

Extension de la modélisation aux milieux contraints

Dans ce chapitre, nous détaillerons tout d'abord les développements nécessaires à la modélisation de dispositifs à ondes acoustiques de surface en milieu contraint mécaniquement. L'ensemble de ce travail s'appuie sur les bases théoriques décrites dans le chapitre précédent. Ceci étant, nous détaillerons plus particulièrement certaines propriétés de la réponse électrique de dispositifs à ondes élastiques de surface soumis à des contraintes.

3.1 Hypothèse de modélisation

Considérons tout d'abord un dispositif à ondes élastiques de surface soumis à une contrainte mécanique. En pratique, la distribution de contrainte est continue sur toute la surface du résonateur. Toutefois, afin de simplifier le modèle, la réponse électrique du dispositif est calculée en considérant la distribution de contrainte bidimensionnelle semi-continue en escalier illustrée sur la figure 3.1. On suppose donc que chaque cellule voit une condition de contrainte homogène. Ce découpage permettra par la suite de pouvoir modéliser à l'aide de matrices mixtes un dispositif à ondes de surfaces soumis à des contraintes mécaniques quelconques.

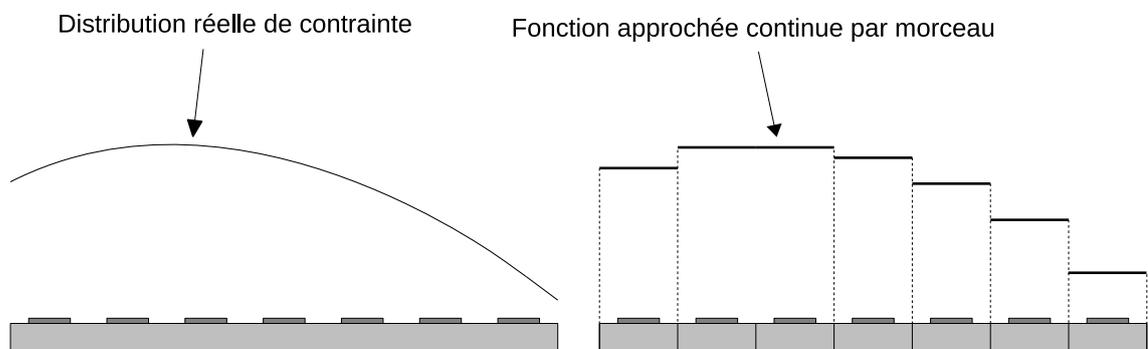


FIGURE 3.1 – Approximation de la distribution de contrainte par sa fonction moyennée sur chaque cellule en escalier.

3.2 Sensibilité des structures

3.2.0.2 Sensibilité des structures à la température

Les dispositifs à ondes élastiques sont sensibles à la température. Afin de caractériser le comportement en température de la fréquence de synchronisme, la méthode de Campbell et Jones est mise en œuvre [34]. La température perturbe le comportement électroacoustique et provoque une dérive de la fréquence de synchronisme des dispositifs.

Pour chaque point en température, le problème électromécanique peut être résolu en définissant de nouvelles constantes physiques effectives du matériau (constantes élastiques, piézoélectriques, diélectriques). Il est donc nécessaire de connaître les coefficients de sensibilité à la température des constantes élastiques $\kappa_{ijkl,n}$ tels que :

$$c_{ijkl}(T) = c_{ijkl}(T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_{ijkl}} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial T} (T - T_0)^n = c_{ijkl}(T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{ijkl,n} \Delta T^n \quad (3.1)$$

Il faut connaître également les coefficients de dilatation thermiques $\eta_{x_i,n}$ définis comme :

$$L_{x_i}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial L_{x_i}}{\partial T} (T - T_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{x_i,n} \Delta T^n \quad (3.2)$$

Ces coefficients sont déterminés expérimentalement jusqu'à $n = 3$ pour le quartz et seulement 1 ou 2 pour la plupart des autres matériaux. Les phénomènes de dilatation différentielle étant négligés dans ce modèle au niveau de l'interface substrat métal, on considère que c'est le substrat qui impose la dilatation selon la direction de propagation, les électrodes étant par contre libres de se dilater dans l'épaisseur.

3.2.0.3 Sensibilité à la contrainte

La théorie de l'analyse des dispositifs à ondes élastiques de surface soumis à une contrainte mécanique est fondée sur la méthode des perturbations développée par Tiersten et Sinha [35]. Elle informe sur la variation de fréquence d'un dispositif à ondes élastiques de surface soumis à un champ de contrainte. Dans l'analyse suivante, les propriétés piézoélectriques du substrat sont supposées suffisamment faibles pour être négligées (ce qui est le cas pour le quartz). De manière générale, l'équation de perturbation obtenue à partir d'un principe variationnel ou d'élasticité linéaire est écrite de la manière suivante [36] :

$$\frac{\Delta F}{F_0} = \frac{\iiint_V \bar{H}_{ikjm} \frac{\partial u_i^{0*}}{\partial a_k} \frac{\partial u_j^0}{\partial a_m} dv}{2\rho_0 \omega_0^2 \iiint_V u_l^{0*} u_l^0 dv} \quad (3.3)$$

où F_0 représente la fréquence de synchronisme du dispositif à ondes de surface, ρ_0 la masse volumique du substrat, u_i^0 les déplacements sans perturbation mécanique calculés en coordonnées Lagrangiennes [37], v le volume de l'analyse. \bar{H}_{ikjm} représente le tenseur de perturbation et le signe * est associé au complexe conjugué. Le tenseur \bar{H}_{ikjm} comprend la valeur de la contrainte

mécanique, des forces ainsi que les gradients de déplacement (\bar{T}_{km} , \bar{S}_{uv} , $\partial\bar{u}_i/\partial a_p$) induits par la perturbation avec les tenseurs d'élasticité linéaires et non linéaires (C_{ikjm} , C_{ikjmln}) décrivant les propriétés mécaniques du substrat (cf. eq. 3.4). Pour notre analyse, nous limiterons le tenseur de perturbation au premier ordre des effets non linéaires.

$$\bar{H}_{ikjm} = \delta_{ij}\bar{T}_{km} + C_{ikjmln}\bar{S}_{ln} + C_{pkjm}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial a_p} + C_{iqkm}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial a_q} \quad (3.4)$$

où δ_{ij} est le symbol de Kronecker. Le déplacement dynamique u_i^0 provient du calcul linéaire harmonique et s'exprime comme suit :

$$u_i^0 = \sum_{r=1}^4 A_r u_i^{0(r)} e^{-j\frac{\omega_0}{V_0} n_2^{(r)} a_2} e^{-j\frac{\omega_0}{V_0} a_1} e^{j\omega_0 t} \quad (3.5)$$

où V_0 est la vitesse de phase des ondes de Rayleigh, $n_2^{(r)}$ représente le coefficient de pénétration de l'onde, $u_i^{0(r)}$ sont les amplitudes mécaniques et A_r le poids associé à chaque onde partielle. Tous les termes de l'équation (3.5) sont calculés en tenant compte des propriétés piézoélectriques du matériau. En considérant les deux équations précédentes, il apparaît que la résolution de l'équation (3.3) dépend de la possibilité d'obtenir une représentation en trois dimensions des tenseurs des contraintes et gradients de déplacement décrivant l'état statique du milieu.

