

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	1
PREMIERE PARTIE : NOTION DE SCINTIGRAPHIES	
I.1 Imagerie.....	4
I.1.1 La scintigraphie myocardique .....	4
I.2 La formation de l'image scintigraphique [3] .....	6
I.2.1 Le gamma- caméra [2] .....	6
I.2.2 Les grands types d'acquisition des images .....	7
I.2.3 Représentation des images .....	8
I.3 Image numérique.....	9
I.3.1 Définition .....	9
I.3.2 Types d'images [4].....	9
I.3.3 Les différents formats d'image .....	10
DEUXIEME PARTIE : THEORIE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER ET LE SCEPTRE	
II.1 Théorie de la Transformée de Fourier .....	14
II.1.1 Transformée de Fourier continue.....	14
II.1.1.1 TFC 1 Dimension [8].....	14
II.1.1.2 TFC 2 Dimensions [8,9] .....	16
II.1.2 Transformée de Fourier discrète.....	18
II.1.2.1 TFD 1 Dimension .....	18
II.1.2.2 TFD 2 Dimensions .....	19
II.1.3 Algorithmes et programmes.....	21
II.1.3.1 L'algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide 1D.....	21
II.1.3.2 Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle.....	23
II.2 SCEPTRE .....	25
II.2.1 Définition .....	25
II.2.2 Processus de calcul .....	25
II.2.3 Organigramme .....	27
TROISIEME PARTIE : DEBRUITAGE PAR SEUILLAGE DE COEFFICIENTS D'ONDELETTE	
III.1 La Transformée en ondelettes .....	29

III.1.1 Ondelette [6].....	29
III.1.2 Transformée en ondelettes continue (TOC) [7].....	29
III.1.2.1 Définition.....	29
III.1.2.2 Notions d'échelle et de positions.....	30
III.1.2.3 Propriétés .....	31
III.1.2.4 Expression de la TOC.....	32
III.1.3 Quelques exemples d'ondelette mère.....	33
III.1.4 Conclusions .....	34
III.1.5 Transformée Inverse Continue en Ondelettes .....	34
III.1.6 Transformée en ondelette discrète.....	35
III.1.6.1 Discrétisation de la TOC .....	35
III.1.6.2 Notion de détails et d'approximation [7].....	36
III.1.6.3 Analyse multirésolution .....	37
III.1.6.4 Transformée Inverse .....	39
III.1.6.5 Analyse multirésolution à 2 dimensions.....	40
III.1.7 Conclusions .....	43
III.2 Algorithmes de seuillage des coefficients.....	43
III.2.1 Principe général .....	43
III.2.2 Méthodes de seuillage .....	44
III.2.2.1 Seuillage brut ou « hard thresholding » .....	44
III.2.2.2 Rétrécissement ou « shrinkage » .....	45
III.2.3 Détermination du seuil à utiliser .....	46
QUATRIEME PARTIE : RESULTATS ET INTERPRETATIONS	
IV.1 Résultats de débruitage par seuillage de coefficients d'ondelettes .....	49
IV.2 Résolutions et interprétation de l'analyse spectrale.....	56
CONCLUSION .....	66
ANNEXE A.....	69
ANNEXE B .....	70
BLIBLIOGRAPHIE.....	75

## LISTE DES FIGURES

Figure I.1: une image.....	8
Figure III.1: Ondelettes mères (l'ondelette Mexical Hat) avec différents facteurs de dilatations .....	30
Figure III.2 : l'ondelettes mères (ondelette Mexican Hat), avec différents décalages.....	30
Figure III.3: l'ondelette de Morlet.....	33
Figure III.4: l'ondelette mère de Coifman.....	33
Figure III.5: l'ondelette mère de Crossman.....	33
Figure III.6: l'ondelette mère de Haar .....	34
Figure III.7: l'approximation et le détail [5] .....	37
Figure III.8 : algorithme récursif d'analyse multi- résolution de Mallat [7] .....	38
Figure III.9 : l'approximation et le détail inverse .....	40
Figure III.10: Principe de décomposition.....	41
Figure III.11: Diagramme de décomposition en 2D.....	42
Figure III.12: Seuillage brut .....	45
Figure III.13: Soft Thresholding.....	45
Figure IV.1 : image en RGB bruitée .....	49
Figure IV.2: image indexée avec couleur pink.....	49
Figure IV.3: décomposition d'image.....	50
Figure IV 4: image ondelette avec la couleur pink.....	51
Figure IV.5: image débruitée en RGB.....	51
Figure IV.6: image en RGB bruitée .....	51
Figure IV.7: image indexée .....	51
Figure IV.8: décomposition d'image en ondelette .....	52
Figure IV.9: image débruitée après seuillage .....	52
Figure IV.10: image débruitée en RGB.....	52
Figure IV.11: Myocarde à l'effort de patient N°1 .....	53
Figure IV.12: Représentation graphique du sceptre du Myocarde à l'effort au niveau IB .....	54
Figure IV.13: Myocarde au repos du patient N°01 .....	55
Figure IV.14: Représentation graphique du sceptre du Myocarde au repos au niveau IB.....	56
Figure IV.15: Myocarde en effort et la partie IB du patient N°02 .....	57
Figure IV.16: Représentation graphique du sceptre du Myocarde à l'effort.....	58

Figure IV.17: Myocarde au repos et la partie IB du patient N°02 .....	58
Figure IV.18: Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB au repos .....	59
Figure IV.19: Myocarde à l'effort avec la partie IB du patient N°03 .....	60
Figure IV.20: Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB à l'effort.....	61
Figure IV.21: Myocarde au repos avec la partie IB .....	61
Figure IV.22: Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB au repos .....	62
Figure IV.23: K=311 nombre de pics présents pour le patient N°01 :25,90%.....	63
Figure IV.24: K=502 nombre de pics présents pour le patient N°02 :41,99%.....	63
Figure IV.24: K=168 nombre de pics présents pour le patient N°03 : 14,04%.....	63
Figure IV.26: K=63 nombre de pics présents pour le patient N°01 :5,26%.....	64
Figure IV.27: K=260 nombre de pics présents pour le patient N°02 :21,70%.....	64
Figure IV.28: K=28 nombre de pics présents pour le patient N°03 :2,34%.....	64
Figure A.1 : Image en RGB bruitée .....	69
Figure A.2 : Image indexée .....	69
Figure A.3 : Décomposition d'image en ondelettes avec l'ondelette de Haar .....	69
Figure A.4 : Image débruitée après seuillage .....	69
Figure A.5 : Image débruitée en RGB .....	69

## NOMENCLATURE

$(x, y)$	: pixel d'une image
$f(x, y)$	: valeur numérique de l'intensité lumineuse d'une image au pixel $(x, y)$
$R(x, y)$	: intensité lumineuse au canal rouge
$G(x, y)$	: intensité lumineuse au canal vert
$B(x, y)$	: intensité lumineuse au canal bleue
$A(x, y)$	: intensité lumineuse au canal alpha
$\psi_v$	: ensemble des signaux
$f(t)$	: un signal temporel continu
$f(n)$	: un signal échantillonné discret de $f(t)$
$t$	: temps
$v$	: fréquence temporelle du signal $f(t)$
$F(v)$	: Transformée de Fourier du signal continu $f(t)$
$F^*(v)$	: conjugué de $F(v)$
$g(t)$	: fonction d'un signal temporel
$G(v)$	: Transformée de Fourier d'un signal continu $g(t)$
$u, v$	: fréquences spatiales d'un signal bidimensionnel continu
$F(v, v)$	: Transformée de Fourier bidimensionnelle de continu $f(x, y)$
$G(u, v)$	: Transformée de Fourier bidimensionnelle de $g(x, y)$
$k$	: ordre de la fréquence du signal discret
$F(k)$	: spectre fréquentiel du signal discret $f(n)$
$\varphi_s$	: le carré du module de $F(k)$
$\phi_s$	: le logarithme de $\varphi_s$
$(p, q)$	: ordre de fréquences spatiales d'un signal bidimensionnel discret
$F(p, q)$	: spectre fréquentiel d'un signal bidimensionnel discret
$F_{re}(p, q)$	: la partie réelle de $F(p, q)$
$F_{im}(p, q)$	: la partie imaginaire de $F(p, q)$
N et T	: longueur d'un signal échantillonné

$\lambda; \mu$	: Constantes
$n; m$	: ordre de pixels en x et y pour une image
$\psi(t)$	: ondelette mère
$\phi(\omega)$	: la transformée de Fourier de $\psi(t)$
$a$	: facteur d'échelle
$b$	: facteur de décalage
$C_{a,b}$	: coefficients d'ondelettes
$\Psi_{a,b}(t)$	: ondelette obtenue par dilatation et contraction de l'ondelette mère
$\phi$	: fonction d'échelle
$V$	: espace vectorielle
$\tilde{g}(n)$	: filtre passe-haut
$\tilde{h}(n)$	: filtre passe-bas
$a_i(j,k)$	: les approximations aux échelles $j$ et aux positions $k$
$d_i(j,k)$	: les détails aux échelles $j$ et aux positions $k$
$K$	: nombre de pics comptés dans le sceptre
$D_j^V$	: détail verticale à la $j$ ième itération
$D_j^H$	: détail horizontale à la $j$ ième itération
$D_j^D$	: détail diagonale à la $j$ ième itération
$A_j(t)$	: approximation à la $j$ ième itération
$L^2(\mathbb{R})$	: espace des fonctions de carrée sommable
$j$	: nombre complexe tel que $j^2 = -1$ et quelque fois $j$ est un nombre d'itération.
$i$	: nombre d'itération
$d$	: valeur absolue d'un coefficient d'ondelette

## LISTE DES ABREVIATIONS

- RVB : Rouge, Vert et Bleu  
IB : Infero-Basale  
TFC : Transformée de Fourier Continue  
TFD : Transformée de Fourier Discrète  
TOC : Transformée en Ondelette Continue  
TOD : Transformée en Ondelette Discrète  
FFT : Fast Fourier Transform  
A : Approximation  
 $D^D$  : Détail diagonal
- $D^D$  : Détail vertical  
 $D^D$  : Détail horizontal

# INTRODUCTION

Le besoin de traitement d'images numériques est présent dans de nombreuses applications, notamment dans le domaine des multimédias, des jeux, des transmissions satellites, de l'imagerie médicale.

Une des applications du traitement numérique d'image consiste à modifier les caractéristiques des images : suppression de bruits, mises en formes spectrales ou détection des imperfections dans une image.

Très souvent, pour ne pas dire dans tout les cas, un signal (une image) subit des interférences avec des signaux (d'images) indésirables ou des parasites comme des bruits qui sont de nature généralement aléatoires. Il est donc nécessaire de traiter le signal (l'image) afin d'en extraire les informations nécessaires c'est-à-dire le message que transporte le signal (l'image) ou de l'adapter aux moyens de transmissions.

L'imagerie médicale est un outil indispensable pour l'aide au diagnostic tels que le traitement et le suivi des pathologies [1]. Les médecins s'appuient sur l'imagerie pour définir ou améliorer leur diagnostic. Les technologies d'acquisition et de traitement d'images, en constante évolution, permettent d'envisager de nouvelles perspectives.

Ainsi, en imagerie médicale, certaines parties d'une image scintigraphique peuvent aider à donner un meilleur diagnostic. Prenons le cas du médecin, il peut réaliser une interprétation qualitative des images par analyse visuelle de la zone d'intérêt (aspect homogène ou hétérogène, texture lisse ou granuleuse, fixation intense ou faible, symétrique ou asymétrique,...). C'est pour cette raison que les techniques de traitement numériques d'image interviennent.

L'objectif principal de ce travail est de proposer une méthode de traitement numérique d'images scintigraphiques par analyse fréquentielle afin d'améliorer et de faciliter l'interprétation des résultats.

La méthode employée est ainsi basée sur l'analyse spectrale. Elle consiste à calculer numériquement le carré de module de la Transformée de Fourier Discrète (TFD), du logarithme de la densité spectrale de puissance du signal (de l'image). Cette méthode implique que ce signal (cette image) initiale de puissance finie est tronqué(e) par une fenêtre d'espace fini.



Ce travail est structuré de la manière suivante :

Dans la première partie, nous présenterons les principes de la scintigraphie cardiaque, puis, nous exposerons les techniques d'acquisitions scintigraphies en général (gamma caméra), et enfin, la formation d'images scintigraphies. Ceci s'appelle imagerie médicale.

La deuxième partie est consacrée à description de la méthode d'analyse spectrale utilisée pour la détection des périodicités ou bien de l'estimation des fréquences présentes dans un signal ou dans une image. L'essor du traitement numérique du signal (de l'image) dépend essentiellement de la découverte d'algorithme du calcul rapide de la TFD (Transformé de Fourier Rapide ou Fast Fourier Transform en Anglais).

En effet, cette transformation est à la base de l'étude des systèmes discrets. Elle est l'équivalent de la Transformée de Fourier dans le domaine analogique pour le domaine numérique. C'est le moyen de passage de l'espace soit temporel ou soit spatial à l'espace des fréquences discrètes.

La troisième partie est destinée aux méthodes de seuillage qui permettent, en annulant les coefficients d'ondelettes les moins significatifs, de débruiter des images car il est probable que l'image initiale apporte des parasites ou bruits issus du capteur.

Dans la dernière partie, nous allons présenter les résultats et interprétations fournis par :

- Un programme de décomposition d'image en ondelette qui nous permettra d'enlever le bruit afin d'avoir une image bien nette.
- Un programme d'analyse spectrale proprement dit appliqué aux scintigraphies cardiaques ; cette étape a pour but de détecter la diminution de perfusion myocardique et d'évaluer le degré de gravité de la maladie.

PREMIERE PARTIE  
NOTION DE SCINTIGRAPHIES

## PREMIERE PARTIE : NOTION DE SCINTIGRAPHIES

Nous allons présenter dans cette première partie quelques notions en imagerie scintigraphie. En premier lieu, nous parlerons des principes de la scintigraphie myocardique. Ensuite, les principes de la formation de l'image scintigraphique et l'image numérique en général seront présentés.

### I.1 Imagerie [1]

L'imagerie médicale est certainement l'un des domaines de la médecine qui a le plus progressé ces vingt dernières années. Ces récentes découvertes permettent non seulement un meilleur diagnostic mais offrent aussi de nouveaux espoirs de traitement pour de nombreuses maladies. De telles techniques permettent également de mieux comprendre le fonctionnement de certains organes encore mystérieux, comme le cerveau, le cœur, le poumon, le rein.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la scintigraphie myocardique.

La scintigraphie :

La *scintigraphie*, ou *l'imagerie par émission* est un mode d'imagerie médicale appartenant à la médecine nucléaire. Pour cela, on effectue un marquage d'un organe du patient ou de cellules à l'aide d'une dose minime d'un traceur radioactif émettant des photons  $\gamma$ .

#### I.1.1 La scintigraphie myocardique [1]

La scintigraphie cardiaque ou myocardique est un examen de médecine nucléaire permettant d'explorer l'irrigation du muscle cardiaque en utilisant un produit (radio-isotope) injecté par voie intraveineuse, le plus souvent en complément d'une épreuve d'effort.

##### *a. La scintigraphie myocardique de perfusion*

Principe :

La scintigraphie myocardique de perfusion permet d'évaluer la circulation du sang au niveau du muscle cardiaque (évaluation de la perfusion) et donne des renseignements sur sa fonction et ses capacités de contraction. En pratique, on injecte le produit faiblement radioactif dans le sang par voie intraveineuse. Il est disséminé par la circulation sanguine

dans tout l'organisme et tous les muscles du corps. Ce produit se fixe dans le muscle cardiaque et l'image scintigraphique obtenue permet de visualiser le rayonnement émis par le muscle cardiaque (ou myocarde).

La scintigraphie est le plus souvent couplée à une épreuve d'effort. Dans ce cas, les images sont enregistrées au cours de l'effort puis pendant la phase de récupération et enfin au repos.

Quand le muscle cardiaque est en activité ou à l'effort, il doit recevoir beaucoup plus de sang car il a besoin beaucoup plus d'oxygène. Donc il existe beaucoup de quantités radioactives. Si la circulation est normale c'est-à-dire que les vaisseaux sanguins ne sont pas bouchés, tous les territoires sont irrigués. Par contre, si une partie du vaisseau sanguin est bouchée, les territoires irrigués par ce vaisseau ne reçoivent plus de sang et il y a une diminution des quantités radioactives dans ces territoires.

La comparaison de la fixation du radio traceur (la quantité de radioactif) dans le muscle cardiaque au cours de deux examens, l'un à l'effort et l'autre au repos, permet d'étudier la perfusion myocardique. Elle permet également de mettre en évidence les zones musculaires infarctées [2], ainsi les particules radioactives ne pourront plus se fixer dans ces zones non irriguées.

La première phase de l'examen consiste donc à pratiquer une stimulation (épreuve d'effort sur bicyclette ou test pharmacologique) afin d'évaluer la perfusion cardiaque d'effort. A la fin de la stimulation, le produit radioactif est injecté par voie intraveineuse et une acquisition tomographique est réalisée une heure après.

La deuxième phase de l'examen est réalisée 3 à 4 heures après l'acquisition d'image à l'effort afin d'apprécier la perfusion cardiaque au repos.

Pour conclure, le but de cet examen est d'évaluer la circulation du sang au niveau des différents territoires myocardiques à l'effort et au repos.

#### *b. Résultats :*

L'analyse des images permet d'apprécier si l'ensemble du muscle cardiaque reçoit l'afflux de sang dont il a besoin d'effort quand il est au repos.

On peut ainsi distinguer:

- des zones du myocarde normales, où le marqueur est fixé de façon intense (maximale)
- des zones où le sang arrive au ralenti en raison d'un rétrécissement du coronaire, la captation du produit radioactif est alors réduite (inférieur à 80% à 50%)
- des zones où le sang n'arrive plus (infarctus) se traduisant par une absence de fixation ou absence de produit radioactif. (Inférieur à 50%)

## **I.2 La formation de l'image scintigraphique [3]:**

La scintigraphie permet d'obtenir une image de la totalité ou d'une partie d'un organe donné. Pour acquérir ses images, la scintigraphie utilise un Gamma Caméra.

### **I.2.1 Le gamma caméra [2]**

#### *a. Les isotopes*

La scintigraphie est une technique d'investigation médicale basée sur l'utilisation de molécules spécifiques, marqueuses d'une fonction physiologique [3]. Celles-ci sont introduites dans l'organisme le plus souvent par voie intraveineuse. Les radio-éléments utilisés sont émetteurs de rayons gamma ( $\gamma$ ) ou beta+ ( $\beta^+$ ). Les isotopes les plus utilisés en médecine nucléaire sont le Technétium 99m ( $^{99m}\text{Tc}$ ) et l'iode 131 ( $^{131}\text{I}$ ). Le  $^{99m}\text{Tc}$  émet principalement un rayonnement  $\gamma$  de 148 keV, particulièrement bien adapté au récepteur. Sa demi-vie est de 6 heures, ce qui donne suffisamment de temps pour l'acquisition des images et permet une élimination rapide de la radioactivité.

#### *b. Instrumentation :*

Le « gamma-caméra » ou caméra à scintillation est un appareil qui permet aux médecins nucléaires d'effectuer des scintigraphies, de *détection* et de *localiser* l'origine du rayonnement émis par l'isotope radioactif au sein de l'organisme.

Il est composé d'un large cristal plat d'iodure de sodium qui émet de la lumière lorsqu'il est traversé par des rayons  $\gamma$ , à la manière d'un écran renforceur en radiologie. Le *nombre*, l'*énergie* et la *position* du rayonnement  $\gamma$  recueilli par le cristal sont transmis à un analyseur multicanaux qui traite cette information pour transmettre à un ordinateur les

éléments constitutifs de l'image scintigraphique. L'ordinateur gère l'acquisition et le traitement final des images recueillies.

### *c. Principe de détection*

En médecine nucléaire, l'acquisition de signal ou d'image est basée sur la détection des rayonnements par interaction avec le milieu détecteur et sur l'analyse quantitative de leurs spectres. L'un des premiers moyens de détection a utilisé l'émission de la lumière liée à l'absorption des rayonnements par certains matériaux. Ces derniers émettent des rayonnements de phosphorescence ou de fluorescence après excitation par une particule chargée. Pour des interactions  $\gamma$ - détecteur, ces particules sont des électrons produits par l'effet photoélectrique ou par effet Compton. Ensuite, la désexcitation de molécules s'effectue par une émission de photons lumineux. Ce phénomène est appelé scintillation.

