

ÉQUATIONS DE MAXWELL EN 2D

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

- [19] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Soumis à Appl. Num. Math., Special Issue : NELIA 2011*, 24 pages, 2012.

Sommaire

Introduction	173
7.1 Approche « classique » pour le problème <i>Transverse Magnetic</i>	178
7.1.1 Formulation scalaire pour E_z	178
7.1.2 Formulation vectorielle pour H_\perp	179
7.1.3 Bilan de l'approche « classique » pour le problème <i>Transverse Magnetic</i>	183
7.2 Relation entre les opérateurs scalaires	183
7.3 Une nouvelle formulation variationnelle pour H_\perp	185
7.4 Résumé pour le problème <i>Transverse Electric</i>	188
7.4.1 Approche « classique » pour le problème <i>Transverse Electric</i>	189
7.4.2 Une nouvelle formulation variationnelle pour E_\perp	190
7.5 Illustration sur un cas particulier	190

Introduction

Nous souhaitons étudier les champs électromagnétiques dans un milieu $D \subset \mathbb{R}^3$. Pour $\mathbf{x} \in D$ et $t \geq 0$, notons $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ le champ électrique, $\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)$ l'induction électrique, $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$ le champ magnétique et $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$ l'induction magnétique. Les variations de ces champs sont régies par les équations de Maxwell :

$$\partial_t \mathcal{D} - \text{rot } \mathcal{H} = -\mathcal{J} \quad \text{et} \quad \partial_t \mathcal{B} + \text{rot } \mathcal{E} = 0. \quad (7.1)$$

Ci-dessus, la source $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{x}, t)$ représente la densité de courant. Nous supposons le milieu sans dissipation et nous faisons l'hypothèse que \mathcal{J} possède un comportement harmonique en temps : $\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ pour $\mathbf{x} \in D$ et $t \geq 0$. Cela conduit à chercher des champs électromagnétiques s'écrivant sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}; & \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}; \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}; & \mathcal{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Rappelons qu'en régime fréquentiel, les champs électrique et magnétique sont respectivement reliés aux inductions électrique et magnétique par les relations

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega), \quad (7.3)$$

pour tout $\mathbf{x} \in D$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Ici, ε et μ désignent la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique caractérisant les propriétés du matériau. Le fait de considérer un milieu sans absorption conduit à supposer que ε et μ sont à valeurs réelles. En utilisant (7.2) et (7.3) dans (7.1), nous pouvons éliminer la dépendance temporelle ainsi que les inconnues \mathbf{D} et \mathbf{B} . Nous obtenons alors les équations de Maxwell en *régime harmonique* :

$$i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{et} \quad -i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot}\mathbf{E} = 0 \quad \text{dans le milieu } D \subset \mathbb{R}^3. \quad (7.4)$$

Dans toute la suite de ce document, nous ferons l'hypothèse que la pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ est fixée. Par conséquent, nous n'indiquerons plus la dépendance par rapport à ω . Dans ce chapitre, nous désirons nous intéresser au problème de Maxwell dans une géométrie invariante dans une direction et bornée dans le plan transverse.

Introduisons Ω un domaine de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire, un ensemble ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Pour simplifier, nous supposons $\partial\Omega$ connexe. En 2D, ceci est équivalent à supposer Ω simplement connexe. Nous précisons dans la suite où cette hypothèse intervient et nous verrons en 3D, dans le Chapitre 9, comment procéder lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe. Nous définissons alors $D := \{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$. Nous considérons un milieu D entouré par un conducteur parfait. En conséquence, la trace tangentielle de \mathbf{E} , ainsi que la trace normale de \mathbf{H} , s'annulent sur la frontière ∂D . Si on appelle $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire sortante à ∂D , ceci s'écrit

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \mu\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \quad (7.5)$$

Nous faisons l'hypothèse que la densité de courant \mathbf{J} et les constantes physiques ε , μ , tout comme la géométrie, sont invariantes par rapport à la variable z . Ainsi, l'ensemble du problème ne dépend pas de z et nous pouvons faire la simplification :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0. \quad (7.6)$$

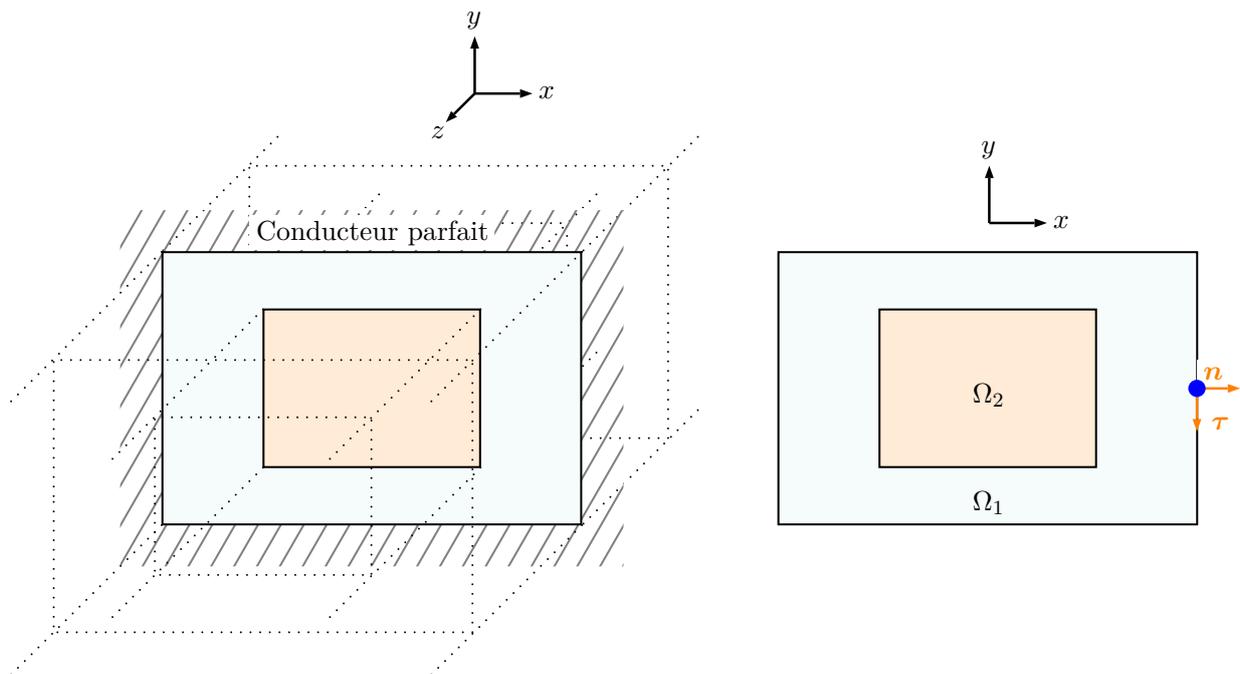


FIGURE 7.1 – Un problème modèle : vue 3D à droite, coupe 2D à gauche.

La Figure 7.1 ci-contre présente un problème modèle. Ici, Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1

et Ω_2 . Notons $D_1 := \Omega_1 \times \mathbb{R}$ et $D_2 := \Omega_2 \times \mathbb{R}$. La région D_1 est vide tandis que D_2 est occupée par un métal de pulsation de plasma ω_p . D'après les résultats du §4.2.1 du Chapitre 4, nous pouvons modéliser les propriétés de métal en prenant $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$. Rappelons que nous avons supposé le milieu non absorbant. C'est la raison pour laquelle, dans la formule (4.7), nous avons imposé $\gamma = 0$. Considérons une source périodique en temps de pulsation $\omega < \omega_p$. Dans ce cas, on a $\varepsilon|_{\Omega_1} > 0$, $\mu|_{\Omega_1} > 0$, $\varepsilon|_{\Omega_2} < 0$ et $\mu|_{\Omega_2} > 0$. Dans ce chapitre, nous souhaitons également étudier la situation où D_2 contient un métamatériau doublement négatif tel que $\varepsilon|_{\Omega_2} < 0$ et $\mu|_{\Omega_2} < 0$.

En vertu de la simplification (7.6), nous sommes ramenés à un problème 2D et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous travaillerons avec des champs définis sur Ω . Pour simplifier, nous supposons que le terme source $\mathbf{J} := (J_x, J_y, J_z)^t \in L^2(\Omega)^3$ vérifie $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Nous considérerons des constantes physiques ε, μ (à valeurs réelles) vérifiant $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, $\mu^{-1} \in L^\infty(\Omega)$. À partir de (7.4), on observe que les composantes des champs $\mathbf{E} := (E_x, E_y, E_z)^t$ et $\mathbf{H} := (H_x, H_y, H_z)^t$ satisfont, dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, les équations

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon E_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} &= J_x; & i\omega\varepsilon E_y - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y; & i\omega\varepsilon E_z + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z; \\ \text{et } -i\omega\mu H_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0; & -i\omega\mu H_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0; & -i\omega\mu H_z + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Introduisons $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^t$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$, et $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)^t$ le vecteur tel que $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$ soit une base orthonormale directe. Sur $\partial\Omega$, les conditions aux limites (7.5) conduisent à

$$\mu(H_x n_x + H_y n_y) = 0; \quad E_z = 0; \quad E_x n_y - E_y n_x = 0. \quad (7.8)$$

Classiquement, on constate qu'il apparaît un découplage dans les équations (7.7)-(7.8) et nous pouvons les réorganiser sous la forme de deux systèmes indépendants. Dans cette optique, introduisons $\mathbf{J}_\perp := (J_x, J_y)^t$, les champs transverses $\mathbf{E}_\perp := (E_x, E_y)^t$, $\mathbf{H}_\perp := (H_x, H_y)^t$ et les opérateurs rotationnels 2D tels que, pour $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^t \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \in \mathcal{D}'(\Omega); \quad \mathbf{rot} u = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega).$$