Cependant, à cause de la complexité du calcul en trois dimensions dans les milieux anisotropes, on peut simplifier le problème en ne considérant que le champ de contrainte. Dès lors, il est possible de déterminer la variation de fréquence associée à la contrainte comme une combinaison linéaire des contraintes statiques et de coefficients de sensibilité aux effets mécaniques quasi statiques. La variation de fréquence devient alors [38]

$$\frac{\Delta F}{F_0} = s_{\alpha_{ln}} \bar{T}_{ln} \quad (3.6)$$

où $s_{\alpha_{ln}}$ représente les coefficients de sensibilité aux contraintes combinant des termes de propagation dynamique et le comportement élastique du milieu.

3.3 Interface et ondes de Rayleigh

L'impédance acoustique locale d'un dispositif peut être définie comme le produit de sa masse volumique par la célérité des ondes dans le milieu. Lorsqu'un substrat piézoélectrique est contraint mécaniquement, la masse volumique du matériau change ainsi que ses propriétés élastiques effectives et la célérité des ondes également par voie de conséquence.

Lorsqu'une onde acoustique rencontre l'interface séparant deux milieux d'impédances acoustiques différentes, une partie de l'onde est transmise dans l'autre milieu tandis qu'une autre partie se réfléchit sur l'interface. La notion d'impédance acoustique permet d'étudier complètement et

quantitativement ce phénomène et d'estimer les quantités d'énergie acoustique transmises et réfléchies [39]. En supposant que les ondes sont d'incidence normale par rapport à l'interface, il est possible d'utiliser le modèle détaillé ci-après pour rendre compte de l'impact d'un tel phénomène sur la réponse électrique d'un dispositif à ondes élastiques de surface. La figure 3.2 présente les notations adoptées dans la suite du problème.

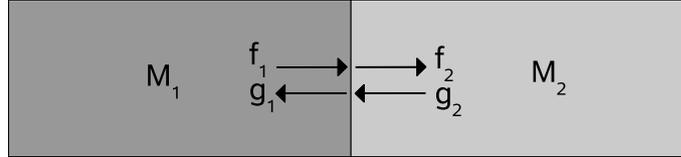


FIGURE 3.2 – Schéma représentatif de propagation d'ondes acoustiques pour un changement d'interface

Sur la figure 3.2, f_1 est la restriction de la fonction d'onde directe sur M_1 , g_1 la restriction de la fonction d'onde rétrograde sur M_1 , f_2 la restriction de la fonction d'onde directe sur M_2 , g_2 la restriction de la fonction d'onde rétrograde sur M_2 . Ces différents paramètres peuvent être reliés par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -r & t_{12} \\ t_{21} & r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

où t_{12} est le coefficient de transmission en amplitude des ondes depuis M_1 vers M_2 , r est le coefficient de réflexion en amplitude des ondes venant de M_1 sur l'interface, $-r$ est le coefficient de réflexion en amplitude des ondes venant de M_2 sur l'interface, t_{21} est le coefficient de transmission en amplitude depuis M_2 vers M_1 tel que

$$\begin{cases} t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \\ r = \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \\ t_{21} = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2} \end{cases} \quad (3.8)$$

où Z_1 représente l'impédance acoustique du milieu 1 et Z_2 l'impédance acoustique du milieu 2 tel que

$$Z_i = \rho_i c_i \quad (3.9)$$

où ρ_i est la masse volumique du milieu i et c_i la célérité de l'onde dans le milieu i .

En outre, les coefficients t_{12} , t_{21} et r sont reliés par

$$r^2 + \frac{Z_2 t_{12}^2}{Z_1} = 1 \text{ et } r^2 + \frac{Z_1 t_{21}^2}{Z_2} = 1 \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) traduit l'équilibre énergétique pendant le transfert des ondes. L'énergie élastique est soit transmise soit réfléchie.

3.4 Cascade de matrice mixte en milieu contraint

3.4.1 Approche analytique

Un dispositif à ondes élastiques de surface peut être décomposé en cellules élémentaires mono-électrodes. On suppose que localement, chaque cellule est plongée dans un environnement périodique infini de sorte que chaque paramètre de la matrice mixte puisse être assimilé à ceux extraits de l'admittance harmonique. On considère la cellule 1 et sa cellule adjacente 2 comme illustré sur la figure 3.3. Chaque cellule est supposée indépendante par sa géométrie comme par ses précontraintes (perturbation en température et contraintes mécaniques). La contrainte vue par la cellule i est supposée homogène et la variation de célérité qu'elle impose peut se mettre sous la forme suivante dans l'hypothèse de la phase linéaire comme décrit dans le paragraphe 3.2.0.3 :

$$\frac{\Delta F}{F_0} = {}^S \alpha_{ln} \overline{T_{ln}} \text{ soit } \frac{\Delta \psi}{\psi} = {}^S \alpha_{ln} \overline{T_{ln}} \quad (3.11)$$

Les variations relatives de phase étant largement inférieures à l'unité, on peut linéariser l'équation précédente sous la forme $\psi(T) = \psi_0(1 + {}^S \alpha_{ln} \overline{T_{ln}})$. Les coefficients de la matrice mixte associée à la cellule élémentaire i se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} t = \cos \Delta \exp(-j\psi_i) \\ r_g = -j \sin \Delta \exp(-j(\psi_i + \psi_r)) \\ r_d = -j \sin \Delta \exp(-j(\psi_i - \psi_r)) \\ \alpha_g = j \sqrt{G} \cdot \exp\left[-j \frac{\psi_i + \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) + j \sin \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) \right] \\ \alpha_d = j \sqrt{G} \cdot \exp\left[-j \frac{\psi_i - \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) - j \sin \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) \right] \end{cases} \quad (3.12)$$

Il est également possible de définir un coefficient de réflexion et de transmission au niveau de l'interface. Les relations permettant de relier les ondes acoustique S_{1d} , E_{1d} , S_{2g} et E_{2g} sont alors définies par le système d'équation suivant :

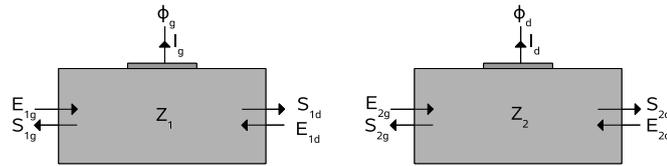


FIGURE 3.3 – Schéma de deux cellules adjacentes d'impédances acoustiques différentes.

$$\begin{cases} E_{2g} = -r S_{2g} + t_{12} S_{1d} & (a) \\ E_{1d} = t_{21} S_{2g} + r S_{1d} & (b) \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour chaque cellule, le système permettant de relier les variables d'entrées aux variables de sortie vaut :

$$\begin{cases} S_{1g} = r_{1g} E_{1g} + t_g E_{1d} + \alpha_{1g} \phi_g & (a) \\ S_{1d} = t_g E_{1g} + r_{2g} E_{1d} + \alpha_{2g} \phi_g & (b) \\ I_g = -\alpha_{1g} E_{1g} - \alpha_{2g} E_{1d} + Y_g \phi_g & (c) \end{cases} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{cases} S_{2g} = r_{1d}E_{2g} + t_d E_{2d} + \alpha_{1d}\phi_d & (a) \\ S_{2d} = t_g E_{2g} + r_{2d}E_{2d} + \alpha_{2d}\phi_d & (b) \\ I_d = -\alpha_{1d}E_{2g} - \alpha_{2d}E_{2d} + Y_d\phi_d & (c) \end{cases} \quad (3.15)$$

Exprimons les variables inconnues au niveau de l'interface S_{2g} et S_{1d} en fonction des autres variables. En substituant E_{1d} dans (3.14)(b) par son expression donnée par l'équation (3.13)(b), puis en substituant E_{2g} dans l'équation (3.15)(a) par son expression donnée par (3.13)(a), on détermine ainsi S_{2g} et S_{1d} ce qui permet de déterminer un nouveau système matriciel pour la cascade de matrices.

