Mathématiques

Méthodes et exercices

ECE 2^{e} année

Cécile Lardon

Professeur en classe préparatoire
au lycée du Parc à Lyon

Jean-Marie Monier

Professeur en classe préparatoire
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon

DUNOD

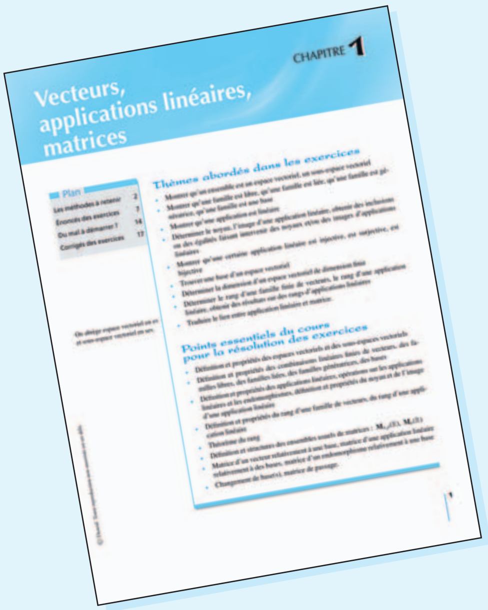
Tout le catalogue sur
www.dunod.com

ÉDITEUR DE SAVOIRS

ISBN 978-2-10-057669-2

Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage



CHAPITRE 1

Vecteurs, applications linéaires, matrices

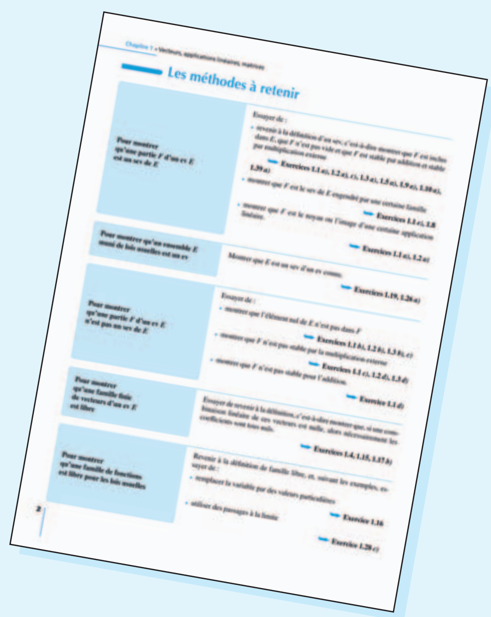
Plan

Thèmes abordés dans les exercices

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.



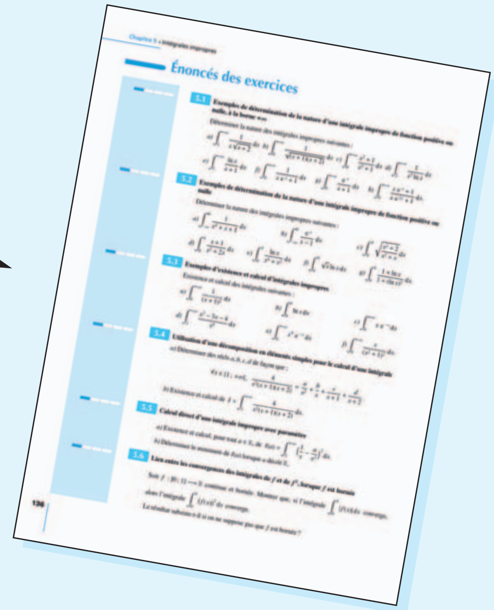
Les méthodes à retenir

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Énoncés des exercices

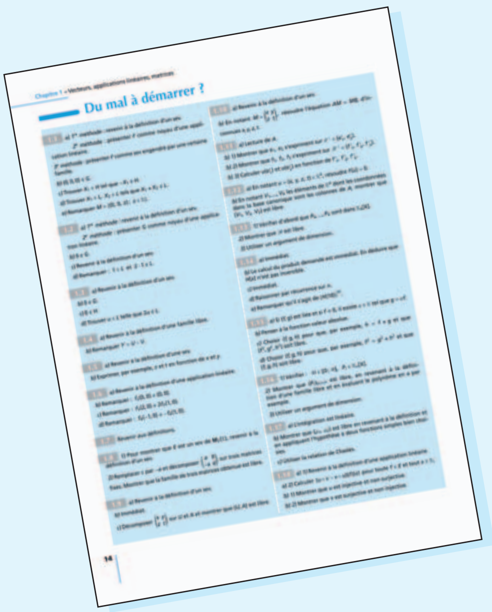
De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Énoncés des exercices

Du mal à démarrer ?

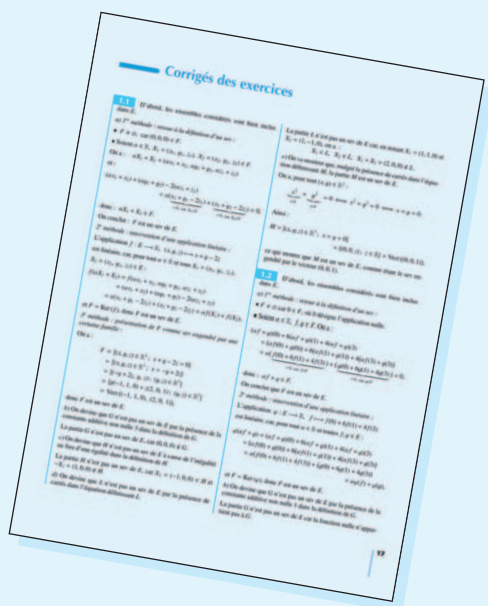
Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Du mal à démarrer ?

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



Corrigés des exercices

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit : Pascal Alessandri, Jean-Philippe Berne, Gérard Bourgin, Frédérique Christin, Jean-paul Christin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, André Laffont, Tewfik Lahcène, Hadrien Larome, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Vecteurs, applications linéaires, matrices

CHAPITRE 1

Plan

On abrège espace vectoriel en ev et sous-espace vectoriel en sev.

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, un sous-espace vectoriel
- Montrer qu'une famille est libre, qu'une famille est liée, qu'une famille est génératrice, qu'une famille est une base
- Montrer qu'une application est linéaire
- Déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire, obtenir des inclusions ou des égalités faisant intervenir des noyaux et/ou des images d'applications linéaires
- Montrer qu'une certaine application linéaire est injective, est surjective, est bijective
- Trouver une base d'un espace vectoriel
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie
- Déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs, le rang d'une application linéaire, obtenir des résultats sur des rangs d'applications linéaires
- Traduire le lien entre application linéaire et matrice.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des espaces vectoriels et des sous-espaces vectoriels
- Définition et propriétés des combinaisons linéaires finies de vecteurs, des familles libres, des familles liées, des familles génératrices, des bases
- Définition et propriétés des applications linéaires, opérations sur les applications linéaires et les endomorphismes, définition et propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire
- Définition et propriétés du rang d'une famille de vecteurs, du rang d'une application linéaire
- Théorème du rang
- Définition et structures des ensembles usuels de matrices : $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$
- Matrice d'un vecteur relativement à une base, matrice d'une application linéaire relativement à des bases, matrice d'un endomorphisme relativement à une base
- Changement de base(s), matrice de passage.

Les méthodes à retenir

Pour montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E	Essayer de : • revenir à la définition d'un sev, c'est-à-dire montrer que F est inclus dans E, que F n'est pas vide et que F est stable par addition et stable par multiplication externe ➥ **Exercices 1.1 *a)*, 1.2 *a), c)*, 1.3 *a)*, 1.5 *a)*, 1.9 *a)*, 1.10 *a)*, 1.39 *a)*** • montrer que F est le sev de E engendré par une certaine famille ➥ **Exercices 1.1 *e)*, 1.8** • montrer que F est le noyau ou l'image d'une certaine application linéaire. ➥ **Exercices 1.1 *a)*, 1.2 *a)***
Pour montrer qu'un ensemble E muni de lois usuelles est un ev	Montrer que E est un sev d'un ev connu. ➥ **Exercices 1.19, 1.26 *a)***
Pour montrer qu'une partie F d'un ev E n'est pas un sev de E	Essayer de : • montrer que l'élément nul de E n'est pas dans F ➥ **Exercices 1.1 *b)*, 1.2 *b)*, 1.3 *b), c)*** • montrer que F n'est pas stable par la multiplication externe ➥ **Exercices 1.1 *c)*, 1.2 *d)*, 1.3 *d)*** • montrer que F n'est pas stable pour l'addition. ➥ **Exercice 1.1 *d)***
Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs d'un ev E est libre	Essayer de revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que, si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, alors nécessairement les coefficients sont tous nuls. ➥ **Exercices 1.4, 1.15, 1.17 *b)***
Pour montrer qu'une famille de fonctions est libre pour les lois usuelles	Revenir à la définition de famille libre, et, suivant les exemples, essayer de : • remplacer la variable par des valeurs particulières ➥ **Exercice 1.16** • utiliser des passages à la limite ➥ **Exercice 1.28 *c)***

(suite)	• utiliser une non-continuité ou une non-dérivabilité ➥ **Exercice 1.28** ***a), b)*** • dériver une ou plusieurs fois, ou primitiver • faire intervenir les degrés s'il s'agit de polynômes • raisonner sur les racines et les ordres de multiplicité s'il s'agit de polynômes • utiliser les particularités des polynômes ; par exemple, si un polynôme s'annule en une infinité de points, alors c'est le polynôme nul. ➥ **Exercice 1.29**
Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs d'un ev E est liée	Essayer de : • revenir à la définition, c'est-à-dire trouver une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle et dont les coefficients ne soient pas tous nuls ➥ **Exercice 1.4** ***b)*** • montrer qu'un des vecteurs se décompose linéairement sur les autres. ➥ **Exercices 1.4** ***b)*****, 1.15 à 1.17** ***c)***
Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs de E est génératrice de E	Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que tout vecteur de E se décompose linéairement sur cette famille. ➥ **Exercices 1.8, 1.9** ***b)*****, 1.10** ***c)*****, 1.25** ***b)***
Pour montrer qu'une famille finie $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs d'un ev E est une base de E	Essayer de : • revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E ➥ **Exercices 1.5** ***b)*****, 1.9, 1.10** ***c)*****, 1.25** ***b)*****, 1.26** ***a)*****, 1.35** ***c),d)*** • montrer que $\mathscr{B}$ est libre et que le cardinal de $\mathscr{B}$ est égal à la dimension de E ➥ **Exercices 1.13, 1.16, 1.26** ***a)*** • montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice de E et que le cardinal de $\mathscr{B}$ est égal à la dimension de E. ➥ **Exercice 1.11** ***b)***
Pour déterminer la dimension d'un ev de dimension finie	Essayer de : • trouver une base finie $\mathscr{B}$ de E, et on a alors $\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B})$ ➥ **Exercices 1.5** ***b)*****, 1.8, 1.9**

(suite)

- présenter E comme noyau ou comme image d'une application linéaire, et calculer sa dimension en utilisant le théorème du rang.