Écrivons maintenant les deux systèmes indépendants issus de (7.7) et (7.8). Le premier met en jeu les inconnues (\mathbf{H}_\perp, E_z) . On l'appelle *problème TM* pour *transverse magnétique* (Transverse Magnetic en anglais).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } E_z \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{H}_\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ i\omega\varepsilon E_z + \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp = J_z \quad \text{dans } \Omega; \\ -i\omega\mu \mathbf{H}_\perp + \mathbf{rot} E_z = 0 \quad \text{dans } \Omega; \\ E_z = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega; \\ \mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (7.9)$$

Ci-dessus, nous avons utilisé la notation $\mathbf{L}^2(\Omega) := L^2(\Omega)^2$. Le second système d'équations régit les champs (\mathbf{E}_\perp, H_z) . C'est le *problème TE* pour *transverse électrique* (Transverse Electric en anglais).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } H_z \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{E}_\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ -i\omega\mu H_z + \operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp = 0 \quad \text{dans } \Omega; \\ i\omega\varepsilon \mathbf{E}_\perp + \mathbf{rot} H_z = \mathbf{J}_\perp \quad \text{dans } \Omega; \\ \varepsilon^{-1}(\mathbf{rot} H_z - \mathbf{J}_\perp) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega; \\ \mathbf{E}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

Pour mesurer les champs, introduisons quelques espaces adaptés

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}; \\
\mathbf{H}(\text{div}; \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}; \\
\mathbf{H}_N(\text{rot}; \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}; \\
\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}; \\
\mathbf{V}_T(\mu; \Omega) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div}(\mu \mathbf{u}) = 0, \mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Remarque 7.0.2 Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9), on a $E_z \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. En prenant la divergence dans la seconde équation de (7.9), on remarque que \mathbf{H}_\perp appartient à $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. De même, si (\mathbf{E}_\perp, H_z) est solution de (7.10), alors $H_z \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, et $\mathbf{E}_\perp \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ car nous avons imposé $\text{div } \mathbf{J} = 0$.

Nous souhaitons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer que les problèmes (7.9) et (7.10) possèdent chacun une unique solution. Lorsque les paramètres physiques ε et μ sont positifs, la théorie est bien connue. Nous voulons étudier des situations pour lesquelles ε et μ changent de signe dans le domaine Ω comme dans l'exemple de la Figure 7.1. Pour présenter notre démarche, intéressons-nous au problème TM pour (\mathbf{H}_\perp, E_z) .

Classiquement, *i.e.* lorsque ε et μ restent positifs, plutôt que d'écrire une formulation variationnelle pour (\mathbf{H}_\perp, E_z) , on travaille avec une seule inconnue, de préférence scalaire. On montre alors que si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9), la composante E_z vérifie une certaine formulation variationnelle $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$, précisée en (7.14) et posée dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Réciproquement, on prouve qu'à partir d'une solution E_z de $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$, on peut reconstruire une solution (\mathbf{H}_\perp, E_z) de (7.9). Ce résultat montre que (7.9) est bien posé si et seulement si $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ est bien posé. Nous allons voir que ce procédé peut encore être utilisé dans le cas où ε et μ changent de signe, la différence résidant dans le fait que $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ (et donc (7.9)), n'est pas toujours bien posé au sens de Fredholm. Précisons cela. Lorsque μ est positif, pour tout $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, le problème $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. D'autre part, pour $\omega \in \mathcal{S}$, $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ présente un noyau et un conoyau non réduits à zéro, mais tout de même de dimension finie. Lorsque μ change de signe dans Ω , comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, il y a des configurations, *i.e.* des fonctions μ , telles qu'il existe un espace de dimension infinie de termes sources pour lesquels le problème $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ ne possède pas de solution. Notons que le ε n'intervient pas dans le caractère Fredholm pour le problème TM car il entre dans la partie compacte dans $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$. Enfin, d'un point de vue pratique, quand (7.9) possède une unique solution, on peut discrétiser la formulation variationnelle $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ par une méthode de type éléments finis pour approcher E_z . Il est alors possible de retrouver \mathbf{H}_\perp à partir de E_z .

Imaginons maintenant que l'on souhaite calculer directement \mathbf{H}_\perp sans passer par E_z . C'est moins commun, car il faut résoudre un problème vectoriel, au lieu d'un problème scalaire dans la démarche que nous venons de décrire, mais cela peut être intéressant pour avoir une meilleure précision sur \mathbf{H}_\perp . On cherche alors à écrire une formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp que l'on pourra discrétiser. On peut l'établir dans $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ comme en (7.15). Malheureusement, il n'est pas facile d'étudier ce problème car l'injection de $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. C'est pourquoi, on préfère classiquement construire une formulation pour \mathbf{H}_\perp dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ comme en (7.18). L'étape suivante dans le processus consiste à montrer qu'à partir d'une solution \mathbf{H}_\perp du problème (7.18), on peut reconstruire une solution (\mathbf{H}_\perp, E_z) au problème (7.9). Il est facile de montrer que c'est possible lorsque μ est positif. Quand μ change de signe, ce n'est pas toujours le cas et nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Nous montrerons que cette hypothèse est vérifiée lorsque le problème $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$, celui-là même qui apparaît dans l'étude de la composante E_z , est bien posé pour $\omega = 0$. Sous cette condition $(\mathcal{P}_{E_z})_0$ bien posé, nous établirons les deux résultats pour

prouver que le problème (7.18) est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$. D'une part, nous montrerons que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. D'autre part, nous prouverons que l'opérateur $\text{rot } \varepsilon^{-1} \text{rot} : \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)^*$ définit un isomorphisme. De façon surprenante, nous verrons que ce dernier résultat ne nécessite sur ε que l'hypothèse $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\Omega)$. Cela nous conduira à la conclusion suivante : si $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ et $(\mathcal{P}_{E_z})_0$ sont bien posés, alors (7.18), la formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp posée dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, possède une unique solution, et à partir de \mathbf{H}_\perp , on peut reconstruire une solution (\mathbf{H}_\perp, E_z) au problème (7.9).

La question naturelle qui vient ensuite s'énonce ainsi : comment définir une formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp , que l'on sache étudier à l'aide de la théorie de Fredholm, lorsque $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ est bien posé avec, par contre, $(\mathcal{P}_{E_z})_0$ mal posé ? Puisque $(\mathcal{P}_{E_z})_0$ diffère de $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ d'une perturbation compacte, cela revient à étudier la situation dans laquelle $(\mathcal{P}_{E_z})_0$ possède un noyau non réduit à zéro de dimension finie. Nous verrons que dans un tel cas, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, le problème (7.18) posé dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ possède un noyau non réduit à zéro contenant les gradients du noyau du problème scalaire. C'est là une curiosité du cadre fonctionnel due à la présence de matériaux négatifs. Pour obtenir un problème bien posé pour \mathbf{H}_\perp , il ne faut pas travailler dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ mais dans un espace un peu plus gros de façon à éliminer ces gradients du noyau du problème scalaire. Nous retrouverons la même originalité pour les équations de Maxwell 3D.

Précisons maintenant le plan de ce chapitre. Nous commencerons par étudier le problème TM pour (\mathbf{H}_\perp, E_z) . Nous présenterons une formulation équivalente en passant par E_z puis une seconde en passant par \mathbf{H}_\perp . Comme indiqué plus haut, pour avoir l'équivalence entre la formulation pour \mathbf{H}_\perp et le problème TM, nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Sous cette hypothèse, nous effectuerons l'étude de la formulation pour \mathbf{H}_\perp . Dans la Section 7.2, nous démontrerons deux résultats liant les problèmes scalaires avec condition de Dirichlet homogène et condition de Neumann homogène. Ces résultats vrais uniquement en 2D, montreront que l'hypothèse supplémentaire que nous avons introduite n'est pas très contraignante. Nous définirons dans la Section 7.3, le nouveau cadre fonctionnel qu'il faut adopter pour obtenir un problème bien posé pour \mathbf{H}_\perp lorsque la condition supplémentaire n'est pas remplie. Nous résumerons ensuite, en 7.4, l'étude pour le problème TE. Enfin, nous terminerons par une illustration des résultats que nous avons obtenus dans le cas d'une géométrie très simple.

Quelques rappels sur les formules de Green en 2D. Nous énonçons des résultats issus de [84] qui serviront au cours de notre étude. Dans tout ce chapitre, nous noterons indistinctement $(\cdot, \cdot)_\Omega$, resp. $\|\cdot\|_\Omega$, les produits scalaires, resp. les normes, de $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 7.0.3 *L'application $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^2$ s'étend par continuité en une application linéaire continue surjective de $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, on a la formule de Green*

$$(\mathbf{v}, \nabla\varphi)_\Omega + (\text{div } \mathbf{v}, \varphi)_\Omega = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (7.12)$$

On déduit le

Corollaire 7.0.4 *On a $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid (\mu\mathbf{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in H^1(\Omega)\}$, où $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ est défini en (7.11).*

En utilisant le fait que $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^t$ est un élément de $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ si et seulement si le champ \mathbf{w} de composantes $(v_y, -v_x)^t$ appartient à $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$, on obtient le théorème et le corollaire suivants.

Théorème 7.0.5 *L'application $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^2$ s'étend par continuité en une application linéaire continue surjective de $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, on a la formule de Green*

$$(\mathbf{v}, \text{rot } \varphi)_\Omega - (\text{rot } \mathbf{v}, \varphi)_\Omega = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}, \varphi \rangle_{\partial\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (7.13)$$

Attention, dans [84], les auteurs imposent que la base $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$, et non $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$, soit directe. Ceci explique la différence de signe.

