

Résistance des matériaux

Théorie des poutres

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Bases de la théorie des poutres	C 2 010 - 2
1.1 Définitions et terminologie.....	— 2
1.2 Forces extérieures appliquées aux poutres.....	— 2
1.3 Première hypothèse fondamentale de la théorie des poutres.....	— 3
1.4 Deuxième hypothèse fondamentale de la théorie des poutres.....	— 5
1.5 Validité des hypothèses fondamentales.....	— 6
1.6 Problèmes posés par l'étude des poutres.....	— 6
2. Contraintes et déformation dues à l'effort normal et au moment fléchissant	— 6
2.1 Compression ou traction simples.....	— 6
2.2 Flexion pure.....	— 7
2.3 Flexion déviée.....	— 8
2.4 Flexion composée.....	— 9
2.5 Flexion des poutres à plan moyen à forte courbure.....	— 10
3. Contraintes et déformation dues à l'effort tranchant	— 12
3.1 Généralités.....	— 12
3.2 Théorie élémentaire (poutres à plan moyen).....	— 14
3.3 Poutres dont la section est un profil mince ouvert.....	— 16
3.4 Étude de la flexion simple déduite de la théorie de l'élasticité.....	— 18
3.5 Poutres à plan moyen de hauteur rapidement variable.....	— 20
4. Contraintes et déformation dues au couple de torsion	— 20
4.1 Théorie élémentaire. Poutre de section circulaire.....	— 20
4.2 Torsion pure. Solution de Saint-Venant.....	— 21
4.3 Analogie de la membrane. Applications.....	— 22
4.4 Torsion gênée des poutres dont la section est un profil mince ouvert...	— 24
5. Formules de Bresse	— 27
5.1 Poutre gauche.....	— 27
5.2 Poutre à plan moyen.....	— 27
5.3 Poutre droite à plan moyen.....	— 28
5.4 Énergie de déformation d'une poutre.....	— 29
Références bibliographiques	— 30

Dans cet article, nous exposerons deux hypothèses permettant d'obtenir des méthodes approximatives simples de calcul des structures composées de poutres. Nous traiterons de leurs conséquences dans le cas où le comportement est élastique.

1. Bases de la théorie des poutres

1.1 Définitions et terminologie

Une *poutre* est un solide engendré par une aire plane Σ dont le centre de gravité G décrit une courbe G_0G_1 , le plan de Σ restant normal à la courbe G_0G_1 .

L'aire Σ est appelée *section droite*, ou simplement *section*, de la poutre. La courbe G_0G_1 est appelée *fibre moyenne* de la poutre. Le volume engendré par un élément $d\Sigma$ de l'aire Σ porte le nom de *fibre*; cette définition n'a, bien entendu, aucun rapport avec la structure de la matière.

Une *poutre gauche* est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche; une *poutre plane* est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane; une *poutre droite* est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite.

Une *poutre à plan moyen* est une poutre plane dont le plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie, appelé plan moyen, de la poutre; en particulier, une poutre droite peut être à plan moyen.

Dans ce qui précède, nous avons supposé l'aire Σ constante; la poutre est alors dite *de section constante*. Mais très souvent, en vue de proportionner les dimensions de la poutre aux efforts qu'elle doit supporter, l'aire Σ varie lorsque son centre de gravité décrit la fibre moyenne; la poutre est alors dite *de section variable*.

On appelle *prisme élémentaire* ou *élément de poutre* le volume de la poutre compris entre deux sections droites voisines.

Pour définir une poutre dans le cas le plus général, il faut connaître :

- la *fibre moyenne* d'abscisse curviligne s ;
- la *section* Σ d'axes centraux d'inertie Gy' et Gz' ; Σ peut dépendre de s ;
- l'*orientation* de la section Σ autour de la tangente Gx' à la fibre moyenne; cette orientation peut être définie par l'angle de la normale principale à la fibre moyenne et de l'axe central d'inertie Gy' lié à la section Σ , ou encore par la matrice orthogonale qui permet de passer du repère fixe orthonormé $Oxyz$ au repère mobile orthonormé $Gx'y'z'$.

1.2 Forces extérieures appliquées aux poutres

1.2.1 Généralités

Les forces extérieures peuvent être *concentrées* ou *réparties* de façon continue. Il faut entendre par force concentrée une force répartie sur une très petite surface.

Un **exemple** de forces concentrées est donné par l'action exercée sur la poutre par les roues d'un véhicule.

Nous supposons que *les forces extérieures sont appliquées à la fibre moyenne de la poutre*. Une force appliquée en un point d'une section Σ de centre de gravité G peut, en vertu de la première hypothèse fondamentale (§ 1.3), être remplacée par une force équipollente appliquée en G et par un couple égal au moment de la force par rapport au point G .

1.2.2 Forces données et réactions d'appui

Les forces données, ou *charges*, comprennent :

- des forces et éventuellement des couples concentrés;
- des forces et éventuellement des couples répartis.

Une charge répartie est définie par la *densité de charge* $\vec{f}(s)$; un élément de poutre de longueur ds est soumis à la force $\vec{f}(s) ds$.

Parmi les charges, on peut distinguer celles qui sont appliquées de façon permanente (poids propre, par exemple) et celles qui sont appliquées temporairement (poids d'un véhicule, par exemple); les premières constituent la *charge permanente* et les secondes les *surcharges*.

Les *réactions d'appui* \vec{R} , qui résultent des liaisons externes, sont en général des forces concentrées. En nous bornant aux poutres à plan moyen chargées dans leur plan, on distingue, parmi les différents types de liaisons imposées aux poutres, les suivants (figure 1) :

— l'**appui simple**, constitué, par exemple, par un rouleau cylindrique, donne lieu à une réaction de direction imposée passant par le point d'appui; cette réaction est définie par une seule composante;

— l'**articulation**, constituée, pour les poutres métalliques, par une rotule comprise entre deux balanciers en acier moulé et, pour les poutres en béton, par une section fortement rétrécie (*articulation Freyssinet*), donne lieu à une réaction dont on ne connaît pas la direction, mais qui passe par le centre de la rotule ou par le centre de la section rétrécie; cette réaction est définie par ses deux composantes suivant deux directions non parallèles du plan moyen;

— l'**encastrement** a pour objet d'assurer l'invariabilité de la section d'extrémité d'une poutre; la réaction d'appui comprend une force \vec{R} passant par le centre de gravité G de la section d'encastrement et contenue dans le plan moyen, et un couple $\vec{\Gamma}$ normal au plan moyen; la réaction d'appui est donc définie par trois composantes : les deux projections de \vec{R} sur deux axes situés dans le plan moyen et la valeur algébrique de $\vec{\Gamma}$ sur l'axe normal au plan moyen.

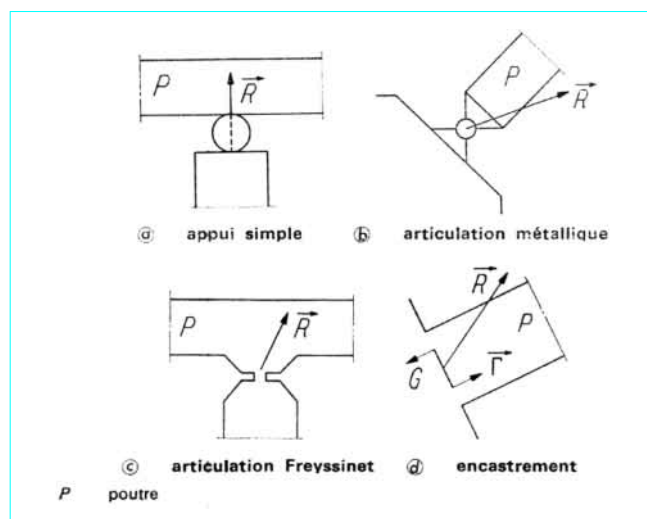


Figure 1 – Liaisons imposées aux poutres

1.2.3 Relations entre les forces données et les réactions d'appui

Toutes les forces appliquées à une poutre doivent, en vertu des lois de la statique, former un système de forces en équilibre. Nous supposons en général, pour écrire les équations d'équilibre de la statique, que *la déformation de la poutre peut être négligée*, autrement dit que la ligne d'action d'une force n'est pas déplacée par la déformation de la poutre. C'est là une des hypothèses de la théorie de l'élasticité linéaire (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*).

Il en résulte que, pour assurer l'équilibre d'une poutre gauche soumise à des forces quelconques, il est nécessaire de disposer d'au moins six composantes de réactions d'appui. Ce nombre se réduit à trois pour une poutre à plan moyen chargée dans son plan, et à deux pour une poutre droite soumise à des forces parallèles. Il peut se faire que le nombre k de composantes des réactions d'appui soit plus grand pour une structure composée de poutres où interviennent des réactions intérieures (par exemple, arc à trois articulations). Le nombre minimal k est égal au nombre d'équations d'équilibre indépendantes données par les lois de la statique.

Si le nombre r des composantes des réactions d'appui est égal à k , toutes les réactions d'appui sont déterminées par les lois de la statique ; la poutre, ou la structure composée de poutres, est dite *isostatique*.

Si r est plus grand que k , la poutre, ou la structure composée de poutres, est dite *hyperstatique* d'ordre $r - k$.

1.3 Première hypothèse fondamentale de la théorie des poutres

1.3.1 Principe de Saint-Venant et ses conséquences

Le **principe de Saint-Venant** (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) s'énonce : *la contrainte en un point éloigné des points d'application d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces*.

Considérons une section Σ de centre de gravité G , et soit Gx' la tangente à la fibre moyenne, Gy' et Gz' les axes centraux d'inertie de Σ . La section Σ sépare la poutre en deux parties, l'une (A) à gauche de Σ et l'autre (B) à droite de Σ (figure 2). La partie (B) est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures exercées par la partie (A) sur la section Σ ; ces forces intérieures ont pour densité en un point de Σ le vecteur contrainte qui s'exerce en ce point sur la section Σ . Nous obtenons donc le **principe d'équivalence** : *le système des contraintes qui s'exercent sur Σ considérée comme appartenant à la partie de droite (B) est équivalent au système S_A des forces extérieures appliquées à la partie de gauche (A)*.

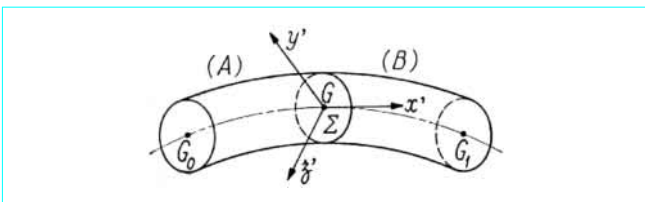


Figure 2 – Contraintes exercées sur une section de poutre

Le principe de Saint-Venant permet de supposer que *les contraintes qui s'exercent sur la section Σ ne dépendent que de la résultante générale \vec{R} et du moment résultant \vec{M} en G des forces appliquées à gauche de la section Σ* .

La résultante générale \vec{R} et le moment résultant \vec{M} définissent le *système des forces extérieures* relatif à la section Σ , ou encore la *contrainte généralisée* de la section Σ . Notons que, si \vec{R} désigne la résultante générale et \vec{M}' le moment résultant en G des forces appliquées à droite de la section Σ , nous avons :

$$\vec{R} + \vec{R}' = 0, \quad \vec{M} + \vec{M}' = 0$$

Cette remarque permet souvent un calcul plus rapide du système des forces extérieures relatif à la section Σ .

On peut décomposer \vec{R} en deux forces, l'une \vec{N} normale à la section Σ et l'autre \vec{T} contenue dans le plan de Σ ; \vec{N} est l'*effort normal* et \vec{T} l'*effort tranchant* relatifs à la section Σ ; nous désignerons par N , $T_{y'}$ et $T_{z'}$ les projections de \vec{R} sur les axes $Gx'y'z'$.

De même, on peut décomposer \vec{M} en deux couples, l'un \vec{C} normal à la section Σ et l'autre \vec{M} contenu dans le plan de Σ ; \vec{C} est le *couple de torsion* et \vec{M} le *moment fléchissant* relatifs à la section Σ ; nous désignerons par C , $M_{y'}$ et $M_{z'}$ les projections de \vec{M} sur les axes $Gx'y'z'$.

En Résistance des matériaux, il est d'usage courant de *compter positivement les contraintes de compression* ; en un point $m(y', z')$ de la section Σ , les composantes du vecteur contrainte suivant les axes $Gx'y'z'$ sont σ_1 , τ_3 et τ_2 ; le **principe d'équivalence** se traduit par les relations :

$$\left. \begin{aligned} N &= \iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma, & C &= \iint_{\Sigma} (y' \tau_2 - z' \tau_3) d\Sigma \\ T_{y'} &= \iint_{\Sigma} \tau_3 d\Sigma, & M_{y'} &= \iint_{\Sigma} \sigma_1 z' d\Sigma \\ T_{z'} &= \iint_{\Sigma} \tau_2 d\Sigma, & M_{z'} &= - \iint_{\Sigma} \sigma_1 y' d\Sigma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Quant aux composantes σ_2 , σ_3 et τ_1 du tenseur contrainte, on les considère en général comme négligeables ; cela revient à supposer que, sur tout élément plan parallèle à la fibre moyenne, ne s'exerce qu'une contrainte de cisaillement parallèle à la fibre moyenne.

Supposons la fibre moyenne, définie pour $0 \leq s \leq L$, soumise à des forces \vec{P}_i et à des couples $\vec{\Gamma}_i$ concentrés appliqués aux points G_i , à une densité de force $\vec{p}(s)$ et à une densité de couple $\vec{\gamma}(s)$; la résultante générale \vec{R} et le moment résultant \vec{M} relatifs à la section Σ définie par l'abscisse curviligne s de son centre de gravité G ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_g \vec{P}_i + \int_0^s \vec{p}(t) dt \\ \vec{M} &= \sum_g (\vec{\Gamma}_i + \vec{P}_i \wedge \vec{G}_i \vec{G}) + \int_0^s [\vec{\gamma}(t) + \vec{p}(t) \wedge \vec{g} \vec{G}] dt \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

\sum_g désignant une sommation relative aux points G_i situés à gauche de G , et g le point courant de la fibre moyenne d'abscisse curviligne t .

1.3.2 Cas particulier des poutres à plan moyen chargées dans leur plan

Dans ce cas (figure 3), les vecteurs unités des axes $Gx'y'z'$ sont le vecteur \vec{i} tangent à la fibre moyenne orientée, le vecteur \vec{j} du plan moyen, déduit de \vec{i} par une rotation de centre G et d'angle $+\pi/2$, et le vecteur $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ normal au plan moyen. Les forces et densité de force appliquées à la poutre sont contenues dans le plan moyen ; les couples et densité de couple appliqués à la poutre sont normaux au plan moyen. Donc $\vec{\mathcal{R}}$ est un vecteur du plan moyen et $\vec{\mathcal{M}}$ est un vecteur normal au plan moyen ; nous poserons :

$$\vec{\mathcal{R}} = N\vec{i} + T\vec{j} \quad , \quad \vec{\mathcal{M}} = -M\vec{k} \quad (3)$$

Le système des forces extérieures relatif à la section Σ est défini par l'effort normal N , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M . Un effort normal positif est un effort de compression. La convention de signe adoptée pour le moment fléchissant, dans le cas des poutres à plan moyen, a pour but d'obtenir des moments fléchissants positifs dans les poutres sur appuis simples soumises à des charges verticales dirigées vers le bas (forces de pesanteur).

Le système des forces extérieures relatif à la section Σ est équivalent à une force unique \vec{F} équipollente à $\vec{\mathcal{R}}$. La ligne d'action de la force \vec{F} , dite *force extérieure relative à la section Σ* , coupe le plan de la section en un point K qui décrit, lorsque la section se déplace le long de la fibre moyenne, la *ligne des pressions*.

Le **principe d'équivalence** se réduit aux trois relations :

$$N = \iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma, \quad T = \iint_{\Sigma} \tau_3 d\Sigma, \quad M = \iint_{\Sigma} \sigma_1 y' d\Sigma \quad (4)$$

Les vecteurs $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ sont donnés par les formules (2). Dérivons la première par rapport à s :

$$\frac{d\vec{\mathcal{R}}}{ds} = \vec{p}(s)$$

et remplaçons $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{p}(s)$ par leurs expressions :

$$\vec{\mathcal{R}} = N\vec{i} + T\vec{j}, \quad \vec{p}(s) = p_1(s)\vec{i} + p_2(s)\vec{j}$$

En tenant compte des formules :

$$\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{\vec{j}}{R}, \quad \frac{d\vec{j}}{ds} = -\frac{\vec{i}}{R}$$

dans lesquelles R est le rayon de courbure algébrique de la fibre moyenne (R est positif dans le cas de la figure 3), nous obtenons les relations :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} = p_1(s), \quad \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} = p_2(s) \quad (5)$$

Dérivons la seconde formule (2) par rapport à s ; puisque :

$$\frac{d\vec{G}_i\vec{G}}{ds} = \frac{d\vec{g}\vec{G}}{ds} = \vec{i}(s)$$

nous trouvons :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} = \sum_g \vec{P}_i \wedge \vec{i}(s) + \int_0^s \vec{p}(t) \wedge \vec{i}(s) dt + \vec{\gamma}(s)$$

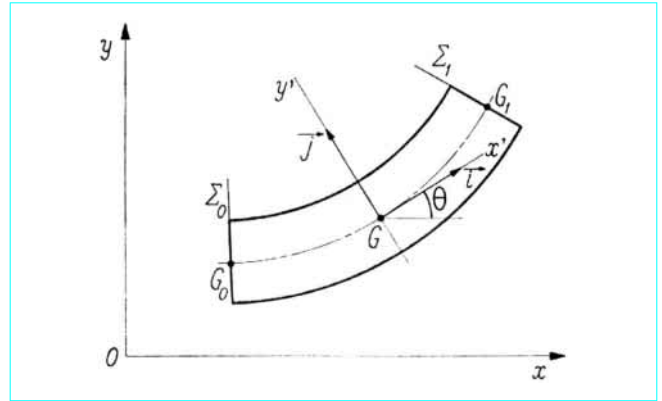


Figure 3 – Poutre à plan moyen chargée dans son plan

soit :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} = \vec{\mathcal{R}} \wedge \vec{i} + \vec{\gamma}(s)$$

En remplaçant $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ par leurs expressions (3) et en désignant par $\gamma(s)$ la mesure algébrique du vecteur $\vec{\gamma}(s)$ sur l'axe Gz' , nous obtenons :

$$\frac{dM}{ds} = T - \gamma(s) \quad (6)$$

relation qui se réduit, lorsque la densité de couple $\gamma(s)$ est nulle, à :

$$\frac{dM}{ds} = T \quad (7)$$

Il est souvent pratique, pour calculer M , N et T , de passer par l'intermédiaire des composantes X et Y de $\vec{\mathcal{R}}$ suivant les axes fixes Oxy ; si θ désigne l'angle (Ox, Gx') , nous avons :

$$N = X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad T = -X \sin \theta + Y \cos \theta$$

Supposons, par exemple, que les forces appliquées à la poutre comprennent :

- des *forces concentrées* ayant pour projections Q_i et $-P_i$ sur les axes Ox et Oy et appliquées aux points de coordonnées (x_i, y_i) ;
- une *densité de force* ayant pour projections $q(s)$ et $-p(s)$ sur les axes Ox et Oy ;
- des *couples concentrés* ayant pour projections Γ_i sur l'axe Oz normal au plan Oxy ;
- une *densité de couple* ayant pour projection $\gamma(s)$ sur l'axe Oz .

