

Résistance des matériaux

Structures élastiques à plan moyen

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Lignes d'influence	C 2 015 - 2
1.1 Généralités.....	— 2
1.2 Lignes d'influence d'un déplacement et d'une rotation.....	— 3
1.3 Réaction d'appui, moment fléchissant, effort tranchant et normal : lignes d'influence.....	— 3
2. Calcul numérique en Résistance des Matériaux	— 6
2.1 Propriétés de certaines intégrales.....	— 6
2.2 Intégration numérique.....	— 7
2.3 Interpolation.....	— 8
3. Poutres droites isostatiques	— 8
3.1 Poutre sur appuis simples.....	— 8
3.2 Console.....	— 12
3.3 Poutre console.....	— 14
3.4 Poutre cantilever.....	— 15
4. Structures indéformables	— 16
4.1 Poutre droite infiniment rigide sur appuis élastiques.....	— 16
4.2 Calcul d'une fondation sur pieux.....	— 18
5. Poutres droites hyperstatiques	— 18
5.1 Rappel de formules fondamentales.....	— 18
5.2 Poutre encastrée élastiquement à ses extrémités.....	— 18
5.3 Poutres continues.....	— 22
5.4 Poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés.....	— 28
6. Poutres courbes ou arcs	— 31
6.1 Généralités.....	— 31
6.2 Arc à trois articulations.....	— 32
6.3 Arc à deux articulations.....	— 32
6.4 Arc symétrique à une articulation.....	— 34
6.5 Arc symétrique encastré.....	— 35
6.6 Arc soumis à des forces quelconques.....	— 36
6.7 Compensation des arcs hyperstatiques.....	— 37
6.8 Arcs et poutres solidarisés par des suspentes verticales.....	— 38
6.9 Poutres à béquilles.....	— 39
7. Structures réticulées planes	— 40
7.1 Généralités. Définitions.....	— 40
7.2 Structures réticulées isostatiques.....	— 41
7.3 Structures réticulées hyperstatiques.....	— 44
8. Structures composées de poutres droites	— 46
8.1 Définition des structures étudiées.....	— 46
8.2 Formules préliminaires.....	— 46
8.3 Structures à nœuds invariables.....	— 48
8.4 Structures à nœuds déplaçables.....	— 51
8.5 Flexion des barres d'une structure réticulée à assemblages rigides.....	— 52
8.6 Poutres échelles. Calcul simplifié.....	— 52
Pour en savoir plus	Doc. C 2 015

Cet article est consacré à l'étude des structures composées de poutres ayant le même plan moyen et soumises à des forces contenues dans le plan moyen.

1. Lignes d'influence

1.1 Généralités

1.1.1 Définition des lignes d'influence

Une structure à plan moyen est une structure composée de poutres droites ou courbes ayant le même plan moyen, et soumise à des forces contenues dans le plan moyen.

Pour fixer les idées, supposons que la structure se réduise à une poutre AB, la généralisation s'étendant aisément aux structures plus complexes ; une section de la poutre AB est repérée par l'abscisse de son centre de gravité (figure 1).

Supposons que nous ayons à calculer un effet élastique \mathcal{F} pour des charges et des densités de charges variées dues à la pesanteur, donc parallèles à l'axe Oy.

Exemple

Cet effet élastique peut être :

- le déplacement ou la rotation d'une section donnée ;
- la réaction d'un appui, le moment fléchissant, l'effort tranchant ou l'effort normal dans une section donnée.

Il suffit pour résoudre ce problème de connaître la valeur $\mathcal{F}(\alpha)$ de l'effet élastique considéré sous l'effet d'une charge unité $P=1$ appliquée à la section de la poutre d'abscisse α . En effet, la valeur de l'effet \mathcal{F} dû à des charges concentrées P_i appliquées aux sections d'abscisses α_i est, la structure étant élastique :

$$\mathcal{F} = \sum_i P_i \mathcal{F}(\alpha_i) \tag{1}$$

et la valeur de l'effet \mathcal{F} dû à une densité de charge $p(\alpha)$ appliquée sur l'intervalle (α_0, α_1) est :

$$\mathcal{F} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p(\alpha) \mathcal{F}(\alpha) d\alpha$$

La fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ est la fonction d'influence de l'effet \mathcal{F} sous l'action d'une force verticale unité, et la courbe représentative de cette fonction est la ligne d'influence de l'effet \mathcal{F} sous l'action d'une force verticale unité.

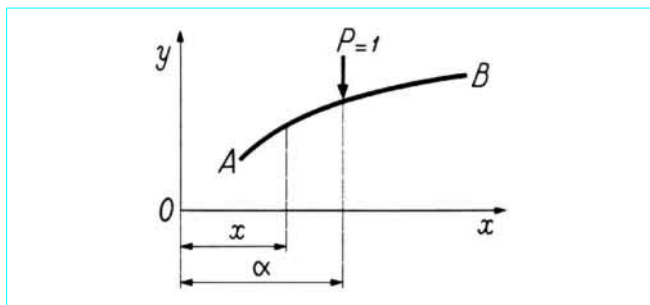


Figure 1 – Structure à plan moyen

1.1.2 Utilisation des lignes d'influence

Les lignes d'influence permettent de rechercher les valeurs extrêmes d'un effet élastique \mathcal{F} sous l'action de surcharges variées. Par exemple, si la ligne d'influence de l'effet \mathcal{F} comporte deux parties, l'une correspondant à des ordonnées positives et l'autre à des ordonnées négatives (figure 2), l'effet \mathcal{F} dû à une densité de charge constante p pouvant être appliquée à une partie quelconque de la poutre est toujours compris entre $-pA_2$ et pA_1 :

$$-pA_2 \leq \mathcal{F} \leq pA_1$$

A_1 désignant l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la partie de la ligne d'influence dont les ordonnées sont positives, et A_2 l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la partie de la ligne d'influence dont les ordonnées sont négatives.

Exemple : dans le cas d'un convoi, qui est un ensemble de charges concentrées dont les distances mutuelles sont invariables, on détermine les valeurs extrêmes de l'effet \mathcal{F} en essayant plusieurs positions du convoi circulant dans un sens ou dans l'autre ; il est commode pour cela de déplacer sur la ligne d'influence un schéma du convoi sur papier calque et d'utiliser pour chaque position du convoi la formule (1).

On peut donc déterminer aisément à l'aide des lignes d'influence le maximum et le minimum d'un effet \mathcal{F} dans une section donnée d'abscisse x . En portant sur l'ordonnée d'abscisse x ces valeurs extrêmes, on obtient les lignes enveloppes de l'effet considéré (moment fléchissant, effort tranchant, flèche, etc.), le long de la poutre.

1.1.3 Généralisation

On définit de même les lignes d'influence de l'effet \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(\alpha)$$

dues à l'action d'une force horizontale unité et d'un couple unité appliqués au centre de gravité de la section d'abscisse α .

Il est remarquable que les fonctions d'influence $\mathcal{F}(\alpha)$, $\mathcal{F}_1(\alpha)$ et $\mathcal{F}_2(\alpha)$ soient liées par des relations qu'il est utile de connaître, car elles permettent de contrôler rapidement certains calculs.

En considérant un couple unité comme équivalent à une charge P appliquée au point G d'abscisse α et à une charge $-P$ appliquée au point G' d'abscisse $\alpha + d\alpha$ telles que $P d\alpha = 1$, nous trouvons :

$$\mathcal{F}_2(\alpha) = -\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}$$

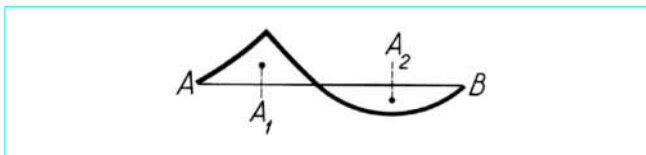


Figure 2 – Ligne d'influence

De même, en considérant un couple unité comme équivalent à une force horizontale Q appliquée au point G et à une force horizontale $-Q$ appliquée en G' telles que $Q \operatorname{tg} \theta \, d\alpha = 1$ (figure 3), nous trouvons, θ désignant l'angle de Ox et de la tangente à la fibre moyenne en G :

$$\mathcal{F}_2(\alpha) = -\frac{d\mathcal{F}_1}{d\alpha} \operatorname{cotg} \theta$$

La comparaison des deux formules précédentes montre que :

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{d\alpha} = \frac{d\mathcal{F}}{d\alpha} \operatorname{tg} \theta$$

1.2 Lignes d'influence d'un déplacement et d'une rotation

Le **théorème de réciprocité de Maxwell-Betti** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*) conduit immédiatement aux résultats suivants.

1.2.1 Ligne d'influence d'un déplacement

La ligne d'influence du déplacement suivant une direction Δ d'un point A de la fibre moyenne d'une poutre sous l'action d'une force unité, parallèle à une direction Δ' , appliquée au centre de gravité d'une section variable B , est la ligne représentative de la projection sur la direction Δ' des déplacements des points de la fibre moyenne sous l'action d'une force unité agissant au point A suivant la direction Δ .

Nous avons en effet (figure 4), d'après le théorème de réciprocité, $AA' = BB'$.

Le résultat précédent permet de se rendre compte immédiatement de la forme des lignes d'influence.

Par **exemple**, la figure 5 donne la forme de la ligne d'influence du déplacement vertical (ou *flèche*) de la section C sous l'action d'une charge unité dans une poutre encastree en A et simplement appuyée en B .

La figure 6 donne la forme de la ligne d'influence du déplacement horizontal de la section A d'une poutre à béquilles sous l'action d'une charge unité.

De même, la ligne d'influence du déplacement suivant une direction Δ d'un point A de la fibre moyenne d'une poutre sous l'action d'un couple unité appliqué à une section variable est la ligne représentative des rotations des sections de la poutre sous l'action d'une force appliquée en A suivant la direction Δ .

1.2.2 Ligne d'influence d'une rotation

La ligne d'influence de la rotation d'une section donnée d'une poutre sous l'action d'une force unité, parallèle à une direction Δ' , appliquée à une section variable, est la ligne représentative de la projection sur Δ' des déplacements des points de la fibre moyenne sous l'action d'un couple unité appliqué à la section donnée.

Par **exemple**, la figure 7 donne la forme de la ligne d'influence de la rotation de la section A d'une poutre à béquilles sous l'action d'une charge unité, forme variant suivant la raideur relative des béquilles et de la poutre.

De même, la ligne d'influence de la rotation d'une section donnée sous l'action d'un couple unité agissant dans une section variable est la ligne représentative des rotations de la poutre sous l'action d'un couple unité appliqué à la section donnée.

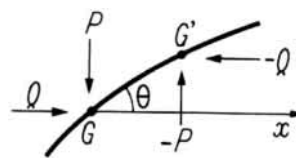


Figure 3 – Structure soumise à un couple unité

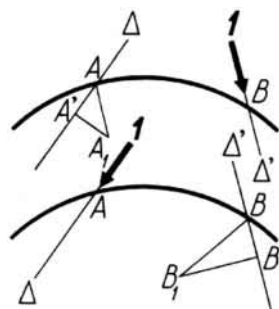


Figure 4 – Recherche de la ligne d'influence d'un déplacement

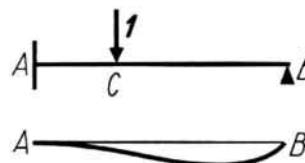


Figure 5 – Ligne d'influence du déplacement vertical, ou flèche en C

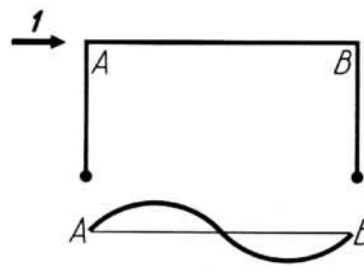


Figure 6 – Ligne d'influence du déplacement horizontal en A

1.3 Réaction d'appui, moment fléchissant, efforts tranchant et normal : lignes d'influence

Les méthodes que nous allons donner permettent de se rendre compte très rapidement de la forme des lignes d'influence. Ce ne sont pas toujours les méthodes les plus rapides pour obtenir quantitativement les lignes d'influence, mais elles permettent d'obtenir des propriétés générales des lignes d'influence. Ces propriétés et la forme des lignes d'influence sont en outre un moyen de contrôle précieux.

Nous distinguerons les *structures isostatiques* et les *structures hyperstatiques* (article *Méthodes de calcul des structures élastiques* [A 330] dans le traité *Sciences fondamentales*).

1.3.1 Structures isostatiques

Nous raisonnerons dans le cas des lignes d'influence sous l'action d'une charge verticale unité. La méthode de recherche des lignes d'influence est fondée sur l'emploi du **théorème des travaux virtuels** (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans le traité *Sciences fondamentales*). Nous supposons la charge unité P appliquée à la section d'abscisse α .

1.3.1.1 Ligne d'influence d'une réaction d'appui R

Pour calculer la réaction d'appui R correspondant à la charge P , supprimons la liaison donnant lieu à la réaction R , et remplaçons-la par une force égale à la réaction R . La structure devient un mécanisme à un degré de liberté, auquel nous pouvons donner un déplacement virtuel ; si δy est le déplacement virtuel du point d'application de P suivant la direction de P , et δv le déplacement virtuel du point d'application de R suivant la direction de R , nous avons en vertu du théorème des travaux virtuels :

$$R \delta v - P \delta y = 0 \text{ soit } R = P \frac{\delta y}{\delta v}$$

Si, quelle que soit la section variable où est appliquée la charge P , nous gardons le même déplacement virtuel, δv sera une constante et δy une fonction de α qui est à un facteur près l'ordonnée de la ligne d'influence. Comme le déplacement virtuel ne dépend que d'un paramètre, il suffira de calculer une seule ordonnée de la ligne d'influence pour la déterminer complètement. Or, lorsque P est appliquée au droit de l'appui considéré, on a $\delta y = \delta v$; donc l'ordonnée de la ligne d'influence d'une réaction est égale à l'unité dans la section d'application de la réaction.

La figure 8 donne, à titre d'exemple, la détermination de la ligne d'influence de la réaction R à l'appui B d'une poutre cantilever $ABCD$: la poutre CD repose en C sur l'extrémité de la poutre console ABC .

1.3.1.2 Ligne d'influence d'un moment fléchissant M

Le moment fléchissant dans une section X peut être considéré comme une réaction intérieure. On supprime la liaison donnant lieu à cette réaction en introduisant une articulation dans la section X et en maintenant l'équilibre en appliquant un couple $+M$ à gauche de X et un couple $-M$ à droite de X . On peut alors donner à la structure un déplacement virtuel ; si $\delta \theta$ est la rotation relative des deux tronçons aboutissant à l'articulation X et si δy est le déplacement du point d'application de P suivant la direction de P , nous avons :

$$-M \delta \theta - P \delta y = 0 \text{ soit } M = -P \frac{\delta y}{\delta \theta}$$

Donc, si l'on prend le même déplacement virtuel quelle que soit la section où est appliquée la charge P , δy est une fonction de α égale à l'ordonnée de la ligne d'influence de M . La ligne d'influence de M a donc un *point anguleux* au droit de la section X , et il est facile de voir que la variation de pente de la ligne d'influence à la traversée de la section X est -1 . Cette propriété suffit à déterminer complètement la ligne d'influence.

La figure 9 donne, à titre d'exemple, la détermination de la ligne d'influence de M dans la section X de la poutre cantilever $ABCD$.

1.3.1.3 Ligne d'influence d'un effort tranchant T

L'effort tranchant T peut être considéré comme une réaction intérieure. On supprime la liaison correspondant en sciant la poutre normalement à la fibre moyenne dans la section X , et l'on applique une force $-T$ à gauche de X et une force T à droite de X . On peut alors donner à la structure un déplacement virtuel ; si δv est le déplacement relatif des deux tronçons aboutissant en X (figure 10), et si

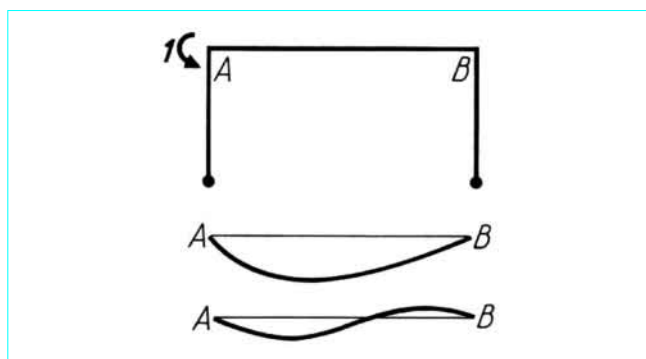


Figure 7 - Ligne d'influence de la rotation en A

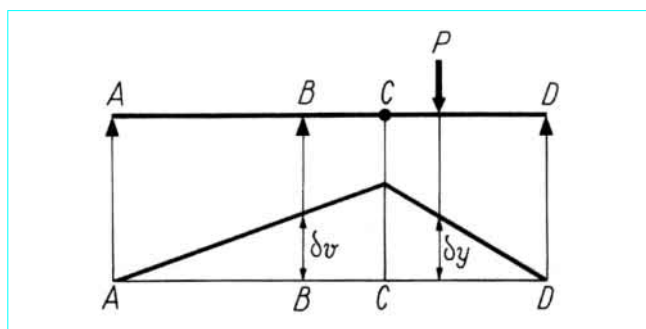


Figure 8 - Ligne d'influence de la réaction à l'appui B d'une poutre cantilever

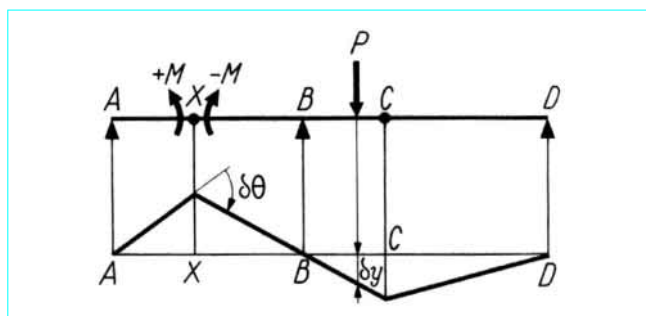


Figure 9 - Ligne d'influence du moment fléchissant en X dans une poutre cantilever

δy est le déplacement du point d'application de P suivant la direction de P , nous avons :

$$T \delta v - P \delta y = 0 \text{ soit } T = P \frac{\delta y}{\delta v}$$

Donc, si l'on prend le même déplacement virtuel quelle que soit la section où est appliquée la charge P , δy est une fonction de α égale à l'ordonnée de la ligne d'influence de T . Il en résulte que la ligne d'influence de T présente une *discontinuité* au droit de la section X ; il est aisé de montrer que cette discontinuité est égale à $\cos \theta$ (soit 1 dans le cas d'une poutre droite horizontale), θ désignant l'angle de Ox et de la tangente en X à la fibre moyenne. Cette propriété suffit à déterminer complètement la ligne d'influence.

La figure 11 donne, à titre d'exemple, la détermination de la ligne d'influence de T dans la section X de la poutre cantilever $ABCD$.

1.3.1.4 Ligne d'influence d'un effort normal N

L'effort normal N peut être considéré comme une réaction intérieure. On supprime la liaison correspondante en sciant la poutre normalement à la fibre moyenne dans la section X et en ne permettant que des déplacements relatifs parallèles à la tangente à la fibre moyenne (par exemple, au moyen d'un piston plongeant dans un cylindre), et l'on applique une force $-N$ à gauche de X et une force N à droite de X . On peut alors donner à la structure un déplacement virtuel ; si δu est le déplacement relatif des deux tronçons aboutissant en X (figure 12), et si δy est le déplacement du point d'application de P suivant la direction de P , nous avons :

$$N\delta u - P\delta y = 0 \quad \text{soit} \quad N = P \frac{\delta y}{\delta u}$$

Donc, si l'on prend le même déplacement virtuel quelle que soit la section où est appliquée la charge P , δy est une fonction de α égale à l'ordonnée de la ligne d'influence de N . Il est aisé de montrer que la ligne d'influence de N présente une *discontinuité* égale à $\sin \theta$ au droit de la section X . Cette propriété suffit à déterminer complètement la ligne d'influence.

Donnons, à titre d'**exemple**, la détermination de la ligne d'influence de l'effort normal dans la section X de l'arc à trois articulations ACB (figure 13). Dans un déplacement virtuel, le tronçon AX tourne autour de A , le tronçon CB tourne autour de B , et le tronçon XC tourne autour du centre instantané I situé à l'intersection de BC et de la parallèle AI à la normale à la fibre moyenne en X . Nous en déduisons immédiatement la ligne d'influence $ad''cb$ de l'effort normal, avec $d''d''' = \sin \theta$.

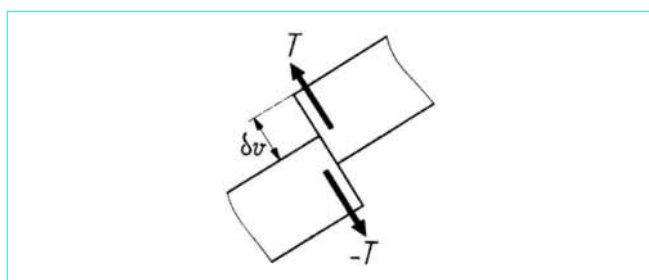


Figure 10 - Effort tranchant

d'abscisse α . La méthode de recherche est fondée sur le **théorème de réciprocité de Maxwell-Betti**.

1.3.2.1 Ligne d'influence d'une réaction d'appui R

Pour déterminer la ligne d'influence de R , nous supprimons dans la structure S la liaison donnant lieu à la réaction R ; nous obtenons une structure S' qui ne peut plus être déplacée virtuellement, comme dans le cas où S est isostatique (§ 1.3.1).

Appliquons le théorème de réciprocité à la structure S' :

a) le premier système de forces comprend la charge unité P et la réaction correspondante R ; le déplacement du point d'application A de R est donc nul ;

b) le second système de forces se réduit à une force F quelconque appliquée en A à la place de R ; le déplacement du point A est δv , et le déplacement du point d'application de la charge unité est δy , fonction de α .

Le théorème de réciprocité se traduit par la relation :

$$R\delta v - P\delta y = 0 \quad \text{soit} \quad R = P \frac{\delta y}{\delta v}$$

Il en résulte que δy est, à un facteur près, l'ordonnée de la ligne d'influence de R . Au droit du point A , cette ordonnée a pour valeur 1.

La figure 14 montre la détermination de la ligne d'influence de la réaction en A d'une poutre AB simplement appuyée en A et encastree en B .

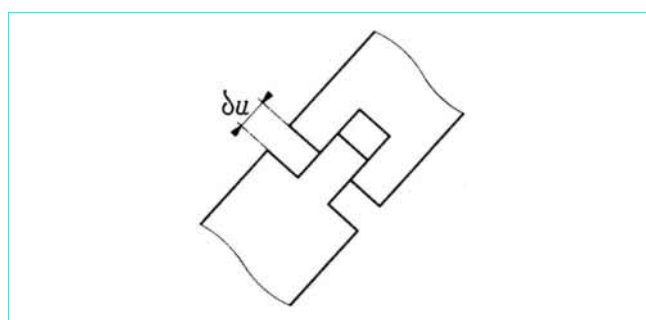


Figure 12 - Effort normal

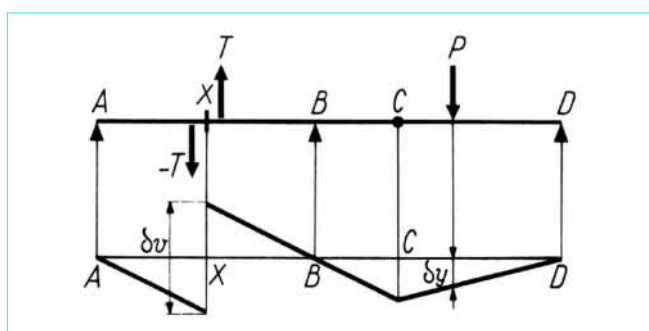


Figure 11 - Ligne d'influence de l'effort tranchant en X dans une poutre cantilever

1.3.2 Structures hyperstatiques

Nous raisonnons toujours dans le cas des lignes d'influence sous l'action d'une charge verticale unité appliquée dans la section

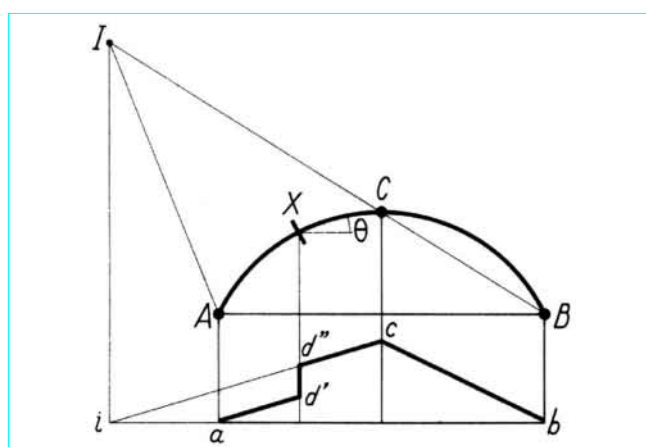


Figure 13 - Ligne d'influence de l'effort normal en X dans un arc à trois articulations

1.3.2.2 Ligne d'influence d'un moment fléchissant M

Nous ne reprendrons pas un raisonnement identique à celui fait au paragraphe 1.3.2.1 ; on trouve pour valeur du moment fléchissant M dans la section X :

$$M = -P \frac{\delta y}{\delta \theta}$$

δy et $\delta \theta$ sont définis de la façon suivante : on introduit une articulation dans la section X , et l'on applique de part et d'autre de X deux couples opposés ; δy est le déplacement vertical d'une section quelconque d'abscisse α , et $\delta \theta$ la rotation des extrémités aboutissant en X ; δy est donc, à un facteur près, l'ordonnée de la ligne d'influence de M . Cette ligne d'influence a un *point anguleux* en X , la variation de pente étant égale à -1 .

La figure 15 montre la forme de la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section X d'une poutre continue à deux travées ABC .

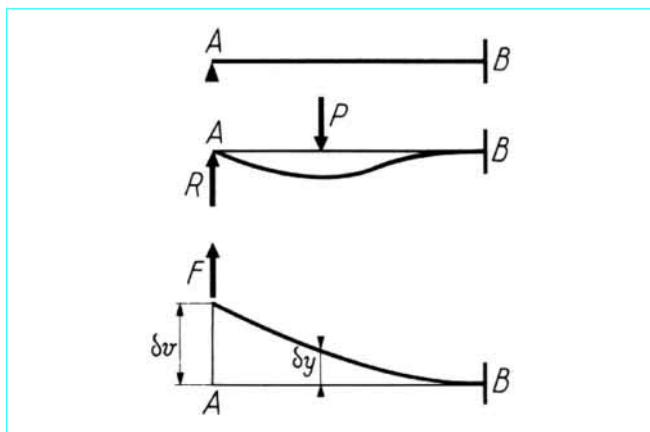


Figure 14 – Ligne d'influence d'une réaction d'appui

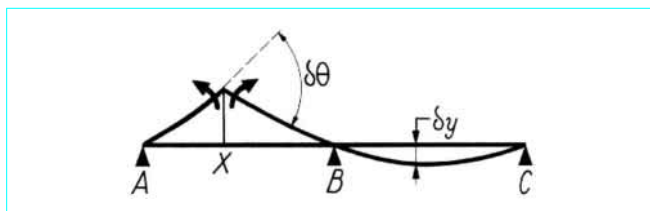


Figure 15 – Ligne d'influence du moment fléchissant en X dans une poutre continue à deux travées

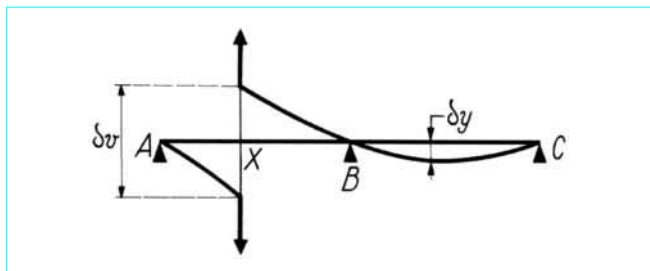


Figure 16 – Ligne d'influence de l'effort tranchant en X dans une poutre continue à deux travées

1.3.2.3 Ligne d'influence d'un effort tranchant T

Le même raisonnement conduit au résultat suivant : pour trouver la ligne d'influence de T dans la section X , nous scions la poutre normalement à la fibre moyenne dans la section X (figure 10), et nous appliquons aux faces de sciage en regard deux forces opposées quelconques normales à la fibre moyenne. Si δy est le déplacement vertical d'une section quelconque d'abscisse α , et si δv est le déplacement relatif, normal à la fibre moyenne, des faces en regard, l'effort tranchant T a pour valeur :

$$T = P \frac{\delta y}{\delta v}$$

δy est donc, à un facteur près, l'ordonnée de la ligne d'influence de T . Il est aisé de montrer que la ligne d'influence de T présente au droit de la section X une *discontinuité* égale à $\cos \theta$ (soit 1 dans le cas d'une poutre droite horizontale), θ désignant l'angle de Ox et de la tangente à la fibre moyenne dans la section X .

La figure 16 donne la forme de la ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section X d'une poutre continue à deux travées ABC .

1.3.2.4 Ligne d'influence d'un effort normal N

De même, pour trouver la ligne d'influence de N dans la section X , nous scions la poutre normalement à la fibre moyenne dans la section X et interposons entre les faces en regard une liaison ne permettant que des déplacements relatifs parallèles à la tangente à la fibre moyenne (figure 12). Appliquons de part et d'autre de la section X deux forces opposées quelconques tangentes à la fibre moyenne. Si δy est le déplacement vertical d'une section quelconque d'abscisse α et si δu est le déplacement relatif des faces en regard, l'effort normal a pour valeur :

$$N = P \frac{\delta y}{\delta u}$$

δy est donc, à un facteur près, l'ordonnée de la ligne d'influence de N . Il est aisé de montrer que la ligne d'influence de N présente au droit de la section X une *discontinuité* égale à $\sin \theta$.

2. Calcul numérique en Résistance des Matériaux

2.1 Propriétés de certaines intégrales

2.1.1 Définition des fonctions $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$

Nous rencontrons souvent, en particulier dans la recherche des lignes d'influence, des fonctions définies par des intégrales appartenant aux types suivants :

$$F(\alpha) = \int_0^\ell \mu(\alpha, x) f(x) dx \quad (2)$$

$$G(\alpha) = \int_0^\ell \mu_x(\alpha, x) f(x) dx \quad (3)$$

les fonctions $\mu(\alpha, x)$ et $\mu_x(\alpha, x)$ étant définies par :

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_x(\alpha, x) = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (5)$$

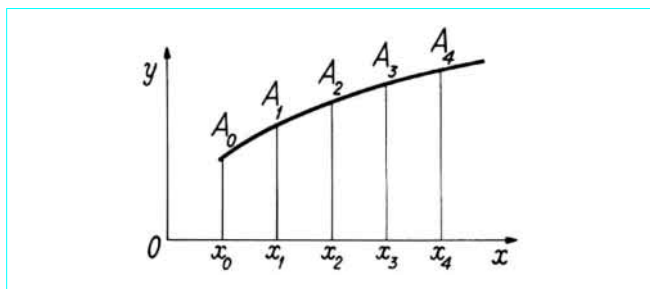


Figure 17 - Intégration numérique

2.3 Interpolation

2.3.1 Interpolation linéaire

Connaissant $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$, la valeur approchée de $f(x_0 + \theta h)$ avec $0 < \theta < 1$ est donnée par la formule :

$$f_1(x_0 + \theta h) = (1 - \theta) f(x_0) + \theta f(x_0 + h) \quad (8)$$

ce qui revient à remplacer dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$ la courbe représentative de $f(x)$ par un segment de droite.

On démontre que l'erreur commise $\varepsilon = f(x_0 + \theta h) - f_1(x_0 + \theta h)$ vérifie l'inégalité :

$$|\varepsilon| < \frac{1}{8} M'' h^2$$

M'' étant une borne supérieure de $|f''(x)|$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$.

2.3.2 Interpolation parabolique

Connaissant $f(x_0 - h)$, $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$, la valeur approchée de $f(x_0 + \theta h)$ avec $|\theta| < 1$ est donnée par la formule :

$$f_1(x_0 + \theta h) = (1 - \theta^2) f(x_0) + \frac{1}{2} \theta (1 + \theta) f(x_0 + h) - \frac{1}{2} \theta (1 - \theta) f(x_0 - h) \quad (9)$$

ce qui revient à remplacer la courbe représentative de $f(x)$ par un arc de parabole passant par les trois points d'abscisses $x_0 - h$, x_0 et $x_0 + h$.

On démontre que l'erreur commise $\varepsilon = f(x_0 + \theta h) - f_1(x_0 + \theta h)$ vérifie l'inégalité :

$$|\varepsilon| < \frac{M''' h^3}{9\sqrt{3}}$$

M''' étant une borne supérieure de $|f'''(x)|$ dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$.

■ La formule d'interpolation parabolique (9) permet de résoudre numériquement les deux problèmes suivants.

a) Trouver la racine d'une équation $f(x) = 0$, la fonction $f(x)$ étant définie par une table de valeurs.

On sait que la racine cherchée appartient à l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$; on résout l'équation du second degré en θ :

$$f_1(x_0 + \theta h) = 0$$

Si θ est la racine de cette équation, inférieure à une valeur absolue, la racine cherchée est $x_0 + \theta h$.

b) Trouver le maximum (ou le minimum) d'une fonction $f(x)$ définie par une table de valeurs.

On sait que le maximum (ou le minimum) est obtenu pour une valeur de x appartenant à l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$. On cherche donc le maximum (ou le minimum) du trinôme du second degré $f_1(x_0 + \theta h)$; en posant :

$$Z_1 = f(x_0 - h) - f(x_0) \quad \text{et} \quad Z_2 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

on trouve que la valeur θ qui correspond au maximum (ou au minimum) est :

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$$

et que le maximum (ou le minimum) a pour valeur :

$$f_1(x_0 + \theta h) = f(x_0) - \frac{1}{4} \theta (Z_1 - Z_2)$$

3. Poutres droites isostatiques

3.1 Poutre sur appuis simples

3.1.1 Calcul des efforts (réaction d'appui, moment fléchissant et effort tranchant)

3.1.1.1 Définition. Lignes d'influence

Une poutre sur appuis simples (ou travée indépendante) est une poutre droite horizontale reposant à ses extrémités sur deux appuis simples exerçant sur la poutre des réactions verticales R_0 et R_1 (figure 18). Généralement, l'un des appuis est fixe et l'autre mobile de façon à permettre la libre dilatation de la poutre. Les forces appliquées sont des charges concentrées ou réparties, dues à la pesanteur ; ces charges verticales sont comptées positivement vers le bas. Nous désignerons par ℓ la portée de la poutre, et nous compterons les abscisses à partir de l'extrémité de gauche.

Pour déterminer les lignes d'influence, supposons qu'une seule charge P soit appliquée à la section C d'abscisse α . En écrivant que le moment des forces appliquées par rapport à B et par rapport à A est nul, nous trouvons les réactions d'appui :

$$R_0(\alpha) = P \left(1 - \frac{\alpha}{\ell} \right), \quad R_1(\alpha) = P \frac{\alpha}{\ell}$$

L'effort tranchant $T(\alpha, x)$ dans la section X d'abscisse x est :

$$T(\alpha, x) = \begin{cases} R_0(\alpha) & \text{si } x < \alpha \\ R_0(\alpha) - P & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

soit [relation (5)] :

$$T(\alpha, x) = P\mu_x(\alpha, x) = \begin{cases} P\left(1 - \frac{\alpha}{\ell}\right) & \text{si } x < \alpha \\ -P\frac{\alpha}{\ell} & \text{si } x > \alpha \end{cases} \quad (10)$$

Le moment fléchissant $M(\alpha, x)$ dans la section X a pour valeur :

$$M(\alpha, x) = \begin{cases} R_0(\alpha) x & \text{si } x < \alpha \\ R_0(\alpha) x - P(x - \alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

soit [relation (4)] :

$$M(\alpha, x) = P\mu(\alpha, x) = \begin{cases} P\frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{si } x < \alpha \\ P\frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{si } x > \alpha \end{cases} \quad (11)$$

Si, dans les formules (10) et (11), on suppose α donné et x variable, on obtient les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant sous l'action de la charge concentrée P (figure 19).

