Chapitre 1

ELEMENTS DE LA REPRESENTATION DUALE

1.1 Introduction

Le mathématicien William Kingdon Clifford (1845–1879) a introduit une idée très originale sur la théorie des "moteurs"[1] qui réside dans l'utilisation d'un certain opérateur ε qui permet d'exprimer symboliquement un "moteur" (M, M_0) sous forme d'un vecteur spécial[2]: $M + \varepsilon\, M_0$ où ε est un opérateur nilpotent du second ordre.

C'est ainsi, à la suite des travaux de W.K. Clifford [[CLI-873] & [CLI-878]], que l'existence d'un tel opérateur a été implicitement acceptée. Plus tard, en se basant sur les travaux de Ball et Zanchevskiy sur la théorie des vis et de ceux de Kotelńikov sur l'application des nombres duaux à la théorie des vecteurs, F.M. Dimentberg a proposé une large application du calcul dual sur les vis pour le traitement des problèmes de cinématique [F.M. Dimentberg [DIME-65]]. Dans de récents travaux, plusieurs auteurs [K. Sugimoto & J. Duffy [SUG-82a], G.R. Veldkamp [VELD-82], A.K. Pradeep, P.J. Yoder & R. Mukundan [PRAD-89], D. Chevallier [CHEV-91]] ont proposé des présentations modernes des applications de tels nombres en cinématique.

Dans le chapitre présent, nous allons introduire la notion de nombres duaux comme un outil mathématique. Nous nous attacherons à mettre de la rigueur mathématique dans notre exposé afin de ressortir les idées réelles qui existent derrière l'utilisation des nombres duaux. Avec cet outil, nous allons construire un certain nombre de structures algébriques adjacentes et établir nombre

[1]Nous avons utilisé ici la traduction du mot anglais: Motor.

[2]L'introduction de ce type de vecteurs qui résulte d'une telle construction formelle a conduit Clliford à des résultats intéressants [DIME-65]:

- Les opérations sur les moteurs sont indépendantes du point de l'espace géométrique où ils sont réduits.
- La partie vectorielle d'un moteur apparaît comme le résultat de l'opération par ε du même moteur.

de résultats analytiques et algébriques afin de mettre en évidence les propriétés caractéristiques qui nous permettrons d'envisager un calcul symbolique direct (et systématique) sur cette notion. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, travailler sur des structures algébriques et des outils basés sur les nombres duaux n'est pas une simple généralisation[3] du calcul sur ces mêmes notions dans $\boldsymbol{R}$. Il s'agit en fait de travailler dans de nouvelles structures algébriques qui n'ont plus les mêmes propriétés que les structures algébriques correspondantes sur $\boldsymbol{R}$. En effet, même si les axiomes d'un module sont identiques à ceux d'un espace vectoriel, au changement près du corps de base en un anneau, et même si les principales définitions d'algèbre linéaire sont valables dans les modules, les propriétés algébriques d'un module peuvent différer substantiellement de celles d'un espace vectoriel. En particulier, des propriétés intuitives de la géométrie ou de l'existence d'une norme peuvent être en défaut dans un module. Et manque d'une justification mathématique rigoureuse des résultats, on ne peut affirmer avec certitude la validité des modèles généralisés.

1.2 Nombres duaux

Dans ce paragraphe nous allons définir les éléments de base du calcul sur les nombres duaux. Les éléments de ce langage sont indispensables pour aborder des structures algébriques duales plus complexes.

1.2.1 Définition structurelle

En un certain sens, les nombres duaux peuvent être conçus comme des doublets[4] de nombres réels munis de certaines lois de composition interne.

Définition 1.1

On appellera ensemble des nombres duaux et on va noter Δ, l'ensemble $\boldsymbol{R}^2$ muni des lois d'addition et de multiplication, sur des couples de nombres réels, définies respectivement par:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{(Eq.1.1)}$$

et

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad \text{(Eq.1.2)}$$

Dès à présent un nombre de remarques immédiates peuvent être faites sur la structure algébrique de Δ:

- D'abord, l'ensemble Δ a une structure d'anneau unitaire commutatif pour les lois d'addition et de multiplication définies ci-dessus.
- Son élément unité est: $1_\Delta = (1, 0)$.

[3]Cependant, il est vrai que la restriction des résultats qu'on peut établir sur les Δ-modules, aux structures réelles correspondent aux résultats classiques sur les $\boldsymbol{R}$-espaces vectoriels à des isomorphismes près.

[4]D'autres définitions peuvent être envisagés. A titre d'exemple, l'ensemble des nombre duaux peut être considéré comme étant une algèbre quadratique de type (0,0) [N. Bourbaki [BOUR-70]], ou encore la structure $\boldsymbol{R}[X]/[X^2]$.

- De plus l'élément $\varepsilon = (0,1)$ est nilpotent d'ordre deux; c'est à dire:

$$\varepsilon^2 = 0_\Delta \tag{Eq.1.3}$$

L'ensemble Δ n'est donc pas un anneau intègre, puisqu'il contient des diviseurs de zéro.

- Par ailleurs, l'ensemble $\{(a,0)/\, a \in \boldsymbol{R}\}$ est un sous-anneau de Δ isomorphe à $\boldsymbol{R}$. Ainsi, dans la suite, nous pourrons identifier cet ensemble à $\boldsymbol{R}$.

