100% CONCOURS PRÉPAS

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • MARC REZZOUK • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

- Rappels de cours et exercices d'assimilation
- Plus de 400 exercices dont la majorité est issue d'oraux de concours récents
- Solutions complètes et détaillées

EdiScience

TOUS LES EXERCICES
D'ANALYSE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner
et réussir son concours

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

El-Haj Laamri
Agrégé en mathématiques et maître de conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé en mathématiques et professeur en MP au Lycée Henri Poincaré à Nancy

Gérard Eguether
Maître de conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé en mathématiques et professeur en PC au Lycée Henri Poincaré à Nancy

Marc Rezzouk
Agrégé en mathématiques et professeur en PC au lycée Henri Poincaré à Nancy

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques et professeur en PSI au Lycée Henri Loritz à Nancy

Laurent Schwald
Agrégé en mathématiques et professeur en BCPST au lycée Henri Poincaré à Nancy

EdiScience

Couverture : *Claude Lieber*

ISBN 978-2-10-053962-8

Présentation de la série « Tous les exercices de mathématiques »

L'évolution récente de l'enseignement des disciplines scientifiques dans les C.P.G.E s'est concrétisée par la définition d'un nouveau programme de première année en 2003 et de deuxième année en 2004. Un des objectifs de cette évolution a été de combler le fossé grandissant entre la classe de terminale et les classes préparatoires. La progression est explicitement imposée par le nouveau programme qui prévoit notamment « un programme de début de l'année », qui exclut la présentation abstraite des concepts au profit d'une démarche fondée sur l'exemple comme point de départ de la conceptualisation, qui préconise l'approche algorithmique en complément de l'approche démonstrative et qui légitime la démarche expérimentale en mathématiques par l'utilisation des logiciels Maple ou Mathematica, logiciels systématiquement utilisés dans de nombreux concours, notamment dans le concours commun « Centrale - Supelec ». Mais les programmes des classes préparatoires ne sont pas les seuls à avoir évolué, les programmes de l'enseignement secondaire ont fait l'objet d'une évolution préalable. Enfin, l'attitude nouvelle des élèves face aux disciplines scientifiques rend inefficace l'approche axiomatique et leur appropriation grandissante de l'outil informatique nécessite d'intégrer cet outil à la pédagogie. L'ensemble de ces changements rend impérative la rédaction de nouveaux ouvrages.

On constate que c'est davantage la structure, l'ordre des thèmes abordés, l'esprit du programme qui ont évolué, le fond étant resté relativement stable. Sur ce fond, que nous n'avons pas la prétention de renouveler, il existe déjà une abondante et excellente littérature ; nous revendiquons une continuité par rapport à nos illustres prédécesseurs et nous nous sommes largement inspirés de leurs écrits pour y puiser exercices et sujets en nous efforçant de les présenter en parfaite cohérence avec l'esprit du programme actuel. Car cette nouvelle collection répond à une nécessité : entièrement rédigée après la parution des nouveaux programmes et le début de leur mise en oeuvre, elle garantit une parfaite compatibilité entre la rédaction des ouvrages et les préconisations du programme… ce que n'aurait pu assurer sans risque d'anomalies une simple remise en forme d'une rédaction antérieure. Tous les ouvrages de cette collection sont écrits trois ans après l'apparition des nouveaux programmes et en respectent scrupuleusement l'esprit.

Les rédacteurs, ont enseigné et interrogé dans le cadre de l'ancien et du nouveau programme. Ils perçoivent donc parfaitement l'importance de l'évolution. Leur expérience de l'enseignement en classes préparatoires et à l'Université, leur intervention régulière en « colles », leur participation aux concours comme interrogateurs à l'oral et/ou correcteurs à l'écrit permettent d'affirmer qu'il s'agit d'équipes très

« professionnelles ». L'équilibre entre la pluralité des approches qui enrichit le fond et la cohérence de la forme qui renforce l'efficacité est le résultat d'un véritable travail collaboratif, d'une maîtrise d'oeuvre rigoureuse et de sources d'inspiration précieuses… citons particulièrement pour les exercices d'oral la Revue de Mathématiques Spéciales, l'Officiel de la Taupe et les Archives des Professeurs de Spé du Lycée Henri Poincaré de Nancy en particulier celles constituées par Walter APPEL.

Cette collection a l'ambition de faire bénéficier le lecteur de l'expertise professionnelle des rédacteurs, chaque ouvrage est donc rédigé avec un souci de rigueur et de clarté au service de la pédagogie, souci qui s'exprime dans quelques principes :

– La qualité de rédaction aboutie exigée des élèves nécessite que les auteurs soient eux-mêmes exemplaires dans leur rédaction, aussi bien celle des énoncés que celle des corrigés. Un soin tout particulier est apporté à l'écriture des éléments « logiques » : précis et sans ambiguïté , le style traduit explicitement les connexions logiques, implication, nécessité, suffisance, etc. dans un souci permanent de rendre explicite ce qui, ailleurs, reste parfois implicite.

– Les corrigés proposés sont toujours complets et commentés quand il le faut, en privilégiant les solutions méthodiques et raisonnables aux approches « astucieuses » et « miraculeuses ». L'expérience prouve en effet qu'un corrigé trop « brillant » inquiète l'élève qui se sent incapable de la même performance et ne lui apprend rien de la démarche constructive qui peut amener à une solution lorsqu'on possède une maîtrise suffisante des concepts. L'expérience montre aussi la vertu du contre-exemple… il en est fait un usage courant.

– La présence de rappels de cours synthétiques est nécessaire pour replacer les exercices dans leur contexte théorique sans avoir à quitter l'ouvrage en cours de lecture, pour fixer aussi quelques notations choisies parmi les standards. Mais ces éléments de cours ne se substituent en rien à l'enseignement magistral ou aux ouvrages de référence, ils constituent seulement un « minimum conceptuel » immédiatement disponible pour aider la compréhension des exercices qui restent la matière essentielle de l'ouvrage.

– La volonté de respecter l'esprit des nouveaux programmes privilégie la présentation de sujets récents (de 2003 à 2006) en respectant scrupuleusement la forme de leur rédaction : aucun toilettage rédactionnel ne doit en masquer l'originalité, voire la difficulté. Le respect du lecteur exige sa mise en situation réelle de concours. Toutefois ces énoncés sont commentés et expliqués pour rassurer le lecteur en lui montrant que sous des traits parfois déroutants on peut retrouver des « visages connus ». Certains exercices proposés aux concours avant 2003 figurent également dans cette collection en raison de leur intérêt ; ils sont alors rédigés sous une forme compatible avec le programme actuel.

Si ces principes généraux sont respectés dans l'ensemble de la collection, la plus grande maturité des élèves de deuxième année justifie quelques différences entre les ouvrages de première et de deuxième année. L'élève de première année peut avoir des difficultés à choisir seul, avec discernement, des sujets d'écrits dans les annales. Les ouvrages de première année présentent donc une sélection d'extraits de problèmes d'écrits. L'élève de deuxième année, plus mûr, est capable de trouver lui-même des sujets d'écrit, les ouvrages de deuxième année n'en présentent donc pas. Cette plus grande maturité explique aussi le choix qui a été fait de présenter en deuxième année un bon tiers des exercices d'oral dans leur rédaction d'origine, sans commentaires explicatifs, pour placer l'élève au plus près de la situation réelle du concours ; bien entendu, le corrigé est toujours rédigé clairement, avec toutes les indications et tous les commentaires que nécessite leur compréhension. L'objectif essentiel est le respect des élèves que l'on met dans une situation proche de celles des concours tout en les guidant dans la correction. Il semble également que des ouvrages spécifiques suivant les programmes (MP-MP*, PC-PC* et PSI-PSI*) soient justifiés en Mathématiques Spéciales alors qu'ils ne le sont pas en premier semestre de Mathématiques Supérieures. Mais, quels que soient les ouvrages, les auteurs ont réalisé un travail de sélection important parmi la multitude d'exercices disponibles pour proposer ceux qu'ils considèrent comme les plus significatifs : certains sont sélectionnés pour leur intérêt pédagogique, leur généralité, leurs déclinaisons possibles etc., d'autres sont présentés essentiellement pour donner une idée fidèle de « l'état de l'art actuel » des exercices d'oral et faire l'objet de commentaires au profit des futurs candidats.

On aura compris que les ouvrages de cette collection sont avant tout au service des élèves pour lesquels elle constitue un véritable outil pédagogique d'apprentissage et d'entraînement en vue des concours. Ces ouvrages devraient également convaincre les élèves de l'étendue des points abordés dans les sujets d'oral et d'écrit, qui couvrent réellement les programmes de première et de deuxième année. Mais les enseignants des C.P.G.E pourront aussi utiliser cette collection comme support de travaux dirigés et comme référence. Enfin, les examinateurs disposeront avec cette collection d'exemples de vrais sujets d'oraux donnés récemment ; les commentaires qui en sont faits pourront inspirer leur propre démarche pour une évaluation efficace et progressive des candidats.

Pour conclure cette présentation, on me pardonnera d'utiliser un ton plus personnel. Maître de conférences et agrégé en Mathématiques, j'ai souhaité partager plusieurs années d'expérience en assurant la maîtrise d'oeuvre des ouvrages de cette collection. Quinze années de participation à différents concours en tant que correcteur d'écrit et examinateur d'oral, m'ont permis de bien connaître la littérature existante et de bien observer l'évolution de l'attitude des élèves qui sont soumis, toujours davantage, à des sollicitations nombreuses et diverses, sollicitations qui ne facilitent pas la concentration et peuvent, parfois, les gêner dans la maîtrise de l'ensemble des techniques. La nécessité ressentie d'ouvrages adaptés, l'enthousiasme face à l'idée de les rédiger, l'impossibilité de réaliser seul un tel travail, m'ont conduit à réunir des équipes de rédaction et à assurer la maîtrise d'oeuvre du projet tout en participant activement à l'écriture. Au delà de l'ambition de réaliser un travail de qualité, il s'agit d'une expérience humaine inoubliable.

Trois personnes ont contribué à la réalisation de ce projet et je souhaite, au sens propre, leur donner le dernier mot : merci.

Merci à Eric d'Engenières, responsable d'édition chez Dunod, qui m'a accordé sa confiance, a su m'encourager par la qualité de nos échanges et a pu me guider par des conseils et suggestions toujours formulés de manière chaleureuse.

Merci à Hervé Coilland, directeur de l'I.U.T Nancy-Charlemagne et Vice-Président de l'Université Nancy 2 qui a toujours trouvé le temps pour des discussions amicales au cours desquelles se précisent les objectifs, s'échangent les idées et s'affinent quelques points de rédaction.

Merci, infiniment, à Nezha, ma femme, qui accepte que beaucoup de temps soit consacré à ce projet, qui préserve autour de moi le calme nécessaire à une entreprise rédactionnelle, qui m'encourage et me conseille dans les phases les plus critiques et dont l'amour est un soutien permanent.

Nancy, le 15 février 2007
El-Haj LAAMRI

Avant-propos

Ce livre couvre le programme d'Analyse de deuxième année MP et poursuit la démarche rédactionnelle entamée avec les ouvrages de première année. Comme pour l'ensemble de la collection, le respect du programme officiel est un principe que nous avons suivi à la lettre. Par ailleurs, le programme prévoit la reprise et l'approfondissement en deuxième année de certains points abordés en première année : suites numériques, fonctions réelles d'une variable réelle, intégration sur un segment. Nous avons mis à profit cette possibilité pour que le présent ouvrage, tout en étant sans ambiguïté destiné aux élèves de deuxième année, présente trois chapitres utilisables en première lecture dès le deuxième semestre de première année et pour les « révisions estivales » entre la première et la deuxième année.

Les premiers chapitres traitent des suites numériques et des fonctions réelles d'une variable réelle. Ces notions déjà détaillées dans l'ouvrage de première année sont complétées ici par des exercices d'oral de 2007 et par des sujets nécessitant une maturité qu'on ne peut attendre au premier semestre de la première année. L'intégration sur un segment présente un large choix d'exemples de calculs d'intégrales ainsi que la mise en œuvre des propriétés de l'intégrale (essentiellement les inégalités) et l'étude de fonctions définies par une intégrale. Ce chapitre permet de réviser et d'approfondir le programme de première année tout en donnant une vue réaliste des exercices donnés à l'oral. Dans les chapitres sur les séries numériques, séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier, nous insistons sur les méthodes et non sur les solutions astucieuses... souvent peu reproductibles. De même dans les chapitres concernant l'intégration sur un domaine non compact, nous avons privilégié la méthode et la comparaison des outils. Par la ressemblance de leurs conclusions (mais non de leurs conditions d'application) certains théorèmes sont source de confusion : convergence uniforme, convergence normale, convergence dominée et corollaire, convergence des séries entières. Exemples et contre-exemples posent des points de repères pour éviter les confusions. Ensuite, dans la présentation des espaces vectoriels normés, nous avons tenu compte de l'appréhension, voire du malaise, que l'expérience nous a fait constater chez les élèves. Cette partie est partagée en trois chapitres :

– les généralités indépendantes de la dimension, d'abord mise en œuvre dans un contexte familier et bien matrisé par les élèves (espaces de matrices et espaces de fonctions numériques continues sur un segment), puis faisant l'objet d'exercices d'approfondissements plus abstraits ;

– les espaces vectoriels normés de dimension finie à propos desquels des exercices plus fins et plus difficiles reposent essentiellement sur les propriétés liées à la dimension finie ;
– la dérivation et l'intégration sur les espaces vectoriels normés de dimension finie sont l'objet d'exercices parfois originaux.

Les équations différentielles linéaires constituent un chapitre très riche qui fait appel à un ensemble de connaissances débordant largement le cadre du chapitre. La partie consacrée à l'assimilation propose une révision puis un inventaire technique avec des exercices de mise en œuvre directe. La synthèse et l'approfondissement font le lien avec la technique et l'ouverture vers des notions plus étendues et plus générales. Clarification et points de repères nous ont semblé, là aussi, nécessaires. Enfin, même si les sujets concernant les équations différentielles non linéaires proviennent essentiellement des concours les plus « prestigieux », nous avons fait un effort particulier de rédaction pour les rendre abordables à tous les élèves et donner une occasion d'entraînement à l'écrit. Dans le chapitre consacré au calcul différentiel, nous avons tout d'abord rappelé les définitions essentielles, puis nous avons présenté de nombreux exemples d'application à la recherche d'extrema et à la résolution d'équations aux dérivées partielles, et nous avons terminé ce chapitre par des exercices théoriques et plus difficiles. Le dernier chapitre est consacré aux calculs d'intégrales multiples et curvilignes, nous avons notamment insisté sur la notion d'intégabilité, puis sur l'importance du paramétrage du domaine d'intégration, et enfin, sur les techniques de changement de variables.

Les premiers chapitres, par leur contenu et leur structure, marquent la transition entre les principes rédactionnels et pédagogiques propres aux ouvrages de première année et ceux utilisés pour les ouvrages de deuxième année. En première année, nous avions choisi de présenter et d'illuster de façon linéaire chaque nouvelle notion l'une après l'autre. Nous nous adressions alors à des lecteurs sortant des classes terminales et encore peu autonomes dans leur approche. En deuxième année, nous avons choisi de présenter globalement l'essentiel des notions d'un chapitre puis de progresser par étapes vers une compréhension et une maîtrise de plus en plus approfondies. Chaque chapitre (sauf les deux premiers) est donc constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de l'essentiel du cours suivie d'exercices d'assimilation immédiate, dans lesquels chaque nouvelle notion est testée, sans complication inutile à ce niveau, dans un contexte qui permet d'identifier clairement une et une seule difficulté et de la résoudre, en respectant une sorte de « règle des trois unités » : un exercice, une difficulté, une solution ;
– des exercices d'entraînement dont la rédaction progressive et le découpage en questions ont pour objectif d'amener le lecteur à la compréhension en le confrontant de façon progressive aux difficultés propres à la notion étudiée ;

– des exercices d'approfondissement destinés à mettre l'élève en situation de concours , avec la nécessité pour lui de faire preuve de compréhension, d'initiative, d'intuition et de maîtrise technique.

La lecture d'un tel chapitre n'est donc plus nécessairement linéaire. La structure est parfaitement adaptée à des lecteurs de niveaux variés qui pourront éventuellement passer directement à une forme d'auto-évaluation en se concentrant sur les exercices d'approfondissements ou, au contraire, progresser pas à pas avec les exercices d'assimilation.

Si les élèves de deuxième année ont pu gagner en autonomie, il n'en reste pas moins que leurs niveaux de compétence et de compréhension restent très hétérogènes. Ainsi, entre des « 3/2 » qui découvrent le programme pour la première fois et n'ont encore été confrontés à aucun concours, des « 5/2 » qui ont déjà étudié le programme mais ont échoué à leur première expérience et des « 5/2 » déjà admis à des concours mais dont l'ambition les amène à viser encore plus haut, les différences sont très fortes. Ce sont ces différences, constatées en particulier lors des séances de « colles », qui nous ont amenés à cette rédaction permettant plusieurs niveaux de lecture et d'utilisation de l'ouvrage.

Entre les chapitres eux-mêmes, le programme de deuxième année n'impose pas d'ordre ni de découpage, contrairement au programme de première année. Cette liberté nous a permis de choisir une progression qui nous semblait la plus adaptée et la plus équilibrée. Chaque étape présente un nombre de notions nouvelles acceptable pour une perception d'ensemble compatible avec la structure des chapitres. Il n'y a pas que la hauteur des étages qui fait la difficulté d'un escalier : la hauteur acceptable des marches et leur régularité peut faciliter l'ascension… Nous avons donc retenu une progression qui nous semble adaptée, sans affirmer pour autant que d'autres progressions sont à rejeter. Notre diversité d'expérience, avantage de la rédaction collective, nous amène d'ailleurs à utiliser différentes progressions dans nos pratiques d'enseignement. Il reste ensuite le choix le plus difficile : face à l'infinité d'exercices possibles et au temps fini dont disposent les élèves pour préparer les concours, que proposer ? Quelques principes ont guidé notre sélection :

– respecter le parti-pris de progressivité en donnant des exercices qui permettent d'assimiler, puis de s'entraîner et enfin d'approfondir ;
– donner une vue précise et réaliste d'exercices qui « tombent à l'oral » en s'appuyant en particulier sur une veille attentive des sujets donnés à l'oral dans plusieurs concours depuis plusieurs années ;
– privilégier les exercices « génériques » dont la maîtrise donne les clefs de nombreux exercices (comme il avait déjà été annoncé en avant-propos des ouvrages de première année : habituer les élèves à reconnaître les « visages connus » sous leurs différentes apparences) ;
– profiter du « nomadisme » des exercices constaté entre des concours différents et ne pas hésiter à proposer un sujet de PC ou PSI si son intérêt pédagogique le justifie, sachant que ce même sujet peut apparaître plus tard en MP.

– convaincre les élèves que les oraux couvrent tout le programme des deux années (le théorème des accroissements finis, par exemple, pose beaucoup de problèmes aux élèves qui doivent l'utiliser à l'oral).

Pour éviter l'arbitraire des préférences personnelles lors d'une rédaction collective, une référence incontestable et « objective » est nécessaire : nous avons choisi pour référence la réalité des exercices donnés à l'oral, principalement depuis 2004, date d'application du nouveau programme. Mais ces exercices ont pour objectif le « classement » des élèves et non leur formation. Dans un ouvrage d'apprentissage quotidien, certaines retouches se sont avérées nécessaires : lorsqu'ils utilisent ce livre, les élèves sont en cours de formation et pas encore en concours ! Notre expérience d'enseignants d'abord, de « colleurs » ensuite, d'examinateurs enfin, nous a permis d'observer en situation réelle, dans différentes classes, les élèves face à ces exercices… ce qui nous a convaincus de la nécessité d'en faire évoluer la rédaction pour qu'ils passent du statut d'exercice d'oral au statut d'exercice pédagogique. Notre expérience nous a permis cette adaptation sans, en aucune manière, dénaturer ces exercices. La rédaction retouchée de certains exercices répond à la fois à un objectif pédagogique et psychologique. Objectif pédagogique de guider l'élève par une rédaction détaillée qui fasse apparaître de façon explicite les difficultés et les techniques à maîtriser. Objectif psychologique de rassurer l'élève en l'amenant à résoudre seul une majorité de questions en favorisant ainsi le développement de son autonomie. Si un sujet a été donné à plusieurs concours, nous avons toujours choisi la version qui nous semblait la plus pédagogique, la plus détaillée. Nous avons également regroupé certains énoncés d'oral qui nous semblaient complémentaires ou permettaient de donner un aperçu des sujets régulièrement abordés à l'écrit. Quant aux éléments de cours, chacun sait que ce qui est élégamment écrit dans un cours à la rédaction parfaite n'est pas toujours aussi clair dans l'esprit des élèves… et nous n'avons pas hésité, parfois, à sacrifier l'élégance de la rédaction à la redondance lorsque cette dernière nous permettait de rendre explicites des notions souvent restées implicites.

C'est en premier lieu aux élèves des classes préparatoires MP, MP*, PC1, PC2 et PC* du Lycée Henri Poincaré et PSI et PSI* du Lycée Henri Loritz de Nancy que nous adressons, collectivement, nos remerciements. Ils ont en effet largement contribué par leurs réactions, leurs questions, leurs erreurs et leur compréhension à guider nos efforts de présentation des exercices, de clarification des questions, de simplification des corrigés.

Toujours aussi enthousiasmante cette aventure rédactionnelle est aussi une aventure humaine dans laquelle nous avons été aidés.
Aidés matériellement par l'Institut Elie Cartan de Nancy qui nous a permis d'utiliser ses moyens informatiques et ses ressources documentaires.
Aidés par l'IREM qui nous a donné un accès privilégié à ses ressources documentaires, ainsi que par l'I.U.T Nancy-Charlemagne dont la bibliothèque nous a toujours reçus avec sourire et efficacité.
Aidés également par le Lycée Henri Poincaré de Nancy qui nous a accueillis chaque samedi matin, de septembre à mars, dans une salle équipée de moyens informatiques.

Aidés aussi par deux collègues de l'Institut Elie Cartan, Julien Chenal et Yannick Privat, qui ont lu une partie du manuscrit.

Aidés enfin par trois collègues du Lycée Henri Poincaré, Gilles Demeusois, Michel Eguether et Edouard Lebeau qui nous ont lus en détail et dont les remarques ont sensiblement amélioré le présent ouvrage.

Que tous soient sincèrement remerciés.

Il est inévitable que certaines erreurs aient échappé à la vigilance de tous ceux qui ont lu cet ouvrage. Nous en assumons seuls la responsabilité et nous espérons que ceux qui en découvriront voudront bien nous faire part de leurs remarques à l'adresse suivante Elhaj.laamri@iecn.u-nancy.fr.

Enfin, si dans cette aventure humaine certaines personnes nous ont aidés, il en est sans qui rien n'aurait été possible. Nos compagnes, par leur infinie patience, leur soutien sans faille et leur attentive présence ont joué un rôle essentiel dans l'aboutissement de ce projet. Au moment de mettre un point final à cet ouvrage c'est vers elles que nos pensées se tournent.

Nancy le 15 avril 2008

El-Haj Laamri, Philippe Chateaux, Gérard Eguether, Alain Mansoux,
Marc Rezzouk, David Rupprecht, Laurent Schwald

Les exercices qui nous ont semblé les plus difficiles sont signalés par un ou deux symboles K.

Table des matières

Suites Numériques 1

Ce chapitre, comme celui des fonctions d'une variable réelle, a déjà été étudié en première année mais est très fréquemment abordé aux concours. Avant la rentrée en deuxième année, ce chapitre sera l'occasion d'éprouver la maturité acquise en première année. Avant les oraux, il fournira une excellente occasion de révision et d'entraînement.

1.1 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 1.1

Centrale PSI 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $u_n = \left(5 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n\right)^n$.

Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est naturel de commencer par majorer $|u_n|$. Sachant que $\left|\sin 1/n^2\right| \leqslant 1$ et $|\cos n| \leqslant 1$, on a alors d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|5 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n\right| \leqslant 5 \left|\sin \frac{1}{n^2}\right| + \frac{1}{5} |\cos n| \leqslant 5 + \frac{1}{5}$$

soit $|u_n| \leqslant \left(5 + \frac{1}{5}\right)^n$. Mais $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^n = +\infty$, ce qui ne permet pas d'aboutir. Affinons cette première approche en constatant que c'est le nombre 5 qui nous empêche de conclure. On va donc majorer et minorer plus finement. Comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin(1/n^2) = 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant N$, on ait $-\frac{1}{5} \leqslant 5 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{5}$. Donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$-\frac{2}{5} \leqslant 5 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5} \cos n \leqslant \frac{2}{5},$$

d'où $\left|5 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5} \cos n\right| \leqslant \frac{2}{5}$. On en déduit enfin que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 1.2

CCP MP et PC 2006

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par hypothèse, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, notons a, b et c leurs limites respectives.
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$. Mais c'est aussi une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers $c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$. Il en résulte que $a = c$.
La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ car $6n + 3 = 2(3n + 1) + 1$. Elle converge donc vers $b = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. Mais c'est aussi une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers c. Il en résulte que $b = c$.
On a donc $a = b$, et comme les suites des termes de rang pair et de rang impair convergent vers la même limite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune.

Remarque

Il arrive que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. C'est le cas par exemple de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Exercice 1.3

CCP PSI 2005, diverses écoles MP 2007

1) Montrer que : $\forall n \geqslant 4, \forall k \in \{2, \dots, n-2\}$, $\dbinom{n}{k} \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2) En déduire que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

3) *Question de la rédaction :* Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1) On a, pour tout $n \geqslant 4$ et tout $k \in \{2, \dots, n-2\}$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\prod_{j=3}^{k}\frac{n-k-2+j}{j} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

2) Écrivons tout d'abord, pour tout $n \geqslant 4$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Il en résulte d'après la question précédente

$$u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

On obtient ainsi l'encadrement $2+\dfrac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant 2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2(n-3)}{n(n-1)}$. D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$.

3) Soit $n \geqslant 4$. Posons $v_n = u_n - 2 = \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ et cherchons un équivalent de la suite $(v_n)_{n\geqslant 4}$. On a pour tout $n \geqslant 6$,

$$v_n = \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

D'autre part, pour tout $k \in \{3, \dots, n-3\}$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \prod_{j=4}^{k} \frac{n-k-3+j}{j} \geqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

d'où $0 \leqslant v_n - \dfrac{2}{n} \leqslant \dfrac{4}{n(n-1)} + \dfrac{6}{(n-1)(n-2)}$. Ainsi $v_n = \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Exercice 1.4

CCP MP 2005

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{\substack{i+j=n \\ i\geqslant 1,\ j\geqslant 1}} \frac{1}{ij}$.

Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ (voir exercice 2.3 page 9 dans notre livre d'Analyse de Première année) et par conséquent $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2\ln n}{n}$.

Exercice 1.5

CCP MP 2006, très proche de CCP MP 2007

1) Montrer que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, équivalentes en $+\infty$, sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Quel est le signe de $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \operatorname{th}\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$?

1) *Il s'agit d'un résultat à garder présent à l'esprit.*
Par hypothèse, il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que, pour tout n supérieur à un certain entier n_0, on a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$. En particulier pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $-1/2 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1/2$, ce qui implique que $1/2 \leqslant 1+\varepsilon_n \leqslant 3/2$, et par conséquent, u_n et v_n sont de même signe pour tout $n \geqslant n_1$.

2) En utilisant les développements limités on sait que, au voisinage de 0,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

d'où $\sin x - \operatorname{th} x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$. Par conséquent,

$$u_n = \sin\frac{1}{n} - \operatorname{th}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} > 0\,.$$

On déduit de la première question, que u_n est positive à partir d'un certain rang.

Exercice 1.6

Centrale PSI 2006, Polytechnique MP 2006 et 2007

Soit la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.
1) Etudier cette suite selon $u_0 \in \mathbb{R}$.
2) On suppose $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de u_n.

On pourra commencer par déterminer α réel tel que $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle, puis appliquer le théorème de Cesàro à cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) La fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x)$ est du signe de x. Puisque $e^{-x} - 1$ est du signe de $-x$, on a toujours $f(x) - x \leqslant 0$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, on en déduit que u_n est décroissante, donc a une limite, finie ou $-\infty$. D'autre part, le seul point fixe de f est 0, donc si u_n converge, sa limite est 0.
• Si $u_0 < 0$, alors par décroissance de (u_n), on a pour tout n, $u_n \leqslant u_0 < 0$, donc (u_n) ne peut tendre vers 0, et par conséquent, elle a pour limite $-\infty$.
• Si $u_0 > 0$, comme l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f, la suite (u_n) est décroissante positive, donc converge, et sa limite est nulle.
• Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est la suite nulle.

2) Cherchons α pour que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ ait une limite finie non nulle. On a

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(e^{-\alpha u_n} - 1)\,.$$

Puisque (u_n) converge vers 0, en utilisant l'équivalent $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+1}$. La suite $(\alpha u_n^{\alpha+1})$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = -1$. La suite $(v_n) = \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ converge alors vers 1. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Le théorème de Cesàro entraîne que la suite (S_n) converge vers 1. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{1}{nu_n}\right)$ converge vers 1, et donc que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 1.7

Centrale PSI 2005

Avec Maple : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\ln|x|$.

1) Donner l'allure de f, le signe de $f(x) - x$, le signe de $f(x) + x$.

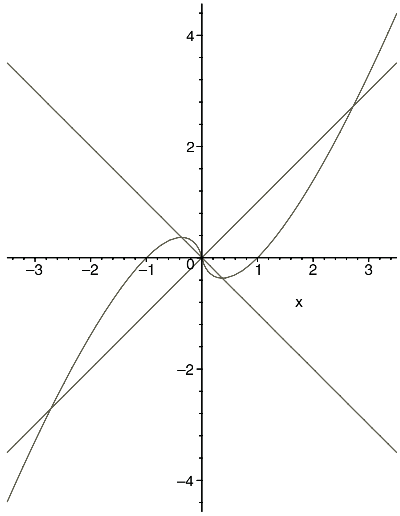
2) Etudier la suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $U_0 = 3$.

3) Donner le signe de $f \circ f(x) - x$.

4) Etudier la suite définie par $W_{n+1} = f(W_n)$ avec $W_0 = 1/4$.

1) Remarquons que la fonction f est impaire et se prolonge par la valeur 0 en 0. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on a $f'(x) = \ln|x| + 1$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction f' est du signe de $x - e^{-1}$. Elle admet donc un minimum local en $1/e$ et $f(1/e) = -1/e$.

Remarquons aussi que $f(x)/x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. La fonction f n'est pas dérivable en 0 et y admet une tangente verticale.



Si $x \neq 0$, on a $f(x) - x = x(\ln|x| - 1)$, d'où
$\{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) - x > 0\} =]-e,\ 0[\cup]e,\ +\infty[$.

De plus $f - \mathrm{Id}$ s'annule en e et $-e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0. Les nombres e, $-e$ et 0 sont donc les trois points fixes de f.

On a aussi $f(x) + x = x(\ln|x| + 1)$, d'où

$\{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) + x > 0\} =]-1/e,\ 0[\cup]1/e,\ +\infty[$.

De plus $f + \mathrm{Id}$ s'annule en $-1/e$, $1/e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0.

2) L'intervalle $I = [e,\ +\infty[$ est stable par f et contient U_0. Sur l'intervalle I, la fonction f vérifie $f(x) > x$, il en résulte que la suite (U_n) est croissante. Si elle admettait une limite finie ce serait un point fixe de f dans l'intervalle $[U_0,\ +\infty[$, ce qui n'est pas possible. Donc la suite (U_n) admet $+\infty$ pour limite.

3) Si $x > 0$, on a $f \circ f(x) - x = f(x \ln x) - x = x \ln x \ln|x \ln x| - x = x \ln x g(\ln x)$, où l'on a posé $g(u) = u + \ln|u| - 1/u$.
La fonction g est croissante sur $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ et s'annule en -1 et en 1.
Il en résulte que $\{u \in \mathbb{R} \mid g(u) > 0\} =]-1,\ 0[\cup]1,\ +\infty[$,
puis que $\{x > 0 \mid g(\ln x) > 0\} =]1/e,\ 1[\cup]e,\ +\infty[$
et finalement que $\{x > 0 \mid f \circ f(x) - x > 0\} =]0,\ 1/e[\cup]e,\ +\infty[$.
Enfin, puisque $f \circ f - \mathrm{Id}$ est impaire,
$\{x \in \mathbb{R} \mid f \circ f(x) - x > 0\} =]-e,\ -1/e[\cup]0,\ 1/e[\cup]e,\ +\infty[$.
De plus $f \circ f - \mathrm{Id}$ s'annule en e, $-e$, $1/e$ et $-1/e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0.
Les nombres e, $-e$, $1/e$, $-1/e$ et 0 sont donc les points fixes de $f \circ f$.

4) L'intervalle $J =]0,\ 1/e[$ est stable par $f \circ f$ et contient W_0. Sur cet intervalle $f \circ f(x) > x$. Alors la suite (W_{2n}) est une suite croissante majorée de $[W_0,\ 1/e]$ et converge vers un point fixe de $f \circ f$ dans cet intervalle. La limite est donc $1/e$. Mais, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{2n+1} = f(W_{2n})$, la suite (W_{2n+1}) converge vers $f(1/e) = -1/e$. Il en résulte que la suite (W_n) n'a pas de limite.

L'exercice suivant est un classique qu'on trouve chaque année dans plusieurs concours.

Exercice 1.8

Centrale MP 2006, Polytechnique PC 2005 et MP 2007 K

Montrer que la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{C}^*$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, converge et trouver sa limite suivant u_0.

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{2}(z+|z|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Si $u_0 \in \mathbb{R}^-$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$.
- Si $u_0 \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout n, $u_n = u_0$.
- Si $u_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$: on remarque d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times\,]-\pi, \pi[\,\setminus\{0\}$ tel que $z = re^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+r\right) = \frac{r}{2}\left(e^{i\theta}+1\right) = \frac{r}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{r}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot 2\cos\frac{\theta}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

En écrivant u_n sous la forme $u_n = r_n e^{i\theta_n}$, on obtient $u_{n+1} = r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}}$ avec $r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.
Ainsi, si on pose $u_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[\,\setminus\{0\}$, on vérifie par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$ et $r_n = r\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$. On en déduit que

$$r_n = r\prod_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{\theta}{2^k}}{2\sin\frac{\theta}{2^k}} = r\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\theta}{2^k}} = r\,\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}.$$

D'où $u_n = r\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}\cdot e^{i\frac{\theta}{2^n}}$. Sachant que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n\cdot\dfrac{\theta}{2^n} = \theta$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = r\,\frac{\sin\theta}{\theta}$.

Exercice 1.9

Extrait de Centrale PC 2006

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0, u_1 > 0$ et

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n u_{n-1}}.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et trouver sa limite.
2) En considérant $1/u_n^2$, trouver un équivalent de u_n.
Indication de l'examinateur : Appliquer le théorème de Cesàro.

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

1) Soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 u_{n-1}}{1 + u_n u_{n-1}} < 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $(*)$ on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, d'où $\ell = 0$.

2) Le théorème de de Cesàro a été introduit comme exercice dans le livre d'Analyse de première année voir exercice 10.14 pages 162 et 163.

Soit $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1 + 2u_n u_{n-1} + u_n^2 u_{n-1}^2}{u_n^2}$, d'où $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} = 2\dfrac{u_{n-1}}{u_n} + u_{n-1}^2$,

Par ailleurs, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1 + u_n u_{n-1}}$. Il en résulte que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers 1 (on a en particulier $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$) et la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ converge vers 2. En appliquant le théorème de Cesàro, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = 2\,.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nu_n^2} = 2$, d'où $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ et donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Exercice 1.10

Centrale PSI 2005, CCP MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1) Déterminer le nombre des racines réelles de f_n pour $n = 0, 1, 2$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_{2n} n'admet pas de racine réelle et que f_{2n+1} admet une unique racine réelle qu'on note r_n.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-(2n+3) < r_n < 0$. En déduire que la suite (r_n) décroit vers $-\infty$.

1) Il est clair que les fonctions $f_0 : x \mapsto f_0(x) = 1$, $f_2 : x \mapsto f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$ n'ont pas de racine réelle et $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 1 + x$ a pour unique racine réelle -1.

2) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante : f_{2n} n' a pas de racine réelle, f_{2n+1} a une unique racine réelle qui est simple. On a montré dans la question précédente que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie et montrons que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• Montrons que $f_{2n+2} > 0$.

On a $f'_{2n+2} = f_{2n+1}$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que la fonction f_{2n+2} décroît sur l'intervalle $]-\infty, r_n]$ et croît sur $[r_n, +\infty[$. La fonction f_{2n+2} atteint donc son minimum en r_n. Déterminons le signe de $f_{2n+2}(r_n)$. Puisque r_n est racine de f_{2n+1}, on a

$$f_{2n+2}(r_n) = f_{2n+1}(r_n) + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0\,.$$

Par ailleurs, $f_{2n+1}(0) = 1$, le nombre réel r_n n'est donc pas nul, et par conséquent, $f_{2n+2}(r_n) > 0$. Ainsi, $f_{2n+2} > 0$.

• Montrons que f_{2n+3} admet une et une seule racine réelle et que cette racine est simple.

Comme $f'_{2n+3} = f_{2n+2} > 0$, la fonction f_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et varie de $-\infty$ à $+\infty$, il existe donc un réel unique r_{n+1} tel que $f_{2n+3}(r_{n+1}) = 0$. Cette racine n'est pas une racine multiple de f_{2n+3}, sinon elle serait aussi racine de la dérivée $f'_{2n+3} = f_{2n+2}$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Le principe de récurrence assure qu'elle est vraie pour tout entier n.

3) • Montrons que $-(2n+3) < r_n < 0$. La fonction f_{2n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour montrer que $-2n-3 < r_n < 0$, il suffit d'établir que $f_{2n+1}(-(2n+3)) < 0 = f_{2n+1}(r_n) < f_{2n+1}(0)$. Comme $f_{2n+1}(0) = 1$, on a immédiatement $r_n < 0$. D'autre part, en écrivant $f_{2n+1}(x)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$, on obtient

$$f_{2n+1}\big(-(2n+3)\big) = -2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+3)^{2k}}{(2k+1)!}(n+1-k) < 0$$

• Montrons que la suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_{2n+3}(r_n) &= f_{2n+1}(r_n) + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{r_n^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= 0 + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+3)!}(2n+3+r_n) > 0 = f_{2n+3}(r_{n+1}). \end{aligned}$$

Puisque f_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $r_n \geqslant r_{n+1}$.

• Montrons enfin que (r_n) tend vers $-\infty$.

Si ce n'était pas le cas, étant décroissante, elle aurait une limite finie $\alpha < 0$. Comme f_{2n+1} est croissante, on aurait $\forall n,\ f_{2n+1}(\alpha) \leqslant f_{2n+1}(r_n) = 0$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n+1}(\alpha) = e^{\alpha}$, d'où par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $e^{\alpha} \leqslant 0$: contradiction.

Exercice 1.11

CCP MP 2006

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n} - \mathrm{E}(\sqrt{n})$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Indication : on pourra étudier la sous-suite de terme général u_{n^2+2n}.

2) *Question de la rédaction :* montrer que tout nombre $\alpha \in [0, 1]$ est limite d'une suite extraite de (u_n).

1) Comme la suite (u_n) est bornée, pour montrer qu'elle diverge, on en extrait deux suites qui convergent vers des limites différentes.

• Comme il y a une racine carrée, on va étudier la sous-suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \mathrm{E}(\sqrt{n^2}) = n - \mathrm{E}(n) = 0$. La suite extraite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

• En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leqslant n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, on a alors $n \leqslant \sqrt{n^2+2n} < n+1$. Ainsi $\mathrm{E}(\sqrt{n^2+2n}) = n$ d'où $u_{n^2+2n} = \sqrt{n^2+2n} - n$.

En multipliant par la quantité conjuguée on obtient, $\sqrt{n^2+2n} - n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n^2+2n}}$.

D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{n^2+2n} = 1$.

• Les suites extraites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{n^2+2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne convergeant pas vers la même limite, il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite.

2) Soit (p_n/q_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers α, où (p_n, q_n) appartient à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p_n \leqslant q_n$.

On a $(nq_n)^2 \leqslant (nq_n)^2 + 2np_n < (nq_n)^2 + 2nq_n + 1 = (nq_n+1)^2$. D'où $nq_n \leqslant \sqrt{(nq_n)^2 + 2np_n} < nq_n + 1$ et donc $\mathrm{E}(\sqrt{(nq_n)^2+2np_n}) = nq_n$. Ainsi $u_{(nq_n)^2+2p_nn} = \sqrt{(nq_n)^2+2np_n} - nq_n$.

En multipliant $\sqrt{(nq_n)^2+2np_n} - nq_n$ par sa quantité conjuguée, on obtient

$u_{(nq_n)^2+2p_nn} = \dfrac{2np_n}{\sqrt{(nq_n)^2+2np_n} + nq_n} = \dfrac{p_n}{q_n}\dfrac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2p_n}{nq_n^2}}}$. Alors la suite $(u_{(nq_n)^2+2np_n})$ converge vers α, car $0 \leqslant \dfrac{p_n}{nq_n^2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{p_n}{q_n}\dfrac{1}{q_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

> **Remarque**
> Les lecteurs intéressés peuvent trouver un résultat plus général dans le chapitre 6 « espaces vectoriels normés ».

1.2 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 1.12

Centrale MP 2005

Soit $(u_n)_{n\geqslant1} \subset [0, +\infty[$ vérifiant : $(*)$ $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1) Établir que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ est décroissante, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

3) Donner un exemple d'une suite réelle vérifiant $(*)$ et telle que u_n ne soit pas équivalente à $1/(2n)$.

1) On a d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < u_n + u_{n+1}$ et d'autre part $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_n + u_{n+1}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.
2) Si la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n(u_n + u_{n+1}) \leqslant 2nu_n \leqslant n(u_{n-1} + u_n)$$

et, par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $(2nu_n)$ converge vers 1, d'où $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1/n^2$ si n est pair et $u_n = 1/n$ si n est impair.
La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ n'est pas monotone mais vérifie $(*)$.

Exercice 1.13

Centrale MP 2006

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution $u_n \in]\,1,\,2\,]$.
2) Déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. On notera ℓ cette limite.
3) Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

1) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $f_n : x \mapsto f_n(x) = x^n - x - n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$. Donc $f_n'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Ainsi, f_n réalise une bijection de $[\,1,\,+\infty\,[$ sur $[\,-n,\,+\infty\,[$. Il existe donc $u_n \in]\,1,\,+\infty\,[$ unique tel que $f_n(u_n) = 0$. Par ailleurs, $f_n(2) = 2^n - 2 - n$. On vérifie par une récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 2$, $2^n - 2 - n \geqslant 0$. On en déduit alors que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \in]\,1,\,2\,]$.

2) D'habitude, on montre que la suite converge en établissant qu'elle est monotone et bornée puis on calcule sa limite. Il se trouve qu'il n'est pas commode de montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est monotone. On va donc calculer la limite directement.
Soit $\varepsilon > 0$, on a $f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n - (1+\varepsilon) - n = e^{n\ln(1+\varepsilon)} - n - 1 - \varepsilon$, donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(1+\varepsilon) = +\infty$ car les exponentielles l'emportent sur les puissances. Il existe alors un entier $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(1+\varepsilon) > 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $1 < u_n < 1 + \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3) Déterminons un équivalent de $u_n - 1$.
On déduit de la relation $\frac{u_n^n}{n} = 1 + \frac{u_n}{n}$ que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^n}{n} = 1 + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
Par conséquent $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (n \ln u_n - \ln n) = 0$ et donc $n \ln u_n - \ln n = o(\ln n)$.
Ce qui prouve que $n \ln u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$ et donc $\ln u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$. Par ailleurs, $\ln u_n = \ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - 1$, car $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. D'où $u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 1.14

Mines - Ponts MP 2007

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2) Pour $n \geqslant 1$, on pose $P_n = X(X-1)\cdots(X-n)$. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in \,]0,\, 1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.

3) Donner un équivalent de r_n quand n tend vers $+\infty$.

1) Voir, par exemple, chapitre 4 séries numériques exercice 4.16 ou exercice 2.3 page 9 dans notre livre d'Analyse de Première année.

2) Soit $n \geqslant 1$. En appliquant le théorème de Rolle sur les intervalles $[\,k,\, k+1\,]$ où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on obtient n racines deux à deux distinctes de P_n'. Comme P_n' est de degré n, on a localisé toutes les racines de P_n'. En particulier, P_n' admet une unique racine dans $]0,\, 1[$.
On peut aussi introduire la fonction f_n définie sur $]0,\, 1[$ par $f_n(x) = P'(x)/P(x)$. On a alors $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \cdots + \dfrac{1}{x-n}$.
La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0,\, 1[$, comme somme de fonctions continues strictement décroissantes. De plus, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f_n(x) = +\infty$, et pour tout $n \geqslant 2$ $\displaystyle f(1/2) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1/2-k} \leqslant 0$. Il en résulte que f_n, donc P_n', s'annule une fois et une seule dans l'intervalle $]0,\, 1[$, pour une valeur r_n telle que $0 < r_n \leqslant 1/2$.

3) On a donc, $\dfrac{1}{r_n} = \dfrac{1}{1-r_n} + \dfrac{1}{2-r_n} + \cdots + \dfrac{1}{n-r_n}$. En utilisant les encadrements $1 < \dfrac{1}{1-r_n} \leqslant 2$, et, si $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-r_n} < \dfrac{1}{k-1}$, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{r_n} \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Et puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $\displaystyle 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on a alors

$$1/r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

Conclusion : $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/\ln n$.

Exercice 1.15

Mines - Ponts MP 2007

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une solution et une seule que l'on notera u_n.
2) Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n lorsque n tend vers l'infini.

1) Comme la fonction $f : x \mapsto f(x) = x + \ln x$ est continue et strictement croissante (comme somme de deux fonctions continues et strictement croissantes) sur $]0, +\infty[$, c'est une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur son image $]\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et l'unique solution de l'équation $x + \ln x = n$ est $u_n = f^{-1}(n)$. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. En outre, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ car $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

2) Pour déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n, on va procéder par étapes.

• En écrivant la relation $u_n + \ln u_n = n$ sous la forme $\dfrac{n}{u_n} = 1 + \dfrac{\ln u_n}{u_n}$ et sachant que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on obtient $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

• Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, il existe une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$, qui converge vers 0, telle que

$$u_n = n(1 + v_n). \tag{1}$$

En remplaçant u_n par $n(1 + v_n)$ dans la relation $u_n + \ln u_n = n$, on obtient $n = n + nv_n + \ln(n(1 + v_n)) = n + nv_n + \ln n + \ln(1 + v_n)$. D'où $v_n = \dfrac{-\ln n}{n} - \dfrac{\ln(1 + v_n)}{n}$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln n}{n}$. Ainsi, au voisinage de $+\infty$, $v_n = \dfrac{-\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. La relation (1) s'écrit alors

$$u_n = n\left(1 + \frac{-\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = n - \ln n + o(\ln n). \tag{2}$$

• En écrivant (2) sous la forme $u_n = n - \ln n + w_n \ln n$ avec $\lim_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 0$ et en reportant dans la relation $u_n + \ln u_n = n$, on obtient l'égalité

$$n = n - \ln n + w_n \ln n + \ln(n - \ln n + w_n \ln n)\,,$$

d'où $w_n \ln n + \ln\left(1 - \dfrac{\ln n}{n} + w_n \dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$. Or $\ln\left(1 - \dfrac{\ln n}{n} + w_n \dfrac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln n}{n}$ car $w_n \dfrac{\ln n}{n}$ est négligeable devant $\dfrac{\ln n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ ou encore $w_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On aboutit finalement à

$$\begin{aligned} u_n &= n - \ln n + w_n \ln n = n - \ln n + \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ln n \\ &= n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

Exercice 1.16

Centrale MP 2006 et 2007 K

1) Montrer que l'équation $\tan x = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une unique solution x_n dans $]\,n\pi - \pi/2,\ n\pi + \pi/2\,[$.
2) Donner un développement asymptotique à quatre termes de x_n.
Indication de la rédaction : Introduire la suite de terme général $y_n = n\pi + \pi/2 - x_n$ et montrer que $y_n = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1) L'application f, définie sur l'intervalle $]\,n\pi - \pi/2,\ n\pi + \pi/2\,[$ par $\tan x - \dfrac{x^3}{x^2-1}$, est dérivable dans cet intervalle et on a

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \tan^2 x + \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} > 0\,.$$

Continue et strictement croissante sur $]\,n\pi - \pi/2,\ n\pi + \pi/2\,[$, f est donc une bijection de $]\,n\pi - \pi/2,\ n\pi + \pi/2\,[$ sur $]\lim\limits_{x\to(n\pi-\pi/2)^+} f(x), \lim\limits_{x\to(n\pi+\pi/2)^-} f(x)[= \mathbb{R}$.
Par conséquent, il existe un unique $x_n \in\,]\,n\pi - \pi/2,\ n\pi + \pi/2\,[$ tel que $f(x_n) = 0$.
On peut même préciser que $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2$ car $f(n\pi) < 0$.
2) Soit $n \geqslant 1$, posons $y_n = n\pi + \pi/2 - x_n$. Comme la fonction tangente est π-périodique, on a $\tan y_n = \tan(\pi/2 - x_n) = \dfrac{1}{\tan x_n} = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n^3}$. En outre, $y_n \in\,]\,0,\ \pi/2\,[$, donc $y_n = \operatorname{Arctan}\dfrac{x_n^2-1}{x_n^3} = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_n^3}\right)$. Par ailleurs, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$ et la fonction arctangente est continue et s'annule en 0, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Ainsi

$$x_n = n\pi + \pi/2 - y_n = n\pi + \pi/2 + o(1) = n\pi\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On en déduit

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il en résulte que $\dfrac{1}{x_n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et l'on a alors $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_n^3} = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
D'où $y_n = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. En utilisant le développement limité en 0 : $\text{Arctan}\, h = h + o(h^2)$, on obtient $y_n = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. D'où l'on déduit finalement $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Remarque
L'énoncé d'origine proposait comme première question d'étudier le même problème avec $\tan x = x$. Le lecteur, intéressé par une solution détaillée de cette question, pourra consulter notre livre d'Analyse de première année, exercice 16.6 pages 338, 339 et 340.

Exercice 1.17

ENS Cachan MP 2006

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction 1-lipschitzienne. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de x_0 dans $[a, b]$ et par la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

• Commençons par rappeler que toute fonction lipschitzienne est continue et que toute fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ continue admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - x$, le lecteur intéressé par des compléments sur la notion de point fixe pourra consulter avec profit notre ouvrage d'analyse de première anné pages 255-257).

• Introduisons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$.
– La fonction g est continue sur $[a, b]$ et $g([a, b]) \subset [a, b]$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.
– Montrons que g est croissante sur $[a, b]$. Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x < y$. Puisque f est 1-lipschitzienne, on a $f(x) - f(y) \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| = y - x$, d'où $f(x) + x \leqslant f(y) + y$ et donc $g(x) \leqslant g(y)$.
• Comme g est croissante sur $[a, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Par ailleurs, elle est bornée, elle est donc convergente.
• Comme g est continue et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = \dfrac{\ell + f(\ell)}{2}$, d'où $\ell = f(\ell)$ et donc ℓ est un point fixe de f.
• *Conclusion* : La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de la fonction f.

Exercice 1.18

Polytechnique MP 2007

Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

La condition donnée s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$ et signifie que la suite $(v_n) = (u_{n+1} - u_n)$ est croissante.

- Si la suite (u_n) est décroissante, comme elle est positive elle converge alors vers une limite finie $\ell \geqslant 0$.
- Si la suite (u_n) n'est pas décroissante, soit alors n_0, le plus petit entier tel que $u_{n_0+1} > u_{n_0}$. Puisque la suite (v_n) est croissante, pour $n \geqslant n_0$, on a, $v_n \geqslant v_{n_0} > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) commence par décroître, puis, à partir du rang n_0 elle est strictement croisante. En outre, pour $n \geqslant n_0 + 1$, on obtient

$$u_n - u_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k \geqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} v_{n_0} = (n - n_0)v_{n_0}\,,$$

d'où $u_n \geqslant u_{n_0} + (n - n_0)v_{n_0}$. Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque
On peut se demander si de telles suites existent. La réponse est oui, il suffit de prendre f convexe positive et de considérer la suite $(f(n))$.

Exercice 1.19

Polytechnique MP 2006, TPE MP 2006 K

On se propose d'étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

1) Montrer que, pour tout $x \in [\,0,\ 1\,[$, on a

$$(1) \quad \ln(1-x) \leqslant -x \quad \text{et} \quad (2) \quad \ln(1-x) \geqslant \frac{-x}{1-x}.$$

2) Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{e}{e-1}$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$. On pose $v_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$.

Montrer que $v_{n,p} \geqslant e^{-\frac{p^2}{n-p}} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} e^{-k}$.

4) Conclure.

1) Les inégalités (1) et (2) résultent de l'étude des fonctions $x \mapsto \ln(1-x)+x$ et $x \mapsto \ln(1-x)+\dfrac{x}{1-x}$, sur l'intervalle $[\,0,\ 1\,[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n-1}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n$. Or, pour tout $p \in \{0,\dots,n-1\}$, on obtient $\ln\left(1-\dfrac{p}{n}\right) \leqslant -\dfrac{p}{n}$ d'après l'inégalité (1), et donc $n\ln\left(1-\dfrac{p}{n}\right) \leqslant -p$, d'où $\left(1-\dfrac{p}{n}\right)^n \leqslant e^{-p}$. Ainsi

$$u_n \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} e^{-p} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$. D'après l'inégalité (2), on a pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$, $n\ln\left(1-\dfrac{k}{n}\right) \geqslant \dfrac{-k}{1-\dfrac{k}{n}} = \dfrac{-nk}{n-k}$.

Or, $\dfrac{nk}{n-k} = k + \dfrac{k^2}{n-k} \leqslant k + \dfrac{p^2}{n-p}$, d'où $n\ln\left(1-\dfrac{k}{n}\right) \geqslant \dfrac{-k}{1-\dfrac{k}{n}} \geqslant -k-\dfrac{p^2}{n-p}$ et donc $\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^n \geqslant e^{-k}e^{-\frac{p^2}{n-p}}$. D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \geqslant e^{-\frac{p^2}{n-p}}\sum_{k=0}^{p} e^{-k}$.

4) On déduit des questions 2) et 3) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $p \leqslant n$

$$e^{-\frac{p^2}{n-p}}\sum_{k=0}^{p} e^{-k} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{e-1}. \qquad (*)$$

On choisit p en fonction de n tel que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} p(n) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{p^2(n)}{n-p(n)} = 0$ (par exemple, $p(n) = \mathbb{E}(\sqrt[3]{n})$). L'inégalité $(*)$ montre alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite $\dfrac{e}{e-1}$.

Remarque
On peut aussi démontrer ce joli résultat en utilisant le théorème de convergence dominée, voir notre livre d'Analyse de deuxième année PC-PSI, exercice 9.19.

Exercice 1.20

Centrale MP 2005 K

Soient les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = |y_n - z_n|, \quad y_{n+1} = |z_n - x_n|, \quad z_{n+1} = |x_n - y_n|.$$

1) Calculer à l'aide de Maple les 10 premières valeurs de ces suites pour $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, \dfrac{3}{16}, 0\right)$. Calculer les 10 premières valeurs de ces suites avec une précision de 10^{-3} lorsque $(x_0, y_0, z_0) = (2, \pi, \sqrt{2})$.
2) Montrer que les trois suites convergent, l'une vers 0 et les deux autres vers des limites égales.

1) • Pour $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, \dfrac{3}{16}, 0\right)$, on peut utiliser la procédure Maple suivante :

```
x:=1;y:=3/16;z:=0;
for i from 1 to 10 do
b:=abs(z-x):c:=abs(y-x):
x:=a:y:=b:z:=c:
print(a,b,c); od:
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
x_n	1	3/16	3/16	3/16	3/16	3/16	3/16	1/16	1/16	1/16	1/16
y_n	3/16	1	5/8	5/8	1/4	1/4	1/8	1/8	0	0	0
z_n	0	13/16	13/16	7/16	7/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16

• Pour $(x_0, y_0, z_0) = (2, \pi, \sqrt{2})$, on adapte la procédure Maple précédente :

```
x:=2;y:=Pi;z:=sqrt(2);
for i from 1 to 10 do
b:=abs(z-x):c:=abs(y-x):
x:=a:y:=b:z:=c:
print(evalf(a,5),evalf(b,5),evalf(c,5)); od:
```

Remarque
Le second argument de la commande evalf précise le nombre de chiffres du résultat demandé et non le nombre de chiffres après la virgule.

Voici les dernières valeurs obtenues.

n	7	8	9	10
x_n	$0,436$	$0,436$	$0,376$	$0,376$
y_n	$0,465$	$0,406$	$0,406$	$0,346$
z_n	$0,030$	$0,030$	$0,030$	$0,030$

En prolongeant les calculs avec Maple, en essayant d'autres valeurs initiales, on constate que l'une des suites semble converger vers 0, tandis que les deux autres semblent converger vers la même limite (éventuellement nulle).

2) On remarque tout d'abord que les trois suites jouent des rôles symétriques ce qui réduit les calculs. De plus, ces trois suites sont à termes positifs à partir du rang 1 et donc il suffit de montrer qu'elles sont décroissantes.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= |y_n - z_n| - |y_{n-1} - z_{n-1}| \\ &= \big||z_{n-1} - x_{n-1}| - |x_{n-1} - y_{n-1}|\big| - |y_{n-1} - z_{n-1}|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ donc

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \big||x_{n-1} - z_{n-1}| - |x_{n-1} - y_{n-1}|\big| - |y_{n-1} - z_{n-1}| \\ &\leqslant |x_{n-1} - z_{n-1} - (x_{n-1} - y_{n-1})| - |y_{n-1} - z_{n-1}| \\ &\leqslant |y_{n-1} - z_{n-1}| - |y_{n-1} - z_{n-1}| = 0. \end{aligned}$$

Décroissante et minorée par 0, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente, appelons ℓ_1 sa limite. On montre de la même façon que les suites $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ convergent et l'on note ℓ_2 et ℓ_3 leurs limites respectives. D'après les propriétés des suites convergentes, les trois réels ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 vérifient

$$\ell_1 = |\ell_2 - \ell_3|, \quad \ell_2 = |\ell_3 - \ell_1| \quad \text{et} \quad \ell_3 = |\ell_1 - \ell_2|.$$

En notant α, β, γ les trois réels ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 rangés dans l'ordre croissant, on a donc

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \quad \text{et} \quad \gamma = \beta + \alpha = \beta - \alpha,$$

d'où $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma$.

Exercice 1.21

Centrale MP 2005 K

Soit (a_n) une suite de nombres réels dans $]-1, +\infty[$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - \ln(1 + a_n)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0 \iff e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$.

1) La fonction $f : x \mapsto f(x) = x - \ln(1 + x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$ est du signe de x. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0, +\infty[$. De même, f est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et $f(]-1, 0]) = [f(0), \lim\limits_{x\to-1} f(x)[= [0, +\infty[$.

L'application f_1 (rep. f_2), définie sur $[0, +\infty[$ (resp. $]-1, 0]$) par $f_1(x) = f(x)$ (resp. $f_2(x) = f(x)$), est une bijection continue de $[0, +\infty[$ (resp. $]-1, 0]$) sur $[0, +\infty[$.

Si $a_n \in [0, +\infty[$, on a alors $a_n = f_1^{-1}(f(a_n))$. Et si $a_n \in [-1, 0[$, on a cette fois $a_n = f_2^{-1}(f(a_n))$. Ainsi, dans tous les deux cas $|a_n| \leqslant |f_1^{-1}(f(a_n))| + |f_2^{-1}(f(a_n))|$.

Comme f_1^{-1} et f_2^{-1} sont continues sur $[\,0,\,+\infty\,[$ et s'annulent en 0, on en déduit que si la suite $(f(a_n))$ converge vers 0, alors la suite $(|f_1^{-1}(f(a_n))| + |f_2^{-1}(f(a_n))|)$ converge vers 0. Il résulte alors du théorème d'encadrement que la suite (a_n) converge vers 0.

2) Remarquons tout d'abord que la relation $e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n}\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^{-n} = 1$ ou encore à $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n - n\ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right)} = 1$ et finalement à $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - n\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)\right) = 0\,.$

• Si $e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_n}{n} - \ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)\right) = 0$. Il résulte alors de la première question que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n/n) = 0$. Ainsi, en utilisant un développement limité, on obtient lorsque $n \to +\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right) = \dfrac{a_n}{n} - \dfrac{a_n^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{a_n^2}{n^2}\right)$ et donc $a_n - n\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right) = \dfrac{a_n^2}{2n} + o\left(\dfrac{a_n^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n^2}{2n}$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2/(2n) = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/\sqrt{n} = 0\,.$

• Supposons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/\sqrt{n} = 0\,$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/n = 0$, et donc $a_n - n\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right) = \dfrac{a_n^2}{2n} + o\left(\dfrac{a_n^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n^2}{2n}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/\sqrt{n} = 0$ entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2/n = 0$, car la fonction $x \mapsto x^2$ est continue. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - n\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)\right) = 0$. D'où $e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n$.

Exercice 1.22

Polytechnique MP 2005 KK

Soit $(u_0, u_1) \in\,]\,0,\,+\infty\,[^{\,2}$. Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

Indication de la rédaction : montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par un nombre réel strictement positif et majorer $|u_n - 4|$ par v_n où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$).

• Si u_0 et u_1 sont nuls, alors $u_n = 0$ pour tout n . On se placera donc dans le cas où l'un de ces deux réels n'est pas nul.

• Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = 2\sqrt{\ell}$ et donc ℓ ne peut valoir que 0 ou 4.

• Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par un nombre réel strictement positif.

Posons $K = \min(1, \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1})$. Ainsi $K \in\,]\,0,\,1\,]$ et $K \leqslant \sqrt{K}$.

Montrons, par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n : \forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant K$.

Par définition de K, on a $u_2 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} \geqslant K$, donc $\mathscr{P}_2$ est vraie .
Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $u_n \geqslant K$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant K$.
Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, on a $\sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{K}$, d'où

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{K} \geqslant K \ ,$$

et l'inégalité est vraie au rang $n+1$.
Le principe de récurrence entraîne que pour tout $n \geqslant 2, u_n \geqslant K$.
Il résulte d'après ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas tendre vers 0.
• Montrons que la suite $(|u_n - 4|)_{n\geqslant 0}$ est majorée par une suite qui converge vers 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2} - 4 = (\sqrt{u_{n+1}} - 2) + (\sqrt{u_n} - 2) = \frac{u_{n+1} - 4}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n} + 2} \ ,$$

d'où l'on tire $|u_{n+2} - 4| \leqslant \dfrac{1}{K+2}(|u_{n+1} - 4| + |u_n - 4|)$.

Si une suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifiant la relation de récurrence $v_{n+2} = \dfrac{1}{K+2}(v_{n+1} + v_n)$ est telle que, pour $n = 2$ et $n = 3$, on ait $|u_n - 4| \leqslant v_n$, alors, une récurrence immédiate, montre que cette inégalité est vraie pour tout $n \geqslant 2$. En effet, si la propriété est vraie aux ordres n et $n+1$, on aura
$$|u_{n+2} - 4| \leqslant \frac{1}{K+2}(|u_{n+1} - 4| + |u_n - 4|) \leqslant \frac{1}{K+2}(v_{n+1} + v_n) \leqslant v_{n+2} \ ,$$
et elle sera encore vraie à l'ordre $n+2$.
Le polynôme caractéristique $P(X) = (K+2)X^2 - X - 1$ a pour racine positive $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{9+4K}}{2(K+2)}$. Ainsi, en posant $M = \max\left(\dfrac{|u_2 - 4|}{\alpha^2}, \dfrac{|u_3 - 4|}{\alpha^3}\right)$ et en prenant $v_n = M\alpha^n$, on a pour tout $n \geqslant 2$, $|u_n - 4| \leqslant M\alpha^n$.
Il reste à vérifier que $\alpha < 1$. On peut le faire directement ou en remarquant que $P(1) = K > 0$ et il en résulte que 1 est à l'extérieur des racines du trinôme P, donc $0 < \alpha < 1$.
Conclusion : la suite $(|u_n - 4|)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

L'exercice suivant est assez astucieux

Exercice 1.23

Mines - Ponts MP 2005 KK
Soit $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$. Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n \ .$$

Bien que la relation $(*)$ ressemble à celle définissant les suites récurrentes linéaires, le comportement des suites vérifiant $(*)$ est très différent. En fait, sauf dans le cas particulier évident où $u_0 = u_1 = 0$, pour lequel on obtient la suite nulle qui converge donc vers 0, les suites obtenues sont périodiques de période 9.
Remarquons que si une suite (u_n) vérifie $(*)$, alors, pour tout $\lambda > 0$, la suite (λu_n) vérifie également $(*)$. On peut donc se contenter d'étudier les cas où u_0 prend une des valeurs -1, 0 ou 1. On pose $|u_1| = a$. On peut alors former le tableau suivant :

a	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$a \geqslant 2$	1	a	$a-1$	-1	$2-a$	$a-1$	$2a-3$	$a-2$	$1-a$	1	a
$1 \leqslant a \leqslant 2$	1	a	$a-1$	-1	$2-a$	$3-a$	1	$a-2$	$1-a$	1	a
$1/2 \leqslant a \leqslant 1$	1	a	$a-1$	$1-2a$	a	$3a-1$	$2a-1$	$-a$	$1-a$	1	a
$0 \leqslant a \leqslant 1/2$	1	a	$a-1$	$1-2a$	$2-3a$	$1-a$	$2a-1$	$-a$	$1-a$	1	a
$a \geqslant 1$	1	$-a$	$a-1$	$2a-1$	a	$1-a$	-1	a	$a+1$	1	$-a$
$0 \leqslant a \leqslant 1$	1	$-a$	$a-1$	1	$2-a$	$1-a$	-1	a	$a+1$	1	$-a$
$a \geqslant 1$	-1	a	$a+1$	1	$-a$	$a-1$	$2a-1$	a	$1-a$	-1	a
$0 \leqslant a \leqslant 1$	-1	a	$a+1$	1	$-a$	$a-1$	1	$2-a$	$1-a$	-1	a
$a \geqslant 0$	-1	$-a$	$a+1$	$2a+1$	a	$-1-a$	1	$2+a$	$a+1$	-1	$-a$
$a > 0$	0	a	a	0	$-a$	a	$2a$	a	$-a$	0	a
$a > 0$	0	$-a$	a	$2a$	a	$-a$	0	a	a	0	$-a$

Pour toutes ces suites, on a $u_0 = u_9$ et $u_1 = u_{10}$, et on en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+9} = u_n$ donc toutes les suites précédentes sont de période 9 et aucune ne converge.

Autre démonstration
L'idée naturelle est de commencer par regarder un cas particulier pour voir comment la suite peut se comporter. Partons par exemple du cas où les deux premiers termes sont négatifs. Posons $u_0 = -\alpha$ et $u_1 = -\beta$ avec α et β dans $\mathbb{R}^+$. On a alors la suite des termes :
$u_0 = -\alpha$; $u_1 = -\beta$; $u_2 = \alpha + \beta$; $u_3 = \alpha + 2\beta$; $u_4 = \beta$; $u_5 = -\alpha - \beta$;
$u_6 = \alpha$; $u_7 = 2\alpha + \beta$; $u_8 = \alpha + \beta$; $u_9 = -\alpha$; $u_{10} = -\beta$.
Ceci montre que $u_0 = u_9$ et $u_1 = u_{10}$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+9} = u_n$ donc la suite est de période 9.
On peut alors remarquer que si l'on prend pour u_0 et u_1 deux des termes consécutifs de la suite précédente (il y a donc 9 possibilités de le faire), la suite obtenue sera elle aussi périodique de période 9. Il ne reste plus qu'à s'assurer que l'on obtient alors tous les cas possibles :

1	2	3
$u_0 = -\alpha$ $u_1 = -\beta$	$u_0 = -\beta$ $u_1 = \alpha + \beta$	$u_0 = \alpha + \beta$ $u_1 = \alpha + 2\beta$
$u_0 \leqslant 0$; $u_1 \leqslant 0$	$0 \leqslant -u_0 \leqslant u_1$	$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2u_0$

4	5	6
$u_0 = \alpha + 2\beta$ $u_1 = \beta$	$u_0 = \beta$ $u_1 = -\alpha - \beta$	$u_0 = -\alpha - \beta$ $u_1 = \alpha$
$0 \leqslant u_1 \leqslant u_0/2$	$0 \leqslant u_0 \leqslant -u_1$	$0 \leqslant u_1 \leqslant -u_0$

7	8	9
$u_0 = \alpha$ $u_1 = 2\alpha + \beta$	$u_0 = 2\alpha + \beta$ $u_1 = \alpha + \beta$	$u_0 = \alpha + \beta$ $u_1 = -\alpha$
$0 \leqslant 2u_0 \leqslant u_1$	$0 \leqslant u_0/2 \leqslant u_1 \leqslant u_0$	$0 \leqslant -u_1 \leqslant u_0$

2 Fonctions réelles d'une variable réelle

Les fonctions à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle ont déjà été étudiées dans le livre de première année. L'objectif est ici d'en consolider les acquis, ce chapitre faisant l'objet de nombreuses questions aux concours. Les exercices sélectionnés ici ont été ordonnés selon leur difficulté et leur ensemble constitue un excellent moyen de **préparation** pour l'élève désireux d'aborder sereinement l'entrée en deuxième année et un excellent support de **révision** pour les lecteurs au moment de la préparation aux épreuves orales.

2.1 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 2.1

CCP PC 2006

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x < y < z$. Montrer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 1 & y & e^y \\ 1 & z & e^z \end{vmatrix} > 0.$

Question de la rédaction : Montrer que le résultat ci-dessus reste vrai lorsqu'on remplace la fonction exponentielle par toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement convexe.

Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes du déterminant.

• En remplaçant L_3 par $L_3 - L_2$ puis L_2 par $L_2 - L_1$, on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & y - x & e^y - e^x \\ 0 & z - y & e^z - e^y \end{vmatrix} = (y - x)(e^z - e^y) - (z - y)(e^y - e^x).$$

Puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, $c \in]\,x, y\,[$ tel que $e^y - e^x = (y - x)e^c$ et $d \in]\,y, z\,[$ tel que $e^z - e^y = (z - y)e^d$. Il en résulte, puisque $c < y < d$, que

$$\Delta = (y - x)(z - y)(e^d - e^c) > 0.$$

• Puisque $y \in]\,x, z\,[$, il existe $\lambda \in]\,0, 1\,[$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. En remplaçant L_2 par $L_2 - (\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_3)$, on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 0 & f(y) - (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = (z - x)(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z) - f(y)).$$

Il en résulte, en vertu de la convexité stricte de f, que $\Delta > 0$.

Exercice 2.2

Saint-Cyr MP 2006, CCP PC 2005

Soit I un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On pose

$$A = \{x \in I \mid f \circ f(x) = x\} \text{ et } B = \{x \in I \mid f(x) = x\}.$$

1) Montrer que si f est strictement croissante sur I, alors $A = B$.
2) *Question de la rédaction :* montrer, par un exemple, que le résultat de 1) est faux lorsque f est strictement décroissante sur I.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\exp(ae^{ax}) = x$, où $a > 0$.

1) • Sans hypothèse sur f, si x est dans B, alors $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$ et x est dans A. Donc $B \subset A$.
• Si x n'est pas dans B, alors $f(x) \neq x$. Ou bien $f(x) < x$ et comme f est strictement croissante, on a $f(f(x)) < f(x)$ d'où $f \circ f(x) < x$.
Ou bien $f(x) > x$ et comme f est strictement croissante, on a $f(f(x)) > f(x)$ d'où $f \circ f(x) > x$. Dans les deux cas $f \circ f(x) \neq x$. Il en résulte que x n'est pas dans A. Donc $I \setminus B \subset I \setminus A$ et alors $A \subset B$. D'où $A = B$.

2) Soit f la fonction définie sur $I = [\,0, 1\,]$ par $f(x) = 1 - x$. Dans ce cas, $A = [\,0, 1\,]$ et $B = \{1/2\}$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $f(x) = e^{ax}$. La fonction f est strictement croissante lorsque $a > 0$ et les ensembles A et B sont égaux. Comme $f(x) > 0$, ils sont inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \geqslant 0$, posons $g(x) = f(x) - x$ et étudions les variations de g. On a $g'(x) = f'(x) - 1 = ae^{ax} - 1$.
Lorsque $a \geqslant 1$, on a $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante. Son minimum est atteint en 0 et vaut $g(0) = 1$. Donc g ne s'annule pas et $A = B = \varnothing$.

Lorsque $0 < a < 1$, la fonction g' s'annule en $x_0 = -\dfrac{\ln a}{a}$, et le minimum de g est atteint en ce point. Il vaut $m = \dfrac{1 + \ln a}{a}$.
La fonction g décroît de 1 à m lorsque x varie de 0 à x_0 et croît de m à $+\infty$ lorsque x varie de x_0 à $+\infty$. Donc
– lorsque $m > 0$ c'est-à-dire pour $a \in]\,1/e,\ 1\,[$, la fonction g ne s'annule pas et de nouveau $A = B = \varnothing$,

– lorsque $m < 0$ c'est-à-dire pour $a \in]\,0,\ 1/e\,[$, la fonction g s'annule une fois et une seule dans chacun des intervalles $]\,0,\ m\,[$ et $]\,m,\ +\infty\,[$, et donc les ensembles A et B contiennent deux éléments.

– lorsque $m = 0$, c'est-à-dire pour $a = 1/e$, la fonction g est nulle en e uniquement et $A = B = \{e\}$.

Exercice 2.3

Centrale PC 2005

Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est contractante si elle est $\lambda-$lipschitzienne avec $0 \leqslant \lambda < 1$.

1) Soit f une application contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un unique point fixe α, qui est la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Une application $1-$lipschitzienne admet-elle un point fixe ?
3) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f' pour que f soit contractante sur $\mathbb{R}$.
4) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2 + 2}{1 + u_n^2}$. Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.

1) Soit $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc g également. Montrer que f admet un point fixe revient à montrer que g s'annule.

• **Existence du point fixe**. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda|x - a|$ donc $f(a) - \lambda|x - a| \leqslant f(x) \leqslant f(a) + \lambda|x - a|$.
Pour tout $x > a$, on a $g(x) \leqslant f(a) - \lambda a - (1 - \lambda)x$. Comme $1 - \lambda > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(a) - \lambda a - (1 - \lambda)x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout $x < a$, on a $g(x) \geqslant f(a) - \lambda a - (1 - \lambda)x$, et on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(a) - \lambda a - (1 - \lambda)x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires que g s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$. La fonction f admet bien un point fixe.

• **Unicité du point fixe**. Si α_1 et α_2 sont deux points fixes de f, alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leqslant \lambda|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Or, $\lambda < 1$, donc ceci n'est possible que si $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$. Le point fixe est alors unique.

Remarque 1

On aurait pu montrer que l'application g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ en montrant que g est strictement décroissante.

• **Convergence de la suite (u_n) vers le point fixe**
Puisque $f(\alpha) = \alpha$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \lambda|u_n - \alpha|$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \lambda|u_n - \alpha|$, et l'on en déduit par récurrence que

$|u_n - \alpha| \leqslant \lambda^n |u_0 - \alpha|$. Comme la suite (λ^n) converge vers 0, il résulte du théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers α.

Remarque 2

Les résultats ci-dessus restent vrais si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle **fermé** I tel que $f(I) \subset I$.

2) L'exemple de l'application $x \mapsto x+1$ qui est $1-$lipschitzienne montre qu'une telle application peut ne pas avoir de point fixe.

3) Si f est λ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a alors, pour tout $(x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, l'inégalité $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \lambda$.

Lorsque f est dérivable, $|f'(x)| = \lim\limits_{h \to 0} \left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \lambda$. On en déduit que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \leqslant \lambda < 1$.

Réciproquement, supposons f dérivable telle que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| < 1$. Soient x et y réels. Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$.

La fonction f est donc lipschitzienne de rapport $\lambda = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$, et puisque $\lambda < 1$, la fonction f est contractante.

Conclusion : lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est contractante si et seulement si la fonction f' est bornée avec $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| < 1$.

Mise en garde : il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| < 1$ mais $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = 1$. Bien entendu, f n'est pas contractante dans ce cas. Pour un exemple, prenez la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$.

4) La fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Comme f' est dérivable, on étudie ses variations en calculant $f''(x) = 2\,\dfrac{1 - 3x^2}{(x^2+1)^3}$.

Sur $[0, +\infty[$, la fonction f' est positive et atteint son maximum pour $1/\sqrt{3}$. Alors, puisque f' est impaire, on a $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = f'(1/\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} < 1$. La fonction f est donc contractante. Elle admet un unique point fixe ℓ et la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque

En utilisant un logiciel de calcul formel, par exemple avec Maple

