. Sur les profils du potentiel électrique, nous voyons bien que, sur les surfaces extrêmes, ce potentiel électrique est égal à zéro. Ce qui est normal car en absence de la source de tension sinusoïdale  $V_0 = 0$ , l'expression du potentiel électrique est prévue pour être nul sur chaque surface de la lame piézoélectrique. Les profils de la contrainte mécanique montrent que la méthode satisfait

l'annulation de la contrainte sur les surfaces mécaniquement libres (ici  $q = q_1$  et  $q = q_2$ ). Les conditions aux limites sont vérifiées.

A la première antirésonance, les courbes de la [figure 2. 4](#) indiquent les profils des champs tels que le déplacement mécanique, le potentiel électrique, la contrainte mécanique et le champ électrique dans un résonateur BAW à électrodes minces.



La confrontation des résultats entre la méthode polynomiale et la méthode de référence indique une concordance impeccable. Par rapport aux profils du potentiel électrique à la résonance, les profils du potentiel électrique à l'antirésonance montrent que ce potentiel n'est pas nul. C'est exact car à cette pulsation, le dispositif est un résonateur en circuit ouvert, mais pas un résonateur en court-circuit, où la valeur du potentiel est finie non nulle. Sur les profils de la contrainte mécanique, les conditions aux limites sont encore vérifiées.

La [figure 2. 2](#) valide bien notre méthode pour une analyse harmonique d'un résonateur BAW à électrodes minces. Le [tableau 3](#) et les courbes des [figures 2. 3](#) et [2. 4](#) valident eux aussi ce modèle pour une analyse modale du résonateur considéré.

- Résonateur à électrodes épaisses :

Nous allons maintenant étudier un résonateur BAW avec des taux de métallisation 100%. Pour commencer, nous allons voir tout d'abord l'analyse harmonique où nous exposons l'admittance électrique du résonateur. Dans ce même paragraphe, nous présentons la précision relative sur le calcul de cette admittance. Ensuite, nous passons à l'analyse modale. Dans ce nouveau paragraphe, nous découvrirons les pulsations de résonance et d'antirésonance suivies des précisions relatives et les profils des champs dans ce dispositif à la première résonance et à la première d'antirésonance.

- Analyse harmonique :

Dans la figure suivante, nous illustrons les admittances électriques d'entrée d'un résonateur BAW à électrodes épaisses trouvées avec la méthode polynomiale et la méthode analytique et la précision obtenue après une confrontation des résultats.

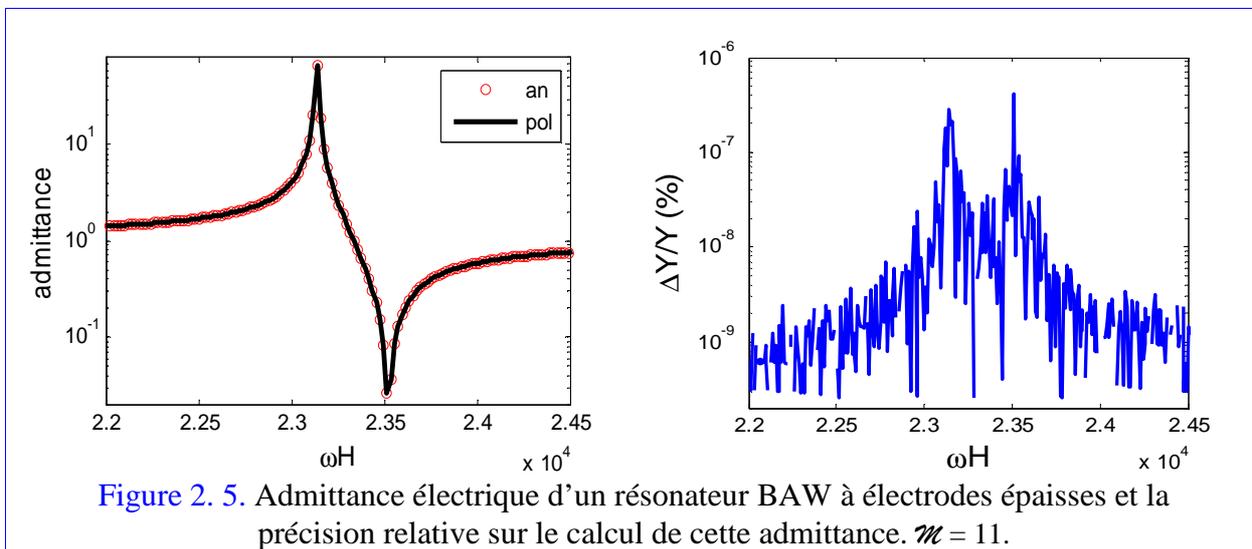


Figure 2.5. Admittance électrique d'un résonateur BAW à électrodes épaisses et la précision relative sur le calcul de cette admittance.  $\mathcal{N} = 11$ .

Les courbes gauches de la figure sont les admittances électriques d'entrée dont la courbe en (—) est le résultat du modèle de référence et celle en (o) obtenue avec notre modèle. Nous voyons bien qu'il y a un accord parfait entre ces deux courbes. Au niveau de la précision (courbe à droite), cet accolement est favorablement estimé. Aux alentours des pulsations de résonance et d'antirésonance, la précision est assez grande par rapport aux autres pulsations. Ce qui montre la difficulté de notre méthode pour la restitution des pulsations de résonance et d'antirésonance. Malgré cette difficulté, les résultats restent encore meilleurs car la précision maximale est moins de  $10^{-6}$  %. Alors, l'approche polynomiale valide l'analyse harmonique d'un résonateur BAW à électrodes métalliques épaisses.

- Analyse modale :

Puis que notre méthode valide l'analyse harmonique d'un résonateur BAW à électrodes épaisses, nous allons le tester à l'analyse modale.

Le [tableau 4](#) présente les pulsations propres d'un résonateur BAW dont le taux de métallisation des électrodes inférieure et supérieure est de 100 %. Comme le cas d'un

résonateur à électrodes minces, nous remarquons aussi que les pulsations de résonance et d'antirésonance des modes paires sont identiques. Ce sont des modes non piézoactifs.

**Tableau 4.** Fréquences propres d'un résonateur BAW à électrodes épaisses.  $\mathcal{M} = 22$ .

Modes	$\omega_r H$	$\omega_p H$	$\varepsilon_r$ (%)	$\varepsilon_p$ (%)
1	23 138,73	23 524,40	0,00	0,00
2	35 888,20	35 888,20	0,00	0,00
3	58 582,97	59 503,45	0,00	0,00
4	82 938,17	82 938,17	0,00	0,00
5	95 225,34	95 317,95	0,00	0,00
6	119 006,72	119 006,72	0,00	0,00
7	142 346,31	142 405,94	0,00	0,00
8	154 707,92	154 707,92	0,00	0,00
9	178 207,71	178 510,39	0,00	0,00
10	201 778,14	201 778,14	0,00	0,00

