

Réseaux à composantes unicycliques avec contraintes de type Steiner

Dans ce chapitre, nous étudions une autre variante du problème de synthèse d'un réseau à composantes connexes unicycliques. Nous intégrons une contrainte de type Steiner : certains sommets doivent appartenir à un cycle. Ce problème est une généralisation du problème de calcul d'un 2-couplage de coût minimum. Nous montrons dans ce chapitre que le problème que nous venons d'introduire est également facile à résoudre. Une formulation linéaire exacte et étendue sera donnée. Nous présentons également une description partielle de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de réseaux vérifiant les contraintes.

3.1 Introduction

Étant donné un graphe pondéré et non orienté noté par $G = (V, E)$, et un sous-ensemble de sommets $S \subset V$, on veut calculer un sous-graphe $G' = (V, E')$ ($E' \subset E$) couvrant et de poids minimum, avec des composantes unicycliques, tel que chaque sommet de S appartient à un cycle. Un exemple de graphe de Steiner avec des composantes unicycliques est donné dans la figure 3.2 (la partie gauche), où $|V| = 150$ et S contient 70 sommets qui sont représentés par des carrés noirs.

Nous avons déjà montré l'intérêt des graphes à composantes connexes unicycliques pour construire des réseaux ayant un certain niveau de robustesse.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux contraintes de type Steiner. Les sommets de S sont supposés être "importants" et doivent être protégés contre les pannes des liens. C'est pour cette raison qu'ils doivent appartenir à des cycles.

Si ce type de contraintes de Steiner ne sont pas imposées ($S = \emptyset$), nous savons déjà que le problème est facile. Si $S = V$, on obtient le problème de 2-couplage parfait qui est un problème facile (voir, e.g., [117]).

Il existe aussi des liens avec le problème de l'étoile anneau. Dans ce cas, on cherche un seul cycle qui traverse certains sommets et que les autres seront connectés à ceux du cycle. Le problème de l'étoile anneau et ses applications sont étudiés dans [2, 82]. Quelques contraintes de type Steiner sont aussi considérées dans [123] où quelques sommets doivent appartenir au cycle, et s'il y a un sommet qui n'est pas sur le cycle, alors il existe une pénalité à payer. Le but est alors de trouver un cycle qui passe par un sous-ensemble de sommets incluant S et minimisant le coût du cycle et les pénalités des sommets non visités [123]. Ce problème est évidemment NP-Difficile.

Dans notre problème, le nombre de composantes connexes n'est pas fixé d'avance. Certains sommets dont ceux de S appartiennent aux cycles, alors que les autres doivent être connectés aux cycles par des arbres.

Ce chapitre sera organisé ainsi : on commence par donner une première formulation mathématique dans la section qui suit. Ensuite, on présente dans la section 3.3 un algorithme polynomial et une formulation linéaire étendue du problème étudié. Dans la Section 3.4, on présente une description partielle de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des graphes à composantes connexes unicycliques respectant une contrainte du type Steiner. Les algorithmes de séparation de quelques inégalités valides sont décrits dans la Section 3.5. Un de ces algorithmes de séparation est une modification non triviale de l'algorithme de Padberg&Rao [109] basé sur la solution du problème de la $s - t$ T -coupe de poids minimum calculée dans un graphe orienté. La Section 3.6 est dédiée à quelques extensions du problème de Steiner où la difficulté reste la même (problèmes polynomiaux). On termine ce chapitre par une conclusion dans la Section 3.8 avec quelques directions de recherche.

3.2 Une première formulation mathématique

Bien que les notations utilisées sont similaires à celles du chapitre précédent, nous les rappelons brièvement pour faciliter la lecture du chapitre. Nous considérons un graphe $G = (V(G), E(G))$ simple et non orienté. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit V au lieu de $V(G)$, et E à la place de $E(G)$. Un coût w_e est associé à toute arête $e \in E$.

Une arête $e \in E$ est parfois notée par (i, j) où i et j sont les extrémités de e . Alors pour tout vecteur donné $(x_e)_{e \in E}$, x_e peut être aussi écrit comme x_{ij} ou $x_{(i,j)}$. Soient A et B deux sous-ensembles disjoints de sommets, et soit $E(A, B)$ l'ensemble des arêtes qui possèdent une extrémité dans A et l'autre extrémité dans B . Alors $x(A, B)$ est la somme des valeurs de x des arêtes qui ont une extrémité dans A et l'autre dans B : $x(A, B) = \sum_{e \in E(A, B)} x_e$.

On note par $\delta(A)$ l'ensemble d'arêtes qui ont exactement une extrémité dans A . Alors $\delta(A) = E(A, V \setminus A)$, et parfois on utilise \bar{A} pour exprimer $V \setminus A$. Si $A = \{v\}$ où $v \in V$, alors on écrit $\delta(v)$ au lieu d'écrire $\delta(\{v\})$. On utilise aussi $x(A)$ pour exprimer la somme des valeurs de x des arêtes qui ont les deux extrémités dans A : $x(A) = \sum_{(i,j) \in E, i \in A, j \in A} x_{ij}$.

Si C est un ensemble d'arêtes $C \subset E$, alors $x(C)$ représente la somme des valeurs de x des éléments de C : $x(C) = \sum_{e \in C} x_e$. On aura besoin aussi d'une notation relative aux graphes orientés.

On note par $[u, v]$ un arc orienté de u vers v (i.e. u est la queue et v la tête). $E^+(A, B)$ est l'ensemble d'arcs avec les extrémités initiales (queues) dans A et les extrémités terminales (têtes)

dans B . $E^+(A, \bar{A})$ peut être remplacé par $\delta^+(A)$.

Après cette introduction, on donne maintenant une formulation mathématique du problème posé ci-dessus.

Rappelons que nous avons montré au précédent chapitre que le problème de synthèse de réseaux à composantes unicycliques (sans les contraintes de Steiner) se formule comme suit :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} w_e x_e \\
& x_e = y_{ie} + y_{je}, \forall e = (i, j) \in E \\
& \sum_{e=(i,j) \in E} y_{ie} = 1, \forall i \in V \\
& 0 \leq y_{ie}, \forall i \in V, e = (i, j) \in E \\
& x_e \leq 1, \forall e \in E.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous avons également déjà prouvé que les contraintes d'unicyclicité peuvent aussi être exprimées par le système suivant :

$$\begin{aligned}
& x(A) \leq |A|, \forall A \subset V \\
& x(V) = |V| \\
& 0 \leq x_e \leq 1, \forall e \in E.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Les contraintes (3.2) peuvent se séparer en temps polynomial (voir chapitre 2).

Les contraintes liées à S peuvent être exprimées par les inégalités suivantes :

$$x(A) + \frac{1}{2}x(A, S \setminus A) \leq |A|, \forall A \subset V. \tag{3.3}$$

Proposition 3.1: Les inégalités (3.3) sont valides.

