

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Caractérisation du bidisque symétrisé</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et notations . . . . .	3
1.2 Autres propriétés géométriques . . . . .	9
1.3 Les problèmes de Nevanlinna-Pick . . . . .	13
<b>2 Systèmes de Schwarz-Pick</b>	<b>15</b>
2.1 Motivation . . . . .	15
2.2 Un cas plus simple : le disque unité . . . . .	16
2.3 Pseudodistance de Carathéodory . . . . .	21
2.4 Pseudodistance de Kobayashi . . . . .	27
<b>3 Calcul de la pseudodistance de Carathéodory</b>	<b>33</b>
3.1 Calcul fonctionnel pour un d-uplet matriciel . . . . .	33
3.2 À propos des domaines spectraux . . . . .	41
3.3 Pseudodistance de Carathéodory sur le bidisque symétrisé . . . . .	46
3.4 La forme infinitésimale de Carathéodory . . . . .	51
<b>4 Calcul de la pseudodistance de Kobayashi</b>	<b>59</b>
4.1 Problème de Nevanlinna-Pick classique . . . . .	59
4.2 Premier critère d'interpolation dans le bidisque symétrisé . . . . .	63
4.3 Simplification du problème . . . . .	71
4.4 Existence d'une solution extrémale de Kobayashi . . . . .	78
4.5 Conséquences . . . . .	87
<b>Conclusion</b>	<b>91</b>
<b>A Notation</b>	<b>93</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>



# Liste des figures

1.1	1000 couples de $(-1, 1)^2$ projetés dans $G$ . . . . .	4
1.2	$G \cap \mathbb{R}^2$ et la variété royale. . . . .	10
1.3	Un domaine étoilé . . . . .	11
2.1	La distance pseudohyperbolique sur $\mathbb{D}$ . . . . .	19
2.2	La fonction $\operatorname{arctanh}$ . . . . .	20
2.3	Le <i>pull-back</i> de la métrique $\rho_{\mathbb{D}}$ par $f$ . . . . .	22
2.4	Le <i>push-forward</i> de la métrique $\rho_{\mathbb{D}}$ par $f$ . . . . .	27



Le but des mathématiques est  
uniquement de faire apparaître la  
vérité.

---

Yoko Ogawa, *La formule préférée*  
*du professeur*



# Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements vont aux professeurs Line Baribeau et Alexandre Girouard, pour m'avoir donné la chance de travailler sous leur direction. Je remercie en particulier madame Baribeau pour m'avoir proposé un projet de maîtrise passionnant, pour ses commentaires judicieux, ses relectures méticuleuses et pour tout ce qu'elle m'a appris dans mes recherches et dans le domaine des mathématiques en général. Je tiens également à remercier encore une fois monsieur Girouard pour ses précieux conseils, son ouverture et sa disponibilité exemplaire ainsi que son enthousiasme certain, tant dans les mathématiques que dans son enseignement.

Je remercie aussi le Fonds de recherche du Québec (FQRNT) et le département de mathématiques pour m'avoir apporté un soutien financier durant ma maîtrise. À cet effet, je tiens à personnellement remercier Frédéric Gourdeau et Emmanuelle Reny-Nolin qui m'ont offert de nombreuses opportunités de travailler dans le domaine des mathématiques. Ce furent des premières expériences mémorables.

J'éprouve également beaucoup de reconnaissance envers mes proches pour leur présence et leur support. À ce titre, je remercie plus particulièrement mon copain Philippe : « Rien ne saurait rendre le charme dangereux de [ce regard inattendu] qui éclaire vaguement tout à coup d'adorables ténèbres et qui se compose de toute l'innocence du présent et de toute la passion de l'avenir<sup>1</sup> ». Enfin, je souhaite remercier spécialement Florence, sans qui je n'aurais jamais appris à « vivre, pour de vrai, bille en tête<sup>2</sup> ».

---

1. Victor Hugo, *Les misérables*, 1862.

2. Alexandre Jardin, *Bille en tête*, 1986.



# Introduction

Le problème de Nevanlinna-Pick classique s'énonce comme suit : pour un ensemble de  $n$  points distincts  $z_j$  et  $n$  valeurs cibles  $w_j$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$ , on recherche une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\overline{\mathbb{D}}$  qui envoie les  $z_j$  vers les  $w_j$ . Une généralisation est le problème de Nevanlinna-Pick spectral (NPS), où les valeurs cibles sont des matrices de rayon spectral inférieur à 1. La recherche d'une solution au NPS a amorcé, il y a quelques années, une étude approfondie de nouveaux objets géométriques. Il a été démontré qu'un cas particulier pouvait être résolu en considérant plutôt un problème d'interpolation sur le bidisque symétrisé, un domaine de l'espace à deux variables complexes. Ce dernier, bien que ni convexe ni lisse, possède une structure simple, caractérisée en termes d'un système de coordonnées unique et intuitif.

L'étude géométrique du bidisque symétrisé mène aux pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi. Cependant, le calcul de ces pseudodistances requiert en général la résolution d'un problème d'optimisation sur un ensemble de fonctions holomorphes et demeure un problème difficile. Dans une série d'articles, Agler et Young sont parvenus à identifier une fonction extrémale pour la pseudodistance de Carathéodory et ont démontré que la pseudodistance de Kobayashi y est égale. L'objet de cet ouvrage est de regrouper et synthétiser les recherches autour de la résolution de ce problème.

Tel que mentionné précédemment, le bidisque symétrisé est un domaine qui possède une géométrie riche et qui joue un rôle clé dans la résolution du problème de NPS. Les systèmes de Schwarz-Pick sont de puissants outils mathématiques qui permettent d'approfondir l'étude de la géométrie des domaines de l'espace à plusieurs variables complexes. Plus particulièrement, les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi forment respectivement le plus grand et le plus petit système. Dans le cas du bidisque symétrisé, il est possible de calculer explicitement la pseudodistance de Carathéodory par le biais de la théorie des opérateurs. Ce sont les domaines spectraux de Von Neumann qui permettent de lier la pseudodistance de Carathéodory entre deux points  $z$  et  $w$  aux couples de matrices de spectre conjoint  $\{z, w\}$ . Le calcul de la pseudodistance de Kobayashi, revient plutôt à un problème d'interpolation du disque unité avec des valeurs cibles dans le bidisque symétrisé, résolu à l'aide du théorème de Nevanlinna-Pick classique.



# Chapitre 1

## Caractérisation du bidisque symétrisé

La recherche d'une solution au problème de Nevanlinna-Pick spectral (NPS) a amorcé, il y a quelques années, une étude approfondie de nouveaux objets géométriques. Dans une série d'articles [AY99, AY00, AY03b], Agler et Young ont démontré qu'un cas particulier pouvait être résolu en considérant plutôt un problème d'interpolation sur le bidisque symétrisé, un domaine de l'espace à deux variables complexes. Le but de ce premier chapitre est d'introduire et de bien définir le bidisque symétrisé. Nous établirons tout d'abord certaines définitions et notations à propos d'ensembles classiques du plan complexe, pour ensuite énoncer et démontrer différentes caractérisations du bidisque symétrisé lui-même. Ensuite, nous présenterons certaines propriétés géométriques intéressantes de cet ensemble et enfin, nous discuterons brièvement de son rôle dans la résolution d'un cas particulier du NPS.

### 1.1 Définitions et notations

Commençons par définir quelques ensembles du plan complexe  $\mathbb{C}$  plus élémentaires. La notation établie ici sera constamment réutilisée dans la suite du présent ouvrage. L'ensemble  $\mathbb{D}$  est le **disque unité complexe**

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Le bord de cet ensemble, soit le **cercle unité**  $\mathbb{T}$  est donné par

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Le disque unité fermé, c'est-à-dire l'ensemble  $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ , sera noté  $\overline{\mathbb{D}}$ . En général, l'expression  $\overline{\Omega}$  dénotera la **fermeture de**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  un domaine quelconque de l'espace à  $d$  variables complexes. Ici, un domaine sera un ensemble ouvert et connexe. Remarquons immédiatement que lorsqu'il s'agit d'un élément  $z \in \mathbb{C}^d$ ,  $\bar{z}$  dénotera plutôt le conjugué de  $z$ .

Dans l'espace à deux variables complexes  $\mathbb{C}^2$ , le disque unité se généralise par deux ensembles

différents, c'est-à-dire la **boule**  $\mathcal{B}^2$  et le **bidisque**  $\mathbb{D}^2$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^2 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} \\ \mathbb{D}^2 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}_2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.\end{aligned}$$

Alors que dans le plan complexe le théorème de l'application conforme de Riemann garantit que tous les domaines simplement connexes, hormis le plan lui-même, sont conformément équivalents au disque unité, dans l'espace à deux variables complexes, la boule et le bidisque ne sont pas conformément équivalents (voir [Kra04, Chapitre 5.2]). Ce fait illustre bien comment la situation se complique avec des ensembles de dimension supérieure. Pour cette raison, il sera fréquent dans l'ouvrage présent, de ramener les problèmes dans le cadre d'une seule variable complexe.