```
f:=x->(3*x^2+2)/(1+x^2);x:=1.;
for i from 1 to 10 do x:=f(x) od;
```

On obtient comme valeur approchée de ℓ le nombre 2,89328919. On remarquera que la constante de contraction étant « petite » (proche de 0,65), la convergence vers ℓ est très rapide.

Exercice 2.4

Centrale MP 2007

1) Montrer que l'application $\psi : x \in [1, e] \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est une contraction sur $[1, e]$.
2) Calculer $\inf\{x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+1)^x \leqslant x^{x+1}\}$.

1) Etudions les variations de ψ sur $I = [1, +\infty[$.
La fonction ψ est dérivable sur I, et l'on a $\psi'(x) = \psi(x)g(x)$, où l'on a posé $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. La fonction g est dérivable sur I et l'on a $g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)^2}$. Donc g est décroissante sur I. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ on a, sur I, l'encadrement $0 \leqslant g(x) \leqslant g(1) = \ln 2 - 1/2$. Donc $\psi'(x) > 0$ et la fonction ψ est croissante. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = e$. Il en résulte que, si $x \in I$, on a $\psi(x) \leqslant e$, et donc $0 < \psi'(x) \leqslant e(\ln 2 - 1/2) \approx 0,52 < 1$.
De plus $\psi(1) = 2$ et on en déduit que $\psi([1, e]) \subset [1, e]$, et que $\sup\limits_{x\in[1,e]} |\psi'(x)| < 1$.
Donc la fonction ψ est contractante sur $[1, e]$.
On remarque également que sur I, la fonction $x \mapsto \psi(x) - x$ a une dérivée négative. Elle est donc strictement décroissante sur I.

2) Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+1)^x \leqslant x^{x+1}\}$. On a également $E = \{x \in \mathbb{R}^{+*}, \psi(x) \leqslant x\}$.
Lorsque $x \in]0, 1[$, on a $(x+1)^x > 1 > x^{x+1}$ et x n'appartient pas à E. Sur I la fonction $x \mapsto \psi(x) - x$ est strictement décroissante et varie de 1 à $-\infty$. Comme elle est continue elle s'annule en un point ℓ et un seul. Il en résulte que $\inf E = \ell$ et ℓ est l'unique point fixe de ψ.
Il résulte des résultats de l'exercice précédent, que, quel que soit le point $x_0 \in [1, e]$, la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \psi(x_n)$ converge vers cet unique point fixe ℓ. Un calcul effectué avec Maple donne $2,293166$ comme valeur approchée de ℓ.

Exercice 2.5

CCP PC 2006, Mines-Ponts MP 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) Montrer que f une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3) En admettant que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, déterminer les cinq premiers termes du développement limité de f^{-1} au voisinage de 0.

1) Montrons que f est dérivable en 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Comme $\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$.
Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = \dfrac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}$. La fonction f' est du même signe sur $\mathbb{R}^*$ que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (2x^2-1)e^{x^2}+1$.
Cette fonction u est dérivable et l'on a $u'(x) = 2x(2x^2+1)e^{x^2}$. On en déduit que $u'(x)$ est du signe de x. Alors u est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et puisque $u(0) = 0$, on en déduit que u, et donc également f', sont strictement positives sur $\mathbb{R}^*$. En outre $f'(0) > 0$. On en conclut que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : la fonction f est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.
3)

Remarque
On peut montrer que f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant les séries entières.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et que $f'(0) \neq 1$, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $f(0) = 0$, donc admet des développements limités de tous ordres. Par ailleurs, la fonction f est impaire, donc f^{-1} est également impaire. La fonction f^{-1} admet donc un développement limité au voisinage de 0 de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
On a facilement le développement limité de f à l'ordre 5. En effet, puisque $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, on obtient

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6), \quad \text{d'où} \quad f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

En effectuant le développement limité de $f^{-1} \circ f$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, on obtient

$$(f^{-1} \circ f)(x) = af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + o(x^5).$$

Par ailleurs

$$(f(x))^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2} + o(x^5), \quad \text{et} \quad (f(x))^5 = x^5 + o(x^5).$$

D'où
$$(f^{-1} \circ f)(x) = ax + \left(\frac{a}{2} + b\right) x^3 + \left(\frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c\right) x^5 + o(x^5)\,.$$
D'autre part, pour tout x réel, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Ainsi, par unicité du développement limité, on obtient le système $a = 1$, $\dfrac{a}{2} + b = \dfrac{a}{6} + \dfrac{3b}{2} + c = 0$ d'où l'on tire $b = -1/2$ et $c = 7/12$.

On a finalement $f^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{7x^5}{12} + o(x^5)\,.$

Exercice 2.6

CCP MP 2005

Soit n un entier $\geqslant 2$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) La fonction f admet-elle un développement limité en 0 ? Si oui à quel ordre ?

1) La fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables, et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables. Par ailleurs, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x^{n-1} \sin \dfrac{1}{x}$. Puisque $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ a une limite nulle en 0, et puisque $x \mapsto \sin(1/x)$ est bornée, il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) D'après ce qui précède, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, et, en écrivant, pour tout x non nul, $f(x) = x^{n-1}\, x \sin \dfrac{1}{x}$ on en déduit que $f(x) = o(x^{n-1})$. Donc f admet un développement limité en 0 d'ordre $n-1$.

Supposons que f possède un développement d'ordre n en 0. On aurait alors $f(x) = a_n x^n + o(x^n)$, et donc $a_n = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$. Mais $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0, d'où une contradiction. L'ordre $n-1$ est donc maximal.

Exercice 2.7

Mines - Ponts MP 2006

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

1) Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un C^∞−difféomorphisme.

2) On note g l'application réciproque de $f|_I$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

1) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et l'on a, pour tout x de cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$. Cette fonction s'annule si et seulement si $x = e - 1$. Elle est positive sur $]-1, e-1[$ et négative sur $]e-1, +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]-1, e-1[$ et c'est le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel elle est strictement monotone.
On a $f(]-1, e-1[) =]\lim_{x\to -1} f(x), f(e-1)[=]-\infty, 1/e[$. Donc l'application réciproque g est définie sur $]-\infty, 1/e[$. Comme f' ne s'annule pas sur $]-1, e-1[$, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1/e[$. De plus, $g(0) = 0$ car $f(0) = 0$.
2) Soit $x \in I$, on a $y = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ si et seulement si $x = g(y)$. D'où $y = \dfrac{\ln(1+g(y))}{1+g(y)}$ et donc $1 + g(y) = e^{y(1+g(y))} = e^y e^{yg(y)}$.
Par ailleurs g étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k y^k + o(y^n)$ avec $a_1 = g'(0) = 1/f'(0) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et montrons que $a_n \geqslant 0$.
Sachant que $yg(y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k y^{k+1} + o(y^{n+1})$, les coefficients du développement limité à l'ordre n de la fonction $y \mapsto e^{yg(y)}$ sont positifs par composée des développements limités. En outre, les coefficients du développement limité de $y \mapsto e^y$ sont aussi positifs. Donc ceux de $y \mapsto 1 + g(y)$ le sont aussi ; en particulier $a_n \geqslant 0$.
On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$.

Exercice 2.8

Mines - Ponts MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a, b) \in [0, +\infty[^2$ tel que $|f(x)| \leqslant ax + b$ pour tout $x \geqslant 0$.

Il existe $\eta > 0$ tel que, $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ et $|x - y| \leqslant \eta$ impliquent l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
Soit t dans $[0, +\infty[$ et soit n la partie entière de t/η. On a donc $n\eta \leqslant t < n\eta + \eta$, ou encore $|t - n\eta| \leqslant \eta$, et par suite $|f(t) - f(n\eta)| \leqslant 1$. Par ailleurs, comme $|(p+1)\eta - p\eta| \leqslant \eta$, on aura aussi $|f((p+1)\eta) - f(p\eta)| \leqslant 1$. On en déduit

$$\begin{aligned}
|f(t)| &\leqslant |f(t) - f(n\eta)| + |f(n\eta)| \\
&\leqslant |f(t) - f(n\eta)| + \sum_{p=1}^{n} |f(p\eta) - f((p-1)\eta)| + |f(0)| \\
&\leqslant n + 1 + |f(0)| .
\end{aligned}$$

Mais $n \leqslant t/\eta$, donc $|f(t)| \leqslant \dfrac{t}{\eta} + 1 + |f(0)|$. On obtient bien le résultat voulu, avec $a = 1/\eta$, et $b = 1 + |f(0)|$.

Exercice 2.9

Mines - Ponts MP 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.
1) Montrer que si f' est bornée sur $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que si $|f'(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, alors f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1) Si f n'est pas la fonction nulle, notons $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$. Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. Donc si $|x - y| \leqslant \varepsilon/M$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ et f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\alpha > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. En vertu du théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in [\, n, n + \alpha\,]$ tel que $|f(n + \alpha) - f(n)| = \alpha |f'(c_n)|$. Comme $c_n \geqslant n$, la suite $(c_n)_{n>0}$ admet $+\infty$ pour limite. Alors, puisque $|f'(x)|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, la suite $(|f(c_n)|)_{n>0}$ admet $+\infty$ pour limite. En particulier, il existe n_0 tel que $|f(n_0 + \alpha) - f(n_0)| \geqslant 1$. On pose $x_0 = n_0 + \alpha$ et $y_0 = n_0$. On a montré que pour tout $\alpha > 0$, il existe x_0 et y_0 dans $\mathbb{R}^+$ tels que $|x_0 - y_0| \leqslant \alpha$ et $|f(x_0) - f(y_0)| > 1/2$. La fonction f n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

> **Remarque**
> On peut montrer que la réciproque est fausse, en considérant par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x}$ et prolongée en 0 par 0.

Exercice 2.10

Polytechnique MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable à dérivée bornée telle que $f(n) \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Nous avons à montrer : pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que si $x \in [\, B, +\infty\,[$, alors $f(x) > A$.

Puisque f' est bornée, $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ existe.

Soit $A > 0$. Puisque $\lim_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$, il existe $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ implique $f(n) \geqslant A + M$.

Soit $x \geqslant N$, on a $\mathbb{E}(x) \geqslant N$ et donc $f(\mathbb{E}(x)) \geqslant A + M$. Par ailleurs, Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout réel x,

$$|f(x) - f(\mathbb{E}(x))| \leqslant M(x - \mathbb{E}(x)) \leqslant M, \quad \text{et donc} \quad f(x) \geqslant f(\mathbb{E}(x)) - M.$$

Ainsi pour tout $x \geqslant N$, on a $f(x) = f(\mathbb{E}(x)) + f(x) - f(\mathbb{E}(x)) \geqslant A + M - M = A$.

Exercice 2.11

Polytechnique MP 2007

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \to \ell$ et $xf'(x) \to \ell'$ quand $x \to 0$. Que dire de ℓ' ?

Prolongeons f en 0 en posant $f(0) = \ell$. La fonction f est alors continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis. Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe c_n dans $]0, 1/n[$ tel que $\dfrac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = f'(c_n)$. On en déduit que $c_n f'(c_n) = n\, c_n(f(1/n) - f(0))$. Comme c_n appartient à $]0, 1/n[$, on a $0 \leqslant n\, c_n \leqslant 1$ et par conséquent $|c_n f'(c_n)| \leqslant |f(1/n) - f(0)|$. Comme, la suite (c_n) converge vers 0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n f'(c_n) = \ell'$ et, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on en déduit que $\ell' = 0$.

Exercice 2.12

Polytechnique MP 2007

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ deux fois dérivable, majorée et telle que $f'' \geqslant \alpha^2 f$ où $\alpha > 0$ donné.

1) Montrer que $f' \leqslant 0$.
2) Montrer que $f(x)$ admet pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Montrer que $f'(x)$ admet pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4) Déduire de ce qui précède que $\forall\, x \geqslant 0,\ \alpha f(x) \leqslant -f'(x)$.
5) Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant f(0)\exp(-\alpha x)$.

Indication de la rédaction : introduire la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x)e^{\alpha x}$.

1) Par hypothèse $f'' \geqslant \alpha^2 f \geqslant 0$, la fonction f' est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Montrons que $f' \leqslant 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $f'(a) > 0$. On a alors, en vertu du théorème des accroissements finis et de la croissance de f' : $\forall x \in [a, +\infty[\quad f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est en contradiction avec le fait que f soit majorée.

2) Puisque f' est négative, f est alors décroissante et admet donc une limite en $+\infty$. De plus, f est minorée par 0, elle admet donc une limite positive qu'on notera ℓ. Montrons que $\ell = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > 0$. On aura alors :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f''(x) \geqslant \alpha^2 f(x) \geqslant \alpha^2 \ell$. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x) - \alpha^2 \ell x$, sera croissante et on aura $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) - \alpha^2 \ell x \geqslant f'(0)$. Il en résultera alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Ce qui contredit $f' \leqslant 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) Comme f' est croissante, elle admet une limite qu'on notera ℓ' en $+\infty$. En outre $f' \leqslant 0$, donc $\ell' \leqslant 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell' < 0$.
Comme f' est croissante sur $[\,0, +\infty\,[$, on a pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) \leqslant \ell'$ et donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant \ell' x + f(0)$. Il en résulte alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4) Puisque $f'' \geqslant \alpha^2 f$ et $f' \leqslant 0$, on a donc $2 f' f'' \leqslant 2\alpha^2 f f'$. Il en résulte que l'application $\alpha^2 f^2 - (f')^2$ est croissante sur $[\,0, +\infty\,[$ et on a alors

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad (\alpha f(x))^2 - (f'(x))^2 \leqslant \lim_{x \to +\infty} \left((\alpha f(x))^2 - (f'(x))^2\right) = 0.$$

Comme $\alpha f \geqslant 0$ et $f' \leqslant 0$, on a alors $\alpha f \leqslant -f'$.

5) L'application $g \;:\; x \mapsto f(x) \exp(\alpha x)$ est dérivable sur $[\,0, +\infty\,[$ de dérivée $g' \;:\; x \mapsto \big(f'(x) + \alpha f(x)\big) \exp(\alpha x)$. Comme $g' \leqslant 0$ d'après la question précédente, g est donc décroissante sur $[\,0, +\infty\,[$ et on a pour tout $x \in [\,0, +\infty\,[$, $g(x) \leqslant g(0) = f(0)$. d'où $f(x) \leqslant f(0) \exp(-\alpha x)$.

Exercice 2.13

Polytechnique MP 2006

On se propose de déterminer toutes les fonctions f appartenant à $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\quad (*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2\, f(x) f(y)$.
1) Soit f vérifiant $(*)$. Montrer que si $f(0) \neq 0$, alors $f(0) = 1$ et f est paire.
2) Soit f vérifiant $(*)$ et de classe $\mathscr{C}^2$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f''(0) f(x)$. En déduire toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $(*)$.
3) Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Conclure.

1) En appliquant la formule $(*)$ avec $x = y = 0$, on obtient $2 f(0) = 2 f(0)^2$. Donc si $f(0) \neq 0$, on a $f(0) = 1$.
En appliquant la formule $(*)$ avec $x = 0$, on obtient $f(y) + f(-y) = 2 f(0) f(y)$. Puisque $f(0) = 1$, on en déduit que $f(-y) = f(y)$. La fonction f est donc paire.

2) Etudions tout d'abord le cas où $f(0) = 0$. En appliquant la formule $(*)$ avec $y = 0$, on obtient $2 f(x) = 0$ et la fonction f est la fonction constante nulle.
Supposons désormais que $f(0)$ est non nul. On a donc $f(0) = 1$.
En dérivant la relation $(*)$ deux fois par rapport à la variable x, on obtient $f''(x+y) + f''(x-y) = 2 f''(x) f(y)$, puis en dérivant deux fois la relation $(*)$ par rapport à la variable y, on obtient cette fois, $f''(x+y) + f''(x-y) = 2 f(x) f''(y)$.
On en déduit que, quels que soient x et y réels, on a $f''(x) f(y) = f(x) f''(y)$, et en particulier, en prenant $y = 0$, on a, pour tout x réel, $f''(x) = f''(0) f(x)$.

Si l'on pose $\alpha = f''(0)$, la fonction f est la solution paire de l'équation différentielle $y'' = \alpha y$, qui vaut 1 en 0 (on a donc $y'(0) = 0$).

Cette solution est connue : $\begin{cases} \text{si } \alpha = \omega^2 > 0, \text{ on a alors } f(x) = \operatorname{ch}(\omega x)\,, \\ \text{si } \alpha = -\omega^2 < 0, \text{ on a alors } f(x) = \cos(\omega x)\,, \\ \text{si } \alpha = 0, \text{ on a alors } f(x) = 1\,. \end{cases}$

On vérifie que les solutions obtenues satisfont bien $(*)$. C'est bien sûr le cas de la fonction constante 1 ; pour les deux autres fonctions, cela résulte de la formule de trigonométrique $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$ et de son analogue hyperbolique $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$.

3) Soit f vérifiant $(*)$. Supposons que f n'est pas la fonction nulle. Notons F sa primitive nulle en 0. La fonction F n'est donc pas la fonction nulle. En intégrant la relation $(*)$ pour x fixé, on obtient $\displaystyle\int_0^y f(x+t)\,dt + \int_0^y f(x-t)\,dt = 2f(x)\int_0^y f(t)\,dt$, ce qui peut encore s'écrire, en effectuant des changements de variable dans les deux premières intégrales $\displaystyle\int_x^{x+y} f(t)\,dt + \int_{x-y}^x f(t)\,dt = 2f(x)\int_0^y f(t)\,dt$, et finalement $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y)$. Choisissons y tel que $F(y)$ ne soit pas nul, alors $f(x) = \dfrac{F(x+y) - F(x-y)}{2F(y)}$, et puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$, il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors F est de classe $\mathscr{C}^2$, donc f également. Il n'y a donc pas d'autres solutions de $(*)$ que celles trouvées dans 2).

2.2 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 2.14

Polytechnique MP 2006 KK

On se propose de déterminer toutes les fonctions continues f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, $2x - f(x) \in [0,1]$ et $f(2x - f(x)) = x$.

1) Soit f une solution. Montrer que f est bijective sur $[0,1]$ et a pour fonction réciproque la fonction g, définie pour tout $x \in [0,1]$, par $g(x) = 2x - f(x)$.

2) Conclure.

1) Soit f une solution.

• La fonction g est une application de $[0,1]$ dans lui-même, et l'on a $f \circ g = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.
Il en résulte que f est surjective et g est injective.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a $2x - f(x) \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant 1$, donc on obtient l'encadrement $1 \geqslant f(x) \geqslant 2x - 1$. En faisant tendre x vers 1, on en déduit que $f(1) = 1$ et aussi $g(1) = 1$.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a $2x - f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$, donc on obtient l'encadrement $2x \geqslant f(x) \geqslant 0$. En faisant tendre x vers 0, on en déduit que $f(0) = 0$ et aussi $g(0) = 0$. Comme g est continue, il en résulte qu'elle est surjective. Donc g est bijective. Alors f est aussi bijective et $f^{-1} = g$. On en déduit que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\dfrac{1}{2}(f(x) + f^{-1}(x)) = x$.

Soit $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}^{-1}$) la courbe représentative de f (resp. de f^{-1}).

Si $(x, y) = (x, f(x))$ est un point de $\mathscr{C}$, alors $(x, 2x - y) = (x, g(x))$ est un point de $\mathscr{C}^{-1}$. Par ailleurs les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, donc $(2x - y, x)$ est un point de $\mathscr{C}$. L'application Φ définie par $\Phi(x, y) = (2x - y, x)$ est donc une application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$. C'est une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En remarquant que $(A - I)^2 = 0$, on a

$$A^n = (I + (A - I))^n = I + n(A - I) = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix},$$

et l'on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$\Phi^n(x, y) = ((1+n)x - ny, nx + (1-n)y) = (x + n(x - y), y + n(x - y))$, et ce point appartient à $\mathscr{C}$. Mais la suite $(x + n(x - y))_{n \geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $x = y$. On a donc nécessairement $f(x) = x$. La seule fonction possible est donc $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ et elle convient de manière évidente.

Exercice 2.15

Mines - Ponts MP 2006 K

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \notin \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = ax + b$. On note S l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f \circ f = h$.

1) Montrer que $S = \varnothing$ si $a < 0$.

Rappel de la rédaction : Si une fonction réelle est continue et injective sur un intervalle I, alors elle est strictement monotone sur I. Voir exercice 13.17 page 264 dans notre livre d'Analyse de première année.

Désormais on suppose $a > 0$ (et $a \neq 1$).

2) Montrer que h est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.

3) Soit $f \in S$. Montrer que $h^{-1} \circ f \circ h = f$. En déduire une expression de f.

Indication de l'examinateur : on commencera par le cas $0 < a < 1$.

1) Soit $f \in S$, montrons tout d'abord que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

• Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f \circ f(x_1) = f \circ f(x_2)$, et donc $ax_1 + b = ax_2 + b$, d'où l'on déduit $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

• Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f\left(f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)\right) = y$, donc f est surjective.

En outre, f est continue et strictement monotone, et $f \circ f$ est croissante. Mais l'application $x \mapsto ax + b$ est décroissante si $a < 0$. Donc si $a < 0$ l'ensemble $\mathscr{S}$ est vide.

2) On cherche α tel que $h(x)-\alpha=a(x-\alpha)$. On en tire $h(x)=ax+\alpha(1-a)$ et il suffit de prendre $\alpha=b/(1-a)$. Donc h est une homothétie de centre $\alpha=b/(1-a)$ et de rapport a .

3) Comme $f\circ f=h$, on a aussi $h^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}$, donc

$$h^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f\circ f=f\,.$$

On en déduit que $h\circ f=f\circ h$, et par récurrence, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$, la relation $h^n\circ f=f\circ h^n$. La fonction h^n est une homothétie de centre α et de rapport a^n , donc $h^n(x)-\alpha=a^n\,(x-\alpha)$, d'où $h^n(x)=a^nx+b\,\dfrac{1-a^n}{1-a}$. En particulier $h^n(x)=\alpha$ si et seulement si $x=\alpha$.

• Supposons tout d'abord que $0<a<1$.

Pour tout x réel, la suite $(h^n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers α. Alors, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $h^n(f(x))=f(h^n(x))$, on obtient, compte-tenu de la continuité de f, la relation $\alpha=f(\alpha)$.

Si $x\neq\alpha$, on a alors $\dfrac{f(h^n(x))-f(\alpha)}{h^n(x)-\alpha}=\dfrac{h^n(f(x))-\alpha}{h^n(x)-\alpha}$.

Mais en simplifiant le membre de droite, on constate qu'il ne dépend plus de n et on obtient $\dfrac{f(h^n(x))-f(\alpha)}{h^n(x)-\alpha}=\dfrac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $(h^n(x))$ converge vers α et le membre de gauche tend vers $f'(\alpha)$. On obtient donc, pour tout $x\neq\alpha$ la relation $\dfrac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}=f'(\alpha)$, d'où l'on déduit $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+\alpha$. Les éléments de $\mathscr{S}$ sont donc des homothéties de centre α. Si λ est le rapport d'une de ces homothéties, celui de $f\circ f$ vaut λ^2, et donc $\lambda^2=a$.

Conclusion : $\mathscr{S}=\{x\mapsto\varepsilon\sqrt{a}(x-\alpha)+\alpha\mid\varepsilon=\pm1\}$.

• Si maintenant $a>1$, alors $f^{-1}\circ h^{-1}=h^{-1}\circ f^{-1}$ avec $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}$. Puisque $1/a<1$, on peut appliquer le cas précédent en remplaçant a et b respectivement par $1/a$ et $-b/a$. Le centre de l'homothétie h^{-1} étant le même que celui de h, on obtient que f^{-1} est une des homothéties de centre α et de rapport $\varepsilon/\sqrt{a}$, avec $\varepsilon=\pm1$. Donc on retrouve les mêmes fonctions f que dans le cas précédent.

Remarque : on se sert uniquement du fait que f est dérivable au point $b/(1-a)$.

Exercice 2.16

Centrale MP 2006

On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\pi/2}|xt-\sin t|$.

Montrer que f est bien définie, continue et admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Vérifier sans calcul numérique que $f(2/\pi)<f(1)$.

• Soient x un réel, et g_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_x(t) = xt - \sin t$. Comme la fonction g_x est continue sur le ségment $[\,0,\ \pi/2\,]$, elle est bornée et il en résulte que $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant \pi/2} |xt - \sin t|$ existe. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

• Soient x et y deux nombres réels.
Pour tout $t \in [\,0,\ \pi/2\,]$, on a $g_x(t) = g_y(t) + (x - y)t$, et on en déduit les inégalités

$$|g_x(t)| \leqslant |g_y(t)| + t|x - y| \leqslant f(y) + \frac{\pi}{2}\,|x - y|\,.$$

Le nombre $f(y) + \dfrac{\pi}{2}\,|x - y|$ est un majorant de $|g_x(t)|$ lorsque $t \in [\,0,\ \pi/2\,]$, donc il majore la borne supérieure de $|g_x|$, ce qui donne $f(x) \leqslant f(y) + \dfrac{\pi}{2}\,|x - y|$. On obtient $f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,|x - y|$, et en permutant les rôles de x et de y, on a également $f(y) - f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,|x - y|$, d'où finalement $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,|x - y|$.
Il en résulte que la fonction f est lipschitzienne, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

• On a également $f(x) \geqslant |g_x(\pi/2)| = \left|x\,\dfrac{\pi}{2} - 1\right| \geqslant |x|\,\dfrac{\pi}{2} - 1$, et $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.
On remarque aussi que $f(1) \geqslant \dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $f(x) > f(1)$.
Posons $B = \max(A, 1)$. La fonction continue f atteint son minimum sur $[\,-B,\ B\,]$ en un point x_0, et en particulier, puisque $1 \leqslant B$, on a $f(x_0) \leqslant f(1)$. Mais si $|x| > B$, on a aussi $|x| > A$, et donc $f(x) > f(1) \geqslant f(x_0)$. Il en résulte que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$.

• La fonction sinus étant concave sur $[\,0,\ \pi/2\,]$ sa courbe représentative, sur cet intervalle, est située au-dessus de la droite joignant les points $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$. Il en résulte que $|g_{2/\pi}(t)| = \sin t - 2t/\pi$. Par ailleurs, la courbe est située au-dessous de sa tangente en 0, donc, si $t > 0$, on a $\sin t < t$. Alors

$$|g_{2/\pi}(t)| < t - \frac{2t}{\pi} = \frac{2t}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\,,$$

et puisque $2t/\pi \leqslant 1$, on en déduit

$$|g_{2/\pi}(t)| < \frac{\pi}{2} - 1 = g_1(\pi/2) \leqslant f(1)\,.$$

Comme $|g_{2/\pi}|$ atteint son maximum sur $[\,0,\ \pi/2\,]$ en une valeur t_0 non nulle, on en déduit que $f(2/\pi) = |g_{2/\pi}(t_0)| < f(1)$.

Remarque
On peut expliciter la fonction f (Voir notre livre d'Analyse de deuxième année PC-PSI, exercice 2.15).

Exercice 2.17

Mines - Ponts MP 2006 K

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$.

Trouver un équivalent simple en 0 de f.

L'hypothèse de l'énoncé signifie que $f(x) - f(x/2) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$.

En remplaçant x par $x/2$ dans l'expression $f(x) - f(x/2)$ on obtient $f(x/2) - f(x/4)$, ce qui donne envie, en réitérant ce processus, de faire apparaître $f(x/2^k) - f(x/2^{k+1})$. Or la somme de telles expressions se simplifie (procédé télescopique). Il va falloir faire attention à gérer correctement le fait que l'on voudra faire tendre à la fois k vers $+\infty$ et x vers 0. On va pour cela revenir à la définiton des équivalents.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x \leqslant \eta$ entraîne

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x} \leqslant f(x) - f(x/2) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{x}\,.$$

Si $0 < x \leqslant \eta$, alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a aussi $0 < x/2^k \leqslant \eta$, et donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (1 - \varepsilon)\sqrt{\frac{x}{2^k}} \leqslant f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{\frac{x}{2^k}}.$$

En sommant ces inégalités, on en déduit que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^k}}\,,$$

ce qui donne finalement, en calculant les différentes sommes,

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant f(x) - f(x/2^{n+1}) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{x}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\,.$$

Comme par hypothèse on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x}(2 + \sqrt{2}) \leqslant f(x) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{x}(2 + \sqrt{2})\,.$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x \leqslant \eta$ entraîne $(1 - \varepsilon)\sqrt{x}(2 + \sqrt{2}) \leqslant f(x) \leqslant (1 + \varepsilon)\sqrt{x}(2 + \sqrt{2})$. Ceci signifie exactement que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{(2 + \sqrt{2})\sqrt{x}} = 1$. *Conclusion :* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} (2 + \sqrt{2})\sqrt{x}$.

Exercice 2.18

Mines - Ponts MP 2006

Montrer, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x).$$

Étudier $\lim\limits_{x\to 0} \theta_x$.

• La formule de Taylor avec reste intégral donne pour la fonction sinus

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos t \, dt.$$

D'autre part, comme la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$, pour $x \in]0, \pi/2[$ on a

$$\cos x \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} dt < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos t \, dt < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} dt\,,$$

et donc le quotient $Q(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos t \, dt / \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} dt$ appartient à l'intervalle $]\cos x, 1[$. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c_x dans $]0, x[$ tel que $Q(x) = \cos c_x$ Mais alors $\theta_x = c_x/x$ appartient à $]0, 1[$ et l'on a $\sin x = x - \cos(x\theta_x) \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} dt = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta_x)$.

• En utilisant le développement limité de $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 5 en 0, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, donc $\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)$.

D'autre part, comme $x \mapsto \theta_x$ est bornée, on a $\lim_{x \to 0} x\theta_x = 0$, ainsi

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{x^2\theta_x^2}{2} + o(x^2\theta_x^2) = 1 - \frac{x^2\theta_x^2}{2} + o(x^2)\,.$$

On en déduit $\theta_x^2 = 1/10 + o(1)$, et il en résulte que θ_x^2 tend vers $1/10$ quand x tend vers 0. Et, puisque $\theta_x > 0$, on en déduit que θ_x tend vers $1/\sqrt{10}$ quand x tend vers 0.

Exercice 2.19

Polytechnique MP 2006 KK

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout c réel et tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$, la restriction à $[a, b]$ de $f - c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ présente un maximum en a ou b.

2) On suppose f continue. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous x réel et h réel strictement positif, $f(x) \leqslant \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

Remarquons tout d'abord que si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $g = f + \alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + \beta$ est aussi convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, nous noterons δ la fonction affine $x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ qui coïncide avec f en a et b, et $g = f - \delta$. On a donc $g(a) = g(b) = 0$.

1) • Supposons que f est convexe. Alors pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et tout $x\in[\,a,\,b\,]$, on a $f(x)\leqslant\delta(x)$, donc $\max\limits_{x\in[\,a,b\,]} f(x)\leqslant\max\limits_{x\in[\,a,b\,]}\delta(x)$. Mais comme δ est une fonction affine, donc monotone, on a l'égalité

$$\max_{x\in[\,a,b\,]}\delta(x)=\max(f(a),\,f(b))\,.$$

Il en résulte que $\max\limits_{x\in[\,a,b\,]} f(x)=\max(f(a),\,f(b))$.

Soit c un nombre réel. Puisque f est convexe, la fonction $f-c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est encore convexe, et donc le maximum de la restriction de $g-c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ à $[\,a,\,b\,]$ est atteint en a ou en b d'après ce qui précède.

• Nous allons raisonner par contraposée. Supposons que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. Il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $w\in\,]\,a,\,b\,[$ tel que le point $(w,\,f(w))$ soit au-dessus de la corde joignant les points $(a,\,f(a))$ et $(b,\,f(b))$. Donc avec les notations introduites plus haut, la fonction g est telle que $g(a)=g(b)=0$ et $g(w)>0$.

Si l'on pose $c=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ on a $g=f-c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}+K$ où K est une constante. Le maximum de la restriction de g à $[\,a,\,b\,]$ n'est atteint ni en a, ni en b, donc le maximum de la restriction de $f-c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ à $[\,a,\,b\,]$ n'est atteint ni en a, ni en b.

Donc, si pour tout c réel et tous a et b réels tels que $a<b$, la restriction à $[\,a,\,b\,]$ de $f-c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ présente un maximum en a ou b, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) • Supposons que f est convexe et continue sur $\mathbb{R}$. On a en particulier, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ l'inégalité $f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\,(f(x+t)+f(x-t))$. Fixons x et intégrons l'inégalité précédente sur l'intervalle $[\,-h,\,h\,]$ où $h\in\,]\,0,\,+\infty\,[$, on obtient

$$2hf(x)\leqslant\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}(f(x+t)+f(x-t))\,dt=\frac{1}{2}\left(\int_{-h}^{h}f(x+t)\,dt+\int_{-h}^{h}f(x-t)\,dt\right).$$

En faisant le changement de variable $u=x+t$ dans la première intégrale et $u=x-t$ dans la seconde, on obtient $\displaystyle\int_{-h}^{h}f(x+t)\,dt=\int_{-h}^{h}f(x-t)\,dt=\int_{x-h}^{x+h}f(u)\,du$ d'où finalement $\displaystyle 2hf(x)\leqslant\int_{x-h}^{x+h}f(u)\,du$, ce qui donne le résultat voulu.

• Supposons que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. En reprenant les notations de la question 1), la fonction g est donc telle que $g(a)=g(b)=0$ et $g(w)>0$. Soit M le maximum de la restriction de g à $[\,a,\,b\,]$. On a $M>0$.

L'ensemble $\{x\in[\,a,\,b\,]\mid g(x)=M\}$ est un ensemble non vide et il est minoré par a. Il admet une borne inférieure $u>a$, et puisque g est continue, on a encore $g(u)=M$ et sur l'intervalle $[\,a,\,u\,[$ on a $f(x)<M$.

Soit $h\in\,]\,0,\,+\infty\,[$ tel que $a<u-h<u+h<b$, on a alors, puisque f n'est pas constante sur l'intervalle $[\,u-h,\,u+h\,]$, $\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{u-h}^{u+h}f(t)\,dt<M=f(u)$.

Il en résulte que si, pour tous x réel et h réel strictement positif on a l'inégalité $f(x) \leqslant \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$ alors f est convexe.

Exercice 2.20

Polytechnique MP 2006 et 2007 KK

1) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y)). \qquad (1)$$

Montrer que f est convexe.
2) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\ f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\ | \leqslant My^2. \qquad (2)$$

Étudier la convexité de $x \mapsto f(x) + Mx^2$ et $x \mapsto f(x) - Mx^2$ et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On peut utiliser le résultat suivant : si une fonction est convexe et continue sur un intervalle ouvert I, alors elle admet en tout point de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

1) Montrons tout d'abord par récurrence sur n que, quels que soient les nombres $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2^n}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^n}))\,.$$

Par hypothèse, la propriété est vraie si $n = 1$. Supposons la vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
Soient $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_{2^{n+1}}$ dans $\mathbb{R}$.
Posons $x = \dfrac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}$ et $y = \dfrac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) + f\left(\frac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence aux deux familles de 2^n éléments $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2^n}$ et $x_{2^n+1},\ x_{2^n+2},\ \ldots,\ x_{2^{n+1}}$, ce qui donne

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}(f(x_1) + \cdots + f(x_{2^n}))$$

et

$$f\left(\frac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}(f(x_{2^n+1}) + \cdots + f(x_{2^{n+1}}))\,.$$

On en déduit alors que $f\left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(f(x_1) + \cdots + f(x_{2^{n+1}}))$, et la propriété est vraie au rang $n+1$ donc pour tout $n \geqslant 1$.

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Posons $x_1 = \cdots = x_p = x$ et $x_{p+1} = \cdots = x_{2^n} = y$. Alors, si l'on pose $\lambda = p2^{-n}$, on obtient, en utilisant la formule précédente $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Si maintenant λ est un nombre réel quelconque, il est limite d'une suite $(\lambda_s)_{s\geqslant 0}$ de nombres de la forme $p2^{-n}$ (en utilisant par exemple l'écriture en base 2 d'un nombre réel). Donc, pour tout s, $f(\lambda_s x + (1-\lambda_s)y) \leqslant \lambda_s f(x) + (1-\lambda_s) f(y)$, et par passage à la limite, puisque f est continue $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, ce qui montre que f est convexe.

2) • Remarquons tout d'abord que la condition (1) est équivalente, en posant $X = (x+y)/2$ et $Y = (x-y)/2$, à

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2f(X) \leqslant f(X+Y) + f(X-Y)\,. \tag{3}$$

Si f vérifie la relation (2) $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \leqslant My^2$, nous allons montrer que l'application $\varphi : x \mapsto f(x) + Mx^2$ est convexe en utilisant cette condition (3). Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Evaluons $D(X,Y) = \varphi(X+Y) + \varphi(X-Y)$.

$$\begin{aligned} D(X,Y) &= f(X+Y) + f(X-Y) + M(X+Y)^2 + M(X-Y)^2 \\ &= f(X+Y) + f(X-Y) + 2M(X^2+Y^2)\,. \end{aligned}$$

Mais $f(X+Y) + f(X-Y) \geqslant 2f(X) - MY^2$ donc
$D(X,Y) \geqslant 2f(X) - MY^2 + 2M(X^2+Y^2) = 2\varphi(X) + MY^2 \geqslant 2\varphi(X)$.
Il en résulte que φ est convexe.
On montre de même que l'application $\psi : x \mapsto f(x) - Mx^2$ est concave (c'est-à-dire que $-\psi$ est convexe). Evaluons $\Delta(X,Y) = \psi(X+Y) + \psi(X-Y)$.

$$\begin{aligned} \Delta(X,Y) &= f(X+Y) + f(X-Y) - M(X+Y)^2 - M(X-Y)^2 \\ &= f(X+Y) + f(X-Y) - 2M(X^2+Y^2)\,. \end{aligned}$$

Mais $f(X+Y) + f(X-Y) \leqslant 2f(X) + MY^2$ donc
$\Delta(X,Y) \leqslant 2f(X) + MY^2 - 2M(X^2+Y^2) = 2\psi(X) - MY^2 \leqslant 2\psi(X)$.
• Les application φ et $-\psi$ sont continues et convexes, donc sont dérivables à droite et à gauche en tout point. Il en résulte que f est dérivable à droite et à gauche en tout point.
– Montrons tout d'abord qu'elle est dérivable.
Soit $y > 0$. On déduit de (2) $\left|\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y} - \dfrac{f(x-y)-f(y)}{-y}\right| \leqslant My$ et quand y tend vers 0, on obtient $|Df_+(x) - Df_-(x)| \leqslant 0$. On en déduit que $Df_+(x) = Df_-(x)$. La dérivée à droite en x est égale à la dérivée à gauche en x et f est donc dérivable en x.
- Montrons maintenant la continuité de f'.
Puisque φ est convexe, écrivons que la courbe représentative de φ est au-dessus de sa tangente au point x. Quels que soient x réel et h réel strictement positif, on a $\varphi(x+h) \geqslant \varphi(x) + h\varphi'(x)$, d'où l'on déduit

$$f(x+h) + M(x+h)^2 \geqslant f(x) + Mx^2 + h(f'(x) + 2Mx)\,,$$

d'où $f'(x) \leqslant \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + Mh$. Puisque ψ est concave, on déduit de la même manière que $f'(x) \geqslant \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - Mh$.

Si x et y sont deux réels, les inégalités précédentes vont permettre de majorer $|f'(x)-f'(y)|$. A partir des encadrements

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - Mh \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + Mh\,,$$
$$\frac{f(y+h)-f(y)}{h} - Mh \leqslant f'(y) \leqslant \frac{f(y+h)-f(y)}{h} + Mh\,,$$

on déduit, pour tout réel $h > 0$,

$$|f'(x)-f'(y)| \leqslant \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(y+h)-f(y)}{h} \right| + 2Mh\,,$$

ou encore $|f'(x)-f'(y)| \leqslant \dfrac{1}{h}(|f(x+h)-f(y+h)| + |f(x)-f(y)|) + 2Mh$.

Fixons x réel et $\varepsilon > 0$. Soit h fixé $\in]0, \inf(\varepsilon/(4M), 1)[$. La fonction f étant continue sur le segment $[x-1, x+1]$ elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$, tel que $(u,v) \in [x-1, x+1]^2$ et $|u-v| < \eta$ impliquent $|f(u)-f(v)| < h\varepsilon/4$. Alors si $|x-y| < \inf(\eta, 1-h)$, les nombres y et $y+h$ sont dans l'intervalle $[x-1, x+1]$ et $|f(x+h)-f(y+h)| < h\varepsilon/4$ ainsi que $|f(x)-f(y)| < h\varepsilon/4$. On obtient alors $|f'(x)-f'(y)| < \varepsilon$, ce qui montre que f' est continue en x. La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Intégration sur un segment 3

3.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

3.1.1 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Ce qu'il faut savoir

Soit I un intervalle contenant au moins deux points. Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• Soit $x_0 \in I$. La fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

• Soient J un intervalle contenant au moins deux points, u et v deux fonctions dérivables sur J à valeurs dans I. Alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$, on a $G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Exercice 3.1

CCP MP 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1/2$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Indication de la rédaction : considérer une primitive de $x \mapsto f(x) - x$.

On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$.

Puisque f est continue sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$, donc φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi'(x) = f(x) - x$. En outre, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Le théorème de Rolle entraîne alors l'existence d'un réel $x_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) - x_0 = 0$.

Exercice 3.2

ENSEA MP 2005, CCP PSI 2006

Soit la fonction Φ définie par la relation

$$\Phi(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt.$$

1) Montrer que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire et π-périodique.
2) Etablir que Φ est constante.
3) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt$.

1) • Les fonctions $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin} \sqrt{x}$ et $h : x \mapsto \operatorname{Arccos} \sqrt{x}$ sont continues sur $[0, 1]$. On note G et H leurs primitives respectives qui s'annulent en 0. Comme les fonctions $u : x \mapsto \sin^2 x$ et $v : x \mapsto \cos^2 x$ sont à valeurs dans $[0, 1]$, les fonctions $G \circ u$ et $H \circ v$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$, donc Φ est bien définie.
• Comme les fonctions u et v sont paires et π-périodiques, Φ l'est aussi.

2) Puisque Φ est paire et π-périodique,il suffit de l'étudier sur le segment $[0, \pi/2]$. En outre Φ est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables et l'on a pour tout $x \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= G'(u(x))u'(x) + H'(v(x))v'(x) \\ &= \operatorname{Arcsin} \sqrt{\sin^2 x}\, 2 \sin x \cos x - \operatorname{Arccos} \sqrt{\cos^2 x}\, 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ car $\sin x \geqslant 0$ et donc $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) = \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$. De même $\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) = x$, donc $\forall x \in [0, \pi/2],\ \Phi'(x) = 0$.
On en déduit que Φ est constante sur $[0, \pi/2]$, puis sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

3) On remarque que les deux intégrales à calculer sont $\Phi(0)$ et $\Phi(\pi/2)$.
On va calculer la valeur de Φ en $\pi/4$.

$$\begin{aligned} \Phi(\pi/4) &= \int_0^{1/2} \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt \\ &= \int_0^{1/2} (\operatorname{Arccos} \sqrt{t} + \operatorname{Arcsin} \sqrt{t})\, dt \end{aligned}$$

Mais, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$ d'où

$$\Phi(\pi/4) = \int_0^{1/2} \pi/2\, dt = \pi/4.$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt = \int_0^1 \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt = \pi/4.$

Remarque 1

Ces intégrales peuvent se calculer à l'aide du changement de variable $u = \operatorname{Arccos} \sqrt{t}$ suivi d'une intégration par parties.

Remarque 2

Les formules suivantes :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad , \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad , \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$$

ont été démontrées dans le livre d'Analyse de première année exercice 6.6 page 90. Il est très utile de les retenir.

3.1.2 Inégalités et intégrales

Ce qu'il faut savoir

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- $\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Voir exercice 3.4 pour étudier le cas d'égalité.

- Si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si $g \leqslant f$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b g(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt$;

en particulier si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$.

Remarque très utile dans la pratique

Si f est positive et continue sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\left| \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \times \left(\int_a^b |g(t)|^2\, dt \right)^{1/2} .$$

Le cas d'égalité se produit si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice 3.3

CCP MP 2005

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\ 1], \mathbb{R})$. On note M (resp. m) le maximum (resp. le minimum) de f sur $[0,\ 1]$.

Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,dt \leqslant -mM$.

Les fonctions $f - m$ et $M - f$ sont positives, donc $\displaystyle\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,dt \geqslant 0$.

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,dt &= (m+M)\int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 (f(t))^2\,dt - mM \\ &= -\int_0^1 (f(t))^2\,dt - mM \geqslant 0,\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,dt \leqslant -mM$.

Exercice 3.4

TPE PC 2007, CCP MP 2006

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}^0([a,\ b], \mathbb{C})$ vérifiant

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt\,. \qquad (*)$$

1) Montrer que si f est à valeurs réelles, alors $f = |f|$ ou $f = -|f|$.

2) Montrer que si f est à valeurs complexes, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathscr{C}^0([a,\ b], \mathbb{R}^+)$ tels que $f = e^{i\theta}g$.

Indication de la rédaction : montrer que $g = e^{-i\theta}f$ où θ est un argument de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

1) Lorsque f est à valeurs réelles, on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, où $f^+(x) = \sup(f(x),0)$ et $f^-(x) = \sup(-f(x),0)$. En outre, f^+ et f^- sont continues positives sur $[a,\ b]$ puisque f l'est. Posons $A = \displaystyle\int_a^b f^+(t)\,dt$ et $B = \displaystyle\int_a^b f^-(t)\,dt$. L'égalité $(*)$ s'écrit alors $|A - B| = A + B$, ce qui équivaut à $((A - B = A + B)$ ou $(-A + B = A + B))$ et finalement à $((B = 0)$ ou $(A = 0))$.

Comme f^- est continue et positive sur $[a,\ b]$, dire que l'intégrale B est nulle, implique que la fonction f^- est la fonction nulle, et donc que f est positive, ce qui donne $|f| = f$. De même, $A = 0$ équivaut à $f^+ = 0$, c'est-à-dire $|f| = -f$.

2) Lorsque f appartient à $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \qquad (1)$$

Posons $g = e^{-i\theta} f$. En intégrant sur $[a, b]$, on obtient

$$\int_a^b g(t)\,dt = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|.$$

Par ailleurs $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Si f vérifie $(*)$, alors on a

$$\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b g(t)\,dt \qquad (2)$$

En prenant la partie réelle des deux termes de (2), on obtient

$$\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,dt, \quad \text{d'où} \quad \int_a^b \big(|g(t)| - \mathrm{Re}\, g(t)\big)\,dt = 0.$$

Mais la fonction $|g| - \mathrm{Re}\, g$ est continue, positive (car $|g|^2 = (\mathrm{Re}\, g)^2 + (\mathrm{Im}\, g)^2$) et son intégrale est nulle, elle est donc identiquement nulle sur $[a, b]$. Il en résulte que $|g| = \mathrm{Re}\, g$, donc $\mathrm{Im}\, g = 0$. Par conséquent, g est réelle, et finalement $|g| = g$. La fonction g est donc dans $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$, et l'on a bien $f = e^{i\theta} g$. Autrement dit l'argument de f est constant.

Remarque
La réciproque est vraie dans les deux cas précédents.

Exercice 3.5

Centrale MP 2007, CCP PC 2007

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour tout $h \in E = \mathscr{C}^0([a, b],]0, +\infty[)$ on pose $\Phi(h) = \left(\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{h(t)}\,dt\right)$.

1) Montrer que Φ est minorée sur E et atteint sa borne inférieure.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction h_n définie sur $[a, b]$ par $h_n(x) = e^{nx}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(h_n)$ et en déduire que Φ n'est pas majorée.
3) Déterminer $\Phi(E)$.

1) Montrons que Φ est minorée et atteint sa borne inférieure.
Soit $h \in E$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $f = \sqrt{h}$ et $g = 1/\sqrt{h}$, on obtient $\left(\displaystyle\int_a^b dx\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{h(t)}\,dt\right)$ c'est-à-dire $(b-a)^2 \leqslant \Phi(h)$. Ainsi Φ est minorée.

Si on exhibe une fonction $h_0 \in F$ telle que $\Phi(h_0) = (b-a)^2$, on aura alors montré que $(b-a)^2$ est la borne inférieure de Φ et qu'elle est atteinte. On prend par exemple la fonction définie pour tout $x \in [\,a,\,b\,]$ par $h_0(x) = 1$. On a donc $\Phi(E) \subset [\,(b-a)^2,\,+\infty\,[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(h_n) &= \left(\int_a^b e^{nx}\,dx\right)\left(\int_a^b e^{-nx}\,dx\right) = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_a^b \times \left[\frac{1}{-n}e^{-nx}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{nb}-e^{na}}{n} \times \frac{e^{-na}-e^{-nb}}{n} \\
&= \frac{(e^{n(b-a)}-1)(1-e^{-n(b-a)})}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{n(b-a)}}{n^2}.
\end{aligned}$$

On déduit du théorème de comparaison des puissances et des exponentielles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(h_n) = +\infty$. Il en résulte que Φ n'est pas majorée.

3) Plus généralement, pour tout $\lambda \geqslant 0$, considérons la fonction h_λ définie sur $[\,a,\,b\,]$ par $h_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Pour $\lambda > 0$, un calcul identique à celui de la question 2, donne, $\Phi(h_\lambda) = \dfrac{(e^{\lambda(b-a)}-1)(1-e^{-\lambda(b-a)})}{\lambda^2}$ et ceci peut encore s'écrire $\Phi(h_\lambda) = 4\dfrac{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda(b-a)}{2}}{\lambda^2}$. La fonction $f : \lambda \mapsto \Phi(h_\lambda)$ est alors une fonction continue sur $]\,0,\,+\infty\,[$. Comme au voisinage de 0, on a $\operatorname{sh} u \sim u$, on en déduit que $\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\lambda) = (b-a)^2 = f(0)$, et la fonction f est continue sur $[\,0,\,+\infty\,[$. Par ailleurs, d'après la question 2, la fonction f n'est pas bornée supérieurement. Alors $\Phi(E) \supset f([\,0,\,+\infty\,[) \supset [\,(b-a)^2,\,+\infty\,[$. Comme on a l'inclusion inverse, on obtient finalement $\Phi(E) = [\,(b-a)^2,\,+\infty\,[$.

3.1.3 Intégration par parties et changement de variable

Ce qu'il faut savoir

- **Formule d'intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a,\,b\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

- **Formule du changement de variable**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $\varphi : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soient α et β appartenant à J. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Remarque

Sur cette formule observons que, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ par le changement de variable $x = \varphi(t)$, on procède à trois modifications :

(i) remplacer x par $\varphi(t)$ dans $f(x)$;

(ii) remplacer dx par $\varphi'(t)dt$;

(iii) remplacer les bornes a et b d'intégration en x par des bornes α et β d'intégration en t : telles que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.

Exercice 3.6

CCP MP 2007, Première question Mines-Ponts et Centrale MP 2006

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $I(p, q) = \dfrac{p}{1+q} I(p-1, q+1)$.

2) En déduire que $I(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) *Question de la rédaction* : déduire de ce qui précède la valeur de

$$B(p, q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \, \cos^{2q+1} t \, dt.$$

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties en posant $u(x) = x^p$ et $v'(x) = (1-x)^q$, on a alors $u'(x) = px^{p-1}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{1+q}(1-x)^{q+1}$ d'où

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\ &= \left[-\frac{1}{1+q}(1-x)^{q+1} \cdot x^p\right]_0^1 + \frac{1}{1+q}\int_0^1 px^{p-1} \cdot (1-x)^{q+1} dx \\ &= \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1). \end{aligned}$$

2) En répétant l'intégration par parties $p - 1$ fois, on obtient

$$I(p, q) = \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\cdots\frac{1}{q+p} I(0, q+p) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(0, q+p).$$

Or, $I(0, q+p) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{q+p} dx = \frac{1}{p+q+1}$, d'où $I(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) Effectuons le changement de variable $x = \sin^2 t$. En effet, l'application $\varphi : t \mapsto \sin^2 t$ est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, de classe $\mathscr{C}^1$ et l'on a $dx = 2\sin t\ \cos t\, dt$. On obtient alors

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t\ \cos^{2q+1} t\, dt = \int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3.1.4 Sommes de Riemann

Ce qu'il faut savoir

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Les sommes $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ sont appelées **sommes de Riemann** associées à f.

Exercice 3.7

Navale MP 2005, CCP PC 2007

Soit $\alpha > 0$. A l'aide des sommes de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ lorsque $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^\alpha \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = n^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha.$

Comme la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $[0, 1]$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$

Remarque

Ce résultat est à retenir. On l'utilise fréquemment.

3.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3.8

CCP MP 2005, CCP PC 2005, Centrale MP 2007

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt = 1 + x. \qquad (1)$$

1) Soit f une solution de (1).
1.a Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
1.b Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on déterminera.
1.c Déterminer f.
2) Conclure.

1) Soit f une solution de (1).

1.a La relation (1) s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + x - x \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x t f(t)\, dt.$

Comme f est continue, les intégrales du membre de droite sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de leur borne supérieure. Il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les intégrales du membre de droite sont alors de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1.b En dérivant deux fois de suite, on obtient pour tout x réel

$$f'(x) = 1 - \int_0^x f(t)\, dt - x f(x) + x f(x) = 1 - \int_0^x f(t)\, dt\,; \qquad (2)$$

$$f''(x) = -f(x)\,. \qquad (3)$$

1.c Les solutions de l'équation différentielle (3) sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto A \cos x + B \sin x$, où A et B sont des constantes. Mais la relation (1) donne $f(0) = 1$ et la relation (2) donne $f'(0) = 1$. On en déduit alors $A = B = 1$ et donc, pour tout x réel $f(x) = \cos x + \sin x$.
On vient de montrer que si f est solution de (1), alors $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.

2) Il reste à vérifier que cette solution convient. Soit $x \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)(\cos t + \sin t)\, dt &= \Big[(x-t)(\sin t - \cos t)\Big]_0^x + \int_0^x (\sin t - \cos t)\, dt \\ &= x - \cos x - \sin x + 1 = -f(x) + x + 1\,.\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$ est l'unique solution de (1).

Exercice 3.9

Mines-Ponts PC 2007, Mines-Ponts MP 2005 K

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1) On suppose que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy = xf(x)\,. \qquad (*)$$

Indication de la rédaction :

utiliser la fonction $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy - xf(x)$.

2) En déduire que pour tout $(a, b) \in [0, +\infty[\times f([0, +\infty[)$, on a

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab\,. \qquad (**)$$

Etudier les cas d'égalité.

3) On ne suppose plus f dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que le résultat de la question 1) reste vrai.

Indication de la rédaction : montrer que la fonction

$\theta : x \mapsto \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy - xf(x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $-f$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$.

La fonction f est continue et strictement croissante, donc f^{-1} est continue sur $f(\mathbb{R}^+)$, donc $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est dérivable, et comme f est également dérivable, on en déduit que G est dérivable et que $G'(x) = f'(x)f^{-1}(f(x)) = xf'(x)$. Il en résulte que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que

$$\phi'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

Par conséquent, ϕ est constante. Or $\phi(0) = 0$, la fonction ϕ est donc la fonction nulle et $(*)$ est démontrée.

2) Soit b un réel positif fixé, considérons la fonction ψ, qui à tout $a \in [0, +\infty[$, associe $\psi(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy - ab\,.$

Pour établir l'inégalité $(**)$, on va montrer que $\psi \geqslant 0$.

La fonction ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et l'on a pour tout $a \in [0, +\infty[$, $\psi'(a) = f(a) - b$. Comme f est strictement croissante, $\psi'(a) \geqslant 0$ si et seulement si $a \geqslant f^{-1}(b)$, donc la fonction ψ admet un minimum au point $f^{-1}(b)$. Par ailleurs, $\psi\left(f^{-1}(b)\right) = \phi(f^{-1}(b)) = 0$.

L'application ψ est donc positive sur $\mathbb{R}^+$ d'où $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab$.

Le calcul précédent montre que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt = ab$ si et seulement si $b = f(a)$.

3) Montrons que l'égalité $(*)$ a lieu lorsque f est continue et n'est pas nécessairement dérivable sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in]0, +\infty[$.

$$\theta(x+h) - \theta(x) = \int_{f(x)}^{f(x+h)} f^{-1}(y)\,dy - (x+h)f(x+h) + xf(x).$$

Lorsque $h > 0$, on a, en vertu de la croissance de f^{-1},

$$x(f(x+h) - f(x)) \leqslant \int_{f(x)}^{f(x+h)} f^{-1}(y)\,dy \leqslant (x+h)(f(x+h) - f(x)),$$

d'où $-f(x+h) \leqslant \dfrac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} \leqslant -f(x)$. Lorsque $h < 0$, on obtient de même, $-f(x) \leqslant \dfrac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} \leqslant -f(x+h)$. Sachant que f est continue au point x, on en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} = -f(x).$$

En conséquence, θ est dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée $-f$, donc ϕ est dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée nulle. Elle est donc constante sur $[0, +\infty[$. En outre $\phi(0) = 0$, donc ϕ est identiquement nulle.

Exercice 3.10

Centrale MP 2006

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.

1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

2) K Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. En déduire que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ et constante.

4) Montrer que I_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$.

1) Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Ainsi, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

Conclusion : La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est positive décroissante, elle est donc convergente.

Remarque

En fait $I_n > 0$, car l'application continue positive $x \mapsto \sin^n x$ n'est pas identiquement nulle. Cela va résulter aussi de la question 3 .

2) Le seul moyen à notre disposition actuellement est de travailler avec les epsilon. On verra plus tard le théorème de convergence dominée qui nous permet de conclure rapidement.

Soit $\varepsilon > 0$ (qu'on prendra $< \pi/2$). On a d'après le relation de Chasles $I_n = J_n + K_n$ où $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \sin^n t\, dt$ et $K_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

Sachant que $\sin^n t \leqslant 1$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $K_n \leqslant \varepsilon/2$.

Par croissance de la fonction sinus sur $[\,0, \dfrac{\pi}{2}\,]$, on en déduit

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)^n = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^n .$$

Mais la suite $\left(\dfrac{\pi}{2}\left(\cos\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $J_n \leqslant \varepsilon/2$, donc $0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• En intégrant par parties I_{n+2} où l'on dérive $u(x) = \sin^{n+1} x$ et l'on primitive $v'(x) = \sin x$, on a $u'(x) = (n+1)\sin^n x \cos x$ et $v(x) = -\cos x$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= -\left[\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x\, dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x(1-\sin^2 x)dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}, \end{aligned}$$

d'où (1) $\qquad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$

• En multipliant la relation (1) par $(n+2)I_{n+1}$, on obtient l'égalité $(n+2)I_{n+2}\, I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$, ce qui montre que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Sachant que $I_1 = 1$ et $I_0 = \pi/2$, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \pi/2$.

4) La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive et décroissante. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Sachant que $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$ tend vers 1, on en déduit par encadrement que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, soit $I_{n+1} \sim I_n$.

Par ailleurs $nI_n^2 = \dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\cdot(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, d'où $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Complément Sachant que $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, on obtient en vertu de la relation (1)

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{(2p)(2p-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},\\ I_{2p+1} &= \frac{(2p)(2p-2)\cdots 4\cdot 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

Terminologie Ces intégrales sont appelées intégrales de Wallis. On montre en utilisant le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

Exercice 3.11

Centrale MP 2005 K

Donner un équivalent quand x tend vers 0^+ de la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,dt\,.$$

Indication de la rédaction : montrer que la fonction $t \mapsto g(t) = \dfrac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

• Sachant que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \dfrac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}$ est bien définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et que pour tout $x \in]0, 1]$, on a $0 < x^3 < x^2 \leqslant 1$, la fonction F est bien définie sur $]0, 1]$.

• Montrons que g est prolongeable par continuité au point 0.

Pour ce faire, il suffit de montrer que g admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Sachant que pour tout $t \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, $g(t) = \dfrac{te^t - \operatorname{Arcsin} t}{t \operatorname{Arcsin} t}$ et que $t \operatorname{Arcsin} t \underset{0}{\sim} t^2$, on va effectuer un développement limité à l'ordre 2 pour déterminer un équivalent du numérateur. Ainsi $te^t - \operatorname{Arcsin} t = t^2 + t^2O(t)$. On en déduit que $g(t) \underset{0}{\sim} 1$.

La fonction g est prolongeable par continuité au point 0 et l'on pose $g(0) = 1$.

• Soit $x \in]0, 1[$, en notant $G(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} g(t)dt$, on a

$$F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{1}{t}\,dt + \int_{x^3}^{x^2} g(t)dt = -\ln x + G(x).$$

Pour conclure, il reste à établir que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{\ln x} = 0$.

Sachant que g est continue sur $[-1,\ 1]$, elle est donc bornée. En notant M un majorant de g, on a pour tout $x \in]0,\ 1]$, $|G(x)| \leqslant M(x^2 - x^3)$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{G(x)}{\ln x} = 0$.
Conclusion : on a $F(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$.

Ce qu'il faut savoir

Le raisonnement, qu'on vient de faire dans l'exercice précédent, s'applique souvent pour trouver des équivalents au voisinage d'un point x_0 à des fonctions du type $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. On cherche un équivalent -qu'on note φ- de f vérifiant :

(i) l'intégrale $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t)dt$ se calcule facilement ;

(ii) la fonction $g = f - \varphi$ est continue ou prolongeable par continuité au point x_0 de telle façon que $\lim\limits_{x \to x_0} \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt = 0$.

Ainsi, on montre facilement que :

1) $\displaystyle\int_{x}^{3x} \frac{e^t}{\text{Arcsin}\, t} dt \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln 3$

2) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$

3) $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \underset{x \to 1}{\sim} \ln 2$; bien entendu, dans cet exemple, on traite séparément le cas $x \to 1^+$ et le cas $x \to 1^-$.

Exercice 3.12

CCP MP 2007, Mines - Ponts MP 2006, CCP PC 2005

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.
Indication de la rédaction : on pourra utiliser la double inégalité

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x. \qquad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme u_n n'est pas une somme de Riemann, nous allons l'encadrer par des sommes de Riemann à l'aide de la double inégalité $(*)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en vertu de $(*)$, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}.$$

La fonction sinus étant positive sur $[0,\ 1]$, on obtient

$$\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

ce qui, par sommation, conduit à

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît alors des sommes de Riemann. En effet, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \longmapsto x\sin x$, continue sur $[0,\ 1]$, d'où $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x\sin x\,dx$. D'autre part, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \longmapsto x^3\sin x$, continue sur $[0,\ 1]$, donc $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^3\sin x\,dx$, et par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{6n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = 0\times\int_0^1 x^3\sin x\,dx = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n = \int_0^1 x\sin x\,dx$.

En intégrant par parties on obtient, $\displaystyle\int_0^1 x\sin x\,dx = \sin 1 - \cos 1$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n = \sin 1 - \cos 1$.

Remarque

Voilà une deuxième méthode utilisant la concavité de la fonction sinus sur $[0,\ 1]$. Pour tout $n > 0$, la fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0,\ 1/n]$. Sur cet intervalle, la courbe représentative est comprise entre la tangente en 0 et la droite joignant les points $(0,0)$ et $(1/n, \sin(1/n))$, donc, si $0 \leqslant x \leqslant 1/n$, on a $nx\sin\dfrac{1}{n} \leqslant \sin x \leqslant x$. Ainsi pour tout $k \in \{1,\cdots,n\}$, le nombre k/n^2 appartient à l'intervalle $[0,\ 1/n]$, et on en déduit que $\dfrac{k}{n}\sin\dfrac{1}{n} \leqslant \sin\dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{k}{n^2}$. Donc

$$\sin\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}.$$

Par ailleurs la suite $(n\sin(1/n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1. Comme on a les inégalités $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\ v_n\leqslant u_n\leqslant v_n$, il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sin 1-\cos 1$.

Exercice 3.13

TPE MP 2006, Polytechnique MP 2005

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, calculer les intégrales

$$I=\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \text{ et } J=\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx\,.$$

Indication de la rédaction

Pour calculer I, on pourra faire un raisonnement géométrique simple.

Pour calculer J, on pourra faire le changement de variable $x=a+b-t$.

• On peut obtenir I en remarquant que la courbe d'équation $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ est la partie, située dans le demi-plan des $y\geqslant 0$ de la conique d'équation $y^2-(x-a)(b-x)=0$, mais cette équation s'écrit aussi $y^2+x^2-(a+b)x+ab=0$, ou encore $\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$. Il s'agit donc d'un demi-cercle de rayon $(b-a)/2$ et I est l'aire limitée par la courbe et l'axe Ox et vaut donc $\dfrac{\pi}{8}(b-a)^2$.

• Pour calculer J, effectuons le changement de variable $x=a+b-t$. L'application $\varphi: t\mapsto a+b-t$ est une bijection de $[\,a,\,b\,]$ sur lui-même et l'on a $\sqrt{(t-a)(b-t)}=\sqrt{(x-a)(b-x)}$. On obtient

$$J=\int_a^b(a+b-t)\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt=(a+b)\int_a^b\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt-J\,,$$

et on en déduit $J=\dfrac{b+a}{2}\displaystyle\int_a^b\sqrt{(t-a)(b-t)}\,dt=\dfrac{\pi}{16}(b+a)(b-a)^2$.

3.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 3.14

TPE MP 2007, Polytechnique MP 2005

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Calculer $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{b-x}+\sqrt{x-a}}$.

Pour calculer cette intégrale $I(a,b)$, on peut commencer par faire le changement de variable affine qui est une bijection de $[\,a,\,b\,]$ sur $[\,-1,\,1\,]$ en prenant

$t = \dfrac{2}{b-a}(x-a) - 1$, qui donne $x = \dfrac{b-a}{2}(t+1) + a$ donc $dx = \dfrac{b-a}{2}\, dt$. On obtient alors

$$I(a,b) = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{b-a}{2}\, dt}{\sqrt{\frac{b-a}{2}\,(1-t)} + \sqrt{\frac{b-a}{2}\,(t+1)}} = \sqrt{\frac{b-a}{2}}\, I(-1,1)\,.$$

Pour continuer, il existe plusieurs méthodes possibles. On pourrait multiplier par la quantité conjuguée du dénominateur, mais, ce faisant, on introduit une discontinuité en 0, et l'intégrale à calculer relève alors du chapitre « Intégration sur un intervalle non compact ». La méthode indiquée ci-dessous permet d'éviter cela. Elle consiste à montrer que, pour $x \in [-1,\ 1]$, on a l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right).$$

En réduisant au même dénominateur, celle-ci équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}{2(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1)}\,,$$

ou encore à

$$2(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1) = (\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\,.$$

Or en développant, on s'assure que cette dernière égalité est bien vraie.

Par un changement de variable $x \mapsto -x$, on obtient aussitôt que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}+1} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1} \quad \text{et donc} \quad I(-1,1) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1}\,.$$

Alors le changement de variable $u = \sqrt{1+x}$ donne

$$I(-1,1) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2u}{u+1}\, du = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = 2(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))\,.$$

Exercice 3.15

Centrale MP 2007

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{Arcsin} \frac{2t}{1+t^2}\, dt$.

Indication de la rédaction : on pourra commencer par écrire de façon plus simple la fonction $t \mapsto f(t) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{2t}{1+t^2}$.

On peut simplifier la fonction f de plusieurs manières. En voici une utilisant les formules de trigonométrie (bien entendu, on aurait pu calculer la dérivée, voir notre livre d'Analyse de première année exercice 14.9 page 280).

Soit $t \in [0, +\infty[$, puisque la fonction tangente est une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$, il existe $u \in [0, \pi/2[$ unique tel que $t = \tan u$. On a alors

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin 2u, \quad \text{et} \quad f(t) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2u)).$$

Sachant que pour tout x de $[-\pi/2, \pi/2]$, on a $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$, il y a alors deux cas possibles.

• Si $t \in [0, 1]$, alors $u \in [0, \pi/4]$, donc $2u \in [0, \pi/2]$, d'où

$$f(t) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2u)) = 2u = 2\operatorname{Arctan} t\,.$$

• Si $t \in [1, +\infty[$, alors $u \in [\pi/4, \pi/2[$, donc $2u \in [\pi/2, \pi[$ et $\pi - 2u \in]0, \pi/2]$, d'où $f(t) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - 2u)) = \pi - 2u = \pi - 2\operatorname{Arctan} t$.

On a alors

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\,dt + \int_1^{\sqrt{3}} (\pi - 2\operatorname{Arctan} t)\,dt \\ &= 2\left(\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\,dt - \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} t\,dt\right) + \pi(\sqrt{3}-1)\,. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on trouve que la primitive de $\operatorname{Arctan} t$ s'annulant en 0 est la fonction $G : t \mapsto t\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. On a $G(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ et $G(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - \ln 2$, donc $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3.16

Centrale MP 2006

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^3 t + \sin^3 t}\,dt$.

En divisant par $\cos^3 t$ le dénominateur et le numérateur de la fonction intégrée, on obtient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{1+\tan^3 t}\,dt$, et on effectue le changement de variable $x = \tan t$ qui est une bijection de $[0, \pi/4]$ sur $[0, 1]$. De plus $dx = dt/\cos^2 t$, donc $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$.

Pour trouver une primitive F de $x \mapsto 1/(x^3+1)$ on va décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples.

Les racines de $P(x) = x^3 + 1$ sont $-1, -j, -j^2$, et si α désigne une de ces racines, le coefficient de $1/(x-\alpha)$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(x)}$ est

$\dfrac{1}{P'(\alpha)} = \dfrac{1}{3\alpha^2}$. On a alors $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{j^2(x+j)} + \dfrac{1}{j(x+j^2)}\right)$, et en regroupant les deux derniers termes, compte tenu du fait que $j + j^2 = -1$, on trouve

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right),$$

ce que l'on peut encore écrire, en faisant apparaître la dérivée de $x^2 - x + 1$,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\right).$$

Enfin, puisqu'une primitive de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, lorsque $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ est $\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\text{ Arctan}\,\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, on obtient, pour $x \geqslant -1$,

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Alors $\qquad I = F(1) - F(0) = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{ Arctan}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{ Arctan}\,\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$,

ce qui donne finalement

$$I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{ Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exercice 3.17

Mines - Ponts MP, Centrale MP 2006

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^{2n} - 1 = (X^2-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

2) Soit un réel $\alpha \neq \pm 1$; déduire de 1) la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1)\,dt$.

1) Les racines du polynôme $X^{2n} - 1$ sont les nombres comlexes $e^{ik\pi/n}$ où $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$, et l'on a la factorisation $X^{2n} - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1}(X - e^{ik\pi/n})$. En isolant dans ce produit les facteurs $(X-1)$ et $(X+1)$ correspondant respectivement à $k = 0$ et $k = n$, on peut écrire $X^{2n} - 1 = (X^2-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{ik\pi/n})\prod_{k=n+1}^{2n-1}(X - e^{ik\pi/n})$. Mais en faisant le changement d'indice $p = 2n - k$ dans le second produit, on a

$\prod_{k=n+1}^{2n-1}(X-e^{ik\pi/n}) = \prod_{p=1}^{n-1}(X-e^{-ip\pi/n})$, et donc

$$\begin{aligned} X^{2n}-1 &= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{ik\pi/n})(X-e^{-ik\pi/n}) \\ &= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \end{aligned}$$

3) On remarque que pour tout $t \in [0,\ \pi]$, le produit

$$(\alpha-e^{it})(\alpha-e^{-it}) = \alpha^2-2\alpha\cos t+1$$

ne s'annule pas si $\alpha \in \mathbb{R}\{\pm 1\}$. La fonction $t \mapsto \ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos t+1\right)$ est donc continue sur $[0,\ \pi]$. Pour $n>0$, posons

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{k\pi}{n}+1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}\right) \end{aligned}$$

La suite de sommes de Riemann $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos t+1\right)dt$.

Si $|\alpha|<1$, alors $\dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{1}{1-\alpha^2}$, donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Si $|\alpha|>1$, en mettant en facteur α^{2n}, $S_n = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{1-\alpha^{-2n}}{\alpha^2-1}\right)+2\pi\ln|\alpha|$, donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $2\pi\ln|\alpha|$.

Finalement

$$\int_0^{\pi}\ln\left(t^2-2\alpha\cos t+1\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha|<1 \\ 2\pi\ln|\alpha| & \text{si } |\alpha|>1 \end{cases}$$

Exercice 3.18

Inégalité de Jensen Mines - Ponts MP 2006

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^0([a,\ b],\mathbb{R})$. Soit $\varphi\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Montrer que si φ est convexe, alors $\varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\varphi(f(t))\,dt$.

C'est un exercice classique qui « relie » les inégalités de convexité et les sommes de Riemann.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. En vertu de la convexité de φ, on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k)\,.$$

En appliquant cette inégalité avec $x_k = f(a + k(b-a)/n)$ et $\lambda_k = 1/n$, on obtient alors $\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Comme f est continue sur $[a, b]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\,,$$

on en déduit, en vertu de la continuité de φ

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right).$$

Par ailleurs $\varphi \circ f$ est continue sur $[a, b]$, et on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\,dt\,.$$

On obtient alors, par conservation des inégalités par passage à la limite

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,dt\,.$$

Exercice 3.19

Mines - Ponts MP 2007 K

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Montrer

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}\,.$$

Voici une démonstration géométrique.

- Montrons $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Comme f est convexe sur $[a, b]$, la courbe représentative de f est située en dessous de la sécante joignant les points $(a, f(a)$ et $(b, f(b))$. Donc, pour $x \in [a, b]$, on a

$f(x) \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. En intégrant, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b \left(\frac{f(b) - f(a)}{t - a}(b - a) + f(a) \right) dt = (b - a)\,\frac{f(b) + f(a)}{2}.$$

• Montrons que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt.$

Comme f est convexe, sa courbe représentative est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $(a+b)/2$. En posant $\lambda = f'((a+b)/2)$, on obtient que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant \lambda\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right) + f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. En intégrant, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b \left(\lambda\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dt = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

En divisant par $b - a$, on en déduit l'encadrement voulu.

Remarque

L'hypothèse « f dérivable » n'est en fait pas nécessaire. car la convexité de la fonction implique qu'elle est dérivable à gauche et à droite en tout point, et que la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite passant par le point d'abscisse $(a+b)/2$ et de coefficient directeur $\lambda = f'_d((a+b)/2)$ par exemple.

Exercice 3.20

Polytechnique MP 2007

Soit $a \in]0, +\infty[$ et soit $f \in \mathscr{C}^1([0, a], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

Etablir l'inégalité (1) $\displaystyle\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx$.

Etudier le cas d'égalité.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, a]$ et $f(0) = 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$. En outre, la fonction F définie sur $[0, a]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,dt$ est dérivable sur $[0, a]$ et $F'(x) = |f'(x)|$. Ainsi, on a pour tout $x \in [0, a]$

$$|f(x)f'(x)| = \left| f'(x)\int_0^x f'(t)\,dt \right| \leqslant |f'(x)| \int_0^x |f'(t)|\,dt = F(x)F'(x).$$

En intégrant l'inégalité précédente sur $[0, a]$, on obtient

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \int_0^a F(x)F'(x)\,dx = \frac{(F(a))^2}{2}$$

soit $\displaystyle\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(x)|\,dx\right)^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\left(\int_0^a |f'(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^a 1^2\,dt \int_0^a |f'(t)|^2\,dt = a\int_0^a |f'(t)|^2\,dt$$

ce qui donne (1).
Si l'inégalité (1) se réduit à une égalité, on a alors

$$\left(\int_0^a 1.|f'(x)|\,dx\right)^2 = a\int_0^a |f'(t)|^2\,dt.$$

Les fonctions $|f'|$ et 1 sont donc proportionnelles et, puisque f' est continue, elle est constante. De $f(0) = 0$, on déduit alors que f est de la forme $x \mapsto \lambda x$.
Réciproquement, toute fonction de la forme $x \mapsto \lambda x$ vérifie bien

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx = \frac{a}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx.$$

Il y a donc égalité pour (1) si et seulement si f est linéaire.

Exercice 3.21

Polytechnique MP 2006 KK

Soient f et g des fonctions continues et strictement positives sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)g^n(t)\,dt$. et $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} g(x)$.

1) Montrer que la suite $(I_n^{1/n})_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite M.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = I_{n+1}/I_n$.

2.a Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. (On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

2.b En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

2.c Retrouver le résultat du 1).

1) La fonction g étant continue sur $[0, 1]$, la borne supérieure M de g sur $[0, 1]$ est atteinte. Il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un segment $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$, on ait $M - \varepsilon/2 \leqslant g(x) \leqslant M$. On a alors pour tout entier naturel n

$$\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)g^n(x)\,dx \leqslant M^n \int_0^1 f(x)dx\,.$$

On en déduit $\left(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right)^{1/n} \leqslant I_n^{1/n} \leqslant M\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\right)^{1/n}$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right)^{1/n} = M-\dfrac{\varepsilon}{2}$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} M\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{1/n} = M$, donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $M-\varepsilon \leqslant I_n^{1/n} \leqslant M+\varepsilon$. Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = M$.

2.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}\,g^{(n+1)/2}$ et $\sqrt{f}\,g^{(n-1)/2}$, dont le produit vaut fg^n, on obtient

$$\left(\int_0^1 f(t)g^n(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)g^{n+1}(t)\,dt\right)\times\left(\int_0^1 f(t)g^{n-1}(t)\,dt\right),$$

c'est-à-dire $(I_n)^2 \leqslant I_{n+1}I_{n-1}$, et on en déduit que $u_{n-1} \leqslant u_n$.

2.b La fonction g étant continue et strictement positive sur $[0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$, on a $g(x)\leqslant M$, donc $f(x)g^{n+1}(x) \leqslant Mf(x)g^n(x)$. Alors en intégrant, on obtient $I_{n+1} \leqslant MI_n$ et donc $u_n \leqslant M$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.

2.c) Montrons que les suites $(I_n^{1/n})_{n\geqslant 1}$ et $(I_{n+1}/I_n)_{n\geqslant 1}$ ont la même limite.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $k \geqslant N$ implique $\ell-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{I_{k+1}}{I_k} \leqslant \ell$. En faisant le produit de ces inégalités pour $N\leqslant k\leqslant n-1$, on en déduit que, si $n\geqslant N$, on a $I_N\left(\ell-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N} \leqslant I_n \leqslant I_N\ell^{n-N}$.

Donc $I_N^{1/n}\left(\ell-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{(n-N)/n} \leqslant I_n^{1/n} \leqslant I_N^{1/n}\,\ell^{(n-N)/n}$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} I_N^{1/n}\left(\ell-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{(n-N)/n} = \ell-\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_N^{1/n}\,\ell^{(n-N)/n} = \ell$, donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, on ait $\ell-\varepsilon \leqslant I_n^{1/n} \leqslant \ell+\varepsilon$, ce qui montre que la suite $(I_n^{1/n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers ℓ. On en conclut que $\ell = M$.

Exercice 3.22

Polytechnique MP 2006 K

Pour tout $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,dt$. Soit

$$F = \{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0)=0 \text{ et } f(1)=1\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que Φ est minorée sur F et de calculer $\inf_{f \in F} \Phi(f)$.

1) Soit $f \in F$. Etablir que pour tout $f \in F$, on a $1/e \leqslant \Phi(f)$.

2) Exhiber une suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} = 1/e$.

1) Soit $f \in F$; la fonction g, définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = e^{-t} f(t)$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et l'on a $g'(t) = e^{-t}(f'(t) - f(t))$, d'où $|f'(t) - f(t)| = e^t |g'(t)|$. En introduisant l'ensemble $G = \{g \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1/e\}$, la fonction f appartient à F si et seulement g appartient à G.

On a alors $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 e^t |g'(t)|\, dt$. Mais en minorant e^t par 1, on obtient

$$\int_0^1 e^t |g'(t)| \geqslant \int_0^1 |g'(t)|\, dt \geqslant \int_0^1 g'(t)\, dt = g(1) - g(0) = 1/e\,.$$

Conclusion : l'application Φ est minorée sur l'ensemble F, et on a $\inf_{f \in F} \Phi(f) \geqslant 1/e$.

2) Pour pouvoir effectuer facilement les calculs d'intégrales, choisissons une suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ construites avec $t \mapsto e^{-nt}$. Pour qu'elle satisfasse les conditions en 0 et en 1, prenons la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{1}{e} \dfrac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-n}}$. C'est un élément de G, et on a $g_n'(t) = \dfrac{1}{e} \dfrac{ne^{-nt}}{1 - e^{-n}}$, donc $g_n' > 0$. On obtient

$$\int_0^1 e^t |g_n'(t)|\, dt = \frac{1}{e} \frac{n}{1 - e^{-n}} \int_0^1 e^{-(n-1)t} dt = \frac{1}{e} \frac{n}{1 - e^{-n}} \frac{1 - e^{-(n-1)}}{n - 1}\,.$$

Alors, pour la suite de fonctions f_n de F définies par $f_n(t) = g_n(t) e^t$, on aura $\lim_{n \to +\infty} \Phi(f_n) = 1/e$ et il en résulte que $\inf_{f \in F} \Phi(f) = 1/e$.

Exercice 3.23 KK

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue strictement positive. On pose $S_f(p) = \left(\dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(t)^p\, dt \right)^{1/p}$, et on désigne par M_f (resp. m_f) le maximum (resp. minimum) de f sur $[a, b]$.

1) Montrer que $\lim_{p \to +\infty} S_f(p) = M_f$.

2) Montrer que $\lim_{p \to -\infty} S_f(p) = m_f$.

3) Montrer que $\lim_{p \to 0} S_f(p) = \exp \left(\dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b \ln f(t) dt \right)$.

1) Supposons $p > 0$. Puisque f est continue elle possède bien un maximum sur le segment $[a, b]$. Ce maximum est atteint en un point x_0 de $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$ on a alors $f(t)^p \leqslant M_f^p$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)^p dt \leqslant (b-a)M_f^p$ et finalement $S_f(p) \leqslant M_f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in [a, b]$ et $|x - x_0| < \alpha$ implique $M_f - f(x) < \varepsilon/2$.

Alors, en posant $[\alpha, \beta] = [a, b] \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on a

$\displaystyle\int_a^b f(t)^p dt \geqslant \int_\alpha^\beta f(t)^p dt \geqslant (\beta - \alpha)\left(M_f - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$, et par conséquent

$$S_f(p) \geqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^{1/p}\left(M_f - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Quand p tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $M_f - \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc il existe p_0 tel que $p \geqslant p_0$ implique $S_f(p) \geqslant M_f - \varepsilon$. On a donc $|S_p - M_f| < \varepsilon$, et on en déduit que $\displaystyle\lim_{p\to-\infty} S_f(p) = M_f$.

2) La fonction $1/f$ est encore continue et strictement positive sur $[a, b]$ et pour tout p non nul, on a la relation $S_f(p) = \dfrac{1}{S_{1/f}(-p)}$.

Alors d'après ce qui précède

$$\lim_{p\to-\infty} S_f(p) = \frac{1}{\lim_{p\to-\infty} S_{1/f}(-p)} = \frac{1}{\sup_{t\in[a,b]}(1/f)(t)} = m_f.$$

3) Si $p \neq 0$, on a $f(t)^p = e^{p\ln f(t)}$. Puisque la fonction f est continue et strictement positive sur $[a, b]$, la fonction $t \mapsto \ln f(t)$ est bornée. Il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [a, b]$, on ait $|\ln f(t)| \leqslant K$. Alors si $|p| < 1$, on aura donc également $|p \ln f(t)| \leqslant K$.

Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exponentielle, on obtient $e^x = 1 + x + \displaystyle\int_0^x (x-u)e^u du$, et donc si $x \in [-K, K]$, on a $|e^x - 1 - x| \leqslant e^K \dfrac{x^2}{2}$. On en déduit, pour tout $t \in [a, b]$ et $p \in [-1, 1]$, la majoration $|f(t)^p - 1 - p\ln f(t)| \leqslant \dfrac{e^K}{2}p^2(\ln f(t))^2 \leqslant \dfrac{K^2e^K}{2}p^2$.

On peut alors intégrer et on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)^p dt - (b-a) - p\int_a^b \ln f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{K^2e^K}{2}(b-a)p^2.$$

Ce qui s'écrit encore $\int_a^b f(t)^p dt = (b-a) + p\int_a^b \ln f(t)dt + O(p^2)$, et donc

$$S_f(p) = \left(1 + \frac{p}{b-a}\int_a^b \ln f(t)dt + O(p^2)\right)^{1/p}.$$

Posons $A = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln f(t)\,dt$. On a alors

$$S_f(p) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln(1 + pA + O(p^2))\right) = \exp\left(\frac{1}{p}(pA + O(p^2))\right) = e^{A+O(p)}.$$

Conclusion :

lorsque p tend vers 0, alors $S_f(p)$ tend vers $e^A = \exp\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln f(t)dt\right)$.

4 Séries numériques

4.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

4.1.1 Généralités

Ce qu'il faut savoir

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Ainsi, une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est divergente. On dit dans ce cas que la série diverge **grossièrement**.

Série géométrique Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général z^n converge si et seulement si $|z| < 1$, et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 4.1

Divergence grossière

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2 + \sin n\frac{\pi}{4}}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{4n} = 1/2$. La suite $(u_{4n})_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 4.2

Série divergente dont le terme général tend vers 0

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$ et en déduire que la série de terme général $1/n$ diverge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1) > 0$. Elle admet donc une limite. Si cette limite était finie alors la suite $(S_{2n} - S_n)$ convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$.

Donc la suite (S_n) admet $+\infty$ pour limite et la série de terme général $1/n$ diverge.

4.1.2 Exemples de sommation de séries

Les résultats concernant les séries géométriques (ex. 4.3) et télescopiques (ex. 4.4) sont à connaître parfaitement.

Exercice 4.3

Série géométrique

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = e^{-2n} \operatorname{ch} n$.

On a $u_n = \dfrac{1}{2}(e^{-n} + e^{-3n})$ et, puisque les séries géométriques de raison e^{-1} et e^{-3} convergent, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-3})^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-3}}\right).$$

Exercice 4.4

Série télescopique

Soit $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique. Pour $n \geqslant n_0$, on pose $u_n = v_n - v_{n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ converge, et que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = v_{n_0} - \lim_{n \to +\infty} v_n$.

Application : *CCP PC 2006*

Pour tout $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Pour $n \geqslant n_0$, on calcule la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}(v_k - v_{k+1})$. Cette somme vaut $S_n = v_{n_0} - v_{n+1}$ et la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ a une limite finie si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ a une limite finie. Alors $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = v_{n_0} - \lim_{n \to +\infty} v_n$.

Application

Pour $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a alors $u_n = a_n - a_{n+1}$, et on obtient une série télescopique. Celle-ci converge puisque la suite (a_n) converge vers 0, et l'on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = a_2 = 1 - 1/\sqrt{2}$.

On peut également faire les calculs en effectuant des changements d'indice de sommation. La maîtrise de ces manipulations sera utile dans l'étude des séries entières.

Exercice 4.5

ENSEA PC 2006

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

2) Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la somme partielle de rang n de la série de terme général u_n. Montrer que $S_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3) En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1) La relation se vérifie facilement en réduisant au même dénominateur, ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples.

2) On a alors $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+2}$.

En effectuant le changement d'indice $p \mapsto p+1$ dans la première somme du membre de droite et $p \mapsto p-1$ dans la troisième, on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p+1}.$$

D'où, en faisant apparaître, si $n \geqslant 3$, la partie commune aux trois sommes,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

La somme se simplifie, et il reste

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right),$$

d'où
$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

3) Lorsque n tend vers l'infini, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1/4$, donc la série de terme général u_n converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 4.6

Séparation des termes de rang pair et de rang impair

Montrer que si la série de terme général a_{2n} et la série de terme général a_{2n+1} convergent alors la série de terme général a_n converge et que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$.

Application : calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3+(-1)^n)^{-n}$.

Soit S_n la somme partielle de rang n de la série de terme général a_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2n} = \sum_{p=0}^{2n} a_p = \sum_{p=0}^{n} a_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} a_{2p+1} \text{ et } S_{2n+1} = \sum_{p=0}^{2n+1} a_p = \sum_{p=0}^{n} a_{2p} + \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}.$$

Si les deux séries convergent, alors les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers la même limite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$, donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la limite commune. On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}.$$

Application : lorsque $a_n = (3 + (-1)^n)^{-n}$, on a $a_{2n} = 4^{-2n}$ et $a_{2n+1} = 2^{-2n-1}$. Ainsi obtient-on deux séries géométriques. D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\,.$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{16}{15} + \frac{2}{3} = \frac{26}{15}\,.$

4.1.3 Séries à termes positifs

Ce qu'il faut savoir

Lorsque $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite positive, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ des sommes partielles est croissante, et la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée. Dans ce cas, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

Critères de comparaison

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$;

– si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge,
– si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et v_n soit de signe constant à partir d'un certain rang. La série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n = O(v_n)$ et u_n et v_n soient de signe constant à partir d'un certain rang. Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.

Séries de référence

• La série géométrique.

• Les séries de Riemann : la série de terme général $1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On donne le nom de **série harmonique** à la série de Riemann de terme général $1/n$. La série harmonique diverge.

Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n) possède une limite ℓ finie ou non.

– si $0 \leqslant \ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge,
– si $\ell > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.

Remarque
Lorsque $\ell = 1$ on ne peut pas conclure par cette règle (comme le montre l'exemple des séries de Riemann).

Exercice 4.7

Comparaison aux séries géométriques

Etudier la nature des séries de terme général u_n suivantes :

1) $u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{3^n + n^4}$; 2) $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

1) On obtient un équivalent de u_n en écrivant, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5^n}{3^n} \dfrac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{n^4}{3^n}}$.

On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ puisque les suites $((3/5)^n)$ et $(n^4/3^n)$ convergent vers 0.
Or la série de terme général $(5/3)^n$ est une série géométrique positive de raison $5/3 \notin]-1, 1[$. Elle diverge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \exp\left[n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right]$,

et en utilisant le développement limité au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$, on obtient $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Or la série de terme général $e(1/2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/2 \in]-1, 1[$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 4.8

Comparaison aux séries de Riemann. CCP PC 2005

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \dfrac{\mathrm{Arctan}(n^{2\alpha})}{n^\alpha}$.
Selon que α est positif, négatif ou nul, trouver un équivalent simple de u_n, puis étudier la nature de la série de terme général u_n.

On peut être tenté de majorer $\mathrm{Arctan}(n^{2\alpha})$ par $\pi/2$, mais cela ne permet de conclure par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^\alpha$ que si $\alpha > 1$. On va étudier les autres cas au moyen des équivalents.
– Si $\alpha > 0$, alors la suite $(n^{2\alpha})_{n\geqslant 1}$ admet $+\infty$ comme limite, et, $\mathrm{Arctan}(n^{2\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$,

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'on obtient une série de Riemann. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.
– Si $\alpha = 0$, alors $u_n = \operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$ et la suite (u_n) ne converge pas vers 0. Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement
– Si $\alpha < 0$, alors la suite $(n^{2\alpha})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. On peut donc utiliser l'équivalent $\operatorname{Arctan} u \underset{u\to 0}{\sim} u$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{2\alpha}}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{(-\alpha)}}$ et l'on obtient une série de Riemann. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si $-\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < -1$.

Exercice 4.9

Comparaison aux séries de Riemann

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} - 1$

Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\,.$$

En utilisant le développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\,.$$

Alors, en utilisant le développement limité de $u \mapsto e^u$ au voisinage de 0, on en déduit

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}\,.$$

Or $1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 4.10

Comparaison aux séries de Riemann

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$.

Lorsque $a \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Lorsque $0 < a < 1$, la suite $(n^2 u_n)_{n\geqslant 1} = (n^2 a^{\sqrt{n}})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (produit d'une exponentielle et d'une puissance). Donc à partir d'un certain rang, on a $n^2 u_n \leqslant 1$, d'où l'on déduit $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, et puisque la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

Remarque
On retiendra que pour comparer à une série de Riemann, il peut être utile de chercher la limite de suites de la forme $(n^\alpha u_n)$, (voir également 4.15).

Exercice 4.11

Comparaison aux séries de Riemann Centrale PC 2006

Nature de la série de terme général $v_n = \text{Arccos}(1 - 1/n^\alpha)$ $(\alpha > 0)$.

Indication de la rédaction : utiliser un développement limité de $\cos v_n$.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive qui converge vers 0 et on a $\cos v_n = 1 - 1/n^\alpha$, donc, en utilisant un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \cos u$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha} = 1 - \cos v_n = \dfrac{v_n^2}{2} + o(v_n^2)$. On en déduit $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2/n^\alpha$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}/n^{\alpha/2}$, et la série de terme général v_n converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Exercice 4.12

TPE MP 2006

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive. On pose $v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n+1}$.

1) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

2) Montrer que la réciproque est fausse.

1) En utilisant l'inégalité $a\cdot b \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$, valable pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Comme les séries de termes généraux u_n et $1/(n+1)^2$ convergent, la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge et par suite la série de terme général v_n converge.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, prenons $u_n = 1/(n+1)$. La série de terme général u_n diverge. Par contre $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^{3/2}$ et la série de terme général v_n converge.

Remarque
On pourrait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les sommes partielles de la série.

L'exercice suivant utilise la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

Exercice 4.13

Règle de d'Alembert. CCP PC 2006

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n} a^n$ $(a > 0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}a^n} \dfrac{n^n}{n!} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.
Par un calcul de développement limité classique (voir ex. 4.7), on obtient que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ae^{-1}, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général u_n converge si $a/e < 1$, donc si $a < e$, et diverge si $a/e > 1$, donc si $a > e$. Lorsque $a = e$, on obtient en utilisant la formule de Stirling $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\,\dfrac{e^n}{n^n} = \sqrt{2n\pi}$ et la série diverge grossièrement.

Ce qu'il faut savoir

Comparaison à une intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux décroissante et positive sur un intervalle de la forme $[\,A, +\infty\,[$. Alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ converge.
Il en résulte que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la série de terme général $f(n)$ converge

ii) la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge

iii) la fonction f est intégrable sur $[\,A, +\infty\,[$

iv) une primitive F de f sur $[\,A, +\infty\,[$ admet une limite finie en $+\infty$.

Remarque
De nombreux exercices reposent sur la comparaison d'une série et d'une intégrale. Lorsqu'une fonction est décroissante sur $[\,n-1, n\,]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser les inégalités $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1)$, mais beaucoup d'autres situations sont possibles.

Exercice 4.14

Mines - Ponts PC 2005

Etudier la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n)$.

La fonction f définie sur $[\,2, +\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, est continue décroissante positive et la série de terme général $f(n) - \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. En calculant la somme partielle S_n de rang n de cette série, on obtient

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=3}^{n} \left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(t)dt \right) &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) - \int_{2}^{n} f(t)dt \\ &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) - \ln\ln n + \ln\ln 2\,. \end{aligned}$$

Comme la suite $(S_n)_{n\geqslant 3}$ converge, on en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) - \ln\ln n \right)_{n\geqslant 3}$ converge également.

Exercice 4.15

Séries de Bertrand

Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$ en comparant à une série de Riemann lorsque $\alpha \neq 1$ et à une intégrale lorsque $\alpha = 1$.

Application : étudier les séries de termes généraux $v_n = \dfrac{1}{\ln n!}$ puis $w_n = n^{\frac{\ln n}{n}} - 1$.

$\alpha = 1$ La fonction définie sur $[\,2, +\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$ est dérivable et l'on obtient $f'(x) = -\dfrac{\ln x + \beta}{x^2(\ln x)^{\beta+1}}$. Donc f' est négative sur $[\,e^{-\beta}, +\infty\,[\cap [\,2, +\infty\,[$ et f est une fonction décroissante positive sur un intervalle de la forme $[\,A, +\infty\,[$. On obtient facilement une primitive F de f :

$$F(x) = \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \text{si } \beta \neq 1 \qquad \text{et} \qquad F(x) = \ln(\ln x) \ \text{ si } \beta = 1\,.$$

Donc on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, et le critère de comparaison à une intégrale montre que la série de terme général $1/(n(\ln n)^{\beta})$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\alpha < 1$ Si $n \geqslant 2$, on écrit $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}/(\ln n)^\beta = +\infty$.
Donc, pour n assez grand $\dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \geqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$. La série diverge par comparaison à la série harmonique.

$\alpha > 1$ Soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. Si $n \geqslant 2$, on écrit $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \dfrac{1}{n^{\alpha'}}\,\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta}$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta = +\infty$. Donc, pour n assez grand $\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta} \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$. La série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque
Ces résultats sont utilisés dans beaucoup d'exercices d'oraux. Nous vous conseillons vivement de savoir les redémontrer.

Application : En majorant chaque terme du produit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ par n, on a, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité $n! \leqslant n^n$, et donc $\ln n! \leqslant n \ln n$. Finalement $v_n \geqslant \dfrac{1}{n\ln n}$.
Comme la série de terme général $1/(n \ln n)$ est une série de Bertrand divergente ($\alpha = \beta = 1$), il en résulte que la série de terme général v_n diverge.
La suite $((\ln n)^2/n)$ converge vers 0. Comme on a l'équivalent $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc $w_n = e^{(\ln n)^2/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. On obtient une série de Bertrand divergente ($\alpha = 1, \beta = -2$), il en résulte que la série de terme général w_n diverge.

Ce qu'il faut savoir

Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et lorsque v_n est de signe constant à partir d'un certain rang, la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature. Dans ce cas :

- si les séries convergent, alors $\displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} u_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} v_p$,
- si les séries divergent, alors $\displaystyle\sum_{p=n_0}^{n} u_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n_0}^{n} v_p$.

Exercice 4.16

1) Montrer que $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-\alpha}dt$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$.

3) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

4) Montrer qu'il existe un nombre γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{-\alpha}$. Lorsque $\alpha > 0$ la fonction f est décroissante, et on a, pour $n \geqslant 1$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \quad \text{et donc} \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} \leqslant n^{-\alpha} \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant 1.$$