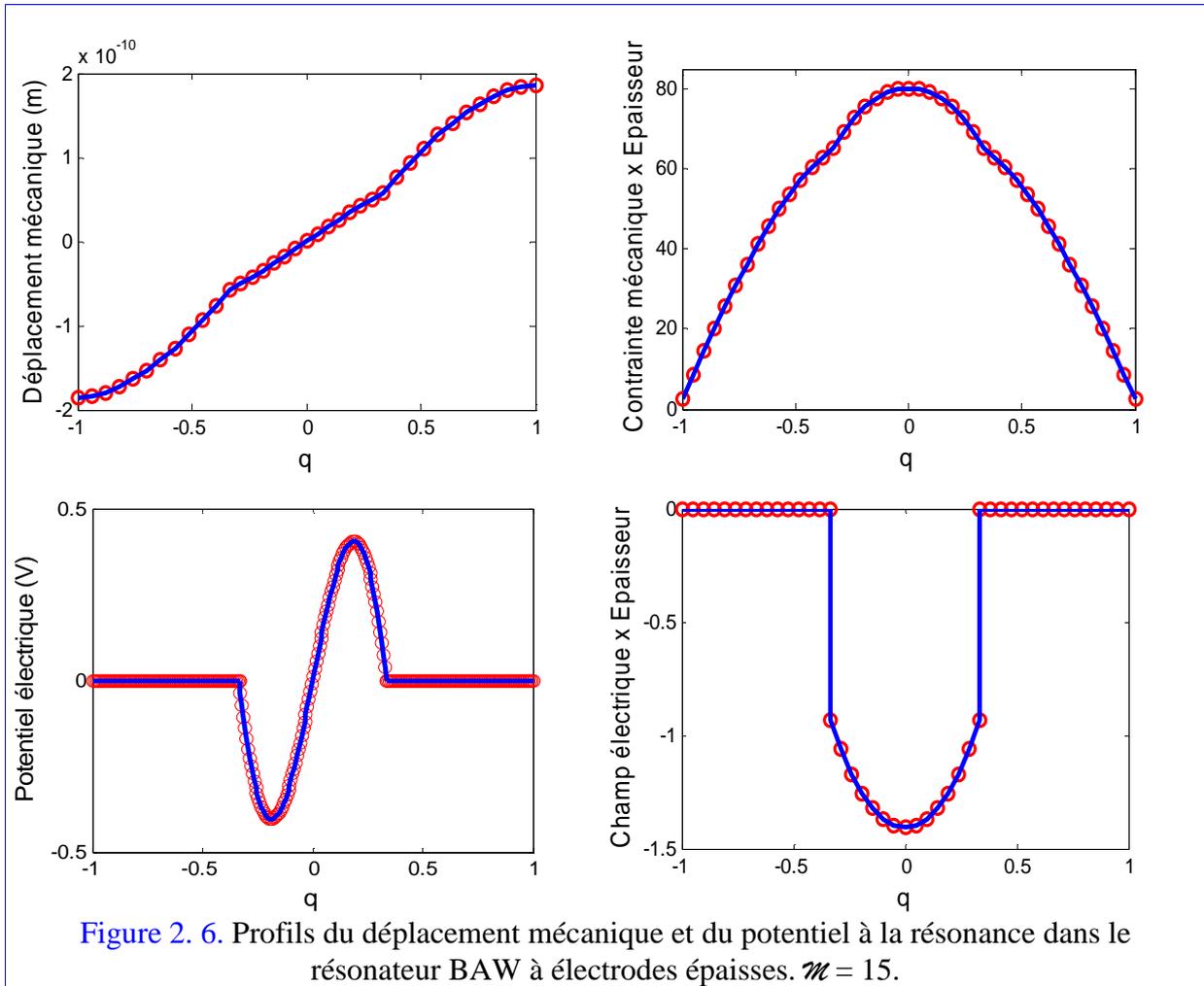
Dans ce tableau, nous découvrons que les précisions relatives sur le calcul de ces pulsations sont égales à 0,00 %. Ce qui implique l'exactitude de la méthode polynomiale à la restauration des pulsations propres d'un résonateur à ondes de volume à électrodes épaisses.

Nous avons mentionné dans le chapitre précédent que la méthode polynomiale de Legendre, en supprimant les sources d'excitation, conduit toujours à la résolution de système d'équations aux valeurs propres. Elle permet, en même temps, de trouver les fréquences propres et de tracer les profils des champs dans le dispositif considéré. Ici, nous étudions un résonateur BAW à électrodes épaisses.

Dans la [figure 2. 6](#), nous montrons les profils du déplacement mécanique, du potentiel électrique, de la contrainte mécanique et du champ électrique dans le résonateur BAW considéré. Les courbes (en : —) sont acquises avec la méthode de référence et celles (en : o) avec la méthode polynomiale. Toutes les courbes présentent des discontinuités des pentes aux interfaces électrode – lame piézoélectrique. En plus, dans tous les points de la structure, les courbes (en : —) et (en : o) se coïncident. Ce qui indique que les profils obtenus avec ces deux méthodes sont similaires. Alors, le modèle proposé valide lui aussi les profils des champs à la première résonance.

Sur les profils de la contrainte mécanique, les conditions aux surfaces mécaniquement libres sont satisfaites. Sur les courbes du potentiel électrique, en supprimant la source de tension  $V_0$ , l'annulation du potentiel électrique aux électrodes métalliques est nettement vérifiée. Le résonateur est donc en court-circuit. Ce qui est normal. Sur les profils du champ électrique, nous remarquons aussi l'annulation du champ électrique dans les électrodes métalliques. Comme étant les électrodes sont des matériaux parfaitement conducteurs, alors,

cette annulation est normale. Comme la lame piézoélectrique est un matériau parfaitement isolant, seul dans cette couche, le champ électrique est non nul.



Dans le [tableau 4](#), la précision relative sur le calcul des pulsations d'antirésonance est très bonne. Nous allons voir les profils des champs à la première antirésonance pour orner cette meilleure précision relative.

La [figure 2.7](#) présente les profils du déplacement mécanique, du potentiel électrique, de la contrainte mécanique et du champ électrique à la première antirésonance. Comme le cas des profils de champ à la résonance, ici, nous voyons clairement la continuité des champs et la discontinuité des pentes de ces champs aux interfaces. Les résultats obtenus avec les deux méthodes se correspondent dans le résonateur. Alors, l'approche proposée sur le développement des champs dans chaque couche est correcte pour le cas de la structure étudiée. La méthode polynomiale de Legendre approuve donc l'étude des résonateur BAW avec taux de métallisation 100 %.

Sur les profils de la contrainte mécanique, la méthode satisfait l'annulation des contraintes sur les surfaces mécaniquement libre comme indiquée lors de l'établissement du modèle. Sur les profils du potentiel électrique, le potentiel électrique est constant non nul dans les électrodes métalliques. A l'antirésonance, seul le courant électrique traversant la structure

est nul. Comme nous avons ici la première antirésonance, ce mode est piézoactif c'est-à-dire il est excité électriquement par la source de tension. Pour qu'il y ait un sens, le potentiel électrique est forcément non nul sinon l'impédance électrique et l'admittance électrique du résonateur sont égales à zéros. Sur le champ électrique, comme le potentiel électrique est constant dans les électrodes métalliques, l'annulation du champ électrique dans ces couches est vérifiée elle aussi.