- L'ensemble Δ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension deux sur $\boldsymbol{R}$, dont une base canonique est donnée par la famille $\{1_\Delta, \varepsilon\}$, de sorte que l'on peut désormais identifier Δ à $\boldsymbol{R} \oplus \varepsilon\, \boldsymbol{R}$. On s'accordera donc d'écrire, de façon symbolique, pour tout nombre dual $x = (x_1, x_2)$:

$$x = x_1 1_\Delta + \varepsilon\, x_2 \equiv x_1 + \varepsilon\, x_2\,; \quad \text{avec } x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \tag{Eq.1.4}$$

1.2.2 Parties réelle et partie duale d'un nombre dual

Définition 1.2

Nous appellerons parties réelle et duale d'un nombre dual, les fonctions Re et Du à arguments dans Δ et à valeurs dans $\boldsymbol{R}$ qui à tout nombre dual $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$ de l'ensemble Δ, associent respectivement les composantes réelles:

$$Re\,(x) = x_1 \quad et \quad Du\,(x) = x_2$$

On a l'habitude d'utiliser un support géométrique pour représenter intuitivement la notion de produit cartésien. Cependant, bien que cet approche soit assez commode pour se faire une idée intuitive, il ne faut pas trop s'y fier pour les démonstrations mathématiques. Ainsi, il peut arriver que l'on rencontre dans la littérature le terme de points du plan Δ. A chaque point sont associées deux coordonnées et, de ce point de vue, les parties réelle et duale d'un nombre dual sont respectivement les projections sur les axes de la première et la seconde coordonnée du point du plan qui représente ce nombre.

1.2.3 Nombres duaux inversibles – Quotient

D'après la relation (Eq.1.2) qui définit la multiplication sur les nombres duaux, les éléments inversibles de Δ sont les nombres duaux $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$, avec $x_1 \neq 0$, tels que:

$$x^{-1} = \frac{1}{x_1} - \varepsilon\, \frac{x_2}{{x_1}^2} \tag{Eq.1.5}$$

Corollaire 1.1

Soient deux nombres duaux x et y, avec $Re\,(y) \neq 0$. Si $\dfrac{x}{y}$ désigne le quotient de x par y, alors:

$$Re\,(\frac{x}{y}) = \frac{Re\,(x)}{Re\,(y)} \quad et \quad Du\,(\frac{x}{y}) = \frac{Re\,(y)\,Du\,(x) - Re\,(x)\,Du\,(y)}{Re\,(y)^2} \tag{Eq.1.6}$$

1.3 Fonction d'une variable duale

1.3.1 Définition – Exemples

Définir une fonction f, d'une variable duale $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$, revient à définir une application d'un domaine $D \subseteq \boldsymbol{R}^2$ dans $\boldsymbol{R}^2$, telle que: $f(x) = f_1(x_1, x_2) + \varepsilon\, f_2(x_1, x_2)$, où f_1 etf_2 peuvent être considérées comme deux fonctions de deux variables réelles et à valeurs dans $\boldsymbol{R}$.

Exemples

A titre d'exemples, on peut définir des fonctions sinus et cosinus duales, pour tout nombre dual $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$, par:

$$\widetilde{sin}\, x = \; sin\, x_1 + \varepsilon\, x_2\, cos\, x_1 \;\text{ et }\; \widetilde{cos}\, x = \; cos\, x_1 - \varepsilon\, x_2\, sin\, x_1 \qquad \text{(Eq.1.7)}$$

Si aucune confusion n'est à craindre, on peut noter tout simplement sin et cos au lieu de $\widetilde{sin}$ et $\widetilde{cos}$, ces fonctions sinus et cosinus duales.

Lemme 1.2

Soit n un nombre entier naturel quelconque. Alors, pour tout nombre dual x:

$$x^n = \; Re\,(x)^n + \varepsilon\, n\, Du\,(x)\, Re\,(x)^{n-1} \qquad \text{(Eq.1.8)}$$

▮ Preuve :

Δ étant un anneau commutatif, on peut appliquer la formule du binôme en tenant compte de $\varepsilon^2 = \; 0$. Ainsi, si $x = \; x_1 + \varepsilon\, x_2$, alors:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, {x_1}^{n-k}\, \varepsilon^k\, {x_2}^k = \; {x_1}^n + \varepsilon\, n\, x_2\, {x_1}^{n-1}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ▮

Proposition 1.3

Soit x un nombre dual arbitraire, alors, les séries formelles suivantes sont convergentes dans Δ et on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2n}}{(2\,n)\,!} = \; 1 - cos\, x \qquad \text{(Eq.1.9)}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} = \; sin\, x \qquad \text{(Eq.1.10)}$$

▮ Preuve :

La démonstration est immédiate, elle découle du lemme 1.2, de la définition des fonctions sinus et cosinus duales et du développement en série des fonctions sinus et cosinus de variable réelle. ▮

Plus généralement, toutes les identités établies pour la trigonométrie réelle, peuvent être étendues, quand elles sont définies, à la trigonométrie duale en tenant compte des propriétés d'inversibilité[5] des nombres duaux.

[5] Je fait allusion ici aux formules où pourrait intervenir un quotient dual.

1.3.2 Limite et continuité de fonctions de variable duale

Considérons maintenant $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$ et $a = a_1 + \varepsilon\, a_2$. Nous dirons qu'une fonction de variable duale $f(x) = f_1(x_1, x_2) + \varepsilon f_2(x_1, x_2)$ tend vers une limite $b = b_1 + \varepsilon\, b_2$ lorsque $x \to a$ et nous noterons $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, si $f(x)$ tend vers b au sens de la topologie de $\boldsymbol{R}^2$. C'est à dire aussi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f_1(x_1, x_2) = b_1 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f_2(x_1, x_2) = b_2 \end{cases} \qquad \text{(Eq.1.11)}$$

Ainsi, nous dirons que la fonction de variable duale est continue en un point a, si et seulement si elle est continue en (a_1, a_2) pour la topologie de $\boldsymbol{R}^2$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{(Eq.1.12)}$$

et elle sera dite continue sur un domaine $D \subseteq \boldsymbol{R}^2$, si elle est définie et continue en tout point de D.