Si, dans les formules (10) et (11), on suppose $P = 1$, x donné et α variable, on obtient les lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la section X d'abscisse x (figure 20).

3.1.1.2 Charges concentrées

L'effort tranchant $T(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$ dus à des charges concentrées P_i appliquées aux sections d'abscisses α_i ont pour valeurs :

$$T(x) = \sum_i P_i \mu_x(\alpha_i, x), \quad M(x) = \sum_i P_i \mu(\alpha_i, x)$$

$T(x)$ est constant et égal à T_i sur l'intervalle (α_i, α_{i+1}) ; la ligne représentative de $M(x)$ est une ligne brisée dont les ordonnées des sommets sont $M_i = M(\alpha_i)$. Le calcul s'effectue rapidement au moyen des relations :

$$T_0 = R_0, \quad T_i = T_{i-1} - P_i$$

$$M_0 = 0, \quad M_i = M_{i-1} + T_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

Supposons qu'il y ait n charges concentrées P_i ; si l'on ne commet pas d'erreurs, on doit trouver $M_{n+1} = 0$ (on pose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = \ell$).

La recherche du moment maximal produit par un convoi (système de charges concentrées dont les distances mutuelles sont invariables) est facilitée par le **théorème de Barré** : *le moment fléchissant maximal sous une charge du convoi s'obtient lorsque cette charge et la résultante générale des charges du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.*

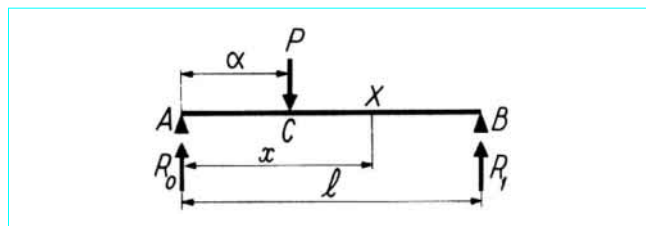


Figure 18 - Poutre sur appuis simples

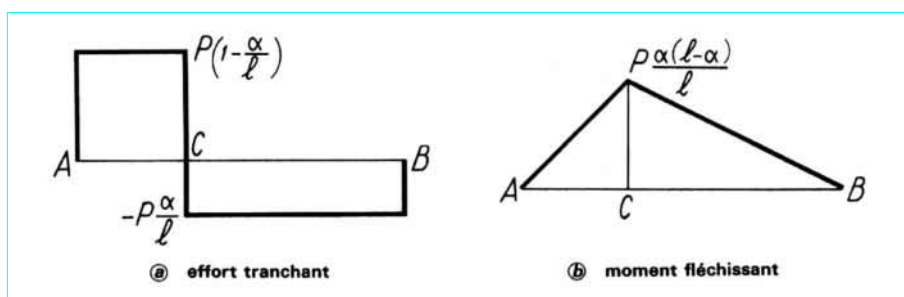


Figure 19 - Poutre sur appuis simples : lignes représentatives

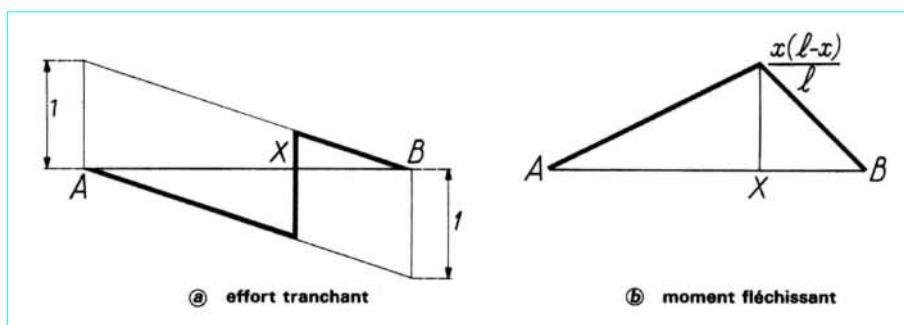


Figure 20 - Poutre sur appuis simples : lignes d'influence

3.1.1.3 Charges réparties

L'effort tranchant $T(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$ dus à une densité de charge $p(x)$ ont pour valeurs :

$$T(x) = \int_0^\ell \mu_x(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha$$

$$M(x) = \int_0^\ell \mu(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha$$

La symétrie de la fonction $\mu(\alpha, x)$ montre que $M(x)$ est donné par une intégrale du type de celle étudiée au paragraphe (§ 2.1.2) ; donc, si nous définissons les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ par :

$$p_1(x) = \int_0^x p(t) dt, \quad p_2(x) = \int_0^x p_1(t) dt$$

nous avons :

$$M(x) = \frac{x}{\ell} p_2(\ell) - p_2(x)$$

et nous en déduisons :

$$T(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{\ell} p_2(\ell) - p_1(x)$$

Par **exemple**, lorsque la poutre est soumise à une densité de charge linéaire :

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + p_1 \frac{x}{\ell}$$

nous trouvons :

$$M(x) = \frac{x(\ell-x)}{6\ell} [p_0(2\ell-x) + p_1(\ell+x)]$$

$$T(x) = \frac{1}{6\ell} [p_0(2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2) + p_1(\ell^2 - 3x^2)]$$

En particulier, lorsque $p_0 = p_1 = p$, on a $p(x) = p$ et :

$$M(x) = p \frac{x(\ell-x)}{2}, \quad T(x) = p \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

et lorsque $p_0 = -p_1 = p$:

$$M(x) = p \frac{x(\ell-x)(\ell-2x)}{6\ell}, \quad T(x) = p \frac{\ell^2 - 6\ell x + 6x^2}{6\ell}$$

3.1.1.4 Lignes enveloppes

Les lignes d'influence permettent de calculer dans chaque section les valeurs extrêmes de l'effort tranchant et du moment fléchissant sous l'effet des divers systèmes de surcharges. En portant ces valeurs extrêmes en ordonnées à l'abscisse de la section correspondante, on obtient les lignes enveloppes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Par **exemple**, dans le cas d'une surcharge de densité uniforme q pouvant être appliquée sur une partie quelconque de la poutre, dans la section d'abscisse x l'effort tranchant maximal $T_{max}(x)$ s'obtient en surchargeant l'intervalle (x, ℓ) , et l'effort tranchant minimal $T_{min}(x)$ s'obtient en surchargeant l'intervalle $(0, x)$; on trouve ainsi :

$$T_{max}(x) = \frac{q(\ell-x)^2}{2\ell}, \quad T_{min}(x) = -\frac{qx^2}{2\ell}$$

Dans les mêmes conditions, le moment fléchissant maximal dans la section d'abscisse x s'obtient en surchargeant toute la poutre ; donc :

$$M_{max}(x) = \frac{1}{2} qx(\ell-x), \quad M_{min}(x) = 0$$

3.1.2 Calcul des déplacements

3.1.2.1 Calcul des rotations des sections d'extrémités

3.1.2.1.1 Cas général

Les rotations ω_0 et ω_1 des sections extrêmes de la poutre sont données par les formules (94) de l'article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= - \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{M}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} dx \\ \omega_1 &= \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right) \frac{M}{EI} dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} dx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Lorsque la poutre est soumise à une charge P appliquée à la section d'abscisse α , nous avons [relations (11) et (10)] :

$$M(x) = P\mu(\alpha, x), \quad T(x) = P\mu_x(\alpha, x)$$

et les fonctions d'influence $\omega_0(\alpha)$ et $\omega_1(\alpha)$ ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(\alpha) &= -P \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} + \frac{P}{\ell} \int_0^\ell \mu_x(\alpha, x) \frac{dx}{GS_1} \\ \omega_1(\alpha) &= P \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \left(\frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} + \frac{P}{\ell} \int_0^\ell \mu_x(\alpha, x) \frac{dx}{GS_1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nous sommes ramenés à calculer des intégrales du type de celles étudiées dans le paragraphe 2.1 ; nous devons donc intégrer deux

fois les fonctions $\left(1 - \frac{\alpha}{\ell}\right) \frac{1}{EI(\alpha)}$ et $-\frac{\alpha}{\ell} \frac{1}{EI(\alpha)}$ et une fois la fonction $\frac{1}{GS_1(\alpha)}$. Notons que, lorsque S_1 est constant, la seconde intégrale qui figure dans chacune des formules (13) est nulle.

3.1.2.1.2 Cas d'une poutre de section constante ($I = Cte, S_1 = Cte$)

Nous trouvons dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(\alpha) &= -\frac{P}{6EI} \frac{\alpha(\ell-\alpha)(2\ell-\alpha)}{\ell} \\ \omega_1(\alpha) &= \frac{P}{6EI} \frac{\alpha(\ell-\alpha)(\ell+\alpha)}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Une charge P appliquée à la section médiane ($\alpha = \ell/2$) donne les rotations :

$$-\omega_0 = \omega_1 = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

Une densité de charge p appliquée sur toute la poutre donne les rotations :

$$-\omega_0 = \omega_1 = \frac{p\ell^3}{24EI}$$

3.1.2.2 Calcul des flèches

3.1.2.2.1 Cas général

On désigne sous le nom de *flèche* de la section d'abscisse x le déplacement vertical $v(x)$ de cette section. Connaissant le moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$, on calcule d'abord la rotation ω_0 au moyen de la première formule (12) ; la seconde **formule de Bresse** (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) nous donne ensuite la flèche $v(x)$ comptée positivement vers le haut :

$$v(x) = \omega_0 x + \int_0^x (x-\xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

En remplaçant ω_0 par sa valeur, nous pouvons mettre la formule précédente sous la forme :

$$v(x) = - \int_0^\ell \mu(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^\ell \mu_\xi(x, \xi) \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi \quad (15)$$

Cette formule peut être établie également au moyen du **théorème de Castigliano** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales). Pour trouver la flèche $v(x)$ dans la section d'abscisse x , appliquons une force auxiliaire F dans cette section ; le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section d'abscisse ξ sous l'effet des charges appliquées et de la force auxiliaire F ont pour valeurs :

$$M(\xi) = M(\xi) - F\mu(x, \xi), \quad T(\xi) = T(\xi) - F\mu_\xi(x, \xi)$$

L'énergie de déformation ayant pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{T^2(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

le théorème de Castigliano montre que :

$$v(x) = \left(\frac{\partial W}{\partial F} \right)_{F=0}$$

Nous retrouvons ainsi la formule (15).

La formule (15) contient deux intégrales du type de celles étudiées dans le paragraphe 2.1 ; nous savons donc calculer numériquement ces intégrales ; il suffit d'intégrer deux fois la fonction $\frac{M(x)}{EI(x)}$ et une

fois la fonction $\frac{T(x)}{GS_1(x)}$.

La flèche $v(x)$ est la somme de la flèche due au moment fléchissant :

$$v_1(x) = - \int_0^\ell \mu(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi$$

et de la flèche due à l'effort tranchant :

$$v_2(x) = - \int_0^\ell \mu_\xi(x, \xi) \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

Dans le cas où la poutre est soumise à la seule charge $P = 1$ appliquée à la section d'abscisse α , nous avons :

$$M(\xi) = \mu(\alpha, \xi), \quad T(\xi) = \mu_\xi(\alpha, \xi)$$

et la formule (15) nous donne la fonction d'influence de la flèche :

$$v(\alpha, x) = - \int_0^\ell \frac{\mu(x, \xi) \mu(\alpha, \xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^\ell \frac{\mu_\xi(x, \xi) \mu_\xi(\alpha, \xi)}{GS_1(\xi)} d\xi \quad (16)$$

Nous avons bien, conformément au **théorème de réciprocité** :

$$v(\alpha, x) = v(x, \alpha)$$

3.1.2.2 Cas d'une poutre de section constante ($I = Cte, S_1 = Cte$)

■ Flèche due au moment fléchissant

Déterminons la fonction d'influence $v_1(\alpha, x)$; nous avons :

$$M(\alpha, x) = P\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{P x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{P \alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{pour } x > \alpha \end{cases}$$

En intégrant une première fois $\frac{M(\alpha, x)}{EI}$ nous obtenons :

$$\omega(\alpha, x) = \omega_0(\alpha) + \begin{cases} \frac{P}{EI} \frac{x^2(\ell - \alpha)}{2\ell} & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{P}{EI} \left[\frac{\alpha(\ell - \alpha)}{2} - \frac{\alpha(\ell - x)^2}{2\ell} \right] & \text{pour } x > \alpha \end{cases}$$

Une seconde intégration conduit à :

$$v_1(\alpha, x) = x\omega_0(\alpha) + \begin{cases} \frac{P}{EI} \frac{x^3(\ell - \alpha)}{6\ell} & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{P}{EI} \left[\frac{\alpha(\ell - \alpha)(x - \alpha)}{2} - \frac{\alpha(\ell - \alpha)(\ell - 2\alpha)}{6} + \frac{\alpha(\ell - x)^3}{6\ell} \right] & \text{pour } x > \alpha \end{cases}$$

La condition $v(\alpha, \ell) = 0$ nous donne la valeur de $\omega_0(\alpha)$:

$$\omega_0(\alpha) = - \frac{P}{6EI} \frac{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{\ell}$$

résultat que nous connaissions déjà [1^{re} formule (14)] ; compte tenu de cette valeur, la fonction d'influence de la rotation est :

$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} - \frac{P}{6EI} \frac{\ell - \alpha}{\ell} \left[\alpha(2\ell - \alpha) - 3x^2 \right] & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{P}{6EI} \frac{\alpha}{\ell} \left[(\ell + \alpha)(\ell - \alpha) - 3(\ell - x)^2 \right] & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (17)$$

et la fonction d'influence de la flèche due au moment fléchissant est :

$$v_1(\alpha, x) = \begin{cases} - \frac{P}{6EI} \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} \left[\alpha(2\ell - \alpha) - x^2 \right] & \text{pour } x < \alpha \\ - \frac{P}{6EI} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} \left[x(2\ell - x) - \alpha^2 \right] & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (18)$$

En particulier, lorsque la charge P est appliquée dans la section médiane, la flèche dans la section médiane est :

$$v_1\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) = - \frac{P\ell^3}{48EI}$$

La flèche $v_1(x)$ de la poutre soumise à une charge répartie de densité $p(x)$ a pour valeur :

$$v_1(x) = \int_0^\ell v_1(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha$$

Lorsque $p(x) = p$ est constante, nous trouvons :

$$v_1(x) = - \frac{p\ell^2}{24EI} x(\ell - x) \left[1 + \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right]$$

En particulier, la flèche dans la section médiane a pour valeur :

$$v_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = - \frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$$

■ Flèche due à l'effort tranchant

Dans ce cas, une primitive de la fonction $\frac{T(x)}{GS_1}$ étant $\frac{M(x)}{GS_1}$, la flèche due à l'effort tranchant a pour valeur :

$$v_2(x) = - \frac{M(x)}{GS_1} \quad (19)$$

La fonction d'influence de la flèche due à l'effort tranchant est donc :

$$v_2(\alpha, x) = -\frac{P}{GS_1} \mu(\alpha, x)$$

En particulier, la flèche dans la section médiane due à une charge P appliquée dans la section médiane a pour valeur :

$$v_2\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{P\ell}{4GS_1}$$

et la flèche dans la section médiane due à une densité de charge p appliquée sur toute la poutre a pour valeur :

$$v_2\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{p\ell^2}{8GS_1}$$

■ **Comparaison des flèches dues au moment fléchissant et à l'effort tranchant**

Considérons une poutre d'acier doux en double té, de section constante, soumise à une densité de charge uniforme p ; soit τ la contrainte de cisaillement de l'âme sur l'appui due à l'effort tranchant $T = \frac{1}{2} p\ell$, et σ la contrainte normale maximale dans la section

médiane due au moment fléchissant $M = \frac{1}{8} p\ell^2$; nous avons :

$$\tau = \frac{T}{S_1} = \frac{p\ell}{2S_1}, \quad \sigma = \frac{Mh}{2I} = \frac{p\ell^2 h}{16I}$$

h désignant la hauteur de la poutre.

Les flèches de la section médiane dues au moment fléchissant et à l'effort tranchant ont pour valeurs :

$$v_1 = -\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI} = -\frac{5}{24} \frac{\sigma \ell^2}{Eh}$$

$$v_2 = -\frac{p\ell^2}{8GS_1} = -\frac{\tau \ell}{4G}$$

Nous avons donc, en prenant $E/G = 2(1 + \nu) = 5/2$ correspondant à $\nu = 0,25$ (ν coefficient de Poisson) :

$$\frac{v_2}{v_1} = 3 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

Le maximum de τ/σ étant $1/2$ (correspondant à une courbe intrinsèque composée de deux droites parallèles), nous voyons que la flèche due à l'effort tranchant atteint 15 % de la flèche due au moment fléchissant lorsque $h/\ell = 1/10$. L'influence de l'effort tranchant sur la flèche serait nettement plus faible pour une poutre en béton armé ou en béton précontraint, car dans ce cas le rapport τ/σ est plus petit. Il est donc souvent justifié de négliger les déformations dues à l'effort tranchant.

3.2 Console

3.2.1 Calcul des efforts

3.2.1.1 Définition. Lignes d'influence

Une console (figure 21) est une poutre droite encastée à l'extrémité A et libre à l'extrémité B. Nous désignerons par ℓ la longueur de la console, et nous définirons les sections par leurs abscisses comptées à partir de l'extrémité encastée A.

Supposons une seule charge P appliquée à la section d'abscisse α ; la réaction d'appui en A comprend une réaction verticale $R(\alpha)$ et un moment d'encastement $M_0(\alpha)$ que l'on détermine immédiatement au moyen de la statique élémentaire :

$$R(\alpha) = P, \quad M_0(\alpha) = -P\alpha$$

L'effort tranchant T dans la section X d'abscisse x a donc pour valeur :

$$T = PT(\alpha, x) \text{ avec } T(\alpha, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x < \alpha \\ 0 & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (20)$$

et le moment fléchissant M dans la section X a pour valeur :

$$M = PM(\alpha, x) \text{ avec } M(\alpha, x) = \begin{cases} x - \alpha & \text{pour } x < \alpha \\ 0 & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (21)$$

Considérées comme fonctions de x , les fonctions $T(\alpha, x)$ et $M(\alpha, x)$ définissent les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant (figure 22).

Considérées comme fonctions de α , les fonctions $T(\alpha, x)$ et $M(\alpha, x)$ définissent les lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant (figure 23).

3.2.1.2 Charges concentrées P_i appliquées aux abscisses α_i

La ligne représentative de T est une ligne en escalier, T étant constant et égal à T_i dans l'intervalle (α_{i-1}, α_i) . La ligne représentative de M est une ligne brisée dont les sommets d'abscisses α_i ont pour ordonnées M_i . On calcule de proche en proche T_i et M_i au moyen des formules :

$$T_n = P_n, \dots, T_{i-1} = T_i + P_{i-1}$$

$$M_n = 0, \dots, M_{i-1} = M_i - T_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

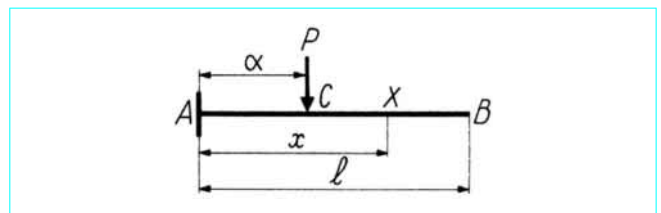


Figure 21 – Console

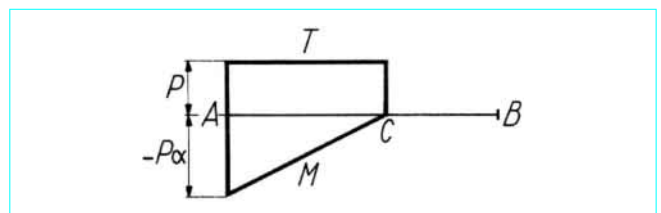


Figure 22 – Console : lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant

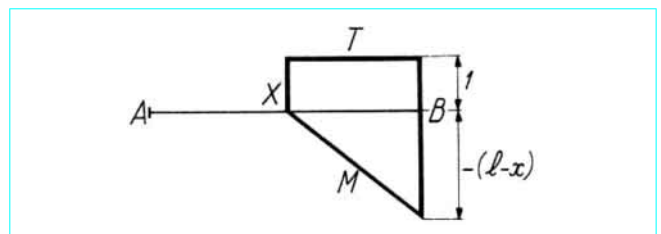


Figure 23 – Console : lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant

3.2.1.3 Charge répartie de densité $p(x)$

Nous avons, en vertu des propriétés des lignes d'influence [formules (20) et (21)] :

$$T(x) = \int_0^\ell T(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha = \int_x^\ell p(\alpha) d\alpha$$

$$M(x) = \int_0^\ell M(\alpha, x) p(\alpha) d\alpha = \int_x^\ell (x-\alpha) p(\alpha) d\alpha$$

la seconde formule pouvant s'écrire, puisque $dM/dx = T$ et que $M(\ell) = 0$:

$$M(x) = - \int_x^\ell T(u) du$$

Nous obtenons donc $T(x)$ et $M(x)$ en intégrant deux fois de suite la fonction $p(x)$.

Dans le cas où $p(x)$ est une constante p , nous trouvons :

$$T(x) = p(\ell - x), \quad M(x) = -\frac{1}{2} p(\ell - x)^2$$

Dans le cas d'une densité de charge linéaire :

$$p(x) = p_0 + (p_1 - p_0) \frac{x}{\ell}$$

nous trouvons :

$$T(x) = p_0(\ell - x) + (p_1 - p_0) \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}$$

$$M(x) = -\frac{1}{2} p_0(\ell - x)^2 - \frac{1}{6} (p_1 - p_0) \frac{(\ell - x)^2 (2\ell + x)}{\ell}$$

3.2.2 Calcul des déplacements

3.2.2.1 Cas général

Connaissant le moment fléchissant et l'effort tranchant le long de la console, les **formules de Bresse** (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) donnent immédiatement la rotation $\omega(x)$ et la flèche $v(x)$ d'une section quelconque d'abscisse x :

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= \int_0^x \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \\ v(x) &= \int_0^x (x-\xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

la seconde formule (22) pouvant se mettre sous la forme :

$$v(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi - \int_0^x \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

Le calcul de ω et de v s'effectue donc aisément par intégration numérique.

La flèche $v(x)$ est la somme de la flèche $v_1(x)$ due au moment fléchissant et de la flèche $v_2(x)$ due à l'effort tranchant :

$$v_1(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi, \quad v_2(x) = - \int_0^x \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

3.2.2.2 Cas d'une console de section constante ($I = Cte, S_1 = Cte$)

Calculons les fonctions d'influence $\omega(\alpha, x)$ de la rotation et $v_1(\alpha, x)$ de la flèche due au moment fléchissant dans la section X d'abscisse x ; nous avons, la charge P étant appliquée à la section d'abscisse α :

$$\omega(\alpha, x) = \frac{P}{EI} \int_0^x M(\alpha, \xi) d\xi$$

soit, compte tenu de l'expression (21) de $M(\alpha, x)$:

$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{P}{2EI} (2\alpha x - x^2) & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{P}{2EI} \alpha^2 & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (23)$$

En particulier :

$$\omega(\ell, \ell) = -\frac{P\ell^2}{2EI}$$

Nous avons ensuite :

$$v_1(\alpha, x) = \int_0^x \omega(\alpha, \xi) d\xi$$

soit :

$$v_1(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{P}{6EI} x^2 (3\alpha - x) & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{P}{6EI} \alpha^2 (3x - \alpha) & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (24)$$

La fonction d'influence de la flèche due à l'effort tranchant a pour expression :

$$v_2(\alpha, x) = -\frac{P}{GS_1} \int_0^x T(\alpha, \xi) d\xi$$

soit, compte tenu de l'expression (20) de $T(\alpha, x)$:

$$v_2(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{Px}{GS_1} & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{P\alpha}{GS_1} & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (25)$$

En particulier, nous avons :

$$v_1(\ell, \ell) = -\frac{P\ell^3}{3EI}, \quad v_2(\ell, \ell) = -\frac{P\ell}{GS_1}$$

Les fonctions $v_1(\alpha, x)$ et $v_2(\alpha, x)$ sont symétriques, comme l'exige le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*).

Examinons le cas particulier d'une charge répartie de densité uniforme p ; nous avons :

$$\omega(x) = \int_0^x \frac{M(\xi)}{EI} d\xi = -\frac{p}{2EI} \int_0^x (\ell - \xi)^2 d\xi$$

soit :

$$\omega(x) = -\frac{p}{2EI} \left(\ell^2 x - \ell x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right)$$

En particulier :

$$\omega(\ell) = -\frac{p\ell^3}{6EI}$$

La flèche $v_1(x)$ due au moment fléchissant est :

$$v_1(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi = -\frac{px^2}{2EI} \left(\frac{1}{2} \ell^2 - \frac{1}{3} \ell x + \frac{1}{12} x^2 \right)$$

et la flèche $v_2(x)$ due à l'effort tranchant est :

$$v_2(x) = -\int_0^x \frac{T(\xi) d\xi}{GS_1} = -\frac{p}{GS_1} \int_0^x (\ell - \xi)^2 d\xi = -\frac{p}{2GS_1} (2\ell x - x^2)$$

En particulier :

$$v_1(\ell) = -\frac{p\ell^4}{8EI}, \quad v_2(\ell) = -\frac{p\ell^2}{2GS_1}$$

Comme dans le cas de la poutre sur appuis simples (§ 3.1.2.2.2), la flèche due à l'effort tranchant est petite devant la flèche due au moment fléchissant et peut en général être négligée.

3.3 Poutre console

3.3.1 Calcul des efforts

Une *poutre console* est une poutre sur appuis simples A et B prolongée par deux consoles AC et BD. La méthode de calcul la plus simple est d'utiliser les lignes d'influence que l'on détermine au moyen des méthodes données dans le paragraphe 1.3.1.

Les lignes d'influence de T et de M dans une section d'une console AC ou BD sont identiques à celles de la console isolée, car une charge placée sur la travée AB ne produit aucun effort dans les consoles. La figure 24 donne la ligne d'influence de la réaction de l'appui simple A et les lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans une section X comprise entre A et B.

À titre d'exemple, donnons les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant dus à une charge de densité uniforme p répartie sur toute la longueur de la poutre console.

Dans une section X_1 de AC définie par $\overline{X_1A} = x_1$:

$$M = -\frac{1}{2} p(\ell_1 - x_1)^2, \quad T = -\frac{dM}{dx_1} = -p(\ell_1 - x_1)$$

Dans une section X_2 de BD définie par $\overline{BX_2} = x_2$:

$$M = -\frac{1}{2} p(\ell_2 - x_2)^2, \quad T = \frac{dM}{dx_2} = p(\ell_2 - x_2)$$

Dans une section X de AB définie par $\overline{AX} = x$:

$$M = \frac{1}{2} px(\ell - x) - \frac{1}{2} p\ell_1^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} p\ell_2^2 \frac{x}{\ell}$$

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} p(\ell - 2x) + p \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell}$$

La portée $AB = \ell$ étant donnée, on peut déterminer ℓ_1 et ℓ_2 de façon que les moments fléchissants négatifs en A et B soient égaux en valeur absolue au moment fléchissant maximal en travée AB ; on doit avoir $\ell_1 = \ell_2$ et :

$$\frac{1}{2} p\ell_1^2 = \frac{1}{8} p\ell^2 - \frac{1}{2} p\ell_1^2 \text{ soit } \ell_1 = \frac{\ell}{2\sqrt{2}}$$

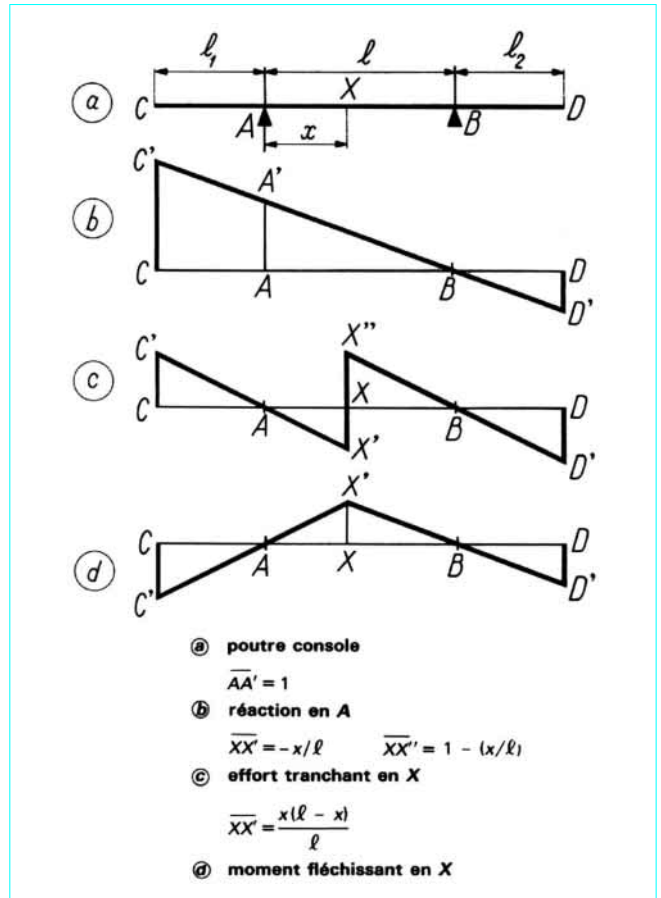


Figure 24 - Poutre console : lignes d'influence

3.3.2 Calcul des déplacements

Prenons l'origine des abscisses en A. La méthode la plus rapide pour trouver la rotation $\omega(x)$ et la flèche $v(x)$ de la section d'abscisse x consiste à calculer les intégrales :

$$U(x) = \int_0^x \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi$$

$$V(x) = \int_0^x U(\xi) d\xi - \int_0^x \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

x variant de $-\ell_1$ à $\ell + \ell_2$. On montre aisément que la rotation ω_0 de la section A a pour valeur $-V(\ell)/\ell$ et que :

$$\omega(x) = \omega_0 + U(x) = U(x) - \frac{1}{\ell} V(\ell)$$

$$v(x) = \omega_0 x + V(x) = V(x) - \frac{x}{\ell} V(\ell)$$

3.4 Poutre cantilever

3.4.1 Définition

Une *poutre cantilever* est une poutre droite soumise à des charges verticales, reposant sur plus de deux appuis simples et comportant des articulations intermédiaires disposées de façon que la poutre soit isostatique.

Supposons que la poutre comporte n travées et soit divisée en p tronçons par les articulations intermédiaires ; nous avons $n + 1$ réactions extérieures et $p - 1$ réactions intérieures ; la statique fournit pour chaque tronçon deux équations d'équilibre. Nous obtenons donc la condition nécessaire pour que la poutre soit isostatique :

$$(n + 1) + (p - 1) = 2p \quad \text{soit} \quad n = p$$

Cette condition n'est pas suffisante, car la poutre pourrait être hyperstatique dans certaines zones et librement déplaçable dans d'autres.

Les poutres cantilevers les plus employées sont constituées d'une succession de poutres consoles reliées l'une à l'autre, entre deux articulations, par des travées indépendantes.

3.4.2 Calcul des efforts

La méthode de calcul la plus simple consiste à utiliser les lignes d'influence que l'on détermine facilement (§ 1.3.1). Les figures 25 et 26 donnent quelques lignes d'influence pour les deux types de poutres cantilevers à trois travées les plus utilisés.

3.4.3 Calcul des déplacements

Dans le cas général, on calcule les rotations $\omega(x)$ et les flèches $v(x)$ en utilisant les **formules de Bresse** (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) ; on prendra garde au fait que les rotations $\omega(x)$ présentent des discontinuités au droit des articulations.

Dans le cas où la poutre cantilever est constituée de poutres consoles $C_i A_i A_{i+1} C_{i+1}$ réunies par des travées indépendantes $C_{i-1} C_i$, on détermine d'abord les rotations et les flèches des poutres consoles (§ 3.3.2) ; on connaît alors les flèches des extrémités C_i des travées indépendantes ; on peut donc calculer aisément les rotations et les flèches des travées indépendantes.

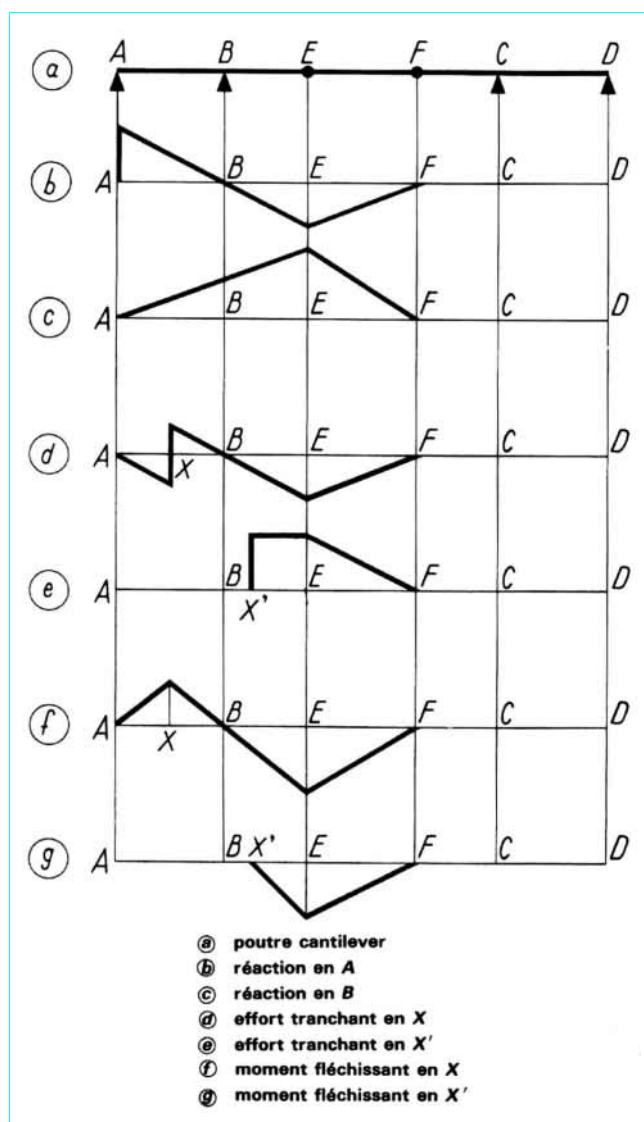


Figure 25 – Poutre cantilever (1^{er} type) : lignes d'influence

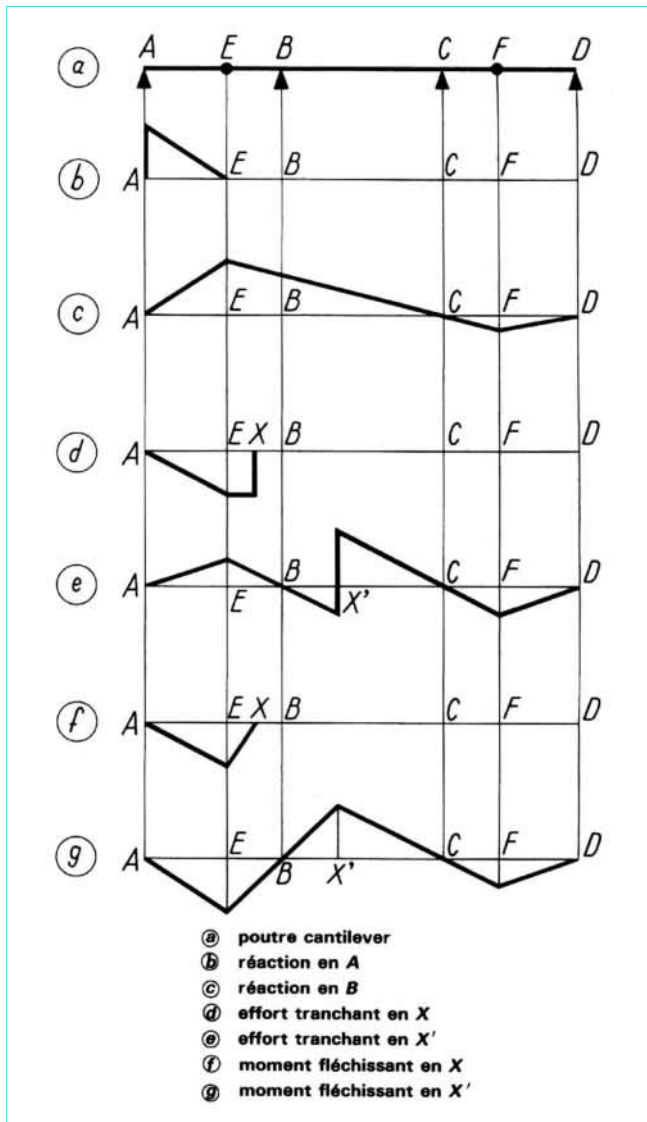


Figure 26 – Poutre cantilever (2^e type) : lignes d'influence

4. Structures indéformables

4.1 Poutre droite infiniment rigide sur appuis élastiques

4.1.1 Calcul des réactions d'appui

Considérons (figure 27) une poutre droite reposant sur n appuis élastiques A_i , exerçant sur la poutre des réactions R_i proportionnelles aux flèches v_i de la poutre au droit des appuis :

$$R_i = -k_i v_i$$

k_i étant des constantes positives caractéristiques des appuis.

