Exercice 1 : (9 points) Production industrielle et contrôle de qualité

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1. Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2. On note A l'événement :

" une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse"

On note de même B l'événement :

" une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse ".

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont

p(A) = 0,03 et p(B) = 0,07 et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements

suivants :

E_1 : " les deux pièces du module sont défectueuses " ,

E_2 : " au moins une des deux pièces du module est défectueuses " ,

E_3 : " aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse " ,

3. Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au **2.**

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est 0,902.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale, déterminer les paramètres de cette loi.

b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

4. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale : de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma / \sqrt{60}$ avec $\sigma = 0{,}084$.

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près de la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon est $\overline{x}$ = 4,012.

a. à partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b. Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.

c. On considère l'affirmation suivante :

" la moyenne μ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ".

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Correction exercice 1 :

1.

L suit une loi normale N(300,3) donc la variable aléatoire T définie par :

$$T = \frac{L - 300}{3}$$

suit une loi normale centrée réduite N(0,1) il vient :

$$p(293{,}5 \leq L \leq 306{,}5) = p(\frac{293{,}5 - 300}{3} \leq \frac{L - 300}{3} \leq \frac{306{,}5 - 300}{3})$$

$$= p(\frac{293{,}5 - 300}{3} \leq \frac{L - 300}{3} \leq \frac{306{,}5 - 300}{3}) = p(\frac{-6{,}5}{3} \leq \frac{L - 300}{3} \leq \frac{6{,}5}{3}) = 2\Pi\left(\frac{6{,}5}{3}\right) - 1$$

(par symétrie de la loi N(0 ; 1))

su la table on lit :

$$\Pi\left(\frac{6{,}5}{3}\right) = \Pi\left(2{,}16\right) = 0{,}9846$$

d'où :

$$p(293{,}5 \leq L \leq 306{,}5) \approx 0{,}97$$

La probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne est de 0,97.

2.

On remarque que $E_1 = A \cap B$,

$p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ car A et B sont deux évènements indépendants

$p(E_1) = 0{,}03 \times 0{,}07 = 0{,}0021$

On remarque que $E_2 = A \cup B$,

$p(E_2) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}03 + 0{,}07 - 0{,}0021 = 0{,}0979$

E_3 est l'évènement contraire de E_2 donc :

$p(E_3) = 1 - p(E_2) = 1 - 0{,}0979 = 0{,}9021$

3.

a. Les épreuves sont indépendantes, l'issue de chaque épreuve est un succès (module non défectueux : aucune pièce défectueuse) ou un échec (module défectueux : au moins une pièce défectueuse).

Il y a n = 10 épreuves donc la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 suit une loi binomiale B(10 , 0,902) .

b. On cherche à calculer $p(X \geq 9)$

$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$

$$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$$

$$= C_{10}^{9} 0{,}902^{9} \times 0{,}098^{1} + C_{10}^{10} 0{,}902^{10} \times 0{,}098^{0}$$

$$= 10 \times 0{,}902^{9} \times 0{,}098 + 0{,}902^{10}$$

$$= 0{,}3873 + 0{,}3565 \approx 0{,}744$$

La probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3 est de 0,744.

4.

a. Une estimation ponctuelle de la moyenne µ des diamètres des pièces P_2 produites pendant cette journée est donc 4,012 .

b. On cherche le nombre réel positif a tel que $p(\overline{X} + a \leq \mu \leq \overline{X} + a) = 0{,}95$.