Il résulte alors du théorème d'encadrement, que la suite $\left(n^{-\alpha} \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt\right)$ converge vers 1, et donc que $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{n+1} x^{-\alpha}\,dx$.

Lorsque $\alpha < 0$, la fonction f est croissante, les inégalités sont inversées, mais la conclusion subsiste.

2) Pour $\alpha \leqslant 1$, les séries de termes généraux $n^{-\alpha}$ et $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-\alpha}dt$ divergent. On a donc l'équivalence des suites des sommes partielles, ce qui donne,

• pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} t^{-\alpha}dt = \int_1^{n+1} t^{-\alpha}dt = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

• pour $\alpha = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} t^{-1}dt = \int_1^{n+1} t^{-1}dt = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

3) Pour $\alpha > 1$, les séries de termes généraux $n^{-\alpha}$ et $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-\alpha}dt$ convergent. On a donc l'équivalence des suites des restes, ce qui donne,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} n^{-\alpha} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} t^{-\alpha}dt = \lim_{N\to+\infty} \int_{n+1}^{N} t^{-\alpha}dt \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{(n+1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

4) Puisque la fonction $x \mapsto x^{-1}$ est continue, décroissante et positive sur $]0, +\infty[$, la série de terme général $n^{-1} - \int_{k-1}^{k} t^{-1}dt$ converge. Mais

$$\sum_{k=2}^{n}\left(k^{-1} - \int_{k-1}^{k} t^{-1}dt\right) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} - 1 - \ln n\,.$$

Alors, puisque la suite (S_n) converge, on en en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln n\right)_{n\geqslant 1}$ converge, et en notant γ sa limite, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Le nombre γ est appelé la constante d'Euler.

Remarque
Les résultats obtenus ci-dessus sont classiques et sont utilisés dans de nombreux exercices d'oraux. Il vaut mieux savoir les redémontrer.

Exercice 4.17

Centrale MP 2006

Équivalent, quand $N \to +\infty$, de $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 + \sqrt{k} + 1}$.

On a $\frac{1}{k^4 + \sqrt{k} + 1} = \frac{1}{k^4} \frac{1}{1 + \frac{1}{k^{7/2}} + \frac{1}{k^4}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4}$.

La série de terme général $\frac{1}{k^4 + \sqrt{k} + 1}$ converge par comparaison à une série de Riemann, et l'on a alors $R_N \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$. On peut alors appliquer les résultats de l'exercice 4.16 pour $n = 4$, qui donne $R_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3N^3}$.

4.1.4 Séries à termes réels quelconques ou à termes complexes

Ce qu'il faut savoir

- Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique. On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** lorsque la série de terme général $|u_n|$ est convergente.
- Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle converge. De plus, en cas de convergence absolue, $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

La série de terme général $|u_n|$ est une série à termes positifs et les résultats du paragraphe précédent peuvent donc s'appliquer.

• Une série qui converge sans converger absolument, est dite **semi-convergente**.

Critère de Leibniz ou **critère spécial des séries alternées**

Soit $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite décroissante qui converge vers 0. Alors la série alternée de terme général $(-1)^n a_n$ converge. De plus $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.

La série harmonique alternée de terme général $(-1)^n/n$ est l'exemple d'une série qui converge d'après le critère de Leibniz, mais qui ne converge pas absolument.

Attention : On ne peut pas utiliser les équivalents pour étudier des séries dont le terme général n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang. On privilégiera dans ce cas les développements asymptotiques. (Voir ex. 4.20).

Exercice 4.18

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \sin \dfrac{1}{n}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n}$. Puisque l'on a l'équivalent $\sin u \underset{u \to 0}{\sim} u$, on en déduit que $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} 1/n^2$. Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument. Donc elle converge.

Exercice 4.19

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \sin n}$

La fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x - \sin x}$ est dérivable et admet comme dérivée $f'(x) = \dfrac{\cos x - 1}{(x - \sin x)^2}$. La dérivée étant négative, il en résulte que f est décroissante. D'autre part $|u_n| = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1 - \frac{\sin n}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Alors, la série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique. Mais la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante qui converge vers 0. Donc la série de terme général u_n converge d'après le critère de Leibniz.

Exercice 4.20

Étudier si la série de terme général $u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$ converge.

Puisque la suite $((-1)^n/\sqrt{n})$ converge vers 0, on peut utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. On a donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

La série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après le critère de Leibniz. D'autre part $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et la série de terme général $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge par comparaison à la série harmonique. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge, et ceci bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n/\sqrt{n}$.

On a donc l'exemple de deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui ne sont pas de même nature.

4.1.5 Séries doubles

Ce qu'il faut savoir

Théorème de Fubini pour les séries doubles

Soit $(a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{nm}\right).$$

Ces deux sommes pouvant être finies ou infinies.

Soit $(z_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes. On dit que la famille est **sommable** lorsque la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} |z_{nm}|$ est finie. Dans ce cas les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} z_{nm}\right)$ et $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_{nm}\right)$ sont toutes deux finies et sont égales, et on note cette quantité $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} z_{nm}$.

Cas particuliers

• Lorsque une des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}|z_{nm}|\right)$ ou $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=m}^{+\infty}|z_{nm}|\right)$ est finie, les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}z_{nm}\right)$ et $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=m}^{+\infty}z_{nm}\right)$ sont toutes deux finies et elles sont égales.

• Lorsque les séries de termes généraux u_n et v_n convergent absolument, la famille $(u_n v_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_n v_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$.

Exercice 4.21

Montrer que pour tout couple (a,b) de $]0,+\infty[^2$, la famille de nombres réels $(e^{-an-bm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et calculer sa somme.

Pour tout couple (a,b) de $]0,+\infty[^2$, les nombres e^{-a} et e^{-b} sont dans $]0,1[$, et pour tout couple (m,n) de $\mathbb{N}^2$, on a $e^{-an-bm}=(e^{-a})^n(e^{-b})^m$.
Les séries de termes généraux $(e^{-a})^n$ et $(e^{-b})^m$ sont des séries géométriques qui convergent absolument. Alors la famille de nombres réels $(e^{-an-bm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-a})^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-b})^n\right) = \frac{1}{1-e^{-a}}\,\frac{1}{1-e^{-b}}$.

Exercice 4.22

Soit q un nombre complexe tel que $|q|<1$. Si $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, on pose $a_{nm}=(-1)^n q^{n+m+2nm}$.

En utilisant le théorème de Fubini montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n+1}}.$$

Étudions la somme double $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|a_{nm}|$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\displaystyle S_n=\sum_{m=0}^{+\infty}|q|^{n+m+2nm}$.

On a tout d'abord $\displaystyle S_n=|q|^n\sum_{m=0}^{+\infty}|q|^{(2n+1)m}=\frac{|q|^n}{1-|q|^{2n+1}}$. Or, puisque la suite $(|q|^{2n+1})$ converge vers 0, on a $\displaystyle\frac{|q|^n}{1-|q|^{2n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}|q|^n$. Il en résulte que la série de terme général S_n converge, par comparaison à la série géométrique de raison $|q|<1$, et la somme double $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|a_{nm}|$ est finie. On peut donc appliquer le théorème de Fubini. On a alors

$$\sum_{m=0}^{+\infty} q^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{(2m+1)n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} q^{(2n+1)m}\right),$$

ce qui, en calculant les sommes des séries géométriques, donne l'égalité cherchée

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}.$$

4.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4.23

Mines - Ponts MP 2006

Nature de la série de terme général $\displaystyle U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k\ln k)^2}$.

La série de terme général $(-1)^n/(n\ln n)^2$ est alternée. Alors $|U_n|$ est majoré par le premier terme de la série donc $|U_n| \leqslant \dfrac{1}{(n\ln n)^2}$ Comme $1/(n\ln n)^2$ est le terme général d'une série de Bertrand convergente (voir ex. 4.15) , la série de terme général U_n converge absolument, donc converge.

Exercice 4.24

Mines - Ponts MP 2006

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2}$, où α est réel.

Indication de la rédaction : montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$ en comparant à une intégrale.

Pour $n \geqslant 2$, posons, $\displaystyle v_n = \sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$ et comparons v_n à l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_1^n (\ln t)^2 dt$.

En utilisant la croissance de la fonction logarithme, on a, lorsque $k \geqslant 1$, les inégalités $\displaystyle(\ln k)^2 \leqslant \int_k^{k+1}(\ln t)^2 dt \leqslant (\ln(k+1))^2$.

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on en tire, lorsque $n \geqslant 2$, l'encadrement $v_{n-1} \leqslant I_n \leqslant v_n$, ou encore $I_n \leqslant v_n \leqslant I_{n+1}$. Mais l'intégrale I_n se calcule en intégrant par parties. En posant $u(t) = (\ln t)^2$ et $v'(t) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[t(\ln t)^2\right]_1^n - 2\int_1^n \ln t \, dt \\ &= \left[t(\ln t)^2 - 2(t\ln t - t)\right]_1^n = n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2 . \end{aligned}$$

Remarque

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x\ln x - x$, ce que l'on retrouve facilement par une intégration par parties.

On a donc $I_n = n(\ln n)^2 \left(1 - \dfrac{2}{\ln n} + \dfrac{2}{(\ln n)^2} - \dfrac{2}{n(\ln n)^2}\right)$, d'où l'on déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$. Alors

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = n(\ln n)^2 \, \frac{n+1}{n}\left[1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right]^2 ,$$

et l'on en déduit que l'on a aussi $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$. La suite (v_n) étant encadrée par deux suites équivalentes, il en résulte que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^\alpha}{n(\ln n)^2} = \dfrac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$. Le terme général u_n est équivalent au terme général d'une série de Bertrand (voir ex. 4.15).

Cette série converge si $1 - \alpha > 1$ c'est-à-dire si $\alpha < 0$, et diverge si $\alpha > 0$.

Lorsque $\alpha = 0$, elle est de la forme $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ et elle converge donc.

Exercice 4.25

Centrale MP 2007

Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right)$.

En utilisant un développement limité en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$, on obtient $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, d'où

$$u_n = \cos\left(-n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Mais, pour tout a réel, $\cos(n\pi + \pi/2 + a) = (-1)^n \cos(\pi/2 + a) = (-1)^{n+1}\sin a$, alors $u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. En utilisant un développement limité en 0 de la fonction sinus, on obtient alors $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série de terme général $(-1)^{n+1}\pi/(3n)$ converge d'après le critère de Leibniz, et la série de terme général $O(1/n^2)$ converge par comparaison à une série de Riemann. Il en résulte que la série de terme général u_n converge.

Exercice 4.26

Mines - Ponts MP 2006

Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta}$. Nature de la série de terme général u_n.

Indication de la rédaction : montrer que la série de terme général a_n diverge si $\beta < 0$ et converge si $\beta > 0$.

Si $\beta < 0$, pour tout $k \geqslant 1$, on a alors $k^\beta \leqslant 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta \leqslant n$, et il en résulte que $u_n \geqslant 1/n$. La série de terme général u_n diverge donc, par comparaison à la série harmonique.

Si $\beta > 0$, d'après l'exercice 4.16 appliqué à $\alpha = -\beta$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$, et par suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta+1}{n^{\beta+1}}$. La série de terme général u_n converge donc par comparaison à une série de Riemann.

On aurait pu aussi faire apparaître une somme de Riemann, en écrivant

$$\sum_{k=1}^{n} k^\beta = n^{\beta+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta .$$

La suite des sommes de Riemann $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1}$ donc on retrouve l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$.

Exercice 4.27

Mines - Ponts MP 2007

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$?

Indication de la rédaction : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est entier et comparer $|u_n|$ au terme général d'une série géométrique.

On peut montrer en utilisant la formule du binôme que a_n est entier. En effet,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k 3^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k (1 + (-1)^k) 3^{n-k} .$$

Dans cette somme ne restent que les termes pour lesquels k est pair. Donc, si l'on pose $k = 2p$, on obtient $a_n = 2 \sum_{p=0}^{\mathbb{E}(n/2)} \binom{n}{2p} 5^p 3^{n-2p+1}$ qui est un nombre entier pair. Alors $u_n = \sin(\pi a_n - \pi(3 - \sqrt{5})^n) = -\sin(\pi(3 - \sqrt{5})^n)$.
Et puisque l'on a, pour tout x réel, l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, on obtient la majoration $|u_n| \leqslant \pi(3 - \sqrt{5})^n$. Mais $0 \leqslant 3 - \sqrt{5} < 1$, donc la série de terme général u_n converge absolument, par comparaison à une série géométrique.

Exercice 4.28

Mines - Ponts MP 2006

Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$, où $a > 0$.

On écrit $u_n = \ln \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}} + \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$,
et on utilise le développement limité en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1 + u)$. En posant $u = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a $u_n = \ln(1 + u) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + au^2)$, et l'on obtient alors,
$u_n = u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{au^2}{2} + O(u^3) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1+a}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
On a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/\sqrt{n}$, et la série de terme général u_n ne converge pas absolument.
Par contre la série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$, converge d'après le critère de Leibniz, et la série de terme général $O(1/n^{3/2})$ converge par comparaison à une série de Riemann. Si $a = -1$, alors la série de terme général u_n converge donc. Par contre si $a \neq -1$, alors la série de terme général $(a+1)/n$ diverge, et la série de terme général u_n diverge.

Exercice 4.29

D'après Mines - Ponts MP 2006

On veut étudier la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$, où $a > 0$.

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n = (-1)^n/n^a$, et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge absolument.

2) En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ trouver un équivalent de $u_n - v_n$ et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge.

1) La suite $((-1)^n/n^a)$ converge vers 0. On peut donc utiliser le fait que, en 0, $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, et l'on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^a}$, donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^a}$.
On trouve une série de Riemann qui converge si et seulement si $a > 1$. Donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $a > 1$.
2) En utilisant le développement limité en 0 : $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$, on obtient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} - \dfrac{1}{2n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right)$. On a donc $u_n = v_n + w_n$, où $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ et $w_n = -\dfrac{1}{2n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right)$. La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz, puisque la suite $(1/n^a)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.
Pour la série de terme général $w_n = u_n - v_n$, on a $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{2a}}$. C'est donc une série de Riemann de signe constant qui converge si et seulement si $2a > 1$, soit $a > 1/2$.
Donc, si $1/2 < a \leqslant 1$, la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge donc. Par contre si $0 < a \leqslant 1/2$, la série de terme général u_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge donc.
En résumé :
– si $a > 1$ la série converge absolument
– si $1/2 < a \leqslant 1$ la série est semi-convergente
– si $0 < a \leqslant 1/2$ la série diverge.

Exercice 4.30

Mines - Ponts MP 2006

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - [n^{3/2}] + n}$, où $[x]$ désigne la partie entière du nombre x.

En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e\,\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Puis en utilisant le développement limité en 0 de l'exponentielle, on trouve

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}.$$

Il en résulte en particulier que cette expression est positive à partir d'un certain rang. Par ailleurs $n \leqslant n^{3/2} - [n^{3/2}] + n < n + 1$, d'où $n^{3/2} - [n^{3/2}] + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, et il en résulte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{2n^2}$. Alors, la série de terme général u_n converge, par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 4.31

Centrale MP 2007

Calculer la somme double $S = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{pq(p+q-1)}$.

Comme, pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ le nombre $a_{pq} = 1/(pq(p + q - 1))$ est positif, on peut appliquer le théorème de Fubini. Le calcul doit être fait soigneusement : si l'on fixe p, on est amené à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{q(p+q-1)}$ sous la forme $\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p+q-1}\right)$ en prenant garde que ce calcul n'est possible que si $p \geqslant 2$. Il faudra donc isoler dans le calcul le premier terme.

Pour $p \geqslant 1$, notons $S_p = \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} a_{pq}$. On a tout d'abord $S_1 = \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$, puis, lorsque $p \geqslant 2$, on obtient $S_p = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q-1)}$.

Lorsque $Q > p$, on calcule la somme partielle

$$\sum_{q=2}^{Q} \frac{1}{q(p+q-1)} = \frac{1}{p-1}\sum_{q=2}^{Q}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-1}\right) = \frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{Q}\frac{1}{q} - \sum_{q=p+1}^{p+Q-1}\frac{1}{q}\right).$$

On obtient alors $\displaystyle\sum_{q=2}^{Q} \frac{1}{q(p+q-1)} = \frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q} - \sum_{q=Q+1}^{p+Q-1}\frac{1}{q}\right)$, et, lorsque Q tend vers l'infini, on trouve $\displaystyle\sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q-1)} = \frac{1}{p-1}\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}$. Donc,

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} S_p = S_1 + \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p-1)}\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}\right) = 2S_1 - 1 + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p(p-1)}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}\right).$$

On va calculer $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left(\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q} \right)$ en appliquant le théorème de Fubini pour intervertir les sommations. On remarquera que les couples (p, q) figurant dans cette somme double vérifient la condition $2 \leqslant q \leqslant p$. Donc, si q est fixé, p varie de q à $+\infty$. On obtient alors $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left(\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q} \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q} \left(\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \right)$.

La somme $\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=q}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$ est la somme d'une série télescopique et vaut $\frac{1}{q-1} - \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{q-1}$, donc

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left(\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q} \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(q-1)},$$

et cette somme vaut 1, car on fait apparaître de nouveau une série télescopique. Finalement $S = 2S_1 = \pi^2/3$.

4.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 4.32

Mines - Ponts MP 2005

Soit α dans $\mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1) Si $\alpha > 1$, montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ. Donner un équivalent de $\ell - u_n$.

2) Si $\alpha \in [0, 1]$, montrer que u_n tend vers $+\infty$ et, en utilisant la suite $(u_{n+1}^2 - u_n^2)$, donner un équivalent de u_n.

Il est immédiat par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$, et on en déduit donc que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} > 0$. La suite (u_n) est croissante et positive. Elle admet une limite strictement positive (finie ou non).

1) On suppose $\alpha > 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant u_1$, donc $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha u_1}$, et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann. Mais la série télescopique de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite (u_n) possède une limite finie ℓ, et il en résulte que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n^\alpha}$.

On a alors l'équivalence des suites des restes $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$. Mais $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_n$, et d'après l'exercice 4.16 , on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

On obtient donc $\displaystyle \ell-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2) Si la suite (u_n) admet une limite finie ℓ, alors $\ell \geqslant u_1 > 0$ et $\displaystyle u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha \ell}$.
Mais la série télescopique de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge dans ce cas et la série de Riemann de terme général $1/n^\alpha$ converge, d'où $\alpha > 1$.
Il en résulte que lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite. On a alors $\displaystyle u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}$, donc $\displaystyle u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2n^\alpha u_n^2}\right)$. Et puisque la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite, on en déduit que $\displaystyle u_{n+1}^2-u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}$. Comme la série de terme général $1/n^\alpha$ diverge, les suites des sommes partielles sont équivalentes.
Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}^2-u_k^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}^2-u_k^2) = u_n^2-u_1^2$, et d'après l'exercice 4.16 , on a, pour $\alpha \in [0,\ 1[$, l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. On obtient donc $\displaystyle u_n^2-u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, et on en déduit $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}\,n^{(1-\alpha)/2}$.

Pour $\alpha = 1$, on a cette fois $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, et on en déduit $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}$.

Exercice 4.33

Centrale MP 2006 K

Montrer que la série de terme général $1/n!$ converge, puis notant s sa somme, étudier les séries de termes généraux $\dfrac{\sin(2\pi s n!)}{\ln n}$, puis $\sin(\pi s n!)$.

Si l'on pose $a_n = 1/n!$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{n+1}$, et la suite (a_{n+1}/a_n) converge vers $0 < 1$. Il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général a_n converge.

Remarque
On verra dans le chapitre « Séries entières » que $s = e$.

• Étude de la série de terme général $\dfrac{\sin(2\pi s n!)}{\ln n}$.

On a alors $n!s = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

Mais le nombre α_n défini par $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} ((k+1) \times \ldots \times n)$ est un nombre entier. Donc, si l'on pose $\beta_n = sn! - \alpha_n$, on aura $\sin(2\pi sn!) = \sin(2\pi\beta_n)$.
Encadrons β_n.

D'une part on a $\beta_n = \dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k-n)}$, et donc $\beta_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
D'autre part si, pour r compris entre 2 et $k-n$, l'on minore $n+r$ par r dans le produit $(n+1)(n+2)\cdots(n+r)\cdots(n+k-n)$, on obtient

$$\beta_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{2\cdots r\cdots(k-n)}\right),$$

Donc $\beta_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{s-1}{n+1}$.
Il résulte alors du théorème d'encadrement que la suite (β_n) converge vers 0. Alors à partir d'un certain rang $2\pi\beta_n$ appartient à l'intervalle $[\,0,\ \pi/2\,]$ sur lequel la fonction sinus est croissante. Donc à partir d'un certain rang, on a

$$\frac{\sin(2\pi sn!)}{\ln n} = \frac{\sin(2\pi\beta_n)}{\ln n} \geqslant \frac{\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n\ln n}.$$

Alors la série de terme général $\dfrac{\sin(2\pi sn!)}{\ln n}$ diverge par comparaison à une série de Bertrand (voir ex. 4.15).
• Étude de la série de terme général $\sin(\pi sn!)$
On a $\sin(\pi sn!) = \sin(\pi\alpha_n + \pi\beta_n) = (-1)^{\alpha_n}\sin(\pi\beta_n)$.
La suite (β_n) converge vers 0. Étudions sa monotonie. On a, si $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1} - \beta_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{k!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(k-n)(n-1)!}{k!} > 0\,.
\end{aligned}$$

La suite (β_n) est donc décroissante, et la suite $(\sin(\pi\beta_n))$ décroit à partir d'un certain rang.

Étudions maintenant la suite (α_n). Si $n \geqslant 2$, on a, $\alpha_n = 1+n+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} ((k+1) \times \ldots \times n)$.

Mais tous les produits intervenant dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\cdots n$ contiennent deux entiers consécutifs et sont pairs. Alors α_n et n sont de parités opposées. Finalement $\sin(\pi s n!) = (-1)^{n+1}\sin(\pi\beta_n)$, et les conditions du critère de Leibniz sont satisfaites, ce qui prouve que la série de terme général $\sin(\pi\beta_n)$ converge. Par contre elle ne converge pas absolument, puisque, à partir d'un certain rang, $|\sin(\pi\beta_n)| \geqslant \sin\dfrac{\pi}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$.

Exercice 4.34

Extrait de Centrale MP 2007

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k+1}\right)$ avec $x>0$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{x}{n+2}\right) = x$, et il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général u_n converge si $0<x<1$ et diverge si $x>1$.
Il reste à étudier le cas $x=1$. On écrit

$$u_n = \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{1}{n+1}\prod_{k=2}^{n+1}\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Alors $\displaystyle\ln u_n = -\ln(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1}\ln\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$.

Mais $\displaystyle\ln\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = -\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

La série de terme général $1/n^2$ converge. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O(1)$,

alors, en sommant, on obtient $\displaystyle\ln u_n = -\ln(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + O(1)$.

Mais, puisque la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)$ converge (comparaison série-intégrale),

on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \ln(n+1) + O(1)$ et donc $\displaystyle\ln u_n = -\frac{3}{2}\ln(n+1) + O(1)$.

Finalement $\displaystyle u_n = \frac{e^{O(1)}}{(n+1)^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
La série de terme général u_n converge donc par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 4.35

Centrale MP 2007

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln n / n$ et $v_n = (-1)^n u_n$.

1) Préciser la nature des séries de termes généraux u_n et v_n.

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ et $T_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

2) Donner un équivalent de S_n à l'infini.

3) Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln 2 \cdot \ln n + \dfrac{(\ln n)^2}{2} + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

4) Calculer $S_{2n} + T_{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

1) Pour $n \geqslant 2$, on a $u_n \geqslant \dfrac{\ln 2}{n}$ et la série de terme général u_n diverge par comparaison à la série harmonique.

Soit f la fonction définie sur $[\,1,\,+\infty\,]$ par $f(x) = \ln x / x$. Cette fonction est dérivable et, si $x \geqslant e$, on a $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2 \leqslant 0$, donc f est décroissante sur $[\,e,\,+\infty\,]$. La suite $(\ln n/n)$ décroît à partir du rang 3 et converge vers 0. Il résulte du critère de Leibniz qu'elle converge.

2) Puisque la fonction f est décroissante et tend vers 0 à l'infini, la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)$ et la série de terme général $f(n)$ sont de même nature, donc divergentes. Alors, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n f(x)\,dx = \left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^n = \dfrac{(\ln n)^2}{2}$.

3) En utilisant encore la décroissance de f, on a, pour $k \geqslant 4$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\,,$$

et donc en sommant, on obtient, pour $n \geqslant 3$,

$$\int_{n+1}^{2n+1} f(t)\,dt \leqslant S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leqslant \int_n^{2n} f(t)\,dt\,,$$

ou encore

$$\int_n^{2n} f(t)\,dt + \int_{2n}^{2n+1} f(t)\,dt - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \int_n^{2n} f(t)\,dt\,.$$

Mais
$$\int_n^{2n} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left((\ln(2n))^2 - (\ln n)^2\right) = \ln 2\cdot\ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2}\,,$$
et
$$0 \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) = o(1)\,,$$
donc $\displaystyle\int_{2n}^{2n+1} f(t)\,dt - \int_n^{n+1} f(t)\,dt = o(1)\,.$

Alors $\ln 2\cdot\ln n + \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + o(1) \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \ln 2\cdot\ln n + \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$, et l'on en déduit que $S_{2n} - S_n = \ln 2\cdot\ln n + \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + o(1)\,.$

4) On a $\displaystyle S_{2n}+T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(1+(-1)^k)u_k = 2\sum_{p=1}^{n} u_{2p} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{p} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2}{p}\,.$

On obtient donc $\displaystyle S_{2n} + T_{2n} = S_n + \ln 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\,.$

5) Si γ est la constante d'Euler, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} = \ln n + \gamma + o(1)$ (voir 4.16), et donc

$T_{2n} = S_n - S_{2n} + (\ln n + \gamma)\ln 2 + o(1) = -\dfrac{(\ln 2)^2}{2} + \gamma\ln 2 + o(1)$, et, puisque la suite (T_n) converge, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} T_{2n} = -\frac{(\ln 2)^2}{2} + \gamma\ln 2\,.$

Exercice 4.36

Mines - Ponts MP 2005

Étudier $\displaystyle\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\,.$

Si $n \geqslant 1$, on a alors $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s} \leqslant \frac{1}{n^s}$, et donc en sommant ces inégalités, pour $1 \leqslant n \leqslant p$, $\displaystyle\int_1^{p+1}\frac{dx}{x^s} = \sum_{n=1}^{p}\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s} \leqslant \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^s}$, ce qui donne $\displaystyle\frac{1}{s-1}(1-(p+1)^{1-s}) \leqslant \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^s}$. Et enfin en faisant tendre p vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{s-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\,.$

Si $n \geqslant 2$, on a alors $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s} \geqslant \frac{1}{n^s}$, et donc en sommant ces inégalités, pour $2 \leqslant n \leqslant p$, $\displaystyle\int_1^p \frac{dx}{x^s} = \sum_{n=2}^{p} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s} \geqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^s}$, on en déduit comme ci-dessus en faisant tendre p vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{s-1} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Finalement $\displaystyle\frac{1}{s-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant 1+\frac{1}{s-1}$, et donc $\displaystyle 1 \leqslant (s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant s$. Alors on déduit du théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{s \to 1^+} (s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = 1$.

Exercice 4.37

Mines - Ponts MP 2006 K

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$ de limite 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = n^2 u_{n^2}$. Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Testons tout d'abord avec des séries de Riemann. Si $u_n = 1/n^\alpha$, on a $v_n = 1/n^{2(\alpha-1)}$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$, alors que la série de terme général v_n converge si et seulement si $2(\alpha - 1) > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 3/2$. Les deux séries ne sont pas toujours de même nature. Mais on constate que si la série de terme général u_n diverge, il en est de même de la série de terme général v_n. En fait ce résultat est général. En voici la démonstration.
Tout d'abord, comme la suite (u_n) est décroissante, on peut minorer par u_{n^2} les termes u_p lorsque $n^2 + 1 \leqslant p \leqslant (n+1)^2$ et l'on obtient

$$\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} u_p \leqslant u_{n^2} \sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} 1 = (2n+1) u_{n^2} ,$$

Mais $n^2 - 2n - 1$ est positif dès que $n \geqslant 3$, donc, dans ces conditions on obtient l'inégalité $\displaystyle\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} u_p \leqslant n^2 u_{n^2}$. Alors $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left(\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} u_p \right) \leqslant \sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=10}^{(N+1)^2} u_n \leqslant \sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2}$. Si la série de terme général u_n diverge, la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=10}^{(N+1)^2} u_n \right)$ admet $+\infty$ comme limite. Il en résulte que la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2} \right)$ admet également $+\infty$ comme limite et donc que la série de terme général (v_n) diverge.

Exercice 4.38

Mines - Ponts MP 2006 KK

Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

(On admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \text{Arctan}\, 1$).

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

La suite (S_n) converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$.

Alors $S_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} - R_n$. On en déduit

$$\tan S_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} - R_n\right) = \frac{1 - \tan R_n}{1 + \tan R_n},$$

et enfin $u_n = \ln(1 - \tan R_n) - \ln(1 + \tan R_n)$.
Comme (R_n) converge vers 0, on peut utiliser un développement limité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - \tan x) - \ln(1 + \tan x)$. Comme $\tan x = x + O(x^2)$, on obtient $\ln(1 - \tan x) = \ln(1 - x + O(x^2)) = -x + O(x^2)$, et de même $\ln(1 + \tan x) = x + O(x^2)$, d'où $f(x) = -2x + O(x^2)$. Alors $u_n = -2R_n + O(R_n^2)$.
Mais, puisque R_n est la somme d'une série alternée, $|R_n|$ est majoré par la valeur absolue du premier terme de la somme, donc $|R_n| \leqslant 1/(2n+1)$, et il en résulte que $R_n^2 \leqslant 1/(4n^2)$. Comme la série de terme général $1/(4n^2)$ converge, il en est de même de la série de terme général R_n^2, et finalement de la série de terme général $u_n + 2R_n = O(R_n^2)$.
La série de terme général u_n converge donc si et seulement si la série de terme général R_n converge. On va montrer que cette dernière série est une série alternée. Comme la série de terme général $(-1)^k/(2k-1)$ est alternée, R_n est du signe de son premier terme, donc $R_n = (-1)^n |R_n|$. Mais

$$|R_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2n+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+2n+1}.$$

En regroupant les termes d'indices $k = 2p$ et $k = 2p+1$, on a encore $|R_n| = \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{4p+2n+1} - \frac{1}{4p+2n+3}\right)$. Mais

$$\sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{4p+2n+1} - \frac{1}{4p+2n+3}\right) = \sum_{p=0}^{N} \frac{2}{(4p+2n+1)(4p+2n+3)},$$

et, n étant fixé, lorsque p tend vers $+\infty$ on a

$$\frac{2}{(4p+2n+1)(4p+2n+3)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8p^2}.$$

Il en résulte que la série de terme général $\dfrac{2}{(4p+2n+1)(4p+2n+3)}$ converge. Alors

$$|R_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(4p+2n+1)(4p+2n+3)}.$$

Enfin, puisque $\dfrac{2}{(4p+2n+1)(4p+2n+3)} \geqslant \dfrac{2}{(4p+2n+3)(4p+2n+5)}$, on en déduit que $|R_n| \geqslant |R_{n+1}|$, et la suite $(|R_n|)$ est décroissante. Comme elle converge vers 0, il en résulte que la série de terme général R_n converge d'après le critère de Leibniz et on en conclut que la série de terme général u_n converge.
On peut montrer que la série de terme général u_n ne converge pas absolument. Puisque la série de terme général $u_n + 2R_n$ converge absolument, il suffit de montrer que la série de terme général R_n ne converge pas absolument. On a

$$|R_n| + |R_{n+1}| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{2k-1} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{2k-1} = \frac{1}{2n+1},$$

Donc

$$\frac{1}{2n+1} \leqslant 2|R_n|,$$

et puisque $1/(2n+1)$ est le terme général d'une série divergente la série de terme général $|R_n|$ diverge.

Exercice 4.39

Mines - Ponts MP 2007 KK

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u(p,q) = 0$ si $p = q$ et $u(p,q) = \dfrac{1}{p^2-q^2}$ si $p \neq q$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u(p,q)\right)$.

2) La famille $(u(p,q))_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

1) Pour $q \neq 0$ fixé, on a $u(p,q) \underset{p\to+\infty}{\sim} 1/p^2$ et la série de terme général $u(p,q)$ converge. Si $p \neq q$, on a, en décomposant en éléments simples, $u(p,q) = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{p-q} - \dfrac{1}{p+q}\right)$. Soit $N \geqslant 2q$. Calculons la somme partielle

$S_N(q) = \sum_{p=0}^{N} u(p,q)$. On a

$$S_N(q) = \frac{1}{2q}\left(-\sum_{p=0}^{q-1}\frac{1}{q-p} - \sum_{p=0}^{q-1}\frac{1}{p+q} + \sum_{p=q+1}^{N}\frac{1}{p-q} - \sum_{p=q+1}^{N}\frac{1}{p+q}\right).$$

En effectuant dans chaque somme le changement de variable convenable pour obtenir le même terme $1/n$, on obtient

$$S_N(q) = \frac{1}{2q}\left(-\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n} - \sum_{n=q}^{2q-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-q}\frac{1}{n} - \sum_{n=2q+1}^{N+q}\frac{1}{n}\right).$$

On a encore $S_N(q) = \frac{1}{2q}\left(-\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n} - \frac{1}{q} - \sum_{n=q+1}^{2q-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-q}\frac{1}{n} - \sum_{n=2q}^{N+q}\frac{1}{n} + \frac{1}{2q}\right)$,

d'où finalement $S_N(q) = \frac{1}{2q}\left(-\frac{1}{2q} - \sum_{n=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{4q^2} - \frac{1}{2q}\sum_{n=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{n}$.

Mais $0 \leqslant \sum_{n=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{n} \leqslant \frac{2q}{N-q+1}$, et il résulte du théorème d'encadrement que la suite $\left(\sum_{n=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{n}\right)_N$ converge vers 0. On en déduit que la suite $(S_N(q))_N$ converge vers $-1/(4q^2)$. Donc $S(q) = \sum_{p=0}^{+\infty} u(p,q) = -\frac{1}{4q^2}$. On a aussi $S(0) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$.

Alors $\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u(p,q)\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{4q^2} = \frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2) En permutant les rôles de p et de q, on obtient

$$S = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u(p,q)\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u(q,p)\right) = -\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u(p,q)\right) = -S'.$$

La famille $(u(p,q))_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable, car sinon, d'après le théorème de Fubini, les sommes S et S' seraient égales.

Exercice 4.40

D'après Polytechnique MP 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha f(x)$ quand $x \to +\infty$, avec $\alpha < 0$.

On veut étudier la nature de la série de terme général $f(n)$.

1) Montrer qu'il existe un intervalle $[\,b,\,+\infty\,[$ sur lequel f est décroissante.
2) Montrer que la série de terme général $f(n-1)-f(n)$ converge.
3) Conclure en comparant les séries de termes généraux $f(n)$ et $f(n-1)-f(n)$.

1) Puisque $f'(x) \sim \alpha f(x)$ quand $x \to +\infty$, il existe un intervalle $I = [\,a,\,+\infty\,[$, et une fonction ε définie sur cet intervalle et admettant 1 comme limite en $+\infty$ telle que, pour tout x de I, on ait $f'(x) = \alpha f(x)\varepsilon(x)$.
Comme $\varepsilon(x)$ tend vers 1, il existe $b \geqslant a$ tel que, sur $[\,b,\,+\infty\,[$ on ait $\varepsilon(x) > 1/2$. Alors, sur $[\,b,\,+\infty\,[$ les nombres $f'(x)$ et $\alpha f(x)$ ont le même signe. Comme $\alpha < 0$ et $f(x) > 0$, on a donc $\alpha f(x) < 0$, et donc également $f'(x) < 0$. Il en résulte que la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2) Comme la fonction f est décroissante positive, elle admet une limite finie en $+\infty$, et la suite $(f(n))$ également. Alors la série télescopique de terme général $f(n-1)-f(n)$ converge.

3) D'après le théorème des accroissements finis, il existe c_n dans l'intervalle $[\,n,\,n+1\,]$ tel que, si $n \geqslant 1$, on a $f(n-1)-f(n) = ((n-1)-n)f'(c_n) = -f'(c_n)$.
Alors, à partir d'un certain rang, $f(n-1)-f(n) = -\alpha f(c_n)\varepsilon(c_n) \geqslant \dfrac{(-\alpha)}{2} f(n) \geqslant 0$,
et, par comparaison, la série de terme général $\dfrac{(-\alpha)}{2} f(n)$ converge, donc la série de terme général $f(n)$ converge.

Exercice 4.41

D'après Polytechnique MP 2006 K

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs, décroissante et de limite nulle. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que la série de terme général $a_n x_n$ converge. On veut étudier la suite (u_n) définie par $u_n = a_n \sum_{k=1}^{n} x_k$.

1) Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque la série de terme général x_n converge.
2) On suppose que la série de terme général x_n diverge.
   2.a Montrer que la suite (u_n) est bornée.
   2.b En utilisant la transformation d'Abel, montrer que la suite (u_n) converge
   2.c Montrer qu'il existe une suite (p_n) strictement croissante d'entiers vérifiant la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=n+1}^{p_n} x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k$.
   En déduire que la suite (u_{p_n}) converge vers 0.
   2.d Conclure.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

1) Si la série de terme général x_n converge vers S, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Sa_n$, et la suite (u_n) converge vers 0.

2) On suppose que la série de terme général x_n diverge. La suite (S_n) admet donc $+\infty$ comme limite.

2.a Puisque la série de terme général $a_n x_n$ est convergente, et que la suite (a_n) décroit, on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n = a_n S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \text{ , et la suite } (u_n) \text{ est bornée.}$$

2.b On utilise la transformation d'Abel $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k$.

Comme la série de terme général $a_n x_n$ converge, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$ est bornée, et puisque $(a_n S_n)$ est bornée, on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k\right)$ est également bornée. Mais c'est une suite croissante positive. Elle converge donc, et en conséquence la suite $(a_n S_n)$ converge.

2.c On construit la suite (p_n) par récurrence.
Posons $p_0 = 0$. Supposons que l'on ait construit les nombres $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$.
Puisque la série de terme général x_n diverge, alors, pour tout entier n, la suite $(S_N - S_n)_{N \geqslant n}$ admet $+\infty$ comme limite. Il existe donc un entier K tel que, $p \geqslant K$ implique $\sum_{k=n+1}^{p} x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k$. On prend alors $p_n = \max(p_{n-1} + 1, K)$.
Alors, $p_n \geqslant n$ et la suite (p_n) admet $+\infty$ comme limite. Par ailleurs

$$u_{p_n} = a_{p_n} \sum_{k=1}^{p_n} x_k = a_{p_n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{p_n} x_k \right) \leqslant 2a_{p_n} \sum_{k=n+1}^{p_n} x_k \leqslant 2 \sum_{k=n+1}^{p_n} a_k x_k \,.$$

Finalement $0 \leqslant u_{p_n} \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{p_n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right)$.

Mais, puisque la série de terme général $a_n x_n$ converge, on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{p_n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right)$ converge vers 0, et il résulte du théorème d'encadrement que la suite (u_{p_n}) converge vers 0.

2.d *Conclusion :* la suite (u_n) converge vers 0 puisqu'elle converge et qu'une suite extraite converge vers 0.

Exercice 4.42

Mines - Ponts MP 2007

1) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose :
$\forall n,\ u_n > 0\,;\ \sum |v_n|$ converge , $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$.
Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.

2) Nature de la série de terme général : $\dfrac{n^n}{n!e^n}$?

1) Pour $n \geqslant 1$, posons $t_n = \ln(n^\lambda u_n)$ et étudions $t_{n+1} - t_n$. On a

$$t_{n+1} - t_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n) = \lambda \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}\,.$$

Donc $t_{n+1} - t_n = \lambda \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n\right)$.
La suite (v_n) converge vers 0, puisque la série de terme général $|v_n|$ converge. On peut utiliser le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, et l'on obtient $t_{n+1} - t_n = \lambda\left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\dfrac{\lambda}{n} + v_n + O\left(\left(-\dfrac{\lambda}{n} + v_n\right)^2\right)\right)$.
Mais $O\left(\left(-\dfrac{\lambda}{n} + v_n\right)^2\right) = O(v_n^2) + O(1/n^2)$, (cela résulte de l'inégalité $\left(-\dfrac{\lambda}{n} + v_n\right)^2 \leqslant 2\left(\dfrac{\lambda^2}{n^2} + v_n^2\right)$). On en déduit $t_{n+1} - t_n = v_n + O(v_n^2) + O(1/n^2)$. La série de terme général $O(1/n^2)$ converge, et $|v_n + O(v_n^2)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$, donc la série de terme général $v_n + O(v_n^2)$ converge absolument. Il en résulte que la série de terme général $t_{n+1} - t_n$ converge, et cela signifie que la suite (t_n) converge vers une limite finie ℓ. Alors la suite $(\exp(t_n))$ converge vers e^ℓ, ce qui donne le résultat.

2) Si $u_n = \dfrac{n^n}{n!e^n}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{e} = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$.
En utilisant un développement limité, on a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$,
d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(-\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Si l'on prend $\lambda = 1/2$ et $v_n = O(1/n^2)$, la série de terme général v_n converge absolument par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^2$. On peut donc appliquer 1). La suite $n^{1/2}u_n$ converge vers une limite $s > 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} s/n^{1/2}$ et la série diverge par comparaison à la série de Riemann $1/n^{1/2}$.

Remarque

La formule de Stirling donne directement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/\sqrt{2n\pi}$ mais ce n'est pas la méthode attendue ici.

Exercice 4.43

Mines - Ponts MP 2006 , Polytechnique MP 2005

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.

1) On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge, que la suite $(nu_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

2) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite (u_n) converge vers 0.

3) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

1) Lorsque $n \geqslant 1$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$. On a

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}\,.$$

Donc $T_n = S_n - nu_{n+1}$.

Si la série de terme général u_n converge et si S désigne sa somme, on a alors $0 \leqslant T_n \leqslant S_n \leqslant S$. La suite (T_n) est croissante majorée. Elle converge donc et on a $nu_{n+1} = S_n - T_n$. Il en résulte que la suite (nu_{n+1}) converge. Si sa limite était un nombre λ non nul, on en déduirait alors que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda/n$ ce qui n'est pas possible puisque la série de terme général $1/n$ diverge. On en déduit que la suite (nu_{n+1}) converge vers 0, et donc les suites (S_n) et (T_n) ont la même limite. D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})\,.$$

Par ailleurs, puisque les suites (u_n) et $((n-1)u_n)$ convergent, leur somme (nu_n) converge aussi vers 0.

2) Sans autre hypothèse, lorsque la série de terme général u_n converge, la suite (u_n) converge vers 0.

Supposons que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et que la suite (u_n) converge vers 0.

On a $u_n - u_{n+1} = v_n/n$, Comme la suite (u_n) converge vers 0, la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n$. Alors $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

On en déduit que $0 \leqslant nu_{n+1} \leqslant nu_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$. Comme la suite des restes de la série de terme général v_n converge vers 0, il résulte du théorème d'encadrement que la suite (nu_{n+1}) converge vers 0. Mais $S_n = T_n + nu_{n+1}$, et puisque la suite (T_n) converge, il en résulte que la suite (S_n) converge. Donc la série de terme général u_n converge.

3) Si (a_n) est une suite décroissante positive telle que la série de terme général a_n converge et si α est un nombre strictement positif, alors en posant $u_n = a_n + \alpha$, on obtient une suite (u_n) décroissante positive qui ne converge pas vers zéro, mais qui est telle que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1}) = n(a_n - a_{n+1})$ converge.

Espaces vectoriels normés 5

5.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

5.1.1 Normes

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

• On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(i) $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (séparation)

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

(iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

La norme d'un élément x de E est souvent notée $\|x\|$.

• **Exemples de normes classiques**

1) Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(|x_k|\right).$$

On définit ainsi trois normes sur $\mathbb{K}^n$.

2) Soit $\left(E, (\cdot \mid \cdot)\right)$ un espace préhilbertien réel ou complexe, alors l'application $\|\cdot\| : x \to \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E appelée norme **euclidienne**.

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$. On pose pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

On définit ainsi trois normes sur E.

• **Inégalités triangulaires :** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

• **Vocabulaire :** Soient $a \in E$ et $r > 0$. On appelle

○ **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B\,(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}\,.$$

○ **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f\,(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}\,.$$

○ **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$S\,(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}\,.$$

○ On appelle boule ouverte (resp. boule fermée, sphère) unité l'ensemble $B\,(0, 1)$ (resp. $B_f\,(0, 1)$, $S\,(0, 1)$).

Remarque
Une boule est un ensemble convexe.

Exercice 5.1

Ecole de l'Air PC 2005

Montrer que N, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = \max\left(|x|, |y|, |x - y|\right)$, est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter la boule unité ouverte.

N est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$N\,(\lambda(x, y)) = \max\left(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda(x - y)|\right) = |\lambda|\, N\,(x, y)\,.$$

De plus $N(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = x - y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$.
Montrons enfin l'inégalité triangulaire. Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$.

$$N((x, y) + (x', y')) = \max\left(|x + x'|, |y + y'|, \left|\left(x + x'\right) - \left(y + y'\right)\right|\right).$$

On a $$|x + x'| \leqslant |x| + |x'|\,,\ |y + y'| \leqslant |y| + |y'|$$

et $$\left|\left(x + x'\right) - \left(y + y'\right)\right| \leqslant |x - y| + |x' - y'|\,.$$

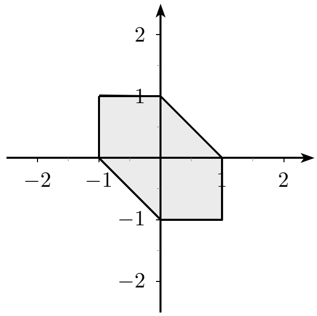
Donc $|x + x'|$, $|y + y'|$ et $\left|\left(x + x'\right) - \left(y + y'\right)\right|$ sont majorés par

$$\max\left(|x|, |y|, |x - y|\right) + \max\left(|x'|, |y'|, |x' - y'|\right) = N(x, y) + N(x', y'),$$

d'où $N((x, y) + (x', y')) \leqslant N(x, y) + N(x', y')$.
Le couple (x, y) est dans la boule unité si et seulement si $\max(|x|, |y|, |x - y|) < 1$ c'est-à-dire si et seulement si $|x| < 1$, $|y| < 1$ et $|x - y| < 1$. Ainsi

$$B(0, 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1\right\}.$$

On obtient la figure suivante :



5.1.2 Suites convergentes, Normes équivalentes

Ce qu'il faut savoir

• **Suites convergentes :** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E.

On dit que la suite (x_n) est convergente lorsqu'il existe $\ell \in E$ telle que la suite réelle $\left(\|x_n - \ell\|\right)_n$ converge vers 0, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Un tel vecteur ℓ est alors unique. On dit que la suite (x_n) converge vers ℓ ou encore que ℓ est la limite de la suite (x_n), et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

• **Normes équivalentes**

○ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N_1 et N_2 deux normes sur E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$;

(ii) toute suite de E convergeant vers 0 pour N_1 converge vers 0 pour N_2, et vice versa.

On dit dans ces conditions que N_1 et N_2 sont équivalentes.

○ Si E est de **dimension finie**, alors toutes les normes définies sur E sont équivalentes. Par exemple, on a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$

$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

En pratique on se place dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Un vecteur x de E est alors défini par ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit (x_n) une suite d'éléments de E, avec $x_n = \sum\limits_{i=1}^{p} x_{n,i} e_i$. Pour que la suite (x_n) soit convergente, de limite $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i$, il faut et il suffit que chacune des suites numériques $(x_{n,i})_{n\geqslant 0}$ soit convergente, de limite ℓ_i. Il est inutile de préciser la norme choisie.

○ **Remarque** Cela n'est plus vrai en dimension infinie, on montre par exemple que les trois normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Exercice 5.2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

2) Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
Indication pour la question 2 : Calculer B^2 et B^3.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$. Chacun des coefficients tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

2) On calcule comme indiqué $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = B$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^{2k+1} = B$ et $B^{2k} = B^2$. Donc les suites extraites $(B^{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes (B et B^2), donc la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente.

Exercice 5.3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Etablir que $(A - I_3)^2 = 0_3$. En déduire A^n. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}A^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Un simple calcul mène à $(A - I_3)^2 = 0$. On a de plus $A = I_3 + (A - I_3)$, et on déduit de la formule du binôme que $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = I_3 + n(A - I_3)$. On a donc $\frac{1}{n}A^n = A - (1 - \frac{1}{n})I_3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A - I_3$.

Ce qu'il faut savoir

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on construit une suite (x_n) d'éléments de E telle que $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}$ tend vers 0 ou $+\infty$. Dans la pratique, on choisit la suite (x_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(x_n) = 1$ (ou $N_2(x_n) = 1$).

Exercice 5.4

Centrale PSI 2007, 2006

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $\alpha \in [0,1]$ et $f \in E$, on pose $N_\alpha(f) = \sup\limits_{[\alpha,1]} |f| + \displaystyle\int_0^\alpha |f|$.

1) Montrer que N_α est une norme sur E.

2) Etant donnés α et β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, on se propose de montrer que les normes N_α et N_β ne sont pas équivalentes. Pour cela on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{n}$, et on introduit la fonction f_n définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 2\dfrac{x-\alpha}{\gamma_n - \alpha} & \text{si } \alpha \leqslant x \leqslant \dfrac{\alpha+\gamma_n}{2}, \\ -2\dfrac{x-\gamma_n}{\gamma_n - \alpha} & \text{si } \dfrac{\alpha+\gamma_n}{2} \leqslant x \leqslant \gamma_n, \\ 0 & \text{si } \gamma_n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2.a) Tracer le graphe de f_n et vérifier que $f_n \in E$.

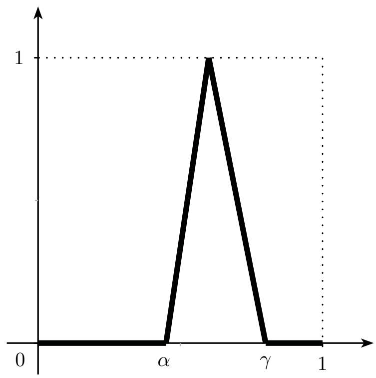
2.b) Calculer $N_\alpha(f_n)$ et $N_\beta(f_n)$ et conclure.

1) On vérifie facilement que $N_\alpha(\lambda f) = |\lambda|\, N_\alpha(f)$ et $N_\alpha(f+g) \leqslant N_\alpha(f) + N_\alpha(g)$ pour tout $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $N_\alpha(f) = \underbrace{\sup\limits_{[\alpha,1]} |f|}_{\geqslant 0} + \underbrace{\displaystyle\int_0^\alpha |f|}_{\geqslant 0} = 0$ si et seulement si $\sup\limits_{[\alpha,1]} |f| = 0$ et $\displaystyle\int_0^\alpha |f| = 0$.

D'une part, $\sup\limits_{[\alpha,1]} |f| = 0$ entraîne $f(x) = 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$. D'autre part, $\displaystyle\int_0^\alpha |f| = 0$ et $|f|$ est continue et positive sur $[0,\alpha]$, donc f est nulle sur $[0,\alpha]$. Finalement f est nulle sur $[0,1]$. Donc N_α est une norme sur E.

2.a) La fonction f_n est une fonction affine par morceaux sur le segment $[0, 1]$, et on voit à l'aide de son graphe qu'elle est continue. C'est donc un élément de E (il est vivement conseillé de tracer effectivement son graphe !)



On vérifie géométriquement que $N_\alpha(f_n) = 1$ et que $N_\beta(f_n) = \dfrac{\gamma_n - \alpha}{2} = \dfrac{\beta - \alpha}{2n}$ (c'est l'aire du triangle !). La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme N_β, mais pas pour la norme N_α. Les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5.5

(Très proche de INT PC 2005, Mines-Ponts MP 2007) K

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})\}$. On pose pour tout $f \in E$,

$$\mathscr{N}(f) = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t}.$$

1) Montrer que $\mathscr{N}$ est une norme euclidienne sur E.

2) Etablir que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathscr{N}(f)$.

3) Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\mathscr{N}$ ne sont pas équivalentes.
Indication de l'examinateur : utiliser la suite de terme général $f_n(x) = x^n$.

1) Compte tenu de l'expression de la norme, on est conduit à penser à une norme euclidienne. Introduisons $\Phi : (f, g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f, f) = 0$. On a alors

$$\Phi(f, f) = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

Comme $t \mapsto |f'(t)|^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, f' est nulle sur $[0, 1]$ donc f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$.

Ainsi, Φ est un produit scalaire et $\mathscr{N}$ est la norme euclidienne associée.

2) On pense assez naturellement à écrire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u.$$

Il vient alors, $|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\,\mathrm{d}u$.

On sait que pour a et b réels, on a $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et on en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Il vient alors, en posant $a = |f(0)|$ et $b = \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$,

$$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\right).$$

D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t .$$

D'où $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}$, et donc pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$,, d'où $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$.

Remarque de la rédaction

On peut vérifier que $\sqrt{2}$ est la plus petite des constantes réelles K telle que $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$ pour toute fonction $f \in E$. On a en effet $\|f\|_\infty = \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$ lorsqu' on prend pour f la fonction définie par $f(t) = 1 + t$.

3) Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geqslant 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\mathcal{N}(f_n) = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes (car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $\mathcal{N}(f) \leqslant C\|f\|_\infty$.
Sinon, on aurait en prenant $f = g_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}(g_n) \leqslant C\,\|g_n\|_\infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Ce qu'il faut savoir

Partie bornée

Soit A une partie non vide de E.

• Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $M \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$;

(ii) il existe $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$ tels que $A \subset B_f(a, r)$.

On dit alors que A est une partie **bornée** de E.

• Pour montrer qu'une partie A n'est pas bornée, on peut exhiber une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty.$$

Exercice 5.6

Les ensembles suivants sont-ils bornés ?
$A = \{x \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

• Pour l'ensemble A, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

On a $x_n = u_n \sin u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc A n'est pas bornée.

• B est l'ensemble des points d'une conique. Il est facile de voir qu'il s'agit d'une ellipse (voir réduction des coniques) donc que B est bornée. On peut aussi le montrer directement en écrivant : $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$ donc

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

On a d'une part : $(x, y) \in B \Rightarrow \dfrac{3}{4}y^2 \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et d'autre part :

$$\begin{aligned}(x, y) \in B \Rightarrow (x + \frac{y}{2})^2 \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x + \frac{y}{2} \leqslant 1\\ -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |x| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

donc $\|(x, y)\|_\infty \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et donc B est bornée.

• C est l'ensemble des points d'une hyperbole donc il n'est pas borné. On peut utiliser la paramétrisation classique $x = \operatorname{ch} t$ et $y = \operatorname{sh} t$ pour construire une suite de norme tendant vers $+\infty$. On peut par exemple prendre, $(x_n, y_n) = (\operatorname{ch} n, \operatorname{sh} n) \in C$.

On a $\|(x_n, y_n)\|_\infty = \operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc C n'est pas bornée.

5.1.3 Applications lipschitziennes

Ce qu'il faut savoir

• Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et f une application de A dans F.

◦ On dit que f est lipschitzienne de rapport λ sur A lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \lambda \|x - y\|_E .$$

◦ On dit que f est lipschitzienne lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que f est $\lambda-$lipschitzienne.

◦ **Exemple :** l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

Remarque
Souvent les exercices de concours sur les fonctions lipschitziennes portent sur les fonctions réelles d'une variable réelle (voir notre livre d'Analyse de première année chapitre 11 paragraphe 11.5 et chapitre 14 paragraphe 14.3).

Exercice 5.7

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni des normes classiques $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Montrer que l'application $f \in E \mapsto \Phi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{K}$ est lipschitzienne pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Il est clair que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned}|\Phi(f) - \Phi(g)| &= \left|\int_a^b (f-g)(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |(f-g)(t)|\,\mathrm{d}t = \|f-g\|_1 \\ &\leqslant (b-a) \times \sup_{t\in[a,b]} |(f-g)(t)| = (b-a)\|f-g\|_\infty .\end{aligned}$$

Mais aussi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\int_a^b (f-g)(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b |(f-g)(t)|^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{b-a}\,\|f-g\|_2 .$$

Donc Φ est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_1$, $(b-a)-$lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\sqrt{b-a}-$lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 5.8

Centrale MP 2006 K

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé réel et soit f l'application de E dans $E : x \mapsto \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Soit $(x, y) \in E \times E$. Il y a trois cas à distinguer.

- Lorsque $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$, on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
- Lorsque $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - \frac{y}{\|y\|}\| \leqslant \|x - y\| + \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$
$$= \|x - y\| + (1 - \frac{1}{\|y\|})\|y\| = \|x - y\| + \|y\| - 1$$
$$\leqslant \|x - y\| + \|y\| - \|x\| \leqslant 2\|x - y\|.$$

- Lorsque $1 < \|x\| \leqslant \|y\|$ on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$
$$\leqslant \frac{\|x - y\| + \|y\| - \|x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{2\|x - y\|}{\|x\|} \leqslant 2\|x - y\|.$$

5.1.4 Topologie

Ce qu'il faut savoir

Topologie

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

- **Ouverts et fermés :** Soit $A \subset E$.
  (i) On dit que A est un **ouvert** de E lorsque tout point de A est le centre d'une boule ouverte contenue dans A, autrement dit
  $$\forall a \in A\,,\ \exists r \in]0, +\infty[\mid B(a, r) \subset A.$$
  (ii) On dit que A est un **fermé** de E lorsque son complémentaire $E \backslash A$ est un ouvert de E.
  Exemples : $\varnothing$, E, une boule ouverte sont des ouverts et une boule fermée est un fermé.

Remarque
Les seules parties de E, qui sont à la fois ouvertes et fermées, sont $\varnothing$ et E.

Propriétés : réunions et intersections d'ouverts ou de fermés
(i) Toute réunion d'ouverts de E est un ouvert de E.

(ii) Toute intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
(iii) Toute intersection de fermés de E est un fermé de E.
(iv) Toute réunion finie de fermés de E est un fermé de E.

- **Point intérieur :** Soit A une partie non vide de E et soit $a \in A$. On dit que a est un **point intérieur** à A lorsqu'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$.
Notation : $\mathring{A} = \{a \in A \mid a$ est un point intérieur à $A\}$ est appelé l'intérieur de A . C'est le plus grand ouvert contenu dans A.
- **Point adhérent :** Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, A une partie non vide de E et $x \in E$.
    - On dit que x est un **point adhérent** à A lorsque toute boule ouverte de centre x rencontre A, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.
    - **Caractérisation séquentielle d'un point adhérent :** x est un point adhérent à A si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A.
    Notation : $\overline{A} = \{a \in E \mid a$ est un point adhérent à $A\}$ est appelé l'adhérence de A. C'est le plus petit fermé contenant A.
    - **Caractérisation des fermés :** Soit $A \subset E$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
    (i) A est un fermé de E ;
    (ii) $\overline{A} = A$;
    (iii) toute suite d'éléments de A qui converge dans E, a sa limite dans A.
- **Partie dense :** on dit que A est une partie **dense** dans E lorsque $\overline{A} = E$.
Les trois propriétés sont équivalents :
(i) A est dense dans E ;
(ii) toute boule ouverte de E rencontre A ;
(iii) tout vecteur de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice 5.9

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on désigne par $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$.

Montrer que si A est ouvert (resp. fermé), alors λA l'est aussi.

• Supposons que A est un ouvert.

Soit $a' \in \lambda A$. Il existe $a \in A$ tel que $a' = \lambda a$. A étant un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$, on remarque alors que $B(a', \lambda r) = B(\lambda a, \lambda r) \subset \lambda A$. A' est donc également un ouvert.

• Supposons que A est un fermé. La caractérisation séquentielle est toujours plus simple, utilisons-la. Soit $a' \in \overline{\lambda A}$. Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a' = \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda a_n$.

Posons $a = \dfrac{1}{\lambda} a'$. On a $\|a - a_n\| = \dfrac{1}{\lambda}\|a' - \lambda a_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, et donc $a \in A$ car A est un fermé. Ainsi $a' = \lambda a$ donc $a' \in \lambda A$. A' est donc également un fermé.

Exercice 5.10

Dans l'espace vectoriel normé $E = \mathbb{R}$, on pose $A = \mathbb{Z}$ et $B = \{n - \dfrac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
Montrer que A et B sont fermés et que $A + B$ n'est pas fermé.
Étudier de même pour $E = \mathbb{R}^2$, les ensembles $A = \{(x,\ y) \in]0, +\infty[\ \mid xy = 1\}$, $B = \{0\} \times] - \infty,\ 0]$ et $A + B$.

• L'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé si et seulement si complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est ouvert. Or $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$ est ouvert car il est réunion d'intervalles ouverts. De même, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus B = \left]-\infty, +\dfrac{1}{2}\right[\cup \left(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \left] n - \dfrac{1}{2n}, n + 1 - \dfrac{1}{2(n+1)} \right[\right)$ est un ouvert.

On a

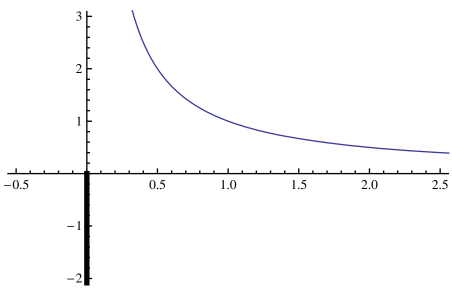
$$A + B = \{(m+n) - \frac{1}{2n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{p - \frac{1}{2n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

L'ensemble $A+B$ n'est pas fermé car $0 \notin A+B$ mais 0 est un point adhérent à $A+B$ car en posant, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = -n$ et $b_n = n - \dfrac{1}{2n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = 0$.

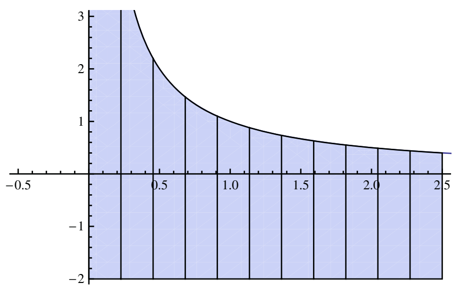
• $E = \mathbb{R}^2$. Les ensembles A et B sont fermés car on vérifie aisément que toute suite d'éléments de A (resp. B) qui converge, a sa limite dans A (resp. B). On voit également facilement que

$$A + B = \{(x, y) \in]0,\ +\infty[\times \mathbb{R} \quad x > 0 \text{ et } xy \leqslant 1\}.$$

Les points de $\{0\} \times \mathbb{R}$ sont adhérents à $A + B$ mais n'appartiennent pas à $A + B$.



A et B



$A + B$

Par exemple, en posant pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \left(\frac{1}{n},\ n\right)$ et $b_n = (0,\ -n)$, on a $a_n + b_n = \left(\frac{1}{n},\ 0\right) \in A + B \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,\ 0) \in \overline{A+B} \setminus A + B$.

Exercice 5.11

Mines-Ponts MP 2006

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soit A un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que l'adhérence de A est un sous-espace vectoriel de E.

2) On suppose que E est de dimension infinie. Montrer que tout hyperplan H de E est soit fermé (c'est-à-dire $\overline{H} = H$) soit dense dans E (c'est-à-dire $\overline{H} = E$).

1) Montrons que $\overline{A}$ est sous-espace vectoriel de E. Soient $(a,b) \in \overline{A} \times \overline{A}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(a_n, b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. On sait que $\lambda a + \mu b = \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda a_n + \mu b_n \in A$ car A est un sous-espace vectoriel donc $\lambda a + \mu b \in \overline{A}$.

Remarque
On peut montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

2) Soit H un hyperplan de E. On a tout d'abord $H \subset \overline{H} \subset E$. Si H n'est pas fermé, $H \subsetneq \overline{H}$, il existe $a \in \overline{H} \setminus H$, donc $H \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{H}$. Or $H \oplus \mathbb{R}a = E$ puisque H est un hyperplan ne contenant pas a, d'où $\overline{H} = E$.

Remarque
Dans l'exercice 5.26 p.135, on va voir un critère portant sur les formes linéaires pour savoir si un hyperplan est fermé ou dense.

Exercice 5.12

Centrale MP 2005 K

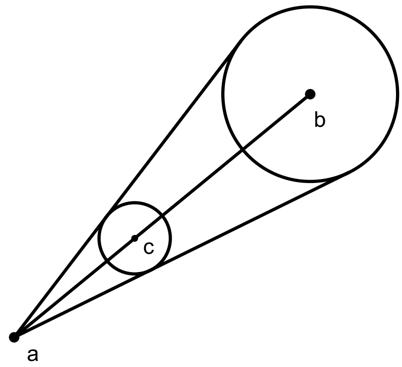
Soit C une partie convexe (d'intérieur non vide) d'un espace vectoriel normé E.

1) Montrer que l'intérieur de C est un ensemble convexe.

2) *Question facile de la rédaction :* montrer que l'adhérence de C est un ensemble convexe.

1) Soient a et b dans l'intérieur de C.
Montrons que le segment $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$ est inclus dans l'intérieur de C. Soit $t \in\ ]0, 1]$ et posons $c = (1-t)a + tb$. Il existe $r > 0$ tel que la boule

ouverte $B(b,r)$ soit contenue dans C. Considérons l'homothétie h de centre a qui transforme b en c, c'est-à-dire $h_{a,t} : x \mapsto a + t(x-a)$, homothétie (affine) de centre a et rapport t. La boule ouverte $B(b,r)$ est transformée en la boule ouverte $B(c,tr)$.



Comme le rapport t de l'homothétie est dans $]0,1]$, l'homothétie h envoie tout élément de C dans C, en particulier $B(c,tr)$ est inclus dans C donc c est un point intérieur de C. Le cas $t=0$, correspond au point a qui est par hypothèse dans C.

Conclusion : l'intérieur de C est un ensemble convexe.

2) Il est beaucoup plus immédiat d'établir le résultat pour l'adhérence.

Soit $(a,b) \in \overline{A}^2$ et $t \in [0,1]$. Il existe $(a_n,b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. On sait que $ta + (1-t)b = \lim\limits_{n\to+\infty} (ta_n + (1-t)b_n)$ or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $ta_n + (1-t)b_n \in A$ car A est convexe donc $ta + (1-t)b \in \overline{A}$.

5.1.5 Limite de fonction, continuité, uniforme continuité

Ce qu'il faut savoir

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E et soit $f : A \to F$.

- **Limite :** soient a un point adhérent à A et $b \in F$.
  - On dit que f admet pour limite b en a et on écrit $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarque
la limite dépend des normes considérées sur E ou sur F (sauf si on remplace une norme par une norme équivalente).

  - **Caractérisation séquentielle de la limite :** on a $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$ si et seulement si pour **toute suite** $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

- **Continuité**
  - On dit que f est continue en $a \in A$ lorsque $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.
  - On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.
  - **Cas particulier important :** lorsque F est de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F. En notant pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$, alors f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue en a (resp. sur A).
  - **Caractérisation séquentielle de la continuité :** la fonction f est continue en $a \in A$ si et seulement si pour **toute suite** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.
- **Homéomorphisme :** une bijection continue $f : A \to f(A) \subset F$ telle que $f^{-1} : f(A) \to A \subset E$ soit également continue est appelée un homéomorphisme de A sur $f(A)$.
- **Prolongement d'une égalité par densité :** soient $f, g : E \to F$ deux fonctions **continues** sur E. Si A est une partie dense dans E et si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 5.13

Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par $f(X) = \dfrac{X}{\|X\|_2} - X$ n'admet pas limite au point $(0,0,0)$.
On rappelle que si $X = (x, y, z)$, alors $\|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite au point $(0,0,0)$, on va exhiber deux suites (U_n) et (V_n) qui convergent vers $(0,0,0)$ et telles que les deux suites $(f(U_n))$ et $(f(V_n))$ convergent vers deux limites différentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = (\frac{1}{n}, 0, 0)$ et $V_n = (0, \frac{1}{n}, 0)$. Lorsque $n \to +\infty$, on a $U_n \to (0,0,0)$ et $V_n \to (0,0,0)$ alors que $f(U_n) = (1 - \frac{1}{n}, 0, 0) \to (1,0,0)$ et $f(V_n) = (0, 1 - \frac{1}{n}, 0) \to (0,1,0)$. Donc la fonction f n'a pas de limite en $(0,0,0)$.

Exercice 5.14

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ (muni d'une norme $\|\ \|$) par

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|X\| \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \|X\| < 1 \end{cases}$$

n'est continue en aucun vecteur U tel que $\|U\| = 1$.

Soit $U \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|U\| = 1$ et soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite telle que $U_n = \dfrac{n}{n+1}U$. On a $\|U_n\| = \dfrac{n}{n+1}\|U\| = \dfrac{n}{n+1} < 1$ donc $f(U_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs $\|U_n - U\| = \dfrac{1}{n+1}\|U\| \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la suite (U_n) converge vers U mais la suite $(f(U_n))$ ne converge pas vers $f(U)$.

Exercice 5.15

Étudier la continuité des applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}e^{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\text{et } g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}e^{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Indication : il est souvent utile dans ce genre d'exercice de passer en coordonnées polaires. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ (le réel r est alors la norme euclidienne de (x,y)). Si on peut trouver une fonction h telle que $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| \leqslant h(r)$ et $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$, alors f est continue en $(0,0)$.

Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues. Etudions la continuité en $(0,0)$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Nous avons alors $f(x,y) = r\cos^3\theta \times e^{r^2}$ et $g(x,y) = \cos^2\theta \times e^{r^2}$.

On a $|f(x,y)| \leqslant re^{r^2} \to 0$ quand $r \to 0$, donc f est continue au point $(0,0)$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

La limite de la fonction $r \mapsto \cos^2\theta e^{r^2}$ lorsque r tend vers 0 dépend de θ, donc la fonction g ne peut pas avoir de limite unique en $(0,0)$. Par exemple, $g(x,0) = e^{x^2} \underset{\substack{x\to 0\\ \neq}}{\longrightarrow} 1$ et $g(x,x) = \dfrac{1}{2}e^{2x^2} \underset{\substack{x\to 0\\ \neq}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 1$. Donc la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.

Ce qu'il faut savoir – Continuité uniforme

- On dit que f est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in A^2, \|x-y\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Le réel α est indépendant de x et de y ; il est parfois appelé module de continuité de f pour ε.

- **Lien entre fonctions continues, uniformément continues et lipschitziennes**
  (i) Si f est lipschitzienne sur A, alors f est uniformément continue sur A.
  (ii) Si f uniformément continue A, alors f est continue sur A.

Remarque
bien entendu, la réciproque de (i) (resp. (ii)) est fausse.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Les exercices de concours sur ce thème portent essentiellement sur les fonctions de la variable réelle, le lecteur est renvoyé à notre livre d'Analyse de première année et au chapitre 1 de ce livre.

Ce qu'il faut savoir

Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

Soit E un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E.

- **Ouverts/fermés relatifs à une partie**
  - Une partie U de A est un ouvert relatif à A s'il existe un ouvert V de E tel que $U = V \cap A$.
  - Une partie F de A est un fermé relatif à A s'il existe un fermé G de E tel que $F = G \cap A$.
- **Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue**
  Soit F un espace vectoriel normé et soit f une application définie sur A à valeurs dans F. L'application f est continue sur A si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert **relatif** à A (ou ce qui est équivalent) l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé **relatif** à A.

Exercice 5.16

1) Soient E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et $a \in \mathbb{R}$. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :
$A = \{x \in E, f(x) = a\}$, $B = \{x \in E, f(x) \leqslant a\}$, $C = \{x \in E, f(x) \neq a\}$, $D = \{x \in E, f(x) < a\}$.

2) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) L'ensemble $A = \{x \in E, f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue. Il est donc fermé. De même, l'ensemble $B = \{x \in E, f(x) \leqslant a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé.
On a $C = \{x \in E, f(x) \neq a\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. C'est donc une partie onverte. De même $\{x \in E, f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$ est une partie ouverte de E.
2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application $M \mapsto \det(M)$ qui est continue (c'est une fonction polynômiale des coefficients de M).

5.1.6 Applications linéaires continues, normes subordonnées

Ce qu'il faut savoir

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

- Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\begin{aligned} u \text{ continue sur } E &\Leftrightarrow u \text{ continue en } 0_E \Leftrightarrow u \text{ bornée sur } B_f(0,1) \\ &\Leftrightarrow u \text{ bornée sur } S(0,1) \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall x \in E\ \ \|u(x)\|_F \leqslant M\,\|x\|_E \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 \text{ tel que } u \text{ est } M\text{-lipschitzienne sur E.} \end{aligned}$$

Le plus petit réel M vérifiant la propriété ci-dessus est définie par

$$M = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On pose alors $|||u||| = M$, c'est la norme subordonnée de u (relatif à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$). On l'appelle la norme triple de u.

- S'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, **pour tout** $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant \alpha\,\|x\|_E$, alors u est continue sur E et l'on a $|||u||| \leqslant \alpha$.
Si l'on trouve **un** vecteur x de E tel que $\|u(x)\|_F \geqslant \alpha\,\|x\|_E$, alors $|||u||| = \alpha$.
- L'ensemble est applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$, qu'on notera $\mathscr{L}_c(E, F)$.
Muni de la "norme" subordonnée, $\mathscr{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel normé. De plus les normes subordonnées vérifient la propriété suivante :
si $v \in \mathscr{L}_c(F, G)$ et $u \in \mathscr{L}_c(E, F)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$ et

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$$

- **Cas particulier :** si $E = F$ alors $(\mathscr{L}_c(E), |||\cdot|||)$ est une algèbre normée. En particulier $|||\,\mathrm{Id}_E||| = 1$.

Exercice 5.17

TPE MP 2005

Soit $\mathscr{B}$ l'espace des suites complexes bornées muni de la norme infinie : si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On considère l'application Φ de $\mathscr{B}$ dans lui-même définie par $\Phi\left((x_n)_{n\geqslant 0}\right) = (x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que Φ est un endomorphisme continu de $\left(\mathscr{B}, \|\ \|\right)$. Calculer sa norme triple.

- Il est clair que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{B}$.
- Soit $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathscr{B}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Donc $\|\Phi(x)\| \leqslant 2\,\|((x_n)_{n\geqslant 0})\|$. Ainsi, Φ est continue et $|||\Phi||| \leqslant 2$.
- Considérons la suite x définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n$. On a $\|x\| = 1$ et $\Phi(x) = (x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 0} = (-2, 2, -2, 2, \ldots)$. Comme $\|\Phi(x)\| = 2$, on a alors

$$\frac{\|\Phi(x)\|}{\|x\|} = 2 \leqslant |||\Phi|||.$$

Conclusion : $|||\Phi||| = 2$.

Exercice 5.18

TPE MP 2006

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = P(0)$. On munit $\mathbb{R}[X]$ des deux normes suivantes :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

Φ est-elle continue pour N_1 ? pour N_2 ?
En cas de continuité, on donnera sa norme triple.

- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|P(0)| \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = N_1(\Phi(P))$ donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leqslant 1$. En considérant le polynôme P_0 constant égal à 1, on a

$$|P_0(0)| = 1 = \sup_{t\in[-1,1]} |P_0(t)| = N_1(\Phi(P_0)) \quad \text{donc} \quad |||\Phi||| \geqslant 1$$

et finalement

$$|||\Phi||| = 1.$$

- En revanche Φ n'est pas continue pour N_2 car on peut trouver une suite de polynômes bornée par 1, d'image non bornés. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = (X-2)^n$. On a $N_2(P_n) = \sup_{t\in[-1,0]} |t^n| = 1$ et $|P_n(0)| = 2^n$ donc Φ n'est pas continue lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N_2.

Ce qu'il faut savoir

Pour montrer qu'une application linéaire u n'est pas continue, on montre que l'image de la boule unité n'est pas bornée, ce qui conduit à rechercher une **suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ bornée telle que $(u(x_n))_{n\geqslant 0}$ ne soit pas bornée.

Ce qu'il faut savoir

Application bilinéaire continue

Soient $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$, $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ et $\left(G,\|\cdot\|_G\right)$ trois espaces vectoriels normés.

- Soit $\Phi : E\times F \to G$ une application bilinéaire. Alors

$$\begin{aligned} & \Phi \text{ est continue sur } E\times F \\ \Leftrightarrow\ & \Phi \text{ est continue en } (0_E, 0_F) \\ \Leftrightarrow\ & \Phi \text{ est bornée sur } B_f(0_E,1)\times B_f(0_F,1) \\ \Leftrightarrow\ & \Phi \text{ est bornée sur } S(0_E,1)\times S(0_F,1) \\ \Leftrightarrow\ & \exists M>0,\ \forall (x,y)\in E\times F\ \ \|\Phi(x,y)\|_G \leqslant M\,\|x\|_E\,\|y\|_F \end{aligned}$$

- **Exemples simples d'applications bilinéaires continues**

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}\right. ,\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_c(E)\times\mathscr{L}_c(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}_c(E) \\ (u,v) & \longmapsto & u\circ v \end{array}\right.$$

Si E est un espace préhilbertien, $\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & <x,y> \end{array}\right.$.

5.1.7 Complétude

Ce qu'il faut savoir

Soit $\left(E,\|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé.

- **Suites de Cauchy**
  - Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans E. On dit qu'elle est de Cauchy lorsque

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, (n\geqslant N \text{ et } p\geqslant N) \Rightarrow \|x_n - x_p\| \leqslant \varepsilon$$

  - **Propriétés**
    – Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
    – Toute suite de Cauchy est bornée.

- **Espace de Banach :** lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E converge, on dit que $\left(E,\|\cdot\|\right)$ est un espace vectoriel normé **complet** (ou espace de Banach).

- **Partie complète :** Soit A une partie non vide de E.
  - On dit que A est complète lorsque toute suite de Cauchy de A converge **dans** A.
  - Si A est complète alors A est un fermé de E.
  - Si E est un espace de Banach, alors A est un fermé de E si et seulement si A est complète.

Application : soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ un espace de Banach et soit (u_n) une suite d'éléments de E. Si la série $\sum \|u_n\|$ converge alors la série vectorielle $\sum u_n$ converge.
(Particulièrement utilisé sur les espaces de matrices, voir le chapitre suivant espaces vectoriels normés de dimension finie).

Exercice 5.19

d'après CCP MP 2006

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k X^k$ de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_\infty = \max_{0 \leqslant k \leqslant \deg P} |a_k|$.

1) Vérifier que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.

2) On considère la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

   Montrer que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

3) Montrer que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas dans E ?

1) Ne présente aucune difficulté.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m > n$ on a $\|P_m - P_n\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!}$. Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m > n \geqslant N$, on a $\|P_m - P_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un polynôme Q de degré q. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > q + 1$, on a alors $\|P_n - Q\|_\infty \geqslant \frac{1}{(q+1)!}$. Comme q est constant, il n'est pas possible que $\|P_n - Q\|_\infty$ tende vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
   Conclusion : l'espace vectoriel E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque
On montre de la même façon que l'espace vectoriel E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_1$ où $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{\deg P} |a_k|$. On montre que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie ci-dessous est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais ne converge pas.

Ce qu'il faut savoir

Théorème des approximations successives

Le théorème des approximations successives (ou théorème du point fixe) ne figure pas explicitement au programme mais certains concours demandent souvent de le redémontrer et de l'utiliser. Il est donc utile de le connaître. Sur le plan mathématique, il est très important tant au niveau théorique (il est par exemple utilisé pour le théorème de Cauchy-Lipschitz ou le théorème d'inversion locale) qu'au niveau appliqué car il fournit une méthode très robuste d'approximation numérique d'une équation du type $g(x) = 0$ (que l'on transforme en l'équation équivalente $f(x) = x$ où $f(x) = g(x) + x$).

Exercice 5.20

Mines-Ponts MP 2007

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie complète de E, f une application de A dans E telle que $f(A) \subset A$, $a \in A$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par : $x_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

On suppose que f est λ-lipschitzienne avec $0 \leqslant \lambda < 1$ (on dit que f est une application **contractante**). Montrer que f admet un unique point fixe x qui est la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Indication de la rédaction : on pourra montrer que (x_n) est une suite de Cauchy et que $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$.

• Commençons par montrer que (x_n) est une suite de Cauchy. Pour tout $n \geqslant 1$, $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leqslant \lambda \|x_n - x_{n-1}\|$ et par récurrence,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \lambda^n \|x_1 - x_0\| .$$

Il vient, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+p} - x_n\| &\leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leqslant \left(\lambda^{n+p-1} + \cdots + \lambda^n\right) \|x_1 - x_0\| \\ &\leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\| .\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} = 0$ ($\lambda < 1$), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon$. Donc (x_n) est de Cauchy. Comme A est une partie complète, la suite (x_n) est convergente dans A, appelons $\ell \in A$ sa limite. La fonction f étant lipschitzienne est continue, on obtient $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$.. La limite ℓ est un point fixe de f.

- Montrons que le point fixe est unique. Appelons $\ell' \in A$ un autre point fixe éventuel. Alors $\|\ell - \ell'\| = \|f(\ell) - f(\ell')\| \leqslant \lambda \|\ell - \ell'\|$. Si $\ell \neq \ell'$ alors $\lambda \geqslant 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

5.1.8 Compacité

Ce qu'il faut savoir

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et soit K une partie non vide de E.

- On dit que K est **compacte** lorsque de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une suite qui converge **dans** K.
- **Propriétés des compacts**
  - Si K est compacte, alors K est fermée et bornée de E. La réciproque est fausse si E est de dimension infinie (voir exercice 5.22).
  - Soit A une partie compacte. Un sous-ensemble B de A est compact si et seulement si B est un fermé de A (ou encore de E, c'est équivalent).
- Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $f : A \to F$.
  - Si f est continue et si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.
  - **Cas particulier très important des fonctions à valeurs réelles :** si A est compact et si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A , alors f est bornée et atteint ses bornes : plus précisément il existe c et d dans A tels que, $\sup_{x\in A} f(x) = f(c)$ et $\inf_{x\in A} f(x) = f(d)$. Ce résultat est utilisé pour la recherche des extremums, voir le chapitre sur les fonctions à plusieurs variables.
- **Conséquence :** Si A est un compact de E, on peut définir le sous-espace vectoriel normé $(\mathscr{C}(A,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \subset (\mathscr{B}(A,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ qui est un (sous-)espace de Banach (exercice fondamental du cours sur les suites et séries de fonctions).
- **Théorème de Heine :** si $f : A \to F$ est continue et si A est compact alors f est uniformément continue sur A.

Exercice 5.21

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E et soit f une application continue de K dans $\mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant f(x) < 1$ pour tout $x \in K$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite quelconque de K. Montrer que la suite de terme général $\big((f(x_n))^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Comme f est continue sur le compact K, f est majorée et elle atteint sa borne supérieure b. Il existe donc $u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = b$, et il en résulte que $0 \leqslant b < 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (f(x_n))^n \leqslant b^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n))^n = 0$.

Remarque

Attention à ne pas écrire : $0 < f(x_n) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n))^n = 0$. Par exemple on a : $0 < 1 - \dfrac{1}{n} < 1$, et pourtant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Exercice 5.22

Pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{\deg P} a_k X^k$ dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_\infty = \max_{0\leqslant k\leqslant \deg P} |a_k|.$$

Montrer que la boule unité de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas compacte.

Considérons par exemple la suite (P_n) définie par $P_n = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe une suite extraite $P_{\varphi(n)}$ convergente vers P.

Écrivons que $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec a_k nul à partir d'un certain rang. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_0) > k$, donc $|a_k| \leqslant \|P - P_{\varphi(n)}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient $P = 0$ ce qui est impossible car $\|P\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|P_{\varphi(n)}\|_\infty = 1 \neq 0$. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de suite extraite convergente et la boule unité de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas compacte.

Exercice 5.23

Mines-Ponts MP 2005

Soit $f : K \to K$ avec K une partie compacte dans un espace vectoriel normé telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1) Montrer qu'il existe un unique point fixe a de f sur K.

2) Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in K$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers a.
Indication de la rédaction : on pourra considérer $\min\limits_{x \in K} \|f(x) - x\|$

1) Supposons que a et a' sont deux points fixes distincts de l'application f. On a alors $\|a - a'\| = \|f(a) - f(a')\| < \|a - a'\|$ d'où la contradiction. Il y a au plus un point fixe.
Comme l'application $x \mapsto \|f(x) - x\|$ est continue sur le compact K et à valeurs réelles, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc $a \in K$ tel que $\min\limits_{x \in K} \|f(x) - x\| = \|f(a) - a\|$. Supposons que $a \neq f(a)$, on obtient alors l'inégalité $\|f(f(a)) - f(a)\| < \|f(a) - a\|$, ce qui est contradictoire avec le caractère minimal de a. Donc $a = f(a)$.

2) S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $x_n = a$, alors la suite (x_n) converge vers a. S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \neq a$, la suite $\left(\|x_n - a\|\right)_n$ est alors décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\alpha \geqslant 0$. Montrons que $\alpha = 0$. Puisque K est un compact, il existe une suite extraite convergente $(x_{\varphi(n)})$ vers $\ell \in K$. D'où $\|x_{\varphi(n)} - a\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha = \|\ell - a\|$ car la suite $\left(\|x_n - a\|\right)$ est décroissante, or $\|x_{\varphi(n)+1} - f(a)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha = \|f(\ell) - f(a)\|$ (car f est 1-lipschitzienne donc continue). Si $\ell \neq a$, alors $\|f(\ell) - f(a)\| < \|\ell - a\|$, ce qui donne une contradiction donc $\ell = a$ et $\alpha = 0$.

5.1.9 Valeurs d'adhérence

Ce qu'il faut savoir

Valeur d'adhérence : un vecteur $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de E lorsqu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ convergeant vers ℓ.
Exemple : L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\sqrt{n} - \mathrm{E}(\sqrt{n})\right)_{n \geqslant 0}$ est l'intervalle $[0, 1]$. Voir exercice 1.11 chapitre 1.

Exercice 5.24

TPE MP 2005

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un compact K possédant une unique valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit ℓ cette valeur d'adhérence. Supposons que la suite (u_n) ne converge pas vers ℓ. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| > \varepsilon$. La suite d'éléments $(x_{\varphi(n)})$ du compact K admet une valeur d'adhérence ℓ' qui est nécessairement distincte de ℓ car $\|\ell' - \ell\| \geqslant \varepsilon$. Mais ℓ' est également une valeur d'adhérence de la suite (x_n) (car une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est encore une suite extraite de (x_n)), d'où la contradiction.

5.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans l'exercice qui suit, nous allons étudier la topologie de la somme de deux parties d'un espace vectoriel normé

Exercice 5.25

Centrale MP 2005, Mines-Ponts MP 2005 et 2006

Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé et soient A et B deux parties de E. On désigne par $A + B$ l'ensemble $\{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1) Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
Indication de la rédaction : Soient $(a, b) \in E^2$ et $r \in \,]0, +\infty[$. Vérifier que $B(a, r) + b = B(a + b, r)$.

2) On suppose que A et B sont fermés. Montrer que $A + B$ n'est pas forcément fermé (voir exercice 5.10, p.120).

3) On suppose que A et B sont compacts. Montrer que $A + B$ est compact.

4) On suppose que A est compact et B est fermé. Montrer que $A + B$ est fermé et pas nécessairement compact.

1) Soit $b \in B$, montrons que $A + b$ est un ouvert. Soit $c \in A + b$ alors il existe $a_0 \in A$ tel que $c = a_0 + b$. Puisque A est ouvert, il existe $r \in \,]0, +\infty[$ tel que $B(a_0, r) \subset A$. Donc $B(a_0, r) + b \subset A + b$. Or $B(a_0, r) + b = B(a_0 + b, r)$ car

$$\begin{aligned} z \in B(a_0 + b, r) \quad &\Leftrightarrow \quad \|a_0 + b - z\| < r \Leftrightarrow \|a_0 - (z - b)\| < r \\ &\Leftrightarrow \quad z - b \in B(a_0, r) \Leftrightarrow z \in b + B(a_0, r) \end{aligned}$$

Ainsi $B(a_0 + b, r) \subset A + b$, et donc $A + b$ est un ouvert de E. Par ailleurs, $A + B = \displaystyle\bigcup_{b \in B} (A + b)$ donc, en tant que réunion d'ouverts, $A + B$ est un ouvert de E

2) voir exercice 5.10, p.120.

3) Montrons que toute suite $(c_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $A+B$ admet une sous-suite $(c_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans $A + B$. Soit $(c_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de $A + B$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n + b_n$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme A est compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément a de A. De même, B est compact donc il existe une sous-suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ de la suite $(b_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément b de B. Donc la sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})$ de terme général

$x_{\varphi(\psi(n))}+y_{\varphi(\psi(n))}$ converge vers $c = a+b$. Ainsi de la suite (c_n) d'éléments de $A+B$, on a pu extraire une sous-suite $(c_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers $c = a + b \in A + B$. Donc $A + B$ est compact.

4) Montrons que $A + B$ est un fermé. Soit $c \in \overline{A + B}$, il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A + B$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Puisque $c_n \in A+B$, il s'écrit a_n+b_n où $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme A est compact, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Par ailleurs, la suite de terme général $b_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ converge (car c'est la différence de deux suites convergentes) dans E vers $c - a$. Or B est fermé donc $c - a \in B$ donc $c \in A + B$.

L'exercice suivant nous donne un critère pour savoir si un hyperplan est fermé ou dense.

Exercice 5.26

Mines-Ponts et Polytechnique MP 2007K

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et soit f une forme linéaire non nulle sur E.

1) Montrer que f est continue si et seulement si $\ker f$ est un fermé de E.

2) On suppose que f est continue sur E et on pose $H = \operatorname{Ker} f$. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, H) = \dfrac{|f(x)|}{|||f|||}$.

1) • Si f est continue, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé car le singleton $\{0\}$ est fermé.

• Si f est fermé et $f \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $f(e) \neq 0$, auquel cas $E = \operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{K}e$. Posons $d = d(e, \operatorname{Ker} f)$, $d > 0$ (car si $d = 0$, alors e serait limite d'une suite d'éléments de $\operatorname{Ker} f$ avec $e \notin \operatorname{Ker} f$, ce qui contredit le fait que $\operatorname{Ker} f$ est fermé). Soit $x \in E$. On peut écrire $x = y + \alpha e$, où $y \in \operatorname{Ker} f$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, ce qui donne $f(x) = \alpha f(e)$. Si $\alpha \neq 0$, $\dfrac{x}{\alpha} = e + \dfrac{y}{\alpha}$. Comme $-\dfrac{y}{\alpha} \in \operatorname{Ker} f$, on a $\|e + \dfrac{y}{\alpha}\| \geqslant d$. On a finalement $\|\dfrac{x}{\alpha}\| \leqslant d$, et $|\alpha| \leqslant \dfrac{\|x\|}{d}$, d'où $|f(x)| \leqslant \dfrac{|f(e)|}{d}\|x\|$. Cette inégalité est encore vraie lorsque $\alpha = 0$, donc f est continue.

2) Soit $x \in E$. Écrivons que $x = y + \alpha e$ avec $y \in H$.

$$d(x, H) = \inf_{z\in H} \|x - z\| = |\alpha| \inf_{y\in H} \|y - e\|$$

car H est un sous-espace vectoriel. D'autre part,

$$|||f||| = \sup_{z\neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{t\in\mathbb{R},\, u\in H} \frac{|t\, f(e)|}{\|u - te\|} = \sup_{y\in H} \frac{|f(e)|}{\|y - e\|} = \frac{|f(e)|}{\inf\limits_{y\in H} \|y - e\|},$$

d'où $|||f|||\, d(x, H) = |\alpha|\, |f(e)| = |f(x)|$. On en déduit le résultat.

Exercice 5.27

Mines-Ponts MP 2007

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, N une norme sur E et $A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1) Montrer que A est soit fermé soit dense dans (E, N).

2) Donner un exemple d'une norme N_1 tel que A soit dense dans (E, N_1) puis un exemple de norme N_2 tel que A soit fermé dans (E, N_2).

1) L'ensemble A est un hyperplan car $A = \operatorname{Ker}\varphi$ où φ est la forme linéaire (non nulle) définie sur E par $\varphi(f) = f(0)$. Il est soit fermé soit dense dans E d'après l'exercice 5.11, page 121 question 2).

2) D'après l'exercice précédent, ex 5.26 p.135, ces deux cas correspondent respectivement à φ continue et φ non continue.

- Considérons la norme infinie sur E définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Comme pour tout $f \in E$, $|f(0)| = |\varphi(f)| \leqslant \|f\|_\infty$, la forme linéaire φ est continue et donc A est un fermé.
- Considérons la norme de la convergence en moyenne sur E définie pour tout $f \in E$ par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$. Pour montrer que φ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$, il suffit d'exhiber une suite (f_n) d'éléments de E telle que la suite $\left(\dfrac{\varphi(f_n)}{\|f_n\|_1}\right)$ tend vers $+\infty$. On prend par exemple la suite (f_n) où pour tout entier n, $f_n : t \mapsto (1-t)^n$. Chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et on a $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$. De plus, on a $\varphi(f_n) = f_n(0) = 1$. Ainsi $\dfrac{\varphi(f_n)}{\|f_n\|_1} = n+1$, de limite infinie lorsque n tend vers $+\infty$, donc la forme linéaire φ n'est continue et par conséquent A est dense.

Exercice 5.28

Polytechnique MP 2007

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que si F est un ouvert alors $F = E$.

2) Montrer que si $\mathring{F} \neq \varnothing$ alors $F = E$.

3) Soient $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, $E_1 = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $E_2 = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $E_3 = \{f \in E \mid f \text{ est polynômiale}\}$. Montrer que $\mathring{E}_1 = \mathring{E}_2 = \mathring{E}_3 = \varnothing$.

1) Il est clair que $F \subset E$. Il reste à montrer que $E \subset F$. Comme F est ouvert et $0_E \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset F$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \in B(0_E, r) \subset F$. Il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{r}{2\|x\|}$ car alors $\|\lambda\, x\| = \dfrac{r}{2\|x\|}\,\|x\| = \dfrac{r}{2} < r$. Puisque F est un sous-espace vectoriel et $\lambda x \in F$, on a $x = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda x) \in F$.

2) Par hypothèse $\overset{\circ}{F} \neq \varnothing$, il existe donc $a \in \overset{\circ}{F}$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq a$. Montrons que $x \in F$. En notant $y = a + \dfrac{r}{2\,\|x-a\|}\,(x-a)$, on a alors $\|y-a\| = \dfrac{r}{2} < r$ donc $y \in B(a,\ r)$ et donc $y \in F$. Comme a et y appartiennent à F et comme F est un sous-espace vectoriel, il en résulte que $x - a = \dfrac{2\,\|x-a\|}{r}\,(y-a) \in F$. Enfin, on a $x = (x-a) + a \in F$, d'où $x \in F$ et $E \subset F$.

3) D'après la question précédente, comme les E_i sont des sous-espaces vectoriels de E, il s'agit de montrer qu'ils sont distincts de E. C'est évident car $x \mapsto \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$ n'est pas dans E_1 et $x \mapsto \cos x$ n'est ni dans E_2, ni dans E_3.

Exercice 5.29

Mines-Ponts MP 2007

Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé et soit $f : K \to K$ vérifiant : $\forall (x,y) \in K^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

1) Soit $a \in K$ fixé et $n \geqslant 1$. Montrer que la fonction f_n définie sur K par $f_n(x) = \dfrac{a}{n} + (1 - \dfrac{1}{n}) f(x)$ est contractante sur K.

2) En déduire que f admet un point fixe.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in K$ fixé.

• Soit $x \in K$. Puisque K est convexe et $f(K) \subset K$, le vecteur $x = \dfrac{a}{n} + (1 - \dfrac{1}{n}) f\,(x)$ appartient aussi à K. Il en résulte que $f_n(K) \subset K$.

• Pour tout $(x,y) \in K^2$, on a $f_n(x) - f_n(y) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)(x-y)$, donc $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\|x - y\|$. Autrement dit, la fonction f_n est une application $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$-lipschitzienne de K dans K. Elle est alors contractante sur K et donc admet un point fixe x_n, vérifiant $x_n = \dfrac{a}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) f\,(x_n)$ (voir exercice 5.20, page 130).

2) Comme K est compact, il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de la suite (x_n), qui converge vers $x \in K$. En faisant tendre n vers $+\infty$, dans la relation $x_{\varphi(n)} = \dfrac{a}{\varphi(n)} + \left(1 - \dfrac{1}{\varphi(n)}\right) f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ et sachant que f est continue sur K, on obtient $f(x) = x$, d'où l'existence d'un point fixe.

Exercice 5.30

Centrale MP 2007

Donner un espace normé (E, N) et une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E bornée et sans valeur d'adhérence *(c'est-à-dire n'ayant aucune suite extraite convergente).*

Voir exercice 5.22 p.132.

5.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5.31

Centrale MP 2007, 2005

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $N_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f_n la fonction continue égale à 0 sur $[0, \frac{1}{2}]$, à 1 sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}]$.

1) Représenter f_n avec *piecewise* sur *Maple* ou *Mathematica*.

2) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme $\| \|_1$.

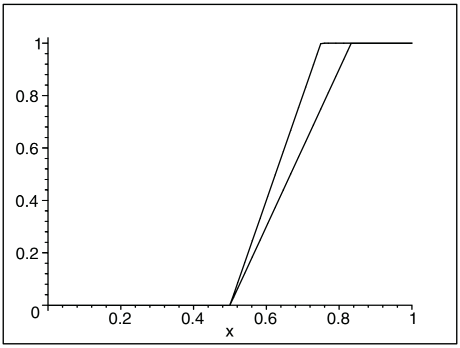
3) L'espace $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\| \|_1$ est-il complet ?

1) Pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+1}\right]$, $f(x) = (n+1)(x - \frac{1}{2})$. Cela donne en *Maple* :