Exercices 1.10 à 1.12

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, où E et F sont des ev

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E,\quad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Exercices 1.6 *a)*, 1.17 *a)*, 1.18 *a)*, 1.25 *a)*, 1.26 *c)*, 1.35 *a)*

- montrer que f s'obtient, par certaines opérations, à partir d'applications linéaires.

Pour manipuler noyau, image, somme, loi externe, composition d'applications linéaires

Revenir aux définitions, avec les notations usuelles :

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in E\ ;\ f(x) = 0\}, \qquad \mathrm{Im}\,(f) = \{y \in F\ ;\ \exists\, x \in E,\ \ y = f(x)\},$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exercices 1.7, 1.18 *a)*

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$

Essayer de :

- revenir à la définition : $\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in E\ ;\ f(x) = 0\}$

Exercice 1.12 *a)*

- obtenir une inclusion relative à $\mathrm{Ker}\,(f)$, et utiliser un argument de dimension, par exemple en utilisant le théorème du rang.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$

Essayer de :

- revenir à la définition : $\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in F\ ;\ \exists\, x \in E,\ \ y = f(x)\}$

Exercice 1.12 *a)*

- obtenir une inclusion relative à $\mathrm{Im}\,(f)$, et utiliser un argument de dimension, par exemple en utilisant le théorème du rang.

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective

Montrer $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$, c'est-à-dire montrer :

$$\forall x \in E,\quad (f(x) = 0 \implies x = 0.)$$

Exercices 1.18 *b)*, 1.19

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est surjective	Montrer $\mathrm{Im}\,(f) = F$, c'est-à-dire montrer : $$\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\quad y = f(x).$$ ➥ **Exercices 1.18 *b)*, 1.19**
Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective	Essayer de : • montrer : $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\,(f) = F$ ➥ **Exercice 1.19** • trouver une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$
Pour relier entre elles les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ où E et F sont des ev de dimensions finies	Utiliser le théorème du rang : $$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(E).$$ ➥ **Exercice 1.37**
Pour effectuer un calcul sur des matrices	• Essayer, autant que possible, de garder une notation globale (une lettre pour une matrice), ne faisant pas intervenir les termes des matrices ➥ **Exercices 1.22 *a)*, 1.24, 1.32 *b),c),d)*** • Sinon, passer aux coefficients des matrices, en particulier si les matrices sont d'ordre petit (deux ou trois), ou si une matrice diagonale ou une matrice triangulaire intervient. ➥ **Exercices 1.10 *b), d)*, 1.14 *a), b)*, 1.21 *a)*, 1.31, 1.32 *a)2)*, 1.34, 1.38**
Pour effectuer un calcul sur des matrices avec paramètres	Essayer de décomposer linéairement ces matrices sur des matrices plus simples, sans paramètre, si c'est possible. ➥ **Exercice 1.14**
Pour calculer les puissances A^k $(k \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z})$ d'une matrice carrée A	• Dans certains exemples simples, calculer A^2, A^3, et essayer de conjecturer une formule pour A^k, que l'on montrera par récurrence sur k, ou se ramener à des suites réelles classiques ➥ **Exercice 1.21 *b)*** • Essayer de décomposer A en somme d'une matrice $\alpha\,\mathrm{I}_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et d'une matrice simple, souvent une matrice nilpotente, et utiliser la formule du binôme de Newton

(suite)

- La formule obtenue pour A^k lorsque $k \in \mathbb{N}$ est souvent aussi valable pour $k \in \mathbb{Z}$, lorsque A est inversible.

Pour montrer qu'une matrice carrée $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et, éventuellement, calculer son inverse

Essayer de :

- appliquer la méthode du pivot de Gauss, pour une matrice carrée assez simple donnée sous forme d'un tableau
- résoudre le système d'équations obtenu en exprimant les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de A en fonction des colonnes $\mathrm{E}_1, \ldots \mathrm{E}_n$ formant la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en considérant $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ comme les inconnues
- former une équation simple sur A, puis isoler le terme en I_n

➥ **Exercice 1.23**

- associer à la matrice carrée A un système linéaire $AX = Y$, où X, Y sont des matrices-colonnes et résoudre ce système en considérant que l'inconnue est X
- conjecturer la forme B de la matrice inverse de A, et vérifier que celle-ci convient, en calculant le produit AB (ou BA)
- résoudre l'équation $AB = \mathrm{I}_n$ (ou $BA = \mathrm{I}_n$) où B est une matrice inconnue, d'une forme particulière.

Se rappeler que toute matrice triangulaire à termes diagonaux tous non nuls est inversible.

Pour déterminer la matrice A d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et une base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de F

Pour tout $j \in [\![1 ; p]\!]$, la colonne numéro j de A est formée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$ de F.

➥ **Exercices 1.11 *b)*, 1.20, 1.26 *b), c)*, 1.35 *b)***

Pour déterminer le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ où E, F sont des ev de dimensions finies

Essayer de :

- appliquer la définition : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

➥ **Exercice 1.12 *b)***

- utiliser le théorème du rang : $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$

➥ **Exercice 1.12 *b)***

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme où E, F sont des ev de dimensions finies

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que f (qui est déjà linéaire) est injective et surjective

➥ **Exercice 1.19**

(suite)

- trouver une application (linéaire) $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

- montrer qu'une matrice représentant f est inversible.

Énoncés des exercices

1.1 Une partie de $\mathbb{R}^3$ est-elle un sev ou non ?

Est-ce que les parties suivantes de $E = \mathbb{R}^3$ sont des sev de E :

a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x + y - 2z = 0\}$

b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x - y + 2z = 3\}$

c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x + y - z \leqslant 0\}$

d) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$

e) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x^2 + y^2 = 0\}$?

1.2 Une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-elle un sev ou non ?

Est-ce que les parties suivantes de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sont des sev de E :

a) $F = \{f \in E \,;\; f(0) + 6f(1) + 4f(3) = 0\}$

b) $G = \{f \in E \,;\; f(0) + f(2) = 1\}$

c) $H = \{f \in E \,;\; \forall x \in \mathbb{R},\; f(1 - x) = f(x)\}$

d) $L = \{f \in E \,;\; \forall x \in \mathbb{R},\; (f(x))^3 = f(x)\}$?

1.3 Une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-elle un sev ou non ?

Est-ce que les parties suivantes de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites réelles, sont des sev de E :

a) $F = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,;\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$

b) $G = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,;\; u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0\}$

c) $H = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,;\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = 2u_n - 1\}$

d) $L = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,;\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} - 1\}$?

1.4 Exemples simples de famille libre, famille liée

On note, dans $\mathbb{R}^4$: $U = (1, 1, 0, 0)$, $V = (1, 0, 1, 0)$, $X = (1, 1, 1, 1)$, $Y = (0, 1, -1, 0)$.

a) La famille (U, V, X) est-elle libre ou est-elle liée ?

b) La famille (U, V, Y) est-elle libre ou est-elle liée ?

1.5 Détermination d'une base d'un sev donné par un système d'équations

On note $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\ 3x - 4y + z - t = 0 \text{ et } 2x - 3y + 2z + t = 0\}$.

a) Vérifier que F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer une base de F et la dimension de F.

1.6 Une application donnée est-elle linéaire, non linéaire ?

Est-ce que les applications suivantes, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, sont linéaires :

a) $f_1 : (x, y) \longmapsto (2x - 3y,\ x + 5y)$

b) $f_2 : (x, y) \longmapsto (x + y + 1,\ x - y - 2)$

c) $f_3 : (x, y) \longmapsto (x^2 + y,\ y^2 + x)$

d) $f_4 : (x, y) \longmapsto (\mathrm{e}^{x+y} - 1,\ x - y)$?

1.7 Noyau et image de $g \circ f$

Soient E, F, G des ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrer : *a)* $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ *b)* $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.

1.8 Exemple de sev de matrices

On note $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \,;\ a + c = 0 \right\}$.

Montrer que E est un sev de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer une base de E et la dimension de E.

1.9 Calculs sur des matrices carrées d'ordre 2, d'après EML 2005

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on note $E = \{M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \,;\ AM = MD\}$.

a) Vérifier que E est un sev de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer : $M \in E \iff (z = 0 \text{ et } t = y)$.

c) Établir que (U, A) est une base de E.

d) Calculer le produit UA. Est-ce que $UA \in E$?

1.10 Sev de matrices carrées

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{E} = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \,;\ AM = MB\}$.

Montrer que $\mathscr{E}$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) On prend ici : $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathscr{E}$, une base de $\mathscr{E}$, la dimension de $\mathscr{E}$.