$\overline{X}$ suit une loi normale N(µ ; $\sigma / \sqrt{60}$) donc la variable aléatoire $\overline{T}$ définie par :

$$\overline{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{60}}}$$

suit la loi normale centrée réduite on a donc :

$$p(-t \leq \overline{T} \leq t) = 2\Pi(t) - 1$$

soit :

$$p(-t \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{60}}} \leq t) = 2\Pi(t) - 1 \Leftrightarrow$$

$$p(-t\,\frac{\sigma}{\sqrt{60}} \leq \overline{X} - \mu \leq t\,\frac{\sigma}{\sqrt{60}}) = 2\Pi(t) - 1 \Leftrightarrow$$

$$p(\overline{X} - t\,\frac{\sigma}{\sqrt{60}} \leq \mu \leq \overline{X} + t\,\frac{\sigma}{\sqrt{60}}) = 2\Pi(t) - 1$$

on cherche t tel que 2 Π (t) - 1 = 0,95 soit Π (t) = 0,975 soit t = 1,96
(lecture sur la table de la loi normale)
en prenant $\overline{x}$ = 4,012 , σ= 0,084, et t = 1,96 on en déduit que :
[3,991 ; 4,033] est un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.

c. On considère l’affirmation suivante :
" la moyenne μ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ".
On ne peut pas en déduire que ce qui précède est vraie, il n'y a pas de certitude.

Exercice 2

Problème électoral

Un candidat A a obtenu 55 % des suffrages exprimés à une élection. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n prélevé au hasard et avec remise dans l'ensemble des suffrages exprimés associe le pourcentage de voix obtenu par le candidat A dans cet échantillon.

1) Calculer la probabilité à 0,001 près d'avoir dans un échantillon aléatoire non exhaustif de taille 100 prélevé parmi les suffrages exprimés, moins de 50 % de voix pour le candidat A.
2) Reprendre la question précédente avec un échantillon de taille 2000.

Exercice 3

Problème électoral (bis)

Un candidat B a obtenu 49 % des suffrages exprimés à une élection. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n prélevé au hasard et avec remise dans l'ensemble des suffrages exprimés associe le pourcentage de voix obtenu par le candidat B dans cet échantillon.

1) Calculer la probabilité à 0,001 près d'avoir dans un échantillon aléatoire non exhaustif de taille 100 prélevé parmi les suffrages exprimés, plus de 50 % de voix pour le candidat B.
2) Reprendre la question précédente avec N = 2000.
3) Reprendre la question précédente avec N = 10 000.
4) Reprendre la question précédente avec N = 25 000.

Corrigé de l'exercice 2 : Problème électoral

1)

On sait d'après le théorème de la limite centrée que F suit la loi normale de paramètres p et $\sqrt{(p\frac{(1-p)}{n})}$ avec p = 0,55.

Dans ce cas, F suit donc la loi N(0,55 ; 0,05). On doit calculer la probabilité que F soit strictement supérieure à 0,5 c'est-à-dire p(F < 0,5).

On passe donc à la variable aléatoire T = (F - 0,55) / 0,05 qui suit la loi N(0 ; 1). On obtient donc : p(F < 0,5) = p(T < -1) = 1 - p(T < 1) = 1 - 0,8413 = 0.1587.

2)

La variable aléatoire F suit cette fois la loi normale N(0,55 ; 0.011) et U = (F - 0,55) / 0,011) suit la loi N(0 ; 1). On obtient cette fois : p(F < 0,5) = p(T < -4,54) = 1 - 0,999 997 = 0,000 003.

Corrigé de l'exercice 3 : Problème électoral (bis)

1)

On sait d'après le théorème de la limite centrée que F suit la loi normale de paramètres p et $\sqrt{(p\frac{(1-p)}{n})}$ avec p = 0,55.

Dans ce cas, F suit donc la loi N(0,49 ; 0,05). On doit calculer la probabilité que F soit strictement supérieure à 0,5 c'est-à-dire p(F > 0,5).

On passe donc à la variable aléatoire T = (F - 0,49) / 0,05 qui suit la loi N(0 ; 1). On obtient donc :

p(F > 0,5) = p(T > 0,2) = 1 - p(T < 0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207.

2)

La variable aléatoire F suit cette fois la loi normale N (0,49 ; 0.011) et U = (F - 0,49) / 0,011) suit la loi N(0 ; 1). On obtient cette fois : p(F > 0,5) = p(T > 0,91) = 1 - p(T < 0,91) = 1 - 0,8186 = 0,1814.