```
f:=n->piecewise(x<=1/2, 0, x>1/2 and x<1/2+1/(n+1)
,(n+1)*(x-1/2) , x>1/2+1/(n+1),1);
plot({f(2),f(3)},x=0..1);
```

ou, avec *Mathematica*

```
f[n_] := Piecewise[{{0, x < 1/2}, {(n + 1) (x - 1/2),
x >= 1/2 && x < 1/2 + 1/(n + 1)},{1, x > 1/2 + 1/(n + 1)}}]
Plot[{f[2], f[3]}, {x, 0, 1}]
```



2) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > p$. On a $\|f_n - f_p\| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$ car $0 \leqslant f_p(t) - f_n(t) \leqslant 1$ et $f_p(t) = f_n(t)$ sur $[0,1] \setminus \left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{p+1}, 1\right]\right)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{p_0+1} \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > p \geqslant p_0$, on a

$$\|f_n - f_p\| \leqslant \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p_0+1} \leqslant \varepsilon.$$

Donc la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \, \|_\infty)$.

3) Intuitivement, la suite (f_n) semble converger vers la fonction égale à 0 sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et égale à 1 sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ avec un problème de continuité en $\dfrac{1}{2}$. Supposons que la suite (f_n) converge vers une fonction continue f et montrons que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) = 1$, ce qui donnera une contradiction. On a

$$\int_0^{1/2} |f(t)| \, dt = \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)| \, dt \leqslant \|f - f_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte que, $\displaystyle\int_0^{1/2} |f(t)| \, dt = 0$ (l'expression est indépendante de n). Comme $t \mapsto |f(t)|$ est positive et continue, on a pour tout $t \in [0, 1/2]$, $f(t) = 0$.

De même, pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, posons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n_0+1} \leqslant x$ alors, pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\int_x^1 |f(t) - 1| \, dt = \int_x^1 |f(t) - f_n(t)| \, dt \leqslant \|f - f_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_x^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t = 0$ (l'expression est indépendante de n) et de même, pour tout $t \in [x, 1]$, $f(t) = 0$. Finalement, pour tout $t \in \,]1/2, 1]$, on a

$f(t) = 0$. Les limites à droite et à gauche en $1/2$ de f sont différentes, ce qui est contradictoire avec la continuité de f en $\dfrac{1}{2}$.
Conclusion : la suite (f_n) ne converge pas dans E pour la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 5.32

Centrale MP 2005

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque. On considère $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $\|u\| \leqslant 1$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1) Calculer $v_n \circ (u - \mathrm{id})$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = \{0\}$.
3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.
4) On revient au cas général. On suppose que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Montrer que (v_n) converge simplement et que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ est fermé dans E.
5) Étudier la réciproque de 4).

1) On a $v_n \circ (u - \mathrm{id}) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(u^{k+1} - u^k\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1} - \mathrm{id}\right)$.

2) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Il existe $y \in E$ tel que $x = (u - \mathrm{id})(y)$ et $u(x) = x$. On a $v_n \circ (u - \mathrm{id})(y) = \dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y) - y\right) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x) = x$.
Or $\left\|u^{n+1}(y) - y\right\| \leqslant \left(\|u\|^{n+1} + 1\right)\|y\| \leqslant 2\|y\|$ (car la norme subordonnée est une norme d'algèbre, d'où $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$), donc la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y) - y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Comme c'est la suite constante égale à x, on obtient $x = 0$.

3) D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) + \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}) = \dim E$ donc $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ (on avait déjà la somme directe).

4) • Soit $a \in E$, il existe $(x, z) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \times \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ tel que $a = x + z$. Il existe $y \in E$ tel que $z = (u - \mathrm{id})(y)$. On a

$$v_n(a) = v_n(x) + v_n((u - \mathrm{id})(y)) = x + \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y) - y\right).$$

Comme $\left\|u^{n+1}(y) - y\right\| \leqslant 2\|y\|$, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y) - y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc $(v_n(a))$ tend vers x. (v_n) converge simplement vers la projection π sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.

- Montrons que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ est fermé. Soit (z_n) une suite d'éléments de $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ convergeant vers $z \in E$. Il existe (y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (u - \mathrm{id})(y_n)$. Montrons que $\pi(z) = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(z) = 0$.
  Soit $p \in \mathbb{N}$, on a $v_n(z_p) = v_n \circ (u - \mathrm{id})(y_p) = \dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y_p) - y_p\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ pour les mêmes raisons que précédemment, $\|v_n(z_p)\| \leqslant \dfrac{2\|y_p\|}{n+1}$. D'autre part, $\|v_n\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left\|u^k\right\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|u\|^k = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|z - z_p\| \leqslant \varepsilon/2$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned}\|v_n(z)\| &\leqslant \|v_n(z) - v_n(z_p)\| + \|v_n(z_p)\| \leqslant \|v_n\|\,\|z - z_p\| + \|v_n(z_p)\| \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \|v_n(z_p)\|\,.\end{aligned}$$
  Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|v_n(z_p)\| \leqslant \varepsilon/2$ car $\|v_n(z_p)\| \leqslant \dfrac{2\|y_p\|}{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $\|v_n(z)\| \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(z) = 0 = \pi(z)$. Le sous-espace $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ est donc fermé.

5) On suppose que (v_n) converge simplement et que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ est fermé dans E. Soit $a \in E$. Soit $x = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(a)$. On a bien sûr $a = x + a - x$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ et que $a - x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$.
   - On a $(u - \mathrm{id}) \circ v_n = v_n \circ (u - \mathrm{id})$ car v_n est un polynôme en u. Il vient $(u - \mathrm{id}) \circ v_n(a) = \dfrac{1}{n+1}\left(u^{n+1} - \mathrm{id}\right)(a)$. Or $\left\|\left(u^{n+1} - \mathrm{id}\right)(a)\right\| \leqslant 2\|a\|$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u - \mathrm{id}) \circ v_n(a) = 0$. Comme $u - \mathrm{id}$ est continue, il vient $(u - \mathrm{id})(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$.
   - On a $a - x = \lim\limits_{n\to+\infty} (a - v_n(a))$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a - v_n(a) \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$, comme $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ est fermé, on aura montré que $a - x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned}\mathrm{id} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{id} - u^k\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{id} - u) \circ \left(\mathrm{id} + u + \cdots + u^{k-1}\right) = (\mathrm{id} - u) \circ w_n\end{aligned}$$
   avec $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{id} + u + \cdots + u^{k-1}\right)$. Ainsi $a - v_n(a) = (\mathrm{id} - u)(w_n(a))$ donc $a - v_n(a) \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$, ce qui termine la preuve.

6 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce chapitre suppose connu le précédent concernant les espaces vectoriels normés généraux. Les exercices sont en conséquence un peu plus élaborés.

6.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

6.1.1 Synthèse en dimension finie

Ce qu'il faut savoir

• Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La topologie (ouvert, fermé, compact, etc.) est donc indépendante de la norme choisie.

Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E. Toute norme N de E se comporte comme la norme infinie sur $\mathscr{B}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_{\infty,\mathscr{B}} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \, .$$

Ainsi une suite de vecteurs de E converge (pour n'importe quelle norme) si et seulement si chacune des suites coordonnées (dans une base quelconque fixée à l'avance) converge.

• Si l'espace vectoriel normé de départ E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires, bilinéaires (et même p-linéaires) définies sur E sont continues sur E. Ainsi, dans ce cas, toute application linéaire possède une norme subordonnée (dépendante, elle, des normes de départ et d'arrivée)

• **Cas particulier très important :** soit $f : E \to F$ est une application. Si F est de dimension finie et si $\mathscr{B}$ est une base de F, alors f est continue si et seulement si chacune des applications coordonnées (données par $\mathscr{B}$) est continue sur E.

• Si un espace vectoriel normé est de dimension finie, alors il est complet (c'est un espace de Banach).

Remarque

Si on a une suite de Cauchy alors les suites coordonnées selon une base donnée sont également de Cauchy.

En conséquence, tout sous-espace vectoriel normé de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque est **fermé.**

Exemple En dimension finie, toute série absolument convergente (pour n'importe quelle norme) est convergente.

• **Les compacts**

◦ Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les ensembles fermés et bornés.

◦ Autre formulation *(Bolzano-Weïerstrass)*
Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie possède une valeur d'adhérence.

Exercice 6.1

Mines-Ponts PSI 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit A une matrice antisymétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si la suite (A^p) converge, alors sa limite est la matrice nulle.

Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc ils sont fermés. Soit $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^p$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice A^{2p} est symétrique $({}^t(A^{2p}) = ({}^tA)^{2p} = (-A)^{2p} = A^{2p})$ et la matrice A^{2p+1} est antisymétrique. On en déduit que $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^{2p+1}$ est antisymétrique, et d'autre part que $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^{2p}$ est symétrique. Comme $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, il en résulte que $B = 0$.

Exercice 6.2

Divers écoles MP 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $a^n A^n$ converge vers une limite non nulle.

Un calcul rapide montre que le polynôme caractéristique de la matrice A s'écrit

$$\chi_A(X) = -X(X-1)(X-3).$$

Il est donc scindé à racines simples. La matrice A est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, 1, 3)$.

Il vient $a^n A^n = P\,\mathrm{diag}(0, a^n, (3a)^n)P^{-1}$ donc $a^n A^n$ converge vers une limite non nulle si et seulement si $\mathrm{diag}(0, a^n, (3a)^n)$ converge vers une limite non nulle ($M \mapsto PMP^{-1}$ est un homéomorphisme linéaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$). La seule possibilité est $a = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 6.3

TPE MP 2006,2005

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

• Si M existe, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} M^{2k} = A^2$ par continuité de l'application de $M \mapsto M^2$ mais $\lim\limits_{k\to+\infty} M^{2k} = A$ donc $A^2 = A$ par unicité de la limite.

• Réciproquement, si $A^2 = A$ alors en posant $M = A$, on a bien $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = A$.

Conclusion : la condition $A^2 = A \Leftrightarrow$ « A est un projecteur » est une condition nécessaire et suffisante qui répond à la question.

Exercice 6.4

TPE MP 2006

Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM.M = I_n\}$.

• L'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = {}^tM.M$ étant continue, l'ensemble $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}\left(\{I_n\}\right)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Toutes les colonnes d'une matrice $M = (m_{ij})$ orthogonale sont unitaires pour la norme euclidienne usuelle sur les vecteurs colonnes donc, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $|m_{ij}| \leqslant 1$, d'où $\|M\|_\infty \leqslant 1$ (avec $\|M\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|$). L'ensemble $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble borné (pour $\| \ \|_\infty$ et donc pour n'importe quelle norme puisqu'elles sont toutes équivalentes).

Exercice 6.5

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Puisque $\mathbb{K}^*$ est un ouvert et que l'application $\det : M \mapsto \det M$ est continue, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert.

• Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On va montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour $0 < |\lambda| < \alpha$. Ainsi, on a $M = \lim\limits_{p\to+\infty} M - \dfrac{1}{p} I_n$ et $\left(M - \dfrac{1}{p} I_n\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si p est assez grand. Considérons $\det(M - \lambda I_n)$, par définition, il s'agit du polynôme caractéristique de A évalué en λ, $\chi_A(\lambda)$. Ce polynôme a un nombre fini de racines, les valeurs propres de M. Soit $\alpha = \min\left(|\mu|, \mu \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}\right)$ (si A n'a pas de valeurs propres non nulles, n'importe quel réel strictement positif convient). Cet α répond à la question.

6.1.2 Connexité par arcs

Ce qu'il faut savoir

• Soit $A \subset E$ une partie non vide.

On dit que A est connexe par arcs si et seulement si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un chemin continu reliant a à b, c'est-à-dire

$$\exists \gamma : [0, 1] \to A \text{ continue avec } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b.$$

Remarque
La relation $a \sim b \Leftrightarrow$ il existe un chemin continue reliant a à b est un relation d'équivalence.

• **Propriétés**

◦ Un convexe (par exemple une boule) est connexe par arcs.
◦ Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
◦ L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Application : si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et si X est connexe par arcs alors $f(X)$ est un intervalle (c'est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 6.6

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ devrait être connexe par arcs en tant qu'image par l'application continue det, donc être un intervalle, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 6.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient A et B deux parties non vides connexes par arcs de E.

1) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2) Montrer que $A + B = \{a + b \,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}$ est connexe par arcs.

1) Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de $A \times B$. Il existe $\gamma_1 : [0, 1] \to A$ et $\gamma_2 : [0, 1] \to B$ continues avec $\gamma_1(0) = a, \gamma_1(1) = a'$ et $\gamma_2(0) = b, \gamma_2(1) = b'$.
Le chemin $\gamma : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & A \times B \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{cases}$ est bien continu et relie (a, b) à (a', b') donc $A \times B$ est connexe par arcs.

2) De même, $\widetilde{\gamma} : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & A + B \\ t & \longmapsto & \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \end{cases}$ est un chemin continu qui relie $a+b$ à $a' + b'$ donc $A + B$ est connexe par arcs.

6.1.3 Séries matricielles

Ce qu'il faut savoir

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme d'algèbre $\|.\|$ (c'est-à-dire vérifiant $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$, c'est par exemple le cas pour une norme subordonnée). Soit M est une matrice de E.

- si $\|M\| < 1$, alors $(I_n - M)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} M^k$
- on définit $\exp M = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Résultats classiques :
- Si P est inversible, alors $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr} A}$ (se démontre en trigonalisant A).
- Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp A . \exp B$. On en déduit que pour tout A, $\exp A$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

Exercice 6.8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$. Montrer que la série de terme général A^n converge et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

Considérons la norme subordonnée associé à la norme infinie sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

On remarque que, pour $X = {}^t(x, y)$,

$$\|AX\|_\infty = \max\left(\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right|, \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right|\right) \leqslant \frac{5}{6} \max(|x|, |y|) = \frac{5}{6} \|X\|_\infty$$

d'où $\|A\| \leqslant \dfrac{5}{6} < 1$. La série $\sum A^n$ est donc convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_2 - A)^{-1} = \frac{2}{21} \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.9

Mines-Ponts MP 2006, 2005

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme minimal de A.

2) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Sans diagonaliser effectivement A, calculer $\exp(A)$.

1) En calculant A^2, on remarque que $A^2 = 2I_3 + A$. A n'étant pas de la forme λI_3, son polynôme minimal de degré au moins 2, il s'agit donc de $\pi_A = X^2 - X - 2$.

2) Comme la polynôme minimal $\pi_A = (X+1)(X-2)$ est scindé à racines simples, A est diagonalisable.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculons A^p au moyen du polynôme minimal. La division euclidienne de X^p par π_A s'écrit $X^p = \pi_A Q + \alpha_p X + \beta_p$. En prenant successivement $X = -1$ et $X = 2$, on obtient

$$\begin{cases} (-1)^p = -\alpha_p + \beta_p \\ 2^p = 2\alpha_p + \beta_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_p = \dfrac{1}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) \\ \beta_p = \dfrac{1}{3}\left(2^p + 2(-1)^p\right). \end{cases}$$

Donc $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$ d'où

$$\begin{aligned} \exp A = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!} &= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p}{p!} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\right) A + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p}{p!} + 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\right) I_3\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(e^2 - e^{-1}\right) A + \left(e^2 + 2e^{-1}\right) I_3\right] \\ &= \frac{1}{3e}\begin{pmatrix} e^3+2 & (e^3-1)a & (e^3-1)a^2 \\ (e^3-1)/a & e^3+2 & (e^3-1)a \\ (e^3-1)/a^2 & (e^3-1)/a & e^3+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 6.10

Mines-Ponts MP 2007 et 2005

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Une démonstration par récurrence, mène à, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{4k} = I_n$, $A^{4k+1} = A$, $A^{4k+2} = A^2$, et $A^{4k+3} = A^3$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{4n+3} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)!}\right) A + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+2)!}\right) A^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+3)!}\right) A^3.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$\exp A = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!}\right) A + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)!}\right) A^2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)!}\right) A^3.$$

Le calcul des sommes se fait en combinant les développement en somme de $\exp(\omega)$ avec $\omega \in \{1, -i, -1, i\}$ (racine quatrième de l'unité). Ainsi

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!}\right) = \frac{e + e^i + e^{-1} + e^{-i}}{4} = \frac{\operatorname{ch} 1 + \cos 1}{2},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!}\right) = \frac{e - ie^i - e^{-1} + ie^{-i}}{4} = \frac{\operatorname{sh} 1 + \sin 1}{2} \text{ etc.}$$

Conclusion :

$$\exp A = \left(\frac{\operatorname{ch} 1 + \cos 1}{2}\right) I_n + \left(\frac{\operatorname{sh} 1 + \sin 1}{2}\right) A + \left(\frac{\operatorname{ch} 1 - \cos 1}{2}\right) A^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} 1 - \sin 1}{2}\right) A^3.$$

6.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 6.11

Mines-Ponts MP 2007

Montrer que $\exp(M) \in \mathbb{K}[M]$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\mathbb{K}[M]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est de dimension finie et donc fermé. Ainsi, la matrice $\exp(M)$, limite de la suite de polynômes $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{K}[M]$.

Exercice 6.12

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0, \quad I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \ldots + \frac{1}{k!}M^k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Puisque $\exp M = \lim_{k\to+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(\exp M, r) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Par définition de la limite, il existe k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} \in B(\exp M, r) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6.13

CCP PC 2006 - Normes et valeurs propres

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme suivante : pour $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $\|M\| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |m_{ij}|$.

1) Soient $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $f : M \mapsto MX$ et $g : M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et que l'application $h : (M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})\times\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(\|A^n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3) Soit $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(B^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer que $C^2 = C$, que $\mathrm{Sp}(C) \subset \{0, 1\}$ et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}\cup\{1\}$.

4) On considère $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$. On suppose que M est diagonalisable et que les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} M^n$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M^{n_0} = 0$. Conclure.

1) Les applications f et g sont linéaires et l'espace de départ est de dimension finie, elles sont donc continues.Quant à l'application h, elle est bilinéaire et l'espace de départ est un produit de deux espaces vectoriels de dimension finie, elle est donc continue.

2) Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_p)$ un vecteur propre associé à λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^nX = \lambda^nX$. La suite $\left(\|A^n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, en considérant les coordonnées, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(\lambda^n x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En choisissant un indice i tel que $x_i \neq 0$, on en déduite que la suite $\left(\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $|\lambda| \leqslant 1$.

3) Puisque h est continue, on a $C^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} B^n \times B^n = \lim\limits_{n\to+\infty} B^{2n} = C$, donc C est la matrice d'un projecteur. Par conséquent, C est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(C) \subset \{0, 1\}$.
D'après ce qui précède si λ est valeur propre de B, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
Montrons que $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$. Soit λ une valeur propre de module 1 et soit X un vecteur propre associé à λ. Puisque f est continue, on a $B^n X = \lambda^n X \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} CX$ (d'après 1)). La suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, en écrivant pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right| = |\lambda|^n\,|\lambda - 1| = |\lambda - 1|$, on en déduit que $|\lambda - 1| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda^{n+1} - \lambda^n|$ est nul, et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$

4) La matrice M est diagonalisable, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $M = P^{-1}DP$ avec D diagonale. Comme chaque valeur propre est de module < 1, on obtient $D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_p$ où l'on désigne par 0_p la matrice nulle de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Par ailleurs, $M^n = P^{-1}D^nP$ et g est continue, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = 0_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$. Chaque suite d'entiers correspondant à un coefficient (i, j) de la matrice M^n converge vers 0 donc est nulle à partir d'un certain rang. En prenant le maximum des rangs à partir desquels les suites sont nulles, on obtient un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M^{n_0} = 0_p$.
Ainsi, la matrice M est nilpotente et donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. De plus, M est diagonalisable, elle est donc semblable à la matrice nulle et donc M est la matrice nulle.

L'exercice suivant nécessite la connaissance du chapitre d'algèbre bilinéaire (réduction des endomorphismes symétriques).

Exercice 6.14

Mines-Ponts MP 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec $0 < a < 1$. Etudier la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$.

La matrice A est symétrique réelle donc est diagonalisable. Un calcul rapide montre que le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_A(X) = -(X - 1)(X^2 - 3a^2 + 3a - 1)$.
En regardant le tableau de variation du trinôme $a \mapsto 3a^2 - 3a + 1$,

a	0	1/2	1
$3a^{2-3a+1}$	1		1
	$\searrow$	1/4	$\nearrow$

on en déduit que $3a^2 - 3a + 1 \in [\frac{1}{4}, 1[$ pour $a \in]0, 1[$. Les valeurs propres sont simples :

$$1, \sqrt{3a^2 - 3a + 1} \quad \text{et} \quad -\sqrt{3a^2 - 3a + 1}.$$

Il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (théorème spectral) telle que

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1, \sqrt{3a^2 - 3a + 1}, -\sqrt{3a^2 - 3a + 1})$$

et $A^n = P \times \operatorname{diag}(1, \left(3a^2 - 3a + 1\right)^{n/2}, (-1)^n \left(3a^2 - 3a + 1\right)^{n/2}) \times P^{-1}$. Comme $3a^2 - 3a + 1 \in]0, 1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = P \operatorname{diag}(1, 0, 0) P^{-1} = L.$$

Cette matrice limite est la matrice du projecteur sur la droite $E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_3)$ parallèlement à la somme des autres espaces propres qui, A étant symétrique réelle, est le supplémentaire orthogonal de $E_1(A)$.

En clair, $L = \lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur la droite $\operatorname{Ker}(A - I_3)$. On peut remarquer directement que $E_1(A) = \operatorname{Vect}(V)$ avec $V = {}^t(1, 1, 1)$. L est donc indépendante de a.

On détermine alors la matrice L en cherchant les images des vecteurs de la base canonique grâce à la formule

$$LX = \frac{< V, X >}{\|V\|^2} V = \frac{{}^tVX}{3} V. \text{ On trouve } L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.15

Mines-Ponts MP 2004

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme, et on donne une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. On pose alors $B_p = \dfrac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}$ pour $p \geqslant 1$.

1) Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée B. Montrer que $BA = AB = B$ puis que $B^2 = B$.

2) Montrer que $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et que $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker}(A - I_n)$. Déduire de tout cela que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$.

1) Soit M un majorant de $(\|A^p\|)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p \geqslant 1$, $\|B_p\| \leqslant \dfrac{1}{p}(M + \cdots + M) = M$ donc la suite (B_p) est bornée, par Bolzano-Weïerstrass, étant dans un espace vectoriel de dimension finie ($\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$), on sait qu'elle admet une valeur d'adhérence $B = \lim\limits_{p\to+\infty} B_{\varphi(p)}$. Pour $p \geqslant 1$, $AB_{\varphi(p)} = B_{\varphi(p)}A$ donc, en passant à la limite, $BA = AB$.

Remarquons par ailleurs que pour $p \geqslant 1$, $B_p - B_pA = \dfrac{1}{p}\left(I_n - A^p\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\|I_n - A^p\| \leqslant 2M$. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(B_{\varphi(p)} - B_{\varphi(p)}A\right) = B - BA = 0$. D'où, pour $p \in \mathbb{N}$, $BA^p = A^p B = B$, puis, $B\left(\dfrac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}\right) = B$. Donc $BB_{\varphi(p)} = B$, en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $B^2 = B$.

2) On a vu que $B(A - I_n) = 0$ donc $\operatorname{Im}(A - I_n) \subset \operatorname{Ker} B$. D'autre part, si $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$, alors pour tout $p \geqslant 1$, $A^p X = X$ donc $B_{\varphi(p)}X = X$ donc $BX = X$ en faisant tendre p vers $+\infty$. Donc, en particulier, $\operatorname{Ker}(A - I_n) \subset \operatorname{Im} B$. Le théorème du rang nous permet de conclure à l'égalité des ensembles. En effet, $\dim[\operatorname{Im}(A - I_n)] \leqslant \dim[\operatorname{Ker} B]$, $\dim[\operatorname{Ker}(A - I_n)] \leqslant \dim[\operatorname{Im} B]$ et $\operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} B$ étant supplémentaires (car $B^2 = B$).
Or $\dim \operatorname{Im}(A - I_n) + \dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = n = \dim \operatorname{Ker} B + \dim \operatorname{Im} B$, d'où l'égalité des dimensions et donc des sous-espaces vectoriels. La valeur d'adhérence B est donc unique (car définie uniquement au moyen de A). Un résultat classique nous dit qu'une suite dans un compact ayant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence (voir ex 5.24 p.133), donc $\lim\limits_{p \to +\infty} B_p = B$.

Exercice 6.16 Théorème de Cayley Hamilton par l'analyse...

On rappelle que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

1) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
Indication : Utiliser des matrices du type $M' - \lambda \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$

2) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale on a $\chi_M(M) = 0$.

3) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M(M) = 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1) Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M' = P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de M'. Si toutes les valeurs propres sont égales, posons $a = 1$ sinon posons $a = \min\left\{|\lambda_i - \lambda_j| \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j\right\}$, de sorte que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\lambda_i = \lambda_j$ ou $|\lambda_i - \lambda_j| \geqslant a$. Soient $D = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$, et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M'_p = M' + \dfrac{a}{n(p+1)}D$.

La matrice M'_p est alors triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $\mu_i = \lambda_i + \dfrac{ia}{n(p+1)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Si $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\mu_i - \mu_j = \dfrac{(i-j)a}{n(p+1)} \neq 0$ et si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors

$$|\mu_i - \mu_j| = \left|\lambda_i - \lambda_j + \frac{(i-j)a}{n(p+1)}\right| \geqslant |\lambda_i - \lambda_j| - \frac{|i-j|a}{n(p+1)} \geqslant |\lambda_i - \lambda_j| - a > 0$$

car $\dfrac{|i-j|}{n(p+1)} \leqslant 1$ puisque $|i-j| \leqslant n$, ce qui montre que les valeurs propres de M'_p sont deux à deux distinctes.
On note alors $M_p = PM'_pP^{-1}$, de sorte que la suite $\left(M_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices diagonalisables convergeant vers M.

2) Si $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\chi_M(M) = \operatorname{diag}(\chi_M(\lambda_1), \ldots, \chi_M(\lambda_n)) = 0$, puisque les éléments diagonaux de M sont ses valeurs propres et donc les racines de son polynôme caractéristique.

3) On en déduit que pour toute matrice diagonalisable $M = PM'P^{-1}$, où M' est diagonale, on a

$$\chi_M(M) = \chi_{M'}(M) = \chi_{M'}\left(PM'P^{-1}\right) = P\chi_{M'}\left(M'\right)P^{-1} = 0.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \mapsto \chi_M(M)$ est continue (les coefficients de $\chi_M(M)$ s'expriment comme des polynômes par rapport aux coefficients de M). Soit une suite $\left(M_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convergeant vers M (d'après 1)), la suite $\left(\chi_{M_p}\left(M_p\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\chi_M(M)$, mais d'après ce qui précède cette suite est la suite constante nulle, on en déduit $\chi_M(M) = 0$.

Exercice 6.17

Polytechnique MP 2006

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, $n \geqslant 2$. Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = I_n + N$.

Indication de la rédaction : poser $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$ et montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^k}{k!} = 1 + X + X^n Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Comme N est nilpotente, on sait que $N^n = 0$. Utilisons la formule $\exp(\ln(1+x)) = 1+x$ pour $x \in]-1,1[$.
On sait que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1}) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1}).$$

Donc

$$\exp(\ln(1+x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(x)}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1})$$

par les règle de composition des développements limités.

De plus, $\exp(\ln(1+x)) = 1+x$, par unicité d'un développement limité d'ordre $n-1$, on peut affirmer que les n premiers termes du polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^k(X)}{k!}$ s'identifie à $1+X$, en d'autres termes, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^k}{k!} = 1+X+X^n Q$. Appliquons ce résultat à la matrice N. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P^k(N) = 1 + N + N^n Q(N) = I_n + N$.

Remarquons que pour $k \geqslant n$, $P^k(N) = 0$ (on peut factoriser par N), donc $\exp(P(N)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P^k(N) = I + N$.

Exercice 6.18

Mines-Ponts MP 2005

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Alors $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$. Or $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe par arcs alors qu'il est assez facile de réaliser que $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$ est connexe par arcs. Ceci est contradictoire car en transportant les chemins continus de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$ par φ^{-1} en des chemins de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on devrait avoir $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ connexe par arc.

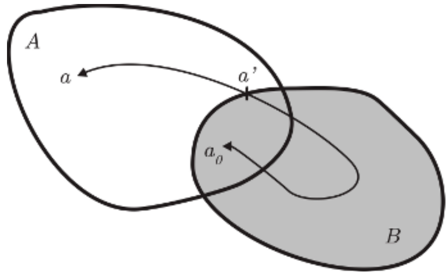
Exercice 6.19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient A et B deux parties non vides fermées de E telles que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont connexes par arcs. Montrer que A et B sont connexes par arcs.

On utilise la transitivité de la relation d'équivalence « $a \sim b \Leftrightarrow$ il existe un chemin continue reliant a à b ». Comme A et B jouent un rôle symétrique, il suffit de montrer le résultat pour A.

Soit $a_0 \in A \cap B$ (non vide car connexe par arcs). Supposons qu'il existe un élément $a \in A$ non relié par un chemin à a_0 dans A. Nécessairement $a \notin B$ car $A \cap B$ est connexe par arcs et a n'est relié à aucun élément de $A \cap B$ (si $a \underset{A}{\sim} a' \in A \cap B$ comme $a' \underset{A\cap B}{\sim} a_0$ on aurait $a \underset{A}{\sim} a_0$). $A \cup B$ étant connexe par arcs, il existe cependant un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to A \cup B$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = a_0$.

Une petite figure nous convainc (A et B étant fermées) qu'il existe $a' \in A \cap B$ relié à a, ce qui est contradictoire.



Pour prouver rigoureusement l'existence de a', considérons

$$\alpha = \sup\left\{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x],\ \gamma(t) \in A\right\}.$$

Comme A est fermé, $\gamma(\alpha) \in A$ (car si (x_n) tend vers α, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma(x_n) = \gamma(\alpha) \in A$ car A est fermé).

Mais alors $a' = \gamma(\alpha) \in B$ car sinon, $\gamma(\alpha) \in E \setminus B$ ouvert (car B est fermé) donc il existerait ε assez petit pour que $\gamma_{|[\alpha,\alpha+\varepsilon]} \subset A \setminus B$ ce qui contredit la définition de la borne supérieure.

En conclusion, tout élément $a \in A$ est relié à un élément donné $a_0 \in A \cap B$ donc tous les éléments de A sont reliés entre eux, A est connexe par arcs. On fait de même pour B.

Exercice 6.20

TPE MP 2005

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de E. Démontrer l'équivalence entre :
(i) la suite (u_k) converge dans $\mathscr{L}(E)$.
(ii) pour tout $x \in E$, la suite $(u_k(x))$ converge dans E.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On munit E de la norme infinie associée à cette base. Si $v \in \mathscr{L}(E)$, on pose $N(v) = \sum_{i=1}^{n} \|v(e_i)\|$. On observe que N est une norme sur $\mathscr{L}(E)$, car si $N(v) = 0$, alors v est nulle sur une base, donc est nulle.

• Supposons l'hypothèse (i) vérifiée. On note u la limite de la suite (u_k).

Soit $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, d'où

$$\|u_k(x) - u(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|u_k(e_i) - u(e_i)\| \leqslant \|x\|\ N(u_k - u)$$

On en déduit que $(u_k(x))$ converge vers $u(x)$ pour tout $x \in E$.

• Supposons l'hypothèse (ii) vérifiée. En particulier, pour tout i compris entre 1 et n, la suite $(u_k(e_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur noté f_i. Soit u l'endomorphisme de E entièrement défini par l'image de la base $\mathscr{B}$ en posant $u(e_i) = f_i$ pour i variant de 1 à n. On a alors $N(u_k - u) = \sum_{i=1}^{n} \|u_k(e_i) - u(e_i)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc la suite (u_k) converge vers u dans $\mathscr{L}(E)$.

Remarque
Le choix de la norme dans $\mathscr{L}(E)$ est un élément essentiel de la résolution de cet exercice.

Exercice 6.21

Mines-Ponts MP 2005

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f.

1) Montrer que si f est continue alors G_f est fermé.

2) Si f est bornée et si G_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, montrer que f est continue.

3) Le résultat du b) subsiste-t-il si f n'est pas bornée ?

1) Soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_f convergente. En particulier la suite réelle (x_n) converge. Si $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$, la continuité de f implique que la suite $(x_n, f(x_n))$ tend vers $(\ell, f(\ell)) \in G_f$ ce qui prouve que G_f est fermé.

2) Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite réelle tendant vers ℓ. Montrons que la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(\ell)$, ainsi nous aurons montré la continuité de f en ℓ.
La suite $(f(x_n))$ étant bornée par hypothèse, elle admet au moins une valeur d'adhérence $y = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})$. La suite d'éléments de G_f $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers (ℓ, y), or G_f est fermé donc $(\ell, y) \in G_f$, ce qui s'écrit $y = f(\ell)$.
La suite $(f(x_n))$ admet donc pour unique valeur d'adhérence $f(\ell)$ donc, étant bornée, converge vers cette valeur (voir ex 5.24 p.133).

3) Le résultat est mis facilement en défaut. On peut par exemple considérer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$ est un fermé mais f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.22

Mines-Ponts MP 2006 et Centrale MP 2005

Soient K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ et $C = \{u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \mid u(K) \subset K\}$

1) Montrer que C est un compact de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

2) Montrer que pour tout $u \in C$, $|\det u| \leqslant 1$.

3) *Question de la rédaction* : montrer à l'aide d'un exemple que la condition K d'intérieur non vide est nécessaire.

1) Montrons que C est borné. K est d'intérieur non vide donc il existe une boule fermée $B_f(a,r) \subset K$ avec $r > 0$. D'autre part K est compact, donc borné, il existe alors $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\| \leqslant M$, en particulier pour $x \in B_f(a,r)$. Soit $u \in C$. Si $x \in B_f(0,r)$, $x+a \in B_f(a,r)$, donc $\|u(x)\| = \|u(x+a) - u(a)\| \leqslant \|u(a)\| + \|u(x+a)\| \leqslant 2M$. Ainsi, pour tout $x \in B_f(0,1)$, $\|u(x)\| = \left\|\frac{1}{r}u(rx)\right\| \leqslant \frac{2M}{r}$. En notant $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, on a $|||u||| \leqslant \frac{2M}{r}$, et C est borné.
Montrons que C est fermé. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de C convergente vers $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ pour $|||\cdot|||$. En particulier pour tout $x \in K$, $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) = u(x)$. Or $u_p(x) \in K$ et K est fermé donc $u(x) \in K$. On en déduit que $u \in C$, donc C est fermé. Comme C est fermé et borné, c'est un compact de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

2) C est compact et l'application déterminant est continue, donc $\det(C)$ est une partie compacte, donc bornée de $\mathbb{R}$. Soit $u \in C$: $u(K) \subset K$, donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(K) \subset K$, donc $u^k \in C$, donc la suite $(\det u^k)$ est bornée. Or $|\det u^k| = |\det u|^k$, donc $|\det u| \leqslant 1$ (si $|\det u| > 1$, alors $|\det u|^k \to +\infty$).

3) La condition K d'intérieur non vide est nécessaire. Prenons par exemple $K = \{0\}$, alors $C = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, qui n'est pas borné donc pas compact.

6.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

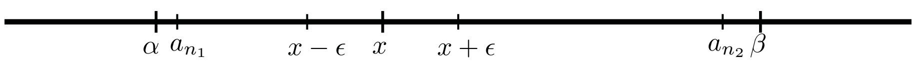
6.3.1 Exercices sur les suites numériques

Exercice 6.23

Polytechnique MP 2005

Soit $a = (a_n)_n$ une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.

Soit I l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (a_n). Montrons que I est un intervalle en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $\alpha < x < \beta$ avec $\alpha, \beta \in I$ et $x \notin I$. Soit $d = \min(x-\alpha, \beta - x)$.
On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Quitte à réduire cet ε, on peut le choisir inférieur à $\frac{d}{2}$ (en fait, c'est automatique, voir figure).



D'autre part, comme $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_{n+1} - a_n| \leqslant 2\varepsilon$.

Comme α et β sont des valeurs d'adhérence, il existe $n_1 \geqslant n_0$ et $n_2 > n_1$ tel que $|\alpha - a_{n_1}| \leqslant \varepsilon$ et $|\beta - a_{n_2}| \leqslant \varepsilon$.

$a_{n_1} \leqslant x - \varepsilon < x + \varepsilon \leqslant a_{n_2}$ avec $n_2 > n_1$ et les écarts successifs $|a_{n+1} - a_n|$ pour $n \in [\![n_1, n_2 - 1]\!]$ sont inférieur à 2ε donc il existe $n \in [\![n_1, n_2 - 1]\!]$ tel que $a_n \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ce qui est contradictoire avec $a_n \notin [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

L'exercice suivant est particulièrement utile pour déterminer les valeurs d'adhérence de suites réelles. Le lecteur est invité à utiliser les résultats de cet exercice dans les deux exercices de concours qui suivent.

Exercice 6.24

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

1) Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$. Montrer que pour tout réel $a \geqslant u_{n_0}$ il existe $n_1 > n_0$ tel que $|a - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.

2) En déduire que $\left\{ u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers **strictement croissante** $(n'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'entiers $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{n \to +\infty} \left(u_{n'_k} - v_{p_k} \right)$.

1) Considérons $n_1 = \min \{ n > n_0 \mid u_n > a \}$ (comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, cet ensemble est non vide).
– Si $n_1 > n_0 + 1$, alors $n_1 - 1 > n_0$ n'est pas dans l'ensemble donc $u_{n_1 - 1} \leqslant a < u_{n_1}$, il vient $|a - u_{n_1}| \leqslant |u_{n_1 - 1} - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.
– Si $n_1 = n_0 + 1$, alors $u_{n_0} \leqslant a < u_{n_1}$, il vient $|a - u_{n_1}| \leqslant |u_{n_1} - u_{n_0}| \leqslant \varepsilon$.
Dans tous les cas, $|a - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, il existe $n_1 > n_0$ tel que $|a - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$. Comme $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a + v_p \geqslant u_{n_1}$. A nouveau, d'après la question précédente appliquée à $a + v_p$, il existe $n > n_1$ tel que

$$|a + v_p - u_n| = \left| a - \left(u_n - v_p \right) \right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve la densité de $\left\{ u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Il suffit d'adapter la démonstration précédente. On construit les suites (n_k) et (p_k) par récurrence, de sorte que $|a - \left(u_{n'_k} - v_{p_k} \right)| \leqslant \varepsilon_k$ où $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k+1}$.
• Pour $k = 0$, il existe n'_0 et p_0 tel que $\left| a - \left(u_{n'_0} - v_{p_0} \right) \right| \leqslant \varepsilon_0$ d'après b).

- Supposons construites les suites jusqu'au rang k. On choisit alors l'indice « n_0 » du a) strictement supérieur à n'_k ce qui assure l'existence d'une entier $n'_{k+1} > n_0 > n'_k$ et un entier p_{k+1} d'après b) tel que
$$\left|a - \left(u_{n'_{k+1}} - v_{p_{k+1}}\right)\right| \leqslant \varepsilon_{k+1}.$$

Exercice 6.25

Mines-Ponts MP 2005

Montrer la densité dans $[-1, 1]$ de $\{\cos(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$.

Indication de la rédaction : on pourra utiliser l'exercice 6.24 page 158.

La suite $\{\cos(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'image par l'application cos de l'ensemble $\left\{\ln n + 2\pi p \mid (n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$.

On peut appliquer l'exercice 6.24 avec $u_n = \ln n$ et $v_p = 2\pi p$, on a bien
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$
Donc $\left\{\ln n + 2\pi p \mid (n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe a tel que $\cos a = x$. D'après ce qui précède, il existe une suite $(\ln n_k + 2\pi p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a, donc, par continuité du cosinus,
$$x = \lim_{n\to+\infty} \cos(\ln n_k + 2\pi p_k) = \lim_{n\to+\infty} \cos(\ln n_k).$$

Exercice 6.26

Mines-Ponts MP 2005

Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $n \mapsto \sin\left(\pi\sqrt{n}\right)$?

Indication de la rédaction : on pourra reprendre l'exercice 6.24 page 158.

L'ensemble $\left\{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est l'image par l'application sin de l'ensemble $\left\{\pi\sqrt{n} + 2\pi p \mid (n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$. On peut appliquer l'exercice 6.24 avec $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_p = 2\pi p$, on a bien
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{\pi}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$
Donc $\left\{\pi\sqrt{n} + 2\pi p \mid (n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Mais cela ne donne pas directement les valeurs d'adhérence. On utilise le résultat un peu plus fin de l'exercice 6.24 : pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'entiers **strictement croissante** $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite d'entiers $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\pi\sqrt{n_k} + 2\pi p_k\right)$. Montrons que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $n \mapsto \sin\left(\pi\sqrt{n}\right)$ est le segment $[-1, 1]$. L'inclusion dans $[-1, 1]$ étant évidente, considérons un $x \in [-1, 1]$. Il

existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin a$. D'après ce qui précède, il existe (n_k, p_k) tels que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n_k} + 2\pi p_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n_k}\right).$$

Donc x est une valeur d'adhérence.

6.3.2 Résultats de topologie sur les matrices

Exercice 6.27

Calcul de norme subordonnée pour la norme infinie

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on considère la norme subordonnée

$$|||A||| = \sup\left\{\frac{\|A\,X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right\}$$

où $\|\ \|_\infty$ désigne la norme infinie sur $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$, $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Montrer que $|||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right]$ (c'est-à-dire le maximum des normes $\|\ \|_1$ des colonnes de A).

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, grâce à l'inégalité triangulaire, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$|(A\,X)_k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{kj}|\right) \|X\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\right) \|\,X\|_\infty.$$

En passant au maximum, il vient $\|A\,X\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\right) \|X\|_\infty$ d'où $|||A||| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| = M$.

Construisons un vecteur X unitaire tel que $\|A\,X\|_\infty = M$. (on sait, par le cours, la sphère étant compacte en dimension finie, que la borne supérieure dans la définition de la norme subordonnée est atteinte).

Soit i_0 tel que $M = \sum_{j=1}^{p} |a_{i_0 j}|$. Ecrivons le nombre complexe $a_{i_0 j}$ sous la forme $|a_{i_0 j}|\, e^{i\theta_j}$. Posons $X = {}^t(e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_n})$. On a $(AX)_{i_0} = M$ et $\|X\|_\infty = 1$. Donc $|||A||| \geqslant \|AX\|_\infty \geqslant M$ et finalement $|||A||| = M = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

Exercice 6.28

Mines-Ponts MP 2007, 2006

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

1) Montrer l'équivalence de :

i) $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$ ii) $\rho(A) < 1$ iii) $\sum A^k$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication de la rédaction : Pour ii)⇒iii), on pourra trigonaliser et utiliser la norme subordonnée de l'exercice précédent K.

2) Montrer que dans ces conditions, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$ est un polynôme en A.

1) • iii) ⇒ i) est immédiat (le terme général A^k tend vers 0).

• Montrons i) ⇒ ii). Supposons que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$. Soit λ_0 une valeur propre de A de module maximal et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k X = \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_0^k X = 0$ donc, en considérant une coordonnée non nulle de X, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_0^k = 0$ ce qui implique que $|\lambda_0| < 1$, c'est-à-dire $\rho(A) < 1$.

• Montrons ii) ⇒ iii). On aimerait construire une norme d'algèbre telle que $\|A\| < 1$, par exemple une norme subordonnée.
Trigonalisons la matrice A. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T = (t_{ij})$, matrice triangulaire avec les valeurs propres (t_{ii}) sur la diagonale. Appelons $(C_1, \ldots, C_n)$ les vecteurs colonnes de la matrice P qui « trigonalise A ». Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et P_α la matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de colonnes $C_1, \alpha C_2, \cdots, \alpha^{n-1} C_n$, alors

$$P_\alpha^{-1} A P_\alpha = \begin{pmatrix} t_{11} & \alpha t_{12} & \alpha^2 t_{13} & & \alpha^{n-1} t_{1n} \\ & t_{22} & \alpha t_{23} & \cdots & \alpha^{n-2} t_{2n} \\ & & t_{33} & & \alpha^{n-3} t_{3n} \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & t_{nn} \end{pmatrix} = T_\alpha.$$

Choisissons $\alpha > 0$ assez petit pour que toutes les normes $\|\ \|_1$ des colonnes de T_α soient < 1 (c'est possible car tous les t_{ii} sont de module < 1). Considérons alors la norme définie par

$$|||M|||_\alpha = \sup\left\{\frac{\|P_\alpha^{-1} M P_\alpha X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right\} = |||P_\alpha^{-1} M P_\alpha|||$$

où $|||\cdot|||$ désigne la norme de l'exercice précédent). On a $|||A|||_\alpha < 1$ d'après l'expression de cette norme subordonnée donnée dans l'exercice précédent. Il s'agit bien d'une norme d'algèbre

$$(|||MN|||_\alpha = |||\left(P_\alpha^{-1} M P_\alpha\right)\left(P_\alpha^{-1} N P_\alpha\right)||| \leqslant |||M|||_\alpha |||N|||_\alpha).$$

On peut donc conclure que $\sum A^k$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2) L'ensemble $\mathbb{C}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X]\}$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc est fermé. Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} A^k$, on en déduit que cette limite est dans $\mathbb{C}[A]$.

Exercice 6.29

Petite synthèse sur la topologie de certains ensembles de matrices K

Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, denses, compacts (on pourra même chercher le cas échéant leur adhérence et leur intérieur).

1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2) l'ensemble des matrices de projecteurs.
3) l'ensemble des matrices nilpotentes.
4) l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales .
5) l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (*ENS Paris, Lyon, Cachan MP 2005, Polytechnique MP 2005* KK).
   Pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, voir l'exercice suivant exercice 6.30 p. 163.

1) On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, donc il est ouvert. Il ne peut être fermé d'après ex 5.1.4 p.118. Il est dense d'après ex 6.5 p.144 : toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire $M = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(M - \frac{1}{p} I_n\right)$ avec $M - \dfrac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour p assez grand.

2) L'ensemble $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^2 = M\}$ est fermé car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : M \mapsto M^2 - M$. Il n'est pas borné. Pour $n = 2$, $M_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $p \in \mathbb{N}$ est la matrice d'un projecteur (M_p est diagonalisable avec 0 et 1 comme valeurs propres) mais la suite (M_p) n'est pas bornée. On transpose facilement l'exemple pour $n \geqslant 2$ quelconque. Aucune matrice M de projecteur n'est un point intérieur. En effet, si $M \neq 0$, alors $M = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{p+1} M$ et $\dfrac{p}{p+1} M$ n'est pas une matrice de projecteur. Si $M = 0$, alors on peut écrire $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} I_n$.

3) On sait que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$, on a $M^n = 0$ (voir chapitre sur la réduction, par exemple en appliquant Cayley-Hamilton ou en considérant l'indice de nilpotence). Ainsi l'ensemble des matrices nilpotentes est $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^n = 0\}$. Il s'agit donc d'un fermé qui n'est pas borné (on peut considérer $M_p = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et transpo-

ser l'exemple pour $n \geqslant 2$ quelconque). Aucune matrice nilpotente M n'est un point intérieur car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et il existe une suite de matrices inversibles (M_p), donc non nilpotentes, telles que $M = \lim\limits_{p \to +\infty} M_p$.

4) $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné donc compact (voir exercice 6.4, page 144). Aucune matrice n'est point intérieur de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ car en modifiant légèrement ne serait-ce qu'un coefficient d'une matrice orthogonale, on construit aisément une matrice non orthogonale (par exemple la colonne en question n'est plus unitaire).

5) Nous avons vu dans l'exercice 6.16 page 152, que toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ était limite de matrices diagonalisables. Ainsi $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Cherchons maintenant les points intérieurs de $\mathscr{D}$. Soit $M \in \mathscr{D}$ possédant une valeur propre de multiplicité $\geqslant 2$. Montrons que M est limite d'une suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de matrices non diagonalisables. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec D diagonale et $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Considérons M_p la matrice obtenue en remplaçant A par $\begin{pmatrix} \lambda & \dfrac{1}{p} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans la matrice diagonale $P^{-1}MP$. La matrice M_p n'est pas diagonalisable (car $\mathrm{rg}(M_p - \lambda I_n) \neq n - m(\lambda)$) et la suite (M_p) tend vers M. Ainsi M n'est pas un point intérieur.

Soit maintenant $M \in \mathscr{D}$ à valeurs propres simples. Montrons que M est un point intérieur en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $(M_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de matrices non diagonalisables tendant vers M. Alors la suite des polynômes caractéristiques $\left(\chi_{M_p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ tend vers χ_M dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}_n[X]$. Comme χ_M est scindé à racines simples, il est naturel de penser que χ_{M_p} l'est également pour p assez grand. C'est un résultat de « continuité des racines » qui peut, par exemple, se démontrer à l'aide de matrices compagnons. L'hypothèse de départ est donc contredite.

Conclusion : les points intérieurs de $\mathscr{D}$ sont les matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

On peut reprendre le même argument pour le cas réel. Pour l'adhérence, le lecteur est invité à chercher l'exercice suivant.

Exercice 6.30

Centrale MP 2005 K

1) Soit P un polynôme réel non nul unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout z complexe, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$.

2) Montrer la continuité de l'application qui à une matrice carrée réelle d'ordre n associe son polynôme caractéristique.

3) On note T (resp. D, Δ) l'ensemble des matrice réelles carrées d'ordre n qui sont trigonalisables (resp. sont diagonalisables, possèdent n valeurs propres réelles distinctes). Montrer que $\overline{D} = \overline{\Delta} = T$.

1) • Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$. P peut s'écrire $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |z - \alpha_i|$ or, α_i étant réel,

$$|z - \alpha_i| \geqslant |\mathrm{Im}(z - \alpha_i)| = |\mathrm{Im}\, z|$$

donc $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$.

• Réciproquement, supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$. Si α est une racine éventuellement complexe de P, on a $0 = |P(\alpha)| \geqslant |\mathrm{Im}\, \alpha|^n$ donc $\mathrm{Im}\, \alpha = 0$, ce qui équivaut à $\alpha \in \mathbb{R}$. Toutes les racines de P sont réelles, donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

2) L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$ est continue car les coordonnées de χ_M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont des polynômes en les coefficients (m_{ij}) de M.

3) On a $\Delta \subset D \subset T$ donc $\overline{\Delta} \subset \overline{D} \subset \overline{T}$. Il nous reste donc à montrer que T est un fermé et que $\overline{\Delta} = T$.

• Montrons que T est un fermé. Soit (M_p) une suite de matrices trigonalisables convergente vers M. On sait que $\chi_{M_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_M$ et que χ_{M_p} est scindé sur $\mathbb{R}$ (condition équivalente à $M_p \in T$). D'après a), pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left|\chi_{M_p}(z)\right| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$. L'application $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ étant continue, on a par passage à la limite, $|\chi_M(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$ donc χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire M trigonalisable.

• Montrons que $\overline{\Delta} = T$. On reprend l'idée vue dans l'exercice 6.16 page 152, déjà reprise dans l'exercice 6.29 page 162. Soit $M \in T$. La matrice M est limite de matrices diagonalisables. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP = T$ soit triangulaire, et on définit une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par

$$M_p = P\left(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)\right) P^{-1}.$$

La suite M_p tend vers M et les matrices M_p sont diagonalisables pour p assez grand, car leurs valeurs propres sont toutes distintes.

7 Dérivation et intégration d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

7.1 EXERCICES D'ASSIMILATION ET D'ENTRAÎNEMENT

7.1.1 Dérivation d'une fonction à valeurs dans *E*

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n.

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to E$ et $t_0 \in I$.

• On dit que f est **dérivable** en t_0 lorsque $\displaystyle\lim_{t \to t_0, t \in I \setminus t_0} \frac{1}{t - t_0} [f(t) - f(t_0)]$ existe.

Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(t_0)$ et appelée **dérivée** de f en t_0.

• On dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

• Si $f_1, \cdots, f_n$ sont les applications coordonnées dans une base donnée $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E, alors f est dérivable en t_0 si et seulement si chacune des f_i est dérivable en t_0 et alors $f'(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i$.

Remarque

Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, la dérivée s'interprète comme le vecteur vitesse de la courbe paramétrée $t \mapsto f(t)$. Ce vecteur donne la direction de la tangente et sa norme la vitesse instantanée.

• L'ensemble $\mathscr{D}(I,E)$ des applications dérivables de I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I,E)$, et $f \to f'$ est une application linéaire de $\mathscr{D}(I,E)$ dans $\mathscr{F}(I,E)$, c'est-à-dire qu'on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

• Soit $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ telle que $f(I) \subset J$ et soit $g \in \mathscr{D}(J,E)$, alors $g \circ f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $(g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$.

• Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $g \in \mathscr{D}(I,F)$. L'application $\varphi(f,g)$ appartient à $\mathscr{D}(I,G)$ et on a $(\varphi(f,g))' = \varphi\left(f',g\right) + \varphi\left(f,g'\right)$.
On rappelle, qu'en dimension finie, toute application bilinéaire est continue.

Application : pour tous les produits classiques

Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to E$, alors $(\lambda g)' = \lambda' g + \lambda g'$.

Si $f, g : I \to E$, alors $(< f, g >)' =< f', g > + < f, g' >$ où $< \cdot, \cdot >$ désigne un produit scalaire sur un espace préhilbertien E.

Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, alors $(\mathrm{Det}(f,g))' = \mathrm{Det}(f',g) + \mathrm{Det}(f,g')$.

Si $f, g : I \to \mathbb{R}^3$, alors $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

• On peut généraliser le résultat à des applications m-linéaires. Par exemple, pour f, g et $h \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^3)$, on a :

$$(\mathrm{Det}(f,g,h))' = \mathrm{Det}(f',g,h) + \mathrm{Det}(f,g',h) + \mathrm{Det}(f,g,h').$$

• Soit $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ partout non nulle, alors $\frac{1}{g} f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $\left(\frac{1}{g} f\right)' = \frac{1}{g^2} \times \left(g f' - g' f\right)$.

• Soient $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $u \circ f \in \mathscr{D}(I,F)$ et $(u \circ f)' = u \circ f'$.
Matriciellement, cela s'écrit : $(t \mapsto MX(t))' = t \mapsto MX'(t)$ avec $X : I \to \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ représentant f et u.

On définit alors les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, on notera en particulier la **formule de Leibniz** : pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$, $g \in \mathscr{C}^k(I,F)$ et φ bilinéaire,

$$\varphi(f,g)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \varphi(f^{(p)}, g^{(k-p)}).$$

Exercice 7.1

Mouvement à accélération centrale

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$. Pour $t \in I$, on note $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$.

1) Montrer que la fonction vectorielle σ est constante.

2) Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(f(t_0), f'(t_0))$ soit libre, alors $f(I)$ est inclus dans un plan.

1) Le produit vectoriel étant une application bilinéaire, nous avons alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0.$$

La fonction vectorielle σ est donc constante.

2) Posons $\overrightarrow{a} = f(t_0) \wedge f''(t_0) \neq 0$. On a pour tout $t \in I$, $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t) = \overrightarrow{a}$. Puisque $< f(t), \overrightarrow{a} >= 0$, on a alors $f(t) \in \overrightarrow{a}^{\perp}$, et donc $f(I)$ est inclus dans le plan vectoriel $\overrightarrow{a}^{\perp}$.

Exercice 7.2

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$ et la famille $(f(t), f'(t))$ est liée. On pose $g(t) = \dfrac{1}{\|f(t)\|} f(t)$.

1) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $g'(t)$ est orthogonal et colinéaire à $g(t)$.

2) En déduire que $f(t)$ garde une direction constante.

3) Chercher un contre-exemple lorsqu'on retire la propriété : $\forall\, t \in I,\ f(t) \neq 0$.

1) Pour tout $t \in I$, $< g(t), g(t) >= 1$ donc, en dérivant, le produit scalaire étant une forme bilinéaire, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto < g(t), g(t) >) = < g'(t), g(t) > + < g(t), g'(t) >= 2 < g(t), g'(t) >= 0\,;$$

donc $g'(t)$ est orthogonal à $g(t)$. De plus, pour tout $t \in I$, $\|f(t)\|\, g(t) = f(t)$. En dérivant, il vient : $\|f(t)\|\, g'(t) + \dfrac{< f'(t), f(t) >}{\|f(t)\|} g(t) = f'(t)$. Or $f'(t)$ est colinéaire à $f(t)$ lui-même colinéaire à $g(t)$ donc $g'(t)$ est colinéaire à $g(t)$.

2) Le vecteur $g'(t)$ est colinéaire et orthogonal à $g(t)$ et comme $g(t)$ est non nul, le vecteur $g'(t)$ est donc nul. Par conséquent g est constant et donc f a une direction constante.

3) Posons par exemple, $f(t) = (-t^2, t^2)$ pour $t \in]-\infty, 0]$ et $f(t) = (t^2, t^2)$ pour $t \in [0, +\infty[$ alors $f'(t) = (\varepsilon 2t, 2t)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et on vérifie facilement que f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ (il n'y a pas de problème en 0). Pour tout $t \in I$, la famille $(f(t), f'(t))$ est liée mais f a deux directions...

Exercice 7.3

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $u \in \mathscr{L}(E)$, et $\mathscr{B} = (e_i)$ une base de E . Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}\left(x_1, \cdots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \cdots, x_n\right) = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n)\,.$$

Application : on suppose que $\varphi_1, ..., \varphi_n \ : \ I \ \to \ \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de $X' = AX$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par l'application (dite wronskien) $W \ : \ I \ \to \ \mathbb{R}$, $t \mapsto \det_{can}(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$.

Nous remarquons rapidement que l'application

$$\varphi \ : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, u(x_k), \cdots, x_n)$$

est une forme $n-$ linéaire alternée sur E , il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$, avec $\lambda = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \varphi(\mathscr{B})$. En notant $\left[m_{i,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on calcule avec la règle des déterminants par blocs :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1, \cdots, u(e_k), \cdots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & (0) & m_{k,1} & & \\ & \ddots & \vdots & & (0) \\ & & m_{k,k} & & \\ (0) & & \vdots & \ddots & \\ & & m_{k,n} & (0) & 1 \end{vmatrix} = m_{k,k}.$$

On obtient donc $\varphi(\mathscr{B}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} = \mathrm{tr}(u)$, d'où le résultat.

Pour l'application, remarquons que W est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $t \in I$, on a

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det_{can}\left(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{k-1}(t), A\varphi_k'(t), \varphi_{k+1}(t), \cdots, \varphi_n(t)\right) = \mathrm{tr}(A)\, W(t).$$

Ainsi, en résolvant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1, on trouve pour tout $t \in I$,

$$W(t) = W(t_0).\exp((t - t_0)\,\mathrm{tr}\, A).$$

Exercice 7.4

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et I un intervalle réel contenant 0. On suppose qu'il existe $X : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & X(t) \end{array} \right.$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I, \ X'(t) = AX(t) \text{ et } X(0) = I_n.$$

Montrer que pour tout $t \in I$, $X(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Analyse : supposons que pour tout $t \in I$, $X(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Posons $Y = X^{-1}$. Nous avons $YX = I_n$ donc $(YX)' = Y'X + YX' = 0$. Il vient $Y'X = -YAX$ et comme pour tout $t \in I$, $X(t)$ est inversible, on obtient :

$$\forall t \in I,\ Y'(t) = -YA, \text{ de plus, } Y(0) = I_n.$$

Synthèse : soit Y la solution du système différentiel $Y' = -YA$ avec $Y(0) = I_n$. On est bien dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Alors $(YX)(0) = I_n$ et $(YX)' = Y'X + YX' = -YAX + YAX = 0$ donc pour tout $t \in I$, $Y(t)X(t) = I_n$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $Y(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

7.1.2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

Ce qu'il faut savoir

Soit $f = (f_1, \cdots, f_n) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \cdots, \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une base de F. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F. En écrivant $f = \sum_{k=1}^{p} f_k e_k$, on définit

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f = \sum_{k=1}^{p}\left(\int_a^b f_k(t)\mathrm{d}t\right) e_k \in F.$$

Si dans cette base f a pour coordonnées $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, alors $\int_a^b f$ a pour coordonnées $\left(\int_a^b f_1, \int_a^b f_2, \ldots, \int_a^b f_p\right)$. Ce vecteur, appelé **intégrale de** f sur $[a, b]$ est indépendant de la base choisie.

Parmi les propriétés usuelles de l'intégrale, il est important de retenir que si $\|\cdot\|$ est une norme sur F, alors $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.

Exercice 7.5

Centre de gravité

Soit $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array} \right.$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ de longueur non nulle. Le centre de gravité de la courbe est le point G tel que $\displaystyle\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \overrightarrow{GM(t)} \mathrm{d}t = 0$.

1) Montrer l'existence et l'unicité de G.

2) Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle.

3) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie affine. Montrer que $\varphi(G)$ est le centre de gravité de la courbe paramétrée $\varphi \circ \gamma$.

4) *On admettra que le centre de gravité ne dépend que du support géométrique de γ.*
Montrer que si la courbe admet un axe de symétrie Δ alors $G \in \Delta$.

1) En écrivant $\overrightarrow{GM(t)} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM(t)}$, la relation est équivalente à

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t} \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \overrightarrow{OM(t)} \mathrm{d}t$$

(la longueur $\displaystyle\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t$ est supposée non nulle).

2) Dans ce cas, $M(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $[a,b] = [0,\pi]$, on a alors

$$x_G = 0 \text{ et } y_G = \frac{1}{\int_0^\pi 1 \mathrm{d}t} \int_0^\pi 1 \times \sin t \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

3) En notant $\overrightarrow{\varphi}$ la partie linéaire de φ, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(G)} &= \overrightarrow{\varphi}\left(\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \overrightarrow{OM(t)} \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\| \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O\varphi(M(t))}}{\mathrm{d}t} \right\| \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M(t))} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

car $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O\varphi(M(t))}}{\mathrm{d}t} \right\| = \left\| \overrightarrow{\varphi}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right) \right\| = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t} \right\|$.

Donc (avec $\varphi(O)$ comme autre origine) $\varphi(G)$ est le centre de gravité de $\varphi \circ \gamma$.

4) Conséquence assez immédiate : en posant $s_\Delta = \varphi$. $s_\Delta \circ \gamma$ est une autre courbe paramétrée mais possédant le même centre de gravité car cette courbe a le même support géométrique donc $s_\Delta(G) = G$ donc $G \in \Delta$.

Exercice 7.6

CCP PC 2006

On note M la fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}^+$ par $M(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |a_{ij}|$.

   a) Montrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = N(M(t))$. Déterminer pour $t \in \mathbb{R}^+$, la valeur de $\varphi(t)$. Montrer que φ est continue et de classe $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

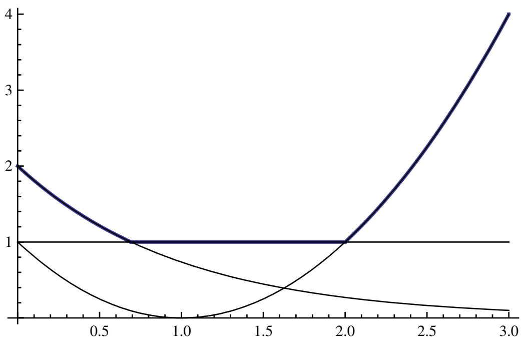
2) Soit Φ la primitive de φ qui s'annule en 0. Calculer pour $t \in \mathbb{R}^+$, la valeur de $\Phi(t)$. La fonction Φ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

3) Déterminer la primitive F de M sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0, puis montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N(F(t)) \leqslant \Phi(t)$.

1)

1.a. On vérifie sans difficulté que N est une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1.b. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $N(M(t)) = \max(2e^{-t}, (1-t)^2, 1)$.



Une étude simple de φ montre que $\varphi(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{si } t \in [0, \ln 2] \\ 1 & \text{si } t \in [\ln 2, 2] \\ (t-1)^2 & \text{si } t \in [2, +\infty[\end{cases}$. Comme $\lim\limits_{\substack{t \to \ln 2 \\ <}} \varphi(t) = \lim\limits_{\substack{t \to \ln 2 \\ >}} \varphi(t)$, φ est continue au point $t = \ln 2$. On vérifie de même de même que $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ <}} \varphi(t) = \lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ >}} \varphi(t)$ et donc φ est continue au point $x = 2$. Comme elle est continue sur chacun des intervalles $[0, \ln 2]$, $[\ln 2, 2]$ et $[2, +\infty[$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Sur chacun des trois intervalles considérés, φ est la restriction de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, $\varphi'_g(\ln 2) = -1$ et $\varphi'_d(\ln 2) = 0$, donc φ n'est pas dérivable en $\ln 2$ et n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2) En intégrant et à l'aide de la relation de Chasles, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 2(1-e^{-x}) & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 1 + (x - \ln 2) & \text{si } x \in [\ln 2, 2] \\ \dfrac{(x-1)^3}{3} + 3 - \ln 2 - \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

L'application Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ car c'est une primitive d'une fonction continue.

3) La primitive F s'annulant en 0 s'obtient en « primitivant » chaque coefficient de la matrice, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_0^x M(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^x 2e^{-t}\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^x (t-1)^2\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^x 1\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^x 0\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(1-e^{-x}) & \dfrac{(x-1)^3}{3} + \dfrac{1}{3} \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

La propriété $N(F(x)) = N\left(\displaystyle\int_0^x M(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \displaystyle\int_0^x N(M(t))\mathrm{d}t = \Phi(x)$ nous donne le résultat.

7.2 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 7.7

Dérivée d'une base orthonormale

Soient $e_1,e_2,e_3 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $t \in I$, $\mathscr{B}_t = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (base orthonormale mobile).

1) Soit M_t la matrice dans $\mathscr{B}_t$ des vecteurs dérivés $e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)$.
Montrer que M_t est une matrice antisymétrique.

2) En déduire qu'il existe un vecteur $\Omega(t)$ tel que $e'_i(t) = \Omega(t) \wedge e_i(t)$, pour $i = 1, 2$ ou 3.

3) On suppose que e_1, e_2, e_3 sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Montrer que Ω est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et calculer e''_i en fonction de Ω, Ω' et e_i.

1) Comme pour tout $t \in I$, $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ est une base orthonormale, la matrice M_t s'écrit $M_t = \left(m_{ij}\right) = \left(< e_i(t), e'_j(t), >\right)_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$. Or pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \mapsto < e_i(t), e_j(t) >\right) =< e'_i(t), e_j(t) > + < e_i(t), e'_j(t) >= 0,$$
car $< e_i(t), e_j(t) >= \delta_i^j$ est une constante. La matrice M_t est donc une matrice antisymétrique (puisque $m_{ij} = -m_{ji}$).

2) Rappelons que pour toute matrice antisymétrique réelle en dimension 3, l'endomorphisme associé ($X \mapsto MX$) peut s'écrire en utilisant le produit vectoriel :
$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} X = \omega \wedge X \text{ avec } \omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$
Appliquons cette remarque à la matrice, dans la base $\mathscr{B}_t$, de l'application linéaire M_t qui à un vecteur X de $\mathbb{R}^3$ associe $\widetilde{\Omega}(t) \wedge X$: pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\widetilde{e'_i}(t) = \widetilde{\Omega}(t) \wedge \widetilde{e_i}(t)$ et $\widetilde{e'_i}(t)$ désigne le vecteur colonne représentant e'_i dans $\mathscr{B}_t$. Ce n'est pas tout à fait ce que nous voulions.

Revenons à la base canonique. Posons $\widehat{M_t} = P^{-1}M_tP$ où $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}_t$. La matrice $\widehat{M_t}$ est elle aussi une matrice antisymétrique réelle. ($\widehat{M_t}$ est la représentation du même endomorphisme mais les coordonnées des vecteurs sont relatifs à une base fixe, la base canonique.)

De même, il existe un vecteur $\Omega(t)$ tel que la matrice de l'application $\widehat{M_t}$: $X \mapsto \Omega(t) \wedge X$ dans la base base canonique), et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $e'_i(t) = \Omega(t) \wedge \vec{e_i}(t)$.

3) On a
$$\begin{aligned} e_i{}'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t \mapsto \Omega(t) \wedge e_i(t)\Big) = \Omega' \wedge e_i + \Omega(t) \wedge (\Omega(t) \wedge e_i(t)) \\ &= \Omega' \wedge e_i + (\Omega|e_i)\Omega - \|\Omega\|^2 e_i, \end{aligned}$$
en utilisant la formule du double produit vectoriel.

Exercice 7.8

ENS Cachan MP 2005, très proche de Polytechnique MP 2007 K

Soit A de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) On suppose qu'il existe S de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe B de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = AB - BA$.

2) Réciproquement, on suppose qu'il existe B de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = AB - BA$.
Montrer que $t \mapsto \operatorname{tr} A^k(t)$ est constante pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le spectre de $A(t)$ est constant pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il existe S de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(t_0)$.

1) Appelons $A_0 = A(t_0)$. L'application $t \mapsto S^{-1}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (les coefficients sont des fractions rationnelles en les coefficients de S car $S^{-1} = \dfrac{1}{\det S}\,{}^t\operatorname{Com}(S)$) et on a

$$\left(S^{-1}S\right)' = 0 = \left(S^{-1}\right)' S + S^{-1}S' \text{ donc } \left(S^{-1}\right)' = -S^{-1}S'S^{-1}.$$

Dérivons la fonction $t \mapsto A(t) = S(t)A_0S^{-1}(t)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A'(t) = S'(t)A_0S^{-1}(t) - S(t)A_0S^{-1}(t)S'(t)S^{-1}(t) = (AB - BA)(t)$$

avec $B(t) = -S'(t)S^{-1}(t)$.

2) Bien sûr, $\operatorname{tr}(A(t))^0 = \operatorname{tr} I_n = n$ est constante. On a également

$$\operatorname{tr} A'(t) = (\operatorname{tr} A)'(t) = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0,$$

donc $t \mapsto \operatorname{tr}(A(t))$ est constante. Soit $k \geqslant 2$.

$\left[\operatorname{tr}(A^k)\right]' = \operatorname{tr}\left[(A^k)'\right] = \operatorname{tr}\left(A'\underbrace{A\cdots A}_{k-1 \text{ fois}} + AA'\cdots A + \cdots + A\cdots AA'\right)$ or la trace d'un produit est invariante par permutation **circulaire**, donc

$$\left[\operatorname{tr}(A^k)\right]' = k \operatorname{tr}\left(A'A\cdots A\right) = k \operatorname{tr}\left(A'A^{k-1}\right).$$

Simplifions,

$$\operatorname{tr}\left(A'A^{k-1}\right) = \operatorname{tr}\left((AB - BA)\,A^{k-1}\right) = \operatorname{tr}(BA^k) - \operatorname{tr}(BA^k) = 0.$$

Ainsi la fonction $\operatorname{tr}(A^k)$ est constante.

La connaissance des $\operatorname{tr}(A^k)$, $k \in [\![1, n]\!]$ permet de déterminer le polynôme caractéristique χ_A, c'est un résultat assez connu mais pas très facile ; on peut le démontrer en considérant les formules de Newton (hors-programme) qui permettent d'exprimer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines.

En s'inspirant de la première question, considérons la solution du système différentiel $S' = -BS$ avec $S(t_0) = I_n$ (on est bien dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). Montrons déjà que $AS = SA_0$. En effet,

$$(AS - SA_0)' = A'S + AS' - S'A_0 = ABS - BAS - ABS + BSA_0 = B(SA_0 - AS).$$

Posons $Y = AS - SA_0$. La fonction Y est la solution du système différentiel

$$Y' = -BY \text{ avec } S(t_0) = 0.$$

Comme l'application constante nulle est solution et que l'on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on obtient $Y = 0$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A(t)S(t) = S(t)A_0$. Montrons pour conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ est inversible. Il suffit, pour cela, de reprendre l'exercice 7.4 p.168.

Suites et séries de fonctions

8

8.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. A désigne une partie de E et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

8.1.1 Convergence des suites de fonctions

Ce qu'il faut savoir

On donne une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur A, à valeurs réelles ou complexes.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A, lorsque pour tout $x \in A$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
  En pratique, on fixe x dans A et on cherche la limite (si elle existe) de la suite numérique $(f_n(x))_n$.
- On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A lorsque la suite de terme général
  $$\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$$
  converge vers 0.
  En pratique, on commence par déterminer la limite simple f (si on a convergence uniforme vers f alors f est la limite simple de la suite), et on étudie l'écart $|f_n - f|$ sur A en le majorant par une suite qui tend vers 0, ou si cela n'est pas immédiat, en étudiant les variations de $f_n - f$.

Exercice 8.1

ICNA MP 2005

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : x \mapsto n^{\alpha} x^n (1-x)$ définie sur $[0,1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n).

- Par croissances comparées, si $x \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$ pour toute valeur de α. De plus $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $x \in [0,1]$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
- Afin d'étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions, puisqu'on ne trouve aucune majoration simple qui permet de conclure, on cherche la valeur du maximum de $f_n - f = f_n$ (fonction positive) en étudiant les variations de la fonction f_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) = n^\alpha(x^n - x^{n+1})$ et
$$f_n'(x) = n^\alpha(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = n^\alpha x^{n-1}(n-(n+1)x).$$
Donc f_n est croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$. Elle atteint son maximum en $\frac{n}{n+1}$ et
$$\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{n}{n+1}) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1} e^{-n\ln(\frac{n+1}{n})}.$$
Puisque $n\ln(\frac{n+1}{n}) = n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$, on obtient $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}$.
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$
et la suite converge uniformément (vers la fonction nulle) si et seulement si $\alpha < 1$.

Ce qu'il faut savoir

Propriétés liées à la convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur A.

- Si chacune des fonctions f_n est continue en $a \in A$, alors f l'est aussi.
- Si chacune des fonctions f_n est continue sur A, alors f l'est aussi.
- Si a est adhérent à A et si chaque fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a , alors la suite (ℓ_n) converge vers un réel ou complexe ℓ et la fonction f admet pour limite ℓ en a.
Ce résultat s'applique notamment lorsque A est un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$.

Remarque

On utilise assez fréquemment la contraposée d'une de ces propositions pour montrer qu'une suite de fonctions continues sur A ne converge pas uniformément sur A. Par exemple, on montre que la limite simple n'est pas continue sur A.

Exercice 8.2

Air MP 2005

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ une fonction f_n sur $[0, \pi]$ par $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x(1+nx)}$ si $x \neq 0$.

1) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions (f_n).

2) Soit $a \in]0, \pi[$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, \pi]$ de cette suite (f_n).

1) On a immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $x \in]0, \pi]$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
La fonction f n'est pas continue sur $[0, \pi]$. Nous allons montrer que chacune des fonctions f_n est continue sur $[0, \pi]$ ce qui prouvera que la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, \pi]$ (sinon la limite f serait continue). Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $]0, \pi]$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1 \text{ car } \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Chaque fonction f_n est donc continue sur $[0, \pi]$ et la convergence n'est pas uniforme sur $[0, \pi]$.

2) Soit $a \in]0, \pi[$. On essaie de majorer $\sup\limits_{x\in[a,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a,\pi]} |f_n(x)|$.
Or, pour tout $x \in [a, \pi]$, on a $1 + nx \geqslant 1 + na, x(1 + nx) \geqslant a(1 + na)$ et $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [a, \pi], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{a(1+na)}$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[a,\pi]} \leqslant \dfrac{1}{a(1+na)}$ de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ et la convergence est uniforme sur l'intervalle $[a, \pi]$ (on aurait également pu utiliser le fait que pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ pour obtenir une majoration $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$ si $x \in]0, \pi]$ puis $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+na}$ si $x \in [a, \pi]$).

Exercice 8.3

Mines-Ponts MP 2006

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$. Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions sur $[1, +\infty[$ puis sur les segments $[1, a]$ où $a > 1$.

On a, pour $x \geqslant 1$,

$$f_n(x) = n\left(e^{\frac{\ln x}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{\ln x}{n} = \ln x.$$

La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers la fonction f où $f(x) = \ln x$. On étudie maintenant la différence $g_n = f_n - f$:

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ g_n'(x) = n\left(\frac{1}{nx}e^{\frac{\ln x}{n}}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(e^{\frac{\ln x}{n}} - 1\right),$$

la fonction g_n' est positive sur $[1,+\infty[$, et la fonction g_n est croissante. De plus, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$. Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[1,+\infty[$.
Comme g_n est croissante et $g_n(1) = 0$, on a $\sup\limits_{x\in[1,a]} |g_n(x)| = g_n(a)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(a) = 0$ (convergence simple de f_n vers f). On a donc convergence uniforme sur tout segment $[1,a] \subset [1,+\infty[$ mais pas sur $[1,+\infty[$.

Ce qu'il faut savoir

Intégration sur un segment et primitives

1) Si une suite (f_n) de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

2) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge uniformément vers f sur tout segment de I et $a \in I$. On définit pour $x \in I$, $h_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt$ et $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. La suite (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers h.

Exercice 8.4

CCP PSI 2005

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) où $f_n(x) = \cos(xe^{-nx^2})$, et en déduire la limite de la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

On note u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = xe^{-nx^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et f_n sont définies, continues et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus u_n est impaire et par conséquent f_n est paire. On limite donc l'étude de la convergence à $\mathbb{R}^+$.

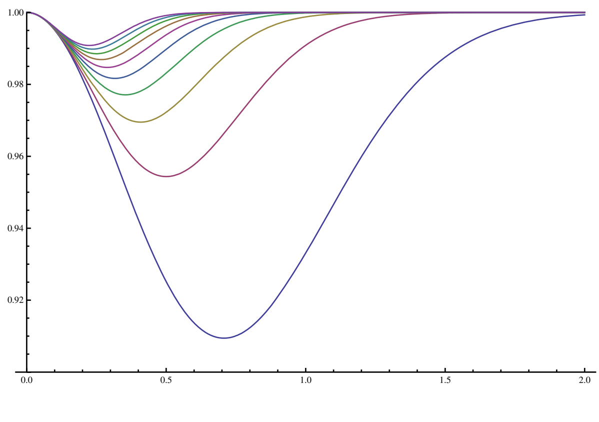
- Convergence simple : si $x > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ (suite géométrique de raison $q = e^{-x^2} \in [0,1[$). Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ par continuité de la fonction cosinus en 0. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
- Convergence uniforme : on étudie la fonction u_n sur $\mathbb{R}^+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $u_n'(x) = (1-2nx^2)e^{-nx^2}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-1/2}$	$\searrow$	0

Les valeurs de u_n se situent donc dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ sur lequel la fonction cosinus est strictement décroissante. On en déduit

$$\|f_n - 1\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-1/2}\right)$$

de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut représenter les premières fonctions :



La suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction f égale à 1. Chacune des fonctions f_n est continue sur $[0,1]$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

8.1.2 Convergence des séries de fonctions et propriétés

Ce qu'il faut savoir

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge **simplement** sur A, lorsque pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. On pose alors pour tout $x \in A$,

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge **uniformément** sur A, lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers S sur A.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge **normalement** sur A lorsque $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque importante
Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple (voir exercices 8.11 et 8.18 qui montrent que les implications réciproques sont fausses).

En pratique : on essaie d'abord de prouver la convergence normale. Pour cela, on cherche un majorant α_n de $\|f_n\|_\infty$ tel que la série numérique $\sum \alpha_n$ converge (si on ne trouve pas un majorant de manière simple, on étudie les variations de f_n).
Lorsqu'il n'y a pas convergence normale mais convergence simple de la série de fonctions, l'écart $S_n(x) - S(x)$ est égal à $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Pour établir la convergence uniforme de la série de fonctions, il faut montrer que la suite $(\|R_n\|)_\infty$ tend vers 0.

Exercice 8.5

CCP MP 2006

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha} \exp(-nx)$.

1) Déterminer, pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n^\beta u_n(x)$.

2) Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$.

3) Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $[0, 1]$?

1) Pour $x \in [0, 1]$, $|n^\beta u_n(x)| \leqslant n^{\beta-\alpha} x^n$ et, par croissances comparées, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta u_n(x) = 0$. La majoration ne donne pas toujours le résultat si $x = 1$. En revanche, on a $n^\beta u_n(1) = n^{\beta-\alpha} \exp(-n)$ et par croissances comparées, on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta u_n(1) = 0$.

2) D'après la question précédente, pour tout $x \in [0, 1]$, $u_n(x) = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

3) On peut étudier les variations de u_n ou bien constater que $u_n(x) = \frac{(xe^{-x})^n}{n^\alpha}$. En étudiant les variations de $x \mapsto xe^{-x}$, on montre que cette fonction est croissante sur $[0, 1]$ avec des valeurs allant de 0 à $1/e$. Ainsi, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \frac{e^{-n}}{n^\alpha} = \alpha_n.$$

Or $\sum \alpha_n$ converge puisque, pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{e}$$

La convergence de la série $\sum u_n$ est normale sur $[0, 1]$, quelle que soit la valeur de α.

8.1.3 Limite et continuité de la somme d'une série de fonctions

Ce qu'il faut savoir

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et a adhérent à A. Si chacune des fonctions f_n admet une limite <u>finie</u> ℓ_n en a et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors
  - la série $\sum \ell_n$ converge
  - la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet pour limite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en a.

  Ce résultat est appelé théorème de permutation des limites.
- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur A qui converge uniformément sur A alors sa somme S est continue sur A.

Ce qu'il faut savoir

Très important : aspect local de la continuité

Lorsqu'on souhaite démontrer la continuité de la somme (ou par la suite sa dérivabilité) sur un intervalle I mais qu'on n'arrive pas à démontrer la convergence normale ou uniforme sur cet intervalle, on peut restreindre l'étude à des sous-intervalles (souvent des segments) qui forment un recouvrement de I. C'est suffisant car la continuité est une propriété locale de la fonction et la continuité sur chacun des intervalles donnera celle sur leur union (quelle que soit l'union). On détecte la borne ou les bornes de I qui posent problème et on essaie de s'en écarter (voir exercices 8.6, 8.7, 8.8). En revanche, et c'est très important, la convergence uniforme ou normale sur chacun des intervalles ne donnera pas celle sur I tout entier (on ne pourra pas par exemple utiliser de théorème de permutation de limites).

Exercice 8.6

CCP MP 2007, Centrale PC 2007

1) Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.
4) Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) Montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$.

1) Chacune des fonctions u_n est définie sur $\mathbb{R}$. Si $x < 0$, la suite $(u_n(x))_n$ diverge vers $+\infty$ donc la série associée diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(0) = 1$ et la série $\sum u_n(0)$ diverge également. Si $x > 0$, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$ donc $u_n(x)$ est négligeable devant $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) La fonction u_n est décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ si bien que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$. La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour les mêmes raisons que précédemment, on a $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$. Puisque $\sum u_n(a)$ converge, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Chacune des fonctions u_n étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la somme S est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$. Le théorème de permutation des limites entraîne que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction S est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $x > y$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $S_N(x) \leqslant S_N(y)$ (S_N désigne la somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$), ce qui donne, lorsque N tend vers $+\infty$, l'inégalité $S(x) \leqslant S(y)$.

5) En écrivant $S(x) = e^{-x} + e^{-x\sqrt{2}} + \ldots$, on se doute que le terme principal lorsque x est grand va être le premier terme de la somme, à savoir e^{-x}. On va donc montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$ ou plutôt $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x S(x) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $v_n(x) = e^x u_n(x)$ pour $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = v_n(1)$ car la fonction v_n est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Puisque $v_n(1) = e^{1-\sqrt{n}} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum v_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. Chacune des fonctions v_n admet une limite finie en $+\infty$, à savoir 0 pour $n \geqslant 2$ et 1 lorsque $n = 1$. Cela permet d'écrire

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x S(x) = 1.$$

8.1.4 Intégration et dérivation d'une somme de séries de fonctions

Ce qu'il faut savoir

- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$, la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\, dt \right) = \int_a^b S(t)\, dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que
  - la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.
  - la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I

  alors la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$,

  $$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Exercice 8.7

CCP MP 2007

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. On note S la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ lorsqu'elle existe. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$. Ainsi $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction S est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, il est immédiat que S est impaire, comme chaque fonction u_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$. On remarque que $u_n'(0) = \dfrac{1}{n}$ et $\sum u_n'(0)$ diverge. De plus $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = |u_n'(0)| = \dfrac{1}{n}$. La série $\sum u_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant a$, on a $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n(1+n^2a^2)}$. La série $\sum \dfrac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge car $\dfrac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. De plus, $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, avec pour tout $x \geqslant a$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$. Cela étant vrai sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, on en déduit que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, elle l'est sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 8.8

1) Soit $r \in]-1,1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Vérifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in]-1,1[$, $g(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, déterminer une expression simple de $g'(r)$ et calculer $g(r)$ pour $r \in]-1,1[$.

3) En déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\,dx = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n\cos(nx)}{n}\,dx\right)$ ainsi que la valeur de l'intégrale.

1) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{r^n \cos(nx)}{n}$. Chacune des fonctions est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{|r|^n}{n} \leqslant |r|^n$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (puisque $|r| < 1$) ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) On note $v_n(r) = \dfrac{r^n \cos(nx)}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et pour tout $r \in]-1, 1[$, $v_n'(r) = r^{n-1} \cos(nx)$. Puisque $|v_n(r)| \leqslant |r|^n$, la série $\sum v_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$. De plus, on a $\|v_n'\|_{\infty,]-1,1[} = |\cos(nx)|$ si bien que $\sum v_n'$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$ (le fait de pouvoir s'approcher de ± 1 fait disparaître le terme géométrique). En revanche, soit $b \in]0, 1[$, on a $\|v_n'\|_{\infty,[-b,b]} = |b^{n-1} \cos(nx)| \leqslant b^{n-1}$ et $\sum v_n'$ converge normalement sur $[-b, b]$. Finalement g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-b, b] \subset]-1, 1[$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ avec, pour tout $r \in]-1, 1[$, $g'(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \cos(nx)$. Cela donne, pour un tel r,

$g'(r) = \operatorname{Re}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}(e^{ix})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{ix}}{1 - re^{ix}}\right)$, et

$$\frac{e^{ix}}{1 - re^{ix}} = \frac{e^{ix}(1 - re^{-ix})}{(1 - re^{ix})(1 - re^{-ix})} = \frac{e^{ix} - r}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

Finalement $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$. Puisque $g(0) = 0$, on obtient en intégrant, pour tout $r \in]-1, 1[$, $g(r) = -\dfrac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos x + r^2)$ (le terme dans ln reste strictement positif car il vaut $(r - \cos x)^2 + \sin^2 x$ et les deux carrés ne peuvent être simultanément nuls puisque $|r| < 1$).

3) En fixant $r \in]-1, 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}.$$

D'après la première question, on a convergence normale de la série de fonctions continues u_n sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi, \pi]$. On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n \cos(nx)}{n}\, dx\right),$$

soit le résultat demandé. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Finalement, on peut calculer la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\, dx = 0$.

Remarque
Il est important de faire attention aux différentes variables qui entrent en jeu et par conséquent de prouver les hypothèses pour la bonne variable.

8.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 8.9

CCP MP 2006

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$.

2) Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction g définie pour $x \geqslant a$ par $g(x) = \dfrac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

1) On fixe $x > 0$. L'étude de la convergence se ramène à étudier la limite de ne^{-nx} lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $x > 0$, on a $e^{-x} \in [0, 1[$ et par croissances comparées, cette limite est nulle. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On peut bien entendu étudier les variations de la fonction f_n pour $n \in \mathbb{N}$ pour en déduire $\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - 0|$. Avant de se lancer dans de tels calculs, on examine $f_n(x)$, notamment au voisinage de la borne inférieure de l'intervalle d'étude. On a $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{nx^2}{x^2} = n$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = n$ et $\sup\limits_{x>0} |f_n(x)| \geqslant n$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) On écrit, pour $x > 0$, $f_n(x) = g(x)ne^{-(n-1)x}$.
La fonction g tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées et vers 1 en 0. Puisque g est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a finalement,

$$\forall x \geqslant a, \forall n \geqslant 1, |f_n(x)| \leqslant Mne^{-(n-1)a},$$

ce qui donne la convergence uniforme de la suite de fonctions sur $[a, +\infty[$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-(n-1)a} = 0$.

Ce qu'il faut savoir

À retenir : majoration

Lorsqu'on cherche à évaluer $\|f_n - f\|_\infty$ sur un intervalle, il n'est pas toujours judicieux d'étudier les variations de la fonction $f_n - f$. C'est notamment le cas lorsque la dérivée semble assez compliquée à étudier. On essaie alors de majorer, comme dans l'exercice précédent, une partie de l'expression, en conservant à part les termes importants qui tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.10

ENSEA MP 2005, Mines-Ponts MP 2007

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ par $g_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x g_n(t-t^2)\,dt$.

1) Montrer par récurrence que pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant g_n(x) - g_{n-1}(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$.

2) En déduire que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g.

3) En encadrant $g(x) - g_n(x)$ indépendamment de x, montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

1) On commence par prouver par récurrence la propriété, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \forall x \in [0,1], 0 \leqslant g_n(x) - g_{n-1}(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

$g_1(x) - g_0(x) = \displaystyle\int_0^x dt = x$ pour tout $x \in [0,1]$, ce qui correspond à $\mathscr{P}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_n(x) &= \left(1 + \int_0^x g_n(t-t^2)\,dt\right) - \left(1 + \int_0^x g_{n-1}(t-t^2)\,dt\right) \\ &= \int_0^x \left(g_n(t-t^2) - g_{n-1}(t-t^2)\right)\,dt \end{aligned}$$

Puisque $x \in [0,1]$, on a $[0,x] \subset [0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t - t^2 \leqslant 1/4$ ($t \mapsto t - t^2$ est une fonction polynomiale de degré 2, elle s'annule en 0 et 1 et admet un maximum en $1/2$ qui a pour valeur $1/4$). D'après $\mathscr{P}(n)$,

$$0 \leqslant g_n(t-t^2) - g_{n-1}(t-t^2) \leqslant \frac{(t-t^2)^n}{n!} \leqslant \frac{t^n(1-t)^n}{n!} \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En intégrant ces inégalités de 0 à x ($x \geqslant 0$), on obtient finalement, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant g_{n+1}(x) - g_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!},$$

c'est-à-dire $\mathscr{P}(n+1)$. On obtient le résultat demandé par récurrence.

2) Soit $x \in [0,1]$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \left(g_n(x) - g_{n-1}(x)\right)$ converge. Or cette série est de même nature que la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 0}$. On obtient bien la convergence simple de la suite (g_n) sur $[0,1]$ vers une fonction g.

3) On obtient une majoration de $g(x) - g_n(x)$ en ajoutant les inégalités demandées précédemment au rang k pour k allant de n à l'infini, chacune des deux séries apparaissant étant convergente. Plus précisément, pour $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$$

Cela permet donc de majorer uniformément $|g(x) - g_n(x)|$ par le reste d'ordre n de la série convergente $\sum \frac{1}{n!}$ (de somme e). Si on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$, on a $\|g - g_n\|_\infty \leqslant r_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ comme reste d'une série convergente. On obtient bien la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (g_n).

Exercice 8.11

Comparaison de convergences - ENSEA MP 2005

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

3) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

1) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante, elle est donc bornée et majorée par son premier terme. Pour $x \in [0,1[$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant (a_0(1-x))x^n$, et la série géométrique $\sum x^n$ converge puisque $x \in [0,1[$. On en déduit que $\sum u_n(x)$

converge pour tout $x \in [0,1[$. Puisque $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n(1)$ converge. Finalement $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2) L'étude des variations sur $[0,1]$ de la fonction positive $x \mapsto x^n(1-x)$ fait apparaître un maximum en $\dfrac{n}{n+1}$, et la valeur en ce point est équivalente lorsque n tend vers $+\infty$ à $\dfrac{1}{n.e}$ (voir exercice 8.1). On obtient alors $\|u_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e}\dfrac{a_n}{n}$. On a donc convergence normale de la série sur $[0,1]$ si et seulement la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge (on utilise les critères de comparaison pour des séries à termes positifs, le coefficient $e^{-1} \neq 0$ ne changeant pas la nature de la série numérique).

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On doit évaluer $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$. On a tout d'abord $R_n(1) = 0$. Soit $x \in [0,1[$. On ne peut pas évaluer directement $R_n(x)$, mais seulement l'encadrer. Plus précisément,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant a_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = a_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = a_{n+1}x^{n+1} \leqslant a_{n+1}.$$

Cela permet d'obtenir, $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant a_{n+1}$. Si la suite (a_n) tend vers 0, la série converge bien uniformément. Si la suite a_n converge vers $\ell > 0$ (c'est la seule autre possibilité puisque la suite est positive décroissante), on doit minorer ce reste. Pour $x \in [0,1[$,

$$R_n(x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \ell x^{n+1},$$

si bien que $\displaystyle\sup_{x\in[0,1[} |R_n(x)| \geqslant \ell$. Donc $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \geqslant \ell$ et la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 8.12

Air MP 2005

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

1) On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.

Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente. Si $x \geqslant 0$, la suite $(e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (vers 0 si $x > 0$ et constante égale à 1 si $x = 0$) et positive. La suite $(\dfrac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 si bien que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0. La série $\sum u_n$ étant alternée, le critère spécial des séries alternées nous assure que la série converge lorsque $x \geqslant 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2) • Continuité : chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. La difficulté vient du fait que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = |u_n(0)| = \dfrac{1}{n+1}$, et on n'a pas convergence normale de la série de fonctions. On doit alors essayer de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ (on ne peut pas ici se contenter de la convergence normale sur les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, ce qui ne donnerait que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$). On sait toutefois que pour $x \geqslant 0$, la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On note pour $x \geqslant 0$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ (reste d'ordre n de la série). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le critère spécial des séries alternées nous permet la majoration de $|R_n(x)|$ par la valeur absolue de son premier terme, soit $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, si bien que $\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Cela montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = 0$, la convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction somme f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

• Classe $\mathscr{C}^1$: chacune des fonctions u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1} e^{-nx}$.

On peut remarquer que $u_n'(0) = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers 0. Ainsi $\sum u_n'(0)$ diverge et on n'a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}^+$ (mais cela ne prouve pas que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$). On fixe $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{n+1} e^{-na} \leqslant e^{-na}$, ce qui donne la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$. On a auparavant prouvé la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant a$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx}$. La dérivabilité s'étend à $\mathbb{R}_+^*$ puisque a est un réel strictement positif quelconque.

3) Les termes $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n+1}$ dans f' et f nous invitent à les ajouter pour les simplifier. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n+1} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ce qui donne, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'obtenir $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f(0) - \dfrac{1}{2}$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et f' admet une limite finie en 0 donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8.13

Centrale PC 2006, Mines-Ponts MP 2007, TPE PSI 2007

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit une suite de fonctions f_n par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt$.

1) Justifier l'existence de cette suite de fonctions.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, déterminer ses dérivées successives ainsi que leur valeur en a.

3) En déduire une expression de f_n à l'aide d'une seule intégrale dépendant de f.

4) Justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donner une expression de g en fonction de f.

5) Sans utiliser l'expression trouvée dans la question précédente, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants vérifiée par g, donner les solutions de cette équation et retrouver l'expression trouvée dans la question précédente.

1) f est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f_1 est la primitive de f qui s'annule en a et donc f_1 est continue et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par récurrence, on montre que f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

2) On a montré auparavant que f_n est de classe $\mathscr{C}^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n' = f_{n-1}$ et plus généralement, si $p \leqslant n$, $f_n^{(p)} = f_{n-p}$.
Chaque fonction f_n pour $n \neq 0$ est une primitive qui s'annule en a de la fonction précédente. Donc

$$f_n(a) = f_n'(a) = \cdots = f_n^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f_n^{(n)}(a) = f(a).$$

3) La formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f_n^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)\,dt$$

on en déduit que $f_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$$

Il reste à passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, x étant fixé. On note $h_n(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} f(t)$. La fonction f est continue donc bornée sur $K = [a,x]$ (ou $[x,a]$), soit M un majorant de $|f|$ sur ce segment. Alors pour tout $t \in K$, $|h_n(t)| \leqslant M|x-a|^n/n!$ et donc $\sum h_n$ converge normalement sur K. Chaque fonction h_n étant continue, cela permet de permuter somme et intégrale. Ainsi, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-t)^n}{n!}\right) f(t)\,dt$$

c'est-à-dire $g(x) = \displaystyle\int_a^x e^{x-t} f(t)\,dt = e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\,dt$.

5) La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_{n-1}. On a montré dans la question précédente que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En adaptant la démonstration précédente, on montre que $\sum f_{n-1}$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{R}$. On se place sur un segment centré en a, $K_A = [a-A, a+A]$ où $A > 0$. On note M un majorant de $|f|$ sur ce segment. Pour tout $x \in K_A$,

$$|f_n(x)| \leqslant \left| \int_a^x M \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \right| = \frac{|x-a|^n}{n!} \leqslant \frac{A^n}{n!}$$

(la fonction intégrée garde un signe fixe sur l'intervalle d'intégration, on peut donc supprimer les valeurs absolues à l'intérieur de l'intégrale). Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur K_A. On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tous les segments K_A, donc sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + g(x) = g(x) + f(x).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\big(g'(t) - g(t)\big)\, e^{-t} = f(t)e^{-t}$, relation qu'on peut intégrer entre a et $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\left[g(t)e^{-t}\right]_a^x = g(x)e^{-x} - g(a)e^{-a} = \int_a^x f(t)e^{-t}\,dt,$$

et finalement $g(x) = g(a)e^{x-a} + e^x \displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}\,dt$. Puisque $g(a) = 0$, on retrouve le résultat précédent.

8.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 8.14

Mines-Ponts MP 2006

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions.

- Convergence simple : si $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) = \exp\big((1+1/n)\ln(1+x)\big)$ et on obtient immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in \mathbb{R}^+$.
- Convergence uniforme : on étudie, pour $x \geqslant 0$,

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^{1+1/n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g_n'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + (1+1/n)\frac{1}{(1+x)^{2+1/n}} = \frac{1}{(1+x)^{2+1/n}}\left(1 + \frac{1}{n} - (1+x)^{1/n}\right).$$

Donc g_n' est positive sur $[0, (1+\frac{1}{n})^n - 1]$ puis négative. On a $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$. Donc g_n admet un maximum en $x_n = (1+\frac{1}{n})^n - 1$ en restant positive. On a donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = g_n(x_n)$ avec (on utilise dans le calcul $(1+x_n)^{1/n} = 1 + 1/n$)

$$g_n(x_n) = \frac{1}{1+x_n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{1+x_n}\,\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f sur $\mathbb{R}^+$.

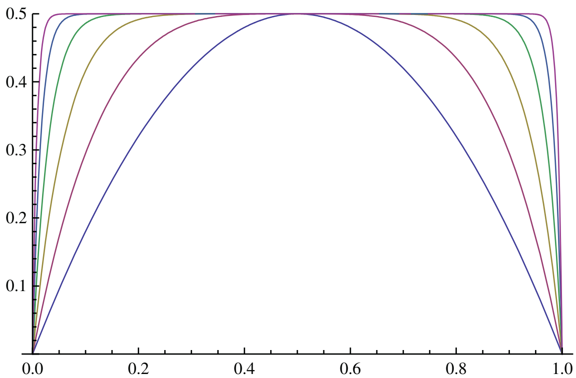
Exercice 8.15

Mines-Ponts MP 2006, Centrale MP 2007

Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2x(1-x)$. On note f_n la suite définie par $f_0 = id_{[0,1]}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = f \circ f_{n-1}$.

1) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2) Expliciter $1/2 - f_n$. Préciser la nature de la convergence de la suite (f_n).
3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui converge vers la fonction constante égale à $1/2^k$ uniformément sur tout compact de $]0, 1[$.

1) Le plus simple pour commencer est de se donner quelques idées en représentant les premières fonctions.



On constate que la suite de fonctions semble converger vers la fonction constante égale à $1/2$ sauf aux deux extrémités où la limite est nulle. On peut également représenter la fonction f. On vérifie que $f(1-x) = f(x)$ et que $f([0,1/2]) = [0,1/2] = f([0,1])$, que f est croissante sur l'intervalle $I = [0,1/2]$ et que $f(x) > x$ sur $]0,1/2[$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1/2$. On étudie alors la convergence d'une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0,1/2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ et la limite de la suite est nulle. Si $u_0 = 1/2$, la suite est constante égale à $1/2$. Si $u_0 \in]0,1/2[$, alors la suite (u_n) est strictement croissante, majorée par $1/2$, converge donc vers $\ell \in]0,1/2]$ et donc vers $\ell = 1/2$ seul point fixe de f dans cet intervalle (f est continue sur $\mathbb{R}$). Tout cela confirme ce qui a été conjecturé sur le graphique. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 1/2$ si $x \in]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 0$.

2) On évalue $1/2 - f_n$ pour les premières valeurs de n. On a

$$\frac{1}{2} - f_1(x) = \frac{1}{2}(1 - 4x(1-x)) = \frac{1}{2}(1 - 4x + 4x^2) = \frac{1}{2}(1-2x)^2,$$

$$\frac{1}{2} - f_2(x) = \frac{1}{2} - f_1(f(x)) = \frac{1}{2}(1 - 2f(x))^2 = \frac{1}{2}\left((1-2x)^2\right)^2 = \frac{1}{2}(1-2x)^4 .$$

En utilisant, la relation $1/2 - f_n(x) = 1/2 - f_{n-1}(f(x))$, combinée à la relation $1 - 2f(x) = (1-2x)^2$, on montre alors assez facilement par récurrence que $\frac{1}{2} - f_n(x) = \frac{1}{2}(1-2x)^{2^n}$. On retrouve alors les résultats de la question précédente.

En effet, si $x \in]0,1[$, on a $1-2x \in]-1,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/2 - f_n(x) = 0$ (suite géométrique). En revanche $1/2 - f_n$ est égale à $1/2$ en 0 et 1. La convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$ puisque chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$ (par composition de fonctions continues) alors que f ne l'est pas. Soit $I_a = [a, 1-a]$ où $a \in]0,1/2[$. Lorsque $x \in I_a$, on a $1-2x \in [-(1-2a),(1-2a)] \subset]-1,1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I_a$, on a $|\dfrac{1}{2} - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}(1-2a)^{2^n}$. Donc $\|1/2 - f_n\|_{\infty, I_a}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite de fonctions f_n converge uniformément vers $1/2$ sur les segments I_a et donc sur tous les compacts de $]0,1[$ (un tel compact est inclus dans un segment I_a).

3) Soit K un compact de $]0,1[$. La suite (f_n) est une suite de polynômes qui converge uniformément vers $1/2$ sur K. On remarque que la suite (f_n^k) converge au moins simplement vers la fonction constante égale à $1/2^k$ sur K. Pour prouver la convergence uniforme, il suffit de prouver le résultat suivant : si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur K vers des fonctions bornées respectivement f et g alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg sur K. En effet $\|f_n\|_\infty$ converge vers $\|f\|_\infty$ et cette suite est bornée. Alors

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty,\end{aligned}$$

de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. En appliquant ce résultat à f_n^k, on obtient la réponse souhaitée.

Remarque
À l'aide de ce résultat, on peut montrer que tout fonction continue sur un segment $K \subset]0,1[$ est limite uniforme d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 8.16

Mines-Ponts MP 2006, Centrale MP 2007K

On considère E l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels définies sur $[0,1]$ de degré au plus n . Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0,1]$. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On définit $N(P) = \sup\limits_{i\in[\![0,n]\!]} |P(a_i)|$ et $\|P\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

1) Montrer que N et $\|\ \|_\infty$ sont deux normes sur E.

2) Montrer que ($\forall i = 0\ldots n$, la suite $(P_k(a_i))$ converge) si et seulement si ((P_k) converge dans E pour la norme $\|\ \|_\infty$).

3) Montrer que ($\forall i = 0\ldots n$, la suite $(P_k(a_i))$ converge) si et seulement si la suite de fonctions (P_k) converge simplement sur $[0,1]$.

4) Montrer que dans ce cas, la fonction limite est un polynôme de E et que ses coefficients sont limites des coefficients des P_k.
Indication : on pourra introduire la norme N_2 définie par

$$N_2(P) = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k| \quad \text{lorsque} \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1) Si $N(P) = 0$, alors la fonction P possède au moins $n+1$ racines distinctes et donc P est nulle. Toutes les autres propriétés se vérifient facilement.

2) La difficulté est de relier le comportement en un nombre fini de valeurs à celui sur tout le segment. Pour cela, on utilise les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \ldots, a_n$. On note $L_0, \cdots, L_n$ ces polynômes d'interpolation. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} P_k(a_i)L_i$. On note ℓ_i la limite de la suite $(P_k(a_i))$ pour tout $i \in [[0,n]]$, et $L = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \ell_i L_i$. Le fait que, pour tout $i \in [[0,n]]$, la suite $(P_k(a_i))$ converge vers ℓ_i est équivalent à la convergence de la suite (P_k) vers L pour la norme N. Puisque E est de dimension finie, cela équivaut à la convergence pour la norme $\|\ \|_\infty$ car toutes les normes sur E sont équivalentes. De façon plus élémentaire, on peut majorer $\|P_k - L\|_\infty$ par $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} |P_k(a_i) - \ell_i|\, \|L_i\|_\infty$, ce qui donne le premier sens de l'implication. L'implication réciproque est immédiate puisque, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $|P_k(a_i) - \ell_i| = |P_k(a_i) - L(a_i)| \leqslant \|P_k - L\|_\infty$.

3) D'après la question précédente, si chacune des suites $(P_k(a_i))$ converge vers un réel ℓ_i alors la suite (P_k) converge uniformément vers un polynôme de E et donc simplement. Réciproquement, si (P_k) converge simplement sur $[0,1]$, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, la suite $(P_k(a_i))$ converge.

4) La norme proposée est bien entendu une norme (cela se vérifie aisément). On a vu qu'avec les hypothèses précédentes, la suite (P_k) converge pour les normes N et $\|\ \|_\infty$ vers le polynôme L. De nouveau par équivalence des normes, la suite (P_k) converge vers L pour la norme N_2. La limite est donc un polynôme et chacune des suites des coefficients converge vers le coefficient correspondant de L (le coefficient de degré p de $P_k - L$ est majoré en valeur absolue par $N_2(P_k - L)$).

Exercice 8.17

Centrale MP 2006

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.

2) À l'aide d'encadrement par des intégrales, montrer que la série ne converge pas uniformément sur les segments $[0, b]$ où $b > 0$.

1) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, b]$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{1+n^2a^2} = v_n$. On a $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{a^2n^2}$, terme général d'une série positive convergente. Donc la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. Chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la somme S est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}(x) = f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) = u_n(x),$$

soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$. On somme ces relations pour n allant de $p+1$ à N, on obtient

$$\int_{p+1}^{N+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{n=p+1}^{N} u_n(x) \leqslant \int_p^N f(t)\,dt,$$

avec, si $0 < a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \operatorname{Arctan}(xb) - \operatorname{Arctan}(xa)$. Donc, après passage à la limite sur N,

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}((p+1)x) \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(px)$$

Enfin, avec la relation $\pi/2 - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 1/x$ si $x > 0$, on obtient l'encadrement suivant pour le reste d'ordre p de la série $\sum u_n$, qu'on note $R_p(x)$:

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{(p+1)x} \leqslant R_p(x) \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{px}$$

On a notamment $\operatorname{Arctan}\dfrac{p}{p+1} \leqslant R_p(1/p) \leqslant \operatorname{Arctan} 1$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} R_p(1/p) = \pi/4$. Puisque $1/p \in [0, b]$ si p est suffisamment grand et que, par conséquent, la suite $(\|R_p\|_{\infty,[0,b]})$ ne converge pas vers 0, la convergence ne peut pas être uniforme sur un segment $[0, b]$.

Exercice 8.18

TPE MP 2005

Pour $n \geqslant 2$, on définit une fonction f_n sur $I = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On notera f la somme de cette série de fonctions.

2) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$ mais pas sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

4) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0 à droite.

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k f(x) = 0$.

1) On a $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge. Pour $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{\ln 2}(e^{-x})^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $e^{-x} \in]0, 1[$. On a bien convergence simple de la série sur I.

2) On étudie les variations de f_n sur I. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx}{\ln n} e^{-nx}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{en\ln n}$	$\searrow$	0

La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge (voir exercice 4.15, page 81 sur les séries de Bertrand). On se donne maintenant $a > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $1/n < a$. Alors, d'après le tableau de variations, pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$. Comme $\sum f_n(a)$ converge, on obtient la convergence normale de la série sur $[a, +\infty[$.

3) On cherche à majorer uniformément $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, pour $n \geqslant 2$. Pour tout $n \geqslant 2$, $R_n(0) = 0$. On se donne $x > 0$, alors

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

Le terme $\ln(n+1)$ est intéressant pour la majoration. Il reste en revanche à majorer indépendamment de x l'autre facteur. Une majoration $\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \dfrac{x}{1-e^{-x}}$ est trop forte (limite infinie en $+\infty$). On peut conserver e^{-x} afin de compenser x. Alors $\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{x}{e^x-1} = \varphi(x)$. Or φ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers 1 en 0 et vers 0 en $+\infty$. On peut alors en déduire que φ est bornée sur I (on pourrait également étudier les variations). Soit M un majorant de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a finalement, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et cette majoration est valable en 0. Donc $\|R_n\|_{\infty,I} \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$, ce qui donne la convergence uniforme sur I.

4) Pour tout $n \geqslant 2$, f_n est continue sur I. La convergence uniforme sur I permet de conclure quant à la continuité de f sur I. De plus f_n est dérivable sur I, avec $f_n'(x) = \dfrac{1-nx}{\ln n}e^{-nx}$. Puisque $f_n'(0) = 1/\ln n$, la série $\sum f_n'(0)$ diverge. Il n'y a donc aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur I. La majoration n'est pas immédiate sur un intervalle $[a,+\infty[$ (on majore facilement e^{-nx} par e^{-na} mais l'autre facteur n'est pas majoré). On se place sur un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1+nb}{\ln n}e^{-na}$ et $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ a le même majorant. Par croissances comparées, on a $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série des dérivées est donc normalement convergente sur $[a,b]$. Les autres hypothèses étant réunies, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la même méthode que pour la convergence uniforme, on peut considérer la série $\sum g_n$ avec $g_n(x) = x^k f_n(x)$. On majore alors uniformément le reste de cette série par $M_k/(\ln(n+1))$ où M_k est un majorant sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\varphi_k : x \mapsto x^k\varphi(x)$ (il existe pour les mêmes raisons, à savoir fonction continue avec des limites aux bornes de l'intervalle). On obtient alors la convergence uniforme sur I de la série de fonctions. Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$, on peut permuter somme et limite et obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

Exercice 8.19

Mines-Ponts MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

1) Prouver l'existence, pour tout $x > 0$ de $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

2) Montrer l'existence d'une constante γ telle que

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Puisque $f_n(x) > 0$ si $x > 0$, on va plutôt étudier $g_n(x) = \ln f_n(x)$, cela permet de transformer les produits en somme. Soit $x > 0$. Pour étudier la convergence de la suite $(g_n(x))$, on étudie la convergence de la série de terme général $(g_n(x) - g_{n-1}(x))$. Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$,

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_{n-1}(x) &= \ln(f_n(x)/f_{n-1}(x)) = \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^x \frac{n}{x+n}\right) \\ &= x\ln\frac{n}{n-1} - \ln(1+\frac{x}{n}) \\ &= -x\ln(1-\frac{1}{n}) - (\frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2})) \\ &= \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Par critère de comparaison, la série de terme général $(g_n(x) - g_{n-1}(x))$ est absolument convergente, donc convergente et la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie $\ell(x)$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\exp(\ell(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note cette limite $\Gamma(x)$.

2) On essaie de faire apparaître les termes demandés. On a

$$\frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) = x\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}\right)$$

ce qui donne, pour $x > 0$, $\ln f_n(x) = x\ln n - \ln x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x}{k})$. On ajoute les termes nécessaires pour obtenir la série demandée :

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x\ln n - \ln x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} \\ &= -\ln x - x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right) \end{aligned}$$

un développement simple de $\ln(1+x/k) - x/k = O(1/k^2)$ prouve la convergence de la seconde série. Pour prouver la convergence de $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$, on peut se rapporter à l'exercice 4.16, ou utiliser l'étude de la convergence précédente avec $x = 1$, car

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(\frac{k+1}{k})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \ln(1+1/n)\end{aligned}$$

soit prouver directement la convergence de cette suite en trouvant un équivalent du terme général de la série $\sum(v_n - v_{n-1})$. On note alors γ la limite de cette suite (v_n). On obtient en passant à la limite et en utilisant la continuité du logarithme ln sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

3) On va bien entendu étudier $\ln\circ\Gamma$ en utilisant la relation précédente, pour ensuite conclure sur la classe $\mathscr{C}^1$ de Γ en composant avec la fonction exponentielle. La fonction $x \mapsto -\ln x - \gamma x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il reste donc à étudier la classe de la série de fonctions $\sum h_n(x)$ avec, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln(1+\dfrac{x}{n})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Chaque fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on dispose déjà de la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$,

$$h_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)}$$

Cette série de fonctions converge normalement sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ puisque pour tout $x \in [a,b]$, $|h_n'(x)| \leqslant \dfrac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$. Le théorème de dérivation permet de conclure quant à la classe $\mathscr{C}^1$ de la somme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8.20

Centrale PSI 2005

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{n^2+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum(-1)^n f_n(x)$ est une série alternée. Il est nécessaire de montrer la décroissance de la suite $(f_n(x))_n$ vers 0. On étudie la fonction $h : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+x^2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée vérifiant $h'(t) = \dfrac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$. Ainsi h' est décroissante sur $[|x|, +\infty[$ et la série vérifie bien le critère spécial des séries alternées (à partir d'un certain rang seulement, mais c'est suffisant).

Le calcul des premières dérivées de f_n ne fait pas apparaître de formule simple, si on a l'intention d'obtenir une majoration pour une convergence normale. On décompose alors en éléments simples : on cherche des complexes a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{n}{(x+in)(x-in)} = \frac{a}{x+in} + \frac{b}{x-in}.$$

On trouve alors $a = i/2$ et $b = -i/2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+in} - \frac{1}{x-in}\right).$$

On note $u_n(x) = 1/(x+in) = (x+in)^{-1}$ toujours pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On va prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathscr{P}(p) : f \text{ est de classe } \mathscr{C}^p \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n^{(p)}(x).$$

Il ne faut pas oublier de mettre la formule pour $f^{(p)}$ dans l'hypothèse de récurrence car le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^p$ ne garantit pas du tout que $f^{(p)}$ est la somme des dérivées d'ordre p de $(-1)^n f_n$.

On calcule ses premières dérivées : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n'(x) = -1(x+in)^{-2}, u_n''(x) = (-1)(-2)(x+in)^{-3}\dots$$

et une récurrence assez rapide permet de prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n^{(p)}(x) = (-1)^p\frac{p!}{(x+in)^{p+1}},$$

ainsi que $|u_n^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{p!}{n^{p+1}}$. Cela permet alors d'obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{2p!}{n^{p+1}}$. Cela donne la convergence normale de la série des dérivées d'ordre p sur $\mathbb{R}$, dès que $p \geqslant 1$.
On peut alors montrer le résultat par récurrence.

- On a $\mathscr{P}(1)$: la série $\sum(-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, chaque fonction $(-1)^n f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\sum(-1)^n f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n'$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(p)$. Alors la série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, $\sum(-1)^n f_n^{(p)}$ converge au moins simplement sur $\mathbb{R}$ et sa série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cela permet d'appliquer le théorème de dérivation à $\sum(-1)^n f_n^{(p)}$ et d'en déduire $\mathscr{P}(p+1)$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$.

Conclusion : par récurrence, on a prouvé le résultat demandé : f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Séries entières 9

9.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit u_n la fonction de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$ définie par $u_n(z) = a_n z^n$ (resp. $u_n(x) = a_n x^n$). La série de fonctions de terme général u_n est appelée **série entière** à variable complexe (resp. réelle) de coefficients a_n. Par abus de langage on notera cette série « la série entière $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) ».

9.1.1 Rayon de convergence

Ce qu'il faut savoir

Il existe un unique nombre $R \in [0, +\infty]$, appelé **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$, tel que l'on ait le tableau suivant :

$\lvert z\rvert < R$	$\lvert z\rvert > R$
La série de terme général $a_n z^n$ converge absolument	La série de terme général $a_n z^n$ ne converge pas absolument
La série de terme général $a_n z^n$ converge	La série de terme général $a_n z^n$ diverge
La suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0	La suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0
La suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée	La suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée

$\lvert z\rvert = R$: Il peut se passer n'importe quoi

• **Résultats pratiques pour déterminer le rayon de convergence**

1) **Règle de d'Alembert pour les séries entières**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si

(i) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $a_n \neq 0$

(ii) la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ tend vers $\ell \in [0, +\infty]$,

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

Remarque

On ne peut pas appliquer directement la règle de d'Alembert telle qu'on vient de la citer, à des séries entières dites *lacunaires* c'est-à-dire où une infinité de termes a_n s'annulent.

Cependant dans le cas de série du type $\sum b_n z^{p_n}$ où (p_n) est une suite strictement croissante de nombres entiers positifs et (b_n) est une suite de nombres complexes non nuls, on pourra essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la **série numérique** de terme général $u_n(z) = b_n z^{p_n}$. Nous allons voir plusieurs exemples dans les exercices .

Mise en garde

– La règle de d'Alembert n'est pas toujours applicable, par exemple lorsque la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ n'a pas de limite.

– Le fait que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R n'implique pas que la suite $\left(|a_{n+1}|/|a_n|\right)$ converge vers $1/R$.

2) **Comparaison des rayons de convergence de deux séries entières**

Cette méthode est très utile. En effet, elle permet de se ramener à des séries entières dont on connaît déjà le rayon de convergence ou auxquelles on peut, par exemple, appliquer la règle de d'Alembert.

Plus précisément, soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

– La série entière $\sum |a_n| z^n$ a pour rayon de convergence R_a ; autrement dit, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence .

– Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

– Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.

– Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Dans les deux derniers cas, on a seulement une inégalité entre les rayons de convergence. Pour obtenir l'inégalité inverse, on utilisera souvent la partie droite du tableau précédent : par exemple, quand une série entière de rayon R ne converge pas en un point $|x_0|$, ou quand la suite $a_n x_0^n$ ne converge pas vers 0, alors $R \leqslant |x_0|$.

• **Deux séries de référence**

Série géométrique Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La série entière $\sum \lambda^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1/|\lambda|$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1/|\lambda|$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = \frac{1}{1 - \lambda z}$.

Série exponentielle La série entière de terme général $z^n/n!$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

• **Rayon de convergence de la somme de deux séries entières**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est tel que $\begin{cases} R = \min(R_a, R_b) & \text{si } R_a \neq R_b \\ R \geqslant R_a & \text{si } R_a = R_b \end{cases}$

et si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

• **Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières**

Le rayon de convergence R de la série entière produit, de coefficients $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est tel que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et, si $|z| < \min(R_a, R_b)$,

on a alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.

• **Série dérivée et série primitive d'une série entière**

On appelle **série primitive (resp. dérivée)** de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière $\displaystyle\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ (resp. $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$).

Ces trois séries entières ont le même rayon de convergence.

Exercice 9.1

CCP MP 2006 et Mines - Ponts MP 2006 et 2005

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière $\sum a_n x^n$ converge (resp. converge absolument) dans les quatre cas suivants :

a) $a_n = \sin n$; *b)* $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$; *c)* $a_n = \dfrac{i^n n^2}{n^2 + 1}$; *d)* $a_n = \sin \dfrac{1}{n^2}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leqslant 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc supérieur ou égal à celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$.

Par ailleurs, on montre par l'absurde que la suite (a_n) ne converge pas vers 0. Si c'était le cas alors, il résulterait de l'égalité $a_{n+1} - a_{n-1} = 2\sin 1 \cos n$ que la suite $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, et donc que la suite $(\cos^2 n + \sin^2 n)$ convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible.

On en déduit que $R \leqslant 1$. Finalement on a $R = 1$. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| \geqslant 1$. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\, 1[$.

b) On a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, et la série entière étudiée a même rayon de convergence que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n}$, qui est de rayon de convergence 1. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| > 1$.

Lorsque $x = 1$, il résulte de l'équivalent précédent que la série de terme général $\ln(1 + 1/n)$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Lorsque $x = -1$, il résulte de la croissance de la fonction logarithme que la suite $(\ln(1+1/n))$ est décroissante. Par ailleurs puisqu'elle est équivalente à $(1/n)$, la suite $(\ln(1 + 1/n))$ converge vers 0. Alors il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + 1/n)$ converge, mais elle ne converge pas absolument. Donc $\mathscr{A} =]-1,\, 1[$ et $\mathscr{C} = [-1,\, 1[$.

c) On a $|a_n| < 1$. La série entière $\sum a_n x^n$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de la série $\sum x^n$, donc $R \geqslant 1$. Par ailleurs, la suite $(|a_n|)$ converge vers 1, donc ne converge pas vers 0. On en déduit donc que $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| \geqslant 1$. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\, 1[$.

d) Lorsque n tend vers l'infini, on a $\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, et donc $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$. Donc la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ converge vers $\ell = 1$. Il résulte du critère de d'Alembert que $R = 1/\ell = 1$. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| > 1$.

Lorsque $|x| = 1$ et $n \geqslant 1$, on a $|a_n x^n| = \sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} = [-1,\, 1]$.

Exercice 9.2

TPE 2006

Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum n!z^n$ *b*) $\sum n!z^{n^2}$ *c*) $\sum z^{n!}$

a) Posons $a_n = n!$, on a $a_{n+1}/a_n = n+1$. La suite (a_{n+1}/a_n) a pour limite $+\infty$. D'après le critère de d'Alembert on a $R = 0$. Le domaine de convergence est donc $\{0\}$.

b) Posons $u_n(z) = n!z^{n^2}$. Alors $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = (n+1)|z|^{2n+1}$.

On utilise la règle de d'Alembert pour la série numérique de terme général $u_n(z)$. La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ converge vers 0 si $|z| < 1$, donc la série de terme général $u_n(z)$ converge absolument dans ce cas. On en déduit que $R \geqslant 1$. La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ admet $+\infty$ pour limite si $|z| > 1$, donc la série ne converge pas absolument dans ce cas. On en déduit que $R \leqslant 1$. Finalement on obtient $R = 1$. Lorsque $|z| = 1$, on a $|u_n(z)| = n!$, et la suite $(u_n(z))$ ne converge pas vers 0, donc la série de terme général $u_n(z)$ diverge. Alors le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

c) Posons $u_n(z) = z^{n!}$. On a $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = |z|^{(n+1)!-n!} = |z|^{nn!}$. Et l'on conclut comme dans b.

Voilà un résultat à connaître, c'est la première question de nombreux problèmes d'écrit et d'exercices d'oraux

Exercice 9.3

CCP PC 2006, Centrale MP 2006

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < R$, et $z \in \mathbb{C}$. La suite $(|a_n|\alpha^n)$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors $\dfrac{|a_n|}{n!}|z|^n \leqslant M\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|z|}{\alpha}\right)^n$ et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|z|}{\alpha}\right)^n$ est une série convergente (série de l'exponentielle), on en déduit que la série de terme général $a_n z^n/n!$ converge absolument. La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a donc un rayon de convergence infini.

Exercice 9.4

1) Montrer que si la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors la série entière $\sum a_n z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R}$.

2) Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, et que, si $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

1) La série de terme général $a_n z^n$ converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$. Donc la série de terme général $a_n (z^2)^n$ converge si $|z|^2 < R$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt{R}$ et diverge si $|z|^2 > R$, c'est-à-dire si $|z| > \sqrt{R}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ est donc $\sqrt{R}$.

2) D'après 1), la série $\sum a_{2n} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_1}$, et la série $\sum a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_2}$, donc la série $z \sum a_{2n+1} z^{2n}$ est aussi de rayon de convergence $\sqrt{R_2}$.
Alors, lorsque $R_1 \neq R_2$, la série $\sum a_n z^n$ qui est la somme des séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $z \sum a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$.
Lorsque $R_1 = R_2$, on sait déjà que $R \geqslant \sqrt{R_1}$.
Soit alors $|z| > \sqrt{R_1}$. La suite $(a_{2n} z^{2n})$ ne converge pas vers 0. Alors la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas non plus vers 0, et il en résulte que $R \leqslant \sqrt{R_1}$. On a donc encore égalité dans ce cas, et pour tout $|z| < R$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$.

9.1.2 Fonction définie par la somme d'une série entière

Ce qu'il faut savoir

Soit une série entière de coefficients a_n et de rayon de convergence non nul R.

- La série entière $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ et la fonction S définie sur D par $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue sur D.

• La série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$ et l'on a
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx\right).$$

• On définit sur $]-R, R[$ une fonction S en posant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, en dérivant terme à terme, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$
Toutes ces séries entières ont le même rayon R.

Exercice 9.5

CCP PSI 2007

Montrer que la fonction $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On peut comparer à la série de l'exponentielle, en remarquant que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \leqslant \frac{1}{n!}$. Il en résulte que la série entière définissant g a aussi un rayon de convergence infini. (On pourrait également utiliser la règle de d'Alembert).
Il en résulte que g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque
On voit sur cet exemple l'intérêt d'utiliser les séries entières plutôt que les séries de fonctions : si l'on avait voulu démontrer, dans le chapitre précédent, que la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ était de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on aurait démontré que, pour tout entier p et tout nombre $A > 0$, la série des dérivées $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[-A, A]$, alors que maintenant, le fait que la série entière ait un rayon de convergence infini suffit.

Exercice 9.6

CCP MP 2006

Montrer que $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$.

La série entière $\sum x^n$ est une série géométrique de rayon 1. Comme $[0, 1/2]$ est inclus dans $]-1, 1[$, on a donc

$$\ln 2 = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{1/2} x^n dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}.$$

9.1.3 Développement d'une fonction en série entière

Ce qu'il faut savoir

• **Fonctions développables en série entière**

Soient f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle I, et r un nombre réel positif tel que $]-r, r[\subset I$.

– On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que, pour tout $x \in]-r, r[$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

– Dans ce cas, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, et les coefficients a_n sont déterminés de manière unique par la formule $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

> **Remarque**
> Toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ n'est pas nécessairement développable en série entière sur $]-r, r[$.

– Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors :
(i) la fonction f' est développable en série entière sur $]-r, r[$, et, pour tout $x \in]-r, r[$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$;
(ii) toute primitive F de f dans l'intervalle $]-r, r[$ admet un développement en série entière sur $]-r, r[$ de la forme $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$.

– Si f et g sont développables en série entière sur $]-r, r[$, alors $f+g$ et fg sont développables en série entière sur $]-r, r[$.

• **Développement en série entière des fonctions usuelles**

(i) Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xz)^n}{n!} \quad \text{où } z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

(ii) Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $]-1, 1[$ et l'on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} .$$

(iii) Série du binôme.
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n .$$

(iv) On pourra retenir aussi que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

• **Quelques méthodes pour développer une fonction f en série entière**
(i) On exprime la fonction f à l'aide de fonctions dont le développement en série entière est connu, par des opérations de somme, produit de Cauchy, dérivation ou primitivation, en utilisant éventuellement un changement de variable.
Lorsque la fonction f contient un sinus, cosinus, sinus hyperbolique ou cosinus hyperbolique, on pourra exprimer ces fonctions sous forme exponentielle.
(ii) On montre que f est solution d'une équation différentielle linéaire, puis on cherche la solution de cette équation développable en série entière et vérifiant les mêmes conditions initiales que f.

Exercice 9.7

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{2-x}$ et préciser le rayon de convergence.

Pour $x < 2$, on a $f(x) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2}$. On se ramène donc à la série du binôme et on obtient une série entière de rayon de convergence 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \frac{1}{2^n} (-1)^n x^n\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{2n} n!} x^n\right) . \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le produit $2{\cdot}4\cdots(2n-2)(2n-1)(2n) = 2^n n!(2n-1)$, on peut encore écrire

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{3n}(n!)^2}\, x^n\right).$$

Exercice 9.8

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \cos(x+1)$ et préciser le rayon de convergence.

On écrit $f(x) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1$, d'où l'on déduit, pour tout x réel, puisque les séries sont de rayon de convergence infini,

$$f(x) = \cos 1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a donc

$$\cos(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ , avec } a_{2n} = (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\sin 1}{(2n+1)!}.$$

Exercice 9.9

CCP MP 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{-x^2 + x + 2}$.

1) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2-x}\right)$.

2) Développer la fonction f en série entière et préciser le rayon de convergence.

3) Quel est le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?

1) On vérifie facilement en réduisant au même dénominateur ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples que

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2}\right).$$

2) Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme aura 1 comme rayon de convergence. Alors, pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

3) La partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction f n'est autre que la somme partielle d'ordre 3 de la série, donc

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{3}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + o(x^3) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)\,.$$

Exercice 9.10

CCP et Mines-Ponts MP 2005

1) Développer la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$ en série entière et préciser le rayon de convergence .
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation

$$\frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}.$$

1) Exprimons $\sin x$ sous la forme $(e^{ix} + e^{-ix})/(2i)$. On a alors pour tout x réel

$$f(x) = \frac{1}{2i}(e^{(i+1)x} - e^{(-i+1)x}) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n x^n}{n!}\right).$$

On obtient alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i}\,\frac{x^n}{n!}$.

Et, puisque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, on a $\dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4)$, et finalement $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{2}^n \sin(n\pi/4)\,\frac{x^n}{n!}$. La série entière est donc de rayon infini.

2) Appliquons la formule du produit de Cauchy à $e^x \sin x$. Si l'on note a_n les coefficients de la série entière de $\sin x$, le coefficient b_n de x^n dans le produit est alors $b_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p \frac{1}{(n-p)!}$. Mais a_p est nul si p est pair et $a_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)!$.

On obtient donc $b_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$. Mais on a obtenu dans 1) $b_n = \dfrac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}$, ce qui donne l'égalité désirée.

Exercice 9.11

En effectuant un produit de Cauchy, développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{1+x}$ et préciser le rayon de convergence.

On effectue le produit de Cauchy des séries de rayon 1 :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

On obtient donc une série de rayon $R \geqslant 1$, et, pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{\ln(x+1)}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^{n-k}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

Puisque la série de terme général $1/n$ diverge, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ admet $+\infty$ pour limite, et la série entière obtenue diverge donc si $x = 1$. Il en résulte que $R \leqslant 1$. Cela résulte également du fait que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Finalement $R = 1$.

Exercice 9.12

CCP PC 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2) Etablir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3) Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

1) La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont développables en série entière de rayon infini. Alors la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ l'est aussi comme primitive d'une fonction développable en série entière de rayon infini. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions développables en série entière de rayon infini.

2) La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - 2xf(x)$, avec de plus $f(0) = 0$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

On obtient $f'(x) + 2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}2a_n x^{n+1}$. En faisant le changement d'indice de sommation $n \mapsto n-1$ dans la deuxième somme, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}2a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

Comme la somme de cette série entière est égale à 1, l'égalité précédente implique l'égalité des coefficients des deux séries entières. On a donc $a_1 = 1$, et, pour tout $n \geqslant 1$, on trouve $(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$, avec de plus la condition initiale $a_0 = f(0) = 0$.
Il résulte immédiatement par récurrence que les termes de rang pair sont nuls (ce qui était prévisible puisque la fonction f est impaire). Pour les termes de rang impair, on a la relation $a_{2p+1} = \dfrac{-2}{2p+1}\, a_{2p-1}$, d'où l'on déduit, également par récurrence, que $a_{2p+1} = \dfrac{(-2)^p}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-2)^p x^{2p+1}}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p}\, p!}{(2p+1)!}\, x^{2p+1}$.

On intervertit l'ordre de deux sommations lorsque la fonction étudiée est définie comme une intégrale

Exercice 9.13

Mines - Ponts PC 2007

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x \sin 2t}\, dt$. Donner le développement en série entière de φ sur $]-1,\, 1[$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1,\, 1[$. On a $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\, x^n$.
Pour tout $t \in [0,\, \pi/2]$ et $x \in]-1,\, 1[$, on a donc $|a_n x^n \sin^n 2t| \leqslant |a_n||x^n|$ et la série de fonctions $t \mapsto a_n x^n \sin^n 2t$ converge normalement sur $[0,\, \pi/2]$. On peut donc intervertir les signes $\int$ et $\sum$. On obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x \sin 2t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \int_0^{\pi/2} \sin^n 2t\, dt\,.$$

Pour $n \geqslant 0$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n 2t\, dt$. En effectuant le changement de variable $u = 2t$, on trouve $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n u\, du$, et par symétrie $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n u\, du$.
L'intégrale I_n est une intégrale de Wallis. Le développement de φ en série entière dans $]-1,\, 1[$ est donc $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_n x^n$.

Remarque
L'intégrale I_n se calcule (Voir chapitre 3) grâce à la relation de récurrence $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, et on obtient deux expressions différentes suivant la parité de n.

9.1.4 Calcul de la somme d'une série entière

Ce qu'il faut savoir

C'est le problème inverse de celui du développement en série entière. On exprime la série S à l'aide des séries entières des fonctions usuelles, par des opérations de somme, produit de Cauchy, dérivation ou primitivation, en utilisant éventuellement un changement de variable.

Exercice 9.14

CCP PC 2006

Trouver le rayon de convergence R, puis calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

En appliquant le critère de d'Alembert à la série numérique de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{(2n)!}$, on trouve que $R = +\infty$.

Lorsque $x \geqslant 0$, $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Lorsque $x \leqslant 0$, $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{-x}$.

Exercice 9.15

CCP MP 2005

Soit α un nombre réel. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$.

Comme $|\cos(n\alpha)| \leqslant 1$, le rayon de convergence R est plus grand que celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$. Par ailleurs la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, sinon la suite extraite des termes de rang pair $(\cos(2n\alpha)) = (2\cos^2(n\alpha) - 1)$ convergerait vers -1. Donc $R \leqslant 1$. Il en résulte que $R = 1$, et que la série entière ne converge ni en 1, ni en -1.

Comme les séries $\sum e^{in\alpha}x^n$ et $\sum e^{-in\alpha}x^n$ sont des séries géométriques de rayon 1, on a lorsque $|x| < 1$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\alpha}x^n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n\right),$$

donc $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}x} + \dfrac{1}{1-e^{-i\alpha}x}\right) = \dfrac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Exercice 9.16

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh} n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

En écrivant $\operatorname{sh} n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{2}$, on a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
Les séries entières obtenues sont de rayon infini. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-n}x^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x\sqrt{e}) - \operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice 9.17

CCP PSI 2005, Ecole de l'air MP 2005

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

La somme $S(x)$ n'est autre que le produit de Cauchy de deux séries de rayon 1. Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $S(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right) = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$. En particulier, on a $R \geqslant 1$. On remarque que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

Exercice 9.18

Mines - Ponts PC 2006 et MP 2007

Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer pour tout $x \in]-R,\ R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Indication de la rédaction : montrer que, pour tout x réel, $S''(x)+S'(x)+S(x) = e^x$.

Pour tout x réel, en appliquant le critère de d'Alembert à la série numérique de terme général $u_n(x) = x^{3n}/(3n)!$, on obtient $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$, et la suite $(|u_{n+1}(x)/u_n(x)|)$ converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente et la série entière $\sum u_n(x)$ a un rayon de convergence infini. Il en résulte que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a $S(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^9}{9!} + \cdots$ et on obtient

$$S'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \text{ puis } S''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Dans ces trois séries apparaissent tous les termes de la série de $x \mapsto e^x$. On a alors pour tout x réel, $S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$.

Donc S est solution de l'équation différentielle linéaire $(E)\ :\ y'' + y' + y = e^x$, avec de plus $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

Le polynôme caractéristique de (E) vaut $X^2 + X + 1$ et a pour racines complexes $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc de la forme $x \mapsto e^{-x/2}\left(A\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$, où A et B sont deux nombres réels, et une solution particulière de (E) est $x \mapsto e^x/3$.

Donc
$$S(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{e^x}{3}.$$

On a $S(0) = 1 = A + 1/3$, donc $A = 2/3$, et en dérivant

$$S'(x) = e^{-x/2}\left[-\frac{1}{2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-A\sin\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \frac{e^x}{3}.$$

On en tire $S'(0) = 0 = -A/2 + \sqrt{3}B/2 + 1/3$, d'où $B = 0$. Finalement $S(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est de la forme $P(n)$ ou $P(n)/n!$, où P est un polynôme, on pourra décomposer P dans la base $(L_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $L_0(X) = 1$, et pour $k \geqslant 1$, $L_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))$. On fera ensuite apparaître les dérivées de la série géométrique dans le premier cas et la série de l'exponentielle dans le second.*

Exercice 9.19

1) Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)x^n$.

2) Mêmes questions lorsque $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}x^n$.

1) En appliquant le critère de d'Alembert, on obtient $R = 1$.
On décompose le polynôme $P(X)$ dans la base (L_0, L_1, L_2). Il existe des nombres α, β, γ tels que $X^2 + X + 1 = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1)$. En donnant à X les valeurs 0 et 1 successivement on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = 2$. Quant à γ c'est le coefficient du terme dominant de P, donc $\gamma = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $n^2+n+1 = n(n-1)+2n+1$.
Puisque toutes les séries utilisées dans le calcul suivant ont un rayon de convergence égal à 1, on a, lorsque $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

ou encore $S(x) = x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Si l'on pose $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a alors $T'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$,

et $T''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, d'où

$S(x) = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$, et finalement $S(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x)^3}$.

2) On a cette fois $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Donc, en simplifiant, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Et finalement $S(x) = x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = (x+1)^2e^x$.

Toutes les séries apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout x réel.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est une fraction rationnelle, on pourra utiliser la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.*

Exercice 9.20

CCP PC 2006

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R,\ R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

Il résulte de la règle de d'Alembert que la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ est de rayon 1, et donc, en remplaçant x par x^2, que la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ est aussi de rayon 1.
Puisque toutes les séries entières utilisées dans le calcul suivant ont un rayon de convergence égal à 1, on a, lorsque $x \in]-1,\ 1[$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= -x^2 \ln(1-x^2) + (-\ln(1-x^2) - x^2) - \left(2x \ln \frac{1+x}{1-x} - 4x^2\right) \\
&= 3x^2 - (x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x \ln \frac{1+x}{1-x}\,.
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire $S(x) = 3x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) - (1+x)^2 \ln(1+x)$.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est défini par une intégrale, on peut être amené à permuter les signes $\sum$ et $\int$.*

Exercice 9.21

CCP PSI 2007

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

Indication de la rédaction : pour $t \in [0, 1]$ et $|x| < 1$, on pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{1+tx}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-tx}\right)$.

Lorsque $t \in [0, 1]$ et $|x| < 1$, on a $\dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2} \leqslant |x|^n$. La série de fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2}$ converge donc normalement sur $[0, 1]$, et l'on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$.

On obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(tx)^n\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}$.

La relation $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{1+tx}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-tx}\right)$ permet de calculer l'intégrale, et on obtient, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1+x^2}\left[\operatorname{Arctan} t + \frac{x}{2}\ln(t^2+1) - x\ln(1-tx)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}x - x\ln(1-x)\right).\end{aligned}$$

On a montré en particulier que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est plus grand que 1. Mais on constate que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

Exercice 9.22

On désire étudier la série entière de coefficients $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,dt$.

1) Si R est le rayon de convergence de la série, montrer qu'alors $R \geqslant 2$.
2) Lorsque $|x| < 2$, calculer la somme partielle $S_n(x)$ et montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.
3) En déduire la somme de la série et que $R = 2$.

1) On a tout d'abord $0 \leqslant a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,dt \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, et puisque la série géométrique de terme général $x^n/2^{n+1}$ a pour rayon de convergence 2, on en déduit que $R \geqslant 2$.

2) Pour $|x| < 2$, calculons la somme partielle $S_n(x)$ de la série entière. Tout d'abord en sommant la série géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{2+t^2}\,\frac{1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2+t^2}} = \frac{1}{2-x+t^2}\left(1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}\right).$$

En intégrant, on obtient donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - \int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}.$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2} \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$. Et puisque $|x| < 2$, le membre de droite converge vers 0. Il résulte du théorème d'encadrement que la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}\right)$ converge vers 0, et donc que la suite $(S_n(x))$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} = \frac{1}{2-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2-x}}\right)^2}$.

3) Cette intégrale se calcule et on obtient finalement

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left[\frac{1}{\sqrt{2-x}} \operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{2-x}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

On remarque que $\lim\limits_{x \to 2^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 2$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 2$.

9.1.5 Quelques applications des séries entières

Ce qu'il faut savoir

Les séries entières ont beaucoup d'applications ; nous en donnons ici trois exemples : prolongement d'une fonction en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, détermination du terme général d'une suite numérique définie par une relation de récurrence et calcul de sommes de séries numériques convergentes.

Elles servent aussi à résoudre des équations différentielles comme on l'a déjà vu et on le verra de nouveau dans le chapitre « Équations différentielles ».

- ***Prolongement d'une fonction en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$***

Exercice 9.23

CCP PC 2005

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1/2$ et pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout x réel $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

On en déduit que, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$, ce qui reste vrai pour $x = 0$. La fonction f est donc développable en série entière de rayon infini et il en résulte qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• *Détermination des termes d'une suite*

A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes on peut associer une série entière, par exemple $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, qui, lorsque le rayon de convergence n'est pas nul, détermine une fonction appelée **fonction génératrice** de la suite.

On peut ainsi déterminer certaines suites vérifiant une relation de récurrence. En général la relation de récurrence permet de faire apparaître une équation différentielle ou une équation fonctionnelle vérifiée par f et on résoudra cette équation. Cette méthode sert par exemple pour déterminer le cardinal de certains ensembles. (Voir ex. 9.33)

Exercice 9.24

Mines - Ponts MP 2006 et PC 2007

On pose $a_0 = 1$, puis, si $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}a_k$. On veut calculer les a_n en utilisant la fonction génératrice f définie ci-dessus.

1) En utilisant le produit de Cauchy, montrer que, si f a un rayon de convergence non nul, alors $f' = f^2$.

2) Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire a_n.

3) Vérifier que la suite ainsi obtenue convient bien.

1) En effectuant le produit de Cauchy de la série entière de somme $f(x)$ par elle-même, on obtient, pour $|x| < R$,

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\frac{a_k}{k!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}a_k\right) \frac{x^n}{n!} .$$

Donc, en utilisant la relation de récurrence donnée dans l'énoncé, on obtient $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}$. Mais on a aussi $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, et l'on en déduit donc que $f'(x) = f(x)^2$, avec de plus $f(0) = 1$.

2) Sur un intervalle où f ne s'annule pas, on a $f'(x)/f(x)^2 = 1$, d'où en intégrant $-1/f(x) = x - a$, et donc $f(x) = 1/(a - x)$. Alors, puisque $f(0) = 1$, on obtient $f(x) = 1/(1 - x)$. On vérifie bien que $x \mapsto 1/(1 - x)$ est solution de l'équation différentielle dans $]-\infty, -1[$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,\frac{x^n}{n!}$, et $a_n = n!$.

3) Il existe une suite unique vérifiant les conditions de l'énoncé. On vérifie alors par récurrence que la solution obtenue dans 2) convient. On a bien $a_0 = 0! = 1$, et si l'on suppose que pour tout k compris entre 0 et n, on a $a_k = k!$, alors

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(n-k)!k! = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!\,,$$

ce qui donne la formule au rang $n + 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

• *Calcul de sommes de séries numériques*

Une méthode pour calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ d'une série numérique convergente, consiste à introduire une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ pour laquelle il existe $x_0 \in]0, R]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $b_n = a_n x_0^n$.