Corollaire 7.0.6 On a $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_N(\text{rot}; \Omega) \mid (\varepsilon \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$, où $\mathbf{V}_N(\mu; \Omega)$ est défini en (7.11).

7.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic*

Intéressons-nous tout d'abord au problème TM. Pour montrer que ce problème est bien posé, autrement dit pour prouver qu'il possède une unique solution dépendant continûment de la donnée \mathbf{J} , on construit une formulation équivalente et on travaille ensuite sur cette dernière. La méthode la plus simple, et la plus utilisée en pratique, consiste à définir un problème pour le champ scalaire E_z . Suivons cette approche.

7.1.1 Formulation scalaire pour E_z

Construisons pour E_z un problème variationnel équivalent au système d'équations (7.9).

Théorème 7.1.1 Supposons $\omega \neq 0$.

1) Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9) alors E_z est une solution de

$$(\mathcal{P}_{E_z})_\omega \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } E_z \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \mu^{-1} \nabla E_z \cdot \nabla v - \omega^2 \varepsilon E_z v = \int_\Omega i\omega J_z v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.14)$$

2) Si E_z vérifie le problème (7.14) alors $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = ((i\omega\mu)^{-1} \mathbf{rot} E_z, E_z)$ est une solution de (7.9).

Preuve. 1) Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie (7.9) alors, comme indiqué dans la Remarque 7.0.2, on a $E_z \in H_0^1(\Omega)$. Au sens des distributions, on trouve

$$\text{div}(\mu^{-1} \nabla E_z) = -\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} E_z) = -i\omega \mathbf{rot} \mathbf{H}_\perp = -\omega^2 \varepsilon E_z - i\omega J_z.$$

Ceci montre que E_z vérifie (7.14).

2) Supposons E_z solution de (7.14). Alors on a, toujours au sens des distributions, $\text{div}(\mu^{-1} \nabla E_z) + \omega^2 \varepsilon E_z = -i\omega J_z$. Définissons $\mathbf{H}_\perp := (i\omega\mu)^{-1} \mathbf{rot} E_z$. On a clairement $-i\omega\mu \mathbf{H}_\perp + \mathbf{rot} E_z = 0$. De plus, $\mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{n} = i\omega \mathbf{rot} E_z \cdot \mathbf{n} = i\omega \nabla E_z \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ car $E_z \in H_0^1(\Omega)$. Enfin, on remarque que

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_\perp = (i\omega)^{-1} \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} E_z) = -(i\omega)^{-1} \text{div}(\mu^{-1} \nabla E_z) = J_z - i\omega \varepsilon E_z.$$

Cela achève de prouver que si E_z est solution de (7.14) alors $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = ((i\omega\mu)^{-1} \mathbf{rot} E_z, E_z)$ vérifie le problème (7.9). ■

Grâce à ce théorème, nous pouvons énoncer le

Corollaire 7.1.2 Supposons $\omega \neq 0$. Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.14) possède une unique solution.

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $A_D^{1/\mu}(\omega) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_D^{1/\mu}(\omega)u), \nabla v)_\Omega = (\mu^{-1} \nabla u, \nabla v)_\Omega - \omega^2 (\varepsilon u, v)_\Omega, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Dans la notation $A_D^{1/\mu}(\omega)$, le « D » fait référence à la condition de Dirichlet homogène imposée dans l'espace. D'après le Corollaire 7.1.2, le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$. Dans le Chapitre 1, nous avons étudié

en détail les propriétés de $A_D^{1/\mu}(0)$, partie principale de $A_D^{1/\mu}(\omega)$. À géométrie fixée, nous pouvons utiliser les Théorèmes 1.3.3, 1.4.2 et 1.4.1 pour savoir si $A_D^{1/\mu}(0)$ est un isomorphisme. Lorsque c'est le cas, puisque pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $A_D^{1/\mu}(\omega)$ diffère de $A_D^{1/\mu}(0)$ d'une perturbation compacte, on déduit d'après le théorème de Fredholm analytique que le problème (7.9) est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. Lorsque (7.9) est bien posé, on peut discrétiser la formulation variationnelle (7.14) par une méthode de type éléments finis pour approcher E_z . On retrouve ensuite \mathbf{H}_\perp à partir de E_z .

Supposons maintenant que l'on veuille calculer directement \mathbf{H}_\perp . Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, c'est plutôt inhabituel car il faut résoudre un problème vectoriel au lieu d'un problème scalaire, mais cela peut permettre d'avoir une meilleure précision sur \mathbf{H}_\perp . Nous souhaitons mettre en évidence une originalité du cadre fonctionnel liée à la présence des matériaux négatifs. Si l'on procède comme pour les diélectriques classiques, on peut aboutir à une formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp qui n'est pas équivalente au problème (7.9).

7.1.2 Formulation vectorielle pour \mathbf{H}_\perp

À l'instar de ce que nous avons fait pour E_z , nous cherchons à construire une formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp équivalente au problème (7.9).

Une première formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp

Présentons une première formulation pour \mathbf{H}_\perp dans $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$.

Proposition 7.1.3 *Supposons $\omega \neq 0$.*

1) Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9) alors \mathbf{H}_\perp est une solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H}_\perp \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\perp \text{rot } \mathbf{v} - \omega^2 \mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} J_z \text{rot } \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega). \end{array} \right. \quad (7.15)$$

2) Si \mathbf{H}_\perp vérifie le problème (7.15) alors $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = (\mathbf{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\text{rot } \mathbf{H}_\perp - J))$ est une solution de (7.9).

Preuve. 1) Supposons (\mathbf{H}_\perp, E_z) solution de (7.9). Au sens des distributions, on a alors $i\omega E_z + \varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\perp = \varepsilon^{-1} J_z$. En multipliant par $\text{rot } \mathbf{v}$ pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$, en effectuant une intégration par parties et en utilisant $E_z \in H_0^1(\Omega)$, on obtient (7.15).

2) Réciproquement, si \mathbf{H}_\perp vérifie (7.15), définissons $E_z = i(\omega\varepsilon)^{-1}(\text{rot } \mathbf{H}_\perp - J)$. Dans ce cas, clairement, l'équation

$$i\omega\varepsilon E_z + \text{rot } \mathbf{H}_\perp = J_z \quad (7.16)$$

est satisfaite. Au sens des distributions, à partir de (7.15), on trouve $\text{rot } (\varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\perp) - \omega^2 \mu \mathbf{H}_\perp = \text{rot } (\varepsilon^{-1} J_z)$. Ceci conduit à

$$-i\omega\mu \mathbf{H}_\perp + \text{rot } E_z = 0. \quad (7.17)$$

Montrons ensuite $E_z = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. En combinant (7.15) et (7.16), on obtient $(E_z, \text{rot } \mathbf{v})_\Omega = i\omega(\mu \mathbf{H}_\perp, \mathbf{v})_\Omega$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$. En utilisant (7.17) et la surjectivité de la trace tangentielle de $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (Théorème 7.0.5), on déduit $E_z = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Grâce à (7.17), on trouve $\mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. ■

Malheureusement, il n'est pas évident d'étudier le problème (7.15) car l'injection de $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. En particulier, on ne peut pas utiliser la théorie de Fredholm. Classiquement pour les équations de Maxwell, l'idée consiste à travailler dans l'espace $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. Lorsque μ est positif, on sait d'après [150] que cette propriété de compacité est valable. Dans un premier temps, suivons cette démarche. De la Proposition 7.1.3, nous déduisons sans peine la

Proposition 7.1.4 *Supposons $\omega \neq 0$. Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9) alors \mathbf{H}_\perp est solution de*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H}_\perp \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp \operatorname{rot} \mathbf{v} - \omega^2 \mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} J_z \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega). \end{array} \right. \quad (7.18)$$

Puisque nous désirons une formulation variationnelle pour \mathbf{H}_\perp équivalente au problème (7.9), nous avons besoin d'une réciproque à la Proposition 7.1.4. Nous allons voir que cette réciproque n'est pas toujours vraie, dans le sens où, à partir d'une solution du problème (7.18), on ne peut pas toujours construire une solution de (7.9). Pour mettre en évidence ce phénomène, définissons l'espace des fonctions à moyenne nulle

$$\mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v = 0\}.$$

La seule constante dans $\mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ est zéro. En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte, on montre que l'application $(u, v) \mapsto (\nabla u, \nabla v)_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$. Introduisons alors, avec le théorème de représentation de Riesz, l'opérateur borné $A_N^{\mu} : \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_N^{\mu} u), \nabla v)_{\Omega} = (\mu \nabla u, \nabla v)_{\Omega}, \quad \forall (u, v) \in \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) \times \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega). \quad (7.19)$$

Dans la notation A_N^{μ} , le « N » fait référence à la condition de Neumann homogène imposée de façon faible. Lorsque μ est strictement positif, le théorème de Lax-Milgram indique que A_N^{μ} constitue un isomorphisme de $\mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$. Lorsque, μ change de signe, ce n'est bien entendu pas toujours le cas. Supposons qu'il existe $\lambda_N \in \ker A_N^{\mu}$ avec $\lambda_N \neq 0$. Dans ce cas, on observe que $\nabla \lambda_N$ vérifie le problème (7.18) avec $J_z = 0$. Par contre, il n'existe pas d'élément $E_z \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que le couple $(E_z, \nabla \lambda_N)$ soit solution de (7.9) avec $J_z = 0$. Par conséquent, pour avoir une réciproque à la Proposition 7.1.4, il faut au moins supposer A_N^{μ} injectif.