1.3.3 Δ–différentiabilité – Dérivée d'une fonction de variable duale

Par définition, une fonction f de variable duale sera dite Δ–différentiable, en un point x, lorsqu'il existe un nombre dual $A \in \Delta$ et une fonction de variable duale Θ tels que :

$$f(x+h) = f(x) + A\,h + h\,\Theta(h) \;\text{ et }\; \lim_{\substack{h \in \Delta \\ h \to 0}} \Theta(h) = 0 \qquad \text{(Eq.1.13)}$$

Ainsi, la valeur A sera dite: dérivée de la fonction de variable duale f au point x. Plus généralement, une fonction f de variable duale sera dite Δ–différentiable sur un domaine D ($\subset \Delta$) lorsqu'elle est Δ–différentiable en tout point de D. Dans ces conditions, la fonction $f' : x \mapsto A(x)$, ainsi définie, sera dite fonction dérivée de la fonction f.

1.3.4 Conditions de Δ–différentiabilité

Nous voulons déterminer dans ce paragraphe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de variable duale soit Δ–différentiable.

Théorème 1.4

Soit une fonction de variable duale f, notons f_1 et f_2 les fonctions, de $\boldsymbol{R}^2$ dans $\boldsymbol{R}$, qui définissent ses parties réelle et duale. Alors:

$$f \text{ est } \Delta\text{-différentiable} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est } \boldsymbol{R}^2\text{-différentiable} \\[1ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(Eq.1.14)}$$

Preuve :

Considérons une fonction de variable duale f définie par:

$$f(x) = f_1(x_1, x_2) + \varepsilon f_2(x_1, x_2) \text{ où } f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}) \text{ et } x = x_1 + \varepsilon x_2 \in \Delta$$

(a) Si f est Δ–différentiable, alors d'après la relation (Eq.1.13), l'application:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^2 & \rightarrow & \boldsymbol{R}^2 \\ h & \mapsto & A\,h \end{array}$$

est une application linéaire -particulière- de $\boldsymbol{R}^2$ dans $\boldsymbol{R}^2$. En effet, posons $A = a + \varepsilon b$, $h = h_1 + \varepsilon h_2$ et écrivons le produit matriciel dans $\boldsymbol{R}^2$ associé au produit $A\,h$ dans Δ:

$$h' = [h'_1\ h'_2]^t = [a\,h_1 \quad a\,h_2 + b\,h_1]^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} [h_1\ h_2]^t$$

or h' n'est autre que l'image de h par la matrice jacobienne de f dans $\boldsymbol{R}^2$ et ceci pour tout $h \in \boldsymbol{R}^2$. Donc:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on conclut que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

(b) La réciproque est triviale.

Ce qu'il fallait démontrer. ∎

Corollaire 1.5

Si $D = I \times \boldsymbol{R}$, où I est un ouvert de $\boldsymbol{R}$, et si f est une fonction de variable duale Δ–différentiable sur D. Alors:

(a) $x_2 \mapsto f_1(x_1, x_2)$ est constante ($\equiv f_1(x_1, 0)$).

(b) $\forall (x_1, x_2) \in D: \quad f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) + \varepsilon\, x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0)$.

Preuve :

La proposition (a) découle immédiatement du théorème 1.4.

Pour montrer la proposition (b), il suffit de voir que:

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2) &= f_2(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, t)\, dt \\ &= f_2(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, t)\, dt = f_2(x_1, 0) + x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, 0) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x_1, x_2) = \underbrace{(f_1(x_1, 0) + \varepsilon\, f_2(x_1, 0))}_{f(x_1, 0)} + \varepsilon\, x_2 \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, 0) + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, 0)\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0)}$. ∎

Il en découle aussitôt le corollaire suivant:

Corollaire 1.6

Si I est un ouvert de $\boldsymbol{R}$ et $g : I \mapsto \Delta$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(I)$. Alors, il existe un prolongement Δ-différentiable unique $f : I \times \boldsymbol{R} \mapsto \Delta$ de g qui s'exprime par:

$$f(x,y) = \quad g(x) + \varepsilon\, y\, g'(x)\,; \quad \forall (x,y) \in I \times \boldsymbol{R} \qquad \text{(Eq.1.15)}$$

1.3.5 Prolongement canonique dual d'une fonction de variable réelle

Définition 1.3

Soit f une fonction de variable réelle et à valeur dans $\boldsymbol{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur[6] de son domaine de définition $V = \overset{o}{\widehat{Dom(f)}}$. Nous appellerons prolongement canonique dual de la fonction f et nous noterons $\widetilde{f}$, son unique prolongement Δ-différentiable sur V défini par:

$$\widetilde{f}(x) = \quad f(x)\,,\ \forall x \in Dom(f) \qquad \text{(Eq.1.16)}$$

L'existence et l'unicité du prolongement canonique dual découlent directement du corollaire 1.6.