Passons maintenant à l'objet principal de notre étude. Le **bidisque symétrisé**  $G$  est un sous-ensemble de l'espace à deux variables complexes  $\mathbb{C}^2$ . Plus précisément, il est défini par

$$G = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\}.$$

La fermeture du bidisque symétrisé  $\overline{G}$  sera exceptionnellement notée  $\Gamma$ , tel qu'il est coutume dans la littérature actuelle. Cet ensemble tire son nom du fait que toutes les fonctions holomorphes du bidisque symétrisé sont en fait des fonctions symétriques définie pour un couple  $(z_1, z_2)$  du bidisque  $\mathbb{D}^2$ . Malgré cette relation avec le bidisque, la géométrie de ces deux ensembles diffère grandement et celle du bidisque symétrisé est fort plus riche. Nous verrons dans la prochaine sous-section qu'entre autre, le bidisque symétrisé n'est pas convexe contrairement au bidisque.

Pour l'instant, concentrons-nous sur la définition du bidisque symétrisé. Bien qu'assez simple, il reste difficile de représenter graphiquement cet ensemble, ce dernier étant un sous-ensemble de l'espace à deux variables complexes. Du moins, l'application

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, z_1 z_2)$$

permet de produire facilement les éléments de  $G$  à partir du bidisque  $\mathbb{D}^2$ . La représentation ci-contre est obtenue en utilisant l'application précédente sur 1000 points de  $(-1, 1)$  générés aléatoirement. Sur celle-ci ont été mises en évidence les fonctions  $p = \frac{s^2}{4}$  et  $p = |s| - 1$ . En fait, nous allons démontrer que l'image de  $(-1, 1)^2$  par la projection précédente est la région comprise entre cette parabole et les deux segments de droite en pointillé.

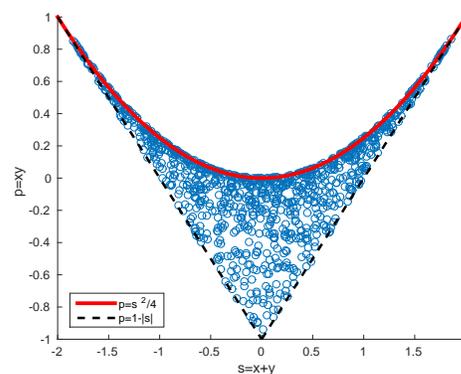


FIGURE 1.1: 1000 couples de  $(-1, 1)^2$  projetés dans  $G$

Les éléments du bidisque symétrisé  $G$  peuvent être uniquement identifiés par un autre système de coordonnées. Tout élément de  $G$  est un couple  $(s, p)$  où  $s := z_1 + z_2$ , pour « somme », et  $p := z_1 z_2$ , pour « produit », avec  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Cette notation avait d'ailleurs été utilisée sur le graphique précédent. Il sera souvent plus pratique d'utiliser les coordonnées  $(s, p)$ , car les éléments du bidisque symétrisé possède une riche caractérisation par le biais de ce système (voir [AY04, Théorème 2.1]).

**Proposition 1.1** (Caractérisation du bidisque symétrisé). *Soit  $s, p \in \mathbb{C}$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i)  $(s, p) \in G$  ;
- (ii) les racines de l'équation  $z^2 - sz + p = 0$  sont dans  $\mathbb{D}$  ;
- (iii)  $|s - \bar{s}p| < 1 - |p|^2$  ;
- (iv)  $|s| < 2$  et pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ ,
 
$$\left| \frac{2zp - s}{2 - zs} \right| < 1;$$
- (v)  $|p| < 1$  et il existe  $\beta \in \mathbb{D}$  tel que  $s = \beta p + \bar{\beta}$  ;
- (vi)  $2|s - \bar{s}p| + |s^2 - 4p| + |s|^2 < 4$ .

*Démonstration.* Montrons que (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Pour cela, il suffit de faire les calculs. Soit  $s, p \in \mathbb{C}$ . Il faut trouver  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2; \\ p = z_1 z_2. \end{cases}$$

Comme  $z_2 = s - z_1$ , la question revient à trouver  $z_1$  tel que  $p = z_1(s - z_1)$ . Par conséquent,  $z_1$  est un zéro de l'équation  $z^2 - sz + p$ . La formule quadratique montre de plus que si  $z_1$  est une racine, alors  $z_2 = s - z_1$  sera aussi une racine. Mais encore, puisque cette équation possède deux solutions, multiplicité comptée dans  $\mathbb{C}$ , il est toujours possible de trouver une unique paire  $z_1, z_2$ . Il suit que si  $(s, p) \in G$ , alors les solutions du système,  $z_1$  et  $z_2$ , sont dans le disque unité et donc (ii) est satisfaite. Réciproquement, si les racines  $z^2 - sz + p$  sont dans le disque unité,  $s$  et  $p$  ainsi définis seront dans le bidisque symétrisé.

Montrons que (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). Il s'agit d'une application d'un théorème de Schur permettant de caractériser les racines d'un polynôme. Ce théorème se retrouve à l'origine dans [Sch17], mais une présentation générale du théorème ainsi qu'une démonstration alternative sont dans [Roy02]. Dans le cas présent, le théorème montre que les racines du polynôme  $z^2 - sz + p$  sont dans le disque unité si et seulement si la matrice suivante est positive :

$$\begin{bmatrix} 1 - |p|^2 & s\bar{p} - \bar{s} \\ \bar{s}p - s & 1 - |p|^2 \end{bmatrix}.$$

C'est le cas lorsque  $1 - |p|^2 > 0$  et  $(1 - |p|^2)^2 - |\bar{s}p - s|^2 > 0$ , ce qui est équivalent à la condition (iii).

Nous allons maintenant montrer que (i)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (iii). Pour tout  $a, b \in \mathbb{C}$ , l'identité suivante est satisfaite :

$$|2 - a - b|^2 - |2ab - a - b|^2 = 2(1 - |a|^2)|1 - b|^2 + 2(1 - |b|^2)|1 - a|^2. \quad (1.1)$$

Il suffit de développer le membre de gauche en utilisant le fait que  $|a|^2 = a\bar{a}$  puis de réorganiser les termes. Soit  $(s, p) \in G$ , avec  $s = z_1 + z_2$  et  $p = z_1 z_2$  pour certains  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Clairement  $|s| < 2$  et l'identité 1.1 appliquée à  $z z_1$  et  $z z_2$  montre que

$$\begin{aligned} |2 - zs|^2 - |2z^2p - zs|^2 &= |2 - z z_1 - z z_2|^2 - |2(z z_1)(z z_2) - z z_1 - z z_2|^2 \\ &= 2(1 - |z z_1|^2)|1 - z z_2|^2 + 2(1 - |z z_2|^2)|1 - z z_1|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ . Cette inégalité montre que

$$\frac{|z| \cdot |2zp - s|}{|2 - zs|} < 1$$

et en particulier, lorsque  $z$  est dans le cercle unité  $\mathbb{T}$ ,

$$\left| \frac{2zp - s}{2 - zs} \right| < 1,$$

et donc, par le principe du maximum, l'inégalité est vérifiée pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ .

Maintenant supposons que (iv) est satisfaite. De simples manipulations algébriques permettent de trouver la série d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{2zp - s}{2 - zs} \right| < 1 &\Rightarrow |2zp - s|^2 < |2 - zs|^2 \\ &\Rightarrow 4|z|^2|p|^2 - 4\operatorname{Re}(z\bar{s}p) + |s|^2 < 4 - 4\operatorname{Re}(zs) + |z|^2|s|^2. \end{aligned}$$

Lorsque  $z \in \mathbb{T}$ , la relation devient

$$4\operatorname{Re}(z(s - \bar{s}p)) < 4(1 - |p|^2).$$

En particulier, si  $z = \frac{\bar{s} - \bar{p}s}{|s - \bar{s}p|} \in \mathbb{T}$ , nous obtenons

$$1 - |p|^2 > \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{s} - \bar{p}s}{|s - \bar{s}p|} \cdot (s - \bar{s}p) \right) = |s - \bar{s}p|.$$

Cela correspond à la propriété (iii).

Montrons que (iii)  $\Leftrightarrow$  (v). Supposons que  $|s - \bar{s}p| < 1 - |p|^2$ . Il suit clairement que  $1 - |p|^2 > 0$ . Posons  $\beta := \frac{\bar{s} - \bar{p}s}{1 - |p|^2}$ . Alors  $\beta \in \mathbb{D}$  car  $|\beta| < 1$  par hypothèse. De plus, avec ce choix de  $\beta$ , il se trouve que  $\beta p + \bar{\beta} = s$ .