Nous trouvons pour valeurs de X , Y et M dans la section Σ dont le centre de gravité G a pour coordonnées (x, y) :

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_g Q_i + \int_0^s q(t) dt \\ Y &= -\sum_g P_i - \int_0^s p(t) dt \\ M &= -\sum_g [P_i(x-x_i) + Q_i(y-y_i) + \Gamma_i] \\ &\quad - \int_0^s [p(t)(x-\xi) + q(t)(y-\eta) + \gamma(t)] dt \end{aligned} \right\} (8)$$

Dans les formules (8), \sum_g désigne une sommation étendue aux forces et aux couples appliqués à gauche de la section Σ : ξ et η désignent les coordonnées d'un point courant de la fibre moyenne d'abscisse curviligne t .

Nous avons compté la projection des forces parallèles à Oy avec le signe moins pour que, lorsque Oy est la verticale ascendante, les projections des forces de pesanteur soient positives.

Des formules (8) découlent les propriétés suivantes :

- dans tout intervalle où la poutre ne supporte aucune force, le moment fléchissant M est une fonction linéaire de x et de y ;
- X et Y , et par suite l'effort normal N et l'effort tranchant T subissent des discontinuités au droit des points d'application des forces concentrées ;
- dans le cas où la poutre ne supporte pas de couples concentrés ($\Gamma_i = 0$), le moment fléchissant M est une fonction continue.

On notera les relations :

$$\frac{dX}{ds} = q(s), \quad \frac{dY}{ds} = -p(s)$$

Nous laissons au lecteur le soin de retrouver la relation (6) en dérivant la dernière formule (8).

1.3.3 Cas particulier des poutres droites à plan moyen chargées normalement à la fibre moyenne

Soit (figure 4) Ox la fibre moyenne de la poutre. Les forces extérieures comprennent :

- des forces concentrées P_i dans les sections d'abscisse x_i et une densité de force $p(x)$ parallèles à Oy ; ces forces sont comptées positivement sur l'axe Oy' opposé à Oy ;
- des couples concentrés Γ_i dans les sections d'abscisse x_i et une densité de couple $\gamma(x)$ normaux au plan moyen et comptés positivement sur l'axe Oz .

Dans ce cas, nous avons $X = N$ et $Y = T$; les formules (8) montrent que l'effort normal est nul, et que l'effort tranchant et le moment fléchissant ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned} T &= -\sum_g P_i - \int_0^x p(t) dt \\ M &= -\sum_g [P_i(x-x_i) + \Gamma_i] - \int_0^x [p(t)(x-t) + \gamma(t)] dt \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Nous déduisons des relations précédentes :

$$\frac{dT}{dx} = -p(x), \quad \frac{dM}{dx} = T(x) - \gamma(x) \quad (10)$$

et par suite, lorsque $\gamma(x)$ est identiquement nul ou est une constante :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x) \quad (11)$$

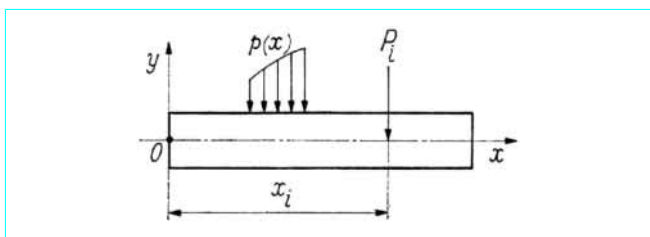


Figure 4 – Poutre droite à plan moyen chargée normalement à la fibre moyenne

1.4 Deuxième hypothèse fondamentale de la théorie des poutres

1.4.1 Principe de Navier-Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier-Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse, qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de la flexion pure où l'effort tranchant est nul. Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme d'une lettre S très aplatie. De même, lorsque nous étudierons la torsion (§ 4), nous verrons qu'une section non circulaire ayant deux axes de symétrie Gy' et Gz' prend, sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial, certains secteurs issus de G sortant en avant du plan de la section pendant que d'autres sortent en arrière. Il en résulte que, lorsqu'une poutre est soumise à des efforts tranchants et à des couples de torsion, on ne peut plus conserver l'hypothèse de Navier-Bernoulli ; nous lui substituerons la suivante appelée **principe de Navier-Bernoulli généralisé** : deux sections droites infiniment voisines Σ et Σ' de la poutre deviennent, après déformation, deux sections Σ_1 et Σ'_1 infiniment voisines, en général gauches ; les sections Σ_1 et Σ'_1 sont superposables par déplacement.

Avant déformation, on passe de la section Σ de centre G et d'abscisse curviligne s à la section Σ' de centre G' et d'abscisse curviligne $s + ds$ par une translation infiniment petite $\vec{\lambda} ds$ et par une rotation infiniment petite $\vec{\Omega} ds$ autour de G . Le principe de Navier-Bernoulli généralisé montre qu'on passe de la section Σ_1 de centre G_1 à la section Σ'_1 de centre G'_1 par une translation infiniment petite $(\vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda}) ds$ et par une rotation infiniment petite $(\vec{\Omega} + \delta\vec{\Omega}) ds$. Les

vecteurs $\delta\vec{\lambda}$ et $\delta\vec{\Omega}$ caractérisent la déformation de la poutre au voisinage de la section Σ ; ils définissent donc la *déformation généralisée*.

Le principe de Navier-Bernoulli généralisé est fondé sur les observations suivantes :

- le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section ;
- la variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis des dimensions de la section, mais aussi vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

Le principe de Navier-Bernoulli généralisé revient à négliger les variations de l'effort tranchant et du couple de torsion dans l'étude de la déformation d'un élément de poutre.

On peut montrer que la variation de longueur pendant la déformation d'un élément de fibre compris entre deux sections voisines est, dans l'hypothèse du principe de Navier-Bernoulli généralisé, la même que dans l'hypothèse de la conservation des sections planes. Il n'en résultera donc aucune modification des formules classiques (§ 2) donnant les contraintes normales dues au moment fléchissant. Par contre, le principe de Navier-Bernoulli généralisé permet de calculer la déformation due à l'effort tranchant ou au couple de torsion sans soulever de difficultés ni de contradictions.

1.4.2 Formules de Bresse

Calculons le déplacement relatif pendant la déformation de deux sections non infiniment voisines Σ_0 et Σ , de centres de gravité G_0 et G , et d'abscisses curvilignes s_0 et s ; nous pouvons négliger le gauchissement des sections, toujours très petit devant le déplacement relatif, donc supposer que les sections se déplacent comme un solide indéformable. Le déplacement relatif de deux sections infiniment voisines de centres de gravité g et g' , et d'abscisses

curvilignes t et $t + dt$ ($s_0 < t < s$), résultant d'une translation $\delta \vec{\lambda}(t) dt$ et d'une rotation $\delta \vec{\Omega}(t) dt$, le déplacement relatif de Σ_0 par rapport à Σ résulte d'une translation :

$$\int_{s_0}^s [\delta \vec{\lambda}(t) + \delta \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{gG}] dt$$

et d'une rotation :

$$\int_{s_0}^s \delta \vec{\Omega}(t) dt$$

Donc, si le déplacement de la section Σ_0 pendant la déformation résulte d'une translation $\vec{\lambda}_0$ et d'une rotation $\vec{\omega}_0$, le déplacement de la section Σ résulte d'une translation $\vec{\lambda}$ et d'une rotation $\vec{\omega}$ égales à :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\lambda} &= \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{G}_0 G + \int_{s_0}^s (\delta \vec{\lambda} + \delta \vec{\Omega} \wedge \vec{gG}) dt \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}_0 + \int_{s_0}^s \delta \vec{\Omega} dt \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Les formules (12) sont les **formules de Bresse**, que nous étudierons plus longuement (§ 5) lorsque nous connaîtrons la déformation définie par les vecteurs $\delta \vec{\lambda}$ et $\delta \vec{\Omega}$ (§ 2).

1.5 Validité des hypothèses fondamentales

Les deux hypothèses fondamentales de la théorie des poutres (§ 1.3 et 1.4) donnent des résultats d'autant plus précis que les conditions suivantes sont mieux respectées.

■ *Les dimensions transversales d'une poutre doivent être petites par rapport à sa longueur.* Elles ne doivent cependant pas être trop faibles, car la poutre deviendrait trop déformable, et l'hypothèse consistant à négliger les déplacements pour calculer le système des forces extérieures relatif à une section ne serait plus vérifiée. Pour une poutre droite, le rapport de la hauteur de la section à la longueur de la poutre est en général compris entre 1/5 et 1/30, les valeurs les plus courantes étant comprises entre 1/10 et 1/20. Pour les poutres courbes ou arcs, ce rapport peut être notablement plus faible, et compris entre 1/50 et 1/100. Par contre, lorsque les forces appliquées à la poutre sont parallèles, la largeur de la section mesurée normalement à la direction des forces peut être plus élevée.

■ *Le rayon de courbure de la fibre moyenne doit être grand par rapport à la dimension transversale de la poutre, mesurée dans le plan osculateur à la fibre moyenne.* Si la fibre moyenne est plane, son rayon de courbure doit être supérieur à cinq fois la hauteur de la section mesurée dans le plan de la fibre moyenne.

■ Lorsque la poutre est de section variable, la variation de la section doit être lente et progressive.

1.6 Problèmes posés par l'étude des poutres

Deux problèmes se posent dans l'étude des poutres.

■ *La recherche du système des forces extérieures relatif à une section quelconque :* la solution de ce problème est immédiate lorsque la poutre est isostatique. Par contre, lorsque la poutre est hyperstatique, il sera nécessaire de connaître la déformation de la poutre.

■ *Le calcul des contraintes s'exerçant sur une section, connaissant le système des forces extérieures relatif à cette section :* nous supposons que le matériau constitutif de la poutre est élastique (le comportement plastique sera étudié dans l'article consacré à la plasticité). La connaissance des contraintes permet le calcul de la densité d'énergie de déformation par unité de longueur de fibre moyenne W_e (ou densité de potentiel) et de la déformation définie

par les vecteurs $\delta \vec{\lambda}$ et $\delta \vec{\Omega}$; l'énergie de déformation d'un élément de poutre est $W_e ds$.

La résolution complète du premier problème exigeant la connaissance de la déformation de la poutre, nous étudierons d'abord le second. Nous conseillons au lecteur de se reporter à l'article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales, et de revoir notamment les définitions de l'énergie de déformation W , du module d'Young E , du module d'élasticité transversale G et du coefficient de Poisson ν .

2. Contraintes et déformation dues à l'effort normal et au moment fléchissant

2.1 Compression ou traction simples

Soit une section Σ d'une poutre de centre de gravité G ; Gx est la tangente à la fibre moyenne, et Gy et Gz sont les axes centraux d'inertie de la section.

Lorsque le système des forces extérieures relatif à Σ se réduit au seul effort normal N , on dit que l'on est en *compression simple* si $N > 0$, et en *traction simple* si $N < 0$; on dit aussi *compression pure* et *traction pure*.

Considérons (figure 5) l'élément de poutre compris entre deux sections voisines Σ et Σ' d'abscisses curvilignes s et $s + ds$. Le principe de Navier-Bernoulli généralisé (§ 1.4.1) montre que l'allongement d'une fibre PP' issue du point $P(y, z)$ de Σ est une fonction linéaire de y et de z ; en vertu des relations entre contraintes et déformations en élasticité linéaire (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales), la contrainte normale σ_1 est également une fonction linéaire :

$$\sigma_1 = a + by + cz$$

En reportant la valeur de σ_1 dans les relations (principe d'équivalence, § 1.3) :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma = N, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 y d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 z d\Sigma = 0$$

nous trouvons, en tenant compte du choix des axes Gyz :

$$a = \frac{N}{S}, \quad b = 0, \quad c = 0$$

S désignant l'aire de la section. La contrainte σ_1 due à l'effort normal N est donc donnée par la formule :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S} \quad (13)$$

Tous les éléments de fibre PP' subissent le même allongement :

$$-\frac{\sigma_1}{E} ds = -\frac{N}{ES} ds$$

Il en résulte que le vecteur $\delta \vec{\Omega}$ est nul et que le vecteur $\delta \vec{\Lambda}$ se réduit à sa composante suivant Gx , de mesure algébrique :

$$\delta \Lambda_x = -\frac{N}{ES} \quad (14)$$

L'énergie de déformation $dW = W_e ds$ de l'élément de poutre de volume $dV = S ds$ a pour valeur :

$$dW = \frac{\sigma_1^2}{2E} dV = \frac{N^2}{2ES} ds$$

la densité d'énergie de déformation a donc pour valeur :

$$W_e = \frac{N^2}{2ES} \quad (15)$$

Nous rappelons qu'il est d'usage de compter positivement les contraintes de compression en Résistance des matériaux.

2.2 Flexion pure

2.2.1 Théorie élémentaire

Une section Σ d'une poutre est soumise à la *flexion pure* lorsque le système des forces extérieures se réduit à un couple porté par l'un des axes centraux d'inertie, Gz par exemple (figure 6).

Nous adopterons, pour le moment fléchissant M , la convention de signe des poutres à plan moyen. Les axes étant choisis comme au paragraphe 2.1, le principe de Navier-Bernoulli généralisé montre encore que la contrainte normale σ_1 est une fonction linéaire :

$$\sigma_1 = a + by + cz$$

En reportant la valeur de σ_1 dans les relations (**principe d'équivalence**) :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 y d\Sigma = M, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 z d\Sigma = 0$$

nous trouvons, en tenant compte du choix des axes Gyz :

$$a = 0, \quad b = \frac{M}{I}, \quad c = 0$$

I désignant le *moment d'inertie de la section par rapport à Gz* :

$$I = \iint_{\Sigma} y^2 d\Sigma$$

La contrainte σ_1 due au moment fléchissant a donc pour valeur :

$$\sigma_1 = \frac{My}{I} \quad (16)$$

Lorsque M est positif, la partie de la section située au-dessus de Gz est comprimée, et celle située au-dessous de Gz est tendue (cas de la figure 6). Sur Gz la contrainte σ_1 est nulle ; pour cette raison Gz est appelé *axe neutre*.

Une fibre PP' comprise entre deux sections voisines subit un allongement :

$$-\frac{\sigma_1}{E} ds = -\frac{M}{EI} y ds$$

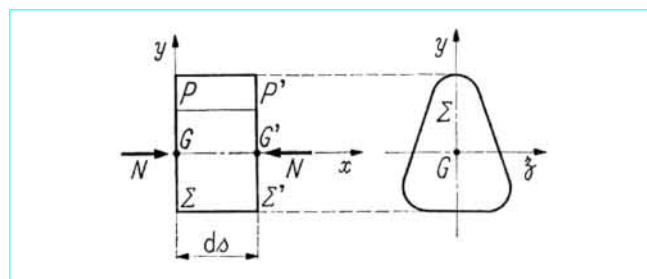


Figure 5 – Élément de poutre soumis à une compression simple

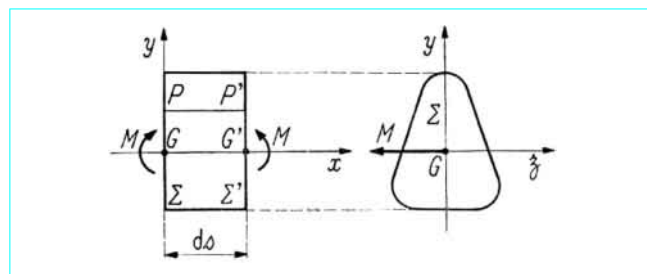


Figure 6 – Élément de poutre soumis à une flexion pure

Le déplacement relatif de Σ' par rapport à Σ est donc une rotation autour de Gz d'angle $\frac{M}{EI} ds$. Il en résulte que le vecteur $\delta \vec{\Lambda}$ est nul et que le vecteur $\delta \vec{\Omega}$ se réduit à sa composante suivant Gz de mesure algébrique :

$$\delta \Omega_z = \frac{M}{EI} \quad (17)$$

L'énergie de déformation $dW = W_e ds$ de l'élément de poutre a pour valeur :

$$dW = ds \iint_{\Sigma} \frac{\sigma_1^2}{2E} d\Sigma = ds \frac{M^2}{2EI^2} \iint_{\Sigma} y^2 d\Sigma = \frac{M^2}{2EI} ds$$

la densité d'énergie de déformation a donc pour valeur :

$$W_e = \frac{M^2}{2EI} \quad (18)$$

Remarque : la flexion pure exige que le moment fléchissant soit constant, car, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un effort tranchant $T = dM/ds$.

2.2.2 Influence de la forme de la section droite

Pour transmettre un moment fléchissant donné avec une matière permettant une contrainte $\pm \sigma$ de compression ou de traction, il faut une section droite ayant pour caractéristique géométrique $I/|y|_{max} = M/\sigma$; la quantité $I/|y|_{max}$ est le *module de résistance* de la section. La meilleure forme est celle qui, pour une aire donnée S , assure la valeur maximale du module de résistance. Ce serait une erreur de croire qu'en augmentant la section on augmente nécessairement le module de résistance.

Par **exemple** (figure 7), en enlevant à une section ayant la forme d'un losange ou d'un cercle les parties hachurées, on accroît son module de résistance si les parties enlevées sont assez petites.

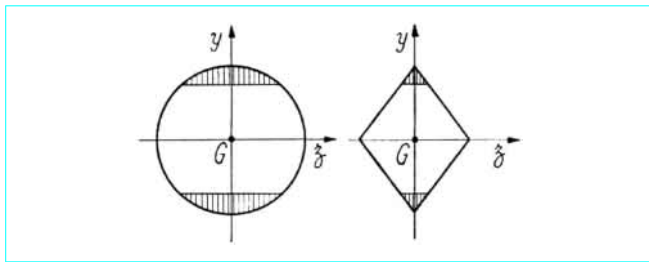


Figure 7 – Exemples de formes de section droite

Pour une hauteur donnée h , le module de résistance sera proportionnel à I ; la valeur maximale du rayon de giration étant $(1/2) h$ lorsque toute la matière est reportée à la limite extrême de la section, nous pouvons écrire :

$$I = (1/4)\eta Sh^2$$

S désignant l'aire de la section ; le coefficient η , inférieur à l'unité, est le *rendement géométrique* de la section.

Nota : la meilleure forme est la forme en double té ; les profilés laminés par les usines sidérurgiques ont un rendement η voisin de 2/3.

Les rails et les profilés en \square ont un rendement η voisin de 3/5.

L'anneau circulaire mince est la meilleure forme de section d'une poutre qui supporte un moment fléchissant pouvant agir dans toute direction ; son rendement η est légèrement inférieur à 1/2.

Le rectangle a un rendement assez faible : $\eta = 1/3$. Le cercle a un rendement encore plus faible : $\eta = 1/4$. Enfin, celui du losange est franchement mauvais : $\eta = 1/6$.

2.2.3 Étude de la flexion pure au moyen de la théorie de l'élasticité

Soit $Oxyz$ trois axes rectangulaires. Considérons une poutre de fibre moyenne Ox et de section constante, les axes centraux des sections étant parallèles aux axes Oy et Oz . Supposons cette poutre, encastree dans la section $x = 0$, soumise à un moment fléchissant constant M .

Les contraintes en tout point de la poutre ont pour valeurs :

$$\sigma_1 = \frac{My}{I}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

En effet, il est facile de vérifier que les équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité et les conditions aux limites sont satisfaites (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales).