1.11 Exemple de changement de bases pour une application linéaire

Soient E un ev de dimension 2, $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, F un ev de dimension 3, $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, et u l'application linéaire de E dans F représentée par A dans les bases $\mathscr{E}$ de E et $\mathscr{F}$ de F.

a) Exprimer $u(e_1)$ et $u(e_2)$ en fonction de $f_1,\ f_2,\ f_3$.

b) On note $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_1 + e_2,\ \mathscr{E}' = (e'_1, e'_2),\ f'_1 = f_1 + f_2,\ f'_2 = f_1 + f_3,$

$f'_3 = f_2 + f_3,\ \mathscr{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$. Montrer que $\mathscr{E}'$ est une base de E et que $\mathscr{F}'$ est une base de F, et déterminer la matrice A' de u dans les bases $\mathscr{E}'$ de E et $\mathscr{F}'$ de F.

1.12 Exemple de détermination d'un noyau, d'une image, d'un rang

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire représentée par la matrice A dans les bases canoniques.

a) Déterminer un système d'équations de $\operatorname{Ker}(f)$, une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

1.13 Exemple de base de $\mathbb{R}_4[X]$

On note, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_0 = 1,\quad P_1 = X,\quad P_2 = (X-1)X(X+1),\quad P_3 = X^2(X+1),\quad P_4 = (X-1)X(X+1)^2.$$

Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

1.14 Calcul sur des matrices carrées d'ordre 3, d'après ESC 2007

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H(x) = A + xB$.

a) Calculer $A^2,\ B^2,\ AB,\ BA$. Que remarque-t-on ?

b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le produit $H(x)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et en déduire que $H(x)$ n'est pas inversible.

c) Montrer : $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad H(x)H(y) = H(xy).$

d) En déduire : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (H(x))^n = H(x^n).$

e) Calculer $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 10 & 30 & -20 \\ 9 & 27 & -17 \end{pmatrix}^{10}$.

1.15 Famille de fonctions, famille de leurs carrés

Soient $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $f^2 = f \cdot f,\ g^2 = g \cdot g,\ h^2 = h \cdot h$.

a) Montrer que, si (f, g) est liée, alors (f^2, g^2) est liée.

b) Donner un exemple de (f, g) dans lequel : (f, g) est libre et (f^2, g^2) est liée.

c) Donner un exemple de (f, g, h) dans lequel : (f, g, h) est liée et (f^2, g^2, h^2) est libre.

d) Donner un exemple de (f, g, h) dans lequel : (f, g, h) est libre et (f^2, g^2, h^2) est liée.

1.16 Une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

On note, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$: $P_i = (X-a)^i(X-b)^{n-i}$.

Montrer que la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.17 Liberté ou liaison d'une famille de deux ou trois applications linéaires

On note $E = C([-1\,;\,1]\,;\,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour toute $f \in E$ par :

$$\varphi_1(f) = \int_{-1}^{0} f, \qquad \varphi_2(f) = \int_{0}^{1} f, \qquad \varphi_3(f) = \int_{-1}^{1} f.$$

a) Vérifier que φ_1, φ_2, φ_3 sont linéaires.

b) Est-ce que $(\varphi_1,\ \varphi_2)$ est libre ?

c) Est-ce que $(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ est libre ?

1.18 Exemple d'endomorphismes u, v vérifiant $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u, v : E \longrightarrow E$ les applications définies, pour toute $f \in E$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (\ u(f)(x) = xf(x), \qquad v(f)(x) = -f'(x).\ )$$

a) Vérifier : $u, v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

b) Est-ce que u (resp. v) est injective ? surjective ? bijective ?

1.19 Exemple d'automorphisme

On note $E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\, P(0) = 0\}$ et $f : E \longrightarrow E,\ \ P \longmapsto XP'$. Montrer : $f \in \mathcal{GL}(E)$.

1.20 Endomorphisme nilpotent en dimension 3

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.21 Calcul matriciel, suites récurrentes linéaires d'ordre 2, d'après HEC 2009

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Calculer A^2 et A^3, exprimer A^3 comme combinaison linéaire de A et A^2, et montrer que la famille (A, A^2) est libre.

b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $A^n = u_n A + v_n A^2$, et exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de u_n, puis celle de v_n.

1.22 Somme de deux inverses, somme de trois inverses de matrices carrées inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\qquad \forall (A, B) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^2,\ \ A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.

b) Y a-t-il une formule analogue pour trois matrices, c'est-à-dire est-ce que :

$$\forall (A, B, C) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^3,\ \exists (U, V) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \ A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = U(A + B + C)V\ ?$$

1.23 Inversibilité et calcul de l'inverse par utilisation d'une équation matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$.

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.

1.24 Commutation par utilisation d'un inverse

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB = 2A + 3B$.

a) Montrer : $(A - 3\,\mathrm{I}_n)(B - 2\,\mathrm{I}_n) = 6\,\mathrm{I}_n$.

b) En déduire : $AB = BA$.

1.25 Exemple de détermination d'un noyau, d'une image

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ \ M \longmapsto MA$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b) 1) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

1.26 Aspects linéaire et matriciel des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, à coefficients constants et sans second membre

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

On note a, b les éléments de E définis par : $(a_0 = 1,\ a_1 = 0)$, $(b_0 = 0,\ b_1 = 1)$,

et on note : $r = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que E est un ev et que (a, b) et (r, s) sont deux bases de E.

b) Déterminer la matrice M de la famille (r, s) dans la base (a, b) de E, et calculer M^{-1}.

c) Montrer que l'application f qui, à tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, est un endomorphisme de E, et préciser la matrice de f dans la base (a, b) de E, et la matrice de f dans la base (r, s) de E.

1.27 Réunion de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un ev, A, B des sev de E tels que : $A \cup B = E$. Montrer : $A = E$ ou $B = E$.

1.28 Familles libres dans un espace de fonctions

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 < ... < a_n$. Montrer que la famille d'applications $(f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre dans les exemples suivants :

a) $f_{a_i} : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant a_i \\ 1 \text{ si } x > a_i \end{cases}$ *b)* $f_{a_i} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a_i \\ x - a_i & \text{si } x > a_i \end{cases}$ *c)* $f_{a_i} : x \longmapsto \mathrm{e}^{a_i x}$.

1.29 Exemple de famille libre dans un espace de fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I et non constante. On note : $f^0 = 1$, $f^1 = f$, $f^2 = f \cdot f, ...$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

1.30 Inverse à gauche, inverse à droite, pour une matrice rectangulaire, d'après HEC 2009

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Existe-t-il $B \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que : $AB = \mathrm{I}_3$?

b) Existe-t-il $C \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que : $CA = \mathrm{I}_2$?

1.31 Commutant d'une matrice diagonale à termes diagonaux deux à deux distincts

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$.

Montrer que le commutant de la matrice D, c'est-à-dire l'ensemble $\mathrm{C}(D) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})\,;\ AD = DA\}$, est égal à l'ensemble $\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1.32 Matrices nilpotentes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

a) 1) Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible.

2) Les matrices suivantes de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ sont-elles nilpotentes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ ?$$

b) Soient $A, M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si A est nilpotente et $AM = MA$, alors AM est nilpotente.

c) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si A est nilpotente, alors $\mathrm{I}_n - A$ est inversible et exprimer $(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$.

d) Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si A et B sont nilpotentes et $AB = BA$, alors $A + B$ est nilpotente.

1.33 Majoration du rang d'une composée de deux applications linéaires

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $b \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$.

Montrer : $\operatorname{rg}(a \circ b) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg}(a), \operatorname{rg}(b))$.

1.34 Matrices diagonales à termes diagonaux deux à deux distincts

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$.

Montrer que $(D^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

1.35 Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, et $\varphi : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto AM - MB$.

a) Vérifier que φ est linéaire.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (\mathrm{I}_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice Φ de φ dans $\mathscr{B}$.

c) Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

d) Déterminer la dimension et une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

1.36 Endomorphismes transformant tout vecteur en un vecteur colinéaire

Soient E un ev, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x,\ f(x))$ est liée.

Démontrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E,\quad f(x) = \lambda x \quad \text{(où } \lambda \text{ ne dépend pas de } x\text{)}.$$

1.37 Une inégalité sur des dimensions

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f+g)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) + \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)).$$

1.38 Matrices inversibles à termes $\geqslant 0$ et dont l'inverse est à termes $\geqslant 0$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que les termes de A et les termes de A^{-1} sont tous $\geqslant 0$.

Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1\,;\,n]\!]$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que :

$$A = (\delta_{i\sigma(j)}\alpha_j)_{i,j},\ \text{ où } \delta \text{ désigne le symbole de Kronecker : } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}.$$

1.39 Commutants de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute partie $\mathscr{E}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle commutant de $\mathscr{E}$ la partie $\mathrm{C}(\mathscr{E})$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toute matrice de $\mathscr{E}$:

$$\mathrm{C}(\mathscr{E}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})\,;\ \forall M \in \mathscr{E},\quad AM = MA\}.$$

a) Vérifier que, pour toute partie $\mathscr{E}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{C}(\mathscr{E})$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrer : $\mathrm{C}(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n$, où on a noté $\mathbb{R}\,\mathrm{I}_n = \{a\,\mathrm{I}_n\,;\ a \in \mathbb{R}\}$.

À cet effet, on pourra faire intervenir les matrices élémentaires E_{ij}, $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, où E_{ij} est la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j, qui est égal à 1.

c) 1) Démontrer : $\quad \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (P, Q) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^2,\quad M = P + Q.$

2) En déduire : $\mathrm{C}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n$.

Du mal à démarrer ?

1.1 *a) 1re méthode :* revenir à la définition d'un sev.

2e méthode : présenter F comme noyau d'une application linéaire.

3e méthode : présenter F comme sev engendré par une certaine famille.

b) $(0, 0, 0) \notin G$.

c) Trouver $X_1 \in H$ tel que $-X_1 \notin H$.

d) Trouver $X_1 \in L$, $X_2 \in L$ tels que $X_1 + X_2 \notin L$.

e) Remarquer $M = \{(0, 0, z)\,;\ z \in \mathbb{R}\}$.

1.2 *a) 1re méthode :* revenir à la définition d'un sev.

2e méthode : présenter G comme noyau d'une application linéaire.

b) $0 \notin G$.

c) Revenir à la définition d'un sev.

d) Remarquer : $1 \in L$ et $2 \cdot 1 \notin L$.