Proposition 7.1.5 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons que $A_N^{\mu} : \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ définit un isomorphisme. Alors si \mathbf{H}_\perp vérifie (7.18), le couple $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = (\mathbf{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp - J))$ vérifie le problème (7.9).*

Preuve. Supposons que \mathbf{H}_\perp vérifie (7.18). Pour prouver que $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = (\mathbf{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp - J))$ constitue une solution de (7.9), il suffit de montrer que \mathbf{H}_\perp satisfait (7.15) et d'utiliser la Proposition 7.1.3. Considérons $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$. Introduisons ψ l'unique élément de $\mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ vérifiant $(\mu \nabla \psi, \nabla \psi')_{\Omega} = (\mu \mathbf{v}, \nabla \psi')_{\Omega}$ pour tout $\psi' \in \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$. La fonction ψ est bien définie car on a supposé que A_N^{μ} est un isomorphisme. D'après le Corollaire 7.0.4, le champ $\mathbf{v} - \nabla \psi$ appartient à l'espace $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. En injectant $\mathbf{v} - \nabla \psi$ dans (7.18), on obtient $(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{\Omega} - \omega^2 (\mu \mathbf{H}_\perp, \mathbf{v})_{\Omega} = (\varepsilon^{-1} J_z, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{\Omega}$. Ceci montre bien que \mathbf{H}_\perp satisfait (7.15). ■

Nous pouvons énoncer le

Corollaire 7.1.6 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons que $A_N^{\mu} : \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ définit un isomorphisme. Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.18) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.18)

Pour prouver que le problème (7.18) est bien posé, nous allons utiliser la théorie de Fredholm. Pour ce faire, nous avons besoin de prouver un résultat d'injection compacte de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, qui n'est pas toujours vrai lorsque μ change de signe (cf. Proposition 8.5.1, Chapitre 8).

Théorème 7.1.7 *Supposons que l'opérateur $A_N^{\mu} : \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\#}^1(\Omega)$ défini en (7.19) constitue un isomorphisme. Alors $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$.*

Preuve. Considérons (\mathbf{u}_n) une suite bornée de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n := \operatorname{rot} \mathbf{u}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$. Puisque $\mu \mathbf{u}_n$ est un élément à divergence nulle satisfaisant $\mu \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, et puisque, par hypothèse, $\partial\Omega$ est connexe, il existe d'après le théorème 3.12 de [84], $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{rot} \varphi_n = \mu \mathbf{u}_n$. Prouvons que nous pouvons extraire de $(\operatorname{rot} \varphi_n)$, ou de façon équivalente, de $(\nabla \varphi_n)$, une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Au sens des distributions, on a $\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \varphi_n = \operatorname{rot} \mathbf{u}_n = f_n$. En utilisant la formule de Green (7.13), on déduit qu'on a, pour tout $\varphi' \in H_0^1(\Omega)$, $(\mu^{-1} \operatorname{rot} \varphi_n, \operatorname{rot} \varphi')_\Omega = (\mu^{-1} \nabla \varphi_n, \nabla \varphi')_\Omega = (\operatorname{rot} \mathbf{u}_n, \varphi')_\Omega$. Définissons l'opérateur borné $A_D^{1/\mu} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_D^{1/\mu} \varphi), \nabla \varphi')_\Omega = (\mu^{-1} \nabla \varphi, \nabla \varphi')_\Omega, \quad \forall (\varphi, \varphi') \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Nous prouverons dans la section suivante (cf. Théorème 7.2.1) que $A_D^{1/\mu} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est un isomorphisme si et seulement si $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ est un isomorphisme. Puisque nous avons supposé que A_N^μ est un isomorphisme, nous déduisons que la suite $(A_D^{1/\mu} \varphi_n)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Rellich qui stipule que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire de (φ_n) une sous-suite (toujours notée (φ_n)) telle que $(A_D^{1/\mu} \varphi_n)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$. Introduisons $\varphi_{mn} := \varphi_m - \varphi_n$ et $f_{mn} := f_m - f_n$. On peut écrire

$$\begin{aligned} (\nabla(A_D^{1/\mu} \varphi_{mn}), \nabla(A_D^{1/\mu} \varphi_{mn}))_\Omega &= (\mu^{-1} \nabla \varphi_{mn}, \nabla(A_D^{1/\mu} \varphi_{mn}))_\Omega \\ &= (f_{mn}, A_D^{1/\mu} \varphi_{mn})_\Omega \end{aligned} \quad (7.20)$$

Puisque $(A_D^{1/\mu} \varphi_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, on déduit de la relation (7.20) que $(A_D^{1/\mu} \varphi_n)$ est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme, on déduit que la suite φ_n est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$ donc qu'elle converge. On peut donc extraire de (\mathbf{u}_n) une sous-suite telle que $(\mathbf{u}_n) = (\mu^{-1} \operatorname{rot} \varphi_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$. Ceci permet de conclure que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Pour montrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, il suffit de prouver l'estimation

$$\|\mathbf{u}\|_\Omega \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_\Omega, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega). \quad (7.21)$$

Pour y parvenir, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (\mathbf{u}_n) d'éléments de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{u}_n\|_\Omega = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}_n\|_\Omega = 0.$$

D'après le résultat d'injection compacte que nous venons de montrer, on peut extraire de (\mathbf{u}_n) une sous-suite (toujours notée (\mathbf{u}_n)) qui converge vers un certain \mathbf{u} dans $L^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\mathbf{u}\|_\Omega = 1$. On vérifie alors qu'au sens des distributions, on a $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ p.p. dans Ω . Puisque $\partial\Omega$ est connexe, on déduit d'après le théorème 3.2 de [84] qu'il existe $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. Puisque $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, nécessairement $\varphi \in \ker A_N^\mu$, $\varphi = 0$ et donc $\mathbf{u} = 0$. On aboutit ainsi à une contradiction. Ceci achève la preuve de ce théorème \blacksquare

Remarque 7.1.8 Lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe, ou de façon équivalente en 2D, quand Ω n'est pas simplement connexe, l'application $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega$ ne définit plus un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. En effet, dans ce cas, il reste dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ les gradients des fonctions φ vérifiant $\operatorname{div}(\mu \nabla \varphi) = 0$ et φ constant sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$. Cet espace vectoriel est de dimension égale au nombre de composantes connexes de la frontière moins un. Nous montrerons dans l'étude des équations de Maxwell en 3D comment procéder lorsque $\partial\Omega$ n'est pas connexe.

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\mathcal{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ tel que, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \times \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$,

$$(\operatorname{rot}(\mathcal{A}_T(\omega)\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega - \omega^2(\mu \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega. \quad (7.22)$$

Théorème 7.1.9 *Supposons que l'opérateur $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ défini en (7.19) constitue un isomorphisme. Alors $\mathcal{A}_T(0)$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$.*

Remarque 7.1.10 *Dans ce théorème, l'hypothèse effectuée sur ε est relativement faible. En effet, nous supposons seulement $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\Omega)$. Ceci peut paraître surprenant quand on a à l'esprit que les opérateurs $A_D^{1/\varepsilon}$ et $A_N^{1/\varepsilon}$ définis respectivement par*

$$\begin{aligned} (\nabla(A_D^{1/\varepsilon}u), \nabla v)_\Omega &= (\varepsilon^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega); \\ (\nabla(A_N^{1/\varepsilon}u), \nabla v)_\Omega &= (\varepsilon^{-1}\nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_{\#}^1(\Omega) \times H_{\#}^1(\Omega); \end{aligned}$$

ne vérifient pas cette propriété. Dans le Chapitre 1, nous avons en effet rencontré des configurations pour lesquelles $A_D^{1/\varepsilon}$ et $A_N^{1/\varepsilon}$ ne sont pas Fredholm. C'est en particulier le cas lorsque ε prend des valeurs opposées de part et d'autre d'une interface localement droite. L'opérateur $\mathcal{A}_T(0)$, lui, n'est sensible qu'aux valeurs du paramètre μ qui apparaît dans l'espace.

Preuve. Pour $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, introduisons $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ la fonction vérifiant $-\Delta\varphi = \varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Considérons ensuite $\psi \in H_{\#}^1(\Omega)$ satisfaisant $(\mu \nabla \psi, \nabla \psi')_\Omega = (\mu \operatorname{rot} \varphi, \nabla \psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in H_{\#}^1(\Omega)$. Puisque par hypothèse $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ est un isomorphisme, la fonction ψ est bien définie. Introduisons alors l'opérateur borné $\mathbb{T} : \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ qui à $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ fait correspondre $\mathbb{T}\mathbf{u} = \operatorname{rot} \varphi - \nabla \psi$.

Pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \times \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, on a

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}(\mathcal{A}_T(0)(\mathbb{T}\mathbf{u})), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\mathbb{T}\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega \\ &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \varphi - \nabla \psi), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega \\ &= (-\varepsilon^{-1} \Delta \varphi, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{A}_T(0) \circ \mathbb{T}$ est égal à l'identité de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. Puisque $\mathcal{A}_T(0)$ est autoadjoint, ceci montre que $\mathcal{A}_T(0)$ définit un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ avec $\mathcal{A}_T(0)^{-1} = \mathbb{T}$. ■

Théorème 7.1.11 *Supposons que l'opérateur $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ défini en (7.19) soit un isomorphisme.*

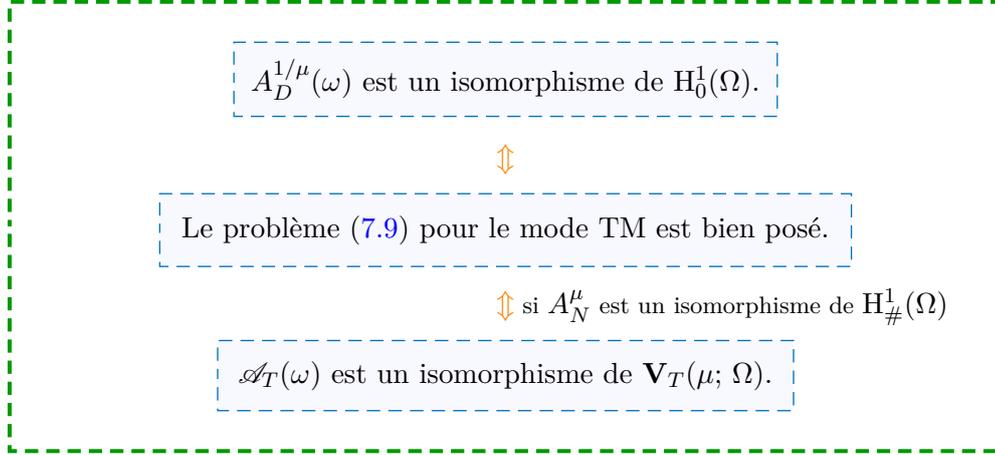
Alors l'opérateur $\mathcal{A}_T(\omega)$ défini en (7.22) constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

En conséquence, le problème (7.9) pour (\mathbf{H}_\perp, E_z) possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$.

Preuve. D'après le Théorème 7.1.7, l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}_T(\omega)$ diffère de l'isomorphisme $\mathcal{A}_T(0)$ d'une perturbation compacte. Le théorème de Fredholm analytique permet alors de conclure que $\mathcal{A}_T(\omega)$ constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$. Avec le Corollaire 7.1.6, on déduit que le problème TM est bien posé pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$. ■

7.1.3 Bilan de l'approche « classique » pour le problème *Transverse Magnetic*

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, nous pouvons résumer les résultats que nous avons obtenus par le diagramme suivant.



Nous allons maintenant quantifier la force de l'hypothèse « A_N^μ est un isomorphisme de $H_{\#}^1(\Omega)$ ». Pour cela, nous étudierons le lien entre les opérateurs $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ et $A_D^{1/\mu}(\omega) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$. Nous montrerons que si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme alors A_N^μ est Fredholm d'indice zéro.

7.2 Relation entre les opérateurs scalaires

Pour mémoire, rappelons que les opérateurs A_N^μ et $A_D^{1/\mu}(\omega)$ sont définis par

$$\begin{aligned} (\nabla(A_N^\mu u), \nabla v)_\Omega &= (\mu \nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_{\#}^1(\Omega) \times H_{\#}^1(\Omega); \\ (\nabla(A_D^{1/\mu}(\omega)u), \nabla v)_\Omega &= (\mu^{-1} \nabla u, \nabla v)_\Omega - \omega^2 (\varepsilon u, v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

De plus, nous avons introduit $A_D^{1/\mu} = A_D^{1/\mu}(0)$.

Théorème 7.2.1 *L'opérateur $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ définit un isomorphisme si et seulement si $A_D^{1/\mu} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ définit un isomorphisme.*

Preuve. 1) SUPPOSONS QUE $A_N^\mu : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ SOIT UN ISOMORPHISME. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega)$ la fonction vérifiant $(\mu \nabla \varphi, \nabla \varphi')_\Omega = (\mu \nabla u, \mathbf{rot} \varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in H_{\#}^1(\Omega)$. Puisque A_N^μ est un isomorphisme de $H_{\#}^1(\Omega)$, la fonction $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega)$ est bien définie. En remarquant que $(\mu \nabla \varphi, \nabla \varphi')_\Omega = (\mu \mathbf{rot} \varphi, \mathbf{rot} \varphi')_\Omega$, on obtient, au sens des distributions, $\mathbf{rot}(\mu(\nabla u - \mathbf{rot} \varphi)) = 0$. Puisque $\mu(\nabla u - \mathbf{rot} \varphi) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$ et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe un unique $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\mu(\nabla u - \mathbf{rot} \varphi) = \nabla \psi$ (cf. théorème 3.2 de [84]). Introduisons alors l'opérateur continu $\mathbf{T} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ qui à $u \in H_0^1(\Omega)$ fait correspondre $\mathbf{T}u = \psi$.

Pour tout $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} (\nabla(A_D^{1/\mu}(\mathbf{T}u)), \nabla v)_\Omega &= (\mu^{-1} \nabla(\mathbf{T}u), \nabla v)_\Omega \\ &= (\nabla u - \mathbf{rot} \varphi, \nabla v)_\Omega \\ &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega. \end{aligned}$$

Ci-dessus, pour obtenir la dernière ligne, on intègre par parties avec la formule de Green (7.12) puis on utilise $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \varphi) = 0$ p.p. dans Ω et $v = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi, $A_D^{1/\mu} \circ \mathbf{T}$ est égal à l'identité de $H_0^1(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est autoadjoint, on déduit que $A_D^{1/\mu}$ constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ avec $(A_D^{1/\mu})^{-1} = \mathbf{T}$.

II) SUPPOSONS QUE $A_D^{1/\mu}$ SOIT UN ISOMORPHISME DE $H_0^1(\Omega)$. On va procéder de façon très similaire à ce que nous venons de faire. Pour $u \in H_{\#}^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ la fonction vérifiant $(\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu^{-1}\nabla u, \mathbf{rot}\varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi' \in H_0^1(\Omega)$. Puisque $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$, la fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ est bien définie. En remarquant que $(\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu \mathbf{rot}\varphi, \mathbf{rot}\varphi')_{\Omega}$, on obtient, au sens des distributions, $\mathbf{rot}(\mu^{-1}(\nabla u - \mathbf{rot}\varphi)) = 0$. Par conséquent, il existe un unique $\psi \in H_{\#}^1(\Omega)$ tel que $\mu^{-1}(\nabla u - \mathbf{rot}\varphi) = \nabla\psi$. Introduisons alors l'opérateur continu $\mathbf{T} : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ qui à $u \in H_{\#}^1(\Omega)$ fait correspondre $\mathbf{T}u = \psi$. Pour tout $(u, v) \in H_{\#}^1(\Omega) \times H_{\#}^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} (\nabla(A_N^{\mu}(\mathbf{T}u)), \nabla v)_{\Omega} &= (\mu\nabla(\mathbf{T}u), \nabla v)_{\Omega} \\ &= (\nabla u - \mathbf{rot}\varphi, \nabla v)_{\Omega} \\ &= (\nabla u, \nabla v)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Ci-dessus, pour obtenir la dernière ligne, on intègre par parties avec (7.13) puis on utilise $\mathbf{rot}(\nabla v) = 0$ et $\varphi = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi, $A_D^{1/\mu} \circ \mathbf{T}$ est égal à l'identité de $H_0^1(\Omega)$. On déduit que A_N^{μ} définit un isomorphisme de $H_{\#}^1(\Omega)$ avec $(A_N^{\mu})^{-1} = \mathbf{T}$. ■

Nous souhaitons maintenant obtenir un résultat équivalent au Théorème 7.2.1 lorsque les opérateurs $A_D^{1/\mu}$ et A_N^{μ} sont Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro. Plaçons-nous dans une telle configuration. Introduisons $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ une base de $\ker A_D^{1/\mu}$ telle que $(\nabla\lambda_D^i, \nabla\lambda_D^j)_{\Omega} = \delta_{ij}$ et $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ une base de $\ker A_N^{\mu}$ telle que $(\nabla\lambda_N^i, \nabla\lambda_N^j)_{\Omega} = \delta_{ij}$. Définissons les espaces S_D et S_N vérifiant

$$H_0^1(\Omega) = \ker A_D^{1/\mu} \oplus S_D \quad \text{et} \quad H_{\#}^1(\Omega) = \ker A_N^{\mu} \oplus S_N. \quad (7.23)$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs

$$\begin{aligned} \tilde{A}_D^{1/\mu} &: S_D \rightarrow S_D \quad \text{tel que} \quad (\nabla(\tilde{A}_D^{1/\mu}\varphi), \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu^{-1}\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega}, \quad \forall \varphi, \varphi' \in S_D; \\ \text{et} \quad \tilde{A}_N^{\mu} &: S_N \rightarrow S_N \quad \text{tel que} \quad (\nabla(\tilde{A}_N^{\mu}\varphi), \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega}, \quad \forall \varphi, \varphi' \in S_N. \end{aligned}$$

Classiquement (cf. [116]), on a la

Proposition 7.2.2 *Les opérateurs $\tilde{A}_D^{1/\mu} : S_D \rightarrow S_D$ et $\tilde{A}_N^{\mu} : S_N \rightarrow S_N$ constituent des isomorphismes.*

Montrons à présent le

Théorème 7.2.3 *L'opérateur $A_N^{\mu} : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $A_D^{1/\mu} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro. De plus, lorsque A_N^{μ} et $A_D^{1/\mu}$ sont Fredholm d'indice zéro, on a $\dim \ker A_D^{1/\mu} = \dim \ker A_N^{\mu}$.*

Preuve. Supposons que A_N^{μ} soit Fredholm d'indice zéro. Si A_N^{μ} est injectif, alors A_N^{μ} est un isomorphisme et dans ce cas, le Théorème 7.2.1 indique que $A_D^{1/\mu}$ est un isomorphisme. Intéressons-nous à la situation où A_N^{μ} présente un noyau $\text{vect}(\lambda_N^1, \dots, \lambda_N^{n_N})$ non réduit à zéro. Nous allons prouver que $A_D^{1/\mu}$ est de type Fredholm en construisant une paramétrix à droite pour $A_D^{1/\mu}$, c'est-à-dire un inverse à droite pour $A_D^{1/\mu}$ modulo un opérateur compact. Autrement dit, nous cherchons un opérateur borné $\mathbf{T} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ et un opérateur compact $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tels que $A_D^{1/\mu} \circ \mathbf{T} + K$ soit égal à l'identité de $H_0^1(\Omega)$. Nous généraliserons la démonstration du Théorème 7.2.1.