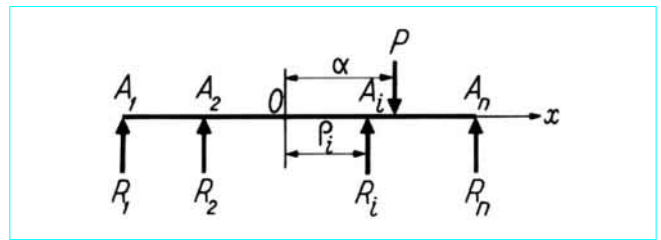


Figure 27 – Poutre droite infiniment rigide reposant sur n appuis élastiques

Choisissons une origine O sur la fibre moyenne, et soit $\rho_i = \overline{OA_i}$ l'abscisse de l'appui A_i . La poutre supporte des charges verticales et des couples dont la résultante générale comptée positivement vers le haut est Y , et dont le moment résultant par rapport à O est Γ ; les équations d'équilibre de la statique :

$$Y + \sum_i R_i = 0, \quad \Gamma + \sum_i R_i \rho_i = 0$$

ne sont pas suffisantes pour déterminer les réactions R_i ; mais l'indéformabilité de la poutre montre que :

$$v_i = a + b \rho_i$$

a et b étant deux constantes que nous prendrons comme inconnues ; nous obtenons donc, en éliminant R_i et v_i entre les équations précédentes :

$$a \sum_i k_i + b \sum_i k_i \rho_i = Y$$

$$a \sum_i k_i \rho_i + b \sum_i k_i \rho_i^2 = \Gamma$$

Plaçons l'origine O au barycentre des points A_i affectés des masses k_i ; nous avons $\sum_i k_i \rho_i = 0$, et nous trouvons :

$$a = Y/K, \quad b = \Gamma/H$$

K et H étant définis par :

$$K = \sum_i k_i, \quad H = \sum_i k_i \rho_i^2$$

Nous obtenons ainsi les valeurs des réactions d'appui :

$$R_i = -k_i \left(\frac{Y}{K} + \frac{\Gamma}{H} \rho_i \right)$$

Dans le cas d'une charge unique $P = 1$ appliquée à l'abscisse α , nous avons $Y = -P$ et $\Gamma = -P\alpha$; les fonctions d'influence des réactions d'appui ont donc pour expressions :

$$R_i(\alpha) = P \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) \quad (26)$$

Les lignes d'influence des réactions d'appui sont donc des droites.

Dans le cas d'appuis identiques et également espacés, nous trouvons, en désignant par λ l'espacement de deux appuis consécutifs :

$$k_i = k, \quad \rho_i = -\frac{n+1-2i}{2} \lambda$$

$$K = nk, \quad H = \frac{1}{12} n(n^2-1) k \lambda^2$$

La formule (26) s'écrit donc dans ce cas particulier :

$$R_i(\alpha) = \frac{P}{n} \left[1 - 6 \frac{n+1-2i}{n^2-1} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) \right]$$

Les réactions extrêmes R_1 et R_n ont donc pour valeurs :

$$R_1(\alpha) = \frac{P}{n} \left[1 - \frac{6}{n+1} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) \right], \quad R_n(\alpha) = \frac{P}{n} \left[1 + \frac{6}{n+1} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) \right]$$

4.1.2 Lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant

Il résulte immédiatement de l'expression (26) de $R_i(\alpha)$ que l'effort tranchant $T(\alpha, x)$ dans la section d'abscisse x sous l'action de la charge unité appliquée dans la section d'abscisse α a pour valeur :

$$T(\alpha, x) = \begin{cases} P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) - P & \text{pour } \alpha < x \\ P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

\sum_g désignant une sommation étendue aux appuis situés à gauche de la section d'abscisse x ; si nous désignons par \sum_d une sommation étendue aux appuis situés à droite de la section d'abscisse x , nous avons :

$$\sum_g k_i + \sum_d k_i = K, \quad \sum_g k_i \rho_i + \sum_d k_i \rho_i = 0$$

et l'on peut écrire $T(\alpha, x)$ sous la forme :

$$T(\alpha, x) = \begin{cases} -P \sum_d \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) & \text{pour } \alpha < x \\ P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (27)$$

Dans les mêmes conditions, le moment fléchissant $M(\alpha, x)$ a pour valeur :

$$M(\alpha, x) = \begin{cases} P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) (x - \rho_i) - P(x - \alpha) & \text{pour } \alpha < x \\ P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) (x - \rho_i) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la formule précédente peut encore s'écrire :

$$M(\alpha, x) = \begin{cases} -P \sum_d \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) (x - \rho_i) & \text{pour } \alpha < x \\ P \sum_g \frac{k_i}{K} \left(1 + \frac{K}{H} \rho_i \alpha \right) (x - \rho_i) & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (28)$$

4.1.3 Ponts à poutres multiples solidarisiées par des entretoises

Considérons (figure 28) une travée indépendante à poutres multiples solidarisiées par des entretoises ; lorsque la portée de la travée est supérieure à trois fois sa largeur, on peut considérer que les entretoises sont infiniment rigides vis-à-vis des poutres. Soit I_i l'inertie de la poutre (i). Prenons pour origine des abscisses dans une section transversale le barycentre des points A_i où les poutres coupent cette section transversale, et posons, ρ_i désignant l'abscisse du point A_i :

$$I = \sum_i I_i, \quad H = \sum_i I_i \rho_i^2$$

Supposons que des charges soient appliquées dans une section transversale située à la distance z de l'appui de gauche du pont, et soit e l'abscisse de la résultante générale de ces charges. Il est possible d'établir les règles pratiques suivantes.

Soit \mathcal{M} le moment fléchissant dans la section médiane calculé pour l'ensemble du pont ; le moment fléchissant dans la section médiane de la poutre (i) est :

$$M_i = \mathcal{M} \frac{I_i}{I} \left(1 + \frac{I}{H} \rho_i e \right)$$

Soit τ l'effort tranchant à l'appui de gauche calculé pour l'ensemble du pont ; l'effort tranchant à l'appui de gauche de la poutre (i) est :

— si $z > d$, d désignant la distance de la première entretoise à l'appui de gauche :

$$T_i = \tau \frac{I_i}{I} \left(1 + \frac{I}{H} \rho_i e \right)$$

— si $z < d$:

$$T_i = T'_i \left(1 - \frac{z}{d} \right) + T''_i \frac{z}{d}$$

T'_i désignant l'effort tranchant produit par les charges directement appliquées à la poutre (i), et T''_i l'effort tranchant que l'on calculerait comme si z était supérieur à d .

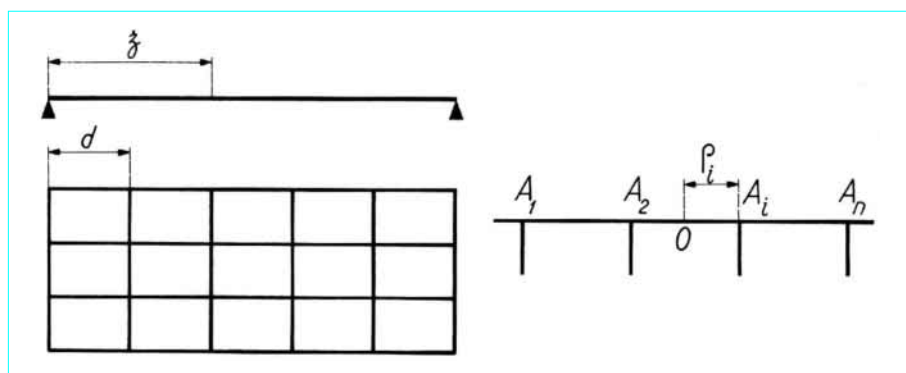


Figure 28 – Travée à poutres multiples solidarisiées par des entretoises

4.2 Calcul d'une fondation sur pieux

Le massif de fondation indéformable $OPQR$ repose sur des pieux $A_i B_i$ dont les pointes sont appuyées sur une couche dure, le rocher par exemple, supposée à la profondeur L sous la base horizontale du massif (figure 29).

Prenons l'axe Ox dirigé suivant la base du massif et l'axe Oy dirigé vers le bas. Les forces données appliquées au massif ont une résultante de composantes X et Y , et un moment résultant Γ par rapport à O . Le déplacement du massif est défini par une translation infiniment petite de composantes a et b , et par une rotation infiniment petite ω autour de O . Le déplacement $(\delta x, \delta y)$ d'un point (x, y) du massif a donc pour expression :

$$\delta x = a - \omega y, \quad \delta y = b + \omega x$$

En particulier, le déplacement de la tête $A_i(x_i, 0)$ du pieu $A_i B_i$ est défini par :

$$\delta x_i = a, \quad \delta y_i = b + \omega x_i$$

Il est raisonnable de supposer que les pieux n'exercent sur le massif que des réactions dirigées suivant leurs axes. Le pieu $A_i B_i$ dont l'axe fait l'angle α_i avec Ox subit une variation de longueur :

$$\delta \lambda_i = \delta x_i \cos \alpha_i + \delta y_i \sin \alpha_i$$

Si E est le module d'élasticité des pieux, la force exercée par le massif sur le pieu $A_i B_i$ de section Ω_i et de longueur $L/\sin \alpha_i$ est :

$$F_i = \frac{E\Omega_i}{L} \delta \lambda_i \sin \alpha_i = K_i \delta \lambda_i \sin \alpha_i$$

avec $K_i = \frac{E\Omega_i}{L}$.

Les composantes X_i et Y_i de la force F_i sont :

$$X_i = F_i \cos \alpha_i = K_i \delta \lambda_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i$$

$$Y_i = F_i \sin \alpha_i = K_i \delta \lambda_i \sin^2 \alpha_i$$

L'équilibre du massif se traduit par les équations :

$$X = \sum_i X_i \quad Y = \sum_i Y_i \quad \Gamma = \sum_i x_i Y_i$$

soit, compte tenu des valeurs de X_i , Y_i , $\delta \lambda_i$, δx_i et δy_i :

$$a \sum_i K_i \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i + b \sum_i K_i \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i + \omega \sum_i K_i x_i \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i = X$$

$$a \sum_i K_i \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i + b \sum_i K_i \sin^3 \alpha_i + \omega \sum_i K_i x_i \sin^3 \alpha_i = Y$$

$$a \sum_i K_i x_i \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i + b \sum_i K_i x_i \sin^3 \alpha_i + \omega \sum_i K_i x_i^2 \sin^3 \alpha_i = \Gamma$$

Ces équations, dont le déterminant est symétrique, permettent de calculer a , b et ω .

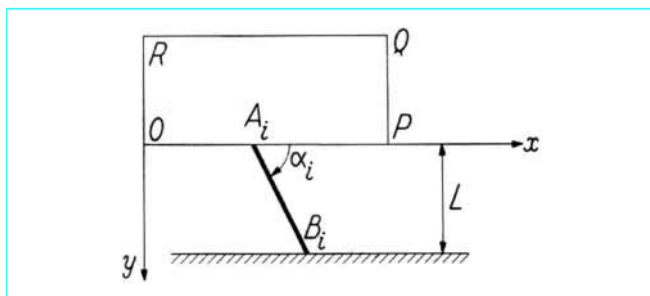


Figure 29 – Fondation sur pieux

5. Poutres droites hyperstatiques

5.1 Rappel de formules fondamentales

Rappelons les formules fondamentales établies dans l'article *Théorie des poutres* [C 2 010] de ce traité, donnant les relations entre les rotations ω_0 et ω_1 des extrémités d'une poutre, et les moments fléchissants M_0 et M_1 aux extrémités :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega' - aM_0 - bM_1 \\ \omega_1 &= \omega'' + bM_0 + cM_1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Dans ces formules, a , b et c sont les *coefficients de souplesse* de la poutre de portée ℓ :

$$\left. \begin{aligned} a &= \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \left[\frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \right] \\ b &= \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} - \left[\frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \right] \\ c &= \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \left[\frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell \frac{dx}{GS_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

et ω' et ω'' sont les rotations des extrémités de la poutre supposée sur appuis simples :

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= - \int_0^\ell \mu \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} + \left[\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{GS_1} \right] \\ \omega'' &= \int_0^\ell \mu \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI} + \left[\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{GS_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

μ désignant le moment fléchissant produit par les charges appliquées dans la poutre supposée sur appuis simples.

Dans les formules (30) et (31), les termes entre crochets peuvent être supprimés lorsqu'il est justifié de négliger les déformations dues à l'effort tranchant.

5.2 Poutre encastree élastiquement à ses extrémités

5.2.1 Définition

Nous supposons que les extrémités A et B de la poutre sont *encastrees élastiquement* (on dit aussi *partiellement encastrees*), c'est-à-dire que les rotations ω_0 et ω_1 des extrémités sont proportionnelles aux moments fléchissants en A et B :

$$\omega_0 = k_0 M_0, \quad \omega_1 = -k_1 M_1 \quad (32)$$

k_0 et k_1 étant deux constantes positives caractéristiques des encastremets élastiques.

Le problème ainsi posé est très général ; en effet, $k = 0$ correspond à un encastrement parfait et $k = \infty$ à un appui simple. Nous trouvons donc comme cas particuliers la poutre encastree à ses extrémités, et la poutre encastree à une extrémité et sur appui simple à l'autre. Le cas général est celui d'une travée d'une poutre continue.

5.2.2 Calcul des efforts

5.2.2.1 Méthode de calcul

Soit ℓ la portée de la poutre et x l'abscisse d'une section X comptée à partir de l'appui de gauche. Pour connaître le moment fléchissant M et l'effort tranchant T dans la section X , il suffit de calculer les moments d'encastrement M_0 et M_1 ; nous avons en effet [d'après les formules (95) de l'article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité] :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell} \\ T(x) &= \frac{d\mu}{dx} + \frac{M_1 - M_0}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$\mu(x)$ désignant le moment fléchissant produit par les charges appliquées dans la poutre supposée sur appuis simples.

Or, compte tenu des formules (32), les relations fondamentales (29) fournissent deux équations pour calculer M_0 et M_1 :

$$\begin{aligned} (a + k_0) M_0 + b M_1 &= \omega' \\ b M_0 + (c + k_1) M_1 &= -\omega'' \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi :

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{\Delta} [(c + k_1)\omega' + b\omega''] \\ M_1 &= -\frac{1}{\Delta} [b\omega' + (a + k_0)\omega''] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

le dénominateur Δ , toujours positif, ayant pour expression :

$$\Delta = (a + k_0)(c + k_1) - b^2$$

5.2.2.2 Lignes d'influence des moments d'extrémités. Foyers

Négligeons les déformations dues à l'effort tranchant ; les fonctions d'influence $M_0(\alpha)$ et $M_1(\alpha)$ sont données par les formules (34) dans lesquelles :

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega'(\alpha) = - \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} \\ \omega'' &= \omega''(\alpha) = \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \left(\frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} \end{aligned}$$

$\omega'(\alpha)$ et $\omega''(\alpha)$ étant donnés par des intégrales du type de celles étudiées dans le paragraphe 2.1, il est facile de calculer les dérivées

premières et secondes des fonctions $M_0(\alpha)$ et $M_1(\alpha)$. Nous trouvons pour valeurs des dérivées premières aux extrémités de la poutre :

$$\begin{aligned} M_0'(0) &= -1 + \frac{k_0(c + k_1)}{\Delta}, & M_0'(\ell) &= \frac{b k_1}{\Delta} \\ M_1'(0) &= -\frac{b k_0}{\Delta}, & M_1'(\ell) &= 1 - \frac{k_1(a + k_0)}{\Delta} \end{aligned}$$

et pour valeurs des dérivées secondes :

$$\begin{aligned} M_0''(\alpha) &= \frac{1}{\ell \Delta EI} [(c + k_1)(\ell - \alpha) - b\alpha] \\ M_1''(\alpha) &= \frac{1}{\ell \Delta EI} [(a + k_0)\alpha - b(\ell - \alpha)] \end{aligned}$$

Si k_0 et k_1 sont nuls (poutre encadrée à ses extrémités), la ligne d'influence de M_0 a une pente -1 en A et est tangente en B à AB ; la ligne d'influence de M_1 est tangente en A à AB et a une pente $+1$ en B .

Si k_0 et k_1 ne sont pas nuls, on a les inégalités :

$$-1 < M_0'(0) < 0, \quad 0 < M_1'(\ell) < 1$$

Considérons les points F et F' de AB , appelés *foyers*, définis par les rapports :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{AF}{FB} = \frac{\alpha}{\ell - \alpha} = \frac{b}{a + k_0} \\ \varphi' &= \frac{F'B}{AF'} = \frac{\ell - \alpha}{\alpha} = \frac{b}{c + k_1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Le point F' est à droite de F ; cela résulte de ce que Δ est positif (§ 5.2.2.1).

La ligne d'influence de M_0 a un point d'inflexion en F' ; sa concavité est tournée vers le haut entre A et F' , et vers le bas entre F' et B .

La ligne d'influence de M_1 a un point d'inflexion en F ; sa concavité est tournée vers le bas entre A et F , et vers le haut entre F et B .

Les propriétés précédentes définissent la forme des lignes d'influence (figure 30).

On aurait pu déterminer les lignes d'influence de M_0 et de M_1 au moyen du théorème de réciprocité (§ 1.3.2). Par exemple, la ligne d'influence de M_0 est, à un facteur près, la déformée de la poutre lorsqu'on applique en A un couple $-\Gamma$ après avoir introduit une articulation en A ; le moment fléchissant en A est Γ , et le moment fléchissant en B est $-\varphi\Gamma$, la ligne représentative du moment fléchissant étant une droite passant par F' .

De même, la ligne d'influence de M_1 est, à un facteur près, la déformée de la poutre lorsqu'on applique en B un couple Γ après avoir introduit une articulation en B ; le moment fléchissant en B est Γ , et le moment fléchissant en A est $-\varphi\Gamma$, la ligne représentative du moment fléchissant étant une droite passant par F .

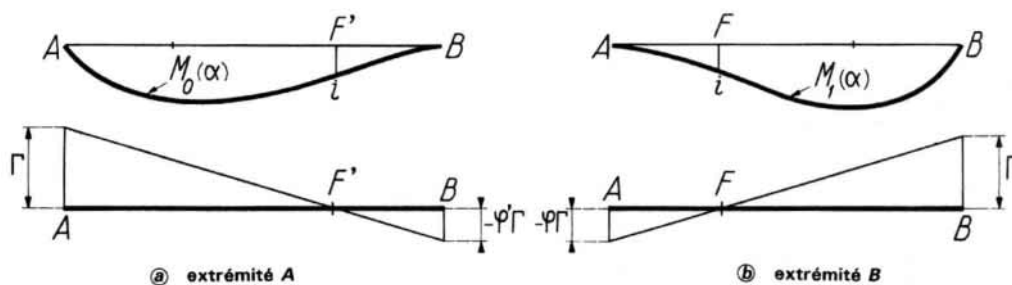


Figure 30 - Lignes d'influence des moments d'extrémités

Compte tenu des expressions (35) des rapports φ et φ' , les équations qui donnent M_0 et M_1 s'écrivent :

$$\frac{1}{\varphi} M_0 + M_1 = \frac{\omega'}{b}$$

$$M_0 + \frac{1}{\varphi'} M_1 = -\frac{\omega''}{b}$$

5.2.2.3 Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque

La ligne d'influence du moment fléchissant dans la section X d'abscisse x est définie par [1^{re} formule (33)] :

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) + M_0(\alpha) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1(\alpha) \frac{x}{\ell}$$

La figure 31 donne la forme de la ligne d'influence, qui dépend de la position de la section X par rapport aux foyers F et F' .

5.2.2.4 Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section quelconque

La ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section X d'abscisse x est définie par [2^e formule (33)] :

$$T(\alpha, x) = \mu_x(\alpha, x) + \frac{1}{\ell} [M_1(\alpha) - M_0(\alpha)]$$

Elle s'obtient en retranchant des ordonnées de la ligne d'influence de l'effort tranchant dans la poutre sur appuis simples (§ 3.1.1.1) les ordonnées de la fonction $(1/\ell) [M_0(\alpha) - M_1(\alpha)]$; elle a donc la forme représentée sur la figure 32.

5.2.2.5 Lignes enveloppes

Bornons-nous au cas d'une surcharge de densité uniforme q pouvant être appliquée sur une partie quelconque de la poutre.

Il résulte de la forme des lignes d'influence de M que les lignes enveloppes du moment fléchissant ont la forme indiquée sur la figure 33. Entre F et F' la ligne enveloppe du moment maximal coïncide avec la ligne représentative du moment dans la poutre entièrement chargée, et la ligne enveloppe du moment minimal est le segment FF' . Entre A et F les lignes enveloppes sont : AK tangente en A à AB et tangente en K à KK' , et $A'F$ tangente en F à FF' et tangente en A' à la ligne représentative du moment dans la poutre entièrement chargée. On a un résultat analogue entre F' et B .

Les lignes enveloppes de l'effort tranchant ont très sensiblement la même forme que celles relatives à la poutre sur appuis simples (§ 3.1.1.4).

5.2.2.6 Poutre encastree à ses extrémités

Nous avons dans ce cas $k_0 = k_1 = 0$, et les formules (34) deviennent :

$$M_0 = \frac{c\omega' + b\omega''}{ac - b^2}, \quad M_1 = -\frac{b\omega' + a\omega''}{ac - b^2} \quad (36)$$

Examinons le cas où la poutre est de section constante ; nous avons :

$$a = c = \frac{\ell}{3EI}, \quad b = \frac{\ell}{6EI}$$

Dans le cas d'une densité de charge p appliquée sur toute la travée, nous avons :

$$\omega' = -\omega'' = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

et nous trouvons :

$$M_0 = M_1 = -\frac{1}{12} p\ell^2$$

Le moment fléchissant dans la poutre a donc pour expression :

$$M(x) = \frac{1}{2} px(\ell - x) - \frac{1}{12} p\ell^2$$

En particulier, le moment fléchissant dans la section médiane a pour valeur :

$$M\left(\frac{1}{2}\ell\right) = \frac{1}{24} p\ell^2$$

Dans le cas d'une charge P appliquée à l'abscisse α , les rotations $\omega'(\alpha)$ et $\omega''(\alpha)$ sont les rotations $\omega_0(\alpha)$ et $\omega_1(\alpha)$ données par les formules (14) ; nous trouvons ainsi :

$$M_0(\alpha) = -P \frac{\alpha(\ell - \alpha)^2}{\ell^2}, \quad M_1(\alpha) = -p \frac{\alpha^2(\ell - \alpha)}{\ell^2}$$

Une charge P appliquée à la section médiane donne des moments d'encastrement $-\frac{1}{8} P\ell$ et un moment positif $\frac{1}{8} P\ell$ dans la section médiane.

5.2.2.7 Poutre encastree en A et sur appui simple en B

Nous avons dans ce cas $k_0 = 0$ et $k_1 = \infty$, et les formules (34) deviennent :

$$M_0 = \frac{\omega'}{a}, \quad M_1 = 0 \quad (37)$$

Examinons le cas où la poutre est de section constante.

Dans le cas d'une densité de charge p appliquée sur toute la travée, nous trouvons :

$$M_0 = -\frac{1}{8} p\ell^2, \quad M(x) = \frac{1}{2} px(\ell - x) - \frac{1}{8} p\ell(\ell - x)$$

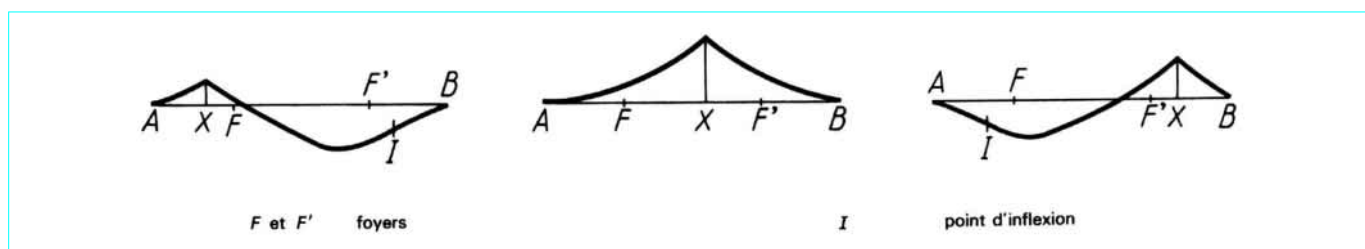


Figure 31 – Ligne d'influence du moment fléchissant en X , dépendant de la position de la section X par rapport aux foyers

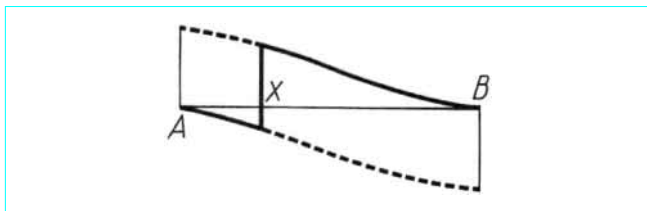


Figure 32 – Ligne d’influence de l’effort tranchant dans une section quelconque

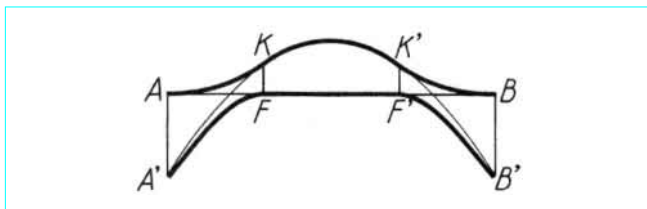


Figure 33 – Lignes enveloppes du moment fléchissant

Le moment fléchissant maximal a lieu dans la section $x = \frac{5}{8} \ell$; il a pour valeur $\frac{9}{128} p \ell^2$. Les réactions d’appui en A et B sont :

$$R_A = \frac{5}{8} p \ell, \quad R_B = \frac{3}{8} p \ell$$

Dans le cas d’une charge P appliquée à l’abscisse α , nous trouvons la ligne d’influence de M_0 définie par :

$$M_0(\alpha) = -P \frac{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{2\ell^2}$$

Cette ligne a un point d’inflexion pour $\alpha = \ell$.

5.2.3 Calcul des déplacements

5.2.3.1 Cas général. Formule fondamentale

Pour calculer la rotation $\omega(x)$ et la flèche $v(x)$ dans une section quelconque, connaissant les moments fléchissants et les efforts tranchants le long de la poutre, on peut, puisque $\omega_0 = k_0 M_0$ est connu, utiliser les **formules de Bresse** (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) :

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= \omega_0 + \int_0^x \frac{M(\xi) d\xi}{EI(\xi)} \\ v(x) &= \omega_0 x + \int_0^x \frac{M(\xi)(x - \xi) d\xi}{EI(\xi)} - \int_0^x \frac{T(\xi) d\xi}{GS_1(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

La seconde formule (38) peut s’écrire sous la forme :

$$v(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi - \int_0^x \frac{T(\xi) d\xi}{GS_1(\xi)}$$

On peut aussi, pour calculer $v(x)$, utiliser le **théorème de Castigliano** (article *Théorie de l’élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*). Pour cela, rendons la poutre isostatique en remplaçant les encastrements élastiques par des appuis simples ;

les flèches ne seront pas changées si l’on applique à la poutre rendue isostatique un couple $-M_0$ en A et un couple M_1 en B. Il en résulte que la formule (15), établie pour la poutre sur appuis simples :

$$v(x) = - \int_0^\ell \mu(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^\ell \mu_\xi(x, \xi) \frac{T(\xi)}{GS_1(\xi)} d\xi$$

est encore exacte. Transformons cette formule en remplaçant $M(\xi)$ et $T(\xi)$ par leurs valeurs [formules (33)] :

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \mu(\xi) + M_0 \left(1 - \frac{\xi}{\ell}\right) + M_1 \frac{\xi}{\ell} \\ T(\xi) &= \frac{d\mu}{d\xi} + \frac{M_1 - M_0}{\ell} \end{aligned}$$

nous obtenons la **formule fondamentale** :

$$v(x) = v_i(x) + M_0 \omega'(x) - M_1 \omega''(x) \quad (39)$$

dans laquelle $v_i(x)$ est la flèche produite par les charges appliquées dans la poutre AB supposée sur appuis simples ; $\omega'(x)$ et $\omega''(x)$ sont les rotations des extrémités A et B de la poutre AB supposée sur appuis simples, soumise à une charge unité appliquée à l’abscisse x . La formule (39) peut également être démontrée en utilisant le **théorème de réciprocité de Maxwell-Betti** (article *Théorie de l’élasticité* [A 305] dans le traité *Sciences fondamentales*).

Dans le cas d’une poutre de section constante ($I = Cte, S_1 = Cte$), la formule (39) se réduit, que l’on tienne compte ou non de la déformation due à l’effort tranchant, à la formule :

$$v(x) = v_i(x) - M_0 \frac{x(\ell - x)(2\ell - x)}{6\ell EI} - M_1 \frac{x(\ell - x)(\ell + x)}{6\ell EI} \quad (40)$$

5.2.3.2 Poutre de section constante encastree à ses extrémités

Négligeons les déformations dues à l’effort tranchant.

Examinons d’abord le cas d’une charge de densité constante répartie sur toute la longueur de la poutre ; nous avons calculé $v_i(x)$ au paragraphe 3.1.2.2.2 :

$$v_i(x) = -p \frac{x(\ell - x)}{24EI} (\ell^2 + \ell x - x^2)$$

et, compte tenu de $M_0 = M_1 = -\frac{1}{12} p \ell^2$ (§ 5.2.2.6), la formule (40) donne :

$$v(x) = -p \frac{[x(\ell - x)]^2}{24EI}$$

En particulier, la flèche dans la section médiane est :

$$v\left(\frac{1}{2} \ell\right) = -\frac{p \ell^4}{384EI}$$

Déterminons la ligne d’influence de la flèche ; nous avons :

$$v(\alpha, x) = v_i(\alpha, x) + M_0(\alpha) \omega'(x) - M_1(\alpha) \omega''(x)$$

Compte tenu de l’expression (18) de $v_i(\alpha, x)$ et des valeurs de $M_0(\alpha)$ et $M_1(\alpha)$ calculées dans le paragraphe 5.2.2.6, nous obtenons :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{P}{6EI} \frac{x^2(\ell - \alpha)^2}{\ell^3} [3\ell\alpha - (\ell + 2\alpha)x] & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{P}{6EI} \frac{\alpha^2(\ell - x)^2}{\ell^3} [3\ell x - (\ell + 2x)\alpha] & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (41)$$

Une charge P appliquée dans la section médiane produit dans cette section une flèche :

$$v\left(\frac{1}{2}\ell, \frac{1}{2}\ell\right) = -\frac{P\ell^3}{192EI}$$

5.2.3.3 Poutre de section constante encastrée en A et sur appui simple en B

Négligeons les déformations dues à l'effort tranchant.

Examinons d'abord le cas d'une charge de densité constante p répartie sur toute la longueur de la poutre ; compte tenu de l'expression de $v_i(x)$, et de ce que $M_0 = -\frac{1}{8}p\ell^2$ et $M_1 = 0$ (§ 5.2.2.7), la formule (40) donne :

$$v(x) = -p \frac{\ell x^2(\ell-x)(3\ell-2x)}{48EI}$$

Cette flèche est maximale en valeur absolue pour $x/\ell \approx 0,5785$ et a pour valeur :

$$v_{max} \approx -2,0798 \frac{p\ell^4}{384EI}$$

Déterminons la ligne d'influence de la flèche ; nous avons :

$$v(\alpha, x) = v_i(\alpha, x) - M_0(\alpha) \frac{x(\ell-x)(2\ell-x)}{6\ell EI}$$

Compte tenu de l'expression (18) de $v_i(\alpha, x)$ et de la valeur de $M_0(\alpha)$ calculée dans le paragraphe 5.2.2.7, nous obtenons :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{P}{6EI} \frac{x^2(\ell-\alpha)}{2\ell^3} [\alpha(2\ell-\alpha)(3\ell-x) - 2\ell^2x] & \text{pour } x < \alpha \\ -\frac{P}{6EI} \frac{\alpha^2(\ell-x)}{2\ell^3} [x(2\ell-x)(3\ell-\alpha) - 2\ell^2\alpha] & \text{pour } x > \alpha \end{cases} \quad (42)$$

Une charge P appliquée dans la section médiane produit dans cette section une flèche :

$$v\left(\frac{1}{2}\ell, \frac{1}{2}\ell\right) = -\frac{7P\ell^3}{768EI}$$

Remarque : dans les deux cas particuliers que l'on vient d'étudier, la ligne d'influence de la rotation est définie par :

$$\omega(\alpha, x) = \frac{\partial}{\partial x} v(\alpha, x)$$

5.3 Poutres continues

5.3.1 Notations.

Choix des inconnues hyperstatiques

Une *poutre continue* est une poutre droite reposant sur plus de deux appuis simples ; cette poutre est soumise à des charges verticales, et les réactions exercées par les appuis sont verticales.

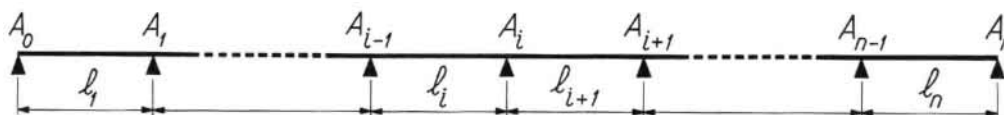


Figure 34 - Poutre continue à n travées

Nous numérotons les appuis $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ de 0 à n , et les travées de 1 à n ; la travée (i) est $A_{i-1}A_i$, sa portée est ℓ_i (figure 34) et une section de cette travée est repérée par son abscisse x comptée à partir de l'appui de gauche A_{i-1} .

Nous avons $n+1$ réactions d'appui R_i et seulement deux équations d'équilibre ; une poutre continue à n travées est donc $n-1$ fois hyperstatique. Nous choisissons pour inconnues les moments fléchissants M_1, M_2, \dots, M_{n-1} sur les appuis intermédiaires. Le moment fléchissant $m_i(x)$ et l'effort tranchant $t_i(x)$ dans la section X d'abscisse $x = \overline{A_{i-1}X}$ de la travée (i) ont pour expressions [formules (33)] :

$$m_i(x) = \mu_i(x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + M_i \frac{x}{\ell_i}$$

$$t_i(x) = \frac{d\mu_i}{dx} + \frac{M_i - M_{i-1}}{\ell_i}$$

La réaction R_i exercée par l'appui A_i a pour valeur :

$$R_i = t_{i+1}(0) - t_i(\ell_i)$$

5.3.2 Relation de Clapeyron ou des trois moments

Désignons par a_i, b_i et c_i les coefficients de souplesse de la travée (§ 5.1), et par ω'_i et ω''_i les rotations des extrémités de cette travée supposée sur appuis simples. La rotation ω_i de la section sur l'appui A_i est donnée par les formules (29) ; en considérant successivement A_i comme appartenant à la travée $A_{i-1}A_i$ et à la travée A_iA_{i+1} , nous avons :

$$\omega_i = \omega''_i + b_i M_{i-1} + c_i M_i$$

$$\omega_i = \omega'_{i+1} - a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1}$$

Nous en déduisons la relation suivante due à **Clapeyron** :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i \quad (43)$$

qui relie les moments sur trois appuis consécutifs.