Les composantes (u, v, w) du déplacement d'un point de la poutre sont données par les équations (compte tenu de ce que l'on compte positivement les contraintes de compression) :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{My}{EI}, & \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{vMy}{EI}, & \epsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{vMy}{EI} \\ 2\gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, & 2\gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & 2\gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations ne présente aucune difficulté ; on trouve, compte tenu de l'encastrement de la section $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{M}{EI}xy \\ v &= \frac{M}{2EI}[x^2 + v(y^2 - z^2)] \\ w &= \frac{vM}{EI}yz \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Il est facile de déduire des formules (19) les conséquences suivantes :

- après déformation, les sections restent planes et normales à la fibre moyenne déformée ;
- le rayon de courbure r de la fibre moyenne déformée est :

$$r = \frac{EI}{M}$$

— un quadrillage formé de droites parallèles à Gy et à Gz tracé sur une section devient, après déformation, un réseau orthogonal composé de droites issues du point de coordonnées $(-r/v, 0)$ et de cercles concentriques (figure 8) ;

— lorsque la poutre est de section rectangulaire, la face supérieure de la poutre se transforme, dans la déformation, en un paraboloid hyperbolique dont les lignes de niveau sont des hyperboles ; l'angle 2α des asymptotes de ces hyperboles est donné par la formule :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = v$$

Cette relation a été utilisée pour déterminer expérimentalement le coefficient de Poisson ; lorsque la face supérieure est polie et que l'on place sur elle une plaque de verre coïncidant avec cette face, il se produit, après flexion, un vide d'épaisseur variable entre la plaque de verre et la surface déformée de la face supérieure. Cette épaisseur variable peut être mesurée par des procédés optiques : en dirigeant normalement à la plaque un faisceau de lumière monochromatique, on obtient des franges hyperboliques, analogues aux anneaux de Newton, qui dessinent les lignes de niveau de la face supérieure de la poutre.

2.3 Flexion déviée

Une section Σ d'une poutre est soumise à la *flexion déviée* lorsqu'elle supporte un moment fléchissant \vec{M} qui n'est pas dirigé suivant un axe central d'inertie de la section (figure 9) ; nous désignerons par M_y et M_z les projections de \vec{M} sur les axes Gy et Gz (il n'est plus question ici de conserver la convention de signe des poutres à plan moyen).

La contrainte normale σ_1 est encore, en vertu du principe de Navier-Bernoulli généralisé (§ 1.4.1), de la forme :

$$\sigma_1 = a + by + cz$$

En reportant la valeur de σ_1 dans les relations (**principe d'équivalence**) :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 y d\Sigma = -M_z, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 z d\Sigma = M_y$$

nous trouvons, en tenant compte du choix des axes Gyz :

$$a = 0, \quad b = -\frac{M_z}{I_z}, \quad c = \frac{M_y}{I_y}$$

I_y et I_z désignant les moments d'inertie de la section par rapport aux axes centraux Gy et Gz :

$$I_y = \iint_{\Sigma} z^2 d\Sigma, \quad I_z = \iint_{\Sigma} y^2 d\Sigma$$

La contrainte normale σ_1 est donc donnée par la formule :

$$\sigma_1 = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (20)$$

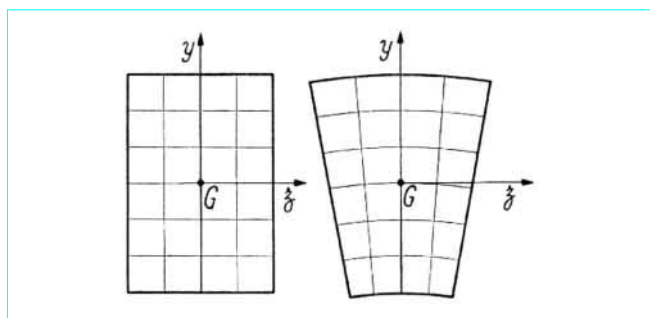


Figure 8 – Déformation d'un quadrillage tracé sur une section, par flexion pure

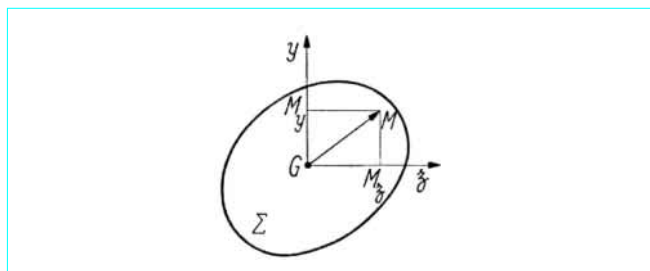


Figure 9 – Section de poutre soumise à la flexion déviée

L'axe neutre, défini par $\sigma_1 = 0$, a pour équation :

$$\frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = 0$$

La contrainte est proportionnelle à la distance à l'axe neutre. L'axe neutre n'est en général pas confondu avec la ligne d'action du vecteur \vec{M} . L'axe neutre est le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à \vec{M} par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la section :

$$\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$$

La ligne d'action du moment fléchissant et l'axe neutre ne coïncident donc que lorsque \vec{M} est dirigé suivant un axe central d'inertie.

On peut retrouver la formule (20) en superposant deux flexions pures, l'une due au moment M_y et l'autre due au moment M_z .

La déformation de la poutre est caractérisée par un vecteur $\delta\vec{\Lambda}$ nul et par un vecteur $\delta\vec{\Omega}$ dont les composantes sont :

$$\delta\Omega_x = 0, \quad \delta\Omega_y = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad \delta\Omega_z = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (21)$$

Les vecteurs \vec{M} et $\delta\vec{\Omega}$ n'ont pas, comme dans la flexion pure, la même direction ; cette remarque justifie le nom de flexion déviée.

La densité d'énergie de déformation $W_e = dW/ds$ a pour valeur :

$$W_e = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma_1^2}{2E} d\Sigma$$

soit, compte tenu de la formule (20) :

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) \quad (22)$$

2.4 Flexion composée

2.4.1 Calcul des contraintes et de la déformation

Une section Σ d'une poutre est soumise à la flexion composée lorsqu'elle supporte à la fois un moment fléchissant \vec{M} , de composantes M_y et M_z suivant les axes principaux d'inertie, et un effort normal \vec{N} .

Les résultats obtenus pour la compression simple et la flexion déviée montrent immédiatement que la contrainte σ_1 a pour valeur :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (23)$$

Les seules composantes non nulles des vecteurs $\delta\vec{\Lambda}$ et $\delta\vec{\Omega}$ sont :

$$\delta\Lambda_x = -\frac{N}{ES}, \quad \delta\Omega_y = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad \delta\Omega_z = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (24)$$

Enfin, la densité d'énergie de déformation a pour valeur :

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) \quad (25)$$

L'axe neutre, défini par $\sigma_1 = 0$, a pour équation :

$$\frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

La contrainte σ_1 est donc proportionnelle à la distance à l'axe neutre, qui ne passe pas par le centre de gravité.

Le système des forces extérieures relatif à la section est équivalent à une force unique de grandeur N normale à la section ; cette force coupe le plan de la section au point K de coordonnées :

$$y_K = -\frac{M_z}{N}, \quad z_K = \frac{M_y}{N}$$

Les vecteurs \vec{GK} et \vec{M} sont orthogonaux. Le point K est appelé *point de passage de la force extérieure*.

Il existe une relation simple entre le point K et l'axe neutre : la polaire du point K par rapport à l'ellipse centrale d'inertie :

$$\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$$

et l'axe neutre sont symétriques par rapport au centre de gravité de la section. On dit que l'axe neutre est l'*antipolaire* du point de passage par rapport à l'ellipse centrale d'inertie. Réciproquement, le point de passage est l'*antipôle* (c'est-à-dire le symétrique du pôle par rapport à G) de l'axe neutre par rapport à l'ellipse centrale d'inertie.

2.4.2 Noyau central. Résistance des maçonneries

Certains matériaux (maçonneries, béton non armé) ne peuvent supporter en toute sécurité que des contraintes normales de compression. Il est donc intéressant de déterminer dans quelle partie de la section doit se trouver le point de passage K de la force extérieure, qui est nécessairement une force de compression ($N > 0$), pour que la section soit entièrement comprimée. Cette partie de la section est le *noyau central*.

Pour cela, il faut et il suffit que l'axe neutre ne coupe pas la section. Cette condition définit la courbe qui limite le noyau central. La relation entre le point de passage et l'axe neutre montre que le contour limite du noyau central est symétrique, par rapport au centre de gravité de la section, de la polaire réciproque, par rapport à l'ellipse centrale d'inertie, de l'enveloppe des tangentes au contour de la section qui ne recoupe pas la section. Cette règle permet de trouver rapidement le noyau central de quelques sections.

Exemple :

- Le noyau central d'une section rectangulaire de côtés b et h (figure 10a) est un losange de diagonales $b/3$ et $h/3$.
- Le noyau central d'une section circulaire pleine de rayon R est un cercle concentrique de rayon $R/4$.
- Le noyau central d'une section annulaire mince (tube) de rayon R est un cercle concentrique de rayon $R/2$.
- Le noyau central d'une section en double té (figure 10b), de hauteur h et de rendement géométrique η (§ 2.2.2), est un losange de diagonales $4r_y^2/h = \eta h$ et $4r_z^2/b$ (r_y et r_z sont les rayons de giration : $r_y = \sqrt{I_y/S}$ et $r_z = \sqrt{I_z/S}$).

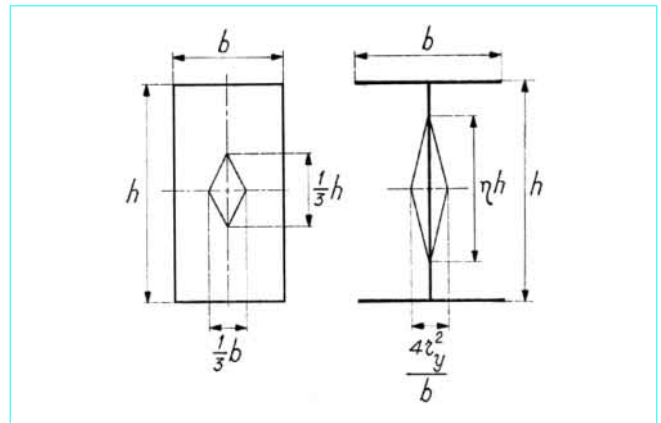


Figure 10 – Noyaux centraux d'une section rectangulaire et d'une section en double té

Pour déterminer les inconnues a et $1/r$, écrivons que l'on a :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 y d\Sigma = M \quad (27)$$

soit, en désignant par $b(y)$ la largeur de la section à l'ordonnée y :

$$E \int \frac{a+y/r}{1-y/R} b(y) dy = 0, \quad E \int \frac{a+y/r}{1-y/R} b(y) y dy = M \quad (28)$$

les intégrales étant calculées sur toute la hauteur de la section.

Si l'on substitue à la section réelle une *section fictive* (figure 12) définie par :

$$b'(y) = \frac{b(y)}{1 - \frac{y}{R}} \quad (29)$$

les équations (28) sont identiques, pour cette section fictive, à celles que l'on obtiendrait en supposant la poutre rectiligne. Donc, pour calculer les contraintes dues à la flexion dans la section réelle, on applique les règles habituelles de la flexion à la section fictive définie par l'équation (29), puis on multiplie les contraintes ainsi obtenues par le facteur correctif $1/\left(1 - \frac{y}{R}\right)$.

L'axe neutre ne se trouve pas au niveau du centre de gravité de la section réelle, mais au niveau du centre de gravité de la section fictive ; l'axe neutre est déplacé vers le centre de courbure de la poutre ; sa distance au centre de gravité de la section réelle est $e = -ar$.

Si l'on désigne par S_1 l'aire de la section fictive, par m et J le moment statique et le moment d'inertie de la section fictive par rapport à Gz , les équations (28) s'écrivent :

$$aS_1 + \frac{m}{r} = 0, \quad E\left(am + \frac{J}{r}\right) = M$$

Nous en déduisons, $I_1 = J - S_1 e^2$ désignant le moment d'inertie de la section fictive par rapport à l'axe neutre :

$$e = -ar = \frac{m}{S_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_1} \quad (30)$$

2.5 Flexion des poutres à plan moyen à forte courbure

2.5.1 Flexion pure

Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres ne donnent, dans ce cas, qu'une approximation grossière. Henri Résal [8] a apporté à la théorie de la flexion des corrections qui donnent des résultats très précis.

Considérons (figure 11) un élément de poutre compris entre deux sections infiniment voisines Σ et Σ' . La fibre moyenne GG' de cet élément peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre $d\varphi$; R est un nombre algébrique, positif dans le cas de la figure.

La flexion étant pure, les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne déformée. Si l'on fixe la position de la section Σ , la section Σ' vient en Σ'_1 ; le déplacement de la section Σ' est défini par la variation $\delta d\varphi = ds/r$ de l'angle $d\varphi$ et par le raccourcissement $a ds$ de la fibre moyenne de l'élément ; $1/r$ est la variation de courbure de la fibre moyenne.

Une fibre PP' située à la distance y de la fibre moyenne, donc de rayon de courbure initial $R - y$, a une longueur initiale $(1 - y/R)ds$; elle subit un raccourcissement $a ds + y \delta d\varphi = (a + y/r)ds$; la contrainte normale σ_1 a donc pour valeur :

$$\sigma_1 = E \frac{a + \frac{y}{r}}{1 - \frac{y}{R}} \quad (26)$$

La répartition des contraintes sur la hauteur de la section n'est plus linéaire, mais suit une *loi hyperbolique*.

La formule (26) donnant la contrainte peut donc s'écrire :

$$\sigma_1 = \frac{E}{r} (y - e) = \frac{M(y - e)}{I_1} \frac{1}{1 - \frac{y}{R}} \quad (31)$$

Il est remarquable que l'on puisse exprimer simplement e et I_1 , connaissant l'aire S_1 de la section fictive :

$$S_1 = \iint_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{1 - y/R}$$

et l'aire S de la section réelle. Un calcul simple montre que :

$$\frac{e}{R} = 1 - \frac{S}{S_1}, \quad I_1 = SRe \quad (32)$$

Les relations (32) permettent de donner à la formule (31) une forme très simple. Si l'on désigne par $v = y - e$ la distance à l'axe neutre et par $\rho = R - y$ le rayon de courbure de la fibre considérée, la formule (31) peut s'écrire :

$$\sigma_1 = \frac{Mv}{S\rho e} \quad (33)$$

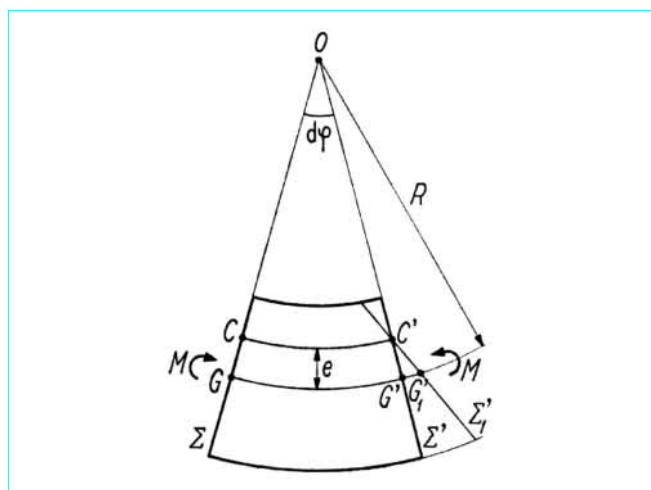


Figure 11 - Flexion d'une poutre à plan moyen à forte courbure

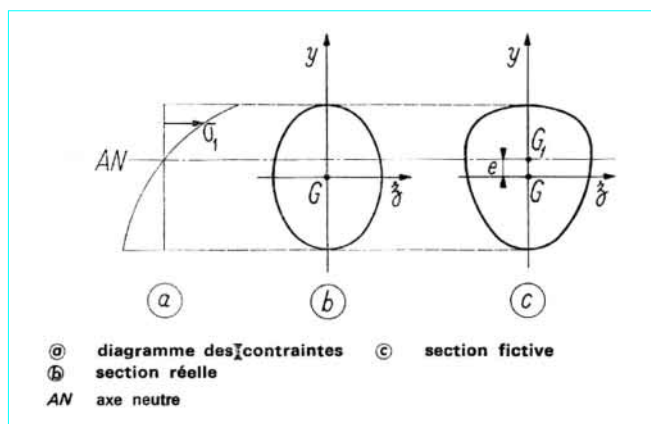


Figure 12 - Section fictive d'une poutre soumise à la flexion pure

Les seules composantes non nulles des vecteurs $\vec{\delta\Lambda}$ et $\vec{\delta\Omega}$ sont :

$$\delta\Lambda_x = a = -\frac{e}{r}, \quad \delta\Omega_z = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_1}$$

2.5.2 Application à quelques sections

Il suffit, pour pouvoir appliquer les formules données au paragraphe 2.5.1, de calculer les aires S et S_1 de la section réelle et de la section fictive, e et I_1 étant déterminés par les formules (32).

2.5.2.1 Section rectangulaire de largeur b et de hauteur h

Nous avons (figure 13) :

$$S = bh, \quad S_1 = bR \ln \left[\frac{R + (1/2)h}{R - (1/2)h} \right]$$

Dans le cas d'un barreau rectangulaire étroit, nous pouvons comparer les résultats donnés par la théorie de H. Résal [8] et les résultats donnés par la théorie de l'élasticité (cf. article spécialisé dans le traité Sciences fondamentales).

Le tableau 1 donne, pour quelques valeurs du rapport :

$$\frac{R + (1/2)h}{R - (1/2)h}$$

des rayons des fibres extrêmes, les contraintes sur les fibres extrêmes (les contraintes seraient ± 10 si la poutre était droite).

Ce tableau montre que la théorie de Résal, fondée sur l'hypothèse d'une répartition hyperbolique des contraintes, fournit une excellente approximation, surtout en ce qui concerne la contrainte maximale qui se produit sur la fibre dont le rayon de courbure est minimal.