Définissons $\mathbf{\Gamma}_N^i := \mu^{-1}\mathbf{rot}\lambda_N^i$, $i = 1 \dots n_N$. Observons que $(\mu\mathbf{\Gamma}_N^i, \mathbf{rot}\lambda_N^j)_{\Omega} = \delta^{ij}$ avec $\delta^{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta^{ij} = 0$ si $i \neq j$. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, introduisons $\varphi \in S_N$ la fonction vérifiant

$$(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i), \mathbf{rot}\varphi')_{\Omega}, \quad \forall \varphi' \in S_N, \quad (7.24)$$

où $\beta^i := (\mu \nabla u, \mathbf{rot} \lambda_N^i)_{\Omega}$. Puisque \tilde{A}_N^{μ} est un isomorphisme de S_N , la fonction $\varphi \in S_N$ est bien définie. En remarquant que $(\mu \nabla \varphi, \nabla \varphi)_{\Omega} = (\mu \mathbf{rot} \varphi, \mathbf{rot} \varphi)_{\Omega}$ et que $(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i), \mathbf{rot} \lambda_N^j)_{\Omega} = 0$ pour $j = 1 \dots n_N$, on obtient $(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot} \varphi), \mathbf{rot} \varphi)_{\Omega} = 0$ pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega)$. Cela implique, $\mathbf{rot}(\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot} \varphi)) = 0$, et $\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot} \varphi) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.2 de [84], il existe un unique $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\mu(\nabla u - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i \mathbf{\Gamma}_N^i - \mathbf{rot} \varphi) = \nabla \psi$. Introduisons alors l'opérateur continu $\mathbf{T} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ qui à $u \in H_0^1(\Omega)$ fait correspondre $\mathbf{T}u = \psi$ ainsi que l'opérateur $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(Ku), \nabla v)_{\Omega} = \sum_{i=1}^{n_N} (\mu \nabla u, \mathbf{rot} \lambda_N^i)_{\Omega} (\mathbf{\Gamma}_N^i, \nabla v)_{\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} (\nabla(A_D^{1/\mu}(\mathbf{T}u)), \nabla v)_{\Omega} &= (\mu^{-1} \nabla(\mathbf{T}u), \nabla v)_{\Omega} \\ &= (\nabla u, \nabla v)_{\Omega} - (\nabla(Ku), \nabla v)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $A_D^{1/\mu} \circ \mathbf{T} + K = \text{Id}$. Or K est de rang fini donc c'est un opérateur compact. Nous pouvons donc conclure que l'opérateur autoadjoint $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro.

En adaptant le raisonnement du point II) de la preuve du Théorème 7.2.1 comme ci-dessus, on montre que si $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro, alors A_N^{μ} est Fredholm d'indice zéro.

Il ne reste plus qu'à prouver que les dimensions des noyaux des opérateurs A_N^{μ} et $A_D^{1/\mu}$ sont égales lorsque A_N^{μ} et $A_D^{1/\mu}$ sont Fredholm d'indice zéro. Considérons $\lambda_D^i \in \ker A_D^{1/\mu}$. On a $(\mu^{-1} \mathbf{rot} \lambda_D^i, \mathbf{rot} v)_{\Omega} = 0$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Ceci implique $\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \lambda_D^i) = 0$. D'après le théorème 3.2 de [84], on sait qu'il existe un unique $\psi^i \in H_{\#}^1(\Omega)$ tel que $\mu^{-1} \mathbf{rot} \lambda_D^i = \nabla \psi^i$. En remarquant que $(\mu \nabla \psi^i, \nabla v)_{\Omega} = (\mathbf{rot} \lambda_D^i, \nabla v)_{\Omega} = 0$ pour tout $v \in H_{\#}^1(\Omega)$ (pour le voir, effectuer une intégration par parties et utiliser $\lambda_D^i \in H_0^1(\Omega)$), on déduit que $\psi^i \in \ker A_N^{\mu}$. Montrons que la famille $\{\psi^i\}_{i=1}^{n_D}$ est libre. Donnons-nous n_D réels α^i tels que $\sum_{i=1}^{n_D} \alpha^i \psi^i = 0$. Alors, on a $\mathbf{rot}(\sum_{i=1}^{n_D} \alpha^i \lambda_D^i) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{n_D} \alpha^i \lambda_D^i = 0$ car les λ_D^i sont dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque la famille $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ est libre, on déduit $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_D} = 0$. Ceci montre que $\dim \ker A_N^{\mu} \geq \dim \ker A_D^{1/\mu}$. De même, on prouve $\dim \ker A_D^{1/\mu} \geq \dim \ker A_N^{\mu}$ pour parvenir à $\dim \ker A_D^{1/\mu} = \dim \ker A_N^{\mu}$. ■

On déduit le

Corollaire 7.2.4 *Supposons que l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $A_N^{\mu} : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. L'opérateur $A_D^{1/\mu} = A_D^{1/\mu}(0)$ diffère de $A_D^{1/\mu}(\omega)$ d'une perturbation compacte. Par conséquent, $A_D^{1/\mu}$ est Fredholm d'indice zéro. Le Théorème 7.2.3 indique alors que A_N^{μ} est Fredholm d'indice zéro. ■

Supposons le problème TM (7.9) bien posé. Dans ce cas, d'après le Corollaire 7.1.2, l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme. En vertu du Corollaire 7.2.4, il suit que A_N^{μ} est Fredholm d'indice zéro. Deux cas de figures se présentent alors. Si A_N^{μ} est injectif, le problème (7.18), posé dans $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$, possède une unique solution. Si A_N^{μ} n'est pas injectif, alors (7.18) n'est pas injectif. Dans cette situation, il faut travailler dans un autre cadre fonctionnel que $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$.

7.3 Une nouvelle formulation variationnelle pour H_{\perp}

Dans cette section, nous supposons que l'opérateur A_N^{μ} est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. Réintroduisons $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ une base de $\ker A_N^{\mu}$ telle que

$(\nabla\lambda_N^i, \nabla\lambda_N^j)_\Omega = \delta_{ij}$. En (7.23), nous avons défini S_N tel que $H_{\neq}^1(\Omega) = \ker A_N^\mu \oplus^\perp S_N$. Considérons ensuite l'espace

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid (\mu\mathbf{u}, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in S_N\}.$$

Puisque $S_N \subset H_{\neq}^1(\Omega)$, on a $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$.

Proposition 7.3.1 *Supposons $\omega \neq 0$.*

1) *Si (\mathbf{H}_\perp, E_z) vérifie le problème (7.9) alors \mathbf{H}_\perp est solution de*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{H}_\perp \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\perp \text{rot } \mathbf{v} - \omega^2 \mu \mathbf{H}_\perp \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1} J_z \text{rot } \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega). \end{array} \right. \quad (7.25)$$

2) *Si \mathbf{H}_\perp satisfait (7.25), le couple $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = (\mathbf{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\text{rot } \mathbf{H}_\perp - J))$ vérifie le problème (7.9).*

Preuve. La démonstration du point 1) ne pose pas de problème. Concentrons-nous sur le point 2). Supposons que \mathbf{H}_\perp vérifie (7.25). Pour prouver que $(\mathbf{H}_\perp, E_z) = (\mathbf{H}_\perp, i(\omega\varepsilon)^{-1}(\text{rot } \mathbf{H}_\perp - J))$ constitue une solution de (7.9), de nouveau, il suffit de montrer que \mathbf{H}_\perp satisfait (7.15) et d'utiliser la Proposition 7.1.3. Considérons $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$. Introduisons ψ l'unique élément de S_N vérifiant $(\mu\nabla\psi, \nabla\psi')_\Omega = (\mu\mathbf{v}, \nabla\psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in S_N$. Le champ $\mathbf{v} - \nabla\psi$ est dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$. En injectant $\mathbf{v} - \nabla\psi$ dans (7.25), on obtient $(\varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\perp, \text{rot } \mathbf{v})_\Omega - \omega^2 (\mu \mathbf{H}_\perp, \mathbf{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1} J_z, \text{rot } \mathbf{v})_\Omega$. Ceci prouve que \mathbf{H}_\perp satisfait (7.15). ■

Dans ce nouveau cadre fonctionnel, on a le résultat d'équivalence suivant, sans hypothèse additionnelle.

Corollaire 7.3.2 *Supposons $\omega \neq 0$. Le problème (7.9) possède une unique solution si et seulement si (7.25) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.25)

Avant d'aller plus loin, précisons la structure de l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$.