1.3 *a)* Revenir à la définition d'un sev.

b) $0 \notin G$.

c) $0 \notin H$.

d) Trouver $u \in L$ telle que $2u \notin L$.

1.4 *a)* Revenir à la définition d'une famille libre.

b) Remarquer $Y = U - V$.

1.5 *a)* Revenir à la définition d'une sev.

b) Exprimer, par exemple, z et t en fonction de x et y.

1.6 *a)* Revenir à la définition d'une application linéaire.

b) Remarquer : $f_2(0, 0) \neq (0, 0)$.

c) Remarquer : $f_3(2, 0) \neq 2f_3(1, 0)$.

d) Remarquer : $f_4(-1, 0) \neq -f_4(1, 0)$.

1.7 Revenir aux définitions.

1.8 *1)* Pour montrer que E est un sev de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, revenir à la définition d'un sev.

2) Remplacer c par $-a$ et décomposer $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & d \end{pmatrix}$ sur trois matrices fixes. Montrer que la famille de trois matrices obtenue est libre.

1.9 *a)* Revenir à la définition d'un sev.

b) Immédiat.

c) Décomposer $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sur U et A et montrer que (U, A) est libre.

1.10 *a)* Revenir à la définition d'un sev.

b) En notant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, résoudre l'équation $AM = MB$, d'inconnues x, y, z, t.

1.11 *a)* Lecture de A.

b) 1) Montrer que e_1, e_2 s'expriment sur $\mathscr{E}' = (e'_1, e'_2)$.

b) 2) Montrer que f_1, f_2, f_3 s'expriment sur $\mathscr{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$.

b) 3) Calculer $u(e'_1)$ et $u(e'_2)$ en fonction de f'_1, f'_2, f'_3.

1.12 *a)* En notant $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, résoudre $f(u) = 0$.

b) En notant $V_1, \dots, V_4$ les éléments de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées dans la base canonique sont les colonnes de A, montrer que (V_1, V_2, V_3) est libre.

1.13 *1)* Vérifier d'abord que $P_0, \dots, P_4$ sont dans $\mathbb{R}_4[X]$.

2) Montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

3) Utiliser un argument de dimension.

1.14 *a)* Immédiat.

b) Le calcul du produit demandé est immédiat. En déduire que $H(x)$ n'est pas inversible.

c) Immédiat.

d) Raisonner par récurrence sur n.

e) Remarquer qu'il s'agit de $(H(10))^{10}$.

1.15 *a)* Si (f, g) est liée et si $f \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g = \alpha f$.

b) Penser à la fonction valeur absolue.

c) Choisir (f, g, h) pour que, par exemple, $h = f + g$ et que (f^2, g^2, h^2) soit libre.

d) Choisir (f, g, h) pour que, par exemple, $f^2 = g^2 + h^2$ et que (f, g, h) soit libre.

1.16 *1)* Vérifier : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!],\ P_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, en revenant à la définition d'une famille libre et en évaluant le polynôme en a par exemple.

3) Utiliser un argument de dimension.

1.17 *a)* L'intégration est linéaire.

b) Montrer que (φ_1, φ_2) est libre en revenant à la définition et en appliquant l'hypothèse à deux fonctions simples bien choisies.

c) Utiliser la relation de Chasles.

1.18 *a) 1)* Revenir à la définition d'une application linéaire.

a) 2) Calculer $(u \circ v - v \circ u)(f)(x)$ pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

b) 1) Montrer que u est injective et non surjective.

b) 2) Montrer que v est surjective et non injective.

1.19 *1)* Vérifier que E est bien un ev.

2) Vérifier que f est linéaire.

3) Vérifier que f va bien de E dans E.

4) Montrer que f est injectif, en utilisant $\mathrm{Ker}(f)$.

5) Montrer que f est surjectif, en construisant, pour $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \in E$, un polynôme P tel que $XP' = Q$.

1.20 Noter qu'il existe $e_1 \in E$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$, et considérer $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2)$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et que $\mathscr{B}$ convient.

1.21 *a)* Immédiat. Obtenir : $A^3 = 4A + 2A^2$.

b) Existence : raisonner par récurrence sur n.

Unicité : remarquer que (A, A^2) est libre.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants et sans second membre, on sait donc calculer son terme général.

1.22 *a)* Développer le second membre.

b) Trouver $A, B, C \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad A + B + C = 0.$$

1.23 Isoler I_n et mettre A en facteur.

1.24 *a)* Immédiat.

b) Faire apparaître un produit égal à I_n, le produit en sens inverse est alors aussi égal à I_n.

1.25 *a)* Revenir à la définition d'un endomorphisme.

b) 1) Noter $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et résoudre $f(M) = 0$.

b) 2) Pour $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, calculer $f(M)$ et décomposer linéairement $f(M)$ sur des matrices fixes. Voir enfin si celles-ci forment une famille libre.

1.26 *a) 1)* Montrer que E est un sev de l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites réelles.

a) 2) Montrer que la famille (a, b) est libre et génératrice de E.

a) 3) Vérifier $(r, s) \in E^2$, montrer que (r, s) est libre, puis utiliser un argument de dimension.

b) Exprimer r et s en fonction de a et b.

c) 1) Vérifier f va bien de E dans E et est linéaire.

c) 2) Calculer $f(a)$ et $f(b)$ en fonction de a, b.

c) 3) Calculer $f(r)$ et $f(s)$ en fonction de r, s.

1.27 Raisonner par l'absurde, d'où l'existence de $(a, b) \in E^2$ tel que $a \notin A$ et $b \notin B$. Considérer $a + b$.

1.28 Revenir à la définition d'une famille libre.

a) Remarquer que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, f_{a_i} est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$ et n'est pas continue en a_i.

b) Remarquer que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, f_{a_i} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$ et n'est pas dérivable en a_i.

c) Multiplier par $e^{-a_n x}$, puis faire tendre x vers $+\infty$.

1.29 Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$.

Considérer le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et montrer que P s'annule en une infinité de points, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f.

1.30 *a)* Supposer qu'il existe $B \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{I}_3$. Considérer les applications linéaires a et b représentées canoniquement par A et B respectivement, montrer $\mathrm{rg}\,(a \circ b) \leqslant \mathrm{rg}\,(a)$ et déduire une contradiction.

Voir aussi l'exercice 1.33.

b) Construire une matrice C qui convienne, par exemple en considérant $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et en formant C à l'aide de A'^{-1} et d'une colonne nulle.

1.31 Un sens est évident.

Réciproquement, si $A \in \mathrm{C}(D)$, traduire $AD = DA$ en passant par les éléments.

1.32 *a) 1)* Raisonner par l'absurde.

a) 2) Immédiat.

b) Calculer $(AM)^k = (AM) \cdots (AM)$, en utilisant $AM = MA$.

c) Utiliser la formule relative à une sommation géométrique.

d) Utiliser la formule du binôme de Newton.

1.33 *1)* Montrer : $\mathrm{Im}\,(a \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(a)$ et passer aux dimensions.

Déduire : $\mathrm{rg}\,(a \circ b) \leqslant \mathrm{rg}\,(a)$.

2) Utiliser les noyaux et le théorème du rang.

1.34 • Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D^k = 0$. En notant $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, déduire : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(d_i) = 0$, puis $P = 0$. Conclure que $(D^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

• Utiliser un argument de dimension pour obtenir que $(D^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.

1.35 *a)* Revenir à la définition de la linéarité.

b) 1) • Montrer que (I_2, A, B, AB) est libre en revenant à la définition d'une famille libre.

• Utiliser un argument de dimension pour déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b) 2) Calculer les images de I_2, A, $B\,AB$ par φ et décomposer linéairement ces images sur $\mathscr{B}$.

c) d) 1^re^ méthode : utiliser la matrice Φ.

2^e^ méthode : revenir à la définition de φ.

1.36 Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Remarquer que, si $x \neq 0$, λ_x est unique. Il s'agit de montrer que λ_x ne dépend pas de x. Pour montrer $\lambda_x = \lambda_y$, séparer en deux cas selon que (x, y) est libre ou liée. Dans le cas libre, considérer $x + y$.

1.37 Considérer l'application $u : \mathrm{Ker}\,(f+g) \longrightarrow F,\ \ x \longmapsto f(x)$.

Appliquer le théorème du rang à u.

Montrer : $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$.

1.38 Noter $A = (a_{ij})_{ij}$, $A^{-1} = (b_{ij})_{ij}$ et traduire $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ en passant aux éléments.

1.39 *a)* Revenir à la définition d'un sev.

b) Une inclusion est évidente.

Réciproquement, soit $A \in \mathrm{C}(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))$. Appliquer l'hypothèse aux matrices élémentaires E_{ij}.

c) 1) Penser à décomposer M en somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

c) 2) Utiliser *c) 1)*.

Corrigés des exercices

1.1 D'abord, les ensembles considérés sont bien inclus dans E.

a) 1re méthode : retour à la définition d'un sev :

- $F \neq \varnothing$, car $(0,0,0) \in F$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$.

On a : $\alpha X_1 + X_2 = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)$

et :

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) - 2(\alpha z_1 + z_2)\\ = \alpha(\underbrace{x_1 + y_1 - 2z_1}_{=0,\ \text{car } X_1 \in F}) + (\underbrace{x_2 + y_2 - 2z_2}_{=0,\ \text{car } X_2 \in F}) = 0,\end{aligned}$$

donc : $\alpha X_1 + X_2 \in F$.

On conclut : F est un sev de E.

2e méthode : intervention d'une application linéaire :

L'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x + y - 2z$

est linéaire, car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E$:

$$\begin{aligned}f(\alpha X_1 + X_2) &= f(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)\\ &= (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) - 2(\alpha z_1 + z_2)\\ &= \alpha(x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2) = \alpha f(X_1) + f(X_2),\end{aligned}$$

et $F = \operatorname{Ker}(f)$, donc F est un sev de E.