Supposons que la variation d'impédance entre une cellule élémentaire et sa voisine est faible, ce qui se traduit par $r \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 1$. En réalisant un développement limité de Taylor au premier ordre en $r = 0$ pour chacun des coefficients de la matrice mixte et après développement, la cascade de matrice mixte dépend alors des impédances acoustiques des différentes cellules et il vient (les calculs ont été effectués via le logiciel Maple) :

$$M = \begin{pmatrix} r_{1g} + \frac{r_{1d}r_g^2}{\Delta_r} & \frac{t_g t_d}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & \alpha_{1g} + \frac{t_g r_{1d} \alpha_{2g}}{\Delta_r} & \frac{t_g \alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ \frac{t_g t_d}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & r_{2d} + \frac{r_{2g} t_d^2}{\Delta_r} & \frac{t_d \alpha_{2g}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & \alpha_{2d} + \frac{t_d r_{2g} \alpha_{1d}}{\Delta_r} \\ -\alpha_{1g} - \frac{t_g r_{1d} \alpha_{2g}}{\Delta_r} & -\frac{t_d \alpha_{2g}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & Y_g - \frac{r_{1d} \alpha_{2g} \alpha_{1d}^t}{\Delta_r} & -\frac{\alpha_{2g} \alpha_{1d}^t}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ -\frac{t_g \alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & -\alpha_{2d} - \frac{t_d r_{2g} \alpha_{1d}}{\Delta_r} & -\frac{\alpha_{1d} \alpha_{2g}^t}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & Y_d - \frac{r_{2g} \alpha_{1d} \alpha_{1d}^t}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Le résultat de la cascade obtenu ci-dessus pour deux matrices doit être étendu au cas d'un dispositif complet.

La matrice M peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$M = \begin{bmatrix} r_{1g} & t_{1g} & \alpha_1 \\ t_{2g} & r_{2g} & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & Y \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Et en «cascadant» la matrice M avec la matrice M_1 telle que :

$$\begin{pmatrix} S_{2g} \\ S_{2d} \\ I_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1d} & t_{1d} & \alpha_{1d} \\ t_{1d} & r_{2d} & \alpha_{2d} \\ -\alpha_{1d} & -\alpha_{2d} & Y_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{2g} \\ E_{2d} \\ \phi_d \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} E_{2g} \\ E_{2d} \\ \phi_d \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

On obtient une nouvelle matrice M caractérisant l'ensemble du dispositif et telle que :

$$\begin{pmatrix} S_{1g} \\ S_{2d} \\ \mathbf{I} \\ I_d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{1g} \\ E_{2d} \\ \phi \\ \phi_d \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r} & \frac{t_{1g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & \alpha_1 + \frac{t_{1g}r_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} & \frac{t_{1g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ \frac{t_{2g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & r_{2d} + \frac{r_{2g}t_{1d}^2}{\Delta_r} & \frac{t_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & \alpha_{2d} + \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \\ \alpha_3 + \frac{t_{2g}r_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} & \frac{t_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & Y_g + \frac{r_{1d}\alpha_4\alpha_2}{\Delta_r} & \frac{\alpha_4\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ -\frac{t_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & -\alpha_{2d} - \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} & -\frac{\alpha_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & Y_d - \frac{r_{2g}\alpha_{1d}^2}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De proche en proche, on peut donc «cascader» la matrice mixte de manière à définir les propriétés électriques du dispositif avec une seule matrice. Après cascade, la matrice finale est de dimension $(2 + N, 2 + N)$ où N est le nombre d'électrodes du dispositif. Cependant il est possible de réduire la taille de cette matrice lorsque certaines électrodes sont reliées à un même potentiel. D'une part, la sous-matrice d'admittance \mathbf{Y} initialement de dimension (N, N) peut être ramenée à la dimension (N, N_{pot}) où N_{pot} représente le nombre de potentiel électriques différents. D'autre part, la loi des noeuds permet de réduire la taille de la matrice Y à la dimension (N_{pot}, N_{pot}) . On aura en effet :

$$\begin{pmatrix} S_{1g} \\ S_{1d} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r} & \frac{t_{1g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & \alpha_1 \\ \frac{t_{2g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & r_{2d} + \frac{r_{2g}t_{1d}^2}{\Delta_r} & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{1g} \\ E_{1d} \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 + \frac{t_{1g}r_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} + \frac{t_{1g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \delta_{id} \\ \alpha_2 &= \frac{t_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} + \left(\alpha_{2d} + \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \right) \delta_{id} \\ \alpha_3 &= \alpha_3 + \frac{t_{2g}r_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} - \frac{t_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \delta_{id}^t \\ \alpha_4 &= \frac{t_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} - \left(\alpha_{2d} + \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \right) \delta_{id}^t \\ Y &= Y + \frac{r_{1d}\alpha_4\alpha_2}{\Delta_r} + \left(\frac{\alpha_4\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \delta_{id}^t - \frac{\alpha_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \delta_{id} + \left(Y_d - \frac{r_{2g}\alpha_{1d}^2}{\Delta_r} \right) \delta_{id} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

et

$$\delta_{id} = (\delta_{id} \quad \dots \quad \delta_{id}) \quad (3.23)$$

où δ_{id} vaut 1 si $\phi_i = \phi_d$ et 0 sinon.

Et $\Delta_r = 1 - r_{1d}r_{2g}$

Notons que le rapport des racines des impédances $\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}$ est très proche de l'unité. De fait la troncature des expressions ci dessus à l'ordre 1 est suffisante pour décrire une bonne approximation de l'état du système.

3.4.2 Notion de matrice de transmission réflexion

Une autre approche consiste à insérer entre chaque cascades de matrice une autre cascade avec une matrice dite de «transmission réflexion» définie comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} r & t & \mathbf{0} \\ t & r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où les coefficients r et t sont définis comme dans le paragraphe 3.3.

Contrairement à l'approche développée dans le paragraphe précédent, cette approche numérique a l'avantage de ne faire intervenir aucune troncature dans les résultats numériques.

3.5 Linéarité du système avec la contrainte

Soit un dispositif à ondes élastiques de surface soumis à une distribution de contrainte T . T est défini comme un vecteur tel que

$$T = (\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_n) \quad (3.25)$$

où \overline{T}_i représente l'état de contrainte de la cellule élémentaire i comme illustré sur la figure 3.4. Nous montrerons dans cette partie que le résonateur répond linéairement à la contrainte pour des contraintes faibles. Si $T = T_1 + \lambda.T_2$ où $\lambda \in \mathfrak{R}$, on montre alors que la variation de la réponse électrique induite par la contrainte T au niveau du résonateur équivaut à celle induite par la distribution de contraintes T_1 à laquelle est ajoutée λ fois celle induite par la distribution de contrainte T_2 .