Tableau 1 - Contraintes sur les fibres extrêmes d'une poutre en flexion pure				
$\frac{R + (1/2)h}{R - (1/2)h}$	Théorie de Résal		Théorie de l'élasticité	
	intrados	extrados	intrados	extrados
1,3	10,95	-9,19	10,96	-9,20
2	12,87	-8,10	12,92	-8,19
3	15,23	-7,30	15,28	-7,53

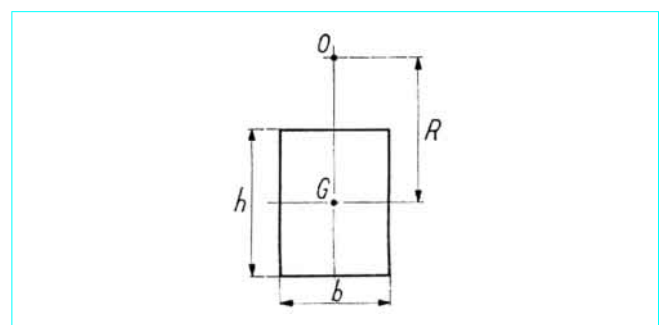


Figure 13 - Section rectangulaire de largeur b et de hauteur h

2.5.2.2 Section en double té

Avec les notations de la figure 14, nous trouvons :

$$S = b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$$

$$S_1 = R \left(b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3} \right)$$

2.5.2.3 Section circulaire ou elliptique

Soit h la hauteur de la section, b sa largeur et R le rayon de courbure de la fibre moyenne (figure 15), nous trouvons :

$$S = (1/4)\pi b h$$

$$S_1 = (1/2)\pi b h \left(\frac{2R}{h} \right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \right]$$

2.5.3 Flexion composée

La contrainte normale est donnée par la formule (26) dans laquelle a et $1/r$ sont déterminés par les équations :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_1 d\Sigma = N, \quad \iint_{\Sigma} \sigma_1 y d\Sigma = M$$

soit, en conservant les notations définies au paragraphe 2.5.1 :

$$E \left(a S_1 + \frac{m}{r} \right) = N, \quad E \left(a m + \frac{J}{r} \right) = M$$

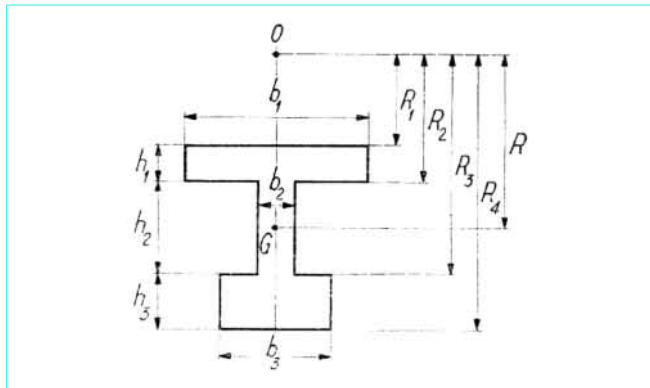


Figure 14 - Section en double té

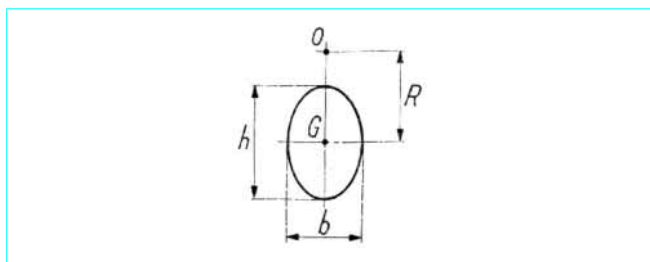


Figure 15 - Section elliptique

En tenant compte des relations :

$$m = e S_1, \quad J = I_1 + S_1 e^2$$

et des relations (32), nous trouvons sans difficulté :

$$E a = \frac{N}{S} - \frac{M e}{I_1}, \quad \frac{E I_1}{r} = M - N e \tag{34}$$

Les formules (34) font connaître la déformation de la poutre ; en reportant les valeurs de a et de $1/r$ dans la formule (26), nous obtenons la valeur de la contrainte :

$$\sigma_1 = \frac{N}{S} + \frac{M(y-e)}{I_1} \frac{1}{1-(y/R)} \tag{35}$$

3. Contraintes et déformation dues à l'effort tranchant

3.1 Généralités

3.1.1 Problème du calcul des contraintes de cisaillement

Considérons une section Σ de centre de gravité G ; désignons toujours par Gx la tangente à la fibre moyenne, et par Gy et Gz les axes centraux d'inertie de la section Σ . Nous devons déterminer, en fonction de l'effort tranchant \vec{T} de composantes T_y et T_z , les composantes τ_3 et τ_2 suivant Gy et Gz de la contrainte de cisaillement qui s'exerce sur la section. Ces composantes τ_3 et τ_2 doivent vérifier les relations (**principe d'équivalence**) :

$$\iint_{\Sigma} \tau_3 d\Sigma = T_y, \quad \iint_{\Sigma} \tau_2 d\Sigma = T_z, \quad \iint_{\Sigma} (\tau_2 y - \tau_3 z) d\Sigma = 0 \tag{36}$$

En outre, si l'on désigne par τ_n la composante de la contrainte de cisaillement normale au point P à une courbe tracée dans la section, il s'exerce, sur l'élément plan normal à la section et passant par la tangente Pt à la courbe, une contrainte de cisaillement dont la composante normale à la section est τ_n (**théorème de Cauchy**, cf. article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans le traité Sciences fondamentales). Puisqu'aucune force longitudinale n'est appliquée sur la surface latérale de la poutre, la composante normale au contour de la contrainte de cisaillement doit être nulle ; donc *en un point du contour, la contrainte de cisaillement est tangente au contour ou est nulle*. Si (dy, dz) sont les composantes d'un élément du contour de la section, nous devons avoir sur le contour :

$$\tau_3 dz - \tau_2 dy = 0 \tag{37}$$

Remarque : l'effort tranchant \vec{T} est toujours accompagné d'un moment fléchissant \vec{M} . En effet, en supposant le couple de torsion \vec{C} nul, nous avons $\vec{M} = \vec{M}$ et $\vec{R} = \vec{T} + N \vec{i}$ dans les formules (3) ; nous en déduisons la relation :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{R} \wedge \vec{i} = \vec{T} \wedge \vec{i}$$

qui se réduit, dans le cas des poutres à plan moyen, à la relation (7) :

$$T = \frac{dM}{ds}$$

Selon le principe de Navier-Bernoulli généralisé (§ 1.4.1), les contraintes normales et la déformation dues au moment fléchissant ne sont pas modifiées par le gauchissement dû à l'effort tranchant.

La flexion avec effort tranchant est appelée *flexion simple*.

3.1.2 Centre de torsion

Lorsque le centre de gravité G d'une section n'est pas centre de symétrie de la section, la résultante des forces élastiques dues aux contraintes de cisaillement produites par l'effort tranchant est une force unique équipollente à l'effort tranchant, mais cette force ne passe en général pas par G ; autrement dit, seules les deux premières relations (36) sont vérifiées. Lorsqu'on fait varier la direction de l'effort tranchant, la force unique résultante des forces élastiques passe par un point fixe O appelé *centre de torsion de la section*.

L'intérêt du centre de torsion est le suivant : si les charges appliquées à la poutre ne passent pas par le centre de torsion, la flexion de la poutre s'accompagne d'une torsion. Dans le cas des sections ouvertes composées de profils minces, les contraintes de cisaillement dues à la torsion peuvent devenir prépondérantes, surtout lorsque les sections sont libres de se gauchir.

Considérons une poutre droite de section constante, encadrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre. Appliquons à l'extrémité libre une force transversale $F = 1$ au point A de la section terminale ; la section terminale tourne d'un angle θ autour de la normale à la section. Appliquons un couple $\Gamma = 1$ normal à la section terminale ; le point A se déplace transversalement de δ dans la direction de la force F . Le **théorème de réciprocité de Maxwell-Betti** (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) montre que $\theta = \delta$. Si le point A est confondu avec le centre de torsion O , θ est nul ; il en est donc de même de δ . Ainsi, *les sections d'une poutre droite sollicitée à la torsion tournent autour d'un axe longitudinal, lieu des centres de torsion des sections*.

Soit Iyz des axes liés à la section terminale. Lorsqu'on applique un couple $\Gamma = 1$, une force $Y = 1$ ou une force $Z = 1$ au point I de la section terminale, le déplacement de la section terminale est défini par la rotation θ et par la translation de composantes v et w du point I :

$\Gamma = 1$	θ_1	v_1	w_1
$Y = 1$	θ_2	v_2	w_2
$Z = 1$	θ_3	v_3	w_3

Si l'on applique une force de composantes Y et Z au point O de coordonnées η et ζ de la section terminale, la section terminale subira une rotation :

$$\theta = (\eta Z - \zeta Y)\theta_1 + Y\theta_2 + Z\theta_3$$

Le point O sera le centre de torsion si θ est nul, quels que soient Y et Z ; les coordonnées du centre de torsion sont donc :

$$\eta = -\frac{\theta_3}{\theta_1} \quad \zeta = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

ou, puisqu'en vertu du théorème de réciprocité $\theta_2 = v_1$ et $\theta_3 = w_1$:

$$\eta = -\frac{w_1}{\theta_1} \quad \zeta = \frac{v_1}{\theta_1}$$

3.1.3 Formule fondamentale pour le calcul des contraintes de cisaillement

Considérons une section soumise à l'effort tranchant $T_y = T$ et soit AB un arc de courbe, appelé *coupure*, qui partage la section en deux parties Σ_0 et Σ_1 (figure 16).

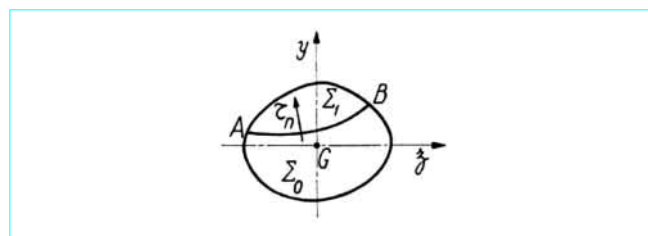


Figure 16 – Section soumise à un effort tranchant, avec coupure

Écrivons l'équilibre des forces appliquées au prisme de base Σ_1 compris entre deux sections voisines Σ et Σ' d'abscisses curvilignes s et $s + ds$.

Sur la base du prisme située dans la section Σ est appliquée la force totale, parallèle à Gx :

$$\iint_{\Sigma_1} \sigma_1 d\Sigma$$

σ_1 désignant la contrainte normale due au moment fléchissant.

Sur la base du prisme située dans la section Σ' est appliquée la force totale, parallèle à Gx :

$$-\iint_{\Sigma_1} (\sigma_1 + d\sigma_1) d\Sigma$$

Sur la surface latérale du prisme ayant pour directrice la coupure AB est appliquée la force totale, parallèle à Gx :

$$ds \int_{AB} \tau_n d\ell$$

$d\ell$ désignant l'élément d'arc de la coupure et τ_n la composante de la contrainte de cisaillement normale à la coupure.

Aucune force parallèle à Gx n'étant appliquée à la surface latérale de la poutre, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_{AB} \tau_n d\ell = \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} d\Sigma$$

En tenant compte des relations :

$$\sigma_1 = \frac{My}{I}, \quad \frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{y}{I} \frac{dM}{ds} = \frac{Ty}{I}$$

nous obtenons la formule fondamentale :

$$\int_{AB} \tau_n d\ell = \frac{Tm}{I} \quad (38)$$

dans laquelle I est le moment d'inertie de la section totale par rapport à Gz et m le moment statique de l'aire de Σ_1 par rapport à Gz :

$$m = \iint_{\Sigma_1} y d\Sigma$$

Si L désigne la longueur de la coupure AB , la valeur moyenne de la composante de la contrainte de cisaillement normale à la courbe AB est :

$$(\tau_n)_{moyen} = \frac{Tm}{IL}$$

3.2 Théorie élémentaire (poutres à plan moyen)

3.2.1 Calcul de la contrainte de cisaillement. Exemples

La théorie élémentaire consiste à supposer la composante τ_2 négligeable et la composante τ_3 , parallèle à l'effort tranchant, constante sur toute parallèle AB à Gz (figure 17). Donc, en désignant par m le moment statique de l'aire hachurée et par b la largeur de la section suivant AB , la formule fondamentale (38) donne :

$$\tau_3 = \frac{Tm}{Ib} \tag{39}$$

La contrainte τ_3 varie avec l'ordonnée y comme le rapport m/b ; τ_3 est nul aux points les plus éloignés de Gz et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de m/b . Ce maximum a lieu en général sur Gz pour les sections usuelles, mais ce n'est pas vrai pour toutes les sections (losange).

Sur l'axe Gz , la contrainte de cisaillement a pour valeur, m_1 désignant le moment statique de l'aire $y > 0$:

$$(\tau_3)_0 = \frac{Tm_1}{Ib}$$

Le rapport I/m_1 a alors une signification simple ; la force totale de compression sur l'aire $y > 0$ a pour valeur :

$$F = \iint_{y>0} \sigma_1 d\Sigma = \frac{M}{I} \iint_{y>0} y d\Sigma = \frac{Mm_1}{I}$$

donc $I/m_1 = M/F$ est égal au bras de levier Z du couple formé par la force F et la force totale de traction sur l'aire $y < 0$. Nous avons donc :

$$(\tau_3)_0 = \frac{T}{Zb}$$

Examinons quelques sections particulières.

3.2.1.1 Section rectangulaire de hauteur $2h$ et de largeur b

Nous avons dans ce cas (figure 18) :

$$I = (2/3)bh^3, \quad m = (1/2)b(h^2 - y^2)$$

donc :

$$\tau_3 = \frac{3T(h^2 - y^2)}{4bh^3}$$

ou, en introduisant l'aire $S = 2bh$ de la section :

$$\tau_3 = (3/2) \left(\frac{T}{S} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

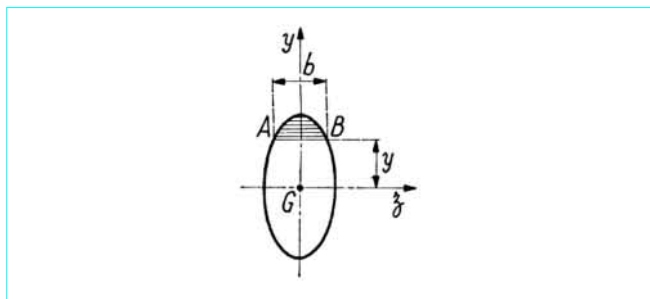


Figure 17 - Calcul de la contrainte de cisaillement

La répartition de la contrainte de cisaillement sur la hauteur de la section suit une loi parabolique ; la contrainte maximale est égale à (3/2) fois la contrainte moyenne.

3.2.1.2 Section circulaire de rayon R

Nous avons dans ce cas (figure 19) :

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}, \quad S = \pi R^2, \quad I = (1/4)\pi R^4, \quad m = (2/3)(R^2 - y^2)^{3/2}$$

et nous trouvons pour valeur de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_3 = (4/3) \left(\frac{T}{S} \right) \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$$

La répartition de la contrainte de cisaillement sur la hauteur de la section suit encore une loi parabolique ; la contrainte maximale est égale à (4/3) fois la contrainte moyenne.

On obtiendrait un résultat identique pour une section elliptique d'axes Gy et Gz .

3.2.1.3 Section en losange de hauteur $2h$ et de largeur maximale b

Nous avons dans ce cas (figure 20) :

$$S = bh, \quad I = (1/6)bh^3$$

et, en nous bornant, en raison de la symétrie, à $y > 0$:

$$b(y) = b \left(1 - \frac{y}{h} \right) \\ m = (1/6)b \left(1 - \frac{y}{h} \right) (h^2 + hy - 2y^2)$$

Nous trouvons pour valeur de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_3 = \frac{T}{S} \left(1 + \frac{y}{h} - 2 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Sur Gz , la contrainte de cisaillement est égale à la contrainte moyenne T/S ; elle est maximale et égale à (9/8) (T/S) pour $y = (1/4)h$.

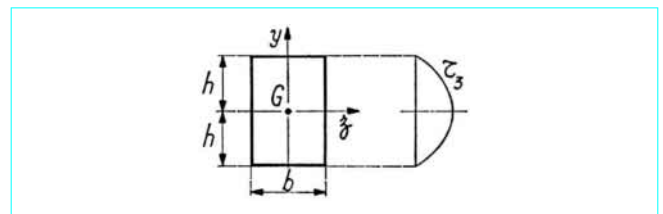


Figure 18 - Section rectangulaire de hauteur $2h$ et de largeur b

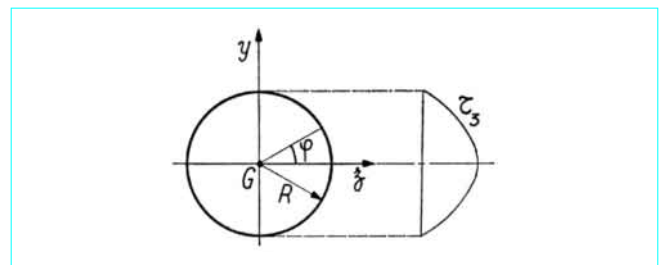


Figure 19 - Section circulaire de rayon R

3.2.2 Déformation due à l'effort tranchant. Exemples

La contrainte de cisaillement τ_3 n'étant pas constante, la distorsion égale à la variation de l'angle initialement droit, formé par une fibre et la direction de l'effort tranchant, n'est pas constante ; la section ne peut donc rester plane.

Considérons (figure 21) un élément de poutre de longueur ds compris entre deux sections voisines Σ et Σ' . Pour calculer le déplacement relatif $\delta\Lambda_y ds$ de Σ' par rapport à Σ , nous utilisons le **théorème de Castigliano** (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) ; soit $W_e ds$ l'énergie de déformation de l'élément de poutre due à la contrainte de cisaillement τ_3 ; nous avons, compte tenu du signe de T :

$$\delta\Lambda_y = - \frac{\partial W_e}{\partial T}$$

L'expression de la densité d'énergie de déformation W_e est, τ_3 étant donné par la formule (39) et G étant le module d'élasticité transversale :

$$W_e = \frac{1}{2G} \iint_{\Sigma} \tau_3^2 d\Sigma = \frac{T^2}{2GI^2} \iint_{\Sigma} \frac{m^2}{b^2} d\Sigma$$

soit :

$$W_e = \frac{T^2}{2GS_1} \quad (40)$$

S_1 désignant la *section relative à la déformation d'effort tranchant* ; puisque $d\Sigma = bdy$, la section réduite S_1 est définie par :

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{I^2} \iint_{\Sigma} \frac{m^2}{b^2} d\Sigma = \frac{1}{I^2} \int \frac{m^2}{b} dy \quad (41)$$

l'intégrale simple étant étendue à toute la hauteur de la section.

Le vecteur $\delta\vec{\Lambda}$ a donc pour seule composante non nulle :

$$\delta\Lambda_y = - \frac{T}{GS_1} \quad (42)$$

Exemple : la formule (41) permet de calculer les sections réduites de la **section rectangulaire** représentée sur la figure 18 :

$$S_1 = (5/6)S$$

de la **section circulaire** représentée sur la figure 19 :

$$S_1 = (9/10)S$$

et de la **section en losange** représentée sur la figure 20 :

$$S_1 = (30/31)S$$

3.2.3 Poutres dont la section est un profil mince. Exemples

La poutre étant à plan moyen, la section admet Gy pour axe de symétrie. L'épaisseur du profil constituant la section étant mince, nous pouvons admettre que la contrainte de cisaillement τ est parallèle à la tangente à la ligne moyenne (\mathcal{L}) du profil et qu'elle est uniformément répartie sur l'épaisseur du profil.

Dans le cas d'une section simplement connexe, ou section *ouverte*, telle qu'une section en double té, nous effectuons une coupure normale à (\mathcal{L}). Si e désigne l'épaisseur du profil, m le moment

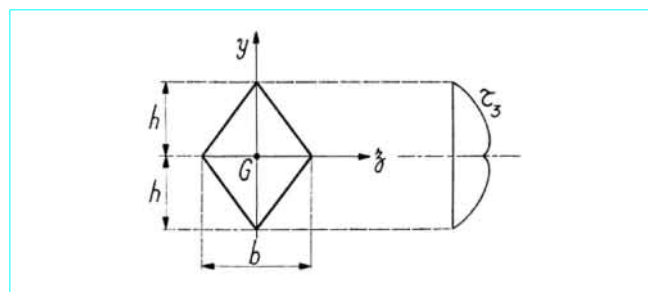


Figure 20 - Section en losange de hauteur $2h$ et de largeur maximale b

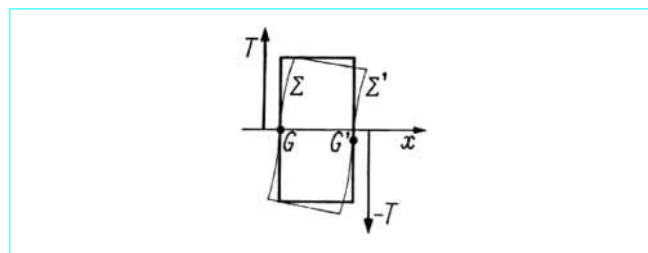


Figure 21 - Élément de poutre en déformation due à un effort tranchant

statique de la partie de la section limitée par la coupure par rapport à Gz et I le moment d'inertie de la section totale par rapport à Gz , nous trouvons, en appliquant la formule fondamentale (38) :

$$\tau = \frac{Tm}{Ie} \quad (43)$$

Dans le cas d'une section doublement connexe, telle qu'un tube mince, la contrainte τ est nulle sur Gy par raison de symétrie ; la formule (43) est encore exacte, en désignant par m le moment statique de la partie de la section comprise entre Gy et la coupure normale.