3e méthode : présentation de F comme sev engendré par une certaine famille :

On a :

$$\begin{aligned}F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + y - 2z = 0\}\\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x = -y + 2z\}\\ &= \{(-y + 2z,\ y,\ z) ;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{y(-1,\ 1,\ 0) + z(2,\ 0,\ 1) ;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \operatorname{Vect}((-1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)),\end{aligned}$$

donc F est un sev de E.

b) On devine que G n'est pas un sev de E par la présence de la constante additive non nulle 3 dans la définition de G.

La partie G n'est pas un sev de E, car $(0,0,0) \notin G$.

c) On devine que H n'est pas un sev de E à cause de l'inégalité au lieu d'une égalité dans la définition de H.

La partie H n'est pas un sev de E, car $X_1 = (-1,0,0) \in H$ et $-X_1 = (1,0,0) \notin H$.

d) On devine que L n'est pas un sev de E par la présence de carrés dans l'équation définissant L.

La partie L n'est pas un sev de E car, en notant $X_1 = (1,1,0)$ et $X_2 = (1,-1,0)$, on a :

$$X_1 \in L,\ \ X_2 \in L,\ \ X_1 + X_2 = (2,0,0) \notin L.$$

e) On va montrer que, malgré la présence de carrés dans l'équation définissant M, la partie M est un sev de E.

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{y^2}_{\geqslant 0} = 0 \iff x^2 = y^2 = 0 \iff x = y = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x = y = 0\}\\ &= \{(0,0,z) ;\ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((0,0,1)),\end{aligned}$$

ce qui montre que M est un sev de E, comme étant le sev engendré par le vecteur $(0,0,1)$.

1.2 D'abord, les ensembles considérés sont bien inclus dans E.

a) 1re méthode : retour à la définition d'un sev :

- $F \neq \varnothing$ car $0 \in F$, où 0 désigne l'application nulle.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in F$. On a :

$$\begin{aligned}&(\alpha f + g)(0) + 6(\alpha f + g)(1) + 4(\alpha f + g)(3)\\ &= (\alpha f(0) + g(0)) + 6(\alpha f(1) + g(1)) + 4(\alpha f(3) + g(3))\\ &= \alpha(\underbrace{f(0) + 6f(1) + 4f(3)}_{=0,\ \text{car } f \in F}) + (\underbrace{g(0) + 6g(1) + 4g(3)}_{=0,\ \text{car } g \in F}) = 0,\end{aligned}$$

donc : $\alpha f + g \in F$.

On conclut que F est un sev de E.

2e méthode : intervention d'une application linéaire :

L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f \longmapsto f(0) + 6f(1) + 4f(3)$

est linéaire, car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)(0) + 6(\alpha f + g)(1) + 4(\alpha f + g)(3)\\ &= (\alpha f(0) + g(0)) + 6(\alpha f(1) + g(1)) + 4(\alpha f(3) + g(3))\\ &= \alpha(f(0) + 6f(1) + 4f(3)) + (g(0) + 6g(1) + 4g(3))\\ &= \alpha\varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

et $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$, donc F est un sev de E.

b) On devine que G n'est pas un sev de E par la présence de la constante additive non nulle 1 dans la définition de G.

La partie G n'est pas un sev de E car la fonction nulle n'appartient pas à G.

c) • $H \neq \varnothing$ car $0 \in H$, où 0 désigne l'application nulle.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in H$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(1-x) &= \alpha f(1-x) + g(1-x)\\ &= \alpha f(x) + g(x) = (\alpha f + g)(x),\end{aligned}$$

donc $\alpha f + g \in H$.

On conclut : H est un sev de E.

d) On devine que L n'est pas un sev de E par la présence d'un cube dans la définition de L.

La partie L n'est pas un sev de E car $\widetilde{1} \in L$ et $2 \cdot \widetilde{1} = \widetilde{2} \notin L$, où $\widetilde{1}$ et $\widetilde{2}$ désignent les applications constantes égales à 1 et 2 respectivement.

1.3

D'abord, les ensembles considérés sont bien inclus dans E.

a) • $F \neq \varnothing$ car $0 \in F$, où 0 désigne la suite nulle.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&(\alpha u + v)_{n+2} = \alpha u_{n+2} + v_{n+2}\\ &= \alpha(3u_{n+1} - 2u_n) + (3v_{n+1} - 2v_n)\\ &= 3(\alpha u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(\alpha u_n + v_n)\\ &= 3(\alpha u + v)_{n+1} - 2(\alpha u + v)_n\end{aligned}$$

donc : $\alpha u + v \in F$.

On conclut : F est un sev de E.

b) On devine que G n'est pas un sev de E par la présence de la constante additive non nulle 1 dans la définition de G.

La partie G n'est pas un sev car la suite nulle n'appartient pas à G.

c) On devine que H n'est pas un sev de E par la présence de la constante additive non nulle -1 dans la définition de H.

La partie H n'est pas un sev de E, car car la suite nulle n'appartient pas à H.

d) On devine que L n'est pas un sev de E par la présence d'un carré dans la définition de L.

Considérons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} - 1.$$

Il est clair que : $u \in L$.

Considérons la suite $v = 2u = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $v_0 = 2u_0 = 2$, $v_1 = 2u_1 = 2(\sqrt{u_0^2 + 1} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1)$

et $\sqrt{1 + v_0^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$, donc $v_1 \neq \sqrt{1 + v_0^2} - 1$.

Ainsi : $v \notin L$.

On conclut : L n'est pas un sev de E.

1.4

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}&aU + bV + cX = 0\\ &\iff a(1,1,0,0) + b(1,0,1,0) + c(1,1,1,1) = (0,0,0,0)\\ &\iff (a+b+c,\ a+c,\ b+c,\ c) = (0,0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} a+b+c = 0\\ a+c = 0\\ b+c = 0\\ c = 0\end{cases} \iff \begin{cases} c = 0\\ a = 0\\ b = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

On conclut : (U, V, X) est libre.

b) On remarque que $Y = U - V$, donc : (U, V, Y) est liée.

1.5

a) • Il est clair que $F \subset \mathbb{R}^4$ et $(0,0,0,0) \in F$.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z, t)$, $X' = (x', y', z', t') \in F$.

On a alors :

$$\begin{aligned}&3(\alpha x + x') - 4(\alpha y + y') + (\alpha z + z') - (\alpha t + t')\\ &= \alpha\underbrace{(3x - 4y + z - t)}_{=0} + \underbrace{(3x' - 4y' + z' - t')}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

et, de même :

$$\begin{aligned}&2(\alpha x + x') - 3(\alpha y + y') + 2(\alpha z + z') + (\alpha t + t')\\ &= \alpha(2x - 3y + 2z + t) + (2x' - 3y' + 2z' + t') = 0,\end{aligned}$$

d'où : $\alpha X + X' \in F$.

On conclut que F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

b) Essayons d'exprimer z et t, par exemple, en fonction de x et y. On a, pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}X \in F &\iff \begin{cases} 3x - 4y + z - t = 0\\ 2x - 3y + 2z + t = 0\end{cases} \iff \begin{cases} z - t = -3x + 4y\\ 2z + t = -2x + 3y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 3z = -5x + 7y\\ 3t = 4x - 5y\end{cases} \iff \begin{cases} z = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}y\\ t = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y.\end{cases}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}F &= \left\{\left(x,\ y,\ -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}y,\ \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y\right);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{x\left(1,\ 0,\ -\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right) + y\left(0,\ 1,\ \frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}\right);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{\frac{x}{3}\underbrace{(3,\ 0,\ -5,\ 4)}_{\text{noté } U} + \frac{y}{3}\underbrace{(0,\ 3,\ 7,\ -5)}_{\text{noté } V};\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\,(U, V).\end{aligned}$$

Ainsi, (U, V) engendre F.

La famille (U, V) est libre car, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$xU + yV = 0$$

$$\iff (3x,\ 0,\ -5x,\ 4x) + (0,\ 3y,\ 7y,\ -5y) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\iff (3x = 0,\ \ 3y = 0,\ \ -5x + 7y = 0,\ \ 4x - 5y = 0)$$

$$\iff x = y = 0.$$

Finalement, une base de F est (U, V), avec les notations précédentes, et : $\dim(F) = 2$.

1.6

a) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $X_1 = (x_1,\ y_1)$, $X_2 = (x_2,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_1(\alpha X_1 + X_2) = f_1(\alpha x_1 + x_2,\ \alpha y_1 + y_2)$$

$$= (2(\alpha x_1 + x_2) - 3(\alpha y_1 + y_2),\ (\alpha x_1 + x_2) + 5(\alpha y_1 + y_2))$$

$$= \alpha(2x_1 - 3y_1,\ x_1 + 5y_1) + (2x_2 - 3y_2,\ x_2 + 5y_2)$$

$$= \alpha f_1(X_1) + f_1(X_2),$$

donc : f_1 est linéaire.

b) On devine que f_2 n'est pas linéaire par la présence des constantes additives non nulles 1 et -2 dans la définition de f_2.

Puisque $f_2(0,0) = (1,-2) \neq (0,0)$, f_2 n'est pas linéaire.

c) On devine que f_3 n'est pas linéaire par la présence de carrés dans la définition de f_3.

On a $f_3(1,0) = (1,1)$ et $f_3(2(1,0)) = f_3(2,0) = (4,2) \neq 2(1,1)$, donc f_3 n'est pas linéaire.

d) On devine que f_4 n'est pas linéaire par la présence d'une exponentielle dans la définition de f_4.

On a $f_4(1,0) = (\mathrm{e} - 1, 1)$

et $f_4(-(1,0)) = f_4(-1,0) = (\mathrm{e}^{-1} - 1, -1) \neq -(\mathrm{e} - 1, 1)$,

donc f_4 n'est pas linéaire.

1.7

a) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

On a alors : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$,

donc : $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

b) Soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Il existe alors $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$ et on a :

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in \operatorname{Im}(g).$$

Ceci montre : $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.

1.8

1) • $E \subset \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$:

$$\alpha M + M' = \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$$

et : $\quad (\alpha a + a') + (\alpha c + c') = \alpha(\underbrace{a + c}_{=0}) + (\underbrace{a' + c'}_{=0}) = 0,$

donc : $\alpha M + M' \in E$.