3.5.1 Démonstration de la linéarité

On cherche à montrer dans cette partie la linéarité de la variation de la réponse électrique avec le modèle de la matrice mixte pour des distributions de contraintes de faibles amplitudes.

Cette démonstration sera faite par récurrence. On montre dans un premier temps que la linéarité est vérifiée pour un dispositif composé d'une cellule élémentaire, c'est à dire que la variation de la réponse électrique varie linéairement avec la distribution de contrainte.

On montre ensuite par récurrence que si un dispositif est constitué de n cellules élémentaires chacune caractérisée par une matrice mixte, alors la variation électrique d'un dispositif constitué de $n+1$ cellules élémentaires varie linéairement avec la distribution de contrainte.

On aura alors montré que tout dispositif à ondes de surface présente des variations de sa réponse électrique linéaires avec la distribution de contrainte.

Soit les matrices mixtes permettant de relier l'entrée et la sortie entre cellules pour des milieux contraints et non contraints (voir équation 3.21).

Soit un dispositif à ondes élastiques de surface subissant une distribution de contrainte T tel que $T = T_1 + \lambda T_2$. Les distributions de contraintes T_1 et T_2 décrivent entièrement l'état de contrainte du résonateur et sont des fonctions continues par morceau en escalier.

Considérons tout d'abord la fonction g telle que $g(T) = f(\psi(T)) - f(\psi(T_0))$.

où $f(\psi(T)) = \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T))(1 + jT \delta\psi(T_0))$ une fonction de ψ avec ψ une fonction de la distribution de contrainte telle que, au premier ordre, $\psi(T) = \psi(T_0)(1 + \alpha T)$ avec $\psi(T_0)$ la phase de l'onde acoustique correspondant au milieu non contraint et T la contrainte.

Notons que dans ce développement $\alpha T \ll 1$ Démontrons tout d'abord l'intermédiaire de calcul suivant :

Montrons que g est linéaire au premier ordre par rapport à la contrainte, c'est à dire $g(T_1 + \lambda T_2) = g(T_1) + \lambda g(T_2)$.

$$\begin{aligned} g(T_1 + \lambda T_2) &= f(\psi(T_1 + \lambda T_2)) - f(\psi(T_0)) \\ &= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_1 + \lambda T_2))(1 + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0)) - \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0)) \\ &= \sum_i \beta_i \exp((-j\gamma_i \psi(T_0)(1 + \alpha T_1 + \lambda \alpha T_2)))(1 + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0)) - \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0)) \\ &= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0)) \exp(-j\gamma_i \psi(T_0)(\alpha T_1 + \lambda \alpha T_2))(1 + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0)) - \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0)) \end{aligned}$$

Pour de faibles amplitudes, on obtient alors :

$$= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0))(1 - j\gamma_i \psi(T_0)(\alpha T_1 + \lambda \alpha T_2))(1 + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0)) - 1)$$

En développant au premier ordre on obtient :

$$= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0))(-j\gamma_i \psi(T_0)(\alpha T_1 + \lambda \alpha T_2) + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0))$$

On calcul maintenant $g(T_1) + \lambda g(T_2)$.

$$\begin{aligned} g(T_1) + \lambda g(T_2) &= f(\psi(T_1)) - f(\psi(T_0)) + \lambda(f(\psi(T_2)) - f(\psi(T_0))) \\ &= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0))(1 - j\gamma_i \psi(T_0) \alpha T_1)(1 + jT_1 \delta\psi(T_0)) - 1 + \lambda(\sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0))(1 - j\gamma_i \psi(T_0) \alpha T_2)(1 + jT_2 \delta\psi(T_0)) - 1) \\ &= \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T_0))(-j\gamma_i \psi(T_0)(\alpha T_1 + \lambda \alpha T_2) + j(T_1 + \lambda T_2) \delta\psi(T_0)) \end{aligned}$$

D'où $g(T_1 + \lambda T_2) = g(T_1) + \lambda g(T_2)$

La fonction g est donc linéaire. Passons maintenant à la démonstration par récurrence.

L'hypothèse utilisée pour la démonstration par récurrence est la suivante :

tous les coefficients de la matrice mixte peuvent se mettre sous la forme :

$$f(\psi(T)) = \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i \psi(T))(1 + jT \delta\psi(T_0))$$

Notons tout d'abord, que la somme est une somme finie de termes et que la contrainte T ci-dessus correspond à la contrainte vue par la cellule.

Soient les coefficients de la matrice mixte :

$$\begin{cases} t = \cos \Delta \exp(-j\psi_i) \\ r_g = -j \sin \Delta \exp(-j(\psi_i + \psi_r)) \\ r_d = -j \sin \Delta \exp(-j(\psi_i - \psi_r)) \\ \alpha_g = j \sqrt{G} \cdot \exp\left[-j \frac{\psi_i + \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) + j \sin \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2})\right] \\ \alpha_d = j \sqrt{G} \cdot \exp\left[-j \frac{\psi_i - \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2}) - j \sin \delta \cdot \exp(-j \frac{\Delta}{2})\right] \end{cases}$$

Vérifions d'abord que ces coefficients vérifient la linéarité que l'on cherche à démontrer. Ce

qui est bien le cas car en effet, tous les termes peuvent se mettre sous la même forme que la fonction g . On peut dès lors établir qu'un résonateur composé d'une seule cellule présente une variation de sa réponse électrique linéaire avec la contrainte.

On suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang n . On montre que la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

Soit M la matrice permettant la cascade de matrice mixte :

$$M = \begin{pmatrix} r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r} & \frac{t_{1g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & \alpha_1 + \frac{t_{1g}r_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} & \frac{t_{1g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ \frac{t_{2g}t_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & r_{2d} + \frac{r_{2g}t_{1d}^2}{\Delta_r} & \frac{t_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & \alpha_{2d} + \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \\ \alpha_3 + \frac{t_{2g}r_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} & \frac{t_{1d}\alpha_4}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} & Y_g + \frac{r_{1d}\alpha_4\alpha_2}{\Delta_r} & \frac{\alpha_4\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \\ -\frac{t_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & -\alpha_{2d} - \frac{t_{1d}r_{2g}\alpha_{1d}}{\Delta_r} & -\frac{\alpha_{1d}\alpha_2}{\Delta_r} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & Y_d - \frac{r_{2g}\alpha_{1d}^2}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Il suffit alors de montrer que tous les coefficients de la matrice mixte vérifient l'hypothèse de récurrence et peuvent donc se mettre sous la forme sus-citée.

Établissons ce résultat pour le coefficient $r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r}$ avec $\Delta_r = 1 - r_{1d}r_{2g}$

On suppose la véracité de l'hypothèse de récurrence pour les coefficients r_{1g}, t_{1g} et t_{2g} , c'est à dire que chacun de ces termes peut se mettre sous une forme du type $f(\psi) = \sum_i \beta_i \exp(-j\gamma_i\psi(T))(1 + jT\delta\psi(T_0))$.

Quand à r_{1d} , son expression analytique est connue et peut se mettre directement sous cette forme.