La densité d'énergie de déformation W_e due à τ a pour valeur, puisque $d\Sigma = ed\ell$, en désignant par $d\ell$ l'élément d'arc de la ligne moyenne (\mathcal{L}) :

$$W_e = \frac{1}{2G} \iint_{\Sigma} \tau^2 d\Sigma = \frac{T^2}{2GI^2} \iint_{\Sigma} \frac{m^2}{e^2} d\Sigma = \frac{T^2}{2GI^2} \int_{(\mathcal{L})} \frac{m^2}{e} d\ell$$

Les formules (40) et (42) sont donc encore exactes, à condition de définir la section réduite S_1 par la formule :

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{I^2} \int_{(\mathcal{L})} \frac{m^2}{e} d\ell \quad (44)$$

Examinons quelques sections particulières.

3.2.3.1 Tube circulaire mince d'épaisseur constante e et de rayon R

La section S et le moment d'inertie I ont pour valeur, en supposant e petit devant R (figure 22) :

$$S = 2\pi Re, \quad I = \pi R^3 e$$

Le moment statique m de l'aire hachurée est :

$$m = eR^2 \cos\varphi \quad (y = R \sin\varphi)$$

La contrainte de cisaillement a pour valeur :

$$\tau = 2 \frac{T}{S} \cos \varphi$$

La contrainte de cisaillement maximale est deux fois la contrainte moyenne.

La formule (44) donne pour valeur de la section réduite :

$$S_1 = \pi R e = (1/2)S$$

3.2.3.2 Section en double té

Nous supposons que e et e' sont petits devant h et b . Nous désignons par s la section de l'âme, par s' la section d'une membrure et par α le rapport s/s' . Nous avons (figure 23) :

$$s = 2(h - e')e \approx 2he, \quad s' = 2be'$$

$$I = (4/3)bh^3 - (2/3)(2b - e)(h - e')^3 \approx (1/3)h^2(s + 6s')$$

Au point de l'âme de cote y , la contrainte de cisaillement est parallèle à Gy et a pour valeur :

$$\tau_3 = \frac{T}{Ie} \{ (2b - e)[h - (1/2)e']e' + (1/2)e(h^2 - y^2) \}$$

Il est facile de voir que les valeurs $(\tau_3)_0$ et $(\tau_3)_1$ de τ_3 pour $y = 0$ et $y = h - (1/2)e'$ sont données approximativement par les formules :

$$(\tau_3)_0 = \left(\frac{T}{s} \right) \frac{1 + (1/4)\alpha}{1 + (1/6)\alpha}, \quad (\tau_3)_1 = \left(\frac{T}{s} \right) \frac{1}{1 + (1/6)\alpha}$$

Lorsque le rapport α est petit, on peut donc admettre que la contrainte τ_3 est constante sur l'âme et égale à T/s .

En un point des membrures de coordonnée z , la contrainte de cisaillement est parallèle à Gz et a pour valeur (on suppose $z > 0$) :

$$\tau_2 = \frac{T}{Ie'}(b - z)e'[h - (1/2)e']$$

Cette contrainte varie linéairement de la valeur zéro, au bord de la membrure, à sa valeur maximale égale à $(1/2)(e/e')(\tau_3)_1$, à la jonction de la membrure et de l'âme.

On trouve que la section réduite est définie par :

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{S_1'} + \frac{1}{S_1''}$$

avec $S_1' \approx s, \quad S_1'' \approx 6s' \frac{h^2}{b^2} [1 + (1/3)\alpha]$

Pratiquement, S_1 est toujours très voisine de s et peut être confondue avec s .

3.3 Poutres dont la section est un profil mince ouvert

3.3.1 Contrainte de cisaillement

La section de la poutre (figure 24) est constituée par un profil mince AB ouvert, donc séparé en deux parties distinctes par toute coupure. Elle supporte un effort tranchant \vec{T} de composantes T_y et T_z suivant les axes centraux d'inertie Gy et Gz . Nous orientons la ligne moyenne (\mathcal{L}) du profil ; son abscisse curviligne ℓ varie de zéro en A à L en B .

La section est définie par trois fonctions de ℓ : les coordonnées y et z d'un point P de la ligne moyenne et l'épaisseur e du profil en P .

En un point de la section, la contrainte de cisaillement τ est parallèle à la tangente à (\mathcal{L}) et ne dépend que de ℓ . La formule fondamentale (38) conduit à la valeur :

$$\tau(\ell) = \frac{1}{e} \left[\frac{m_z(\ell)}{I_z} T_y + \frac{m_y(\ell)}{I_y} T_z \right] \tag{45}$$

Dans la formule (45), I_z et I_y désignent les moments d'inertie de la section par rapport aux axes Gz et Gy :

$$I_z = \int_0^L y^2 e d\ell, \quad I_y = \int_0^L z^2 e d\ell$$

$m_z(\ell)$ et $m_y(\ell)$ désignent les moments statiques de la partie PB de la section par rapport aux axes Gz et Gy :

$$m_z(\ell) = \int_\ell^L y(t)e(t)dt, \quad m_y(\ell) = \int_\ell^L z(t)e(t)dt$$

Nous désignerons par Φ le flux τe de la contrainte de cisaillement :

$$\Phi(\ell) = \tau e = \int_\ell^L \left[\frac{T_y}{I_z} y(t) + \frac{T_z}{I_y} z(t) \right] e(t) dt \tag{46}$$

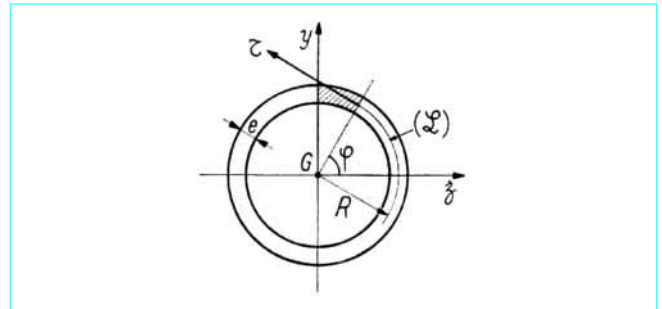


Figure 22 – Tube circulaire mince d'épaisseur constante e et de rayon R

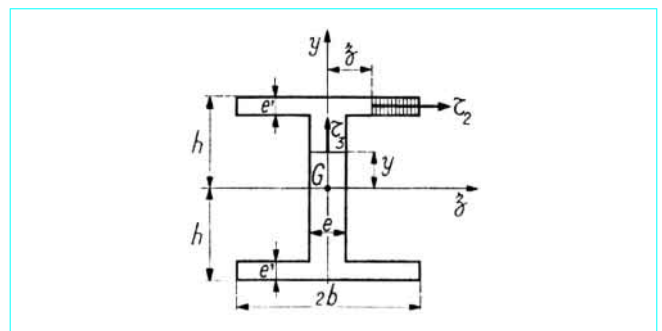


Figure 23 – Section en double té (profil mince)

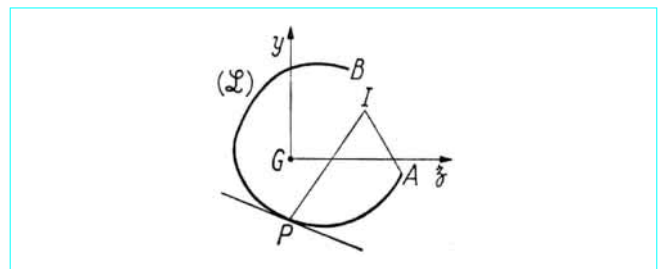


Figure 24 – Profil mince ouvert

3.3.2 Centre de torsion. Exemples

Il est aisé de montrer que la résultante des forces élastiques $\tau e d\ell = \Phi d\ell$ est équipollente à l'effort tranchant \vec{T} .

Soit I un point quelconque de la section, de coordonnées y_I et z_I ; nous désignerons par \mathcal{A}_I le double de l'aire du secteur API ; si h est la distance de I à la tangente en P à (\mathcal{L}) :

$$\mathcal{A}_I(\ell) = \int_0^\ell h d\ell$$

Le moment des forces élastiques par rapport à I a pour valeur :

$$C_I = \int_0^L h \tau e d\ell = \int_0^L \Phi d\mathcal{A}_I$$

En intégrant par parties, nous trouvons, $\Phi(\ell)$ étant nul pour $\ell = 0$ et pour $\ell = L$:

$$C_I = - \int_0^L \mathcal{A}_I d\Phi$$

soit, en remplaçant $d\Phi$ par sa valeur déduite de la formule (46) :

$$C_I = \frac{T_y}{I_z} \int_0^L \mathcal{A}_I y e d\ell + \frac{T_z}{I_y} \int_0^L \mathcal{A}_I z e d\ell$$

Or, si η et ζ sont les coordonnées du centre de torsion O , nous avons, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.1.2 :

$$C_I = (\eta - y_I) T_z - (\zeta - z_I) T_y$$

La comparaison des deux relations précédentes nous donne les formules qui permettent de calculer les coordonnées du centre de torsion :

$$\eta - y_I = \frac{1}{I_y} \int_0^L \mathcal{A}_I z e d\ell, \quad \zeta - z_I = - \frac{1}{I_z} \int_0^L \mathcal{A}_I y e d\ell \quad (47)$$

En particulier, si nous plaçons le point I au centre de gravité G :

$$\eta = \frac{1}{I_y} \int_0^L \mathcal{A}_G z e d\ell, \quad \zeta = - \frac{1}{I_z} \int_0^L \mathcal{A}_G y e d\ell$$

mais les formules (47) sont plus pratiques parce qu'il existe souvent un point I pour lequel l'expression de \mathcal{A}_I est simple.

Enfin, en plaçant le point I au centre de torsion, nous obtenons les relations suivantes, qui caractérisent le centre de torsion :

$$\int_0^L \mathcal{A}_O z e d\ell = 0, \quad \int_0^L \mathcal{A}_O y e d\ell = 0$$

Exemples :

— un profil en \square de hauteur $2h$, de largeur b , d'épaisseur d'âme e et d'épaisseur de membrane e' , a pour centre de torsion le point O de Gz (figure 25) défini par :

$$\overline{OI} = \frac{b^2 h^2 e'}{I_z} \approx (1/2)b \frac{1}{1 + (1/6)\alpha}$$

α désignant le rapport de la section de l'âme à la section d'une membrane ;

— le centre de torsion d'un profil circulaire de rayon R , d'épaisseur e et d'ouverture 2β (figure 26) est le point O de Gz défini par :

$$\overline{OI} = 2R \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$$

Pour $\beta = \pi$ (tube fendu suivant une génératrice) : $\overline{OI} = 2R$.

Pour $\beta = \pi/2$ (demi-cercle) : $\overline{OI} = (4/\pi)R$.

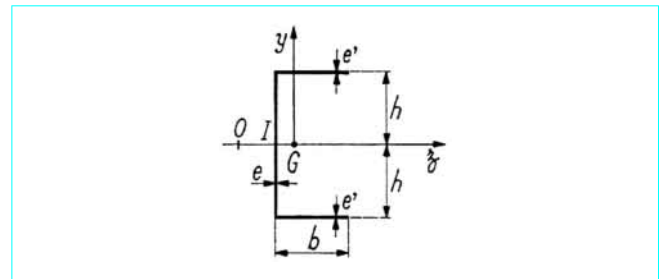


Figure 25 – Profil en \square : centre de torsion

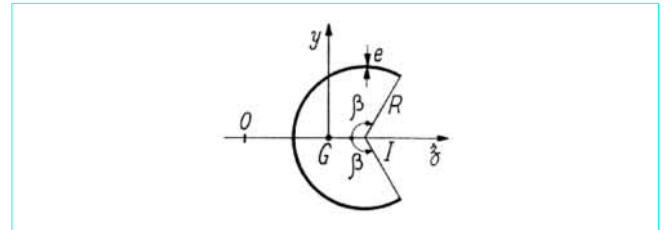


Figure 26 – Profil circulaire : centre de torsion

3.3.3 Déformation due à l'effort tranchant

La densité d'énergie de déformation W_e d'un élément de poutre a pour valeur :

$$W_e = \frac{1}{2G} \int_0^L \tau^2 e d\ell = \frac{1}{2G} \int_0^L \frac{\Phi^2}{e} d\ell$$

Le théorème de Castigliano (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) donne les composantes $\delta\Lambda_y$ et $\delta\Lambda_z$ du vecteur $\delta\vec{\Lambda}$ qui définit la déformation due à l'effort tranchant :

$$\delta\Lambda_y = - \frac{\partial W_e}{\partial T_y}, \quad \delta\Lambda_z = - \frac{\partial W_e}{\partial T_z}$$

Nous trouvons ainsi :

$$\delta\Lambda_y = - \frac{T_y}{GI_z^2} \int_0^L m_z^2 \frac{d\ell}{e} - \frac{T_z}{GI_y I_z} \int_0^L m_y m_z \frac{d\ell}{e}$$

$$\delta\Lambda_z = - \frac{T_y}{GI_y I_z} \int_0^L m_y m_z \frac{d\ell}{e} - \frac{T_z}{GI_y^2} \int_0^L m_y^2 \frac{d\ell}{e}$$

Ces relations montrent que les vecteurs \vec{T} et $\delta\vec{\Lambda}$ n'ont pas la même direction, même si \vec{T} est parallèle à l'un des axes centraux d'inertie ; il existe toutefois deux directions rectangulaires pour lesquelles les vecteurs \vec{T} et $\delta\vec{\Lambda}$ sont parallèles.

■ **Remarque** : il est aisé d'étendre les résultats précédents au cas d'une section ouverte comportant plusieurs branches (sections en Y ou en H, pont à poutres multiples sous chaussée). Il suffit d'orienter la ligne moyenne (\mathcal{L}) à plusieurs branches en choisissant une ou plusieurs extrémités libres comme origine. Tout point P de (\mathcal{L}) divise (\mathcal{L}) en deux parties, l'une (\mathcal{L}') située à l'amont de P et l'autre (\mathcal{L}'') située à l'aval de P . Les formules données dans ce paragraphe 3.3 sont encore exactes, à condition de remplacer

$$\int_0^L, \int_0^\ell \text{ et } \int_\ell^L \text{ respectivement par } \int_{(\mathcal{L})}, \int_{(\mathcal{L}')} \text{ et } \int_{(\mathcal{L}'')}.$$

3.4 Étude de la flexion simple déduite de la théorie de l'élasticité

3.4.1 Lignes de cisaillement

La contrainte de cisaillement n'est en général pas parallèle à Oy , ni indépendante de z , comme le suppose la théorie élémentaire (§ 3.2). Les *lignes de cisaillement* (figure 27) sont des courbes tangentes en tout point à la direction de la contrainte de cisaillement. Leur connaissance permet de calculer en tout point la valeur de la contrainte de cisaillement : il suffit d'écrire l'équilibre d'un prisme ayant pour base l'aire hachurée comprise entre deux lignes de cisaillement voisines et un arc $ab = e$ de trajectoire orthogonale ; si m désigne le moment statique de l'aire hachurée, on a :

$$\tau = \frac{Tm}{Ie}$$

On peut en déduire la section réduite relative à la déformation d'effort tranchant :

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{I^2} \iint_{\Sigma} \frac{m^2}{e^2} d\Sigma$$

Il n'est en général pas possible de tracer exactement les lignes de cisaillement, mais on peut souvent les déterminer approximativement en remarquant que les lignes voisines du contour sont parallèles à ce dernier, sauf dans les zones où la contrainte de cisaillement s'annule sur le contour, zones dans lesquelles les lignes de cisaillement sont normales au contour.

3.4.2 Solution de Saint-Venant (poutres à plan moyen)

Considérons une poutre droite à plan moyen de fibre moyenne Ox et de section constante. Cette poutre encastree pour $x = 0$ supporte une charge P à l'extrémité libre $x = \ell$; toutes les sections, dont les axes centraux d'inertie sont parallèles à Ox et à Oy , sont donc soumises au même effort tranchant T . Saint-Venant a déterminé les contraintes τ_3 et τ_2 , en supposant σ_2 , σ_3 et τ_1 nuls, et σ_1 donné par :

$$\sigma_1 = \frac{My}{I} = -\frac{T}{I}(\ell - x)y$$

Les équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité s'écrivent, compte tenu de la valeur de σ_1 :

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = -\frac{T}{I}y, \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial x} = 0$$

Les deux dernières équations montrent que τ_3 et τ_2 ne dépendent pas de x ; la première est vérifiée si l'on pose :

$$\tau_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{T}{2I}y^2 + f(z), \quad \tau_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{48}$$

$\varphi(y, z)$ étant une fonction de contrainte qu'il faut déterminer et $f(z)$ une fonction de z que nous choisirons ultérieurement.

Les conditions d'intégrabilité, dites **équations de Beltrami** (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales), se réduisent à :

$$\Delta \tau_2 = 0, \quad \Delta \tau_3 = -\frac{1}{1+\nu} \left(\frac{T}{I} \right)$$

Δ désignant le laplacien ($\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$) ; en remplaçant τ_2 et τ_3 par leurs expressions (48), nous trouvons :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Delta \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\Delta \varphi) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{I} \right) - \frac{d^2 f}{dz^2}$$

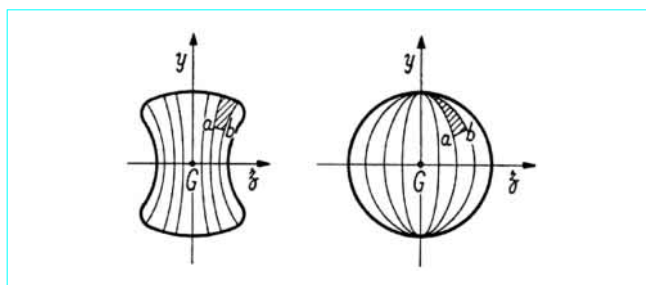


Figure 27 - Lignes de cisaillement

Il en résulte que φ est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta \varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{I} \right) z - \frac{df}{dz} \tag{49}$$

En effet, on peut montrer, la poutre n'étant pas soumise à la torsion, que la constante d'intégration est nulle.

Sur le contour, la condition (37) devient, compte tenu des valeurs (48) :

$$d\varphi = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{T}{I} \right) y^2 - f(z) \right] dz \tag{50}$$

Sur le contour, y est une fonction de z ; nous pouvons donc choisir $f(z) = (Ty^2)/(2I)$ de façon que φ , défini à une constante additive près, soit nul sur le contour. Donc, $f(z)$ étant ainsi choisi, la fonction φ est l'intégrale de l'équation (49) qui s'annule sur le contour de la section.

■ **Remarque** : on peut aussi choisir la fonction :

$$f(z) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{Tz^2}{2I} \right)$$

de façon que l'équation (49) se réduise à $\Delta \varphi = 0$. L'équation (50) permet de calculer les valeurs de φ le long du contour. Donc φ est une *fonction harmonique qui prend des valeurs données le long du contour*. Cette propriété a été utilisée pour déterminer expérimentalement la fonction φ ; si l'on porte normalement à la section les valeurs connues de φ le long du contour, on obtient une courbe gauche fermée ; en tout point (y, z) de la section, l'ordonnée d'une membrane (film de savon) uniformément tendue, limitée par cette courbe gauche, est égale à $\varphi(y, z)$ (§ 4.3.1).