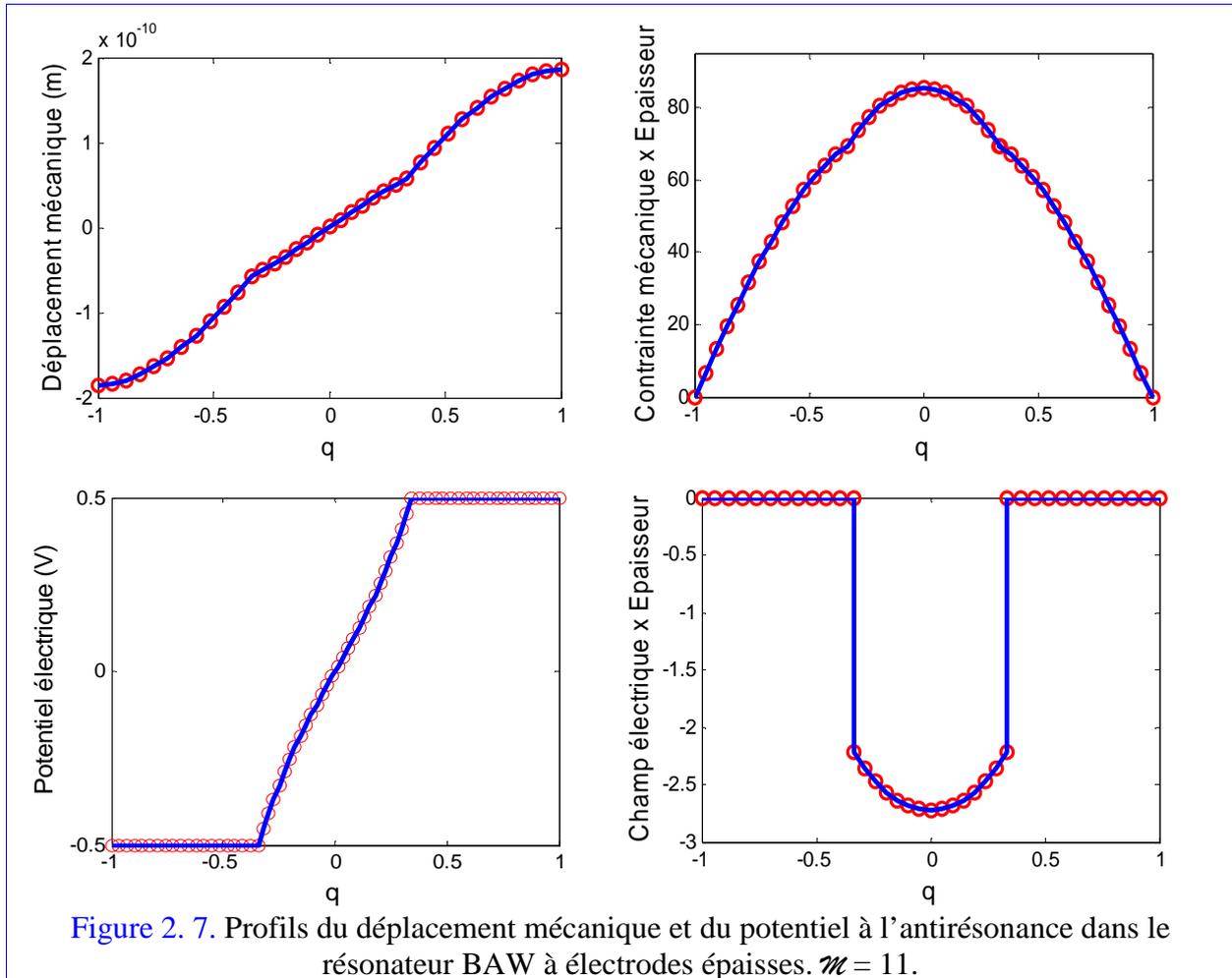


Figure 2. 7. Profils du déplacement mécanique et du potentiel à l'antirésonance dans le résonateur BAW à électrodes épaisses.  $\mathcal{N} = 11$ .

Nous avons présenté ici les résultats de simulation numérique avec la méthode analytique et la méthode polynomiale de Legendre. Les précisions relatives sur les calculs des admittances électriques, des pulsations propres et les concordances des profils des champs des résonateurs à ondes de volume sur les cas extrêmes de la métallisation ( $\tau_{ei} = \tau_{es} = 0\%$  et  $\tau_{ei} = \tau_{es} = 100\%$ ) indiquent que la méthode polynomiale est capable d'étudier les influences de la métallisation sur la performance des résonateurs BAW dans le cas unidimensionnel.

## 2. Exploitation de la méthode polynomiale :

Dans le cas pratique, la conception d'un résonateur BAW avec un taux de métallisation 0 % est impossible. Pourtant, nous pouvons en profiter quand même pour optimiser le résonateur BAW.

La lame piézoélectrique est un matériau capable de convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa. L'efficacité de cette conversion est définie par le paramètre appelé le coefficient de couplage électromécanique, noté  $k_t^2$ , donné par l'expression :

$$k_t^2 (\%) = 200 \cdot \frac{\omega_a H - \omega_r H}{\omega_a H}. \quad (13)$$

Dans ce paragraphe, nous allons voir la variation de cette métallisation sur le coefficient de couplage électromécanique du résonateur. Nous choisissons ce paramètre parce qu'il définit la largeur de la bande passante de ce résonateur.

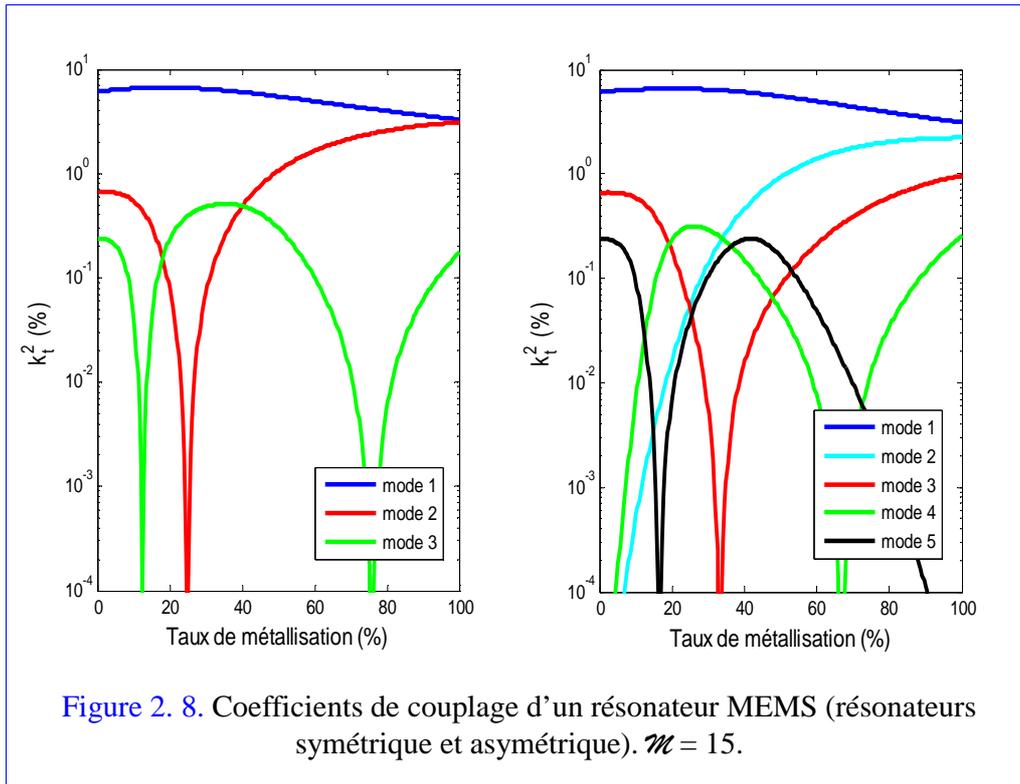
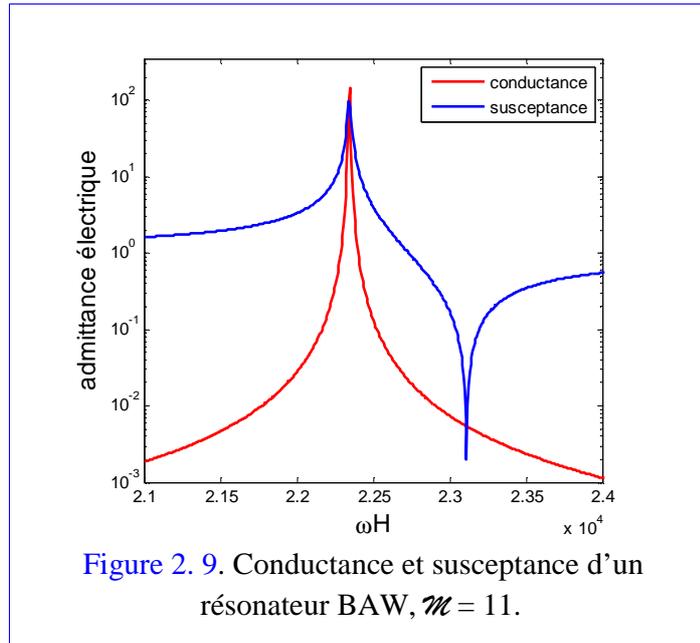


Figure 2. 8. Coefficients de couplage d'un résonateur MEMS (résonateurs symétrique et asymétrique).  $\mathcal{M} = 15$ .