## **I.2.2 Les grands types d'acquisition des images**

### *a. Acquisition planaire statique*

Les têtes d'acquisition sont immobiles alors qu'une seule image est acquise. C'est le principe de la photographie. On s'intéresse ici à la répartition du radiotraceur lorsqu'il est fixé de façon relativement stable dans l'organisme [2].

### *b. Acquisition planaire dynamique*

Les têtes d'acquisition sont immobiles et plusieurs dizaines d'images sont successivement acquises, à raison de quelques secondes par image. C'est le principe du cinéma. On veut ici connaître la cinétique du radiotraceur (vitesse de fixation ou d'élimination du traceur dans l'organe d'intérêt).

### *c. Acquisition planaire synchronisée*

Ce type d'acquisition est utilisé pour les études cardiaques. Cette acquisition est similaire à l'acquisition planaire dynamique, mais elle est démarrée à un instant particulier du cycle cardiaque, et 16 images sont généralement acquises durant chaque cycle.

### *d. Acquisition tomographique*

L'acquisition tomographique est également appelée TEMP (tomographie d'émission monophotomique) ou SPECT (single photon emission tomography). Les têtes

d'acquisition sont en rotation autour du sujet [3]. Plusieurs dizaines d'images (projections) sont successivement acquises, chacune sous un angle différent. Ce mode d'acquisition permet de connaître la répartition du traceur dans les trois dimensions de l'espace.

*e. Acquisition tomographique synchronisée*

Comme pour l'acquisition tomographique simple, les têtes sont en rotation autour du sujet. Sous chaque angle de prise de vue, elles sont réalisées des acquisitions synchronisées avec le cycle cardiaque. On obtient ainsi la répartition de la radioactivité en trois dimensions, au cours du cycle cardiaque.

**I.2.3. Représentation des images :**

L'image scintigraphique est constituée par la localisation, l'intensité et l'énergie des photons gamma qui sont à l'origine des scintillations. Chaque pixel est représenté sur l'écran avec une couleur (ou avec une luminance) définie selon le nombre de scintillations c'est-à-dire le nombre de rayons dans ce pixel.

En effet, une image est constituée d'un ensemble de pixels repérés par leurs coordonnées, et auxquels est attribuée une valeur (figure.1)

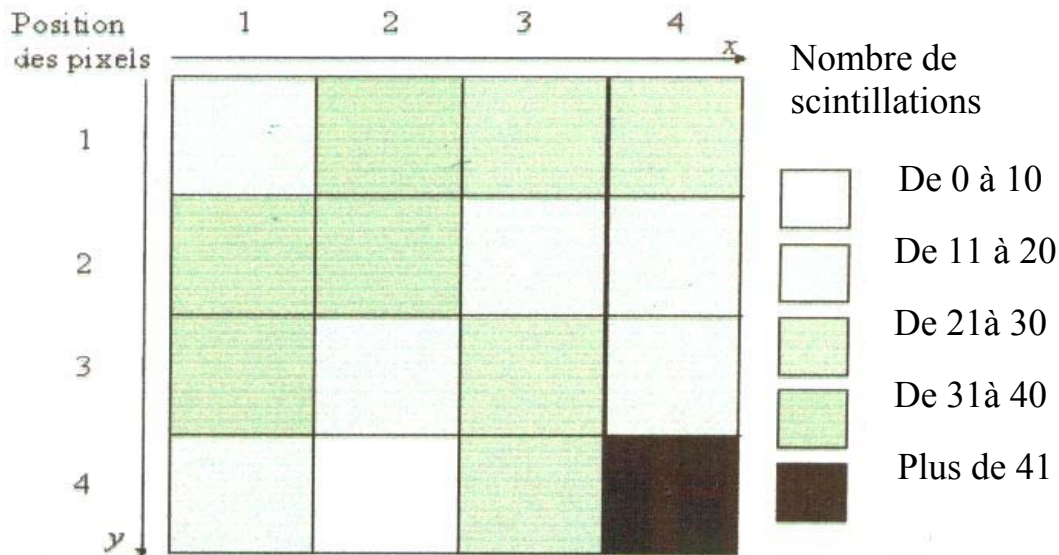


Figure I.1 : Une image

## **I.3 Image numérique :**

### **I.3.1 Définition :**

Une image est une répartition d'intensités lumineuses dans un plan, donc un signal à deux dimensions.

Elle peut être continue (par exemple une fonction  $f(x, y)$ ) ou discrète : c'est alors un tableau ou une matrice de nombres (c'est le cas en particulier des images traitées par ordinateur).

L'intensité en un point de l'image peut être représentée par un nombre. Ce sera par exemple le niveau de gris pour une image en noir et blanc. On aura alors affaire à une image " réelle " car le niveau de gris sera un nombre réel. Mais il y a aussi des images "complexes " où l'intensité en un point est représentée par un nombre complexe mais non plus par un nombre réel.

### **I.3.2 Types d'images [4] :**

On distingue deux types d'images selon leur composition ou leur comportement : images matricielles et images vectorielles.

#### **a. Images matricielles (ou images bitmap) :**

Elles sont composées comme son nom l'indique d'une matrice (tableau) de points à plusieurs dimensions, chaque dimension représentant une dimension spatiale (hauteur, largeur, profondeur), temporelle (durée) ou autre (par exemple, un niveau de résolution).

#### La notion de pixel

Une image numérisée, encore appelée image BITMAP, est constituée d'un ensemble de points appelés *pixels* (pixel est une abréviation de *Picture Element*). Le pixel représente ainsi le plus petit élément constitutif d'une image numérique. L'ensemble de ces pixels est contenu dans un tableau à deux dimensions constituant l'image.



Etant donné que l'écran effectue un balayage de gauche à droite et de haut en bas, on désigne généralement par les coordonnées  $[0,0]$  le pixel situé en haut à gauche de l'image, cela signifie que les axes de l'image sont orientés de la façon suivante :

- L'axe X est orienté de gauche à droite.
- L'axe Y est orienté de haut en bas, contrairement aux notations conventionnelles en mathématiques, où l'axe Y est orienté vers le haut.

A titre d'exemple, la taille du pixel est comprise entre 6 et 10 microns, malgré la miniaturisation des capteurs, le pixel reste 100 fois plus gros qu'un grain d'argent.

- 1 détecteur = 1 pixel
- 1 pixel =  $10 \times 10 \mu\text{m}$  ou  $100 \mu\text{m}$  carrés
- 1 sel d'argent =  $1 \mu\text{m}$  carré

#### b. Images vectorielles :

Le principe est de représenter les données de l'image par des formules géométriques qui peuvent être décrites d'un point de vue mathématique. Cela signifie qu'au lieu de mémoriser une mosaïque de points élémentaires, on stocke la succession d'opérations conduisant au tracé. Par exemple, un dessin peut être mémorisé par l'ordinateur comme « une droite tracée entre les points  $(x1,y1)$  et  $(x2,y2)$  », puis « un cercle tracé au centre » .

### **I.3.3 Les différents formats d'image [4]:**

Il existe plusieurs modes de codage informatique des couleurs, le plus utilisé pour le maniement des images est l'espace colorimétrique Rouge, Vert, Bleu (RVB ou RGB). Cet espace est basé sur une synthèse additive des couleurs, c'est-à-dire que le mélange des trois composantes R, V, et B à leur valeur maximum donne du blanc, à l'instar de la lumière. Le mélange de ces trois couleurs à des proportions diverses permet de reproduire à l'écran une part importante du spectre visible, sans avoir à spécifier une multitude de fréquences lumineuses.

Il existe d'autres modes de représentation des couleurs :

- Cyan, Magenta, Jaune, Noir (CMJN ou CMYK) utilisé principalement pour l'impression, et basé sur une synthèse soustractive des couleurs ;
- Teinte, Saturation, Luminance (TSL ou HSL), où la couleur est codée suivant le cercle des couleurs ;
- base de couleur optimale YUV, Y représentant la luminance, U et V deux chrominances orthogonales.

Les images bitmap en couleurs peuvent ainsi être représentées soit par une image dans laquelle la valeur du pixel est une combinaison linéaire des valeurs des trois composantes couleurs, soit par trois images représentant chacune une composante couleur. Dans le premier cas, selon le nombre de bits (unité d'information élémentaire qui peut prendre deux valeurs distinctes) alloués pour le stockage d'une couleur de pixel, on distingue généralement les différents formats d'images suivants :

a. Image en Niveaux de gris :

Dans le cas d'une image numérique en Niveaux de gris, chaque point est représenté par une valeur de luminosité, de 0 (noir) à 255 (blanc), les valeurs intermédiaires représentant les différents niveaux de gris, qu'on définit par des fonctions à deux dimensions :

$$f : R^2 \rightarrow [0, 255]$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Pour des images numériques, la variable  $(x, y) \in N^2$  : (et plus précisément à  $[1; \text{width}]$  \_  $[1; \text{height}]$  ou width est la largeur de l'image et height sa hauteur). C'est un pixel de l'image.  $f(x, y)$  représente l'intensité lumineuse, ou le niveau de gris de l'image au pixel  $(x, y)$ .

b. Image en couleur (RVB) :

Pour une image couleur, il ne suffit pas de connaître son niveau de gris pour chaque pixel : il faut connaître l'intensité de chacun des trois canaux des couleurs fondamentales, le rouge R, le vert G, et le bleu B. Une image peut alors se modéliser comme une fonction vectorielle:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 255]^3$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (R(x, y), G(x, y), B(x, y))$$

On rajoute même parfois un quatrième canal, le canal alpha, noté A;  $A(x, y)$  représente la transparence de l'image au point  $(x, y)$ . Les quatre valeurs R, G, B et A peuvent être stockées dans un entier non signé de 4 octets (un uint32, en C ou en matlab).

Il existe d'autres formats pour les images couleurs que le format RGBA (format HSV, HLS, ...).

c. Image indexée :

Une image indexée est une image dont la teinte de chaque pixel est déterminée par une valeur d'indice à l'intérieur d'un tableau de teintes RVB (palette). Notons que dans une image indexée, n'est employé qu'un nombre réduit de couleurs, 256 ou moins.

## DEUXIEME PARTIE

# THEORIE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER ET LE SCEPTRE

## **DEUXIEME PARTIE : THEORIE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER ET LE SCEPTRE**

Dans cette deuxième partie, nous allons décrire la méthode utilisée pour traiter les images acquises. D'abord, la TFD nous donne un moyen de passer de l'espace du temps (ou spatiale) discret à l'espace de fréquence discret. Ensuite, la découverte d'algorithme de calcul rapide de la TFD (FFT) permettra de faire le calcul numérique de façon plus rapide. Enfin, l'analyse spectrale qui nous donnera les résultats ultérieurs.

### **II. 1 Théorie de la transformée de Fourier :**

Il y a plusieurs manières de transformer une image (signal à deux dimensions 2D) en d'autres représentations, plus adéquates pour certains types d'analyse d'images. Lorsque l'on considère un signal, il est indispensable d'avoir présentes à l'esprit deux représentations possibles de ce signal c'est à dire temps et fréquence : dans la représentation continue en temps du signal  $f(t)$  ou discret  $f(n)$ , la variable  $t$  ou  $n$  est la durée qui s'écoule continûment ou par sauts discrets. La représentation de fréquence du signal fait jouer un rôle central aux fréquences pures qui constitueront la base de description des signaux. La transformée de Fourier constitue comme outil le plus communément utilisé pour réaliser ce type de transformations et d'analyse des données.

La transformée de Fourier est une méthode permettant d'exprimer une fonction comme la somme de ses projections sur une base de fonctions. Comme une image est définie sur un domaine fermé et borné (la fenêtre de l'image), on peut considérer que l'image vaut zéro en dehors de cette fenêtre. En d'autres termes, on peut considérer que la fonction image est intégrable sur tout le domaine de  $\mathbb{R}^2$ .

#### **II.1.1 Transformée de Fourier continue :**

##### **II.1.1.1 TFC 1 Dimension [8] :**

###### a. Définition :

La transformation de Fourier d'un signal quelconque (périodique ou non) peut être projetée sur la famille libre  $\psi_\nu$  de l'ensemble des signaux; bien entendu cette opération

ne sera pas souvent inversible puisqu'il ne s'agit pas d'une base mais elle nous permet d'étudier la plupart des signaux.

Soit un signal continu  $f(t)$ , vérifiant la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad : \text{ soit fini c'est-à-dire que } f(t) \text{ appartient à l'espace } L^2(\mathbb{R}) \text{ ou}$$

espace des fonctions de carré sommable.

On dit aussi que  $f(t)$  est à énergie finie.

La transformée de Fourier de ce signal est définie par :

$$F(\nu) = \langle f(t), \psi_\nu(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi j\nu t) dt. \quad (2.1)$$

- La transformation de Fourier est inversible pour un signal  $f$  périodique, continu et de carré intégrable, et pour de nombreux signaux suffisamment réguliers:

$$f(t) = \langle f(t), \overline{\psi_\nu(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu t) dt \quad (2.2)$$

La fonction  $F(\nu)$  est appelée le *spectre fréquentiel* du signal. C'est une fonction complexe qui associe une amplitude et une phase à chaque fréquence  $\nu$ . Ces formules (équations (2.1) et (2.2)) sont valables pour les signaux continus.

### b. Propriétés

Soient  $TF(f(t)) = F(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $f(t)$

et  $TF(g(t)) = G(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $g(t)$ .

Voici quelques propriétés de cette transformation :

- $F(\nu)$  est bornée, continue, tend vers 0 à l'infini et appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  c'est-à-dire

$$\text{d'énergie finie } \int_{\mathbb{R}} |F(\nu)|^2 d\nu < \infty.$$

- La transformée de Fourier est linéaire :  $TF(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda F(\nu) + \mu G(\nu)$
- Retard :  $f(t - t_0)$  a pour transformée de Fourier  $F(\nu) \exp(-2\pi j\nu t_0)$
- Modulation :  $f(t) \exp(2\pi j\nu_0 t)$  a pour transformée de Fourier  $F(\nu - \nu_0)$

- Si le signal  $f(t)$  est réel, on a  $F(\nu) = F^*(-\nu)$ . Cette propriété est dite de symétrie Hermitienne.

- Si le signal  $f(t)$  est réel et paire alors  $F(\nu)$  est réelle et paire. Si  $f(t)$  est impaire alors  $F(\nu)$  est imaginaire pure.

- Le produit de convolution  $f(t) * g(t)$  a pour transformée de Fourier  $F(\nu)G(\nu)$ .

- Si  $f(t)$  est périodique de période  $T$ , sa transformée peut être définie au sens de distributions et on a :  $F(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k \delta(\nu - kt)$  où  $F_k$  sont les coefficients de la série de Fourier  $f(t)$ , on dit que l'on a affaire à un spectre de raie.

### II.1.1.2 TFC 2 Dimensions [8,9] :

La notion de transformée de Fourier à deux dimensions est une généralisation de celle à une dimension; elle sert à traiter un signal à deux dimensions (des images). La transformation de Fourier représente une image comme une somme d'exponentielles complexes de différentes amplitudes, phases et fréquences. La transformation de Fourier joue un rôle fondamental dans un grand nombre d'applications de manipulations d'images telles que la restauration, l'analyse et la compression.

#### a. Définition de la transformée de Fourier 2D

La représentation fréquentielle des signaux 2D est l'extension directe de celle des signaux monodimensionnels. La transformée de Fourier  $F(u, \nu)$  d'un signal  $f(x, y)$  est

$$F(u, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + \nu y)] dx dy \quad (2.3)$$

Dans certaines présentations la quantité scalaire  $ux + \nu y$  est donnée sous la forme d'un produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ; on obtient alors une écriture similaire dans les cas mono et multidimensionnels. Cette formule permet de calculer l'amplitude de la composante du signal  $f(x, y)$  à la fréquence spatiale  $(u, \nu)$

Remarque : Les fréquences spatiales s'expriment en cycles ou en radians par unité de longueur, alors que les fréquences temporelles (auxquelles on a plus souvent affaire dans le domaine des télécommunications) s'expriment en cycles ou en radians par unité de temps.

### b. La transformée inverse

La reconstitution de signal spatial se fait par addition des différentes fréquences spatiales pondérées par les amplitudes complexes ainsi calculées.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] dudv \quad (2.4)$$

### c. Propriétés de la transformée de Fourier 2D

On retrouve toutes les propriétés de la transformée de Fourier monodimensionnelle, en particulier les symétries. Nous allons citer quelques propriétés :

- Si  $f(x, y)$  est une fonction réelle, sa transformée de Fourier vérifie

$$F(u, v) = \overline{F(-u, -v)} \quad (2.5)$$

- Si  $f(x, y)$  est réelle et  $f(x, y) = f(-x, -y)$ , alors  $F(u, v)$  est aussi réelle et  $F(u, v) = F(-u, -v)$ .

Si  $f(x, y)$  est réelle et  $f(x, y) = -f(-x, -y)$ , alors  $F(u, v)$  est imaginaire et  $F(u, v) = -F(-u, -v)$

- La translation d'un signal se traduit par un déphasage linéaire: si  $f(x, y)$  a pour transformée  $F(u, v)$ , alors  $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$  a pour transformée

$$G(u, v) = F(u, v) e^{-j(ux_0 + vy_0)} \quad (2.6)$$

- Homothétie dans une direction : Si on dilate  $f(x, y)$  dans la direction  $ox$

$$g(x, y) = f(ax, y) \quad (2.7)$$

La transformée  $G(u, v)$  de  $g(x, y)$  est

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax, y) e^{-j(ux + vy)} dx dy \quad (2.8)$$

En effectuant le changement de variable  $z = ax$



$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j(\frac{ux}{a} + vy)} \frac{1}{a} dx dy \quad (2.9)$$

Soit

$$G(u, v) = \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}, v\right) \quad (2.10)$$

La dilatation d'une image se traduit par une homothétie inverse de la variable correspondante (une réduction) dans le plan des fréquences. Si on effectue la même dilatation d'un facteur  $a$  dans les deux directions  $g(x, y) = f(ax, ay)$  (dilatation sans déformation de l'image), il y a contraction  $\frac{1}{a}$  de la transformée de Fourier.

## II.1.2 Transformée de Fourier discrète [10] (directe)

Tous les signaux physiques étant finis (à support compact) et limités en fréquence, ceux que nous traitons peuvent éventuellement devenir des signaux discrets, et avoir un spectre en tant que signaux discrets - ce qui est bien pratique puisque les ordinateurs ne savent traiter que des valeurs numériques discrètes.

Lorsqu'on travaille avec la transformation de Fourier sur un ordinateur, cela implique habituellement une forme de la transformation connue sous le nom de transformation de Fourier discrète. Une transformation discrète est une transformation dont les valeurs d'entrée et de sortie sont discrètes. Il y a donc deux raisons principales d'utiliser cette forme de transformation :

- Les entrées et les sorties de la TFD sont discrètes, ce qui est pratique pour les calculs sur ordinateur.

- Il existe un algorithme rapide de calcul de la TFD connu sous le nom de transformée de Fourier rapide (FFT).

### II.1. 2. 1. TFD 1 Dimension :

#### a. Définition :

La Transformée de Fourier Discrète (en abrégé TFD) est la version numérique de :

$$F(v) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi jvt) dt \quad (2.11)$$

Pour pouvoir être traité numériquement, on échantillonne le signal  $f(t)$ .

On définit donc une transformée de Fourier discrète d'un signal (notée DFT) échantillonné  $f(n)$  de longueur  $N$ , avec  $n, k \in \{0, \dots, N-1\}$ , sa DFT est :

$$F(k) = TFD[f(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-2\pi j \frac{nk}{N}) \quad (2.12)$$

En général,  $F(k)$  est la Transformée de Fourier du signal échantillonné.  $F(k)$  est encore appelé spectre du signal échantillonné  $f(n)$ .

Remarquons aussi que  $F(0)$  est la somme de toutes les valeurs de  $f(n)$ .

Et sa transformée inverse

$$f(n) = TFD^{-1}[F(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp(2\pi j \frac{nk}{N}) \quad (2.13)$$

### II.1.2.2 TFD 2 Dimensions [11] :

Pour obtenir une représentation fréquentielle d'un signal bidimensionnel (images), il faut redéfinir les transformées précédentes (équations (2.12) et (2.13)). En effet, une image est un signal bidimensionnel, de support fini et de nature discrète.

La TFD est habituellement définie pour une fonction discrète  $f(m, n)$  de taille  $N \times M$ , qui n'est non nulle que sur une région finie  $0 \leq m \leq M-1$  et  $0 \leq n \leq N-1$ . Sa TFD est donnée par :

$$F(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{pm}{M} + \frac{qn}{N}\right)\right] \quad (2.14)$$

Avec  $p=0, 1, \dots, M-1$  et  $q=0, 1, \dots, N-1$

Les variables  $p$  et  $q$  sont des variables de fréquence, exprimées en radians par exemple.