Preuve: Les inégalités (3.3) sont équivalentes à $x(A, S \setminus A) \leq 2(|A| - x(A))$. Si x est le vecteur d'incidence d'un réseau de Steiner avec des composantes unicycliques, alors $x(A) - |A|$ représente le nombre de composantes connexes du graphe induit par A qui ne contient aucun cycle. Supposons qu'il existe une composante connexe de A et qui ne contient pas de cycle, et qui est connectée à 3 sommets de $S \setminus A$. Alors, un des 3 sommets n'est pas sur le cycle. Autrement, chaque composantes de A ne contenant pas de cycle est liée à au plus deux sommets de $S \setminus A$. De plus, chaque composante de A contenant un cycle n'est pas liée à $S \setminus A$, ceci implique alors que $x(A, S \setminus A) \leq 2(|A| - x(A))$. \square

On peut voir clairement que les inégalités (3.3) dominent les inégalités $x(A) \leq |A|$. Autrement dit, les inégalités (3.3) induisent directement l'unicyclicité (quand $x(V) = |V|$). En outre, il est facile de voir que si x est entier, alors les inégalités (3.3) sont suffisantes pour garantir que tous les sommets de S appartiennent aux cycles. Par conséquent, notre problème de synthèse de réseaux se formule comme suit :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} w_e x_e \\
& x(A) + \frac{1}{2}x(A, S \setminus A) \leq |A|, \forall A \subset V \\
& x(V) = |V| \\
& x_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

On verra un peu plus loin dans ce chapitre que les inégalités (3.3) peuvent se séparer en un temps polynomial.

3.3 Complexité et formulation étendue

Comme mentionné précédemment, lorsque $S = V$ notre problème d'optimisation devient le problème bien connu du 2-couplage parfait [37, 80, 117]. De même, si on prend $S = \emptyset$, on obtient le problème de synthèse de réseaux à composantes unicycliques qui est également facile à résoudre.

Dans ce qui suit, on va montrer que notre problème reste facile à résoudre pour tout ensemble S .

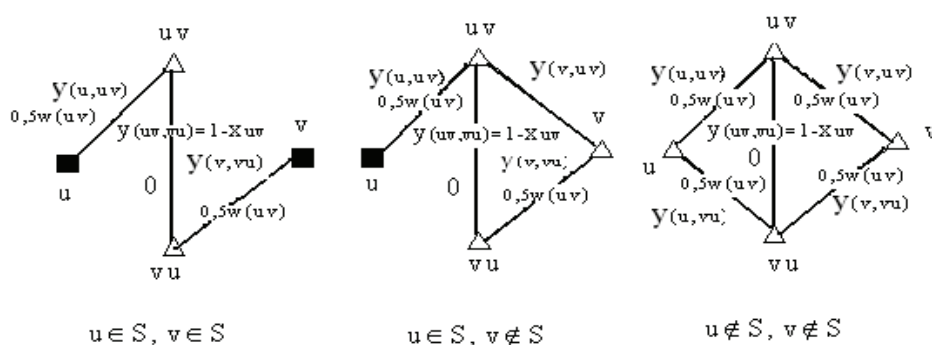


FIGURE 3.1 – Construction du nouveau graphe étendu

Proposition 3.2: Le problème de synthèse de réseaux à composantes unicycliques avec contrainte de type Steiner peut être résolu en temps polynomial.

Preuve: On va montrer que le problème d'optimisation considéré dans ce chapitre se réduit à un problème de b -couplage dans un graphe plus large et approprié qu'on construit comme suit.

Notons ce nouveau graphe H . Pour tout sommet $u \in V(G)$, il existe un autre sommet $u \in V(H)$. Pour toute arête $(u, v) \in E(G)$, on considère deux sommets uv et vu comme le montre la Figure (3.1). Une arête (uv, vu) est incluse dans $E(H)$. Si $u \notin S$ et $v \notin S$, 4 autres arêtes seront alors considérées : (u, uv) , (u, vu) , (v, uv) et (v, vu) . Si $u \in S$ et $v \notin S$, alors (u, vu) sera éliminée. Finalement, si $u \in S$ et $v \in S$, $E(H)$ contiendra (u, uv) et (v, vu) . Le poids de chaque arête du type (u, uv) et (u, vu) lorsqu'elle existe est de $\frac{w_{uv}}{2}$, alors que le poids de (uv, vu) est de 0.

On considère maintenant un b -couplage parfait de poids minimum où chaque sommet $u \in V(H)$ qui correspond à un sommet $u \in V(G)$ a un degré de 2, alors que chaque sommet de type uv possède un degré de 1. Il est clair que l'arête (uv, vu) appartient au b -couplage seulement si les 4 autres arêtes (u, uv) , (u, vu) , (v, uv) et (v, vu) ne font pas partie de la solution. De plus, il y a toujours un nombre pair (soit 0 ou 2) d'arêtes parmi (u, uv) , (u, vu) , (v, uv) et (v, vu) qui appartiennent à un b -couplage quelconque. Si (u, uv) est dans le b -couplage, alors (u, vu) est aussi dans ce b -couplage, et que ni (v, uv) ni (v, vu) ne sont dans le b -couplage, ou alors (v, vu) est dans le b -couplage et que ni (v, uv) ni (u, vu) ne sont dans le b -couplage. Notons que si

(uv, vu) n'est pas dans le b-couplage, alors il y a exactement 2 arêtes parmi (u, uv) , (u, vu) , (v, uv) et (v, vu) qui sont dans le b-couplage.

On construit une solution du problème de Steiner en prenant une arête (u, v) si et seulement si l'arête (uv, vu) n'appartient pas au b-couplage. On montre alors qu'on obtient vraiment un réseau de Steiner avec des composantes unicycliques de coût total minimum.

Pour cela, on pose P le nombre d'arêtes du type (uv, vu) qui sont dans le b-couplage et Q le nombre de celles qui ne le sont pas. Alors on a $P + Q = |E(G)|$ et $P + 2Q = |E(G)| + |V(G)|$, où la seconde égalité est impliquée par les conditions des degrés. Par conséquent, $Q = |V(G)|$. Sauf que Q est aussi le nombre d'arêtes dans la solution construite à partir du b-couplage, alors la solution qu'on obtient de cette façon est un graphe simple dans lequel le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets. Soit $S' \subset V(G) \subset V(H)$ le sous-ensemble de sommets u tels qu'il existe $v \in V(G)$ pour lequel l'une des deux arêtes (u, uv) et (u, vu) appartient au b-couplage. Notons que comme le degré de u est de 2 dans le b-couplage, alors l'existence d'un tel sommet v implique l'existence d'un autre sommet w qui satisfait la même condition (il y a exactement une arête parmi (u, uw) et (u, wu) qui appartient au b-couplage). Comme l'arête (u, vu) n'existe pas lorsque $u \in S$, alors il est clair que S' contient S . De plus, si $u \in S'$ et v est un sommet tel que exactement une des deux arêtes (u, uv) et (u, vu) appartient au b-couplage, alors v est aussi dans S' . La solution construite à partir du b-couplage contient l'arête (u, v) (car (uv, vu) n'est pas dans le b-couplage). En d'autres mots, la solution contient un b-couplage de S' : chaque sommet de S' a un degré 2. Alors on a montré que les sommets de S appartiennent aux cycles.

Maintenant, on s'intéresse aux sommets de $V(G) \setminus S'$. Pour tout sommet $u \in V(G) \setminus S'$, il y a exactement un sommet tel que à la fois (u, uv) et (u, vu) appartiennent au b-couplage. Ceci implique que (u, v) fait partie de la solution construite à partir du b-couplage. Si v est dans S' , alors on déduit que u appartient à une composante connexe qui contient au moins un cycle. Si v n'est pas dans S' , alors il y a un sommet $w \neq u$ tel qu'on a à la fois (v, vw) et (v, wv) dans le b-couplage. En continuant ce processus, il est alors clair qu'on va finir avec soit un sommet dans S' , ou avec un sommet qu'on a toujours considéré. Dans le premier cas, on sait toujours que ceci implique que u appartient à une composante qui contient au moins un cycle. Dans le second cas, en revenant sur un sommet qu'on a toujours pris en considération, alors on créera un cycle. Ceci prouve encore que u appartient à une composante qui contient au moins un cycle.