On calcule alors pour tout $x \in]0, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$.

Deux cas sont possibles :

(i) lorsque $R > x_0$, on a $A = S(x_0)$; voir 9.25 ;

(ii) lorsque $R = x_0$, pour $n \geqslant 0$, notons u_n la fonction définie sur $[0, R]$ par $u_n(x) = a_n x^n$. On montre que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[0, R]$

– ou bien en montrant que cette série converge normalement

– ou bien, lorsque la série $\sum u_n$ est alternée, en montrant que la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, R]$, et en appliquant le critère de Leibniz.

Dans les deux cas, S est continue sur $[0, R]$ et $A = \displaystyle\lim_{x \to x_0} S(x)$ (voir 9.26).

Exercice 9.25

Montrer l'existence et calculer $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

Introduisons la série entière $\sum (n+1)x^n$. Son rayon de convergence vaut 1. En posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$. Donc $A = f'(1/3) = 9/4$.

Exercice 9.26

Montrer l'existence et calculer $A_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $A_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Les deux séries sont des séries alternées qui convergent d'après le critère de Leibniz.
Introduisons les séries entières $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Ces séries sont de rayon 1 et l'on a, pour $x \in]-1,\ 1[$,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} x\,.$$

Pour $x \in [0,\ 1]$ et $n \geqslant 1$, posons $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. La suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante et converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est alternée, et d'après le critère de Leibniz, on a, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,\ 1]$, l'inégalité $\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leqslant |u_{n+1}(x)|$. Mais $|u_{n+1}(x)| \leqslant 1/n$, et la suite $(1/n)$ converge vers 0. Il en résulte que la série de terme général u_n converge uniformément sur l'intervalle $[0,\ 1]$.
On peut alors conclure : comme les fonctions u_n sont continues sur $[0,\ 1]$, la somme f_1 l'est aussi, et en particulier elle est continue en 1, donc $A_1 = \lim_{x \to 1^-} f_1(x) = \ln 2$.

Par le même argument, on obtient $A_2 = \lim_{x \to 1^-} f_2(x) = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Remarque

Les deux sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ sont utilisées dans de nombreux exercices.

9.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 9.27

Centrale MP 2006

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

2) Montrer que celui de la série entière $\sum a_n z^{n^2}$ est au moins égal à 1. Quel est-il lorsque $a_n = 1/n!$?

1) Remarquons que si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)$ possède une limite $\ell = 1/R$, alors la suite $(|a_{n+1}^2/a_n^2|)$ converge vers $1/R^2$ et l'application du critère de d'Alembert à la série $\sum a_n^2 z^n$ montre que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a un rayon de convergence égal à R^2. On justifie maintenant ce résultat de manière générale.

Soit $|z| < R^2$. Alors $\sqrt{|z|} < R$ et la série de terme général $|a_n|\sqrt{|z|}^n$ converge. La suite $(|a_n|\sqrt{|z|}^n)$ est donc majorée par une constante M.

Alors $|a_n^2 z^n| = (|a_n|\sqrt{|z|}^n)^2 \leqslant M|a_n|\sqrt{|z|}^n$. Il en résulte que la série de terme général $a_n^2 z^n$ converge et donc que son rayon est supérieur ou égal à R^2.

Soit maintenant $|z| > R^2$. Alors $\sqrt{|z|} > R$, et la suite $(a_n\sqrt{|z|}^n)$ ne converge pas vers 0. Il en résulte que la suite $(a_n^2 z^n)$ ne converge pas vers 0, donc que la série de terme général $a_n^2 z^n$ diverge. Alors, son rayon de convergence est inférieur ou égal à R^2 et il en résulte qu'il vaut exactement R^2.

2) Lorsque $|z| < 1$, soit t tel que $|z|/R < t$.

On écrit $|a_n||z|^{n^2} = \left|a_n\left(\frac{z}{t}\right)^n\right| t^n|z|^{n^2-n}$. Puisque $|z|/t < R$, la suite $\left(\left|a_n\left(\frac{z}{t}\right)^n\right|\right)$ est donc majorée par une constante M. Alors $|a_n||z|^{n^2} \leqslant Mt^n|z|^{n^2-n}$. Mais en appliquant la règle de d'Alembert à la série de terme général $\alpha_n = Mt^n|z|^{n^2-n}$, on obtient $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = t|z|^{2n}$, et la suite (α_{n+1}/α_n) converge vers 0. Il en résulte que la série de terme général α_n converge donc que la série de terme général $a_n z^{n^2}$ converge pour tout $|z| < 1$. Le rayon de convergence de cette série est donc supérieur ou égal à 1.

Lorsque $a_n = 1/n!$, l'application de la règle de d'Alembert à la série numérique de terme général $u_n(z) = a_n z^{n^2}$, donne, $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \dfrac{|z|^{2n+1}}{n+1}$, et la suite $|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ admet $+\infty$ pour limite lorsque $|z| > 1$. La série de terme général $a_n z^{n^2}$ diverge dans ce cas et $R \leqslant 1$. Donc, le rayon de la série entière vaut 1.

Exercice 9.28

Mines - Ponts MP 2006

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Trouver le rayon de convergence des séries entières de coefficients $\dfrac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}$.

2) Lorsque $|x| < 1$, calculer la somme $A(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\alpha)$.

3) Montrer que pour $|x| < 1$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$.

1) Les deux séries ont même rayon de convergence que leur série dérivée $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$ et $\sum \sin((n+1)\alpha)x^n$. Puisque $|\cos((n+1)\alpha)| \leqslant 1$ et $|\sin((n+1)\alpha)| \leqslant 1$, on obtient que dans les deux cas la série est de rayon supérieur ou égal à 1.
De l'égalité $\cos(2(n+1)\alpha) = 2\cos^2((n+1)\alpha) - 1$, on déduit que la suite $(\cos((n+1)\alpha))$ ne peut converger vers 0 (sinon on obtiendrait $0 = -1$ par passage à la limite). La série de terme général $x^n \cos((n+1)\alpha)$ est donc de rayon 1, ainsi que la série de terme général $\dfrac{x^n \cos(n\alpha)}{n}$.
De l'égalité $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha$, on déduit que si la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers 0, alors la suite $(\cos(n\alpha)\sin\alpha)$ converge vers 0, et puisque la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, on a $\sin\alpha = 0$, soit $\alpha = k\pi$, avec k entier. Réciproquement, si $\alpha = k\pi$ avec k entier, alors la suite $(\sin(n+1)\alpha)$ est la suite nulle.
Conclusion : la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n} \sin(n\alpha)$ est de rayon 1 lorsque α n'est pas un multiple entier de π et est de rayon infini sinon.
2) Lorsque $|x| < 1$, on peut calculer la somme des deux séries simmultanément en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \dfrac{e^{in\alpha}}{n}$.

On obtient en dérivant $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n = \dfrac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} = \dfrac{e^{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha}x)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{\cos\alpha - x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + i\,\dfrac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Alors A est la primitive nulle en 0 de $\operatorname{Re} f$. Donc $A(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

3) Si l'on pose $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} \sin(n\alpha)$, alors B est la primitive nulle en 0 de $\operatorname{Im} f$.

Or en dérivant la fonction $h : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$, qui est nulle en 0, on obtient bien $h'(x) = \operatorname{Im} f$. On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$.

Exercice 9.29

Centrale MP 2005

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles telles que : $a_n \sim b_n$; $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 0$; $\sum b_n$ diverge ; $\sum b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

1) Montrer que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

2) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \to +\infty$ quand $x \to 1^-$.

3) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand $x \to 1^-$.

1) Ce résultat de cours se redémontre facilement en revenant aux séries numériques.

2) Notons $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, et, lorsque $|x| < 1$, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
Remarquons tout d'abord que, puisque les nombres b_n sont positifs, la fonction g_n est croissante et positive sur $[\,0, +\infty\,[$.
Puisque la série de terme général b_n diverge, pour tout nombre A, il existe un entier N tel que $g_N(1) > A + 1$.
Comme la fonction g_N est continue en 1, il existe $\alpha > 0$, tel que $1 - \alpha < x < 1$ implique $0 \leqslant g_N(1) - g_N(x) < 1$. Alors,

$$g(x) \geqslant g_N(x) = g_N(1) - (g_N(1) - g_N(x)) > A + 1 - 1 = A,$$

ce qui montre que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1^-.
3) Pour tout $n \geqslant 0$, posons $\varepsilon_n = a_n/b_n - 1$, ce qui est possible puisque $b_n > 0$. On a donc $a_n = b_n + b_n\varepsilon_n$, et, puisque $a_n \sim b_n$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Alors, lorsque $|x| < 1$, on obtient en sommant $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = g(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n$.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand x tend vers 1^- revient alors à montrer que

$\dfrac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geqslant N$ implique $|\varepsilon_n| < \varepsilon/2$. Alors, lorsque $0 \leqslant x < 1$, on a,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} b_n |\varepsilon_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} b_n |\varepsilon_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}\, g(x)\,,$$

ou encore
$$\frac{1}{g(x)} \left|\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n |\varepsilon_n| x^n\,.$$

Mais d'après 2) la fonction g admet $+\infty$ comme limite en 1^-, d'où

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n |\varepsilon_n| x^n = 0\,.$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $1 - \alpha < x < 1$ implique $\dfrac{1}{g(x)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n x^n \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\dfrac{1}{g(x)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n \right| < \varepsilon$, ce qui montre que $\dfrac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-.

Exercice 9.30

Mines - Ponts MP 2006

Soit $a \in]-1, 1[$. Développer en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n x)$.

Pour tout x réel, on a $\operatorname{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Considérons la somme double $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, et étudions tout d'abord si elle converge absolument. On obtient
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{n(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{1 - |a|^{2k+1}}.$$
Mais, pour $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(2k+1)!(1 - |a|^{2k+1})} \leqslant \dfrac{1}{(2k+1)!(1 - |a|)}$ et la série entière de terme général $\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(1 - |a|)}$ est de rayon infini. Il en résulte que la série de terme général $\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(1 - |a|^{2k+1})}$ converge absolument et donc que la somme double $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ converge absolument pour tout x réel.

Il résulte du théorème de Fubini que la série de terme général $\operatorname{sh}(a^n x)$ converge pour tout x réel et que l'on a alors
$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)}$ ce qui donne le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(1 - a^{2k+1})(2k+1)!}$.

Exercice 9.31

Mines - Ponts MP 2006 K

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et calculer pour tout $x \in]-R,\ R[$ la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Indication de la rédaction : montrer que S est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n+3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{2}$. Il résulte de la règle de d'Alembert que $R = 2$. La fonction S est continue sur $]-2,\ 2[$, donc en 0.

2) Tout d'abord, on a $S(0) = a_0 = 1$. On remarque ensuite que, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{n!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)} - \frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1)}\right).$$

On en déduit pour tout $x \in]-2,\ 2[$

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1)}\, x^n\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} x S(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1)}\, x^n . \end{aligned}$$

En dérivant cette relation, on obtient, toujours pour $|x| < 2$,

$$S'(x) = \frac{1}{2}(S(x) + xS'(x)) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1)}\, x^{n-1},$$

et en multipliant par $2x$, on obtient $2xS'(x) = xS(x) + x^2S'(x) - (S(x) - 1)$, c'est-à-dire $(2x - x^2)S'(x) = (x-1)S(x) + 1$.

On résout tout d'abord l'équation homogène $(2x - x^2)S'(x) = (x-1)S(x)$, dans $]-2,\ 0[$ et dans $]0,\ 2[$. On a $S'(x) = \dfrac{x-1}{x(2-x)} S(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}\right) S(x)$.

Sur chacun de ces deux intervalles on obtient la solution $S(x) = \dfrac{C}{\sqrt{|x(x-2)|}}$, puis, en faisant varier la constante C, on trouve $C'(x) = -\dfrac{\sqrt{|x(x-2)|}}{x(x-2)}$.

Lorsque $x \in]0,\ 2[$, on a $C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$, et donc $C(x) = \operatorname{Arccos}(1-x) + H$ où H est une constante. Alors $S(x) = \dfrac{\operatorname{Arccos}(1-x) + H}{\sqrt{x(2-x)}}$.

Mais puisque $S(x)$ a une limite finie en 0 qui vaut $S(0) = 1$, et que le dénominateur s'annule en 0, il doit en être de même du numérateur, donc $H = 0$.

Lorsque $x \in]-2, 0[$, on a $C'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^2-1}}$, et donc $C(x) = \operatorname{argch}(1-x) + H$ où H est une constante, et le même argument que ci-dessus montre que $H = 0$.

$$\text{Finalement, } S(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} & \text{si } x \in]-2, 0[\end{cases}.$$

9.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 9.32

Mines - Ponts MP 2006

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$.

1) Déterminer les rayons de convergence de $\sum (a_n \ln n) x^n$ et $\sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$.

2) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$ quand $x \to 1^-$.

1) Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n \ln n) x^n$. Lorsque $|x| < \rho < R$, on a $|(a_n \ln n) x^n| = |a_n| \rho^n \ln n \left(\dfrac{|x|}{\rho} \right)^n$.

La suite $(\ln n (|x|/\rho)^n)$ converge vers 0. Elle est donc bornée. Si M est un majorant on a alors $|(a_n \ln n) x^n| \leqslant M |a_n| \rho^n$ et la série de terme général $a_n \ln n x^n$ converge. Il en résulte que $R_1 \geqslant \rho$, et donc que $R_1 \geqslant R$.

Inversement, puisque, pour $n \geqslant 3$, on a $|a_n| \leqslant |a_n| \ln n$, on en déduit que $R \geqslant R_1$. Finalement $R_1 = R$.

En utilisant l'équivalent $\sum_{k=1}^{n} 1/k \sim \ln n$ (voir ex 9.29) on en déduit alors que la deuxième série proposée admet encore comme rayon de convergence R.

2) D'après la question 1) appliquée à la suite constante $(a_n) = (1)$, les séries entières $\sum \ln n x^n$ et $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$ sont de rayon de convergence 1. Toujours d'après l'exercice 9.29, la suite (ε_n) définie par $\varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$, converge (sa limite est la

constante d'Euler). Elle est donc majorée par une constante M. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n .$$

Mais en effectuant le produit de Cauchy, on obtient, pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x}(-\ln(1-x)) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n .$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \left(1 + \frac{1-x}{\ln(1-x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \right) . \end{aligned}$$

Lorsque $0 < x < 1$, on a $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \right| \leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{Mx}{1-x} \leqslant \frac{M}{1-x}$, donc $\left| \frac{1-x}{\ln(1-x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \right| \leqslant \frac{M}{\ln(1-x)}$, et il en résulte que cette expression tend vers 0 lorsque x tend vers 1. On en déduit que, lorsque x tend vers 1, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 9.33

Mines - Ponts MP 2006

Si $n \geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$. On pose $I_0 = 1$.

1) Montrer, si $n \geqslant 2$, que : $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$.

2) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in]-1, 1[$. Soit $S(x)$ sa somme.

3) Montrer, pour $x \in]-1, 1[$, que : $S'(x) = (1+x) S(x)$.

4) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Rappelons qu'une involution φ d'un ensemble E est une application telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. Le nombre I_n est aussi le nombre d'involutions d'un ensemble fini à n éléments.

1) Pour $n \geqslant 3$, soit φ une involution de $\{1, \ldots, n\}$.

Ou bien $\varphi(n) = n$ alors la restriction de φ à $\{1, \ldots, n-1\}$ est une involution de $\{1, \ldots, n-1\}$. Il y a donc I_{n-1} involutions de ce type.

Ou bien $\varphi(n) = p$ appartient à $\{1, \dots, n-1\}$. Alors $\varphi(p) = n$, et la restiction de φ à $\{1, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ est une involution de cet ensemble fini à $n-2$ éléments. Donc pour chacune des $n-1$ valeurs de p, il y a I_{n-2} involutions. Cela fait $(n-1)I_{n-2}$ involutions de ce type. Finalement $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
Cette relation est encore vraie pour $n = 2$, car $I_2 = 2$, (les deux bijections de $\{1, 2\}$ sur lui-même sont des involutions), et $I_1 = I_0 = 1$.

2) Comme toute involutions de $\{1, \dots, n\}$ est bijective, c'est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Le nombre d'involutions est donc inférieur au nombre de permutations et l'on a $I_n \leqslant n!$.
Alors $0 \leqslant I_n/n! \leqslant 1$, et la série entière $\sum I_n x^n/n!$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$.

3) Calculons $S'(x)$. On a, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n . \end{aligned}$$

On trouve donc $S'(x) = S(x) + xS(x) = (1+x)S(x)$, avec de plus $S(0) = 1$, et cette équation différentielle linéaire du premier ordre a comme solution unique la fonction $S : x \mapsto e^{x+x^2/2}$.

4) On a donc

$$S(x) = e^{x+x^2/2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right) .$$

On obtient un produit de Cauchy de séries entières de rayon de convergence infini donc $S(x)$ est en fait de rayon de convergence infini.

Posons $a_{2p} = \dfrac{1}{2^p p!}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = \dfrac{1}{p!}$. Le coefficient c_n de x^n dans la série produit est donc

$$\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{\mathbb{E}(n/2)} a_{2p} b_{n-2p} = \sum_{p=0}^{\mathbb{E}(n/2)} \frac{1}{2^p p!(n-2p)!} ,$$

et par identification des coefficients, ce nombre vaut $I_n/n!$. Donc, on obtient,

$$I_n = \sum_{p=0}^{\mathbb{E}(n/2)} \frac{n!}{2^p p!(n-2p)!} .$$

Exercice 9.34

Mines - Ponts MP 2005

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

Calculer $A_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$ puis montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante. La conclusion subsiste-t-elle si f est bornée sur $\mathbb{R}$?

La série de fonctions $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ converge normalement sur $[\,0,\ 2\pi\,]$. On peut donc inverser les sommations et

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt\right).$$

Mais l'intégale $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipt}\,dt$ est nulle lorsque p est non nul, et vaut 2π lorsque p est nul. Donc, dans la série précédente, toutes les intégrales son nulles sauf lorsque $n = k$, et on obtient donc $A_n(r) = \dfrac{a_n r^n}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = a_n r^n$.

Si, pour tout z complexe, on a $|f(z)| \leqslant M$, alors

$|A_n(r)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt\right| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} M\,dt = M$, et l'on en déduit que pour tout entier $n > 0$ et tout réel $r > 0$, on a l'inégalité $|a_n r^n| \leqslant M$, ou encore $|a_n| \leqslant M/r^n$. En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit que $|a_n| \leqslant 0$, et donc $a_n = 0$. On a alors $f(z) = a_0$ et la fonction f est constante.

Par contre la fonction sinus donne un exemple de fonction qui est développable en série entière de rayon infini, et bornée sur $\mathbb{R}$ mais non constante.

Exercice 9.35

Mines - Ponts 2006 et 2007

On considère $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2^k}$.

1) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$.
3) Que dire de la limite de f en 1 si elle existe ?
4) S'il existe $x_0 \in]-1,\ 1[$ tel que $f(x_0) > 1/2$ montrer que f n'a pas de limite en 1 (on pourra utiliser une relation entre $f(x)$ et $f(x^4)$).

5) On a $f(0,995) > 0,5008$. Qu'en conclure ? Comment a-t-on pu vérifier cette inégalité ?

1) La suite $|x^{2^k}|$ converge vers 0 lorsque $|x| < 1$, et ne converge pas vers 0 lorsque $|x| = 1$. Le rayon de la série entière vaut donc 1.

2) Lorsque $|x| < 1$, on a

$$f(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(x^2)^{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k x^{2^k} = x - f(x)\,,$$

et donc $f(x) = x - f(x^2)$.

3) Si f admet une limite ℓ en 1, alors par passage à la limite on obtient $\ell = 1 - \ell$, et l'on en déduit que $\ell = 1/2$.

4) Lorsque $|x| < 1$, on a aussi $f(-x) = -x - f(x^2)$, donc $f(-x) = -2x + f(x)$. Alors, si $f(x_0) > 1/2$, avec $x_0 \in]-1,\ 0[$, on aura également $f(-x_0) = -2x_0 + f(x_0) > f(x_0) > 1/2$. On peut donc supposer que x_0 appartient à $]0,\ 1[$.
En utilisant de nouveau l'égalité obtenue en 1), on obtient, lorsque $|x| < 1$, la relation $f(x) = x - x^2 + f(x^4)$, et donc, pour $x \in]0,\ 1[$, on a $f(x) > f(x^4)$ ou encore $f(x^{1/4}) > f(x)$.
Considérons alors la suite $(x_0^{1/4^n})$. Cette suite converge vers 1, et d'après ce qui précède la suite $(f(x_0^{1/4^n}))$ est croissante et minorée par son premier terme $f(x_0)$. Si cette suite admettait une limite ℓ on aurait $\ell \geqslant f(x_0) > 1/2$. On a donc une contradiction. Il en résulte que la fonction f n'a pas de limite en 1.

5) Il résulte de l'inégalité $f(0,995) > 0,5008$ et de 4) que la fonction f n'a pas de limite en 1.
Pour obtenir l'inégalité précédente, on peut remarquer que pour $x \in]0,\ 1[$, la série de terme général $(-1)^n x^{2^n}$ est une série alternéee. La suite $(S_{2n+1}(x))$ des sommes partielles de rang impair est donc une suite croissante, et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1}(x) \leqslant f(x)$. En particulier le calcul de $S_{11}(0,995)$ donne la valeur $0,5008815850$, donc $f(0,995) \geqslant S_{11}(0,995) > 0,5008$.

L'exercice suivant donne une méthode générale pour traiter plusieurs exercices d'oraux.

Exercice 9.36

D'après Centrale MP 2006 K

1) Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $I =]-A,\ A[$, (A fini ou non), telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on ait $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.
Montrer que f est développable en série entière dans I.

2) Lorsque f est paire ou impaire, montrer qu'il en est de même si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,\ A[$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

3) a. Montrer que $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière de rayon infini.

b. Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière de rayon $\pi/2$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, et étudions la série entière $\sum a_n x^n$. Les nombres a_n sont tous positifs.
En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Lorsque $0 \leqslant x < A$, l'intégrale est positive et donc $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x)$. Il en résulte que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ est croissante majorée. Elle converge donc, et la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à A. Etudions le reste $R_n(x)$ de cette série. On a, en effectuant le changement de variable $t = ux$ dans l'intégrale,

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,du\,.$$

Les fonction $f^{(n)}$ étant toutes positives, sont également toutes croissantes. Lorsque $0 < x < y < A$, et $u \in [\,0,\,1\,]$, on a donc $(1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \leqslant (1-u)^n f^{(n+1)}(uy)$, et en intégrant on en déduit que $R_n(x)x^{-(n+1)} \leqslant R_n(y)y^{-(n+1)}$.

En utilisant le fait que $0 \leqslant R_n(y) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k y^k \leqslant f(y)$, on en déduit que $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$, et il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(R_n(x))$ converge vers 0. Donc, pour $x \in [\,0,\,A\,[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Lorsque $x \in]-A,\,0\,[$, et $u \in [\,0,\,1\,]$, on a $f^{(n+1)}(ux) \leqslant f^{(n+1)}(0)$. Donc cette fois, $0 \leqslant R_n(x)x^{-(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\,du = a_{n+1}$, et l'on en déduit que $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}|x|^{n+1}$. Mais, puisque la série de terme général $a_n|x|^n$ converge, la suite $(a_n|x|^n)$ converge vers 0, et la suite $(R_n(x))$ converge vers 0. On obtient donc, de nouveau $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La fonction f est développable en série entière dans $]-A,\,A\,[$.

2) La démonstration effectuée dans la question 1) pour $x \in [0, A[$ subsiste et pour $x \in [0, A[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Si f est impaire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = 0$, et donc pour $x \in [0, A[$, on obtient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$. Alors, pour $x \in]-A, 0[$,

$$f(x) = -f(-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(-x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Méthode analogue lorsque f est paire.

3.a La fonction $f : x \mapsto \exp(\exp x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On démontre par récurrence qu'il existe une suite de polynômes P_n à coefficients dans $\mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f^{(n)}(x) = f(x)P_n(e^x)$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, en prenant $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$. Si elle est vraie à l'orde n, alors

$$f^{(n+1)}(x) = f'(x)P_n(e^x) + f(x)e^x P_n'(e^x) = f(x)e^x(P_n(e^x) + P_n'(e^x)).$$

En posant $P_{n+1}(X) = X(P_n(X) + P_n'(X))$, on a bien

$$f^{(n+1)}(x) = f(x)P_{n+1}(e^x).$$

Si P_n est à coefficients entiers positifs, il en est de même de P_n' et donc de la somme $P_n + P_n'$. Il en résulte que P_{n+1} est aussi à coefficients entiers positifs.

Alors, quelque soit n, la fonction $f^{(n)}$ sera positive ce qui permet d'appliquer la question 1 : la fonction f est développable en série entière de rayon infini.

3.b La fonction $f : x \mapsto \tan x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

On démontre par récurrence qu'il existe une suite de polynômes P_n à coefficients dans $\mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on ait $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$.

La propriété est vraie pour $n = 0$, en prenant $P_0(X) = X$. Si elle est vraie à l'orde n, alors

$$f^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2 x)P_n'(\tan x) = P_{n+1}(\tan x)$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1 + X^2)P_n'(X)$.

Si P_n est à coefficients entiers positifs, il en est de même de P_n' et donc du produit $(1 + X^2)P_n'(X)$. Il en résulte que P_{n+1} est aussi à coefficients entiers positifs.

Alors, quelque soit n, la fonction $f^{(n)}$ sera positive sur $[0, \pi/2[$, et puisque f est impaire, on peut appliquer la question 2 : la fonction f est développable en série entière de rayon de convergence au moins $\pi/2$.

Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\pi/2$, le rayon de convergence est nécessairement inférieur ou égal à $\pi/2$. Il vaut donc exactement $\pi/2$.

Exercice 9.37

Polytechnique MP 2006

Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$ converge. On note $f(x)$ la somme de cette série.

1) Déterminer I et étudier la continuité de f.

2) On pose $a_1 = -1$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$. Déterminer le domaine de définition de $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

3) Trouver une relation entre f et g.

4) Calculer $g(1)$ et $g(-1)$. En déduire la limite en -1 de f et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

1) Pour $n \geqslant 1$, posons $b_n = \ln n$, et notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$. On a alors $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$, et la suite $|b_{n+1}|/|b_n|$ converge vers $1/R = 1$ d'après la règle de d'Alembert. Par ailleurs, lorsque $x = \pm 1$, la suite $(b_n x^n)$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $b_n x^n$ diverge. Donc $I =]-1,\ 1[$. Alors la fonction f est continue sur I.

2) En utilisant le développement limité en 0, $\ln(1-u) = -u - u^2/2 + o(u^2)$, on obtient $a_n = \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et il en résulte que la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ converge vers $1/R = 1$. Par ailleurs, la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument si $x = \pm 1$. Le domaine de définition de g est donc $[-1,\ 1]$.

3) En écrivant, pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$, on a, lorsque $|x| < 1$,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -x - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n\, x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x f(x) + f(x) + \ln(1-x).
\end{aligned}
$$

Donc $g(x) = (1-x) f(x) + \ln(1-x)$.

4) Pour obtenir $g(1)$, calculons la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Il apparaît une série télescopique, $S_N = -1 - \sum_{n=2}^{N} (\ln(n-1) - \ln n) - \sum_{k=2}^{N} \dfrac{1}{n} = \ln N - \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{n}$.

Mais la suite $\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N\right)$ converge vers la constante d'Euler γ (voir ex. 4.16). Donc $g(1) = -\gamma$. Alors lorsque $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\left(1 - \frac{g(x)}{\ln(1-x)}\right),$$

et puisque $g(x)/\ln(1-x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-, on en déduit que, quand x tend vers 1^-, on a $f(x) \sim -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Pour obtenir $g(-1)$, calculons la somme partielle $s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$.

$$\begin{aligned}
s_N &= 1 - \sum_{n=2}^{N}(\ln(n-1) - \ln n)(-1)^n - \sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{N}((-1)^{n-1}\ln(n-1) + (-1)^n \ln n) + \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n \ln n + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \ln n + \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \ln n - (-1)^N \ln N + \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

On a en particulier, lorsque $N = 2p$

$$\begin{aligned}
s_{2p} &= 2\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n \ln n - \ln(2p) + \sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= \ln\left[\left(\frac{2\cdot\dots\cdot(2p)}{1\cdot\dots\cdot(2p-1)}\right)^2 \frac{1}{2p}\right] + \sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2} + \sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Mais, en utilisant la formule de Stirling $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2n\pi}$, on obtient

$$\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2} \sim \frac{2^{4p}(p/e)^{4p}(2p\pi)^2}{(2p/e)^{4p}(4p\pi)(2p)} = \frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs, la suite $\left(\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ converge vers $\ln 2$ (voir exercice 9.26). Donc la suite (s_{2p}) converge vers $\ln\frac{\pi}{2} + \ln 2$, et puisque la série de terme général $a_n(-1)^n$ converge, la suite (s_n) converge et a même limite que la suite (s_{2p}). On a donc $g(-1) = \ln \pi$,

Alors $f(x) = \dfrac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$ a pour limite $\dfrac{g(-1) - \ln 2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{2}$.

10 Intégration sur un intervalle quelconque

10.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

10.1.1 Fonctions intégrables

Ce qu'il faut savoir

Intégrabilité

- Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est intégrable sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout segment $K \subset I$, $\displaystyle\int_K |f(t)|\,dt \leqslant M$.
- Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs réelles ou complexes.
  - Si $|f| \leqslant |g|$ sur I et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.
  - Dans le cas où $I = [a, b[$ (b est éventuellement $+\infty$)
    - $\star$ si $f = \underset{b}{O}(g)$ ou si $f = \underset{b}{o}(g)$ et si g est intégrable sur I alors f l'est aussi
    - $\star$ si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable sur I si et seulement si g est intégrable sur I.
- Lorsque f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et **positive** alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b.

Remarque

On dispose de résultats semblables sur un intervalle $]a, b]$. Les critères de comparaison (o, O et $\sim$) ne sont valables que lorsque l'intervalle est ouvert d'un seul côté (le comportement de la fonction au voisinage d'une borne ne donne aucune information sur le comportement au voisinage de l'autre). Si l'intervalle est du type $]a, b[$, il faut étudier séparément l'intégrabilité sur $]a, c]$ et $[c, b[$ où c est un point quelconque de $]a, b[$.

Fonctions de référence

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$.
- Si a et b sont des réels tels que $a < b$ alors
  - la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
  - la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 10.1

CCP MP 2006

Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On étudie l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ puis sur $]0,1]$.
- On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- On a $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{x} = \dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}$. On ne dispose pas d'équivalent simple pour $\sin(1/x^2)$, on peut en revanche majorer $\left|\dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, $x \mapsto \dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}$ l'est également et donc f est intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 10.2

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1[$.

La fonction f est continue sur $]0,1[$. On étudie l'intégrabilité sur $]0,1/2]$ puis sur $[1/2,1[$.

On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} |\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(1/\sqrt{x}\right)$ (car $\sqrt{x}|\ln x|^\beta$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, par croissances comparées si $\beta > 0$, directement sinon), donc f est intégrable sur $]0, 1/2]$. De plus, $|f(x)| \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{|x-1|^\beta}{|x-1|^\alpha} = \dfrac{1}{(1-x)^{\alpha-\beta}}$, donc f est donc intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\alpha - \beta < 1$.
La fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $\alpha - \beta < 1$.

Exercice 10.3

Mines-Ponts MP 2006

Étudier l'intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{|x^\alpha - 1|^\beta}$ en fonction des paramètres réels α et β.

La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$, sauf lorque $\alpha = 0$ puisque dans ce cas f n'est pas définie.

- On commence par chercher un équivalent simple de f au voisinage de 1. En posant $x = 1 + h$, on obtient alors
$$f(1+h) = \frac{h}{|(1+h)^\alpha - 1|^\beta} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{h}{|\alpha h|^\beta} = \frac{1}{|\alpha|^\beta h^{\beta-1}},$$
d'où $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{|\alpha|^\beta (x-1)^{\beta-1}}$, donc f est intégrable sur $]1, 2]$ si et seulement si $\beta - 1 < 1$ soit $\beta < 2$.
- Il faut faire attention lors de la recherche d'un équivalent en $+\infty$ car x^α n'a pas le même comportement suivant le signe de α. Si $\alpha > 0$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^{\alpha\beta}} = \dfrac{1}{x^{\alpha\beta-1}}$, et donc f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha\beta > 2$. Dans le cas $\alpha < 0$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

Finalement f est intégrable sur $]1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$, $\beta < 2$ et $\beta > 2/\alpha$.

Le résultat de l'exercice suivant n'est pas au programme, mais il est fortement conseillé de l'avoir étudié et de retenir les méthodes employées.

Exercice 10.4

Intégrales de Bertrand

Étudier l'intégrabilité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ sur $[2, +\infty[$ puis $]0, 1/2]$ en fonction des réels α et β.

- Intégrabilité sur $[2, +\infty[$: l'idée est de se dire que le comportement principal de la fonction pour l'intégrabilité est celui de $\dfrac{1}{x^\alpha}$ sauf au cas limite d'intégrabilité, lorsque $\alpha = 1$. Plus précisément, par croissances comparées, $\dfrac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ si $\alpha' < \alpha$. Si on peut trouver un tel α' avec $\alpha' > 1$, on obtient l'intégrabilité de f sur $[2, +\infty[$. C'est possible lorsque $\alpha > 1$. Dans le cas où $\alpha < 1$, on a $xf(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta}$ de limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi $f(x) \geqslant 1/x$ pour x suffisamment grand, donc f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$. Dans le cas où $\alpha = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^{-\beta}$ et f est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ lorsque $\beta \neq 1$ et celle de $x \mapsto \ln|\ln x|$ si $\beta = 1$. La fonction f est positive et elle est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si une primitive de f sur $[2, +\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$. Cela ne sera le cas que lorsque $1 - \beta < 0$ soit $\beta > 1$.
Conclusion : la fonction f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou bien $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.
- Intégrabilité sur $]0, 1/2]$: le raisonnement est similaire. La différence provient du fait que $x \mapsto 1/x^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
– Si $\alpha < 1$, pour tout $\alpha' > \alpha$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha'} f(x) = 0$ par croissances comparées et si on choisit $\alpha' \in]\alpha, 1[$, alors $f(x) = \underset{x \to 0}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha'}}$ intégrable sur $]0, 1/2]$ ce qui donne l'intégrabilité de f sur $]0, 1/2]$.
– Si $\alpha = 1$, avec des primitives semblables (attention aux valeurs absolues) et le même raisonnement que dans la première situation, f est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\beta > 1$.
– Si $\alpha > 1$, alors $xf(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, $f(x) \geqslant 1/x$ au voisinage de 0 et f n'est pas intégrable sur $]0, 1/2]$.
Conclusion : la fonction f est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 10.5

Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $S(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$.

1) On commence par quelques propriétés importantes de R. Pour tout $x > 0$, $R(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$, ce qui permet de montrer que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée $-f$ et que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$. De plus, R est strictement positive sur $[1, +\infty[$ et f est également positive, donc $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est de signe fixe et l'étude de l'intégrabilité équivaut à l'existence d'une limite finie pour $x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$. Soit $X > 1$, comme $R' = -f$, on obtient

$$\int_1^X \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \left[-\dfrac{R(x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_1^X & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[-\ln(R(x))\right]_1^X & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$, l'intégrale considérée admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha > 0$ c'est-à-dire $\alpha < 1$. Finalement $x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

2) La fonction S est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée f, nulle en 0, strictement positive sur $]1, +\infty[$, ce qui justifie l'existence et la continuité de $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$, et de limite infinie en $+\infty$. Une primitive de g_α sur $[2, +\infty[$ est $\dfrac{1}{(1-\alpha)S^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln S$ si $\alpha = 1$. Comme dans la première question, on montre que g_α est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

10.1.2 Intégrales convergentes

Ce qu'il faut savoir

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ (b éventuellement infini).
  - On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b (par valeurs inférieures), sinon on dit que l'intégrale diverge.
  - Si f est intégrable sur $[a, b[$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente. La réciproque est fausse (voir exercice suivant).
- On a une définition similaire lorsque f est continue par morceaux sur $]a, b]$ (avec a fini ou non).

- Lorsque f est continue par morceaux sur $]a,b[$, on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsque, pour un réel c quelconque dans $]a,b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent.

Exercice 10.6

Soit $\alpha > 0$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente et que $f_\alpha : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
Indication de la rédaction : on pourra minorer $|\sin t|$ par $\sin^2 t$.

- On a pour tout $t > 0$, $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ lorsque $\alpha > 1$. Donc f_α est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge.
- Si $\alpha \in]0,1]$. Soit $X > 1$. En intégrant par parties, on obtient
$$\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^X - \alpha\int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt = \cos 1 - \frac{\cos X}{X^\alpha} - \alpha\int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$
Puisque $\alpha+1 > 1$, on montre comme précédemment que $t \mapsto \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. La fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Il en est de même pour $\frac{\cos X}{X^\alpha}$ et $\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$, ce qui donne la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$.
Pour $t \geqslant 1$, $\frac{|\sin t|}{t^\alpha} \geqslant \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = \frac{1-\cos(2t)}{t^\alpha}$. On montre comme ci-dessus que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha}\,dt$ est convergente. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\,dt$ diverge.

Remarque

On montre de même que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha}\,dt$ converge si $\alpha > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta t)}{t^\alpha}\,dt$ converge si $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$.

Ce qu'il faut savoir

Lorsqu'on veut étudier la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$, à l'aide d'une intégration par parties, on peut souvent exprimer $\int_a^x f(t)\,dt$ comme la somme d'une fonction admettant une limite finie en b et d'une intégrale $\int_a^x g(t)\,dt$ où g est intégrable sur $[a,b[$. Cette expression montre que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge mais ne prouve pas que f est intégrable sur $[a,b[$.

Exercice 10.7

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Dans le cas où f est intégrable sur $[1,+\infty[$, la majoration $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \leqslant |f(t)|$ pour $t \geqslant 1$ permet de conclure. Sinon on revient à la définition de la convergence. Appelons F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in [1,+\infty[$, on a $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. La convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ signifie, par définition, que F admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 1$, par intégration par parties sur $[1,x]$ (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment),

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(1)}{1} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt\ .$$

De plus F est continue sur $[1,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons M un majorant de $|F|$ sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$, et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{M}{t^2}$. Donc $t \mapsto \frac{F(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est donc convergente et finalement, $\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Tout cela signifie bien que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. On obtient, de plus, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}$.

Ce qu'il faut savoir

La convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ n'apporte aucune information sur le comportement de f au voisinage de l'infini (limite, équivalent ou domination, voir exercice 10.20, page 260). Dans les exercices théoriques, il est fréquent d'interpréter la convergence de l'intégrale comme l'existence d'une limite finie d'une primitive de f.

10.1.3 Calcul d'intégrales

Ce qu'il faut savoir

Méthode de calcul

Pour déterminer la valeur de $\int_I f$, on peut calculer l'intégrale de f sur un segment inclus dans I en déterminant une primitive de f, par exemple par intégration par parties ou par changement de variable.

Exercice 10.8

d'après Centrale PC 2006

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$.

1) Justifier l'existence de I_n.

2) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x^{2n}$. Or $x \mapsto 1/x^{2n}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f l'est aussi et par continuité, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit $A > 0$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + \int_0^A \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\left(\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\right),\end{aligned}$$

en écrivant $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Lorsque A tend vers $+\infty$, toutes les limites existent, et on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ soit $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} I_1 = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} \\ &= \frac{2n-2}{2n-2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-4}{2n-4}\,\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{4}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{2}\,\frac{1}{2} I_1 \\ &= \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} I_1. \end{aligned}$$

On vérifie que $I_1 = \lim\limits_{A \to +\infty} \operatorname{Arctan} A = \pi/2$.

Remarque

- On fera attention, lors du calcul à ne pas écrire de fausses égalités comme, par exemple, $I_n = \displaystyle\int_0^A f_n(x)\,dx$.
- En effectuant le changement de variable $x = \tan t$, on montre que I_n est l'intégrale de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,dt$.

Exercice 10.9

CCP MP 2006

Soit f la fonction définie pour $x \in]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1[$ et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

- La fonction f est continue sur $]0,1[$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0,1/2]$. Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln((1-x)(1+x)) = \ln(1-x) + \ln(1+x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1/2]$, donc par symétrie, f est intégrable sur $[1/2,1[$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.
- Soit $0 < a < b < 1$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right]_a^b - \int_a^b \frac{2x}{x(1-x^2)}\,dx \\ &= -\frac{\ln(1-b)+\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ donc

$$\int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx = \ln(1+b) - \ln(1+a) - (\ln(1-b) - \ln(1-a)).$$

On regroupe les termes qui ont une limite infinie :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left(-\frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b)\right)\\ &\quad + \left(-\frac{\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} + \ln(1+a) - \ln(1+b) - \ln(1-a)\right)\end{aligned}$$

Or $\ln(1-b) - \dfrac{\ln(1-b)}{b} = \dfrac{(b-1)\ln(1-b)}{b}$ tend vers 0 par croissances comparées lorsque b tend vers 1. Finalement, en faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\ln 2 + 0 + 0 - \ln 2 - 0 = -2\ln 2.$$

Ce qu'il faut savoir

Changement de variable

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I et si φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de J sur I, alors

$$(f \circ \varphi)\,\varphi' \text{ est intégrable sur } J \text{ et } \int_I f = \int_J f \circ \varphi\,|\varphi'|.$$

Exercice 10.10

D'après Navale MP 2006

On considère, pour a et b réels, l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 x^a \left(\ln \frac{1}{x}\right)^b dx$.

1) Montrer que cette intégrale existe si et seulement si $a > -1$ et $b > -1$. On supposera ces conditions réalisées par la suite.

2) Montrer que $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} x^b\,dx = \frac{1}{(a+1)^{b+1}} I(0,b)$.

3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I(0,n) = nI(0,n-1)$ et en déduire la valeur de $I(a,n)$ pour $a > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) La fonction $f : x \mapsto x^a(-\ln x)^b$ est continue sur $]0,1[$. Le plus simple est le comportement au voisinage de 1, puisque $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} 1.(1-x)^b$, et $x \mapsto (1-x)^b$ est

intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $b > -1$. L'étude en 0 est plus difficile, on peut se reporter à l'exercice 10.4, page 242, sur les intégrales de Bertrand pour montrer que f est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $a > -1$ ou si $a = -1$ et $b < -1$.
En conclusion f est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $a > -1$ et $b > -1$ (dans le cas $a = -1$ les deux conditions, $b < -1$ et $b > -1$, obtenues pour chacune des bornes sont simultanément impossibles).

2) Puique f est intégrable sur $]0, 1[$ et que la fonction $u \mapsto e^{-u}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$,
$$I(a,b) = \int_{+\infty}^{0} e^{-au}u^b(-e^{-u}\,du) = \int_0^{+\infty} u^b e^{-(a+1)u}\,du,$$
qui est le premier résultat demandé. On effectue alors le changement $t = (a+1)u$ ($t \mapsto t/(a+1)$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient
$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a+1}\right)^b e^{-t}\frac{dt}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^{b+1}}\int_0^{+\infty} t^b e^{-t}\,dt,$$
et ainsi $I(a,b) = \dfrac{1}{(a+1)^{b+1}}I(0,b)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A t^n e^{-t}\,dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt$, ce qui donne la relation $I(0,n) = nI(0,n-1)$ par passage à la limite. Par récurrence, on montre alors que $I(0,n) = n!I(0,0)$ avec $I(0,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$ et, pour $a > -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)^{b+1}}$.

Exercice 10.11

TPE MP 2006

Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}$.
Indication de la rédaction : on utilisera le changement de variable $t = \tan x$.

Le changement de variable proposé ne convient pas sur $[0, \pi]$, il faut changer l'intervalle d'intégration. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + a\sin^2 x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. f est également paire et de période π. Ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$. On peut exprimer $\sin^2 x$ assez facilement à l'aide de $\tan^2 x$ puisque $\sin^2 x = \cos^2 x \tan^2 x$ soit $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ si $x \in [0, \pi/2[$. La fonction $\varphi : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi/2[$ et f est intégrable sur $[0, \pi/2]$ donc sur

$[0, \pi/2[$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable dans l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(a+1)t^2}\,dt \\ &= \frac{2}{a+1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{1}{a+1}}\,dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{t}{\alpha}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\alpha^2}$ si $\alpha \neq 0$ et que par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\alpha^2}\,dt = \frac{\pi}{2\alpha}$ si $\alpha > 0$, on obtient

$$I = \frac{2}{a+1}\,\frac{\pi\sqrt{a+1}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

Remarque

- Le changement de variable $t = \tan(x/2)$ aurait été valable sur $[0, \pi[$ mais les calculs sont alors plus longs et compliqués.
- Afin d'effectuer le changement de variable $x = \tan t$, on a transformé une intégrale définie (sur le segment $[0, \pi/2]$) en une intégrale sur un intervalle ouvert (ici $[0, \pi/2[$). Cette transformation est légitime puisque si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors elle est intégrable sur les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ et les différentes intégrales ont même valeur.

10.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 10.12

Centrale MP 2006

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

1) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite en $+\infty$, que peut-on dire de cette limite ?

2) On suppose f décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

1) Si f admet une limite ℓ strictement positive, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$ et la fonction $x \mapsto \ell$ n'est pas intégable sur $\mathbb{R}_+$, donc f non plus. Si f tend vers $+\infty$ alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) \geqslant 1$ et f n'est pas intégrable. Donc si f admet une limite en $+\infty$ et si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors f tend vers 0 en $+\infty$.

2) On doit faire apparaître un terme sous la forme $tf(t)$. Pour cela, on encadre l'intégrale $\displaystyle\int_{t/2}^{t} f(u)\,du$ (la longeur de l'intervalle va faire apparaître le facteur t). La décroissance de f donne $\displaystyle\int_{t/2}^{t} f(u)\,du \geqslant (t - t/2)f(t)$, c'est-à-dire $0 \leqslant tf(t) \leqslant 2\displaystyle\int_{t/2}^{t} f(u)\,du$. Il reste à montrer que ce terme tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Pour cela on peut écrire

$$\int_{t/2}^{t} f(u)\,du = \int_{0}^{t} f(u)\,du - \int_{0}^{t/2} f(u)\,du.$$

Les deux intégrales admettent pour limite $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du$ lorsque t tend vers $+\infty$ (intégrabilité de f) et la différence admet donc une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 10.13

Mines-Ponts MP 2006

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$, la calculer à l'aide d'un changement de variable simple (a est un réel strictement positif).

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+a^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  D'une part, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{a^2}$ donc f est intégrable sur $]0,1]$, d'autre part, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- On pourrait penser en premier à faire une intégration par parties, mais la nouvelle intégrale est aussi difficile à calculer. On pense alors à un changement de variable. On le cherche de sorte que les bornes ne soient pas changées, et que le quotient reste sous la même forme. On effectue le changement $t = a^2/u$, possible puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u \mapsto a^2/u$ est une bijection $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même, de classe $\mathscr{C}^1$. On obtient

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(a^2/u)}{\dfrac{a^4}{u^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du = \int_{0}^{+\infty} \frac{2\ln a - \ln u}{a^2+u^2}\,du.$$

  Cela donne finalement

$$2I = \int_{0}^{+\infty} \frac{2\ln a}{a^2+u^2}\,du = (2\ln a)\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{u}{a}\right]_0^A = \frac{\pi\ln a}{a}.$$

Exercice 10.14

TPE MP 06

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x}\, dx$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction th est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $3x \geqslant x$ si $x > 0$, f est à valeurs strictement positives. Il suffit donc de montrer que l'intégrale converge pour montrer en même temps l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$. Soit $0 < a < b$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \frac{\operatorname{th} 3x}{x}\, dx - \int_a^b \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx = \int_{3a}^{3b} \frac{\operatorname{th} u}{u}\, du - \int_a^b \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx,$$

en effectuant le changement linéaire $u = 3x$ dans la première intégrale. Il vient alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{3a} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx - \int_b^{3b} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx$$

Par croissance de la fonction tangente hyperbolique et de l'intégrale,

$$\operatorname{th}(a) \int_a^{3a} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_a^{3a} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx \leqslant \operatorname{th}(3a) \int_a^{3a} \frac{1}{x}\, dx,$$

ce qui donne l'encadrement $\operatorname{th}(a).\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_a^{3a} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx \leqslant \operatorname{th}(3a).\ln 3$. Lorsque a tend vers 0, $\operatorname{th} a$ et $\operatorname{th} 3a$ tendent vers 0 et par encadrement, $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_a^{3a} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx = 0$.

Le même encadrement avec b qui tend vers $+\infty$ donne $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_b^{3b} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx = \ln 3$.

Finalement les deux limites existent et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x}\, dx = \ln 3$.

Remarque

Beaucoup d'exercices sont construits sur ce modèle. On applique une méthode semblable à celle de l'exercice précédent pour calculer les intégrales de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{f(ax) - f(bx)}{x}$.

Exercice 10.15

Polytechnique-ESPCI PC 2005

1) Montrer que les fonctions $t \mapsto \ln \sin t$ et $t \mapsto \ln \cos t$ sont intégrables sur $]0, \pi/2[$. On appelle alors I et J la valeur de ces intégrales. Montrer que $I = J$.

2) Trouver une relation entre $I + J$ et I.

3) En déduire la valeur de I et de J.

1) La fonction $f : t \mapsto \ln \sin t$ est continue sur $]0, \pi/2]$. La fonction f tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers 0. Pour t proche de 0, on a $\sin t = t + o(t) = t(1 + o(1))$ et $f(t) = \ln t + \ln(1 + o(1)) = \ln t + o(1)$ donc $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln t$. Par ailleurs, $t \mapsto \ln t$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$. Donc par comparaison, f est intégrable sur $]0, \pi/2]$. Puisque $\cos u = \sin(\pi/2 - u)$, on va appliquer le changement de variable $t = \pi/2 - u$ dans la première intégrale. $\varphi : u \mapsto \pi/2 - u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$ et f est intégable sur $]0, \pi/2]$ donc $u \mapsto f(\varphi(u)).\varphi'(u) = -\ln(\cos u)$ est intégrable sur $[0, \pi/2[$ avec

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos u)\, du = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\, du$$

c'est-à-dire $I = J$.

2) D'une part $I + J = 2I$, et d'autre part

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin 2t}{2})\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt - \int_0^{\pi/2} \ln 2 \, dt. \end{aligned}$$

Puisque $u \mapsto u/2$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, \pi]$ sur $]0, \pi/2]$, on peut appliquer le changement $t = u/2$ dans la première intégrale, ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du = \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\, du\right).$$

On peut appliquer le changement de variable $u = \pi - t$ dans l'intégrale restante et $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\, du = I$. Finalement $I + J = \dfrac{1}{2}(2I) - \dfrac{\pi}{2}\ln 2 = I - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

3) Conclusion : $I = J = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 10.16

Centrale MP 2006, Mines-Ponts MP 2007

1) Montrer que pour $x > 0$, on peut définir

$$f_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \text{ et } f_2(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

2) Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(x)\, dx$ sont convergentes et calculer ces intégrales.

1) se reporter à l'exercice 10.6, page 245.

2) Pour $x > 0$, on a $f_1(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Ainsi f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ (cela montre également que f_1 est de limite nulle en $+\infty$). Le fait de connaître f_1' permet de réaliser une intégration par parties. Si $0 < a < b$, on obtient

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = [xf_1(x)]_a^b + \int_a^b x\frac{\sin x}{x}\,dx = [xf_1(x) - \cos x]_a^b\,.$$

On doit donc étudier plus précisément le comportement de f_1 au voisinage de 0 et $+\infty$, afin de déterminer la limite de $xf_1(x)$ aux deux bornes.

- La fonction $g_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ admet une limite finie en 0, elle se prolonge par continuité en 0, donc cette fonction est intégrable sur $]0, 1]$ et f_1 admet une limite finie en 0. Ainsi $\lim\limits_{a\to 0} af_1(a) = 0$.
- Pour x grand, on détermine un développement asymptotique de f_1. Soit $A > x$,

$$\int_x^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^A - \int_x^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt,$$

ce qui donne lorsque A tend vers $+\infty$, $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. De plus $\left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x}$. Cependant comme on doit étudier la limite en $+\infty$ de $xf_1(x)$, cette majoration n'est pas assez précise. On intègre par parties une autre fois, ce qui donne

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}.$$

Comme précédemment, on obtient $\left|2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, ce qui permet d'obtenir $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Le calcul initial donne

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = bf_1(b) - af_1(a) - \cos b + \cos a$$

avec $\lim\limits_{a\to 0} \cos a - af_1(a) = 1$ et $bf_1(b) - \cos b = \cos b + \underset{b\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{b}\right) - \cos b = \underset{b\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{b}\right)$ de limite nulle lorsque b tend vers $+\infty$. Finalement, en passant aux limites, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1.$$

- On montre de la même manière que $f_2(x) = -\dfrac{\sin x}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. La difficulté est en 0 puisque $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. On écrit
$$f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt.$$
Puisque $\dfrac{\cos t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et on s'attend à ce que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt$ se comporte comme l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$ de limite infinie. On étudie la différence $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\cos t - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite nulle en 0 donc se prolonge par continuité en 0. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,dt,$$
et puisque $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, on obtient $f_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.
Ensuite, pour $0 < a < b$,
$$\int_a^b f_2(x)\,dx = bf_2(b) - af_2(a) - \int_a^b x f_2'(x)\,dx = bf_2(b) - af_2(a) + \int_a^b \cos x\,dx$$
Avec $af_2(a) \underset{a\to 0}{\sim} -a\ln a$ de limite nulle en 0, $bf_2(b) = -\sin b + \underset{b\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{b}\right)$ et $\displaystyle\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(x)\,dx = 0$.

Exercice 10.17

CCP MP 2005

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}\,dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}$. On commence par étudier le dénominateur. Si $x > 1$, $\sin x \leqslant 1 < \sqrt{x}$. Si $x \in]0, 1]$, on a $\sin x < x \leqslant \sqrt{x}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\sin x < \sqrt{x}$, et f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. De plus $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x = o(\sqrt{x})$, ce qui donne $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. f est donc intégrable sur $]0, 1]$. En revanche pour x grand, on a simplement $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ qui n'est pas de signe fixe. Comme $x \mapsto \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, on ne peut pas conclure par l'absolue convergence.

On effectue alors un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O(\frac{1}{x})\right)$$
$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+O(\frac{1}{x^{3/2}}).$$

On décompose ainsi $f(x)$ en une somme de trois fonctions, $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$ et $f_3(x) = f(x) - f_1(x) - f_2(x) = O(\dfrac{1}{x^{3/2}})$. f_3 est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_3(x)\,dx$ converge. De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_1(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(x)\,dx$ diverge. Au final, l'intégrale étudiée est divergente.

Exercice 10.18

D'après plusieurs concours

1) Soit f continue, décroissante et intégrable sur $]0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

2) En déduire que $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

1) On ne peut bien entendu pas directement appliquer le résultat sur les sommes de Riemann puisque la fonction f n'est pas continue sur le segment $[0,1]$. On va donc encadrer la somme par des intégrales. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Puisque f est décroissante sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a

$$\frac{k+1-k}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt \leqslant \frac{k+1-k}{n} f(\frac{k}{n}).$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \leqslant \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$

De plus, pour tout $t \in]0, \frac{1}{n}]$, f est minorée par $f(\frac{1}{n})$ et f est intégrable sur $]0, 1]$, on a donc également $\frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \leqslant \int_0^{1/n} f(t)\,dt$. Cela permet d'obtenir, en ajoutant à l'inégalité précédente, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$. On a également

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{f(1)}{n} \geqslant \int_{1/n}^1 f(t)\,dt + \frac{f(1)}{n}$$

ce qui donne finalement l'encadrement

$$\int_{1/n}^1 f(t)\,dt + \frac{f(1)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt.$$

f est intégrable sur $]0, 1]$ donc la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_{1/n}^1 f(t)\,dt$ est $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $f(1)/n$ tend vers 0. Par encadrement, on obtient le résultat demandé.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. On a

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1} \ln k\right) - \ln n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est continue, décroissante et intégrable sur $]0, 1]$. La question précédente entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln u_n = -\int_0^1 \ln x\,dx$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim_{a\to 0} [x \ln x - x]_a^1 = -1.$$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-1}$, ce qui donne $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on définit $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. On a $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. La fonction f est continue sur $]0, 1[$, décroissante sur $]0, 1/2]$ puis croissante sur $[1/2, 1[$. On généralise le résultat de la première question pour des fonctions monotones et intégrables sur des intervalles $]a, b]$ ou $[a, b[$ (a et b réels). On sépare la somme en deux sommes, l'une où l'indice k varie de 1 à $E(n/2)$ et l'autre où l'indice k prend les autres valeurs. On obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi.$$

On peut calculer l'intégrale de différentes façons : soit de façon usuelle, en écrivant $t(1-t) = \frac{1}{4} - (t - \frac{1}{2})^2$ et en intégrant à l'aide de la fonction arcsinus, soit en utilisant le résultat de l'exercice 17.10, page 424, qui donne la valeur $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \Gamma(1/2)^2/\Gamma(1) = (\sqrt{\pi})^2$, soit encore à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

10.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10.19

CCP MP 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Prouver l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt.$$

On pourra étudier la série de terme général $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$.

- On étudie, comme conseillé, la série de terme général a_n. Par translation, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,du = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du.$$

On note $b_n = (-1)^n a_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme b_n est positif et la série $\sum a_n$ est donc une série alternée. Il reste à étudier la décroissante vers 0 de (b_n) pour pouvoir appliquer le critère spécial des séries alternées. Puisque f est décroissante et positive sur $\mathbb{R}$, pour tout $u \in [0, \pi]$, $f(u+(n+1)\pi) \leqslant f((n+1)\pi) \leqslant f(u+n\pi)$, et puisque $\sin u \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$, on obtient,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^{\pi} f(u+(n+1)\pi)\sin(u)\,du &\leqslant \int_0^{\pi} f((n+1)\pi)\sin(u)\,du \\ &\leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. On a également $b_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} f(n\pi)\sin(u)\,du = 2f(n\pi)$ donc (b_n) est une suite décroissante vers 0. En conclusion $\sum(-1)^n b_n$ converge.

- On doit maintenant étudier la limite de $\displaystyle\int_0^{x} f(t)\sin t\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$. On va s'approcher de la série étudiée précédemment. Soit $x > 0$, il existe un unique

$N(x) \in \mathbb{N}$ tel que $N(x)\pi \leqslant x < (N(x)+1)\pi$. Plus précisément, $N(x) = E(x/\pi)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\sin t\,dt - \int_0^{\pi N(x)} f(t)\sin t\,dt\right| &= \left|\int_{\pi N(x)}^x f(t)\sin t\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{\pi N(x)}^x |f(t)|\,dt \\ &\leqslant (x-\pi N(x))|f(\pi N(x))| \\ &\leqslant \pi|f(\pi N(x))|\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x) = +\infty$, la différence précédente tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\sin t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{N(x)} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

L'intégrale est donc convergente.

Exercice 10.20

Centrale MP 2006

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_a(x) = \dfrac{e^x}{1+|\sin x|e^{ax}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(a) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_a(t)\,dt$.

1) Montrer que f_a est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la série $\sum u_n(a)$ converge.

2) Trouver les valeurs de a pour lesquelles f_a est intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum(-1)^n u_n(a)$ converge.

1) On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(a) = \int_0^{(N+1)\pi} f_a(x)\,dx$. Puisque f_a est positive, f_a est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^x f_a(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Comme la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_a(t)\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle admet une limite finie ou infinie en $+\infty$. Enfin S_N admet la même limite. Ainsi f_a est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\sum u_n(a)$ converge (on aurait également pu procéder par encadrement de l'intégrale).

2) On va donc étudier la nature de la série. Par un changement de variable $t = n\pi + u$ (translation),

$$u_n(a) = \int_0^{\pi} \frac{e^{u+n\pi}}{1 + |\sin(u)|e^{a(u+n\pi)}}\, du.$$

On encadre au mieux cette intégrale.

Pour $a \leqslant 0$, si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{n\pi}}{1+1}\, du = \frac{\pi}{2} e^{n\pi}$, de limite infinie. La série est divergente. On suppose dans la suite que $a > 0$. On peut commencer par majorer $|\sin u|$ par 1, cela donne

$$\begin{aligned} u_n(a) &\geqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{n\pi}}{1 + e^{a(u+n\pi)}}\, du \\ &\geqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{n\pi}}{1 + e^{a((n+1)\pi)}}\, du = \pi \frac{e^{n\pi}}{1 + e^{a((n+1)\pi)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{e^{a\pi}} e^{(1-a)n\pi}. \end{aligned}$$

Cela permet de montrer que $\sum u_n(a)$ diverge grossièrement si $1 - a \geqslant 0$ soit $a \leqslant 1$. On s'intéresse à une majoration de $u_n(a)$. On peut déjà écrire

$$0 \leqslant u_n(a) \leqslant e^{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + e^{an\pi} \sin u}\, du.$$

Cette intégrale n'est pas simple à calculer. Par symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + e^{an\pi} \sin u}\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + e^{an\pi} \sin u}\, du.$$

Afin de majorer cette intégrale, on doit minorer $\sin u$. Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, on montre que $\sin u \geqslant \dfrac{2u}{\pi}$ si $u \in [0, \pi/2]$ (c'est pour cette raison qu'on a réduit l'intervalle d'intégration). On obtient alors

$$u_n(a) \leqslant 2e^{(n+1)\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \frac{2e^{an\pi}}{\pi} u}\, du = \frac{\pi e^{(n+1)\pi}}{e^{an\pi}} \ln\Big(1 + \frac{2e^{an\pi}}{\pi}\frac{\pi}{2}\Big).$$

Ce dernier terme vaut $\dfrac{\pi e^{(n+1)\pi}}{e^{an\pi}} \ln(1+e^{an\pi}) \underset{n\to+\infty}{\sim} an\pi^2 e^{\pi} e^{(1-a)n\pi}$. Puisque $a > 1$, on a obtenu le terme général d'une série convergente (il est négligeable devant $1/n^2$), ce qui donne la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n(a)$. Finalement $\sum u_n(a)$ converge si et seulement si $a > 1$.

3) Si $a \leqslant 1$, $u_n(a)$ ne tend pas vers 0. Si $a > 1$, $|(-1)^n u_n(a)| = u_n(a)$ et $\sum u_n(a)$ converge. Donc $\sum (-1)^n u_n(a)$ converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice 10.21

Polytechnique MP 2005

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x - 1/x) \end{array} \right.$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

- Soit $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 1/x \end{array} \right.$. Pour tout $x > 0$, $\varphi_1'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0$. Ainsi φ_1 est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\varphi_1(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. De même $\varphi_2 : x \mapsto x - 1/x$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}$. De plus, soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $\varphi_1(x) = y$ est équivalente à $x^2 - yx - 1 = 0$ ce qui donne $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$ et puisque x doit être positif, on obtient $\varphi_1^{-1}(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$. Le même calcul donne $\varphi_2^{-1}(y) = \dfrac{y - \sqrt{y^2+4}}{2}$.
- Soit K un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a
$$\int_K |g(x)|\,dx = \int_K |f(\varphi_1(x))|\,dx = \int_{\varphi(K)} |f(u)|(\varphi_1^{-1})'(u)\,du,$$
avec $(\varphi_1^{-1})'(u) = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2+4}})$. Comme pour tout $u > 0$, on a $0 \leqslant (\varphi_1^{-1})'(u) \leqslant 1$, on obtient $\displaystyle\int_K |g(x)|\,dx \leqslant \int_{\varphi(K)} |f(u)|\,du \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\,du$. Par définition, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On refait le même calcul sur les segments de $\mathbb{R}_-^*$ avec $(\varphi_2^{-1})'(u) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{u}{\sqrt{u^2+4}})$ dont les valeurs sont dans $[0, 1]$.
- Le fait d'avoir g intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que les deux $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes φ_1 et φ_2 permet de réaliser le changement de variable dans les intégrales, ce qui donne
$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\,du$$
ainsi que
$$\int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\,du$$
En ajoutant, on obtient l'égalité demandée.

Exercice 10.22

Polytechnique MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ si $x > 0$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt.$$

- Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, primitive sur $\mathbb{R}^+$ de f qui s'annule en 0. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$. F étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} g'(x) = F'(0) = f(0)$. Donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- On va chercher à intégrer par parties $\displaystyle\int g^2$. On doit dériver g et g n'est de classe $\mathscr{C}^1$ que sur $]0, +\infty[$ (en général). On se donne donc $0 < a < b$,

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = \left[tg^2(t)\right]_a^b - \int_a^b 2tg(t)g'(t)\,dt.$$

Or, pour $t > 0$, $g'(t) = \dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{F(t)}{t^2}$ et $tg'(t) = f(t) - \dfrac{F(t)}{t} = f(t) - g(t)$. Cela donne

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = bg^2(b) - ag^2(a) + 2\int_a^b g(t)\,(g(t) - f(t))\,dt$$

ce qui donne,

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Toutes les fonctions de la variable a qui apparaissent sont continues en 0, on peut alors passer à la limite lorsque a tend vers 0, ce qui donne, pour tout $b > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^b g^2(t)\,dt &= -bg^2(b) + 2\int_0^b f(t)g(t)\,dt \\ &\leqslant 2\int_0^b f(t)g(t)\,dt \leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^b g^2(t)\,dt}.\end{aligned}$$

ce qui donne, en élevant au carré

$$\left(\int_0^b g^2(t)\,dt\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^b g^2(t)\,dt\right).$$

Le cas où g est la fonction nulle donne bien le résultat souhaité. Dans le cas contraire, il existe B tel que pour tout $b \geqslant B$, $\int_0^b g^2(t)\,dt > 0$. En divisant par $\int_0^b g^2(t)\,dt$, on obtient alors pour $b \geqslant B$

$$\int_0^b g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^b f^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt.$$

g^2 étant positive, cela donne l'existence d'une limite lorsque b tend vers $+\infty$ pour $\int_0^b g^2(t)\,dt$ ainsi que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt.$$

Théorème de convergence dominée et applications

11

11.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

11.1.1 Théorème de convergence dominée

Ce qu'il faut savoir

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si :
(i) (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I,
(ii) la fonction f est continue par morceaux sur I,
(iii) il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx.$

Remarque

- Bien entendu, on peut utiliser une suite de fonctions définie seulement à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
- L'hypothèse de domination est fondamentale et ne peut pas être remplacée, par exemple par une hypothèse de convergence uniforme (voir exercice 11.4, page 268).
- L'hypothèse de domination entraîne que chaque fonction f_n est intégrable sur I.

Exercice 11.1

CCP PSI 2005

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Déterminer la limite de $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$.

1) La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.
Puisque $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, f_n l'est également.

2) Les hypothèses de continuité et de domination ont été obtenues dans la question précédente. Il reste à étudier la convergence simple de la suite de fonctions. Si $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{nx}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$, fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

Exercice 11.2

CCP PSI 2005

On définit pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$. Prouver l'existence de I_n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Soit n un entier supérieur à 2 et f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(t) = \dfrac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}$. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$.
On étudie la limite simple de cette suite de fonctions :

- si $t \in]0,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$,
- si $t = 1$ alors $f_n(1) = 1$ pour tout $n \geqslant 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$,
- si $t > 1$ alors $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

Donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux.
Il reste à dominer cette suite de fonctions. Il est clair que la majoration de $|f_n(x)|$ va être différente suivant que $x \in]0,1]$ ou $x > 1$. Soit $n \geqslant 2$:

- si $x > 1$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{2x^n}{x^{2n}} = \dfrac{2}{x^n} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$.
- si $x \in]0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Soit φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{2}{x^2}$ si $x > 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0,1]$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

Ce qu'il faut savoir

Quelques pistes pour trouver une bonne fonction qui domine

La réponse n'est pas toujours simple mais on peut donner quelques idées générales.

- On commence par détecter les facteurs indépendants de n, on les factorise et on ne cherche surtout pas à les majorer pour simplifier l'écriture (par exemple en majorant $\dfrac{1}{1+t^2}$ par $\dfrac{1}{t^2}$ on crée un problème d'intégrabilité au voisinage de 0).
- Si la limite simple fait apparaître plusieurs intervalles, on peut chercher une domination sur chacun des intervalles (l'écriture d'une fonction dominante peut faire apparaître plusieurs intervalles).
- Il reste à majorer les termes qui dépendent de n. Plusieurs méthodes sont possibles : majoration directe (par exemple $|\sin nu|$ par $|nu|$ ou par 1), minoration d'un terme positif par 0 (au dénominateur), étude de la suite ou d'une fonction associée (en remplaçant n par une variable t dans $\mathbb{R}$), encadrement de $\dfrac{1}{n}$ entre 1 et 0...

Exercice 11.3

CCP PSI et MP 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée et telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent en l'infini de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = f(t)e^{-nt}$. On note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)e^{-nt}| \leqslant Me^{-t}$. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Cela permet de justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. L'application du théorème de convergence dominée donne seulement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Pour déterminer un équivalent de I_n, on effectue le changement de variable linéaire $u \mapsto u/n$ dans I_n, ce qui est possible puisque la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On obtient $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}\,du$. La fonction $g_n : u \mapsto f(\frac{u}{n})e^{-u}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction continue $g : u \mapsto f(0)e^{-u}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \geqslant 0, |g_n(u)| \leqslant Me^{-u}$. Le théorème de convergence dominée entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)\,du = f(0)\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = f(0).$$

Puisque $f(0) \neq 0$, on obtient $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n}$.

Exercice 11.4

(PSI)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \dfrac{t^n e^{-t}}{n!}$.

1) Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n). On note $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

2) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

3) Que peut-on en conclure ?

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite numérique $\left(\dfrac{t^n}{n!}\right)$ converge vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n'(t) = (n-t)t^{n-1}\dfrac{e^{-t}}{n}$. L'étude des variations de f_n donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un maximum pour f_n valant $f_n(n) = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$. La fonction f_n est positive, si bien que

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \qquad \text{(formule de Stirling).}$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ (voir exercice 12.9 page 298), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$. En revanche $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

3) La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas suffisante pour permuter limite et intégrale.

11.1.2 Permutation série-intégrale

Ce qu'il faut savoir

Théorème d'intégration terme à terme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I. Si

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,

(ii) la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **continue par morceaux** sur I,

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,

(iv) la série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|\,dt$ converge,

alors S est intégrable sur I et $\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.

Remarque

– La dernière hypothèse du théorème précédent est fondamentale (voir exercice 11.9, page 273)

– La convergence normale uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est ni nécessaire, ni suffisante pour permuter somme et intégrale sur un intervalle non borné.

Exercice 11.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

2) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \dfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

1) Soit $x > 0$. On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ et la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela donne $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$, et $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$. Pour

tout $x \geqslant a$, on a $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$. Puisque $\sum f_n(a)$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Chacune des fonctions f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc S est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Finalement S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$, et pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A |f_n(t)|\,dt = \int_0^A f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^2}\int_0^A \frac{1}{t^2+\frac{1}{n}}\,dt = \frac{\sqrt{n}}{n^2}\operatorname{Arctan}(A\sqrt{n}).$$

On obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2n^{3/2}}$. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme donne d'une part l'intégrabilité de S sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 11.6

Navale PC 2005, TPE MP 2006

1) Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

On note alors $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

2) Montrer que, pour $t > 0$, $\displaystyle\frac{1}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.

3) En déduire que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et h_x la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La fonction h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées, on a $h_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et h_x est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$. Finalement h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

2) Si $t > 0$, alors $|e^{-t}| < 1$ et $\displaystyle\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^x e^{-(n+1)t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ (même démonstration que dans la première question). La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{t^x}{e^t-1}$.

La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-(n+1)t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^x e^{-u} \frac{du}{n+1}$$

car $u \mapsto u/(n+1)$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et f_n est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise le changement de variable. On obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \frac{1}{(n+1)^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

Comme $x + 1 > 1$, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme entraîne $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = \Gamma(x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$.

Ce qu'il faut savoir

Dans ce genre d'exercices (transformation d'une intégrale en la somme d'une série), l'idée est de décomposer l'une des fonctions à l'aide d'une série de fonctions. On est souvent amené à utiliser un développement en série entière d'une fonction. Fréquemment, on utilise la somme de la série géométrique ou celle de la série exponentielle.

11.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 11.7

CCP PSI 2006, Mines-Ponts PC 2007, MP 2006

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.

1) Quelle est la limite de I_n ?

2) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$.

1) On appelle f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = e^{-x^n}$. On étudie la convergence simple de cette suite de fonctions :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 1/e & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers f, fonction continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a $x^n \geqslant x$ et $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$. Donc, pour tout $x \in [1, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}$. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$, le théorème de convergence dominée implique $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

2) D'après ce qui vient d'être montré, la fonction f_n est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$. L'application $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$, donc $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-u} u^{1/n-1}\,du = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{1/n}\frac{e^{-u}}{u}\,du$.

On pose pour $u \geqslant 1$, $g_n(u) = u^{1/n}\dfrac{e^{-u}}{u}$. Puisque $u^{1/n} = e^{(\ln u)/n}$, on a, pour tout $u \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{e^{-u}}{u}$. De plus, pour tout $u \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|g_n(u)| \leqslant u\dfrac{e^{-u}}{u} = e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$. Cette dernière intégrale est non nulle (intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $[1,+\infty[$), d'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$.

Exercice 11.8

CCP PSI 2006

1) Montrer que pour tout $t \in [0,\pi/2]$, on a $\dfrac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$.

2) On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \sin\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0, \dfrac{n\pi}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad x > \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

Déterminer la limite des suites $(f_n(x))$ et $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$.

1) La fonction sinus est concave sur $[0,\pi/2]$. La corde qui passe par les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ d'équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$ est sous la courbe représentative de sinus (sur $[0,\pi/2]$) et pour tout $t \in [0,\pi/2]$, on a $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \leqslant \dfrac{2x}{\pi}$ alors $f_n(x) = 0$. Si $n > \dfrac{2x}{\pi}$, on a $x/n \in [0,\pi/2[$ donc $1 - \sin(x/n) > 0$, d'où

$$f_n(x) = \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1 - \sin\frac{x}{n})\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0$, on a lorsque n tend vers $+\infty$,

$$n\ln\left(1-\sin\frac{x}{n}\right) \sim -n\sin\frac{x}{n} \sim -n\frac{x}{n} = -x \text{ (même si } x=0).$$

La continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x} = f(x)$.
La suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue f sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminons une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et indépendante de n qui domine la suite de fonctions (f_n) : $\forall x \in [0, \dfrac{n\pi}{2}[$, $x/n \in [0, \pi/2[$ et $-\sin(x/n) \in]-1, 0]$.
On a également $\ln(1+u) \leqslant u$ si $u > -1$. D'où

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \exp\left(n(-\sin\frac{x}{n})\right) \leqslant \exp\left(n(-\frac{2x}{n\pi})\right) = \exp\left(-\frac{2x}{\pi}\right).$$

On note alors $\varphi(x) = \exp\left(-\dfrac{2x}{\pi}\right)$ pour $x \geqslant 0$. On a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$ si $x \in [0, \dfrac{n\pi}{2}]$ d'après ce qu'on vient de montrer, mais également si $x > \dfrac{n\pi}{2}$ puisqu'alors $f_n(x) = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$. Comme la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi/2}\left(1-\sin\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Ce qu'il faut savoir

- Il est assez fréquent d'avoir une suite de fonctions non nulles sur un segment dont les bornes dépendent de n et nulles ailleurs. Il faut faire attention lors de l'étude de la convergence simple : on fixe x dans l'intervalle complet d'étude, on justifie que pour n assez grand, ce x se situe dans l'intervalle où f_n est non nulle et on utilise ainsi la bonne valeur pour $f_n(x)$.
- Lorsque la définition de la fonction f_n fait apparaître des intervalles dépendant de n, on fera attention à ce que la limite simple ne soit pas définie sur des intervalles qui dépendent encore de n, ce qui n'aurait pas de sens. La même remarque est valable pour la fonction qui domine : elle ne doit pas être définie sur des intervalles qui dépendent de n.

Exercice 11.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa somme f.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que f l'est également.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$

4) Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

5) Que peut-on conclure ?

1) On voit apparaître deux séries géométriques de raisons e^{-x} et e^{-2x}. Pour $x > 0$, ces raisons sont dans $]0, 1[$, et les deux séries convergent. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 2\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\\ &= \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{(e^x+1)-2}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{1+e^x}\end{aligned}$$

2) La fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $a > 0$. Donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{e^{-nx}}{n} + \frac{2e^{-2nx}}{2n}\right]_0^A = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0,$$

d'autre part, on vérifie que $f_n(x) > 0$ si et seulement si $x \geqslant \dfrac{\ln 2}{n}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt &= \int_0^{\ln 2/n}\left(2e^{-2nx} - e^{-nx}\right)dx + \int_{\ln 2/n}^{+\infty}\left(e^{-nx} - 2e^{-2nx}\right)dx\\ &= \frac{1}{n}\left[e^{-nx} - e^{-2nx}\right]_0^{\ln 2/n} + \frac{1}{n}\left[e^{-2nx} - e^{-nx}\right]_{\ln 2/n}^{+\infty}\\ &= \frac{2}{n}\left(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right) = \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

4) On déduit de la question précédente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0$. Par ailleurs, on a pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^A$, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \ln 2$.

5) Cela montre d'une part que le théorème d'intégration terme à terme ne doit pas s'appliquer ici mais surtout que l'hypothèse de convergence de $\displaystyle\sum\int_I |f_n(t)|\,dt$ ne peut pas être remplacée par la convergence de $\displaystyle\sum\int_I f_n(t)\,dt$.

Exercice 11.10

Mines-Ponts MP 2006

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}\,dx.$

Soit $f_n(x)=\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}=\dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})}$

- La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{n!}{x^n}$. Donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $n\geqslant 2$. On supposera $n\geqslant 2$ pour la suite.
- Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln f_n(x)=-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x}{k})$. Or $\ln(1+\frac{x}{k})\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{x}{k}>0$ et $\sum\frac{x}{k}$ diverge. Donc $\lim_{n\to+\infty}\ln f_n(x)=-\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (l'étude en 0 n'est pas utile, on va appliquer le théorème de convergence dominée sur $]0,+\infty[$). La limite simple est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour dominer cette suite de fonctions, on constate que, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geqslant 2}$ est décroissante (on divise par des termes plus grands que 1). Ainsi, pour tout $n\geqslant 2$ et pour tout $x>0$, on a $0\leqslant f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})}=f_2(x)$.
  La fonction f_2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème de convergence dominée permet de conclure $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}\,dx=0.$

Exercice 11.11

Centrale MP 2006

On définit pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$.

1) Montrer l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donner la limite ℓ de la suite (I_n).

2) Donner un équivalent de $I_n-\ell$ en l'infini.

3) Prouver l'existence de $J=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ et montrer que $J=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

4) En déduire un développement asymptotique de I_n à trois termes.

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0, 1]$ ce qui donne l'existence de I_n. On pourrait appliquer le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite de I_n. On peut se contenter d'un simple encadrement. La suite de fonctions qu'on intègre converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1[$. On étudie la différence $\left|\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^n} - \int_0^1 dx\right| = \left|\int_0^1 \dfrac{-x^n}{1+x^n}\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n - 1 = -\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$. Il y a ici deux possibilités pour déterminer un équivalent. On peut effectuer un changement de variable $u = x^n$ puis utiliser le théorème de convergence dominée, ou bien faire une intégration par parties afin de faire apparaître le terme principal puis un terme négligeable. On choisit cette dernière méthode afin de poursuivre le développement dans les questions suivantes. On a

$$\begin{aligned} -\int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\, dx &= -\left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \\ &= -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx. \end{aligned}$$

L'encadrement $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$ montre que le second terme de la somme est négligeable devant le premier. Donc $I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{n}$.

3) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. On décompose cette fonction à l'aide d'une série de fonctions. Pour tout $t \in]0, 1[$, $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n+1}$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{t^n}{n+1}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1[$, sa somme est la fonction continue g. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)\, dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$, terme général d'une série convergente. Le théorème d'intégration terme à terme nous assure que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = J.$$

4) On doit relier $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ au calcul précédent. On utilise un changement de variable $u = x^n$, ce qui est possible car $u \mapsto u^{1/n}$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même et $t \mapsto \ln(1+x^n)$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1]$. On obtient

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1 \ln(1+u)\left(\frac{1}{n}u^{-1+1/n}\right)du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}\,du.$$

On note alors $f_n : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1]$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $f : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ et

$$\frac{1}{u^{1-1/n}} = \exp((1-1/n)(-\ln u)) \leqslant \exp(-\ln u) = \frac{1}{u},$$

puisque $u \in]0,1]$ et $-\ln u \geqslant 0$. Donc $\forall u \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(u)| \leqslant \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue et intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = J.$$

On obtient finalement $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{J}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Remarque

En utilisant la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient

$$S - J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{4p^2} = \frac{S}{2} \text{ soit } J = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 11.12

Mines-Ponts MP 2006

Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Pour tout $x \in]0,1], x^{-x} = \exp(-x\ln x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$. On note alors $f_n(x) = \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$, fonction qui se prolonge par continuité en 0, par la valeur 0 si $n \neq 0$ et par la valeur 1 si $n = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$. De plus, f_n est positive. On évalue I_n, l'intégrale de f_n sur $]0, 1]$. Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on définit sur $]0, 1]$ la fonction $f_{n,p}$ par $f_{n,p}(x) = x^n(-\ln x)^p$. Elle est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité par 0 en 0 lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 0$, la fonction $x \mapsto (-\ln x)^p$ est négligeable devant $x \mapsto x^{-1/2}$ lorsque x tend vers 0. Cela justifie l'existence de $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(-\ln x)^p\,dx$ si n et p sont des entiers naturels. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors

$$\int_\varepsilon^1 x^n(-\ln x)^p\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(-\ln x)^p\right]_\varepsilon^1 + \frac{p}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^{n+1}\frac{(-\ln x)^{p-1}}{x}\,dx,$$

ce qui, donne lorsque ε tend vers 0, $I_{n,p} = \dfrac{p}{n+1} I_{n,p-1}$. Une récurrence simple donne alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n} I_{n,0} = \dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Puisque la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge (on a $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ si $n \geqslant 1$) et que $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction continue sur $]0, 1]$, $x \mapsto x^{-x}$, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Exercice 11.13

Centrale MP 2006

1) Prouver l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$ sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2) Déterminer la valeur des deux intégrales.

On va traiter les deux intégrales séparément.

1) On étudie l'intégrabilité sur $]0, 1[$. La fonction f est continue sur $]0, 1[$. Pour $x \in]0, 1[$, on a $\ln(1-x) - \ln(1+x) = -2x + o(x)$ au voisinage de 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$. De plus, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ est intégrable sur $[1/2, 1[$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1[$.
Afin de calculer la valeur de l'intégrale, on utilise le développement en série

entière de $u \mapsto \ln(1+u)$ sur $]-1,1[$. Pour $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}((-1)^n-1)\frac{x^n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right) = -2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{2p+1}. \end{aligned}$$

On définit $u_p : x \mapsto -2\dfrac{x^{2p}}{2p+1}$, fonction continue et intégrable sur $[0,1]$. La série de fonctions $\sum u_p$ converge simplement sur $]0,1[$, et sa somme est la fonction f. De plus, $\displaystyle\int_0^1 |u_p(x)|\,dx = -\int_0^1 u_p(x)\,dx = \frac{2}{(2p+1)^2}$. Puisque $\displaystyle\sum \frac{2}{(2p+1)^2}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = -2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

Remarque

En utilisant la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient, en séparant termes pairs et impairs, la valeur $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$.

2) La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$, elle vérifie $f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \ln(x-1)$ et f est donc intégrable sur $]1,2]$. Au voisinage de $+\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^2},$$

ce qui donne l'intégrabilité de f sur $[2,+\infty[$. Pour le calcul, on pourrait s'inspirer de la première question et de l'écriture précédente (avec $1/x$) et utiliser le théorème d'intégration terme à terme. On peut, plus rapidement, réaliser le changement de variable $x = 1/u$. En effet f est intégrable sur $]1,+\infty[$ et $u \mapsto 1/u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$. Alors

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^0 u\ln\left(\frac{\frac{1}{u}-1}{\frac{1}{u}+1}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_0^1 \frac{1}{u}\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du,$$

qui est l'intégrale calculée précédemment.

Ce qu'il faut savoir

Méthode

La dernière hypothèse du théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle I peut être mise en défaut (voir exercice suivant). Dans ce cas, on peut appliquer au moins deux autres méthodes. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$.

1) On permute d'abord la somme finie et l'intégrale. On se ramène ainsi à une permutation entre une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et une intégrale. On applique alors le théorème de convergence dominée à la **suite de fonctions** (S_n).

2) On écrit $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, puis

$$\int_I S(t)\,dt = \int_I S_n(t)\,dt + \int_I R_n(t)\,dt.$$

On utilise la linéarité de l'intégrale sur la somme finie et on montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_I R_n(t)\,dt = 0$, par exemple en majorant le reste.

Exercice 11.14

Mines-Ponts MP 2007

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, de limite infinie. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

On voit très bien apparaître le théorème d'intégration terme à terme car, si $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \dfrac{1}{\alpha}$. On note alors $u_n(x) = (-1)^n e^{-a_n x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- la série $\sum u_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $a_n > 0$).
- la série numérique $\sum u_n(0)$ diverge. Pour $x > 0$, la suite $(e^{-a_n x})$ est décroissante vers 0, donc d'après le critère spécial pour les séries alternées, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge. Ainsi $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.
- On doit prouver que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$ et, si $A > 0$, $\|u_n\|_{\infty,[A,+\infty[} = e^{-a_n A}$. On n'a donc pas, en général, convergence normale, ni sur $\mathbb{R}_+^*$, ni sur les intervalles $[A,+\infty[$. On note R_n le reste d'ordre n de la série de fonctions. On sait que, pour tout $x > 0$, $|R_n(x)| \leqslant e^{-a_{n+1} x}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on obtient $|R_n(x)| \leqslant 1$, ce qui ne donne pas la convergence

uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$. En revanche, si $A > 0$, pour tout $x \geqslant A$, $|R_n(x)| \leqslant e^{-a_{n+1}A}$ et $\|R_n\|_{\infty,[A,+\infty[} \leqslant e^{-a_{n+1}A}$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum u_n$ étant une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ qui converge uniformément sur tout intervalle $[A, +\infty[$ où $A > 0$, on en déduit que S est continue sur tout intervalle $[A, +\infty[$ où $A > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,dx = \frac{1}{a_n}$ et rien indique que $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas. Notons alors $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$. On applique les deux méthodes décrites précédemment.
  - *Par le théorème de convergence dominée :* la suite de fonctions (S_n) converge simplement vers S sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction S est continue et S_n l'est également pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le critère spécial pour les séries alternées, on peut majorer $|S_n(x)|$ par son premier terme, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$, $|S_n(x)| \leqslant e^{-a_0 x}$ et $x \mapsto e^{-a_0 x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (S_n), si bien que
  $$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a_k}.$$
  - *Par majoration du reste :* pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = S - S_n$. Par différence, la fonction R_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Le critère spécial permet de majorer $|R_n(x)|$ par $|u_{n+1}(x)|$, ce qui donne alors
  $$\left|\int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_n(x)|\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1}x}\,dx = \frac{1}{a_{n+1}}.$$
  Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,dx - \int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ et de nouveau le résultat.

11.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11.15

CCP MP 2005

1) Pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale
$$I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^p dt.$$

2) Justifier alors que pour $x > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

1) On pourrait être tenté de développer par la formule du binôme, mais cela donnerait l'intégrale sous forme d'une somme et cela ne semble pas correspondre à ce qui est attendu dans la seconde question. On va donc plutôt intégrer par parties afin de faire apparaître des produits. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p$ est continue sur $]0,n]$, et puisque $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0,n]$ si et seulement si $x > 0$. On se donne alors $x > 0$ ainsi que $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < n$ (le théorème d'intégration par parties nécessite d'avoir des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment, ce qui n'est pas forcément le cas si $x \in\ ]0,1]$). Alors les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^p$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, n]$ et donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p dt &= \frac{n^x}{x}\left(1-\frac{n}{n}\right)^p - \frac{\varepsilon^x}{x}\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^p \\ &\quad + \frac{p}{n.x}\int_\varepsilon^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{p-1} dt.\end{aligned}$$

Puisque toutes les intégrales sont convergentes, on peut faire tendre ε vers 0, ce qui donne la relation de récurrence $I_{n,p}(x) = \frac{p}{nx} I_{n,p-1}(x+1)$. On applique cette relation plusieurs fois, afin d'obtenir

$$I_{n,p}(x) = \frac{p}{nx}\,\frac{p-1}{n(x+1)} \cdots \frac{1}{x+p-1} I_{n,0}(x+p)$$

avec $I_{n,0}(x+p) = \int_0^n t^{x+p-1}\,dt = \frac{n^{x+p}}{p+x}$. Finalement, on trouve

$$I_{n,p}(x) = \frac{p!}{n^p x(x+1)\cdots(x+p)} n^{x+p} = \frac{p!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+p)}.$$

2) On doit étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_{n,n}(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$$

On aimerait utiliser le théorème de convergence dominée mais l'intégration ne se fait pas sur un intervalle fixe. On utilise alors la méthode qui consiste à prolonger chaque fonction par 0 pour avoir un intervalle commun. Plus précisément, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si} \quad t \in\ ]0,n] \\ 0 & \text{si} \quad t > n \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$ (limite nulle en n). Soit $t > 0$. Pour $n < t$, on a $f_n(t) = 0$, mais lorsque $n > t$, on a, puisqu'alors $1 - t/n > 0$,

$$f_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}\exp\big(n\ln(1-t/n)\big)$$

et $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-t/n) = -t$. Donc, pour tout $t>0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t\in\,]0,n]$, on a

$$0 \leqslant f_n(t) = t^{x-1}\exp\big(n\ln(1-t/n)\big) \leqslant t^{x-1}\exp(-nt/n) = t^{x-1}e^{-t},$$

puisque pour tout $u>-1$, on a l'inégalité $\ln(1+u)\leqslant u$ (la concavité de la fonction $u\mapsto \ln(1+u)$ donne ce résultat). Donc pour tout $t\in\,]0,n]$, on a $0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}e^{-t}$. Cet encadrement est valable si $t>n$ puisque alors $f_n(t)=0$. Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t>0, |f_n(t)|\leqslant t^{x-1}e^{-t}=\varphi(t)$. La fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car $\varphi(t)\underset{0}{\sim} t^{x-1}$ et $\varphi(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ lorsque t tend vers $+\infty$. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

avec

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = I_{n,n}(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Ce qu'il faut savoir

On demande parfois un passage à la limite dans une suite d'intégrales, avec un indice n qui se situe à la fois dans l'intégrale mais aussi dans les bornes de l'intégrale, si bien qu'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée. On prolonge alors les fonctions par 0 afin d'avoir un intervalle commun et ainsi appliquer, si possible, le théorème de convergence dominée.

Exercice 11.16

Polytechnique MP 2007, Mines-Ponts MP 2007

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.

3) Montrer que pour tout $x>1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) La fonction f est la somme d'une série entière. On calcule le rayon de convergence de cette série entière. Soit $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$. Si $x\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}$,

$u_n(x) \neq 0$ et $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{x^2}{4(n+1)^2}$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence est donc infini et f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) On peut écrire $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ et essayer de trouver une combinaison entre ces fonctions. Plus généralement, on peut partir du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et reconstituer les fonctions. On pose $u_n(x) = a_n x^{2n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = -\dfrac{x^2}{(2n+2)^2}u_n(x)$ c'est-à-dire $(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n+2} = -x^2 a_n x^{2n}$ et pour $x \neq 0$, $(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n} = -a_n x^{2n}$. On somme ces relations (toujours pour $x \neq 0$) et on reconstitue les fonctions. On a tout d'abord, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n} = -f(x)$. Pour faire apparaître $f''(x)$, on décompose $(2n+2)^2 = (2n+2)(2n+1) + (2n+2)$ cela donne

$$-f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_{n+1}x^{2n}.$$

En multipliant par x (pour faire apparaître $f'(x)$ dans la dernière somme), on obtient finalement $-xf(x) = xf''(x) + f'(x)$, donc f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ par continuité.

3) Pour $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}e^{-xt}\right)dt$. On définit la fonction v_n sur $\mathbb{R}^+$ par $v_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}e^{-xt}$. La fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $v_n(t) = o(1/t^2)$) et, à l'aide du changement de variable $u = xt$, puis d'intégrations par parties successives, on montre que

$$\int_0^{+\infty} v_n(t)\,dt = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^{+\infty} u^{2n}e^{-u}\,du = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}.$$

Puisque v_n est de signe fixe, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}|v_n(t)|\,dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. On note α_n ce dernier réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2 x^2} = \dfrac{2n+1}{(2n+2)x^2}$. Cette suite tend vers $1/x^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $\dfrac{1}{x^2} \in]0,1[$, la série $\sum \alpha_n$ converge. De plus $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est la fonction continue $t \mapsto f(x)e^{-xt}$. Le théorème d'intégration terme à terme donne $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. Il reste à prouver que cette somme vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\frac{1}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\frac{1}{x^{2n+1}}$$

où $\beta_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n n!} = (1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

La formule générale est valable pour $n = 0$. Si $x > 1$, on trouve la formule demandée

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}} = F(x).$$

12 Intégrales dépendant d'un paramètre

12.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application $h : \begin{cases} A \times I & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t). \end{cases}$

Théorème de continuité : si

(i) pour tout $x \in A, t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I (*définition*),

(ii) pour tout $t \in I, x \mapsto h(x,t)$ est continue sur A (*régularité*),

(iii) il existe une fonction φ définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (*domination*),

alors l'application $f : \begin{cases} A & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \end{cases}$ est définie et continue sur A.

Théorème de dérivation : si

(i) pour tout $x \in A, t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I (*définition*),

(ii) pour tout $t \in I, x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A (*régularité*),

(iii) pour tout $x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

(iv) il existe une fonction ψ définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant \psi(t)$ (*domination*),

alors l'application $f : \begin{cases} A & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A **et** pour tout $x \in A$, $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Remarque

- L'intégrabilité dans l'hypothèse de définition du théorème de continuité n'est pas nécessaire puisqu'elle est conséquence de la domination par une fonction intégrable. En revanche il ne faut pas oublier de vérifier la continuité par morceaux. Cependant dans beaucoup d'exercices où l'intervalle A est à déterminer, la première hypothèse revient exactement à se poser la question de l'ensemble de définition de f.

- Il est important de comprendre la double conclusion du théorème de dérivation. Sous les hypothèses données, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et on connait sa dérivée. Une telle fonction peut-être de classe $\mathscr{C}^1$ sans que sa dérivée soit donnée par $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Exercice 12.1

CCP PSI 2007, CCP PC 2006

1) Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt.$$

2) Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

1) On définit $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

- *Existence :* soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a $|e^{-t^2}\cos(xt)| \leqslant e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple parce qu'elle est négligeable devant $t \mapsto e^{-t}$ en $+\infty$). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui revient à dire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- *Continuité :* on applique le théorème de continuité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (et intégrable sur $\mathbb{R}^+$) et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, |h(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$, et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
- *Dérivabilité :* la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\sin(xt)| \leqslant te^{-t^2} = \psi(t),$$

où ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple parce que $\psi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$).

Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$.

Remarque

On peut évidemment se contenter de montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, sans établir d'abord la continuité. Dans ce cas, on ne doit pas oublier de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ sur $\mathbb{R}^+$ pour x fixé dans $\mathbb{R}$.

2) La valeur obtenue pour $f'(x)$ nous invite à nous diriger vers une intégration par parties (on dispose d'une primitive immédiate de $t \mapsto te^{-t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$ sont définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$, on peut alors écrire

$$\int_0^A \sin(xt)\left(-te^{-t^2}\right)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(xt)e^{-t^2}\right]_0^A - \frac{x}{2}\int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\,dt,$$

ce qui donne, lorsque A tend vers $+\infty$, $f'(x) = -\frac{x}{2}f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La résolution de cette équation différentielle donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)e^{-x^2/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}.$$

Ce qu'il faut savoir

Remarques autour de la fonction dominante

On se place dans le cas du théorème de continuité (les remarques sont identiques pour le théorème de dérivation).

- La meilleure fonction possible est donnée par $\varphi_1(t) = \sup_{x\in A}|f(x,t)|$, dans le sens où il n'est pas possible de trouver une fonction inférieure à celle-ci qui vérifie l'hypothèse de domination. Si cette fonction n'est pas intégrable sur I, alors il est impossible d'appliquer le théorème de continuité, on peut se tourner alors vers la domination locale (voir exercice 12.4, page 290 et remarque qui suit page 292).
- Pour trouver une dominante, on peut décomposer f en facteurs et majorer séparement les facteurs. Lorsqu'un facteur ne dépend pas de la première variable (x avec les notations précédentes), la meilleure solution est de ne surtout pas chercher à le majorer, cela ne peut que créer des problèmes d'intégrabilité supplémentaires (par exemple on ne majore pas $\frac{t}{1+t^2}$ par $\frac{1}{t}$, car cela crée une difficulté d'intégration en 0 qui n'existait pas avant).

Exercice 12.2

Mines-Ponts MP 2007

Existence et calcul de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,dt.$

Si on peut appliquer le théorème de dérivation, on pourra alors calculer assez facilement $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt$. Soit $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. $g_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ et g_x admet une limite finie en 0. Enfin $g_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on montre ainsi la définition de f sur $\mathbb{R}$). Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ ainsi que $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$. Puisque $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation s'applique et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt$. On calcule cette intégrale facilement :

$$f'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$.

Exercice 12.3

CCP PC 2007

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ où $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

1) Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2) Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

3) Exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F'(x)$ sans le symbole $\displaystyle\int$.

On pourra utiliser sans la démontrer l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+t^2x^2}\right).$$

En déduire le calcul de $F(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

1) Pour montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ et f_x est intégrable sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité en 0. De plus, pour tout $t > 0$, on a $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi/2}{t^3}$, donc f_x est

intégrable sur $[1, +\infty]$. Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et F est définie sur $\mathbb{R}$. Comme Arctan est impaire, F est impaire et il suffit d'étudier F sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout $t \in]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.
L'application $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de dérivation entraîne que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et également, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\, dt$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $x \neq 1$, en utilisant l'identité donnée ainsi que l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions qui apparaissent dans cette identité,

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \lim_{A \to +\infty} [\text{Arctan}\, t - x\,\text{Arctan}(xt)]_0^A = \frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}.$$

Par ailleurs, F' est continue sur $[0, +\infty[$, donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Sachant que $F(0) = 0$, on a alors pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$. Puisque F est impaire, on a $F(x) = -F(-x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x)$ lorsque $x < 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $F(x) = \text{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}\ln(1+|x|)$.

3) En intégrant par parties, on trouve, si $A > 0$,

$$2\int_0^A \frac{\text{Arctan}\, t}{t(1+t^2)}\, dt = \left[\frac{(\text{Arctan}\, t)^2}{t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(\text{Arctan}\, t)^2}{t^2}\, dt.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}\, t}{t}\right)^2 dt = 2F(1) = \pi \ln 2.$

Exercice 12.4

D'après plusieurs concours

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\, dt.$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$.

2) Déterminer f' et calculer cette intégrale. On déterminera des constantes a et b telles que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right) = a\dfrac{t}{1+t^2} + b\dfrac{t}{1+x^2t^2}$.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On note $h(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on a $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on en conclut que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$. Le meilleur majorant possible de cette dernière fonction, indépendant de $x \in \mathbb{R}$, est $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}$. Mais $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on ne peut donc pas appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}$. On remarque que pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Il est donc impossible d'appliquer le théorème de dérivation sur un intervalle contenant 0. On choisit alors $a > 0$. On a

$$\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \psi(t).$$

Cette fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $t \mapsto 1/(a^2t^3)$ lorsque t tend vers $+\infty$). De plus $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant a$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt$. Cette dérivée est valable sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc sur $\mathbb{R}^*$ par parité). La fonction f' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) On a déjà montré que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Pour $x \neq 1$, on obtient $\dfrac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1-x^2}\dfrac{t}{1+x^2t^2}$. Soit $A > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt &= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln(1+A^2) - \frac{1}{2(1-x^2)}\ln(1+x^2A^2)\\ &= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+x^2A^2}\right).\end{aligned}$$

La limite lorsque A tend vers $+\infty$ est $\dfrac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f'(1) = \lim\limits_{x\to1} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

3) f est croissante, elle admet donc une limite en $+\infty$, finie ou infinie. On la note ℓ. Lorsque x devient grand, le terme $\operatorname{Arctan}(xt)$ se rapproche de $\pi/2$ (sauf pour $t=0$). Pour tout $x>0$, $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$. On en déduit que la limite ℓ est finie et $\ell \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$. On propose deux méthodes pour déterminerer ℓ.

- Soit $a>0$. On a $f(x) \geqslant \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan} xt}{1+t^2}\,dt \geqslant \operatorname{Arctan}(ax)\int_a^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$.
  Lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient la minoration $\ell \geqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$. Cette minoration est valable pour tout $a>0$, donc lorsqu'on fait tendre a vers 0, on obtient $\ell \geqslant \dfrac{\pi^2}{4}$. Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$.
- Puisque f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, on a par exemple, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell$.
  Or $f(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{1+t^2}\,dt$. Soit $g_n(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(nt)}{1+t^2}$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la suite (g_n) converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\geqslant 0$, $|g_n(t)| \leqslant \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$. La fonction $t\mapsto \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le théorème de convergence dominée entraîne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = \int_0^{+\infty}\frac{\pi/2}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4} = \ell$.

Ce qu'il faut savoir

domination locale

Lorsqu'on ne parvient pas à appliquer les théorèmes de continuité et de dérivabilité sur un intervalle A (les fonctions majorantes obtenues ne sont pas intégrables sur l'intervalle I), on peut essayer d'utiliser ces théorèmes sur les segments inclus dans A. On prouve alors la continuité ou la dérivabilité sur tout segment inclus dans A. Cela entraîne la même propriété sur l'union de tous ces segments, c'est-à-dire sur A.

Remarque

- On fera attention à la rédaction dans ce genre de problèmes. On fixe un segment $[a,b]\subset A$, on applique le théorème sur ce segment pour conclure **dans un premier temps** que la fonction possède la régularité souhaitée sur le segment, **puis** sur A tout entier.
- On peut appliquer la même méthode sur un intervalle $]a,+\infty[$ en appliquant les théorèmes de continuité ou de dérivabilité sur les intervalles $[b,+\infty[\subset]a,+\infty[$.

12.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 12.5

Mines-Ponts MP 2007

Soient $f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.

3) En déduire $I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1) On pose $f=F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f l'est également, avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x)=2F'(x)F(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Posons $h : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt=-2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,x\,dt$. Le changement linéaire $u=xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.

2) D'après les calculs précédents, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée nulle. La fonction $f+g$ est donc constante. Or $f(0)=0$ et $g(0)=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\text{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.

3) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x)=I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}e^{-x^2}$.

Par encadrement, on obtient $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et puisque $I \geqslant 0$, on obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12.6

Mines-Ponts MP 2007

1) Étudier $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par J et en déduire une forme simplifiée de $J(x)$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - voir exercice précédent).

1) On définit $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ (on choisit ces deux intervalles car il n'y a aucun problème de définition sur x et car on intègre - par rapport à t - de 0 à $+\infty$ une fonction qui n'est pas définie en 0. La dépendance en x se situe simplement dans e^{ixt}, complexe de module 1. Les dominations sur $\mathbb{R}$ vont être très simples à obtenir.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|h(x,t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$. Or φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\varphi(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, ainsi que $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ce qui permet de montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De même, on a, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)| = \sqrt{t}e^{-t} = \psi(t)$ avec ψ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation, la fonction J est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}\,dt$.

2) On doit trouver une relation entre J et J' à l'aide d'une intégration par parties. Les écritures de J et J' font apparaître trois facteurs. On peut regrouper les deux exponentielles afin d'avoir un seul produit et ainsi réaliser l'intégration par parties (en constatant de plus que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ s'intègre en $t \mapsto 2\sqrt{t}$). Les fonctions utilisées

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On obtient alors

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(ix-1)t}\, dt = \left[2\sqrt{t}e^{(ix-1)t}\right]_a^b - 2(ix-1)\int_a^b \sqrt{t}e^{(ix-1)t}\, dt.$$

On a $\lim\limits_{b\to+\infty} 2\sqrt{b}e^{-b}e^{ixb} = 0$ (le module est $2\sqrt{b}e^{-b}$ de limite nulle par croissances comparées) et $\lim\limits_{a\to 0} 2\sqrt{a}e^{-a}e^{ixa} = 0$. On obtient alors, en passant aux limites,

$$J(x) = -2(ix-1)\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(ix-1)t}\, dt = -\frac{2(ix-1)}{i}J'(x) = -2(x+i)J'(x)$$

Finalement J vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $J'(x) = -\dfrac{x-i}{2(x^2+1)}J(x)$. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x-i}{2(x^2+1)} = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + i\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x$. Ainsi il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $J(x) = \dfrac{C}{(1+x^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x}$. On a $C = J(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$. Le changement de variable $t = u^2$ dans cette intégrale donne $C = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x}$.

Remarque

On fera attention ici à ne pas prendre comme primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ la fonction $x \mapsto \ln(x+i)$ qui n'est pas définie, ni même $x \mapsto \ln|x+i|$ qui ne convient pas.

Exercice 12.7

Centrale MP 2005

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\, dt$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f (on utilisera un changement de variable).

4) En déduire une expression simple de f sur $\mathbb{R}$.

On note $h(x,t) = e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|h(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant e^{-t} lorsque t tend vers $+\infty$). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$. Une majoration simple de $e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ par e^{-t^2} ne permet pas d'aboutir car $t \mapsto \dfrac{1}{t^2} e^{-t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)} = \psi(t)$. La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$, donc $\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures (l'expression est de la forme $u^2 e^{-u^2}$ avec u qui tend vers $+\infty$, et la limite est nulle par croissances comparées). Enfin $\psi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de dérivation implique que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} dt$.

3) On cherche à relier $f'(x)$ à $f(x)$. Une intégration par parties n'aboutit pas. On cherche un changement de variable. Le seul envisageable est celui qui échange t^2 et x^2/t^2, c'est-à-dire $u = x/t$ ou $t = x/u$. La fonction $u \mapsto x/u$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, ainsi, si $x > 0$,

$$f'(x) = -2 \int_{+\infty}^{0} \frac{u^2}{x} \exp\left(-x^2/u^2 - u^2\right)\left(-\frac{x}{u^2}\right) du = -2f(x).$$

4) La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = Ae^{-2x}$. En utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}$, on trouve $A = f(0)$. De plus, $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

Exercice 12.8

Mines-Ponts MP 2005

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression simple pour $f'(x)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\pi\ln x)$.

5) En déduire une expression simple pour f sur $\mathbb{R}$.

1) Il faut que x^2+t^2 reste strictement positif. Puisqu'on veut étudier la continuité sur $\mathbb{R}$, on doit considérer l'intégrale sur $]0,+\infty[$. Soit $h:(x,t)\mapsto \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x\neq 0$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$. Pour $x=0$, la fonction $t\mapsto h(0,t)$ est continue sur $]0,1]$ et $h(0,t)\underset{t\to 0}{\sim}2\ln t$. Dans les deux situations, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, si $x\in\mathbb{R}$, on a $h(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2\ln t}{t^2}=\underset{t\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{t^{3/2}})$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) On a déjà vérifié les premières hypothèses du théorème de continuité. De plus, pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il est impossible d'obtenir une domination indépendante de x lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, car, pour tout $t>0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|h(x,t)|=+\infty$. Soit $A>0$. Pour $t>0$ et $x\in[-A,A]$, $\ln t^2\leqslant\ln(x^2+t^2)\leqslant\ln(A^2+t^2)$ (puisque $x^2\in[0,A^2]$ et que la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Cela permet de majorer $|h(x,t)|$ par $\dfrac{1}{1+t^2}\max(|\ln t^2|,|\ln(A^2+t^2)|)$. On pourrait utiliser cette fonction pour dominer ou, si on veut se débarrasser de la fonction maximum, prendre $\varphi(t)=\dfrac{|\ln t^2|+|\ln(A^2+t^2)|}{1+t^2}$ (le maximum de deux nombres positifs est inférieur à leur somme). On montre facilement que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $t>0$, on a $\varphi(t)=|h(0,t)|+|h(A,t)|$. Ainsi f est continue sur tout segment $[-A,A]$ avec $A>0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$. Afin de dominer facilement cette quantité, on va majorer $|x|$ (pour majorer facilement le numérateur) et empêcher x de s'approcher de 0 (pour le dénominateur). Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[a,b]$ et $t>0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}=\psi(t)$. La fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, limite finie en 0 et $\psi(t)=\underset{t\to+\infty}{O}(1/t^4)$). Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Afin de calculer cette intégrale, on décompose

la fraction rationnelle en éléments simples. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, on a, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{2x}{(x^2+u)(1+u)} = \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{x^2+u} - \frac{1}{1+u}\right).$$

On rappelle que si $a > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}\left(\dfrac{\pi}{2x} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{1+x}$. Par continuité de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, cette relation est valable en 1. Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\pi}{1+x}$.

4) Lorsque x est grand, on s'attend à ce que $f(x)$ soit proche de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{1+t^2}\, dt$. Cette dernière intégrale vaut $(\pi/2)\ln x^2 = \pi \ln x$. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) - \pi \ln x = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2+x^2) - \ln(x^2)}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^2/x^2\right)}{1+t^2}\, dt.$$

On effectue le changement linéaire $t = ux$ dans l'intégrale précédente, on obtient, si $x > 0$, $f(x) - \pi \ln x = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2} x\, du$. Pour tout $u > 0$, on a l'encadrement

$$0 \leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2} \leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{u^2x^2} = \frac{1}{x}\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u^2)}{u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En combinant tout cela, on obtient, lorsque $x > 0$, $0 \leqslant f(x) - \pi \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\, du$. Par encadrement, on aboutit à $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \pi \ln x) = 0$.

5) Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{\pi}{1+x}$. Il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \pi \ln(1+x) + C$. La question précédente donne la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x) - \pi \ln x = C + \pi \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. Cela donne $C = 0$. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \pi \ln(1+x)$ et, par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi \ln(1+|x|)$.

Exercice 12.9

Mines-Ponts PC 2006 (Fonction Γ)

On définit, lorsque c'est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de Γ.

2) Montrer que Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathscr{D}$.

3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ puis $\mathscr{C}^2$ sur tout segment $[a,b] \subset \mathscr{D}$. En déduire que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et déterminer Γ' et Γ''.

4) Montrer que Γ est une fonction convexe.

5) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

6) Calculer $\Gamma(1)$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

7) Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire la limite de Γ en 0.

8) Donner la limite de Γ en $+\infty$, ainsi que celle de $x \mapsto \Gamma(x)/x$.

9) Donner l'allure de la courbe représentative de Γ.

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $h(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et h est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1 > -1$, c'est-à-dire si $x > 0$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(t^{x-1}e^{-t}) = 0$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$. La fonction h est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche à dominer $|h(x,t)|$ indépendamment de $x \in [a,b]$. Le terme e^{-t} ne dépend pas de x. Il faut déterminer un majorant de $x \mapsto t^{x-1}$. En le mettant sous la forme $e^{(x-1)\ln t}$, le maximum est atteint en a lorsque $t \leqslant 1$ (car $\ln t$ est négatif) et en b lorsque $t > 1$. On pose alors

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est même continue car les deux morceaux se raccordent en 1). Elle est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ (voir question précédente). Ainsi Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Pour tout $x \in [a,b], t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$. En utilisant la fonction φ précédente, on a

$$\forall x \in [a,b], \forall t > 0, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|\varphi(t) = \psi(t).$$

La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $t^2\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$. De plus, on a $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{|\ln t|}{t^{1-a}}$. Puisque $1-a < 1$, la fonction ψ est intégrable sur $]0,1]$ (d'après l'exercice 10.4). Le théorème de dérivation montre que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$[a,b]$. Pour montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$, on utilise la même méthode sur $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ avec $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 h(x,t)$. La domination est réalisée par la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 \varphi(t)$, et son intégrabilité se prouve de la même manière. Alors Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. Tout cela permet de conclure que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t}\, dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

4) Pour $x > 0$, $\Gamma''(x)$ est égale à l'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et Γ est (strictement) convexe.

5) Soit $x > 0$. On se donne $A > \varepsilon > 0$. On a

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\, dt = \left[t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + x \int_\varepsilon^A t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

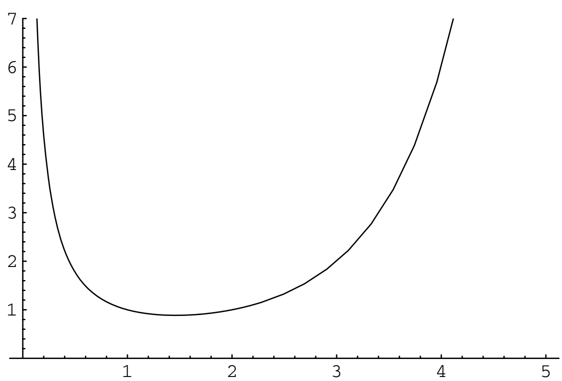
Puisque $x > 0, \varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et $A^x e^{-A}$ vers 0 en $+\infty$. On obtient, lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

6) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$ se montre par récurrence, à l'aide de la relation de la question précédente.

7) Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(1) \neq 0$, on a $\Gamma(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \Gamma(1) = 1$. Donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

8) La fonction Γ étant convexe, elle admet une limite en $+\infty$. Or $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$. Pour $x > 1$, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1)$, de limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

9)



12.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 12.10

Centrale MP 2007 K

On définit pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-t^2+i)x^2}}{t^2 - i}\, dt$

1) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$.

2) Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est continue.

3) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer F'.

4) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et en déduire une forme simplifiée pour F.

5) À l'aide de $F(0)$, déterminer la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\, du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^2)\, du$

On définit $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{(-t^2+i)x^2}}{t^2 - i}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

1) Soit $g(t) = e^{it^2}$. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $|g| = 1$. Si l'intégrale existe, c'est en tant qu'intégrale convergente. Afin de ne pas créer de nouveau problème en 0 on s'intéresse à l'intégrale de 1 à $+\infty$. Soit $X > 1$, on effectue d'abord le changement de variable $t = \sqrt{u}$ dans l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^X g(t)\, dt$, puis une intégration par parties afin d'augmenter le degré du monôme au dénominateur. Alors
$$\int_1^X e^{it^2}\, dt = \int_1^{X^2} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\frac{e^{iu}}{2i\sqrt{u}}\right]_1^{X^2} + \frac{1}{4i}\int_1^{X^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\, du.$$
La terme $\dfrac{e^{iX^2}}{X}$ tend vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{X^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\, du$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$ car $u \mapsto e^{iu}u^{-3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Cela donne l'existence d'une limite finie pour $\displaystyle\int_1^X e^{it^2}\, dt$ lorsque X tend vers $+\infty$. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ sont donc convergentes.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geqslant 0$, on a $|h(x,t)| = \dfrac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$. La fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$). Comme, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus F est paire. On peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}^+$.

3) La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Cela donne les différentes conditions de continuité et dérivabilité nécessaires au théorème de dérivation. Pour $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2t^2}e^{ix^2}$. Il est difficile de majorer cette fonction par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ indépendante de x si x est dans un intervalle qui contient 0. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \psi(t)$ où ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ avec, pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = -2xe^{ix^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt$. Cela étant vrai sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -2e^{ix^2}\int_0^{+\infty} xe^{-x^2t^2}\,dt = -2e^{ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du,$$

en utilisant le changement de variable linéaire $u = xt$. Puisque

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on obtient finalement, pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{ix^2}$. On remarque que F' admet $-\sqrt{\pi}$ pour limite en 0 à droite. La fonction F étant paire, F' est impaire donc admet $\sqrt{\pi}$ pour limite en 0 à gauche. F n'est pas dérivable en 0.

4) Une majoration simple donne pour $x > 0$,

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{|t^2 - i|}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

La dernière égalité s'obtient par changement de variable $u = xt$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. F est l'unique primitive de $x \mapsto -\sqrt{\pi}e^{ix^2}$ qui admet une limite nulle en $+\infty$. Il existe un complexe A tel que, pour tout $x > 0$, $F(x) = A - \sqrt{\pi}\displaystyle\int_1^x e^{it^2}\,dt$. La limite lorsque x tend vers $+\infty$ donne $A = \sqrt{\pi}\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{it^2}\,dt$. Finalement, pour tout $x > 0$, $F(x) = \sqrt{\pi}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,dt$.

5) D'après la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ et la continuité de F sur $\mathbb{R}$, on a $F(0) = \sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$. Il reste à calculer $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - i}$. On factorise $t^2 - i = (t - e^{i\pi/4})(t + e^{i\pi/4})$, on décompose la fraction en éléments simples, ce qui donne $\dfrac{1}{t^2 - i} = \dfrac{1}{2e^{i\pi/4}}\left(\dfrac{1}{t - e^{i\pi/4}} - \dfrac{1}{t + e^{i\pi/4}}\right)$. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on écrit

$$\frac{1}{t - e^{i\pi/4}} = \frac{1}{(t - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{i}{\sqrt{2}}} = \frac{(t - \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{i}{\sqrt{2}}}{(t - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \dfrac{1}{2}}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2+\dfrac{1}{2}\right)+i\ \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}t-1\right)$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-e^{i\pi/4}}$. À l'aide d'une primitive semblable pour la seconde fonction, on obtient $F(0)=\dfrac{-2i(\pi/2)}{2e^{i\pi/4}}=\dfrac{\pi}{2}e^{i\pi/4}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$\int_0^{+\infty}\cos(u^2)\,du=\int_0^{+\infty}\sin(u^2)\,du=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Exercice 12.11

Mines-Ponts PC 2005 (et plus) K

On définit, lorsque c'est possible, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de F.

2) F est-elle continue ?

3) Sur quel intervalle F est-elle $\mathscr{C}^\infty$?

4) Montrer que pour tout x réel, on a $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$.

5) Donner le développement en série entière de F autour de 0.

On note $h(x,t)=\dfrac{\sin(xt)}{e^t-1}$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $g_x : t\mapsto h(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $g(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{xt}{t}=x$, on peut prolonger g_x par continuité en 0 et g_x est intégrable sur $]0,1]$. De plus $g_x(t)=\underset{t\to+\infty}{O}(e^{-t})$ et g_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$, et on montre facilement que f est impaire.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La difficulté vient de la domination. Si on majore $|\sin xt|$ par 1, on obtient un majorant $\dfrac{1}{e^t-1}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t}$ non intégrable sur $]0,1]$. On utilise la majoration $|\sin u|\leqslant|u|$ qui donne $|h(x,t)|\leqslant|x|\dfrac{t}{e^t-1}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Mais ce majorant dépend de x. Soit $A>0$. Pour tout $x\in[-A,A]$ et $t>0$, on a $|h(x,t)|\leqslant A\dfrac{t}{e^t-1}$. La fonction $\varphi : t\mapsto A\dfrac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet pour limite A lorsque t

tend vers 0, et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Donc f est continue sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) On définit l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$\mathscr{P}(n)$: f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et,$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt+n\frac{\pi}{2})\frac{t^n}{e^t-1}\,dt.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\theta_n : (x,t) \mapsto \sin(xt + n\dfrac{\pi}{2})\dfrac{t^n}{e^t-1}$. La question précédente donne $\mathscr{P}(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après l'hypothèse de récurrence), pour tout $t > 0$, $x \mapsto \theta_n(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial \theta_n}{\partial x} = \theta_{n+1}$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|\theta_{n+1}(x,t)| \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{e^t-1} = \psi_n(t)$. La fonction ψ_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0 (0 en général, 1 si $n = 0$), et $\psi_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc ψ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème de dérivation montre que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec la dérivée souhaitée. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $a : t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $]0, +\infty[$. On décompose $\dfrac{1}{e^t-1}$ en somme de termes d'une série géométrique. Puisque $t > 0$, $e^t > 1$, ce qui ne permet pas d'utiliser la somme d'une série géométrique de raison e^t. On factorise par e^t, et puisque $e^{-t} \in]0,1[$, on obtient

$$\forall t > 0, \frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit a_n sur $\mathbb{R}^+$ par $a_n(t) = e^{-nt}\sin(xt)$. Chacune des fonctions a_n est continue et $\sum a_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. La somme de cette série de fonctions est la fonction a, puisque la série provient de la décomposition de a. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, on a $|a_n(t)| \leqslant e^{-nt}$ et a_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, si $A > 0$,

$$\int_0^A a_n(t)\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{-(n-ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{-nA}e^{ixA}}{n-ix}\right).$$

La limite lorsque n tend vers l'infini donne (puisque e^{-nA} tend alors vers 0 et que e^{ixA} est borné), $\displaystyle\int_0^{+\infty} a_n(t)\,dt = \mathrm{Im}(\frac{1}{n-ix}) = \mathrm{Im}(\frac{n+ix}{n^2+x^2}) = \frac{x}{n^2+x^2}$. On espère alors pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Hélas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$ n'est pas facile à évaluer. On obtient facilement la majoration

$\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}$, mais cela ne permet pas d'appliquer le théorème. On affine la majoration de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$. On a, pour $t > 0$, $a_n(t) = \sin(xt)e^{-nt}$. Pour n grand, très rapidement la fonction prend des valeurs petites, si bien que la contribution importante dans l'intégrale se fait autour de 0. Le choix de majorer $|\sin(xt)|$ par 1 est donc assez mauvais. On peut plutôt majorer $|\sin(xt)|$ par $|xt|$. Cette majoration est plus mauvaise pour les grandes valeurs de x mais elle sera largement compensée par l'exponentielle. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt \leqslant |x| \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dx = \frac{|x|}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{|x|}{n^2}.$$

Finalement $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$ est convergente, et on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, ce qui donne le résultat demandé.

5) On effectue les calculs et les permutations sans les justifier afin de voir où cela mène :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) dt \qquad (12.1)$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{t^{2n+1}}{e^t - 1}x^{2n+1}\right) dt \qquad (12.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{t^{2n+1}}{e^t - 1}x^{2n+1}\right) dt \qquad (12.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{e^t - 1}\,dt\right) x^{2n+1} \qquad (12.4)$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{e^t - 1}\,dt$. Dans l'exercice 11.6, on montre que $I_n = \Gamma(2n+2)\zeta(2n+2)$ où $\Gamma(2n+2) = (2n+1)!$ (voir exercice 12.9) et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x}$ lorsque $x > 1$. On obtient alors $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\zeta(2n+2)x^{2n+1}$.
Il reste à justifier les calculs et déterminer pour quelles valeurs de x ils sont valables. La formule 12.1 n'utilise que le développement en série entière de la fonction sinus, valable sur $\mathbb{R}$, les formules 12.2 et 12.4 ne sont que des réécritures. Il reste à justifier l'intégration terme à terme de 12.3. On définit u_n sur

$\mathbb{R}^+$ par $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\dfrac{t^{2n+1}}{e^t - 1}x^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir les méthodes des questions précédentes), la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$. Enfin, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\, dt = \frac{I_n |x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \zeta(2n+2)|x|^{2n+1}$. La fonction ζ est décroissante sur $[2, +\infty[$ (somme de fonctions décroissantes) et minorée par 1 (premier terme de la somme). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant \zeta(2n+2) \leqslant \zeta(2)$. Le rayon de la série entière $\sum \zeta(2n+2)x^{2n+1}$ est donc le même que celui de $\sum x^{2n+1}$ c'est-à-dire 1. La permutation est donc valable lorsque $|x| < 1$ (on peut également montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$ pour retrouver le rayon de convergence, par exemple en appliquant le critère de d'Alembert). Finalement, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2)x^{2n+1}$.

Remarque

On peut également utiliser la formule $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ pour retrouver le développement en série entière. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x}{x^2+n^2} = \frac{x}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}} = \frac{x}{n^2}\sum_{q=0}^{+\infty}(-1)^q \frac{x^{2q}}{n^{2q}} = \sum_{q=0}^{+\infty}(-1)^q \frac{x^{2q+1}}{n^{2q+2}},$$

si $\left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$. Pour $x \in]-1, 1[$, on a donc $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}(-1)^q \frac{x^{2q+1}}{n^{2q+2}}\right)$. On note, pour $q \in \mathbb{N}$, $s_q = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{2q+1}}{n^{2q+2}} = \zeta(2q+2)|x|^{2q+1}$. La série $\sum s_q$ converge (voir précédemment), on peut donc permuter les deux sommes grâce au théorème de Fubini et obtenir de nouveau pour $F(x)$, la somme suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}(-1)^q \frac{x^{2q+1}}{n^{2q+2}}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^q \frac{x^{2q+1}}{n^{2q+2}}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}(-1)^q \zeta(2q+2)x^{2q+1}.$$

Séries de Fourier 13

13.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

On note $\mathscr{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceaux. On note $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues. Soit $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$:

Les **coefficients de Fourier *exponentiels*** de f sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ .$$

Les **coefficients de Fourier *trigonométriques*** de f sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \ , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \ .$$

On trouvera dans les exercices d'assimilation (1.1, 1.3, ...) de nombreux exemples de calculs de coefficients de Fourier.

Les remarques suivantes sont utiles pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$:

- Si f est paire alors, $b_n(f) = 0$, et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$.

  Si f est impaire alors, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$.
- On peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par un autre intervalle d'amplitude 2π, mieux adapté à la fonction f. Par exemple on prend l'intervalle $[-\pi, \pi]$ lorsque f est une fonction paire (ou impaire).
  Notons à ce sujet que le tracé du graphe de f est souvent déterminant lors du choix de l'intervalle d'intégration.
- Sans modifier les coefficients de Fourier, on peut modifier les valeurs de f en un nombre fini de point sur l'intervalle d'intégration. Notamment on remplace souvent la valeur de f en un point où est elle discontinue par la demi-somme des limites à gauche et à droite en ce point.

Certaines propriétés de régularité de f ont des conséquences importantes sur ses coefficients de Fourier :

- Lorsque $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$, les suites $(c_n(f))$, $(c_{-n}(f))$, $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ convergent vers 0 ; en particulier, elles sont bornées.
- Si f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = inc_n(f)$.
- Plus généralement, si f est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ par morceaux, alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f^{(k+1)}) = (in)^{k+1} c_n(f)$.

  On en déduit que $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ quand $|n| \to \infty$.

Série de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$

• On note u_0 la fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $u_0(x) = c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\ .$$

• La série de fonctions $\sum u_n$ est appelée la série de Fourier de f. Sa somme partielle à l'ordre N est définie par $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$.

Lorsque la série de Fourier converge en un point x de $\mathbb{R}$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est parfois notée $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

Les théorèmes fondamentaux

• **Le théorème de Dirichlet :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge **simplement** sur $\mathbb{R}$. En chaque point $x \in \mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier de f est égale à la demi-somme des limites à gauche et à droite de f. En particulier si f est continue au point $x \in \mathbb{R}$, alors la somme de la série de Fourier de f au point x est égale à $f(x)$.

• **Le théorème de convergence normale :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, et sa somme est égale à f.

• **La formule de Parseval :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Alors les séries numériques $\sum |c_n|^2$, $\sum |c_{-n}|^2$, $\sum |a_n|^2$ et

$\sum |b_n|^2$ sont convergentes et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right)$$
$$= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

- Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.

Exercice 13.1

Centrale MP 2007, CCP PC 2006

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_{2\pi}$ telle que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) Justifier la convergence de la série de Fourier de f et calculer sa somme.

3) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Son graphe est représenté FIG. 13.1.

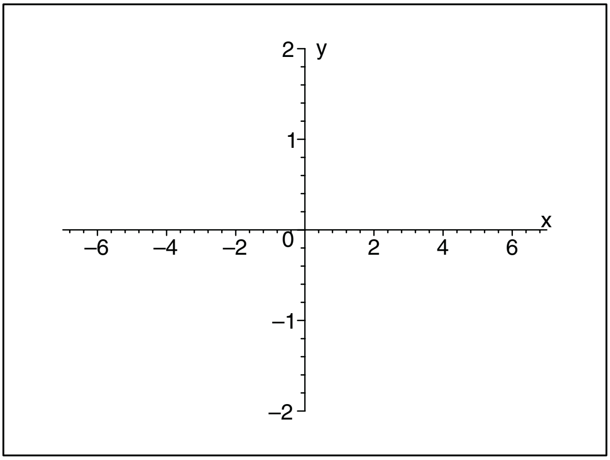


Figure 13.1 Graphe de f

1) Comme f est une fonction à valeurs réelles, nous utilisons les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Il est judicieux de modifier la valeur de f au point $x = 0$ (et aussi en tous les points de la forme $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et de la remplacer par 0. Ainsi modifiée la fonction f est impaire. On a donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi - t)}{2}\sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[-\frac{(\pi - t)\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{\frac{2\pi}{n}} - \frac{1}{2n\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nt)dt}_{0} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

2) Le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f au point x.

En particulier : $\quad \forall x \in\ ]0, 2\pi[, \quad \dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3) Utilisons la relation précédente avec $x = \pi/2$. Si $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) on a $\sin(n\pi/2) = 0$, tandis que si $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$), $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$. On obtient donc : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

Enfin la formule de Parseval donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13.2

Extrait de Mines-Ponts PSI, MP 2007

1) La série $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux, 2π-périodique ?

2) La série $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique ?

1) Non, car la série de terme général $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \dfrac{1}{n}$ devrait converger d'après la formule de Parseval.

2) Non, car pour $x = 0$, on obtient la série $\sum \frac{1}{n}$, qui devrait converger d'après le théorème de Dirichlet.

Exercice 13.3

École de l'Air PSI 2004, CCP MP 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = |x|$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, et soit g la fonction 2π-périodique, impaire, telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

1) Tracer les graphes de f et de g. Vérifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et que f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f et de g.

3) Justifier la convergence des séries de Fourier de f et de g, et calculer leur somme.

4) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Indications de la rédaction : pour la question 2 on pourra remarquer que g est la dérivée de f, dans le sens où $g(x) = f'(x)$ en chaque point $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable. Pour la question 4 on pensera à utiliser la formule de Parseval.

1) On représente sur un même dessin (FIG. 13.2) le graphe de f (en noir) et le graphe de g (en gris) .

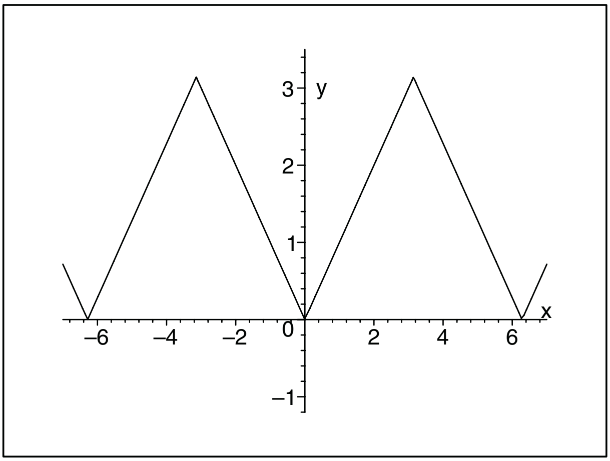


Figure 13.2 Les graphes de f et de g.

Les fonctions f et g sont affines par morceaux ; elles sont donc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On observe de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $g(x) = f'(x)$ en chaque point où f est dérivable, on peut considérer g comme la dérivée de f.

2) Commençons par le calcul des coefficients de Fourier de g. Comme c'est une fonction impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \dfrac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$. Il en résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p}(g) = 0$ et que $b_{2p+1}(g) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$.

Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$, puis, pour $n \geqslant 1$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[f(t)\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)dt \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\,b_n(g)\,,
\end{aligned}$$

d'où $a_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_{2p+1}(f) = -\dfrac{4}{(2p+1)^2\pi}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3) Comme f et g sont 2π-périodiques, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que les séries de Fourier de f et de g sont convergentes en chaque point, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x\ .$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)}\sin(2p+1)x\ .$$

(En effet f est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la demi-somme des limites à gauche et à droite de g au point x est égale à $g(x)$.)

Il est très intéressant de remarquer la ***convergence normale*** *de la série de Fourier de f (f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux), tandis que la série de Fourier de g n'est pas normalement convergente.*

4) Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $g(\pi/2) = 1 = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}$, d'où $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$.

Pour $x = 0$ on a, $f(0) = 0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, d'où $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

La formule de Parseval appliquée à f donne $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 dx = \dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$.

On en déduit que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Posons enfin $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$. On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^4}$, d'où en faisant tendre N vers $+\infty$, $S = \dfrac{1}{2^4}S + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$. On en déduit que $S = \dfrac{\pi^4}{90}$.

13.1.1 Séries de fonctions trigonométriques

Jusqu'à présent nous sommes partis d'une fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et nous lui avons associé une série de fonctions $\sum u_n$, où, pour $n \geqslant 1$, et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$.

Nous allons maintenant partir du point de vue inverse : on se donne une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, et on considère la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_0(x) = c_0, \ \text{ et } u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \ \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Une telle série est appelée une série trigonométrique. Il est souvent utile de mettre en évidence son mode de convergence (notamment la convergence normale, qui permet l'utilisation du théorème d'intégration terme à terme).

Exercice 13.4

(Convergence normale d'une série trigonométrique)

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n par $u_0(x) = c_0$, et, pour $n \geqslant 1$, $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$.

1) Montrer que $\|u_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Indication de la rédaction : on pourra exprimer c_n et c_{-n} sous forme trigonométrique.

2) En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes.

3) Déterminer deux familles de nombres complexes, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $u_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ et $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

5) On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on désigne par S sa somme.
Montrer que S est une fonction continue et 2π-périodique, et calculer ses coefficients de Fourier.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|u_n(x)| = \left|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right| \leqslant |c_n| + |c_{-n}| .$$

Il en résulte que $\|u_n\|_\infty \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$.
Les nombres complexes c_n et c_{-n} peuvent être écrits sous forme trigonométrique :

$$c_n = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad c_{-n} = r'e^{i\theta'} \text{ avec } (r, r') \in \mathbb{R}_+^2 \text{ et } (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 .$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = re^{i(\theta+nx)} + r'e^{i(\theta'-nx)}$.
Soit x_0 le nombre réel tel que $\theta + nx_0 = \theta' - nx_0$. (On calcule facilement $x_0 = (\theta' - \theta)/2n$)). On a alors $u_n(x_0) = (r + r')e^{ix_1}$, avec $x_1 = \theta + nx_0$, d'où

$$\|u_n\|_\infty \geqslant |u_n(x_0)| = r + r' = |c_n| + |c_{-n}| .$$

On a donc $\|u_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$.

2) Il résulte de la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente si et seulement si la série numérique de terme général $|c_n|+|c_{-n}|$ est convergente.
Comme $0 \leqslant |c_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$ et $0 \leqslant |c_{-n}| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$, la convergence de la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ entraîne celle des séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$. Réciproquement si les séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ sont convergentes, leur somme est convergente.

3) On a évidemment $a_0 = 2c_0$.
Pour $n \geqslant 1$ on a $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, avec $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = c_n - c_{-n}$.

4) Pour tout $n \geqslant 1$ on a $|a_n| \leqslant |c_n|+|c_{-n}|$ et $|b_n| \leqslant |c_n|+|c_{-n}|$. Donc la convergence de la série de terme général $|c_n|+|c_{-n}|$ entraîne la convergence des séries de termes généraux $|a_n|$ et $|b_n|$.
On a aussi $|c_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$ et $|c_{-n}| \leqslant |a_n| + |b_n|$. Donc la convergence de la série de terme général $|a_n| + |b_n|$ entraîne la convergence des séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$.

5) La continuité de chaque fonction u_n et la convergence normale de la série $\sum u_n$ entraînent la continuité de la somme S. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x) .$$

S est donc 2π-périodique.
Soit p un entier relatif. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons v_n la fonction définie par $v_n(x) = u_n(x)e^{-ipx} = c_n e^{i(n-p)x} + c_{-n}e^{i(-n-p)x}$. Comme $\|v_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Les fonctions v_n étant continues, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
c_p(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)e^{-ipx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-ipx}\right] dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{i(n-p)x}\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{i(-n-p)x}\, dx \\
&= c_p \quad \text{puisque} \int_0^{2\pi} e^{imx}dx = 0 \text{ si } m \in \mathbb{Z}^*.
\end{aligned}$$

Ce qu'il faut savoir

Lorsque les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes, la série trigonométrique $c_0 + \sum(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est une fonction continue, 2π-périodique, et $c_n(S) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

13.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 13.5

CCP PC 2007, Mines-Ponts MP 2006

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto f(t) = e^{e^{it}}$.

1) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{k!}$.

En déduire les coefficients de Fourier c_n de f pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos t}dt = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Indication de la rédaction : pour la question 2, utiliser le développement en série entière de e^z, avec $z = e^{it}$.

1) La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence normale la série de Fourier de f est normalement convergente, et sa somme est égale à f.

2) Le développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

donne, avec $z = e^{it}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{k!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt,$$

l'intégration terme à terme étant justifiée par la convergence normale de la série de fonctions $\sum v_n$ où $v_n(t) = \dfrac{e^{i(k-n)t}}{k!}$.

Pour $k \neq n$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt = 0$, et on a donc $c_n = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $c_n(f) = 0$ pour $n < 0$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\cos t}e^{i\sin t}$, et donc $|f(t)|^2 = e^{2\cos t}$. La formule de Parseval donne alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Exercice 13.6

Centrale PSI MP 2006, TPE PC 2007

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = |\sin x|$.

1) Donner l'allure du graphe de f.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f. Montrer que la série de Fourier de f est convergente, et calculer sa somme.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$.

4) Déterminer une suite (c_n) de réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\cos^2 nx$.

(À l'oral de Centrale, un logiciel de calcul formel est à disposition).

1) Le graphe de f s'obtient facilement à partir du graphe de la fonction sinus. Le tracé suivant est obtenu à l'aide de l'instruction `Maple` :