3.4.3 Exemples de la solution de Saint-Venant

3.4.3.1 Section elliptique

Soit :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation du contour de la section. En prenant :

$$f(z) = \frac{T}{2I} \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 \right)$$

l'intégrale de l'équation (49) qui s'annule sur le contour est :

$$\varphi = \frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \left(\frac{T}{I} \right) \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) a^2 z$$

Les relations (48) donnent les composantes de la contrainte :

$$\tau_3 = \frac{2(1+\nu)a^2 + b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \left(\frac{T}{I} \right) \left[a^2 - y^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2 + b^2} z^2 \right]$$

$$\tau_2 = -\frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \left(\frac{T}{I} \right) yz$$

Au centre, la contrainte de cisaillement est maximale et se réduit à sa composante τ_3 :

$$\tau_3(0,0) = \left(\frac{Ta^2}{2I}\right) \frac{2(1+\nu)a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)}$$

Aux extrémités de l'axe horizontal ($z = \pm b$), la contrainte de cisaillement se réduit à sa composante τ_3 :

$$\tau_3(0,b) = \left(\frac{Ta^2}{I}\right) \frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)}$$

Lorsque b est petit devant a , compte tenu de la valeur de $I = (1/4)\pi a^3 b$ et de $S = \pi ab$, ces deux contraintes $\tau_3(0,0)$ et $\tau_3(0,b)$ sont sensiblement égales à la valeur donnée par la théorie élémentaire :

$$\frac{4}{3} \left(\frac{T}{S}\right) = \frac{Ta^2}{3I}$$

Si au contraire b est grand devant a , nous trouvons :

$$\tau_3(0,0) = \frac{2}{1+\nu} \left(\frac{T}{S}\right), \quad \tau_3(0,b) = \frac{4\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{S}\right)$$

La répartition des contraintes de cisaillement le long de Gz est loin d'être uniforme ; pour $\nu = 0,25$, on trouve $\tau_3(0,0) = 2\tau_3(0,b)$.

3.4.3.2 Section rectangulaire

Soit $2a$ et $2b$ les côtés du rectangle (figure 28) ; si nous prenons :

$$f(z) = \frac{Ta^2}{2I}$$

nous voyons que φ est l'intégrale de l'équation :

$$\Delta\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{I}\right) z$$

qui s'annule sur le contour. Les formules (48) donnent les composantes de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_3 = \frac{T}{2I} (a^2 - y^2) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \tau_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Il en résulte que la contrainte de composantes :

$$\tau'_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \tau'_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

est la contrainte qu'il convient d'ajouter à la contrainte de cisaillement donnée par la théorie élémentaire pour obtenir la solution correcte.

La fonction φ est la déformation d'une membrane uniformément tendue sur le contour du rectangle et soumise à une pression normale proportionnelle à z ; cette remarque permet de trouver une solution approchée lorsque le rapport b/a est très petit ou très grand.

— Lorsque b est petit devant a , on peut admettre que, loin des petits côtés, la surface de la membrane est un cylindre de génératrices parallèles à Gy , donc que φ ne dépend que de z ; on trouve ainsi :

$$\varphi(z) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{6I}\right) (z^3 - b^2 z)$$

Nous en déduisons la valeur de la contrainte τ_3 le long de Gz :

$$\tau_3 = \frac{T}{2I} \left[a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} [z^2 - (1/3)b^2] \right]$$

Cette contrainte est toujours très voisine de la contrainte donnée par la théorie élémentaire.

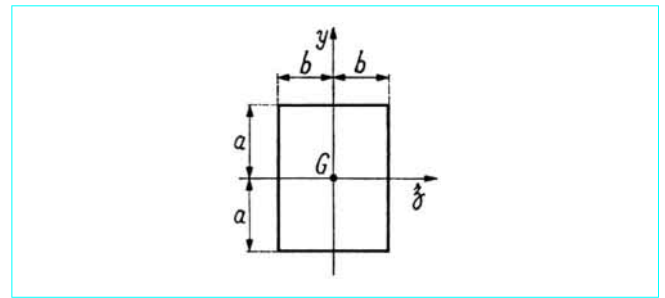


Figure 28 - Section rectangulaire de largeur $2b$ et de hauteur $2a$

— Lorsque b est grand devant a , on peut admettre que, loin des petits côtés, φ dépend linéairement de z ; nous trouvons ainsi :

$$\varphi(y,z) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T}{2I}\right) (y^2 - a^2) z$$

et la contrainte de cisaillement au centre du rectangle se réduit à sa composante τ_3 :

$$\tau_3(0,0) = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{3T}{2S}\right)$$

$\tau_3(0,0)$ est donc la contrainte donnée par la théorie élémentaire divisée par $(1+\nu)$.

Dans le cas général, la solution peut être trouvée en définissant la fonction φ par une série trigonométrique double :

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2a} \sin \frac{n\pi z}{a}$$

Le calcul, assez long, conduit aux expressions suivantes des contraintes de cisaillement au centre et aux extrémités de l'axe horizontal du rectangle :

$$\begin{aligned} \tau_3(0,0) &= \frac{3T}{2S} \left\{ 1 - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\} \\ &= \frac{3T}{2S} k_1 \left(\frac{a}{b}\right) \\ \tau_3(0,b) &= \frac{3T}{2S} \left\{ 1 + \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\} \\ &= \frac{3T}{2S} k_2 \left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

$k_1(a/b)$ et $k_2(a/b)$ sont les facteurs par lesquels il faut multiplier les valeurs données par la théorie élémentaire pour obtenir les valeurs exactes. Le tableau 2 donne quelques valeurs de k_1 et k_2 calculées avec $\nu = 0,25$.

Nota : pour une poutre de section rectangulaire, dont la hauteur est double de la largeur, la théorie élémentaire est exacte à 3 % près ; par contre, on notera l'importance du terme correctif dès que la hauteur est inférieure à la largeur. On remarquera également la différence avec la section elliptique (§ 3.4.3.1) ; dans cette dernière, la contrainte de cisaillement maximale a lieu au centre de la section, tandis que, dans la section rectangulaire, la contrainte de cisaillement maximale a lieu aux extrémités de l'axe horizontal.

Tableau 2 – Valeurs des coefficients k_1 et k_2 pour $\nu = 0,25$							
a/b	4	3	2	1	1/2	1/3	1/4
k_1	0,996	0,993	0,983	0,940	0,856	0,818	0,805
k_2	1,008	1,015	1,033	1,126	1,396	1,691	1,988

3.5 Poutres à plan moyen de hauteur rapidement variable

3.5.1 Poutre de section rectangulaire étroite

Lorsque la hauteur de la section varie rapidement, les formules données précédemment ne conduisent qu'à des valeurs approchées des contraintes réelles.

Dans le cas d'une section rectangulaire étroite de hauteur $2h$ (figure 29), le principe de Saint-Venant (§ 1.3.1) montre que les contraintes qui s'exercent sur une section AB sont les contraintes sur la section AB d'un coin de sommet O et d'ouverture 2α sollicité par une force Y et un couple Γ tels que :

$$T = Y, \quad M = Y \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} - \Gamma$$

On peut donc calculer les contraintes qui s'exercent sur la section AB en utilisant les formules de la théorie de l'élasticité relatives au coin (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales).

Les corrections sont faibles et peuvent être négligées lorsque l'angle α est inférieur à 10° .

3.5.2 Poutre en double té

Considérons (figure 30) une poutre en double té soumise à un moment fléchissant et à un effort normal, tels que la membrure supérieure soit comprimée et la membrure inférieure tendue. Dans une section donnée, la résultante des contraintes de compression qui s'exercent sur la membrure supérieure est une force de compression F tangente à la courbe décrite par le centre de gravité de la membrure supérieure ; cette force fait un angle α avec la tangente à la fibre moyenne. De même, la résultante des contraintes de traction qui s'exercent sur la membrure inférieure est une force de traction F' tangente à la courbe décrite par le centre de gravité de la membrure inférieure ; cette force fait un angle α' avec la tangente à la fibre moyenne.

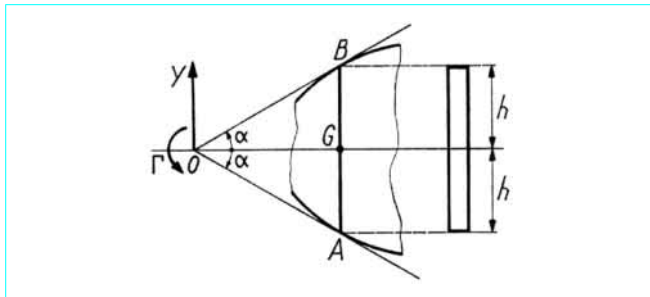


Figure 29 – Section rectangulaire étroite de hauteur variable

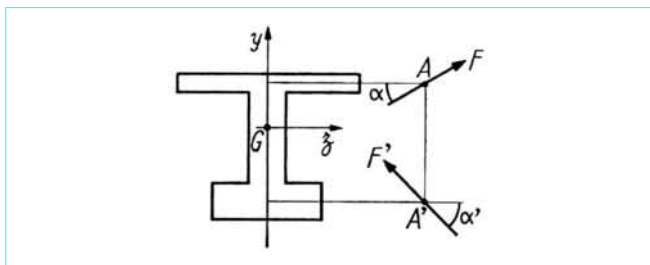


Figure 30 – Poutre en double té de hauteur variable

Le principe d'équivalence montre que la fraction de l'effort tranchant supportée par l'âme de la poutre, appelée *effort tranchant réduit*, a pour valeur :

$$T' = T - F \sin \alpha - F' \sin \alpha'$$

4. Contraintes et déformations dues au couple de torsion

4.1 Théorie élémentaire. Poutre de section circulaire

Considérons un élément de poutre de section circulaire compris entre deux sections voisines d'abscisses x et $x + dx$ (figure 31), soumis à un couple de torsion C . Le déplacement relatif de la section Σ par rapport à la section Σ' est une rotation θ autour de Ox ; la seule composante non nulle du vecteur $\delta \vec{\Omega}$ est donc $\delta \Omega_x = d\theta/dx$; le vecteur $\delta \vec{\Lambda}$ est nul.

L'angle initialement droit formé par une fibre PP' de longueur dx et par le rayon vecteur $OP = r$ varie de $r d\theta/dx$ pendant la torsion ; la section Σ est donc soumise, en vertu des relations entre les contraintes et les déformations en élasticité, à une contrainte de cisaillement :

$$\tau = -Gr \frac{d\theta}{dx}$$

normale au rayon vecteur OP ; G est le module d'élasticité transversale. Donc, si R est le rayon de la section, le couple de torsion C a pour valeur :

$$C = \int_0^R (r\tau) 2\pi r dr = -G \frac{d\theta}{dx} \int_0^R r^2 2\pi r dr$$

Ainsi, en désignant par $K = (1/2)\pi R^4$ le moment d'inertie polaire de la section, nous obtenons les formules :

$$\tau = \frac{Cr}{K}, \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{GK} \quad (51)$$

La théorie élémentaire de la torsion consiste à admettre que les formules (51) sont valables pour une section quelconque, K désignant le moment d'inertie polaire de la section par rapport à son centre de gravité. Cette théorie doit être abandonnée, car elle conduit, pour toute section qui n'est pas circulaire, à des résultats complètement faux pour les raisons suivantes : en premier lieu, la contrainte de cisaillement normale au rayon vecteur ne peut être tangente au contour ; en second lieu, les sections ne restent pas planes, et la distorsion d'un angle droit formé par OP et par une fibre PP' résulte du glissement dû à la rotation et du gauchissement de la section.

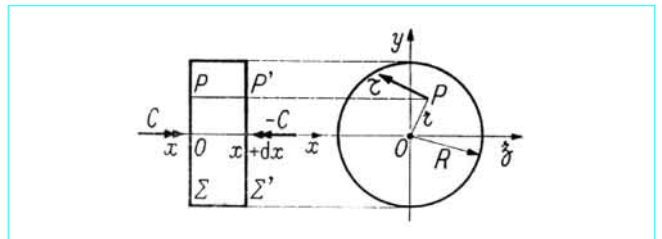


Figure 31 – Poutre de section circulaire soumise à un couple de torsion

Nous distinguerons la *torsion pure*, dans laquelle le gauchissement des sections est libre de se produire, et la *torsion gênée*, dans laquelle le gauchissement de certaines sections d'une poutre est empêché.

4.2 Torsion pure. Solution de Saint-Venant

4.2.1 Solution déduite de la théorie de l'élasticité

Considérons une poutre droite de section constante, soumise à un couple de torsion constant. L'axe Ox est le lieu des centres de torsion (§ 3.1.2) des sections de la poutre ; lorsque les sections admettent deux axes de symétrie rectangulaires, l'axe Ox est le lieu des centres de gravité des sections.

Saint-Venant a résolu le problème de la torsion pure en supposant les composantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et τ_1 du tenseur contrainte nulles ; dans ces conditions, les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial x} = 0$$

sont satisfaites si l'on peut trouver une fonction $\varphi(y, z)$ telle que :

$$\tau_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (52)$$

Les conditions d'intégrabilité dites **équations de Beltrami** (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales), se réduisent à :

$$\Delta \tau_2 = -\frac{\partial}{\partial y}(\Delta \varphi) = 0, \quad \Delta \tau_3 = \frac{\partial}{\partial z}(\Delta \varphi) = 0$$

La fonction de contrainte $\varphi(y, z)$ est donc une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta \varphi = A \quad (53)$$

A étant une constante dont nous préciserons plus loin la signification [équation (56)].

En outre, la contrainte de cisaillement devant être tangente au contour, nous devons avoir sur le contour de la section :

$$\tau_3 dz - \tau_2 dy = d\varphi = 0$$

La fonction de contrainte $\varphi(y, z)$ est donc l'intégrale de l'équation (53) qui prend des valeurs constantes sur chacune des courbes fermées constituant le contour. Si la section est simplement connexe, on peut supposer que φ est nulle sur la courbe unique constituant le contour, puisque φ n'est définie qu'à une constante additive près. Si la section est multiplement connexe, la fonction φ peut prendre des valeurs constantes différentes sur les courbes différentes constituant le contour.

Nous devons avoir (**principe d'équivalence**) :

$$\iint_{\Sigma} \tau_3 d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} \tau_2 d\Sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} (\tau_2 y - \tau_3 z) d\Sigma = C \quad (54)$$

On montre aisément, τ_3 et τ_2 étant donnés par les équations (52), que les deux premières équations (54) sont vérifiées et que la troisième est équivalente à l'équation :

$$C = 2 \iint_{\Sigma} \varphi d\Sigma \quad (55)$$

Les composantes u, v et w du déplacement sont données par les équations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \gamma_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \gamma_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}$$

Nous en déduisons, $p_1 = \theta$ étant la composante de la rotation suivant Ox (cf. article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans le traité Sciences fondamentales) :

$$\begin{aligned} dp_1 &= \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{1}{2G} \Delta \varphi dx \end{aligned}$$

soit, compte tenu de l'équation (53) :

$$A = 2G \frac{d\theta}{dx} \quad (56)$$

Enfin, on trouve pour expressions des composantes du déplacement :

$$u = \frac{1}{G} \chi(y, z), \quad v = -xz \frac{d\theta}{dx}, \quad w = xy \frac{d\theta}{dx}$$

la fonction $\chi(y, z)$, qui représente le *gauchissement*, étant définie par les relations :

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} Az, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} Ay$$

4.2.2 Exemples de la solution de Saint-Venant

4.2.2.1 Section elliptique

Soit :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse qui limite la section.

La fonction φ a pour expression :

$$\varphi = -\frac{C}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

Les composantes de la contrainte de cisaillement ont pour valeurs :

$$\tau_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{2Cz}{\pi ab^3}, \quad \tau_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2Cy}{\pi a^3 b}$$

Soit P un point du contour ; en un point M de OP , la contrainte de cisaillement est parallèle à la tangente en P au contour ; le long de OP , la contrainte de cisaillement varie linéairement de la valeur zéro en O à la valeur maximale en P . La plus grande valeur de la contrainte de cisaillement a lieu à l'extrémité du petit axe, alors que la théorie élémentaire donnerait l'extrémité du grand axe.

La déformation est définie par :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{K} \quad \text{avec } K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Compte tenu des valeurs de S , I_y et I_z :

$$S = \pi ab, \quad I_y = \frac{1}{4}\pi ab^3, \quad I_z = \frac{1}{4}\pi a^3 b$$

nous pouvons écrire K sous la forme :

$$K = \frac{S^4}{4\pi^2(I_y + I_z)}$$

formule souvent utilisée pour une section quelconque possédant deux axes de symétrie rectangulaires.

Enfin, le gauchissement est défini par :

$$u = \frac{C}{G} \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} yz$$

La section ne reste pas plane : u est positif pour les secteurs ($y > 0, z > 0$) et ($y < 0, z < 0$), et u est négatif pour les secteurs ($y > 0, z < 0$) et ($y < 0, z > 0$).

4.2.2.2 Section rectangulaire de côtés $2a$ et $2b$

On cherche la solution de l'équation (53) qui s'annule sur le contour de la plaque, sous la forme d'une série trigonométrique :

$$\varphi = \sum_{n=1,3,5} Z_n \cos \frac{n\pi y}{2a}$$

dont les coefficients Z_n sont des fonctions de z seulement ; on trouve ainsi :

$$\varphi = \frac{32Ga^2}{\pi^3} \frac{d\theta}{dx} \sum_{n=1,3,5} \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a}$$

Les formules (52) donnent ensuite les composantes de la contrainte de cisaillement. La valeur maximale de cette contrainte a lieu au milieu du grand côté. Supposons $b > a$; nous obtenons :

$$\tau_{max} = -2Ga \frac{d\theta}{dx} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \quad (57)$$

Le couple de torsion C , donné par la formule (55), a pour valeur :

$$C = -\frac{1}{3}G(2a)^3(2b) \frac{d\theta}{dx} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{a}{b} \right) \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (58)$$

Les séries qui figurent dans les formules (57) et (58) sont très rapidement convergentes. Nous pouvons écrire ces formules sous la forme :

$$\tau_{max} = -G(2a) \frac{d\theta}{dx} k, \quad C = -G(2a)^3(2b) \frac{d\theta}{dx} k_1$$

et il en résulte que :

$$\tau_{max} = \frac{C}{k_2(2a)^2(2b)} \quad \text{avec } k_2 = \frac{k_1}{k}$$

Les coefficients k , k_1 , et k_2 sont des fonctions du rapport $b/a > 1$; le tableau 3 donne quelques valeurs de ces coefficients.