Supposons la poutre non chargée, et imposons aux appuis A_i des dénivellations v_i comptées positivement vers le haut ; en observant que la rotation d'ensemble du segment $A_{i-1}A_i$ est :

$$\Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i}$$

les formules (29) donnent les relations :

$$\omega_i - \Omega_i = b_i M_{i-1} + c_i M_i$$

$$\omega_i - \Omega_{i+1} = -a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1}$$

Nous en déduisons la **relation des trois moments** relative aux dénivellations d'appui :

$$b_j M_{j-1} + (c_j + a_{j+1}) M_j + b_{j+1} M_{j+1} = \Omega_{j+1} - \Omega_j \quad (44)$$

Dans le cas où la poutre est de section constante, et en négligeant les déformations dues à l'effort tranchant, nous avons (§ 5.2.2.6) :

$$a_i = c_i = \frac{\ell_i}{3EI} \quad b_i = \frac{\ell_i}{6EI}$$

et les formules (43) et (44) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ell_i M_{i-1} + 2(\ell_i + \ell_{i+1}) M_i + \ell_{i+1} M_{i+1} \\ = -6 \int_0^{\ell_i} \mu \frac{x}{\ell_i} dx - 6 \int_0^{\ell_{i+1}} \mu_{i+1} \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) dx \\ \ell_i M_{i-1} + 2(\ell_i + \ell_{i+1}) M_i + \ell_{i+1} M_{i+1} \\ = 6EI \left(\frac{v_{i-1} - v_i}{\ell_i} + \frac{v_{i+1} - v_i}{\ell_{i+1}} \right) \end{aligned}$$

Donnons la valeur des intégrales qui figurent au second membre de la première des formules précédentes pour différents cas de charge.

■ Lorsqu'une charge P est appliquée à l'abscisse α :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \mu \frac{x}{\ell} dx &= P \frac{\alpha(\ell - \alpha)(\ell + \alpha)}{6\ell} \\ \int_0^{\ell} \mu \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx &= P \frac{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{6\ell} \end{aligned}$$

■ Lorsqu'une charge de densité p est appliquée sur l'intervalle $(0, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \mu \frac{x}{\ell} dx &= p \frac{\alpha^2(2\ell^2 - \alpha^2)}{24\ell} \\ \int_0^{\ell} \mu \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx &= p \frac{\alpha^2(2\ell - \alpha)^2}{24\ell} \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha = \ell$, les deux intégrales précédentes ont la même valeur $p\ell^3/24$.

5.3.3 Méthode générale de calcul

La méthode la plus simple et la plus précise est la **méthode des foyers**. Elle consiste à supposer qu'une seule travée est chargée, le cas où plusieurs travées sont chargées s'obtenant par superposition.

Supposons donc seule la travée $A_{j-1} A_j$ chargée. La ligne représentative du moment fléchissant (figure 35) dans les travées autres que la travée chargée sont des segments de droite, puisque la dérivée seconde du moment fléchissant est nulle.

Les moments fléchissants dans les travées situées à gauche de A_{j-1} sont proportionnels à la rotation ω_{j-1} ; il en résulte que chacun des segments de droite représentant le moment fléchissant dans la travée $A_{j-1} A_j$ ($j < i$) situé à gauche de A_{j-1} passe par un point fixe F_j . De même, le segment de droite qui représente le moment fléchissant dans la travée $A_{k-1} A_k$ ($k > i$) située à droite de A_j passe par un point fixe F'_k . Les points F_j et F'_k sont respectivement les *foyers de gauche* et les *foyers de droite*.

Appliquons la relation des trois moments (43) aux appuis successifs :

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + a_2) M_1 + b_2 M_2 &= 0 \\ b_2 M_1 + (c_2 + a_3) M_2 + b_3 M_3 &= 0 \\ \dots \\ b_{i-2} M_{i-3} + (c_{i-2} + a_{i-1}) M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (45)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{i-1} M_{i-2} + (c_{i-1} + a_i) M_{i-1} + b_i M_i &= \omega'_i \\ b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} &= -\omega''_i \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{i+1} M_i + (c_{i+1} + a_{i+2}) M_{i+1} + b_{i+2} M_{i+2} &= 0 \\ \dots \\ b_{n-2} M_{n-3} + (c_{n-2} + a_{n-1}) M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} &= 0 \\ b_{n-1} M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n) M_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (47)$$

Les équations (45), (46) et (47) permettent de calculer les inconnues M_1, M_2, \dots, M_{n-1} .

Les équations (45) montrent que les rapports $M_1/M_2, M_2/M_3, \dots$ sont constants, donc que la ligne représentative du moment fléchissant dans la travée $A_{j-1} A_j$ ($j < i$) passe par un point fixe F_j défini par :

$$\varphi_j = \frac{A_{j-1} F_j}{F_j A_j} = - \frac{M_{j-1}}{M_j}$$

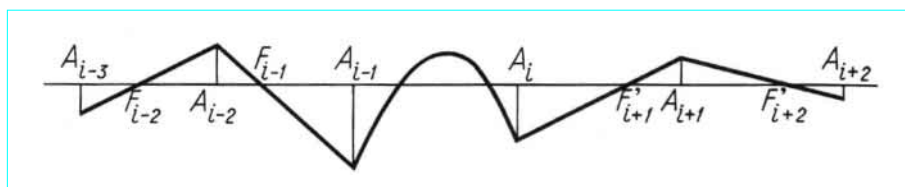


Figure 35 – Poutre continue : ligne représentative du moment fléchissant

Les relations suivantes, déduites des équations (45), permettent de calculer successivement les rapports $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ qui définissent les foyers de gauche :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} &= a_2 + c_1 - b_1 \varphi_1 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{b_i}{\varphi_i} &= a_i + c_{i-1} - b_{i-1} \varphi_{i-1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{b_n}{\varphi_n} &= a_n + c_{n-1} - b_{n-1} \varphi_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Les équations (47) montrent que les rapports $M_{n-1}/M_{n-2}, M_{n-2}/M_{n-3}, \dots$ sont constants, donc que la ligne représentative du moment fléchissant dans la travée $A_{k-1} A_k (k > i)$ passe par un point fixe F'_k défini par :

$$\varphi'_k = \frac{\overline{F'_k A_k}}{A_{k-i} F'_k} = - \frac{M_k}{M_{k-1}}$$

Les relations suivantes, déduites des relations (47), permettent de calculer successivement les rapports $\varphi'_n, \varphi'_{n-1}, \dots, \varphi'_1$ qui définissent les foyers de droite :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_n &= 0 \\ \frac{b_{n-1}}{\varphi'_{n-1}} &= c_{n-1} + a_n - b_n \varphi'_n \\ \dots \dots \dots \\ \frac{b_i}{\varphi'_i} &= c_i + a_{i+1} - b_{i+1} \varphi'_{i+1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{b_1}{\varphi'_1} &= c_1 + a_2 - b_2 \varphi'_2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Ayant ainsi déterminé les foyers, les équations (46) s'écrivent, puisque $M_{i-2} = -\varphi_{i-1} M_{i-1}$ et $M_{i+1} = -\varphi'_{i+1} M_i$:

$$\begin{aligned} (a_i + c_{i-1} - b_{i-1} \varphi_{i-1}) M_{i-1} + b_i M_i &= \omega'_i \\ b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1} - b_{i+1} \varphi'_{i+1}) M_i &= -\omega''_i \end{aligned}$$

soit, compte tenu des relations (48) et (49) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_i} M_{i-1} + M_i &= \frac{\omega'_i}{b_i} \\ M_{i-1} + \frac{1}{\varphi'_i} M_i &= -\frac{\omega''_i}{b_i} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les moments aux extrémités de la travée chargée :

$$\left. \begin{aligned} M_{i-1} &= \frac{1}{b_i} \frac{\frac{1}{\varphi'_i} \omega'_i + \omega''_i}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} \\ M_i &= -\frac{1}{b_i} \frac{\omega'_i + \frac{1}{\varphi_i} \omega''_i}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Les moments sur les autres appuis se calculent par les relations :

$$\left. \begin{aligned} M_{i-2} &= -\varphi_{i-1} M_{i-1}, & M_{i-3} &= -\varphi_{i-2} M_{i-2}, & \text{etc.} \\ M_{i+1} &= -\varphi'_{i+1} M_i, & M_{i+2} &= -\varphi'_{i+2} M_{i+1}, & \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Remarque : lorsque les appuis extrêmes sont élastiquement encastrés (§ 5.2.1) : $\omega_0 = k_0 M_0, \omega_n = -k_n M_n$

les relations précédentes sont encore valables, à condition de déterminer les foyers de gauche à partir de $\varphi_1 = b_1/(a_1 + k_0)$ (au lieu de $\varphi_1 = 0$) et les foyers de droite à partir de $\varphi'_n = b_n/(c_n + k_n)$ (au lieu de $\varphi'_n = 0$).

5.3.4 Lignes d'influence

5.3.4.1 Lignes d'influence des moments sur appuis

Calculons le moment fléchissant $M_i(\alpha)$ sur l'appui A_i sous l'effet d'une charge unité P appliquée dans la section d'abscisse α d'une travée quelconque.

Lorsque la charge P se trouve sur la travée $A_{i-1} A_i$, nous avons :

$$M_i(\alpha) = -\frac{1}{b_i} \frac{\omega'_i(\alpha) + \frac{1}{\varphi_i} \omega''_i(\alpha)}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}$$

Lorsque la charge P se trouve sur la travée $A_i A_{i+1}$, nous avons :

$$M_i(\alpha) = \frac{1}{b_{i+1}} \frac{\frac{1}{\varphi'_{i+1}} \omega'_{i+1}(\alpha) + \omega''_{i+1}(\alpha)}{\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1}$$

Lorsque la charge P se trouve sur une travée $A_{r-1} A_r (r < i)$, nous avons :

$$M_i(\alpha) = (-1)^{i-r} \varphi'_{r+1} \varphi'_{r+2} \dots \varphi'_i M_r(\alpha)$$

Lorsque la charge P se trouve sur la travée $A_{s-1} A_s (s > i+1)$, nous avons :

$$M_i(\alpha) = (-1)^{s-i+1} \varphi_{i+1} \varphi_{i+2} \dots \varphi_{s-1} M_{s-1}(\alpha)$$

Les deux relations précédentes montrent qu'il suffit d'étudier les lignes d'influence des moments fléchissants sur appuis dans les travées contiguës aux appuis pour obtenir rapidement, grâce aux rapports φ et φ' , ces lignes d'influence sur toute l'étendue de la poutre.

La figure 36 donne la forme de la ligne d'influence de M_i .

5.3.4.2 Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque

Soit X la section d'abscisse x de la travée $A_{i-1} A_i$; la ligne d'influence du moment fléchissant dans cette section est définie (§ 5.2.2.3) par :

$$M(\alpha, x) = \mu_i(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + M_i(\alpha) \frac{x}{\ell_i}$$

La forme de la ligne d'influence, indiquée sur la figure 37, dépend de la position de X par rapport aux foyers F_i et F'_i de la travée.

On remarquera que le moment fléchissant au droit d'un foyer de gauche ne dépend pas des charges appliquées sur les travées situées à droite de la travée considérée. De même, le moment fléchissant au droit d'un foyer de droite ne dépend pas des charges appliquées sur les travées situées à gauche de la travée considérée. Ces propriétés sont caractéristiques des foyers.

5.3.4.3 Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section quelconque

La ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section X d'abscisse x de la travée $A_{i-1} A_i$ est définie (§ 5.2.2.4) par :

$$T(\alpha, x) = \frac{\partial}{\partial x} \mu_i(\alpha, x) + \frac{M_i(\alpha) - M_{i-1}(\alpha)}{\ell_i}$$

Elle a la forme indiquée sur la figure 38. Lorsque X varie entre A_{i-1} et A_i , il suffit de déplacer le segment $X'X'' = 1$.

5.3.5 Exemples de poutres continues

5.3.5.1 Poutre comportant une infinité de travées identiques, illimitée dans les deux sens

Toutes les travées ont les mêmes coefficients de souplesse a , b et c . Dans ce cas, $\varphi_i = \varphi'_i = \varphi$, et les relations (48) et (49) montrent que φ est la plus petite racine de l'équation :

$$b\varphi^2 - (a+c)\varphi + b = 0 \tag{52}$$

soit :

$$\varphi = \frac{a+c - \sqrt{(a+c)^2 - 4b^2}}{2b}$$

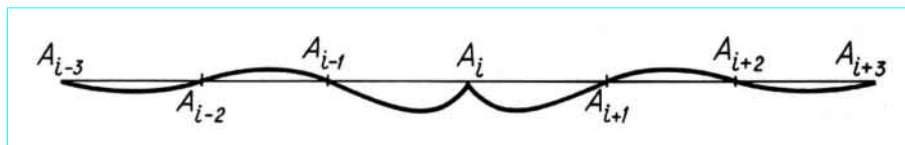


Figure 36 – Poutre continue : ligne d'influence du moment fléchissant sur l'appui A_i

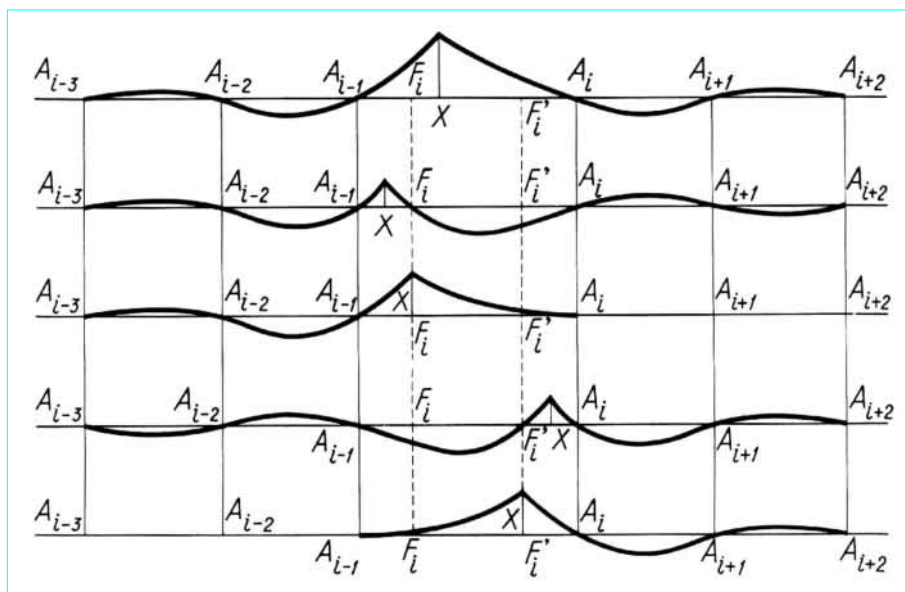


Figure 37 – Ligne d'influence du moment fléchissant en X , dépendant de la position de X par rapport aux foyers F_i et F'_i de la travée

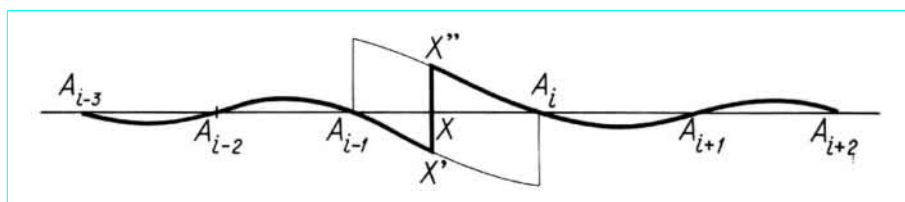


Figure 38 – Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section quelconque

Nous avons donc, la travée $A_{i-1} A_i$ étant seule chargée :

$$\begin{cases} M_{i-1} = \left(\frac{\varphi}{b}\right) \frac{\omega'_i + \varphi \omega''_i}{1 - \varphi^2}, & M_i = - \left(\frac{\varphi}{b}\right) \frac{\omega'_i \varphi + \omega''_i}{1 - \varphi^2} \\ M_{i-1-k} = (-1)^k \varphi^k M_{i-1}, & M_{i+k} = (-1)^k \varphi^k M_i \end{cases}$$

■ Examinons quelques cas particuliers.

— Supposons la poutre symétrique ($a = c$) et la travée $A_{i-1} A_i$ symétriquement chargée ($\omega'_i = -\omega''_i$) ; nous avons :

$$M_{i-1} = M_i = \left(\frac{\omega'_i}{b}\right) \frac{\varphi}{1 + \varphi} = \frac{\omega'_i}{2b} \left(1 - \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

— Supposons la poutre de section constante ; nous avons, en négligeant les déformations dues à l'effort tranchant (§ 5.2.2.6) :

$$a = c = 2b = \frac{\ell}{3EI}$$

et :

$$\varphi = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267\ 95$$

● Lorsque la travée $A_{i-1} A_i$ est soumise à une densité de charge p constante, nous avons (§ 3.1.2.1.2) $\omega'_i = -\omega''_i = -\frac{p\ell^3}{24EI}$, et nous trouvons :

$$M_{i-1} = M_i = -\frac{1}{8} p\ell^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Le moment fléchissant positif maximal au milieu de la travée a pour valeur :

$$M_{max} = \frac{p\ell^2}{8\sqrt{3}}$$

● Lorsque la travée $A_{i-1} A_i$ supporte une charge P à l'abscisse α , nous trouvons, $\omega'_i(\alpha)$ et $\omega''_i(\alpha)$ ayant les valeurs (14) de $\omega_0(\alpha)$ et $\omega_1(\alpha)$:

$$M_{i-1}(\alpha) = -P \frac{\alpha(\ell - \alpha) [\ell + \alpha(\sqrt{3} - 1)]}{2\ell^2}$$

$$M_i(\alpha) = -P \frac{\alpha(\ell - \alpha) [(2 - \sqrt{3})\ell + \alpha(\sqrt{3} - 1)]}{2\ell^2}$$

En particulier, lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$M_{i-1} = M_i = -P\ell \frac{3 - \sqrt{3}}{16} \approx -0,079\ 2 P\ell$$

et le moment fléchissant positif dans la section médiane a pour valeur :

$$M_{max} = P\ell \frac{1 + \sqrt{3}}{16} \approx 0,170\ 8 P\ell$$

5.3.5.2 Poutre comportant une infinité de travées identiques, illimitée dans un seul sens

Bornons-nous à déterminer les foyers de la poutre $A_0 A_1 A_2 A_3 \dots$ comportant une infinité de travées identiques à partir de l'appui A_0 .

Les foyers de droite occupent la même position relative dans toutes les travées ; φ' est égal à la plus petite racine de l'équation (52).

Les foyers de gauche sont définis par les rapports φ_i tels que :

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{b}{\varphi_i} = a + c - b\varphi_{i-1}$$

On peut montrer que, si λ et λ' désignent les racines ($\lambda < 1, \lambda' > 1$) de l'équation (52), on a :

$$\frac{\varphi_i - \lambda}{\varphi_i - \lambda'} = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^i$$

φ_i tend donc rapidement vers sa limite $\varphi_\infty = \lambda$.

Par **exemple**, dans le cas de travées identiques de section constante :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4} = 0,25, \quad \varphi_3 = \frac{4}{15} \approx 0,266\ 67, \quad \varphi_4 = \frac{15}{56} \approx 0,267\ 86 \\ \varphi_5 = \frac{56}{209} \approx 0,267\ 94, \dots, \quad \varphi_\infty = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267\ 95 \end{aligned}$$

5.3.6 Efforts dus aux dénivellations d'appuis

Pour calculer les moments fléchissants sur appuis, provoqués par des dénivellations v_i des appuis, on applique la **relation des trois moments** (44).

Si l'on suppose qu'une seule rotation d'ensemble :

$$\Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i}$$

est différente de zéro, le système d'équations que l'on obtient ne diffère du système étudié dans le paragraphe 5.3.3 que par le remplacement de ω'_i et ω''_i par Ω_i . La solution du système est donc :

$$\left. \begin{aligned} M_{i-1} &= \frac{\Omega_i}{b_i} \frac{\frac{1}{\varphi_i} + 1}{\frac{1}{\varphi_i} \varphi'_i - 1}, & M_i &= -\frac{\Omega_i}{b_i} \frac{\frac{1}{\varphi_i} + 1}{\frac{1}{\varphi_i} \varphi'_i - 1} \\ M_{i-2} &= -\varphi_{i-1} M_{i-1}, & M_{i-3} &= -\varphi_{i-2} M_{i-2}, \quad \text{etc.} \\ M_{i+1} &= -\varphi'_{i+1} M_i, & M_{i+2} &= -\varphi'_{i+2} M_{i+1}, \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

La solution générale s'obtient en superposant les résultats des solutions correspondant à chaque rotation d'ensemble Ω_i . Le calcul est donc très rapide dès que l'on a déterminé les rapports φ_i et φ'_i .

On notera qu'une seule dénivellation d'appui v_i entraîne deux rotations d'ensemble différentes de zéro :

$$\Omega_i = \frac{v_i}{\ell_i}, \quad \Omega_{i+1} = -\frac{v_i}{\ell_{i+1}}$$

5.3.7 Méthode de calcul déduite du théorème de réciprocité

La méthode des foyers (§ 5.3.3) n'est intéressante qu'à partir d'une poutre continue comportant au moins trois travées quelconques. Dans le cas d'une poutre continue comportant deux travées ou trois travées symétriques, la recherche des lignes d'influence des réactions hyperstatiques est une méthode plus simple et plus rapide que la méthode générale.

5.3.7.1 Poutre continue à deux travées

On cherche la ligne d'influence de la réaction R exercée par l'appui intermédiaire B (figure 39). Nous savons (§ 1.3.2) que, si $v(\alpha)$ est la flèche de la poutre sur appuis simples A et C soumise à une force verticale quelconque appliquée en B , la ligne d'influence de R est définie par :

$$R(\alpha) = \frac{v(\alpha)}{v(a)}$$

5.3.7.2 Poutre continue symétrique à trois travées

Prenons pour origine des abscisses le milieu O de la travée centrale et pour inconnues les réactions R et R' exercées par les appuis extrêmes (figure 40). Appliquons à la poutre isostatique, obtenue en supprimant les appuis extrêmes B et B' , le **théorème de réciprocité de Maxwell-Betti** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) pour les deux cas de charge suivants :

- charge $P = 1$ appliquée dans la section d'abscisse α , et réactions correspondantes $R(\alpha)$ et $R'(\alpha)$ en B et en B' ; les extrémités B et B' ne se déplacent pas ;
- charge verticale quelconque appliquée en B ; la flèche de la section d'abscisse α est $v(\alpha)$.

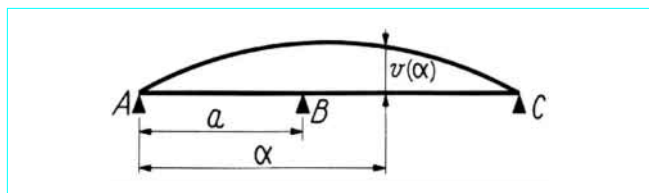


Figure 39 - Poutre continue à deux travées

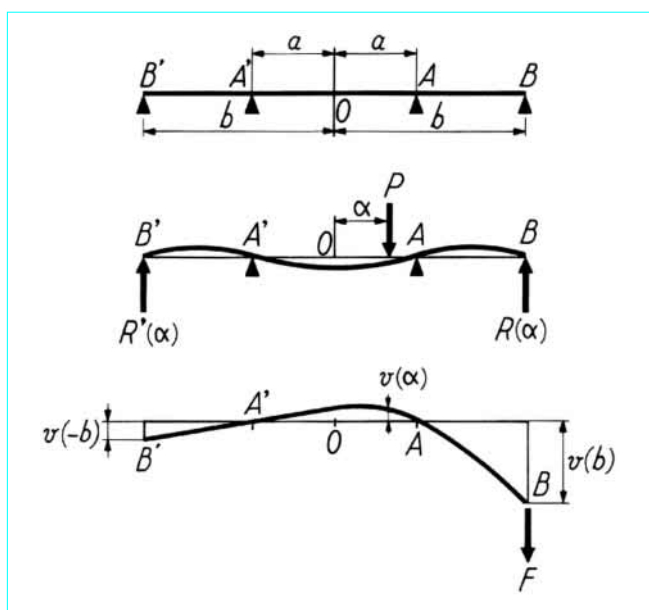


Figure 40 - Poutre continue à trois travées

Nous obtenons ainsi l'équation :

$$R(\alpha) v(b) + R'(\alpha) v(-b) - v(\alpha) = 0$$

Si l'on remplace α par $-\alpha$, nous avons, en vertu de la symétrie :

$$R'(\alpha) v(b) + R(\alpha) v(-b) - v(-\alpha) = 0$$

En ajoutant et en retranchant les deux équations précédentes, nous trouvons :

$$R(\alpha) + R'(\alpha) = \frac{v(\alpha) + v(-\alpha)}{v(b) + v(-b)}$$

$$R(\alpha) - R'(\alpha) = \frac{v(\alpha) - v(-\alpha)}{v(b) - v(-b)}$$

La détermination des lignes d'influence de R et de R' se ramène donc au calcul de la déformée $v(x)$ d'une poutre console symétrique soumise à une charge concentrée appliquée à l'une de ses extrémités.

Remarque : une autre méthode de calcul de la poutre symétrique à trois travées consiste à déterminer les lignes d'influence du moment fléchissant M_0 et de l'effort tranchant T_0 au milieu de la travée centrale. On aboutit ainsi aux résultats suivants : soit $v_1(\alpha)$ la déformée de la poutre console OAB et ω_0 la rotation de la section O lorsqu'on applique un couple unité à O ; soit $v_2(\alpha)$ la déformée de la poutre console OAB et $v_0 = v_2(O)$ la flèche de la section O lorsqu'on applique une charge unité en O ; nous trouvons, lorsque α est positif :

$$M_0(\alpha) = -\frac{v_1(\alpha)}{2v_0}, \quad T_0(\alpha) = \frac{v_2(\alpha)}{2v_0}$$

et lorsque α est négatif :

$$M_0(\alpha) = M_0(-\alpha), \quad T_0(\alpha) = -T_0(-\alpha)$$

5.3.8 Calcul des flèches

Une travée $A_{i-1} A_i$ d'une poutre continue est une poutre encastree élastiquement à ses extrémités. Donc, en vertu de la **formule fondamentale** (39), la flèche $v_i(x)$ de la travée $A_{i-1} A_i$ a pour valeur :

$$v_i(x) = v'_i(x) + M_{i-1} \omega'_i(x) - M_i \omega''_i(x)$$

$v'_i(x)$ désignant la flèche de la poutre $A_{i-1} A_i$ supposée sur appuis simples, et $\omega'_i(x)$ et $\omega''_i(x)$ les rotations des extrémités de la poutre $A_{i-1} A_i$ supposée sur appuis simples sous l'action d'une charge unité appliquée dans la section d'abscisse x .

La ligne d'influence de la flèche dans la section d'abscisse x est donc définie par l'équation :

$$v_i(\alpha, x) = v'_i(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \omega'_i(x) - M_i(\alpha) \omega''_i(x)$$

5.3.9 Généralisation de la théorie des poutres continues

5.3.9.1 Poutre continue sur appuis élastiques en rotation

Supposons que la rotation d'un appui ait pour effet d'appliquer à la poutre un couple proportionnel à la rotation. Les moments fléchissants de part et d'autre de l'appui sont différents ; soit M'_i le moment fléchissant à droite de l'appui A_i et M''_i le moment fléchissant à gauche de l'appui A_i ; par hypothèse, nous avons, h_i étant une constante positive caractéristique de l'appui ($h_i = \infty$ dans le cas d'un appui simple) :

$$\omega_i = h_i (M'_i - M''_i)$$

On commence par déterminer les foyers des travées.

Les foyers de gauche se déterminent au moyen des équations :

$$\begin{aligned} \omega_i &= b_i M'_{i-1} + c_i M''_i = -a_{i+1} M'_i - b_{i+1} M''_{i+1} \\ M'_{i-1} &= -\varphi_i M''_i, \quad M'_i = -\varphi_{i+1} M''_{i+1} \end{aligned}$$

Il en résulte la relation de récurrence entre φ_{i+1} et φ_i :

$$\frac{b_{i+1}}{\varphi_{i+1}} = a_{i+1} + \frac{h_i (c_i - b_i \varphi_i)}{h_i + c_i - b_i \varphi_i} \quad (54)$$

Cette relation permet de déterminer les rapports φ_i à partir de :

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{a_1 + h_0}$$

De même, les foyers de droite des travées sont déterminés au moyen de la relation de récurrence entre φ'_i et φ'_{i+1} :

$$\frac{b_i}{\varphi'_i} = c_i + \frac{h_i (a_{i+1} - b_{i+1} \varphi'_{i+1})}{h_i + a_{i+1} - b_{i+1} \varphi'_{i+1}} \quad (55)$$

à partir de :

$$\varphi'_n = \frac{b_n}{c_n + h_n}$$

Supposons la travée $A_{i-1} A_i$ seule chargée ; nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_{i-1} &= b_{i-1} M'_{i-2} + c_{i-1} M''_{i-1} = \omega'_i - a_i M'_{i-1} - b_i M''_i \\ \omega_i &= \omega''_i + b_i M'_{i-1} + c_i M''_i = -a_{i+1} M'_i - b_{i+1} M''_{i+1} \end{aligned}$$

et, compte tenu des relations :

$$\begin{aligned} \omega_{i-1} &= h_{i-1} (M'_{i-1} - M''_{i-1}), \quad \omega_i = h_i (M'_i - M''_i) \\ M'_{i-2} &= -\varphi_{i-1} M''_{i-1}, \quad M''_{i+1} = -\varphi'_{i+1} M'_i \end{aligned}$$

et des relations de récurrence (54) et (55), il est aisé de montrer que les moments fléchissants aux extrémités de la travée chargée sont donnés par les équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varphi_i} M'_{i-1} + M''_i &= \frac{\omega'_i}{b_i} \\ M'_{i-1} + \frac{1}{\varphi'_i} M''_i &= -\frac{\omega''_i}{b_i} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Les autres moments fléchissants sur appuis sont donnés pour $r < i$ par :

$$M''_r = M'_r \frac{h_r}{h_r + c_r - b_r \varphi_r}, \quad M'_{r-1} = -\varphi_r M''_r$$

et pour $s > i$ par :

$$M'_s = M''_s \frac{h_s}{h_s + a_{s+1} - b_{s+1} \varphi'_{s+1}}, \quad M''_{s+1} = -\varphi'_{s+1} M'_s$$

5.3.9.2 Poutre continue sur appuis simples élastiques

Un appui simple est *élastique* si la réaction R_i exercée par l'appui est proportionnelle au déplacement vertical de l'appui ; nous avons donc, k_i étant une constante caractéristique de l'appui :

$$v_i = -k_i R_i$$

Bornons-nous à établir la **relation des cinq moments**, qui sert de base au calcul de ces poutres. La relation des trois moments (§ 5.3.2) appliquée aux appuis A_{i-1} , A_i et A_{i+1} s'écrit, compte tenu des dénivellations v_i des appuis :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \frac{v_{i-1} - v_i}{\ell_i} + \frac{v_{i+1} - v_i}{\ell_{i+1}}$$

Désignons par R'_i les réactions exercées par les appuis A_i en supposant la poutre coupée au droit des appuis, autrement dit remplacée par une succession de poutres sur appuis simples ; la réaction R_i exercée par l'appui A_i sur la poutre continue a pour valeur :

$$R_i = R'_i + \frac{M_{i-1} - M_i}{\ell_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{\ell_{i+1}}$$

Il suffit d'éliminer R_i entre les équations précédentes pour obtenir la relation des cinq moments :

$$\begin{aligned} \frac{k_{i-1}}{\ell_{i-1} \ell_i} M_{i-2} + \left[b_i - \frac{k_{i-1}}{\ell_i} \left(\frac{1}{\ell_{i-1}} + \frac{1}{\ell_i} \right) - \frac{k_i}{\ell_i} \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) \right] M_{i-1} \\ + \left[c_i + a_{i+1} + \frac{k_{i-1}}{\ell_i^2} + k_i \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}^2} \right] M_i \\ + \left[b_{i+1} - \frac{k_i}{\ell_{i+1}} \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) - \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}} \left(\frac{1}{\ell_{i+1}} + \frac{1}{\ell_{i+2}} \right) \right] M_{i+1} \\ + \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1} \ell_{i+2}} M_{i+2} \quad (57) \\ = \omega'_{i+1} - \omega''_i - \frac{k_{i-1}}{\ell_i} R'_{i-1} + k_i \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) R'_i - \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}} R'_{i+1} \end{aligned}$$

5.4 Poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés

5.4.1 Généralités

5.4.1.1 Équation différentielle de l'équilibre. Son intégration

Nous nous bornons aux poutres d'inertie constante, et négligeons la déformation due à l'effort tranchant. Supposons la poutre soumise à une densité de charge $p(x)$; puisque, par hypothèse, la densité de réaction $r(x)$ exercée par les appuis est proportionnelle à la flèche $v(x)$ de la poutre :

$$r(x) = -kv(x)$$

k étant une constante positive appelée *module de réaction*, la flèche $v(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -(p-r) = -(p+kv)$$

soit :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = -p \quad (58)$$

Connaissant $v(x)$, le moment fléchissant et l'effort tranchant ont pour valeurs :

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad T = \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 v}{dx^3}$$

L'intégrale générale de l'équation (58) est la somme d'une intégrale particulière $v_0(x)$ et de l'intégrale générale de l'équation homogène obtenue en prenant $p = 0$. En définissant la constante γ , qui a les dimensions de l'inverse d'une longueur, par :

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{59}$$

l'intégrale générale de l'équation homogène a pour expression :

$$v(x) = e^{\gamma x} (A \cos \gamma x + B \sin \gamma x) + e^{-\gamma x} (C \cos \gamma x + D \sin \gamma x) \tag{60}$$

Il est commode d'écrire cette intégrale générale sous forme matricielle :

$$v(x) = \mathbf{KV}(x)$$

\mathbf{K} désignant la matrice ligne et $\mathbf{V}(x)$ la matrice colonne :

$$\mathbf{K} = [A, B, C, D] \quad \mathbf{V}(x) = \begin{bmatrix} e^{\gamma x} \cos \gamma x \\ e^{\gamma x} \sin \gamma x \\ e^{-\gamma x} \cos \gamma x \\ e^{-\gamma x} \sin \gamma x \end{bmatrix}$$

En effet, si nous utilisons la matrice :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \gamma$$

nous trouvons :

$$\frac{dv}{dx} = \mathbf{KD}V(x) = \gamma[A + B, -A + B, -C + D, -C - D] V(x)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \mathbf{KD}^2V(x) = 2\gamma^2[B, -A, -D, C] V(x)$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \mathbf{KD}^3V(x) = 2\gamma^3[-A + B, -A - B, C + D, -C + D] V(x)$$

On peut également écrire l'intégrale générale de l'équation homogène (60) en mettant en évidence les intégrales paires et les intégrales impaires :

$$v(x) = A \cosh \gamma x \cos \gamma x + B \sinh \gamma x \sin \gamma x + C \cosh \gamma x \sin \gamma x + D \sinh \gamma x \cos \gamma x$$

5.4.1.2 Les fonctions $\varphi(u)$, $\zeta(u)$, $\psi(u)$ et $\theta(u)$

Nous utiliserons les fonctions $\varphi(u)$, $\zeta(u)$, $\psi(u)$ et $\theta(u)$ définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ par les formules suivantes :

— lorsque u est positif :

$$\varphi(u) = e^{-u} (\cos u + \sin u), \quad \zeta(u) = e^{-u} \sin u$$

$$\psi(u) = e^{-u} (\cos u - \sin u), \quad \theta(u) = e^{-u} \cos u$$

— lorsque u est négatif :

$$\varphi(u) = \varphi(-u), \quad \zeta(u) = -\zeta(-u)$$

$$\psi(u) = \psi(-u), \quad \theta(u) = -\theta(-u)$$

Les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont paires, et les fonctions $\zeta(u)$ et $\theta(u)$ sont impaires.