Pour résumer, on a montré que la solution construite à partir du b-couplage est telle que chaque sommet $u \in V(G) \subset V(H)$ est dans une composantes connexe qui contient au moins un cycle. De plus, on a déjà remarqué que le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets. Ceci implique que notre solution est un graphe dans lequel chaque composante connexe contient exactement un cycle. On a aussi noté que tous les sommets de S sont sur les cycles. En d'autres termes, la solution obtenue est un réseau à composantes connexes unicycliques satisfaisant la contrainte de type Steiner. Les coûts des arêtes dans le nouveau graphe construit ont été choisis de telle manière que le coût du réseau soit exactement égal au coût du b-couplage.

Finalement, un b-couplage de poids minimum peut être calculé en un temps polynomial soit par la génération de contraintes [109, 38] à travers l'algorithme des ellipsoïdes ou par des algorithmes combinatoires [93]. \square

Cette preuve implique une formulation linéaire étendue de notre problème de synthèse de réseaux. Soit $(y_e)_{e \in E(H)}$ un vecteur en 0-1 des arêtes du graphe H introduit dans la dernière preuve (voir aussi la Figure (3.1)). On rappelle que l'arête (uv, vu) appartient au b-couplage si et seulement si (u, v) fait partie de la solution du problème de Steiner construit à partir du b-couplage. Ainsi, on peut écrire que $y_{(uv, vu)} = 1 - x_{uv}$.

Une formulation en nombre entiers est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E(G)} w_e x_e \\
& y_{(u,uv)} + y_{(v,uv)} = x_{uv}, \forall (u,v) \in E(G), u \in V(G), v \in V(G) \setminus S \\
& y_{(u,uv)} = x_{uv}, \forall (u,v) \in E(G), u \in V(G), v \in S \\
\sum_{(u,v) \in E(G)} y_{(u,uv)} + y_{(u,vu)} &= 2, \forall u \in V(G) \setminus S \\
\sum_{(u,v) \in E(G)} y_{(u,uv)} &= 2, \forall u \in S \\
x_e &\leq 1, \forall e \in E(G) \\
y_e &\geq 0, \forall e \in E(H) \\
y_e &\in \{0, 1\}, \forall e \in E(H)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Les deux premiers ensembles d'égalités correspondent aux contraintes de degrés des sommets du type uv . Les troisième et quatrième imposent que les sommets de $V(G)$ soient de degré de 2.

Depuis les travaux de [38], on sait que les contraintes d'intégrité peuvent être remplacées par les inégalités dites de blossom. On considère un sous-ensemble $A = B \cup C \subset V(H)$ où $B \subset V(G)$ et $C \subset V(H) \setminus V(G)$ est un sous-ensemble de sommets de type uv . Soit F un sous-ensemble d'arêtes $F \subset E(A, V(H) \setminus A)$ tel que $|C| + |F|$ est impaire. Alors les inégalités blossom seront données par : $y(A) + y(F) \leq |B| + \lfloor \frac{|C| + |F|}{2} \rfloor$.

Il n'est pas difficile de vérifier que ces inégalités de blossom où F n'est pas vide sont dominées ou équivalentes aux inégalités où F est vide. Par exemple, si $uv \in A$ et il existe au moins une arête e incidente à uv qui est dans F , alors en supprimant uv de A et e de F , le membre droit $|B| + \lfloor \frac{|C| + |F|}{2} \rfloor$ ne croit pas et que le membre gauche $y(A) + y(F)$ ne décroît pas.

Finalement, pour obtenir une formulation linéaire étendue, on a juste à relaxer les contraintes d'intégrité et ajouter des contraintes du type

$$y(B \cup C) \leq |B| + \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor, B \subset V(G), C \subset V(H) \setminus V(G). \tag{3.6}$$

Les inégalités (3.6) peuvent se séparer par l'algorithme de [109]. Un autre algorithme [87], plus efficace peut aussi être utilisé. Un exemple est donné dans la figure (3.2) où une instance Euclidienne avec 150 noeuds est prise. Dans le premier cas (la partie gauche de la figure (3.2)), S contient 70 noeuds représentés par des carrés noirs. Le problème est alors résolu en utilisant la formulation étendue. On obtient une solution où le coût est approximativement égal à 852. Lorsque on relaxe les contraintes de Steiner, on obtient une solution tracée dans la partie droite de la figure (3.2), et le coût est de 759 approximativement.

3.4 Les inégalités valides

Le fait que le problème d'optimisation soit facile à résoudre laisse espérer l'existence d'une bonne description de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de ces réseaux. Par équivalence entre séparation et optimisation [60], on sait qu'il est possible de séparer en temps polynomial tout point rationnel et non réalisable de cette enveloppe convexe.

Une façon d'obtenir cette caractérisation consiste à projeter la formulation linéaire éten-

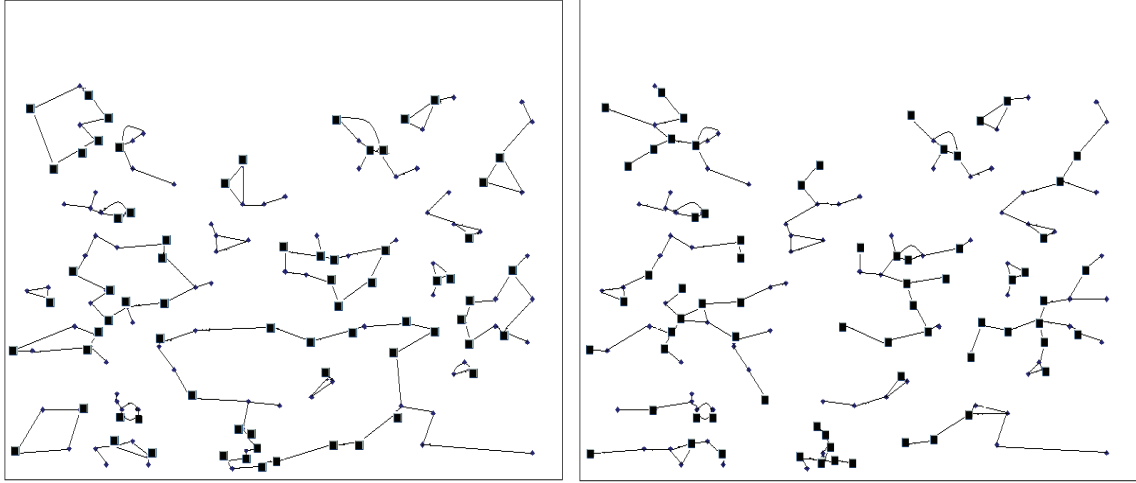


FIGURE 3.2 – Instance Euclidienne : $|V| = 150$: $|S| = 70$ de coût 852 dans la partie gauche, et $S = \emptyset$ de coût 759 dans la partie droite.

due de la Section 3.3 dans l'espace des variables $(x_e)_{e \in E(G)}$ en utilisant la dualité. Cependant, ceci reste une caractérisation compliquée. Alors, on essaiera de trouver directement quelques classes d'inégalités valides. Leur séparation sera étudiée dans la Section 3.5.

En plus des inégalités (3.3), on propose dans cette section deux autres familles d'inégalités valides.

$$x(A) + x(F) \leq |A| + \lfloor \frac{|F|}{2} \rfloor, \forall A \subset V, F \subset E(A, S \setminus A). \quad (3.7)$$

Proposition 3.3: Les inégalités (3.7) sont valides.