En général, la transformation d'un signal réel dans le domaine fréquentiel est évaluée comme une fonction complexe, c'est à dire qui a un module et une phase.

Pour cette transformation, seule l'information contenue dans l'amplitude est nécessaire, et l'information contenue dans la phase n'est pas exploitée. Cependant, l'information contenue dans la phase ne devrait pas être ignorée.

Remarquons aussi que  $F(0,0)$  est la somme de toutes les valeurs de  $f(m,n)$ .

L'inverse de la transformation est une opération qui, lorsqu'on l'applique à une image transformée, restitue l'image originale. La transformation inverse bidimensionnelle est donnée par :

$$f(m,n) = \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p,q) \exp \left[ j2\pi \left( \frac{pm}{M} + \frac{qn}{N} \right) \right] \quad (2.15)$$

*avec,  $m = 0, 1, \dots, n-1; n = 0, 1, \dots, N-1$*

Les valeurs  $F(p,q)$  sont les "TFD coefficients" de  $f(m,n)$ .

### Notion de spectre

Comme nous l'avons vu dans l'équation (2.14), le spectre fréquentiel  $F(p,q)$  est de nature complexe. On préfère généralement une représentation avec le module et l'argument de  $F(p,q)$ .

Le module  $|F(p,q)|$  a l'avantage d'être une fonction réelle, désignée sous le nom de *spectre d'amplitude*.

En notant  $F_{re}(p,q)$  et  $F_{im}(p,q)$  les parties réelle et imaginaire de  $F(p,q)$ .

$$|F(p,q)| = \sqrt{F_{re}(p,q)^2 + F_{im}(p,q)^2} \quad (2.16)$$

La fonction  $|F(p,q)|^2$  est connue sous le nom de *spectre de puissance*.

L'information pertinente sur l'image se trouve essentiellement dans l'amplitude des fréquences. On préfère généralement le *spectre d'amplitude* que le *spectre de phase*.

## II .1.3 Algorithmes et programmes :

### II.1.3.1 .L'algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide 1D

Cet algorithme a été inventé par Cooley et Tukey [11], ingénieurs dans le centre de recherche d'IBM au début des années 1960. Il a eu, du fait de son efficacité, un impact considérable sur le développement des applications en traitement numérique des signaux. La transformée de Fourier discrète est un calcul de produit d'une matrice par un vecteur. Pour un signal de longueur  $T$ , il nécessite donc  $T^2$  multiplications et  $T \cdot (T-1)$  additions de nombres complexes. La transformée de Fourier rapide réduit considérablement le nombre d'opérations à effectuer: au lieu d'effectuer  $T^2$  opérations il suffira d'en faire  $T \log_2 T$ .

Exemple : Si  $T=512 = 2^8$ , on effectue  $(512)^2=262144$  multiplications et  $512 \cdot 511=261632$  additions ce qui va prendre beaucoup du temps tandis que la FFT, on a  $512 \cdot \log_2 (512) = 4096$  additions au lieu de 261632.

Pour expliquer cet algorithme, nous utiliserons la récursivité en montrant que le calcul d'une transformée de Fourier de taille  $T$  se ramène au calcul de deux transformées de Fourier de taille  $T/2$  suivi de  $T/2$  multiplications. On veut calculer pour  $k = 0, 1, 2, \dots, T-1$

$$F(k) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t) \exp(-2\pi j \frac{k \cdot t}{T}) \quad (2.17)$$

On pose  $t=2n$  si  $t$  est pair et  $t=2n+1$  si  $t$  est impair.  $F(k)$  s'écrit alors, en posant  $N = T/2$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(2n) \exp(-2\pi j \frac{k \cdot 2n}{T}) + \sum_{n=0}^{N-1} f(2n+1) \exp(-2\pi j \frac{k \cdot (2n+1)}{T}) \quad (2.18)$$

Nommons les séquences

$$\begin{aligned} t = 0, \dots, 2N-1 : f_{2N}(t) &= f(t) \\ n = 0, \dots, N-1 : f_N^0(n) &= f(2n) \\ n = 0, \dots, N-1 : f_N^i(n) &= f(2n+1) \\ k = 0, \dots, 2N-1 : F_{2N}(k) &= F(k) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec ces notations, l'équation. (2.18) devient

$$F_{2N}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_N^0(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) + \sum_{n=0}^{N-1} f_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \exp(-2\pi j \frac{k}{2N}) \quad (2.20)$$

Dans la deuxième sommation du membre de droite de l'équation (2.20), le facteur  $\exp(-2\pi j k / 2N)$  ne dépend pas de n. On a donc l'écriture (2.21), pour  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$

$$F_{2N}(k) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f_N^0(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \right] + \exp(-2\pi j \frac{k}{2N}) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \right] \quad (2.21)$$

Si  $0 \leq k \leq N - 1$

on reconnaît dans les deux expressions entre crochets les transformées de Fourier discrètes des séquences des échantillons de numéro pair  $f_N^{0(n)}$  et des échantillons de numéro impair  $f_N^{i(n)}$  que nous nommons  $F_N^0(k)$  et  $F_N^i(k)$  Pour  $k = 0, 1, \dots, N - 1$

$$F_{2N}(k) = F_N^0(k) + \exp(-\pi j \frac{k}{N}) F_N^i(k) \quad (2.22)$$

Lorsque  $N \leq k \leq 2N - 1$ , on peut écrire  $k = l + N$

Et remarquons que

$$\exp(-\pi j \frac{k}{N}) = -\exp(-\pi j \frac{l}{N}) \quad (2.22)$$

L'équation (2.21) devient alors (2.23), pour  $l = 0, \dots, N - 1$

$$F_{2N}(l + N) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f_N^0(n) \exp(-2\pi j \frac{(l + N).n}{N}) \right] + \exp(-2\pi j \frac{l + N}{2N}) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{(l + N).n}{N}) \right] \quad (2.23)$$

Et, en remarquant que  $\exp(-2\pi j \frac{(l + N).n}{N}) = \exp(-2\pi j \frac{l.n}{N})$  (2.24)

En tenant compte de (2.22), on a une écriture analogue à l'équation (2.22)  
 Pour  $l = 0, \dots, N-1$

$$F_{2N}(l + N) = F_N^0(l) - \exp(-\pi j \frac{l}{N}) F_N^i(l) \quad (2.25)$$

On peut changer le nom de la variable  $l$  en  $k$  et regrouper les deux équations (2.22) et (2.25) Pour  $k = 0, \dots, N-1$

$$F_{2N}(k) = F_N^0(k) + \exp(-\pi j \frac{k}{N}) F_N^i(k) \quad (2.26)$$

$$F_{2N}(k + N) = F_N^0(k) - \exp(-\pi j \frac{k}{N}) F_N^i(k) \quad (2.27)$$

Cette formulation se traduit directement par une implémentation récursive. Toutefois la programmation de la plupart des processeurs est fondée sur une implémentation différente. On commence par les opérations de réarrangement des données : pour un vecteur de longueur  $T$ , construction d'un tableau de données d'adresse paire et d'un tableau de données d'adresse impaire de longueur  $T/2$ , ce réarrangement étant reproduit pour les deux moitiés de tableau de taille  $T/2$ , puis les quatre quarts de tableau de taille  $T/4$ .

### II.1.3.2 Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle [12]

L'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT) bidimensionnelle peut s'appliquer de la manière suivante. La transformée discrète correspond à une double sommation qu'on peut effectuer en deux temps; d'abord sur la variable  $x$  puis sur la variable  $y$ .

$$F(p, q) = \sum_{y=0}^{T-1} \left[ \sum_{x=0}^{T-1} f(x, y) e^{-2\pi j \frac{px}{T}} \right] e^{-2\pi j \frac{qy}{T}} \quad (2.28)$$

Dans la sommation sur  $x$  et  $y$ ,  $x$  ou  $y$  est fixé : on peut  $y$  reconnaître une transformée discrète monodimensionnelle sur chacune des lignes du tableau des  $T \times T$  valeurs de  $f(x, y)$ . Cette transformée monodimensionnelle peut se calculer grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle. Ceci transforme la ligne numéro  $y$  en une ligne de  $T$  éléments de la forme  $G(u, y)$  pour  $p = 0, \dots, T-1$ .

$$G(p, y) = \sum_{x=0}^{T-1} f(x, y) e^{-2\pi \frac{px}{T}} \quad (2.29)$$

On peut maintenant calculer la transformée de Fourier de chacune des colonnes de ce tableau en appliquant une nouvelle fois un algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle.

$$F(p, q) = \sum_{y=0}^{T-1} G(p, y) e^{-2\pi j \frac{qy}{T}} \quad (2.30)$$

On applique ainsi  $2T$  fois l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Cet algorithme nécessite de l'ordre de  $2T \log T$  calculs élémentaires. Le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle se fait en effectuant de l'ordre de  $2T^2 \log_2 T^2$  calculs élémentaires. C'est la même quantité de calculs que dans le cas où les  $T^2$  valeurs seraient rangées en une colonne pour permettre le calcul d'une transformée monodimensionnelle mais les calculs ne sont pas identiques. Il est possible de réduire de  $T$  à  $0.75T$  le nombre de calculs élémentaires en combinant les calculs en colonne et en ligne : la transformée rapide monodimensionnelle est une succession de  $\log T$  étapes élémentaires ( $l=1,2,4,\dots,T-1$ ). Dans la transformée bidimensionnelle, il est possible d'effectuer l'étape  $l$  sur la variable  $q$  immédiatement après l'étape  $l$  sur la variable  $p$ , avant l'étape  $l+1$  portant sur  $p$ . Nommons  $F_l(p, q), F_l(p+l, q), F_l(p, q+l), F_l(q+l, p+l)$  les quatre données utilisées dans une étape élémentaire.  $F_{2l}(p, q), F_{2l}(p+l, q), F_{2l}(p, q+l), F_{2l}(p+l, q+l)$  sont les résultats de cette étape élémentaire. Si on effectue une étape de la transformée rapide sur les lignes, puis l'étape identique sur les colonnes, la séquence de ces 2 opérations élémentaires (papillon) de la transformée peut s'écrire sous forme matricielle en posant  $a = e^{2\pi j/T}$

$$\begin{bmatrix} F_{2l}(p, q) \\ F_{2l}(p+l, q) \\ F_{2l}(p, q+l) \\ F_{2l}(p+l, q+l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^p \\ 1 & 0 & -a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a^p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a^p \\ 1 & 0 & -a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l(p, q) \\ F_l(p+l, q) \\ F_l(p, q+l) \\ F_l(p+l, q+l) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ce qui nécessite quatre multiplications élémentaires. Si on effectue le produit des deux matrices avant d'effectuer le produit du vecteur de droite par une matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} F_{2l}(p,q) \\ F_{2l}(p+l,q) \\ F_{2l}(p,q+l) \\ F_{2l}(p+l,q+l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^p \\ 1 & 0 & -a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a^p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a^p \\ 1 & 0 & -a^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l(p,q) \\ F_l(p+l,q) \\ F_l(p,q+l) \\ F_l(p+l,q+l) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Il suffit, pour effectuer le même calcul, trois opérations élémentaires, ce qui conduit à l'économie de calculs, si on suppose que les éléments des matrices de la forme  $a^p$  ont été préalablement mémorisés.

Les fonctions Matlab [11] *fft*, *fft2* et *fftn* implémentent l'algorithme de la transformation de Fourier rapide pour calculer la TFD unidimensionnelle, bidimensionnelle ou N-dimensionnelle, respectivement. Les fonctions *ifft*, *ifft2* et *ifftn* calculent la TFD inverse.

## II.2 SCEPTRE :

### II.2.1 Définition :

Le spectre d'un signal ou d'une image défini soit comme la puissance spectrale du logarithme de la puissance spectrale.

Pour le signal temporel à une dimension tel que  $f(t)$ , il est décrit par la relation :

$$sceptre = \left| TF \left[ \log |TF(f(t))|^2 \right] \right|^2 \quad (2.33)$$

Pour le signal spatiale à 2 dimensions :

$$sceptre = \left| TF \left[ \log |TF(f(x, y))|^2 \right] \right|^2 \quad (2.34)$$

### II.2.2 Processus de calcul :

En fait, l'utilisation de la TFD implique que tout le signal se passe comme si on étudie le signal périodique.

Si N est le nombre des échantillons du signal  $f(n)$  à étudier :



$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-2\pi j \frac{nk}{N})$$

Par raison de symétrie, on peut calculer  $F(k)$  de  $n=0$  à  $\frac{N}{2}-1$  :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(n) \exp(-2\pi j \frac{nk}{N})$$

Pour un signal de puissance finie ou un signal périodique, notons

$$\varphi_s = |F(k)|^2 = |TFD[f(n)]|^2$$

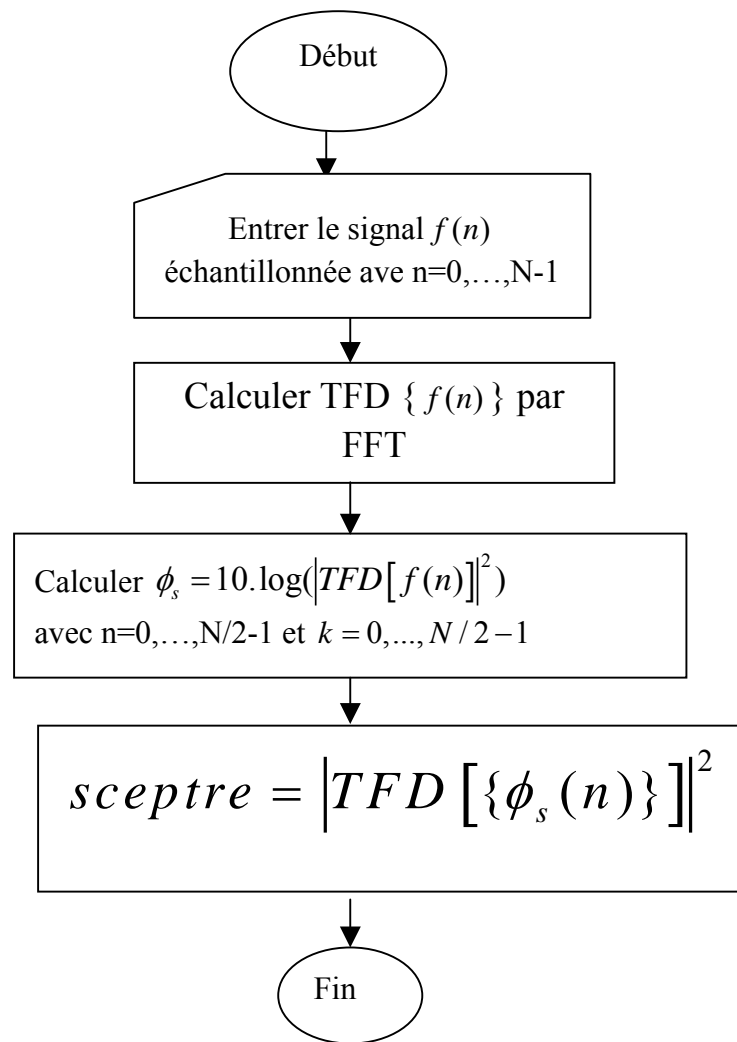
En prenant le logarithme, on a finalement :

$$\phi_s = 10.\log \varphi_s = 10.\log(|TFD[f(n)]|^2)$$

On a également la symétrie hermitienne de la TFD, on peut calculer le spectre de  $n=0$  à  $\frac{N}{2}-1$

Et enfin on a l'expression du spectre :  $spectre = |TFD[\{\phi_s(n)\}]|^2$

### II.2.3 Organigramme



Nous pouvons appliquer ce processus dans le cas du signal à 2 dimensions (image).

Le programmer cet organigramme peut faire avec les langages de programmation actuelles comme le turbo Pascal ou le turbo C, mais dans ce mémoire, on se fait par le logiciel interactif Matlab version 6.5.

On choisit Matlab comme langage de programmation à cause de sa puissance et aussi la présence des différentes fonctions pour le traitement d'images.

TROISIEME PARTIE  
DEBRUITAGE PAR SEUILLAGE DE COEFFICIENTS D'ONDELETTES

Rapport-Gratuit.com

## **TROISIEME PARTIE : DEBRUITAGE PAR SEUILLAGE DE COEFFICIENTS D' ONDELETTES**

Apparues il y a quelques années, les ondelettes ont apporté un souffle nouveau au traitement des images. Elles permettent en effet d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou deux dimensions, et à des échelles différentes. Cette caractéristique est utilisée pour le débruitage des images. Par seuillage des coefficients d'ondelettes, l'image est débruitée par élimination des détails les plus fins.

Pour ce faire, nous allons dans un premier temps définir ce que nous appelons une ondelette et une transformée en ondelettes ainsi que sa transformée inverse. Nous verrons que l'on peut réaliser une décomposition discrète en ondelettes et le lien avec l'approche multirésolution. Et enfin, les algorithmes de seuillage de coefficients d'ondelettes seront traités.

### **III.1 La Transformée en Ondelettes**

#### **III.1.1 . Ondelette[6] :**

a). Introduction de l'ondelette :

D'un point de vue historique, l'analyse d'ondelette est une nouvelle méthode d'après la théorie de base de Joseph Fourier au dix-neuvième siècle. Fourier a créé les bases avec ses théories d'analyse de fréquence, qui se sont avérées énormément importantes et influentes.

b). Définition :

Une ondelette est une forme d'onde de durée limitée qui a une valeur moyenne zéro. Par ailleurs, les ondelettes sont des ondes localisées par temps court.

#### **III.1.2. Transformée en ondelette continue (TOC) [7]**

##### **III.1.2.1 Principe :**

La transformée en ondelettes remplace la sinusoïde de la transformée de Fourier par une famille de translations et dilatations d'une même fonction d'ondelette.

La transformation en ondelettes continue (ou CWT) est dans le principe semblable à la transformation de Fourier: il s'agit de projeter un signal sur une base différente de la base canonique (temporelle) de l'espace fonctionnel.

### III.1.2.2 Notions d'échelle et de position :

La notion de fréquence est remplacée par la notion d'*échelle* : pour tenir compte des hautes et des basses fréquences, on va tout simplement contracter ou dilater l'ondelette de référence  $\psi(t)$ , appelée ondelette « mère ».

L'exemple ci-dessous nous montre l'une des ondelettes mères (l'ondelette Mexican Hat), avec différents facteurs de dilatation :

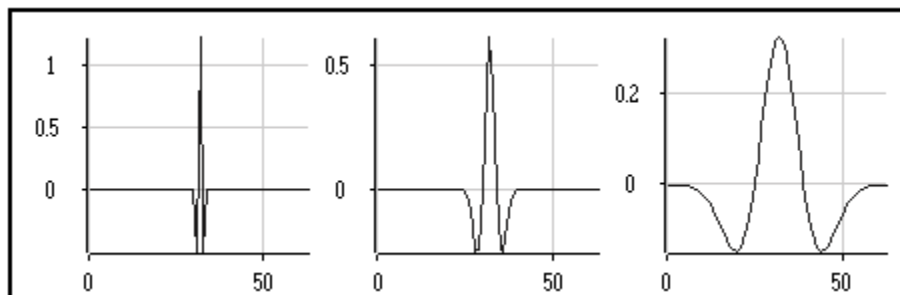


Figure III.1 : ondelettes mères (l'ondelette Mexican Hat), avec différents facteurs de dilatation

La position de l'ondelette à une échelle donnée peut facilement être modifiée en décalant simplement l'ondelette :

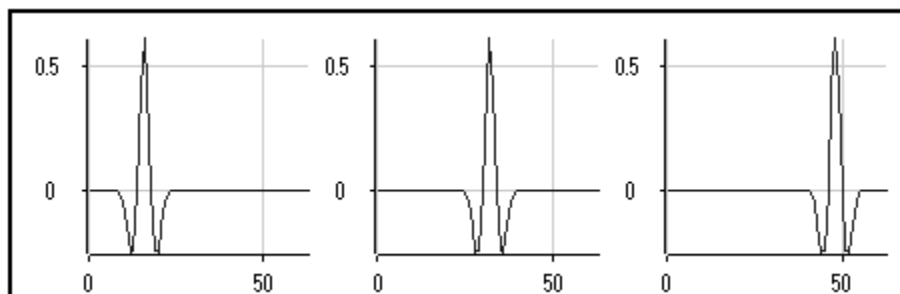


Figure III.2 : ondelettes mères (l'ondelette Mexican Hat), avec différents décalages.