Les fonctions $\varphi(u)$, $\zeta(u)$ et $\psi(u)$ sont continues, tandis que la fonction $\theta(u)$ présente une discontinuité pour $u = 0$:

$$\theta(+0) = 1, \quad \theta(-0) = -1$$

On vérifie sans peine les relations suivantes, valables quel que soit u :

$$\frac{d\varphi}{du} = -2\zeta(u), \quad \frac{d\zeta}{du} = \psi(u)$$

$$\frac{d\psi}{du} = -2\theta(u), \quad \frac{d\theta}{du} = -\varphi(u)$$

Le tableau 1 donne, pour u positif, les zéros, les abscisses des maximums ou des minimums, et les abscisses des points d'inflexion des fonctions $\varphi(u)$, $\zeta(u)$, $\psi(u)$ et $\theta(u)$.

Tableau 1 – Valeurs particulières des fonctions $\varphi(u)$, $\zeta(u)$, $\psi(u)$ et $\theta(u)$			
Fonction	Zéros	Maximums ou minimums	Inflexions
$\varphi(u)$	$\frac{3}{4}\pi + n\pi$	$n\pi$	$\frac{1}{4}\pi + n\pi$
$\zeta(u)$	$n\pi$	$\frac{1}{4}\pi + n\pi$	$\frac{1}{2}\pi + n\pi$
$\psi(u)$	$\frac{1}{4}\pi + n\pi$	$\frac{1}{2}\pi + n\pi$	$\frac{3}{4}\pi + n\pi$
$\theta(u)$	$\frac{1}{2}\pi + n\pi$	$\frac{3}{4}\pi + n\pi$	$n\pi$

5.4.2 Poutre illimitée dans les deux sens

Nous étudierons deux cas de charge fondamentaux.

5.4.2.1 Charge concentrée P appliquée à l'origine O

Ce cas est illustré par la figure 41.

Dans l'intervalle $(0, \infty)$, la flèche $v(x)$ est donnée par la formule (60) ; A et B sont nuls puisque v et dv/dx tendent vers zéro lorsque x tend vers l'infini ; C et D sont déterminés par les conditions :

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ et } T = EI \frac{d^3v}{dx^3} = 0 \text{ pour } x = 0$$

Nous trouvons ainsi la solution, valable quel que soit x :

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= -\frac{P\gamma}{2k} \varphi(\gamma x), & \frac{dv}{dx} &= \frac{P\gamma^2}{k} \zeta(\gamma x) \\ M(x) &= \frac{P}{4\gamma} \psi(\gamma x), & T &= -\frac{1}{2} P\theta(\gamma x) \end{aligned} \right\} \tag{61}$$

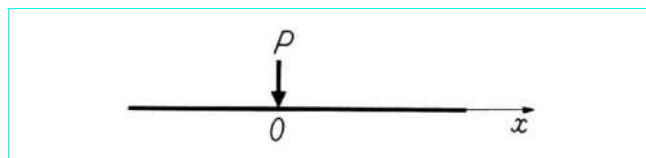


Figure 41 – Poutre illimitée : charge concentrée appliquée en O

Cette solution permet d'obtenir par superposition la solution relative à un système de charges P_i appliquées aux abscisses α_i :

$$v(x) = -\frac{\gamma}{2k} \sum_i P_i \varphi[\gamma(x-\alpha_i)]$$

et la solution relative à une densité de charge $p(\alpha)$ sur l'intervalle (α_0, α_1) :

$$v(x) = -\frac{\gamma}{2k} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p(\alpha) \varphi[\gamma(x-\alpha)] d\alpha$$

Étudions, par **exemple**, le cas d'une charge de densité constante sur l'intervalle $(-a, a)$; nous avons :

$$v(x) = -\frac{p\gamma}{2k} \int_{-a}^a \varphi[\gamma(x-\alpha)] d\alpha = -\frac{p}{2k} \left\{ \theta[\gamma(x-\alpha)] \right\}_{-a}^+ a$$

Il faut prendre garde à la discontinuité de la fonction $\theta(u)$. En désignant par $p(x)$ une fonction égale à p sur l'intervalle $(-a, a)$ et nulle en dehors de cet intervalle, nous trouvons, quel que soit x :

$$v(x) = \frac{p}{2k} \left\{ \theta[\gamma(x+a)] - \theta[\gamma(x-a)] \right\} - \frac{p(x)}{k}$$

Nous en déduisons les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant :

$$M(x) = \frac{p}{4\gamma^2} \left\{ \zeta[\gamma(x+a)] - \zeta[\gamma(x-a)] \right\}$$

$$T(x) = \frac{p}{4\gamma} \left\{ \psi[\gamma(x+a)] - \psi[\gamma(x-a)] \right\}$$

5.4.2.2 Couple concentré Γ à l'origine O

Le couple Γ (figure 42) est équivalent à une charge P appliquée en $x=0$ et à une charge $-P$ appliquée en $x=\varepsilon$, le produit $P\varepsilon$ étant égal à Γ . Donc :

$$v(x) = -\frac{\gamma}{2k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ P[\varphi(\gamma x) - \varphi[\gamma(x-\varepsilon)]] \right\}$$

En utilisant la **formule des accroissements finis**, nous trouvons la solution, valable quel que soit x :

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= \frac{\Gamma\gamma^2}{k} \zeta(\gamma x), & \frac{dv}{dx} &= \frac{\Gamma\gamma^3}{k} \psi(\gamma x) \\ M(x) &= -\frac{1}{2} \Gamma \theta(\gamma x), & T(x) &= \frac{1}{2} \Gamma \gamma \varphi(\gamma x) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

5.4.3 Poutre de longueur finie

Les solutions particulières (61) et (62) permettent le calcul des flèches et des efforts dans le cas d'une poutre de longueur finie $BA = \ell$ soumise à des charges quelconques. En effet, considérons (figure 43) la poutre illimitée $X'BAX$ soumise :

— aux charges appliquées entre B et A à la poutre de longueur finie BA ;

— à une charge concentrée P_A et à un couple concentré Γ_A appliqués dans la section d'abscisse $x_A + 2\varepsilon$, ε étant très petit ;

— à une charge concentrée P_B et à un couple concentré Γ_B appliqués dans la section d'abscisse $x_B - 2\varepsilon$, ε étant très petit.

En superposant les résultats obtenus dans ces trois cas, nous obtiendrons la solution relative à la poutre de longueur finie si P_A, Γ_A, P_B et Γ_B sont tels que :

— le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section A' d'abscisse $x_A + \varepsilon$ sont nuls ;

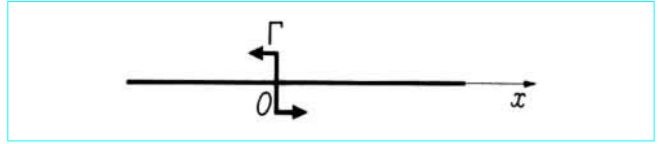


Figure 42 – Poutre illimitée : couple concentré en O

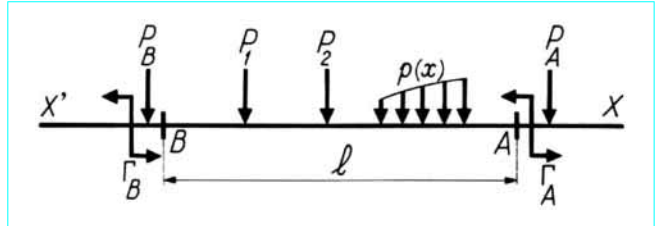


Figure 43 – Poutre limitée soumise à des charges réparties, à des charges concentrées et à des couples concentrés

— le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section B' d'abscisse $x_B - \varepsilon$ sont nuls.

En effet, si ces quatre conditions sont réalisées, nous pouvons couper la poutre illimitée $X'BAX$ en A' et en B' sans modifier l'équilibre.

Les quatre conditions précédentes fournissent quatre équations pour déterminer P_A, Γ_A, P_B et Γ_B :

$$\left. \begin{aligned} T_A + \frac{1}{2} P_A + \frac{1}{2} \gamma \Gamma_A - \frac{1}{2} \theta(\gamma \ell) P_B + \frac{1}{2} \gamma \varphi(\gamma \ell) \Gamma_B &= 0 \\ T_B - \frac{1}{2} P_B + \frac{1}{2} \gamma \Gamma_B + \frac{1}{2} \theta(\gamma \ell) P_A + \frac{1}{2} \gamma \varphi(\gamma \ell) \Gamma_A &= 0 \\ M_A + \frac{1}{4\gamma} P_A + \frac{1}{2} \Gamma_A + \frac{1}{4\gamma} \psi(\gamma \ell) P_B - \frac{1}{2} \theta(\gamma \ell) \Gamma_B &= 0 \\ M_B + \frac{1}{4\gamma} P_B - \frac{1}{2} \Gamma_B + \frac{1}{4\gamma} \psi(\gamma \ell) P_A + \frac{1}{2} \theta(\gamma \ell) \Gamma_A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

T_A, T_B, M_A et M_B désignant les efforts tranchants et les moments fléchissants dans les sections A' et B' de la poutre illimitée soumise aux charges données.

■ Dans le cas de charges données *symétriques*, nous avons :

$$T_A = -T_B, \quad M_A = M_B, \quad P_A = P_B, \quad \Gamma_A = -\Gamma_B$$

et le système (63) se réduit aux deux équations :

$$T_A + \frac{1}{2} [1 - \theta(\gamma \ell)] P_A + \frac{1}{2} \gamma [1 - \varphi(\gamma \ell)] \Gamma_A = 0$$

$$M_A + \frac{1}{4\gamma} [1 + \psi(\gamma \ell)] P_A + \frac{1}{2} [1 + \theta(\gamma \ell)] \Gamma_A = 0$$

■ Dans le cas de charges données *antisymétriques*, nous avons :

$$T_A = T_B, \quad M_A = -M_B, \quad P_A = -P_B, \quad \Gamma_A = \Gamma_B$$

et le système (63) se réduit aux deux équations :

$$T_A + \frac{1}{2} [1 + \theta(\gamma \ell)] P_A + \frac{1}{2} \gamma [1 + \varphi(\gamma \ell)] \Gamma_A = 0$$

$$M_A + \frac{1}{4\gamma} [1 - \psi(\gamma \ell)] P_A + \frac{1}{2} [1 - \theta(\gamma \ell)] \Gamma_A = 0$$

6. Poutres courbes ou arcs

6.1 Généralités

6.1.1 Définition. Forces appliquées

Un *arc* est une poutre courbe AB de plan moyen Oxy . Nous désignerons par (x, y) les coordonnées d'un point G de la fibre moyenne, et par θ l'angle de Ox et de la tangente en G à la fibre moyenne. Aux extrémités A et B , l'arc est lié aux culées par des articulations ou des encastres parfaits. La portée ℓ de l'arc est la longueur de la projection $A'B'$ de AB sur Ox (figure 44).

Nous supposons que les forces appliquées à l'arc sont des charges parallèles à Oy ; le cas de forces quelconques sera étudié au paragraphe 6.6.

Décomposons le système des réactions exercées par l'appui de gauche en deux systèmes.

■ Le premier système comprend uniquement la réaction R' de l'appui A' de la poutre sur appuis simples $A'B'$ de même portée que l'arc et soumise aux mêmes charges que l'arc; nous désignerons par $\mu(x)$ le moment fléchissant dans la section d'abscisse x de cette poutre.

■ Le second système, appelé *réaction complémentaire d'appui*, est défini par sa résultante générale de composantes Q et R suivant Ox et Oy , et par son moment résultant $-\Gamma$ par rapport à O .

Dans ces conditions, le moment fléchissant, l'effort normal et l'effort tranchant dans la section d'abscisse x de l'arc ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) + \Gamma + Rx - Qy \\ N(x) &= \left(\frac{d\mu}{dx} + R \right) \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) &= \left(\frac{d\mu}{dx} - R \right) \cos \theta - Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

y désignant l'ordonnée de la fibre moyenne, les formules :

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds}$$

montrent que l'on a :

$$T = \frac{dM}{ds}, \quad N = \frac{Q}{\cos \theta} + T \operatorname{tg} \theta \quad (65)$$

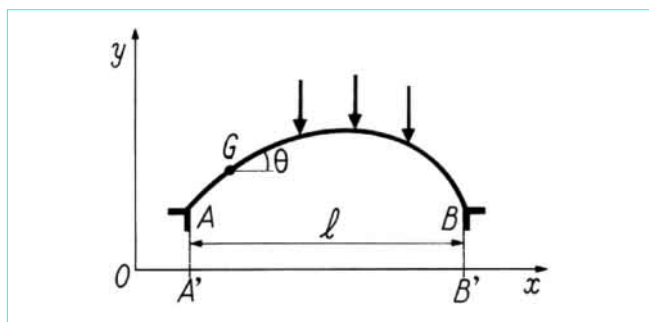


Figure 44 - Arc

6.1.2 Méthode de calcul

Nous considérerons des arcs comportant trois, deux, une ou pas d'articulations. Pour déterminer à la fois les inconnues Γ , R , Q et les rotations relatives aux articulations éventuelles, nous utiliserons :

— les **équations de la statique**, qui reviennent à écrire que le moment fléchissant dans une section comportant une articulation est nul ;

— les **formules de Bresse** (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) appliquées d'une extrémité à l'autre de l'arc; nous choisirons x comme variable, et nous désignerons par I , S et S_1 les *valeurs réduites* du moment d'inertie, de la section et de la section relative à la déformation due à l'effort tranchant (ce sont les valeurs réelles multipliées par $\cos \theta$).

Examinons les différents types d'arcs.

6.1.2.1 Arc à trois articulations (§ 6.2)

Les trois équations de la statique déterminent les inconnues Γ , R et Q . L'arc à trois articulations est donc *isostatique*. Les formules de Bresse permettent de calculer les rotations relatives aux articulations.

6.1.2.2 Arc à deux articulations (§ 6.3)

Les deux équations de la statique déterminent deux des trois inconnues Γ , R et Q . L'arc à deux articulations est donc *une fois hyperstatique*. Les formules de Bresse donnent les deux rotations relatives aux articulations et une condition de compatibilité des déformations permettant de calculer l'unique inconnue hyperstatique.

6.1.2.3 Arc à une articulation (§ 6.4)

L'unique équation de la statique détermine une des trois inconnues Γ , R et Q . L'arc à une articulation est donc *deux fois hyperstatique*. Les formules de Bresse donnent la rotation relative à l'articulation et deux conditions de compatibilité des déformations permettant de calculer les deux inconnues hyperstatiques.

6.1.2.4 Arc encastré (§ 6.5)

L'arc encastré est *trois fois hyperstatique*. Les formules de Bresse donnent trois conditions de compatibilité des déformations permettant de calculer les trois inconnues hyperstatiques Γ , R et Q .

6.1.3 Arcs et courbes funiculaires

La première formule (64) montre que le moment fléchissant dans l'arc est identiquement nul lorsque la fibre moyenne a pour équation :

$$y = \frac{1}{Q} [\mu(x) + \Gamma + Rx]$$

Un tel arc est dit *funiculaire*; un arc donné n'est évidemment funiculaire que pour un système de charges défini à un facteur près.

Les courbes d'équation :

$$y = C_1 \mu(x) + C_2 x + C_3$$

sont les *courbes funiculaires* des charges produisant le moment fléchissant $\mu(x)$ dans la poutre sur appuis simples. Puisque les courbes funiculaires dépendent de trois paramètres, il est toujours possible de choisir la fibre moyenne d'un arc de façon que cet arc soit funiculaire pour un système de charges donné (la charge permanente augmentée de la moitié de la surcharge, par exemple). Si les charges variables appliquées s'écartent peu des charges pour lesquelles l'arc est funiculaire, l'arc ne supportera que de faibles moments fléchissants. *Cette remarque montre l'intérêt des arcs.*

6.2 Arc à trois articulations

6.2.1 Calcul des efforts

Considérons (figure 45) un arc à trois articulations A , B et C , dont les articulations extrêmes sont sur une même horizontale ; désignons par a et b les projections de AC et CB sur l'horizontale AB , et par f la distance de l'articulation C à AB ; la portée de l'arc est $\ell = a + b$.

Les équations $M(0) = 0$ et $M(\ell) = 0$ montrent que Γ et R sont nuls ; les équations (64) se réduisent donc à :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) - Qy \\ N(x) &= \frac{d\mu}{dx} \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) &= \frac{d\mu}{dx} \cos \theta - Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

La composante horizontale Q appelée *poussée* est déterminée par la condition $M(a) = 0$, donc :

$$Q = \frac{\mu(a)}{f} \quad (67)$$

La ligne d'influence de la poussée est définie par :

$$Q(\alpha) = \frac{\mu(\alpha, a)}{f} = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - a)}{f\ell} & \text{si } \alpha < a \\ \frac{a(\ell - \alpha)}{f\ell} & \text{si } \alpha > a \end{cases}$$

Les lignes d'influence du moment fléchissant, de l'effort normal et de l'effort tranchant sont définies par :

$$\begin{aligned} M(\alpha, x) &= \mu(\alpha, x) - Q(\alpha) y(x) \\ N(\alpha, x) &= \mu_x(\alpha, x) \sin \theta + Q(\alpha) \cos \theta \\ T(\alpha, x) &= \mu_x(\alpha, x) \cos \theta - Q(\alpha) \sin \theta \end{aligned}$$

Toutes ces lignes d'influence sont composées de segments de droite. Elles peuvent être rapidement déterminées par la méthode donnée au paragraphe 1.3.1.

Exemple : Par exemple (figure 46), pour trouver la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section X , introduisons une articulation dans cette section ; nous obtenons un mécanisme à quatre articulations, et dans un déplacement de ce mécanisme le tronçon XC tourne autour du centre instantané I situé à l'intersection des droites AX et BC . Le tracé de la ligne d'influence en découle.

6.2.2 Calcul des déplacements

Désignons par ω_A et ω_B les rotations des sections extrêmes, et par ω_C la rotation de la section C de CB par rapport à la section C de AC . En tenant compte d'une dilatation éventuelle ε constante due à la température ou au retrait, les **formules de Bresse** appliquées d'une extrémité à l'autre de l'arc s'écrivent :

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega_A + \omega_C + \int_0^\ell \frac{M}{EI} dx \\ \omega_C f + \int_0^\ell \frac{M}{EI} y dx - \int_0^\ell \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} \sin \theta dx + \varepsilon \ell &= 0 \\ \omega_A \ell + \omega_C b + \int_0^\ell \frac{M}{EI} (\ell - x) dx - \int_0^\ell \frac{N}{ES} \sin \theta dx - \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} \cos \theta dx &= 0 \end{aligned}$$

Les équations précédentes permettent donc de calculer ω_A , ω_B et ω_C . En particulier, lorsque l'arc ne subit que la dilatation ε , on trouve M , N et T étant nuls :

$$\omega_A = \varepsilon \frac{b}{f}, \quad \omega_B = -\varepsilon \frac{a}{f}, \quad \omega_C = -\varepsilon \frac{\ell}{f}$$

6.3 Arc à deux articulations

6.3.1 Méthode de calcul

Considérons un arc à deux articulations A et B situées sur une même horizontale, et soit $AB = \ell$ la portée de l'arc (figure 47). Les conditions $M(0) = 0$ et $M(\ell) = 0$ montrent que Γ et R sont nuls, de sorte que les équations (64) se réduisent à :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) - Qy \\ N(x) &= \frac{d\mu}{dx} \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) &= \frac{d\mu}{dx} \cos \theta - Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

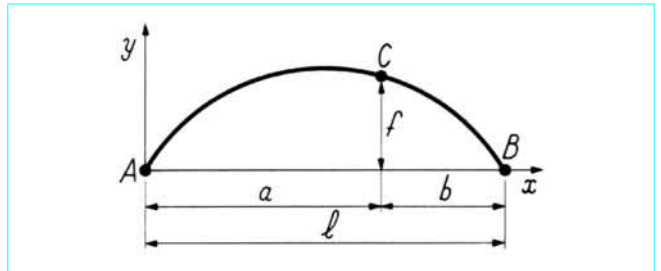


Figure 45 – Arc à trois articulations

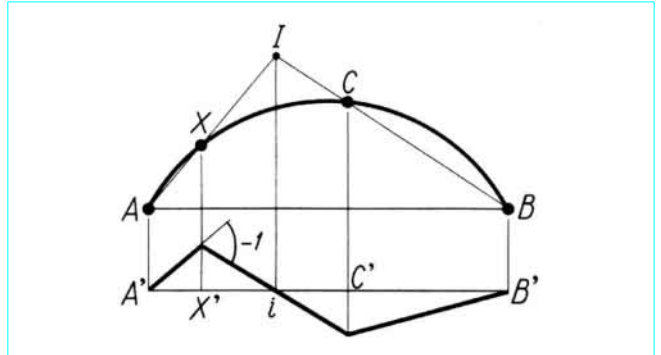


Figure 46 – Arc à trois articulations : ligne d'influence du moment fléchissant

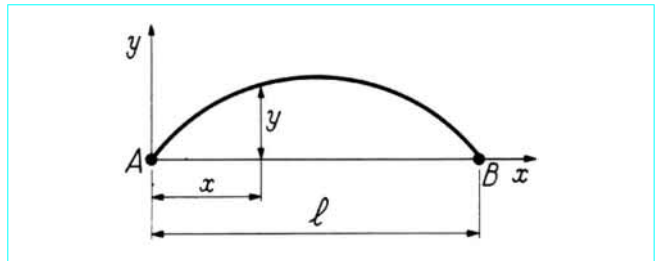


Figure 47 – Arc à deux articulations

La *poussée* Q est l'unique inconnue hyperstatique. Appliquons les **formules de Bresse** en tenant compte d'une dilatation uniforme ε éventuelle due à la température ou au retrait ; nous obtenons les équations :

$$\omega_B = \omega_A + \int_0^\ell \frac{M}{EI} dx$$

$$\int_0^\ell \frac{M}{EI} y dx - \int_0^\ell \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} \sin \theta dx + \varepsilon \ell = 0$$

$$\omega_A \ell + \int_0^\ell \frac{M}{EI} (\ell - x) dx - \int_0^\ell \frac{N}{ES} \sin \theta dx - \int_0^\ell \frac{T}{GS_1} \cos \theta dx = 0$$

La première et la dernière permettent de calculer ω_A et ω_B dès que l'on connaît M, N et T le long de l'arc. La seconde est la **condition de compatibilité des déformations** ; en posant $g = \frac{ES}{GS_1}$, elle s'écrit :

$$\int_0^\ell \frac{M}{EI} y dx - \int_0^\ell \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_0^\ell g \frac{T}{ES} \sin \theta dx + \varepsilon \ell = 0$$

En reportant les valeurs (68) de M, N et T dans la condition précédente, nous trouvons l'équation qui permet de calculer Q :

$$Q \left[\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI} + \int_0^\ell (\cos^2 \theta + g \sin^2 \theta) \frac{dx}{ES} \right]$$

$$= \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI} + \int_0^\ell (g-1) \frac{d\mu}{dx} \sin \theta \cos \theta \frac{dx}{ES} + \varepsilon \ell$$

Les termes qui contiennent g sont très petits, et l'on peut vérifier que la valeur de Q est pratiquement indépendante de g ; on obtient donc une excellente approximation et une simplification du calcul en prenant $g = 1$.

La poussée est alors donnée par l'équation :

$$Q \left(\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI} + \int_0^\ell \frac{dx}{ES} \right) = \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI} + \varepsilon \ell \quad (69)$$

Supposons d'abord $\varepsilon = 0$; en posant :

$$D = \int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI}, \quad d = \int_0^\ell \frac{dx}{ES}, \quad \gamma = \frac{D}{D+d}$$

la formule (69) s'écrit :

$$Q = \frac{\gamma}{D} \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI}$$

Le nombre γ est le **terme de Bresse** ; il est très voisin de 1.

La ligne d'influence de la poussée est définie par :

$$Q(\alpha) = \frac{\gamma}{D} \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \frac{y(x) dx}{EI(x)}$$

donc par une intégrale du type (2) étudiée au paragraphe 2.1.1. Elle a la forme indiquée sur la figure 48.

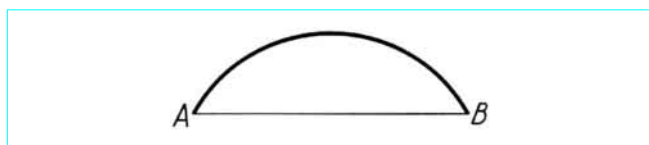


Figure 48 – Arc à deux articulations : ligne d'influence de la poussée

Les lignes d'influence de M, N et T dans la section X de centre de gravité (x, y) sont définies par :

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) - Q(\alpha) y(x)$$

$$N(\alpha, x) = \mu_x(\alpha, x) \sin \theta + Q(\alpha) \cos \theta$$

$$T(\alpha, x) = \mu_x(\alpha, x) \cos \theta - Q(\alpha) \sin \theta$$

Selon la position de la section X , la ligne d'influence de M a les formes indiquées sur la figure 49.

Une dilatation ε donne lieu à la poussée :

$$Q_\varepsilon = \frac{\varepsilon \ell}{D+d}$$

et par suite aux efforts :

$$M = -Q_\varepsilon y, \quad N = Q_\varepsilon \cos \theta, \quad T = -Q_\varepsilon \sin \theta$$

6.3.2 Arcs particuliers

6.3.2.1 Arc à fibre moyenne parabolique d'inertie et de section réduites constantes

L'équation de la fibre moyenne (figure 50) est :

$$y = f \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

On trouve :

$$D = \frac{16}{15} \frac{af^2}{EI}, \quad d = \frac{2a}{ES}$$

En posant $r^2 = I/S$, le terme de Bresse a pour valeur :

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \left(\frac{r}{f} \right)^2}$$

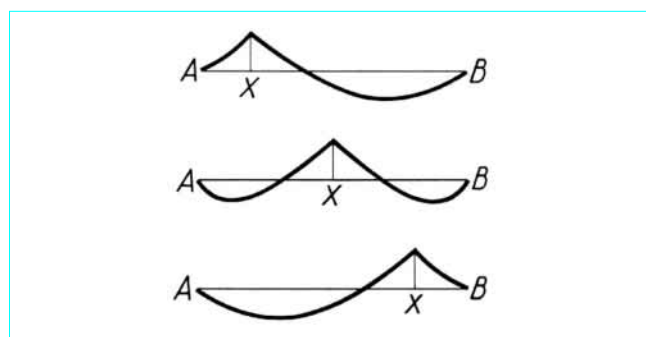


Figure 49 – Arc à deux articulations : ligne d'influence du moment fléchissant

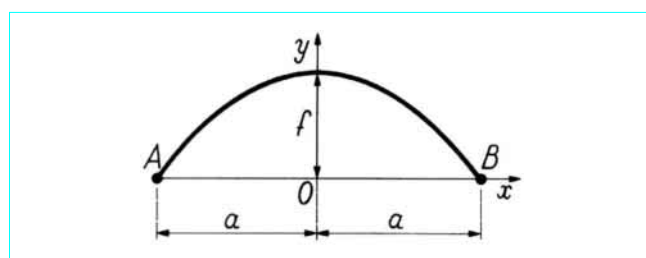


Figure 50 – Arc à fibre moyenne parabolique

La ligne d'influence de la poussée a pour équation, en posant $\alpha = ma$:

$$Q(\alpha) = \frac{5}{64} \gamma \frac{a}{f} (1 - m^2)(5 - m^2)$$

6.3.2.2 Arc de section constante à fibre moyenne circulaire

Soit $2\theta_0$ l'ouverture angulaire de l'arc ; un point de la fibre moyenne (figure 51) a pour coordonnées :

$$x = R \sin \theta, \quad y = R(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Si $2a$ est la portée et f la flèche de l'arc, le rayon R et l'angle θ_0 sont donnés par :

$$R = \frac{a^2 + f^2}{2f}, \quad \sin \theta_0 = \frac{a}{R}$$

Désignons par I et S l'inertie et la section réelles ; nous trouvons :

$$D = \frac{R^3}{EI} [\theta_0(1 + 2 \cos^2 \theta_0) - 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0], \quad d = \frac{2R\theta_0}{ES}$$

Le terme de Bresse γ a donc pour valeur, en posant $r^2 = \frac{I}{S}$:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{2\theta_0}{\theta_0(1 + 2 \cos^2 \theta_0) - 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0}}$$

L'intégrale du second membre de la formule (69) a pour valeur, lorsqu'une charge $P = 1$ est appliquée à la section d'abscisse $\alpha = R \sin \theta$:

$$\int_0^\ell \frac{\mu y}{EI} dx = \frac{R^3}{2EI} [\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta + 2(\theta \sin \theta + \cos \theta - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0) \cos \theta_0]$$

et dans le cas d'une charge de densité constante p suivant Ox appliquée sur toute la portée AB :

$$\int_0^\ell \frac{\mu y}{EI} dx = \frac{pR^4}{2EI} [-\sin \theta_0 + \frac{7}{3} \sin^3 \theta_0 + \theta_0 \cos \theta_0(1 - 2 \sin^2 \theta_0)]$$

6.4 Arc symétrique à une articulation

Considérons (figure 52) un arc symétrique encastré à ses extrémités A et B , et ayant une articulation O sur l'axe de symétrie ; les axes choisis sont Ox horizontal et Oy vertical ; la portée de l'arc est $2a$ et sa flèche f .

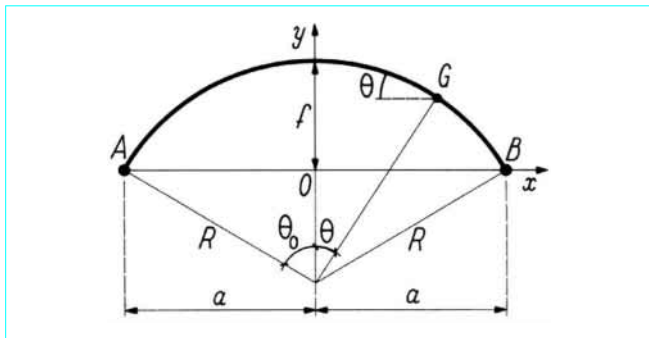


Figure 51 - Arc à fibre moyenne circulaire

La condition $M(0) = 0$ donne $\Gamma = -\mu(0)$, donc les formules (64) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= \mu(x) - \mu(0) + Rx - Qy \\ N(x) &= \left(\frac{d\mu}{dx} + R\right) \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) &= \left(\frac{d\mu}{dx} + R\right) \cos \theta - Q \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Appliquons les **formules de Bresse** d'une extrémité à l'autre de l'arc ; nous obtenons, ω_0 désignant la rotation à l'articulation et ε une dilatation éventuelle :

$$\begin{aligned} \omega_0 + \int_{-a}^a \frac{M}{EI} dx &= 0 \\ \omega_0 f + \int_{-a}^a \frac{M}{EI} (f + y) dx - \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_{-a}^a \frac{T}{GS_1} \sin \theta dx + 2\varepsilon a &= 0 \\ \omega_0 a + \int_{-a}^a \frac{M}{EI} (a - x) dx - \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \sin \theta dx - \int_{-a}^a \frac{T}{GS_1} \cos \theta dx &= 0 \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi ω_0 et **deux conditions de compatibilité des déformations** que l'on peut écrire, en conservant l'approximation

$$g = \frac{ES}{GS_1} = 1 :$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{My}{EI} dx - \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_{-a}^a g \frac{T}{ES} \sin \theta dx + 2\varepsilon a &= 0 \\ \int_{-a}^a \frac{Mx}{EI} dx + \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \sin \theta dx + \int_{-a}^a g \frac{T}{ES} \cos \theta dx &= 0 \end{aligned}$$

Il suffit de reporter dans les conditions précédentes les valeurs (70) de M, N et T pour obtenir les inconnues hyperstatiques Q et R :

$$\left. \begin{aligned} Q \left(\int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) &= \int_{-a}^a \frac{\mu y dx}{EI} - \mu(0) \int_{-a}^a \frac{y dx}{EI} + 2\varepsilon a \\ R \left(\int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) &= - \int_{-a}^a \frac{\mu x dx}{EI} - \int_{-a}^a \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{ES} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Les lignes d'influence de Q et de R sont définies par des intégrales du type (2) et du type (3) étudiées au paragraphe 2.1.1. Elles ont la forme indiquée sur la figure 53.

Une dilatation uniforme donne une poussée Q_ε telle que :

$$Q_\varepsilon \left(\int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) = 2\varepsilon a$$

donc des efforts :

$$M = -Q_\varepsilon y, \quad N = Q_\varepsilon \cos \theta, \quad T = -Q_\varepsilon \sin \theta$$

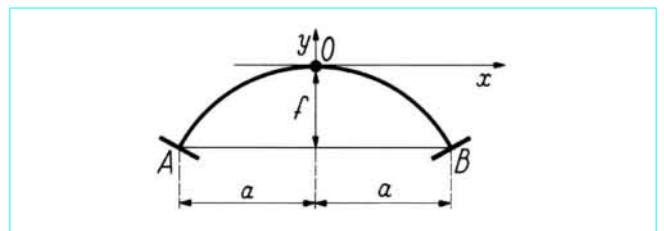


Figure 52 - Arc symétrique à une articulation

6.5 Arc symétrique encastré

6.5.1 Méthode de calcul

Considérons (figure 54) un arc symétrique encastré à ses extrémités A et B, et prenons les axes Ox horizontal et Oy vertical issus du centre élastique O, qui est le centre de gravité de la densité de masse 1/l répartie le long de la fibre moyenne ; nous avons, en raison du choix des axes et de la symétrie, les relations :

$$\int_{-a}^a \frac{x dx}{EI} = 0, \int_{-a}^a \frac{y dx}{EI} = 0, \int_{-a}^a \frac{xy dx}{EI} = 0$$

L'arc encastré est trois fois hyperstatique ; les relations (64) donnent le moment fléchissant, l'effort normal et l'effort tranchant en fonction des charges appliquées et des inconnues hyperstatiques Γ , Q et R.

Les formules de Bresse appliquées d'une extrémité à l'autre de l'arc donnent trois conditions de compatibilité des déformations :

$$\int_{-a}^a \frac{M}{EI} dx = 0$$

$$\int_{-a}^a \frac{My}{EI} dx - \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \cos \theta dx + \int_{-a}^a \frac{T}{GS_1} \sin \theta dx + 2\epsilon a = 0$$

$$\int_{-a}^a \frac{Mx}{EI} dx + \int_{-a}^a \frac{N}{ES} \sin \theta dx + \int_{-a}^a \frac{T}{GS_1} \cos \theta dx = 0$$

ϵ désignant une dilatation uniforme éventuelle.