Preuve:

En ajoutant les inégalités $x(A) + \frac{1}{2}x(A, S \setminus A) \leq |A|$ et $\frac{1}{2}x(F) \leq \frac{1}{2}|F|$ et en utilisant le fait que $F \subset E(A, S \setminus A)$, on obtient $x(A) + x(F) \leq |A| + \frac{1}{2}|F|$. En prenant la partie entière inférieure, on obtient le résultat voulu. \square

Lorsque les inégalités (3.7) sont considérées, on doit supposer que $|F|$ est impair (sinon elles sont dominées par les inégalités (3.3) et les inégalités triviales).

On note que lorsque $S = V$, les inégalités (3.7) et (3.3) en plus des inégalités triviales sont suffisantes pour décrire l'enveloppe convexe. En effet, elles sont équivalentes à la formulation connue du problème de 2-couplage parfait [38, 80, 117].

Quand $S \neq V$, ces inégalités sont en général non suffisantes. On introduit ci-dessous une nouvelle famille d'inégalités valides.

Soient A et B deux ensembles disjoints de sommets. Leur union est notée par C : $C = A \cup B$. Soit F un ensemble d'arêtes tel que $F \subset E(B, S \setminus C) \cup E(A, S \cap B)$. Soit alors l'inégalité suivante :

$$2x(A) + x(A, S \setminus C) + x(B) + x(A, B) + x(F) \leq 2|A| + |B| + \lfloor \frac{|F|}{2} \rfloor. \quad (3.8)$$

Proposition 3.4: Les inégalités (3.8) sont valides.

Preuve: En écrivant l'inégalité (3.3) pour C , on obtient

$$x(A) + x(B) + x(A, B) + \frac{1}{2}x(A, S \setminus C) + \frac{1}{2}x(B, S \setminus C) \leq |A| + |B|.$$

en faisant idem pour l'ensemble A , on obtient

$$x(A) + \frac{1}{2}x(A, S \setminus A) \leq |A|.$$

En additionnant ces deux inégalités et en utilisant le fait que $S \setminus A = (S \setminus C) \cup (S \cap B)$ induit à

$$2x(A) + x(A, S \setminus C) + x(B) + x(A, B) + \frac{1}{2}x(B, S \setminus C) + \frac{1}{2}x(A, S \cap B) \leq 2|A| + |B|.$$

En prenant un sous-ensemble d'arêtes F dans $E(B, S \setminus C) \cup E(A, S \cap B)$, et en ajoutant les inégalités triviales $\frac{1}{2}x(F) \leq \frac{1}{2}|F|$, on obtient par simple arrondi les inégalités (3.8). \square

Si A est vide, les inégalités (3.8) deviennent les inégalités (3.7). De plus, si B est vide, alors l'inégalité (3.8) est la contrainte basique (3.3). Si $|F|$ est pair, alors l'inégalité (3.8) est dominée par les inégalités (3.3) et les inégalités triviales $x_e \leq 1$. En d'autres termes, lorsque nous considérons les inégalités (3.8), on peut supposer que $|A| > 0$ et $|F|$ est impaire (Ceci implique que $|B| > 0$).

Malheureusement, il est facile de vérifier que les inégalités (3.3), (3.7) et (3.8) ne sont pas suffisantes pour décrire l'enveloppe convexe. Le point fractionnaire de la figure (3.3) où S contient les sommets a et b et les valeurs de x sont semi-entières, est un point extrême du polytope défini par les inégalités (3.3), (3.7) et (3.8) en plus des inégalités triviales.

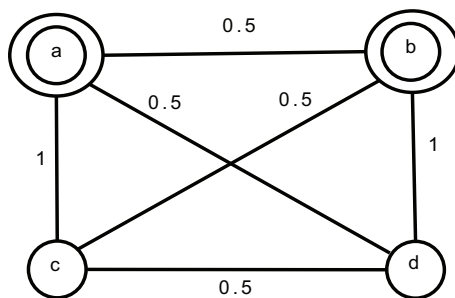


FIGURE 3.3 – Un point extremum fractionnaire qui satisfait les inégalités (3.3), (3.7) et (3.8)

Trouver une description polyédrale complète de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de ce type de réseaux reste donc un problème ouvert.

3.5 Les algorithmes de séparation

3.5.1 Séparation des contraintes (3.3)

On montre dans cette section que les contraintes (3.3) peuvent se séparer en un temps polynomial.

Proposition 3.5: Les inégalités (3.3) peuvent se séparer en un temps polynomial.

Preuve: Nous cherchons un sous-ensemble A qui maximise : $2(x(A) - |A|) + x(A, S \setminus A)$. Ceci est équivalent à minimiser la fonction $f(A) = \sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + x(A, S \setminus A)$. f peut se

réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + x(A, \bar{A} \setminus S) \\
&= \sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v))) \\
&\quad - \sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v))) + x(A, \bar{A} \setminus S) \\
&= x(A, \bar{A} \setminus S) + \sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v)) - 2 > 0} (x(\delta(v)) - 2) \\
&\quad + \sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v)))
\end{aligned}$$

On note que le dernier terme $\sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v)))$ ne dépend pas de A . Un sous-ensemble A minimisant f peut être calculé en résolvant un problème de coupe minimum dans un graphe orienté approprié. On construit un graphe orienté et pondéré qui a le même ensemble de sommets V en plus de 2 nouveaux sommets s et t . Si $2 - x(\delta(v)) \geq 0$, alors on ajoute un arc de v à t dont le poids est égal à $2 - x(\delta(v))$. Sinon, on ajoute un arc de s à v avec un poids égal à $x(\delta(v)) - 2$. Pour toute arête $(u, v) \in E$, on crée deux nouveaux arcs à sens opposés : un de u vers v et un autre de v vers u . L'arc de u vers v aura un poids égal à x_{uv} si $v \notin S$, et 0 sinon. \square

3.5.2 Séparation des contraintes (3.7)

Si $S = V$, les contraintes (3.7) sont les contraintes classiques de blossom introduites dans le contexte du 2-couplage (voir, e.g., [117, 80]). Padberg et Rao [109] ont montré que les inégalités dites de blossom peuvent se séparer en temps polynomial en résolvant un problème de T -coupe de poids minimum dans un graphe non orienté.

On va montrer que les contraintes (3.7) peuvent se séparer facilement si $|S| < |V|$. Le problème de séparation se réduit à un problème de $s - t$ T -coupe dans un graphe orienté. La preuve qu'on donne ici est une adaptation de la preuve donnée dans [109]. On essayera de suivre la présentation donnée dans [80].

Proposition 3.6: Les inégalités (3.7) peuvent se séparer en un temps polynomial.

Preuve: Dans cette preuve, on cherche un ensemble de sommets A et un ensemble impair d'arêtes $F \subset E(A, S \setminus A)$ minimisant $\sum_{v \in A} 2 - x(\delta(v)) + x(\delta(A) \setminus F) + (1 - x)(F)$. Comme les contraintes (3.3) sont faciles à séparer, on peut supposer qu'elles sont toujours satisfaites par le vecteur courant x . Toutes les inégalités triviales sont aussi satisfaites.