Nous avons donc deux paramètres en jeu :

- Le facteur d'échelle (ou de dilatation)  $a$ , relié à la notion de fréquence
- Le décalage  $b$ , relié à la notion de position temporelle.

En considérant la fonction prototype d'analyse  $\psi$ , appelée ondelette mère, la base en question est l'ensemble des translatées et dilatées de  $\psi(t)$  ayant la forme:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{avec } a > 0 \quad (3.1)$$

Remarque :

Plus  $a$  est grand, plus l'ondelette est dilatée. Par conséquent les grandes valeurs de  $a$  seront logiquement associées aux basses fréquences, les plus petites aux hautes fréquences.

### III.1.2.3 Propriétés

La fonction  $\psi$  doit vérifier les propriétés suivantes pour être une ondelette:

1°) une fonction de valeur moyenne nulle :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$  et en notant  $\phi$  sa

transformée de Fourier,  $\int_0^{+\infty} \phi(\omega) d\omega < +\infty$ .

2°) une fonction finie dans le temps :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$

La propriété 1 suggère que la fonction  $\psi$  oscille de part et d'autre de l'axe  $t$ ; ce qui lui donne dans une certaine mesure l'apparence d'une onde. La propriété 2 implique que l'énergie de la fonction  $\psi$  soit finie, indiquant ainsi que la fonction est localisée dans un intervalle au-delà duquel elle est nulle. Dans une certaine mesure, ces deux propriétés justifient le terme "d'ondelette".

### III.1.2.4 Expression de la TOC

Il s'agit de trouver une grandeur  $C_{a,b}$  quantifiant la ressemblance du signal à analyser  $f(t)$  avec l'ondelette  $\psi_{a,b}(t)$ .

Cette grandeur est tout simplement le produit scalaire  $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$ , opérateur de projection classique.

$$C_{a,b} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.2)$$

Signalons au passage que le calcul de la transformée en ondelettes d'un signal se ramène donc au calcul d'une série de produits scalaires. Les étapes à suivre sont les suivantes :

- Choisir une ondelette de référence  $\psi(t)$
- Choisir un jeu de facteurs d'échelle (les valeurs de  $a$ )
- Choisir un jeu de décalages temporels (les valeurs de  $b$ )
- Pour chaque couple  $(a,b)$ , produire l'ondelette  $\psi_{a,b}(t)$  et calculer le produit scalaire  $C_{a,b}$ .

Le calcul de la transformée en ondelettes continue revient, donc, à réaliser la corrélation entre le signal à analyser et différentes formes dilatées et contractées de l'ondelette mère.

On mesure la ressemblance entre l'ondelette dilatée, translatée  $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  et le signal  $f(t)$ . Le calcul des coefficients de la TOC se fait de telle façon que plus la forme de l'ondelette correspond à celle du signal, plus la valeur du coefficient sera élevée.

### III.1.3 Quelques exemples d'ondelette mère :

Donnons quatre exemples de fonctions répondant à ces critères et pouvant donc être considérées comme des ondelettes:

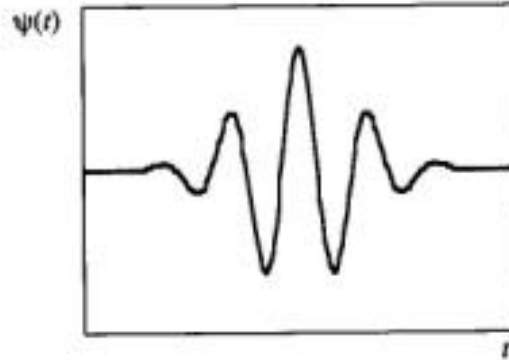


Figure III.3 : L'ondelette de Morlet

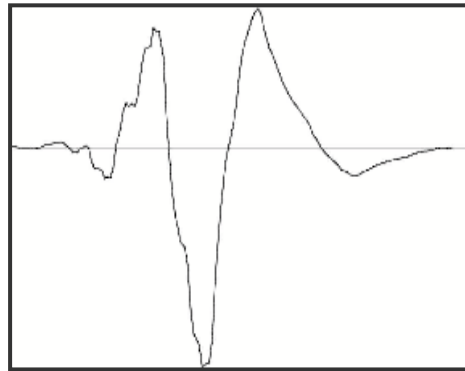


Figure III.4 : L'ondelette-mère de Coifman

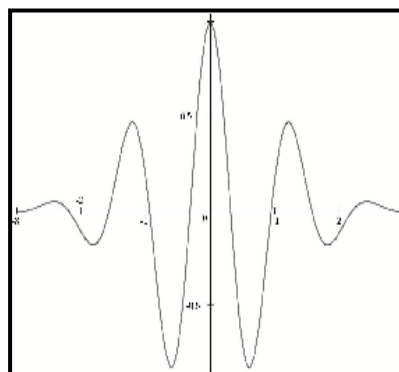


Figure III.5 : L'ondelette-mère de Grossman



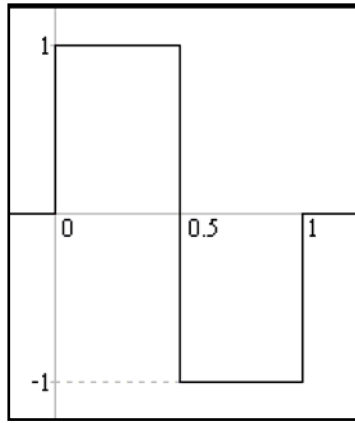


Figure IV.6 : Ondelette mère de Haar

### III.1.4 Conclusions :

La Transformée Continue en Ondelettes (T.C.O.) permet de décomposer un signal selon une collection de signaux (les *ondelettes*), déduits d'une *ondelette mère* par des opérations de translations et de dilatation. Chaque type d'ondelette mère possède ses caractéristiques propres. On choisira donc telle ou telle ondelette de référence en fonction de ce que l'on veut mettre en valeur dans le signal. Les paramètres de translation et de dilatation sont les deux arguments de la transformée en ondelettes

### III.1.5 Transformée Inverse Continue en Ondelettes (T.I.C.O.)

La transformée directe permet d'analyser un signal afin de détecter des singularités ou bien un comportement non stationnaire ou fractal. Il est possible, à partir de l'ensemble des coefficients calculés, de reconstruire le signal de départ.

Mais comme nous l'avons déjà signalé, la phase de reconstruction est le plus souvent précédée d'une phase de modification ou de seuillage des coefficients, à des fins de compression ou de débruitage. L'algorithme de reconstruction est la Transformée en Ondelettes Inverse.

#### *Expression de la transformée inverse :*

Les coefficients d'ondelettes  $C_{a,b}$  ont été obtenus en projetant le signal  $f(t)$  sur la collection d'ondelettes  $\psi_{a,b}(t)$ . On peut donc considérer la suite des coefficients comme les coordonnées de  $f(t)$  dans l'espace formé par les fonctions  $\psi_{a,b}(t)$ . Par conséquent, le signal s'exprime par :

$$f(t) = \int_a \int_b C_{a,b} \cdot \psi_{a,b}(t) \cdot da \cdot db \quad (3.3)$$

Il est donc facile, connaissant les coefficients  $C_{a,b}$  et l'ondelette de référence  $\psi(t)$ , de reconstruire le signal  $f(t)$ .

### III.1.6. Transformée en ondelette discrète [6] :

La Transformée Continue en Ondelettes décompose un signal selon un ensemble d'ondelettes déduites d'une ondelette de référence par des opérations de dilatation et de translation. L'utilisateur peut choisir ses jeux de facteurs de dilatation et de décalages de façon libre.

Cependant, il est possible d'augmenter l'efficacité de la décomposition, c'est-à-dire de limiter le nombre de facteurs d'échelle à utiliser tout en conservant la même précision dans la décomposition.

La Transformée en Ondelettes Discrète (T.O.D.) ou Discrete Wavelet Transform (D.W.T) en anglais, part de cette considération pour aboutir à un algorithme particulièrement efficace, qui peut se comprendre facilement de manière intuitive.

#### III.1.6.1 Discrétisation de la TOC

Contrairement à la transformée continue, dans laquelle l'ondelette est dilatée et traduite de manière continue, la transformée en ondelettes discrète translate et dilate l'ondelette selon des valeurs discrètes.

##### Discrétisation de l'échelle $a$ du décalage $b$

Ces coefficients  $a$  et  $b$  seront discrétisés de la manière suivante :

$$\bullet a = a_o^m$$

$$\bullet b = nb_o a = nb_o a_o^m$$

Où  $m$  et  $n$  sont des entiers relatifs variant entre des bornes fixées par l'utilisateur. On notera que le décalage dépend du facteur d'échelle. L'ensemble des fonctions

$\Psi_{a,b}$  ou  $\Psi_{m,n}$  ainsi créé, sous certaines conditions, permet la reconstruction du signal de départ.

Les ondelettes sont alors définies de la manière suivante :  $\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{1}{a_0^m}t - nb_0\right)$

En pratique, pour réduire la redondance, on choisit  $a_0$  et  $b_0$  de telle sorte que les fonctions  $\Psi_{m,n}$  forment une base orthonormée. En général, on prend :  $a_0 = 2, b_0 = 1$

Ainsi, le facteur d'échelle varie de façon *dyadique*, c'est-à-dire en puissances de 2, ce qui permet la reconstruction du signal.

En réécrivant la définition de la TOC sous une forme discrète avec les deux notations précédentes, il vient (avec  $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ ):

$$TOD_{mn} = \left\langle f(t), \frac{1}{2^{m/2}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) \right\rangle \quad (3.4)$$

### III.1.6.2 Notion de détails et d'approximation [7]

Le principe de base de la T.O.D. est de séparer le signal en deux composantes, l'une représentant l'allure générale du signal, l'autre représentant ses détails. L'allure générale d'une fonction est représentée par ses basses fréquences, les détails par ses hautes fréquences.

Pour séparer les deux, nous avons donc besoin d'une *paire de filtres* : un filtre passe-bas pour obtenir l'allure générale (aussi appelée *approximation* ou *moyenne*), et un filtre passe-haut pour estimer ses *détails*, c'est-à-dire les éléments qui varient rapidement. Pour ne pas perdre d'information, ces deux filtres doivent bien sûr être complémentaires : les fréquences coupées par l'un doivent être conservées par l'autre. On dit que les deux filtres forment une paire de filtres miroirs en quadrature.

Une étape élémentaire de la T.O.D. peut donc se schématiser de la façon suivante :

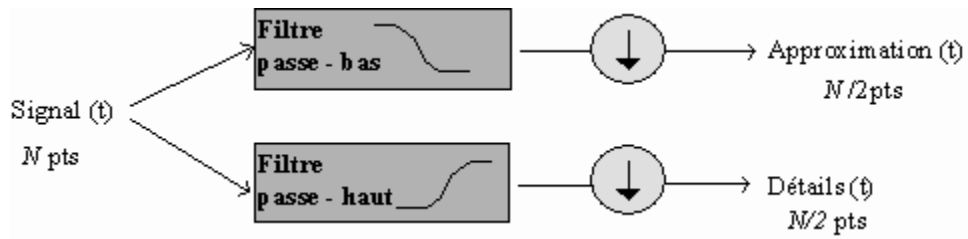



Figure. III.7. L'approximation et le détail [7]

où le symbole  représente l'opération de sous-échantillonnage : on ne prend qu'un point du signal sur deux.

### Lien entre l'ondelette et le filtre

Remarquons qu'à chaque paire de filtres en quadrature est associée une *ondelette*  $\psi(t)$  et une *fonction d'échelle*  $\phi(t)$ . L'ondelette est une fonction oscillante qui permet de rendre compte des détails du signal. La fonction d'échelle est une fonction plus basse fréquence, associée à l'approximation du signal.

#### **III.1.6.3 Analyse multirésolution (AMR) [7]**

L'opération de base de l'AMR est la décomposition du signal en deux parties : une approximation et les détails du signal. L'approximation est obtenue en projetant le signal sur les translatées d'une fonction basse fréquence appelée *fonction échelle*. Cette projection isole les variations lentes par un filtrage passe-bas. Les détails du signal sont obtenus par projection sur un filtre passe-haut appelée *ondelette*. La réponse de ce filtre donne les variations rapides du signal : les détails.

L'approximation est bien une version lissée du signal de départ, mais elle comporte encore du bruit. Rien ne nous empêche de répéter l'opération de filtrage sur le signal d'approximation, afin d'accéder à une résolution encore inférieure, et ainsi de suite.

L'algorithme de décomposition (d'analyse) défini par S. Mallat [10] nous donne le principe de l'AMR

Cet algorithme fonctionne de manière récursive sur les sous-bandes d'approximation, séparant ainsi pour chaque sous-bande, deux sous-bandes de résolution inférieure, définissant un nouvel espace d'approximation et de détails.

Dans le cadre de l'analyse multi résolution, des filtres sont déduits des ondelettes. Ces filtres vont (le plus souvent) par paire Passe-Haut (ici LF(n) ) et Passe-bas(HF(n)). L'approximation s'obtient en appliquant le filtre Passe- Bas (HF(n)) .Cette approximation correspond au reste après une décomposition par une ondelette (pour un certain ordre).

Le processus peut être itéré, à condition de réaliser une décimation (résolution divisée par 2) entre les filtres. On obtient alors une décomposition que l'on peut schématiser comme suit

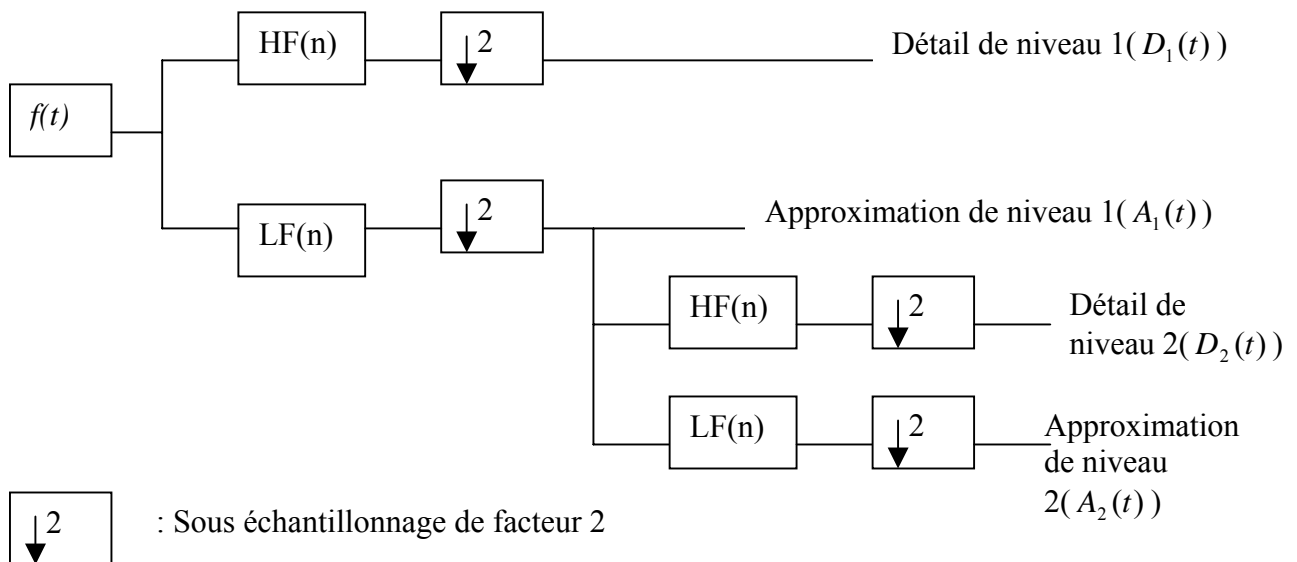


Figure III.8 - Algorithme récursif d'analyse multi résolution de Mallat [10]

Le signal original est  $f(t)$  ; les détails de niveau 1 et 2 sont les coefficients de la décomposition et les approximations de niveau 1 et 2 sont les résidus. Une rééchantillonnage de longueur sur 2 est réalisée à chaque étape.

Notons que pour la T.O.D, seuls les signaux d'approximation sont à nouveau décomposés. Les signaux de détails issus du filtrage passe-haut sont laissés de côté à chaque pas.

A chaque itération, on divise la résolution par 2. C'est la raison pour laquelle cette méthode est appelée *analyse multirésolution*.

Après la  $j^{\text{ième}}$  itération, la longueur du signal d'approximation  $A_j(t)$  et du signal de détails  $D_j(t)$  est de  $N / 2^j$  ( $N$  étant la longueur du signal de départ).

On pourrait poursuivre cet algorithme *en cascade* jusqu'à obtenir une seule valeur pour l'approximation et donc aussi une seule valeur pour les détails. En pratique, on pourra parfois s'arrêter avant, tout dépend de l'application envisagée. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. La valeur  $j_{\text{max}}$  atteinte, c'est-à-dire le nombre d'itérations effectuées, est appelée *niveau de décomposition*.

On obtient un signal d'approximation de longueur  $N / 2^{j_{\text{max}}}$  et  $j_{\text{max}}$  signaux de détails de longueur  $N / 2$  à  $N / 2^{j_{\text{max}}}$ , qui forment un jeu de *coefficients d'ondelettes*.

#### III.1.6.4 Transformée inverse

Comme pour la transformée continue en ondelettes, il est intéressant pour de nombreuses applications de pouvoir reconstruire le signal à partir des coefficients d'ondelettes (c'est à dire les signaux d'approximation et de détails). Cette opération est appelée *reconstruction* ou *synthèse*.

En fait, il est inutile de garder la trace de tous les signaux d'approximation  $A_j$ . On peut synthétiser le signal en ne considérant que le signal d'approximation  $A_{j_{\text{max}}}$  au dernier niveau de décomposition et tous les signaux de détails  $D_j$  produits à chaque itération. On notera que la somme des longueurs de ces signaux nécessaires à la reconstruction est exactement  $N$ , la longueur du signal de départ. Cela signifie que quelque soit le niveau de décomposition atteint, l'information n'est pas redondante.

On se doute qu'il va falloir à nouveau filtrer chaque signal (approximation et détails) puis recombinaison approximation et détails. Cependant, nous disposons de signaux de longueur variable de façon dyadique  $N/2, N/4, N/8, N/16, \dots$

Pour revenir à un signal de longueur  $N$ , il faut tout simplement sur-échantillonner le signal d'un facteur 2 à chaque itération, avant l'opération de filtrage. Pour cela, il suffit de doubler à chaque pas la longueur de l'approximation et du détail en introduisant un zéro entre chaque échantillon.

On passe donc de l'approximation  $A_j$  à l'approximation  $A_{j-1}$  par l'opération suivante :

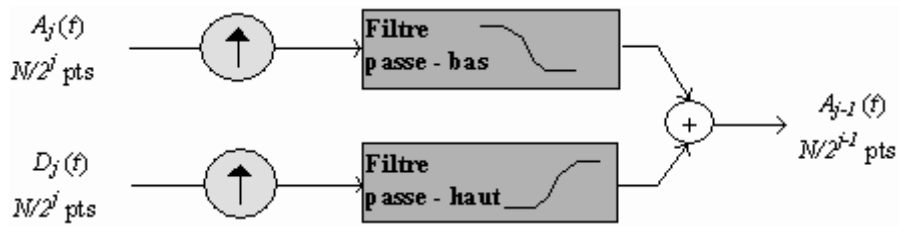



Figure III.9 : L'approximation et le détail inverse [7]

où le symbole  représente l'opération qui consiste à insérer un zéro entre chaque échantillon afin de doubler sa longueur.