Théorème 1.7

Soient I et J deux ouverts de $\boldsymbol{R}$ et $f : I \mapsto J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ de I sur J. Notons $g = f^{-1}$, le difféomorphisme réciproque. Alors, les prolongements canoniques $\widetilde{f} : I \times \boldsymbol{R} \mapsto J \times \boldsymbol{R}$ et $\widetilde{g} : J \times \boldsymbol{R} \mapsto I \times \boldsymbol{R}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

▌Preuve :

En fait, il suffit de vérifier que:

$$\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g} = id$$

En effet, soit $x = x_1 + \varepsilon\, x_2$ un nombre dual appartenant à $J \times \boldsymbol{R}$ ($\subseteq \Delta$), montrons par exemple que: $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}(x) = x$

- D'abord, comme $f \circ g(u) = u$, alors $(f \circ g)'(u) = 1$ pour tout réel u. Donc d'après la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions numériques, nous pouvons écrire:

$$f'\left(g(u)\right)\, g'(u) = \quad 1\,; \quad \forall u \in \boldsymbol{R} \qquad \text{(Eq.1.17)}$$

- En suite, puisque $\widetilde{g}(x) = g(x_1) + \varepsilon\, x_2\, g'(x_1)$, alors:

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{g}(x)\right) = \quad f\left(g(x_1)\right) + \varepsilon\, x_2\, g'(x_1)\, f'\left(g(x_1)\right) \qquad \text{(Eq.1.18)}$$

- En fin, en portant la relation (Eq.1.17) dans la relation (Eq.1.18), on obtient le résultat recherché.

La démonstration de $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = id$ se fait de la même façon. Ainsi, le théorème est démontré. ▌

[6]Rappelons que l'intérieur d'un ensemble est par définition le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble.

Exemples et applications

Dans cet ordre d'idées, nous avons écrit le module `dualstruc.map` [Chapitre 7] pour le système de calcul formel Maple V [Fig. 1.1]. Ce module rend possible le calcul symbolique sur les nombres et quantités duaux. Ainsi, des calculs très complexes peuvent être menés de façon purement symbolique. Les exemples suivants ont été obtenus grâce à ce module:

Le lecteur pourra vérifier alors que les prolongements canoniques:

- $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_3}$ sont réciproques l'une de l'autre.
- $\widetilde{f_2}$ et $\widetilde{f_4}$ sont réciproques l'une de l'autre.
- La multiplication de $\widetilde{f_5}$ par elle même (au sens de la multiplication de ses valeurs duales) est équivalente à l'application identique sur $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}$ ($\subset \Delta$).
- $\widetilde{f_6}$ est involutive.

Tableau 1.1 : *Exemples de prolongements canoniques duaux*

i	fonction f_i	Prolongement canonique dual $\widetilde{f_i}$
1	$x \mapsto sin\, x$	$(x_1, x_2) \mapsto sin(x_1) + \varepsilon\, x_2\, cos(x_1)$
2	$x \mapsto cos\, x$	$(x_1, x_2) \mapsto cos(x_1) - \varepsilon\, x_2\, sin(x_1)$
3	$x \mapsto arcsin\, x$	$(x_1, x_2) \mapsto arcsin(x_1) + \frac{\varepsilon\, x_2}{\sqrt{1-{x_1}^2}}$
4	$x \mapsto arccos\, x$	$(x_1, x_2) \mapsto arccos(x_1) - \frac{\varepsilon\, x_2}{\sqrt{1-{x_1}^2}}$
5	$x \mapsto \sqrt{x}$	$(x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1} + \frac{\varepsilon\, x_2}{2\sqrt{x_1}}$
6	$x \mapsto x^{-1}$	$(x_1, x_2) \mapsto {x_1}^{-1} - \frac{\varepsilon\, x_2}{{x_1}^2}$
7	$h \circ g$	$(x_1, x_2) \mapsto h(g(x_1)) + \varepsilon\, x_2\, g'(x_1)\, h'(g(x_1))$
8	$f_4 \circ f_1$	$(x_1, x_2) \mapsto arccos(sin(x_1)) - \frac{\varepsilon\, x_2\, cos(x_1)}{\sqrt{1-sin(x_1)^2}}$
9	$f_2 \circ f_6 \circ f_3$	$(x_1, x_2) \mapsto cos(arcsin(x_1)^{-1}) + \frac{\varepsilon\, x_2\, sin(arcsin(x_1)^{-1})}{arcsin(x_1)^2\, \sqrt{1-{x_1}^2}}$

1.4 Vecteurs duaux

1.4.1 Construction des vecteurs duaux – Définitions

Soit E l'espace vectoriel euclidien réel de dimension 3. Considérons l'ensemble $E \times E$ muni de l'addition:

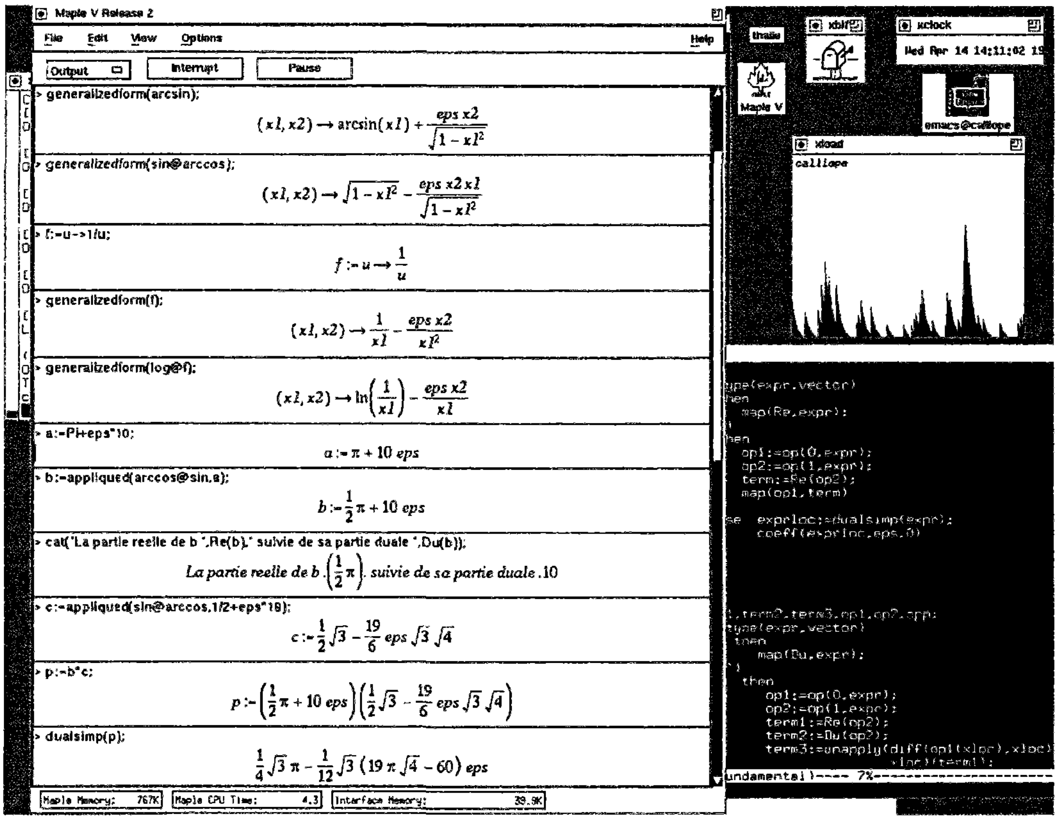
$$(t, u) + (v, w) = \quad (t + v, u + w)\, ; \quad \forall t, u, v, w \in E \qquad \text{(Eq.1.19)}$$

et la multiplication par un scalaire dual:

$$(\lambda_1, \lambda_2)\,(u, v) = \quad (\lambda_1\, u, \lambda_1\, v + \lambda_2\, u)\, ; \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}\, ,\ \forall u, v \in E \qquad \text{(Eq.1.20)}$$

L'ensemble $E \times E$ reste stable par ces deux opérations. De plus, il est facile de voir que cet ensemble possède une structure de Δ–module [7]. L'ensemble $E \times E$ muni des lois d'addition

[7] Etant donné un anneau commutatif A, on appelle module sur A ou A–module, un ensemble M muni d'une structure algébrique définie par la donnée:



Actuellement, le module `dualstruc.map` [Chapitre 7] compte un grand nombre de nouvelles fonctions, entièrement implémentées, dans le langage Maple (construction symbolique des nombres duaux, parties réelle et duale d'expressions duales, diverses types de simplifications sur tout genre d'expressions duales, ...etc) pour la manipulation symbolique des objets et structures algébriques duaux (fonctions de variables duale, construction automatique des prolongements canoniques, vecteurs duaux, matrices duales, ...etc). Dans la fenêtre (Maple V Release 2) de la figure ci-dessus, on présente une session de travail sur Maple où l'on expérimente certaines fonctions développées dans le module `dualstruc.map`.

Fig. 1.1: Session de travail sur Maple avec le module `dualstruc.map`

(a) d'une loi de groupe commutatif dans M (notée additivement dans la suite);

(b) d'une loi d'action $(\alpha, x) \mapsto \alpha\, x$, dont le domaine d'action est l'anneau A, et telle que:

(b1) $\alpha\,(x+y) = (\alpha\, x) + (\alpha\, y)\,;\ \forall x, y \in M,\ \alpha \in A;$

et de multiplication, définies respectivement par les relations (Eq.1.19) et (Eq.1.20), sera dit dans la suite Δ–module des vecteurs duaux et noté $\widetilde{E}$. De plus, pour des raisons semblables à celles invoquées au paragraphe 1.2.1:

- L'ensemble $\{(u,0)/\, u \in E\}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel qui peut être identifié à l'espace vectoriel E, à un isomorphisme d'espaces vectoriels près.
- $\widetilde{E}$ peut être identifié à $E \oplus \varepsilon E$ à un isomorphisme de Δ–module près et les éléments de $\widetilde{E}$ pourront être notés symboliquement:

$$(u,v) = 1_\Delta\,(u,0) + \varepsilon\,(v,0) \equiv u + \varepsilon\, v\,; \quad \forall (u,v) \in \widetilde{E} \qquad \text{(Eq.1.21)}$$

- De la même façon, on peut définir les parties réelle et duale d'un vecteur dual par:

$$Re\,(u,v) = u \ \text{ et } \ Du\,(u,v) = v\,; \quad \forall (u,v) \in \widetilde{E} \qquad \text{(Eq.1.22)}$$

Proposition 1.8
Le Δ-module $\widetilde{E}$ est libre et de dimension trois.

Preuve :

Pour montrer que $\widetilde{E}$ est libre, il suffit de voir que E est un espace vectoriel de dimension trois et que toute base de E est à la fois libre et génératrice du module $\widetilde{E}$ (i.e. $\widetilde{E} \equiv \Delta \otimes_{\mathbb{R}} E$. Ainsi, $\widetilde{E}$ possède des bases). De plus, si $w = u + \varepsilon\, v$ est un vecteur dual et si (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont les systèmes de coordonnées associés respectivement aux vecteurs u et v relativement à une base donnée de E, alors $(u_1 + \varepsilon\, v_1, u_2 + \varepsilon\, v_2, u_3 + \varepsilon\, v_3)$ est le système de coordonnées représentant w par rapport à cette même base.