Calculons tout d'abord Δ_r

$$\begin{aligned} \Delta_r &= 1 - r_{1d}r_{2g} \\ &= 1 - (1 + jT\delta_{r1d}\psi(T_0))(1 + jT\delta_{r2g}\psi(T_0)) \sum_i \beta_{i,r1d} \exp(-j\gamma_{i,r1d}\psi(T_0))(1 - j\gamma_{i,r1d}\psi(T_0)\alpha T) * \\ &\quad \sum_i \beta_{i,r2g} \exp(-j\gamma_{i,r2g}\psi(T_0))(1 - j\gamma_{i,r2g}\psi(T_0)\alpha T) \\ &= 1 - (1 + jT(\delta_{r1d} + \delta_{r2g})\psi(T_0)) \sum_i (\sum_k (\beta_{i,r1d} * \\ &\quad \exp(-j\gamma_{i,r1d}\psi(T_0))(1 - j\gamma_{i,r1d}\psi(T_0)\alpha T)) \beta_{k,r2g} \exp(-j\gamma_{k,r2g}\psi(T_0)\alpha T)) \\ &= 1 - (1 + jT(\delta_{r1d} + \delta_{r2g})\psi(T_0)) \sum_i (\sum_k (\beta_{i,r1d} \beta_{k,r2g} \exp(-j(\gamma_{i,r1d} + \gamma_{k,r2g})\psi(T_0))(1 - j\gamma_{i,r1d}\psi(T_0)\alpha T)(1 - \\ &\quad j\gamma_{k,r2g}\psi(T_0)\alpha T))) \\ &= 1 - (1 + jT(\delta_{r1d} + \delta_{r2g})\psi(T_0)) \sum_i (\sum_k (\beta_{i,r1d} \beta_{k,r2g} \exp(-j(\gamma_{i,r1d} + \gamma_{k,r2g})\psi(T_0))(1 - j(\gamma_{i,r1d} + \gamma_{k,r2g})\psi(T_0)\alpha T))) \\ &= 1 - (1 + jT\delta\psi(T_0)) \sum_{i,k} (\beta_{i,k} \exp(-j\gamma_{i,k}\psi(T_0))(1 - j\gamma_{i,k}\psi(T_0)\alpha T)) \\ &= 1 - \sum_{i,k} (\beta_{i,k} \exp(-j\gamma_{i,k}\psi(T_0))(1 + j\psi(T_0)T(\gamma_{i,k}\alpha - \delta))) \\ &= 1 - \sum_{i,k} (\beta_{i,k} \exp(-j\gamma_{i,k}\psi(T_0))) - \sum_{i,k} (\beta_{i,k} \exp(-j\gamma_{i,k}\psi(T_0)) j\psi(T_0)T(\gamma_{i,k}\alpha - \delta)) \\ &= 1 - C1 - T.C2 \text{ avec } C1 \text{ et } C2 \text{ des constantes.} \end{aligned}$$

i et k étant fini, le dernier terme ci dessus tend vers 0 lorsque T tend vers 0. Par conséquent, on peut réaliser un développement limité au premier ordre et il vient :

$$1/\Delta_r = \frac{1}{1-C1} (1 + T \frac{C2}{1-C1})$$

On calcule maintenant $r_{1d}t_{1g}t_{2g}$.

De la même manière que précédemment, on a :

$$r_{1d}t_{1g}t_{2g} = \sum_{i,k,l} \beta_{i,k,l} \exp(-j\gamma_{i,k,l}\psi(T_0))(1 + T j\psi(T_0)(\gamma_{i,k,l}\alpha - \delta))$$

On calcule donc

$$r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r} = \sum_i \beta_{i,r1g} \exp(-j\gamma_{i,r1g}\psi(T))(1 + jT\delta\psi(T_0)) +$$

$$\frac{1}{\Delta_r} [\sum_i \beta_{i,r1d} \exp(-j\gamma_{i,r1d}\psi(T)) \sum_i \beta_{i,t1g} \exp(-j\gamma_{i,t1g}\psi(T)) \sum_i \beta_{i,t2g} \exp(-j\gamma_{i,t2g}\psi(T))]$$

Or, on a également,

$$\Delta_r = 1 - r_{1d}r_{2g} = 1 - \sum \beta \exp(-j\gamma\psi) = 1 - \sum \beta \exp(-j\gamma\psi(T=0)) \exp(-j\gamma\psi(\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2)) \text{ avec}$$

$$\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2 \ll 1 \text{ d'où il vient}$$

$$\exp(-j\gamma\psi(\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2)) = 1 - j\gamma\psi(\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2)$$

$$\text{D'où } \Delta_r = 1 - \sum \beta \exp(-j\gamma\psi) = 1 - \sum \beta \exp(-j\gamma\psi(T=0))(1 - j\gamma\psi(\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2))$$

$$= 1 - \sum \beta \exp(-j\gamma\psi(T=0)) + \sum \beta \exp(-j\gamma\psi(T=0))j\gamma\psi(\alpha T_1 + \alpha\lambda T_2)$$

Après développement limité de Taylor au premier ordre il vient alors :

$$\frac{1}{\Delta_r} = \frac{1}{1 + \sum_i \gamma \exp(-j\gamma(1 + \alpha T_i))}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum \gamma \exp(-j\psi) - \sum \exp(-j\psi)(j\psi\alpha T)}$$

D'où

$$r_{1g} + \frac{r_{1d}t_{1g}t_{2g}}{\Delta_r} = \beta_1 \exp(-j\gamma_1\psi) + \beta_2 \exp(-j\gamma_2\psi) \text{ ce qui vérifie bien l'hypothèse de récurrence.}$$

On montre de la même façon que les autres termes de la matrice mixte vérifient l'hypothèse de récurrence.

On a donc montré avec cette démonstration que les variations électriques d'un dispositif à ondes élastiques répond linéairement avec les distributions de contraintes mécaniques imposée sur ce dispositif dans l'hypothèse d'une distribution de contraintes de faible amplitude.

Dans la suite, nous tenterons de déterminer empiriquement via une approche numérique une limite de validité à cette linéarité. Cette approche est réalisée dans le paragraphe 3.5.4 de la page 59.

3.5.2 Exemple de distribution simples de contraintes

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats obtenus à partir des modèles développés précédemment. Dans un premier temps, nous établirons quelques résultats généraux puis nous modéliserons la réponse d'un résonateur électroacoustique soumis à des contraintes.

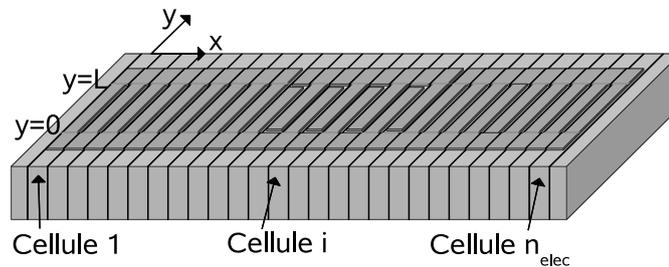


FIGURE 3.4 – Répartition des contraintes dans le résonateur. Les lignes noires représentent les interfaces de changement de contrainte. On suppose dans un premier temps que la cellule i voit une contrainte homogène \bar{T}_i

La figure 3.4 illustre la répartition des contraintes comme modélisées au niveau du résonateur

où \overline{T}_i représente l'état de contrainte de la cellule i du résonateur.

Pour les modélisations suivantes, nous considérons des distributions simples de contraintes de type polynômiale.