Lemme 7.3.3 *Pour $i = 1 \dots n_N$, il existe $\mathbf{\Lambda}_N^i \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ tel que $(\mu \mathbf{\Lambda}_N^i, \nabla\lambda_N^j)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1 \dots n_N$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) = \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \oplus \text{vect}(\mathbf{\Lambda}_N^i)_{i=1}^{n_N}.$$

Remarque 7.3.4 *Dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, il reste les fonctions $\nabla\lambda_N^i$. Cependant, en raison de la présence dans l'espace variationnel des $\mathbf{\Lambda}_N^i$, les-dites fonctions ne seront pas dans le noyau de l'opérateur associé à (7.25).*

Preuve. Pour $i = 1 \dots n_N$, introduisons la forme linéaire ℓ^i sur $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ définie par $\ell^i(\mathbf{v}) = (\mu\mathbf{v}, \nabla\lambda_N^i)_\Omega$. Montrons que la famille $\ell^1, \dots, \ell^{n_N}$ est libre. Donnons-nous n_N constantes $\alpha^1, \dots, \alpha^{n_N}$ telles que $\sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \ell^i = 0$. Dans ce cas, pour tout $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, on a $(\mu\mathbf{v}, \sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$. Ceci implique $(\mu\mathbf{w}, \sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$ pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$. Pour le voir, pour $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$, introduisons $\varphi \in S_N$ la fonction telle que $(\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_\Omega = (\mu\mathbf{w}, \nabla\varphi')_\Omega$ pour tout $\varphi' \in S_N$. On a $\mathbf{w} - \nabla\varphi \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$. Puisque $(\mu\nabla\varphi, \nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$, $i = 1 \dots n_N$, on obtient bien $(\mu\mathbf{w}, \sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \nabla\lambda_N^i)_\Omega = 0$.

En utilisant la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on déduit $\sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \nabla\lambda_N^i = 0$. Puisque la famille $\{\lambda_N^i\}_{i=1}^{n_N}$ est une base de $\ker A_N^\mu$, on a $\alpha^1 = \dots = \alpha^{n_N} = 0$. Ceci achève de montrer que $\ell^1, \dots, \ell^{n_N}$ est libre. On conclut ensuite grâce au Théorème 7.3.5. ■

À partir du lemme 4.12 de [104], on montre le théorème de base antédurale suivant.

Théorème 7.3.5 *Soit V un espace vectoriel normé. Pour toute famille libre d'éléments $\ell^1, \dots, \ell^n \in V^*$, il existe $x^1, \dots, x^n \in V$ tels que*

$$\ell^i(x^j) = \delta^{ij} \quad \text{avec } \delta^{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta^{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Prouvons ensuite un résultat d'injection compacte de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 7.3.6 *Supposons A_N^μ Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. L'espace $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_\Omega + \sum_{i=1}^{n_N} |\alpha^i|$, où $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ et $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n_N}) \in \mathbb{R}^{n_N}$ sont les éléments tels que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n_N} \alpha^i \mathbf{\Lambda}_N^i$, définit une norme sur $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} := (\|\cdot\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot} \cdot\|_\Omega^2)^{1/2}$.*

Preuve. Considérons (\mathbf{u}_n) une suite bornée de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 7.3.3, définissons $\mathbf{v}_n \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ et $(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^{n_N})$ les éléments tels que $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n + \sum_{i=1}^{n_N} \alpha_n^i \mathbf{\Lambda}_N^i$. Pour prouver le Théorème 7.3.6, il suffit de montrer qu'on peut extraire de (\mathbf{v}_n) une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $f_n := \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque $\mu \mathbf{v}_n$ est un élément à divergence nulle satisfaisant $\mu \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$, et puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe d'après le théorème 3.12 de [84], $\varphi_n \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \varphi_n = \mu \mathbf{v}_n$. Comme dans la démonstration du Théorème 7.1.7, nous souhaitons maintenant prouver qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot} \varphi_n)$, ou de façon équivalente, de $(\nabla \varphi_n)$, une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Au sens des distributions, on a de nouveau $\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \varphi_n = \mathbf{rot} \mathbf{v}_n = f_n$. En utilisant la formule de Green (7.13), on déduit, pour tout $\varphi' \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$(\mu^{-1} \mathbf{rot} \varphi_n, \mathbf{rot} \varphi')_\Omega = (\mu^{-1} \nabla \varphi_n, \nabla \varphi')_\Omega = (\mathbf{rot} \mathbf{v}_n, \varphi')_\Omega. \quad (7.26)$$

Puisque, par hypothèse, A_N^μ est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension $n_N > 1$, nous savons d'après le Théorème 7.2.3 que $A_D^{1/\mu}$ est également Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension n_N . En reprenant la preuve du Théorème 7.2.3, on montre qu'on peut construire un opérateur continu $\mathbf{T} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que $(\mu^{-1} \nabla u, \nabla(\mathbf{T}v))_\Omega = (\nabla u, \nabla v)_\Omega - \sum_{i=1}^{n_N} \beta^i (\nabla u, \mathbf{\Gamma}_N^i)_\Omega$ pour tout $(u, v) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, avec $\beta^i = (\mu \nabla v, \mathbf{rot} \lambda_N^i)_\Omega$ et $\mathbf{\Gamma}_N^i = \mu^{-1} \mathbf{rot} \lambda_N^i$. Puisque \mathbf{T} est continu, $(\mathbf{T} \varphi_n)$ est bornée dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire de (φ_n) une sous-suite, toujours notée (φ_n) , telle que $(\mathbf{T} \varphi_n)$ converge fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i = 1 \dots n_N$, la suite (β_n^i) est bornée (ici $\beta_n^i = (\mu \nabla \varphi_n, \mathbf{rot} \lambda_N^i)_\Omega$), on peut de nouveau extraire de (φ_n) une sous-suite, toujours notée (φ_n) , telle que (β_n^i) converge. Introduisons $\varphi_{mn} = \varphi_m - \varphi_n$, $\beta_{mn}^i = \beta_m^i - \beta_n^i$ et $f_{mn} = f_m - f_n$. En testant dans (7.26) par $\mathbf{T} \varphi_{mn}$, on obtient

$$\begin{aligned} |(f_{mn}, \varphi_{mn})_\Omega| &= |(\mu^{-1} \nabla \varphi_{mn}, \nabla(\mathbf{T} \varphi_{mn}))_\Omega| \\ &\geq (\nabla \varphi_{mn}, \nabla \varphi_{mn})_\Omega - |\sum_{i=1}^{n_N} \beta_{mn}^i (\nabla \varphi_{mn}, \mathbf{\Lambda}_N^i)_\Omega|. \end{aligned}$$

Cette estimation prouve que la suite $(\nabla \varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc qu'elle converge. Ainsi, on peut extraire de $(\mathbf{v}_n) = (\mu^{-1} \mathbf{rot} \varphi_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Ceci achève de montrer que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

On démontre le résultat d'équivalence de normes de façon classique, comme dans la preuve du Théorème 7.1.7, en raisonnant par l'absurde. ■

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ tel que, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \times \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$,

$$(\mathbf{rot}(\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega) \mathbf{u}), \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega + (\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega - \omega^2 (\mu \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega. \quad (7.27)$$

Ci-dessus, nous avons muni $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ du produit scalaire de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. Nous procédons ainsi car lorsque A_N^μ n'est pas injectif, l'application $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega$ ne constitue pas un produit scalaire sur $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$.

Théorème 7.3.7 *Supposons A_N^μ Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie non réduit à zéro. L'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_T(0) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ est Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. L'idée de nouveau va consister à construire un opérateur continu $\tilde{\mathbb{T}} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ pour restaurer une certaine positivité, à une perturbation compacte près. Considérons $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$.

Définissons d'abord la fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta\varphi = \varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Introduisons ensuite $\psi \in S_N$ satisfaisant $(\mu \nabla \psi, \nabla \psi')_\Omega = (\mu \operatorname{rot} \varphi, \nabla \psi')_\Omega$ pour tout $\psi' \in S_N$. Puisque, d'après la Proposition 7.2.2, $\tilde{A}_N^\mu : S_N \rightarrow S_N$ constitue un isomorphisme, la fonction ψ est bien définie. Introduisons alors l'opérateur $\tilde{\mathbb{T}} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ qui à $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ fait correspondre $\tilde{\mathbb{T}}\mathbf{u} = \operatorname{rot} \varphi - \nabla \psi$ ainsi que l'opérateur $\tilde{K} : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ tel que

$$(\operatorname{rot}(\tilde{K}\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega + (\tilde{K}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega).$$

Pour tout $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} & (\operatorname{rot}(\tilde{\mathcal{A}}_T(0)(\tilde{\mathbb{T}}\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega + (\tilde{\mathcal{A}}_T(0)(\tilde{\mathbb{T}}\mathbf{u}), \mathbf{v})_\Omega \\ &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\tilde{\mathbb{T}}\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - (\operatorname{rot}(\tilde{K}\mathbf{u}), \operatorname{rot} \mathbf{v})_\Omega - (\tilde{K}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\tilde{\mathcal{A}}_T(0) \circ \tilde{\mathbb{T}} + \tilde{K} = \operatorname{Id}$. Or d'après le Théorème 7.3.6, l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, \tilde{K} définit un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$. Nous déduisons que $\tilde{\mathbb{T}}$ constitue une paramétrix à droite pour $\tilde{\mathcal{A}}_T(0)$. Ceci montre que l'opérateur autoadjoint $\tilde{\mathcal{A}}_T(0)$ est Fredholm d'indice zéro. ■

Corollaire 7.3.8 *Supposons que les paramètres ε , μ et ω soient tels que l'opérateur $A_D^{1/\mu}(\omega) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ du problème pour E_z définisse un isomorphisme. Alors, l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ du problème pour \mathbf{H}_\perp est également un isomorphisme.*

Preuve. D'après le Théorème 7.3.6, nous savons que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega)$ diffère de $\tilde{\mathcal{A}}_T(0)$ d'une perturbation compacte. Puisque $\tilde{\mathcal{A}}_T(0)$ est Fredholm d'indice zéro en vertu du Théorème 7.3.7, on déduit que $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega)$ est Fredholm d'indice zéro. Si $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme alors le problème TM est bien posé. Dans ce cas, le Corollaire (7.3.2) assure que $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega)$ est injectif. En vertu de l'alternative de Fredholm, on déduit que $\tilde{\mathcal{A}}_T(\omega)$ est un isomorphisme. ■

Remarque 7.3.9 *La moralité est la suivante. Lorsque $A_D^{1/\mu}(\omega)$ définit un isomorphisme, le problème (7.9) pour (\mathbf{H}_\perp, E_z) est bien posé. On peut alors discrétiser $(\mathcal{P}_{E_z})_\omega$ pour calculer E_z puis ensuite retrouver \mathbf{H}_\perp . Si l'on souhaite approcher directement \mathbf{H}_\perp , il faut faire attention lorsque μ change de signe. En effet, quand $A_D^{1/\mu}(\omega)$ est un isomorphisme, $A_N^\mu = A_N^\mu(0)$ est Fredholm d'indice zéro mais non nécessairement injectif. Lorsque A_N^μ est injectif, c'est notamment le cas quand μ est positif, le problème (7.18) est bien posé et on peut le discrétiser pour approcher \mathbf{H}_\perp puis retrouver E_z . Lorsque A_N^μ n'est pas injectif, il ne faut pas utiliser cette procédure car le problème (7.18) n'est pas bien posé. Dans cette situation, l'on doit changer de cadre fonctionnel et travailler dans $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ en discrétisant le problème (7.25).*

7.4 Résumé pour le problème *Transverse Electric*

Nous présentons dans cette section le résumé des résultats pour le problème TE. Les démonstrations sont très similaires à celles décrites lors de l'étude du problème TM. Nous ne les réécrivons pas.