Soit  $|p| < 1$ ,  $\beta \in \mathbb{D}$  et posons  $s = \beta p + \bar{\beta}$ . Alors

$$s - \bar{s}p = \bar{\beta} - \bar{\beta}|p|^2$$

et en prenant le module, nous obtenons

$$|s - \bar{s}p| = |\bar{\beta}|(1 - |p|^2) < 1 - |p|^2.$$

Enfin, montrons que  $(vi) \Leftrightarrow (iv)$ . Supposons que  $(iv)$  est vérifiée. Alors l'application

$$\varphi : z \mapsto \frac{2zp - s}{2 - zs}$$

est holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et comme c'est une transformation de Möbius, elle envoie le cercle  $\mathbb{T}$  sur un autre cercle généralisé, disons  $C$ . Mais encore, cette fonction a la propriété de préserver les points inverses, ou en d'autres termes, si  $z^{*C}$  dénote le point inverse de  $z$  par rapport à un cercle généralisé  $C$ , alors  $f(z^{*\mathbb{T}}) = f(z)^{*C}$ . Il s'agit d'une propriété couramment utilisée que le lecteur pourra retrouver dans [Ahl79, Chapitre 3, section 3.3, théorème 15].

Dans le cas présent, le centre de  $C$  a pour point inverse l'infini. Or, puisque l'image par  $\varphi$  de  $\frac{2}{s}$  est bien le point à l'infini, il suit que le centre du cercle  $C$  est

$$\varphi\left(\left(\frac{2}{s}\right)^{*\mathbb{T}}\right) = \varphi\left(\frac{\bar{s}}{2}\right) = 2\frac{\bar{s}p - s}{4 - |s|^2}.$$

De plus, comme

$$\varphi\left(\frac{\bar{s}}{|s|}\right) = \frac{2\frac{\bar{s}}{|s|}p - s}{2 - \frac{\bar{s}}{|s|}s} = \frac{2\bar{s}p - s|s|}{|s|(2 - |s|)} = \frac{4\bar{s}p - 2|s|s + 2|s|\bar{s}p - |s|^2s}{|s|(4 - |s|^2)},$$

le rayon de l'image de  $\mathbb{T}$  est

$$\left|2\frac{\bar{s}p - s}{4 - |s|^2} - \frac{4\bar{s}p - 2|s|s + 2|s|\bar{s}p - |s|^2s}{|s|(4 - |s|^2)}\right| = \frac{|\bar{s}||s^2 - 4p|}{|s||4 - |s|^2|} = \frac{|s^2 - 4p|}{4 - |s|^2}.$$

Par  $(iv)$ , l'image du disque est également contenue dans  $\mathbb{D}$ . Ainsi,

$$\frac{2|\bar{s}p - s| + |s^2 - 4p|}{4 - |s|^2} < 1.$$

Pour l'implication réciproque, notons d'abord que  $(vi)$  implique directement que  $|s| < 2$ . L'application  $\varphi$  donc est toujours holomorphe. Les calculs ci-dessus et  $(vi)$  entraînent que son image est dans  $\mathbb{D}$ , d'où la propriété  $(iv)$ .  $\square$

*Remarque.* Il existe un énoncé similaire pour les éléments de  $\Gamma$ . Il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités dans  $(iii)$ ,  $(iv)$ ,  $(v)$  et  $(vi)$ . Un énoncé complet se retrouve dans [AY03a].

La caractérisation (iv) est particulièrement importante. Celle-ci sera souvent utilisée dans le présent mémoire et nous allons donc définir, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la fonction

$$\Phi_\alpha(s, p) := \frac{2\alpha p - s}{2 - \alpha s}.$$

Les fonctions  $\Phi_\alpha$  sont holomorphes en tout point où  $s \neq \frac{2}{\alpha}$  pour  $\alpha$  non nul. En particulier, la proposition précédente montre que si  $\alpha \in \mathbb{T}$ ,  $\Phi_\alpha$  est une fonction holomorphe du bidisque symétrisé à valeurs dans le disque unité, d'où son intérêt. Nous allons voir que ces fonctions satisfont un problème extrémal sur le bidisque symétrisé. Voici un lemme, tiré de [AY04], caractérisant les points dont l'image par  $\Phi_\omega$  est sur le cercle unité.

**Lemme 1.2.** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  et tout  $(s, p) \in \mathbb{C}^2$  tels que  $s \neq 2\bar{\omega}$ , nous avons  $|\Phi_\omega(s, p)| = 1$  si et seulement si  $\operatorname{Re}(\omega(s - \bar{s}p)) = 1 - |p|^2$ .*

*De plus, si  $(s, p) \in \Gamma \setminus \{(2\bar{\omega}, \bar{\omega}^2)\}$ , alors  $|\Phi_\omega(s, p)| = 1$  si et seulement si*

$$\omega(s - \bar{s}p) = 1 - |p|^2.$$

*Démonstration.* Premièrement, notons que si  $s \neq 2\bar{\omega}$ , alors le quotient  $\frac{2\omega p - s}{2 - \omega s}$  est bien défini. Par définition,  $|\Phi_\omega(s, p)| = 1$  si et seulement si

$$|2\omega p - s|^2 = |2 - \omega s|^2.$$

Cette expression est équivalente à

$$4|\omega p|^2 - 4\operatorname{Re}(\omega \bar{s}p) + |s|^2 = 4 - 4\operatorname{Re}(\omega s) + |\omega s|^2,$$

et en réarrangeant les termes, cela donne

$$4\operatorname{Re}(\omega s - \omega \bar{s}p) = 4 - 4|p|^2$$

car  $|\omega| = 1$ . La dernière égalité est satisfaite si et seulement si

$$\operatorname{Re}(\omega(s - \bar{s}p)) = 1 - |p|^2.$$

Démontrons maintenant la seconde partie du lemme. Supposons que  $(s, p) \in \Gamma \setminus \{(2\bar{\omega}, \bar{\omega}^2)\}$ . Le quotient  $\Phi_\omega(s, p)$  est toujours bien défini et par la propriété (iii) de la proposition 1.1, puisque

$$|s - \bar{s}p| \leq 1 - |p|^2,$$

et que lorsque  $\omega \in \mathbb{T}$

$$1 - |p|^2 = \operatorname{Re}(\omega(s - \bar{s}p)) \leq |\omega(s - \bar{s}p)| = |s - \bar{s}p|,$$

il suit que

$$\operatorname{Re}(\omega(s - \bar{s}p)) = |\omega(s - \bar{s}p)|.$$

Ainsi, l'expression  $\omega(s - \bar{s}p)$  est un nombre réel, d'où

$$\omega(s - \bar{s}p) = 1 - |p|^2.$$

Par la première partie du lemme, il suit que  $|\Phi_\omega(s, p)| = 1$  si et seulement si

$$\omega(s - \bar{s}p) = 1 - |p|^2.$$

□

## 1.2 Autres propriétés géométriques

Tel qu'il a été mentionné précédemment, le bidisque symétrisé, bien que s'apparentant au bidisque, possède une géométrie beaucoup plus riche que ce dernier. Or, il est difficile de représenter de façon intuitive le bidisque symétrisé graphiquement. Néanmoins, lorsque le couple  $(s, p) \in G$  est de plus un couple de nombres réels, la proposition 1.1 vient surprenamment donner une jolie interprétation de l'intersection  $G \cap \mathbb{R}^2$ .

En effet, si  $(s, p) \in G \cap \mathbb{R}^2$ , la propriété (iii) de la proposition 1.1 devient

$$|s - sp| < 1 - p^2.$$

Il en découle non seulement que  $p \in (-1, 1)$ , mais aussi que

$$|s| < 1 + p.$$

Ces deux inégalités forment une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les points du bidisque symétrisé qui sont aussi des éléments de  $\mathbb{R}^2$ .

De même, la propriété (ii) fournit une autre information intéressante. Dans ce cas particulier, le polynôme  $q(z) = z^2 - sz + p$  est un polynôme à coefficients réels. Comme les racines de ce polynôme correspondent au couple  $(z_1, z_2)$  solutions de  $s = z_1 + z_2$  et  $p = z_1 z_2$ , alors ou bien  $z_1$  et  $z_2$  sont deux nombres réels, ou bien  $\bar{z}_2 = z_1$ . Le discriminant de ce polynôme est  $s^2 - 4p$  et il s'annule sur la parabole  $p = \frac{s^2}{4}$ . De plus, lorsque le discriminant est négatif, c'est-à-dire lorsque  $p > \frac{s^2}{4}$ , il existe un nombre complexe, disons  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$  tel que  $s = 2 \operatorname{Re} z_0$  et  $p = |z_0|^2$ . Par conséquent, la seule restriction est  $p < 1$ . Évidemment, lorsque  $p < \frac{s^2}{4}$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  seraient plutôt des nombres réels.

Sur la figure de la page suivante se trouve une représentation de l'intersection du bidisque symétrisé avec  $\mathbb{R}^2$ , délimité par les droites  $p = 1$ ,  $p = s - 1$  et  $p = -s - 1$ . La variété royale, qui sera définie plus tard à l'exemple 2.3, a également été ajoutée à titre indicatif. Remarquons que le bord de cet ensemble n'est pas lisse, bien que dans ce cas, il est lisse par morceaux.