Maintenant, toutes les bases de $\widetilde{E}$ sont équipotentes, puisque l'anneau Δ est commutatif et en conséquence, le module $\widetilde{E}$ est libre de dimension 3. ∎

1.4.2 Opérations élémentaires sur les vecteurs duaux

Dans cette section nous allons voire que toutes les opérations définies sur l'espace vectoriel E s'étendent, quand elles sont définies, de manière naturelle au Δ–module $\widetilde{E}$.

1.4.2.a Produit scalaire canonique – Vecteurs duaux orthogonaux

Le Δ–module libre $\widetilde{E}$ peut être muni d'une forme bilinéaire symétrique dite produit scalaire dual canonique, notée par un point et définie par la relation:

$$u.v = Re(u).Re\,(v) + \varepsilon\,(Re\,(u).Du\,(v) + Du\,(u).Re\,(v)) \qquad \text{(Eq.1.23)}$$

(b2) $(\alpha + \beta)\, x = (\alpha\, x) + (\beta\, x)\,;\ \forall \alpha, \beta \in A,\ x \in M$;

(b3) $\alpha\,(\beta\, x) = (\alpha\,\beta)\, x\,;\ \forall \alpha, \beta \in A,\ x \in M$;

(b4) $1_A\, x = x\,;\ \forall x \in M$.

Ainsi, les ensembles Δ, Δ^3 ou, d'une façon générale, Δ^p sont des exemples types de Δ–module.

où le symbole "." -point- dans $u.v$ représente le produit scalaire dans $\tilde{E}$ et dans les expressions $Re(u).Re(v)$, $Re(u).Du(v)$ et $Du(u).Re(v)$ le produit scalaire dans E.

Maintenant, si (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) désignent les systèmes de coordonnées duales associés aux vecteurs u et v relativement à une base orthonormée de $\widetilde{E}$ (nous allons caractériser dans la suite de telles bases), alors on peut montrer facilement que:

$$u.v = \sum_{i=1}^{3} u_i \, v_i \qquad \text{(Eq.1.24)}$$

Deux vecteurs duaux u et v seront dits orthogonaux dans le module $\tilde{E}$ pour le produit scalaire dual, si $u.v = 0$; c'est à dire aussi:

$$Re(u).Re(v) = 0 \text{ et } Re(u).Du(v) = -Du(u).Re(v) \qquad \text{(Eq.1.25)}$$

1.4.2.b Pseudo-norme duale

Le but que nous nous fixons dans ce paragraphe est de définir une extension canonique de la norme euclidienne (définie sur E) aux vecteurs duaux dont la partie réelle n'est pas nulle. Il n'est pas question d'espérer vérifier les inégalités triangulaire ou de Cauchy-Schwartz pour une telle extension. En effet, cela n'est pas possible puisqu'on ne peut pas définir de relations d'ordre totales sur les scalaires duaux.

Ainsi, pour tout vecteur dual u de $\widetilde{E}$, tel que $Re(u) \neq \vec{0}$, on va poser:

$$\| u \|_\Delta = \sqrt{u.u} \qquad \text{(Eq.1.26)}$$

où le symbole "$\sqrt{\ }$" désigne le prolongement canonique dual de la fonction racine carrée. Maintenant, si $u = \vec{0}$, on convient donc de poser:

$$\| u \|_\Delta = 0 \qquad \text{(Eq.1.27)}$$

Par un calcul simple, on peut montrer que la relation (Eq.1.26) s'écrit:

$$\| u \|_\Delta = \| Re(u) \| + \varepsilon \frac{Re(u).Du(u)}{\| Re(u) \|} \quad \text{si } \| Re(u) \| \neq 0 \qquad \text{(Eq.1.28)}$$

où "$\| \ . \ \|$" est la norme euclidienne habituelle associée à la structure d'espace vectoriel euclidien de E. La relation (Eq.1.28) montre bien que les bases orthonormées de E sont, à un isomorphisme près, des bases orthonormées de $\widetilde{E}$.

1.4.2.c Produit vectoriel dual

Le module libre $\widetilde{E}$ étant de dimension 3, nous allons définir le produit vectoriel dual comme étant une application bilinéaire antisymétrique de $\widetilde{E} \times \widetilde{E} \to \widetilde{E}$:

$$u \times v = Re(u) \times Re(v) + \varepsilon \left(Re(u) \times Du(v) + Du(u) \times Re(v) \right); \quad \forall u, v \in \widetilde{E} \qquad \text{(Eq.1.29)}$$

où le symbole "$\times$" dans le membre de droite désigne l'application $\boldsymbol{R}$–bilinéaire du produit vectoriel sur E et "$\times$" dans le membre de gauche est son extension à $\widetilde{E}$. Ainsi, si (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) désignent les coordonnées associées aux vecteurs duaux u et v relativement à une base orthonormée de $\widetilde{E}$, on peut remarquer que:

$$u \times v \equiv \quad [u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \quad u_3\, v_1 - u_1\, v_3 \quad u_1\, v_2 - u_2\, v_1]^t \qquad \text{(Eq.1.30)}$$