7.4.1 Approche « classique » pour le problème *Transverse Electric*

Formulation scalaire pour H_z

Construisons pour H_z un problème variationnel équivalent au système d'équations (7.10).

Théorème 7.4.1 *Supposons $\omega \neq 0$.*

1) Si (\mathbf{E}_\perp, H_z) vérifie le problème (7.10) alors H_z est une solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } H_z \in H_{\#}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla H_z \cdot \nabla v - \omega^2 \mu H_z v = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{rot} v, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.28)$$

2) Si H_z vérifie le problème (7.28) alors $(\mathbf{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{J}_\perp - \mathbf{rot} H_z), H_z)$ est une solution de (7.10).

Corollaire 7.4.2 *Supposons $\omega \neq 0$. Le problème (7.10) possède une unique solution si et seulement si (7.28) possède une unique solution.*

Une première formulation variationnelle pour \mathbf{E}_\perp

À l'instar de ce que nous avons fait dans le §7.1.2, introduisons l'opérateur borné $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\nabla(A_D^\varepsilon u), \nabla v)_\Omega = (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \quad (7.29)$$

Proposition 7.4.3 *Supposons $\omega \neq 0$.*

1) Si (\mathbf{E}_\perp, H_z) vérifie le problème (7.10) alors \mathbf{E}_\perp est une solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_\perp \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\perp \mathbf{rot} \mathbf{v} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v} = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega). \end{array} \right. \quad (7.30)$$

2) Supposons que A_D^ε soit un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$. Si \mathbf{E}_\perp vérifie le problème (7.30) alors $(\mathbf{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{J}_\perp - \mathbf{rot} H_z), H_z)$ est une solution de (7.10).

Corollaire 7.4.4 *Supposons $\omega \neq 0$. Supposons que l'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ soit un isomorphisme. Le problème (7.10) possède une unique solution si et seulement si (7.30) possède une unique solution.*

Étude de la formulation variationnelle (7.30).

Théorème 7.4.5 *Supposons que l'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$.*

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons, pour $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur borné $\mathcal{A}_D(\omega) : \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \rightarrow \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ tel que, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \times \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$,

$$(\mathbf{rot}(\mathcal{A}_D(\omega)\mathbf{u}), \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega = (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega - \omega^2 (\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega. \quad (7.31)$$

Théorème 7.4.6 *Supposons que l'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors $\mathcal{A}_N(0)$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$.*

Théorème 7.4.7 *Supposons que l'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ soit un isomorphisme.*

Alors l'opérateur $\mathcal{A}_N(\omega)$ défini en (7.31) constitue un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

En conséquence, le problème (7.10) pour (\mathbf{E}_\perp, H_z) , possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$.

7.4.2 Une nouvelle formulation variationnelle pour \mathbf{E}_\perp

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que l'opérateur A_D^ε est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension finie. Considérons $\{\lambda_D^i\}_{i=1}^{n_D}$ une base de $\ker A_N^\varepsilon$ telle que $(\nabla \lambda_D^i, \nabla \lambda_D^j)_\Omega = \delta_{ij}$. Introduisons \mathbf{R}_D tel que $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \ker A_D^\varepsilon \oplus \mathbf{R}_D$. Définissons ensuite l'espace

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mid (\varepsilon \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in \mathbf{R}_D\} \supset \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega).$$

Proposition 7.4.8 *Supposons $\omega \neq 0$.*

1) Si (\mathbf{E}_\perp, H_z) vérifie le problème (7.10) alors \mathbf{E}_\perp est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_\perp \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_\perp \text{rot } \mathbf{v} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega \varepsilon^{-1} J_z \text{rot } \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega). \end{array} \right. \quad (7.32)$$

2) Si \mathbf{E}_\perp vérifie (7.32), le couple $(\mathbf{E}_\perp, H_z) = ((i\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{J}_\perp - \text{rot } H_z), H_z)$ vérifie le problème (7.10).

Comme pour l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, nous pouvons préciser la structure de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$.

Lemme 7.4.9 *Pour $i = 1 \dots n_D$, il existe $\Lambda_D^i \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ tel que $(\varepsilon \Lambda_D^i, \nabla \lambda_D^j)_\Omega = \delta_{ij}$, pour $j = 1 \dots n_D$. On déduit*

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) = \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \oplus \text{vect}(\Lambda_D^i)_{i=1}^{n_D}.$$

On peut alors montrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 7.4.10 *L'espace $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\text{rot } \mathbf{v}\|_\Omega + \sum_{i=1}^{n_D} |\alpha^i|$, où $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n_D}) \in \mathbb{R}^{n_D}$ sont les éléments tels que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n_D} \alpha^i \Lambda_D^i$, définit une norme sur $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)}$.*

Théorème 7.4.11 *L'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_N(0) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ est Fredholm d'indice zéro.*

Corollaire 7.4.12 *Supposons que les paramètres ε , μ et ω soient tels que l'opérateur $A_N^{1/\mu}(\omega) : \mathbf{H}_\#^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\#^1(\Omega)$ du problème pour H_z définisse un isomorphisme. Alors, l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_N(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ du problème pour \mathbf{E}_\perp constitue également un isomorphisme.*

7.5 Illustration sur un cas particulier

Considérons l'exemple de la cavité définie par $\Omega := \{(x, y) \in]-a; b[\times]0; 1[\}, \Omega_1 :=]-a; 0[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 :=]0; b[\times]0; 1[$ avec $a > 0$ et $b > 0$. L'interface Σ est alors égale au segment $\{0\} \times]0; 1[$. Sans perte de généralité, nous supposons $a \geq b$. On traite le cas $a < b$ en échangeant les rôles de Ω_1 et de Ω_2 . Définissons $\varepsilon_i := \varepsilon|_{\Omega_i}$ et $\mu_i := \mu|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$. Nous faisons l'hypothèse que ε_i et μ_i sont des fonctions constantes (non-nulles) sur Ω_i .

D'après les résultats du §2.2.2 du Chapitre 2, nous savons que les opérateurs $A_D^\varepsilon : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $A_N^\varepsilon : \mathbf{H}_\#^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\#^1(\Omega)$ sont Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \neq -1$. Bien sûr, de même, les opérateurs $A_D^\mu : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $A_N^\mu : \mathbf{H}_\#^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\#^1(\Omega)$ sont Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_\mu = \mu_2/\mu_1 \neq -1$. De plus, A_D^ε (resp. A_D^μ) définit un isomorphisme si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$ (resp. $\kappa_\mu \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$).

Pour fixer les idées considérons le cas $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Cette configuration

représente par exemple du vide dans Ω_1 et un métal sous la fréquence plasma dans Ω_2 (cf. explication associée à la Figure 7.1). Intéressons-nous au problème pour le champ (\mathbf{E}_\perp, H_z) .

Supposons $\kappa_\varepsilon \notin \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}$. Dans ce cas, l'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est un isomorphisme. D'après le Théorème 7.4.7, le problème TE (7.10) possède une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible. Le Corollaire 7.4.4 indique que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, le problème (7.30) pour H_z possède une unique solution. On peut alors discrétiser (7.30) pour approcher H_z puis retrouver \mathbf{E}_\perp . Mais il est également possible de discrétiser directement (7.30), posée dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$, pour approcher \mathbf{E}_\perp .

Supposons $\kappa_\varepsilon \in \{-\tanh(n\pi b)/\tanh(n\pi a), n \in \mathbb{N}^*\}$. L'opérateur $A_D^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est Fredholm d'indice zéro avec un noyau de dimension 1. Il en va donc de même pour $A_N^{1/\varepsilon} : H_{\#}^1(\Omega) \rightarrow H_{\#}^1(\Omega)$ d'après le Théorème 7.2.3. Pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il est facile de voir que $A_N^{1/\varepsilon}(\omega)$ est un isomorphisme (car μ est positif sur tout le domaine). Dans ce cas, d'après le Corollaire 7.4.4, le problème TE (7.10) possède une unique solution. Pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut discrétiser (7.30) pour approcher H_z puis reconstruire \mathbf{E}_\perp . Par contre, le problème (7.30), dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$, **n'est pas** bien posé. Pour approcher directement \mathbf{E}_\perp , il faut travailler dans $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ en discrétisant (7.32).