### III.1.6.5 Analyse multirésolution à 2 dimensions

Nous allons maintenant généraliser l'AMR pour les images : les signaux à deux dimensions. La transformée en ondelettes discrète d'un signal à deux dimensions  $x$  et  $y$  peut être calculée de manière simple par la méthode de *séparabilité du noyau* [9]. Une décomposition 2D revient à une application successive de décomposition en ondelettes 1D suivant des axes différents, ce qui à l'avantage d'alléger considérablement les calculs effectués par l'algorithme de transformation. Dans le cas des signaux 2D, on n'a plus une sous-bande de détails, mais trois. Ces trois espaces de détails correspondent aux détails verticaux, horizontaux et en diagonaux. On obtient cette décomposition par filtrage passe-bas (L) et passe-haut (H) dans le sens horizontal (X) et vertical (Y). Après chaque filtrage, un sous-échantillonnage est effectué. On obtient ainsi une décomposition en quatre sous-bandes. Nous retrouvons donc le même principe que l'analyse multirésolution 1D : faire une étape de décomposition, garder une partie du signal (les *détails*) pour plus tard, puis recommencer la décomposition sur l'autre partie (l'*approximation*)

Le schéma suivant présente le principe par étapes de la décomposition :

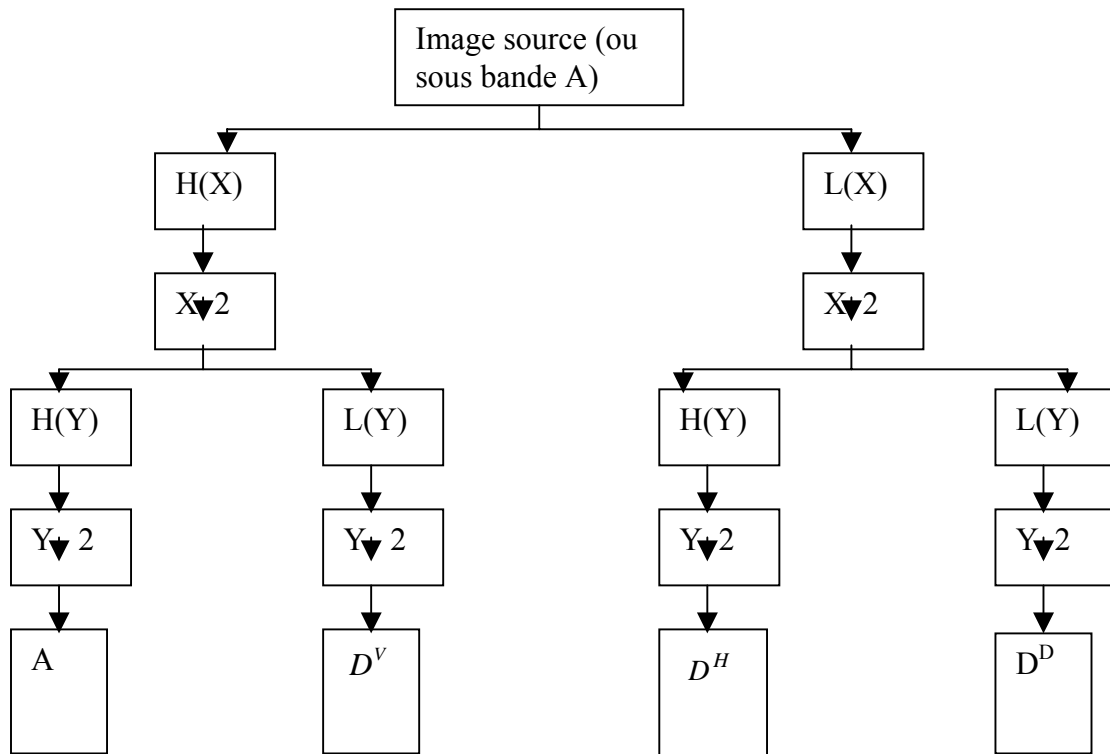


Figure III.10 - Principe de décomposition

### Interprétation des résultats

Les détails renvoient à la même notion que pour un signal 1D : ils représentent les variations haute fréquence d'une image (transitions entre zones de contrastes différents, parties plus ou moins texturées, ...). La particularité de la transformation que nous venons de décrire est sa **directivité**. C'est-à-dire que la transformée en ondelettes bidimensionnelle sépare à chaque itération (c'est-à-dire pour chaque échelle) :

- les détails verticaux,
- les détails horizontaux,
- les détails diagonaux

Après avoir effectué  $j_{max}$  itérations sur une image  $M(x,y)$  de taille  $N \times N$ , on obtient :



- Une image finale de taille  $N^2 / 2^{j_{max}+1}$  située dans la partie supérieure gauche de l'image résultat ( $x=0$  à  $N / 2^{j_{max}} - 1$  ;  $y=0$  à  $N / 2^{j_{max}} - 1$ ), représentant l'**approximation**  $A_{j_{max}}(x,y)$  de l'image originale au niveau de décomposition  $j_{max}$ . Il s'agit d'une version réduite, lissée, de l'image originale.
- $j_{max}$  séries de trois images  $D^V_j, D^H_j, D^D_j$ , de dimensions  $N^2/4, N^2/8, \dots, N^2/2^{j_{max}+1}$  représentant les **détails** verticaux, horizontaux et diagonaux de l'image à chaque niveau de décomposition :

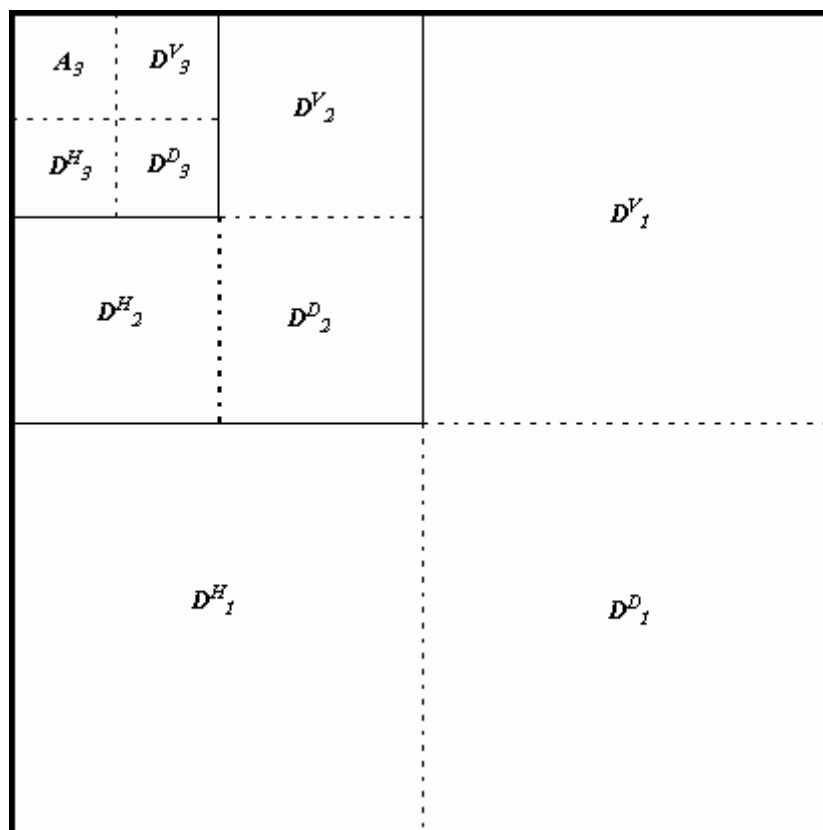


Figure III .11- Diagramme de décomposition en 2D

### *f. Transformée 2D inverse*

La transformée 2D inverse permet de reconstruire l'image originale à partir des coefficients issus de la transformée discrète 2D.

De même, il est nécessaire pour reconstruire l'image d'effectuer un nombre d'itérations identique à celui effectué lors de sa décomposition. Des exemples de

décomposition et reconstruction d'images sont proposés notamment dans le domaine de `debruitage_2D`.

### III.1.7 Conclusion

Dans cette partie nous avons mis en œuvre des algorithmes de décomposition multi résolution de signaux 1D et 2D, ainsi que des algorithmes de reconstruction (synthèse).

L'analyse multi résolution permet de séparer les détails d'un signal à plusieurs résolutions données, celles-ci varient avec un pas dyadique. Le but est bien entendu de traiter les coefficients de détails avant de procéder à la reconstruction.

## III.2. Algorithmes de seuillage des coefficients [9]

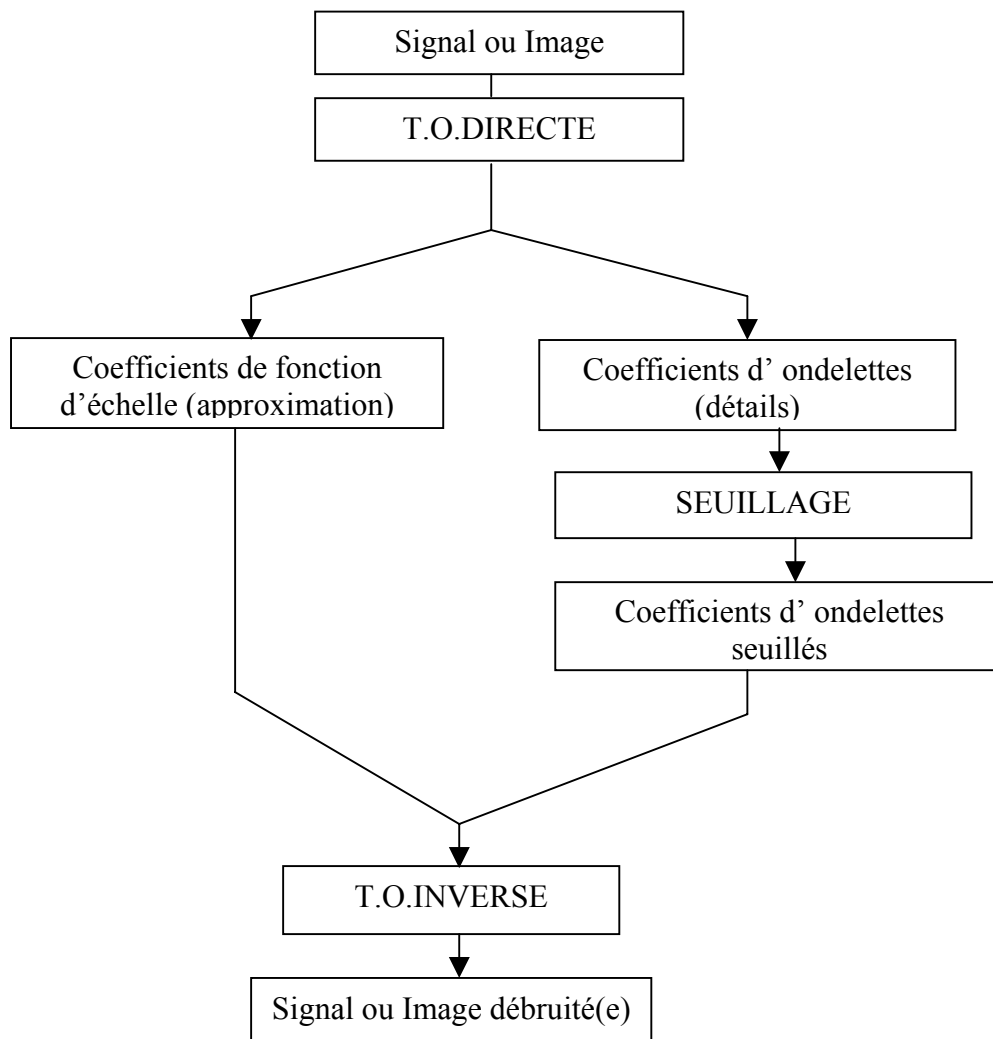
Nous savons mettre en œuvre une décomposition et une synthèse en ondelettes soit continue, soit discrète. Nous allons maintenant aborder les différentes manières dont on peut modifier les coefficients d'ondelettes à des fins de débruitage.

### III.2.1 Principe général

Les coefficients d'ondelettes correspondent aux détails d'un signal ou d'une image. Lorsqu'un détail est faible, il peut être ignoré sans que cela affecte les données de manière visible. Le seuillage des coefficients d'ondelettes est donc un bon moyen d'éliminer les détails les plus faibles, que l'on considère comme du bruit. On peut dégager une application de ce principe :

- Le **débruitage** (ou *denoising*), qui consiste à ne conserver que les coefficients d'ondelettes les plus importants en valeur absolue, puis à reconstruire le signal à partir de ces seuls coefficients, les autres sont mis à zéro. Comme les détails les plus faibles (c'est à dire le bruit de fond par exemple) sont éliminés, le signal ou l'image apparaît sera nettoyée

Concrètement, on procède de la manière suivante que l'on soit à une ou deux dimensions :



### III.2.2 Méthodes de seuillage

Il existe plusieurs méthodes de seuillage des coefficients, que nous allons maintenant décrire.

#### III.2.2.1 Seuillage brut ou "*hard thresholding*"

Le principe du seuillage brut est simple. On commence par se fixer un seuil  $\lambda > 0$ . Si la valeur absolue d'un coefficient d'ondelette donné  $d$  est supérieure à  $\lambda$ , on garde ce coefficient tel qu'il est. Sinon, on le met à zéro :

$$d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |d| < \lambda \\ d & \text{si } |d| \geq \lambda \end{cases} \quad (3.5)$$

On peut schématiser cette transformation comme suit :

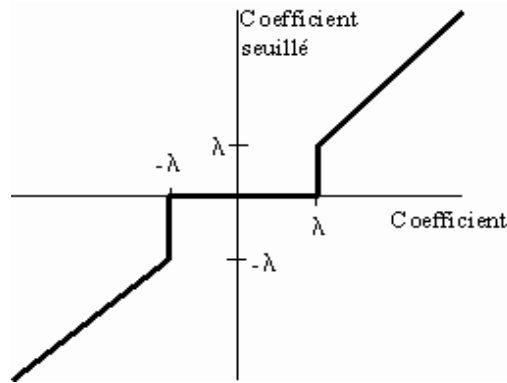


Figure III.12 : Seuillage brut

### III.2.2.2 Rétrécissement ou "soft thresholding" ou "shrinkage"

Plutôt que de simplement "conserver ou tuer" un coefficient, le rétrécissement propose d'appliquer à chaque coefficient la transformation suivante :

$$d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |d| < \lambda \\ d - \text{signe}(d) \cdot \lambda & \text{si } |d| > \lambda \end{cases}$$

qui permet de faire le seuillage des coefficients de manière plus "douce" :

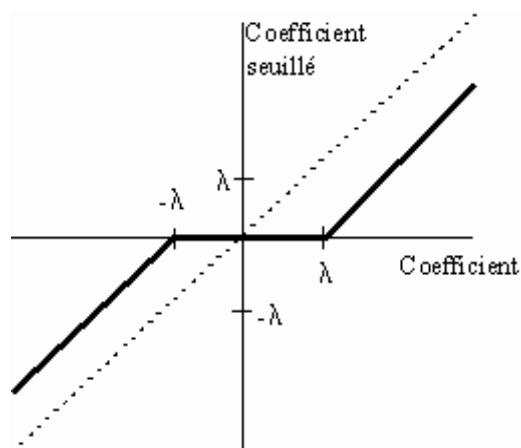


Figure III.13: soft thresholding

### III.2.3 Détermination du seuil à utiliser

#### *a. Seuil absolu*

On connaît (ou on détermine par tâtonnements) la valeur  $\lambda$  à utiliser. C'est bien sûr le cas le plus simple, mais pas le plus fréquent ni le plus réaliste.

#### *b. Seuil relatif*

On définit la valeur du seuil  $\lambda$  comme une fraction de la valeur absolue du plus grand coefficient. Par exemple, on choisit d'éliminer tous les coefficients dont la valeur absolue est inférieure à  $\sigma = 50\%$  de la valeur absolue du coefficient le plus grand :

$$\lambda = \frac{\sigma}{100} \cdot \text{Sup} \{ \text{Coefficients} \}$$

#### *c. Seuil quantitatif absolu*

Si on connaît le nombre  $N$  de coefficients d'ondelettes issus de la transformée directe, on peut choisir directement le nombre  $N'$  de coefficients que l'on veut conserver. Dans ce cas, on garde les  $N'$  plus grands coefficients, et on met tous les autres à zéro. Cette sélection est réalisée en classant d'abord les coefficients par ordre décroissant de valeur absolue, puis en sélectionnant les  $N'$  plus grands. La valeur du dernier coefficient donne le seuil à utiliser.

#### *d. Seuil quantitatif relatif*

C'est la méthode la plus intuitive : on choisit de ne conserver que  $\sigma$  % du nombre total de coefficients (les plus grands en valeur absolue). La valeur du seuil  $\lambda$  est donc déterminée par classement dans l'ordre décroissant des coefficients, de telle sorte qu'il ne reste plus que le pourcentage souhaité.

Si  $N$  est le nombre de coefficients à seuiller et  $N'$  le nombre de coefficients non nuls après

seuillage, on a:  $\sigma = 100 \cdot \frac{N'}{N}$

*e. Seuil universel ou "seuil de Donoho"*

Donoho et Johnstone proposent, pour seuiller un jeu de  $N$  coefficients, d'utiliser la valeur suivante (en seuillage brut ou en rétrécissement) pour le seuil  $\lambda$  :

$$\lambda = \sigma \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \log N}}{\sqrt{N}}$$

où  $\sigma$  est ici un facteur qui représente la variance du bruit. On peut montrer que cette méthode permet de minimiser la différence entre le signal reconstruit et le signal original.

QUATRIEME PARTIE  
RESULTATS ET INTERPRETATIONS

## QUATRIEME PARTIE : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Dans cette dernière partie, nous allons exposer les résultats de débruitage par seuillage de coefficients d'ondelettes. Puis, nous aborderons ensuite les résultats obtenus par l'analyse spectrale avec les interprétations qui conviennent.

### VI.1. Résultats de débruitage par seuillage de coefficients d'ondelettes :

Pendant les examens effectués sur un patient, nous avons acquis quelques images numériques par le gamma camera. On les appelle images scintigraphiques représentées sous forme d'une matrice.

Les matrices utilisées en imagerie ont en général un format carré de taille puissance de 2 tel 64 x 64, 128x128 et 256x256. La taille est déterminée en fonction de la résolution spatiale du détecteur et du taux de radioactivité compté.

Nous constatons que les images obtenues peuvent être apporté du bruit (comme le bruit de fond c'est à dire tout signal parasite, de faible amplitude) issu du capteur. Ce pour cette raison, nous allons appliquer la méthode de débruitage par seuillage de coefficients d'ondelettes.

En raison de l'importance des composantes hautes fréquences, on peut détecter si l'information utile se trouve dans ces fréquences ou s'il ne s'agit que du bruit de fond.

Avant d'aborder l'opération de filtrage, on convertit l'image en RGB ou image en couleur à l'image indexée. Il y a un changement d'espace couleur RGB vers les intensités d'images. L'implémentation de cette conversion se réalise, sous Matlab, avec la commande <rgb2ind>, qui peut réaliser le changement du nombre de couleur utilisée. Cette conversion est imposée pour la lecture et l'ouverture avec le logiciel Matlab.

#### 1) Image scintigraphie myocardique du patient N° 01

Dans notre cas, nous avons des images de taille 64x64 :

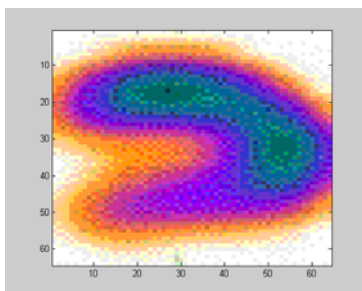


Figure IV.1 : Image en RGB bruitée

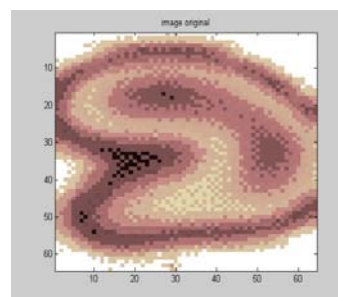


Figure IV.2 : Image indexée avec la couleur pink



La figure (IV.1) représente une image en couleur ou en RGB avec quelques bruits issus du capteur et la figure (IV.2) est sa conversion en image indexée.

La figure (IV.3) présente une image de synthèse et sa décomposition en niveau 1 ou en une seule itération. L'ondelette utilisée est celle de Haar. On obtient l'approximation et les trois détails après les filtres passe haut et passe-bas.

On réalise cette décomposition complète sous matlab avec DWT2 (c'est-à-dire en produisant coefficients et approximation) qui produit un résultat sous forme de pyramide. A chaque niveau, l'approximation (du passe-bas) est placé en haut, à gauche de la sous image correspondante. Les coefficients horizontaux (sortie du filtre passe haut) se trouvent en bas, à gauche. Les coefficients verticaux se trouvent en haut, à droite. Et les coefficients diagonaux sont en bas, à droite de chaque sous image.