La figure 2. 8 présente les coefficients de couplage électromécanique du résonateur à ondes de volume pour le cas symétrique ( $\tau_{ei} = \tau_{es}$ ) et le cas asymétrique ( $\tau_{ei} = \tau_{es}/2$ ). Sur le résonateur symétrique (figure à gauche), pour les modes pairs, les coefficients de couplage sont nuls. Ce sont des modes non piézoactifs. Ils ne sont pas excités électriquement par la source d'attaque. Sur le premier mode, le coefficient de couplage électromécanique est maximal pour un taux de métallisation de 20 %. Sur le résonateur asymétrique (figure à droite), les coefficients de couplage électromécanique sont différents de zéros. Cela signifie que tous les modes participent à l'échange d'énergie électromécanique. Ils sont donc tous piézoactifs. De même sur le premier mode, nous remarquons que le coefficient de couplage électromécanique est maximal pour le même taux de métallisation de 20 %.

La figure 2. 8 peut nous servir à choisir l'épaisseur relative d'électrode afin d'optimiser la performance du résonateur. Par rapport au résonateur asymétrique, le résonateur symétrique est plus sélectif car seuls les modes impaires se manifestent.



Pour terminer ce paragraphe, nous présentons, à titre d'illustration, la conductance et la susceptance électrique d'un résonateur à ondes de volume avec taux de métallisation  $\tau_{ei} = \tau_{es} = 20\%$  avec des pertes mécaniques. Le modèle proposé est apte à l'étude des résonateurs avec des paramètres physiques complexes représentatifs des phénomènes dissipatifs.

### 3. Conclusion :

Nous avons vu que la méthode polynomiale converge selon l'ordre de troncature choisi. Le temps de calcul dépend la valeur de cet ordre de troncature et la capacité du ordinateur. Nous avons exploité cette convergence pour valider la méthode en explicitant les paramètres caractéristiques du résonateur BAW comme l'admittance électrique, les pulsations propres et les profils de champs. Ces résultats ont été confrontés avec ceux de la méthode analytique prise comme référence en exposant la précision relative. Nous pouvons dire que la méthode polynomiale permet de modéliser les résonateurs à onde de volume à électrodes minces et épaisses. Cette méthode a bien vérifié toutes les conditions aux limites et de continuité sur les grandeurs physiques caractérisant le dispositif comme la nullité de contrainte mécanique aux surfaces mécaniquement libre et la continuité de chaque grandeur aux interfaces de la structure constitutive. Les discontinuités de pentes ont été bien restituées. Ces divers résultats ont permis d'établir les influences de métallisation sur la performance d'un résonateur à onde de volume. Ce phénomène peut être profité pour réaliser des filtres.

---

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

---

Nous avons présenté un modèle unidimensionnel des résonateurs BAW avec des taux de métallisation quelconque basé sur la méthode polynomiale de Legendre. Nous avons pu établir un outil de simulation capable d'étudier parfaitement ces résonateurs. L'objectif fixé dans ce mémoire est alors atteint.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les notions essentielles à la modélisation des résonateurs BAW au sujet du phénomène piézoélectrique, des ondes acoustiques, des équations mathématiques fondamentales qui traduisent ce phénomène et les concepts généraux sur les MEMS tels que les résonateurs SAW et BAW. Nous avons exposé aussi les différents principes des modèles unidimensionnels utilisés comme la méthode analytique et la méthode de matrice de transfert. Ces modèles sont capables d'étudier, d'une manière simplifiée, des structures multicouches. Cependant, les problèmes s'apparaissent dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels car pour la méthode analytique, il est impossible de donner les expressions des champs et pour la méthode de matrice de transfert, l'équation différentielle du vecteur d'état est difficile à résoudre.

Vue de ces limitations, dans le deuxième chapitre, nous avons fait appel à la méthode polynomiale de Legendre. Cette approche est basée sur des développements polynomiaux différents des champs dans chaque couche constitutive pour anticiper la discontinuité des pentes aux interfaces. Dues à l'incorporation des conditions aux limites et de continuité, à la description des grandeurs et paramètres physiques et la résolution avec des systèmes d'équations linéaire et d'équations aux valeurs propres, nous avons pu facilement retrouver les expressions analytiques de l'admittance électrique des résonateurs BAW à électrodes minces et épaisses à travers l'analyse harmonique, les fréquences propres et les profils des champs dans ces dispositifs à travers l'analyse modale.

Dans le dernier chapitre, nous avons regroupé, en considérant les pertes mécaniques dans la lame piézoélectrique, les résultats de simulations tels que l'admittance électrique, les fréquences propres et les profils de champs dans d'un résonateur BAW à électrodes minces et épaisses. Dans un premier temps, nous avons confronté notre modèle avec la méthode analytique prise comme modèle de référence. Les précisions relatives obtenues montrent que le modèle est valable pour étudier les résonateurs BAW avec de taux de métallisation quelconque. Dans la pratique, les résonateurs à électrodes minces est irréalisables. Dans le dernier temps, nous avons tracé le coefficient de couplage électromécanique du résonateur en fonction des taux de métallisation. Cette courbe montre un taux de métallisation optimal à 25 % ce qui est exploitable dans les industries.

Pour tirer beaucoup plus avantages avec ce modèle, le travail devra être étendu à l'étude bidimensionnelle afin d'étudier, en même temps, les influences de la métallisation des électrodes métalliques et de la dimension latérale du résonateur sur la performance unidimensionnelle de ce dispositif.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

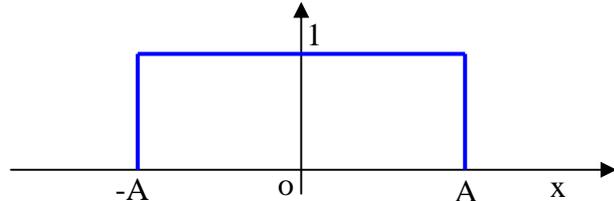
- [1] P. Curie et J. Curie, “Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémihédres à faces inclinées”, dans *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, vol. XCIII, séance du 26 décembre 1881, p. 1137.
- [2] E. Defay, Ingénieur ENSMM, “Elaboration et caractérisation de couches minces piézoélectriques de  $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$  sur le silicium pour applications aux microsystèmes”, 09/11/1999, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Vol 199.
- [3] D. Royer, E. Dieulesaint, “Ondes élastiques dans les solides”, Propagation libre et guidée, Tome 1. Masson, Paris 1997.
- [4] D. Royer, E. Dieulesaint, “Ondes élastiques dans les solides”, Application au traitement du signal, Masson, Paris 1999.
- [5] E. L. Adler, “Bulk and Surface Acoustic Waves in anisotropic Solids”, *International Journal of High Speed Electronics and Systems*, vol. 10, no. 3, pp. 653 – 684, 2000.
- [6] A. Reinhardt, T. Pastureaud, S. Ballandras, V. Laude, “Scattering Matrix method for modeling acoustic waves in piezoelectric, fluid, and metallic multilayers”, *J. Appl. Phys.* 96, (2003).
- [7] A. A. Maradidudin and K.R. Subbaswamy, “Edge localized vibration modes on a rectangular ridge”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 48, n°.8, 1977.
- [8] Y. Kim and W. D. Hunt, “Acoustic Fields and Velocities for surface-Acoustic-Wave Propagation in Multilayered Structures: An Extension of the Laguerre Polynomial Approach”, *J. App. Phys*, Vol.68, 1990.
- [9] J. E. Lefebvre, “Méthode Polynomiale Appliqué à l’Etude des Modes Acoustiques Propres de Structure Multicouches”, Habilitation à diriger des recherches, 8 Décembre 2000.
- [10] A. J. Moulson, J. M. Herbert, “Electroceramics : Materials properties and applications ”, Chapman and Hall, New York, 1990.
- [11] L. Elmaimouni, “Contribution à la Modélisation de la Propagation des Ondes Acoustiques dans des Structures Anisotropes Piézoélectriques”, Thèse de Doctorat, 2005.
- [12] E. K. Sittig, “Design and Technology of Piezoelectric Transducers for Frequencies above 100MHz”, *Physical Acoustics (Academic, New York)*, Vol.9, pp.221-275, 1972.