Un premier fait remarquable est que le bidisque symétrisé, contrairement au bidisque, n'est pas convexe. Rappelons, tel que défini dans [Kra01, Chapitre 3, p. 117], qu'un ensemble quelconque  $\Omega$  est dit **convexe** si pour tout  $z, w \in \Omega$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'élément  $(1 - t)z + tw \in \Omega$ .

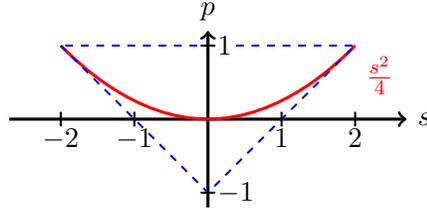


FIGURE 1.2:  $G \cap \mathbb{R}^2$  et la variété royale.

**Exemple 1.1.** Le disque unité  $\mathbb{D}$ , le bidisque  $\mathbb{D}^2$  et la boule  $\mathcal{B}^2$  sont tous des ensembles convexes. Cela se démontre en utilisant le fait que le module d'un nombre complexe satisfait l'inégalité triangulaire.

**Exemple 1.2.** Le bidisque symétrisé n'est pas convexe. En effet, les éléments

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{16}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \text{ et } \left(\frac{3}{2}i, -\frac{9}{16}\right) = \left(\frac{3}{4}i + \frac{3}{4}i, \frac{3}{4}i \times \frac{3}{4}i\right)$$

sont clairement des éléments de  $G$ . Néanmoins, leur point milieu

$$\zeta := \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i, 0\right)$$

n'est pas dans  $G$ . En effet, si  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  sont tels que  $\zeta = (z_1 + z_2, z_1 z_2)$ , alors l'un des deux est nul. Or,

$$\left|\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i\right|^2 = \frac{9}{8} > 1 \geq |z_1|^2.$$

C'est impossible et cela entraîne que le bidisque symétrisé n'est pas convexe.

Il est tout aussi intéressant de mentionner qu'il n'existe pas de fonction bijective et holomorphe entre le bidisque symétrisé et un domaine convexe quelconque. En d'autres termes, il n'existe aucun domaine convexe qui est biholomorphe au bidisque symétrisé. Nous ne démontrerons pas cette affirmation car c'est une question qui dépasse le cadre de ce mémoire. Le lecteur pourra toutefois retrouver la preuve dans [Cos04, Théorème 1]. L'équivalence, à une fonction biholomorphe près, est très puissante et permet de transférer certaines propriétés d'un domaine à un autre. Par exemple, la connaissance d'une fonction biholomorphe de  $G$  dans  $\mathbb{D}^2$  aurait permis de calculer facilement les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi, telles qu'elles seront définies dans le prochain chapitre.

Le bidisque symétrisé possède toutefois d'autres propriétés géométriques très intéressantes. Les définitions suivantes sont tirées de [AY04, Section 2].

**Définition 1.3.** Soit un ensemble compact  $K \subseteq \mathbb{C}^n$ . L'enveloppe polynomiale  $\widehat{K}$  de  $K$  est l'ensemble défini par

$$\widehat{K} = \left\{ z \in \mathbb{C}^d : |p(z)| \leq \sup_{w \in K} |p(w)| \text{ pour tout polynôme } p \right\}.$$

De plus,  $K$  est dit **polynomialement convexe** si  $\widehat{K} = K$ .

*Remarque.* Il est toujours vrai, par définition, que  $K \subseteq \widehat{K}$ . Ce qu'il faut vérifier est si  $\widehat{K} \subseteq K$ .

**Définition 1.4.** Un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  est dit

- a) **hypoconvexe** si pour tout  $z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$ , il existe un hyperplan complexe dans  $\mathbb{C}^d$  qui contient  $z$  mais qui est disjoint de  $\Omega$ ;
- b) **polynomialement convexe** si pour tout compact  $K \subseteq \Omega$ ,  $\widehat{K}$ , l'enveloppe polynomiale de  $K$ , est contenue dans  $\Omega$ ;
- c) **étoilé autour de  $z_0$**  si pour tout  $z \in \Omega$  le segment joignant  $z$  à  $z_0$  est contenu dans  $\Omega$ , ou autrement dit, si pour tout  $z \in \Omega$  et pour tout  $t \in [0, 1)$ ,  $tz_0 + (1 - t)z \in \Omega$ .

Ces définitions sont toutes, en quelque sorte, des versions moins fortes de la convexité. En effet, tout domaine convexe est hypoconvexe, polynomialement convexe et étoilé. La propriété d'être polynomialement convexe, qui est probablement la moins intuitive, vient du fait que les domaines convexes sont des domaines d'holomorphie, une notion équivalente aux domaines holomorphiquement convexes. Ces notions plus avancées sont expliquées en détail dans [Kra01, Section 3.4]. Plus concrètement, le fait pour un compact d'être polynomialement convexe implique que toute fonction holomorphe est la limite uniforme d'une séquence de polynômes.

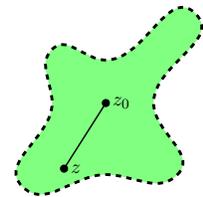


FIGURE 1.3: Un domaine étoilé

**Théorème 1.5** (Oka-Weil). *Soit  $K$  un ensemble compact polynomialement convexe dans  $\mathbb{C}^d$  et une fonction  $f$  holomorphe sur un voisinage de  $K$ . Alors il existe une séquence  $\{p_j\}$  de polynômes en  $z^1, \dots, z^d$  de sorte que les  $p_j$  convergent uniformément vers  $f$  sur  $K$ .*

*Remarque.* Ce célèbre théorème, ainsi que sa démonstration, se retrouvent dans [AW98, Chapitre 7, théorème 7.3]. Le résultat avait d'abord démontré par André Weil en 1935. Wermer utilise plutôt le théorème d'extension d'Oka dans sa preuve. Il s'agit d'un bon exemple dans lequel le fait d'être polynomialement convexe est suffisamment puissant pour fournir un résultat intéressant.

Voici un exemple simple d'ensemble polynomialement convexe.

**Exemple 1.3.** Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $K \subseteq \mathbb{C}^d$ , l'ensemble de cardinalité finie

$$K = \{z_1, \dots, z_N\}$$

où  $z_k = (z_k^1, \dots, z_k^d) \in \mathbb{C}^d$ . Prenons  $w \notin K$ . Alors pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ , il existe un indice  $r_k$  tel que  $w^{r_k} \neq z_k^{r_k}$ . En particulier, le polynôme

$$p(\zeta) = \prod_{k=1}^N (\zeta^{r_k} - z_k^{r_k})$$

s'annule en tout point de  $K$ , mais  $p(w)$  n'est pas nul. Par conséquent, il existe un polynôme  $p$  à  $d$  variables complexes tel que  $|p(w)| > |p(z)|$  pour tout  $z \in K$ . Ainsi,  $w \notin \widehat{K}$  et il suit que  $K$  est polynomialement convexe.

Soulignons encore une fois que les trois propriétés de la définition 1.4 ne sont pas équivalentes à la convexité. D'ailleurs, le bidisque symétrisé est un bon contre-exemple, ce dernier possédant ces trois caractéristiques sans être convexe.

**Exemple 1.4.** Le bidisque symétrisé est hypoconvexe, polynomialement convexe et étoilé autour de  $(0, 0)$ .

Premièrement, montrons que  $G$  est hypoconvexe. Soit  $z = (z_1 + z_2, z_1 z_2) \notin G$ . Sans perte de généralité, supposons que  $|z_1| \geq 1$ . Il faut montrer qu'il existe un hyperplan dans  $\mathbb{C}^2$ , c'est-à-dire une droite complexe qui passe par  $z$  et qui est disjointe de  $G$ . En fait, comme  $z_1 \notin \mathbb{D}$ , il suffit de prendre la droite complexe

$$(z_1 + \zeta, z_1 \zeta) = (z_1, 0) + \zeta(1, z_1)$$

où  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

Maintenant, montrons que  $G$  est polynomialement convexe. Pour ce faire, montrons que l'ensemble

$$\overline{G}_r = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : |z_1| \leq r, |z_2| \leq r\}$$

est polynomialement convexe pour tout  $r \in (0, 1)$ . Soit un compact  $K \subseteq \overline{G}_r$ . Il suffit de démontrer que tout élément dans le complément de  $\overline{G}_r$  n'est pas dans l'enveloppe polynomiale  $\widehat{K}$ , c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $p$  tel que  $|p(z)| > |p(w)|$  pour tout  $w \in K$ . Soit

$$z = (z_1 + z_2, z_1 z_2) \notin \overline{G}_r.$$

Dans ce cas,  $|z_1|$  ou  $|z_2|$  est strictement supérieur à  $r$ . Si  $|z_1| > r$  alors le polynôme  $p(w_1, w_2) = w_1$  satisfait  $p(w) \leq r$  pour tout  $w \in \overline{G}_r$ , mais  $|p(z)| = |z_1| > r \geq |p(w)|$ . Si toutefois,  $|z_1| \leq r$ , alors forcément  $|z_2| > r$  et il est possible de démontrer de manière similaire que  $z \notin \widehat{K}$ . Par conséquent,  $\widehat{K} \subseteq \overline{G}_r$  et par définition,  $\overline{G}_r$  est polynomialement convexe.