Dans le cas d'un rectangle très étroit de hauteur b et d'épaisseur e , nous avons les formules :

$$\tau_{max} = \frac{C}{(1/3)be^2}, \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{(1/3)Gbe^3} \quad (59)$$

Tableau 3 – Valeurs des coefficients k , k_1 et k_2

b/a	k	k_1	k_2
1	0,675 3	0,140 58	0,208 17
1,1	0,719 8	0,153 98	0,213 93
1,2	0,758 8	0,165 12	0,218 93
1,3	0,792 7	0,177 06	0,223 36
1,4	0,822 2	0,186 90	0,227 34
1,6	0,869 4	0,203 74	0,234 33
1,8	0,904 4	0,217 43	0,240 42
2	0,930 1	0,228 68	0,245 88
2,5	0,968 1	0,249 37	0,257 59
3	0,985 4	0,263 32	0,267 21
3,5	0,993 4	0,273 31	0,275 14
4	0,997 0	0,280 81	0,281 67
4,5	0,998 6	0,286 65	0,287 04
5	0,999 4	0,291 32	0,291 50
6	0,999 9	0,298 32	0,298 36
7	1,000 0	0,303 32	0,303 33
8	1,000 0	0,307 07	0,307 07
9	1,000 0	0,309 99	0,309 99
10	1,000 0	0,312 33	0,312 33
12	1,000 0	0,315 83	0,315 83
14	1,000 0	0,318 33	0,318 33
16	1,000 0	0,320 20	0,320 20
18	1,000 0	0,321 66	0,321 66
20	1,000 0	0,322 83	0,322 83
∞	1	1/3	1/3

4.2.3 Densité d'énergie de déformation

La relation entre $d\theta/dx$ et le couple de torsion C , que l'on peut toujours écrire sous la forme :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{GK}$$

dans laquelle GK est la rigidité de torsion, montre que la densité d'énergie de déformation W_e a pour valeur :

$$W_e = -(1/2)C \frac{d\theta}{dx} = \frac{C^2}{2GK} \quad (60)$$

4.3 Analogie de la membrane. Applications

4.3.1 Étude de la déformation d'une membrane

Considérons une membrane, uniformément tendue sur un contour rigide L du plan Oyz , soumise à une pression normale q non nécessairement uniforme, et soit Q la tension de la membrane (effort de traction par unité de longueur d'une coupure). Proposons-nous de déterminer le déplacement w d'un point de la membrane normalement au plan Oyz . Nous supposons que le déplacement w est petit, de sorte que la tension Q reste constante et que les courbures de la surface de la membrane déformée puissent être assimilées à $\partial^2 w / \partial y^2$ et à $\partial^2 w / \partial z^2$. Dans ces conditions, l'équation d'équilibre d'un élément de membrane de côtés dy et dz parallèles aux axes Oy et Oz montre que le déplacement w est l'intégrale de l'équation :

$$\Delta w = -\frac{q}{Q} \quad (61)$$

qui s'annule sur le contour L .

On peut étudier également la déformation d'une membrane tendue sur un contour gauche L' obtenu en portant, à partir du contour plan L , une longueur w_0 normalement au plan de L . Pourvu que w soit petit, le déplacement transversal d'un point de la membrane est l'intégrale de l'équation (61) qui prend la valeur $w = w_0$ sur le contour L .

4.3.2 Analogie de la membrane

La comparaison des équations (53) et (61) montre que la fonction φ est égale au déplacement transversal d'une membrane uniformément tendue sur le contour L de la section (figure 32) et soumise à une pression définie par :

$$-\frac{q}{Q} = A = 2G \frac{d\theta}{dx} \quad (62)$$

Les formules (52) montrent que la contrainte de cisaillement en un point de la section est tangente à la ligne de niveau de la membrane passant par ce point. Donc, les lignes de niveau sont confondues avec les lignes de cisaillement.

Soit (β, γ) les cosinus directeurs de la normale intérieure à la ligne de niveau ; les cosinus directeurs de la tangente à la ligne de niveau sont $(\gamma, -\beta)$, et la grandeur de la contrainte de cisaillement est :

$$\tau = \gamma\tau_3 - \beta\tau_2 = \beta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dn}$$

$d\varphi/dn$ désignant la dérivée de φ suivant la normale intérieure à la ligne de niveau ; donc la contrainte de cisaillement en un point est égale à la pente maximale de la membrane en ce point.

Le calcul du couple de torsion montre que le couple de torsion est égal au double du volume balayé par la membrane pendant son déplacement. Ce résultat découle également de la formule (55).

Écrivons l'équilibre de la partie de la membrane intérieure à une ligne de niveau L' ; nous avons, S' désignant l'aire intérieure à L' et τ la pente de la membrane le long de L' :

$$qS' - \int_{L'} Q\tau d\ell = 0$$

Nous obtenons ainsi, compte tenu de l'équation (62), l'importante formule :

$$\int_{L'} \tau d\ell = -2GS' \frac{d\theta}{dx} \quad (63)$$

L'analogie de la membrane a été utilisée pour résoudre expérimentalement les problèmes de torsion en utilisant une membrane constituée par un film de savon.

4.3.3 Torsion pure des poutres dont la section est un profil mince ouvert

Considérons un rectangle étroit de hauteur b et d'épaisseur e ; loin des petits côtés du rectangle, la membrane déformée est un cylindre dont la section droite (figure 33) est la parabole funiculaire de la densité de charge q . Le déplacement maximal f de la membrane et sa pente maximale τ_{max} ont pour valeurs :

$$f = \frac{qe^2}{8Q}, \quad \tau_{max} = \frac{4f}{e} = \frac{qe}{2Q}$$

Le couple de torsion est égal au volume limité par le cylindre parabolique :

$$C = \frac{4}{3} fbe = \frac{qbe^3}{6Q}$$

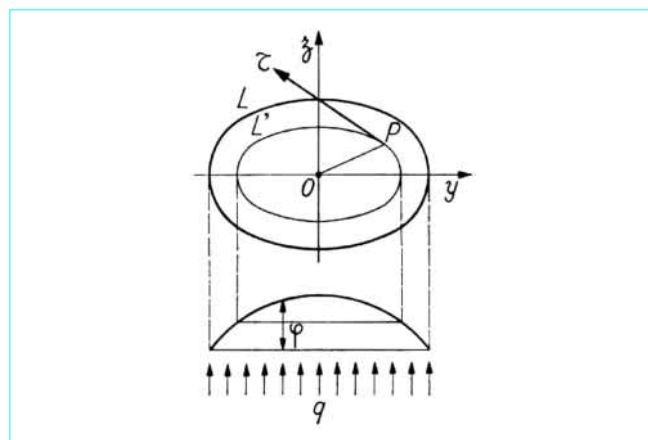


Figure 32 - Analogie de la membrane

Compte tenu de la valeur (62) de q/Q , nous retrouvons des formules déjà rencontrées au paragraphe 4.2.2.2 :

$$\tau_{max} = -Ge \frac{d\theta}{dx} = \frac{C}{(1/3)be^2}, \quad C = -\frac{1}{3} Gbe^3 \frac{d\theta}{dx} \quad (64)$$

L'analogie de la membrane montre que les formules (64) sont encore exactes pour une section étroite non nécessairement rectiligne, de longueur développée b et d'épaisseur e , la membrane déformée étant une surface canal dont la section droite est la parabole de la figure 33.

Dans le cas d'une section en \square ou en I dont l'âme est un rectangle de côtés b_1 et e_1 , et les membrures sont des rectangles de côtés b_2 et e_2 , l'analogie de la membrane montre que :

$$C = -\frac{1}{3} G \frac{d\theta}{dx} (b_1 e_1^3 + 2b_2 e_2^3)$$

Nous en déduisons la valeur de $d\theta/dx$:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{3C}{G(b_1 e_1^3 + 2b_2 e_2^3)}$$

et les valeurs des contraintes de cisaillement τ_1 et τ_2 au bord de l'âme et au bord des membrures :

$$\tau_1 = -Ge_1 \frac{d\theta}{dx} = \frac{3Ce_1}{b_1 e_1^3 + 2b_2 e_2^3}$$

$$\tau_2 = -Ge_2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{3Ce_2}{b_1 e_1^3 + 2b_2 e_2^3}$$

On notera que, dans le cas d'un profil mince ouvert, la contrainte de cisaillement varie linéairement, suivant l'épaisseur du profil, de la valeur τ_{max} sur un bord à la valeur $-\tau_{max}$ sur l'autre bord.

L'analogie de la membrane permet de calculer la contrainte de cisaillement τ_1 sur le bord intérieur d'un congé de rayon a (figure 34) ; nous pouvons supposer que, dans la partie courante du congé, la membrane déformée est une surface de révolution ; nous avons, la fonction φ ne dépendant que de la distance r au centre du congé :

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 2G \frac{d\theta}{dx} = -\frac{2\tau_1}{e}$$

τ_1 désignant la contrainte de cisaillement maximale en partie courante ; puisque dans le congé $\tau = -d\phi/dr$, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = \frac{2\tau_1}{e}$$

dont l'intégration est immédiate ; en admettant que τ s'annule pour $r = a + (1/2)e$, nous trouvons sur le bord intérieur du congé :

$$\tau_2 = -\left(1 + \frac{e}{4a}\right)\tau_1$$

4.3.4 Torsion des tubes minces

Nous utiliserons l'analogie de la membrane ; la fonction de contrainte ϕ prend la valeur zéro sur le contour extérieur de la section du tube et la valeur constante h sur le contour intérieur (figure 35).

Une section mn de la membrane par un plan normal à la ligne moyenne (\mathcal{L}) de la section du tube peut être considérée comme rectiligne ; donc, sur l'épaisseur e du tube, qui peut varier avec la section mn , la contrainte de cisaillement est *uniforme* et égale à :

$$\tau = \frac{h}{e}$$

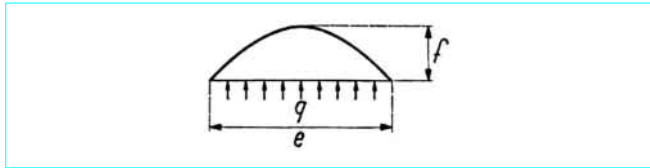


Figure 33 - Section en profil mince ouvert

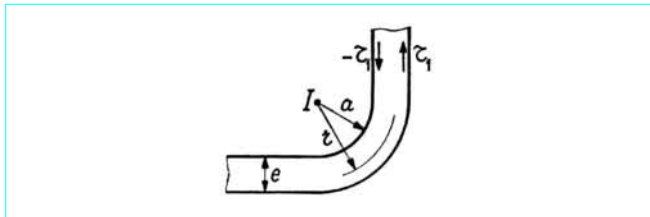


Figure 34 - Profil mince ouvert : contraintes de cisaillement

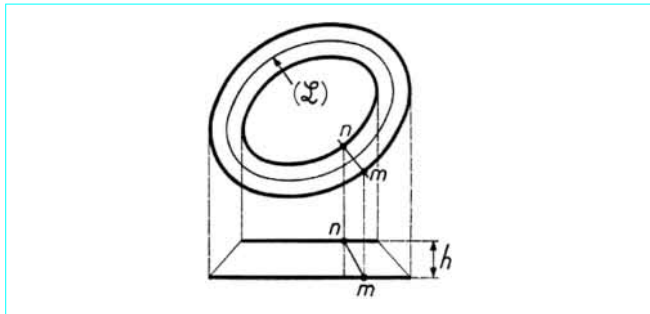


Figure 35 - Tube mince

Le couple de torsion est égal au double du volume balayé par la membrane ; donc, en désignant par Σ l'aire intérieure à la ligne moyenne (\mathcal{L}), qu'il ne faut pas confondre avec l'aire de la section du tube, on a :

$$C = 2\Sigma h$$

Nous déduisons des deux relations précédentes la formule qui donne la contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{C}{2\Sigma e} \tag{65}$$

Pour calculer $d\theta/dx$, appliquons la formule (63) en prenant pour courbe L' la ligne moyenne de la section du tube :

$$\int_{(\mathcal{L})} \tau d\ell = -2G\Sigma \frac{d\theta}{dx}$$

En remplaçant τ par sa valeur (65), nous obtenons la formule :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{GK} \quad \text{avec} \quad K = \frac{4\Sigma^2}{\int_{(\mathcal{L})} \frac{d\ell}{e}} \tag{66}$$

Lorsque l'épaisseur e est constante, en désignant par L la longueur de la ligne moyenne, nous avons :

$$K = \frac{4\Sigma^2 e}{L} \tag{67}$$

L'analogie de la membrane permet de calculer la contrainte de cisaillement τ_2 sur le bord intérieur d'un congé de rayon intérieur a (figure 34), en assimilant la membrane à une surface de révolution dans la zone du congé ; on trouve ainsi, en supposant e constant et en désignant par τ_1 la contrainte de cisaillement dans la partie courante de la section :

$$\tau_2 = \left[\frac{La}{2\Sigma} + \frac{1 - \frac{L}{4\Sigma}(2a + e)}{\frac{a}{e} \ln\left(1 + \frac{e}{a}\right)} \right] \tau_1$$

■ **Remarque** : la différence entre la torsion d'un profil mince fermé (tube) et la torsion d'un profil mince ouvert est considérable. Soit un tube circulaire de rayon R et d'épaisseur e soumis à un couple de torsion C ; les formules (65) et (66) donnent :

$$\tau' = \frac{C}{2\pi R^2 e}, \quad G\left(\frac{d\theta}{dx}\right)' = -\frac{C}{2\pi R^3 e}$$

Si le tube est fendu suivant une génératrice, les formules (64) donnent :

$$\tau'' = \frac{3C}{2\pi R e^2}, \quad G\left(\frac{d\theta}{dx}\right)'' = -\frac{3C}{2\pi R e^3}$$

Donc :

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{R}\right), \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)' / \left(\frac{d\theta}{dx}\right)'' = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{R}\right)^2$$

Par exemple, si $R = 30$ cm et $e = 1$ cm, le premier rapport est égal à 1/90 et le second à 1/2 700.

4.4 Torsion gênée des poutres dont la section est un profil mince ouvert

4.4.1 Calcul du gauchissement

Nous conservons les notations définies au paragraphe 3.3. Le calcul du gauchissement $u(\ell)$ est fondé sur les remarques suivantes : la rotation de la section s'effectue autour du centre de torsion O (§ 3.1.2) dont les coordonnées (η, ζ) sont données par les formules (47) ; l'angle de la tangente PT à la ligne moyenne (\mathcal{L}) du

profil et de la fibre PX reste droit pendant la torsion, puisque la contrainte de cisaillement moyenne due à la torsion pure suivant l'épaisseur du profil est nulle. Après torsion, les paramètres directeurs de la fibre PX ont donc pour valeurs (figure 36) :

$$dx, \quad -(z - \zeta)d\theta, \quad (y - \eta)d\theta$$

et les paramètres directeurs de la tangente PT sont (du, dy, dz) ; nous avons donc, puisque ces directions sont orthogonales :

$$du = [(z - \zeta)dy - (y - \eta)dz] \frac{d\theta}{dx} = -d\mathcal{A}_o \frac{d\theta}{dx}$$

$\mathcal{A}_o(\ell)$ désignant le double de l'aire du secteur OAP . En intégrant, nous trouvons, H désignant une constante :

$$u(\ell) = -[\mathcal{A}_o(\ell) + H] \frac{d\theta}{dx}$$

Lorsque $d\theta/dx$ est constant (*torsion pure*), la section ne supporte aucune contrainte normale.

Lorsque $d\theta/dx$ est fonction de x (*torsion gênée*), la section supporte une contrainte normale σ_1 uniformément distribuée sur l'épaisseur du profil :

$$\sigma_1(\ell) = -E \frac{\partial u}{\partial x} = E[\mathcal{A}_o(\ell) + H] \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

Puisque la section n'est soumise qu'à un couple de torsion, nous devons avoir les relations :

$$\int_0^L \sigma_1 e d\ell = 0, \quad \int_0^L \sigma_1 y e d\ell = 0, \quad \int_0^L \sigma_1 z e d\ell = 0$$

Les deux dernières sont toujours vérifiées, et la première donne la valeur de la constante H :

$$H = - \frac{\int_0^L \mathcal{A}_o e d\ell}{\int_0^L e d\ell}$$

Nous poserons :

$$\mathcal{A}^*(\ell) = \mathcal{A}_o(\ell) + H \quad (68)$$

Dans ces conditions, l'expression du gauchissement devient :

$$u(\ell) = -\mathcal{A}^*(\ell) \frac{d\theta}{dx} \quad (69)$$

et l'on voit que la fonction $\mathcal{A}^*(\ell)$ vérifie les relations :

$$\int_0^L \mathcal{A}^* e d\ell = 0, \quad \int_0^L \mathcal{A}^* y e d\ell = 0, \quad \int_0^L \mathcal{A}^* z e d\ell = 0$$

4.4.2 Calcul des contraintes. Rigidité au gauchissement

La contrainte normale σ_1 supportée par la section a pour valeur :

$$\sigma_1 = E\mathcal{A}^*(\ell) \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (70)$$

L'équilibre d'un petit élément de la poutre compris entre deux sections voisines d'abscisses x et $x + dx$ et deux fibres voisines d'abscisses curvilignes ℓ et $\ell + d\ell$ montre qu'il existe une contrainte

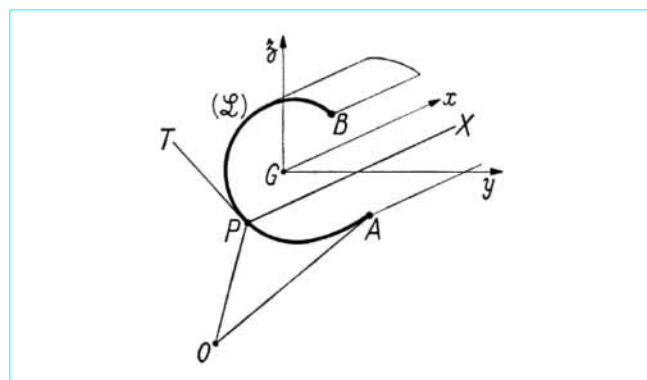


Figure 36 - Gauchissement d'un profil mince ouvert

de cisaillement τ uniformément distribuée sur l'épaisseur du profil ; la projection sur Gy des forces appliquées à l'élément ayant une somme nulle, nous obtenons l'équation :

$$\frac{\partial(\sigma_1 e)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau e)}{\partial \ell} = 0$$

Compte tenu de la valeur (70) de σ_1 , le flux $\Phi = \tau e$ de la contrainte de cisaillement est défini par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} = -E\mathcal{A}^*(\ell) e(\ell) \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

En intégrant, nous obtenons le flux de cisaillement $\Phi(\ell)$ nul pour $\ell = 0$ et pour $\ell = L$:

$$\Phi(\ell) = \tau e = -E \frac{d^3\theta}{dx^3} \int_0^\ell \mathcal{A}^*(t) e(t) dt \quad (71)$$

On vérifie facilement que les forces élastiques $\tau e d\ell$ ont une résultante générale nulle ; elles sont donc équivalentes à un couple de torsion C_2 :

$$C_2 = \int_0^L h \tau e d\ell = \int_0^L \Phi d\mathcal{A}^*$$

h désignant la distance du centre de torsion O à la ligne moyenne du profil. En intégrant par parties, la formule précédente devient :

$$C_2 = - \int_0^L \mathcal{A}^* d\Phi$$

Remplaçons $d\Phi$ par sa valeur déduite de (71) ; nous obtenons la formule :

$$C_2 = EK_1 \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (72)$$

dans laquelle EK_1 est la rigidité au gauchissement ; K_1 a pour valeur :

$$K_1 = \int_0^L (\mathcal{A}^*)^2 e d\ell \quad (73)$$

Donnons les valeurs de K_1 pour quelques sections.