```
> plot(abs(sin(x)),x=-5..5);
```

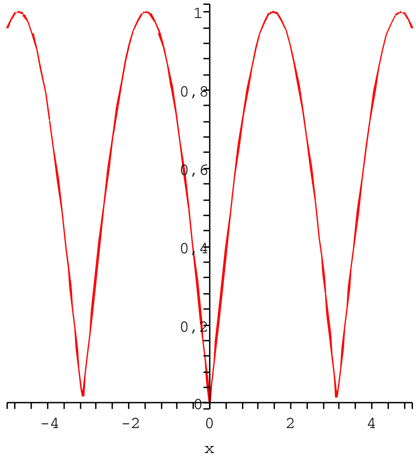


Figure 13.3 Le graphe de f

2) f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale montre que la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f.
Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $a_1(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$, et, pour $n \neq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x \, dx\big) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n+1}[\cos(n+1)x]_0^{\pi} + \frac{1}{n-1}[\cos(n-1)x]_0^{\pi}\right) = -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)} \end{aligned}$$

Vérifions ce résultat à l'aide de `Maple` :

```
> assume(n,integer): int(sin(x)*cos(n*x),x=0..Pi);
```

$$-\frac{1+(-1)^n}{-1+n^{\,2}}$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)}$. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos 2px}{4p^2-1}$$

3) En particulier, avec $x = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$.

4) En utilisant la relation $\cos 2px = 2\cos^2 px - 1$ on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\cos^2 px - 1}{4p^2 - 1}\right)\\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\cos^2 px}{4p^2 - 1} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}\right)\end{aligned}$$

puisque les séries de termes généraux $\dfrac{2\cos^2 px}{4p^2-1}$ et $\dfrac{1}{4p^2-1}$ sont convergentes.

Comme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 px}{4p^2-1}$.

Exercice 13.7

D'après CCP MP 2005, Mines-Ponts PSI 2006

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{\pi^2 n^2 - t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t}{\pi^2 n^2 - t^2}$$

1) La fonction f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Comme elle est paire les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

On a $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos \alpha x \, dx = \frac{2}{\alpha\pi}\left[\sin \alpha x\right]_0^{\pi} = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x \cos nx \, dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x\big)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right]\\ &= \frac{(-1)^n \sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right]\\ &= -\frac{2(-1)^n \alpha \sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}. \end{aligned}$$

2) Par application du théorème de convergence normale on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \cos nx.$$

En particulier pour $x = \pi$ on obtient

$$\cos \alpha\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

c'est-à-dire $\dfrac{\cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = \dfrac{1}{\alpha\pi} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$, puis, pour $x = 0$,

$1 = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \dfrac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2}$, ou encore $\dfrac{1}{\sin \alpha\pi} = \dfrac{1}{\alpha\pi} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$.

Si t est un nombre réel qui n'est pas un multiple de π, le nombre réel $\alpha = \dfrac{t}{\pi}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$, et en remplaçant α par $\dfrac{t}{\pi}$ dans les relations précédentes on obtient $\text{cotan}(t) = \dfrac{1}{t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{\pi^2 n^2 - t^2}$ et $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t}{\pi^2 n^2 - t^2}$.

Exercice 13.8

TPE PSI, PC 2005 K

Justifier que, pour x dans $[0, \pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} .$$

Qu'obtient-on avec $x = \dfrac{\pi}{2}$?

La présence de deux séries, l'une paire, et l'autre impaire, nous amène à prolonger la fonction $x \mapsto x(\pi - x)$ en une fonction paire d'une part, et en une fonction impaire d'autre part.

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. (Cf. FIG. (13.4))

La fonction f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(nx)dx.$

D'où $a_n(f) = \underbrace{\dfrac{2}{\pi} \left[x(\pi - x) \dfrac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{0} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - 2x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$,

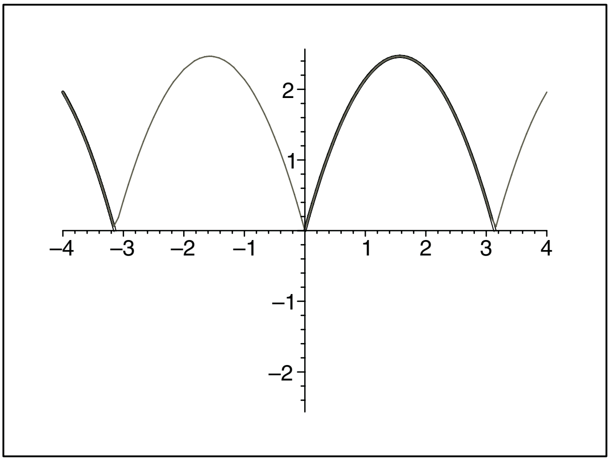


Figure 13.4 Les graphes de f et de g.

et finalement, $$a_n(f) = \frac{2}{\pi n^2}[(\pi - 2x)\cos(nx)]_0^\pi + \underbrace{\frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos(nx)dx}_{0}$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}(-\pi(-1)^n - \pi) = -\frac{2}{n^2}(1+(-1)^n).$$

On a donc $a_n(f) = 0$ si n est impair et $a_n(f) = -\dfrac{4}{n^2}$ si n est pair.

En appliquant le théorème de Dirichlet on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{p^2}$.

Soit à présent g la fonction impaire 2π-périodique valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.
La fonction g est continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)dx \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[-x(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)dx \\
&= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = -\frac{4}{\pi n}\underbrace{\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin(nx)dx}_{=\frac{1-(-1)^n}{n}}.
\end{aligned}$$

Donc $b_n(g) = 0$ si n est pair et $b_n(g) = \dfrac{8}{\pi n^3}$ si n est impair. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$, grâce au théorème de Dirichlet.

En particulier, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{p^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Avec $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Soit $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Exercice 13.9

(Inégalité de Wirtinger) CCP MP 2007, Mines-Ponts PC 2006

1) Soient $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et g l'application de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$.

Montrer que $\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \, dt$

2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Indication de la rédaction : utiliser la formule de Parseval.

1) On a $|g(t)|^2 = |A|^2 + |B|^2 + A\overline{B}e^{2it} + \overline{A}Be^{-2it}$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt = |A|^2 + |B|^2 .$$

On a ensuite $g'(t) = iAe^{it} - iBe^{-it}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \, dt = |A|^2 + |B|^2 = \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt.$$

2) Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

Les fonctions f et f' étant continues, la formule de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2),$$

car $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On a aussi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt = \frac{|c_0(f')|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (|c_n|^2 (f) + |c_{-n}(f)|^2),$$

car $c_0(f') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = 0.$
On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}(n^2-1)(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \geqslant 0,$$

et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt.$

Examinons à présent le cas d'égalité. Comme $n^2 - 1 > 0$ pour $n > 1$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$ entraîne $c_n(f) = 0$ pour tout $n \notin \{-1, 0, 1\}$.

Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, elle est égale à la somme de sa série de Fourier et on a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix}$. On retrouve les fonctions étudiées dans la question 1.

Exercice 13.10

Mines-Ponts MP 2006, ENS MP 2007 (Inégalité isopérimétrique)

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que $4\pi^2 \displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt.$

2) Soit Γ un arc simple de classe $\mathscr{C}^1$, fermé et régulier. Soit L sa longueur, et A l'aire algébrique du domaine qu'il délimite. Montrer que $4\pi\,|A| \leqslant L^2$.

Indications de la rédaction : pour la question 1 on pourra utiliser l'inégalité de Wirtinger (cf. l'exercice 13.9). Pour la question 2 on pourra utiliser un paramétrage normal de Γ.

1) Désignons par f_1 la fonction 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à $[0,1]$ est égale à f. C'est une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Nous nous ramenons au cas d'une fonction 2π périodique à l'aide du changement de variable $x = 2\pi t$. De façon plus précise, introduisons la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f_1\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$. On a alors $f(t) = g(2\pi t)$ et $f'(t) = 2\pi g'(2\pi t)$. On a de plus

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt = \int_0^1 |g(2\pi t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,dx\ ,$$

et de même $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |2\pi g'(x)|^2\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi} |g'(x)|^2\,dx.$

L'inégalité de Wirtinger s'écrit alors $2\pi\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Quitte à faire une homothétie, on peut supposer la longueur de Γ égale à 1. En effet si on remplace un paramétrage g de Γ par αg, L^2 et A sont tous deux multipliés par α^2. On est donc conduit à démontrer l'inégalité $4\pi A \leqslant 1$. Comme de plus Γ est régulière on peut la supposer définie par un paramétrage **normal** $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, où $f(t) = x(t) + iy(t)$, et quitte à faire un changement d'origine dans le plan, on peut supposer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est nulle.

On sait qu'alors $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt$. Or :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \overline{f(t)}f'(t)\,dt &= \int_0^1 [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)]\,dt + i\int_0^1 [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\,dt\\ &= \big[x^2(t) + y^2(t)\big]_0^1 + 2iA\\ &= 2iA.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}4|A|^2 &\leqslant \left(\int_0^1 \overline{f(t)}f'(t)dt\right)^2\\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt \ \ \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt = \frac{1}{4\pi^2}.\end{aligned}$$

On en déduit bien que $4|A|\pi \leqslant 1$.

Etudions maintenant le cas d'égalité. On peut à nouveau supposer la paramétrisation f normale. L'égalité $4A\pi = L^2 = 1$ entraîne le cas d'égalité dans l'inégalité de Wirtinger. On a donc $f(t) = Be^{2i\pi t} + Ce^{-2i\pi t}$ où B et C sont des constantes complexes.

L'hypothèse $|f'(t)|^2 = 1$ s'écrit alors $(Be^{2i\pi t} - Ce^{-2i\pi t})(\overline{B}e^{-2i\pi t} - \overline{C}e^{2i\pi t}) = \dfrac{1}{4\pi^2}$ pour tout $t \in [0,1]$. On en déduit aisément $B\overline{B} + C\overline{C} = \dfrac{1}{4\pi^2}$, $B\overline{C} = 0$ et $C\overline{B} = 0$. On a donc $\gamma(t) = De^{2i\pi t}$ (ou $\gamma(t) = De^{-2i\pi t}$) où D est un nombre complexe de module $\dfrac{1}{2\pi}$. La courbe est alors un cercle de rayon $\dfrac{1}{2\pi}$. Réciproquement, on vérifie aisément que pour un tel cercle, on a $L^2 = 4A\pi$.

Exercice 13.11

(Le Noyau de Poisson)

Soit r un nombre réel tel que $|r| < 1$.

1) Montrer que la série trigonométrique $1 + \sum r^n(e^{inx} + e^{-inx})$ est normalement convergente. On note P_r sa somme. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

2) Quels sont les coefficients de Fourier de P_r ?

Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(x)\,dx = 1$.

1) Notons u_0 la fonction constante égale à 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = r^n(e^{inx} + e^{-inx})$. On a $|u_n(x)| \leqslant 2r^n$, et il en résulte que la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Calculons sa somme :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P_r(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-inx} \\ &= 1 + \frac{re^{ix}}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}.\end{aligned}$$

Remarquons que P_r est positive sur $\mathbb{R}$

2) Soit $p \in \mathbb{Z}$. La série de fonctions $\sum v_n$ où $v_n(x) = u_n(x)e^{-ipx}$ est normalement convergente. Il résulte que $c_p(P_r) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(x)e^{-ipx} = r^{|p|}$.

En particulier, pour $p = 0$ on obtient $c_0(P_r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(x)\,dx = c_0 = 1$.

De nombreux exercices d'oraux utilisent de façon plus ou moins explicite la notion de produit de convolution.

Exercice 13.12

Mines-Ponts PSI 2006 (Produit de convolution)

On désigne par $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$. On note $f * g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$.

1) Montrer que $f * g$ est une fonction continue 2π-périodique.
2) Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et de g.
3) Démontrer que la série de Fourier de $f * g$ est normalement convergente, et calculer sa somme.
4) Soient f, g et h trois éléments de $\mathscr{C}_{2\pi}$. Montrer que $g * f = f * g$ et que $f * (g * h) = (f * g) * h$.

1) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)g(x - t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$ existe.
L'application $\varphi\colon \mathbb{R}\times[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x,t) = f(t)g(x-t)$ est continue. De plus comme f et g sont bornées, il existe des constantes réelles A et B telles que $|f(t)| \leqslant A$ et $|g(t)| \leqslant B$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. φ vérifie donc *l'hypothèse de domination* $|\varphi(x,t)| \leqslant AB$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi]$.
On en conclut que la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est aussi 2π-périodique car si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(x + 2\pi - t) = g(x - t)$.
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$
\begin{aligned}
c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}\,dx\right)dt \quad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-inx}\,dx\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\int_{-t}^{2\pi-t} g(y)e^{-in(y+t)}\,dy\right)dt \\
&\qquad \text{(changement de variable } y = x - t\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n(g)f(t)e^{-int}dt \\
&= c_n(f)c_n(g).
\end{aligned}
$$

3) Les séries numériques $\sum |c_n(f)|^2$, $\sum |c_{-n}(f)|^2$, $\sum |c_n(g)|^2$ et $\sum |c_{-n}(g)|^2$ sont convergentes d'après le théorème de Parseval.

L'inégalité $|c_n(f)c_n(g)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right)$ (pour $n \in \mathbb{Z}$) montre que les séries numériques $\sum |c_n(f * g)|$ et $\sum |c_{-n}(f * g)|$ sont convergentes. La série de Fourier de $f * g$ est donc normalement convergente. Il en résulte que sa somme est égale à $f * g$ (cf. exercice 13.4).

4) Les fonctions $f * g$ et $g * f$ sont 2π-périodiques, continues, et elles ont les mêmes coefficients de Fourier $(c_n(f)c_n(g))$. On a donc $f * g = g * f$.
Le même raisonnement montre que $f * (g * h) = (f * g) * h$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n\big(f * (g * h)\big) = c_n(f)c_n(g)c_n(h) = c_n\big((f * g) * h\big)$$

13.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 13.13

Centrale PC, PSI MP 2006 K K

On désigne par $E = \mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Soient f et g deux éléments de E. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$c_0(f)c_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f)c_n(g)e^{inx} + c_{-n}(f)c_{-n}(g)e^{-inx}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Dans la suite on considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = h$ où h est une fonction 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'elle admet au plus une solution 2π-périodique.

3) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'unique solution 2π-périodique de l'équation différentielle $y'' - y = e_p$ où e_p est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ e_p(x) = e^{ipx}$.

4) On cherche à déterminer une fonction $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ telle que, pour toute fonction h 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)h(t)dt$$

soit une solution de l'équation différentielle (E).

a) En supposant l'existence de g, calculer ses coefficients de Fourier à l'aide de la question précédente.

b) Conclure alors en utilisant la question 1.

1) Ce résultat a été démontré dans l'exercice précédent.

2) Si y_1 et y_2 sont deux solutions 2π-périodiques de (E), alors $y = y_1 - y_2$ est une solution 2π-périodique, et donc bornée, de l'équation homogène $y'' - y = 0$. Mais y est alors de la forme $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = Ae^x + Be^{-x}$, et une telle fonction est bornée si et seulement si $A = B = 0$. On a donc $y = 0$ et $y_1 = y_2$.

3) On cherche une solution de l'équation $y'' - y = e_p$ sous la forme λe_p où λ est une constante. On obtient alors $\lambda(-p^2 - 1)e_p = e_p$, et donc $\lambda = -\dfrac{1}{p^2+1}$.

Ainsi la fonction $f = -\dfrac{1}{p^2+1}\, e_p$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - y = e_p$, et comme elle est 2π-périodique, elle est unique.

4) a) Si on suppose l'existence de g, alors on doit avoir, en prenant $h = e_p$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{-1}{p^2+1}\, e^{ipx} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)e_p(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e_p(x-t)\,dt \\ &= e^{ipx}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ipt}dt\ ,\end{aligned}$$

et on a donc $c_p(g) = \dfrac{-1}{p^2+1}$.

b) Désignons alors par g la somme de la série trigonométrique normalement convergente : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = -1 - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{ipt} - e^{-ipt}}{p^2+1}$.

Soit h une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$. Désignons par f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x-t)h(t)dt$.

D'après la question (1) f est la somme de la série trigonométrique

$$c_0(f) + \sum (c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}),$$

où $c_n(f) = c_n(g)c_n(h) = \dfrac{-c_n(h)}{n^2+1}$. Comme h est de classe $\mathscr{C}^1$ la série de terme général $|c_n(h)|$ est convergente, et les séries de termes généraux $|nc_n(f)|$ et $\left|n^2c_n(f)\right|$ sont donc convergentes. La série trigonométrique définissant f est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}).$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+1)(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$$
$$= c_0(h) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(h)e^{inx} + c_{-n}(h)e^{-inx}) = h(x)$$

C'est donc l'unique solution de l'équation $(*)$.

Exercice 13.14

École Polytechnique MP 2006, Mines-Ponts MP et PSI 2006 K K

Soient $r \in]0,1[$ et E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe une fonction $P_r \in E$ telle que : pour tout $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt\ . \quad (*)$$

Indication de la rédaction : on pourra commencer par écrire la relation $(*)$ pour la fonction e_p ($p \in \mathbb{Z}$) définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ e_p(x) = e^{ipx}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt$.

3) Soit $f \in E$. Calculer $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$.

Indication de la rédaction : on pourra commencer par le cas où f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1) Commençons par écrire la relation $(*)$ avec la fonction $e_p \in E$ ($p \in \mathbb{Z}$) définie par $e_p(x) = e^{ipx}$. On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$r^{|p|}e^{ipx} = \frac{1}{2\pi}e^{ipx}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)e^{-ipt}dt,$$

c'est-à-dire $c_p(P_r) = r^{|p|}$. Nous sommes ainsi conduit à prendre pour P_r la somme de la série trigonométrique normalement convergente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_r(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(e^{inx} + e^{-inx})$$

que nous avons déjà rencontrée dans l'exercice 13.11 (le noyau de Poisson).

P_r est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, et vérifie, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$P_r(x-t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (e^{in(x-t)} - e^{-in(x-t)}) \; .$$

On sait, de plus, que P_r est positive sur $\mathbb{R}$.
Soit alors f un élément de E. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n f(t)(e^{in(x-t)} - e^{-in(x-t)})\right) dt.\end{aligned}$$

Comme f est bornée sur le segment $[-\pi,\pi]$, la série de fonctions $\sum v_n$ où $v_n(t) = r^n f(t)(e^{in(x-t)} - e^{-in(x-t)})$ converge normalement sur ce segment, et on peut intégrer terme à terme. On obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(\frac{e^{inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}dt + \frac{e^{-inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{int}dt\right) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}).\end{aligned}$$

2) Nous avons vu dans l'exercice 13.11 que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 2\pi$.

3) Traitons d'abord le cas d'une fonction f, 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a alors $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$, de sorte que les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes. Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons w_n la fonction définie sur $[0,1[$ par $w_n(r) = r^n(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$. On a alors $|w_n(r)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ pour tout $r \in [0,1[$, ce qui démontre que la série de fonctions $\sum w_n$ converge normalement sur $[0,1[$.
On a de plus $\lim\limits_{r\to 1^-} w_n(r) = c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}$.
Le théorème concernant la limite en un point de la somme d'une série normalement convergente montre alors que la série de terme général $c_n(f)e^{inx}+c_{-n}(f)e^{-inx}$ est convergente et que

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(r) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}) = f(x).$$

Traitons maintenant le cas général d'une fonction $f \in E$. Pour $r \in [0, 1[$, notons f_r la fonction définie par $f_r(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt$. Compte tenu de la question (1), nous allons démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{r\to 1^-} f_r(x) = f(x)$.

Soit ε un réel strictement positif. Le théorème trigonométrique de Weierstrass montre qu'il existe une fonction polynôme trigonométrique g telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f_r(x) - g_r(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - g(x-t))P_r(t)dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t) - g(x-t)|\, P_r(t)dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f-g\|_\infty P_r(t)dt \\
&\leqslant \frac{\|f-g\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)dt = \|f-g\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|f_r - g_r\|_\infty \leqslant \|f-g\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Soit x un nombre réel. Comme g est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a $\lim\limits_{r\to 1^-} g_r(x) = g(x)$. Il existe donc un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $|g_r(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout $r \in]\alpha, 1[$. Mais on a alors :

$$|f_r(x) - f(x)| \leqslant |f_r(x) - g_r(x)| + |g_r(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leqslant 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

ce qui montre que $\lim\limits_{r\to 1^-} f_r(x) = f(x)$.

Exercice 13.15

Centrale MP 2004, ENS Paris, Lyon Cachan 2004 K K

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique, continue. On suppose les coefficients de Fourier $c_n = c_n(f)$ ($n \in \mathbb{Z}$) positifs. Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Quelle est sa somme ?

Indication de la rédaction : on pourra considérer la série $\sum r^n(c_n + c_{-n})$ pour $0 < r < 1$.

Comme f est continue et 2π périodique, elle est bornée : il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ notons u_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = f(x)r^n(e^{-inx} + e^{inx})\,.$$

Chaque fonction u_n est continue, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|u_n(x)| \leqslant 2Mr^n$. La série de fonctions $\sum u_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et il en résulte que sa somme S est continue et 2π périodique.
Le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$ donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)dx = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(c_n + c_{-n}) \,.$$

Par ailleurs (voir l'exercice 13.11)

$$S(x) = f(x)\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(e^{inx} + e^{-inx})\right) = f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \,.$$

Il en résulte que $c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(c_n + c_{-n}) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = M$,

et donc, que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, et pour tout réel r $(0 < r < 1)$, $c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} r^n(c_n + c_{-n}) \leqslant M$. En faisant tendre r vers 1 on obtient $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(c_n + c_{-n}) \leqslant M$.
Ainsi la série à termes réels positifs $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n + c_{-n})$ est convergente. La série trigonométrique de terme général $(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ est donc normalement convergente. Notons S sa somme. Les fonctions S et f sont continues, 2π-périodiques, et elles ont les mêmes coefficients de Fourier. On a donc $S = f$.

Exercice 13.16

Mines-Ponts MP 2006 K

Soit x un nombre réel et a un réel strictement positif. On pose

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=-N}^{+N}\frac{1}{a^2 + (x + 2n\pi)^2}\right).$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3) Calculer, en utilisant un logiciel de calcul formel, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{b^2 + t^2}\,dt$.
4) En déduire les coefficients de Fourier de f.
5) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u_0(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2}$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n(x) = \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}\,.$$
Posons $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}$. Il s'agit de la somme partielle à l'ordre N de la série de terme général $u_n(x)$. On a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2\pi^2}$, de sorte que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. La série de fonctions $\sum u_n$ est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Notons d'ailleurs qu'il y a convergence normale sur tout segment I inclus dans $\mathbb{R}$: un tel segment est un effet inclus dans un intervalle de la forme $I_A = [-2A\pi, 2A\pi]$, avec $A \in \mathbb{N}^*$, et on a , pour tout $x \in I_A$ et $n > A$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2((n-A)\pi)^2}$ (terme général d'une série convergente).

On a de plus $f(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$; f est donc paire.

2) Lorsque x est un réel, on a
$$f_N(x+2\pi) = f_N(x) - \frac{1}{a^2+(x-2N\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2(N+1)\pi)^2}.$$
On en déduit que $f(x+2\pi) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} f_N(x+2\pi) = \lim_{N\to+\infty} f_N(x) = f(x)$ et f est donc 2π-périodique. Démontrons que f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $n \geqslant 1$,
$$u_n'(x) = \frac{-2x}{(a^2+(x-2n\pi)^2)^2} + \frac{-2x}{(a^2+(x+2n\pi)^2)^2}.$$
Pour $x \in I_A$ et $n > A$ on a cette fois $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{4A}{(2(n-A)\pi)^4}$, ce qui démontre la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur I_A. La somme f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et il en résulte enfin, grâce au théorème de convergence normale, que la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f.

3) On obtient avec `Maple` :