En utilisant les mêmes manipulations algébriques lors de la section précédente, la fonction objectif devient $\sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v)) - 2 > 0} (x(\delta(v)) - 2) + x(\delta(A) \setminus F) + (1 -$

$$\begin{aligned}
&x)(F) + \\
&\quad \sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v))).
\end{aligned}$$

On note encore que $\sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (2 - x(\delta(v)))$ est une constante. On utilise K pour noter

$$\sum_{v \in V; 2-x(\delta(v)) < 0} (x(\delta(v)) - 2).$$

Les inégalités (3.7) sont violées si et seulement si $|F|$ est impaire et

$$\sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2-x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v))-2 > 0} (x(\delta(v))-2) + x(\delta(A) \setminus F) + (1-x)(F) < 1+K. \quad (3.9)$$

Notons que comme les inégalités (3.3) sont satisfaites, on a toujours pour tout A et F (sans aucune restriction sur la parité de F) :

$$\sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2-x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v))-2 > 0} (x(\delta(v))-2) + x(\delta(A) \setminus F) + (1-x)(F) \geq K.$$

On construit un graphe orienté et pondéré $H = (V(H), E(H))$. Le poids d'un arc e est noté par y_e . $V(H) = V(G) \cup E(G) \cup \{s, t\}$ où s et t sont deux nouveaux sommets. Pour tout sommet $v \in V(G)$ pour lequel $x(\delta(v)) - 2 > 0$, $E(H)$ contient un arc $[s, v]$ de poids égal à $y_{[s,v]} = x(\delta(v)) - 2$. D'une façon similaire, si $2 - x(\delta(w)) \geq 0$ pour un sommet $w \in V(G)$, alors on considère un arc $[w, t]$ dont le poids est égal à $2 - x(\delta(w))$.

Les arêtes de $E(G)$ doivent avoir une orientation. Si $e = (u, v) \in E(G)$ a une extrémité $u \in S$ et une extrémité $v \in V \setminus S$, alors e est orientée de u à v . Pour les autres arêtes, l'orientation est arbitraire.

Les arêtes de $E(G)$ incluses dans $V(H)$ sont considérées comme des arcs (comme elles sont orientées). Soient u et v deux sommets adjacents de $V(G)$ (donc ils sont aussi sommets de H), et supposons que (u, v) est orienté de u à v ($[u, v] \in V(H)$). On considère trois cas possibles :

- si $u \notin S$ et $v \notin S$, alors $E(H)$ contient un arc $[u, [u, v]]$ de poids égal à x_{uv} , un arc $[[u, v], u]$ de poids égal à x_{uv} , un arc $[v, [u, v]]$ de poids égal à $+\infty$ et un arc $[[u, v], v]$ de poids égal à $+\infty$;
- si $u \in S$ et $v \notin S$, alors $E(H)$ contient un arc $[u, [u, v]]$ dont le poids est de x_{uv} , un arc $[[u, v], u]$ de poids égal à x_{uv} , un arc $[v, [u, v]]$ de poids égal à $1 - x_{uv}$ et un arc $[[u, v], v]$ de poids égal à $+\infty$;
- si $u \in S$ et $v \in S$, alors $E(H)$ contient un arc $[u, [u, v]]$ de poids égal à x_{uv} , un arc $[[u, v], u]$ de poids égal à x_{uv} , un arc $[v, [u, v]]$ de poids égal à $1 - x_{uv}$ et un arc $[[u, v], v]$ de poids égal à $1 - x_{uv}$.

Il n'est pas possible d'avoir $u \notin S$ et $v \in S$ comme (u, v) est orienté de u à v .

Soit T un sous-ensemble de $V(H)$ défini par :

$$T = \{[u, v] \in V(H), \{u, v\} \cap S \neq \emptyset\} \cup \{u \in V \setminus S, |E^+(S, u)| \text{ est impair}\} \cup \{u \in S, |E^+(S \setminus u, u)| \text{ est impair}\}.$$

Si on prend $E^+(S \setminus u, u) = E^+(S, u)$ lorsque $u \in S$, T devient $T = \{[u, v] \in V(H), \{u, v\} \cap S \neq \emptyset\} \cup \{u \in V, |E^+(S, u)| \text{ est impair}\}$. En d'autres mots, T contient tous les arcs qui ont une extrémité dans S , et aussi tous les sommets u tels que le nombre d'arcs de S à u est impair. Il est clair que T a une cardinalité paire.

On montrera que le graphe H contient une $s-t$ T -coupe de poids inférieur à $1+K$ si et seulement si il existe une contrainte violée de type (3.7). Soient $A \subset V$ et $F \subset E(A, S \setminus A)$. On a besoin de la notation suivante :

$$E_1 = \{[u, v] \in V(H) \cap F, u \in A, v \in V \setminus A\}; E_2 = \{[u, v] \in V(H) \cap F, u \in V \setminus A, v \in A\}$$

$$E_3 = \{[u, v] \in V(H) \setminus F, u \in A, v \in V \setminus A\}; E_4 = \{[u, v] \in V(H) \setminus F, u \in V \setminus A, v \in A\}.$$

Notons que $F = E_1 \cup E_2$, $E^+(A, V \setminus A) = E_1 \cup E_3$ et $E^+(V \setminus A, A) = E_2 \cup E_4$. Soit $W \subset V(H)$

défini par $W = A \cup E(A) \cup E_1 \cup E_4 \cup \{s\}$. On veut montrer que $|W \cap T|$ est impaire si et seulement si $|F|$ est impaire. On utilisera la notation \equiv pour dire que les deux nombres ont la même parité.

On a $|W \cap \{u \in V \setminus S, |E^+(S, u)| \text{ est impaire}\}| \equiv |E^+(S, A \setminus S)|$. On peut aussi écrire $|W \cap \{u \in S, |E^+(S \setminus u, u)| \text{ est impaire}\}| \equiv |E(A \cap S)| + |E^+(S \setminus A, S \cap A)|$. De plus, $E_1 \subset F$ et $F \subset T$. En prenant les arcs de $E(A)$ appartenant à T , on déduit que $|E(A) \cap T| \equiv |E^+(A \cap S, A \setminus S)| + |E(A \cap S)|$. D'une façon similaire, on a $|E_4 \cap T| \equiv |E_4 \cap E^+(S \setminus A, A)|$ (on rappelle que tous les arcs sont orientés de S à $V \setminus S$). En combinant tous ces résultats de parité, on obtient la conséquence suivante : $|W \cap T| \equiv |E^+(S \setminus A, A)| + |E_1| + |E_4 \cap E^+(S \setminus A, A)|$. De plus, on a $E_4 \cup E_2 = E^+(S \setminus A, A) \cup E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S)$. Alors, $|E_4 \cup E_2| \equiv |E^+(S \setminus A, A)| + |E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S)|$. En réalisant une intersection entre les deux termes avec E_4 , on déduit que $|E_4| \equiv |E^+(S \setminus A, A) \cap E_4| + |E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S) \cap E_4|$. Observons que $E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S)$ ne va pas faire intersection avec F comme $F \subset E(A, S \setminus A)$ alors que tous les arcs de $E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S)$ n'a pas d'extrémité dans S . Par conséquent, on a $|E_4| \equiv |E^+(S \setminus A, A) \cap E_4| + |E^+(\bar{A} \setminus S, A \setminus S)|$. En combinant cette égalité avec celle reliée à $|E_4 \cup E_2|$, on obtient $|E_2| \equiv |E^+(S \setminus A, A) \cap E_4| + |E^+(S \setminus A, A)|$. En revenant sur $|W \cap T|$, on déduit que

$$|W \cap T| \equiv |E_1| + |E_2| = |F|. \quad (3.10)$$

Maintenant, on montre que le poids de la coupe $\delta^+(W)$ est donné par : $y(\delta^+(W)) = \sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2-x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v))-2 > 0} (x(\delta(v))-2) + x(\delta(A) \setminus F) + (1-x)(F)$.

$\delta^+(W)$ contient des arcs $[s, w]$ où $w \in V \setminus A$ et $x(\delta(v)) - 2 > 0$; et les arcs $[v, t]$ où $v \in A$ et $2 - x(\delta(v)) \geq 0$. Le poids total de ces arcs est exactement donné par $\sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2-x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v))-2 > 0} (x(\delta(v))-2)$.