Soit maintenant un sous-ensemble compact  $K$  de  $G$ . Alors il existe  $r \in (0, 1)$  tel que  $K \subset \overline{G}_r$ . Puisque  $\overline{G}_r$  est polynomialement convexe,

$$\widehat{K} \subset \widehat{\overline{G}_r} = \overline{G}_r \subset G,$$

donc  $G$  est par définition polynomialement convexe.

Enfin, nous allons montrer que  $G$  est étoilé autour de  $(0, 0)$ . Pour  $(s, p) \in G$  et  $r \in [0, 1)$ , il faut montrer que  $(rs, rp) \in G$ . Pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
|2 - \omega rs|^2 - |2\omega rp - rs|^2 &= 4 - 2 \operatorname{Re}(2\omega rs) + |\omega rs|^2 - |2\omega rp|^2 + \operatorname{Re}(2\omega rp \cdot r\bar{s}) - |rs|^2 \\
&= r^2 (4 - 2 \operatorname{Re}(2\omega s) + |\omega s|^2 - |2\omega p|^2 + \operatorname{Re}(2\omega \bar{s}p) - |s|^2) \\
&\quad + 4 - 4r^2 - 4r \operatorname{Re}(\omega s) + 4r^2 \operatorname{Re}(\omega s) \\
&= r^2 (|2 - \omega s|^2 - |2\omega p - s|^2) + 4(1 - r)(1 + r - r \operatorname{Re}(\omega s))
\end{aligned}$$

Le premier terme du dernier membre de droite est positif par la propriété (iv) de la caractérisation de  $G$ . De même,  $s$  étant dans  $G$  et  $\omega \in \mathbb{T}$ , il suit que

$$1 + r - r \operatorname{Re}(\omega s) \leq 1 + r + 2r.$$

Puisque  $r \in (0, 1)$ , le second terme du membre de droite est lui strictement positif. En somme, cela signifie que, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$|2 - \omega rs|^2 - |2\omega rp - rs|^2 > 0.$$

Cela est équivalent à l'inéquation

$$\left| \frac{2\omega rp - rs}{2 - \omega rs} \right|^2 < 1.$$

Par le principe du maximum, c'est vrai pour tout  $\omega \in \overline{\mathbb{D}}$  et donc, la caractérisation de  $G$  permet de conclure que  $(rs, rp) \in G$ . Par définition, le bidisque symétrisé est donc étoilé autour de  $(0, 0)$ .

### 1.3 Les problèmes de Nevanlinna-Pick

Un célèbre problème d'interpolation pour les nombres complexes est le problème de Nevanlinna-Pick classique. Pour  $n$  éléments distincts du disque unité  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $n$  valeurs cibles  $\mu_1, \dots, \mu_n$  dans le disque unité fermé, nous recherchons une fonction holomorphe à valeurs dans  $\overline{\mathbb{D}}$  qui interpole les  $\mu_j$  en  $\lambda_j$ . Ce problème est complètement résolu depuis longtemps et l'existence de la solution est garantie par le théorème de Nevanlinna-Pick classique. L'énoncé ainsi que la démonstration de ce théorème seront présentés plus en détail à la section 4.1.

Le problème de Nevanlinna-Pick spectral (NPS) est une autre variante beaucoup plus difficile. Ce problème, toujours non résolu, a attiré l'attention de plusieurs chercheurs au courant des dernières années, entre autre à cause de son rôle dans le problème de la  $\mu$ -synthèse. Plus précisément, une solution au problème de NPS permettrait d'obtenir de meilleurs résultats en ce qui se rapporte à la robustesse de certains contrôleurs en ingénierie [DP93].

Le NPS s'énonce comme suit. Donnés  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  du disque unité et  $n$  matrices carrées  $d \times d$   $W_1, \dots, W_n$  de rayon spectral inférieur à 1, nous recherchons un critère caractérisant

l'existence d'une fonction matricielle holomorphe  $d \times d$ , disons  $f$ , définie telle que  $f(\lambda_j) = W_j$  pour  $j = 1, \dots, n$  et que le rayon spectral de la matrice  $f(\lambda)$  soit inférieur à 1 pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$ . Dans le cas particulier où les  $W_j$  sont des matrices  $2 \times 2$ , Agler et Young ont démontré un tel critère en 2003 [AY03b]. Dans cet article, la méthode employée consiste à interpoler les coefficients du polynôme caractéristique associé aux matrice  $W_j$ , c'est à dire aux valeurs  $\text{tr}(W_j)$  et  $\det(W_j)$ . De ce fait, nous sommes amenés à considérer l'ensemble

$$\{(\text{tr}(A), \det(A)) : A \in M_2(\mathbb{C}), |\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1\}$$

où  $M_2(\mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes et  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$ . Le rôle du bidisque symétrisé dans le NPS provient de l'affirmation qui suit.

**Proposition 1.6.** *Une matrice  $A \in M_2(\mathbb{C})$  a ses deux valeurs propres dans  $\overline{\mathbb{D}}$  si et seulement si  $(\text{tr}(A), \det(A)) \in \Gamma$ .*

*Démonstration.* La démonstration est assez élémentaire. Soit  $A \in M_2(\mathbb{C})$  une matrice  $2 \times 2$  et soit  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ . Ainsi,  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$  et  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ . La proposition suit de ces égalités.  $\square$

Avant de passer à la prochaine section, rappelons quelques points clés qui ont été discutés précédemment. Chaque élément du bidisque symétrisé est uniquement déterminé par une paire d'éléments  $z_1$  et  $z_2$  du disque unité. Les couples dits  $(s, p) \in G$ , pour « somme » et « produit », possèdent diverses caractérisations qui fournissent une bonne intuition de la structure du bidisque symétrisé. Il a par ailleurs été démontré comment le bidisque symétrisé est très différent géométriquement du bidisque  $\mathbb{D}^2$ . Bien que non convexe, il possède néanmoins d'autres jolies et intéressantes propriétés. En plus de sa riche géométrie, le bidisque symétrisé apparaît dans un cas particulier du problème de Nevanlinna-Pick spectral. C'est à n'en point douter un domaine de l'espace à deux variables complexes de grand intérêt. Notre désir d'approfondir nos recherches sur la géométrie du bidisque symétrisé nous mènera, dans la prochaine section, vers les systèmes de Schwarz-Pick.

## Chapitre 2

# Systemes de Schwarz-Pick

Un cas particulier du problème de Nevanlinna-Pick spectral mène à la résolution d'un problème d'interpolation sur le bidisque symétrisé. De ce fait, nous nous intéressons aux fonctions du bidisque symétrisé à valeurs dans le disque unité. Une approche géométrique est de définir des métriques propres à l'ensemble géométrique étudié. Sur le disque unité, la distance de Poincaré possède d'intéressantes propriétés. Les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi peuvent être définies sur tout domaine de l'espace à  $d$  variables complexes et sont en quelque sorte une généralisation de la distance de Poincaré.

### 2.1 Motivation

Rappelons d'abord quelques définitions.

**Définition 2.1.** Soit un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ . Une **distance** (ou **métrique**) sur  $\Omega$  est une fonction  $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait les propriétés suivantes pour tout  $x, y, z \in \Omega$  :

- (i)  $\rho(x, y) \geq 0$  (non-négativité) ;
- (ii)  $\rho(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;
- (iii)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (symétrie) ;
- (iv)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (inégalité triangulaire).

Si  $\rho$  ne satisfait pas la nécessité de l'énoncé (ii), alors  $\rho$  est une **pseudodistance**.

**Définition 2.2.** Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ensembles munis respectivement des pseudodistances  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Une fonction  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  est une **isométrie** si et seulement si

$$\rho_2(f(z), f(w)) = \rho_1(z, w)$$

pour tous les  $z, w \in \Omega$ .

*Remarque.* Les définitions précédentes auraient pu être faites pour  $X$  un ensemble quelconque au lieu d'un domaine. Dans le présent mémoire, comme les pseudodistances ne seront définies

que sur des domaines, les définitions ont été énoncées en conséquence. De même, les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi pourraient être définies sur un ensemble ouvert quelconque et non spécifiquement des domaines.

La question abordée dans l'introduction de ce chapitre revient à étudier les fonctions du bidisque à valeurs dans le disque unité. Reprenons le problème d'un point de vue plus général.