```
assume(b > 0);
> factor(int(cos(t)/(b^2+t^2),t=-infinity..+infinity));
```
$$-\frac{\pi(\sinh(b\,) - \cosh(b\,))}{b}$$
On a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{b}\,e^{-b}$.

4) Comme f est paire les coefficients de Fourier b_p sont nuls.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $a_p(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx$.

La série de fonctions $\sum u_n(x)\cos px$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ puisque $\forall x \in [-\pi, \pi],\ |u_n(x)\cos px| \leqslant \dfrac{2}{a^2 + ((2n-2)\pi)^2}$. On en déduit que

$$a_p(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(x)\cos px\,dx.$$

On obtient par ailleurs, à l'aide du changement de variable $u = x + 2n\pi$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos px}{a^2 + (x+2n\pi)^2}\,dx = \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos pu}{a^2+u^2}\,du$$

puis, à l'aide de la relation de Chasles

$$\sum_{n=0}^{N}\int_0^{2\pi} u_n(x)\cos px\,dx = \int_{-2N\pi}^{(2N+2)\pi} \frac{\cos pu}{a^2+u^2}\,du\ .$$

D'où en prenant la limite quand N tend vers $+\infty$:

$$a_p(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos pu}{a^2+u^2}\,du.$$

Pour $p = 0$ on obtient $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{a^2+u^2}\,du = \dfrac{1}{a}$, et pour $p > 0$, à l'aide du changement de variable $t = pu$, $a_p(f) = \dfrac{p}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos t}{p^2a^2+t^2}\,dt = \dfrac{1}{ae^{pa}}$.

5) On a enfin, grâce à la formule de Dirichlet, $f(x) = \dfrac{1}{2a} + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{\cos px}{ae^{pa}}$.

En remarquant que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos px}{e^{pa}}$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(e^{ix-a})^p = \frac{1}{1-e^{ix-a}}$, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos px}{e^{pa}} = \frac{e^a - \cos x}{e^a + e^{-a} - 2\cos x},$$

d'où, finalement,

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(\frac{e^a - \cos x}{e^a + e^{-a} - 2\cos x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh} a}{2a(\operatorname{ch} a - \cos x)}\ .$$

Exercice 13.17

Centrale MP 2007 K

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite **d'entiers**. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1, et que sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est bornée dans le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}$. Montrer que f est un polynôme.

Soit M un réel tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D$. Pour tout nombre réel r $(0 \leqslant r < 1)$, soit f_r l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}\ .$$

f_r est la somme d'une série trigonométrique 2π-périodique, normalement convergente puisque la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f_r) = a_n r^n$. La formule de Parseval montre que la série de terme général $|a_n|^2 r^{2n}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(\theta)|^2\, d\theta \leqslant M^2.$$

Il en résulte que $\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant M^2$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et en prenant la limite quand r tend vers 1, on obtient $\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leqslant M^2$.

La série de terme général $|a_n|^2$ est donc convergente et il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^2 = 0$. On en déduit enfin, puisqu'il s'agit d'entiers, qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ pour $n \geqslant N$; f est donc un polynôme.

Exercice 13.18

Centrale MP 2006 K K

Soit $\beta \in]0, 1[$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{\beta} + 2\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \beta^2}$.

2) Soit f_β l'unique fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ coïncidant avec $x \mapsto \cos(\beta x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f_β ; étudier la convergence de la série de Fourier.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}$.

4) On considère l'application $\varphi_\beta : \theta \in\,]-\pi, \pi[\mapsto \varphi_\beta(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$.

Montrer que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que pour tout $\theta \in\,]-\pi, \pi[$, $\varphi'_\beta(\theta) + i\beta\varphi_\beta(\theta) = 0$.

En déduire une expression simple de $\varphi_\beta(\theta)$.

1) Commençons par justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$.

L'application $f : x \mapsto \dfrac{x^{\beta-1}}{1+x}$ est continue et positive sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. On a de plus $f(x) \sim x^{\beta-1}$ au voisinage de 0 et $f(x) \sim x^{\beta-2}$ au voisinage de $+\infty$. La convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\beta-2}dx$ assurent alors l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, et donc l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.

Pour le calcul de I, nous séparons en deux l'intervalle d'intégration : $I = I_1 + I_2$, avec $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$. Comme l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est un difféomorphisme de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1]$, le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans la seconde intégrale est licite, et on obtient $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\beta}}{1+x}\,dx$.

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in\,]0, 1]$. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n = \frac{1-(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x}$, et donc

$$\frac{x^{\beta-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{\beta-1+n} + (-1)^{N+1}\frac{x^{\beta+N}}{1+x},$$

d'où $I_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{\beta+n} + K_N$, avec $|K_N| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\beta+N}}{1+x}\,dx$.

On a alors $|K_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1+N}dx = \frac{1}{N+1+\beta}$, et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} K_N = 0$.

On en déduit finalement que $I_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\beta}$.

Pour le calcul de I_2, posons $\alpha = 1-\beta$. En remplaçant β par $1-\beta$ dans l'expression de I_1, on obtient $I_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1-\beta}$.

On a enfin $I = \dfrac{1}{\beta} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\beta} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1-\beta}$, et en regroupant les termes, on obtient $I = \dfrac{1}{\beta} + 2\beta \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2}$.

2) La fonction f_β est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale montre que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f_β.
Le calcul des coefficients de Fourier de f_β a été effectué dans l'exercice 13.7 : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f_\beta) = 0$, $a_0(f_\beta) = \dfrac{2}{\pi\beta}\sin(\beta\pi)$, et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f_\beta) = \dfrac{2(-1)^{n-1}\beta\sin(\beta\pi)}{\pi(n^2-\beta^2)}$.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_\beta(x) = \frac{1}{\pi\beta}\sin(\beta\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2\beta\sin(\beta\pi)}{\pi(n^2-\beta^2)} \cos(nx).$$

3) Avec $x = 0$, la relation précédente donne

$$1 = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\beta} + 2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2}\right).$$

Il en résulte que

$$\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} = \frac{1}{\beta} + 2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2} = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx\,.$$

4) Le détail des calculs est assez technique.
Posons $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$, et soit $K : \Delta \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $K(x,\theta) = \dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}$. Elle est continue sur Δ, et elle admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta) = \dfrac{-ie^{i\theta}x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}$ qui est-elle aussi continue sur Δ. Nous allons vérifier des hypothèses de domination sur $\Delta_0 = \mathbb{R}_+^* \times [-\theta_0,\theta_0]$, où θ_0 est un nombre réel fixé ($0 < \theta_0 < \pi$). Pour cela nous utilisons la minoration

$$\begin{aligned}\left|1+xe^{i\theta}\right|^2 &= (1+x\cos\theta)^2 + x^2\sin^2\theta\\ &= 1+2x\cos\theta + x^2\\ &\geqslant 1+2x\cos\theta_0 + x^2 = \left|1+xe^{i\theta_0}\right|^2\,.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall (x,\theta)\in\Delta_0, |K(x,\theta)| \leqslant |K(x,\theta_0)|\,, \text{ et } \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta)\right| \leqslant \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right|\,.$$

On a de plus

$$|K(x,\theta_0)| \sim x^{\beta-1} \text{ quand } x\to 0,$$
$$|K(x,\theta_0)| \sim x^{\beta-2} \text{ quand } x\to +\infty,$$
$$\left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right| \sim x^{\beta} \text{ quand } x\to 0 \text{ et}$$
$$\left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right| \sim x^{\beta-2} \text{ quand } x\to +\infty,$$

d'où l'on déduit, par comparaison à une intégrale de Riemann, que les fonctions $x\mapsto |K(x,\theta_0)|$ et $x\mapsto \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right|$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme montre alors que la fonction φ_β définie par $\varphi_\beta(\theta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-\theta_0,\theta_0]$ (et donc sur $]-\pi,\pi[$), et que

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[,\ \varphi_\beta'(\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{-ie^{i\theta}x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}\,dx.$$

Dans cette dernière intégrale nous effectuons une intégration par parties, avec les fonctions auxiliaires $u\colon x\mapsto \dfrac{1}{1+xe^{i\theta}}$ et $v\colon x\mapsto ix^\beta$. Comme le produit uv a des limites nulles en 0 et $+\infty$, on obtient

$$\varphi_\beta'(\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{-i\beta x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx=-i\beta\varphi_\beta(\theta)\,.$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que $\varphi_\beta(\theta)=Ke^{-i\beta\theta}$, et la question 2 montre que $K=\varphi_\beta(0)=\dfrac{\pi}{\sin(\beta\pi)}$. On a donc $\varphi_\beta(\theta)=\dfrac{\pi e^{-i\beta\theta}}{\sin(\beta\pi)}$.

14 Équations différentielles linéaires

14.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

14.1.1 Un exercice de révision

Nous avons étudié en première année les équations différentielles linéaires, scalaires, du premier ordre. Vous pouvez tester vos connaissances avec l'exercice suivant :

Exercice 14.1

CCP MP 2006

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) $|x|\, y' + (x-1)y = x^2$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

2) On cherche maintenant les solutions f définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.a) Déterminer $f(0)$. Que peut-on dire des restrictions de f à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$?

2.b) En déduire qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

1) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Comme le coefficient de y' s'annule pour $x = 0$, nous effectuons la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

- Les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène associée $xy' + (x-1)y = 0$ sont les fonctions y_1 telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y_1(x) = \lambda_1 x e^{-x}$, où λ_1 est une constante réelle.
  Pour la résolution de l'équation complète, nous utilisons la méthode de variation de la constante : les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions y_1 définies par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y_1(x) = \lambda_1(x) x e^{-x}$ où λ_1 est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda_1'(x) x e^{-x} = x$. On en déduit que $\lambda_1(x) = e^x + a_1$, où a_1 est une constante réelle.
  Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_1(x) = a_1 x e^{-x} + x \text{ où } a_1 \text{ est une constante réelle.}$$

- Les solutions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation homogène $xy' - (x-1)y = 0$ sont les fonctions y_2 telles que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y_2(x) = \lambda_2(x)\dfrac{e^x}{x}$, où λ_2 est une constante réelle. On en déduit, par application de la méthode de variation de la constante, que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_2(x) = a_2\frac{e^x}{x} + x + 2 + \frac{2}{x} \text{ où } a_2 \text{ est une constante réelle.}$$

2) Soit f une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

a) L'équation (E) donne, pour $x = 0$, $f(0) = 0$. Notons f_1 (resp. f_2) sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). Ce sont des solutions de (E) et il existe donc deux constantes a_1 et a_2 telles que

$$f(x) = \begin{cases} a_1xe^{-x} + x & \text{si } x > 0, \\[2ex] \dfrac{a_2e^x + 2}{x} + x + 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

b) Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, f_1, f_2, f_1', f_2' ont des limites finies en 0 telles que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f_2'(x)$.

Comme $\dfrac{a_2e^x + 2}{x} = \dfrac{a_2 + 2 + a_2x + o(x)}{x}$ quand $x \to 0$, l'existence d'une limite finie de $y_2(x)$ en 0 nécessite que $a_2 = -2$, et on a alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x) = -2 + 2 = 0$.

Comme $f_2(x) = x + 2 - 2\dfrac{e^x - 1}{x}$, on a $f_2'(x) = 1 - 2\dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = 1 - 2\dfrac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_2'(x) = 0$.

On a aussi $f_1'(x) = a_1(e^{-x} - xe^{-x}) + 1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1'(x) = a_1 + 1$. La condition concernant les limites des dérivées s'écrit alors $a_1 = -1$.

Réciproquement le théorème de prolongement pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ montre que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \dfrac{2}{x}(1 - e^x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car la relation $|x|\, f'(x) + (x-1)f(x) = x^2$ est vérifiée pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, et aussi pour $x = 0$ puisque $f(0) = 0$.

14.1.2 Équation différentielle vectorielle du premier ordre

Ce qu'il faut savoir

On désigne par F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, et on note $\mathscr{L}(F)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de F.

Soit a une application définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathscr{L}(F)$, et soit $t \in I$; afin d'alléger les notations, l'image d'un vecteur $x \in F$ par l'endomorphisme $a(t)$ sera notée $a(t)x$.

Une équation différentielle vectorielle du premier ordre est une équation de la forme

$$\forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{5}$$

où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(F)$ et b est une application continue de I dans F.

L'équation différentielle

$$\forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) \tag{6}$$

est appelée l'équation homogène associée à (5).

Théorème (Cauchy-Lipschitz) : soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in F$. Il existe une unique solution x de (5) vérifiant la condition initiale $x(t_0) = y_0$.

La courbe définie par le paramétrage $t \mapsto x(t)$ est appelée une courbe intégrale.

Structure de l'ensemble des solutions : l'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions de l'équation homogène (6) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$. Si t_0 est un point de I, l'application qui à $x \in \mathscr{E}$ associe $x(t_0)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ sur l'espace vectoriel F. Il en résulte que la dimension de $\mathscr{E}$ est égale à la dimension de F.

Une base $(x_1, \dots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est appelée un système fondamental de solutions.

Soit $\mathscr{B} = (e_1 \dots, e_n)$ une base de F, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n solutions de (6). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(x_1, \dots, x_n)$ est un système fondamental de solutions.

b) $\det_{\mathscr{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

c) Il existe $t_0 \in I$ tel que $\det_{\mathscr{B}}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \neq 0$.

L'application $W : t \mapsto W(t) = \det_{\mathscr{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est appelé le Wronskien de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des solutions de l'équation complète (5) et soit x_0 un élément de $\mathscr{F}$. Alors les éléments de $\mathscr{F}$ sont les fonctions de la forme $x_0 + x$, avec $x \in \mathscr{E}$. L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, F)$ dont la direction est l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.

La méthode de variation des constantes : lorsqu'on connaît un système fondamental $(x_1, \dots, x_n)$ de solutions de l'équation (6), alors les solutions de $\mathscr{A}$ sont toutes les fonctions de la forme $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$ sur I dont les dérivées vérifient $\lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_n' x_n = b$.

Cas d'une équation différentielle à coefficients constants : dans le cas d'une équation différentielle de la forme $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = ax(t)$ où a est un élément de $\mathscr{L}(F)$, lorsque y_0 est un élément de F, l'unique solution définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $x(0) = y_0$ est l'application $t \mapsto \exp(ta)y_0$.

Les solutions de l'équation $x'(t) = ax(t) + b(t)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \exp(ta)\lambda(t)$ où $\lambda \in \mathscr{C}^1(I, F)$ vérifie : $\forall t \in I,\ \lambda'(t) = \exp(-ta)b(t)$.

Exercice 14.2

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Déterminer les fonctions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$(E) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)X(t)\ .$$

Donner une base de l'espace vectoriel S des solutions à valeurs réelles.

On peut écrire l'équation différentielle linéaire (E) sous la forme d'un système différentiel :

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} x' = x\cos t - y\sin t \\ y' = x\sin t + y\cos t \end{cases}$$

En posant $z = x + iy$ le système s'écrit

$$\begin{aligned} z' &= (x\cos t - y\sin t) + i(x\sin t + y\cos t) \\ &= (\cos t + i\sin t)(x + iy) \\ &= e^{it}z \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre dont les solutions sont les fonctions z telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \lambda e^{-ie^{it}} = \lambda e^{\sin t}(\cos(\cos t) - i\sin(\cos t)),$$

où λ est une constante complexe. En posant $\lambda = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$), on obtient les solutions de (E). Ce sont les fonctions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\sin t}(a\cos(\cos t) + b\sin(\cos t)) \\ e^{\sin t}(b\cos(\cos t) - a\sin(\cos t)) \end{pmatrix} \\ &= ae^{\sin t}\begin{pmatrix} \cos(\cos t) \\ -\sin(\cos t) \end{pmatrix} + be^{\sin t}\begin{pmatrix} \sin(\cos t) \\ \cos(\cos t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les fonctions $X_1 : t \mapsto e^{\sin t}\begin{pmatrix} \cos(\cos t) \\ -\sin(\cos t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto e^{\sin t}\begin{pmatrix} \sin(\cos t) \\ \cos(\cos t) \end{pmatrix}$ forment un système générateur de l'espace vectoriel S des solutions à valeurs réelles. Comme $\dim(S) = 2$, elles forment une base de S.

Exercice 14.3

Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A est une matrice carrée d'ordre 3 et de de rang 1. On vérifie facilement que $A^2 = 0$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = I_3 + tA$. On sait alors que les solutions sont de la forme $X : t \mapsto (I_3 + tA)X_0$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

14.1.3 Équation différentielle scalaire linéaire du second ordre

Ce qu'il faut savoir

On considère une équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in I,\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \qquad (1)$$

où a, b, c, d sont des fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et où l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{K}$.

L'équation différentielle

$$\forall x \in I,\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (2)$$

est appelée l'équation homogène associée à (1). Dans la suite nous supposons que ***a* ne s'annule pas sur *I***.

Théorème (Cauchy-Lipschitz) : soit $x_0 \in I$, et soit $(v_0, v_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = v_0$ et $y'(x_0) = v_1$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions[1] de (2) est un **sous-espace vectoriel de dimension 2** du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est appelé un **système fondamental de solutions**.

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (2). La fonction $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ est appelée **Wronskien** du couple (y_1, y_2). Elle est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in I,\ a(x)W' + b(x)W = 0.$$

1. Dans le cas où les fonctions a, b, c et d sont à valeurs réelles on recherche généralement les solutions à valeurs réelles.

Pour que (y_1, y_2) forme un système fondamental de solutions de (2), il faut et il suffit que W ne s'annule pas sur I, et il suffit, pour cela, qu'il soit non nul en un point x_0 de I.

L'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de l'équation complète (1) est un sous-espace affine de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, dont la direction est l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des solutions de l'équation homogène : si y_0 est une solution particulière de (1), les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $y_0 + y$, avec $y \in \mathscr{E}$.

Exercice 14.4

CCP MP 2006

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

2) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

3) Soient α et β deux réels. A quelle condition existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions initiales $y(1) = \alpha$ et $y'(1) = \beta$?

Indication de l'examinateur : (E) admet des solutions évidentes très simples.

1) Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre. On observe que les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$ sont des solutions de (E).

Attention : *pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy ou le théorème concernant la dimension de l'espace vectoriel des solutions, il faut se placer sur des intervalles ou le coefficient de y'' ne s'annule pas !*

Plaçons nous, par exemple, sur l'intervalle $I_1 =]1, +\infty[$. Les fonctions u et v forment un système fondamental de solutions sur cet intervalle puisque leur Wronskien $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = (x-1)e^x$ est non nul.

Les solutions de (E) sur I_1 sont donc les fonctions y_1 définies par $\forall x \in I_1$, $y_1(x) = a_1e^x + b_1x$ où a_1 et b_1 sont deux constantes réelles.

De même, les solutions définies sur $I_2 =]-\infty, 1[$ sont les fonctions y_2 telles que $y_2(x) = a_2e^x + b_2x$ avec $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) Cherchons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $y_1 : x \mapsto a_1e^x + b_1x$ une solution définie sur I_1 et $y_2 : x \mapsto a_2e^x + b_2x$ une solution définie sur I_2. Pour qu'elles soient les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x\to 1^+} y_1(x) = \lim_{x\to 1^-} y_2(x)$$
$$\lim_{x\to 1^+} y_1'(x) = \lim_{x\to 1^-} y_2'(x)$$
$$\lim_{x\to 1^+} y_1''(x) = \lim_{x\to 1^-} y_2''(x)$$

c'est-à-dire $a_1e + b_1 = a_2e + b_2$, $a_1e + b_1 = a_2e + b_2$ et $a_1 = a_2$.

Ces conditions (appelées conditions de raccordement) sont vérifiées si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Il en résulte que les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $y\colon x \mapsto ae^x + bx$ où a et b sont deux constantes réelles.

3) Si y est une solution définie sur $\mathbb{R}$, alors en remplaçant x par 1 dans (E), on a $-y'(1) + y(1) = 0$. Pour qu'il existe une solution y définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = \alpha$ et $y'(1) = \beta$, il faut et il suffit que $\alpha = \beta$.

Remarque
on voit sur cet exemple que le théorème de Cauchy peut être mis en défaut si le coefficient de y'' s'annule en un point.

14.1.4 Méthodes de résolution

a) La méthode de variation des constantes

Dans le cas où on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène, mais où on ne connaît pas de solution particulière de l'équation complète, on utilise généralement la méthode de variation des constantes :

Ce qu'il faut savoir

On considère l'équation (E) $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, où la fonction a ne s'annule pas sur I.
Soit (y_1, y_2) un système fondamental de l'équation homogène associée. Alors les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$, où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I dont les dérivées vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & d/a \end{array}\right. .$$

Exercice 14.5

Mines Ponts MP 2006 et 2007

Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + y = \operatorname{cotan} x$ sur $I =]0, \pi[$.

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ forment un système fondamental des solutions définies sur I de l'équation homogène $y'' + y = 0$. On sait alors que les solutions de l'équation complète sont de la forme $y\colon x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$ où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall x \in I,\ \left\{\begin{array}{rcl} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x & = & 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x & = & \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array}\right.$$

On en déduit aisément

$$\lambda'(x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \mu'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x + \frac{1}{\sin x},$$

d'où $\lambda(x) = -\sin x + a$ et $\mu(x) = \cos x + \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + b$ où a et b sont deux constantes réelles.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur I par

$$y(x) = (\sin x)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + a\cos x + b\sin x$$

où a et b sont deux constantes réelles.

b) Changement de fonction inconnue

Exercice 14.6

Extrait de Centrale MP 2006

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (E_k) $xy'' + 2y' + kxy = 0$ sur $I =]0, +\infty[$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z \colon x \mapsto xy(x)$.

Pour toute fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, la fonction z définie par $z(x) = xy(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, et elle vérifie $z' = xy' + y$ et $z'' = xy'' + 2y'$. Pour que y soit solution de (E_k), il faut et il suffit que z soit solution de l'équation différentielle à coefficients constants (E'_k) $z'' + kz = 0$.

- Si $k < 0$, les solutions de (E'_k) sont les fonctions z telles que
$$\forall x \in I,\ z(x) = A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-k}x) + B\,\mathrm{sh}(\sqrt{-k}x),$$
où A et B sont deux constantes réelles. Les solutions de (E_k) sont alors les fonctions y telles que $y(x) = \frac{1}{x}(A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-k}x) + B\,\mathrm{sh}(\sqrt{-k}x))$.
- Si $k = 0$, les solutions de (E'_k) sont les fonctions z telles que $\forall x \in I,\ z(x) = Ax + B$, où A et B sont deux constantes réelles. Les solutions de (E_k) sont alors les fonctions y telles que $y(x) = A + \frac{B}{x}$.
- Si $k > 0$, les solutions de (E'_k) sont les fonctions z telles que
$$\forall x \in I,\ z(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x),$$
où A et B sont deux constantes réelles. Les solutions de (E_k) sont alors les fonctions y telles que $y(x) = \frac{1}{x}(A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x))$.

Ce qu'il faut savoir

Cas où on connaît une solution de l'équation homogène

Lorsque h est une solution de l'équation homogène **ne s'annulant pas**, on peut résoudre l'équation complète à l'aide du changement de fonction inconnue $y = zh$. La fonction z' est alors solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exercice 14.7

Mines-Ponts MP 2007

On considère l'équation différentielle (E) $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$.

1) Vérifier que la fonction $x \mapsto e^x$ est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

2) Résoudre (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et sur $I_2 =]-1, +\infty[$.

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)e^x - 2e^x + (1-x)e^x = 0$. La fonction $x \mapsto e^x$ est donc une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2) On effectue la résolution de l'équation différentielle (E) à l'aide du changement de fonction inconnue $y = e^x z$.
On a alors $y' = e^x(z + z')$ et $y'' = e^x(z + 2z' + z'')$. L'équation différentielle (E) s'écrit alors $(1+x)z'' + 2xz' = 0$.
Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction z'. Comme le coefficient de z'' s'annule au point $x = -1$ nous cherchons les solutions z_1 définies sur $I_1 =]-\infty, -1[$ et les solutions z_2 définies sur $I_2 =]-1, +\infty[$.
Sur chacun de ces intervalles on a

$$z_k'' = -\frac{2x}{1+x} z_k' = \left(-2 + \frac{2}{1+x}\right) z_k'$$

z_k' est donc solution d'une équation différentielle du premier ordre. On en déduit :

$$\forall x \in I_k,\ z_k'(x) = \lambda_k (1+x)^2 e^{-2x}$$

où λ_k $(k = 1, 2)$ est une constante réelle.
On obtient alors, après deux intégrations par parties successives :

$$\forall x \in I_k, \quad z_k(x) = -\lambda_k \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-2x} + b_k \quad (k = 1, 2)$$

où λ_k et b_k sont deux constantes réelles.
Il en résulte que :

$$\forall x \in I_k, \quad y_k(x) = a_k \left(5 + 6x + 2x^2\right) e^{-x} + b_k e^x \ (k = 1, 2)$$

où a_k et b_k sont deux constantes réelles.

c) Raccordement de solutions

Exercice 14.8

Mines-Ponts MP 2007 (suite de l'exercice précédent)

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$.

Nous avons effectué la résolution de (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$ dans l'exercice précédent.

Soit $y_k : x \mapsto a_k(5+6x+2x^2)e^{-x} + b_k e^x$ une solution définie sur I_k ($k = 1$ ou 2). On a alors $y_k'(x) = a_k(1-2x-2x^2)e^{-x} + b_k e^x$ et $y_k''(x) = a_k(-3-2x+2x^2)e^{-x} + b_k e^x$. On a donc

$$\lim_{x \to -1} y_k(x) = a_k e + b_k e^{-1}, \lim_{x \to -1} y_k'(x) = a_k e + b_k e^{-1} \text{ et } \lim_{x \to -1} y_k''(x) = a_k e + b_k e^{-1}.$$

Il en résulte que y_1 et y_2 sont les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a_1 e + b_1 e^{-1} = a_2 e + b_2 e^{-1}$ (conditions de raccordement).

On peut alors choisir les constantes, a_1, a_2 et b_1 arbitrairement dans $\mathbb{R}$; la constante b_2 est alors déterminée par $b_2 = b_1 + (a_1 - a_2)e^2$.

En prenant en particulier $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $b_1 = 0$, on a $b_2 = e^2$ et on obtient la solution f_1 définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} (5+6x+2x^2)e^{-x} & \text{si } x \in I_1, \\ e & \text{si } x = -1, \\ e^{2+x} & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

De même en prenant $(a_1, a_2, b_1) = (0, 1, 0)$, on a $b_2 = -e^2$ et on obtient la solution f_2 définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I_1, \\ 0 & \text{si } x = -1, \\ (5+6x+2x^2)e^{-x} - e^{2+x} & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Enfin en prenant $(a_1, a_2, b_1) = (0, 0, 1)$ on a $b_2 = 1$ et on obtient la solution f_3 définie par $f_3(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toute solution f définie sur $\mathbb{R}$ est alors de la forme $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + b_1 f_3$.

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendantes car si

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + b_1 f_3 = 0,$$

on obtient, $a_1 = 0$ en prenant la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, puis on obtient $b_1 = 0$ grâce à la valeur de f au point $x = -1$, et il en résulte enfin que $a_2 = 0$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 3.

d) Changement de variable

Ce qu'il faut savoir

Il est souvent utile d'effectuer un changement de variable dans une équation différentielle du second ordre. Pour être licite, un changement de variable doit être défini par un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 14.9

Centrale MP 2005

1) Résoudre l'équation différentielle $(E)\quad (x^2+1)y''+2xy'+\dfrac{1}{x^2+1}\,y=1$, en utilisant le changement de variable $x=\tan t$.

2) Déterminer la solution ϕ de (E) telle que $\phi(0)=0$ et $\phi'(0)=1$.

1) L'application $t\mapsto x=\tan t$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$ sur $\mathbb{R}$ dont l'application réciproque est la fonction Arctan. Si y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction z définie par $z(t)=y(\tan t)$ est classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$, et on a $y(x)=z(\arctan x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a ensuite $y'(x)=\dfrac{z'(\arctan x)}{x^2+1}$ et $y''(x)=\dfrac{z''(\arctan x)-2xz'(\arctan x)}{(x^2+1)^2}$,

d'où $(x^2+1)y''(x)+2xy'(x)+\dfrac{1}{x^2+1}\,y(x)=\dfrac{z''(\arctan x)+z(\arctan x)}{x^2+1}=1$.

Rechercher une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ revient donc à chercher une solution de l'équation $(F)\quad z''(t)+z(t)=1+\tan^2 t$ sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

Un système fondamental des solutions de l'équation homogène $z''+z=0$ est constitué des fonctions $t\mapsto\cos t$ et $t\mapsto\sin t$. Il existe donc deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$ telles que, pour tout $t\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[$, on ait le système

$$\begin{cases} u'(t)\cos t+v'(t)\sin t=0\\ -u'(t)\sin t+v'(t)\cos t=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}.$$

On obtient facilement $u'(t)=-\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$ et $v'(t)=\dfrac{1}{\cos t}$. On en déduit

$$u(t)=-\frac{1}{\cos t}+\alpha$$

où α est une constante réelle. Pour déterminer les primitives de v' écrivons $v'(t)=\dfrac{\cos t}{1-\sin^2 t}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos t}{1-\sin t}+\dfrac{\cos t}{1+\sin t}\right)$. On obtient alors

$$v(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\beta$$

où β est une constante réelle. Les solutions de F sont donc les fonctions de la forme

$$z: t\mapsto -1+\frac{\sin t}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\alpha\cos t+\beta\sin t$$

où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, on déduit en particulier

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \operatorname{argsh} x\,.$$

On en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{argsh} x + \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1+x^2}}$$

où (α,β) appartient à $\mathbb{R}^2$.

2) Cherchons α et β pour $y(0)=0$ et $y'(0)=1$. On a tout d'abord $y(0) = -1+\alpha$.

Ensuite $y'(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{argsh} x + \beta}{(1+x^2)^{3/2}}$, donc $y'(0) = \beta = 1$.

Conclusion : la solution cherchée est la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{argsh} x + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

e) Recherche de solutions développables en série entière

Exercice 14.10

(TPE MP 2007)

On considère l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$.

1) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

2) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

4) Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

1) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Comme le coefficient de y'' s'annule pour $x=0$, rien ne permet d'affirmer l'existence d'une solution définie au voisinage de 0, encore moins l'existence d'une solution développable en série entière !

Nous cherchons a priori une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S soit solution de (E).

On a alors, pour tout $x \in]-R,R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}$.

En collectant les coefficients de x^n on obtient : $4xS''(x)+2S'(x)-S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, avec $b_n = 4n(n+1)a_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}-a_n$.

L'unicité du développement en série entière de la fonction nulle montre que S est une solution de (E) si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+2)(2n+1)a_{n+1} = a_n \qquad (*)$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'où on déduit aisément $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}\,a_0$.

Il est important, avant de conclure, de s'assurer que le rayon de convergence R est non nul. Si a_0 est non nul, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est non nul, et la relation $(*)$ montre que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On déduit alors de la règle de d'Alembert que le rayon de convergence R est égal à $+\infty$.

Les solutions développables en série entière de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $S = aS_0$, où a est une constante réelle arbitraire et, $\forall x \in \mathbb{R},\ S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

Lorsque $x > 0$, on peut écrire $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$. On a donc $S_0(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$. Lorsque $x < 0$, on peut écrire $x^n = (-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}$, et on a $S_0(x) = \cos\sqrt{-x}$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_0(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2) L'application $t \mapsto x = t^2$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, dont la réciproque est l'application $x \mapsto t = \sqrt{x}$. Si $y \in \mathscr{C}^2(I_1, \mathbb{R})$, alors la fonction composée définie par $z(t) = y(t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et vérifie :

$$\forall t \in I,\ z'(t) = 2ty'(t^2) \text{ et } z''(t) = 2y'(t^2) + 4t^2y''(t^2) = 2y'(x) + 4xy''(x).$$

Ainsi pour que y soit une solution de (E), il faut et il suffit que z soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z'' = z$. Il existe donc deux constantes réelles a et b telles que $\forall t \in I,\ z(t) = a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t$. Les solutions de (E) sur I_1 sont donc les fonctions y telles que $\forall x \in I_1,\ y(x) = a\operatorname{ch}\sqrt{x} + b\operatorname{sh}\sqrt{x}$.

3) Pour résoudre l'équation (E) sur $I_2 = \mathbb{R}_-^*$, nous utilisons l'application $t \mapsto x = -t^2$ qui est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de I_1 sur I_2. On a ici $z(t) = y(-t^2)$, d'où $z'(t) = -2ty'(-t^2)$ et

$$z''(t) = -2y'(t^2) + 4t^2y''(t^2) = -2y'(x) - 4xy''(x).$$

Pour que y soit une solution de (E), il faut et il suffit que $z''(t) = -z(t)$. Les solutions y de (E) sur I_2 sont donc les fonctions telles que $y(x) = a\cos\sqrt{-x} + b\sin\sqrt{-x}$.

4) Nous devons étudier le raccordement éventuel en 0 d'une solution y_1 définie sur I_1 par $y_1(x) = a_1 \operatorname{ch} \sqrt{x} + b_1 \operatorname{sh} \sqrt{x}$ et d'une solution y_2 définie sur I_2 par $y_2(x) = a_2 \cos \sqrt{-x} + b_2 \sin \sqrt{-x}$.

Supposons que y_1 et y_2 soient les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$. Alors y_1, y_1', y_1'' ont des limites finies en 0^+, y_2, y_2', y_2'' ont des limites finies en 0^-, et $\lim\limits_{x\to 0^+} y_1^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y_2^{(k)}(x)$ pour $k = 0, 1, 2$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} y_1(x) = a_1$, et, pour tout $x \in I_1$, $y_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(a_1 \operatorname{sh} \sqrt{x} + b_1 \operatorname{ch} \sqrt{x})$. Si b_1 est non nul, alors $y_1'(x)$ tend vers ∞ (avec le signe de b_1). On a donc nécessairement $b_1 = 0$, et on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} y_1'(x) = \dfrac{a_1}{2}$.

On voit de même que $\lim\limits_{x\to 0^-} y_2(x) = a_2$, que $b_2 = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0^-} y_2'(x) = \dfrac{a_2}{2}$.

Il en résulte alors que $a_1 = a_2$, et on observe alors (en posant $a = a_1 = a_2$) que $y = aS_0$ où S_0 est la solution développable en série entière déterminée à la question 1.

Réciproquement une telle fonction est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions aS_0, où a est une constante réelle.

14.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 14.11

Mines-Ponts MP 2005

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $\quad 2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

3) Montrer que cette solution est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

1) Pour $x \neq 0$, l'équation homogène s'écrit $y' + \dfrac{y}{2x} = 0$ et a pour solution $y\colon x \mapsto A/\sqrt{|x|}$, où A est une constante réelle. On sait alors (méthode de variation de la constante) que les solutions de l'équation complète sont de la forme $x \mapsto A(x)\sqrt{|x|}$ où A est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $2x\dfrac{A'(x)}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{1}{1-x}$, c'est-à-dire (F) $\quad A'(x) = \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}(1-x)}$.

Cherchons alors les solutions de (E) dans les trois intervalles proposés.

- Sur $]-\infty, 0[$ l'équation (E) s'écrit $A'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}(1-x)}$, ou encore $A'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} \dfrac{1}{1+(\sqrt{-x})^2}$. On en déduit $A(x) = \arctan\sqrt{-x} + a$ où a est une constante réelle. Les solutions de (E) sont donc les fonctions f_1 de la forme $x \mapsto \dfrac{\arctan\sqrt{-x} + a}{\sqrt{-x}}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Sur $]0, 1[$ l'équation (E) s'écrit cette fois $A'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$, ou encore $A'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{1}{1-(\sqrt{x})^2}$. On en déduit $A(x) = \operatorname{argth}\sqrt{x} + b$ où b est une constante réelle. Les solutions de (E) sont donc les fonctions f_2 de la forme $x \mapsto \dfrac{\operatorname{argth}\sqrt{x} + b}{\sqrt{x}}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

- Sur $]1, +\infty[$, on a comme dans le cas précédent $A'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{1}{1-(\sqrt{x})^2}$, ce que l'on peut écrire $A'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$. On a donc $A(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + c$ où c est une constante réelle. Les solutions de (E) sont donc les fonctions f_3 de la forme $x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + c}{\sqrt{x}}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2) On remarque que les fonctions f_1 et f_2 ne peuvent avoir une limite finie en 0 que si $a = b = 0$. Soit donc f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty,\ 0[\\ \dfrac{\operatorname{argth}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,\ 1[\end{cases}.$$

En utilisant les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $x \mapsto \operatorname{argth} x$ on obtient, aussi bien pour $x > 0$ que pour $x < 0$, la relation $f(x) = 1 + x/3 + o(x)$, ce qui montre que f se prolonge en 0 par la valeur 1, et le théorème de prolongement pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$, avec $f'(0) = 1/3$. La relation (E) est alors vérifiée pour tout $x \in]-\infty, 1[$. f est donc solution de (E) sur $x \in]-\infty, 1[$, et c'est la seule.

3) On utilise cette fois les développements en série entière de rayon 1 des fonctions $x \mapsto \arctan x$ et $x \mapsto \operatorname{argth} x$ on obtient, pour $|x| < 1$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$, ce qui prouve que la fonction est développable en série entière, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. Comme elle l'est également sur $]-\infty, 0[$ (comme quotient et composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$), elle l'est donc sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 14.12

Mines - Ponts MP 2007

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'équation différentielle $y'' - 4y = a|x| + b$ admet une unique solution dont le graphe possède des asymptotes lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Le second membre étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle sont de classe $\mathscr{C}^2$.

Un système fondamental des solutions de l'équation homogène $y'' - 4y = 0$ est constitué des fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^{-2x}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ où (α, β) appartient à $\mathbb{R}^2$.

Sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle s'écrit $y'' - 4y = ax + b$. Elle admet une solution particulière de la forme $y(x) = -(ax + b)/4$, donc les solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} - (ax + b)/4$.

Si le graphe de la solution admet une asymptote en $+\infty$, alors le rapport $y(x)/x$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$.

On a donc $y(x) = \beta e^{-2x} - (ax + b)/4$ et $y'(x) = -2\beta e^{-2x} - a/4$.

Sur $]-\infty, 0[$, l'équation différentielle s'écrit $y'' - 4y = -ax + b$. Elle admet une solution particulière de la forme $y(x) = (ax - b)/4$, donc les solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha' e^{2x} + \beta' e^{-2x} + (ax - b)/4$.

Si le graphe de la solution admet une asymptote en $-\infty$, alors le rapport $y(x)/x$ a une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$ ce qui n'est possible que si $\beta' = 0$.

On a donc $y(x) = \alpha' e^{2x} + (ax - b)/4$ et $y'(x) = 2\alpha' e^{2x} + a/4$.

Par continuité de f en 0, on a donc $\alpha' = \beta$, et par continuité de f' en 0, on a $-2\beta - a/4 = 2\alpha' + a/4$. On en tire $\alpha' = \beta = -a/8$.

On constate que le graphe de la solution obtenue $y(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{8}e^{-2x} - \dfrac{ax+b}{4} \\ -\dfrac{a}{8}e^{2x} + \dfrac{ax-b}{4} \end{cases}$

admet l'asymptote d'équation $y = -(ax + b)/4$ en $+\infty$ et l'asymptote d'équation $y = (ax - b)/4$ en $-\infty$. C'est donc bien la solution cherchée et elle est unique.

Exercice 14.13

Mines-Ponts MP 2006, École Polytechnique MP 2007

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x - t)dt + 1. \qquad (*)$$

La relation $(*)$ s'écrit aussi

$$f(x) = 2\cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + 2\sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + 1$$

et on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + 2\cos^2(x)f(x) + 2\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt \\ &\quad + 2\sin^2(x)f(x) \\ &= -2\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + 2\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + 2f(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - 2\sin(x)\cos(x)f(x) - 2\sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt \\ &\quad + 2\sin(x)\cos(x)f(x) + 2f'(x) \\ &= -2\cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - 2\sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + 2f'(x) \\ &= 1 - f(x) + 2f'(x). \end{aligned}$$

Ainsi f est une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y'' - 2y' + y = 1.$$

L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1$ a une racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y = (a + bx)e^x$ où a et b sont deux constantes réelles. Comme la fonction constante égale à 1 est solution de l'équation complète, on en déduit que $f(x) = (a + bx)e^x + 1$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La relation $f(0) = 1$ donne $a = 0$. On a donc $f(x) = bxe^x + 1$, d'où $f'(x) = b(x + 1)e^x$, et comme $f'(0) = 2f(0) = 2$, on a $b = 2$ et finalement $f(x) = 2xe^x + 1$.

On vérifie réciproquement sans difficulté que la fonction f ainsi définie vérifie la relation indiquée.

Exercice 14.14

Mines-Ponts MP 2007

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

2) Déterminer les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) La fonction $t \mapsto e^t$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ dont la réciproque est la fonction logarithme. Cela justifie le changement de variable $x = e^t$.

À chaque fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, associons la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t)$.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t\big(f'(e^t)) + e^t f''(e^t)\big)$, c'est-à-dire en posant $x = e^t$, $g'(t) = xf'(x)$ et $g''(t) = x(f'(x) + xf''(x))$. On en déduit $x^2 f''(x) = g''(t) - g'(t)$.

Il en résulte que f est une solution de (E) si et seulement si g est une solution de l'équation différentielle à coefficients constants (E_1) $g'' - g' + g = 0$. L'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$r_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions g telles que $g(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$.

2) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction f' est la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$. Il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) $x^2y'' + y = 0$, et il existe donc des constantes réelles A et B telles que :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right).$$

Il s'agit maintenant de vérifier dans l'équation initiale :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \left(\frac{B}{2} - \frac{A\sqrt{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right).$$

En prenant en particulier la valeur $x = x_0$ telle que $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x_0) = \pi$, puis la valeur $x = x_1$ telle que $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x_1) = \dfrac{\pi}{2}$, on voit que la relation $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ équivaut à $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B\sqrt{3}}{2} = A$ et $\dfrac{B}{2} - \dfrac{A\sqrt{3}}{2} = -B$, c'est-à-dire à $A = B\sqrt{3}$. Les fonctions cherchées sont donc les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) &= B\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\\ &= 2B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Exercice 14.15

Mines-Ponts MP 2006 K

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et A un endomorphisme de E. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $(E)\ \ Y' = AY$ sont de norme constante si et seulement si A est antisymétrique.

Précisons un peu les notations. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et on désigne par $< x, y >$ le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$. Il est commode d'identifier un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice dans la base canonique (Ainsi la notation Ax désigne indifféremment l'image de $x \in \mathbb{R}^n$ par l'endomorphisme A, ou le produit de la matrice A avec la matrice unicolonne des coordonnées de x dans la base canonique).

On sait que parmi les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, ceux qui sont antisymétriques sont caractérisées par la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < Ax, x >= 0$.

À chaque solution X de (E), associons la fonction f_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \|X(t)\|^2 =< X(t), X(t) >$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2 < X'(t), X(t) >= 2 < AX(t), X(t) >$.

Si A est antisymétrique, alors $f'_X = 0$, et la fonction f_X est constante, donc X est de norme constante.

Supposons réciproquement que les solutions de (E) sont de norme constante. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution X de l'équation (E) telle que $X(0) = x$. Comme X est de norme constante, f_X est constante et $f'_X = 0$. On a en particulier $< Ax, x >=< AX(0), X(0) >= f'_X(0) = 0$. Il en résulte que A est antisymétrique.

14.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 14.16

Polytechnique MP 2006K

Soit $g : x \mapsto |\sin x|$.

1) Déterminer le développement en série de Fourier de g.

2) Montrer que l'équation différentielle $(E) \quad y'' + y = g(x)$ admet une et une seule solution f de classe $\mathscr{C}^2$ et π-périodique.

3) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^3$ par morceaux.

1) Comme g est continue, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est égale à g. Nous renvoyons le lecteur à l'exercice 13.6 page 316 où on a obtenu : $g(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(2px)}{1-4p^2}$.

2) La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) admet pour solutions les fonctions y de la forme $y(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x + \psi(x)$ où ψ est une solution particulière de (E) et où α et β sont deux nombres réels.

Cherchons a priori une solution ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ telle que l'on puisse justifier les dérivations terme à terme :

$$\psi'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \psi''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \cos(nx).$$

On aura alors $\psi''(x) + \psi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1-n^2)\cos(nx)$.

D'où l'égalité $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1-n^2)\cos(nx) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2px)}{1-4p^2}$.

Alors pour que ψ soit solution de (E) il suffit que les coefficients des deux séries soient égaux deux à deux, c'est-à-dire que les coefficients impairs soient nuls et que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $a_{2n} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(1-4n^2)^2}$.

Il reste à s'assurer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$, est bien solution de (E).

Tout d'abord, on vérifie que les séries définissant ψ, ψ' et ψ'' convergent normalement sur $\mathbb{R}$ ce qui assurera que ψ est de classe $\mathscr{C}^2$.

Or, si, pour tout x réel, on pose $u_n(x) = \dfrac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$, alors $u_n'(x) = \dfrac{-2n\sin(2nx)}{(1-4n^2)^2}$ et $u_n''(x) = -\dfrac{4n^2\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$. Alors $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(4n^2-1)^2} \sim \dfrac{1}{16n^4}$, puis $\|u_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{2n}{(4n^2-1)^2} \sim \dfrac{1}{8n^3}$, et enfin $\|u_n''\|_\infty \leqslant \dfrac{4n^2}{(4n^2-1)^2} \sim \dfrac{1}{4n^2}$.
Donc toutes les séries majorantes obtenues convergent par comparaison avec des séries de Riemann, et comme u_n est de classe $\mathscr{C}^2$, il en résulte que ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que l'on peut dériver terme à terme. Donc, pour tout x réel, $\psi'(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$, et $\psi''(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4n^2\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$. On retrouve alors $\psi''(x)+\psi(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$.

Donc ψ est une solution de (E). On constate qu'elle est π-périodique.

Il reste à montrer l'unicité.

Les autres solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto y(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t + \psi(t)$. Mais comme $t \mapsto \alpha\cos t + \beta\sin t$ est π-périodique si et seulement si $\alpha = \beta = 0$, la fonction y est π-périodique si et seulement si $y = \psi$.

3) On a vu que ψ est de classe $\mathscr{C}^2$. De plus $\psi'' = -\psi + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On en déduit que ψ est de classe $\mathscr{C}^3$ par morceaux.

Exercice 14.17

CCP MP 2007

Trouver les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(E) : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x.$$

Indication de la rédaction : on rappelle que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soient g et h les parties respectivement paire et impaire de f. Elles sont définies par $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si g et h le sont, et la relation (E) s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x) = x + \cos x.$$

Comme la fonction $g'' + g$ est paire et la fonction $h'' - h$ est impaire, la relation (E) est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) + g(x) = \cos x, & (1) \\ h''(x) - h(x) = x. & (2) \end{cases}$$

La méthode de variation des constantes montre que les solutions de l'équation (1) sont de la forme $z = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ où A et B sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0$ et $-A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = \cos x$. On a donc $A'(x) = -\sin x \cos x$ et $B'(x) = \cos^2 x$. D'où $A(x) = \dfrac{1}{2}\cos^2 x + \alpha$ et $B(x) = \dfrac{1}{2}\sin x \cos x + \dfrac{1}{2}x + \beta$ où α et β sont des constantes réelles. On en déduit $g(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x + a\cos x + b\sin x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et comme g est paire on a $b = 0$, et $g(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x + a\cos x$.

On voit de même (ici il y a une solution évidente) que les solutions impaires de (2) sont les fonctions h telle que $h(x) = -x + b\,\mathrm{sh}\,x$ où b est une constante réelle.

En conclusion les solutions de (E) sont les fonctions f telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x\sin x - x + a\cos x + b\,\mathrm{sh}\,x,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 14.18

Mines-Ponts MP 2007

Déterminer la fonctions f de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f^{(4)} = f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$.

f est solution d'une équation différentielle d'ordre 4 mais on se ramène aisément à une équation différentielle linéaire du second ordre, en posant $g = f'' - f$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie $g'' + g = f^{(4)} - f = 0$. Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = A\cos x + B\sin x$.

La fonction f apparaît alors comme une solution de l'équation différentielle $(E)\ y'' - y = A\cos x + B\sin x$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = c\,\mathrm{ch}\,x + d\,\mathrm{sh}\,x$, où c et d sont des constantes réelles. Comme la fonction y_0 définie par $y_0(x) = \dfrac{A}{2}\cos x + \dfrac{B}{2}\sin x$ est une solution particulière de (E), il existe 4 constantes réelles a, b, c, d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos x + b\sin x + c\,\mathrm{ch}\,x + d\,\mathrm{sh}\,x\ .$$

Les conditions initiales s'écrivent alors : $a + c = 1$, $b + d = 0$, $-a + c = 0$ et $-b + d = 0$. On en déduit que $b = d = 0$ et $a = c = 1/2$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \mathrm{ch}\,x)$.

Exercice 14.19

Mines-Ponts MP 2007

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que si f est une solution bornée de (E), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

2) Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Démontrer que leur Wronskien $W = fg' - f'g$ est une constante.

3) (E) admet-elle des solutions non bornées ?

1) Soient f une solution bornée de (E), et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On a alors $|f''| \leqslant M\,|q|$, ce qui montre que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons $\ell \neq 0$.
Quitte à remplacer f par $-f$ (qui est aussi une solution bornée de (E)), on peut supposer $\ell > 0$. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ pour tout $x \geqslant x_0$, et on a alors $\forall x \geqslant x_0,\ f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt \geqslant f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0)$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde.

2) Le wronskien $W = fg' - f'g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et

$$W' = fg'' - f''g = -qfg + qfg = 0.$$

Ainsi W est constant.

3) Démontrons par l'absurde que (E) admet au moins une solution non bornée. Pour cela supposons toutes les solutions de (E) bornées.
Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Posons $W = fg' - f'g$. W est une constante, et comme f et g sont bornées, f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\big) = 0$, et donc que $W = 0$, ce qui est absurde (le wronskien d'un système fondamental de solutions est non nul).

L'exercice suivant à été proposé dans la filière PSI. Il peut aussi intéresser les étudiants de la filière MP.

Exercice 14.20

Centrale PSI 2006

Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y'' - (x^4 + 1)y = 0$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

1) Justifier l'existence de f.

2) Montrer que $g = f^2$ est convexe ; calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

3) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) \geqslant 1$.

4) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{g(t)}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

5) Montrer que $h\colon x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)}$ est solution de l'équation différentielle donnée.

1) (E) est une équation différentielle du second ordre dont les coefficients sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme le coefficient de y'' ne s'annule pas, le théorème de Cauchy montre qu'il existe une et une seule solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 1$.

2) $g = f^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $g' = 2ff'$ et
$g''(x) = 2f'(x)^2 + 2f(x)f''(x) = 2f'^2(x) + 2(x^4+1)f^2(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
On a de plus $g(0) = f(0)^2 = 1$ et $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 2$.

3) Comme g^2 est convexe, la courbe d'équation $y = g^2(x)$ est située au-dessus de sa tangente, notamment au point d'abscisse $x = 0$. On a donc $g(x) \geqslant 1 + 2x$, et en particulier $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$. On a donc aussi $|f(x)| \geqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f est continue, elle est de signe constant sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f(0) = 1$, on a $f(x) \geqslant 0$, et donc $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

4) La relation $g''(x) = 2f'^2(x) + 2(x^4+1)f^2(x)$ montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g''(x) \geqslant 2x^4$.
Il en résulte que $g'(x) \geqslant g'(0) + 2\displaystyle\int_0^x x^4\,dx \geqslant \frac{2x^5}{5}$.
On a donc $g(x) \geqslant g(0) + \dfrac{x^6}{15} = 1 + \dfrac{x^6}{15}$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{g(x)} \leqslant \dfrac{1}{1+\frac{x^6}{15}}$, ce qui démontre que $\dfrac{1}{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5) On a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{g(t)}\,dt - \int_0^x \frac{1}{g(t)}\,dt$. L'application $u\colon x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{g(t)}\,dt$ est donc une primitive de $-\dfrac{1}{g}$. En particulier elle est de classe $\mathscr{C}^2$.
Il en résulte que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = f'(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)} - \frac{1}{f(x)}$$

puis

$$\begin{aligned} h''(x) &= f''(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)} - \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ &= (x^4+1)h(x) \end{aligned}$$

La fonction h est donc bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14.21

Mines - Ponts MP 2005

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - y = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) \geqslant \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

Indication de l'examinateur : on pourra poser $g = f'' - f$ et utiliser l'équation différentielle $y'' - y = g$.

1) Suivons les indications de l'examinateur et commençons par résoudre l'équation différentielle $y'' - y = g$.

Un système fondamental des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est constitué des fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto u(x) \operatorname{ch} x + v(x) \operatorname{sh} x$ où u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait le système

$$\begin{cases} u'(x) \operatorname{ch} x + v'(x) \operatorname{sh} x = 0 \\ u'(x) \operatorname{sh} x + v'(x) \operatorname{ch} x = g(x) \end{cases}.$$

On en déduit que $u'(x) = -\operatorname{sh} x\ g(x)$ et $v'(x) = \operatorname{ch} x\ g(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = g$ est l'ensemble des fonctions $y : x \mapsto -\operatorname{ch} x \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(t)\ g(t)\, dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t)\ g(t)\, dt + a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$.

En particulier, lorsque g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$, on a

$$\int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t)\, dt = \left[-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \tanh^2 x,$$

et

$$\int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t)\, dt = \Big[2 \tanh t\Big]_0^x = 2 \tanh x.$$

Alors $-\operatorname{ch} x \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t)\, dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t)\, dt = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} + a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) \geqslant \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.
Si l'on pose $f'' - f = g$, alors f est solution de $y'' - y = g$. Les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ impliquent $\lambda = \mu = 0$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\operatorname{ch} x \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,dt.$$

Soit x réel. Comme $\operatorname{sh}(x-t)$ a le même signe que $x - t$, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,dt \geqslant \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\,dt$. Mais, d'après la question 1,

$$\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\,dt = -\operatorname{ch} x \int_0^x \operatorname{sh}(t)\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\,dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t)\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\,dt = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x},$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 14.22

ENS MP 2005 K

Soit une équation différentielle (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a et b réelles continues sur l'intervalle I.

1) Montrer qu'aucune solution non nulle n'a de zéro commun avec sa dérivée.

2) Soit (f, g) une famille libre de solutions de (E). Montrer qu'entre deux zéros de f se trouve un zéro de g.

3) On suppose $a = 0$ et $b \leqslant 0$. Montrer que toute solution non nulle s'annule au plus une fois.

4) Soient $b_1 \leqslant b_2$ deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I, f_1 et f_2 non nulles vérifiant respectivement $f_1'' + b_1 f_1 = 0$ et $f_2'' + b_2 f_2 = 0$. Montrer qu'entre deux zéros de f_1 se trouve un zéro de f_2.

1) Soit f une solution de E, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, alors f est la fonction nulle d'après le théorème de Cauchy.

2) Rappelons que si (f, g) est un système libre de solutions de (E), alors leur Wronskien $W = fg' - f'g$ ne s'annule pas sur I. (En particulier cela montre que f et g n'ont pas de zéro commun). Comme W est continue sur I, elle y est de signe constant, et quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $W > 0$.
Soient alors a et b deux zéros de f, avec $a < b$. Si g ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{-W}{g^2} < 0$.
La fonction $h = \dfrac{f}{g}$ est donc strictement décroissante sur $[a, b]$, ce qui est absurde puisque $h(a) = h(b) = 0$.

3) Soit f une solution non nulle de (E). La fonction $h = ff'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $h' = f'^2 + ff'' = f'^2 - bf^2 \geqslant 0$; h est donc croissante sur I. Si f admet

deux zéros a et b avec $a < b$, alors h est constante sur $[a, b]$, et on a $h'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Comme $h' \geqslant f'^2$, on a aussi $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et en particulier $f'(a) = 0$, ce qui contredit le résultat de la question 1.

4) Soient a et b deux zéros de f_1, avec $a < b$. Commençons par prouver l'existence de $c \in]a, b]$ tel que $f_1(c) = 0$ et $f_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, c[$. Cela revient à démontrer que $C = \{x \in]a, b] \mid f(x) = 0\}$ possède un plus petit élément. Dans le cas contraire, on construit aisément (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$) une suite (x_n) strictement décroissante d'éléments de C. Cette suite est minorée, et elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Par continuité, on a $f_1(\ell) = 0$. Grâce au théorème de Rolle on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un réel $y_n \in [x_{n+1}, x_n]$ tel que $f_1'(y_n) = 0$. La suite (y_n) est elle aussi convergente de limite ℓ, et on a donc $f_1'(\ell) = 0$, ce qui contredit le résultat de la question 1.

La fonction f_1 est de signe constant sur $]a, c[$, et quitte à remplacer f_1 par $-f_1$, on peut supposer $f_1 > 0$.

Si f_2 ne s'annule pas dans $[a, c]$, alors elle est de signe constant, et quitte à remplacer f_2 par $-f_2$ on peut supposer $f_2 > 0$.

Considérons alors $h = f_1' f_2 - f_1 f_2'$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, c]$, et $h' = f_1'' f_2 - f_1 f_2'' = (b_2 - b_1) f_1 f_2$ est positive sur $[a, c]$. h est donc croissante sur $[a, c]$ et on a $h(a) = f_1'(a) f_2(a)$ et $h(b) = f_1'(b) f_2(b)$.

On sait par la question 1, que $f_1'(a) \neq 0$. Si $f_1'(a)$ était strictement négatif, alors, par continuité, f_1' est strictement négative sur un intervalle de la forme $[a, a + h]$, avec $h > 0$, et f_1 serait strictement décroissante sur cet intervalle. On aurait donc $f_1(x) < 0$ pour tout $x \in]a, a + h]$, contrairement aux hypothèses. On a donc $f_1'(a) > 0$ et donc $h(a) > 0$.

Par un argument analogue, on montre que $f_1'(c) < 0$, et donc $h(c) < 0$, ce qui est absurde puisque h est croissance. f_2 s'annule donc au moins une fois dans l'intervalle $[a, c]$.

Exercice 14.23

Mines-Ponts MP 2005, TPE PSI 2007 K

Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et bornée, solution de l'équation différentielle (E) $y'' - \omega^2 y = f$.

Les solutions de l'équation homogène $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, où A et B sont des constantes réelles. On sait alors que les solutions de (E) sont de la forme $y : x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ où A et B sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} A'(x)e^{\omega x} + B'(x)e^{-\omega x} & = 0\,, \\ A'(x)\omega e^{\omega x} - B'(x)\omega e^{-\omega x} & = f(x). \end{cases}$$

On obtient ainsi $A'(x) = \dfrac{1}{2\omega} f(x)e^{-\omega x}$ et $B'(x) = -\dfrac{1}{2\omega} f(x)e^{\omega x}$. On a donc

$$y(x) = \left(a + \frac{1}{2\omega}\int_0^x f(t)e^{-\omega t}dt\right)e^{\omega x} + \left(b - \frac{1}{2\omega}\int_0^x f(t)e^{\omega t}dt\right)e^{-\omega x}.$$

Soit M un réel tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors $\left|f(t)e^{-\omega t}\right| \leqslant Me^{-\omega t}$, ce qui montre que l'application $t \mapsto f(t)e^{-\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On a de plus

$$\left|\int_0^x f(t)e^{\omega t}dt\right| \leqslant \frac{M}{\omega}e^{\omega x},$$

et donc la fonction $x \mapsto \left(b - \dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{\omega t}dt\right)e^{-\omega x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que si y est bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors $a + \dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\omega t}dt = 0$.
On montre de la même façon que si y est bornée sur $\mathbb{R}_-$, alors

$$b - \frac{1}{2\omega}\int_0^{-\infty} f(t)e^{\omega t}dt = 0.$$

Ceci démontre l'unicité de a et de b, et donc, si elle existe, l'unicité d'une solution bornée y. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = -\frac{1}{2\omega}\int_0^x f(t)e^{-\omega t}dt - \frac{1}{2\omega}e^{-\omega x}\int_{-\infty}^x f(t)e^{\omega t}dt.$$

Réciproquement, pour ces valeurs de a et de b, on a :

$$|y(x)| \leqslant \frac{1}{2\omega}e^{\omega x}M\int_x^{+\infty} e^{-\omega t}dt + \frac{1}{2\omega}e^{-\omega x}M\int_{+\infty}^x e^{\omega t}dt = \frac{M}{\omega^2},$$

et donc y est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.24

(Inégalité de Gronwall) Polytechnique MP 2005 K

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, $t_0 \in \mathbb{R}$, et soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) \leqslant g(t) + k\displaystyle\int_{t_0}^t f(u)du$.

Montrer que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) \leqslant g(t) + k\displaystyle\int_{t_0}^t e^{k(t-u)}g(u)du$.

2) Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique application M de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle $M' = AM$ et vérifiant $M(t_0) = I_n$.

Dans la suite on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $X \mapsto \|X\|$ telle que $\|I_n\| = 1$ et $\forall (X,Y) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|XY\| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$.

3) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ \|A(t)\| \leqslant k$. Démontrer que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ \|M(t)\| \leqslant e^{k(t-t_0)}$.

4) Soit B une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ \|A(t) - B(t)\| \leqslant \eta$, et on note N l'unique solution de l'équation différentielle $N' = BN$ telle que $N(t_0) = I_n$.

Montrer que $\forall t \in [t_0, +\infty[,\ \|M(t) - N(t)\| \leqslant e^{k(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.

1) Posons $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u)du$. On définit ainsi une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $F'(t) - kF(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $\left(F(t)e^{-kt}\right)' \leqslant e^{-kt}g(t)$, d'où

$$\forall t \in [t_0, +\infty[,\ F(t)e^{-kt} = \int_{t_0}^{t} \left(F(u)e^{-ku}\right)' du \leqslant \int_{t_0}^{t} e^{-ku} g(u)\, du\ .$$

Il en résulte que $F(t) \leqslant \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)} g(u)\, du$, et donc

$$f(t) - g(t) \leqslant kF(t) \leqslant k \int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)} g(u)\, du\ .$$

2) Le théorème de Cauchy montre que l'équation différentielle linéaire $M' = A(t)M$ possède une unique solution vérifiant la condition initiale $M(t_0) = I_n$.

3) On a pour tout $t \geqslant t_0$, $M(t) = I_n + \displaystyle\int_{t_0}^{t} M'(u)du = \int_{t_0}^{t} A(u)M(u)du$, d'où :

$$\|M(t)\| \leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} \|A(u)M(u)\| du \leqslant 1 + k \int_{t_0}^{t} \|M(u)\| du\ .$$

En appliquant le résultat de la question 1 à $f(t) = \|M(t)\|$ et $g(t) = 1$, on obtient

$$\|M(t)\| \leqslant 1 + k \int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)} du = 1 - \left[e^{k(t-u)}\right]_{t_0}^{t} = e^{k(t-t_0)}\ .$$

4) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|B(t)\| \leqslant \|B(t) - A(t)\| + \|A(t)\| \leqslant k + \eta$, et donc, d'après la question précédente, $\|N(t)\| \leqslant e^{(k+\eta)(t-t_0)}$ pour tout $t \geqslant t_0$.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
M(t) - N(t) &= \int_{t_0}^{t} (M'(u) - N'(u))\, du \\
&= \int_{t_0}^{t} (A(u)M(u) - B(u)N(u))\, du \\
&= \int_{t_0}^{t} (A(u)(M(u) - N(u))\, du + \int_{t_0}^{t} (A(u) - B(u))N(u)\, du
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|M(t)-N(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(u)(M(u)-N(u))\|\,du + \int_{t_0}^{t} \|(A(u)-B(u))N(u)\|\,du \\
&\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|(M(u)-N(u)\|\,du + \eta\int_{t_0}^{t} \|N(u)\|\,du \\
&\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|(M(u)-N(u)\|\,du + \eta\int_{t_0}^{t} e^{(k+\eta)(u-t_0)}du \\
&\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|(M(u)-N(u)\|\,du + \frac{\eta}{k+\eta}\left(e^{(k+\eta)(t-t_0)}-1\right).
\end{aligned}$$

En appliquant le résultat de la question 1 à $f(t) = \|M(t)-N(t)\|$ et $g(t) = \dfrac{\eta}{k+\eta}\left(e^{(k+\eta)(t-t_0)}-1\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|M(t)-N(t)\| &\leqslant \frac{\eta}{k+\eta}\left(e^{(k+\eta)(t-t_0)}-1\right) + \frac{k\eta}{k+\eta}\int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)}\left(e^{(k+\eta)(u-t_0)}-1\right)du \\
&\leqslant \frac{\eta}{k+\eta}\left(e^{(k+\eta)(t-t_0)}-1\right) \\
&\quad + \frac{1}{k+\eta}\left(ke^{k(t-t_0)}\left(e^{\eta(t-t_0)}-1\right)+\eta\left(1-e^{k(t-t_0)}\right)\right) \\
&\leqslant e^{(k+\eta)(t-t_0)} - e^{k(t-t_0)} = e^{k(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1).
\end{aligned}$$

Exercice 14.25

École Polytechnique MP 2007

Soient $B : t \in \mathbb{R} \mapsto B(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue, et $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer qu'il existe $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t) \qquad \text{(E)}$$

et telle que $A(0) = A_0$. *Dans la suite on se propose de démontrer que $A(t)$ est semblable à A_0.*

2) Montrer que l'ensemble S des solutions de (E) est une sous-algèbre de l'algèbre des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application qui à $A \in S$ associe $A(t)$ est un isomorphisme de l'algèbre S sur l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3) En déduire qu'il existe une matrice $P(t) \in GL_n(\mathbb{C})$, indépendante de A_0, telle que $A(t) = P(t)A_0P(t)^{-1}$.

Indication : on pourra utiliser un résultat vu dans le tome d'algèbre : si σ est un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), alors il existe une matrice inversible P telle que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \sigma(M) = PMP^{-1}$.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $X \mapsto XB(t) - B(t)X$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. L'équation (E) est donc une équation différentielle linéaire du premier ordre, et le théorème de Cauchy montre qu'elle admet une unique solution $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ vérifiant la condition initiale $A(0) = A_0$.

2) On sait que l'ensemble S des solutions de (E) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soient A_1 et A_2 deux solutions. L'application A_1A_2 est définie par $(A_1A_2)(t) = A_1(t)A_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; c'est encore une solution car

$$\begin{aligned}(A_1A_2)' &= A_1'A_2 + A_1A_2' \\ &= (A_1B - BA_1)A_2 + A_1(A_2B - BA_2) \\ &= A_1BA_2 - BA_1A_2 + A_1A_2B - A_1BA_2 \\ &= A_1A_2B - BA_1A_2.\end{aligned}$$

Comme S contient aussi l'application constante égale à I_n, S est une sous-algèbre de l'algèbre des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, désignons par f_t l'application de S dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f_t(A) = A(t)$. C'est de façon évidente un morphisme de l'algèbre S dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et le théorème de Cauchy montre que c'est un isomorphisme.

3) Il en résulte que l'application $\varphi_t = f_t \circ f_0^{-1}$ qui à $A_0 = A(0)$ associe $A(t)$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Suivant l'indication, il existe une matrice $P(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi_t(A_0) = A(t) = P(t)A_0P(t)^{-1}$,

Équations différentielles non linéaires 15

15.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$.

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que le couple (I, y) est solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ lorsque y est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (x, y(x)) \in U$ et $y'(x) = f(x, y(x))$.
- De même, on dit que le couple (I, y) est solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) s'il est solution de l'équation précédente et si $y(x_0) = y_0$.
- S'il n'existe pas de solution prolongeant la fonction y sur un intervalle contenant strictement I, on dit que la solution est maximale.

Théorème de Cauchy-Lipschitz, version locale : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy admet une solution définie dans un voisinage de x_0, et si (I, y) et (J, z) sont deux solutions du problème de Cauchy en (x_0, y_0), alors les fonctions y et z sont égales sur $I \cap J$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz 1 : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy $(y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0)$ admet une unique solution maximale et son intervalle de définition I est ouvert.

Exercice 15.1

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, bornée, et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $]a, b[$ l'intervalle de définition de la solution maximale φ. Supposons b fini. Comme $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, la fonction φ' est bornée sur $[x_0, b[$, qui est un intervalle borné, donc intégrable sur cet intervalle, il en résulte que φ admet une limite finie (notée ℓ) en b, et par conséquent, φ' a pour limite $f(b, \ell)$ en b. En posant $\varphi(b) = \ell$, le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ entraîne que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

l'intervalle $]a, b]$, et que φ est solution du problème de Cauchy sur cet intervalle. Ceci contredit la maximalité de l'intervalle de définition de φ.
On en déduit que $b = +\infty$. Le raisonnement est analogue pour montrer que $a = -\infty$, donc φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.2

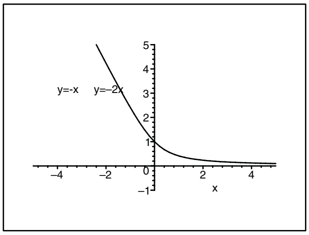
Résoudre l'équation différentielle $(x + y)y' + y = 0$.

On observe que y est solution si et seulement si la fonction $x \mapsto xy + \dfrac{y^2}{2}$ a une dérivée nulle, donc est constante, autrement dit $(x + y)^2 - x^2$ est constante.
La courbe d'équation cartésienne $(x + y)^2 - x^2 = C$ est une hyperbole, donc les courbes intégrales de l'équation différentielle sont incluses dans des branches d'hyperboles.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 + y_0 \neq 0$. L'application $(x, y) \mapsto -\dfrac{y}{x+y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}$ (qui est le plan privé de la deuxième bissectrice), donc le problème de Cauchy en (x_0, y_0) admet une solution maximale (I, y) unique. Cette solution est telle que $y(x)+x$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant, et $\forall x \in I,\ (y(x)+x)^2 = K + x^2$, avec $K = (x_0 + y_0)^2 - x_0^2 = y_0(y_0 + 2x_0)$.

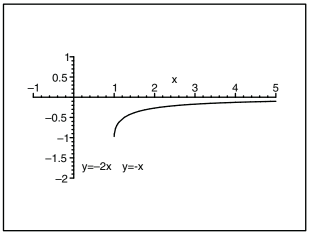
• Si $x_0 + y_0 > 0$, alors on a $\forall x \in I,\ y(x) = -x + \sqrt{x^2 + K}$. Déterminons maintenant l'intervalle maximal I.

– Si $y_0(2x_0 + y_0) > 0$, alors $I = \mathbb{R}$.

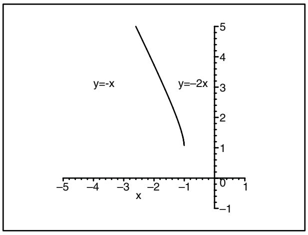
– Si $y_0(2x_0 + y_0) < 0$, alors I est l'intervalle maximal contenant x_0 sur lequel $x^2 \neq -y_0(2x_0 + y_0)$. On observe que $(x_0 + y_0)^2 > 0$, donc $|x_0| > \sqrt{-y_0(2x_0 + y_0)}$.
On en déduit que si $x_0 > 0$, alors $I = \left]\sqrt{-y_0(2x_0 + y_0)}, +\infty\right[$, et si $x_0 < 0$, alors $I = \left]-\infty, -\sqrt{-y_0(2x_0 + y_0)}\right[$.



$I = \mathbb{R}$



$I = \left]\sqrt{-y_0(2x_0 + y_0)}, +\infty\right[$



$I = \left]-\infty, -\sqrt{-y_0(2x_0 + y_0)}\right[$

• Si $x_0 + y_0 < 0$, on en déduit que $\forall x \in I,\ y(x) = -x - \sqrt{x^2 + K}$. La détermination de l'intervalle maximal est la même qu'au-dessus.

Exercice 15.3

Démontrer que le problème de Cauchy en $(0,0)$ pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{|y|}$ admet une infinité de solutions. Ceci est-il en contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Soient $\alpha > 0$, et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \leqslant \alpha,\ f_\alpha(x) = 0$ et $\forall x > \alpha,\ f_\alpha(x) = \dfrac{1}{4}(x-\alpha)^2$. La fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$ et vérifie $f_\alpha(0) = 0$ et $f'_\alpha(x) = \sqrt{|f_\alpha(x)|}$, sa dérivée a pour limite 0 en α (à gauche et à droite), donc par théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f_α est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut choisir α arbitrairement, ce qui donne une infinité de solutions au problème de Cauchy en $(0,0)$, aussi bien localement que sur $\mathbb{R}$.

Ce résultat ne met pas en défaut le théorème de Cauchy-Lipschitz, car la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{|y|}$ n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car $y \mapsto \sqrt{|y|}$ n'est pas dérivable en 0.

Ce qu'il faut savoir

Équations à variables séparables

Soit a une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle J dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas, et b une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. L'équation différentielle $a(x)x' - b(t) = 0$ est dite à variables séparables.
Si $(t_0, x_0) \in I \times J$, le problème de Cauchy en (t_0, x_0) admet une solution maximale unique, et on a $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} a(u)\,du = \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$. Ceci fournit une relation implicite entre t et $x(t)$.

Exercice 15.4

TPE MP 2006

Étudier aussi précisément que possible les solutions maximales de $y' + e^{x-y} = 0$.

L'équation différentielle équivaut à l'équation à variables séparables $y'e^y = -e^x$. On considère la solution maximale y du problème de Cauchy en (x_0, y_0). On a alors $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} y'(t)e^{y(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} -e^t\,dt$, donc $e^{y(x)} = e^{y_0} + e^{x_0} - e^x$, d'où $y(x) = \ln(e^{x_0} + e^{y_0} - e^x)$. On en déduit que I est l'intervalle maximal contenant x_0 sur lequel cette fonction est définie et de classe $\mathscr{C}^1$, d'où $I =]-\infty, \ln(e^{x_0} + e^{y_0})[$.

Ce qu'il faut savoir

Équations autonomes

Il s'agit des équations différentielles de la forme $y' = f(y)$, où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
Invariance par translation : Si y est une solution sur $I =]a, b[$ et si x_1 est un réel, alors la fonction $x \mapsto y(x - x_1)$ est solution sur $]a + x_1, b + x_1[$.

Exercice 15.5

On considère l'équation différentielle $y' = f(y)$ où $f : J \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Soit y_0 un élément de J.

1) Vérifier que l'application constante $x \mapsto y_0$ est solution (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si $f(y_0) = 0$.
2) On suppose $f(y_0) \neq 0$. Soit (I, y) la solution maximale du problème de Cauchy $(y' = f(y),\ y(x_0) = y_0)$. Montrer que $\forall x \in I,\ f(y(x)) \neq 0$.
   En déduire que $\forall x \in I,\ x - x_0 = \displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{f(u)}$.

1) La fonction constante $\varphi : x \mapsto y_0$ a une dérivée nulle, donc est solution de l'équation différentielle si et seulement si $0 = f(y_0)$.
2) Supposons qu'il existe $x_1 \in I$ tel que $f(y(x_1)) = 0$. La fonction y est alors solution du problème de Cauchy au point $(x_1, y(x_1))$ et la fonction constante égale à $y(x_1)$ également, donc par unicité, on en déduit que ces deux fonctions coïncident sur I, et en particulier en x_0, ce qui donne $y_0 = y(x_1)$, d'où $f(y_0) = 0$, ce qui est absurde.
   On peut donc diviser par $f(y(x))$, ce qui donne $\forall x \in I,\ \dfrac{y'(x)}{f(y(x))} = 1$. On intègre cette relation entre x_0 et x, d'où $\forall x \in I,\ x - x_0 = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{f(y(s))} ds = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{f(u)}$ en faisant le changement de variable $u = y(s)$.

Exercice 15.6

Centrale MP 2005

On considère l'équation différentielle $y' = y(y + 1)$.

1) Que peut-on dire d'une solution (I, y) pour laquelle il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = 0$? Même question si $y(x_0) = -1$.
2) Trouver les solutions maximales (I, y) de l'équation différentielle.

1) On peut appliquer l'exercice précédent en prenant $f(y) = y(y+1)$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f(0) = f(-1) = 0$, donc s'il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = 0$, y est la fonction nulle (sur $\mathbb{R}$), et de même si $y(x_0) = -1$, y est constante égale à -1.

2) On suppose $y(x_0)$ distincte de 0 et -1. D'après l'exercice précédent, y ne prend ni la valeur 0 ni la valeur -1, et $\forall x \in I,\ x - x_0 = \displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{u(u+1)}$. On en déduit que $x - x_0 = \ln\left(\dfrac{y(x)}{y(x)+1}\dfrac{y_0+1}{y_0}\right)$, d'où après calculs :

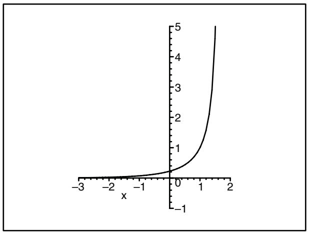
$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{y_0+1}e^{x-x_0}}{1 - \frac{y_0}{y_0+1}e^{x-x_0}} = \frac{y_0 e^{x-x_0}}{y_0 + 1 - y_0 e^{x-x_0}}.$$

L'intervalle maximal I est le plus grand intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel $e^{x-x_0} \neq \dfrac{y_0+1}{y_0}$.

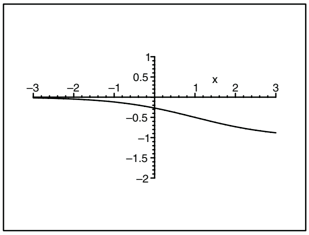
Si $y_0 > 0$, alors $I = \left]-\infty,\ x_0 + \ln(1 + \dfrac{1}{y_0})\right[$.

Si $-1 < y_0 < 0$, alors $I = \mathbb{R}$.

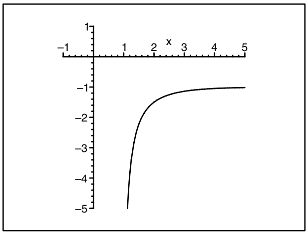
Si $y_0 < -1$, alors $I = \left]x_0 + \ln(1 + \dfrac{1}{y_0}),\ +\infty\right[$.



cas $y_0 > 0$



cas $-1 < y_0 < 1$



cas $y_0 < -1$

Ce qu'il faut savoir

Systèmes autonomes

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f et g deux applications continues de U dans $\mathbb{R}$. Une solution du système différentiel $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ est un triplet (I, x, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et x et y deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in U$, $x'(t) = f(x(t), y(t))$ et $y'(t) = g(x(t), y(t))$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz 2 : Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$, il existe une unique solution maximale (I, x, y)

du système différentiel vérifiant $(x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0)$ et son intervalle de définition I est ouvert.
Invariance par translation : Si (x, y) est une solution sur $I =]a, b[$ et si t_1 est un réel, alors la fonction $t \mapsto (x(t-t_1), y(t-t_1))$ est solution sur $]a+t_1, b+t_1[$.
Solutions constantes : L'application constante $t \mapsto (x_0, y_0)$ est solution (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si $f(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0$ (on dit que (x_0, y_0) est un équilibre).

Exercice 15.7

Soit (S) le système différentiel $\left(x' = \dfrac{2y}{x+y},\ y' = \dfrac{2x}{x+y}\right)$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 + y_0 \neq 0$. Déterminer la solution maximale de (S) telle que $(x(0) = x_0,\ y(0) = y_0)$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 2 s'applique sur l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}.$$

On note (x, y) la solution maximale, et I son intervalle de définition.
$x' + y' = 2$ donc $x + y = x_0 + y_0 + 2t$. On en déduit $x' - y' = \dfrac{-2(x-y)}{x_0 + y_0 + 2t}$, d'où $x - y = (x_0 - y_0)\exp\left(-2\displaystyle\int_0^t \frac{du}{x_0 + y_0 + 2u}\right) = \dfrac{(x_0 - y_0)(x_0 + y_0)}{x_0 + y_0 + 2t}$. On en déduit en ajoutant et en soustrayant les expressions de $x + y$ et $x - y$ que :

$$x = \frac{x_0 + y_0}{2} + t + \frac{(x_0 - y_0)(x_0 + y_0)}{2(x_0 + y_0 + 2t)} \text{ et } y = \frac{x_0 + y_0}{2} + t - \frac{(x_0 - y_0)(x_0 + y_0)}{2(x_0 + y_0 + 2t)}$$

L'intervalle I est le plus grand intervalle ouvert contenant 0 sur lequel $x_0 + y_0 + 2t$ ne s'annule pas. Il s'agit de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right[$ si $x_0 + y_0 < 0$, et de $\left]-\frac{1}{2}(x_0 + y_0), +\infty\right[$ si $x_0 + y_0 > 0$.

Ce qu'il faut savoir

Équations autonomes du second ordre : $x'' = f(x, x')$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz 2 au système autonome $(x' = y,\ y' = f(x, y))$, on en déduit que pour tout $(t_0, x_0, x_0') \in \mathbb{R} \times U$, il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle $x'' = f(x, x')$ telle que $(x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0')$ et son intervalle de définition est ouvert.

Exercice 15.8

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy suivant :

$$y'' = 8y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2\,.$$

Le résultat ci-dessus s'applique et garantit l'existence et l'unicité de la solution cherchée. On multiplie la relation $y'' = 8y^3$ par y' et on obtient $y'y'' = 8y'y^3$, puis on l'intègre entre 0 et x, ce qui donne $y'(x)^2 - 4 = 4(y(x)^4 - 1)$, d'où $y'(x)^2 = 4y(x)^4$. S'il existe x_1 tel que $y'(x_1) = 0$, alors $y(x_1) = 0$, or la fonction nulle est solution du problème de Cauchy en $(x_1, 0, 0)$, donc par unicité, y est nulle, ce qui est absurde. On en déduit que y' ne s'annule pas et garde un signe constant, en l'occurrence strictement positif car $y'(0) = 2$, d'où $\forall x \in I,\ y'(x) = 2y(x)^2$. On obtient une équation autonome du premier ordre que l'on résout par les techniques vues précédemment. Comme $y(0) \neq 0$, y ne s'annule pas, donc $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{du}{u^2} = 2x$, d'où $1 - \dfrac{1}{y(x)} = 2x$, d'où $y(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, et par conséquent $I =]-\infty,\ 1/2\,[$.

Remarque

La technique consistant à multipliant par y' et à intégrer de x_0 à x permet d'obtenir une intégrale première (c'est-à-dire une équation du premier ordre) pour toute équation différentielle de la forme $y'' = f(y)$ (équation de Newton).

15.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 15.9

Mines-Ponts MP 2005

Étudier le problème de Cauchy en (x_0, y_0) pour l'équation différentielle $xy' - y + \dfrac{y^3}{x^3} = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y^2}$).

L'équation s'écrit sous la forme $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^3}{x^4}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Si $x_0 \neq 0$, le problème de Cauchy en (x_0, y_0) admet une solution maximale unique.

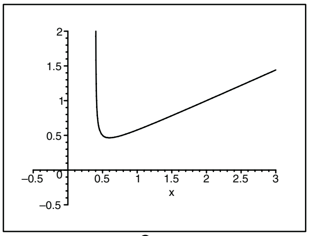
- Si $y_0 = 0$, y est la fonction nulle par unicité.
- Si $y_0 \neq 0$, y ne s'annule pas sur I, sinon y serait la fonction nulle par unicité, donc y garde un signe constant. L'équation équivaut à $x\dfrac{y'}{y^3} - \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^3} = 0$, ce qui donne

en posant $z = \dfrac{1}{y^2}$, l'équation linéaire suivante : $z' + \dfrac{2}{x}z = \dfrac{2}{x^4}$. L'équation homogène associée se résout en $\dfrac{A}{x^2}$. La méthode de variation de la constante conduit à chercher z sous la forme $\dfrac{A(x)}{x^2}$, avec $\dfrac{A'(x)}{x^2} = \dfrac{2}{x^4}$, donc $A(x) = -\dfrac{2}{x} + A$, d'où la solution générale $z(x) = \dfrac{A}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{Ax-2}{x^3}$, donc $y^2 = \dfrac{x^3}{Ax-2}$. Avec la condition initiale, on obtient $A = \dfrac{2}{x_0} + \dfrac{x_0^2}{y_0^2}$.

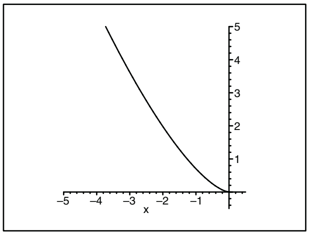
L'intervalle maximal est le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel $x(Ax-2) > 0$. La solution y est donnée par $y(x) = \text{sgn}(y_0)\sqrt{\dfrac{x^3}{Ax-2}}$, où $\text{sgn}(u)$ désigne le signe de u.

On observe d'une part que $\dfrac{A}{2} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{x_0^2}{2y_0^2} > 0$, donc $\dfrac{A}{2} > \dfrac{1}{x_0}$ et d'autre part que $A > 0$ équivaut à $x_0(2y_0^2 + x_0^3) > 0$.

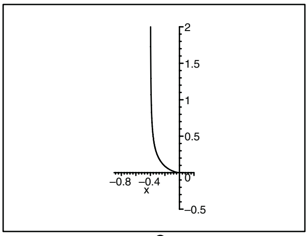
- Si $x_0 > 0$, alors $0 < \dfrac{2}{A} < x_0$, donc $I = \left]\dfrac{2}{A}, +\infty\right[$.
- Si $x_0 < 0$ et $x_0^3 + 2y_0^2 \leqslant 0$, alors $A \geqslant 0$, donc $I =]-\infty, 0[$.
- Si $x_0 < 0$ et $x_0^3 + 2y_0^2 > 0$, alors $A < 0$, donc $I = \left]\dfrac{2}{A}, 0\right[$.



$I = \left]\dfrac{2}{A}, +\infty\right[$



$I =]-\infty, 0[$



$I = \left]\dfrac{2}{A}, 0\right[$

Remarque

Toute équation de la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\alpha = 0$ (appelée équation de Bernoulli) se résout de manière analogue en posant $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$.

Exercice 15.10

Centrale MP 2006

Déterminer la solution maximale de $(x^2+x-2)y' = y^2+y-2$ telle que $y(0) = 1$, puis $y(0) = 0$, puis $y(0) = -1$.

L'expression x^2+x-2 s'annule en -2 et 1, donc pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous allons résoudre cette équation à variables séparables sur un intervalle contenant 0 et inclus dans $]-2,\ 1[$.
On remarque que les fonctions constantes égales à -2 ou 1 et que l'identité sont solutions de l'équation différentielle sur $]-2,\ 1[$. On résout à présent le problème de Cauchy en $(0, y_0)$.

- Si $y_0 = 1$, alors y est constante égale à 1. L'intervalle maximal est le plus grand intervalle ouvert contenant 0 et ne contenant pas -2 et 1, c'est-à-dire $]-2,\ 1[$.
- Si $y_0 = 0$, par unicité, $y(x) = x$ (avec le même intervalle maximal qu'au-dessus).
- Si $y_0 = -1$, alors y ne prend pas les valeurs -2 et 1 (sinon elle serait constante), donc $\forall x \in I,\ \dfrac{y'(x)}{y(x)^2+y(x)-2} = \dfrac{1}{x^2+x-2}$. En intégrant de 0 à x, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{y(x)} (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+2})du = \int_0^x (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2})dt$, d'où
$$\ln\left(-\frac{y(x)-1}{2(y(x)+2)}\right) = \ln\left(-2\frac{x-1}{x+2}\right), \quad \text{d'où} \quad y(x) = \frac{-3x+2}{x-2}.$$
L'intervalle maximal est le plus grand intervalle ouvert contenant 0 et ne contenant ni -2, ni 1 ; il s'agit donc de $]-2,\ 1[$.

Exercice 15.11

Centrale MP 2006

On note f la solution maximale de $y' = e^{-xy}$ telle que $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et possède une limite finie ℓ en $+\infty$.

3) Montrer que $\ell \geqslant 1$.

1) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz 1, f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < 0 < b$. La fonction $g : x \mapsto -f(-x)$ vérifie $g(0) = 0$ et $g'(x) = f'(-x) = e^{xf(-x)} = e^{-xg(x)}$, donc est solution du même problème de Cauchy sur $]-b, -a[$. Par unicité, on en déduit que $]-b, -a[\subset]a, b[$, or les deux intervalles ont la même longueur, donc $a = -b$ et $g = f$, donc f est impaire.

2) Puisque $f' > 0$, la fonction f est croissante donc possède une limite en b, finie ou $+\infty$. Supposons la limite infinie. Dans ce cas, il existe $c \in]0, b[$ tel que $\forall x \geqslant c,\ f(x) \geqslant 1$, donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant e^{-x}$, d'où, en intégrant entre c et x, on a $f(x) \leqslant f(c) + \displaystyle\int_c^x e^{-t}\,dt \leqslant f(c) + e^{-c}$, donc f est majorée, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent f a une limite finie ℓ en b.

Si b est fini, alors $f'(x) \to e^{-b\ell}$ quand $x \to b$, donc f est prolongeable en une solution sur $]\,a,\,b\,]$, ce qui contredit la maximalité de $]\,a,\,b\,[$. On en déduit que $b = +\infty$ et puisque f est impaire, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Si $\ell < 1$, alors $\forall x \geqslant 0,\ f(x) < 1$, donc $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-tf(t)}dt > \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$. En passant à la limite pour x tendant vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On conclut que $\ell \geqslant 1$.

Exercice 15.12

Centrale 2005

1) Soit (I, ϕ) une solution maximale de $y' = x^2 + y^2$ prenant en un point une valeur positive. Montrer que I est majoré.

2) Montrer que $y' = x^2 + y^2$ admet une unique solution maximale impaire.

1) On observe que ϕ' est strictement positive sur $I \backslash \{0\}$, donc ϕ est strictement croissante sur I. Soit $x_0 \in I$ tel que $\phi(x_0) > 0$. $\forall x \in I \cap [\,x_0,\,+\infty\,[,\ \phi(x) > 0$, donc $\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)^2} \geqslant 1$. On intègre cette inégalité entre x_0 et x, donc $\dfrac{1}{\phi(x_0)} - \dfrac{1}{\phi(x)} \geqslant x - x_0$, d'où $x - x_0 \leqslant \dfrac{1}{\phi(x_0)}$. Ceci montre que I est majoré par $x_0 + \dfrac{1}{\phi(x_0)}$.
Si $\phi(x_0) = 0$, ϕ étant strictement croissante, on aboutit à la même conclusion en remplaçant x_0 par n'importe quel réel strictement supérieur.

2) Une solution impaire vérifie forcément $\phi(0) = 0$. Inversement, si ϕ est la solution maximale du problème de Cauchy en $(0, 0)$ sur $]\,a,\,b\,[$, la fonction ψ définie sur $]\,-b,\,-a\,[$ par $\psi(x) = -\phi(-x)$ vérifie :

$$\psi(0) = 0 \text{ et } \forall x,\ \psi'(x) = \phi'(-x) = (-x)^2 + \phi(-x)^2 = x^2 + \psi(x)^2\ .$$

Il en résulte que ψ est solution sur $]\,-b,\,-a\,[$ du même problème de Cauchy que ϕ. On en déduit que $a = -b$ et $\psi = \phi$, donc ϕ est impaire.

Exercice 15.13

Centrale MP 2006 K

Soit (E) l'équation différentielle $xy' = x + y^2$.

1) Démontrer qu'il existe au plus une solution développable en série entière au voisinage de 0.

2) Démontrer que cette solution existe et que son rayon de convergence appartient à $[\,1,\,2\,]$.

1) Soit $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution somme de série entière sur $]-R, R[$, avec $R > 0$. On a $y(0) = 0$, donc $a_0 = 0$. Par dérivation d'une série entière, on a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et par produit de Cauchy, $y(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$. Par unicité du développement en série entière, les coefficients des séries entières de somme $xy'(x)$ et $x + y(x)^2$ sont égaux, ce qui donne $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. Cette relation permet de déterminer par récurrence les coefficients a_n de manière unique.

2) Soit (a_n) la suite déterminée à la question précédente. On montre d'abord par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ |a_n| \leqslant 1$. C'est vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai jusqu'au rang $n - 1$, alors $|a_n| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \frac{n-1}{n} \leqslant 1$. Cela prouve que $R \geqslant 1$.

   Montrons enfin par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ a_n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. C'est vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai jusqu'au rang $n - 1$, alors $a_n \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2^{n-k-1}} = \frac{n-1}{n 2^{n-2}} \underset{n \geqslant 2}{\geqslant} \frac{1}{2^{n-1}}$.

   On en déduit $R \leqslant 2$.

Exercice 15.14

Mines-Ponts MP 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $ff'' = 1 + f'^2$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer f.

Étant donné que $1 + f'^2 \geqslant 1$, les fonctions f et f'' ne s'annulent pas et sont continues, donc gardent un signe constant. On en déduit que $f'' = \frac{1 + f'^2}{f}$, ce qui permet de montrer par récurrence sur n que f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

En dérivant la relation de départ, on obtient $f'f'' = ff'''$, d'où $\frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f}$.

En intégrant, on trouve qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f'' = \lambda f$.

- Si $\lambda > 0$, on pose $\lambda = \omega^2$, ce qui donne $f(x) = A \operatorname{ch} \omega x + B \operatorname{sh} \omega x$. La relation $f(0)f''(0) = 1 + f'(0)^2$ donne $\omega^2(A^2 - B^2) = 1$. On n'oublie pas de vérifier : $f(x)f''(x) = \omega^2(A^2 \operatorname{ch}^2 \omega x + B^2 \operatorname{sh}^2 \omega x + 2AB \operatorname{ch} \omega x \operatorname{sh} \omega x)$ et $1 + f'(x)^2 = 1 + \omega^2(A^2 \operatorname{sh}^2 \omega x + B^2 \operatorname{ch}^2 \omega x + 2AB \operatorname{sh} \omega x \operatorname{ch} \omega x)$. Les deux expressions sont bien égales.

- Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\omega^2$, ce qui donne $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. La relation $f(0)f''(0) = 1 + f'(0)^2$ donne $\omega^2(A^2+B^2) = -1$. Il n'y a pas de solution lorsque $\lambda < 0$

Exercice 15.15

Centrale, Polytechnique MP 2007

Déterminer la fonction $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $y'' + |y| = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

- Cherchons une solution maximale y.

– Remarquons que $y'' \leqslant 0$, donc y' est décroissante et par conséquent y est concave.

– En particulier, si y existe sur $I =]a, 0[$, avec $a \in]-\infty, 0[$, alors pour tout $x \in I$, $y'(x) \geqslant y'(0) = 1$. La fonction y est donc strictement croissante et comme $y(0) = 0$, on a $y < 0$ sur $]a, 0[$. Par conséquent, y vérifie sur I l'équation $y''(x) - y(x) = 0$, d'où $y(x)$ est donc de la forme $A\,\mathrm{ch}\,x + B\,\mathrm{sh}\,x$, et les conditions initiales imposent $y(x) = \mathrm{sh}\,x$.
Ainsi si y est une solution (maximale) du problème, son ensemble de définition contient $]-\infty, 0[$ et y est la fonction sinus hyperbolique.
– Étudions y sur $[0, b[$ avec $b \in]0, +\infty[$. Il existe un b maximal (éventuellement $+\infty$) tel que y ne s'annule pas sur $]0, b[$. On sait que $y > 0$ sur $]0, b[$ (car $y'(0) = 1 > 0$) donc y est solution de $y'' + y = 0$ sur $[0, b[$ donc, avec les conditions initiales, $y(x) = \sin x$ pour $x \in [0, b[$. Par maximalité, $b = \pi$.
– Étudions y sur $[\pi, c[$ avec $c \in]\pi, +\infty[$. Il existe un c maximal (éventuellement $+\infty$) tel que y ne s'annule pas sur $]\pi, c[$. On sait que $y < 0$ sur $]\pi, c[$ (car $y'(\pi) = -1 < 0$ et $y(\pi) = 0$) donc y est solution de $y'' - y = 0$ sur $[\pi, c[$ donc, avec les conditions initiales, $y(x) = -\mathrm{sh}\,(x-\pi)$ pour $x \in [\pi, c[$. Par maximalité, $c = +\infty$.
– On obtient donc $y(x) = \begin{cases} \mathrm{sh}(x) & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ \sin x & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ -\mathrm{sh}\,(x-\pi) & \text{si} \quad x \in [\pi, +\infty[\end{cases}$.

- Réciproquement, on vérifie aisément que y est bien de classe $\mathscr{C}^2$ (les raccords sont valables en 0 et π) sur $\mathbb{R}$ et vérifie bien les conditions de l'énoncé. Il y a donc unicité de la solution et existence sur $\mathbb{R}$.

15.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 15.16

Centrale MP 2007 (avec l'aide de Maple ou Mathematica) K

1) Résoudre les deux problèmes de Cauchy :
(i) $u' = \sin u + \cos u,\ u(0) = \pi/2$ (ii) $u' = \sin u + \cos u,\ u(0) = -\pi/4$.
On considère maintenant le système différentiel (Σ) : $\begin{cases} x' = \sin(x+y) \\ y' = \cos(x+y) \end{cases}$

2) Montrer que les solutions de (Σ) sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3) Etudier les solutions maximales de (Σ).

4) Étudier le comportement des solutions de (Σ) au voisinage de $+\infty$.

1) On pose $f(u) = \sin u + \cos u$. On doit résoudre l'équation autonome $u' = f(u)$ avec la condition initiale $u(0) = u_0$. On utilise la méthode de l'exercice 15.5.
(i) Puisque $f(\pi/2) \neq 0$, $f(u(t))$ ne s'annule pas (voir exercice 15.5, page 372), donc on obtient $t = \displaystyle\int_{\pi/2}^{u(t)} \frac{ds}{\cos s + \sin s}$. Avec l'aide de Maple, on obtient $\sqrt{2}\,t = \ln\left(\tan(\frac{u(t)}{2} + \frac{\pi}{8})\right) - \ln(\tan\frac{3\pi}{8})$. Or $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ (avec Maple), d'où $u(t) = 2\,\mathrm{Arctan}\left((1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}\,t}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.
(ii) Comme $f(-\pi/4) = 0$, la fonction constante égale à $-\pi/4$ est solution du même problème de Cauchy que u, donc par unicité, u est constante égale à $-\pi/4$.

2) On utilise une méthode analogue à celle de l'exercice 15.1, page 369). Soit $]a, b[$ l'intervalle maximal de définition de la solution (x, y). Supposons b fini. Comme x' et y' sont bornées par 1, elles sont intégrables sur $[0, b[$, donc x et y admettent des limites finies x_1 et y_1 en b. Il en résulte que x' et y' ont également des limites finies en b, donc en posant $x(b) = x_1$ et $y(b) = y_1$, le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ entraîne que les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$ et le couple (x, y) est solution du système sur $]a, b]$. Ceci contredit le fait que l'intervalle $]a, b[$ est maximal. On en déduit que $b = +\infty$, et par le même raisonnement que $a = -\infty$.

3) En ajoutant les deux équations constituant (Σ), on obtient que la fonction $u = x+y$ vérifie l'équation autonome $u' = \sin u + \cos u$.
Le système (Σ) étant autonome, on s'intéresse à la solution maximale du problème de Cauchy en $(0, x_0, y_0)$. Si (x, y) est solution de (Σ), alors $(x+\pi, y+\pi)$, $(x+2\pi, y)$ et $(x, y+2\pi)$ sont également solutions. On se limite donc aux couples (x_0, y_0) tels que $x_0 + y_0 \in]-5\pi/4, 3\pi/4]$. Le choix de cet intervalle de longueur 2π sera justifié dans la suite des calculs. On pose $u_0 = x_0 + y_0$.

• Si $u_0 = -\pi/4$, alors u est constante égale à $-\pi/4$ par le même argument qu'au 1). On en déduit $x' = -1/\sqrt{2}$, donc $x = -t/\sqrt{2} + x_0$ et de même $y = t/\sqrt{2} + y_0$. La trajectoire des solutions est une droite.
• Si $u_0 = 3\pi/4$, on obtient de même $x = t/\sqrt{2} + x_0$ et $y = -t/\sqrt{2} + y_0$.