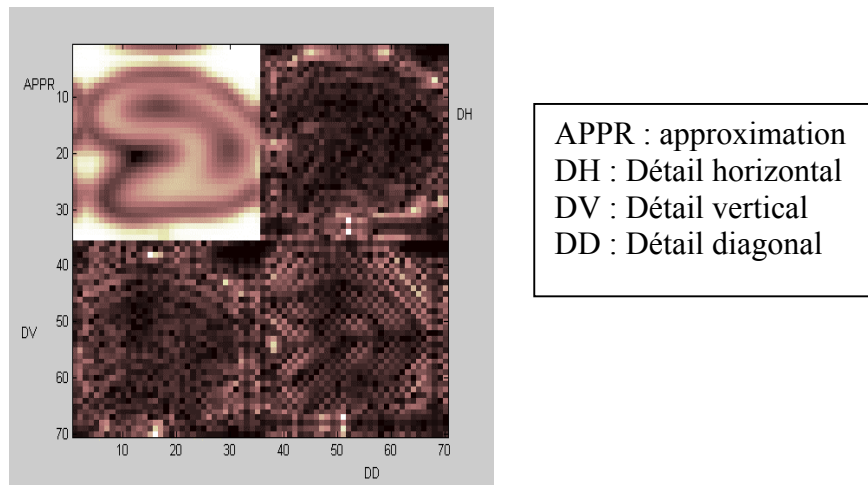


Figure IV.3 : Décomposition d'image en ondelette

En utilisant la méthode de seuillage brut avec le seuil relatif, on choisit d'éliminer tous les coefficients dont la valeur absolue est inférieure à  $\sigma = 1\%$  c'est-à-dire que

$$\lambda = \frac{1}{100} \cdot \text{Sup}(\text{coefficients}) \text{ avec } \text{Sup}=255$$

D'après cette méthode de seuillage, le module idwt2 reconstruit l'image de taille 64x64 à partir des coefficients d'Ondelettes sélectionnés et l'approximation d'où on a une image bien lisse et nette comme indiquée sur les figures(IV.4)et (IV.5) ci-dessous :

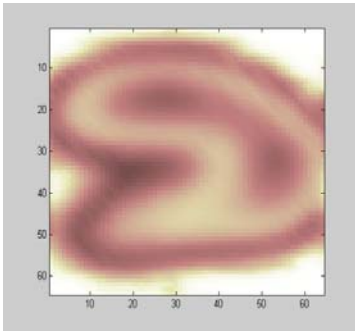


Figure IV.4 : Image débruitée

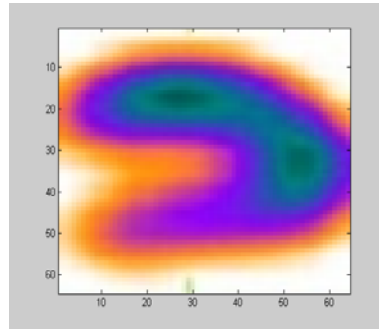


Figure IV.5 : Image débruitée en RGB

## 2)-Une autre image du patient N°01 :

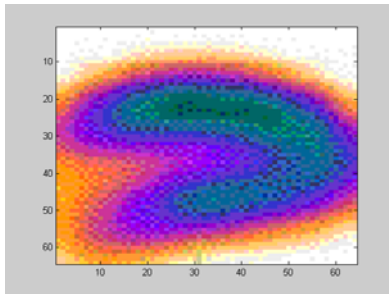


Figure IV.6 : Image en RGB bruitée

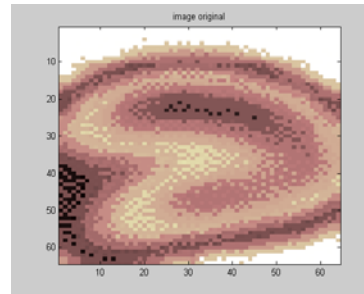
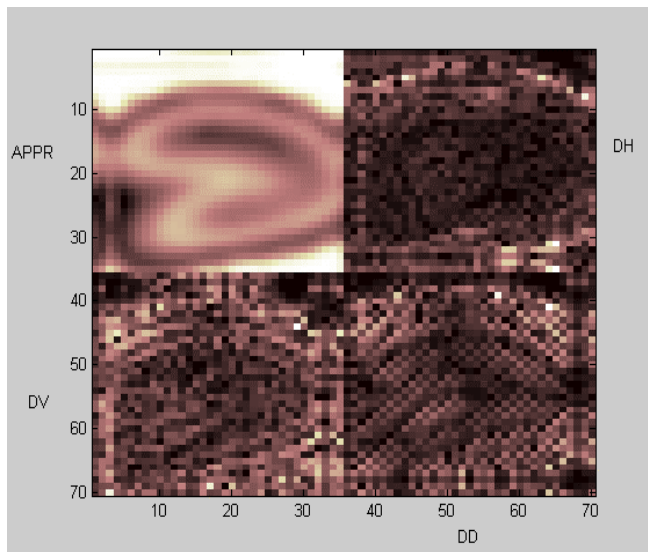


Figure IV.7 : Image indexée

Les figures (IV.6) et (IV.7) représentent les images bruitées, l'une en couleur RGB et l'autre en image indexée. D'après la décomposition complète en ondelette sous matlab avec DWT2, on obtient l'approximation et les trois détails (horizontal, vertical, diagonal). En utilisant aussi l'ondelette de Haar, nous obtenons une décomposition au niveau 1 c'est-à-dire à une seule itération, ceci est indiqué par la figure (IV.8).

Dans un premier temps, nous appliquons le seuillage de coefficients d'ondelettes avec la valeur  $\sigma = 1\%$  ce qui va nous donner  $\lambda = \frac{1}{100} \cdot \text{Sup}(\text{coefficients})$  avec  $\text{Sup}=255$ , et nous avons les coefficients seuillés.

Puis, on reconstruit l'image avec la commande `idwt2`. Enfin, nous obtenons une image bien nette qui est indiquée sur la figure (IV.9) avec sa conversion en RGB (figure (IV.10)).



APPR : approximation  
 DH : Détail horizontal  
 DV : Détail vertical  
 DD : Détail diagonal

Figure IV.8 : Décomposition d'image en ondelette avec l'ondelette de Haar

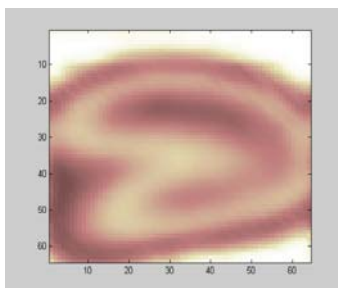


Figure IV.9 : Image débruitée après seuillage

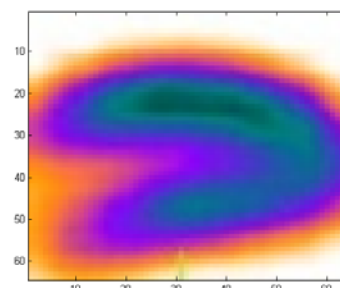


Figure IV.10 : Image débruitée en RGB

Les autres résultats se trouvent dans l'annexe A

*Conclusion :*

En guise de conclusion, on peut constater que cette méthode est plus rapide et bien adaptée au débruitage d'image.

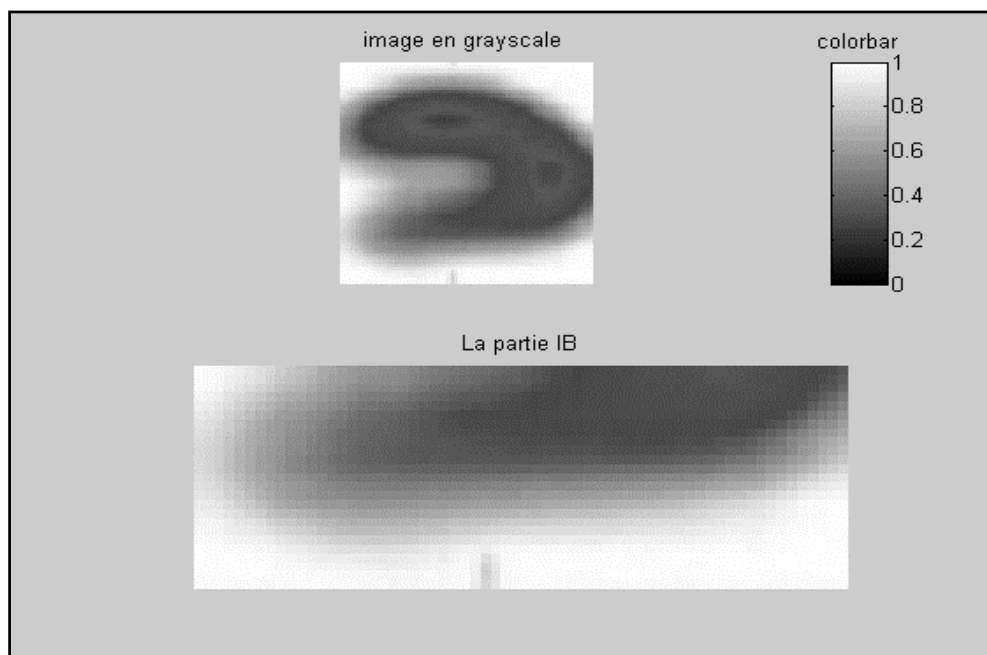
## IV.2 Résultats et interprétations de l'analyse sceptrale :

### I. Patient n°01 :

Les figures (IV.11) et (IV.13) ci-dessous nous montrent le myocarde du patient n°01 en niveau de gris. Elles sont représentées par la matrice carrée de taille 64x64 avec le colorbar et la partie IB (infero -basale) de taille 20x64. Ce territoire inféro-basal montre une hypo perfusion du traceur.

Remarquons qu'il est préférable de convertir l'image en couleur à l'image niveau de gris, car l'image en couleur utilise beaucoup de mémoire et le nombre élevé des couleurs ne facilite pas l'interprétation.

*1°) Etude de la perfusion de Myocarde à l'effort montrant la diminution de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :*



FigureIV.11 : Myocarde à l'effort du patient n°01

Prenons la partie IB du myocarde et analysons par le sceptra qui est basé sur la Transformée de Fourier Discrète. Notons que la partie IB est un signal numérique discret à deux dimensions sous forme d'une matrice de taille (20x64). Elle est représentée par son code de couleur.

D'après cette analyse, nous obtenons une nouvelle matrice de même taille que la précédente 20x64. Comme nous avons vu à la définition, la méthode spectrale permet d'estimer les périodicités ou les fréquences présentes dans un signal.

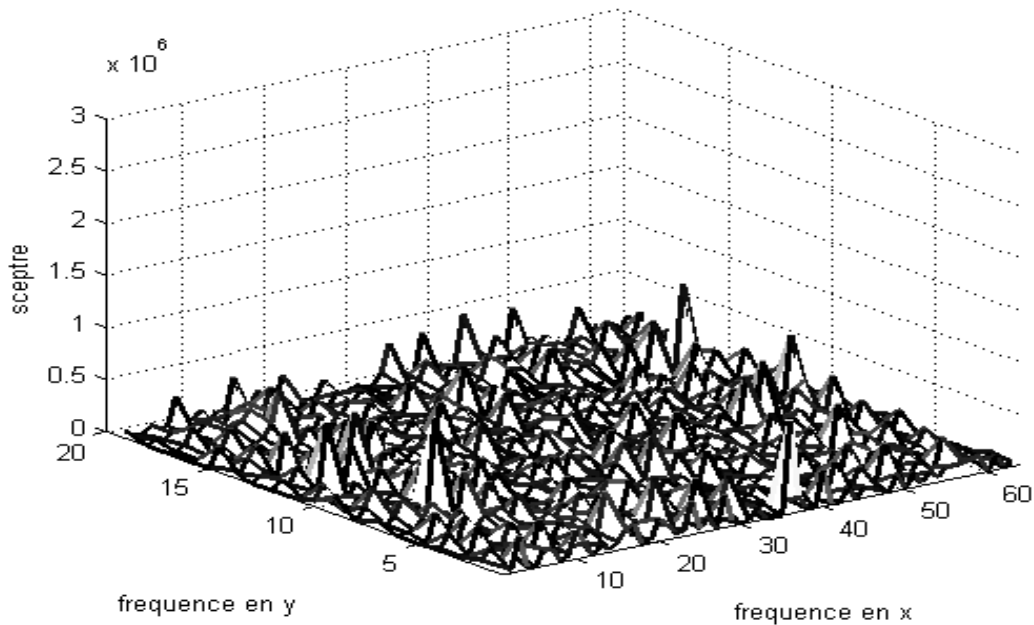
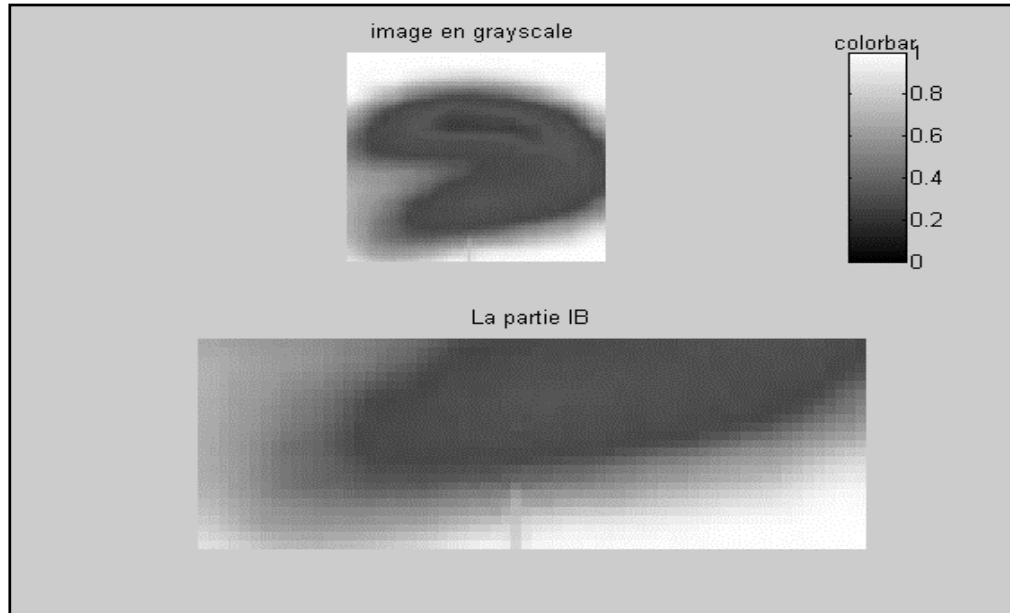


Figure IV.12 : Représentation graphique du spectre du Myocarde à l'effort au niveau territoire IB

D'après cette figure (IV.12), nous voyons que tous les pics ont des valeurs d'amplitudes faibles. Ceux-ci nous montrent que, il n'y a aucune fréquence significative au niveau de ce territoire. On pourra interpréter d'une autre façon que le nombre de scintillations représenté avec son code couleur est faible. Nous pouvons affirmer que la fixation du produit radioactif dans cette partie du myocarde est insuffisante.

2°) Etude de la perfusion de Myocarde au repos montrant l'augmentation de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :



FigureIV.13 : Myocarde au repos du patient n°01

La figure (IV.14) ci-dessous donne le résultat de l'analyse spectrale du signal (la partie IB au repos du patient n°01) à deux dimensions.

D'après cette figure (IV.14), il y a quelques fréquences significatives au niveau de ce territoire. Celles-ci sont représentées par les pics qui ont des amplitudes très élevées.

Autrement dit l'intensité des couleurs au rapport avec le nombre des scintillations dans ce territoire est forte. Le marqueur est fixé de façon intense sur le muscle.

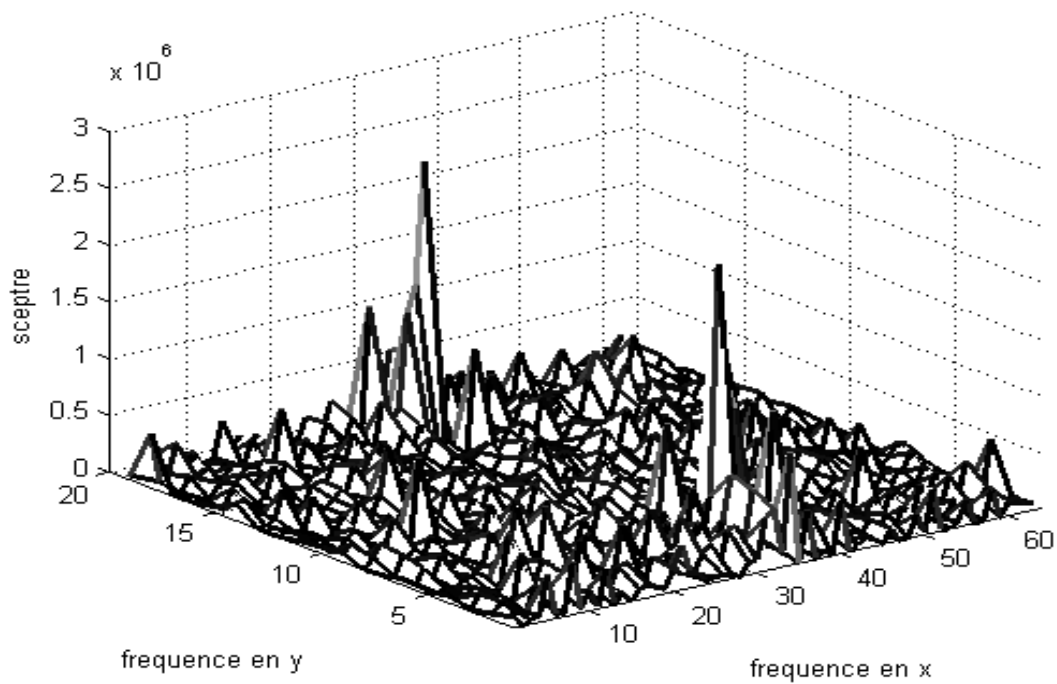


Figure IV.14 : Représentation graphique du sceptre du Myocarde au repos au niveau territoire IB.

### 3) Conclusion :

En comparant les résultats d'analyse pour les deux examens, l'un à l'effort et l'autre au repos, on peut distinguer :

- A l'effort, une faible captation du produit radioactif : le vaisseau n'arrive pas à irriguer le territoire IB. Le marqueur ne peut pas se fixer sur cette zone non irriguée.
- Au repos, une fixation relativement intense du marqueur.

On en déduit l'existence d'une diminution de la perfusion au niveau du territoire IB à l'effort. Le patient N°01 a un trouble de l'irrigation myocardique à l'effort due à des altérations de l'artère coronaire droite.

## II. Patient N° 02

Les figures (IV.17) et (IV.19) représentent le myocarde du patient N°02, sous forme de signal à 2 dimensions ayant la matrice de taille 64x64. Comme dans le cas du patient N°01, les images étudiées sont en niveau de gris. Enfin, on prend la partie IB (partie anatomique du cœur) sous forme d'une matrice de taille 20x64 avec le colorbar.

a. *Etude de la perfusion de Myocarde à l'effort montrant la diminution de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :*

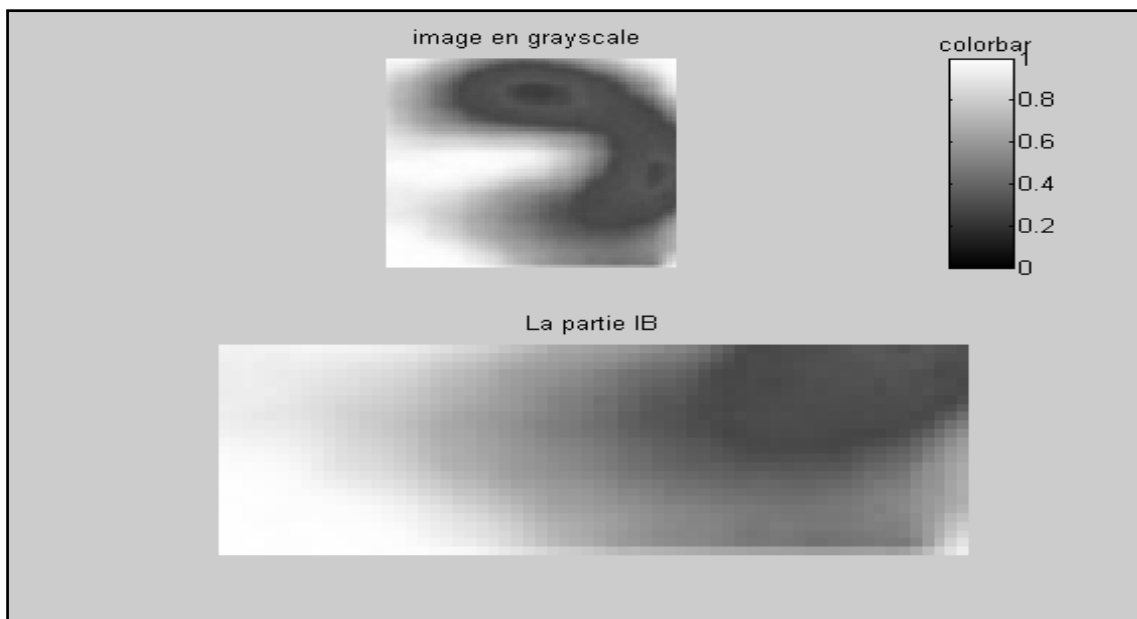


Figure IV.15 : Myocarde en effort et la partie IB du patient °02

On va faire la transformation du signal (la partie IB) par analyse spectrale et on a une nouvelle matrice de même taille que la précédente. La représentation graphique du résultat obtenu est indiquée par la figure (IV.16) :



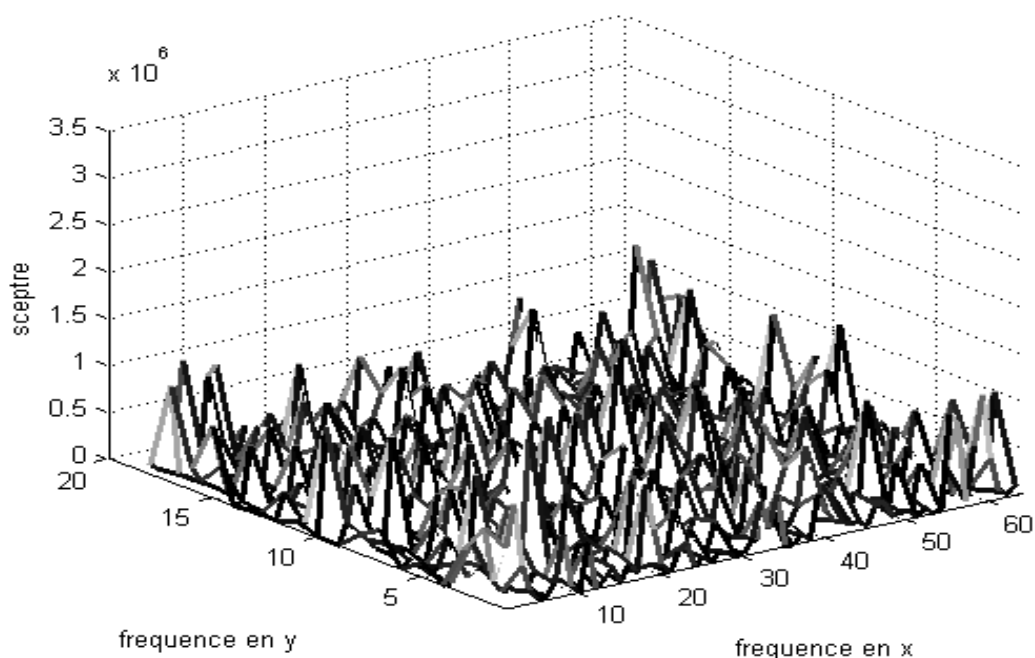


Figure IV.16 : Représentation graphique du spectre de la IB à l'effort

Nous voyons dans cette figure, qu'il n'y a plus de fréquence significative ; les pics ont des niveaux du spectre très bas dû au petit nombre de scintillations représentés par son code couleur. La fixation du produit radioactif dans ce territoire est minime.