- [13] A. Raheison, “Modélisation des résonateurs RF MEMS par l’approche polynomiale”, 10 décembre 2009, Université de Valenciennes & Hainaut Cambrésis. Thèse doctoral, N°09/33. Vol 101.
- [14] T. Makkonen, J. Ellä and M. M. Salomaa, “Finite Element Simulation of Thin-Film Composite BAW resonators”, IEEE Transactions on Ultrasonics and Frequency Control, vol. 48, No. 5, September 2001.
- [15] OXYDE DE ZINC, fiche de sécurité du “Programme International sur la Sécurité des Substances Chimiques”, consultée le 9 mai 2009.

1. Fonction porte :

La **fonction d'Heaviside**, généralement représentée par  $\Pi$ , est une fonction mathématique par laquelle un nombre a une image nulle, sauf s'il est compris entre  $-A$  et  $A$  auquel cas son image vaut 1. Elle est alors définie sur l'espace des réels à valeur dans  $\{0,1\}$  comme suit :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -A \leq x \leq A \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



La dérivée de cette fonction au sens des distributions donne la **distribution de Dirac**.

2. Distribution de Dirac :

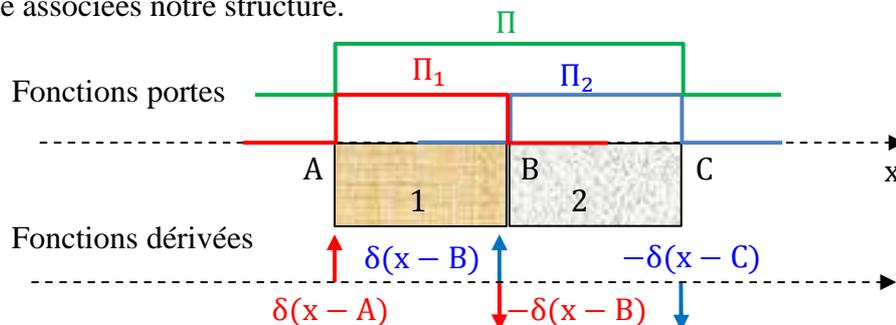
La **distribution de Dirac** est un exemple intéressant de distribution car elle n'est pas une fonction, mais peut être représentée de façon informelle par une fonction dégénérée qui serait nulle sur tout son domaine de définition sauf en  $A$  et dont l'intégrale vaudrait 1. Un tel objet mathématique est utile en physique, surtout dans notre travail, mais aucune fonction ordinaire n'a ces propriétés.

La distribution de Dirac, appelée aussi impulsion et notée  $\delta(t)$ , est la modélisation mathématique d'un signal d'amplitude infinie et vérifiant la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - A) dx = f(A)$$

3. Incorporation des conditions aux limites et de continuité :

Nous utilisons ces fonctions pour satisfaire toutes les conditions aux limites et de continuité associées notre structure.



Pour la contrainte mécanique, les fonctions  $\delta(x-A)$  et  $\delta(x-C)$  assurent sa nullité aux surfaces mécaniquement libres de la structure,  $\delta(x-B)$  s'occupe sa continuité à l'interface B.

1. Déplacement mécanique :

a. Dans lame piézoélectrique :

Le développement polynomiale est donné par :

$$u(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} Q_m p_m = Q_m p_m$$

(Convention d'Einstein)

b. Dans les deux électrodes :

L'équation de Newton peut s'écrire :

$$\Pi_n(x) \frac{\partial T_n}{\partial x} + T_n [\delta(x - H_{n-1}) - \delta(x - H_n)] = \Pi_n(x) \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (1)$$

L'indice n indique la grandeur (ou le paramètre) associé à la couche n.

Pour les changements de variables  $q = (2x - H)/H$  , on a:

$$\Pi_n(q) \frac{\partial T_n}{\partial q} + T_n \left[ \delta\left(q - \frac{2H_{n-1}}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_n}{H} + 1\right) \right] = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_n(q) \rho_n u_n(q) \quad (2)$$

Dans chaque couche :

$$n = 1, \Pi_1(q) \frac{\partial T_1}{\partial q} + T_1 \left[ \delta\left(q - \frac{2H_0}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_1}{H} + 1\right) \right] = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_1(q) \rho_1 u_1(q)$$

$$n = 2, \Pi_2(q) \frac{\partial T_2}{\partial q} + T_2 \left[ \delta\left(q - \frac{2H_1}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_2}{H} + 1\right) \right] = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_2(q) \rho_2 u_2(q)$$

$$n = 3, \Pi_3(q) \frac{\partial T_3}{\partial q} + T_3 \left[ \delta\left(q - \frac{2H_2}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_3}{H} + 1\right) \right] = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_3(q) \rho_3 u_3(q)$$

$$\text{Pour: } q = q_1^- \begin{cases} \delta\left(q - \frac{2H_0}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_1}{H} + 1\right) = 0 \\ \Pi_1(q) = 1 \text{ si } \frac{2H_0}{H} - 1 \leq q \leq \frac{2H_1}{H} - 1 \\ \left. \frac{\partial T_1}{\partial q} \right|_{q=q_1^-} = -H\omega^2 \cdot \Pi_1(q) \rho_1 u_1(q_1^-) \Leftrightarrow u_1(q_1^-) = -\frac{2}{H\omega^2 \rho_1} \left. \frac{\partial T_1}{\partial q} \right|_{q=q_1^-} \end{cases} \quad (3a)$$

$$\text{Pour: } q = q_1^+ \begin{cases} \delta\left(q - \frac{2H_1}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_2}{H} + 1\right) = 0 \\ \Pi_2(q) = 1 \text{ si } \frac{2H_1}{H} - 1 \leq q \leq \frac{2H_2}{H} - 1 \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_1^+} = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_2(q) \rho_2 u_2(q_1^+) \Leftrightarrow u_1(q_1^+) = -\frac{2}{H\omega^2 \rho_2} \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_1^+} \end{cases} \quad (3b)$$

$$\text{Pour: } q = q_2^- \begin{cases} \delta\left(q - \frac{2H_1}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_2}{H} + 1\right) = 0 \\ \Pi_2(q) = 1 \text{ si } \frac{2H_1}{H} - 1 \leq q \leq \frac{2H_2}{H} - 1 \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_2^-} = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_2(q) \rho_2 u_2(q_2^-) \Leftrightarrow u_1(q_2^-) = -\frac{2}{H\omega^2 \rho_2} \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_2^-} \end{cases} \quad (3c)$$

$$\text{Pour: } q = q_2^+ \begin{cases} \delta\left(q - \frac{2H_2}{H} + 1\right) - \delta\left(q - \frac{2H_3}{H} + 1\right) = 0 \\ \Pi_2(q) = 1 \text{ si } \frac{2H_2}{H} - 1 \leq q \leq \frac{2H_3}{H} - 1 \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_2^+} = -\frac{H}{2} \omega^2 \cdot \Pi_3(q) \rho_3 u_3(q_2^+) \Leftrightarrow u_1(q_2^+) = -\frac{2}{H\omega^2 \rho_2} \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_2^+} \end{cases} \quad (3d)$$

En tenant compte la continuité de déplacement mécanique à chaque interface, nous trouvons :

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial q} \right|_{q=q_1^-} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_1^+} \quad (4a)$$

$$\left. \frac{\partial T_3}{\partial q} \right|_{q=q_2^+} = \frac{\rho_3}{\rho_2} \left. \frac{\partial T_2}{\partial q} \right|_{q=q_2^-} \quad (4b)$$

Dans l'intervalle  $[-1,1]$ , en choisissant que le déplacement mécanique et potentiel électrique sont deux variables indépendants, nous définissons une contrainte mécanique telle que :

$$T(q) = \frac{2}{H} \left( c_2 \frac{\partial u}{\partial q} - e_2 \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \quad (5)$$

Dans l'intervalle  $\left[ \frac{2H_1}{H} - 1, \frac{2H_2}{H} - 1 \right]$ , nous posons:

$$T_2(q) = T(q)$$

D'où :

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial q} \right|_{q=q_1^-} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left. \frac{\partial T}{\partial q} \right|_{q=q_1^+} \quad (6a)$$

$$\left. \frac{\partial T_3}{\partial q} \right|_{q=q_2^+} = \frac{\rho_3}{\rho_2} \left. \frac{\partial T}{\partial q} \right|_{q=q_2^-} \quad (6b)$$

De façon approchée, en tenant compte la continuité de contrainte mécanique à chaque interface, nous pouvons écrire, dans la couche n :

$$\frac{\partial T_n}{\partial q} = \frac{\rho_n}{\rho_2} \frac{\partial T}{\partial q} \quad (7)$$

avec  $n=1,3$ .