• Si $-5\pi/4 < u_0 < 3\pi/4$, alors comme dans la première question $\cos u + \sin u$ ne s'annule pas, donc u reste compris entre $-5\pi/4$ et $3\pi/4$. L'équation autonome s'intègre en écrivant $t = \displaystyle\int_{u_0}^{u(t)} \frac{ds}{\cos s + \sin s}$, ce qui donne par le même calul qu'à la première question : $\tan(\dfrac{u(t)}{2} + \dfrac{\pi}{8}) = \tan(\dfrac{u_0}{2} + \dfrac{\pi}{8})e^{t\sqrt{2}}$. Or $\dfrac{u(t)}{2} + \dfrac{\pi}{8}$ reste compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, donc en prenant l'arc tangente, on obtient $u(t) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\tan(\dfrac{u_0}{2} + \dfrac{\pi}{8})e^{t\sqrt{2}}\right) - \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit alors $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t \sin u(s)\,ds$ et $y(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t \cos u(s)\,ds$.

4) On suppose $u_0 \in]-\pi/4, 3\pi/4[$. On fait tendre t vers $+\infty$ dans l'expression de $u(t)$ trouvée dans la question 3), on obtient que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 3\pi/4$. On en déduit que $x'(t)$ tend vers $1/\sqrt{2}$, donc $x(t)$ tend vers $+\infty$, de même $y'(t)$ tend vers $-1/\sqrt{2}$, d'où $y(t)$ tend vers $-\infty$. Il en résulte que la droite d'équation $x + y = 3\pi/4$ est asymptote à la trajectoire.
Si $u_0 \in]-5\pi/4, -\pi/4[$, on obtient de même que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = -5\pi/4$, d'où l'asymptote d'équation $x + y = -5\pi/4$.
Les cas $u_0 = -\pi/4$ et $u_0 = 3\pi/4$ ont été vus à la question 3.

Exercice 15.17

Mines-Ponts MP 2006 K

On considère l'équation différentielle $y' = \cos y + \cos t$. Montrer que l'intervalle de définition d'une solution maximale est $\mathbb{R}$ et que s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) \in [0, \pi]$, alors $\forall t > t_0,\ y(t) \in]0, \pi[$.

La fonction $(t, y) \mapsto \cos y + \cos t$ est bornée (par 2), donc toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ (voir exercice 15.1, page 369) On remarque que $y'' = -y' \sin y - \sin t$ et $y''' = -y'' \sin y - y'^2 \cos y - \cos t$.
Considérons la solution maximale du problème de Cauchy en (t_0, y_0) en supposant $y_0 \in]0, \pi[$. Supposons qu'il existe $t > t_0$ tel que $y(t) > \pi$. L'ensemble $\{t \geqslant t_0 \mid y(t) \geqslant \pi\}$ est non vide et fermé, donc possède un minimum t_1, en lequel $y(t_1) = \pi$. On a donc $y(t) < \pi$ sur $[t_0, t_1[$, donc $y'(t_1) \geqslant 0$ (limite du taux d'accroissement en t_1). Or $y'(t_1) = -1 + \cos t_1 \leqslant 0$, donc $y'(t_1) = 0$, d'où $\cos t_1 = 1$, d'où $y''(t_1) = 0$ et $y'''(t_1) = -1 < 0$, donc y'' décroit et est strictement positif à

gauche au voisinage de t_1, et comme $y'(t_1) = 0$, on aura sur ce voisinage $y' < 0$, donc $y > \pi$, ce qui est contraire à la définition de t_1.
Supposons qu'il existe $t > t_0$ tel que $y(t) < 0$. On considère comme précédemment le plus petit réel $t_1 > t_0$ tel que $y(t_1) = 0$, de sorte que $y(t) > 0$ sur $[\,t_0, t_1\,[$ et $y'(t_1) \leqslant 0$. Or $y'(t_1) = 1 + \cos t_1 \geqslant 0$, donc $y'(t_1) = 0$ et $\cos t_1 = -1$, d'où $y''(t_1) = 0$ et $y'''(t_1) = 1 > 0$ donc $y'' < 0$ à gauche de t_1, puis $y' > 0$, donc $y < 0$ à gauche de t_1 ce qui est absurde.
Si $y_0 = 0$, alors $y'(t_0) = 1 + \cos t_0 \geqslant 0$. Si $y'(t_0) > 0$, alors $y > 0$ à droite de t_0. Si $y'(t_0) = 0$, alors $y''(t_0) = 0$ et $y'''(t_0) = 1$ donc là encore $y > 0$ à droite de t_0, donc on est ramené au cas où $y_0 > 0$. Il en est de même si $y_0 = \pi$. Finalement, on conclut que $\forall t > t_0,\ y(t) \in \,]\,0, \pi\,[$.

Exercice 15.18

Mines MP 2005 K

Soit f la solution maximale de $y'' = 1 - 3y^2$ avec $f(0) = f'(0) = 0$. Déterminer une équation du premier ordre vérifiée par f. Montrer que f est bornée et définie sur $\mathbb{R}$.
Question de la rédaction : montrer que f est périodique.

En multipliant par f' et en intégrant de 0 à x, on obtient $f'(x)^2 = 2(f(x) - f(x)^3)$. On a $f''(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc $f' > 0$ à droite de 0 et $f' < 0$ à gauche de 0. Comme $f(0) = 0$, on obtient $f > 0$ à droite de 0 et $f < 0$ à gauche de 0. On se place sur le plus grand intervalle $]\,0, a\,[$ sur lequel $f' > 0$ et $f < 1$. La fonction f est croissante, donc $f > 0$ et $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)(1 - f(x)^2)}} = 1$. On pose $\Phi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{du}{\sqrt{2u(1-u^2)}}$, de sorte que $x = \Phi(f(x))$. Φ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme croissant de $]\,0, 1\,[$ sur $]\,0, a\,[$, avec $a = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2u(1-u^2)}}$, et $f(x) = \Phi^{-1}(x)$ sur $[\,0, a\,[$. Comme $f(x) \to 1$ quand $x \to a$, $f'(x)$ a pour limite 0, donc la solution est prolongeable au-delà de a. On a alors $f''(a) = -2 < 0$, donc $f' < 0$ à droite de a, donc $f'(x) = -\sqrt{2f(x)(1 - f(x)^2)}$, d'où $x - a = -\displaystyle\int_1^{f(x)} \frac{du}{\sqrt{2u(1-u^2)}}$, d'où $\Psi(f(x)) = x - a$, avec $\Psi(y) = \displaystyle\int_y^1 \frac{du}{\sqrt{2u(1-u^2)}}$. Ψ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme décroissant de $]\,0, 1\,[$ sur $]\,0, a\,[$, donc $f(x) = \Psi^{-1}(x - a)$ sur $[\,a, 2a\,[$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 2a} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 2a} f'(x) = 0$, donc f est prolongeable en $2a$ avec les mêmes conditions de Cauchy qu'en 0. Autrement dit, les fonctions f et $x \mapsto f(x + 2a)$ sont solutions du même problème de Cauchy en 0, donc sont égales. Il en résulte que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est $2a$ périodique, donc est bornée.

Exercice 15.19

ENS MP 2007 K

Soit $\alpha \in]0, \sqrt{2}[$.

1) Soit $y_0 > 0$. Étudier les solutions maximales du problème de Cauchy $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ et $y(0) = y_0$. On montrera notamment que l'intervalle de définition est borné.

2) Le problème de Cauchy $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ et $y(0) = 0$ possède- t-il une solution à gauche ou à droite de 0 ?

1) La fonction $f : (x, y) \mapsto \alpha\sqrt{y} - x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$, donc si $y_0 > 0$, il existe une unique solution maximale telle que $y(0) = y_0$, définie sur $]a, b[$, avec $a < 0 < b$. La fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a :

$$y'' = \frac{\alpha y'}{2\sqrt{y}} - 1 = \frac{\alpha(\alpha\sqrt{y} - x)}{2\sqrt{y}} - 1 = \frac{\alpha^2}{2} - 1 - \frac{\alpha x}{2\sqrt{y}}.$$

Or $\alpha^2/2 - 1 < 0$, donc $y'' < 0$ sur $]0, b[$.

• Supposons $b = +\infty$. Dans ce cas, y est concave positive sur $\mathbb{R}_+$, donc nécessairement croissante et majorée par une fonction affine (sa tangente à l'origine). En conséquence, $y' \geqslant 0$, donc en revenant à l'équation, on obtient $y \geqslant \dfrac{x^2}{\alpha^2}$, ce qui contredit le fait que $y(x) = O(x)$ en $+\infty$.

• Si $a = -\infty$, $y' > 0$ sur $\mathbb{R}_-$, donc y est croissante, or elle est positive, donc elle admet une limite finie ℓ en $-\infty$. En revenant à l'équation, on en déduit $y'(x) \sim -x$ en $-\infty$, donc en intégrant $y(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, ce qui est absurde, donc l'intervalle de définition de y est borné.

2) Si le problème de Cauchy en $(0, 0)$ possède une solution sur $]a, 0]$ avec $a < 0$, alors $y' > 0$ sur $]a, 0[$, donc y croit strictement, d'où $y < 0$ sur $]a, 0[$, ce qui est impossible.
S'il a une solution sur $[0, b[$, le calcul mené à la première question montre que sur $]0, b[$, $y'' < 0$, donc y' décroit, or $y'(0) = 0$, donc $y' < 0$, or $y(0) = 0$, donc y décroit, d'où $y < 0$, ce qui est impossible.

Calcul différentiel 16

16.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

16.1.1 Différentielle, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Ce qu'il faut savoir

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, et f une application de U dans F. Soit $a \in U$.

- On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe $\ell \in \mathscr{L}(E, F)$, V un voisinage de 0 et $\varepsilon : V \to F$ tels que $\forall h \in V,\ f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On pose $df(a) = \ell$, appelée **différentielle** de f au point a.
- Soit u un vecteur de E. On dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur u lorsque la fonction $t \mapsto f(a+tu)$ définie au voisinage de 0 est dérivable en 0, c'est-à-dire que l'expression $\dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t}$ a une limite finie lorsque t tend vers 0. On note $D_u f(a)$ cette limite.
  Si f est différentiable en a, elle admet une dérivée en a selon tout vecteur, et on a $D_u f(a) = df(a)(u)$.
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle dérivée partielle de f en a par rapport à x_i la dérivée de f en a selon le vecteur e_i, on la note également $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

  Si f est différentiable en a et $h = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j e_j$, alors $df(a)(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U lorsque f admet des dérivées partielles (dans une base) en tout point de U, qui sont continues sur U.
  La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si et seulement si f est différentiable en tout point de U et l'application $x \mapsto df(x)$ est continue sur U.

Exercice 16.1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.

3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

5) La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$?

1) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue par théorèmes généraux. En passant en coordonnées polaires, on obtient $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$, or $|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leqslant 2$, donc $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant 2r$, d'où $|f(x,y)| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ce qui montre la continuité de f en $(0,0)$.

2) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorèmes généraux, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

En outre, $f(y,x) = -f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc en revenant à la définition de la dérivée partielle,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

3) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1.$$

Sachant que $f(y,x) = -f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

4) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 6$ pour x non nul, alors que cette dérivée partielle vaut 1 en $(0,0)$, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5) Si f était différentiable à l'origine, alors l'expression

$$a(x, y) = f(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

serait négligeable devant $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.
Or $a(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y = \dfrac{yx^2 - xy^2}{x^2 + y^2}$. En passant en coordonnées polaires, on obtient $\dfrac{a(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} = \cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)$. Cette expression est indépendante de r, et n'est pas nulle, donc ne tend pas vers 0 quand r tend vers 0. Il en résulte que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 16.2

Mines-Ponts MP 2006

Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x + y)^p \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge continuement en $(0, 0)$.
2) La condition précédente étant remplie, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$.

1) En passant en coordonnées polaires, on a

$$f_p(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^p(\cos\theta + \sin\theta)^p \sin\frac{1}{r}.$$

Si $p = 0$, alors $f_0(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\dfrac{1}{r}$, qui n'a pas de limite en $(0, 0)$.
Si $p \geqslant 1$, alors $|f_p(x, y)| \leqslant (2\sqrt{x^2 + y^2})^p \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, donc on prolonge f_p continuement en posant $f_p(0, 0) = 0$.

2) Lorsque $p = 1$, on a $\dfrac{f_1(x, 0) - f_1(0, 0)}{x} = \sin\dfrac{1}{|x|}$. Cette expression n'a pas de limite quand x tend vers 0, donc f_1 n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$. La fonction f n'est donc pas différentiable en ce point.
Si $p \geqslant 2$, $f_p(x, y) = O(x^2 + y^2)$ au voisinage de $(0, 0)$, donc f_p est différentiable et sa différentielle en $(0, 0)$ est nulle.

Remarque

On peut montrer que f_p est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $p \geqslant 3$.

Exercice 16.3

Montrer que l'application $M \mapsto M^2 + \operatorname{tr}(M^3)I_n$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\forall (M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ df(M)(H) = MH + HM + 3\operatorname{tr}(M^2H)I_n$.

On pose $f_1(M) = M^2$. On a $f_1(M+H) = f_1(M) + MH + HM + H^2$. L'application $H \mapsto MH+HM$ est linéaire et H^2 est négligeable devant H au voisinage de 0, donc f_1 est différentiable et $df_1(M)(H) = MH + HM$.
On pose $f_2(M) = \operatorname{tr}(M^3)I_n$. En développant $(M+H)^3$, on obtient :

$$(M+H)^3 = M^3 + M^2H + MHM + HM^2 + H^2M + HMH + MH^2 + H^3.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée à une norme de $\mathbb{R}^n$, de façon à avoir l'inégalité $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ pour toutes matrices A et B.
On sait que la trace est linéaire, donc continue, donc il existe $K > 0$ tel que $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant K\|A\|$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait également que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, donc on obtient facilement que

$$|\operatorname{tr}(H^2M + HMH + MH^2 + H^3)| \leqslant K\|H\|^2(3\|M\| + \|H\|),$$

d'où $\operatorname{tr}((M+H)^3) = \operatorname{tr}(M^3) + 3\operatorname{tr}(M^2H) + o(\|H\|)$, donc f_2 est différentiable et $df_2(M)(H) = 3\operatorname{tr}(M^2H)I_n$. Par linéarité, on en déduit que f est différentiable et

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ df(M)(H) = MH + HM + 3\operatorname{tr}(M^2H)I_n\ .$$

16.1.2 Matrice jacobienne, composition et difféomorphismes

Ce qu'il faut savoir

- Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de E dans F. Soient $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}'$, et $a \in U$.
  - On appelle matrice jacobienne de f en a la matrice de l'application linéaire $df(a)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire la matrice $J_f(a)$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.
  - Soit de plus $g : V \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ où V est un ouvert de F contenant $f(U)$. La fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$. Par conséquent $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))\ J_f(a)$, où on a choisi une base $\mathcal{B}''$ de G.
    En notant $x = (x_1, \dots, x_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on a , pour $i \in [\![1\,,q]\!]$ et $j \in [\![1\,,p]\!]$,

$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

- Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.
  - On dit que φ est un difféomorphisme de U sur V lorsque φ est une bijection de U sur V, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.
  - Si φ est un difféomorphisme de U sur V, alors pour tout $a \in U$, la matrice $J_\varphi(a)$ est inversible et $\left(J_\varphi(a)\right)^{-1} = J_{\varphi^{-1}}(\varphi(a))$.
  - **Caractérisation des difféomorphismes :** soit φ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$. Si φ est injective et si le jacobien de φ est non nul en chaque point de U, alors $V = \varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et φ est un difféomorphisme de U sur V.

Exercice 16.4

Mines-Ponts MP 2006

Soient $(x_1, \ldots, x_n, h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $\phi(t) = x + th = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, avec $\phi_i(t) = x_i + th_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On voit que $g = f \circ \phi$, donc en utilisant le théorème de composition des différentielles, on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $g'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th)$.

Exercice 16.5

Mines-Ponts MP 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Etablir l'existence de $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \varphi(x - y)$.
Indication de la rédaction : on pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\psi(x, y) = (x + y, x - y)$. Il est bijectif, et son jacobien en tout point est égal à -2, donc ψ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g = f \circ \psi^{-1}$, ce qui équivaut à $f = g \circ \psi$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et en notant ses variables u et v, on obtient en dérivant l'égalité $f(x, y) = g(x + y, x - y)$ par rapport à x et y que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y).$$

En ajoutant les deux, l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ est équivalente à $\dfrac{\partial g}{\partial u}=0$, donc il existe une fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=\varphi(v)$, d'où finalement $f(x,y)=\varphi(x-y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.6

CCP PC 2005

1) Montrer que l'application $\phi:(x,y)\mapsto(xy,x+y)$ est un difféomorphisme de l'ouvert $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-y>0\}$ sur un ouvert V à préciser.
2) Transformer l'équation aux dérivées partielles
$$(*)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+3(x-y)f(x,y)=0$$
à l'aide du changement de variables : $u=xy,\ v=x+y$.
3) En déduire toutes les fonctions $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

1) Soit $(x,y)\in U$. On pose $(u,v)=\phi(x,y)$, de sorte que x et y sont les racines réelles et distinctes du trinôme X^2-vX+u, dont le discriminant v^2-4u est donc strictement positif. On pose $V=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ v^2-4u>0\}$. Il s'agit de l'extérieur de la parabole d'équation $v^2-4u=0$.
Soit $(u,v)\in V$. On note x et y les racines (distinctes) du trinôme précédent, x étant la plus grande, ce qui entraîne que $(u,v)=\phi(x,y)$. On en déduit que ϕ est une bijection de U sur V. Le jacobien de ϕ en (x,y) est égal à $\begin{vmatrix} y & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}=y-x<0$.
Il ne s'annule pas sur U, donc ϕ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.
2) On pose $g=f\circ\phi^{-1}$, de sorte que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On a alors $f(x,y)=g(xy,x+y)$. En dérivant par rapport à x et à y, on obtient :
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=y\frac{\partial g}{\partial u}(xy,x+y)+\frac{\partial g}{\partial v}(xy,x+y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=x\frac{\partial g}{\partial u}(xy,x+y)+\frac{\partial g}{\partial v}(xy,x+y)\end{aligned}$$
L'équation $(*)$ est équivalente à $(y-x)\dfrac{\partial g}{\partial u}+3(x-y)g=0$, d'où $\dfrac{\partial g}{\partial u}=3g$.
3) On résout l'équation ci-dessus à v fixé : il existe un réel $A(v)$ tel que pour tout réel u tel que $(u,v)\in V$, on a $g(u,v)=A(v)e^{3u}$. En particulier, $\forall v\in\mathbb{R},\ A(v)=g(-1,v)e^3$, donc la fonction A ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que les solutions de $(*)$ sont les fonctions de la forme
$$(x,y)\mapsto A(x+y)e^{3xy},\ \text{où } A \text{ décrit } \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Exercice 16.7

CCP PC 2006

Montrer que $\varphi\ :\ (x,y,z)\ \mapsto\ \left(x+y+z, \dfrac{y+z}{x+y+z}, \dfrac{z}{y+z}\right)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid x+y+z < 1\}$ sur $V =]0,1[^3$. Déterminer φ^{-1}.

Pour $(x,y,z) \in U$, on pose $(u,v,w) = \varphi(x,y,z)$. On remarque que $(u,v,w) \in V$, et que $z = uvw$, d'où $uv = y+z$, d'où $y = uv - uvw = uv(1-w)$, et enfin $x = u - (y+z) = u(1-v)$.
L'application $\psi\ :\ V \to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(u,v,w) = (u(1-v), uv(1-w), uvw)$ est à valeurs dans U car $u(1-v) + uv(1-w) + uvw = u \in]0,1[$ et vérifie par construction $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_U$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_V$, donc $\psi = \varphi^{-1}$. D'autre part, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, donc φ est un difféomorphisme de U sur V.

16.1.3 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, points critiques

Ce qu'il faut savoir

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. Cet ensemble muni de l'addition et de la multiplication des fonctions est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

- Soit $f \in \mathscr{C}^1(U)$ et $a \in U$. On dit que a est un point critique de f lorsque $df(a) = 0$.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. On dit que f présente un minimum (resp. maximum) local en a lorsqu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant a tel que $\forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) \leqslant f(a)$).
- Soit $f\ :\ A \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur de A, et a un point intérieur à A. Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Exercice 16.8

CCP PC 2007

Soit $g(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3$.

Existe-t-il des points pour lesquels $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$?

La fonction g possède-t-elle des extremums locaux ?

Indication de la rédaction : on calculera $g(x,x)$.

On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2+6xy$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3x^2+3y^2$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ s'annule uniquement en $(0, 0)$, et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$, donc $(0, 0)$ est le seul point critique de g.
Si g présente un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, alors celui-ci est un point critique, donc ne peut être que $(0, 0)$, or $g(0, 0) = 0$ et $g(x, x) = 5x^3$, qui est du même signe que x, donc g n'a pas d'extremum local à l'origine, donc elle n'en a nulle part.

Exercice 16.9

CCP PSI 2006

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x - y + x^3 + y^3$. Montrer que g admet des extremums sur le carré $[0, 1]^2$ et les déterminer.

La fonction g est continue sur le carré $[0, 1]^2$ qui est compact, donc g est bornée et atteint ses bornes sur le carré. Etudions d'abord l'existence de points critiques de g sur l'ouvert $]0, 1[^2$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2$. Cette dérivée partielle ne s'annule pas, donc g n'a pas de points critiques, ce qui signifie que g atteint ses bornes sur le bord du carré. Etudions g sur les quatre segments du bord.
• Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 0)$, on a $g(x, 0) = g(x, 1) = x + x^3$. Cette fonction est croissante sur $[0, 1]$, donc varie de $g(0, 0) = 0$ à $g(1, 0) = 2$. Il en est de même sur le segment d'extrémités $(0, 1)$ et $(1, 1)$.
• Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(0, 1)$, On pose $\varphi(y) = g(0, y) = -y + y^3$. On a $\varphi'(y) = -1 + 3y^2$, donc φ est décroissante sur $[0, 1/\sqrt{3}]$ et croissante sur $[1/\sqrt{3}, 1]$, donc son minimum est $\varphi(1/\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$, et son maximum est $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
• De même, $g(1, y) = 2 - y + y^3 = 2 + g(0, y)$, donc varie de $2 - 2/3\sqrt{3}$ à 2.
Finalement, le maximum de g sur le carré est égal à 2 et est atteint en $(1, 0)$ et $(1, 1)$, alors que le minimum est égal à $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en $(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

16.1.4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Ce qu'il faut savoir

• Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une application définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
◦ Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et lorsque les dérivées partielles de f sont elles mêmes de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. La dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

◦ **Théorème de Schwarz** : si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et si $i, j \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

◦ On définit par le même procédé la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^k$.

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ et a un point critique de f. On pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ t = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(a)$.

– Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f présente un minimum local en a.
– Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f présente un maximum local en a.
– Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne présente pas d'extremum local en a.
– Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 16.10

CCP MP 2007

Déterminer les fonctions $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (*)$

On calcule les dérivées partielles premières et secondes de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} h'\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} h'\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3} h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} h''\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2} h''\left(\frac{y}{x}\right).$$

En multipliant par x^2 et en posant $t = \dfrac{y}{x}$, l'équation $(*)$ est équivalente à

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t^2 + 1)h''(t) + 2t h'(t) = 0.$$

La fonction h' satisfait à une équation différentielle linéaire du 1er ordre. En la résolvant, on obtient $h'(t) = A \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \frac{2u}{u^2+1} du\right) = \dfrac{A}{t^2+1}$, où A est une constante, donc finalement h est la fonction $t \mapsto A \operatorname{Arctan} t + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16.11

TPE 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1) Déterminer les points critiques de f.
2) Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f admet-elle des extremums absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3) Déterminer les extremums locaux et absolus de f sur l'ensemble K défini par $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 3\}$.

1) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12\,.$$
Le couple (x, y) est un point critique si et seulement si $x^2 + y^2 = 5$ et $xy = 2$. On obtient les quatre points critiques suivants : $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.

2) On calcule $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$, d'où $rt - s^2 = 36(x^2 - y^2)$.
• En $(2, 1)$, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc f présente un minimum local.
• En $(-2, -1)$, $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, donc f présente un maximum local.
• En $(1, 2)$ et $(-1, -2)$, $rt - s^2 < 0$, donc il n'y a pas d'extrêmum local.
On remarque que $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, donc f n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$.

3) Le triangle K est fermé borné, donc compact. Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur K. Si un extremum absolu est atteint en (a, b) situé à l'intérieur de K, alors (a, b) est un point critique, donc ce ne peut être que $(2, 1)$. On a $f(2, 1) = -28$. On doit maintenant chercher les extremums de f à la frontière de K, constituée de trois segments.
• Si $y = 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui décroit sur $[\,0,\ \sqrt{5}\,]$ et croit sur $[\,\sqrt{5},\ 3\,]$, donc son minimum est $f(\sqrt{5}, 0) = -10\sqrt{5}$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 0)) = 0$.
• Si $x = 3$ et $0 \leqslant y \leqslant 3$, alors $f(3, y) = 9y^2 - 12y - 18$, qui décroit sur $[\,0,\ 2/3\,]$ et croit sur $[\,2/3,\ 3\,]$, donc son minimum est $f(3, 2/3) = -22$ et son maximum est $\max(f(3, 0), f(3, 3)) = 27$.
• Si $0 \leqslant x = y \leqslant 3$, alors $f(x, x) = 4x^3 - 27x$ décroit sur $[\,0,\ 3/2\,]$ et croit sur $[\,3/2,\ 3\,]$, donc son minimum est $f(3/2, 3/2) = -27$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 3)) = 27$.
Il reste à faire la synthèse des résultats obtenus : le minimum de f sur K est égal à $f(2, 1) = -28$ et le maximum est $f(3, 3) = 27$.

16.1.5 Formes différentielles

Ce qu'il faut savoir

• On désigne par $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^k$ sur U est une application de U dans le dual de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^k$. Elle s'écrit sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$, où $P_i \in \mathscr{C}^k(U)$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$.

On a donc pour tout $M \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\omega(M)(h) = \sum_{i=1}^{n} P_i(M)h_i$.

- On dit que la forme différentielle ω est **exacte** lorsqu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $df = \omega$, c'est-à-dire telle que, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $P_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.
  La fonction f est appelée une **primitive** de ω.
- On dit que la forme différentielle ω est **fermée** lorsque

$$\forall (i, j) \in [\![1\,,n]\!]^2,\ \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

- Toute forme différentielle exacte de classe $\mathscr{C}^1$ est fermée.
- Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est **étoilé** lorsqu'il existe un point a de U tel que pour tout point x appartenant à U, le segment d'extrémité a et x (qu'on note parfois $[\,a\,;\,x\,]$) est inclus dans U.

  Exemple : Tout ouvert convexe est étoilé.

  Théorème de Poincaré : si U est un ouvert étoilé, alors toute forme différentielle fermée sur U est exacte.

Exercice 16.12

CCP MP 2006

On considère la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$.

1) Montrer que ω n'est pas exacte.

2) Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + 1 > 0\}$. Déterminer une fonction $\varphi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle $\omega' = \varphi(x^2 - y^2)\omega$ soit exacte sur U, et déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telles que $df = \omega'$.

1) On a $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 1) = 2y$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y$. Comme ces dérivées partielles sont distinctes, ω n'est pas fermée et donc pas exacte.

2) On pose $P = (x^2 + y^2 - 1)\,\varphi(x^2 - y^2)$ et $Q = -2xy\,\varphi(x^2 - y^2)$, de sorte que $\omega' = Pdx + Qdy$. Une condition nécessaire pour que ω' soit exacte est qu'elle soit fermée, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Cette condition va nous permettre de

déterminer φ, puis nous calculerons les primitives de ω'. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= -2y\left(-\varphi(x^2-y^2)+(x^2+y^2-1)\varphi'(x^2-y^2)\right)\,.\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -2y\left(\varphi(x^2-y^2)+2x^2\varphi'(x^2-y^2)\right)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que ω' est fermée si et seulement si

$$\forall (x,y)\in U,\ 2\varphi(x^2-y^2)+(x^2-y^2+1)\varphi'(x^2-y^2)=0\,.$$

Lorsque (x,y) décrit U, x^2-y^2 décrit $]-1,+\infty[$, d'où la condition équivalente

$$\forall t\in\,]-1,+\infty[\,,\ (t+1)\varphi'(t)+2\varphi(t)=0.$$

La fonction $\varphi : t\mapsto \dfrac{1}{(t+1)^2}$ est solution sur $]-1,+\infty[$ de l'équation différentielle précédente, on la choisit ainsi.

L'ouvert U est étoilé par rapport à l'origine (c'est la zone du plan contenant $(0,0)$ et limitée par les deux branches d'hyperbole $x^2-y^2+1=0$), donc par théorème de Poincaré, ω' étant fermée sur U, elle est exacte.

On cherche à présent les primitives f de ω', c'est-à-dire les fonctions vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}=P$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=Q$. La deuxième équation s'écrit $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2}$, donc s'intègre en $f(x,y)=-\dfrac{x}{x^2-y^2+1}+A(x)$, où A est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On remplace dans la première équation, ce qui donne $A'(x)=0$, donc A est constante.

Les primitives de ω' sur U sont donc les fonctions f de la forme

$$(x,y)\mapsto -\frac{x}{x^2-y^2+1}+A,\ \text{où } A\in\mathbb{R}\,.$$

Exercice 16.13

Polytechnique MP 2007

1) Trouver $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ telle que : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x^2+4yz+2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=4zx+x^2+z,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=4xy+y.$$

2) Que se passe-t-il si on remplace la dernière équation par $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$?

3) Soient $u,\ v,\ w$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur (u,v,w) le système $\dfrac{\partial f}{\partial x}=u,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=v,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=w$ possède-t-il une solution ?

1) Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\omega = Pdx+Qdy+Rdz$, où $P=3x^2+4yz+2xy,\ Q=4zx+x^2+z,\ R=4xy+y$. Il s'agit dans cette question de déterminer une primitive de ω. On observe d'abord que ω est fermée, car $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$. Comme $\mathbb{R}^3$ est convexe, ω est

exacte par le théorème de Poincaré, donc il existe $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, unique à une constante additive près, telle que $\omega = df$. On résout d'abord $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$. On obtient $f(x, y, z) = x^3 + 4xyz + x^2y + g(y, z)$, où g est de classe $\mathscr{C}^1$. On dérive ensuite par rapport à y et on remplace dans la relation $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$, ce qui donne $\dfrac{\partial g}{\partial y} = z$, d'où $g(y, z) = yz + h(z)$. Enfin, on dérive par rapport à z et on remplace dans la dernière relation, ce qui donne $h' = 0$, donc h est constante. Finalement, les primitives de ω sur $\mathbb{R}^3$ sont les fonctions $f : (x, y, z) \mapsto x^3 + 4xyz + x^2y + yz + C$, où C est un réel.

2) On suppose maintenant $R = 0$. Dans ce cas, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = 0$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 4x + 1$, donc ω n'est pas fermée. Par conséquent, ω n'est pas exacte, et f ne peut exister.

3) On applique le théorème de Poincaré dans $\mathbb{R}^3$ qui est convexe donc étoilé. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une primitive f de ω est que ω soit fermée, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial y}$.

16.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 16.14

Mines-Ponts MP 2005

Soit E un espace euclidien de norme $\|\,.\,\|$ et f l'application de $E \setminus \{0\}$ dans lui-même définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et déterminer $df(x)$.

On pose $\psi(x) = \|x\|^2$ et $\varphi(x) = 1/\psi(x)$. Comme $\psi(x+h) = \psi(x) + 2(x \mid h) + \|h\|^2$, ψ est différentiable, et $d\psi(x)(h) = 2(x \mid h)$. Il en résulte que φ est différentiable, et on a pour tout x non nul et $h \in E$, $d\varphi(x)(h) = -\dfrac{d\psi(x)(h)}{\psi(x)^2} = -\dfrac{2(x \mid h)}{\|x\|^4}$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \varphi(x+h)\,(x+h) = (\varphi(x) + d\varphi(x)(h) + o(h))(x+h) \\ &= f(x) + \underbrace{d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h}_{\text{linéaire par rapport à } h} + o(h) \end{aligned}$$

Il en résulte que f est différentiable et $df(x)(h) = d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h$, d'où

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = -\frac{2(x \mid h)x}{\|x\|^4} + \frac{h}{\|x\|^2}\,.$$

Exercice 16.15

Mines-Ponts MP 2006

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $E = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.
Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On dit que f est homogène de degré α lorsque $\forall t > 0,\ \forall (x, y) \in U,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

On pose, pour $f \in E$ et $(x, y) \in U$: $\quad \Phi(f)(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

1) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.
Indication de la rédaction : s'intéresser à la fonction $t \mapsto f(tx, ty)$.
2) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si $\Phi(f) = \alpha f$.
3) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$: $\Phi(f) = h$, où h est la fonction $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{3/2}xy$.

1) Soit $(x, y) \in U$, et $\psi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(t) = f(tx, ty)$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\psi'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$. On en déduit que si $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors ψ' est la fonction nulle, donc ψ est constante. En particulier, $\psi(1) = \psi(1/x)$, d'où $f(x, y) = f(1, y/x)$. En posant pour tout $t > 0$, $h(t) = f(1, t)$, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $f(x, y) = h(y/x)$ pour tout $(x, y) \in U$.
Inversement, si $h \in \mathscr{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et si on pose $f(x, y) = h(y/x)$, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur U et pour tout $(x, y) \in U$,
$$\Phi(f)(x, y) = x\left(-\frac{y}{x^2}\right) h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} h'\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$
donc $f \in \operatorname{Ker}\Phi$.
Finalement, $\operatorname{Ker}\Phi$ est l'ensemble des fonctions de la forme $(x, y) \mapsto h(y/x)$ où $h \in \mathscr{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Remarque
Une autre méthode consiste à effectuer un changement de variables dans l'équation aux dérivées partielles $\Phi(f) = 0$. On cherche un difféomorphisme $\psi : V \to U$ judicieux, on pose $g = f \circ \psi$, et on exprime $\Phi(f)$ à l'aide des dérivées partielles de g.
Le lecteur vérifiera qu'en posant $V = U$ et $\psi(u, v) = (u, uv)$, on obtient $\Phi(f) = u\dfrac{\partial g}{\partial u}$, donc $\Phi(f) = 0$ équivaut au fait que g est une fonction de v, c'est-à-dire que f est une fonction de y/x.
On peut également passer en polaires, en posant $V =]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$ et $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, ce qui donne $\Phi(f) = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$. On retrouve que $\Phi(f) = 0$ équivaut au fait que g ne dépend que de θ, c'est-à-dire que f ne dépend que de y/x.

2) Supposons que f est homogène de degré α. On dérive par rapport à t l'égalité $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$, ce qui donne $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$.
En prenant $t = 1$, on en déduit que $\Phi(f) = \alpha f$.
Supposons que $\Phi(f) = \alpha f$. On pose $\varphi(t) = t^{-\alpha} f(tx,ty)$. La fonction φ est dérivable sur $]\,0,\,+\infty\,[$ et on a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)\\ &= (-\alpha f(tx,ty) + \Phi(f)(tx,ty))t^{-\alpha-1} = 0\end{aligned}$$

On en déduit que φ est constante, et égale à $\varphi(1)$, d'où $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.

3) On remarque que h est homogène de degré 5, donc $\Phi(h/5) = h$. Par suite, $\Phi(f) = h$ équivaut à $\Phi(f - h/5) = 0$, ce qui équivaut à $f - h/5 \in \operatorname{Ker}\Phi$. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions qui s'écrivent sous la forme $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{5}(x^2+y^2)^{3/2}xy + A(\dfrac{y}{x})$, où $A \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 16.16

Mines-Ponts MP 2006

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On pose $f(x,y) = \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$ pour tout couple (x,y) tel que $x \neq y$, et $f(x,x) = g'(x)$.

1) Démontrer que $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 g'((1-t)x+ty)\,dt$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p t^q\,dt$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur des dérivées partielles de f en tout point de coordonnées (x,x).

3) Lorsque g est la fonction sinus, résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ puis déterminer les extremums de f.

1) Si $x \neq y$, $\displaystyle\int_0^1 g'((1-t)x+ty)\,dt = \left[\frac{g((1-t)x+ty)}{y-x}\right]_0^1 = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$.
Si $x = y$, l'intégrale ci-dessus est égale à $g'(x)$.
L'application $h : (x,y,t) \mapsto g'((1-t)x+ty)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, et pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{\partial^{i+j}h}{\partial x^i \partial y^j}(x,y,t) = (1-t)^i t^j g^{(i+j+1)}((1-t)x+ty)$.
Soit a un réel strictement positif.

$$\forall (x,y) \in [-a,\,a\,]^2,\ \forall t \in [\,0,\,1\,],\ \left|\frac{\partial^{i+j}h}{\partial x^i \partial y^j}(x,y,t)\right| \leqslant \|g^{(i+j+1)}\|_{\infty,[-a,a]}$$

On a majoré par une constante, laquelle est intégrable sur $[0, 1]$, donc par théorème sur les intégrales à paramètres (avec hypothèse de domination locale), on obtient que f admet des dérivées partielles à tout ordre, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^i t^j g^{(i+j+1)}((1-t)x + ty)\, dt$.

2) Pour $q \geqslant 1$, on intègre par parties (en intégrant $(1-t)^p$ et en dérivant t^q) :

$$J_{p,q} = \left[-\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} t^q \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-t)^{p+1} t^{q-1}\, dt = \frac{q}{p+1} J_{p+1,q-1}.$$

Par récurrence, on a $J_{p,q} = \dfrac{q!}{(p+1)\cdots(p+q)} J_{p+q,0} = \dfrac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)}$.

D'après 1, $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}(x, x) = g^{(p+q+1)}(x) J_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!} g^{(p+q+1)}(x)$.

3) • Pour $x \neq y$, $f(x, y) = 0 \iff \sin x = \sin y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.
Par ailleurs, $f(x, x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi/2 + k\pi$.
• À l'aide de l'écriture sous forme d'intégrale, on obtient $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x, y)| \leqslant 1$. Si $x \neq y$, l'inégalité est stricte car la dérivée du sinus n'est pas constante entre x et y. Si $x = y$, il y a égalité si et seulement si $x \in \pi\mathbb{Z}$, les extremums de f valent donc 1 et -1.

Exercice 16.17

Centrale MP 2005 K

Soient $k \in]0, 1[$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k$.
Montrer que l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) = (x + f(y), y + f(z), z + f(x))$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

• Le jacobien de F en un point (x, y, z) est égal à $\begin{vmatrix} 1 & f'(y) & 0 \\ 0 & 1 & f'(z) \\ f'(x) & 0 & 1 \end{vmatrix}$. En développant, on obtient $1 + f'(x)f'(y)f'(z)$ qui est supérieur ou égal à $1 - k^3$ donc strictement positif.
• On suppose que $F(x, y, z) = F(x', y', z')$, c'est-à-dire $x - x' = f(y') - f(y)$, $y' - y = f(z) - f(z')$, $z - z' = f(x') - f(x)$. Par théorème des accroissements finis, $|x - x'| \leqslant k|y - y'| \leqslant k^2|z - z'| \leqslant k^3|x - x'|$, or $0 < k^3 < 1$, donc $x = x'$ et par suite, $y = y'$ et $z = z'$, donc F est injective.
• Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $F(x, y, z) = (X, Y, Z)$. On obtient le système équivalent $\begin{cases} x = X - f(y) \\ y = Y - f(z) \\ z + f(X - f(Y - f(z))) = Z \end{cases}$

Posons $h(t) = t + f(X - f(Y - f(t)))$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = 1 + f'(t)f'(Y - f(t))f'(X - f(Y - f(t))) \geqslant 1 - k^3 > 0$, donc h est strictement croissante.
Pour tout $t > 0$, on intègre cette inégalité de 0 à t, ce qui donne $h(t)-h(0) \geqslant (1-k^3)t$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.
Pour tout $t < 0$, on intègre de t à 0, ce qui donne $h(0) - h(t) \geqslant -(1 - k^3)t$, donc $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t) = -\infty$.
En conséquence, h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique réel z tel que $h(z) = Z$. On pose $y = Y - f(z)$ puis $x = X - f(y)$, et on en déduit que (x, y, z) est l'unique antécédent de (X, Y, Z) (à noter que ceci rend la preuve de l'injectivité inutile).
F est bijective, de classe $\mathscr{C}^1$, et son jacobien ne s'annule pas, donc F est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.18

Mines-Ponts MP 2005

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f\ .$$
Indication de la rédaction : on posera $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

2) Trouver les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

3) Trouver les applications $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

1) On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$. On a alors $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$. L'application $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ dont le jacobien, égal à r, ne s'annule pas, donc est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. L'équation proposée est équivalente à $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = \alpha g$, c'est-à-dire $g(r, \theta) = A_1(\theta)r^\alpha$, où $A_1 \in \mathscr{C}^1(]0, \pi[, \mathbb{R})$. En posant $A(t) = A_1(\operatorname{arccotan} t)$, on obtient finalement $f(x, y) = A\left(\dfrac{x}{y}\right)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$, avec $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Autre méthode : En utilisant l'exercice 16.15, on obtient $f(mx, my) = m^\alpha f(x, y)$, pour tout $m > 0$, d'où en posant $m = 1/y$, et h la fonction $t \mapsto f(t, 1)$, on obtient
$$f(x, y) = y^\alpha h(x/y).$$

2) Avec le changement de variables précédent, on obtient $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \operatorname{cotan}\theta$, d'où $g(r,\theta) = r\operatorname{cotan}\theta + B_1(\theta)$, d'où $f(x,y) = \dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} + B\left(\dfrac{x}{y}\right)$, avec $B \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3) Soit Φ l'opérateur différentiel défini par $\Phi(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Un calcul simple donne $(\Phi\circ\Phi)(f) = x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$. L'équation proposée équivaut à $\Phi(\Phi(f)) = \Phi(f)$. En utilisant la question 1 avec $\alpha = 1$, on obtient $\Phi(f) = A\left(\dfrac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}$. Le changement de variables en coordonnées polaires entraîne que $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = A_1(\theta)r$, avec $A_1(\theta) = A(\operatorname{cotan}\theta)$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial g}{\partial r} = A_1(\theta)$. La solution de cette équation est de la forme $g(r,\theta) = A_1(\theta)r + B_1(\theta)$, et comme g est de classe $\mathscr{C}^2$, A_1 et B_1 également. En revenant aux variables x et y, on obtient finalement :

$$f(x,y) = A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2} + B\left(\frac{x}{y}\right),\ \text{où } A \text{ et } B \text{ décrivent } \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Exercice 16.19

Mines-Ponts MP 2007, Centrale MP 2005

Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions continues $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que la fonction $F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ vérifie $F(0,0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = kF$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

On pose $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, de sorte que $F(x,y,z) = u(r)$ et $u(0) = 1$. On a $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{r}u'(r)$, puis $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (\dfrac{1}{r} - \dfrac{x^2}{r^3})u'(r) + \dfrac{x^2}{r^2}u''(r)$. Par symétrie sur les variables, on obtient des expressions semblables pour $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}$. L'équation proposée est équivalente à : $\dfrac{2}{r}u'(r) + u''(r) = ku(r)$.

On effectue dans cette équation différentielle linéaire du second ordre le changement de fonction inconnue $v(r) = ru(r)$. On a $v''(r) = ru''(r) + 2u'(r)$, donc on obtient l'équation différentielle à coefficients constants $v'' - kv = 0$.

Si $k > 0$, on obtient $v(r) = A\operatorname{ch}(\sqrt{k}\,r) + B\operatorname{sh}(\sqrt{k}\,r)$, et $u(r) = \dfrac{v(r)}{r}$. La continuité de u en 0 et l'égalité $u(0) = 1$ entraînent que $A = 0$ et $B = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, d'où $u(r) = \dfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{k}\,r)}{\sqrt{k}\,r}$.

Si $k < 0$, on obtient $v(r) = A\cos(\sqrt{-k}\,r) + B\sin(\sqrt{-k}\,r)$, et $u(r) = \dfrac{v(r)}{r}$, avec là encore $A = 0$ et $B = \dfrac{1}{\sqrt{-k}}$, d'où $u(r) = \dfrac{\sin(\sqrt{-k}\,r)}{\sqrt{-k}\,r}$.

Si $k = 0$, on obtient $v(r) = Ar + B$, d'où $u(r) = \dfrac{Ar + B}{r}$, avec cette fois $B = 0$ et $A = 1$, d'où $u(r) = 1$.

Exercice 16.20

Centrale MP 2007

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* le dual de E. On pose
$\mathscr{D} = \{d \in E^* \mid \forall (f, g) \in E^2,\ d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$.

1) Montrer que $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de E^*.

2) Montrer que $\mathscr{D}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

3) Soient $d \in \mathscr{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?

4) Soit $f \in E$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt.$

Vérifier que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$ appartient à E.

5) Soit $d \in \mathscr{D}$. Etablir l'existence de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall f \in E,\ d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

6) Déterminer la dimension de $\mathscr{D}$.

1) L'application nulle appartient à $\mathscr{D}$. Si d et d' appartiennent à $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $d + d'$ et λd appartiennent à $\mathscr{D}$, donc $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de E^*.

2) Soit $d : E \to \mathbb{R}$ définie par $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0)$. Il s'agit d'une forme linéaire sur E, qui appartient à $\mathscr{D}$ par règle de dérivation d'un produit.

3) On note e la fonction constante égale à 1. Comme $e^2 = e$, on a $d(e) = d(e^2)$, or $d(e^2) = 2e(0)d(e) = 2d(e)$, d'où $d(e) = 0$. Par linéarité, on en déduit que si h est une fonction constante, alors $d(h) = 0$.

4) On pose $\varphi(t) = f(tx)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\varphi(1) = \varphi(0) + \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)\,dt$, ce qui donne

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt\ .$$

On pose $h(x, t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ et $g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt = \int_0^1 h(x, t)\,dt$. La fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit $R > 0$, comme les dérivées partielles de h sont continues, elles sont bornées sur le compact $B_f(0, R) \times [0, 1]$, donc par théorème sur les intégrales dépendant d'un paramètre (avec hypothèses de domination locale), la fonction g_i est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

5) Soit $d \in \mathscr{D}$. Soit $e_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'élément de E défini par $e_i(x) = x_i$. On pose $a_i = d(e_i)$. Avec les notations de la question précédente, on a $f = f(0) + \sum_{i=1}^{n} e_i g_i$.

D'après la question 3, $d(f(0)) = 0$, donc
$$d(f) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(0)d(g_i) + g_i(0)d(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\,.$$

6) On note d_i l'élément de $\mathscr{D}$ défini par $d_i(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. La question 5 montre que la famille $(d_1, \ldots, d_n)$ est génératrice de $\mathscr{D}$. Montrons qu'elle est libre.

Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i d_i = 0$. En appliquant cette égalité à la fonction e_j, on obtient $u_j = 0$, pour tout entier j variant de 1 à n, donc la famille est libre. Il en résulte que $(d_1, \ldots, d_n)$ est une base de $\mathscr{D}$, donc la dimension de $\mathscr{D}$ est égale à n.

Exercice 16.21

Mines-Ponts MP 2006

Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction
$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2,$$
puis les extremums absolus de f sur le carré $[-1, 1]^2$.

• On recherche d'abord les points critiques de f :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y)\,.$$
Le système $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\right)$ se résout de la manière suivante : on ajoute les deux relations, ce qui donne $x = -y$, puis on reporte dans la première, et on obtient finalement les points critiques suivants : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

On pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$.

◦ Au point $(0, 0)$, $rt - s^2 = 0$. A priori, on ne peut pas conclure, mais $f(x, x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ pour $0 < x < \sqrt{2}$, donc il n'y a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

◦ Au point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc il y a un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, ainsi qu'en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ par parité.

• La fonction f est continue donc atteint ses bornes sur le compact $[-1, 1]^2$. Ce ne peut pas être à l'intérieur, car le seul point critique s'y trouvant est $(0, 0)$ en lequel f ne présente pas d'extremum local, donc c'est sur la frontière. Par parité et symétrie entre x et y, il suffit de se placer sur le segment ($y = 1$, $x \in [-1, 1]$) : $h(x) = f(x, 1) = x^4 - 2x^2 + 4x - 1$, $h'(x) = 4(x^3 - x + 1)$, $h''(x) = 4(3x^2 - 1)$. Une étude de fonction montre que h' a un unique zéro noté α. On obtient à l'aide d'un logiciel de calcul formel la valeur approchée -1.324717957 (et la valeur exacte $-\frac{1}{6}\beta - \frac{2}{\beta}$ où $\beta = (108 + 12\sqrt{69})^{1/3}$).

La fonction h' est négative sur $[-1, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, 1]$, donc le minimum absolu de f est égal à $f(\alpha, 1) \approx -6.729031539$ (obtenu à l'aide de Maple) et le maximum absolu est égal à $\max(f(-1, 1), f(1, 1)) = f(1, 1) = 2$.

Exercice 16.22

Centrale MP 2004

Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \dfrac{a^4}{xy}$ admet un minimum absolu sur $]0, +\infty[^2$ que l'on déterminera ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

• Déterminons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{a^4}{yx^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{a^4}{xy^2} .$$

Le point (x, y) est critique si et seulement si $2x^3y = 2xy^3 = a^4$, d'où $x = y = 2^{-1/4}a$.

On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \dfrac{2a^4}{yx^3}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{a^4}{x^2y^2}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \dfrac{2a^4}{xy^3}$.

Au point critique $(2^{-1/4}a, 2^{-1/4}a)$, on a $rt - s^2 = 32 > 0$ et $r > 0$, donc f présente un minimum local. On démontre à présent que ce minimum est absolu.

• En utilisant deux fois l'inégalité $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$, on obtient pour tous $x, y > 0$:

$$f(x, y) \geqslant 2xy + \frac{a^4}{xy} = \frac{2}{xy}(x^2y^2 + \frac{a^4}{2}) \geqslant \frac{2}{xy}(2xya^2/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}a^2 .$$

Or $f(2^{-1/4}a, 2^{-1/4}a) = 2\sqrt{2}a^2$, donc f atteint son minimum sur $]0, +\infty[^2$ en ce point.

Exercice 16.23

Mines-Ponts MP 2005

Déterminer les extremums locaux de la fonction $f :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$. Montrer que f admet un maximum absolu.

On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}.$$
Le seul point critique de f appartenant à $]0,+\infty[^2$ est $(1,1)$. On a $f(1,1)=1/8$.
On observe que $\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2,\ f(x,y)<\dfrac{1}{x+y}$, donc si $x\geqslant 8$ ou si $y\geqslant 8$, alors $f(x,y)<1/8$.
D'autre part, $y\leqslant x+y$, et $1\leqslant(1+x)(1+y)$, donc $f(x,y)\leqslant x$, donc si $x\leqslant 1/8$ (ou si $y\leqslant 1/8$ par symétrie), alors $f(x,y)<1/8$.
On en déduit que pour $(x,y)\notin]1/8,\ 8[^2,\ f(x,y)<1/8$. La fonction f est continue donc atteint sa borne supérieure sur le compact $[1/8,\ 8]^2$. D'après ce qui vient d'être montré, cette borne supérieure n'est pas atteinte sur le bord du compact, elle l'est donc à l'intérieur et donc en un point critique, le seul possible étant $(1,1)$.
Comme $f(1,1)=1/8$, f atteint son maximum sur $]0,+\infty[^2$ en ce point.

Exercice 16.24

Centrale MP 2006

Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $C\in\mathbb{R}^n$. Étudier les points critiques de la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(X)={}^tX\,M\,X+2<X,C>$, puis l'existence d'extremums.

Précisons d'abord qu'on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, donc il existe $P\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ des réels strictement positifs (car M est définie positive) tels que $P^{-1}MP=D=\operatorname{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.
On pose $Y=P^{-1}X={}^tPX$ le vecteur colonne de coordonnées $(y_1,\ldots,y_n)$, on a $f(X)={}^tY{}^tPMPY+2<PY,C>$. On pose $B={}^tPC$ le vecteur colonne de coordonnées $(b_1,\ldots,b_n)$, et $g(Y)=f(X)={}^tYDY+2<Y,B>$. On obtient alors
$$g(Y)=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i^2+2\sum_{i=1}^n b_i y_i=\sum_{i=1}^n\lambda_i\left(y_i+\frac{b_i}{\lambda_i}\right)^2-\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{\lambda_i}.$$
On en déduit que $g(Y)\geqslant-\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{\lambda_i}$, avec égalité si et seulement si pour tout $i\in[\![1\,,n]\!]\ y_i=-\dfrac{b_i}{\lambda_i}$, c'est-à-dire $Y=-D^{-1}B$. On en déduit que f admet un seul point critique $X=-PD^{-1}B=-M^{-1}PB=-M^{-1}C$, en lequel f présente un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$, égal à $-<M^{-1}C,C>$.
En revanche, f n'est pas majorée, car on voit facilement que $g(Y)$ tend vers $+\infty$ quand y_1 tend vers $+\infty$, donc n'a pas de maximum absolu.

Exercice 16.25 K

Centrale MP 2006

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On pourra introduire les opérateurs différentiels

$$P = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour tout $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}(P \circ Q)(f) = P(\frac{\partial f}{\partial x}) - 3P(\frac{\partial f}{\partial y}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ à l'aide du théorème de Schwarz.}\end{aligned}$$

En posant $g = Q(f)$, on doit d'abord résoudre l'équation $P(g) = 0$.
On utilise pour cela le changement de variables $(u = x + y,\ v = x - y)$, qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc a fortiori un difféomorphisme.
En posant $g_1(u, v) = g(x, y)$, soit $g(x, y) = g_1(x + y, x - y)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g_1}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial g_1}{\partial v}(x + y, x - y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial g_1}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g_1}{\partial v}(x + y, x - y)\end{aligned}$$

On en déduit que $P(g) = 0$ équivaut à $\dfrac{\partial g_1}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g_1(u, v) = A(u)$, d'où $g(x, y) = A(x + y)$.
On résout pour finir $Q(f) = A(x + y)$ à l'aide du changement de variables $(u = x + y,\ v = 3x + y)$, qui est encore un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
En posant $f_1(u, v) = f(x, y)$, soit $f(x, y) = f_1(x + y, 3x + y)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial u}(x + y, 3x + y) + 3\frac{\partial f_1}{\partial v}(x + y, 3x + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial u}(x + y, 3x + y) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(x + y, 3x + y)\end{aligned}$$

On en déduit que $Q(f) = A(x + y)$ équivaut à $-2\dfrac{\partial f_1}{\partial u} = A(u)$, dont les solutions s'écrivent sous la forme $f_1(u, v) = A_1(u) + B_1(v)$, où A_1 est une primitive de $-A/2$.
Finalement, $f(x, y) = A_1(x + y) + B_1(3x + y)$, où A_1 et B_1 décrivent à $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

16.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 16.26

Polytechnique MP 2005 K

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots, \operatorname{tr} M^n)$.

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(M)(H)$ pour M et H dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

3) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On démontre par récurrence sur k que
$$(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$$
(voir un cas particulier à l'exercice 16.3). On utilise ensuite la linéarité de la trace et la propriété bien connue $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour en déduire que l'application $f_k : M \mapsto \operatorname{tr}(M^k)$ est différentiable et que $df_k(M)(H) = k \operatorname{tr}(HM^{k-1})$. Il en résulte que f est différentiable, et que pour tout $(M, H) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, on a $df(M)(H) = (k \operatorname{tr}(HM^{k-1}))_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

2) Soit p le degré du polynôme minimal de M (noté μ_M). On sait par le théorème de Cayley-Hamilton que $p \leqslant n$ et que $\forall k \geqslant p,\ M^k \in \operatorname{Vect}(I, \dots, M^{p-1})$. On pose $\varphi_k(H) = k \operatorname{tr}(HM^{k-1})$. Les formes linéaires $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n$ sont donc combinaisons linéaires de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Supposons une relation de liaison de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i = 0$. On a alors $\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(H(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i M^{i-1})) = 0$. En choisissant successivement pour H les matrices élémentaires E_{ij}, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i M^{i-1} = 0$ donc tous les α_i sont nuls, car le polynôme minimal de M est de degré p. On sait d'après le cours sur la dualité que si les formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont indépendantes, alors l'application $H \mapsto (\varphi_1(H), \dots, \varphi_p(H))$ est surjective, donc de rang p, donc son noyau est de dimension $n^2 - p$. Or son noyau est le même que celui de $df(M)$, donc $df(M)$ est également de rang p.

3) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, c'est-à-dire est de degré n. D'après 2), $\mathscr{A}$ est l'ensemble des matrices M tels que $df(M)$ soit de rang n. On se place dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^n$, et on note $J(M)$ la matrice jacobienne de f en M, c'est-à-dire la matrice de $df(M)$ dans ces bases. La matrice M appartient à $\mathscr{A}$ si et seulement si on peut extraire de $J(M)$ une matrice carrée d'ordre n qui soit inversible, c'est-à-dire s'il existe $I \subset [\![1\,, n^2]\!]$ de cardinal n tel que $\det J(M)_I \neq 0$

(on note $J(M)_I$ la matrice extraite de $J(M)$ en ne gardant que les lignes appartenant à I). Par continuité de df et du déterminant, si $\det J(M)_I \neq 0$, alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de M tel que $\forall N \in \mathscr{V}$, $\det J(N)_I \neq 0$, donc $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$. Il en résulte que $\mathscr{A}$ est voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.27

Mines-Ponts MP 2005

Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et f une fonction continue sur D à valeurs dans $\mathbb{C}$. On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

1) On suppose que f est somme d'une série entière. Montrer que si $z \in D$, alors $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = 0$.

2) K On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\forall z \in D$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = 0$.

Montrer que f est somme d'une série entière.

1) Il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in D,\ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)^n$.

On rappelle que les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. On pose $z_0' = |x_0| + iy_0$, qui appartient à D, et $\delta = \dfrac{1}{2}(1 - |z_0'|) > 0$. Soit $f_n(x) = a_n(x + iy_0)^n$. f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = n a_n (x + iy_0)^{n-1}$.

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f_n'(x)| = n|a_n|(x^2 + y_0^2)^{\frac{n-1}{2}} \leqslant n|a_n||z_0' + \delta|^n$. Comme $|z_0' + \delta| < 1$, cette série converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Comme $\sum f_n$ converge, on en déduit par théorème sur les séries de fonctions l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en z_0 et l'égalité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

On pose à présent $g_n(y) = a_n(x_0 + iy)^n$, on a $g_n'(y) = ina_n(x + iy_0)^{n-1}$, et on démontre comme précédemment que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} ina_n z_0^{n-1}, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0) = 0 \text{ pour tout } z_0 \in D.$$

2) On pose, pour $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Pour $r \in [0, 1[$, la fonction $\theta \mapsto g(1, \theta)$ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$, donc le théorème de convergence normale s'applique : on pose, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-in\theta}\, d\theta$, on sait que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(r)|$ converge,

et pour $(r,\theta) \in [0,1[\times\mathbb{R}$, on a $g(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(r)e^{in\theta}$. On part de $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on calcule les dérivées partielles par rapport à r et θ. Les dérivées partielles de f sont évaluées en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et celles de g en (r,θ).

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} .$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} .$$

La relation $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ équivaut donc à $r\frac{\partial g}{\partial r} + i\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Par théorème sur les intégrales à paramètre (le domaine d'intégration étant un segment), c_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et $c_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$. On en déduit que $rc_n'(r) = -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = -\frac{i}{2\pi}(in)\int_0^{2\pi} g(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$ en intégrant par parties. On en déduit $rc_n'(r) = nc_n(r)$. En intégrant l'équation différentielle, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $c_n(r) = a_n r^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $r < 1$. La fonction c_n est continue en 0, donc $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Finalement, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D$.

Exercice 16.28

Mines-Ponts MP 2005, fonctions harmoniques K

Soient $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une fonction harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul), $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et h la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+,\ h(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,d\theta .$$

1) Montrer que h est constante.
Indication de la rédaction : poser $\psi(r,\theta) = \phi(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ et montrer que $\Delta\phi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2}$.

2) Montrer, si $R > 0$, que $\phi(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{D_R'} \phi(u,v)\,du\,dv$, où D_R' est le disque fermé (pour la distance euclidienne) de centre (x_0,y_0) et de rayon $R > 0$.

1) En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient (1) $r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ et (2) $\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}=y\dfrac{\partial\phi}{\partial x}-x\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$. En remplaçant ψ par $r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ dans (1), on obtient :

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})=x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y})+y\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}),$$

d'où

$$r\frac{\partial\psi}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}.$$

En remplaçant ψ par $\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$ dans (2), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}&=y\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial y})-x\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial y})\\&=y^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-x\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\frac{\partial\phi}{\partial y}.\end{aligned}$$

En ajoutant les deux relations obtenues, on obtient $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\Delta\phi$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur un segment entraîne que h est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a pour tout $r>0$, $h''(r)+\dfrac{1}{r}h'(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r})\,d\theta$. A l'aide du calcul précédent,

$$h''(r)+\frac{1}{r}h'(r)=-\frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}d\theta=-\frac{1}{2\pi r^2}(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r,2\pi)-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r,0))=0.$$

On en déduit qu'il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que $\forall r>0,\ h'(r)=\dfrac{A}{r}$. La continuité de h en 0 entraine que $A=0$, donc $h'=0$ et h est constante, égale à $h(0)=\phi(x_0,y_0)$.

2) On calcule l'intégrale double en passant en polaires :

$$\begin{aligned}\iint_{D'_R}\phi(u,v)\,du\,dv&=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\phi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\,d\theta\right)r\,dr\\&=\int_0^R 2\pi r h(r)\,dr=2\pi h(0)\int_0^R r\,dr=\pi R^2\phi(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Exercice 16.29

Centrale MP 2007 K

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $\alpha>0$ vérifiant $\forall(x,h)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ (df(x)(h)\,|\,h)\geqslant\alpha\|h\|^2$.

1) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ (f(b) - f(a) \mid b - a) \geqslant \alpha \|b - a\|^2$.

2) Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$.

3) Montrer que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
Indication de la rédaction : montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

1) On pose $\varphi(t) = (f(a + t(b - a)) \mid b - a)$ pour $t \in [0, 1]$. La fonction φ est dérivable, et $\varphi'(t) = (df(a + t(b - a))(b - a) \mid b - a)$, donc $\varphi'(t) \geqslant \alpha \|b - a\|^2$. En intégrant de 0 à 1, on obtient $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) \geqslant \alpha \|b - a\|^2$.

2) La fonction f est injective d'après la question 1) et $df(x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ injectif d'après l'énoncé, donc bijectif. Par la caractérisation du cours, $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

3) Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge, soit y sa limite. D'après la question 2), et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \|y_k - y_j\|\,\|x_k - x_j\| \geqslant (f(x_k) - f(x_j) \mid x_k - x_j) \geqslant \alpha \|x_k - x_j\|^2$, d'où $\|y_k - y_j\| \geqslant \alpha \|x_k - x_j\|$. La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ également, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui est complet, donc elle converge, vers une limite notée x. La fonction f étant continue, on en déduit que la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, d'où $y = f(x)$ par unicité de la limite. Ceci prouve que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé. On a vu qu'il était ouvert dans la question précédente, or $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs, donc $f(\mathbb{R}^n)$, qui n'est pas vide, est égal à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16.30

Polytechnique MP 2005 K

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $df(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est orthogonale.
Indication de la rédaction : utiliser l'exercice précédent.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, donc $\forall (x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ df(x)(h) = \|h\|^2$. On peut alors utiliser l'exercice précédent avec $\alpha = 1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n,\ \|x - y\|^2 \leqslant (f(x) - f(y) \mid x - y) \leqslant \|f(x) - f(y)\|\,\|x - y\|$.
Par conséquent, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$.
D'après l'exercice précédent, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
• On sait également que $df^{-1}(x) = (df(f^{-1}(x)))^{-1}$, donc $df^{-1}(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. L'application f^{-1} vérifie alors les mêmes hypothèses que f, donc on obtient que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n,\ \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \geqslant \|u - v\|$. On prend alors $u = f(x)$ et $v = f(y)$, ce qui donne finalement $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

• Étant donné que $f(0) = 0$, on reconnaît la caractérisation d'un endomorphisme orthogonal. Rappelons en brièvement la preuve :
En prenant $y = 0$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$, puis en élevant au carré, et en développant, on obtient $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$. La linéarité de f se démontre en considérant le carré scalaire
$A = \big(f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y) \mid f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y)\big)$. On le développe et on obtient que $A = 0$ en utilisant le fait que f conserve le produit scalaire.

Exercice 16.31

Mines, Polytechnique, ENS K

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$.
Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Contrairement aux deux exercices précédents où on est passé de df à f par intégration, on passe cette fois de f à sa différentielle.

• Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On a par hypothèse $\forall t > 0,\ \left\|\dfrac{f(x + th) - f(x)}{t}\right\| \geqslant \|h\|$. En faisant tendre t vers 0, on obtient $\|df(x)(h)\| \geqslant \|h\|$. Par conséquent, $df(x)$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$, donc un isomorphisme.
• L'énoncé implique que f est injective, donc en appliquant la caractérisation des difféomorphismes, on peut affirmer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.
• En procédant exactement comme dans l'exercice 16.29, on démontre que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé, d'où il résulte, par connexité par arcs de $\mathbb{R}^n$, que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 16.32

Centrale MP 2006 K

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, croissante, telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On pose $F(x) = f(\|x\|)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer sa différentielle.

2) Montrer que, pour tous $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(dF(x)(h)|h) \geqslant f(\|x\|)\|h\|^2$.

3) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

1) L'application $\phi : x \mapsto (x \mid x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a $d\phi(x)(h) = 2(x \mid h)$. La racine carrée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée égale à $\dfrac{1}{2\sqrt{\ }}$. Par théorème de composition, la norme euclidienne $N = \|\,.\,\| = \sqrt{\phi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $E \setminus \{0\}$

et on a $dN(x)(h) = \dfrac{d\phi(x)(h)}{2\sqrt{\phi(x)}} = \dfrac{(x \mid h)}{\|x\|}$.
On pose $\psi = f \circ N$. On sait que $df(t)(h) = hf'(t)$. Par théorème de composition, ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $E \setminus \{0\}$ et $d\psi(x) = df(N(x)) \circ dN(x)$, d'où $d\psi(x)(h) = df(\|x\|)\left(\dfrac{(x \mid h)}{\|x\|}\right) = \dfrac{(x \mid h)}{\|x\|} f'(\|x\|)$. Enfin, $F = \psi\,\mathrm{Id}$, donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $E \backslash \{0\}$ et $dF(x)(h) = \psi(x)h + d\psi(x)x = f(\|x\|)h + \dfrac{(x \mid h)}{\|x\|} f'(\|x\|)x$.
Il reste l'étude en 0 :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ F(h) - h = (f(\|h\|) - 1)h = o(\|h\|)h = o(h)$$

car $f'(0) = 0$, donc F est différentiable en 0 et $dF(0) = \mathrm{Id}$.
Enfin, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\|dF(x)(h) - h\| \leqslant |f(\|x\|) - 1|\,\|h\| + f'(\|x\|)\|x\|\,\|h\|$, d'où $|||dF(x) - dF(0)||| \leqslant |f(\|x\|) - 1| + f'(\|x\|)\|x\|$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0, donc dF est continue en 0 et F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

2) Pour $x \neq 0$, $(dF(x)(h) \mid h) = f(\|x\|)\|h\|^2 + \dfrac{(x \mid h)^2}{\|x\|} f'(\|x\|) \geqslant f(\|x\|)\|h\|^2$ car f' est positive. L'inégalité est encore vraie pour $x = 0$.

3) • Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $dF(x)$ est, d'après la question 2), un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$, donc c'est un isomorphisme.
• La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc on a $F(x) = 0 \iff x = 0$.
• Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$ tel que $F(x) = F(y)$. On a alors $f(\|x\|)x = f(\|y\|)y$. Cela entraîne que les vecteurs x et y sont colinéaires, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$, avec $\alpha > 0$ puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. En simplifiant par x, on obtient $f(\|x\|) = \alpha f(\alpha\|x\|)$.
– Si $\alpha > 1$, alors $\alpha f(\alpha\|x\|) \geqslant \alpha f(\|x\|) > f(\|x\|)$, ce qui est absurde.
– Si $\alpha < 1$, alors $\alpha f(\alpha\|x\|) \leqslant \alpha f(\|x\|) < f(\|x\|)$, ce qui est absurde.
Par conséquent, $\alpha = 1$ et $x = y$, donc F est injective.
Finalement F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.
• Il reste à montrer que $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On cherche $x = ty$ avec $t > 0$ tel que $F(x) = y$. Ceci équivaut à $tf(t\|y\|) = 1$. On pose $g(t) = tf(t\|y\|)$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante. On a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. Il existe donc un réel unique $\alpha > 0$ tel que $g(t) = 1$, c'est-à-dire $F(x) = y$. On en déduit que F est surjective. Il en résulte que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Intégrales doubles et curvilignes

17

17.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

17.1.1 Intégrales doubles

Ce qu'il faut savoir

Intégrabilité : soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$, on a l'égalité
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$
La valeur commune est notée $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$.
- Soit f une fonction continue et **positive** sur $I \times I'$.
  - ○ On dit que f est intégrable sur $I \times I'$ s'il existe une constante M telle que pour tout segment $J \subset I$ et tout segment $J' \subset I'$, $\displaystyle\iint_{J\times J'} f \leqslant M$. On dit alors que f est intégrable sur $I \times I'$ et on note $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f$.
  - ○ On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I'. On note $g : x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x,y)\,dy$. Si g est continue par morceaux et intégrable sur I alors f est intégrable sur $I \times I'$ et $\displaystyle\int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_{I\times I'} f$. Le résultat est identique en permutant les variables.
- Soit f une fonction continue à valeurs réelles, on dit que f est intégrable sur $I \times I'$ si les deux fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ le sont. Dans ce cas, on définit
$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} f^+ - \iint_{I\times I'} f^-.$$

- Soit f une fonction continue à valeurs complexes, on dit que f est intégrable sur $I \times I'$ si les deux fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, on définit
$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} \mathrm{Re}(f) + i \iint_{I\times I'} \mathrm{Im}(f).$$

Formule de Fubini : Soit f définie sur $I \times I'$ à valeurs réelles ou complexes, continue et intégrable sur $I \times I'$. Si, pour tout $x \in I$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I', et si la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x,y)\,dy$ est continue par morceaux et intégrable sur I alors $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I g$. Si, de plus, pour tout $y \in I'$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I, et si la fonction $h : y \mapsto \displaystyle\int_I f(x,y)\,dx$ est continue par morceaux et intégrable sur I' alors $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I g = \int_{I'} h$.

Intégrale sur une partie simple :

- On dit que $\mathscr{D}$ est un domaine élémentaire du plan s'il peut se définir sous l'une des formes suivantes :
  ◦ $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ où $a < b$ et φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $\varphi_1 < \varphi_2$ sur $]a,b[$
  ◦ $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ où $c < d$ et ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ avec $\psi_1 < \psi_2$ sur $]c,d[$.
  Soit f une fonction continue sur $\mathscr{D}$ à valeurs réelles ou complexes, on définit $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,dy \right) dx$ où $\widehat{f}$ est obtenue en prolongeant f par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{D}$.
- On étend cette définition au cas où $\mathscr{D}$ est une réunion de telles parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, on parle alors de partie simple.

Exercice 17.1

Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy(x+y)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[^2$ et déterminer $\displaystyle\iint_{[1,+\infty[^2} f$.

La fonction f est à valeurs positives. Soit $x \geqslant 1$. La fonction $g : y \mapsto f(x,y)$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$, car $g(y) \underset{y\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. Pour tout $y \geqslant 1$, on a
$$\frac{1}{xy(x+y)} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right).$$
Si $A > 0$, on a alors
$$\int_1^A f(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2}\left[\ln\frac{y}{x+y}\right]_1^A \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$). Finalement f est intégrable sur $[1,+\infty[^2$ et, en intégrant par parties, on obtient :

$$\iint_{[1,+\infty[^2} f = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx = \ln 2 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = 2\ln 2.$$

Exercice 17.2

Centrale MP 2005

1) Soit $a \in]0,1[$, calculer $I_a = \displaystyle\iint_{D_a} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$ où $D = [a,1]\times[0,1]$.
   Déterminer la limite de I_a lorsque a tend vers 0.

2) La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ est-elle intégrable sur $D =]0,1]\times[0,1]$?

1) En écrivant $x - y = 2x - (x+y)$, on calcule I_a

$$\begin{aligned} I_a &= \int_a^1 \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\right)dx = \int_a^1 \left[\frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right]_0^1 dx \\ &= \int_a^1 \left(\frac{-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_a^1 \frac{dx}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $I_a = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+a}$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0} I_a = \frac{1}{2}$.

2) On va s'intéresser à l'intégrabilité de f^+. La fonction f est positive lorsque $x \geqslant y$, négative sinon. Si $J = [a,b]$ est un segment de $I =]0,1]$ et $J' = [c,d]$ un segment de $I' = [0,1]$ alors $J \times J' \subset [a,1]\times[0,1]$. Il suffit donc d'étudier les intégrales sur les compacts $[a,1]\times[0,1]$. Pour $a \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{[a,1]\times[0,1]} f^+ &= \int_{x=a}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=x} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx = \int_a^1 \left[\frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right]_0^x dx \\ &= \int_a^1 \left(\frac{-x}{4x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_a^1 \frac{1}{4x}\,dx = -\frac{1}{4}\ln a \end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\iint_{[a,1]\times[0,1]} f^+$ n'est pas bornée lorsque a décrit $]0,1[$ et f n'est pas intégrable sur $]0,1]\times[0,1]$.

Remarque
Le premier résultat est trompeur. Les termes négatifs dans l'intégrale compensent en partie les termes positifs, si bien qu'on se retrouve avec une intégrale I_a qui admet une limite lorsque a tend vers 0.

Exercice 17.3

Soit f une application continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$, à valeurs positives. On note, pour $R > 0$, $\mathscr{D}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Montrer que f est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ si et seulement si $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\,dx\,dy$ admet une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$. Dans ce cas, montrer que $\displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f = \lim_{R\to+\infty} \iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\,dx\,dy$.

Soit $a > 0$. On a de façon immédiate

$$\sup_{a\geqslant 0} \iint_{[0,a]^2} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f(x, y)\,dx\,dy$$

où J et J' décrivent tous les segments de $\mathbb{R}^+$. De plus, si J et J' sont deux segments de $\mathbb{R}^+$, il existe $a > 0$ tel que $J \times J' \subset [0, a]^2$. On a donc

$$\sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \sup_{a\geqslant 0} \iint_{[0,a]^2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Puisque, pour tout $a > 0$, on a $\mathscr{D}_a \subset [0, a]^2 \subset \mathscr{D}_{a\sqrt{2}}$, on obtient, par le même raisonnement que précédemment

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \iint_{[0,a]^2} f(x, y)\,dx\,dy = \sup_{R\in\mathbb{R}_+^*} \iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ce qu'il faut savoir

Changement de variables

- Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Si Δ est un compact simple de U dont l'image D par φ est encore un compact simple et si f est continue sur D alors

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f \circ \varphi(u, v)\,|j_\phi(u, v)|\;du\,dv.$$

Remarque

Par commodité, on note $j_\varphi(u, v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ le jacobien de φ, ce qui permet d'écrire la dernière intégrale sous la forme $\displaystyle\iint_\Delta f \circ \varphi(u, v) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv.$

- **En pratique :** en général, le domaine est défini par des conditions sur les variables x et y. Après avoir justifié que $\varphi : (u, v) \mapsto (x = x(u, v), y = y(u, v))$

est un difféomorphisme, on traduit les conditions sur x et y en conditions sur u et v, ce qui donne le nouveau domaine d'intégration. On peut alors effectuer le changement de variables.

- **Cas particulier important : passage en coordonnées polaires**
  Soit $\varphi : (r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$, on obtient la formule

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta.$$

Remarque

– La fonction φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ vers $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$, qui n'est normalement pas utilisable lorsque le domaine D contient 0 ou rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^- \times \{0\}$, on admet que par un passage à la limite, on peut effectuer ce changement sur un domaine inclus dans $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$.
– On autorise également des changements de variables sur certains domaines non compacts. Par exemple le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ devient, en coordonnées polaires, le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi/2]$ et l'exercice 17.3, page 418 permet de justifier le changement.

Exercice 17.4

CCP MP 2006

Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$ où D est le disque unité du plan.

Bien évidemment, on calcule cette intégrale à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{1 + r^2}\,dr \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{2} \ln(1 + r^2) \right]_0^1 = \pi \ln 2.$$

Exercice 17.5

CCP MP 2006

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1) Montrer que $f : (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$.

2) En déduire la valeur de I (on utilisera un changement en coordonnées polaires).

1) La fonction f est à valeurs positives. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $y \mapsto e^{-x^2}e^{-y^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = Ie^{-x^2}$.
La fonction $x \mapsto Ie^{-x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ et $\displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f = \int_0^{+\infty} Ie^{-x^2}\,dx = I^2$.

2) Par un changement en coordonnées polaires, on obtient

$$I = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}.$$

L'intégrale I étant positive, on a $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

17.1.2 Intégrales curvilignes

Ce qu'il faut savoir

- Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma = ([a,b], f)$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U, avec, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = (x(t), y(t))$. On définit l'intégrale curviligne de ω sur l'arc orienté Γ par
$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\,dt.$$
- Si ω est une forme différentielle exacte sur U et si F est une primitive de ω, alors $\displaystyle\int_\Gamma \omega = F(f(b)) - F(f(a))$.
- ***Formule de Green-Riemann :*** soit D une partie fermée et bornée du plan délimitée par un arc de classe $\mathscr{C}^1$ sans point double. Soit $\omega = P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U contenant D. On appelle ∂D la frontière de D parcourue dans le sens direct. On a
$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Exercice 17.6

CCP MP 2007

Soit γ la courbe constituée des deux portions de courbes comprises entre les points d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de la parabole d'équation $y = x^2$, orientée dans le sens trigonométrique.

1) Calculer $\displaystyle\int_\gamma (y + xy)\,dx$.

2) En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de cette intégrale.

1) On note $O(0,0)$, $A(1,1)$ et $\omega = (y + xy)\,dx$. Soient

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma_2 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (1-t, 1-t) \end{cases}.$$

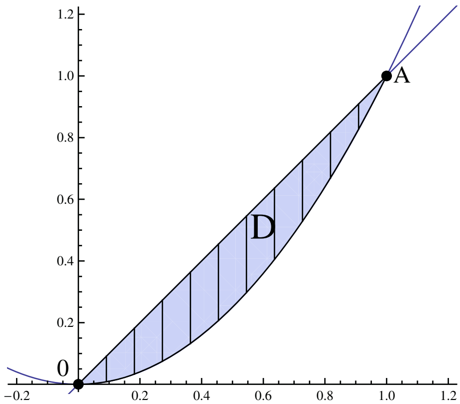
Le support de γ_1 est l'arc de parabole allant de O à A et celui de γ_2 le segment $[AO]$.

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 (t^2 + t^3)\,1\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 ((1-t) + (1-t)^2)(-1)\,dt = \left[\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{5}{6}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_\gamma \omega = \frac{7}{12} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{4}$.

2) On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\}$, le domaine borné délimité par γ.



Avec $P(x,y) = y + xy$ et $Q(x,y) = 0$, on obtient, en utilisant la formule de Green-Riemann

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x -(1+x)\,dy\right) dx \\ &= -\int_0^1 (1+x)(x - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^3 - x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 17.7

CCP MP 2007

Déterminer les cercles du plan le long desquels l'intégrale curviligne de $\omega = x^2 dy + y^2 dx$ est nulle.

On considère l'intégrale curviligne le long du cercle $\mathscr{C}$ de centre (a, b) et de rayon $R > 0$. Une paramétrisation est $f : t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. L'intégrale est égale à :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \left((a + R\cos t)^2(R\cos t) + (b + R\sin t)^2(-R\sin t)\right)\, dt \\ &= R\int_0^{2\pi} a^2\cos t - b^2\sin t + 2aR\cos^2 t - 2bR\sin^2 t \\ &\qquad\quad + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t)\, dt \\ &= 2\pi R^2(a - b),\end{aligned}$$

en utilisant $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt = 0$.
Donc l'intégrale est nulle si et seulement si le cercle est centré sur la droite d'équation $y = x$.

17.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 17.8

Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[^2$ et calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} \frac{dx\, dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$.

La fonction f est continue et positive sur $(\mathbb{R}^+)^2$. Comme dans l'exercice 17.3, page 418, on a

$$\sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f(x, y)\, dx\, dy = \sup_{R\geqslant 0} \iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

où J et J' décrivent tous les segments de $\mathbb{R}^+$ et $\mathscr{D}_R$ est le quart de disque défini par $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Par un changement en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}}\, dr\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-(a^2 + r^2)^{-1/2}\right]_0^R = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sup_{R\geqslant 0} \iint_{\mathscr{D}_R} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2a}$. La fonction f est donc intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ et on a $\displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2a}$.

Exercice 17.9

CCP MP 2007

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, 1 \leqslant xy \leqslant 2, 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4\}$.

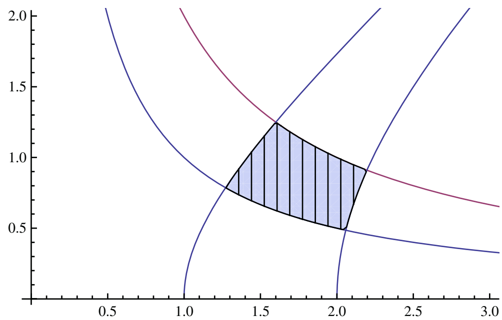
1) Dessiner le domaine D.

2) Montrer que $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[^2 & \to &]0, +\infty[^2 \\ (x, y) & \mapsto & (xy, x^2 - y^2) \end{array} \right.$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

3) Expliciter $\Phi(D) = \Delta$.

4) Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}\, dx\, dy$.

1)



2) L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On cherche $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $(u, v) = \Phi(x, y)$. On obtient le système $(u = xy, v = x^2 - y^2)$. Il est équivalent à $y = \dfrac{u}{x}$ et $v = x^2 - \dfrac{u^2}{x^2}$. La dernière équation devient $x^4 - vx^2 - u^2 = 0$. En posant $X = x^2$, X est une racine de $P = X^2 - vX - u^2$. Le discriminant de ce polynôme est $v^2 + 4u^2 > 0$. Le polynôme P admet deux racines réelles, de signe différent (car $-u^2 < 0$). On obtient une unique solution strictement positive pour X. On a alors $x = \sqrt{X}$ (car $x > 0$). On en déduit $y = u/x$. L'application Φ est donc bijective. Pour montrer que Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, il reste à montrer que la matrice jacobienne est inversible en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a $j_\Phi(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) < 0$.

3) Il est immédiat que $\Delta = \Phi(D) = [1, 2] \times [1, 4]$.

4) La seule difficulté est d'écrire le changement de variable dans le sens usuel. Il faut pour cela considérer le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme Φ^{-1}. On a alors, pour tout

$(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $|j_{\Phi^{-1}}(u, v)| = \dfrac{1}{|j_\Phi(x, y)|}$, qui vaut $\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$. Tout cela donne

$$\iint_D \frac{xy}{x^2-y^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_\Delta \frac{u}{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 u\,du\right)\left(\int_1^4 \frac{dv}{v}\right).$$

Finalement, l'intégrale cherchée vaut $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

Exercice 17.10

CCP MP 2006

1) Déterminer le domaine de définition de $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du$.

2) Déterminer le domaine de définition de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\,du$.

4) Écrire $\Gamma(x)\Gamma(y)$ sous forme d'une intégrale double.

5) À l'aide d'un changement en coordonnées polaires, montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

6) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $B(m, n)$ pour m et n entiers naturels.

1) Soient x et y deux réels et $f : u \mapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$, définie sur $]0, 1[$. La fonction f est continue sur $]0, 1[$. On a $f(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{x-1}$ et f est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $x > 0$. De même f est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $y > 0$. La fonction B est donc définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2) La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir exercice 12.9).

3) L'application $u \mapsto u^2$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut effectuer le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale, ce qui donne $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{2x-2}e^{-u^2}(2u)\,du = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\,du$.

4) Si x et y sont strictement positifs, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\left(\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\,du\right)\left(\int_0^{+\infty} v^{2y-1}e^{-v^2}\,dv\right)\\
&= 4\iint_D (u^{2x-1}v^{2y-1})e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv,
\end{aligned}$$

où D est le quart de plan $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

5) Un changement en coordonnées polaires donne (avec $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$),

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} r^{2x+2y-2}e^{-r^2}\, r\,dr\right)(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta\\ &= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-2}(\sin\theta)^{2y-2}(\sin\theta\cos\theta)\,d\theta\\ &= \Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{x-1}(\sin^2\theta)^{y-1}(2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

La relation $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ et le changement de variable $u = \cos^2\theta$ donnent $\Gamma(x)\Gamma(y) = -\Gamma(x+y)\displaystyle\int_1^0 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du$. On obtient finalement $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ si x et y sont strictement positifs (car Γ est à valeurs non nulles).

6) Cette relation est montrée dans l'exercice 12.9. Elle permet d'obtenir $\Gamma(n) = (n-1)!$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, si m et n sont deux entiers naturels non nuls, $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

Exercice 17.11

Centrale MP 2005

Paramétrer le cercle $\mathscr{C}$ d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& 1\\ x+y+z &=& 1\end{array}\right.$$

Calculer le long de $\mathscr{C}$ (on choisira l'orientation) l'intégrale de la forme différentielle :

$$\omega = (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz.$$

Le centre du cercle est le point A de coordonnées $(1/3, 1/3, 1/3)$. Par le théorème de Pythagore, le rayon est $R = \sqrt{1-OA^2} = \sqrt{2/3}$. On cherche une base orthonormée du plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$ dont un vecteur unitaire normal est $e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Un premier vecteur de ce plan est le vecteur $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, un second vecteur est $e_2 = e_3 \wedge e_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. On peut alors paramétrer le cercle par l'application $\varphi : t \mapsto A + (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2$, pour $t \in [0, 2\pi]$. On obtient :

$$\varphi(t) = \begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{3} + \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sin t}{\sqrt{6}} \\ y(t) &= \dfrac{1}{3} - \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sin t}{\sqrt{6}} \\ z(t) &= \dfrac{1}{3} - \dfrac{2\sin t}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

L'intégrale curviligne cherchée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \Big((3\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}})(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t}{\sqrt{6}}) \\ &\qquad + (-3\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}})(\frac{\sin t}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t}{\sqrt{6}}) + (2\frac{\cos t}{\sqrt{2}})(-2\frac{\cos t}{\sqrt{6}}) \Big)\, dt \\ &= \pi \left((-\frac{3}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}}) + (-\frac{3}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}}) + (-\frac{4}{\sqrt{12}}) \right) \\ &= -\frac{12\pi}{\sqrt{12}} = -\pi\sqrt{12}. \end{aligned}$$

17.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 17.12

Mines-Ponts MP 2005

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique, définie positive. Calculer

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^tXAX)\, dx\, dy,$$

où X désigne le vecteur de coordonnées (x, y).

La matrice A est symétrique, définie positive. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives. Si $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le vecteur tel que $X = PX'$, on a ${}^tXAX = {}^tX'DX' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. On considère alors l'application linéaire $\varphi : (x', y') \mapsto (x, y)$ telle que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. L'application φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $R \geqslant 0$, on note $\mathscr{D}_R$ le disque centré en 0 de rayon R. Puisque la matrice P est orthogonale, on a $\varphi(\mathscr{D}_R) = \mathscr{D}_R$ (conservation de la norme et bijectivité). On applique alors ce changement de variable pour obtenir (la valeur absolue du jacobien est 1),

$$\iint_{\mathscr{D}_R} \exp(-{}^tXAX)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}_R} e^{-\lambda_1 x'^2-\lambda_2 y'^2}\,dx'\,dy'.$$

Par un raisonnement semblable à celui de l'exercice 17.5, page 419, on obtient $I = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 t^2}\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 t^2}\,dt\right)$. Le changement de variable $u = \sqrt{\lambda_1}t$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}}$. Finalement

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$

Exercice 17.13

Centrale MP 2006 K

On note E l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Pour $f \in E$, on définit $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi yt}\,dt.$$

1) Montrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soient f et g dans E, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\,dt$.

3) Soit f dans E telle que $\hat{f}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}\,dt.$$

Indication : on pourra appliquer le résultat de la question précédente à $f_x : t \mapsto f(x+t)$ (x fixé) et $g : t \mapsto h(t/n)$ où $h(t) = e^{-\pi t^2}$. On admettra que $\hat{h} = h$.

1) Soit $h : (y,t) \mapsto f(t)e^{-2i\pi yt}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(y,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $|h(y,t)| = |f(t)|$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre donne la continuité de $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|\hat{f}(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. La fonction $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $\hat{f}g$ et $f\hat{g}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Elles sont intégrables sur $\mathbb{R}$ car chacune est le produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t)e^{-2i\pi tu}\,du\right)dt.$$

On applique alors la formule de Fubini pour permuter l'ordre d'intégration. La fonction $\theta : (u,t) \mapsto f(u)g(t)e^{-2i\pi tu}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ car $|\theta(u,t)| = |f(u)|\,|g(t)|$ et les deux fonctions f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \theta(u,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u,t)\,dt = f(u)\hat{g}(u)$. La fonction $f\hat{g}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On a le même résultat en échangeant les variables. La formule de Fubini correspond exactement à la question :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\hat{g}(u)\,du.$$

3) On applique le résultat précédent aux fonctions données. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_x(t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\hat{g}(t)\,dt.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\hat{f}_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u)e^{-2i\pi ut}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)e^{-2i\pi ut}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi(u-x)t}\,du = e^{2i\pi xt}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ut}\,du = e^{2i\pi xt}\hat{f}(t).
\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\hat{g}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\frac{u}{n})e^{-2i\pi ut}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)e^{-2i\pi v(nt)}\,(n\,dv) \qquad \text{avec } u = nv \\
&= n\hat{h}(nt) = nh(nt).
\end{aligned}$$

La formule de départ devient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}h(\frac{t}{n})\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)h(nt)\,n\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\frac{u}{n})h(u)\,du,$$

en effectuant le changement le changement de variable $u = nt$ dans la seconde intégrale. On fait alors tendre n vers $+\infty$ et on calcule les deux limites en utilisant le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\alpha_n : t \mapsto \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}h(\frac{t}{n})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n(t) = \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}h(0) = \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}$. La fonction $t \mapsto \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\alpha_n(t)| \leqslant |\hat{f}(t)|$, car $|h|$ est majorée par 1. La fonction $\hat{f}$ est, par hypothèse, intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}h(\frac{t}{n})\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}\,dt.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\beta_n : u \mapsto f_x(\frac{u}{n})h(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \beta_n(u) = f_x(0)h(u) = f(x)h(u)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|\beta_n(u)| \leqslant |f_x(u)|$. La fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\frac{u}{n})h(u)\,du = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,du = f(x)\hat{h}(0) = f(x)h(0) = f(x).$$

En égalant les limites, on obtient $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}\,dt$.

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • MARC REZZOUK • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

100% LICENCE

100% BTS/DUT

100% CONCOURS

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE MP

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

Ce livre d'exercices corrigés d'Analyse est un outil **d'apprentissage quotidien** destiné aux élèves de seconde année des classes préparatoires **MP**.

Les premiers chapitres (Suites numériques, Fonctions réelles d'une variable réelle, Intégration sur un segment) assurent la transition entre la première et la seconde année. Ils pourront servir de support aux **révisions** « **estivales** » précédant le début de la deuxième année.

Chaque chapitre (excepté les deux premiers) est constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de **l'essentiel du cours** suivi d'exercices d'**assimilation** ;
– des exercices d'**entraînement** dont l'objectif est d'amener le lecteur à la compréhension et à une bonne maîtrise des notions étudiées ;
– des exercices d'**approfondissement** destinés à mettre l'élève en situation de concours ; ils fourniront une **référence** et une excellente base de travail pendant les périodes de révision.

Les candidats aux concours du CAPES et de l'Agrégation pourront également trouver dans cet ouvrage une aide précieuse pour leur préparation.

El-Haj Laamri
Agrégé de Mathématiques
Maître de Conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en MP*

Gérard Eguether
Maître de Conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en PC

Marc Rezzouk
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en PC

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Loritz en PSI

Laurent Schwald
Agrégé en Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en BCPST

EdiScience

ISBN 978-2-10-053962-8

www.ediscience.net