*b. Etude de la perfusion de Myocarde au repos montrant l'augmentation de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :*

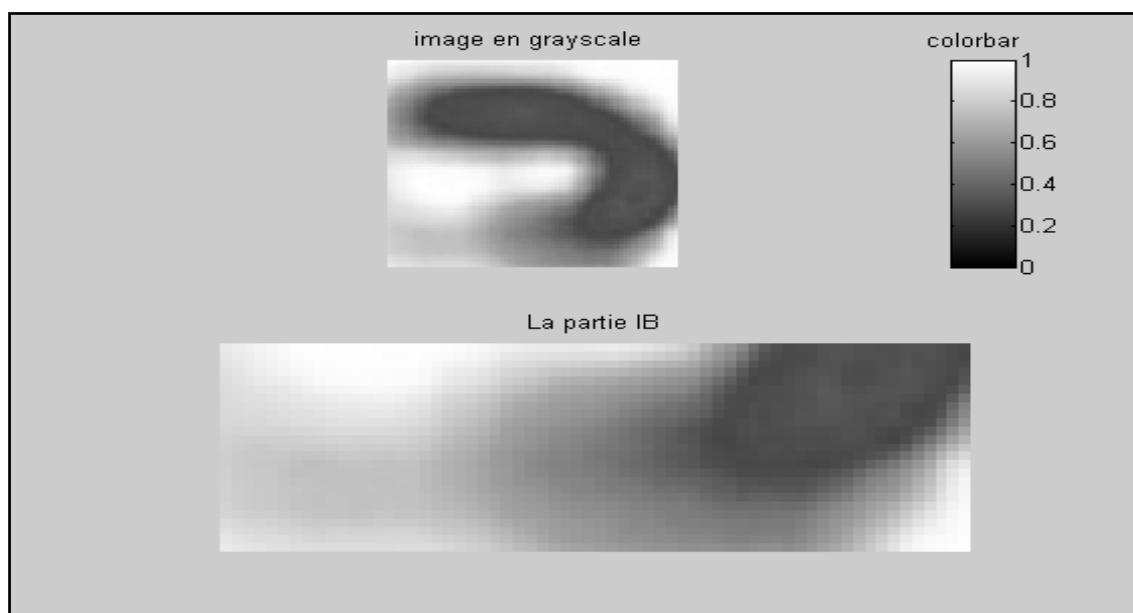


Figure IV.17 : Myocarde au repos et la partie IB du patient n°02

La figure (IV.18) ci-dessous nous donne le résultat de l'analyse spectrale du signal (la partie IB au repos du patient n°02) à deux dimensions. On a une matrice de taille 20x64

En ce qui concerne cette figure, on constate qu'il y a quelques fréquences significatives. Ceux-ci sont indiqués par les pics qui ont de niveau du spectre élevé. Par contre, les autres pics de niveau inférieur montrent les autres fréquences. Nous constatons que le nombre de scintillations présent dans cette image est plus élevé. La fixation du produit radioactif dans cette partie IB du myocarde est intense.

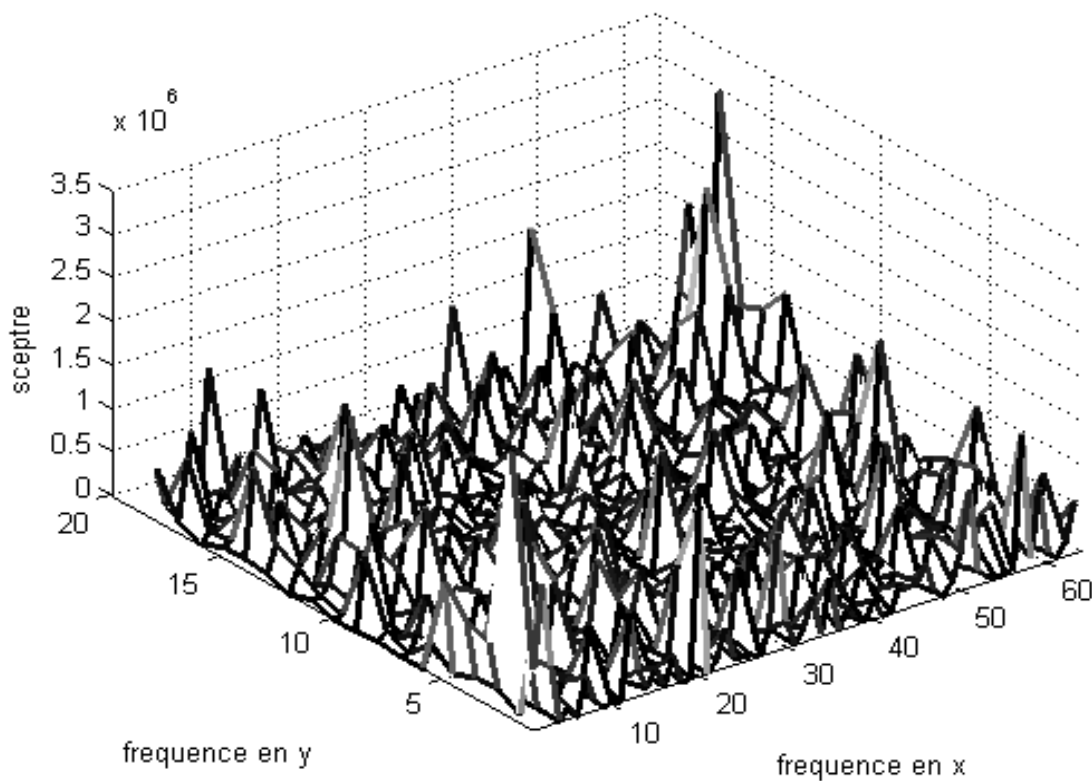


Figure VI.18 : Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB au repos

Conclusion :

Si on compare les deux examens, l'un à l'effort et l'autre au repos, on peut conclure que :

- au repos, le sang arrive à irriguer la partie IB, et les produits radioactifs sont détectés.
- A l'effort, l'irrigation diminue et les produits radioactifs ne sont plus décelables.

On peut affirmer qu'il y a une diminution de la perfusion du myocarde à l'effort dans ce territoire. Le patient N°02 a un problème au niveau de son irrigation cardiaque.

III. Patient N.03 :

*1°) Etude de la perfusion de Myocarde à l'effort montrant la diminution de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :*

Comme les deux patients précédents, nous allons prendre l'image du myocarde du patient N°03 à l'effort avec sa partie Infero-Basale.

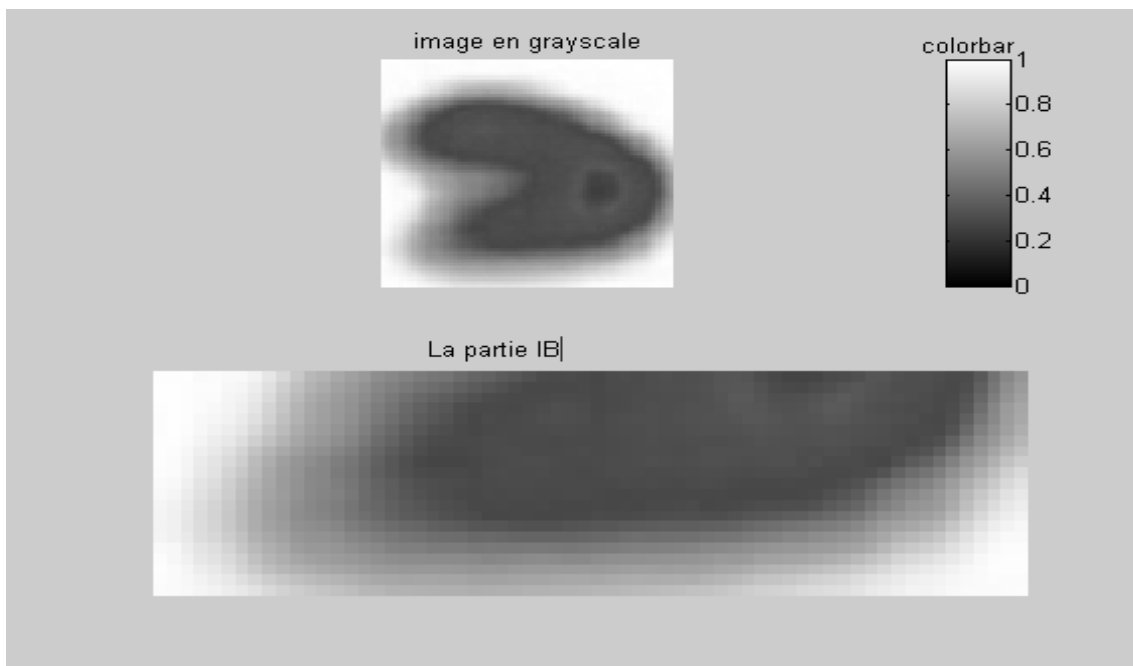


Figure VI 19 : Myocarde à l'effort avec la partie IB du patient n°03

D'après l'analyse spectrale de la partie IB de taille 20x60, nous avons la figure (IV.20) : les fréquences présentes dans cette image nous montrent le nombre de scintillations comptés représentées par son code couleur. Les pics ont un niveau d'amplitude très bas. La fixation du produit radioactif dans ce territoire est faible

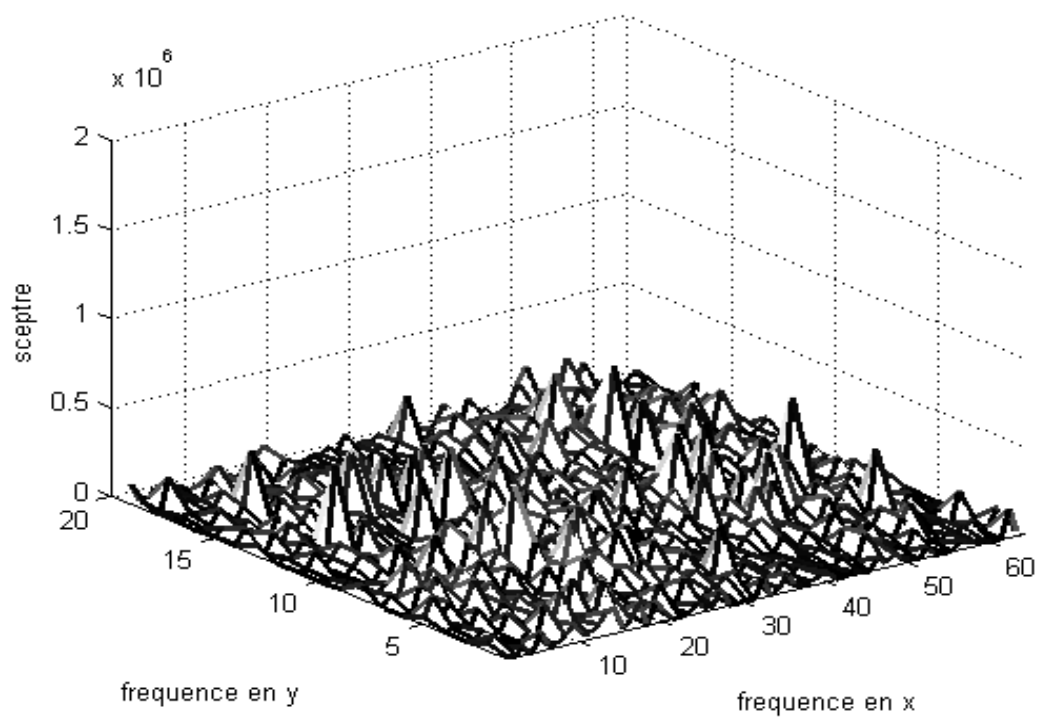


Figure IV 20 : Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB à l'effort

2°) *Etude de la perfusion de Myocarde au repos montrant l'augmentation de la perfusion au niveau territoire IB (infero - Basale) :*

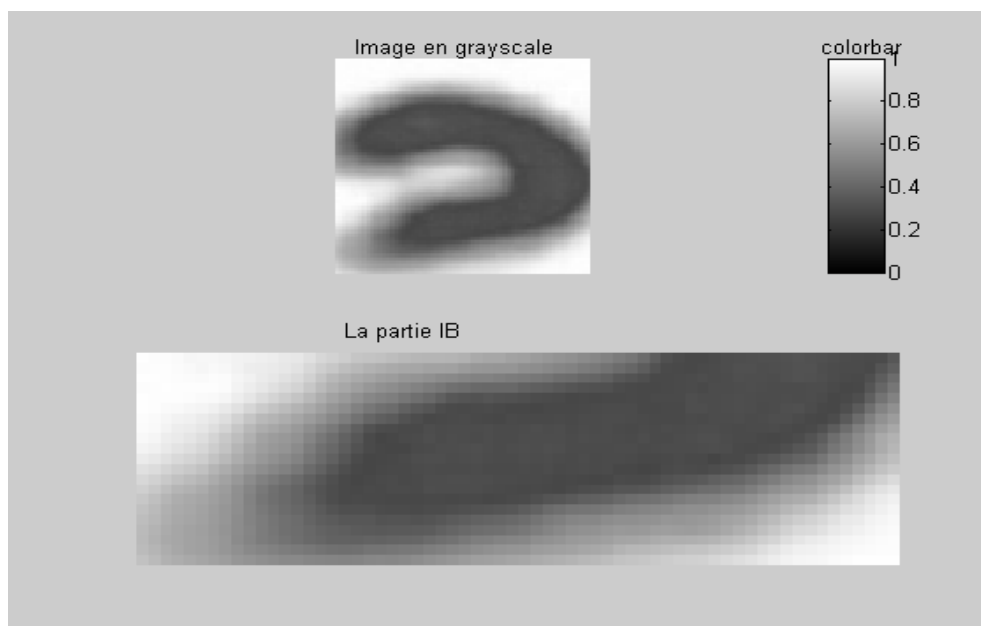


Figure VI 21 : Myocarde au repos avec la partie IB

L'image du myocarde du patient au repos montre une augmentation du niveau d'amplitude du spectre .Ceci est du au nombre élevé de scintillations. La fixation du produit radioactif dans ce myocarde est intense.

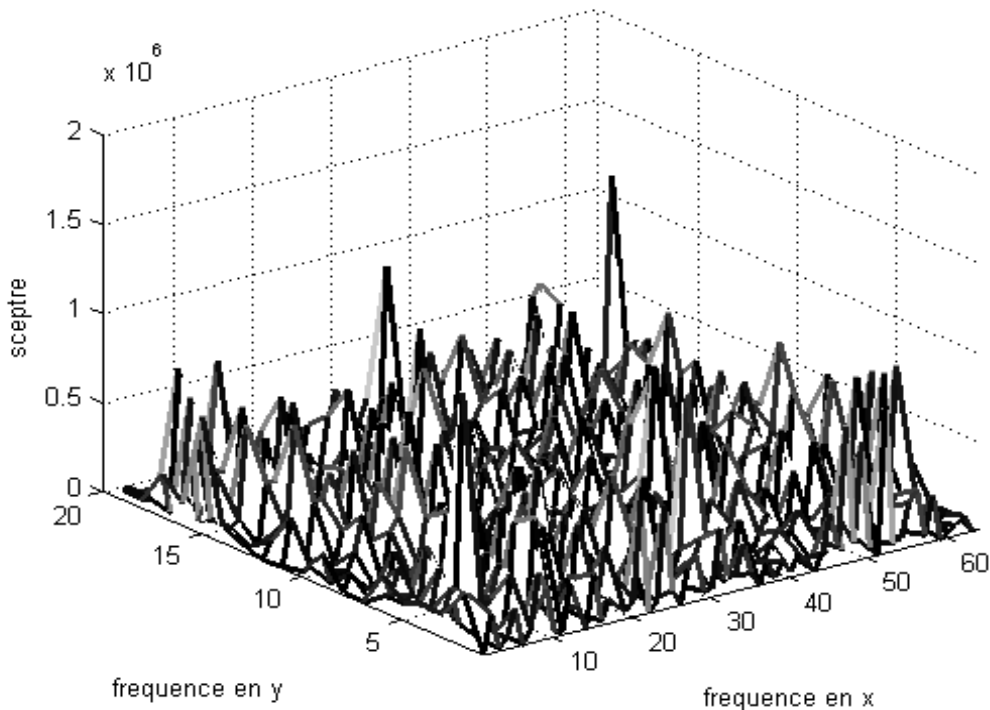


Figure IV 22 : Représentation graphique de l'analyse spectrale de la partie IB au repos

Conclusion :

En comparant les deux examens, l'un à l'effort et l'autre au repos, on pourra dire que à l'effort, le sang n'arrive plus au niveau de ce muscle. Ceci est confirmé par une faible fixation du produit radioactif capté peu nombreux .Cependant, au repos le coronaire arrive à irriguer la partie Infero-Basale (IB), et la fixation du produit radioactif est élevée. On en déduit qu'il y a une diminution de la perfusion du myocarde à l'effort dans ce territoire. Le patient a également un problème au niveau de son irrigation cardiaque.

Afin de comparer l'état des patients au niveau de leur myocarde, nous allons compter le nombre de pics obtenus par analyse spectrale avec un seuil. Ce seuil est déterminé par le niveau d'amplitude du spectre. Pour ce faire, on ne tient compte que les

pics qui ont de valeur supérieure ou égale au seuil. Dans ce cas, on fait le comptage sur le même examen c'est-à-dire soit à l'effort, soit au repos.