En utilisant le fait que $\delta(A) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ et W contient E_1 et E_4 , on déduit que les autres arcs de $\delta^+(W)$ ont 4 formes possibles :

- $[u, [u, v]]$ où $u \in A, v \in V \setminus A$, et $[u, v] \notin W$ implique que $[u, v] \in E_3$ et $y_{[u, [u, v]]} = x_{uv}$
- $[[u, v], u]$ où $u \in V \setminus A, v \in A$ et $[u, v] \in W$ implique que $[u, v] \in E_4$ et $y_{[[u, v], u]} = x_{uv}$
- $[v, [u, v]]$ où $u \in V \setminus A, v \in A$ et $[u, v] \notin W$ implique que $[u, v] \in E_2$. Comme $E_2 \subset F$, on doit avoir $u \in S$ et $y_{[v, [u, v]]} = 1 - x_{uv}$.
- $[[u, v], v]$ où $u \in A, v \in V \setminus A$ et $[u, v] \in W$ implique que $[u, v] \in E_1$. Comme $E_1 \subset F$, on doit avoir $v \in S$ et $y_{[[u, v], v]} = 1 - x_{uv}$.

La combinaison de ces résultats nous donne :

$$y(\delta^+(W)) = \sum_{v \in A; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2-x(\delta(v))) + \sum_{v \in \bar{A}; x(\delta(v))-2 > 0} (x(\delta(v))-2) + x(\delta(A) \setminus F) + (1-x)(F). \quad (3.11)$$

La construction de W et les résultats (3.9), (3.10) et (3.11) impliquent clairement que tous les ensembles A et $F \subset E(A, S \setminus A)$ de cardinalité impaire et qui violent les contraintes (3.7) vont nous conduire à une $s-t$ T -coupe $\delta^+(W)$ dont le poids est strictement inférieur à $1 + K$.

On montre maintenant le sens opposé. On suppose qu'on a une $s-t$ T -coupe $\delta^+(W)$ telle que $y(\delta^+(W)) < 1 + K$, et construisons A et F qui violent les contraintes (3.7).

On prend $A = W \cap V$. Admettons que si $\delta^+(W)$ contient un des arcs $[u, [u, v]]$, $[v, [u, v]]$, $[[u, v], u]$, $[[u, v], v]$, alors $(u, v) \in \delta(A)$. Cette hypothèse sera montrée ci-dessous. On définit F ainsi :

$$F = \{(u, v), v \in A, u \in S \setminus A, [u, v] \in \bar{W}\} \cup \{(u, v), v \in S \setminus A, u \in S \cap A, [u, v] \in W\}.$$

A et F sont donnés, on peut définir E_1, E_2, E_3 et E_4 comme on a fait avant. On a à montrer que W est exactement donné par $A \cup E(A) \cup E_1 \cup E_4 \cup \{s\}$. Par l'hypothèse d'avant, W contient $E(A)$ et ne doit contenir aucune arête de $E(V \setminus A)$. Alors, on a juste à montrer que W contient $E_1 \cup E_4$, et ne contient pas $E_2 \cup E_3$.

- Si $[u, v] \in E_1$, alors $u \in A$ et $v \in V \setminus A$. En plus, $[u, v] \in F$ qui implique avec la définition de F que $[u, v] \in W$.
- Si $[u, v] \in E_4$, alors $v \in A$ et $u \in V \setminus A$. Si $u \in S$, alors $[u, v] \in W$ (sinon $[u, v]$ doit être dans F). Si $u \notin S$, alors $v \notin S$ (comme (u, v) est orienté de u à v) et le poids de $[v, [u, v]]$ est égal à l'infini. Ceci est bien sur impossible comme $y(\delta^+(W)) < 1 + K$.
- Si $[u, v] \in E_2$, alors $v \in A$ et $u \in V \setminus A$. Comme $E_2 \subset F$, par la définition de F on doit avoir $[u, v] \in \overline{W}$.
- Si $[u, v] \in E_3$, alors $u \in A$ et $v \in V \setminus A$. Il y a 2 sous cas possibles. Lorsque $u \in S \cap A$ et $v \in S \setminus A$, alors $[u, v] \in \overline{W}$ (car $[u, v] \notin F$). L'autre sous cas est donné par $u \in A$ et $v \in \overline{A} \setminus S$. Comme le poids de $[[u, v], v]$ est infini, $[u, v]$ doit être dans \overline{W} .

Ainsi on a montré que $W = A \cup E(A) \cup E_1 \cup E_4 \cup \{s\}$. Par les résultats (3.9), (3.10) et (3.11), et en utilisant le fait que W est une $s-t$ T -coupe de poids inférieur à $1 + K$, on déduit que $|F|$ est impaire et l'inégalité (3.7) correspondant aux sous-ensembles A et F est violée.

Pour terminer la preuve, on a à revenir à notre hypothèse prise avant : si $\delta^+(W)$ contient un des arcs $[u, [u, v]]$, $[v, [u, v]]$, $[[u, v], u]$, $[[u, v], v]$, alors $(u, v) \in \delta(A)$. Supposons que l'hypothèse est fautive, alors en déplaçant les arcs $[u, v]$ qui violent cette hypothèse, on obtient un ensemble W' qui satisfait l'hypothèse. De plus, on a $y(\delta^+(W')) \leq y(\delta^+(W)) - 1$. En utilisant W' , on peut définir A', F', E'_1, E'_2, E'_3 et E'_4 comme on l'a déjà fait (en effet $A' = A$). Alors on a toujours $W' = A' \cup E(A') \cup E'_1 \cup E'_4 \cup \{s\}$. On note aussi que dans la preuve précédente, on n'a pas utilisé le fait que W définit une T -coupe. C'est pour cela que si W' ne définit pas une $s-t$ T -coupe, on peut toujours écrire

$$y(\delta^+(W')) = \sum_{v \in A'; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in \overline{A}'; x(\delta(v)) - 2 > 0} (x(\delta(v)) - 2) + x(\delta(A') \setminus F') + (1 - x)(F').$$

Comme

$$y(\delta^+(W')) \leq y(\delta^+(W)) - 1$$

et

$$y(\delta^+(W)) < 1 + K$$

on a

$$\sum_{v \in A'; 2-x(\delta(v)) \geq 0} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in \overline{A}'; x(\delta(v)) - 2 > 0} (x(\delta(v)) - 2) + x(\delta(A') \setminus F') + (1 - x)(F') < K$$

Mais on a toujours mentionné que ceci ne peut se produire sauf si $|F'|$ est paire.

Pour synthétiser, on a montré qu'étant donnée toute contrainte violée du type (3.7), on peut construire une $s-t$ T -coupe dont le poids est strictement inférieur à $1 + K$. On a aussi montré qu'étant donnée une $s-t$ T -coupe dont le poids est inférieur à $1 + K$, on peut alors construire une contrainte violée du type (3.7).

Comme une $s-t$ T -coupe de poids minimum peut être calculée en temps polynomial [60, 49], les contraintes (3.7) peuvent se séparer en temps polynomial. \square

Pour trouver une $s-t$ T -coupe de poids minimum dans le graphe H , on note que les deux

algorithmes [60] et [49] sont basés sur la solution d'approximativement $|V(H)|^2$ problèmes de $s - t$ coupe de poids minimum.

Focalisons nous sur l'algorithme de [49]. Pour tous $a \in V(H)$ et $b \in V(H)$, on ajoute deux arcs $[s, a]$ et $[b, t]$ de poids infinis, et on résout une $s - t$ -coupe de poids minimum (la coupe doit aussi être minimale au sens de la cardinalité). Une des $|V(H)||V(H) - 1|$ coupes sera la $s - t$ T -coupe de poids minimum.