Les paramètres utilisés pour la simulation et les propriétés géométriques du résonateur sont les suivantes :

- membrane de quartz de coupe AT,
- fréquence de résonance dans la bande ISM à 434 MHz,
- 2 miroirs de Bragg composés de 400 électrodes présentant un rapport de métallisation de 0.6,
- 150 paires d'électrodes excitatrice avec un rapport de métallisation de 0.5,
- électrodes en aluminium d'une épaisseur de 200 nm.

D'autre part, on suppose la température constante et égale à 25 °C.

Dans les cas suivant, nous considérons que k est un coefficient homogène à une pression. On suppose que chaque composante du tenseur \overline{T}_i est proportionnelle à k . On note T_i le résultat de la combinaison linéaire $s_{\alpha_{in}} \overline{T}_{in}$. La variation de phase induite par la contrainte est alors donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\Delta\psi_i(k)}{\psi_i} = kT_i \quad (3.27)$$

Dans la suite, α représente un réel permettant seulement de dilater les courbes et ainsi rendre l'ensemble plus lisible. Les courbes des figures 3.5 et 3.6 montrent l'évolution de la conductance et de la susceptance du résonateur en fonction de la fréquence lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte mécanique.

Dans la suite, nous étudierons l'influence de différentes distributions types de contrainte le long du dispositif à ondes de surface.

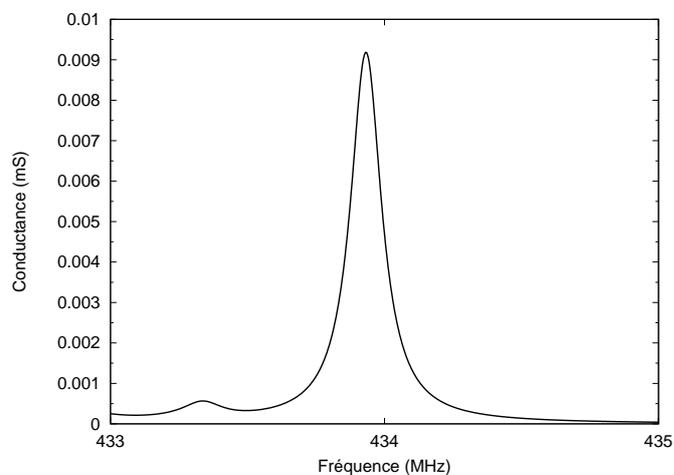


FIGURE 3.5 – Admittance du résonateur sans contrainte mécanique

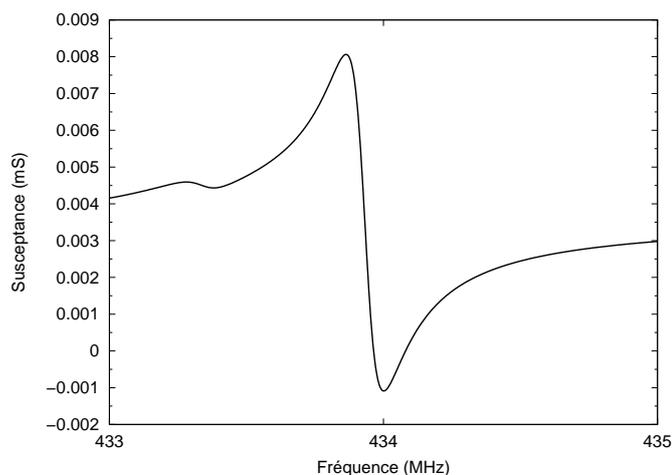


FIGURE 3.6 – Admittance du résonateur sans contrainte mécanique

3.5.2.1 Cas d'une distribution homogène de contrainte

On suppose que la distribution de contrainte est homogène le long du résonateur, ce qui se traduit par :

$$\forall i \in [1, n], T_i = k\alpha \quad (3.28)$$

où x_i représente l'abscisse moyenne de la cellule élémentaire i comme illustré sur la figure 3.4. Les graphiques des figures 3.7 et 3.8 illustrent la conductance et la susceptance du résonateur en fonction de la fréquence lorsqu'il est soumis à une contrainte de type uniforme en fonction de différentes valeurs de k .

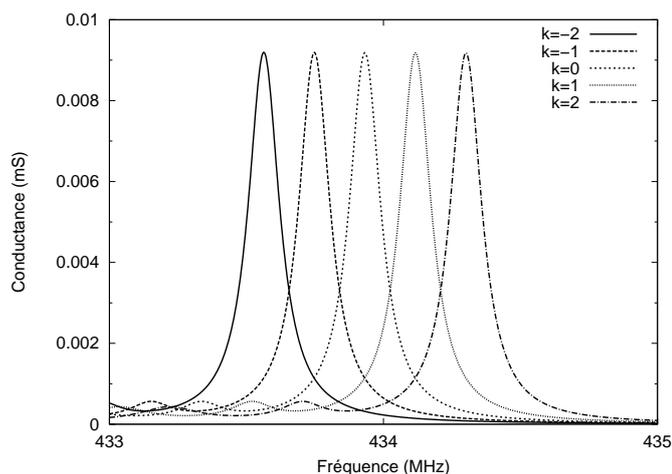


FIGURE 3.7 – Conductance du résonateur avec une contrainte uniformément répartie

La valeur de k nulle correspond à la modélisation de la réponse électrique lorsque la contrainte est nulle. On peut remarquer l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de la valeurs de k sans observer de variations notables de la forme de la conductance et de la susceptance.

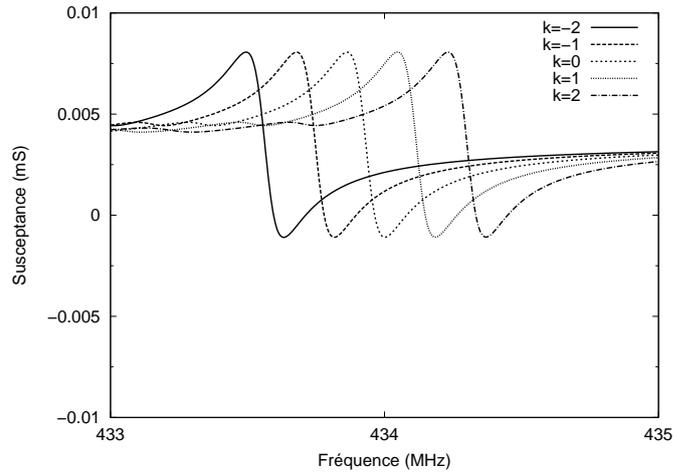


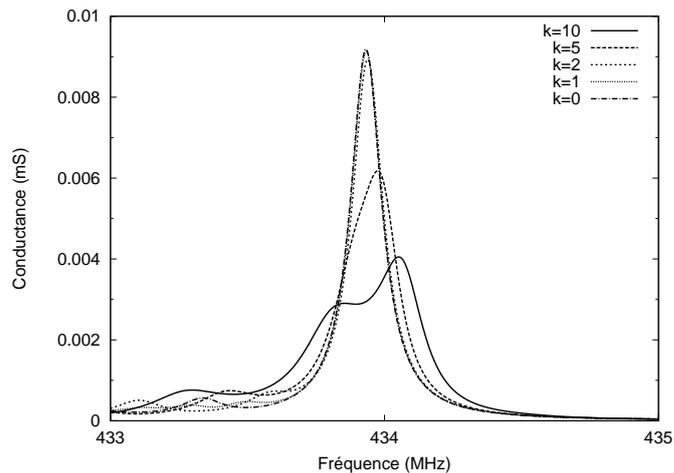
FIGURE 3.8 – Susceptance du résonateur avec une contrainte uniformément répartie