Nous faisons l'intégration de chaque terme de  $q_n$  à  $q$ , nous avons :

$$T_n(q) - T_n(q_n) = \frac{\rho_n}{\rho_2} (T(q) - T(q_n)) \quad (8)$$

A  $q = q_n$ ,  $T_n(q_n) = T(q_n)$ , nous trouvons:

$$T_n(q) = \frac{\rho_n}{\rho_2} T(q) + \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_2}\right) T(q_n) \quad (9)$$

$$\text{avec } q_1 = \frac{2H_1}{H} - 1 \text{ et } q_3 = \frac{2H_2}{H} - 1$$

En utilisant la loi de Hooke et en substituant les relations (9) et (5), nous obtenons :

$$\frac{\rho_n}{\rho_2} T(q) + \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_2}\right) T(q_n) = \frac{1}{H} c_n \frac{\partial u_n}{\partial q} \quad (10a)$$

$$\frac{\rho_n}{\rho_2} \frac{1}{H} \left( c_2 \frac{\partial u}{\partial q} + e_2 \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) + \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_2}\right) \frac{1}{H} \left( c_2 \left. \frac{\partial u}{\partial q} \right|_{q=q_n} + e_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|_{q=q_n} \right) = \frac{1}{H} c_n \frac{\partial u_n}{\partial q} \quad (10b)$$

En intégrant chaque terme de  $q_n$  à  $q$ , nous avons :

$$u_n(q) - u_n(q_n) = \frac{\rho_n c_2}{\rho_2 c_n} [u(q) - u(q_n)] + \frac{\rho_n e_2}{\rho_2 c_n} [\phi(q) - \phi(q_n)] + \frac{1}{c_n} \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_2}\right) \left[ c_2 \left. \frac{\partial u}{\partial q} \right|_{q=q_n} + e_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|_{q=q_n} \right] (q - q_n) \quad (11a)$$

A l'interface  $q = q_n$ ,  $u_n(q_n) = u(q_n)$  :

$$u_n(q) = \frac{\rho_n c_2}{\rho_2 c_n} [u(q) - u(q_n)] + u(q_n) + \frac{\rho_n e_2}{\rho_2 c_n} [\phi(q) - \phi(q_n)] + \frac{1}{c_n} \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_2}\right) \left[ c_2 \left. \frac{\partial u}{\partial q} \right|_{q=q_n} + e_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|_{q=q_n} \right] (q - q_n) \quad (11b)$$

## 2. Potentiel électrique :

### a. Dans les deux électrodes :

Les électrodes sont parfaitement conductrices. Le potentiel dans chaque électrode est constant :

$$\phi_1(q) = -\frac{V_0}{2} \quad (12b)$$

$$\phi_3(q) = +\frac{V_0}{2} \quad (12b)$$

### b. Dans la lame piézoélectrique :

D'après les conditions aux limites et de continuité :

$$\text{Pour } q = q_1, \phi(q) = -\frac{V_0}{2} \quad (13b)$$

$$\text{Pour } q = q_2, \phi(q) = +\frac{V_0}{2} \quad (13b)$$

Nous pouvons écrire alors le potentiel électrique dans la lame piézoélectrique de la forme suivante:

$$\phi(q) = V_0 f(q) + g(q) \Phi(q). \quad (14)$$

$f(q)$  et  $g(q)$  sont deux fonctions à déterminer selon les conditions aux limites et de continuité.

$$\phi(q_1) = -\frac{V_0}{2} \text{ si } f(q) = -\frac{1}{2} \text{ et } g(q) = 0,$$

$$\phi(q_2) = +\frac{V_0}{2} \text{ si } f(q) = +\frac{1}{2} \text{ et } g(q) = 0.$$

Les fonctions  $f(q)$  et  $g(q)$  qui peuvent vérifier ces conditions sont définies par :

$$f(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{2q - q_1 - q_2}{q_2 - q_1} \right)^3, \quad (15a)$$

$$g(q) = (q - q_1)(q - q_2). \quad (15b)$$

Pour introduire le développement polynomial, nous écrivons :  $\Phi(q) = Q_m(q)r_m$ .

D'où :

$$\phi(q) = \frac{V_0}{2(q_2 - q_1)^3} (2q - q_1 - q_2)^3 + (q - q_1)(q - q_2)Q_m(q)r_m \quad (16)$$

## 1. Polynômes de Legendre :

Les polynômes de Legendre sont des solutions de l'équation différentielle de Legendre définie, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \right] + m(m+1)P_m(x) = 0 \text{ avec } P_m(1) = 1 \quad (1)$$

D'où les solutions sont :

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 (x^2-1)^{m-k} (x+1)^k \quad (2a)$$

Sous une autre forme :

$$P_m(x) = \frac{1}{m! 2^m} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2-1)^m] \quad (2b)$$

$$\text{En particulier, } P_{2m}(0) = \frac{1}{2^{2m}} (-1)^m \binom{2m}{m}. \quad (2c)$$

Cette relation vérifie la formule de récurrence, pour tout entier  $n \neq 0$  :

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x). \quad (3)$$

Les Polynômes de Legendre suivent la parité de  $m$  d'après la propriété suivante :

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x). \quad (4)$$

Les polynômes orthogonaux les simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est  $[-1,1]$  :

$$\langle P_j, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_j(x) \cdot P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq m \\ \frac{2}{2m+1} & \text{pour } j = m \end{cases} \quad (5)$$

Ces polynômes peuvent être modifiés selon la géométrie du dispositif étudié :

$$\forall x \in [A, B], Q_m = \sqrt{\frac{2m+1}{B-A}} P_m \left( \frac{2x-A-B}{B-A} \right). \quad (6)$$