3)

La variable F suit cette fois la loi normale N(0,49 ; 0.005) et U = (F - 0,49) / 0,005) suit la loi N(0 ; 1). On obtient cette fois :

p(F > 0,5) = p(T > 2) = 1 - p(T < 2) = 1 - 0,9772) = 0,0228.

4)

La variable F suit cette fois la loi normale N(0,49 ; 0.0031) et U = (F - 0,49) / 0,0031) suit la loi N(0 ; 1). On obtient cette fois :

p(F > 0,5) = p(T > 3,23) = 1 - p(T < 3,23) = 1 - 0,999 31 = 0,000 69.

EXERCICE 4

Dans la fabrication de comprimés effervescents, il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant:

Classes	[1610;1615[	[1615;1620[	[1620;1625[	[1625;1630[	[1630;1635[
Effectifs	7	8	42	75	18

1) En convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, calculer une valeur approchée à 10-2 près de la moyenne m et de l'écart type s de cet échantillon.

2) A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, assimilé à un échantillon non exhaustif, donner les estimations ponctuelles $\hat{M}$ et $\hat{\sigma}$ de la moyenne M et de l'écart type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population (formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande).

Dans la question suivante on prendra pour valeur de σ son estimation $\hat{\sigma}$.

3) On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n = 150 associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.

a) $\overline{X}$ peut-elle être approchée par une loi classique ? Si oui, laquelle ? Donner ses paramètres?

b) Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95 %

Calculer l'amplitude de cet intervalle.

CORRECTION

1°) Notons $\overline{x}_e$ et σ_e respectivement la moyenne et l'écart-type de l'échantillon. Un calcul à la machine donne :

$\bar{x}_e = 1625{,}47\ mg$ et $\sigma_e = 4{,}66\ mg$

2°) On sait que l'estimation ponctuelle $\hat{m}$ de la moyenne m de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population des comprimés est donnée par la moyenne de l'échantillon. Donc :

$\hat{m} = \bar{x}_e = 1625{,}47\ mg$

On sait aussi qu'une estimation ponctuelle $\hat{\sigma}$ de l'écart-type de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population des comprimés est donnée à partir de l'écart-type de l'échantillon à l'aide de la formule $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_e$ où n représente l'effectif de l'échantillon, c'est-à-dire ici $n = 150$ (on obtient directement le résultat numérique avec la touche σ_{n-1} de la calculatrice).Donc $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{150}{150-1}} \times 4{,}66$, soit

$\hat{\sigma} = 4{,}67\ mg$

3)

a) D'après le théorème de la limite centrée, on sait que la loi de $\bar{X}$ peut être approchée par une loi normale de moyenne $\hat{m} = \bar{x}_e = 1625{,}47\ mg$ et d'écart-type $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

b) On sait alors qu'un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m est :

$$\left[\bar{x}_e - 1{,}96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + 1{,}96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Numériquement : $\left[1625{,}47 - 1{,}96\frac{4{,}67}{\sqrt{150}}\ ;\ 1625{,}47 + 1{,}96\frac{4{,}67}{\sqrt{150}}\right]$, soit

$[1624{,}72\ ;\ 1626{,}22]$

L'amplitude de cet intervalle est 1626,22-1624,72 = 1,5 mg.

EXERCICE 5

Première partie.

Dans un laboratoire on mesure le coefficient X d'amplification d'un préamplificateur. On a relevé les douze mesures suivantes pour X :

$x_1 = 2{,}51 \quad x_2 = 2{,}59 \quad x_3 = 2{,}54 \quad x_4 = 2{,}48 \quad x_5 = 2{,}50 \quad x_6 = 2{,}49$
$x_7 = 2{,}55 \quad x_8 = 2{,}56 \quad x_9 = 2{,}59 \quad x_{10} = 2{,}55 \quad x_{11} = 2{,}60 \quad x_{12} = 2{,}54$

1°) Déterminer à la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près de la moyenne et de l'écart-type de cette série de mesures.