Étant donnés deux domaines  $\Omega_1, \Omega_2$  dans  $\mathbb{C}^d$ , il est tout naturel de s'intéresser aux fonctions biholomorphes  $f$  allant de  $\Omega_1$  dans  $\Omega_2$ , soit les fonctions bijectives et holomorphes dont l'inverse est également holomorphe. Une façon de procéder est par la géométrie : l'idée est de définir des pseudodistances  $\rho_1, \rho_2$ , sur des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, de sorte que toute application biholomorphe de  $\Omega_1$  à valeurs dans  $\Omega_2$  soit une isométrie. Explicitement, il faut que l'égalité suivante soit satisfaite pour tout  $z, w$  de  $\Omega_1$  :

$$\rho_2(f(z), f(w)) = \rho_1(z, w).$$

Il suffit en pratique que les fonctions holomorphes de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ , et aussi de  $\Omega_2$  vers  $\Omega_1$ , soient des contractions pour nos métriques. Notons  $H(\Omega_1, \Omega_2)$ , l'ensemble des fonctions holomorphes de  $\Omega_1$  à valeurs dans  $\Omega_2$ . Une fonction  $f \in H(\Omega_1, \Omega_2)$  est une contraction si, pour tout  $z, w \in \Omega_1$ ,

$$\rho_2(f(z), f(w)) \leq \rho_1(z, w).$$

Sous cette contrainte, les fonctions biholomorphes, puisqu'elles possèdent un inverse holomorphe, vont de plus satisfaire la relation suivante

$$\rho_1(z, w) = \rho_1(f^{-1} \circ f(z), f^{-1} \circ f(w)) \leq \rho_2(f(z), f(w))$$

et seront des isométries par définition.

## 2.2 Un cas plus simple : le disque unité

Il n'est toutefois pas évident, à premier abord, de bien choisir des métriques qui feront des fonctions holomorphes des contractions. Heureusement, dans le cas plus particulier du disque unité, le lemme de Schwarz vient, de manière surprenante, nous guider vers un bon choix de métrique.

**Théorème 2.3.** (*Lemme de Schwarz*) Soit  $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  telle que  $f(0) = 0$ . Alors

(i)  $|f(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$  ;

(ii)  $|f'(0)| \leq 1$ .

De plus, l'égalité est vérifiée si et seulement si  $f$  est une rotation, c'est-à-dire si  $f(z) = \omega z$  pour un certain  $\omega \in \mathbb{T}$ .

*Démonstration.* Il s'agit là d'un résultat classique dont la preuve se retrouve dans de nombreux ouvrages mathématiques, notamment [Ahl79, p. 135].  $\square$

Le lemme de Schwarz peut se généraliser facilement aux fonctions qui ne s'annulent pas en zéro en utilisant la transitivité des automorphismes du disque, c'est-à-dire des fonctions biholomorphes du disque dans lui-même notées  $Aut(\mathbb{D})$ . Définissons les transformations de Möbius  $\varphi_a$  de la forme

$$\varphi_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

pour un certain  $a \in \mathbb{D}$ . L'application  $\varphi_a$  est un automorphisme du disque unité dont l'inverse est  $\varphi_{-a}$ . Les compositions de ces transformations de Möbius et des rotations forment en fait la totalité des automorphismes du disque unité. Soulignons également que les fonctions  $\varphi_a$  ont la propriété d'envoyer le bord du disque unité sur lui-même. En effet, pour tout  $a \in \mathbb{D}$  et tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , l'égalité suivant est satisfaite

$$\varphi_a(\omega) = \frac{\omega - a}{1 - \bar{a}\omega} = \frac{\omega - a}{\omega(\bar{\omega} - \bar{a})} = \bar{\omega} \frac{\omega - a}{\bar{\omega} - \bar{a}}.$$

De plus, l'ensemble de ces fonctions agit transitivement sur le disque unité, c'est-à-dire que pour chaque paire de point  $z, w$  dans le disque, il existe  $a \in \mathbb{D}$  tel que  $\varphi_a(z) = w$ . Autrement dit, l'ensemble de ces fonctions permet de déplacer un point du disque vers n'importe quel autre. En particulier, l'image de l'élément  $a$  par  $\varphi_a$  est l'origine et celle de l'origine est  $-a$ . Cette notion est souvent exploitée afin de simplifier et généraliser divers résultats mathématiques.

**Théorème 2.4.** (*Lemme de Schwarz-Pick*) Si  $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , alors

- (i)  $\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right|$  pour tout  $z, w \in \mathbb{D}$ ,
- (ii)  $\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .

Les égalités tiennent pour un couple  $z \neq w$  dans (i) ou un point  $z$  dans (ii) si et seulement si  $f \in Aut(\mathbb{D})$ .

*Démonstration.* Posons  $g(z) := \varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_{-w}(z)$ . Alors  $g(z) \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  et par construction,  $g(0) = 0$ . Par le lemme de Schwarz,  $|g(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . Comme l'image de  $\varphi_w$  est dans  $\mathbb{D}$ , les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} |g(\varphi_w(z))| \leq |\varphi_w(z)| &\Rightarrow |\varphi_{f(w)}(f(z))| \leq |\varphi_w(z)| \\ &\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right| \end{aligned}$$

Il s'agit de l'inégalité (i).

Si l'égalité tient pour une paire de points  $z \neq w$ , alors  $|g(\varphi_w(z))| = |\varphi_w(z)|$ . Par le lemme de Schwarz, comme  $\varphi_w(z) \neq 0$ , la fonction  $g$  est une rotation. Ainsi,  $g \in Aut(\mathbb{D})$  et il suit que  $f \in Aut(\mathbb{D})$ .

La seconde inégalité du lemme de Schwarz dit que  $|g'(0)| \leq 1$ . Or,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{1 - |f(w)|^2}{\left(1 - \overline{f(w)}f(\varphi_{-w}(z))\right)^2} \cdot f'(\varphi_{-w}(z)) \cdot \frac{1 - |w|^2}{(1 - \overline{w}z)^2} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1 - |f(w)|^2}{\left(1 - \overline{f(w)}f(w)\right)^2} \cdot f'(w) \cdot \frac{1 - |w|^2}{(1 - \overline{w} \cdot 0)^2} \\ &= \frac{f'(w)}{1 - |f(w)|^2} \cdot (1 - |w|^2) \end{aligned}$$

Ainsi, le lemme de Schwarz donne (ii). De même, si l'égalité est atteinte, alors par le lemme de Schwarz,  $g$  est une rotation et donc  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

Enfin, si  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , alors  $f$  possède un inverse holomorphe et le lemme s'applique à la fonction  $f^{-1}$  évaluée en  $f(z)$  et  $f(w)$ . Cela permet d'obtenir l'égalité dans (i) et (ii).  $\square$

Le lemme de Schwarz-Pick nous amène à considérer la métrique suivante sur le disque unité :

**Définition 2.5.** La **distance pseudohyperbolique** sur le disque unité est la fonction  $d_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right|.$$

**Proposition 2.6.** La fonction  $d_{\mathbb{D}}$  est une distance qui fait des fonctions holomorphes dans  $\mathbb{D}$  des contractions.

*Démonstration.* Il est clair, par définition, que  $d_{\mathbb{D}}(z, w) = 0$  si et seulement si  $z = w$ , et que  $d_{\mathbb{D}}$  est une fonction positive et symétrique.

Le lemme de Schwarz-Pick garantit que les fonctions holomorphes sont des contractions pour cette métrique, et qu'en particulier, les automorphismes du disque sont des isométries. Ainsi, pour vérifier que  $d$  satisfait l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer, sans perte de généralité, que

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) \leq d_{\mathbb{D}}(z, 0) + d_{\mathbb{D}}(0, w).$$

Comme  $|z|, |w| < 1$ , remarquons que

$$1 - d_{\mathbb{D}}(z, w)^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \overline{z}w|^2} \geq \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{(1 + |\overline{z}| |w|)^2} = 1 - d_{\mathbb{D}}(|z|, -|w|)^2.$$

Par conséquent,

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) \leq d_{\mathbb{D}}(|z|, -|w|) = \left| \frac{|z| + |w|}{1 + |\overline{z}| |w|} \right| \leq |z| + |w| = d_{\mathbb{D}}(z, 0) + d_{\mathbb{D}}(0, w).$$

Cela montre que  $d_{\mathbb{D}}$  est une pseudodistance.  $\square$

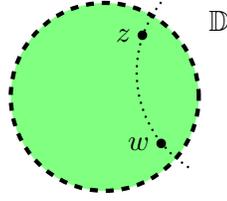


FIGURE 2.1: La distance pseudohyperbolique sur  $\mathbb{D}$ .

Il est possible de voir la distance pseudohyperbolique entre deux éléments  $z$  et  $w$  comme la longueur de l'arc de cercle orthogonal à  $\mathbb{T}$  qui joint  $z$  à  $w$  qui est orthogonal au disque. Or, la distance pseudohyperbolique ne correspond pas exactement à la mesure euclidienne de cet arc de cercle, mais plutôt à sa mesure selon une autre métrique. Pour plus de détail sur cette approche, voir [Din89, p. 39-40].