1.4.2.d Propriétés générales

Les relations (Eq.1.24) et (Eq.1.30) montrent bien que les opérations sur le Δ–module libre $\widetilde{E}$ héritent de toutes les propriétés immédiates des opérations du produit scalaire et du produit vectoriel de l'espace vectoriel euclidien orienté E. Ainsi, si u, v et w sont trois vecteurs duaux arbitraires et α un nombre dual quelconque, les relations suivantes sont vérifiées:

(a) La relation du double produit vectoriel:

$$(u \times v) \times w = \quad (u.w)\, v - (v.w)\, u \qquad \text{(Eq.1.31)}$$

(b) L'identité de Jacobi:

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = \vec{0} \qquad \text{(Eq.1.32)}$$

(c) La relation du produit mixte:

$$u.(v \times w) = \quad w.(u \times v) = \quad v.(w \times u) \qquad \text{(Eq.1.33)}$$

(d) $u \times v$ est orthogonal à la fois à u et à v, pour le produit scalaire dual.

1.5 Matrices duales

1.5.1 Construction

Dans la suite, nous allons nous intéresser, pour des raisons d'ordre pratique, aux matrices duales carrées d'ordre 3×3. Nous pouvons construire la structure de matrices sur les nombres duaux, à partir de $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) \times \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ muni de certaines lois internes et externes, par une démarche analogue à celle qui nous a permis de construire les nombres et les vecteurs duaux. Toutefois, donnons une description succincte des étapes de construction des opérations usuelles sur de telles matrices et de l'identification de l'ensemble $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) \times \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ à l'ensemble des matrices à composantes duales $\mathcal{M}_3(\Delta)$:

- Addition de matrices: $(A, B) + (C, D) = \ (A + C, B + D)\,; \quad \forall A, B, C, D \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$,
- Multiplication de matrices: $(A, B)\,(C, D) = \ (A\,C, A\,D + B\,C)\,; \quad \forall A, B, C, D \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$,
- Multiplication de matrices par des scalaires duaux:

$$(a, b)\,(A, B) = \ (a\,A, a\,B + b\,A)\,; \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}), \forall a, b \in \boldsymbol{R}$$

- Action des matrices duales à gauche sur les vecteurs duaux:

$$(A, B)(u, v) = (A\,u, A\,v + B\,u)\,; \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}), \forall u, v \in E$$

- L'ensemble $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) \times \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ des matrices duales, ainsi construit, possède la structure algébrique de Δ-module libre de dimension 9 (i.e. 9 composantes duales indépendantes). Il sera noté $\mathcal{M}_3(\Delta)$ et dit ensemble des matrices duales d'ordre 3×3.

- L'ensemble $\{(A, 0)/\, A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})\} \equiv \{[(a_{ij}, 0)]_{i,j=1..3} \,/\, a_{ij} \in \boldsymbol{R}, \forall i, j = 1..3\}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\Delta)$ isomorphe à $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$. Ainsi, dans la suite, nous pourrons identifier cet ensemble à $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$.

- $\mathcal{M}_3(\Delta)$ peut être identifié à $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) \oplus \varepsilon\, \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ par l'isomorphisme de Δ-modules:

$$(A, B) \mapsto 1_\Delta\, A + \varepsilon\, B \equiv A + \varepsilon\, B \equiv [a_{ij} + \varepsilon\, b_{ij}]_{i,j=1..3}$$

Ainsi, nous pouvons étendre la notion de parties réelle et duale aux objets mathématiques de type matrice duale. Les opérateurs Re et Du peuvent, donc, être définis de $\mathcal{M}_3(\Delta)$ dans $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ à partir des parties réelle et duale de nombres duaux:

$$A = [A_{ij}]_{i,j=1..3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Re\,(A) = & [Re\,(a_{ij})]_{i,j=1..3} \\ Du\,(A) = & [Du\,(a_{ij})]_{i,j=1..3} \end{cases} \qquad \text{(Eq.1.34)}$$

Ainsi, toute matrice duale peut être décomposée, de façon unique, en fonction de ses parties réelle et duale:

$$A = Re\,(A) + \varepsilon Du\,(A); \quad \forall A \in \mathcal{M}_3(\Delta) \qquad \text{(Eq.1.35)}$$

En conséquence, les opérations usuelles sur les matrices duales peuvent être réécrites dans une notation symbolique qui peut être retenue comme représentation canonique pour leur implémentation algorithmique dans des processus de calcul formel:

(a) La somme de deux matrices duales se réduit à la somme de matrices réelles par:

$$A + B = Re(A) + Re\,(B) + \varepsilon\,\left(Du\,(A) + Du\,(B)\right) \qquad \text{(Eq.1.36)}$$

(b) Le produit de composition matricielle, de deux matrice duales, se réduit au produit de matrices réelles par la relation:

$$A\,B = Re\,(A)\,Re\,(B) + \varepsilon\,(Re\,(A)\,Du\,(B) + Du\,(A)\,Re\,(B)) \qquad \text{(Eq.1.37)}$$

(c) Le produit d'une matrice par un scalaire dual se traduit par:

$$\lambda\,A = Re(\lambda)\; Re\,(A) + \varepsilon\;(Re\,(\lambda)\;Du\,(A) + Du\,(\lambda)\;Re\,(A)) \qquad \text{(Eq.1.38)}$$

(d) L'action d'une matrice duale sur un vecteur dual se résume à:

$$A\,v = \quad Re\,(A)\,Re\,(v) + \varepsilon\;(Re\,(A)\,Du\,(v) + Du\,(A)\,Re\,(v)) \qquad \text{(Eq.1.39)}$$

(e) La transposée d'une matrice duale se traduit par la somme des transposées de ses parties réelle et duale:

$$A^t = \quad Re\,(A)^t + \varepsilon\,Du\,(A)^t \qquad \text{(Eq.1.40)}$$

1.5.2 Inversion de matrices carrées duales

Le but de ce paragraphe est de caractériser les matrices carrées duales inversibles et d'exprimer l'inverse, de telles matrices, quand il existe.