2°) On suppose que les 12 mesures précédentes sont les réalisations de 12 variables aléatoires indépendantes et de même loi : la loi normale de moyenne μ, appelée coefficient d'amplification moyen, et d'écart-type σ .

a) Donner, à partir de ces mesures une estimation du coefficient d'amplification moyen.

b) On suppose que $\sigma = 0{,}05$. Donner un intervalle de confiance au risque de 5¨% pour ce coefficient.

Deuxième partie.

On note Y la variable aléatoire prenant pour valeurs les mesures du coefficient d'amplification du préamplificateur.

On admet que Y suit une loi normale de moyenne 2,54 et d'écart-type 0,05.

Un technicien mesure ce coefficient. Quelle est la probabilité pour que sa mesure soit :

1°) supérieure à 2,6 ?

2°) comprise entre 2,45 et 2,60 ?

CORRECTION

Première Partie.

1°) La calculatrice donne une valeur approchée à 10^{-3} près de la moyenne. On trouve :

$\bar{x} = 2{,}541$

La touche σ_n de la calculatrice donne l'écart-type de l'échantillon. On trouve alors :

$\sigma_e = 0{,}038$

2°)

a) Les 12 mesures réalisées sont les réalisations de 12 variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_{12}$ de même loi. Dans ce cas, la loi faible des grands nombres dit que l'on peut approcher μ par la moyenne arithmétique issue d'une étude statistique. Ainsi le coefficient d'amplification moyen sera estimé par 2,541 et l'on prendra cette valeur pour μ :

$\mu = 2{,}541$

b) On sait que au risque de 5%, l'intervalle de confiance du coefficient d'amplification moyen est donné par :

$$\left[\bar{x}_e - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

où $\bar{x}_e$ est la moyenne déterminée sur l'échantillon. On obtient donc,

$$\left[\bar{x}_e - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[2{,}541 - 1{,}96\frac{0{,}05}{\sqrt{12}}, 2{,}541 + 1{,}96\frac{0{,}05}{\sqrt{12}}\right]$$

l'intervalle de confiance cherché est donc :

$$[2{,}512\,;\,2{,}569]$$

Deuxième partie.

1°) Si Y suit une loi normale de moyenne $\bar{Y}$ et d'écart-type $\sigma(Y)$, alors si on pose $T = \frac{Y - \bar{Y}}{\sigma(Y)}$, la variable aléatoire T suit une loi normale centrée réduite N (0,1). La fonction de répartition de la loi de T est noté Π et est tabulée (voir formulaire). Nous avons alors :

$$P(Y > 2{,}6) = P\left(\frac{Y - 2{,}54}{0{,}05} > \frac{2{,}6 - 2{,}54}{0{,}05}\right) = P(T > 1{,}2)$$

$$P(Y > 2{,}6) = 1 - P(T \leq 2{,}6) = 1 - \Pi(2{,}6)$$

La table donne :

$$P(Y > 2{,}6) = 1 - \Pi(2{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

2°) On utilise toujours la loi normale centrée réduite.

$$P(2{,}45 < Y < 2{,}6) = P\left(\frac{2{,}45 - 2{,}54}{0{,}05} < \frac{Y - 2{,}54}{0{,}05} < \frac{2{,}6 - 2{,}54}{0{,}05}\right) = P(-1{,}8 < T < 1{,}2)$$

$$P(2{,}45 < Y < 2{,}6) = P(-1{,}8 < T < 1{,}2) = \Pi(1{,}2) - \Pi(-1{,}8)$$
$$P(2{,}45 < Y < 2{,}6) = \Pi(1{,}2) - (1 - \Pi(1{,}8))$$

Soit,

$$P(2{,}45 < Y < 2{,}6) = \Pi(1{,}2) - (1 - \Pi(1{,}8)) = 0{,}8849 + 0{,}9641 - 1$$

finalement :

$$P(2{,}45 < Y < 2{,}6) = 0{,}849$$

EXERC1CE 6

Étude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes).