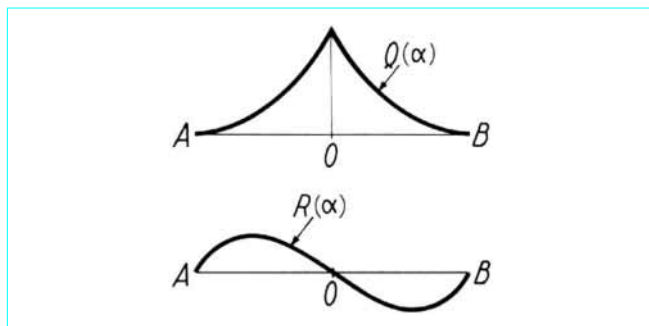


Figure 53 - Arc symétrique à une articulation : lignes d'influence de Q et de R

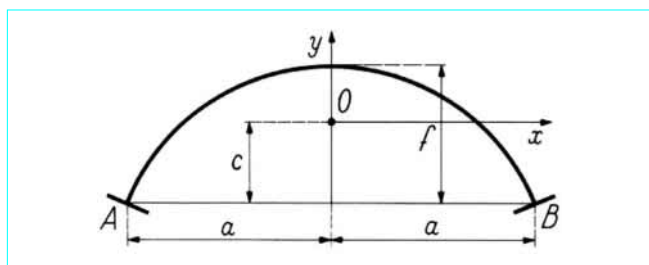


Figure 54 - Arc symétrique encastré

En reportant les valeurs (64) de M, N et T dans les conditions précédentes, et en adoptant toujours l'approximation $g = \frac{ES}{GS_1} = 1$, nous trouvons Γ , Q et R :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \int_{-a}^a \frac{dx}{EI} &= - \int_{-a}^a \frac{\mu dx}{EI} \\ Q \left(\int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) &= \int_{-a}^a \frac{\mu y dx}{EI} + 2\epsilon a \\ R \left(\int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) &= - \int_{-a}^a \frac{\mu x dx}{EI} - \int_{-a}^a \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{ES} \end{aligned} \right\} (72)$$

Si l'on définit D, d et le terme de Bresse γ par :

$$D = \int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} \quad d = \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \quad \gamma = \frac{D}{D+d}$$

la deuxième équation (72) peut s'écrire, lorsque $\epsilon = 0$:

$$Q = \frac{\gamma}{D} \int_{-a}^a \frac{\mu y dx}{EI}$$

Les lignes d'influence de Γ , Q et R sont définies par des intégrales du type (2) et du type (3) étudiées au paragraphe 2.1.1. Elles ont la forme indiquée sur la figure 55.

La ligne d'influence de M dans la section d'abscisse x est définie par :

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) + \Gamma(\alpha) + xR(\alpha) - y(x) Q(\alpha)$$

La figure 56 donne les diverses formes de cette ligne d'influence lorsque x varie de 0 à a.

Une dilatation uniforme ϵ donne une poussée :

$$Q_\epsilon = \frac{2\epsilon a}{D+d}$$

donc des efforts :

$$M = -Q_\epsilon y, \quad N = Q_\epsilon \cos \theta, \quad T = -Q_\epsilon \sin \theta$$

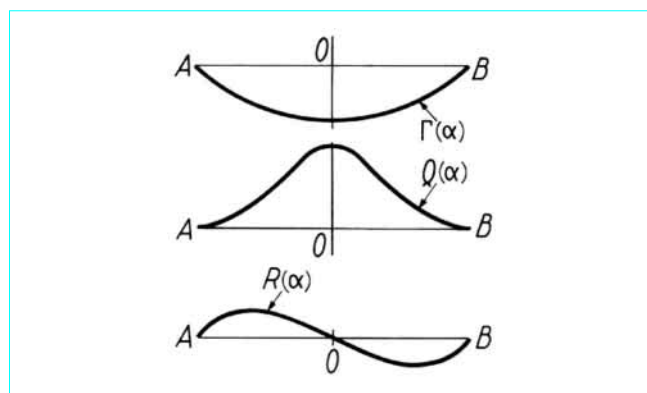


Figure 55 - Arc symétrique encastré : lignes d'influence de Γ , Q et R

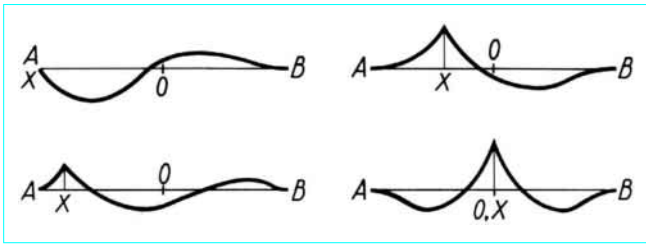


Figure 56 – Arc symétrique encasté : ligne d'influence du moment fléchissant dans la section X, dépendant de la position de X

6.5.2 Arcs particuliers

6.5.2.1 Arc à fibre moyenne parabolique d'inertie et de section réduites constantes

La distance du centre élastique à AB étant $c = \frac{2}{3}f$, l'équation de la fibre moyenne relativement aux axes issus du centre élastique est :

$$y = f \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Nous trouvons :

$$D = \frac{8}{45} \frac{af^2}{EI}, \quad d = \frac{2a}{ES}, \quad \gamma = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \left(\frac{r}{f} \right)^2}$$

avec $r^2 = I/S$.

En posant $\alpha = ma$, les lignes d'influence de Γ , R et Q sont définies par :

$$\Gamma(\alpha) = -\frac{1}{4}a(1-m^2)$$

$$R(\alpha) = -\frac{1}{4}m(1-m^2)$$

$$Q(\alpha) = \frac{15}{32} \gamma \frac{a}{f} (1-m^2)^2$$

Dans le cas d'une charge de densité constante p répartie sur toute la portée de l'arc, nous trouvons :

$$\Gamma = -\frac{1}{3}pa^2, \quad R = 0, \quad Q = \gamma \frac{pa^2}{2f}$$

6.5.2.2 Arc circulaire de section constante

Conservons les notations de la figure 51, mais désignons le rayon de la fibre moyenne par ρ pour éviter toute confusion avec la réaction R . Nous désignons par I et S l'inertie et la section réduites ; l'inertie et la section réduites sont donc $I \cos \theta$ et $S \cos \theta$. La distance c du centre élastique à l'horizontale AB est :

$$c = \rho \frac{\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0}{\theta_0}$$

de sorte que les équations paramétriques de la fibre moyenne relativement aux axes issus du centre élastique sont :

$$x = \rho \sin \theta, \quad y = \rho (\cos \theta - \cos \theta_0) - c$$

Nous trouvons :

$$D = \frac{\rho^3}{EI} \frac{\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0}{\theta_0}, \quad d = \frac{2 \rho \theta_0}{ES}, \quad \gamma = \frac{D}{D+d}$$

■ Supposons qu'une charge $P = 1$ soit appliquée dans la section d'abscisse $\alpha = \rho \sin \theta$. La ligne d'influence de Γ est définie par :

$$\Gamma(\theta) = -\frac{\rho}{2\theta_0} (\theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0 - \theta \sin \theta - \cos \theta)$$

la ligne d'influence de R est définie par :

$$\left(\text{on néglige } \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \text{ devant } \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI} \right)$$

$$R(\theta) = \frac{\sin \theta (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0) - \sin \theta_0 (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2 \sin \theta_0 (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)}$$

et la ligne d'influence de Q est définie par :

$$Q(\theta) = \frac{2 \sin \theta_0 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0) + \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)}{\gamma \frac{2(\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0)}{2(\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0)}}$$

■ Dans le cas d'une charge de densité constante p suivant Ox appliquée sur toute la portée de l'arc, nous trouvons :

$$\Gamma = \frac{\rho p^2}{4 \theta_0} \left(\theta_0 \cos 2\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right)$$

$$R = 0$$

$$Q = \gamma p \frac{\frac{4}{3} \theta_0 \sin^3 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin \theta_0 (2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0)}{2(\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0)}$$

Remarque : il est plus rapide et tout aussi précis de calculer un arc de ce type au moyen d'intégrations numériques.

6.6 Arc soumis à des forces quelconques

Nous avons tenu compte des déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant pour calculer les efforts dans les arcs soumis à des charges verticales, parce qu'en général la fibre moyenne diffère peu d'une courbe funiculaire (§ 6.1.3) de ces charges (charge permanente, par exemple) ; il est alors nécessaire de calculer les inconnues hyperstatiques avec une précision suffisante pour ne pas commettre d'erreurs importantes sur les valeurs des moments fléchissants et des efforts tranchants. Mais dans le cas de forces quelconques, on pourra négliger les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.

Désignons donc par $-m(x)$ le moment des forces directement appliquées à l'arc à gauche de la section de centre de gravité $G(x, y)$, par Q et R les composantes de la résultante générale, et par $-\Gamma$ le moment résultant par rapport à O de la réaction exercée par l'appui de gauche ; le moment fléchissant dans la section d'abscisse x a pour expression :

$$M(x) = m(x) + \Gamma + Rx - Qy \tag{73}$$

Examinons les différents types d'arcs qui viennent d'être étudiés.

6.6.1 Arc à trois articulations (figure 45)

Les équations :

$$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0, \quad M(a) = 0$$

donnent les valeurs de Γ , R et Q :

$$\Gamma = -m(0)$$

$$R = \frac{1}{\ell} [m(0) - m(\ell)]$$

$$Q = \frac{1}{f} \left[m(a) - \frac{b}{\ell} m(0) - \frac{a}{\ell} m(\ell) \right]$$

$m(0)$ est nul, à moins qu'un couple ne soit appliqué dans la section A.

6.6.2 Arc à deux articulations (figure 47)

Les équations $M(0) = 0$ et $M(\ell) = 0$ donnent Γ et R :

$$\Gamma = -m(0)$$

$$R = \frac{1}{\ell} [m(0) - m(\ell)]$$

En reportant la valeur (73) de M dans la condition de compatibilité :

$$\int_0^{\ell} \frac{My}{EI} dx = 0$$

nous trouvons l'inconnue hyperstatique Q :

$$Q \int_0^{\ell} \frac{y^2 dx}{EI} = \int_0^{\ell} \frac{my dx}{EI} + \Gamma \int_0^{\ell} \frac{y dx}{EI} + R \int_0^{\ell} \frac{xy dx}{EI}$$

6.6.3 Arc symétrique à une articulation (figure 52)

La condition $M(0) = 0$ donne :

$$\Gamma = -m(0)$$

En reportant la valeur (73) de M dans les conditions de compatibilité :

$$\int_{-a}^a \frac{My dx}{EI} = 0, \quad \int_{-a}^a \frac{Mx dx}{EI} = 0$$

nous trouvons Q et R :

$$Q \int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} = \int_{-a}^a \frac{my dx}{EI} - m(0) \int_{-a}^a \frac{y dx}{EI}$$

$$R \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI} = - \int_{-a}^a \frac{mx dx}{EI}$$

6.6.4 Arc symétrique encastré (figure 54)

En reportant la valeur (73) de M dans les conditions de compatibilité :

$$\int_{-a}^a \frac{M dx}{EI} = 0, \quad \int_{-a}^a \frac{My dx}{EI} = 0, \quad \int_{-a}^a \frac{Mx dx}{EI} = 0$$

nous trouvons Γ , Q et R :

$$\Gamma \int_{-a}^a \frac{dx}{EI} = - \int_{-a}^a \frac{m dx}{EI}$$

$$Q \int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} = \int_{-a}^a \frac{my dx}{EI}$$

$$R \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI} = - \int_{-a}^a \frac{mx dx}{EI}$$

6.7 Compensation des arcs hyperstatiques

Il est possible de créer des efforts dans une structure hyperstatique en l'absence de forces appliquées, en lui imposant des déformations qui sont maintenues par les liaisons hyperstatiques. Ces *efforts compensateurs*, qui correspondent aux *valeurs compensatrices* des réactions hyperstatiques, s'ajoutent aux efforts dus aux charges. Il est ainsi possible de diminuer la valeur absolue des efforts dans la structure, en particulier des moments fléchissants.

6.7.1 Compensation de l'arc à deux articulations

Dans l'arc à deux articulations (figure 47), la poussée compensatrice Q_c donne les efforts compensateurs :

$$M_c = -Q_c y, \quad N_c = Q_c \cos \theta, \quad T_c = -Q_c \sin \theta$$

Deux méthodes sont employées pour obtenir la poussée compensatrice Q_c .

■ La première consiste à diminuer la portée de l'arc de $\delta \ell$ en déplaçant l'une des articulations au moyen d'un vérin ; on obtient ainsi la poussée définie par :

$$Q_c \left(\int_0^{\ell} \frac{y^2 dx}{EI} + \int_0^{\ell} \frac{dx}{ES} \right) = \delta \ell$$

■ La seconde méthode consiste à décentrer l'arc avec une articulation provisoire A dans la section de clef de centre de gravité G_0 ; soit $\overline{G_0 A} = \delta$. Cette articulation est ensuite bloquée ; soit Q_0 et M_0 l'effort normal et le moment fléchissant dans la section de clef de l'arc supposé à deux articulations le jour du blocage. Si l'articulation provisoire était en A' défini par $\overline{G_0 A'} = \delta'$; les efforts dans l'arc après blocage seraient identiques aux efforts dans l'arc décentré sans articulation provisoire. Supposons donc $\delta \neq \delta'$; le moment fléchissant et l'effort normal dans la section de clef après blocage de l'articulation provisoire doivent être $M_0 - Q_c f$ et $Q_0 + Q_c$. L'articulation provisoire doit se trouver au point de passage de la force extérieure ; δ est donc défini par :

$$\delta = \frac{M_0 - Q_c f}{Q_0 + Q_c} \quad \text{ou} \quad Q_c = \frac{\delta' - \delta}{f + \delta} Q_0$$

6.7.2 Compensation de l'arc symétrique encastré

Dans l'arc symétrique encastré (figure 54), la compensation devant être symétrique est définie par les valeurs Γ_c , $R_c = 0$ et Q_c des inconnues hyperstatiques ; les efforts compensateurs ont donc pour expressions :

$$M_c = \Gamma_c - Q_c y, \quad N_c = Q_c \cos \theta, \quad T_c = -Q_c \sin \theta$$

Deux méthodes sont employées pour réaliser la compensation.

■ La première, due à **Considère**, consiste à décentrer l'arc avec trois articulations provisoires : l'une A_0 dans la section de clef est définie par $\overline{G_0 A_0} = \delta_0$, et les deux autres A_1 et A'_1 dans les sections d'encastrement sont définies par $\overline{G_1 A_1} = \overline{G'_1 A'_1} = \delta_1$. Ces articulations sont ensuite bloquées. Si, le jour du blocage, le moment fléchissant et l'effort normal dans la section de clef sont M_0 et N_0 , et le moment fléchissant et l'effort normal dans les sections d'encastrement sont M_1 et N_1 en supposant l'arc décentré sans articulations provisoires, il faut, pour introduire les efforts compensateurs dans la section de clef et les sections d'encastrement :

$$m_0 = \Gamma_c - Q_c y_0, \quad m_1 = \Gamma_c - Q_c y_1, \quad n_0 = Q_c, \quad n_1 = Q_c \cos \theta_1$$

que δ_0 et δ_1 aient pour valeurs :

$$\delta_0 = \frac{M_0 + m_0}{N_0 + n_0}, \quad \delta_1 = \frac{M_1 + m_1}{N_1 + n_1}$$

■ La seconde méthode, due à **Fressinet**, consiste à laisser un joint à la clef, puis à écarter au moyen de vérins les faces du joint de 2ε au niveau de la fibre moyenne, en même temps qu'on les fait tourner

d'un angle 2Ω l'une par rapport à l'autre. Il est facile de montrer qu'on obtient ainsi les valeurs compensatrices Γ_c et Q_c définies par :

$$\Gamma_c \int_{-a}^a \frac{dx}{EI} = 2\Omega$$

$$Q_c \left(\int_{-a}^a \frac{y^2 dx}{EI} + \int_{-a}^a \frac{dx}{ES} \right) = 2(\varepsilon - \Omega y_0)$$

y_0 étant l'ordonnée de la fibre moyenne à la clef.

6.8 Arcs et poutres solidarisés par des suspentes verticales

6.8.1 Méthode de calcul

Deux poutres droites ou courbes $G'_0 G'_1$ et $G''_0 G''_1$ de même portée ℓ (figure 57) sont reliées par des suspentes inextensibles qui ne peuvent transmettre que des réactions verticales. Nous supposons les suspentes suffisamment rapprochées pour qu'on puisse admettre que les flèches $v'(x)$ et $v''(x)$ soient égales.

Seule la poutre $G''_0 G''_1$ est directement chargée ; soit $\mu(x)$ le moment fléchissant produit par les charges et $-v(x)$ le moment fléchissant produit par les efforts de traction des suspentes dans la poutre sur appuis simples de portée ℓ ; les moments fléchissants $M'(x)$ et $M''(x)$ supportés par les poutres $G'_0 G'_1$ et $G''_0 G''_1$ ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned} M'(x) &= v(x) + \Gamma' + R'x - Q'y' \\ M''(x) &= \mu(x) - v(x) + \Gamma'' + R''x - Q''y'' \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

y' et y'' étant les ordonnées des fibres moyennes des poutres, et Γ' , R' , Q' , Γ'' , R'' et Q'' les composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche des poutres.

Les **formules de Bresse** appliquées d'une extrémité à l'autre de chacune des poutres donnent les six relations :

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 - \omega'_0 &= \int_0^\ell \frac{M' dx}{EI'} \\ v'_1 - v'_0 - \omega'_0 \ell &= \int_0^\ell \frac{M'(\ell-x)}{EI'} dx \\ u'_1 - u'_0 + \omega'_0 (y'_1 - y'_0) &= - \int_0^\ell \frac{M'(y'_1 - y'_0)}{EI'} dx - \int_0^\ell \frac{Q' dx}{ES'} \\ \omega''_1 - \omega''_0 &= \int_0^\ell \frac{M'' dx}{EI''} \\ v''_1 - v''_0 - \omega''_0 \ell &= \int_0^\ell \frac{M''(\ell-x)}{EI''} dx \\ u''_1 - u''_0 + \omega''_0 (y''_1 - y''_0) &= - \int_0^\ell \frac{M''(y''_1 - y''_0)}{EI''} dx - \int_0^\ell \frac{Q'' dx}{ES''} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Pour écrire les relations (75), nous avons négligé les déformations dues à l'effort tranchant et admis que les efforts normaux étaient égaux à $Q'/\cos \theta'$, et $Q''/\cos \theta''$ [cette approximation équivaut à $g = ES/(GS_1) = 1$; I' , I'' , S' et S'' sont les moments d'inertie et les sections réduites des poutres.

Considérons la somme :

$$M(x) = M'(x) + M''(x) = \mu(x) + (\Gamma' + \Gamma'') + (R' + R'')x - Q'y' - Q''y'' \quad (76)$$

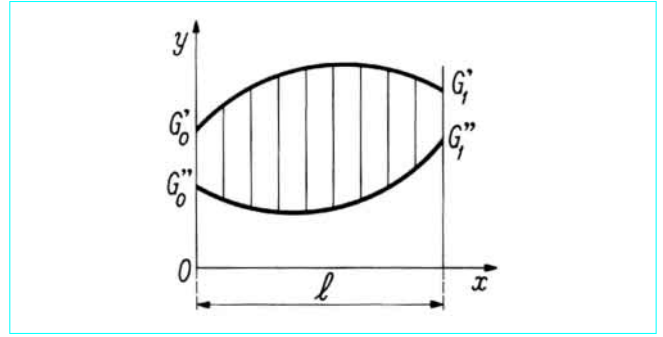


Figure 57 – Poutres solidarisées par des suspentes verticales

qui ne renferme plus que quatre constantes $\Gamma' + \Gamma''$, $R' + R''$, Q' et Q'' . Nous allons montrer que les équations (75) et l'hypothèse :

$$v'(x) = v''(x) = v(x)$$

permettent de déterminer ces quatre constantes. En effet, nous avons :

$$\frac{dv'}{dx} = \frac{dv''}{dx} \quad \text{soit } \omega'(x) = \omega''(x) = \omega(x)$$

Puis les relations :

$$\frac{d^2 v'}{dx^2} = \frac{M'}{EI'}, \quad \frac{d^2 v''}{dx^2} = \frac{M''}{EI''}, \quad \frac{d^2 v'}{dx^2} = \frac{d^2 v''}{dx^2}$$

montrent que l'on a :

$$\frac{M'}{I'} = \frac{M''}{I''} = \frac{M' + M''}{I' + I''} = \frac{M}{I} \quad (77)$$

I désignant la somme $I' + I''$.

Compte tenu des résultats précédents, les relations (75) se réduisent à :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 - \omega_0 &= \int_0^\ell \frac{M dx}{EI} \\ v_1 - v_0 - \omega_0 \ell &= \int_0^\ell \frac{M(\ell-x)}{EI} dx \\ u'_1 - u'_0 + \omega_0 (y'_1 - y'_0) &= - \int_0^\ell \frac{M(y'_1 - y'_0)}{EI} dx - \int_0^\ell \frac{Q' dx}{ES'} \\ u''_1 - u''_0 + \omega_0 (y''_1 - y''_0) &= - \int_0^\ell \frac{M(y''_1 - y''_0)}{EI} dx - \int_0^\ell \frac{Q'' dx}{ES''} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Si l'on porte dans les équations (78) l'expression (76) de M , on obtient quatre équations permettant, compte tenu des conditions aux limites, de calculer les quatre constantes $\Gamma' + \Gamma''$, $R' + R''$, Q' et Q'' . Connaissant ainsi M , les moments fléchissants M' et M'' sont donnés par les relations (77).

Cette théorie permet d'étudier un arc associé à un tablier par des suspentes ou par des poteaux.

6.8.2 Poutre bowstring

Une poutre *bowstring* (figure 58) est l'ensemble de deux poutres, l'une courbe (*arc*) et l'autre sensiblement rectiligne (*tirant*) solidarisées par des suspentes verticales. Les deux poutres sont encastées l'une sur l'autre à leurs extrémités, et l'ensemble repose à ses extrémités sur des *appuis simples*.

La méthode générale montre que, O étant un appui simple :

$$\Gamma' + \Gamma'' = 0, \quad R' + R'' = 0, \quad Q' + Q'' = 0$$

Nous poserons :

$$Q = Q' = -Q'', \quad y = y' - y''$$

de sorte que l'équation (76) s'écrit :

$$M = \mu - Q(y' - y'') = \mu - Qy \quad (79)$$

et ne renferme plus que la poussée Q . Les deux premières équations (78) permettent de calculer ω_0 et ω_1 , et, compte tenu de ce que $u'_1 - u'_0$ est égal à $u''_1 - u''_0$, les deux dernières donnent la **condition de compatibilité** :

$$\int_0^\ell \frac{My'}{EI} dx - \int_0^\ell \frac{Q dx}{ES'} = \int_0^\ell \frac{My''}{EI} dx + \int_0^\ell \frac{Q dx}{ES''}$$

$$\text{soit} \quad \int_0^\ell \frac{My dx}{EI} - Q \int_0^\ell \frac{dx}{ES} = 0$$

S étant défini par :

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S'} + \frac{1}{S''} \quad (80)$$

En reportant la valeur (79) de $M(x)$ dans la condition de compatibilité, nous trouvons :

$$Q \left(\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI} + \int_0^\ell \frac{dx}{ES} \right) = \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI}$$

Donc Q est la poussée et $M(x)$ le moment fléchissant dans un arc fictif à deux articulations d'inertie $I = I' + I''$ et de section S définie par la relation (80).

Les efforts dans l'arc et dans le tirant sont alors donnés par les formules :

$$M'(x) = \frac{I'}{I} M(x)$$

$$N'(x) = \frac{dM'}{dx} \sin \theta' + \frac{Q}{\cos \theta'}$$

$$T'(x) = \frac{dM'}{dx} \cos \theta'$$

$$M''(x) = \frac{I''}{I} M(x)$$

$$N''(x) = \frac{dM''}{dx} \sin \theta'' - \frac{Q}{\cos \theta''}$$

$$T''(x) = \frac{dM''}{dx} \cos \theta''$$

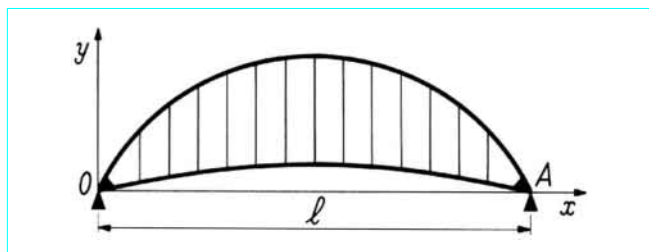


Figure 58 - Poutre bowstring

6.9 Poutres à béquilles

Une poutre à béquilles se compose d'une poutre horizontale AB de longueur ℓ , aux extrémités de laquelle sont encastées deux poutres verticales AA' et BB' de longueur f , appelées *béquilles* (figure 59). Les sections A' et B' sont liées aux appuis par des articulations ou des encastements.

Les poutres à béquilles sont des arcs particuliers dont la fibre moyenne est très différente d'une courbe funiculaire des charges appliquées (§ 6.1.3); il est donc justifié de négliger les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.

6.9.1 Poutre à béquilles à trois articulations

Si $\mu(a)$ désigne le moment fléchissant au point C , dû aux charges dans la poutre sur appuis simples AB (figure 60), la poussée Q a pour valeur :

$$Q = \frac{\mu(a)}{f}$$

Le moment fléchissant dans la section d'abscisse x de AB a donc pour valeur :

$$M = \mu - Qf = \mu(x) - \mu(a)$$

Les moments fléchissants dans la poutre AB ne dépendent donc pas de la longueur des béquilles. La ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse x est définie par :

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) - \mu(\alpha, a)$$

Elle se compose de segments de droite.

Dans le cas d'une charge de densité uniforme p appliquée à la poutre AB , le moment négatif $M(0)$ en A et le moment positif maximal dans la section médiane de la poutre AB ont pour valeurs :

$$M(0) = -\mu(a) = \frac{1}{2} pa(\ell - a), \quad M_{max} = \frac{1}{8} p\ell^2 - \frac{1}{2} pa(\ell - a)$$

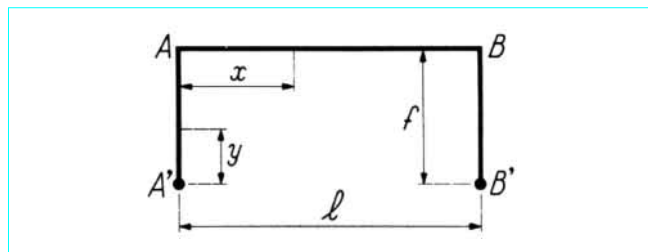


Figure 59 - Poutre à béquilles

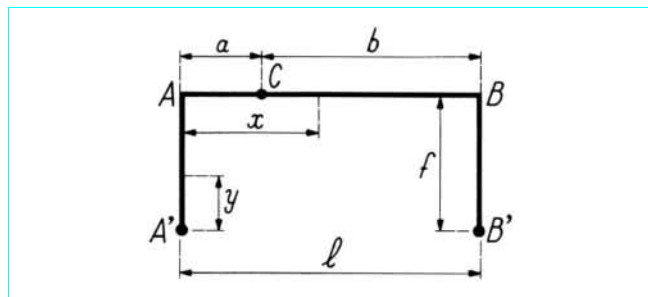


Figure 60 - Poutre à béquilles à trois articulations

Ces moments extrêmes sont égaux en valeur absolue si la position de l'articulation intermédiaire C est définie par $a = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})\ell$.

6.9.2 Poutre à béquilles articulées

La poussée Q est la seule inconnue hyperstatique (figure 59). Soit $\mu(x)$ le moment fléchissant dû aux charges appliquées à la poutre AB supposée sur appuis simples.

Le moment fléchissant M , l'effort normal N et l'effort tranchant T sont :

— dans la section X de AB définie par $x = \overline{AX}$:

$$M = \mu - Qf, \quad N = Q, \quad T = \frac{d\mu}{dx}$$

— dans la section Y_1 de la béquille $A'A$ définie par $y = \overline{A'Y_1}$:

$$M_1 = -Qy, \quad N_1 = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)_{x=0}, \quad T_1 = -Q$$

— dans la section Y_2 de la béquille $B'B$ définie par $y = \overline{B'Y_2}$:

$$M_2 = -Qy, \quad N_2 = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)_{x=\ell}, \quad T_2 = Q$$

Soit I le moment d'inertie de la poutre AB et J celui des béquilles ; nous pouvons calculer Q en annulant la dérivée de l'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2} \left(\int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^f \frac{M_1^2}{EJ} dy + \int_0^f \frac{M_2^2}{EJ} dy \right)$$

par rapport à Q . Nous trouvons ainsi :

$$Q \left(f^2 \int_0^\ell \frac{dx}{EI} + 2 \int_0^f \frac{y^2 dy}{EJ} \right) = f \int_0^\ell \frac{\mu dx}{EI} \quad (81)$$

Une dilatation uniforme ε donne une poussée :

$$Q_\varepsilon = \frac{\varepsilon \ell}{D}$$

D désignant le coefficient de Q dans l'équation (81).

Dans le cas où I et J sont constants, nous trouvons :

$$D = \frac{f^2 \ell}{EI} + \frac{2f^3}{3EJ}$$

$$\int_0^\ell \frac{\mu(\alpha, x)}{EI} dx = \frac{\alpha(\ell - \alpha)}{EI}$$

En posant $k = fI/(\ell J)$, la ligne d'influence de Q est définie par :

$$Q(\alpha) = \frac{\ell}{2f} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}k} \left(1 - \frac{\alpha}{\ell} \right) \frac{\alpha}{\ell}$$

La poussée due à une charge de densité uniforme p appliquée à AB est :

$$Q = \frac{p\ell^2}{12f} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}k}$$

La plus grande valeur de Q obtenue pour $k = 0$ (béquilles infiniment rigides) n'est que $2/3$ de la poussée d'un arc funiculaire de même portée et de même flèche.

7. Structures réticulées planes

7.1 Généralités. Définitions

Une *structure réticulée* est une structure composée de *barres* articulées entre elles à leurs extrémités ; les points d'articulation communs à plusieurs barres sont les *nœuds* de la structure.

Les seules forces extérieures sont appliquées aux nœuds. Il en résulte qu'une barre $A_i A_j$ (figure 61) comprise entre les nœuds A_i

et A_j est en équilibre sous l'action de deux forces opposées \vec{F}_{ij} et \vec{F}_{ji} appliquée l'une en A_i et l'autre en A_j . La barre $A_i A_j$ ne supporte donc qu'un effort normal, appelé *effort dans la barre*, égal à la mesure algébrique F_{ij} de \vec{F}_{ij} sur $\overrightarrow{A_i A_j}$. L'effort dans la barre est donc positif lorsque la barre est comprimée et négatif lorsque la barre est tendue.

Nous nous bornons aux *structures réticulées planes* : les nœuds et les forces extérieures sont contenus dans un même plan Oxy . Une *structure triangulée* est une structure qui n'est composée que de triangles formés par trois barres. Une *structure simplement triangulée* est composée d'une suite de triangles comportant un premier et un dernier triangle, chaque triangle intermédiaire ayant une barre commune avec le triangle qui le précède et le triangle qui le suit.

Le calcul des structures réticulées consiste à déterminer les réactions d'appui et les efforts dans les barres. Le système des forces extérieures est équivalent à zéro. Lorsque cette condition suffit pour déterminer les réactions d'appui, la structure est *extérieurement isostatique* ; s'il n'en est pas ainsi, la structure est *extérieurement hyperstatique*.

En supposant connues les réactions d'appui, si l'on peut calculer les efforts dans toutes les barres au moyen des équations de la statique, la structure est *intérieurement isostatique* ; s'il n'en est pas ainsi, la structure est *intérieurement hyperstatique*.

Une *structure isostatique* est à la fois intérieurement et extérieurement isostatique.

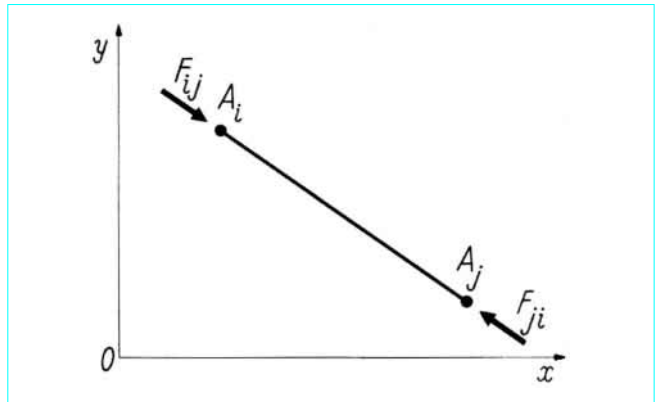


Figure 61 – Barre d'une structure réticulée

7.2 Structures réticulées isostatiques

7.2.1 Méthode des nœuds

7.2.1.1 Cas général

Nous supposons la structure *invariable*, ce qui signifie qu'il n'existe pas de déplacements possibles des nœuds modifiant la configuration géométrique de la structure. Supposons connues toutes les forces extérieures, forces données et réactions des appuis, appliquées aux nœuds ; ces forces vérifient les trois équations nécessaires de l'équilibre.

Choisissons un repère orthonormé Oxy , et désignons par (x_i, y_i) les coordonnées du nœud A_i , par ℓ_{ij} la longueur de la barre A_iA_j , par θ_{ij} l'angle $(\vec{Ox}, \vec{A_iA_j})$ et par F_{ij} l'effort dans la barre A_iA_j . On notera que $\theta_{ji} = \pi + \theta_{ij}$. Au nœud A_i est appliquée la force extérieure $\vec{\Phi}_i$ d'intensité Φ_i et d'orientation définie par $\varphi_i = (\vec{Ox}, \vec{\Phi}_i)$. L'équilibre du nœud A_i s'exprime par les équations :

$$\left. \begin{aligned} \sum_j F_{ij} \cos \theta_{ij} &= \Phi_i \cos \varphi_i \\ \sum_j F_{ij} \sin \theta_{ij} &= \Phi_i \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

les sommations étant étendues aux barres A_iA_j aboutissant au nœud A_i .

Si la structure comporte n nœuds et b barres, nous avons $2n$ équations (82) pour calculer b inconnues. Mais ces $2n$ équations ne sont pas indépendantes, car elles entraînent les trois équations nécessaires de l'équilibre des forces $\vec{\Phi}_i$; nous n'avons donc que $2n - 3$ équations (82) indépendantes. Une condition nécessaire pour que la structure soit intérieurement isostatique est donc :

$$b = 2n - 3 \quad (83)$$

Si $b > 2n - 3$, il existe $p = b - (2n - 3)$ barres surabondantes et la structure est p fois intérieurement hyperstatique.

La relation (83) est également une condition nécessaire pour que la structure soit strictement invariable, c'est-à-dire telle que la suppression d'une barre quelconque transforme la structure en mécanisme à un degré de liberté ; en effet, nous disposons, pour définir la configuration géométrique de la structure, de b équations :

$$\ell_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

pour calculer les $2n$ coordonnées (x_i, y_i) des nœuds ; si l'on place A_1 au point O et la barre A_1A_2 sur Oy , on a seulement $2n - 3$ inconnues, puisque $x_1 = y_1 = x_2 = 0$.

La condition (83) n'est pas suffisante en général pour que la structure soit intérieurement hyperstatique ou strictement invariable, car la structure peut comporter des barres surabondantes dans certaines de ses parties et se comporter comme un mécanisme à un ou plusieurs degrés de liberté dans d'autres.

Par contre, la condition (83) est suffisante dans le cas d'une structure triangulée ; il en résulte qu'une structure simplement triangulée est toujours intérieurement isostatique et strictement invariable, car, si t est le nombre des triangles, les relations évidentes $n = t + 2$ et $b = 2t + 1$ entraînent $b = 2n - 3$.

La méthode des nœuds peut se traduire graphiquement par l'épuration de Cremona consistant à associer à chaque nœud le polygone des forces qui lui sont appliquées ; les polygones des forces correspondant à deux nœuds reliés par une barre ont un côté commun représentant l'effort dans la barre.

7.2.1.2 Structures à configuration critique

Même dans le cas d'une structure strictement invariable, les équations (82) ne donnent pas les efforts dans les barres lorsque le déterminant Δ de ces équations est nul ; on dit alors que la structure est à configuration critique. Un exemple simple d'une telle structure est donné par un hexagone régulier et ses trois diagonales non réunies au centre ($n = 6, b = 9$). La configuration critique est une propriété purement géométrique, puisque Δ ne dépend pas des forces appliquées. Lorsque Δ est nul, le système (82) rendu homogène ($\Phi_i = 0$) a des solutions non nulles ; donc si, dans une structure strictement invariable, on peut trouver des efforts dans les barres qui s'équilibrent en l'absence de forces extérieures, cette structure est à configuration critique.

Dans les structures à configuration critique, des variations de longueur du second ordre des barres entraînent des déplacements du premier ordre des nœuds. Bien que géométriquement invariables, les structures à configuration critique sont très déformables ; il faut donc, pour écrire les équations d'équilibre, tenir compte des déplacements des nœuds, l'hypothèse de la petitesse des déplacements n'étant plus admissible.