La séparation des contraintes (3.8) est toujours un problème ouvert.

3.6 Extensions et liens avec d'autres problèmes

L'approche utilisée dans la Section 3.3 pour montrer que le problème de ce chapitre se résout polynomialement peut être légèrement modifiée pour intégrer de nouvelles contraintes.

On considère une variante dans laquelle il existe un sous-ensemble de sommets $T \subset V(G)$ tel que chaque sommet $u \in T$ doit être soit une feuille (sommet de degré 1) ou sur un cycle et ne doit pas avoir de voisins (sauf les deux voisins sur le cycle). Cette contrainte peut facilement être intégrée en supprimant l'arête (v, uv) pour tout $v \in V(G)$ lorsque $u \in T$. On note que si $u \in S \cap T$, alors le degré de u doit être égal à 2 et u est sur un cycle.

Une autre variante possible consiste à imposer que quelques arêtes doivent appartenir aux cycles. On suppose que (u, v) doit être sur un cycle. Ceci peut être réalisé en ajoutant un nouveau sommet a adjacent à u et v , supprimer (u, v) et mettre a dans S .

Il est possible qu'un ensemble d'arêtes appartienne à la solution. Ceci est facile à imposer en supprimant les arêtes (uv, vu) si on veut que (u, v) soit dans la solution.

On peut aussi imposer la contrainte suivante : soit l'arête (u, v) appartient au cycle, ou elle ne figure pas dans la solution. En d'autres mots, (u, v) ne doit pas figurer dans les sous arbres attachés aux cycles. Pour mieux cerner cette contrainte, on peut penser à la situation où toutes les arêtes qui ont un poids plus grand qu'un certain seuil, seront dans la solution si et seulement si elles contribuent à la construction des cycles. Cette contrainte peut être aussi satisfaite en supprimant les arêtes (u, vu) et (v, uv) .

On peut également supposer que chaque arête (u, v) a deux poids w_{uv}^1 et $w_{uv}^2 \geq w_{uv}^1$. Si l'arête appartient à un cycle, alors on a à payer w_{uv}^1 , sinon on doit payer w_{uv}^2 chaque fois que l'arête fait partie de la solution. Ce problème peut être facilement résolu par une légère modification sur les coûts. Le poids de chacune des arêtes (u, uv) et (v, vu) devient $\frac{w_{uv}^1}{2}$ alors que le poids de chacune des arêtes (u, vu) et (v, uv) est $w_{uv}^2 - \frac{w_{uv}^1}{2}$. En prenant $w_{uv}^2 = \infty$, on peut aussi résoudre la variante précédente.

En utilisant les mêmes techniques, il est facile de montrer que le problème de 2-couplage avec contrainte de type Steiner est facile à résoudre. Dans cette variante, un sommet est soit isolé ou appartient à un cycle. La solution est alors un ensemble de cycles disjoints couvrant un certain ensemble de sommets. Cependant, la résolution polynomiale de cette variante est un résultat bien connu [21].

3.7 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section quelques résultats numériques. D'une part, nous avons implémenté un Branch&Cut utilisant la formulation (3.1) avec les inégalités (3.3) et (3.7). D'autre part, nous avons implémenté le programme linéaire étendu.

Toutes les expérimentations ont été réalisées sur un Pentium 4, de 3.25Go de RAM, et de 2.39 GHz.

Dans la première phase de l'algorithme du Branch&Cut (à la racine), les deux familles d'inégalités citées ci-dessus ont été intégrées. Uniquement les inégalités de base (3.3) sont rajoutées au niveau des autres noeuds de l'arbre de recherche. En effet, la séparation des inégalités (3.3) est exacte et rapide. Signalons qu'on a choisit la stratégie de recherche en profondeur d'abord dans l'algorithme de Branch&Cut, et une borne supérieure est calculée par la recherche d'un 2-couplage dans le graphe de départ.

TABLE 3.1 – Comparaison sur des graphes complets aléatoires et Euclidiens

n	S	temps sep	temps relax	temps tot	gap(%)	gap2(%) (3.3)	(3.7)	Nb coupes	Nb noeuds	temps form.etendue
6	1.7	0.3	2.7	0	9.4	21.7	21.7	7.3	9	1
25	12	3	0.3	6	0	16.4	31	31	22	7.7
	24	2.7	0	3	0	19.5	28	28	7.3	4.7
40	10	19	0.7	20.7	0	5.19	31.7	34	0.3	1
	20	13	0.7	35	0	10.4	30.7	31.7	36.3	29.3
	39	10	1.3	22	0	15.5	38	38.7	23.7	22.7
65	16	182.7	3.3	790.7	0	5.7	53	55	136.7	86.3
	32	303.3	14.3	1019.3	0	11.8	77.7	77.3	172.3	286.7
	64	50.7	2.3	125.3	0	13.9	34.3	33.3	29.7	32

La Table (3.1) nous donne les résultats trouvés sur des graphes complets, aléatoires et Euclidiens. Les coordonnées de chaque sommet sont choisies d'une manière aléatoire et uniforme entre 0 et 1. Le poids d'une arête est proportionnel à la distance entre les extrémités de cette arête.

On a généré pour les différentes valeurs de n et de $|S|$ trois instances, et les résultats présentés sont obtenus en calculant la moyenne de chaque cas traité.

Dans la Table (3.1), on peut trouver le temps en secondes de séparation de toutes les coupes (temps sep) dans la phase de l'algorithme à plans coupants (avant le Branch&Cut). Par (temps relax), on note le temps mis pour la résolution de la relaxation (avant le Branch&Cut), et (temps tot) est le temps total mis pour résoudre le problème jusqu'à la fin. On donne aussi le nombre de contraintes générées dans la phase de l'algorithme à plans coupants parmi les deux familles citées ci-dessus. Par "Nb coupes" et "Nb noeuds" on donne le nombre de coupes du type (3.3) générées dans la phase du Branch&Cut, ainsi que le nombre de noeuds de l'arborescence du Branch&Cut.

Le gap final, qui est la différence entre la borne supérieure et la meilleure solution trouvée, le tout divisé par la borne supérieure, est donné et noté par "gap". Si ce gap est égal à 0, alors le problème est résolu jusqu'à l'optimum. On donne aussi la valeur de "gap 2", qui représente la différence entre la meilleure borne supérieure et le coût obtenu avec $|S| = 0$, le tout sera divisé

sur la borne supérieure.

La dernière colonne de cette table représente le temps total mis par l'algorithme basé sur la formulation étendue.

On remarque que les temps d'exécution de l'algorithme de Branch&cut diminuent lorsque la taille de S se rapproche de $|V|$. Ceci est en réalité la conséquence de la bonne qualité de la borne supérieure donnée par la solution du 2-couplage.

On remarque aussi que la formulation étendue est largement meilleure que le Branch&Cut. Ceci est évidemment prévisible vu l'exactitude de cette formulation.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme polynomial et une formulation linéaire étendue du problème de synthèse de réseaux de coût minimum à composantes connexes unicycliques satisfaisant une contrainte de type Steiner. Une description partielle de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de ces réseaux a été donnée. Un problème ouvert intéressant consiste donc à compléter cette description partielle afin de caractériser ces vecteurs d'incidence dans leur espace naturel.

Une autre direction de recherche qu'on peut envisager pour le futur consiste à montrer qu'il y a bien d'autres problèmes de Steiner relatifs à d'autres matroïdes transversaux qu'on peut résoudre facilement.