On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne m et d'écart type = .

PARTIE A

Dans cette partie, on suppose que m = 72,40 et = = 0,08.

1) Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche):

a) » X>72,45 «

b) » X <72,25 «

c) « 72,30 < X <72,50 « .

2) Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle [m - h, m + h] soit égale à 0,989.

PARTIE B

Dans cette partie, on suppose que m et = sont inconnus.

On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet:

Masse (g)72,2072,2472,2672,3072,3672,3972,4272,4872,5072,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

1°) Calculer la moyenne et l'écart type de cet échantillon.

2°) En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart type a de la variable X.

3°) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart type la valeur estimée en 2°), donner un intervalle confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

4°) L'écart type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question, on prend donc = = 0,08

a) Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

b) Déterminer a (à l'unité près) pour que au seuil de , %, un intervalle de confiance de m soit [72,31 ; 72,43].

CORRECTION

PARTIE A

1°)

Rappelons que si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ, la variable aléatoire $T = \frac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite de moyenne 0 et d'écart-type 1. On dit que T suit une loi normale q (0,1) dont la fonction de répartition Π est tabulée.

a)

$$(X > 72{,}45) \Leftrightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{72{,}45-72{,}40}{0{,}08}\right) \Leftrightarrow (T > 0{,}625)$$

donc

$$P(X > 72{,}45) = P(T > 0{,}625) = 1 - P(T \leq 0{,}625)$$

$$P(X > 72{,}45) = 1 - \Pi(0{,}625)$$

La table donne : $\Pi(0{,}620) = 0{,}7324 \text{ et } \Pi(0{,}630) = 0{,}7357$. Une interpolation linéaire conduit à $\Pi(0{,}625) = 0{,}734$. On en déduit : $P(X > 72{,}45) = 1 - 0{,}734$.

Soit

$$P(X > 72{,}45) = 0{,}266$$

b)

$$(X < 72{,}25) \Leftrightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{72{,}25-72{,}40}{0{,}08}\right) \Leftrightarrow (T < -1{,}875)$$

donc

$$P(X < 72{,}45) = P(T < -1{,}875) = \Pi(-1{,}875) = 1 - \Pi(1{,}875)$$

La table donne : $\Pi(1{,}87) = 0{,}9693 \text{ et } \Pi(1{,}88) = 0{,}9699$. Une interpolation linéaire conduit à $\Pi(1{,}875) = 0{,}9696$. On en déduit $P(X < 72{,}25) = 1 - 0{,}9696$.

Soit

$$P(X < 72{,}25) = 0{,}030$$

c)

$$(72{,}30 < X < 72{,}50) \Leftrightarrow \left(\frac{72{,}30-72{,}40}{0{,}08} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{72{,}50-72{,}40}{0{,}08}\right) \Leftrightarrow (-1{,}25 < T < +1{,}25)$$

donc

$$P(72{,}30 < X < 72{,}50) = P(-1{,}25 < T < +1{,}25) = \Pi(1{,}25) - \Pi(-1{,}25)$$

$$P(72{,}30 < X < 72{,}50) = \Pi(1{,}25) - [1 - \Pi(1{,}25)] = 2\Pi(1{,}25) - 1$$

Or $\Pi(1{,}25) = 0{,}8944$ donc

$$P(72{,}30 < X < 72{,}50) = 0{,}789$$

2°) La traduction de l'énoncé conduit à :

$$P(m-h < X < m+h) = 0{,}989 \Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0{,}08} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{h}{0{,}08}\right) = 0{,}989$$
$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{0{,}08} < T < +\frac{h}{0{,}08}\right) = 0{,}989$$