7.2.2 Autres méthodes de calcul des efforts dans les barres

7.2.2.1 Méthode des sections ou de Cullmann

Si l'on partage la structure en deux parties au moyen d'une section (ou *coupure*) rencontrant un certain nombre de barres, les forces extérieures appliquées à la partie de la structure située à gauche de la section forment un système équivalent au système des forces exercées sur la partie de droite par les barres coupées par la section. À toute section correspondent donc trois équations linéaires entre les efforts dans les barres coupées par la section.

En particulier, si la section ne coupe que trois barres, on trouve l'effort dans une des barres en égalant les moments des deux systèmes de forces considérés précédemment par rapport au point d'intersection des axes des deux autres barres (*méthode de Ritter*).

Par exemple (figure 62), si la section (S) coupe les barres AB, BC et CD, on a :

$$F_{AB} = \frac{\mathcal{M}_C}{CH}, \quad F_{BC} = \frac{\mathcal{M}_I}{IK} \quad (84)$$

avec H projection sur AB du point de concours des barres BC et CD,
 K projection sur BC du point de concours I des barres AB et CD,
 \mathcal{M}_C et \mathcal{M}_I moments par rapport à C et I du système des forces appliquées à gauche de la section.

Les formules (84) peuvent être considérées comme des formules algébriques, à condition de compter les moments \mathcal{M} dans le sens trigonométrique et la distance d'un point à une barre comme positive lorsque ce point se trouve à gauche de la barre orientée dans le sens où elle franchit la coupure.

7.2.2.2 Application du théorème des travaux virtuels

Soit à calculer l'effort F_{ij} dans la barre A_iA_j d'une structure intérieurement isostatique lorsque des forces extérieures $\vec{\Phi}_k$ sont appliquées aux nœuds A_k . La barre A_iA_j peut être supprimée, sans que l'équilibre de la structure soit modifié, si l'on applique la force \vec{F}_{ij} au nœud A_j et la force $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ au nœud A_i . La structure privée de la barre A_iA_j est un mécanisme à un degré de liberté auquel on peut donner un déplacement virtuel ; en désignant par $\delta \vec{A}_k$ le déplacement virtuel du nœud A_k , le **théorème des travaux virtuels** (article

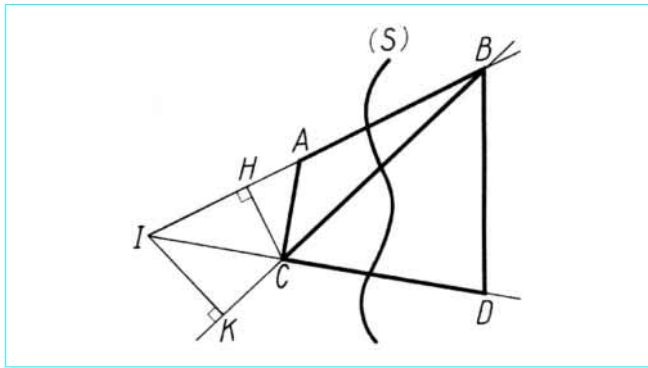


Figure 62 – Structure réticulée plane : méthode des sections

Déformations et contraintes dans un milieu continu [A 303] dans le traité Sciences fondamentales) se traduit par l'équation :

$$\vec{F}_{ij} \cdot (\delta \vec{A}_j - \delta \vec{A}_i) + \sum_k \vec{\Phi}_k \cdot \delta \vec{A}_k = 0$$

soit, en désignant par $\delta \ell_{ij}$ le raccourcissement de la barre $A_i A_j$ pendant le déplacement virtuel :

$$F_{ij} \delta \ell_{ij} = \sum_k \vec{\Phi}_k \cdot \delta \vec{A}_k \quad (85)$$

L'emploi de la formule (85) est particulièrement indiqué pour trouver l'effort dans la barre $A_i A_j$ sous l'effet d'une force unité \vec{U} appliquée à un nœud quelconque A_k ; nous avons en effet :

$$F_{ij} \delta \ell_{ij} = \vec{U} \cdot \delta \vec{A}_k$$

de sorte que la projection de $\delta \vec{A}_k$ sur \vec{U} est proportionnelle à F_{ij} . Cette remarque permet de tracer les lignes d'influence des efforts dans les barres.

7.2.3 Poutres triangulées usuelles

7.2.3.1 Remarque préliminaire

En général, les forces extérieures données sont des forces verticales qui ne sont appliquées qu'en certains nœuds appelés nœuds de charge. Une charge P appliquée en C entre deux nœuds de charge A et B (figure 63) sera supposée transmise aux nœuds A et B par une poutre secondaire simplement appuyée en A et B ; la charge P est donc équivalente aux charges P_A et P_B appliquées aux nœuds A et B ; en posant $AB = d$ et $AC = \alpha$:

$$P_A = P \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right), \quad P_B = P \frac{\alpha}{d}$$

Considérons alors la fonction d'influence d'un effet élastique \mathcal{F} ; cette fonction d'influence prend la valeur \mathcal{F}_A lorsque la charge unité est appliquée au nœud A et la valeur \mathcal{F}_B lorsque la charge unité est appliquée au nœud B ; la fonction d'influence prend, lorsque la charge unité est appliquée en C , la valeur :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_A \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) + \mathcal{F}_B \frac{\alpha}{d}$$

Donc, lorsque la charge unité se déplace entre deux nœuds de charge consécutifs, \mathcal{F} varie linéairement. La ligne d'influence de

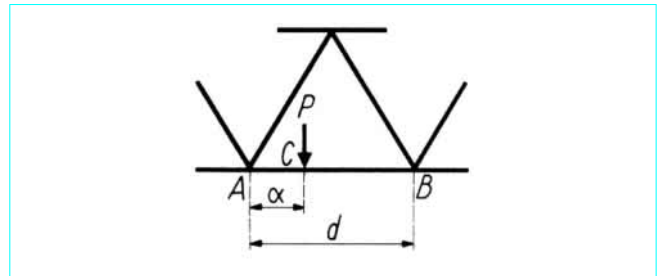


Figure 63 – Poutre triangulée. Nœuds de charge

l'effet \mathcal{F} est donc une ligne brisée dont les sommets ont pour abscisses des nœuds de charge.

7.2.3.2 Poutres à triangulation Pratt ou à triangulation Howe

Ce sont des poutres simplement triangulées comportant des membrures, des montants et des diagonales. Supposons la poutre sur appuis simples. Dans la poutre Pratt (figure 64) les diagonales sont inclinées vers le milieu, tandis que dans la poutre Howe les diagonales sont inclinées vers les extrémités.

Sur la figure 64, la section (S) rencontre les membrures CD et GH et la diagonale DH ; désignons par M_C et M_D les moments fléchissants en C et D dans la poutre sur appuis simples AB soumise aux mêmes charges que la poutre Pratt; les formules (84) nous donnent les efforts dans les membrures :

$$F_{CD} = -\frac{M_C}{CH}, \quad F_{GH} = \frac{M_D}{DG \cos \varphi}$$

φ désignant l'angle de la membrure GH avec l'horizontale.

Projetons sur la verticale les efforts dans les barres coupées par la section (S); nous obtenons, en désignant par T_C l'effort tranchant immédiatement à droite de C dans la poutre AB et par θ l'angle de la diagonale DH avec la verticale :

$$F_{GH} \sin \varphi - F_{DH} \cos \theta = T_C$$

d'où, compte tenu de la valeur de F_{GH} :

$$F_{DH} = -\frac{1}{\cos \theta} \left(T_C - \frac{M_D}{DG} \operatorname{tg} \varphi \right)$$

Enfin, projetons sur la verticale les efforts dans les barres DG , DL et GH rencontrées par la section (S'); nous trouvons, en désignant par T_D l'effort tranchant immédiatement à droite de D dans la poutre AB :

$$F_{DG} + F_{GH} \sin \varphi = T_D$$

d'où, compte tenu de la valeur de F_{GH} :

$$F_{DG} = T_D - \frac{M_D}{DG} \operatorname{tg} \varphi$$

Les lignes d'influence des efforts dans les barres se déduisent donc des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans la poutre sur appuis simples AB .

7.2.3.3 Poutre à triangulation Warren

Ce sont des poutres simplement triangulées, comportant des membrures, des diagonales et éventuellement des montants réparti-teurs (en pointillé sur la figure 65).

Supposons (figure 65) la poutre sur appuis simples et les nœuds de charge inférieurs; l'effort dans le montant répartiteur HK n'est différent de zéro que lorsque des charges sont appliquées entre C

et D ; son seul but est de transmettre les charges aux nœuds supérieurs. La considération des sections (S) et (S') donne les efforts dans les membrures (h est la hauteur de la poutre) :

$$F_{CD} = -\frac{M_K}{h}, F_{HG} = \frac{M_D}{h}$$

et les efforts dans les diagonales (θ est l'angle de la diagonale avec la verticale) :

$$F_{CH} = \frac{T_C}{\cos \theta}, F_{DH} = -\frac{T_K}{\cos \theta}$$

M_K et M_D désignent les moments fléchissants en K et D , et T_C et T_K les efforts tranchants immédiatement à droite de C et de K dans la poutre sur appuis simples AB soumise aux mêmes charges que la poutre Warren.

La figure 66 donne la ligne d'influence de l'effort dans la diagonale CH ; cette ligne est $AC'D'B$ s'il n'y a pas de montants répartiteurs, et $AC'K'B$ s'il y en a.

7.2.3.4 Poutre à triangulation en K

La poutre à triangulation en K (figure 67) est simplement appuyée en A et B ; les charges verticales sont appliquées aux nœuds supérieurs et aux nœuds inférieurs.

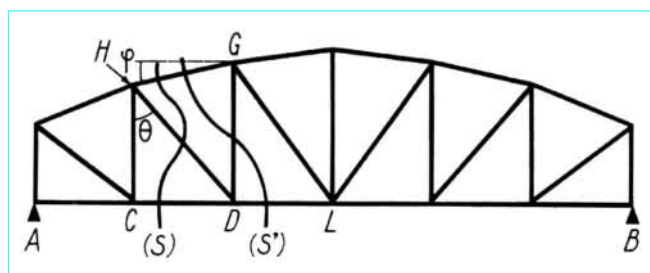


Figure 64 - Poutre Pratt

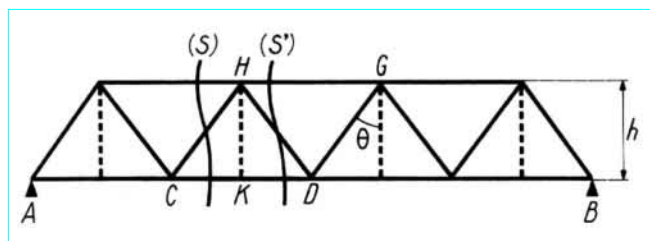


Figure 65 - Poutre Warren

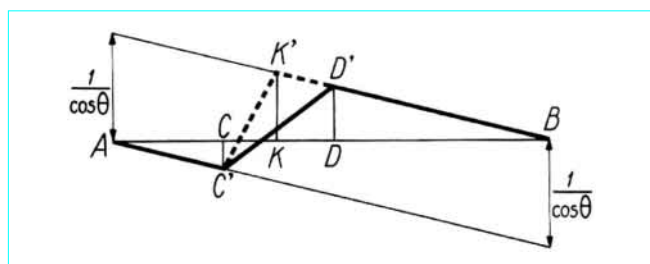


Figure 66 - Poutre Warren : ligne d'influence dans une diagonale

Une des équations d'équilibre du nœud central G montre que :

$$F_{GD} + F_{GK} = 0$$

La considération de la section (S) donne les trois équations :

$$F_{CD} + F_{HK} = 0$$

$$T_C = (F_{GK} - F_{GD}) \cos \theta$$

$$M_C = (F_{HK} - F_{CD}) h$$

M_C désignant le moment fléchissant en C et T_C l'effort tranchant immédiatement à droite de C dans la poutre sur appuis simples AB . Nous déduisons des équations précédentes les efforts dans les membrures et les diagonales :

$$F_{HK} = -F_{CD} = \frac{M_C}{2h}, F_{GK} = -F_{GD} = \frac{T_C}{2 \cos \theta}$$

Projetons les forces appliquées aux nœuds C et H sur la verticale ; en désignant par P et Q les charges appliquées à ces nœuds, nous trouvons les efforts dans les montants GH et CG :

$$F_{GH} = -F_{LH} \cos \theta + Q = -\frac{1}{2} T_E + Q$$

$$F_{CG} = -F_{CL} \cos \theta - P = \frac{1}{2} T_E - P$$

7.2.4 Déplacements des structures réticulées

7.2.4.1 Méthode géométrique. Formule fondamentale

Conservons les notations définies au paragraphe 7.2.1.1. Avant déformation de la structure, la longueur de la barre $A_i A_j$ est :

$$\ell_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

Le raccourcissement $\delta \ell_{ij}$ des barres de section S_{ij} et de module d'Young E :

$$\delta \ell_{ij} = \frac{F_{ij} \ell_{ij}}{ES_{ij}}$$

entraîne des déplacements $\delta \vec{A}_i$ des nœuds de composantes δx_i et δy_i vérifiant les relations :

$$-\ell_{ij} \delta \ell_{ij} = (x_i - x_j)(\delta x_i - \delta x_j) + (y_i - y_j)(\delta y_i - \delta y_j)$$

Nous obtenons ainsi la **formule fondamentale** :

$$\delta \ell_{ij} = (\delta x_i - \delta x_j) \cos \theta_{ij} + (\delta y_i - \delta y_j) \sin \theta_{ij} \tag{86}$$

applicable aux structures isostatiques et hyperstatiques.

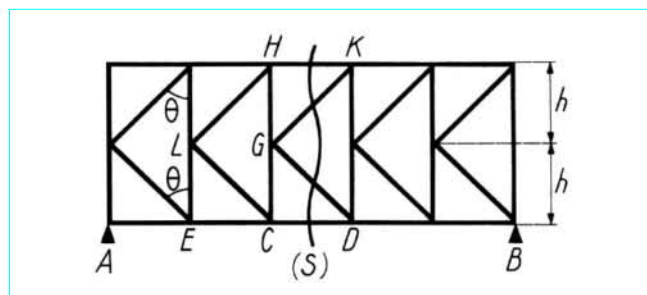


Figure 67 - Poutre à triangulation en K

Nous avons b équations (86) pour calculer les déplacements inconnus. Dans le cas d'une structure isostatique, le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues. Ainsi, pour une poutre sur appuis simples A_1 fixe et A_n mobile, nous avons $b = 2n - 3$ et $\delta x_1 = \delta y_1 = \delta y_n = 0$; pour un arc à trois articulations A_1, A_m et A_n , nous avons $b = 2n - 4$ et $\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_n = \delta y_n = 0$.

Le calcul se fait aisément de proche en proche pour une structure triangulée dans laquelle tout nœud A est rattaché aux nœuds B et C par les barres AB et AC , car la relation (86) appliquée à ces deux barres donne deux équations qui permettent de calculer $\delta \vec{A}$ connaissant $\delta \vec{B}$ et $\delta \vec{C}$.

La relation (86) ne change pas si l'on permute A_i et A_j car $\theta_{ji} = \pi + \theta_{ij}$.

7.2.4.2 Application du théorème de Castigliano

Numérotions les nœuds A_i de 1 à n et les barres (B_j) de 1 à b . Sous l'effet d'un système de forces extérieures (Φ), l'effort dans la barre (B_j) de longueur ℓ_j et de section S_j est F_j . L'énergie de déformation de la structure est la somme des énergies de déformation des barres (B_j):

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \frac{F_j^2 \ell_j}{ES_j} \tag{87}$$

Pour calculer, par exemple, la composante verticale $v_i = \delta y_i$ du nœud A_i , appliquons au nœud A_i une force auxiliaire Y parallèle à O_{y_i} . Sous l'action simultanée de (Φ) et de Y les efforts dans les barres ont pour valeurs :

$$F'_j = F_j + Y F_j^i$$

et la composante verticale du déplacement de A_i est, d'après le **théorème de Castigliano** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) :

$$\frac{\delta}{\delta Y} \left(\frac{1}{2} \sum_j \frac{F_j'^2 \ell_j}{ES_j} \right) = \sum_j \frac{F_j^i F_j^i \ell_j}{ES_j}$$

Il suffit de prendre $Y = 0$ pour obtenir le déplacement cherché :

$$v_i = \sum_j \frac{F_j F_j^i \ell_j}{ES_j} \tag{88}$$

Dans cette formule F_j^i est l'effort dans la barre (B_j) sous l'effet d'une force $Y = 1$ appliquée au nœud A_i .

7.2.4.3 Assimilation à une poutre en double té

Il est possible de trouver une poutre en double té de moment d'inertie I et de section d'âme S_1 , ayant approximativement les mêmes déplacements qu'une poutre triangulée de hauteur constante. Pour obtenir une approximation satisfaisante, la poutre triangulée doit comporter un nombre de panneaux assez grand pour que le moment fléchissant M et l'effort tranchant T puissent être confondus avec leurs valeurs moyennes sur la longueur a du panneau. En vertu du **théorème de Castigliano**, il suffit d'identifier l'énergie de déformation W' des barres du panneau à l'énergie de déformation W de la longueur correspondante de la poutre en double té :

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_1} \right) a$$

■ Dans le cas d'une **poutre Warren** (figure 68) dont les sections des membrures et de la diagonale du panneau sont respectivement Ω, Ω' et S , nous trouvons :

$$W' = \frac{M^2 a}{2 E h^2} \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega'} \right) + \frac{T^2 a}{2 E S \sin \theta \cos^2 \theta}$$

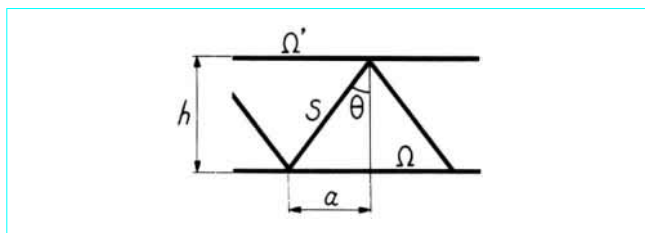


Figure 68 – Poutre Warren : assimilation à une poutre en double té

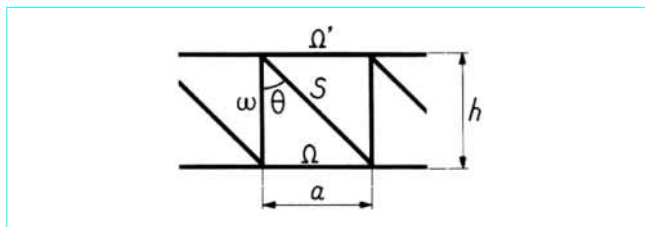


Figure 69 – Poutre Pratt ou Howe : assimilation à une poutre en double té

Il en résulte les valeurs suivantes de I et de S_1 :

$$I = h^2 \frac{\Omega \Omega'}{\Omega + \Omega'}, \quad S_1 = \frac{E}{G} S \sin \theta \cos^2 \theta \tag{89}$$

■ Dans le cas d'une **poutre Pratt ou Howe** (figure 69) dont les sections des membrures, de la diagonale et du montant du panneau sont respectivement Ω, Ω', S et ω , nous trouvons :

$$W' = \frac{M^2 a}{2 E h^2} \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega'} \right) + \frac{T^2 a}{2 E S \sin \theta \cos^2 \theta} + \frac{T^2 a}{2 E \omega \tan \theta}$$

Il en résulte les valeurs suivantes de I et de S_1 :

$$I = h^2 \frac{\Omega \Omega'}{\Omega + \Omega'}, \quad S_1 = \left(\frac{E}{G} \right) \frac{\omega S \sin \theta \cos^2 \theta}{\omega + S \cos^3 \theta} \tag{90}$$

7.3 Structures réticulées hyperstatiques

7.3.1 Méthode fondée sur l'étude géométrique des déplacements des nœuds

Cette méthode consiste à utiliser la **formule fondamentale** (86).

7.3.1.1 Structures extérieurement isostatiques et intérieurement hyperstatiques

Nous connaissons alors toutes les forces appliquées aux nœuds de la structure q fois intérieurement hyperstatique. Il y a q barres surabondantes, et le nombre des barres est $b = 2n - 3 + q$. La formule (86) montre que les $2n - 3 + q$ raccourcissements des barres sont des fonctions linéaires et homogènes de $2n - 3$ déplacements ($\delta x_i, \delta y_i$) indépendants. Il existe donc q relations linéaires et homogènes entre les raccourcissements, donc entre les efforts dans les barres. Ces relations, qui ne dépendent pas des forces extérieures, et les $2n - 3$ équations indépendantes d'équilibre des nœuds permettent de calculer les efforts dans les barres.

Exemple : en général, une poutre Pratt ayant un nombre impair de panneaux comporte deux diagonales dans le panneau central $A_1 A_2 A_4 A_3$ (figure 70) ; cette poutre est donc une fois intérieurement hyperstatique.

Des relations :

$$\begin{aligned} \delta \ell_{12} &= \delta x_1 - \delta x_2, & \delta \ell_{34} &= \delta x_3 - \delta x_4 \\ \delta \ell_{13} &= \delta y_1 - \delta y_3, & \delta \ell_{24} &= \delta y_2 - \delta y_4 \\ \delta \ell_{14} &= (\delta x_1 - \delta x_4) \sin \theta + (\delta y_1 - \delta y_4) \cos \theta \\ \delta \ell_{23} &= -(\delta x_2 - \delta x_3) \sin \theta + (\delta y_2 - \delta y_3) \cos \theta \end{aligned}$$

nous déduisons immédiatement la relation :

$$\delta \ell_{14} + \delta \ell_{23} = (\delta \ell_{12} + \delta \ell_{34}) \sin \theta + (\delta \ell_{13} + \delta \ell_{24}) \cos \theta$$

Compte tenu des égalités géométriques évidentes :

$$\ell_{14} = \ell_{23}, \quad \ell_{12} = \ell_{34} = \ell_{14} \sin \theta, \quad \ell_{13} = \ell_{24} = \ell_{14} \cos \theta$$

nous obtenons la relation entre les efforts dans les barres :

$$\frac{F_{14}}{S_{14}} + \frac{F_{23}}{S_{23}} = \left(\frac{F_{12}}{S_{12}} + \frac{F_{34}}{S_{34}} \right) \sin^2 \theta + \left(\frac{F_{13}}{S_{13}} + \frac{F_{24}}{S_{24}} \right) \cos^2 \theta$$

7.3.2 Méthode fondée sur le théorème de Menabrea

7.3.2.1 Formules générales

Numérotions les barres (B_k) de longueur ℓ_k et de section S_k de 1 à b . L'énergie de déformation de la structure a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \frac{F_k^2 \ell_k}{ES_k}$$

Supposons la structure p fois extérieurement hyperstatique et q fois intérieurement hyperstatique. Les inconnues hyperstatiques comprennent p réactions surabondantes X_i ($i = 1, 2, \dots, p$) et q efforts Y_j ($j = 1, 2, \dots, q$) dans les barres surabondantes. Nous pouvons, à l'aide des équations d'équilibre de la statique, exprimer les efforts dans les barres en fonction de X_i , Y_j et des forces appliquées Φ_k :

$$F_k = \Phi_k + \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j Y_j \tag{91}$$

Le théorème de Menabrea fournit $p + q$ équations linéaires :

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial Y_j} = 0 \quad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q) \tag{92}$$

permettant de calculer les inconnues X_i et Y_j .

7.3.2.2 Exemple : arc triangulé à deux articulations

Supposons l'arc intérieurement isostatique (figure 71) ; l'unique inconnue hyperstatique est la poussée Q de l'arc. Rendons la structure isostatique en laissant l'articulation A se déplacer horizontalement sur AB , et soit Φ_k l'effort dans la barre (B_k) sous l'effet des charges appliquées, et a_k l'effort dans cette même barre sous l'effet d'une force horizontale unité appliquée en A .

L'effort dans la barre (B_k) de l'arc a pour expression :

$$F_k = \Phi_k + Q a_k$$

Les équations (92) se réduisent alors à la seule équation :

$$\frac{dW}{dQ} = \sum_k \frac{F_k \ell_k}{ES_k} \frac{dF_k}{dQ} = \sum_k \frac{F_k a_k \ell_k}{ES_k} = 0$$

soit :

$$Q \sum_k \frac{\ell_k a_k^2}{ES_k} = - \sum_k \frac{\Phi_k \ell_k a_k}{ES_k}$$

L'arc étant rendu isostatique, une dilatation uniforme ε due à une élévation de la température déplace l'articulation A de $\varepsilon \ell$ vers la gauche ; il faut, pour ramener l'articulation A à sa position initiale, appliquer à A une poussée Q_ε telle que le déplacement de A vers la droite soit $\varepsilon \ell$; le théorème de Castigliano (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) nous donne la relation :

$$\varepsilon \ell = \frac{dW}{dQ} \quad \text{avec} \quad F_k = Q_\varepsilon a_k$$

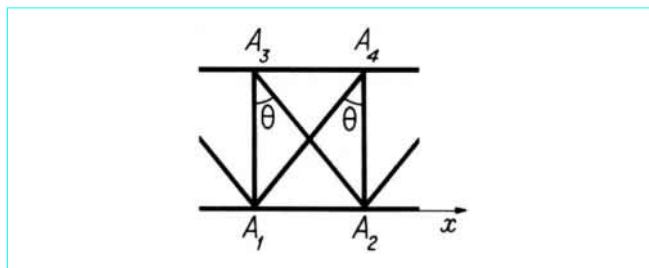


Figure 70 – Poutre Pratt hyperstatique

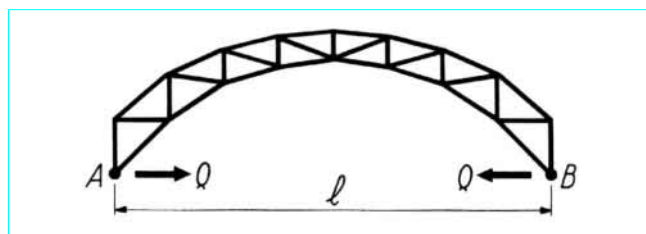


Figure 71 – Arc triangulé à deux articulations

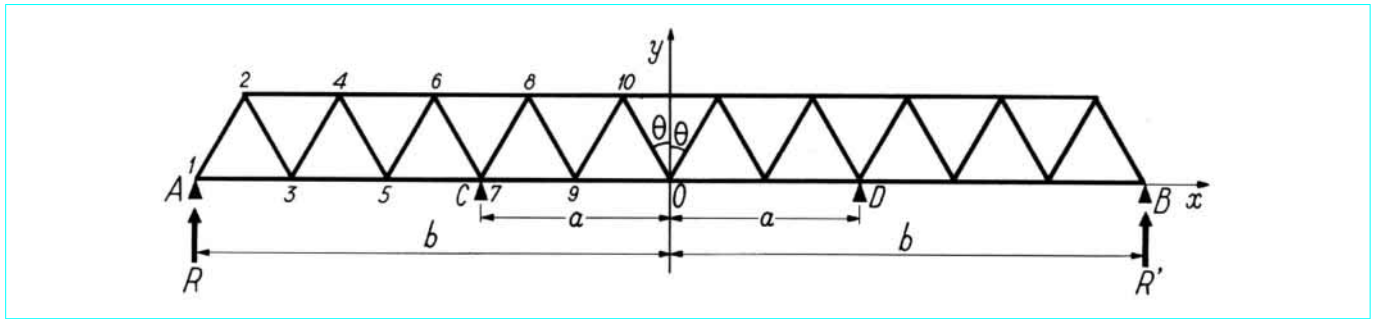


Figure 72 – Poutre Warren reposant sur quatre appuis

Il en résulte que la poussée Q_ϵ due à une dilatation ϵ est définie par :

$$Q_\epsilon \sum_k \frac{\ell_k a^2}{ES_k} = \epsilon \ell$$

7.3.3 Méthode fondée sur le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Cette méthode consiste à rechercher les lignes d'influence des inconnues hyperstatiques au moyen du **théorème de réciprocité** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales). Bornons-nous à appliquer cette méthode à une poutre continue symétrique reposant sur quatre appuis ACDB (figure 72) et à triangulation Warren, intérieurement isostatique.

Cherchons les lignes d'influence des réactions R et R' exercées par les appuis extrêmes A et B . Pour cela, nous appliquons le théorème de réciprocité à la poutre console obtenue en supprimant les appuis A et B pour les mêmes cas de charge qu'au paragraphe 5.3.7.2. Soit : $\delta y_A, \delta y_B, \delta y_\alpha$ et $\delta' y_\alpha$ les composantes verticales des déplacements du nœud A , du nœud B , du nœud de charge A_α et du nœud A'_α symétrique du nœud A_α par rapport à l'axe de symétrie Oy , sous l'effet d'une force verticale quelconque appliquée au nœud A . Le théorème de réciprocité se traduit par les équations, R_α et R'_α désignant les valeurs des réactions lorsqu'une charge unité est appliquée au nœud A_α :

$$\begin{aligned} R_\alpha \delta y_A + R'_\alpha \delta y_B &= \delta y_\alpha \\ R_\alpha \delta y_B + R'_\alpha \delta y_A &= \delta' y_\alpha \end{aligned}$$

Donc :

$$R_\alpha + R'_\alpha = \frac{\delta y_\alpha + \delta' y_\alpha}{\delta y_A + \delta y_B}, \quad R_\alpha - R'_\alpha = \frac{\delta y_\alpha - \delta' y_\alpha}{\delta y_A - \delta y_B}$$

Il suffit donc, pour obtenir les lignes d'influence des réactions R et R' , de calculer les déplacements des nœuds de la poutre console sous l'effet d'une force verticale appliquée au nœud A . La méthode la plus rapide consiste à utiliser la formule fondamentale (86). Par exemple, avec les notations de la figure 72, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta \ell_{13} &= \delta x_1 - \delta x_3, & \delta \ell_{35} &= \delta x_3 - \delta x_5, & \dots & \dots & \dots \\ \delta \ell_{24} &= \delta x_2 - \delta x_4, & \delta \ell_{46} &= \delta x_4 - \delta x_6, & \dots & \dots & \dots \\ \delta \ell_{12} &= (\delta x_1 - \delta x_2) \sin \theta + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos \theta \\ \delta \ell_{23} &= (\delta x_2 - \delta x_3) \sin \theta - (\delta y_2 - \delta y_3) \cos \theta \\ \delta \ell_{34} &= (\delta x_3 - \delta x_4) \sin \theta + (\delta y_3 - \delta y_4) \cos \theta \\ \delta \ell_{45} &= (\delta x_4 - \delta x_5) \sin \theta - (\delta y_4 - \delta y_5) \cos \theta \\ & \dots & & & & & \dots \end{aligned}$$

Pour résoudre rapidement les équations précédentes, faisons $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta y_1 = 0$; nous obtenons alors immédiatement la solution correspondante $\delta' x_i$ et $\delta' y_j$. Il suffit, pour obtenir les déplacements cherchés, d'ajouter à la solution précédente un déplacement d'ensemble tel que le déplacement vertical résultant des nœuds C et D soit nul.

8. Structures composées de poutres droites

8.1 Définition des structures étudiées

Les structures que nous étudions sont constituées de poutres droites assemblées entre elles en leurs extrémités ou nœuds par des assemblages rigides ou par des articulations. Les exemples de telles structures sont nombreux : portiques à un ou plusieurs étages, structures réticulées à assemblages rigides, etc.

Nous supposons qu'on est en droit de négliger les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant. Moyennant cette hypothèse, les structures peuvent être classées en **structures à nœuds invariables** (§ 8.3), dont les nœuds ne peuvent que tourner, et en **structures à nœuds déplaçables** (§ 8.4), dont les nœuds peuvent tourner et se déplacer (figure 73).

On peut également distinguer les **structures ouvertes** et les **structures fermées** ; une structure est ouverte lorsque la suppression d'une poutre quelconque n'aboutissant pas à un appui divise la structure en deux structures distinctes ; une structure qui n'est pas ouverte est fermée. L'intérêt de cette distinction est le suivant : la notion de foyers, étudiée dans le cas des poutres continues (§ 5.3), peut être étendue aux structures ouvertes à nœuds invariables.

8.2 Formules préliminaires

8.2.1 Cas général d'une poutre encastree à ses extrémités sur les nœuds

Considérons une poutre AB comprise entre les nœuds A et B , et désignons par M_{AB} et M_{BA} les couples exercés par la poutre respectivement sur le nœud A et sur le nœud B ; M_{AB} est donc égal au moment fléchissant en A , et M_{BA} est égal au moment fléchissant en B changé de signe.

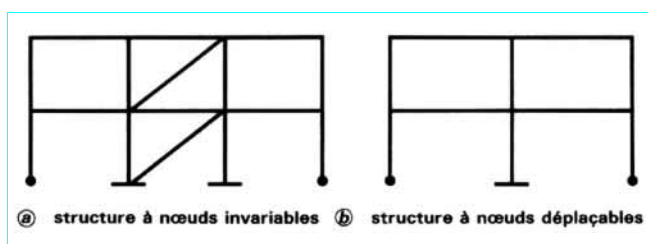


Figure 73 - Structures composées de poutres droites

Supposons d'abord la poutre AB non chargée. Si $\omega_B = 0$, M_{AB} et M_{BA} sont proportionnels à ω_A :

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -K_{AB}\omega_A \\ M_{BA} &= \lambda_{AB}M_{AB} = -\lambda_{AB}K_{AB}\omega_A \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

et si $\omega_A = 0$, M_{AB} et M_{BA} sont proportionnels à ω_B :

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= -K_{BA}\omega_B \\ M_{AB} &= \lambda_{BA}M_{BA} = -\lambda_{BA}K_{BA}\omega_B \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Les formules (93) et (94) définissent quatre constantes caractéristiques de la poutre, les *facteurs de rigidité* K_{AB} et K_{BA} , et les *facteurs de transmission* λ_{AB} et λ_{BA} . Ces constantes ne sont pas indépendantes, car on peut les exprimer en fonction des coefficients de souplesse a , b et c de la poutre (§ 5.1). Il existe donc une relation entre ces constantes, relation que l'on peut trouver en appliquant le **théorème de réciprocité** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) aux deux systèmes de forces indiqués sur la figure 74 :

$$\lambda_{AB}K_{AB} = \lambda_{BA}K_{BA} \quad (95)$$

Dans le cas où la poutre est chargée et où les nœuds A et B sont invariables, les couples M_{AB} et M_{BA} s'obtiennent par superposition :

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= m_{AB} - K_{AB}\omega_A - \lambda_{BA}K_{BA}\omega_B \\ M_{BA} &= m_{BA} - K_{BA}\omega_B - \lambda_{AB}K_{AB}\omega_A \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

m_{AB} et m_{BA} sont les couples exercés sur les nœuds A et B par la poutre AB supposée encastree à ses extrémités ($\omega_A = 0$, $\omega_B = 0$).

Dans le cas où les nœuds A et B se déplacent en A' et B' , désignons par Ω_{AB} l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$; les couples M_{AB} et M_{BA} sont encore donnés par les formules (96), à condition de remplacer ω_A par $\omega_A - \Omega_{AB}$ et ω_B par $\omega_B - \Omega_{AB}$; nous trouvons ainsi, en tenant compte de la relation (95) et de ce que $\Omega_{AB} = \Omega_{BA}$, les formules :

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= m_{AB} - K_{AB}\omega_A - \lambda_{BA}K_{BA}\omega_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega_{AB} \\ M_{BA} &= m_{BA} - K_{BA}\omega_B - \lambda_{AB}K_{AB}\omega_A + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section X d'abscisse $x = \overline{AX}$ de la poutre AB de longueur ℓ ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} M(x) &= \mu(x) + M_{AB}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - M_{BA}\frac{x}{\ell} \\ T(x) &= \frac{d\mu}{dx} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell} \end{aligned}$$

$\mu(x)$ désignant le moment fléchissant dans la poutre supposée sur appuis simples.