Pour certaines raisons pratiques, la distance de Poincaré est en général beaucoup plus utilisée que la métrique pseudohyperbolique.

**Définition 2.7.** La **distance de Poincaré** sur le disque unité est la fonction  $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) = \operatorname{arctanh} \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|$$

Le disque unité équipé de la distance de Poincaré forme le **plan hyperbolique**.

La proposition suivante montre l'intérêt d'utiliser la distance de Poincaré au lieu de la distance pseudohyperbolique.

**Proposition 2.8.** *La distance de Poincaré est l'unique fonction  $\rho_{\mathbb{D}}$  sur  $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$  qui a les propriétés suivantes :*

- (i)  $\rho_{\mathbb{D}}$  est invariante sous  $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$  ;
- (ii) si  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  et  $0 < x_1 < x_2 < 1$ , alors  $\rho_{\mathbb{D}}(0, x_2) = \rho_{\mathbb{D}}(0, x_1) + \rho_{\mathbb{D}}(x_1, x_2)$  ;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, t)}{t} = 1$ .

*De plus, cette fonction est bien une distance qui fait des fonctions  $h \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  des contractions par rapport à  $\rho_{\mathbb{D}}$ . En particulier,  $h \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$  si et seulement si  $h$  est une isométrie par rapport à  $\rho$ .*

*Remarque.* La condition (iii) garantit que  $\rho_{\mathbb{D}}$  possède une dérivée à droite de l'origine.

La preuve de cet énoncé est assez technique et sort du cadre de ce mémoire. Le lecteur pourra la retrouver dans [Din89, p. 35 - 37]. Les propriétés importantes de la fonction  $\operatorname{arctanh}$  sont qu'elle est continue sur l'intervalle  $(-1, 1)$ , strictement croissante, qu'elle s'annule en 0 et tend vers l'infini à gauche de 1. C'est ce qui permet de montrer que la distance de Poincaré possède plusieurs propriétés intéressantes.

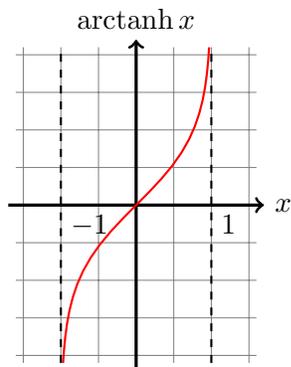


FIGURE 2.2: La fonction arctanh.

Un élément important sur lequel la distance de Poincaré diffère de la distance pseudohyperbolique est qu'elle fait du disque unité un espace complet. Premièrement, remarquons que la distance de Poincaré induit sur le disque unité la même topologie que la métrique euclidienne.

**Proposition 2.9.** *Une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  converge vers  $z \in \mathbb{D}$  avec la distance de Poincaré si et seulement si elle converge vers  $z$  par rapport à la métrique euclidienne  $|\cdot|$ , c'est-à-dire que  $\rho_{\mathbb{D}}$  et  $|\cdot|$  induisent la même topologie sur le disque unité.*

*Démonstration.* Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ . Supposons dans un premier temps que  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  par rapport à la métrique euclidienne, c'est-à-dire que  $|z_n - z|$  tend vers 0 pour un certain  $z \in \mathbb{D}$ . Puisque

$$\left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \leq \frac{|z - z_n|}{1 - |z|},$$

le quotient  $\left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right|$  tend vers zéro :

$$0 \leq \left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \leq \frac{|z - z_n|}{1 - |z|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier, puisque arctanh est une fonction continue,

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, z_n) = \operatorname{arctanh} \left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $z$  par rapport à la distance de Poincaré.

Supposons maintenant que  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  par rapport à la distance de Poincaré. Par continuité de tanh,

$$\left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi

$$|z - z_n| = |1 - z\bar{z}_n| \cdot \left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc la suite converge également par rapport à la métrique euclidienne.  $\square$

*Remarque.* Au passage, il a été démontré que la distance pseudohyperbolique induit elle aussi la même topologie sur le disque unité que la métrique euclidienne.

Comme dit précédemment, la distance de Poincaré fait du disque unité un espace complet, un résultat assez surprenant étant donné que le disque est un ensemble borné. Or, avec la distance de Poincaré, le bord du disque est en quelque sorte infiniment loin de l'origine. Le comportement asymptotique de  $\operatorname{arctanh}$  et le fait que le rayon du disque est de 1 produisent cet effet.

**Proposition 2.10.** *L'espace métrique  $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$  est complet.*

*Démonstration.* Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ . Par continuité de la fonction  $\operatorname{arctanh}$ ,  $\rho_{\mathbb{D}}(z_n, z_m) \rightarrow 0$  entraîne que  $d_{\mathbb{D}}(z_n, z_m) \rightarrow 0$ . En particulier, pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , il existe un rang  $n_0$  tel que

$$\frac{|z_n - z_m|}{|1 - z_n \bar{z}_m|} < \delta$$

lorsque  $n, m \geq n_0$ .

Or,

$$\frac{|z_n - z_m|}{2} \leq \frac{|z_n - z_m|}{|1 - z_n \bar{z}_m|}$$

et donc la suite est également une suite de Cauchy avec la métrique euclidienne. Donc  $z_n$  converge vers  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  avec la métrique euclidienne.

Supposons que la suite converge vers un certain  $\omega \in \mathbb{T}$ . Ainsi,

$$\frac{|z_n - z_{n_0}|}{|1 - z_{n_0} \bar{z}_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|\omega - z_{n_0}|}{|1 - z_{n_0} \cdot \bar{\omega}|} = \frac{1}{|\bar{\omega}|} \cdot \frac{|1 - z_{n_0} \cdot \bar{\omega}|}{|1 - z_{n_0} \cdot \bar{\omega}|} = 1.$$

C'est impossible car lorsque  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{|z_n - z_{n_0}|}{|1 - z_{n_0} \bar{z}_n|} \leq \delta < 1.$$

Par conséquent, la suite  $z_n$  ne peut converger vers un point de  $\mathbb{T}$  : elle doit dès lors converger dans  $\mathbb{D}$ . □

## 2.3 Pseudodistance de Carathéodory

La distance de Poincaré ayant de si belles propriétés, il serait intéressant de pouvoir définir sur un domaine quelconque une métrique similaire. C'est ce qui motive l'étude des systèmes de Schwarz-Pick. La définition suivante est tirée de [Din89, p. 47].

**Définition 2.11.** Un système qui associe à chaque domaine de  $\mathbb{C}^d$  une pseudodistance est appelé un **système de Schwarz-Pick** si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) la pseudodistance associée à  $\mathbb{D}$  est la distance de Poincaré ;
- (ii) (inégalité de Schwarz-Pick) si  $\rho_1, \rho_2$  sont les pseudodistances associées à  $\Omega_1, \Omega_2$  respectivement, alors pour toute fonction  $f \in H(\Omega_1, \Omega_2)$  et toute paire de points  $z, w \in \Omega_1$ ,

$$\rho_2(f(z), f(w)) \leq \rho_1(z, w).$$

*Remarque.* Les systèmes de Schwarz-Pick peuvent être définis pour des espaces linéaires normés quelconques au lieu de  $\mathbb{C}^d$ .

La condition (ii) garantit que les fonctions holomorphes sont des contractions sous les choix de pseudodistances. Un système de Schwarz-Pick est une façon d'assigner à tout domaine une pseudométrie qui fait des fonctions biholomorphes des isométries. Ce sont exactement celles que nous recherchons, et comme nous savons que la distance de Poincaré possède cette propriété, nous allons nous assurer que notre système préserve celle-ci sur le disque. De plus, nous pouvons nous servir de notre connaissance du disque unité pour définir des métriques sur n'importe quel domaine.

Pour définir un premier exemple de système de Schwarz-Pick, nous allons faire appel à la technique du *pull-back*, une méthode utilisée souvent en géométrie différentielle. L'idée est d'amener, par le biais d'une fonction holomorphe, une métrique du disque unité dans notre domaine  $\Omega$ . Au lieu de prendre la distance entre les deux points de  $\Omega$ , un domaine sur lequel nous ne connaissons pas de métrique adéquate en général, nous allons considérer la distance de Poincaré entre les images par une fonction holomorphe  $f$  de ces points.

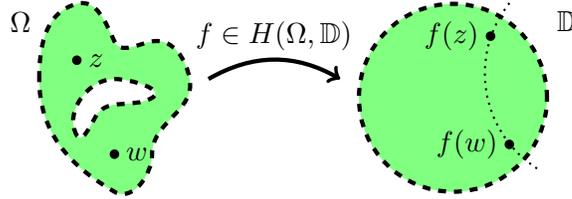


FIGURE 2.3: Le *pull-back* de la métrique  $\rho_{\mathbb{D}}$  par  $f$ .

**Définition 2.12.** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  un domaine. La **pseudodistance de Carathéodory** entre une paire de points  $z, w \in \Omega$  est donnée par

$$C_{\Omega}(z, w) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)).$$

Une fonction pour laquelle le supremum est atteint est appelée une **fonction extrémale de Carathéodory** pour  $z, w$  dans le domaine  $\Omega$ .