## 2. Calculs des intégrales :

$$AA_{jm} = c'_2 \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (J_{5_{jm}^{-1,q_1,0}} + J_{5_{jm}^{q_2,1,0}}) + \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( dQ_m^0(q_1) \cdot J4_{j_0}^{-1,q_1,0} + dQ_m^0(q_2) \cdot J4_{j_0}^{q_2,1,0} \right) + J5_{jm}^{q_1,q_2} \Big] \\
RR_{jm} &= \frac{2\eta}{H} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left( J5_{jm}^{-1,q_1,0} + J5_{jm}^{q_2,1,0} \right) + \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left( dQ_m^0(q_1) \cdot J4_{j_0}^{-1,q_1,0} + dQ_m^0(q_2) \cdot J4_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \right] \\
BB_{jm} &= e_2 \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left( \left( J5_{jm}^{-1,q_1,2} + J5_{jm}^{q_2,1,2} \right) - (q_1 + q_3) \cdot \left( J5_{jm}^{-1,q_1,1} - J5_{jm}^{q_2,1,1} \right) + q_1 q_3 \cdot \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left( J5_{jm}^{-1,q_1,0} - J5_{jm}^{q_2,1,0} \right) \right] + \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left( [dQ_m^2(q_1) - (q_1 + q_3)dQ_m^1(q_1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + q_1 q_3 dQ_n^0(q_1)] \cdot J4_{j_0}^{-1,q_1,0} + [dQ_m^2(q_2) - (q_1 + q_3)dQ_m^1(q_2) + q_1 q_3 dQ_n^0(q_2)] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times J4_{j_0}^{q_2,1,0} \right) + J5_{jm}^{q_1,q_2,2} - (q_1 + q_3) \cdot J5_{jm}^{q_1,q_2,1} + q_1 q_3 \cdot J5_{jm}^{q_1,q_2,0} \right] \\
CC_{j_0} &= \sqrt{2} \frac{e_2}{(q_3 - q_1)^3} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ 4 \left( J5_{j_0}^{-1,q_1,3} + J5_{j_0}^{q_2,1,3} \right) - 6(q_1 + q_3) \cdot \left( J5_{j_0}^{-1,q_1,2} + J5_{j_0}^{q_2,1,2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3(q_1 + q_3)^2 \left( J5_{j_0}^{-1,q_1,1} + J5_{j_0}^{q_2,1,3} \right) \right] + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left( [12q_1^2 - 12(q_1 + q_3)q_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3(q_1 + q_3)^2] \cdot J4_{j_0}^{-1,q_1,0} + [12q_2^2 - 12(q_1 + q_3)q_2 + 3(q_1 + q_3)^2] \cdot J4_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \right. \\
& \quad \left. + 4 \cdot J5_{j_0}^{q_1,q_2,3} - 6(q_1 + q_3) \cdot J5_{j_0}^{q_1,q_2,2} + 3(q_1 + q_3)^2 \cdot J5_{j_0}^{q_1,q_2,1} \right], \\
MM_{jm} &= \frac{c'_2}{c_1} \left[ \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \cdot \left( J1_{jm}^{-1,q_1,0} - \sqrt{2} Q_m(q_1) \cdot J1_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) + \sqrt{2} \rho_1 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cdot dQ_m^0(q_1) \right. \\
& \quad \left. \times \left( J1_{j_0}^{-1,q_1,1} - q_1 \cdot J1_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) + \sqrt{2} \rho_1 \frac{c_1}{c_2} Q_m(q_1) \cdot J1_{j_0}^{-1,q_1,0} \right] + \rho_2 \cdot J1_{jm}^{q_1,q_2} \\
& \quad + \frac{c'_2}{c_1} \left[ \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \cdot \left( J1_{jm}^{q_2,1,0} - \sqrt{2} Q_m(q_2) \cdot J1_{j_0}^{q_2,1,0} \right) + \sqrt{2} \rho_1 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \cdot dQ_m^0(q_2) \right. \\
& \quad \left. \times \left( J1_{j_0}^{q_2,1,1} - q_2 \cdot J1_{j_0}^{q_2,1,0} \right) + \sqrt{2} \rho_1 \frac{c_1}{c_2} Q_m(q_2) \cdot J1_{j_0}^{q_2,1,0} \right] \\
SS_{jm} &= \frac{2\eta}{Hc_1} \left[ \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \cdot \left( J1_{jm}^{-1,q_1,0} - \sqrt{2} Q_m(q_1) \cdot J1_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) + \sqrt{2} \rho_1 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) dQ_m^0(q_1) \right. \\
& \quad \left. \times \left( J1_{j_0}^{-1,q_1,1} - q_1 \cdot J1_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) + \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \cdot \left( J1_{jm}^{q_2,1,0} - \sqrt{2} Q_m(q_2) \cdot J1_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{2} \rho_1 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) dQ_m^0(q_2) \left( J1_{j_0}^{q_2,1,1} - q_2 \cdot J1_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NN_{jm} &= e_2 \frac{\rho_1}{c_1} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left( J_{jm}^{-1,q_1,2} - (q_1 + q_3) \cdot J_{jm}^{-1,q_1,1} + q_1 q_3 \cdot J_{jm}^{-1,q_1,0} \right) + \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right. \\
&\quad \times \left[ dQ_m^2(q_1) - (q_1 + q_3) dQ_m^1(q_1) + q_1 q_3 dQ_m^0(q_1) \right] \left( J_{j_0}^{-1,q_1,1} - q_1 \cdot J_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) \Big] \\
&\quad + e_2 \frac{\rho_1}{c_1} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left( J_{jm}^{q_2,1,2} - (q_1 + q_3) \cdot J_{jm}^{q_2,1,1} + q_1 q_3 \cdot J_{jm}^{q_2,1,0} \right) + \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right. \\
&\quad \times \left[ dQ_m^2(q_2) - (q_1 + q_3) dQ_m^1(q_2) + q_1 q_3 dQ_m^0(q_2) \right] \left( J_{j_0}^{q_2,1,1} - q_2 \cdot J_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \Big] \\
OO_{j_0} &= \sqrt{2} \frac{e_2}{(q_3 - q_1)^3} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\rho_1}{c_1} \left[ 4 \left( J_{j_0}^{-1,q_1,3} - q_1^3 \cdot J_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) - 6(q_1 + q_3) \times \left( J_{j_0}^{-1,q_1,2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - q_1^2 \cdot J_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) + 3(q_1 + q_3)^2 \left( J_{j_0}^{-1,q_1,1} - J_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) \right] + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\rho_1}{c_1} \right. \\
&\quad \times \left[ 12q_1^2 - 12(q_1 + q_3)q_1 + 3(q_1 + q_3)^2 \right] \left( J_{j_0}^{-1,q_1,1} - q_1 \cdot J_{j_0}^{-1,q_1,0} \right) \Big] \\
&\quad + \sqrt{2} \frac{e_2}{(q_3 - q_1)^3} \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\rho_1}{c_1} \left[ 4 \left( J_{j_0}^{q_2,1,3} - q_2^3 \cdot J_{j_0}^{q_2,1,0} \right) - 6(q_1 + q_3) \times \left( J_{j_0}^{q_2,1,2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - q_2^2 \cdot J_{j_0}^{q_2,1,0} \right) + 3(q_1 + q_3)^2 \left( J_{j_0}^{q_2,1,1} - J_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \right] + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\rho_1}{c_1} \right. \\
&\quad \times \left[ 12q_2^2 - 12(q_1 + q_3)q_2 + 3(q_1 + q_3)^2 \right] \left( J_{j_0}^{q_2,1,1} - q_2 \cdot J_{j_0}^{q_2,1,0} \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$DD_{jm} = e_2 \cdot J_{jm}^{q_1,q_2,0}$$

$$EE_{jm} = -\epsilon_2 \left[ J_{jm}^{q_1,q_2,2} - [q_1 + q_2] \cdot J_{jm}^{q_1,q_2,1} + q_1 q_2 \cdot J_{jm}^{q_1,q_2,0} \right]$$

$$FF_{j_0} = -\frac{12\epsilon_2}{(q_2 - q_1)^3} \sqrt{2} \left[ 2 \cdot J_{j_0}^{q_1,q_2,1} - (q_1 + q_2) \cdot J_{j_0}^{q_1,q_2,0} \right]$$

$$HH_{jm} = -NN_{jm} \cdot EE_{jm}^{-1} \cdot FF_{j_0} \cdot GG_{0m} + OO_{j_0} GG_{0m}$$

$$GG_{jm} = -BB_{jm} \cdot EE_{jm}^{-1} \cdot FF_{j_0} GG_{0m} + CC_{j_0} GG_{0m}$$

avec :

$$J_{jm}^{q_{n-1},q_n,\gamma} = \int_{q_{n-1}}^{q_n} Q_j^*(q) \Pi_n(q) q^{\gamma-1} Q_m(q) dq = \int_A^B Q_j^*(q) \Pi_{AB}(q) q^{\gamma-1} Q_m(q) dq$$

$$J_{jm}^{A,B,0} = \frac{B-A}{2} \delta_{jm}$$

$$J_{jm}^{A,B,\gamma} = \frac{B-A}{2} \left[ g(m+1) \cdot J_{jm+1}^{A,B,\gamma-1} + g(m) \cdot J_{jm-1}^{A,B,\gamma-1} \right] + \frac{B+A}{2} \cdot J_{jm}^{A,B,\gamma-1}$$

$$J2_{jm}^{q_{n-1}, q_n, \gamma} = \int_{q_{n-1}}^{q_n} Q_j^*(q) \Pi_n(q) \frac{\partial}{\partial q} [q^{\gamma-1} Q_m(q)] dq$$

$$J2_{jm}^{A,B,0} = \frac{2}{B-A} \sqrt{2m+1} [\sqrt{2m-1} \cdot J1_{jm-1}^{A,B,0} + \sqrt{2m-5} \cdot J1_{jm-3}^{A,B,0} + \dots]$$