3.5.2.2 Cas d'une distribution de type pente

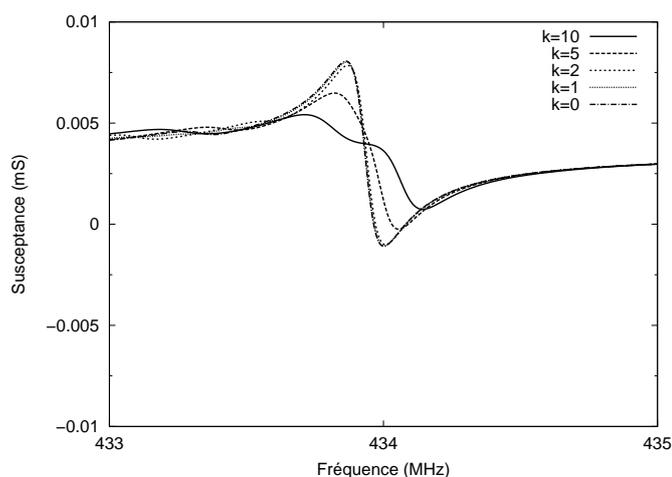
On considère maintenant une distribution de contrainte linéairement croissante le long du résonateur tout en supposant que la contrainte est nulle en son centre, ce qui se traduit par :

$$\forall i \in [1, n], T_i = 2\alpha k \left(\frac{x_i}{x_n} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.29)$$

Les graphiques des figure 3.9 et 3.10 illustrent la variation de la conductance et de la susceptance du résonateur en fonction de la fréquence lorsqu'il est soumis à ce type de contrainte en fonction de différentes valeurs de k .

FIGURE 3.9 – Conductance du résonateur avec une contrainte de type pente en fonction des valeurs de k

On notera la chute de la conductance avec la croissance de la valeur de k sans toutefois observer de variations notables de la fréquence de résonance pour des valeurs de k inférieures à 2, valeur à partir de laquelle on observe une variation de la fréquence de résonance ainsi qu'une décroissance du facteur de qualité.

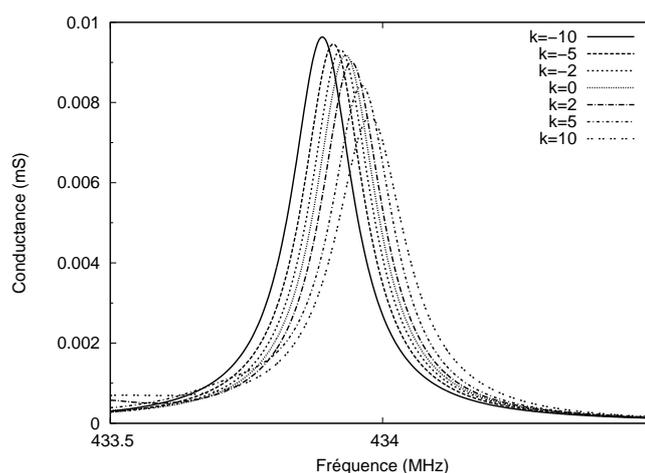
FIGURE 3.10 – Susceptance du résonateur avec une contrainte de type pente en fonction des valeurs de k

3.5.2.3 Cas d'une distribution de type quadratique

On considère maintenant le cas d'une distribution quadratique telle que :

$$\forall i \in [1, n] T_i = 4\alpha k \left(\frac{x_i^2}{x_n^2} - \frac{x_i}{x_n} + \frac{1}{4} \right) \quad (3.30)$$

Les graphiques des figures 3.11 et 3.12 illustrent la variation de la conductance et de la susceptance du résonateur en fonction de la fréquence lorsqu'il est soumis à une contrainte de type quadratique en fonction de différentes valeurs de k .

FIGURE 3.11 – Conductance du résonateur avec une contrainte de type quadratique en fonction des valeurs de k

On peut voir la valeur de la conductance augmenter pour des valeurs négatives de k et diminuer pour des valeurs positives de k . Notons également que la fréquence de résonance varie peu avec la contrainte.

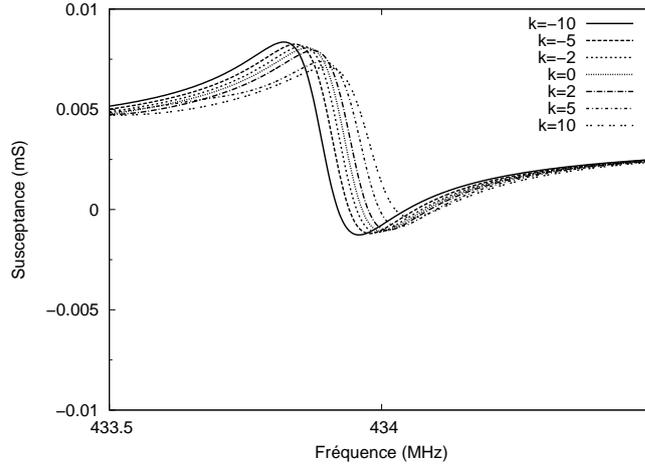


FIGURE 3.12 – Susceptance du résonateur avec une contrainte de type quadratique en fonction des valeurs de k

3.5.3 Analyse

Les développements précédents, limités à l'ordre 2, peuvent être poussés jusqu'à n'importe quel ordre. Ils représentent également les premiers ordres d'un développement en série de Taylors.

L'influence des contraintes étant linéaires, il suffit alors de considérer chaque distribution de contrainte comme équivalente à sa série de Taylors et de sommer les contributions associées à chaque ordre avec le poids correspondant à la décomposition en série.

Soit T le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre n de la fonction de distributions des contraintes au niveau du résonateur tel que

$$T\left(\frac{x_i}{x_n} - \frac{1}{2}\right) = \sum_j \beta_j \left(\frac{x_i}{x_n} - \frac{1}{2}\right)^j \quad (3.31)$$

Au niveau de la fréquence de résonance, on pourra alors approximer la nouvelle valeur de l'impédance, du coefficient de qualité et de la fréquence de résonance comme une combinaison linéaire des variations à tout ordre telle que :

$$Elec(T) = Elec|_{T=0} + \sum_j \alpha_j \beta_j T \quad (3.32)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{iq} \\ \alpha_{if} \\ \alpha_{ia} \end{pmatrix} \text{ et } Elec = \begin{pmatrix} q \\ f \\ a \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

où $\alpha_{iq}, \alpha_{if}, \alpha_{ia}$, correspondent respectivement à la sensibilité électrique pour l'ordre i du facteur de qualité, de la fréquence de résonance, et de l'admittance à la résonance. Et où q représente le facteur de qualité, f la fréquence de résonance et a l'admittance à la résonance.