2) On a : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & d \end{pmatrix} ;\ (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } A} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } B} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} ;\ (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \operatorname{Vect}(A,\ B,\ D)$,

donc : (A, B, D) engendre E.

De plus, la famille $(A,\ B,\ D)$ est libre car, pour tout $(a,b,d) \in \mathbb{R}^3$:

$aA + bB + dD = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ -a & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = d = 0.$$

On conclut : $(A,\ B,\ D)$ est une base de E et $\dim(E) = 3$.

1.9

a) • $E \subset \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et $0 \in E$ car $A0 = 0A = 0$, où 0 désigne la matrice nulle de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $M, N \in E$. On a :

$$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha MD + ND = (\alpha M + N)D,$$

donc : $\alpha M + N \in E$.

On conclut que E est un sev de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque. On a :

$$M \in E \iff AM = MD$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = 0 \\ t = y. \end{cases}$$

c) • D'après *b)*, on a : $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$$= \left\{ x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(U, A).$$

Ceci montre que (U, A) engendre E.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xU + yA = 0$. On a alors, comme ci-dessus : $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc : $x = 0,\ y = 0$.

Ceci montre que (U, A) est libre.

On conclut : (U, A) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

d) On a : $UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après *b)*, comme $1 \neq 0$ (c'est-à-dire $t \neq y$ avec les notations de *b)*), on conclut : $UA \notin E$.

1.10

a) • On a : $\mathscr{E} \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in E$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $M, N \in \mathscr{E}$:

$$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha MB + NB = (\alpha M + N)B,$$

donc : $\alpha M + N \in \mathscr{E}$.

On conclut : $\mathscr{E}$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) On a, pour toute $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\iff AM = MB \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x+y \\ 2z & z+t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = x \\ t = x. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc : $\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & x \end{pmatrix} ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$$= \Big\{ x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big\} = \operatorname{Vect}(C, D).$$

De plus, (C, D) est libre car, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$xC + yD = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff x = y = 0.$$

On conclut : (C, D) est une base de $\mathscr{E}$ et $\dim(\mathscr{E}) = 2$.

1.11

a) Par lecture de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$u(e_1) = 2f_1 + 3f_2, \qquad u(e_2) = f_1 - f_2 + 2f_3.$$

b) 1) Puisque $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_1 + e_2$,

on a : $e_1 = e'_1,\ e_2 = e'_2 - e'_1$.

Comme tout vecteur de E se décompose linéairement sur (e_1, e_2) et que e_1 et e_2 se décomposent linéairement sur(e'_1, e'_2), il en résulte que tout vecteur de E se décompose linéairement sur (e'_1, e'_2).

Ainsi, la famille $\mathscr{E}' = (e'_1, e'_2)$ engendre E, et a deux éléments, donc $\mathscr{E}'$ est une base de E.

2) Puisque $f'_1 = f_1 + f_2,\ f'_2 = f_1 + f_3,\ f'_3 = f_2 + f_3$, on a :

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(f'_1 + f'_2 - f'_3),\ f_2 = \tfrac{1}{2}(f'_1 + f'_3 - f'_2),\ f_3 = \tfrac{1}{2}(f'_2 + f'_3 - f'_1).$$

Ainsi, de même qu'en *1)*, la famille $\mathscr{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ engendre F, et a trois éléments, donc $\mathscr{F}'$ est une base de F.

3) On a :

• $u(e'_1) = u(e_1) = 2f_1 + 3f_2$

$$= (f'_1 + f'_2 - f'_3) + \frac{3}{2}(f'_1 + f'_3 - f'_2) = \frac{5}{2}f'_1 - \frac{1}{2}f'_2 + \frac{1}{2}f'_3,$$

• $u(e'_2) = u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2)$

$$= (2f_1 + 3f_2) + (f_1 - f_2 + 2f_3) = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3$$

$$= \frac{3}{2}(f'_1 + f'_2 - f'_3) + (f'_1 + f'_3 - f'_2) + (f'_2 + f'_3 - f'_1)$$

$$= \frac{3}{2}f'_1 + \frac{3}{2}f'_2 + \frac{1}{2}f'_3.$$

On conclut que la matrice A' de u dans les bases $\mathscr{E}'$ de E et $\mathscr{F}'$ de F est : $A' = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1.12

a) On a, pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(u) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff (\mathrm{S}) \begin{cases} x + 2z + t = 0 & L_1 \\ 2x + 3y + z + t = 0 & L_2 \\ -x + 2y - 5z - 3t = 0. & L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système (S) est un système d'équations de $\operatorname{Ker}(f)$.

On a :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} x + 2z + t = 0 & L_1 \\ 3y - 3z - t = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - 3z - 2t = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 3y - 3z - t = 0 \\ -3z - 4t = 0 & L_3 \longleftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -\dfrac{4}{3}t \\ y = z + \dfrac{1}{3}t = -t \\ x = -2z - t = \dfrac{5}{3}t. \end{cases}$$

Une base de $\operatorname{Ker}(f)$ est donc (V_0), où $V_0 = (5, -3, -4, 3)$, et donc : $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

b) Notons $V_1, ..., V_4$ les éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont les colonnes $C_1, ..., C_4$ de A :

$$V_1 = (1, 2, -1),\ V_2 = (0, 3, 2),\ V_3 = (2, 1, -5),\ V_4 = (1, 1, -3).$$

On a alors : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_4)$.

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < 4$, la famille $(V_1, ..., V_4)$ est liée.

Voyons si (V_1, V_2, V_3) est libre.

On a, pour tout $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 = 0 \iff \begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 3a_3 = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2a_2 - 3a_3 = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, (V_1, V_2, V_3) est libre, donc $\dim(\operatorname{Im}(f)) \geqslant 3$.

D'autre part, comme $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_4) \subset \mathbb{R}^3$, on a : $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leqslant 3$. On conclut qu'une base de $\operatorname{Im}(f)$ est (V_1, V_2, V_3) et que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$, donc : $\operatorname{rg}(f) = 3$.

Remarque : on pouvait aussi obtenir $\dim(\operatorname{Im}(f))$ en appliquant le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3.$$

1.13

1) D'abord, il est clair que : $\forall k \in [\![0\,;4]\!],\ P_k \in \mathbb{R}_4[X]$.

2) Montrons que $\mathscr{B} = (P_0, ..., P_4)$ est libre.

Soit $(a_0, ..., a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_kP_k = 0$.

En prenant les valeurs en 0, en -1, on déduit : $a_0 = 0$ et $a_0 - a_1 = 0$, d'où $a_1 = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 \\ &= a_2(X-1)X(X+1) + a_3X^2(X+1) + a_4(X-1)X(X+1)^2 \\ &= X(X+1)[a_2(X-1) + a_3X + a_4(X-1)(X+1)] \\ &= X(X+1)[a_4X^2 + (a_2+a_3)X - (a_2+a_4)], \end{aligned}$$

d'où : $a_4X^2 + (a_2+a_3)X - (a_2+a_4) = 0,$

puis : $a_4 = 0,\ a_2 + a_3 = 0,\ -(a_2 + a_4) = 0,$

et donc : $a_4 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0.$

Ceci montre que $\mathscr{B}$ est libre.

3) Comme $\mathscr{B}$ est libre et que $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, on conclut : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

1.14

a) On calcule les produits de matrices A^2, B^2, AB, BA :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}^{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{A^2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}^{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{B^2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}^{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{AB}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}^{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{BA}.$$

On obtient : $A^2 = A,\ B^2 = B,\ AB = 0,\ BA = 0.$

b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A + xB)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il en résulte que la matrice carrée $H(x)$ n'est pas inversible.

c) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H(x)H(y) = (A + xB)(A + yB) = A^2 + xBA + yAB + xyB^2 = A + xyB = H(xy).$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (H(x))^n = H(x^n).$$

• La propriété est évidente pour $n = 1$.

• Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors :

$$(H(x))^{n+1} = (H(x))^n H(x) = H(x^n)H(x) = H(x^n x) = H(x^{n+1}),$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (H(x))^n = H(x^n).$$

e) On remarque :

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 10 & 30 & -20 \\ 9 & -27 & -17 \end{pmatrix} = A + 10B = H(10).$$

D'où, d'après *d)* :

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 10 & 30 & -20 \\ 9 & -27 & -17 \end{pmatrix}^{10} = (H(10))^{10} = H(10^{10})$$

$$= A + 10^{10}B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 10^{10} & 3 \cdot 10^{10} & -2 \cdot 10^{10} \\ 10^{10} - 1 & 3(10^{10} - 1) & -2 \cdot 10^{10} + 3 \end{pmatrix}.$$

1.15

a) Supposons (f, g) liée.

Si $f = 0$, alors $f^2 = 0$, donc (f^2, g^2) est liée.

Si $f \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g = \alpha f$, d'où $g^2 = \alpha^2 f^2$, donc (f^2, g^2) est liée.

Ceci montre que, si (f, g) est liée, alors (f^2, g^2) est liée.

b) Notons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$.

• La famille (f, g) est libre, car, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda f + \mu g = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda x + \mu |x| = 0$,

d'où, en remplaçant x par 1, par -1 :

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda - \mu = 0,$$

donc : $\lambda = \mu = 0$.

• La famille (f^2, g^2) est liée car $f^2 = g^2$.

c) Notons : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$, $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 1 \end{array}$.

• On a $h = f + g$, donc (f, g, h) est liée.

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^2(x) = 1, \quad g^2(x) = x^2, \quad h^2(x) = 1 + 2x + x^2.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $af^2 + bg^2 + ch^2 = 0$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \ (a + c) + 2cx + (b + c)x^2 = 0$.

Ainsi, le polynôme $(a + c) + 2cX + (b + c)X^2$ s'annule en tout point de $\mathbb{R}$, donc est le polynôme nul, d'où :

$$a + c = 0, \quad 2c = 0, \quad b + c = 0,$$

puis : $a = 0, \ b = 0, \ c = 0$.