$$J2_{jm}^{A,B,\gamma} = \frac{B-A}{2} [g(m+1) \cdot J2_{jm+1}^{A,B,\gamma-1} + g(m) \cdot J2_{jm-1}^{A,B,\gamma-1}] + \frac{B+A}{2} \cdot J2_{jm}^{A,B,\gamma-1}$$

$$J3_{jm}^{q_{n-1}, q_n, \gamma} = \int_{q_{n-1}}^{q_n} Q_j^*(q) \Pi_n(q) \frac{\partial^2}{\partial q^2} [q^{\gamma-1} Q_m] dq$$

$$J3_{jm}^{A,B,0} = \frac{2}{B-A} \sqrt{2m+1} [\sqrt{2m-1} \cdot J2_{jm-1}^{A,B,0} + \sqrt{2m-5} \cdot J2_{jm-3}^{A,B,0} + \dots]$$

$$J3_{jm}^{A,B,\gamma} = \frac{B-A}{2} [g(m+1) \cdot J3_{jm+1}^{A,B,\gamma-1} + g(m) \cdot J3_{jm-1}^{A,B,\gamma-1}] + \frac{B+A}{2} \cdot J3_{jm}^{A,B,\gamma-1}$$

$$J4_{jm}^{q_{n-1}, q_n, \gamma} = \int_{q_{n-1}}^{q_n} Q_j^*(q) \frac{\partial}{\partial q} [\Pi_n(q) q^{\gamma-1} Q_m] dq$$

$$J4_{jm}^{A,B,0} = [Q_j^*(q) Q_m(q)]_A^B + J2_{jm}^{A,B,0}$$

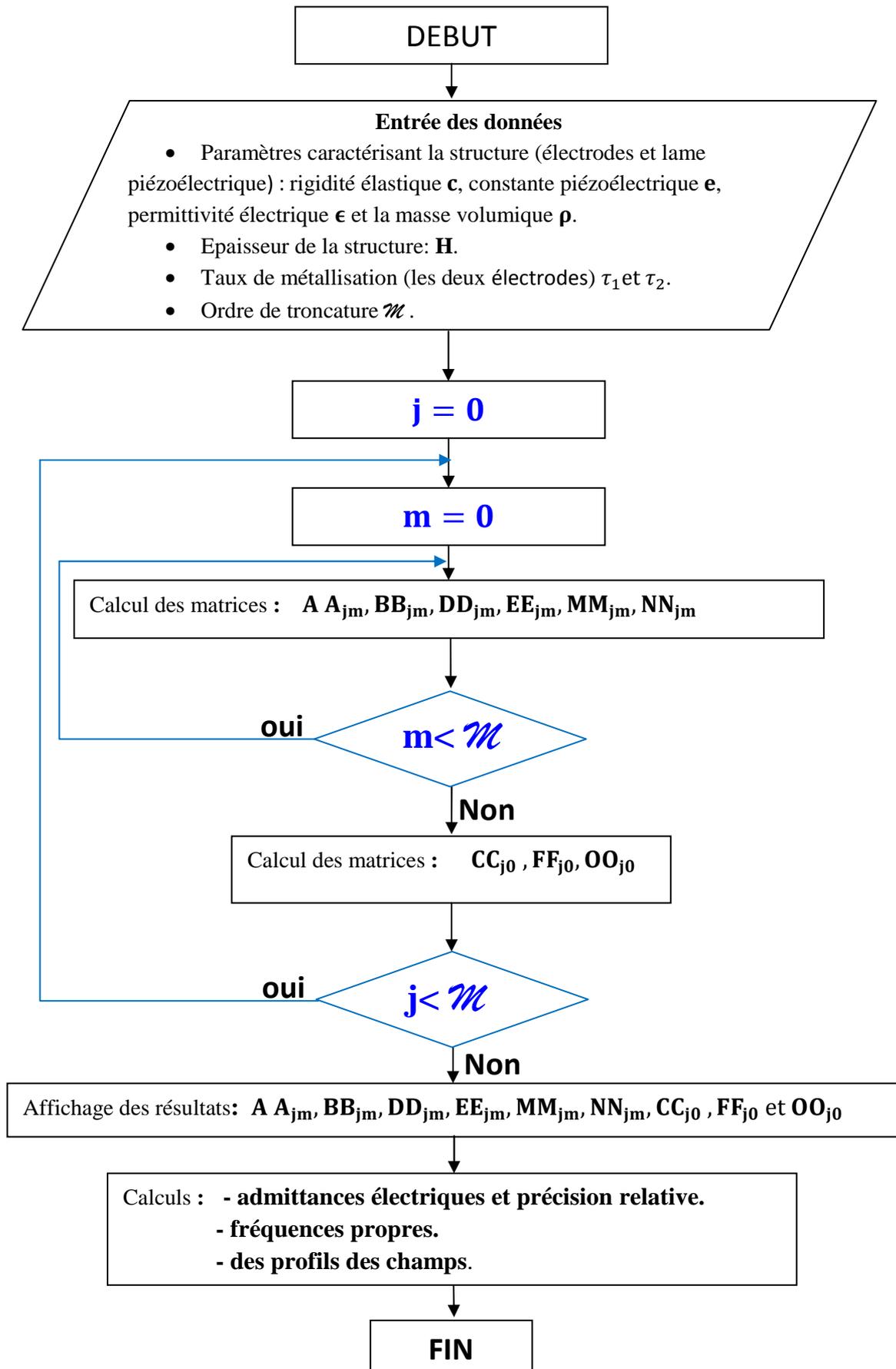
$$J4_{jm}^{A,B,\gamma} = \frac{B-A}{2} [g(m+1) \cdot J3_{jm+1}^{A,B,\gamma-1} + g(m) \cdot J4_{jm-1}^{A,B,\gamma-1}] + \frac{B+A}{2} \cdot J4_{jm}^{A,B,\gamma-1}$$

$$J5_{jm}^{q_{n-1}, q_n, \gamma} = \int_{q_{n-1}}^{q_n} Q_j^*(q) \frac{\partial}{\partial q} \left[ \Pi_n(q) \frac{\partial}{\partial q} [q^{\gamma-1} Q_m] \right] dq$$

$$X5_{jm}^{A,B,0} = \frac{2}{B-A} \sqrt{2m+1} [\sqrt{2m-1} \cdot J4_{jm-1}^{A,B,0} + \sqrt{2m-5} \cdot J4_{jm-3}^{A,B,0} + \dots]$$

$$X5_{jm}^{A,B,\gamma} = \frac{B-A}{2} [g(m+1) \cdot J5_{jm+1}^{A,B,\gamma-1} + g(m) \cdot J5_{jm-1}^{A,B,\gamma-1}] + \frac{B+A}{2} \cdot J5_{jm}^{A,B,\gamma-1}$$

$$\text{avec } g(m) = \frac{m}{\sqrt{(2m-1)(2m+1)}}$$



# RESUME

Cette recherche se concentre plus précisément à la modélisation des résonateurs isotrope à ondes de volume en utilisant la méthode polynomiale de Legendre en vue de mettre en évidence les influences de métallisation sur leur performance.

Ce travail a mis en priorité dans la première partie les brefs rappels à propos de la théorie de la piézoélectricité. Un matériau piézoélectrique est capable de convertir une énergie électrique en mécanique et vice versa. Ce phénomène est la base des microsystemes électromécaniques tels que les résonateurs MEMS.

Dans cette modélisation, la méthode est basée aux développements polynomiaux de déplacement mécanique et de potentiel électrique. Grace aux propriétés des polynômes de Legendre, la résolution des équations de Newton et de Gauss permet d'aboutir des expressions analytiques pour calculer les paramètres caractéristiques d'un résonateur BAW comme l'admittance électrique, les fréquences propres, les profils de champs...

Dans la pratique, ce développement est tronqué à une certaine valeur à partir de laquelle la convergence de la méthode polynomiale atteinte. Tous les résultats obtenus avec cette méthode s'accordent avec ceux calculés par la méthode analytique. La performance est perturbée si l'épaisseur des électrodes varie comme la diminution des fréquences propres. Cette perturbation est aussi appréciée par le coefficient de couplage.