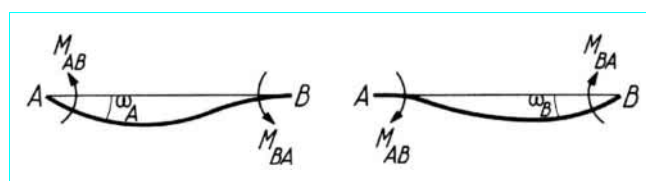


Figure 74 - Poutre encastree à ses extrémités sur les nœuds

8.2.2 Cas d'une poutre articulée à l'une de ses extrémités

Supposons la poutre AB articulée sur le nœud B .

Dans le cas où les nœuds sont invariables, nous avons $M_{BA} = 0$, soit [seconde relation (96)] :

$$m_{BA} - K_{BA}\omega_B - \lambda_{AB}K_{AB}\omega_A = 0$$

En portant la valeur de ω_B déduite de l'équation précédente dans la première relation (96), nous obtenons la formule :

$$M_{AB} = m'_{AB} - K'_{AB}\omega_A \quad (98)$$

dans laquelle :

$$\left. \begin{aligned} K'_{AB} &= (1 - \lambda_{AB}\lambda_{BA})K_{AB} \\ m'_{AB} &= m_{AB} - \lambda_{BA}m_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

m'_{AB} est le couple exercé sur le nœud A par la poutre AB encastree en A ($\omega_A = 0$) et simplement appuyée en B .

Dans le cas où les nœuds sont déplaçables, on a :

$$M_{AB} = m'_{AB} - K'_{AB}(\omega_A - \Omega_{AB}) \quad (100)$$

8.2.3 Calcul des facteurs de rigidité et des facteurs de transmission

Appliquons à la poutre AB les formules fondamentales (29) ; dans le cas où $\omega_B = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_A &= -aM_{AB} + bM_{BA} \\ 0 &= bM_{AB} - cM_{BA} \end{aligned}$$

et dans le cas où $\omega_A = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= -aM_{AB} + bM_{BA} \\ \omega_B &= bM_{AB} - cM_{BA} \end{aligned}$$

Les relations précédentes doivent être équivalentes aux relations (93) et (94) ; nous en déduisons les expressions de K_{AB} , λ_{AB} , K_{BA} , λ_{BA} en fonction des coefficients de souplesse a , b , c :

$$\left. \begin{aligned} K_{AB} &= \frac{c}{ac - b^2} & \lambda_{AB} &= \frac{b}{c} \\ K_{BA} &= \frac{a}{ac - b^2} & \lambda_{BA} &= \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

La première formule (99) donne ensuite :

$$K'_{AB} = \frac{1}{a}, \quad K'_{BA} = \frac{1}{c}$$

En particulier, dans le cas où la poutre est de section constante :

$$a = c = 2b = \frac{\ell}{3EI}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} K_{AB} &= K_{BA} = \frac{4EI}{\ell} \\ \lambda_{AB} &= \lambda_{BA} = \frac{1}{2} \\ K'_{AB} &= K'_{BA} = \frac{3EI}{\ell} \end{aligned}$$

Les formules (96) deviennent dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= m_{AB} - K_{AB} \left(\omega_A + \frac{1}{2} \omega_B \right) \\ M_{BA} &= m_{BA} - K_{AB} \left(\omega_B + \frac{1}{2} \omega_A \right) \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

et les formules (97) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= m_{AB} - K_{AB} \left(\omega_A + \frac{1}{2} \omega_B \right) + \frac{3}{2} K_{AB} \Omega_{AB} \\ M_{BA} &= m_{BA} - K_{AB} \left(\omega_B + \frac{1}{2} \omega_A \right) + \frac{3}{2} K_{AB} \Omega_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

8.3 Structures à nœuds invariables

8.3.1 Méthode des rotations

Cette méthode consiste à prendre pour inconnues les rotations des nœuds ; on réduit ainsi le nombre des inconnues. On obtient autant d'équations que d'inconnues en écrivant l'équation d'équilibre de chaque nœud. Par exemple, l'équation d'équilibre d'un nœud sur lequel sont encastées les poutres AB, AC, AD et AE est :

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} = 0$$

soit, dans le cas où les poutres sont encastées sur les nœuds B, C, D et E, en utilisant les formules (96) :

$$(K_{AB} + K_{AC} + K_{AD} + K_{AE}) \omega_A + \lambda_{BA} K_{BA} \omega_B + \lambda_{CA} K_{CA} \omega_C + \lambda_{DA} K_{DA} \omega_D + \lambda_{EA} K_{EA} \omega_E = m_{AB} + m_{AC} + m_{AD} + m_{AE} \quad (104)$$

et, dans le cas où l'une des poutres, AD par exemple, serait articulée sur le nœud d'extrémité, en utilisant les formules (96) et (98) :

$$(K_{AB} + K_{AC} + K'_{AD} + K_{AE}) \omega_A + \lambda_{BA} K_{BA} \omega_B + \lambda_{CA} K_{CA} \omega_C + \lambda_{EA} K_{EA} \omega_E = m_{AB} + m_{AC} + m'_{AD} + m_{AE} \quad (105)$$

La méthode la plus rapide pour calculer les rotations, dès que leur nombre dépasse trois, est la **méthode des approximations successives**. Pour cela, on isole au premier membre de l'équation d'équilibre de chaque nœud la rotation de ce nœud ; en portant dans le second membre des valeurs approchées des rotations, on obtient au premier membre des valeurs plus approchées ; la convergence est rapide. On gagne du temps dans les approximations (**méthode de Gauss-Seidel**) en utilisant à chaque équation toutes les valeurs approchées déjà calculées ; autrement dit, après chaque équation, on modifie l'ensemble des valeurs approchées. On peut prendre pour ensemble de valeurs de départ des valeurs nulles des rotations.

Exemple numérique : soit à calculer le portique symétrique à deux étages, symétriquement chargé, donc à nœuds invariables, représenté sur la figure 75. Ce portique est encasté en E et E', et articulé en F et F' sur les fondations. Les poutres horizontales ont une inertie constante I, les poteaux extrêmes une inertie constante $\frac{1}{2}I$ et les poteaux intermédiaires une inertie constante $\frac{1}{4}I$. Nous n'avons, en raison de la symétrie, que quatre inconnues $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ et ω_D , car :

$$\omega_{A'} = -\omega_A, \quad \omega_{B'} = -\omega_B, \quad \omega_{C'} = -\omega_C, \quad \omega_{D'} = -\omega_D$$

Tous les facteurs de transmission sont égaux à $\frac{1}{2}$; les facteurs de rigidité des poutres aboutissant aux nœuds A, B, C et D sont :

$$\begin{aligned} K_{AC} &= K_{BD} = \frac{4EI}{10} = \frac{2EI}{5}, & K_{CC'} &= K_{DD'} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3} \\ K_{AB} &= K_{BE} = \frac{4EI}{2 \times 6} = \frac{EI}{3}, & K_{CD} &= \frac{4EI}{4 \times 6} = \frac{EI}{6} \\ K'_{DF} &= \frac{3EI}{4 \times 6} = \frac{EI}{8} \end{aligned}$$

Les couples m non nuls transmis aux nœuds par les poutres sont :

$$\begin{aligned} m_{AC} &= -12\,000 \frac{10^2}{12} = -100\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \\ m_{CA} &= 100\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \\ m_{BD} &= -100\,000 \frac{6 \times 4^2}{10^2} = -96\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \\ m_{DB} &= 100\,000 \frac{4 \times 6^2}{10^2} = 144\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \\ m_{DD'} &= -10\,000 \frac{12^2}{12} = -120\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

En posant, pour simplifier l'écriture :

$$EI \omega_A = z_A, \quad EI \omega_B = z_B, \quad EI \omega_C = z_C, \quad EI \omega_D = z_D$$

nous avons :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{1}{3} \left(z_A + \frac{1}{2} z_B \right) \\ M_{AC} &= -100\,000 - \frac{2}{5} \left(z_A + \frac{1}{2} z_C \right) \\ M_{BA} &= -\frac{1}{3} \left(z_B + \frac{1}{2} z_A \right) \\ M_{BD} &= -96\,000 - \frac{2}{5} \left(z_B + \frac{1}{2} z_D \right) \\ M_{BE} &= -\frac{1}{3} z_B \\ M_{CA} &= 100\,000 - \frac{2}{5} \left(z_C + \frac{1}{2} z_A \right) \\ M_{CD} &= -\frac{1}{6} \left(z_C + \frac{1}{2} z_D \right) \end{aligned}$$

$$M_{CC'} = -\frac{1}{6} z_C$$

$$M_{DB} = 144\,000 - \frac{2}{5} \left(z_D + \frac{1}{2} z_B \right)$$

$$M_{DC} = -\frac{1}{6} \left(z_D + \frac{1}{2} z_C \right)$$

$$M_{DE} = -\frac{1}{8} z_D$$

$$M_{D'D'} = -120\,000 - \frac{1}{6} z_D$$

Les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$22 z_A = -3\,000\,000 - 5 z_B - 6 z_C$$

$$32 z_B = -2\,880\,000 - 5 z_A - 6 z_D$$

$$22 z_C = 3\,000\,000 - 6 z_A - 2,5 z_D$$

$$51,5 z_D = 1\,440\,000 - 12 z_B - 5 z_C$$

Le tableau 2 donne les approximations successives. Nous trouvons ensuite :

$$M_{AB} = 68\,008,9 \text{ N} \cdot \text{m}, M_{AC} = -68\,008,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 51\,111,5 \text{ N} \cdot \text{m}, M_{BD} = -73\,921,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{BE} = 22\,809,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{CA} = 62\,094,9 \text{ N} \cdot \text{m}, M_{CD} = -32\,150,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{CC'} = -29\,944,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{DB} = 147\,100,9 \text{ N} \cdot \text{m}, M_{DC} = -19\,382,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{DE} = -3\,307,8 \text{ N} \cdot \text{m}, M_{D'D'} = -124\,410,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

On vérifie que les nœuds sont bien en équilibre.

Remarque : l'exemple numérique précédent montre la rapidité de la convergence. La méthode des rotations présente l'avantage qu'une erreur commise au cours d'une approximation est sans conséquence.

8.3.2 Méthode de relaxation ou de Hardy Cross

Considérons une structure à nœuds invariables et supposons que tous les nœuds soient verrouillés de manière à ne pas pouvoir tourner. Toutes les poutres sont alors encastrees, et les couples transmis aux nœuds par les poutres sont les couples m définis précédemment (§ 8.2).

Déverrouillons un seul nœud, A par exemple ; ce nœud va tourner d'un angle ω_A et prendre une nouvelle position d'équilibre, et seuls les couples transmis par les poutres aboutissant au nœud A sont modifiés. Déterminons ces modifications, ajoutons-les aux couples m , puis verrouillons le nœud A dans sa nouvelle position d'équilibre. Déverrouillons un autre nœud en procédant comme nous venons de le faire pour le nœud A, et en tenant compte des couples transmis aux nœuds par l'opération précédente. Continuons de la même façon en déverrouillant successivement tous les nœuds de la structure et en reprenant les nœuds déjà considérés, jusqu'à ce que le déverrouillage d'un nœud quelconque n'apporte plus de modification sensible aux couples transmis aux nœuds par les poutres. Nous aurons alors obtenu l'équilibre cherché, puisque nous pouvons déverrouiller tous les nœuds sans modifier l'équilibre.

Tableau 2 – Approximations successives : exemple numérique

	1	2	3	4
z_A	-136 363,6	-168 084,4	-169 574,2	-169 775,6
z_B	-68 693,2	-68 821,3	-68 492,8	-68 438,5
z_C	173 353,7	179 123,3	179 587,7	179 656,4
z_D	27 117,5	26 606,6	26 484,9	26 465,6
	5	6	7	8
z_A	-169 806,6	-169 811,5	-169 812,2	-169 812,3
z_B	-68 430,0	-68 428,7	-68 428,5	-68 428,5
z_C	179 667,1	179 668,7	179 669,0	179 669,0
z_D	26 462,6	26 462,1	26 462,1	26 462,1

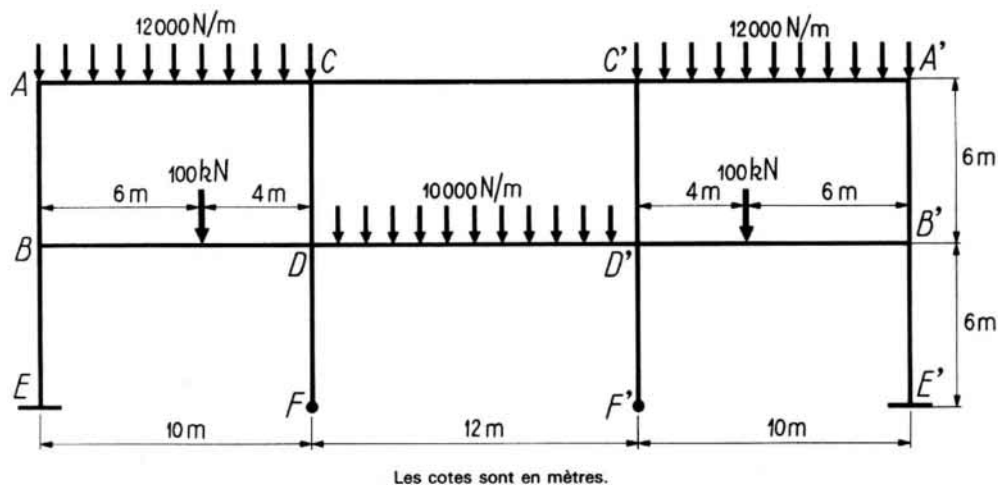


Figure 75 – Portique symétrique à deux étages

Étudions l'opération élémentaire de la méthode, c'est-à-dire le *déverrouillage* (ou *relaxation*) d'un nœud A auquel aboutissent les poutres AB, AC, AD et AE. Avant déverrouillage, les couples transmis aux nœuds ont pour valeurs m_{AB} , m_{AC} , m_{AD} , m_{AE} , m_{BA} , m_{CA} , m_{DA} et m_{EA} . Après déverrouillage, ces couples deviennent, en désignant par ω_A la rotation du nœud A :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= m_{AB} - K_{AB} \omega_A, & M_{BA} &= m_{BA} - \lambda_{AB} K_{AB} \omega_A \\ M_{AC} &= m_{AC} - K_{AC} \omega_A, & M_{CA} &= m_{CA} - \lambda_{AC} K_{AC} \omega_A \\ M_{AD} &= m_{AD} - K_{AD} \omega_A, & M_{DA} &= m_{DA} - \lambda_{AD} K_{AD} \omega_A \\ M_{AE} &= m_{AE} - K_{AE} \omega_A, & M_{EA} &= m_{EA} - \lambda_{AE} K_{AE} \omega_A \end{aligned}$$

L'équilibre du nœud A exige que l'on ait :

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} = 0$$

équation qui donne la valeur de ω_A :

$$\omega_A = \frac{m_{AB} + m_{AC} + m_{AD} + m_{AE}}{K_{AB} + K_{AC} + K_{AD} + K_{AE}} = - \frac{M_A}{K_A} \quad (106)$$

K_A désignant le facteur de rigidité du nœud A :

$$K_A = K_{AB} + K_{AC} + K_{AD} + K_{AE} \quad (107)$$

et M_A le couple non compensé au nœud A :

$$M_A = -(m_{AB} + m_{AC} + m_{AD} + m_{AE}) \quad (108)$$

Si nous définissons les *facteurs de répartition* des poutres aboutissant au nœud A par :

$$r_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_A}, \quad r_{AC} = \frac{K_{AC}}{K_A}, \quad r_{AD} = \frac{K_{AD}}{K_A}, \quad r_{AE} = \frac{K_{AE}}{K_A}$$

les variations Δm des couples transmis aux nœuds ont pour valeurs, compte tenu de l'expression (106) de ω_A :

$$\left. \begin{aligned} \Delta m_{AB} &= r_{AB} M_A, & \Delta m_{BA} &= \lambda_{AB} \Delta m_{AB} \\ \Delta m_{AC} &= r_{AC} M_A, & \Delta m_{CA} &= \lambda_{AC} \Delta m_{AC} \\ \Delta m_{AD} &= r_{AD} M_A, & \Delta m_{DA} &= \lambda_{AD} \Delta m_{AD} \\ \Delta m_{AE} &= r_{AE} M_A, & \Delta m_{EA} &= \lambda_{AE} \Delta m_{AE} \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Le calcul est donc extrêmement simple dès que l'on connaît les facteurs de répartition et les facteurs de transmission.

Si l'une des poutres, AD par exemple, est articulée sur le nœud D, il faut remplacer m_{AD} , K_{AD} et λ_{AD} respectivement par m'_{AD} , K'_{AD} et zéro.

En résumé, déverrouiller un nœud consiste à appliquer à ce nœud le couple non compensé, à répartir ce couple entre les poutres aboutissant au nœud, puis à transmettre les couples obtenus aux nœuds adjacents au nœud considéré.

Les résultats convergent rapidement ; trois ou quatre déverrouillages par nœud suffisent à obtenir les couples :

$$M_{AB} = m_{AB} + \sum \Delta m_{AB}$$

avec une erreur relative inférieure au millième. Il y a intérêt à déverrouiller d'abord les nœuds où le couple non compensé est le plus grand en valeur absolue.

Cette méthode est plus longue que celle des rotations, mais les calculs élémentaires sont plus simples. Elle présente l'inconvénient qu'une erreur n'est pas automatiquement corrigée, comme dans la méthode des rotations (§ 8.3.1).

Exemple numérique : soit à calculer la structure représentée sur la figure 76. La poutre horizontale a une inertie I constante, et les poteaux ont pour inertie $\frac{1}{2} I$. Donc, au nœud A :

$$K'_{AE} = \frac{3EI}{9} = \frac{EI}{3}, \quad r_{AE} = 0,4$$

$$K_{AB} = \frac{4EI}{16} = \frac{EI}{4}, \quad r_{AB} = 0,3$$

$$K_{AC} = \frac{4EI}{2 \times 8} = \frac{EI}{4}, \quad r_{AC} = 0,3$$

et au nœud B :

$$K_{BA} = \frac{4EI}{16} = \frac{EI}{4}, \quad r_{BA} = 0,5$$

$$K_{BD} = \frac{4EI}{2 \times 8} = \frac{EI}{4}, \quad r_{BD} = 0,5$$

Les couples m non nuls ont pour valeurs :

$$m'_{AE} = \frac{1}{8} 8\,000 \times 9^2 = 81\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_{AB} = -64\,000 \frac{6 \times 10^2}{16^2} = -150\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_{BA} = 64\,000 \frac{10 \times 6^2}{16^2} = 90\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Les calculs sont effectués dans le tableau 3.

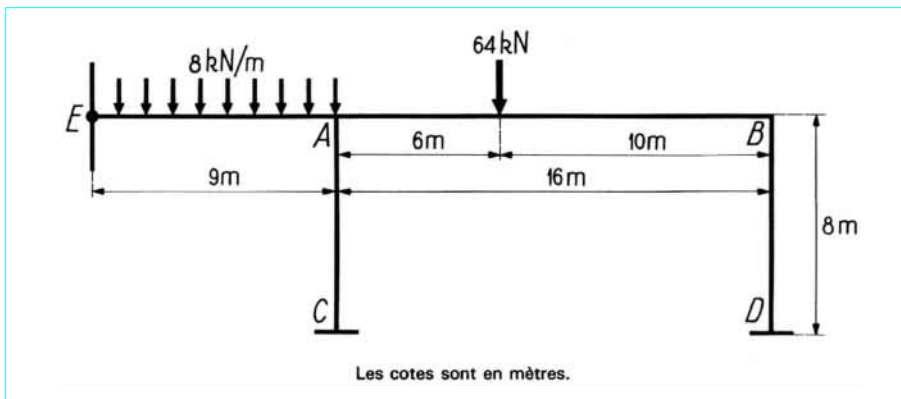


Figure 76 – Exemple de structure composée de poutres droites

Tableau 3 – Méthode de relaxation : exemple numérique
(valeurs données en newtons-mètres)

Couple non compensé	Nœud A			Nœud B	
	M_{AE}	M_{AB}	M_{AC}	M_{BA}	M_{BD}
$M_B = -90\,000$	81 000	-150 000 -22 500	0	90 000 -45 000	0 -45 000
$M_A = 91\,500$	81 000 36 600	-172 500 27 450	0 27 450	45 000 13 725	-45 000
$M_B = -13\,725$	117 600	-145 050 -3 431,25	27 450	58 725 -6 862,5	-45 000 -6 862,5
$M_A = 3\,431,25$	117 600 1 372,5	-148 481,25 1 029,38	27 450 1 029,38	51 862,5 514,69	-51 862,5
$M_B = -514,69$	118 972,5	-147 451,87 -128,67	28 479,38	52 377,19 -257,34	-51 862,5 -257,34
$M_A = 128,67$	118 972,5 51,47	-147 580,54 38,60	28 479,38 38,60	52 119,85 19,30	-52 119,84
$M_B = -19,30$	119 023,97	-147 541,94 -4,83	28 517,98	52 139,15 -9,65	-52 119,84 -9,65
$M_A = 4,83$	119 023,97 1,93	-147 546,77 1,45	28 517,98 1,45	52 129,50 0,72	-52 129,49
$M_B = -0,72$	119 025,90	-147 545,32 -0,18	28 519,43	52 130,22 -0,36	-52 129,49 -0,36
$M_A = 0,18$	119 025,90 0,07	-147 545,50 0,05	28 519,43 0,05	52 129,86 0,03	-52 129,85
$M_B = -0,03$	119 025,97	-147 545,45 -0,01	28 519,48	52 129,89 -0,01	-52 129,85 -0,01
Résultats	119 025,97	-147 545,46	28 519,48	52 129,88	-52 129,86

8.4 Structures à nœuds déplaçables

Pour calculer une structure Σ à nœuds déplaçables, on la transforme en une structure Σ_1 à nœuds invariables en lui adjoignant un certain nombre n de barres supplémentaires articulées, d'une part, sur les nœuds qu'il s'agit de fixer et, d'autre part, sur des points fixes.

Par exemple, dans le cas d'un portique à trois étages (figure 77), on s'oppose au déplacement latéral des étages au moyen des barres articulées AA' , BB' et CC' , les points A' , B' et C' étant fixes.

On calcule les efforts dans la structure Σ_1 et l'on déduit les efforts normaux dans les barres supplémentaires qui exercent ainsi sur la structure Σ des forces appelées *forces de fixation* ; par exemple, dans le cas de la figure 77 :

$$N_1 = N_{AA'}, \quad N_2 = N_{BB'}, \quad N_3 = N_{CC'}$$

Il est clair que les efforts dans la structure Σ s'obtiennent en ajoutant aux efforts calculés dans la structure Σ_1 les efforts dans la structure Σ soumise à des forces opposées aux forces de fixation, soit dans le cas de la figure 77 :

$$F_1 = -N_1, \quad F_2 = -N_2, \quad F_3 = -N_3$$

Illustrons la méthode de calcul de la structure Σ soumise aux forces opposées aux forces de fixation, dans le cas du portique à trois étages de la figure 77.

Si l'on impose à l'étage supérieur seul une translation δ_1 , nous pouvons calculer les efforts dans la structure à nœuds invariables de la figure 78a, donc en déduire les forces de fixation F_1^1 , F_2^1 et F_3^1 . Si l'on impose une translation δ_2 aux deux étages supérieurs, nous pouvons de même calculer les forces de fixation F_1^2 , F_2^2 et F_3^2 de la structure à nœuds invariables de la structure de la figure 78b. Enfin, en imposant une translation δ_3 aux trois étages, nous pouvons calculer les forces de fixation de la structure à nœuds invariables de la figure 78c.

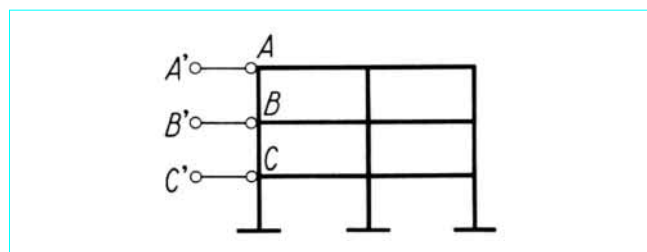


Figure 77 – Portique à trois étages

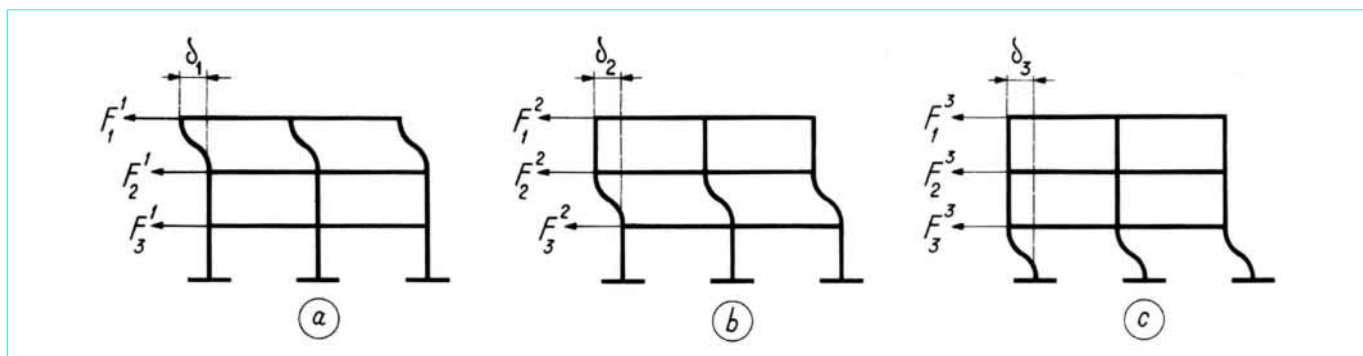


Figure 78 – Portique à trois étages : forces de fixation

Les efforts dans le portique soumis aux forces F_1 , F_2 et F_3 s'obtiennent en ajoutant les efforts dans les structures de la figure 78, multipliés respectivement par des coefficients k_1 , k_2 et k_3 définis par les équations :

$$\begin{aligned} k_1 F_1^1 + k_2 F_1^2 + k_3 F_1^3 &= F_1 \\ k_1 F_2^1 + k_2 F_2^2 + k_3 F_2^3 &= F_2 \\ k_1 F_3^1 + k_2 F_3^2 + k_3 F_3^3 &= F_3 \end{aligned}$$

Le calcul de la structure à laquelle on a simplement imposé des déplacements aux nœuds est identique au calcul des structures à nœuds invariables (§ 8.3), les couples transmis aux nœuds résultant des rotations d'ensemble Ω des poutres dues aux déplacements imposés. Dans le cas d'une poutre AB encastrée sur les nœuds d'extrémité, les couples transmis aux nœuds ont pour valeurs ($\omega_A = 0$, $\omega_B = 0$), d'après les formules (97) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{AB} &= K_{AB} (1 + \lambda_{AB}) \Omega_{AB} \\ \mathcal{M}_{BA} &= K_{BA} (1 + \lambda_{BA}) \Omega_{BA} \end{aligned} \quad (110)$$

et dans le cas d'une poutre AB encastrée sur le nœud A et articulée sur le nœud B , le couple transmis au nœud A a pour valeur ($\omega_A = 0$), d'après la formule (100) :

$$\mathcal{M}'_{AB} = K'_{AB} \Omega_{AB} \quad (111)$$

On peut donc appliquer, pour calculer les efforts dans la structure, soit la méthode des rotations (§ 8.3.1), soit la méthode de relaxation (§ 8.3.2). Toutes les formules données dans le paragraphe 8.3 sont encore exactes, à condition de remplacer m_{AB} , m_{AC} , m_{AD} et m_{AE} par \mathcal{M}_{AB} , \mathcal{M}_{AC} , \mathcal{M}_{AD} et \mathcal{M}_{AE} , et de remplacer m'_{AD} par \mathcal{M}'_{AD} .

8.5 Flexion des barres d'une structure réticulée à assemblages rigides

Considérons une structure réticulée isostatique ou hyperstatique à assemblages rigides, et soit F_{AB} l'effort dans une barre AB de cette structure, calculé en supposant les barres articulées aux nœuds ; le raccourcissement de la barre AB de longueur ℓ_{AB} et de section S_{AB} est :

$$\delta \ell_{AB} = \frac{F_{AB} \ell_{AB}}{ES_{AB}}$$

Nous savons calculer les déplacements des nœuds au moyen de la formule fondamentale (86) :

$$\delta \ell_{AB} = (\delta x_A - \delta x_B) \cos \theta_{AB} + (\delta y_A - \delta y_B) \sin \theta_{AB} \quad (112)$$

La flexion des barres de la structure à assemblages rigides ne modifie pas les déplacements des nœuds calculés en supposant les barres articulées, car la différence entre la longueur de la barre déformée par flexion et la corde joignant les extrémités de la barre est un infiniment petit d'ordre supérieur à la variation de longueur de la barre due à l'effort normal.

Donc, dans la structure à assemblages rigides, un nœud $A(x_A, y_A)$ se déplace de $\vec{AA'}$ ($\delta x_A, \delta y_A$) ; la rotation d'ensemble Ω_{AB} d'une barre AB se déduit de l'expression du produit vectoriel :

$$|\vec{AB} \wedge \vec{A'B'}| = AB \times A'B' \times \Omega_{AB}$$

Nous obtenons ainsi la relation :

$$\ell_{AB} \Omega_{AB} = (\delta x_A - \delta x_B) \sin \theta_{AB} - (\delta y_A - \delta y_B) \cos \theta_{AB} \quad (113)$$

qui permet de calculer les rotations d'ensemble Ω_{AB} . Cette relation ne change pas lorsqu'on permute A et B , car $\Omega_{AB} = \Omega_{BA}$ et $\theta_{BA} = \pi + \theta_{AB}$.

Les barres d'une structure réticulée étant de section constante et n'étant pas directement chargées, la première formule (103) donne pour valeur du couple exercé par la barre AB sur le nœud A :

$$M_{AB} = \frac{4EI_{AB}}{\ell_{AB}} \left(\frac{3}{2} \Omega_{AB} - \omega_A - \frac{1}{2} \omega_B \right) \quad (114)$$

On pourra donc, pour calculer les rotations inconnues, utiliser la méthode des rotations (§ 8.3.1). On peut également déterminer les couples M_{AB} au moyen de la méthode de relaxation de Hardy Cross (§ 8.3.2).

Remarque : les flexions des barres modifient les efforts normaux dans les barres supposées articulées aux nœuds. En effet, du fait de la flexion, chaque barre transmet à ses extrémités non seulement un couple et un effort normal, mais également un effort tranchant normal à l'axe de la barre. Ces modifications des efforts normaux, qui sont très faibles, peuvent toujours être négligées.

8.6 Poutres échelles. Calcul simplifié

Une poutre échelle, ou poutre *Vierendeel*, est constituée par deux membrures et des montants de forte inertie mutuellement encastrés (figure 79). Son fonctionnement est très différent de celui d'une poutre triangulée, puisque sa stabilité ne peut être assurée que par la flexion de ses éléments.

Une méthode de calcul simplifiée, souvent suffisante en pratique, consiste à supposer que les points de moment nul des membrures et des montants sont situés en leurs milieux C_i, D_i et E_i .

Si M et T sont le moment fléchissant et l'effort tranchant dans la section $C_i D_i$ de la poutre en double té équivalente, l'effort normal dans la membrure supérieure est M/h et l'effort normal dans la membrure inférieure est $-M/h$. Chaque membrure $A_i A_{i+1}$ et $B_i B_{i+1}$ supporte un effort tranchant $\frac{1}{2} T$ donnant lieu à un moment fléchissant variant de $-\frac{1}{4} T a$ en A_i et B_i , à $\frac{1}{4} T a$ en A_{i+1} et B_{i+1} (on suppose que la membrure supérieure et la membrure inférieure ont la même inertie).

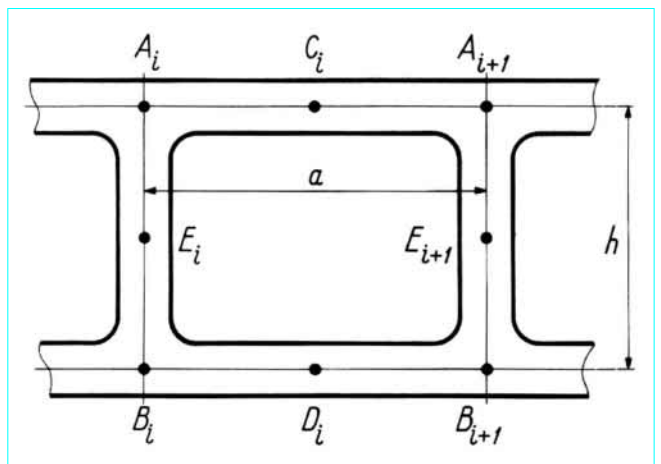


Figure 79 – Poutre échelle

Si T' est l'effort tranchant dans la section $A_i B_i$ de la poutre en double té équivalente, l'effort de glissement transmis par le montant $A_i B_i$ est $T'a/h$; le montant supporte donc un effort tranchant $T'a/h$ et un moment fléchissant variant de $\frac{1}{2} T'a$ en B_i à $-\frac{1}{2} T'a$ en A_i .

Déterminons le moment d'inertie I et la section d'âme S_1 de la poutre en double té équivalente. Désignons par J et S l'inertie et la section des membrures, et par J' l'inertie des montants, et supposons que le nombre des panneaux soit assez grand pour que M et T puissent être confondus avec leurs valeurs moyennes sur la longueur d'un panneau.

L'énergie de déformation des éléments d'un panneau comprend :

— l'énergie de déformation due aux efforts normaux dans les membrures :

$$W_1 = \frac{M^2 a}{ESh^2}$$

— l'énergie de déformation due aux moments fléchissants dans les membrures :

$$W_2 = 4 \int_0^{a/2} \left(\frac{Tx}{2} \right)^2 \frac{dx}{2EJ} = \frac{T^2 a^3}{48EJ}$$

— l'énergie de déformation due aux moments fléchissant dans le montant :

$$W_3 = 2 \int_0^{h/2} \left(\frac{Tax}{h} \right)^2 \frac{dx}{2EJ'} = \frac{T^2 ha^2}{24EJ'}$$

En identifiant la somme $W_1 + W_2 + W_3$ à :

$$W = \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GS_1} \right) a$$

nous obtenons les formules :

$$I = \frac{1}{2} Sh^2, \quad \frac{1}{GS_1} = \frac{a^2}{24EJ} + \frac{ah}{12EJ'} \quad (115)$$

I est donc le moment d'inertie de l'ensemble des deux membrures ; S_1 est toujours petit, de sorte que *dans une poutre échelle la déformation due à l'effort tranchant est du même ordre, sinon plus grande, que la déformation due au moment fléchissant.*

Résistance des matériaux

Structures élastiques à plan moyen

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Bibliographie

BERTRAND de FONTVIOLANT. – *Les méthodes modernes de la résistance des matériaux*. Gauthier-Villars (1920).

BERTRAND de FONTVIOLANT. – *Résistance des matériaux*. Baillière (1923).

BOUASSE (H.). – *Résistance des matériaux*. Delagrave (1920).

COURBON (J.). – *Application de la résistance des matériaux au calcul des ponts*. Dunod (1950).

COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome I, Dunod (1971).

PIGEAUD (G.). – *Résistance des matériaux et élasticité*. Gauthier-Villars (1928).

RESAL (J.). – *Résistance des matériaux*. Béranger (1898).

STÜSSI (F.). – *Statique appliquée et résistance des matériaux*. Tome 1 : *Systèmes isostatiques*. 344 p., 16 × 25 (1964) ; Tome 2 : *Systèmes hyperstatiques*. 320 p., 16 × 25, Dunod (1957).

TIMOSHENKO (S.). – *Résistance des matériaux*. Vol. 1 : *Théorie élémentaire et problèmes*. 236 p., 16 × 24, 359 fig., 20 tabl. (1963) ; vol. 2 : *Théorie développée et problèmes*. 480 p., 16 × 24, 309 fig., Béranger (1954).

TIMOSHENKO (S.) et YOUNG (D.H.). – *Théorie des constructions*. 566 p., 16 × 24, 477 fig., Béranger (1961).