Dans ce travail, nous avons pris l'examen à l'effort avec le seuil dans l'intervalle  $]0.125 * 10^6, 0.50 * 10^6 [$

Pour toutes les figures suivantes (figures IV.23 jusqu'à IV.28), le point noir représente le pic du sceptre. Notons K le nombre de pics trouvés.

$$\underline{\text{Seuil}} = 0.12510^6$$

Patient N°01

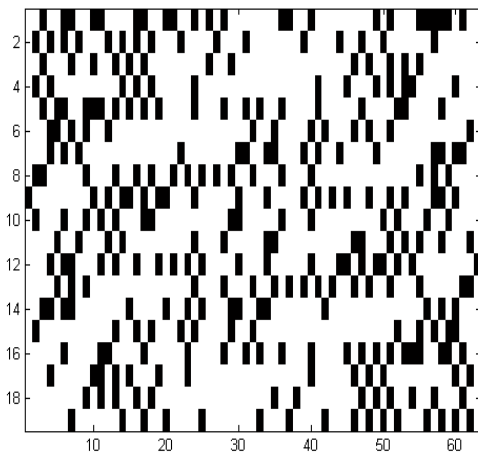


Figure IV.23 : K=311 nombre de pics présents pour le patient N°01 : 25,90%

Patient N°02

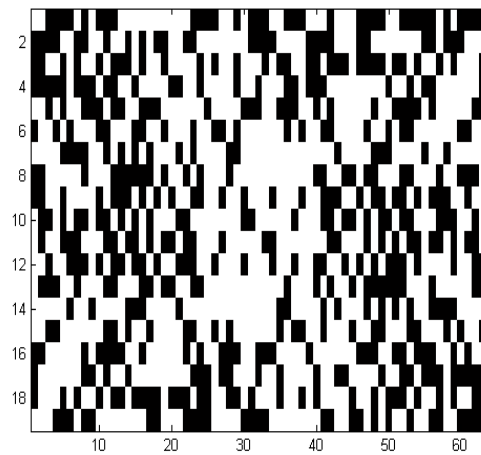


Figure IV.24 : K=502 nombre de pics présents pour le patient N°02 : 41,94%

Patient N°03

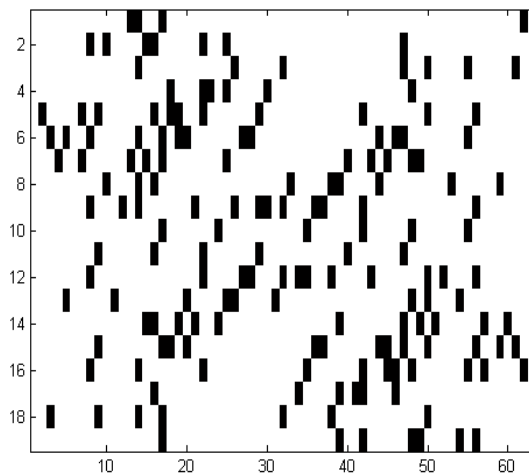


Figure IV.25 : K=168 nombre de pics présents pour le patient N°03 : 14,04%

$$\text{Seuil} = 0.30 * 10^6$$

Patient N°01

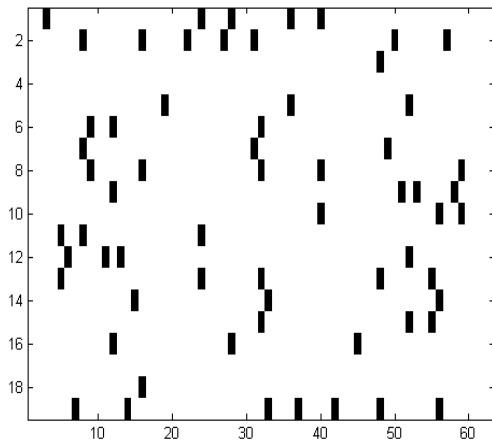


Figure IV.26 :K=63 : nombre de pics présents pour le patients N°01:5,26%

Patient N°02

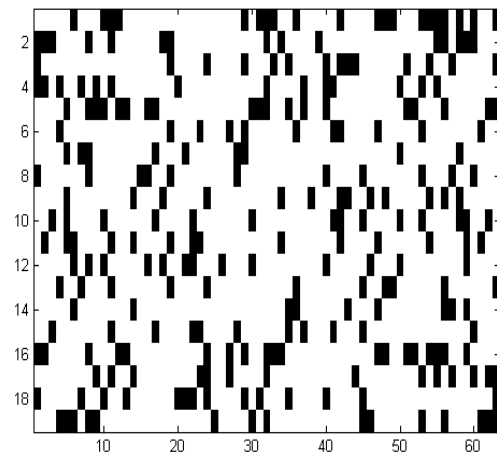


Figure IV.27 :K=260 : nombre de pics présents pour le patients N°02 :21,72%

Patient N°03

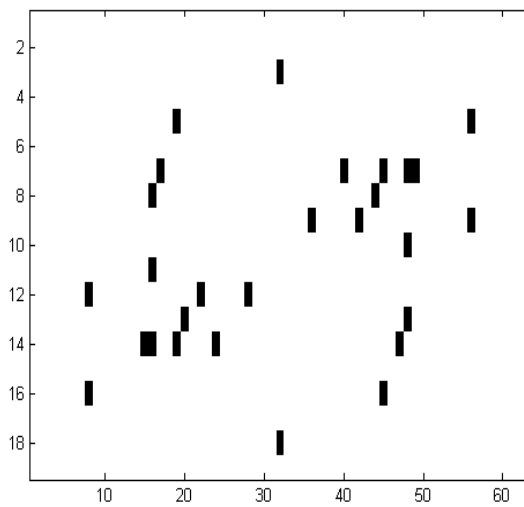


Figure IV.28 : K=28 : nombre de pics présents pour le patient N°03 :2,34%

Avec un seuil bien déterminé, nous pouvons comparer l'état de trois patients en comptant le nombre de pics qui ont une amplitude supérieure ou égale au seuil. Nous savons que les trois patients ont les mêmes problèmes au niveau de leur myocarde mais de gravité différente.

On peut comparer le degré de gravité de la maladie de ces 3 patients.

Les figures ci-dessus nous montrent que les patients N°01 et N°03 ont de problème plus grave par rapport au patient N°02

Conclusion :

L'analyse sceptrale nous permet également d'évaluer le degré de gravité de la maladie myocardique des plusieurs patients en comparant leur image sceptrale.



## CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons fait le traitement numérique d'images par analyse fréquentielle. Cette étude a pour but de proposer une méthode de traitement d'images scintigraphiques afin d'améliorer et faciliter les interprétations. Pour ce faire, nous avons étudié la perfusion myocardique au niveau du territoire Infero-Basale de trois patients en faisant deux examens : l'un à l'effort et l'autre au repos et on évalue le degré de gravité de la maladie de chaque patient. Ces examens sont précédés d'une injection d'un produit radioactif dans le sang.

Avant d'aborder le traitement des images acquises, nous avons constaté qu'il y a quelquefois des bruits ou des parasites issus du capteur. Pour améliorer les images brutes obtenues, nous avons procédé à la technique de débruitage ou filtrage que nous a été déjà présentée dans la troisième partie. Cette technique se base sur le seuillage des coefficients d'ondelettes avec le seuil relatif qui constitue l'approche la plus simple et la plus rapide.

Avec un bon choix du seuil utilisé, de l'ordre de  $\sigma = 1\%$ , cette méthode présente l'avantage de trouver les résultats fiables malgré sa simplicité. De plus elle convient bien aux signaux stationnaires et aux signaux non stationnaires.

L'analyse numérique des images (considérer comme des signaux à deux dimensions), après le débruitage, se fait avec l'analyse spectrale qui se base sur la Transformée de Fourier Discrète.

Le principal inconvénient de cette méthode spectrale est la perte de certaines informations sur l'image. Par conséquent, la reconstitution de l'image initiale donne de mauvais résultat. Ceci n'a pas d'importance dans notre cas, car notre objectif a été d'estimer les périodicités ou les fréquences présentes dans une image.

Pourtant, l'analyse spectrale qu'on a utilisée ici est la plus appropriée parce qu'elle est à la fois simple et très performante : l'application que nous avons effectué sur les différents patients nous a montré qu'on peut déterminer la diminution de la perfusion myocardique à l'effort par rapport au repos. Ainsi, cette analyse nous a permis également d'évaluer le degré de gravité de la maladie de chaque patient, en appliquant le même examen avec un seuil bien déterminé.

Nous imaginons utiliser la méthode spectrale à toutes améliorations de l'imagerie médicale. De plus, dans le plan éloigné, le traitement numérique d'images est un élément utile pour le diagnostic de l'imagerie médicale.

# ANNEXES

ANNEXE A :

I. RESULTATS DE DEBRUITAGE PAR SEUILLAGE DES COEFFICIENTS D'ONDELETES :

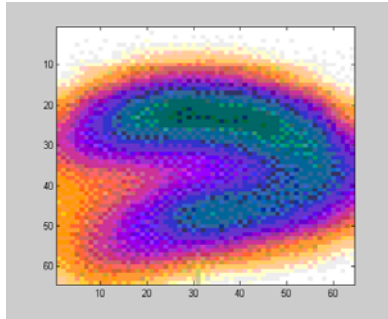


Figure A.1 : Image en RGB bruitée

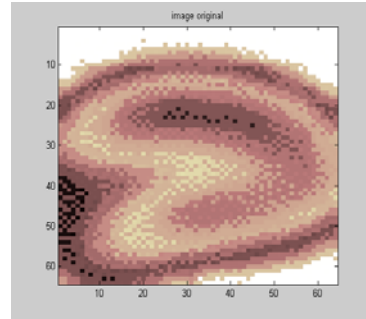
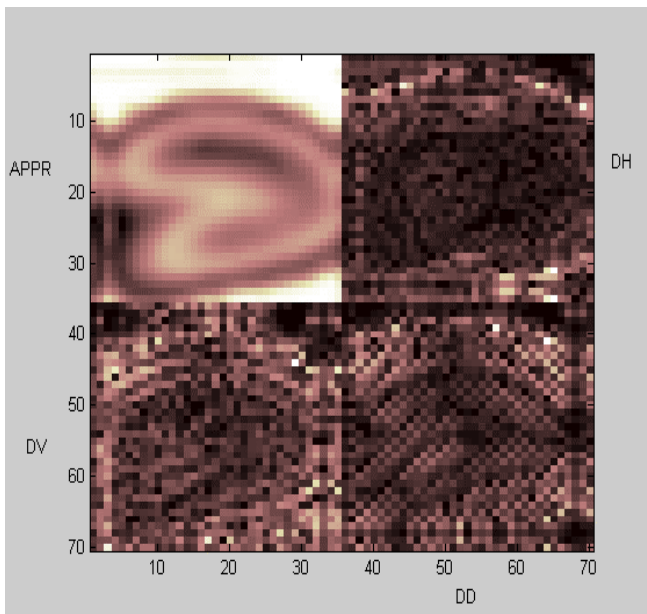


Figure A.2 : Image indexée



APPR : approximation  
DH : Détail horizontal  
DV : Détail vertical  
DD : Détail diagonal

Figure A.3 : Décomposition d'image en ondelette avec l'ondelette de Haar

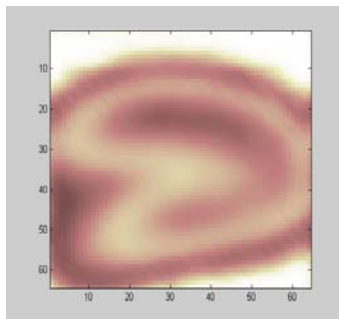


Figure A.4 : Image débruitée après seuillage

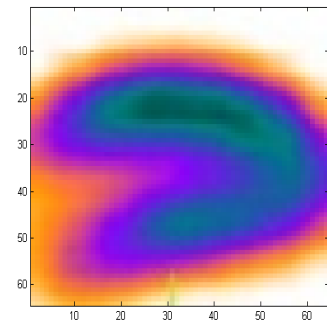


Figure A.5 : Image débruitée en RGB

## ANNEXE B :

### Analyse multirésolution [7]

#### Aspect mathématiques :

Dans ce paragraphe, nous allons intégrer à l'aspect mathématique de l'AMR.

L'analyse d'une image à une seule échelle est inefficace. Les objets formant une image sont de nature fréquentielle différente, apparaissant à une échelle (résolution) puis disparaissant à une autre. Une étude hiérarchique de l'image fait coïncider le contenu spectral pour une résolution. Burt et Adelson [10] ont défini une pyramide multirésolution afin de traiter une image en basse résolution puis de l'augmenter si nécessaire.

Le signal sera projeté sur des fonctions d'analyses pour toutes les résolutions  $2^{-j}$  qui composent le signal de longueur  $2^j$  échantillons avec  $j \in \mathbb{Z}$ . En effet, comme nous le verrons par la suite, le signal d'approximation de résolution  $2^{-j}$  sera ensuite décomposé pour la construction du signal d'approximation et de détails de résolution  $2^{-(j+1)}$ . L'itération de ce processus conduit à un pavage temps-fréquence. L'analyse étant réversible sous certaines conditions, on peut reconstruire le niveau  $i$  d'approximation à partir des sous-bandes  $i+1$ . Après plusieurs itérations le signal original peut-être reconstruit.

L'approximation d'une fonction à une résolution  $2^{-j}$  est déterminée par des moyennes locales sur  $2^j$  échantillons. D'une façon plus formelle, l'approximation d'une fonction à la résolution  $2^{-j}$  est définie comme sa projection orthogonale sur un espace  $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ . L'espace  $V_j$  regroupe toutes les approximations possibles à l'échelle  $2^j$ . La projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$  est la fonction  $f_j \in V_j$  qui minimise la distance  $\|f_j - f\|$ . La transformée en ondelettes offre une étude pyramidale. L'analyse se fait à partir de dilatation et de translation de l'ondelette mère. Cette transformation décrit les détails d'une image pour chaque niveau de résolution. Ces détails correspondent à la différence d'information entre deux niveaux de résolutions successives.

### La multirésolution :

Une suite  $\{V_j\}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  est une approximation multirésolution si elle vérifie pour tout  $f$  de cet espace :

$$\text{i) } \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k)$$

$V_j$  est invariant pour toute translation de longueur proportionnelle à l'échelle  $2^{-j}$ . Il existe une grille spatiale ou temporelle sous-jacente par pas de  $2^j$ .

$$\text{ii) } \forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \in V_j$$

Une approximation à la résolution  $2^{-j}$  contient toute l'information nécessaire à la construction d'une résolution plus grossière  $2^{-(j+1)}$ , c'est une propriété de causalité.

$$\text{iii) } \forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$$

La dilatation par un facteur de 2 agrandit les détails d'un facteur de 2, on a bien une approximation à une résolution plus grossière. Il existe une grille fréquentielle sous-jacente en progression géométrique.

$$\text{iv) } \lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} . \text{ L'intersection des } V_j \text{ est réduite à } 0 \text{ dans}$$

$L^2$ . Si la résolution est trop faible, c'est-à-dire que  $2^{-j}$  tend vers 0, on perd tous les détails. A résolution minimale, on perd toute l'image.

$$\text{v) } \lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) . \text{ L'adhérence d'un espace désigne le plus}$$

petit espace fermé contenant cet espace. D'un autre côté, si la résolution  $2^{-j}$  tend

vers  $+\infty$ , l'approximation converge vers le signal. A résolution infinie, on reproduit parfaitement tous les signaux

vi) il existe  $\theta$  tel que  $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de Riesz de  $V_0$ .

Cette existence fournit un théorème de discrétisation. Chaque résolution est engendrée par une base d'atomes (boîte d'Heisenberg) traduits de  $2^j$ . Une base de Riesz est une *frame\** de vecteurs indépendants.

### Espaces d'approximation

Les espaces des détails se construisent par AMR. La construction nécessite une fonction que nous allons définir. Une fonction normée  $\phi_0(u)$  de  $V_0$ , où l'ensemble de ses traduits est une base de  $V_0$ :  $\phi(u-k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

La fonction  $\phi_0(u)$  est une *fonction échelle* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- les fonctions  $\phi_{j,k}(u) = 2^{-j/2} \phi_0(2^{-j}u - k)$

avec  $k, j \in \mathbb{Z}$  constituent une base de  $V_j$ .

-  $\phi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0\left(\frac{u}{2}\right)$  est compris dans  $V_0$ . Elle représente une combinaison

linéaire des fonctions de base  $(\phi_0(u-k))$  de  $V_0$ .

Voici l'équation reliant deux échelles :

$$\phi(u) = \sum_k u_k \phi_0(u-k) = (u * \phi_0)(u)$$

Avec  $u_k$  la séquence génératrice (le filtre) de la fonction échelle. Elle décrit la multirésolution en permettant d'engendrer la famille des fonctions d'échelles aux différentes résolutions.

Les fonctions d'échelles  $\phi_{j,k}$  engendrent pour  $k \in [-\infty, +\infty]$  espace des approximations à l'échelle  $j$ .

### Espace des détails :

L'espace des détails est complémentaire à l'espace des approximations. La construction de cet espace se fait à partir de la fonction échelle  $\phi_o$  qui génère une ondelette mère  $\psi_o$ . L'espace des détails à l'échelle  $j$  est engendré par une famille d'ondelettes obtenues par changement d'échelle et par translation de l'ondelette mère :

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi_o(2^{-j}u - k)$$

L'ondelette  $\psi_1(u)$  est une combinaison linéaire des fonctions d'échelle translattées :

$$\psi_1(u) = \sum_k v_k \phi_o(u-k) = (v^* \cdot \phi_o)(u)$$

On peut écrire cette relation en utilisant  $\phi_{j,k}$  :  $\psi_o(v) = \sqrt{2} \sum_k v_k \phi_o(2v-k)$

Comme les fonctions d'échelle, les ondelettes sont engendrées par une séquence génératrice (un filtre),  $v_k$ , qui définit l'AMR.

Appelons  $a_t(j,k)$  et  $d_t(j,k)$  les approximations et les détails aux échelles  $j$  et aux positions  $k$ . Les relations suivantes présentent le calcul des coefficients :

$$\begin{aligned} a_t(j,k) &= \langle \phi_{j,k}, f(t) \rangle = \sum_p u_p (\phi_{j-1,2k+p}, f(t)) \\ &= \sum_n u_{n-2k} \langle \phi_{j-1,n}, f(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_t(j,k) &= \langle \psi_{j,k}, f(t) \rangle = \sum_p v_p (\psi_{j-1,2k+p}, f(t)) \\ &= \sum_n v_{n-2k} \langle \psi_{j-1,n}, f(t) \rangle \end{aligned}$$



Le calcul des sous-bandes d'approximations et des détails à l'échelle  $j$  se fait, en fonction des coefficients d'approximation à l'échelle  $j-1$  :

$$a_t(j, k) = \sum_n u_{n-2k} a_t(j-1, n)$$

$$d_t(j, k) = \sum_n v_{n-2k} d_t(j-1, n)$$

**La synthèse :**

Pour recomposer le signal ou un niveau d'approximation inférieur, une base réciproque est utilisée, égale à la base d'ondelette dans le cas orthogonal. En utilisant les propriétés des espaces emboîtés, l'espace d'approximation  $j-1$  est la somme des espaces d'approximation et de détails de niveau  $j$  :

$$a_t(j-1, k) = \sum_n a_t(j, n) \tilde{h}(k-2n) + \sum_n d_t(j, n) \tilde{g}(k-2n) \quad (3.13)$$

avec  $\tilde{h}(n) = u_n$  et  $\tilde{g}(n) = v_n$

Pour obtenir l'approximation au niveau  $j-1$ , des zéros sont entrelacés et les filtres passe-haut  $\tilde{g}(n)$  et passe-bas  $\tilde{h}(n)$  sont appliqués. Ainsi par itération, on reconstruit le signal à partir de ses approximations et de ses détails.

## REFERENCES :

- [1] Larsson .HB, Fritz-Hansen T,Rostrup E , 1996: Myocardial perfusion modeling using MRI. Magn .Reson Med , volume 35, n°5.pp16-20
- [2] Derclerok JEROME, 1997 : Etude de la dynamique d'images tridimensionnelles (Thèse).
- [3] A. Broisat, 2005 : Médecine nucléaire et maladie coronarienne : Evaluation de traceurs de la perfusion myocardique et de la plaque d'athérome vulnérable. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- [4] Image Processing Toolbox User's Guide ,with Matlab
- [5] D. Keren, M. Osadchy, 1999: Restoring subsampled color images, Machine Vision and Applications, 11, pp197-202
- [6] O. Le Cadet, , 2003 : Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images médicales, Rapport d'activité.3eme année, Région Rhône Alpes.
- [7] J. C. Feauveau, 1990 : Analyse multirésolution avec un facteur de résolution  $\sqrt{2^m}$  , in Journal de Traitement du Signal, vol. 7 (2), pp. 117-128.
- [8] :J. MAX et Collaborateurs, 1987 : Méthode et technique de traitement du signal.
- [9] M. Barlaud et C. Labit., 2002 : Compression et codage des images et des vidéos. Hermès Science publications.
- [10] Sylvain FASSINO, 2004 : Agrandissement d'images et de séquences vidéo.Thèse.274p.
- [11] Matlab (Logiciel d'analyse spectral) Signal Processing Toolbox.