■ **Section en double té** (figure 23)

Soit $2h$ et e la hauteur et l'épaisseur de l'âme, $2b$ et e' la largeur et l'épaisseur des membrures ; nous avons :

$$K_1 = \frac{4}{3} h^2 b^2 e'$$

■ **Section en □** (figure 25)

Nous avons :

$$K_1 = 2Jh^2 \left(1 + \frac{2h^3 e}{I_z} \right)$$

I_z désignant l'inertie de la section par rapport à Gz et J l'inertie transversale d'une membrure :

$$I_z = \frac{2}{3} h^2 (he + 3be'), \quad J = \frac{1}{12} b^3 e'$$

■ **Section circulaire ouverte** (figure 26)

Nous avons :

$$K_1 = \frac{2}{3} R^5 e \left[\beta^3 - 6 \frac{(\sin \beta - \beta \cos \beta)^2}{\beta - \sin \beta \cos \beta} \right]$$

■ **Pont à poutres sous chaussée** (figure 37)

Soit I_y l'inertie de la section par rapport à Gy :

$$I_y = \frac{2}{3} B^3 e + 2b^2 h e'$$

Le centre de torsion O est défini par :

$$\overline{IO} = \frac{h^2 b^2 e'}{I_y}$$

et K_1 a pour valeur :

$$K_1 = \frac{1}{6} h^3 b^2 e' \left(1 + \frac{2B^3 e}{I_y} \right)$$

4.4.3 Formule fondamentale de la torsion gênée

Lorsque le gauchissement de la section n'est pas libre, le couple de torsion est la somme du couple de torsion C_1 de torsion pure (§ 4.2) :

$$C_1 = -GK \frac{d\theta}{dx}$$

et du couple de torsion C_2 donné par (72) ; nous obtenons ainsi la **formule fondamentale de la torsion gênée** :

$$C = EK_1 \frac{d^3 \theta}{dx^3} - GK \frac{d\theta}{dx} \quad (74)$$

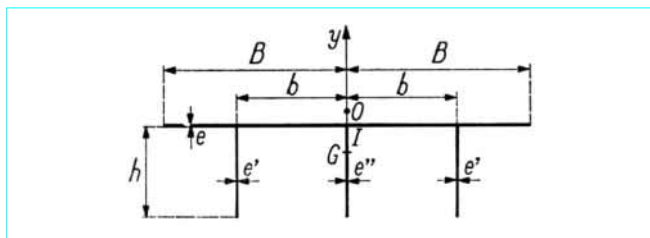


Figure 37 – Pont à poutres sous chaussée

La contrainte de cisaillement τ est la somme de la contrainte τ_1 due à C_1 et de la contrainte τ_2 due à C_2 ; τ_1 varie linéairement d'un bord à l'autre et s'annule sur la ligne moyenne ; τ_2 est uniformément distribuée sur l'épaisseur du profil.

Dans une *section astreinte à demeurer plane*, on a $u = 0$, donc $d\theta/dx = 0$ en vertu de la formule (69).

Dans une *section libre de se gauchir*, on a $\sigma_1 = 0$, donc $d^2\theta/dx^2 = 0$ en vertu de la formule (70).

■ **Application : torsion d'une console**

Considérons une console de longueur ℓ , dont la section est un profil mince ouvert. La section d'encastrement $x = 0$ demeure plane ; un couple appliqué à l'extrémité libre $x = \ell$ provoque un couple de torsion constant le long de la console ; $d\theta/dx$ est donc l'intégrale de l'équation différentielle (74) qui vérifie les conditions aux limites :

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \text{ pour } x = \ell$$

L'équation différentielle étant linéaire et à coefficients constants, le calcul ne présente aucune difficulté. En posant :

$$a^2 = \frac{EK_1}{GK}$$

nous trouvons :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{GK} \left(1 - \frac{\text{ch} \frac{\ell-x}{a}}{\text{ch} \frac{\ell}{a}} \right)$$

En intégrant, nous obtenons, θ étant nul pour $x = 0$:

$$\theta = -\frac{Ca}{GK} \left[\frac{x}{a} - \text{sh} \frac{x}{a} + \left(\text{ch} \frac{x}{a} - 1 \right) \text{th} \frac{\ell}{a} \right]$$

En particulier :

$$\theta(\ell) = -\frac{Ca}{GK} \left(\frac{\ell}{a} - \text{th} \frac{\ell}{a} \right)$$

a est une longueur caractéristique de la section : si a est petit vis-à-vis de ℓ , nous avons :

$$\theta(\ell) = -\frac{C(\ell-a)}{GK}$$

et si a est grand vis-à-vis de ℓ , nous avons :

$$\theta(\ell) = -\frac{C\ell^3}{3GKa^2} = -\frac{C\ell^3}{3EK_1}$$

4.4.4 Cas où la rigidité à la torsion pure est négligeable

La rigidité à la torsion pure GK est très faible lorsque l'épaisseur e du profil est petite. Dans ce cas, le couple de torsion C_1 peut être négligé devant le couple de torsion C_2 , donc on prendra $C = C_2$. Dans ces conditions, sous réserve que la poutre soit suffisamment raidie pour que les sections puissent être considérées comme indéformables, la formule (74) se réduit à :

$$C = EK_1 \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad (75)$$

En intégrant, nous obtenons la formule :

$$B = EK_1 \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (76)$$

dans laquelle le *bimoment* B est défini par la relation :

$$\frac{dB}{dx} = C \quad (77)$$

B étant nul dans les sections libres de se gauchir ($\sigma_1 = 0$).

La formule (70) donnant la contrainte normale σ_1 devient alors, compte tenu de la relation (76) :

$$\sigma_1 = \frac{B a^*}{K_1} \quad (78)$$

Enfin, la contrainte de cisaillement τ est donnée par la formule (71) qui devient, compte tenu de la relation (75) :

$$\tau = \frac{C a^*}{K_1 e} \quad (79)$$

a^* désignant l'intégrale :

$$a^* = - \int_0^\ell \mathcal{A}^*(t) e(t) dt = \int_\ell^L \mathcal{A}^*(t) e(t) dt$$

Remarque : on notera l'analogie complète des formules (75), (76), (77), (78) et (79) avec les formules classiques de la flexion des poutres à plan moyen :

$$T = EI \frac{d^3v}{dx^3}, \quad M = EI \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{dM}{dx} = C$$

$$\sigma_1 = \frac{My}{I}, \quad \tau = \frac{Tm}{Ie}$$

5. Formules de Bresse

5.1 Poutre gauche

Désignons (figure 2) par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unités des axes $Gx'y'z'$ liés à la section Σ dont le centre de gravité G a pour abscisse curviligne s . Il résulte des formules établies aux paragraphes 2, 3 et 4 que la déformation de la poutre au droit de la section Σ est définie par les vecteurs :

$$\delta\vec{\Lambda} = - \frac{N}{ES} \vec{i} - \frac{T_y}{GS_{1y}} \vec{j} - \frac{T_z}{GS_{1z}} \vec{k}$$

$$\delta\vec{\Omega} = - \frac{C}{GK} \vec{i} - \frac{M_y}{EI_y} \vec{j} - \frac{M_z}{EI_z} \vec{k}$$

S_{1y} et S_{1z} désignant les sections réduites relatives aux déformations dues aux efforts tranchants T_y et T_z .

Les **formules de Bresse** (12), qui donnent le déplacement de la section Σ , connaissant le déplacement de la section Σ_0 et les composantes des systèmes des forces extérieures relatifs aux sections comprises entre les sections Σ_0 et Σ , s'écrivent donc :

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{G_0G} - \int_{s_0}^s \left(\frac{N}{ES} \vec{i} + \frac{T_y}{GS_{1y}} \vec{j} + \frac{T_z}{GS_{1z}} \vec{k} \right) dt$$

$$- \int_{s_0}^s \left(\frac{C}{GK} \vec{i} + \frac{M_y}{EI_y} \vec{j} + \frac{M_z}{EI_z} \vec{k} \right) \wedge \overrightarrow{gG} dt \quad (80)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 - \int_{s_0}^s \left(\frac{C}{GK} \vec{i} + \frac{M_y}{EI_y} \vec{j} + \frac{M_z}{EI_z} \vec{k} \right) dt$$

On peut ajouter à la première formule (80) un déplacement $\varepsilon \overrightarrow{G_0G}$ pour tenir compte d'une dilatation uniforme ε provoquée par les variations de température ou le retrait.

Les équations (80) ne sont valables que si le déplacement ($\vec{\lambda}, \vec{\omega}$) est petit.

5.2 Poutre à plan moyen

5.2.1 Formules de Bresse

Dans le cas d'une poutre à plan moyen (figure 3), la déformation est définie par les vecteurs :

$$\delta\vec{\Lambda} = - \frac{N}{ES} \vec{i} - \frac{T}{GS_1} \vec{j}, \quad \delta\vec{\Omega} = \frac{M}{EI} \vec{k}$$

Les **formules de Bresse** s'écrivent donc :

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{G_0G} - \int_{s_0}^s \left(\frac{N}{ES} \vec{i} + \frac{T}{GS_1} \vec{j} - \frac{M}{EI} \vec{k} \wedge \overrightarrow{gG} \right) dt$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{s_0}^s \frac{M}{EI} \vec{k} dt \quad (81)$$

Dans ce cas, $\vec{\lambda}$ est contenu dans le plan moyen Oxy et $\vec{\omega}$ est normal au plan moyen. Les composantes (u, v) de $\vec{\lambda}$ suivant les axes Ox et Oy , et la composante ω et $\vec{\omega}$ sur l'axe Oz , tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct, sont donc données par les formules scalaires suivantes, équivalentes aux formules vectorielles (81) :

$$u = u_0 - \omega_0(y - y_0) - \int_{s_0}^s \frac{M(y - \eta)}{EI} dt$$

$$- \int_{s_0}^s \frac{N}{ES} \cos\theta dt + \int_{s_0}^s \frac{T}{GS_1} \sin\theta dt$$

$$v = v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{s_0}^s \frac{M(x - \xi)}{EI} dt$$

$$- \int_{s_0}^s \frac{N}{ES} \sin\theta dt - \int_{s_0}^s \frac{T}{GS_1} \cos\theta dt$$

$$\omega = \omega_0 + \int_{s_0}^s \frac{M}{EI} dt \quad (82)$$

Dans les formules (82), nous avons désigné par :

- $x = x(s)$ et $y = y(s)$ les coordonnées du point G d'abscisse curviligne s ;
- $x_0 = x(s_0)$ et $y_0 = y(s_0)$ les coordonnées du point G_0 d'abscisse curviligne s_0 ;
- $\xi = x(t)$ et $\eta = y(t)$ les coordonnées du point courant d'abscisse curviligne t ;

θ l'angle de l'axe Ox et de la tangente orientée au point courant de la fibre moyenne :

$$\cos\theta = \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=t} \quad \sin\theta = \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=t}$$

5.2.2 Conséquences des formules de Bresse

Décomposons la translation $\vec{\lambda}$ et la rotation $\vec{\omega}$ suivant le repère mobile $Gx'y'z'$:

$$\vec{\lambda} = U\vec{i} + V\vec{j}, \quad \vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

En dérivant la seconde équation (81) par rapport à s , nous obtenons la formule :

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{M}{EI} \tag{83}$$

Dérivons la première équation (81) par rapport à s ; nous trouvons :

$$\frac{d\vec{\lambda}}{ds} = \left(\vec{\omega}_0 + \int_{s_0}^s \frac{M}{EI} \vec{k} dt \right) \wedge \vec{i} - \frac{N}{ES} \vec{i} - \frac{T}{GS_1} \vec{j}$$

soit, compte tenu de la seconde équation (81), de $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ et de $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$:

$$\frac{d\vec{\lambda}}{ds} = \left(\omega - \frac{T}{GS_1} \right) \vec{j} - \frac{N}{ES} \vec{i}$$

Cette relation vectorielle est équivalente, comme on le voit en utilisant les formules :

$$\frac{d\vec{j}}{ds} = \frac{\vec{j}}{R}, \quad \frac{d\vec{i}}{ds} = -\frac{\vec{i}}{R}$$

R désignant le rayon de courbure de la fibre moyenne, aux deux relations scalaires :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{ds} - \frac{V}{r} &= -\frac{N}{ES} \\ \frac{dV}{ds} + \frac{U}{r} &= \omega - \frac{T}{GS_1} \end{aligned} \right\} \tag{84}$$

Remarque : lorsqu'on néglige la déformation due à l'effort tranchant, il suffit de faire $S_1 = \infty$ dans les formules (81), (82) et (84).

5.2.3 Substitution de la variable x à la variable s

La plupart du temps, les forces appliquées sont des forces de pesanteur normales à l'axe Ox . Il est donc logique de définir les sections de la poutre, non par l'abscisse curviligne s , mais par l'abscisse x de leur centre de gravité.

Si nous définissons des *valeurs réduites* I' , S' et S'_1 par les formules :

$$I' = I \cos \theta, \quad S' = S \cos \theta, \quad S'_1 = S_1 \cos \theta$$

les **formules de Bresse** (82) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - \omega_0(y - y_0) - \int_{x_0}^x \frac{M(y - \eta)}{EI'} d\xi \\ &\quad - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES'} \cos \theta d\xi + \int_{x_0}^x \frac{T}{GS'_1} \sin \theta d\xi \\ v &= v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M(x - \xi)}{EI'} d\xi \\ &\quad - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES'} \sin \theta d\xi - \int_{x_0}^x \frac{T}{GS'_1} \cos \theta d\xi \\ \omega &= \omega_0 + \int_{x_0}^x \frac{M}{EI'} d\xi \end{aligned} \right\} \tag{85}$$

Les formules de Bresse sont très utilisées sous cette forme notamment dans le calcul des arcs.

Lorsqu'on néglige les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant, nous déduisons des formules (85) les relations :

$$\frac{dv}{dx} = \omega, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

5.3 Poutre droite à plan moyen

5.3.1 Formules de Bresse

Soit une poutre droite à plan moyen, de fibre moyenne Ox , soumise à des forces parallèles à Oy (figure 4) ; les **formules de Bresse** s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES} d\xi \\ v &= v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M(x - \xi)}{EI} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{T}{GS_1} d\xi \\ \omega &= \omega_0 + \int_{x_0}^x \frac{M}{EI} d\xi \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

En dérivant la deuxième formule (86) par rapport à x , nous trouvons :

$$\frac{dv}{dx} = \omega - \frac{T}{GS_1} \tag{87}$$

Une nouvelle dérivation donne la formule :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \frac{d}{dx} \left(\frac{T}{GS_1} \right) \tag{88}$$

qui se réduit, lorsque S_1 est constant, à :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \frac{1}{GS_1} \frac{dT}{dx} = \frac{M}{EI} + \frac{p}{GS_1}$$

p désignant la densité de charge appliquée à la poutre.

Lorsque la déformation due à l'effort tranchant est négligeable, les formules précédentes deviennent :

$$\frac{dv}{dx} = \omega, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Nous avons donc, compte tenu de la relation (11), la formule :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = -p(x) \tag{89}$$

qui se réduit, dans le cas où I est constant, à :

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -p(x) \tag{90}$$

5.3.2 Rotation des sections extrêmes d'une poutre droite

Considérons une poutre droite AB de longueur ℓ (figure 38) dont les sections extrêmes A et B subissent des rotations ω_0 et ω_1 , et des translations $\vec{\lambda}_0$ et $\vec{\lambda}_1$ nulles. Soit M le moment fléchissant et

T l'effort tranchant dans la section d'abscisse x ; les deux dernières formules (86) s'écrivent :

$$0 = \omega_0 \ell + \int_0^\ell \frac{M(\ell-x)}{EI} dx - \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} dx$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} dx$$

Nous en déduisons immédiatement les rotations des sections extrêmes :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= - \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{M}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} dx \\ \omega_1 &= \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right) \frac{M}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} dx \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Supposons que les moments fléchissants dans les sections extrêmes A et B soient M_0 et M_1 , et que les charges directement appliquées à AB produisent dans la poutre AB , supposée sur appuis simples en A et B , un moment fléchissant $\mu(x)$; nous avons :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell} \\ T(x) &= \frac{dM}{dx} = \frac{d\mu}{dx} + \frac{M_1 - M_0}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

En effet, M prend la valeur M_0 pour $x=0$ et la valeur M_1 pour $x=\ell$, et satisfait, le long de la poutre, à l'équation :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\rho = \frac{d^2 \mu}{dx^2}$$

En reportant les expressions (92) dans les formules (91), nous obtenons les **équations fondamentales** qui permettent de calculer les *poutres droites hyperstatiques* :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega'_0 - aM_0 - bM_1 \\ \omega_1 &= \omega'_1 + bM_0 + cM_1 \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Dans les formules (93), ω'_0 et ω'_1 sont les rotations des sections extrêmes de la poutre AB supposée sur appuis simples :

$$\left. \begin{aligned} \omega'_0 &= - \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{\mu}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{GS_1} \\ \omega'_1 &= \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right) \frac{\mu}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{GS_1} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

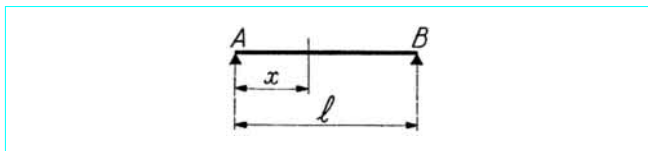


Figure 38 - Poutre droite à plan moyen

Notons que, lorsque S_1 est constant :

$$\int_0^\ell \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{GS_1} = \frac{1}{GS_1} \int_0^\ell d\mu = 0$$

Les coefficients a , b et c sont des caractéristiques de la poutre, appelés *coefficients de souplesse* :

$$\left. \begin{aligned} a &= \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \\ b &= \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} - \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \\ c &= \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Lorsque I et S_1 sont constants, a , b et c ont pour valeurs :

$$a = c = \frac{\ell}{3EI} + \frac{1}{\ell GS_1}, \quad b = \frac{\ell}{6EI} - \frac{1}{\ell GS_1} \quad (96)$$

Il suffit, lorsqu'on néglige la déformation due à l'effort tranchant, de faire $S_1 = \infty$ dans les formules (91), (94), (95) et (96).

5.4 Énergie de déformation d'une poutre

L'énergie de déformation $W_e ds$ de l'élément de poutre compris entre les sections Σ et Σ' a pour valeur, d'après l'expression de l'énergie de déformation due à Clapeyron (cf. article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) :

$$W_e ds = -\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{R}} \cdot \delta \vec{\Lambda} + \vec{\mathcal{M}} \cdot \delta \vec{\Omega}) ds$$

La densité d'énergie de déformation a donc pour valeur :

$$W_e = -\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{R}} \cdot \delta \vec{\Lambda} + \vec{\mathcal{M}} \cdot \delta \vec{\Omega})$$

Il en résulte que l'énergie de déformation d'une poutre gauche $G_0 G_1$ a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_{1y}} + \frac{T_z^2}{GS_{1z}} + \frac{C^2}{GK} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) ds \quad (97)$$

La formule (97) se réduit, dans le cas des poutres à plan moyen à la formule :

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_1} \right) ds \quad (98)$$

et, dans le cas des poutres droites à plan moyen, à la formule :

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_1} \right) dx \quad (99)$$

Références bibliographiques

- [1] BERTRAND de FONTVIOLANT. – *Résistance des matériaux*. Baillière.
- [2] BOUASSE (H.). – *Résistance des matériaux*. Delagrave (1920).
- [3] COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome 1 : 784 p., 3^eéd. (1971) ; tome 2, 842 p., Dunod (1971).
- [4] PIGEAUD (G.). – *Résistance des matériaux et élasticité*. 772 p., Gauthier-Villars (1928).
- [5] RÉVAL (J.). – *Résistance des matériaux*. Béranger.
- [6] TIMOSHENKO (S.P.). – *Résistance des matériaux*. Tome 1 : *Théorie élémentaire et problèmes*. 420 p., 359 fig., 20 tabl. (1963) ;
tome 2 : *Théorie développée et problèmes*. 480 p., 309 fig., Béranger (1954).
- [7] TIMOSHENKO (S.P.) et GOODIER (J.N.). – *Théorie de l'élasticité*. 544 p., 270 fig., 2^e éd. Béranger (1961).
- [8] RÉVAL (H.). – *Annales des Mines* (1862).