Jusqu'à présent, nous avons considéré que la contrainte était uniforme sur l'ensemble de la cellule i . Supposons désormais que la contrainte est variable le long d'une cellule. Il suffit alors, pour déterminer la réponse électrique du dispositif, de considérer que le dispositif global se comporte

comme une somme infini de dispositifs mis en parallèle répondant indépendamment les uns des autres comme illustré par le résonateur infinitésimal de la figure 3.13. La réponse du dispositif peut alors se mettre sous la forme :

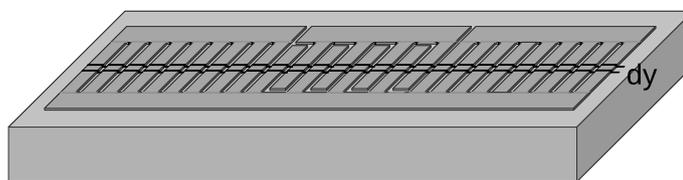


FIGURE 3.13 – Schématisation de la parallélisation de résonateurs infinitésimaux. La réponse électrique globale du dispositif peut être considérée comme la somme de ses contributions élémentaires dy .

$$Elec(frequence) = \frac{1}{L} \int_0^L Elec(T(y))dy \quad (3.34)$$

où $T(y)$ correspond à la distribution de contrainte le long du résonateur pour l'ordonnée y . Notons cependant qu'intégrer la réponse électrique sur l'ensemble du dispositif n'est possible que lorsque l'ensemble des ondes du dispositif se propage dans la même direction.

3.5.4 Gamme de validité de la linéarité

Afin de déterminer une plage de contrainte dans laquelle le modèle de la linéarité représente une bonne approximation, une comparaison des différents résultats de modélisation issus à partir de la répartition réelle du modèle de contrainte et celle issue des résultats de la linéarité sera réalisée. Les figures des graphiques 3.14 représentent l'influence de chaque type de contrainte ainsi que la contrainte finale. Dans cet exemple, nous considérons une contrainte dont le développement en série (si l'on considère le même type de développement que celui utilisé dans la partie 3.5.2) est tel que :

$$T = 4T_0 - 2T_1 - T_2 \quad (3.35)$$

On calcule numériquement tout d'abord de manière directe l'influence d'une telle contrainte. Le résultat est représenté par la courbe T de la figure 3.14. La courbe $T=0$ correspond au résultat de modélisation pour une contrainte nulle et les courbes $4T_0$, $-2T_1$, $-T_2$, correspondent respectivement aux résultats obtenus pour une contrainte égale à $4xT_0$, $-2xT_1$ et $-T_2$.

Le calcul d'erreur effectué montre que la variation relative de fréquence de résonance entre les deux modélisations est inférieure à 0,2%. Par contre, la modélisation directe montre une décroissance de 1% de l'amplitude alors que le modèle de la linéarité indique une décroissance de seulement 0,5%.

Cette approche ne permet en aucun cas de déterminer un cadre stricte de validité au modèle. Toutefois, les écarts obtenus entre la linéarité et la modélisation directe semblent très acceptables.

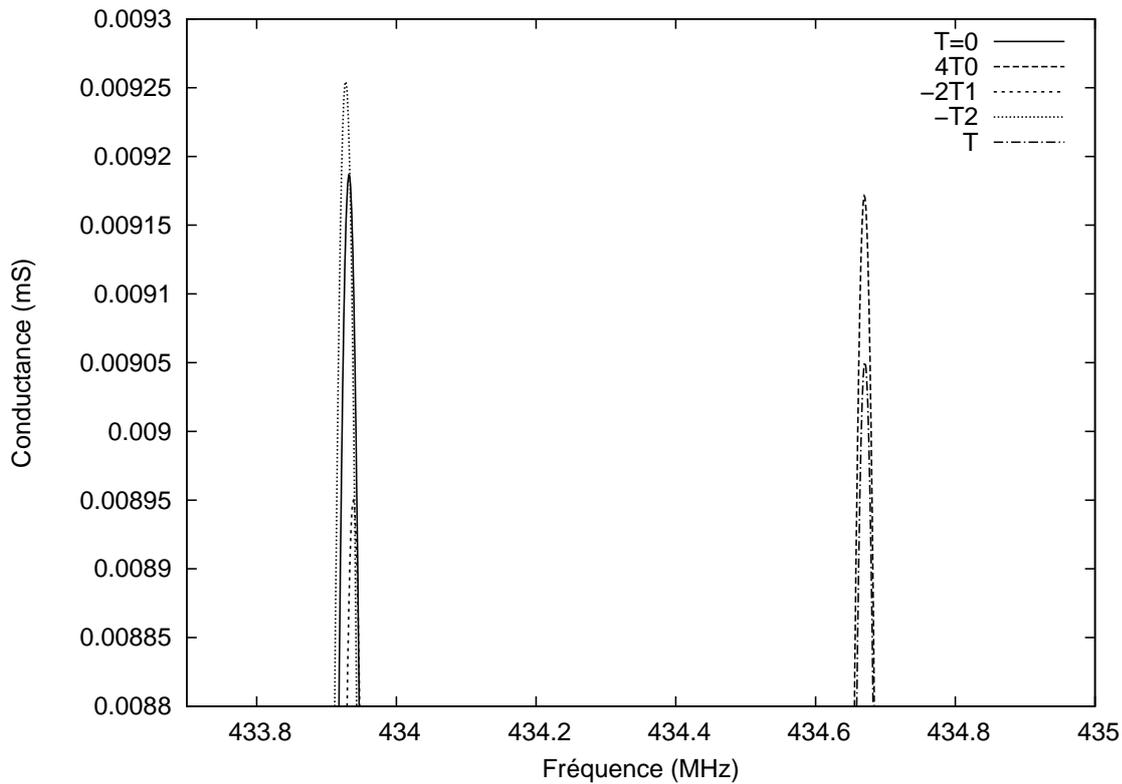


FIGURE 3.14 – Comparaison des résultats obtenus avec une modélisation directe et les différentes composantes de la distribution de contrainte. Les différentes courbes correspondent aux simulations des différentes composantes de la distribution de contrainte. La dernière courbe correspond à la modélisation directe.

3.6 Conclusion

Jusqu'à présent les modèles existant permettant de modéliser la réponse électrique d'un dispositif à ondes élastiques de surface se contentaient d'estimer la variation de la fréquence de résonance lorsque la contrainte était homogène sur l'ensemble du substrat. Désormais, un modèle inédit est développé et permet de caractériser entièrement la réponse électrique d'un dispositif à ondes élastiques de surface soumis à des contraintes inhomogènes. L'ensemble des développements théoriques réalisés ci-dessus ont été implémentés dans un logiciel permettant de réaliser des modélisations numériques de dispositifs à ondes de surface en milieu contraint. Le manuel d'utilisation de ce logiciel est détaillée en annexe C. La notion de linéarité est très intéressante car elle permet d'appréhender rapidement le comportement électrique d'un dispositif soumis à des contraintes mécaniques. Notons également que la variation de la fréquence de résonance d'un dispositif est principalement dûes au premier ordre de sa décomposition en série. Ce fait n'est pas prouvé mais dans le cas d'un résonateur, l'énergie du système est maximale au centre du résonateur, là où la décomposition en série sur quelques ordres suffit à décrire la distribution de variation de vitesse. L'influence des autres composantes semble se faire sur la forme du signal.

Notons également que l'on n'a pas apporté de limites au cadre scientifique concernant le domaine pour lequel la validité de la linéarité est avérée.

La validation expérimentale du modèle est présentée dans le chapitre suivant.