Soit

$$P(m-h < X < m+h) = 0{,}989 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}08}\right) - \Pi\left(-\frac{h}{0{,}08}\right) = 0{,}989$$

$$P(m-h < X < m+h) = 0{,}989 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}08}\right) - \left[1 - \Pi\left(-\frac{h}{0{,}08}\right)\right] = 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}08}\right) - 1 = 0{,}989$$

on obtient :

$$\Pi\left(\frac{h}{0{,}08}\right) = 0{,}9945$$

La lecture de la table donne

$$\frac{h}{0{,}08} = 2{,}54$$

soit

$$h = 0{,}20$$

PARTIE B

1°) Notons $\bar{x}_e$ et σ_e respectivement la moyenne et l'écart-type de l'échantillon. Un calcul à la machine donne :

$$\bar{x}_e = 72{,}37 \quad et \quad \sigma_e = 0{,}11$$

2°) On sait que l'estimation ponctuelle $\hat{m}$ de la moyenne m des pesées est donnée par la moyenne de l'échantillon. Donc :

$$\hat{m} = \bar{x}_e = 72{,}37$$

On sait aussi qu'une estimation ponctuelle $\hat{\sigma}$ de l'écart-type des pesées est donnée à partir de l'écart-type de l'échantillon à l'aide de la formule $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_e$ où n représente l'effectif de l'échantillon, c'est-à-dire ici $n = 10$ (on obtient directement le résultat numérique avec la touche σ_{n-1} de la calculatrice).Donc $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{10}{10-1}} \times 0{,}11$, soit

$$\hat{\sigma} = 0{,}12$$

3) On sait qu'un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m est :

$$\left[\bar{x}_e - 1{,}96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + 1{,}96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Numériquement : $\left[72{,}37 - 1{,}96\frac{0{,}12}{\sqrt{10}}, 72{,}37 + 1{,}96\frac{0{,}12}{\sqrt{10}}\right]$, soit

$$[72{,}30\,;\,72{,}44]$$

4°)

a) La formule donnée à la question 3°) reste valable en remplaçant $\hat{\sigma}$ par $\sigma = 0{,}08$. On obtient $\left[72{,}37 - 1{,}96\frac{0{,}08}{\sqrt{10}}, 72{,}37 + 1{,}96\frac{0{,}08}{\sqrt{10}}\right]$, soit

$$[72{,}32\,;\,72{,}42]$$

b) On sait que l'intervalle de confiance de la moyenne des pesées au seuil α est donné par $\left[\bar{x}_e - t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où t_α est tel que $P(-t_\alpha < T < +t_\alpha) = 1 - \alpha$ où T est une variable aléatoire qui suit une loi normale q (0,1). En identifiant l'intervalle de confiance théorique avec celui donné dans l'énoncé, on obtient :

$$\bar{x}_e - t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72{,}31 \Leftrightarrow 72{,}37 - t_\alpha\frac{0{,}08}{\sqrt{10}} = 72{,}31 \Leftrightarrow t_\alpha = 2{,}37$$

On aurait obtenu le même résultat en faisant le calcul avec la borne supérieure de l'intervalle. Nous devons donc avoir :

$$P(-t_\alpha < T < +t_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(-2{,}37 < T < +2{,}37) = 1 - \alpha$$
$$P(-t_\alpha < T < +t_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Pi(2{,}37) - \Pi(-2{,}37) = 1 - \alpha$$
$$P(-t_\alpha < T < +t_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Pi(2{,}37) - [1 - \Pi(2{,}37)] = 1 - \alpha$$
$$P(-t_\alpha < T < +t_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Pi(2{,}37) = \frac{2 - \alpha}{2}$$

La table donne $\Pi(2{,}37) = 0{,}9911$, on en déduit $\alpha = 2 - (2 \times 0{,}9911) = 0{,}0178$. A l'unité près le risque est

$$\alpha = 2\ \%$$