Finalement, on a aussi donné une modification non triviale de l'algorithme de Padberg&Rao [109] pour séparer une classe d'inégalités valides basée sur la solution du problème de la $s - t$ T -coupe dans un graphe orienté. Il serait alors intéressant de généraliser notre algorithme à d'autres problèmes.

Réseaux à composantes unicycliques avec de nouvelles contraintes techniques

L'objet de ce chapitre est d'intégrer d'autres types de contraintes. Nous souhaitons toujours obtenir un réseau à composantes connexes unicycliques. Nous considérons dans un premier temps des contraintes de degré. Ensuite, on intègre une contrainte sur le nombre de composantes connexes. Enfin, nous décrivons comment on peut intégrer des contraintes d'appartenance de sommets à une même composante connexe ainsi que des contraintes de séparation de certains sommets. Quelques résultats expérimentaux seront également présentés. Signalons que l'étude faite dans ce chapitre est très préliminaire.

4.1 Introduction

Les travaux exposés dans les deux précédents chapitres ont permis d'intégrer des contraintes techniques importantes en plus de la contrainte d'unicyclicité : taille minimale des cycles, et contraintes de type Steiner. Nous continuons sur la même lancée en intégrant d'autres contraintes. Signalons cependant que l'étude faite dans ce chapitre reste superficielle puisque nous n'avons pas pu faire une étude polyédrale poussée. Nous espérons pouvoir approfondir ce travail ultérieurement.

Notre ingrédient de base est encore la formulation mathématique issue de la transversalité du matroïde bi-circulaire.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{e \in E} w_e x_e \\
 & x_e = y_{ie} + y_{je}, \forall e = (i, j) \in E \\
 & \sum_{e=(i,j) \in E} y_{ie} = 1, \forall i \in V \\
 & 0 \leq y_{ie}, \forall i \in V, e = (i, j) \in E \\
 & x_e \leq 1, \forall e \in E.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous allons dans la suite présenter quelques contraintes techniques et montrer comment elles sont intégrées. Quelques résultats numériques seront également exposés.

Notons qu'en ce qui concerne les résultats expérimentaux qui vont suivre pour chaque cas, nous avons implémenté un algorithme à plans coupants suivi d'un algorithme de Branch&Cut basé sur les fonctions callbacks de [74]. Toutes les expérimentations ont été réalisées sur un Pentium 4, de 3.25 Go de RAM, et de 2.39 GHz de fréquence. On note aussi qu'une stratégie de recherche en profondeur d'abord a été choisie dans l'algorithme de Branch&Cut. Dans certains cas, une borne supérieure est calculée lorsque c'est possible.

4.2 Contraintes portant sur les degrés des sommets

Les noeuds du réseau peuvent avoir des rôles différents. Certains peuvent être des noeuds d'interconnexion avec de multiples voisins alors que d'autres doivent avoir un nombre très limité de voisins. Ce type de contraintes est évidemment très simple à intégrer.

Pour borner alors le degré du sommet a , il suffit d'écrire que

$$\underline{d}_a \leq \sum_i (y_{ai} + y_{ia}) \leq \overline{d}_a \quad (4.2)$$

où \underline{d}_a et \overline{d}_a représentent les bornes inférieures et supérieures du degré du sommet a respectivement.

Ces contraintes peuvent être renforcées à l'aide des inégalités classiques de type Blossom (provenant du b -couplage).

Signalons que nous ne connaissons toujours pas la complexité du problème de synthèse d'un réseau à composantes connexes unicycliques avec contraintes de degré.

4.3 Contrainte portant sur le nombre de composantes unicycliques

Lorsque on partitionne un réseau (graphe) donné par $G = (V, E)$ en composantes connexes et unicycliques, on peut retrouver un nombre de composantes relativement élevé. Ceci pourrait être gênant dans un contexte pratique.

Dans le chapitre 2, on a vu une manière pour y remédier en imposant une certaine contrainte sur la taille des cycles ce qui implique immédiatement une borne inférieure du nombre de noeuds par composante connexe.

Dans ce paragraphe, nous allons directement limiter le nombre de composantes unicycliques.

Pour ce faire, nous utilisons une variante des contraintes valides (2.6) présentées au chapitre 2.

Supposons que z représente le nombre maximal de composantes unicycliques connexes à ne pas dépasser. Soit $(\alpha_e)_{e \in E}$ un ensemble de nombres réels. Pour tout nombre $0 \leq i \leq z - 1$, γ_{n+i} est le coût minimum (au sens des $(\alpha_e)_{e \in E}$) d'un graphe connexe avec $n + i$ arêtes. Soit T_α un arbre couvrant de poids minimum et β_i est le coût maximum des i arêtes de T_α . Autrement dit,

$$\beta_i = \max_{E' \subseteq T_\alpha, |E'|=i} \sum_{e \in E'} \alpha_e.$$

Notons aussi que γ_{n+i} ainsi que β_i peuvent être calculés d'une manière gloutonne comme on peut le voir dans la section (2.5.4), et cela pour tout nombre i (voir chapitre 2).

Proposition 4.1: L'inégalité suivante est alors valide pour le problème posé ci-dessus :

$$\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \min_{0 \leq i \leq z-1} (\gamma_{n+i} - \beta_i). \quad (4.3)$$

Plus de détails sur la séparation de cette famille d'inégalités ont été donnés au chapitre 2.

Remarque : Si z est fixé à l'avance à 1, on retrouve alors le cas de la recherche d'un graphe connexe et unicyclique.

Notons également que lorsque la solution est entière, les inégalités (4.3) sont suffisantes pour garantir que le nombre de composantes connexes est au plus z . Cependant, les inégalités sont insuffisantes pour décrire l'enveloppe convexe des réseaux respectant la contrainte.

Le Tableau (4.1) résume quelques résultats numériques obtenus. Le contenu du tableau est similaire à celui des chapitres précédents.

On a limité le temps total d'exécution à 7200 secondes. Le nombre maximum de composantes unicycliques à obtenir varie de 1 à 3 (sauf pour $n = 20$, cette instance donne un partitionnement initial limité à 2 composantes unicycliques au plus). Si ce nombre est de 1, alors on utilise la résolution de l'algorithme glouton donné dans le chapitre 1, ce qui explique les temps de calcul nuls dans ce cas. Les instances traitées relèvent de graphes aléatoires et Euclidiens générés 3 fois. Les résultats présentés sont des moyennes sur les 3 instances.

On voit que malgré la pauvreté de notre modèle polyédral, on arrive à traiter des instances de tailles moyennes. Pour les instances de tailles importantes, nous avons besoin d'améliorer la relaxation linéaire.

TABLE 4.1 – Graphes aléatoires complets Euclidiens - Nombre Max de Composantes

n	Nb Max	sep	relax	temps tot	gap(%)	gap 2(%)	(4.3)	Nb coupes	Nb noeuds
20	1	0	0	0	0	3.7	0	0	1
	2	4.7	0	5.7	0	1.8	14.7	0	1
35	1	0	0	0	0	7.9	0	0	1
	2	403.3	8.3	414	0	5.06	103	0	1
	3	383.7	4.3	389.3	0	2.6	73.7	0	1
45	1	0	0	0	0	7.8	0	0	1
	2	2782	37	2825	0.9	6.3	135.7	0	1
	3	1491.3	12.7	1507.3	0	3.7	94	0	1
60	1	0	0	0	0	6.1	0	0	1
	2	7141	59	7200	2.8	6.1	222	0	1
	3	4945.7	74.3	5029.3	3	5.2	75.7	0	1
100	1	0	0	0	0	5.3	0	0	1
	2	7187	13	7200	3.4	5.3	37.7	0	1
	3	7192.7	7.3	7200	3.8	5.3	32.7	0	1