Ceci montre que la famille (f^2, g^2, h^2) est libre.

d) 1^er^ exemple :

Notons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$, $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{1 + x^2} \end{array}$.

• Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a + b|x| + c\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

En remplaçant x par 0, par 1, par 2, on déduit :

$$a + c = 0, \quad a + b + c\sqrt{2} = 0, \quad a + 2b + c\sqrt{5} = 0$$

d'où :

$$c = -a, \quad b = a(\sqrt{2} - 1), \quad a\big(\underbrace{1 + 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{5}}_{\neq 0}\big) = 0$$

donc : $a = 0, \ b = 0, \ c = 0$.

Ceci montre que (f, g, h) est libre.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^2(x) = 1, \ g^2(x) = x^2, \ h^2(x) = 1 + x^2$,

donc : $$h^2 = f^2 + g^2.$$

Ceci montre que (f^2, g^2, h^2) est liée.

2^e^ exemple :

Notons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + 1 \end{array}$, $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{array}$.

• Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax + b(x^2 + 1) + c(x^2 - 1) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (b+c)x^2 + ax + (b-c) = 0$$

Ainsi, le polynôme $(b+c)X^2 + aX + (b-c)$ s'annule en tout point de $\mathbb{R}$, donc est le polynôme nul, d'où :

$$b+c = 0, \quad a = 0, \quad b-c = 0,$$

puis : $\quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0.$

Ceci montre que (f, g, h) est libre.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^2(x) = x^2, \quad g^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1,$
$h^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1,$

donc : $\quad 4f^2 = g^2 - h^2.$

Ceci montre que (f^2, g^2, h^2) est liée.

1.16

1) D'abord, il est clair que : $\forall i \in [\![0\,;n]\!], \quad P_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrons que $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. En prenant la valeur en a, comme $P_i(a) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$, on obtient $\lambda_0 P_0(a) = 0$, puis, comme $P_0(a) = (a-b)^n \neq 0$, on déduit $\lambda_0 = 0$. En reportant et en simplifiant par $X - a$, on déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X-a)^{i-1}(X-b)^{n-i} = 0,$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1}(X-a)^j (X-b)^{n-1-j} = 0.$

En réitérant, on obtient successivement : $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Ceci montre que $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Comme la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre et que

$$\mathrm{Card}\,((P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]),$$

on conclut que $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.17

a) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in E$:

$$\varphi_1(\alpha f + g) = \int_{-1}^{0} (\alpha f + g)$$
$$= \alpha \int_{-1}^{0} f + \int_{-1}^{0} g = \alpha\varphi_1(f) + \varphi_1(g),$$

donc φ_1 est linéaire.

De même, φ_2 et φ_3 sont linéaires.

b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 = 0$.

On a alors : $\forall f \in E, \quad \alpha_1 \int_{-1}^{0} f + \alpha_2 \int_{-1}^{0} f = 0 \quad (1).$

Considérons : $f_1 : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto 1$, $\quad f_2 : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x$.

Il est clair que : $f_1 \in E$ et $f_2 \in E$. On a :

$$(1) \implies \begin{cases} \alpha_1 \int_{-1}^{0} f_1 + \alpha_2 \int_{0}^{1} f_1 = 0 \\ \alpha_1 \int_{-1}^{0} f_2 + \alpha_2 \int_{0}^{1} f_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \alpha_2 \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

On conclut : (φ_1, φ_2) est libre.

c) D'après la relation de Chasles :

$$\forall f \in E, \quad \int_{-1}^{1} f = \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{1} f,$$

donc : $\quad \forall f \in E, \quad \varphi_3(f) = \varphi_1(f) + \varphi_2(f),$

c'est-à-dire : $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$.

Ceci montre que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est liée, donc n'est pas libre.

1.18

a) • D'abord, il est clair que u et v sont bien des applications de E dans E.

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in E$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(\alpha f + g)(x) = x(\alpha f + g)(x)$$
$$= x(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha x f(x) + x g(x)$$
$$= \alpha u(f)(x) + u(g)(x) = (\alpha u(f) + u(g))(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v(\alpha f + g)(x) = -(\alpha f + g)'(x)$$
$$= -(\alpha f' + g')(x) = -\alpha f'(x) - g'(x)$$
$$= \alpha v(f)(x) + v(g)(x) = (\alpha v(f) + v(g))(x),$$

d'où : $\quad \begin{cases} u(\alpha f + g) = \alpha u(f) + u(g) \\ v(\alpha f + g) = \alpha v(f) + v(g), \end{cases}$

donc u et v sont linéaires.

On conclut : $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

• On a, pour toute $f \in E$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u \circ v - v \circ u)(f)(x) = u(v(f))(x) - v(u(f))(x)$$
$$= x v(f)(x) + (u(f))'(x)$$
$$= x(-f'(x)) + (f(x) + x f'(x)) = f(x),$$

donc : $\quad (u \circ v - v \circ u)(f) = f.$

Ceci montre : $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

b) 1) Étude de u :

• On a, pour toute $f \in E$:

$$f \in \mathrm{Ker}\,(u) \iff u(f) = 0 \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ \ xf(x) = 0)$$
$$\iff (\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f(x) = 0).$$

Si f s'annule en tout point de $\mathbb{R}^*$, alors, comme f est continue en 0, f s'annule aussi en 0, donc $f = 0$.

Ceci montre : $f \in \mathrm{Ker}\,(u) \iff f = 0$,

donc : $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.

On conclut : u est injective.

• L'application constante 1 est élément de E et il n'existe pas $f \in E$ telle que $u(f) = 1$, car sinon : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ xf(x) = 1$, ce qui est impossible pour $x = 0$.

Ceci montre que l'application constante 1 n'est pas atteinte par u, donc u n'est pas surjective.

• Puisque u n'est pas surjective, u n'est pas bijective.

2) Étude de v :

• On a $v(\widetilde{1}) = \widetilde{0} = v(\widetilde{0})$ et $\widetilde{1} \neq \widetilde{0}$ (où $\widetilde{0}$ et $\widetilde{1}$ sont les applications constantes respectivement égales à 0 et 1), donc v n'est pas injective.

• Pour toute $g \in E$, il existe $f \in E$ telle que $f' = -g$ (car $-g$ admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$), et on a alors $v(f) = g$.

Ceci montre que v est surjective.

• Puisque v n'est pas injective, v n'est pas bijective.

1.19

1) D'abord, E est bien un ev. En effet, E est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ car le polynôme nul appartient à E, et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in E$:

$$(\alpha P + Q)(0) = \alpha P(0) + Q(0) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

donc $\alpha P + Q \in E$.

2) L'application f va bien de E dans E, car, pour tout $P \in E$, $f(P) = \mathrm{X}P'$ est un polynôme qui s'annule en 0.

3) L'application f est linéaire car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in E$:

$$f(\alpha P + Q) = \mathrm{X}(\alpha P + Q)'$$
$$= \mathrm{X}(\alpha P' + Q') = \alpha \mathrm{X}P' + \mathrm{X}Q' = \alpha f(P) + f(Q).$$

4) Injectivité :

Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$, c'est-à-dire $\mathrm{X}P' = 0$.

On déduit $P' = 0$, P est une constante.

Comme de plus $P(0) = 0$ (car $P \in E$), on obtient $P = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$, donc f est injective.

5) Surjectivité :

Soit $Q \in E$. Comme $Q(0) = 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. Notons $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \mathrm{X}^k$. Il est clair que $P \in E$, puisque $P(0) = 0$. Et :

$$f(P) = \mathrm{X}P' = \mathrm{X} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} k \mathrm{X}^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{X}^k = Q.$$

Ceci montre que f est surjective.

Finalement, puisque f est linéaire, injective, surjective, on conclut : $f \in \mathcal{GL}(E)$.

1.20

Puisque $f^2 \neq 0$, il existe $e_1 \in E$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$.

Notons $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.

On a alors, en composant par f^2 :

$$0 = f^2(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)$$
$$= \lambda_1 f^2(e_1) + \lambda_2 \underbrace{f^3(e_1)}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{f^3(e_2)}_{=0} = \lambda_1 \underbrace{f^2(e_1)}_{\neq 0},$$

d'où : $\lambda_1 = 0$.

Puis : $\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.

On a alors, en composant par f :

$$0 = f(\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_2 f^2(e_1) + \lambda_3 \underbrace{f^3(e_1)}_{=0} = \lambda_2 \underbrace{f^2(e_1)}_{\neq 0},$$

d'où : $\lambda_2 = 0$.

Enfin, comme $\lambda_3 e_3 = 0$ et $e_3 = f^2(e_1) \neq 0$, on a : $\lambda_3 = 0$.

Ceci montre que $\mathscr{B}$ est libre.

Comme $\mathscr{B}$ est libre et que $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 3 = \dim\,(E)$, on conclut que $\mathscr{B}$ est une base de E.

On a $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = f^2(e_1) = e_3$, $f(e_3) = f^3(e_1) = 0$, donc la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.21

a) • On calcule les produits matriciels A^2 et A^3 :

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 12 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}}_{A^3}
\end{array}$$

• Il est clair que : $A^3 = 4A + 2A^2$.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xA + yA^2 = 0$. On a alors :

$$x + 4y = 0, \quad x + 2y = 0, \quad 2y = 0,$$

d'où : $y = 0, \ x = 0$.

On conclut : la famille (A, A^2) est libre.

b) Raisonnons par récurrence sur n.

• La propriété est vraie pour $n = 1$, avec $(u_1 = 4, \ v_1 = 2)$.

• Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A^n = u_n A + v_n A^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (u_n A + v_n A^2)A = u_n A^2 + v_n A^3 \\ &= u_n A^2 + v_n(4A + 2A^2) = 4v_n A + (u_n + 2v_n)A^2. \end{aligned}$$

En notant : $u_{n+1} = 4v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$,

on a donc : $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}A^2$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A^n = u_n A + v_n A^2$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} u_{n+1} = 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$

De plus, comme (A, A^2) est libre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le couple (u_n, v_n) est unique.

c) • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+2} = 4v_{n+1} = 4(u_n + 2v_n) = 4u_n + 8v_n = 4u_n + 2u_{n+1}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4u_n$.