Théorème 1.9

Pour qu'une matrice A soit inversible dans le module $\mathcal{M}_3\,(\Delta)$, il faut et il suffit que la matrice $Re\,(A)$ soit inversible (c'est à dire $\det Re\,(A) \neq 0$). Dans ces conditions la matrice A^{-1} s'exprime par la relation:

$$A^{-1} = \quad Re\,(A)^{-1} - \varepsilon\,Re\,(A)^{-1}\,Du\,(A)\,Re\,(A)^{-1} \qquad \text{(Eq.1.41)}$$

▌Preuve :

Pour que $A \in \mathcal{M}_3\,(\Delta)$ soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3\,(\Delta)$, telle que $A\,B = \;B\,A = \;\mathbb{1}$ (où $\mathbb{1}$ est la matrice unité); c'est à dire, d'une part:

$$Re\,(B)\,Re\,(A) = \quad Re\,(A)\,Re\,(B) = \quad \mathbb{1} \qquad \text{(Eq.1.42)}$$

et, d'autre part:

$$\begin{cases} Re\,(A)\,Du\,(B) + Du\,(A)\,Re\,(B) = & 0 \\ Re\,(B)\,Du\,(A) + Du\,(B)\,Re\,(A) = & 0 \end{cases} \qquad \text{(Eq.1.43)}$$

La relation (Eq.1.42) signifie que si A est inversible, $Re(A)$ est inversible. Réciproquement si $Re(A)$ est inversible et si les relations (Eq.1.42) et (Eq.1.43) sont satisfaites par B alors:

$$B = \quad Re\,(A)^{-1} - \varepsilon\,Re\,(A)^{-1}\,Du\,(A)\,Re\,(A)^{-1}$$

ce qui montre le théorème. ▌

1.5.3 Matrice duale orthogonale

Dans ce paragraphe, nous souhaitons caractériser les matrices duales orthogonales.

Définition 1.4

Une matrice carrée duale sera dite orthogonale, si et seulement si elle est inversible et vérifie la condition d'orthogonalité:

$$A^t\,A = \quad \mathbb{1} \qquad \text{(Eq.1.44)}$$

Cela veut dire que $A^{-1} = A^t$. Donc, d'après le théorème 1.9, d'une part, la matrice $Re\,(A)$ est une matrice orthogonale au sens classique $Re\,(A)^{-1} = Re\,(A)^t$ et, d'autre part:

$$Re\,(A)\,Du\,(A)^t + Du\,(A)\,Re\,(A)^t = 0 \qquad \text{(Eq.1.45)}$$

Théorème 1.10

Soit A une matrice carrée duale. Si A est orthogonale, alors, il existe deux vecteurs réels u et v, tels que:

$$A = (\mathbb{I} + \varepsilon\,\tilde{u})\,Re\,(A) = Re(A)\,(\mathbb{I} + \varepsilon\,\tilde{v}) \qquad \text{(Eq.1.46)}$$

où $\tilde{u}$ est la matrice antisymétrique définie par: $\tilde{u}\,w = u \times w$ pour tout $w \in E$.

Preuve :

La relation (Eq.1.45) exprime que la matrice $Du(A)\,Re\,(A)^t$ est une matrice réelle antisymétrique. Par la suite, il existe un vecteurs $u \in E$ tel que: $\tilde{u} = Du\,(A)\,Re\,(A)^t$ et posant $v = Re\,(A)^t\,u\,Re\,(A)$, on obtient le résultat recherché. ∎

1.6 Conclusion

Dans le domaine de la modélisation, on est souvent tenté par des généralisations et des changements de représentations algébriques successives[8] du problème initial afin de se ramener à des domaines plus riches en outils de calcul symbolique et qui conduisent à une implémentation optimale des algorithmes. Changer la représentation algébrique d'un problème peut conduire à des solutions de problèmes plus généraux que le problème initial sans compliquer pour autant la représentation syntaxique du modèle utilisé. Ainsi, dans les problèmes qui nous intéressent pour la description de modèles assez généraux, la structure de module sur l'anneau des nombres duaux semble être particulièrement pratique pour le calcul symbolique. Cependant, contrairement à ce que l'on pourrait croire, même si les axiomes d'un module sont identiques à ceux d'un espace vectoriel, au changement près du corps de base en un anneau, et même si les principales définitions d'algèbre linéaire sont valables dans les modules, les propriétés algébriques d'un module peuvent différer substantiellement de celles d'un espace vectoriel. En particulier, des propriétés intuitives de la géométrie ou de l'existence d'une norme peuvent être en défaut dans un module. En effet, faute d'une justification mathématique rigoureuse des résultats, on ne peut affirmer avec certitude la validité des modèles généralisés. Mais, une fois le contexte mathématique de ces extensions est bien défini, il devient naturel de chercher les correspondances qui existent entre les modèles exprimés dans les différentes représentations. Ces correspondances permettraient de relier les structures algébriques aux modèles étudiés. Cette étape fait l'objet du chapitre suivant.

[8] Et souvent excessives si ces généralisations ne sont pas efficacement contrôlées.