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique $r^2 - 2r - 4 = 0$ admet deux racines réelles distinctes, qui sont $r_1 = 1 - \sqrt{5}$, $r_2 = 1 + \sqrt{5}$. D'après le cours, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

On a : $\begin{cases} A = 1A + 0A^2 \\ A^2 = 0A + 1A^2 \end{cases}$ donc : $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

Et : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 \\ \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 \\ \lambda_1(2r_1 + 4) + \lambda_2(2r_2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 \\ 4(\lambda_1 + \lambda_2) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1/2 & L_1 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1(r_2 - r_1) = -1 - \frac{r_2}{2} & L_1 \longleftarrow r_2 L_1 - L_2 \\ \lambda_2(r_2 - r_1) = 1 + \frac{r_1}{2} & L_2 \longleftarrow L_2 - r_1 L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}. \end{cases}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{-3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^n + \frac{3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^n,$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = \frac{-3 - \sqrt{5}}{16\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^{n+1} + \frac{3 - \sqrt{5}}{16\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^{n+1}.$$

1.22

a) En développant, on a, pour toutes $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A + B)B^{-1} &= A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \\ &= B^{-1} + A^{-1} = A^{-1} + B^{-1}. \end{aligned}$$

b) Donnons un contrexemple.

Pour $A = \mathrm{I}_n, \ B = \mathrm{I}_n, \ C = -2\mathrm{I}_n$,

on a : $A^{-1} = \mathrm{I}_n, \ B^{-1} = \mathrm{I}_n, \ C^{-1} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_n$,

donc : $A + B + C = 0$ et $A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = \dfrac{3}{2}\mathrm{I}_n$.

S'il existait (U, V) convenant, on aurait $\dfrac{3}{2}\mathrm{I}_n = U0V = 0$, contradiction.

La réponse à la question posée est donc : non.

1.23

On a :

$$A^3 - A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0 \iff A(-A^2 + A - \mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n.$$

Donc A est inversible et : $A^{-1} = -A^2 + A - \mathrm{I}_n$.

1.24

a) $(A - 3\mathrm{I}_n)(B - 2\mathrm{I}_n) = AB - 2A - 3B + 6\mathrm{I}_n = 6\mathrm{I}_n$.

b) D'après *a)*, on a : $(A - 3\mathrm{I}_n)\Big(\dfrac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)\Big) = \mathrm{I}_n$.

Ainsi, $A - 3\mathrm{I}_n$ est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)$. On a donc aussi, dans l'autre sens :

$$\Big(\frac{1}{6}(B - 2\mathrm{I}_n)\Big)(A - 3\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n,$$

d'où, en développant : $BA - 2A - 3B + 6\,\mathrm{I}_n = 6\,\mathrm{I}_n$,

et donc : $BA = 2A + 3B = AB$.

1.25

a) • Il est clair que f est bien une application de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$f(\alpha M + N) = (\alpha M + N)A = \alpha MA + NA = \alpha f(M) + f(N),$$

donc f est linéaire.

On conclut que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b) 1) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}\,(f) &\iff f(M) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff (3x + 4y = 0,\ -6x - 8y = 0,\ 3z + 4t = 0,\ -6z - 8t = 0) \\ &\iff (3x + 4y = 0,\ \ 3z + 4t = 0). \\ &\iff \Big(y = -\frac{3}{4}x,\ \ t = -\frac{3}{4}z\Big). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{4}x \\ z & -\frac{3}{4}z \end{pmatrix} ;\ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } B} + \frac{z}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} ;\ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(B, C). \end{aligned}$$

Comme (B, C) est libre (car les deux matrices B et C ne sont pas colinéaires), on conclut que (B, C) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$, et donc : $\dim \mathrm{Ker}\,(f) = 2$.

b) 2) On a, pour toute $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(M) = MA &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4y & -6x - 8y \\ 3z + 4t & -6z - 8t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + 4y & -2(3x + 4y) \\ 3z + 4t & -2(3z + 4t) \end{pmatrix} \\ &= (3x + 4y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} + (3z + 4t)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{notée } E} \in \mathrm{Vect}\,(D, E). \end{aligned}$$

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}\,(D, E)$.

De plus :

$$D = f\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Im}\,(f), \quad E = f\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Im}\,(f),$$

donc : $D \in \mathrm{Im}\,(f)$, $\ E \in \mathrm{Im}\,(f)$,

d'où : $\mathrm{Vect}\,(D, E) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.

On en déduit : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(D, E)$.

Comme (D, E) est libre (car les deux matrices D, E ne sont pas colinéaires), on conclut : (D, E) est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\dim \mathrm{Im}\,(f) = 2$.

Remarque : On contrôle avec le théorème du rang :

$$4 = \dim \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) = 2 + 2.$$

1.26

a) 1) • $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $0 \in E$, où 0 est la suite constante nulle.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $w = \alpha u + v$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + v_{n+2} = \alpha(5u_{n+1} - 6u_n) + (5v_{n+1} - 6v_n) \\ &= 5(\alpha u_{n+1} + v_{n+1}) - 6(\alpha u_n + v_n) = 5w_{n+1} - 6w_n, \end{aligned}$$

donc : $w \in E$.

On conclut : E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc E est un ev.

2) • Par définition de a et b, on a : $a \in E$, $b \in E$.

• Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha a + \beta b = 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha a_n + \beta b_n = 0,$$

d'où, en particulier, pour $n = 0$, pour $n = 1$: $\alpha = 0$, $\ \beta = 0$.

Ainsi, (a, b) est libre.

• Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Notons $v = u - u_0 a - u_1 b$.

On a alors : $v \in E$, car u, a, b sont dans E et E est un ev.

Comme $v_0 = 0$ et $v_1 = 0$, on, déduit, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ v_n = 0$, d'où $v = 0$, puis $u = u_0 a + v_0 b$.

Ainsi, (a, b) engendre E.

Finalement : (a, b) est une base de E, et donc : $\dim (E) = 2$.

3) • On a $r \in E$, $\ s \in E$, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_{n+2} - 5r_{n+1} + 6r_n = 2^n(4 - 10 + 6) = 0,$$

$$s_{n+2} - 5s_{n+1} + 6s_n = 3^n(9 - 15 + 6) = 0.$$

• Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\lambda r + \mu s = 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda 2^n + \mu 3^n = 0,$$

d'où, en particulier, pour $n = 0$, pour $n = 1$:

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda + 3\mu = 0,$$

puis : $\lambda = 0, \ \mu = 0$.

Ainsi, (r, s) est libre.

Comme (r, s) est libre et que $\operatorname{Card}((r, s)) = 2 = \dim(E)$, on conclut : (r, s) est une base de E.

b) Comme dans la solution de *a) 2)*, on a :

$$r - r_0 a - r_1 b = 0 \ \text{ et } \ s - s_0 a - s_1 b = 0,$$

donc : $r = a + 2b$ et $s = a + 3b$,

d'où la matrice M de la famille (r, s) dans la base (a, b) de E :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Il en résulte :

$$a = 3r - 2s, \quad b = -r + s.$$

c) 1) • Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Notons $u' = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u'_{n+2} = u_{n+3} = 5u_{n+2} - 6u_{n+1} = 5u'_{n+1} - 6u'_n,$$

donc : $u' \in E$. On peut donc définir l'application

$$f : E \longrightarrow E, \ \ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $u, v \in E$:

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v) &= ((\alpha u + v)_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha f(u) + f(v), \end{aligned}$$

et on conclut : f est linéaire.

Ainsi, f est un endomorphisme de E.

2) On a : $[f(a)]_0 = a_1 = 0$, $[f(a)]_1 = a_2 = 5a_1 - 6a_0 = -6$, donc : $f(a) = -6b$.

On a : $[f(b)]_0 = b_1 = 1$, $[f(b)]_1 = b_2 = 5b_1 - 6b_0 = 5$, donc : $f(b) = a + 5b$.

On en déduit que la matrice de f dans la base (a, b) de E est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

3) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ [f(r)]_n = r_{n+1} = 2^{n+1} = 2r_n$,

donc : $f(r) = 2r$, et de même : $f(s) = 3s$.

On en déduit que la matrice de f dans la base (r, s) de E est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.27 Raisonnons par l'absurde : supposons $A \neq E$ et $B \neq E$.

Il existe alors $a \in E$ tel que $a \notin A$, et $b \in E$ tel que $b \notin B$. Comme $A \cup B = E$, il s'ensuit : $a \in B$ et $b \in A$.

Considérons $a + b$.

On a : $a + b \in E = A \cup B$, donc : $a + b \in A$ ou $a + b \in B$.

• Supposons $a + b \in A$. On a alors : $a = (a + b) - b \in A$ car $a + b \in A$, $b \in A$ et A est un sev de E, d'où une contradiction.

• Supposons $a + b \in B$. On a alors : $b = (a + b) - a \in B$ car $a + b \in B$, $a \in B$ et B est un sev de E, d'où une contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $A = E$ ou $B = E$.

1.28

a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$.

On remarque que, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, f_{a_i} est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{a_i\}$, et est discontinue en a_i.

Supposons qu'il existe $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$f_{a_i} = -\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} f_{a_j}.$$

D'une part, f_{a_i} est discontinue en a_i.

D'autre part, pour tout $j \neq i$, f_{a_j} est continue en a_i, donc la combinaison linéaire $\displaystyle -\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} f_{a_j}$ est continue en a_i, d'où une contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \ \ \lambda_i = 0$, et on conclut que la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

b) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$.

On remarque que, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, f_{a_i} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a_i\}$, et n'est pas dérivable en a_i.

Supposons qu'il existe $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$f_{a_i} = -\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} f_{a_j}.$$

D'une part, f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i.

D'autre part, pour tout $j \neq i$, f_{a_j} est dérivable en a_i, donc la combinaison linéaire $\displaystyle -\sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} f_{a_j}$ est dérivable en a_i, d'où une contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \ \ \lambda_i = 0$, et on conclut que la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

c) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$.