*Remarque.* L'infimum sur ces fonctions serait toujours nul. En effet, il existe toujours une fonction constante allant d'un domaine  $\Omega$  vers  $\mathbb{D}$ .

Les propriétés du supremum et de la fonction  $\operatorname{arctanh}$  permettent de démontrer facilement que  $C_\Omega$  est une pseudodistance.

**Proposition 2.13.** *Pour tout domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ ,  $C_\Omega$  est finie et est une pseudodistance.*

*Démonstration.* Soit  $z, w \in \Omega$ . Montrons d'abord que  $C_\Omega(z, w) < \infty$ .

Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $w$  soit contenu dans la boule centrée en  $z$  de rayon  $r$  et que cette boule soit contenue dans  $\Omega$ . La fonction

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D} &\rightarrow \Omega \\ \zeta &\mapsto z + r \cdot \zeta \cdot \frac{z - w}{|z - w|} \end{aligned}$$

est holomorphe et à valeurs dans  $\Omega$ . De plus, si  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ , alors  $f \circ \psi \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . En utilisant les propriétés de la distance de Poincaré, il suit que :

$$\rho_{\mathbb{D}}\left(f \circ \psi(0), f \circ \psi\left(\frac{|z-w|}{r}\right)\right) \leq \rho_{\mathbb{D}}\left(0, \frac{|z-w|}{r}\right) < \infty,$$

De ce fait, la pseudodistance de Carathéodory est finie :

$$C_\Omega(z, w) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(w), f(z)) \leq \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \operatorname{arctanh}\left(\frac{|z-w|}{r}\right) < \infty.$$

S'il n'existe pas de telle boule, puisque  $\Omega$  est connexe, il existe du moins un sous-ensemble

$$\{z = z_0, \dots, z_n = w\} \subset \Omega$$

et  $r > 0$  tels que les boules  $D(z_k, r)$  centrées en  $z$  de rayon  $r$  satisfont  $z_{k+1} \in D(z_k, r) \subset \Omega$ . Dans ce cas, pour toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{\mathbb{D}}(f(z_i), f(z_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{arctanh} \frac{|z_i - z_{i+1}|}{r} < \infty.$$

En prenant le supremum, il suit que  $C_\Omega(z, w) < \infty$  pour toute paire  $z, w$  dans  $\Omega$ .

Il reste à montrer que c'est une pseudodistance. Comme  $\rho_{\mathbb{D}}$  est elle-même une distance,  $C_\Omega$  est clairement positive et symétrique. De plus, si  $z = w$ , alors  $f(z) = f(w)$  pour toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$  et donc  $C_\Omega(z, z) = 0$ . Soit enfin  $\zeta \in \Omega$ . Puisque  $\rho_{\mathbb{D}}$  satisfait l'inégalité triangulaire, il suit que

$$\begin{aligned} C_\Omega(z, w) &= \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \\ &\leq \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(\zeta)) + \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(\zeta), f(w)) \\ &= C_\Omega(z, \zeta) + C_\Omega(\zeta, w). \end{aligned}$$

□

La pseudodistance de Carathéodory est bien une pseudodistance et non une distance, c'est-à-dire qu'en général,  $C_\Omega(z, w)$  n'est pas nulle seulement si  $z = w$ . Remarquons que, sur le disque unité, la pseudodistance de Carathéodory est plus particulièrement une distance : elle correspond à la distance de Poincaré. Voici un simple exemple de domaine pour lequel la pseudodistance de Carathéodory n'est pas nulle seulement entre deux éléments distincts.

**Exemple 2.1.** Prenons  $\Omega = \mathbb{C}$ . Soit  $f \in H(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ . Par le théorème de Liouville (voir [Ahl79, p.122]), puisque  $f$  est une fonction entière et bornée,  $f$  est constante. Par conséquent, pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$  et toute fonction  $f \in H(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ ,  $f(z) = f(w)$ . En particulier, même si  $z \neq w$ , alors

$$C_{\mathbb{C}}(z, w) = \sup_{f \in H(\mathbb{C}, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = 0.$$

L'intérêt des pseudodistances de Carathéodory est qu'elles forment un système de Schwarz-Pick bien particulier.

**Proposition 2.14.** *Les pseudodistances de Carathéodory forment un système de Schwarz-Pick. C'est le plus petit système possible, c'est-à-dire que si l'ensemble  $\{\rho_\Omega\}$  forme un autre système de Schwarz-Pick, alors pour tout domaine  $\Omega$ ,*

$$C_\Omega(z, w) \leq \rho_\Omega(z, w)$$

pour tout  $z, w \in \Omega$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, montrons que  $C_{\mathbb{D}} = \rho_{\mathbb{D}}$ . Soit  $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Par le lemme de Schwarz-Pick,  $f$  est une contraction pour la distance de Poincaré. Ainsi, pour tout  $z, w \in \mathbb{D}$ , l'inégalité suivante est satisfaite

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z, w)$$

et par conséquent, pour toute paire de points  $z, w \in \mathbb{D}$ ,

$$C_{\mathbb{D}}(z, w) = \sup_{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Mais encore, puisque la fonction identité  $Id_{\mathbb{D}} \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , il suit que

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) \leq \sup_{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = C_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Ainsi,  $C_{\mathbb{D}} \equiv \rho_{\mathbb{D}}$  et la condition (i) de la définition 2.11 est satisfaite.

Soit  $\Omega_1, \Omega_2$  des domaines et  $g \in H(\Omega_1, \Omega_2)$ . Montrons que  $g$  est une contraction par rapport à  $C_{\Omega_1}$  et  $C_{\Omega_2}$ . Soit  $h \in H(\Omega_2, \mathbb{D})$ . Alors  $h \circ g \in H(\Omega_1, \mathbb{D})$  et cela entraîne que

$$\rho_{\mathbb{D}}(h \circ g(z), h \circ g(w)) \leq \sup_{f \in H(\Omega_1, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = C_{\Omega_1}(z, w)$$

pour toute paire de points  $z, w \in \Omega_1$ . Ainsi, la fonction  $g$  vérifie

$$C_{\Omega_2}(g(z), g(w)) = \sup_{h \in H(\Omega_1, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(h \circ g(z), h \circ g(w)) \leq C_{\Omega_1}(z, w).$$

La fonction  $g$  est par définition une contraction et (ii) est satisfaite.

Il reste à montrer que c'est le plus petit système de Schwarz-Pick. Soit  $\{\rho_{\Omega}\}$  un autre système de Schwarz-Pick et soit  $z, w \in \Omega$ . Si  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ , alors  $f$  est une contraction, c'est-à-dire que

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq \rho_{\Omega}(z, w).$$

En prenant le supremum sur  $H(\Omega, \mathbb{D})$ , il suit que

$$C_{\Omega}(z, w) \leq \rho_{\Omega}(z, w)$$

et par conséquent, les pseudodistances de Carathéodory forment le plus petit système de Schwarz-Pick possible.  $\square$

*Remarque.* L'essentiel de la démonstration réside dans l'idée de ramener le problème au disque unité, un domaine plus simple.

La pseudodistance de Carathéodory permet d'identifier les isométries entre deux domaines. Dans le cas où le premier domaine est  $\mathbb{D}$ , ces isométries portent un nom particulier.

**Définition 2.15.** Une **géodésique complexe** dans un domaine  $\Omega$  est une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  qui est une isométrie pour la distance de Poincaré et la pseudodistance de Carathéodory sur  $\Omega$ , c'est-à-dire que, pour tout  $z, w \in \mathbb{D}$ ,

$$C_{\Omega}(h(z), h(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Il existe une condition nécessaire et suffisante relativement simple permettant d'identifier les géodésiques complexes d'un domaine.

**Proposition 2.16.** *Une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  est une géodésique complexe si et seulement si elle possède un inverse à gauche.*

*Démonstration.* Soit  $z, w \in \mathbb{D}$ . Si  $h$  est une géodésique complexe, alors par définition,

$$C_{\Omega}(h(z), h(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w),$$

et par conséquent,

$$\sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f \circ h(z), f \circ h(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Ainsi, il existe une suite de fonctions  $\mathcal{F} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\rho_{\mathbb{D}}(g_n \circ h(z), g_n \circ h(w))$  tend vers  $\rho_{\mathbb{D}}(z, w)$ . Les fonctions  $g_n \circ h$  étant holomorphes et bornées,  $\mathcal{F}$  est une famille normale par le théorème de Montel (voir [Kra04, p.16]). Dans ce cas, il existe  $g \in H(\Omega, \mathbb{D})$  telle que

$$\rho_{\mathbb{D}}(g \circ h(z), g \circ h(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Par le lemme de Schwarz-Pick,  $g \circ h$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Par conséquent,  $g \circ h$  possède un inverse à gauche holomorphe, disons  $\tilde{g}$ , tel que  $\tilde{g} \circ g \circ h = Id_{\mathbb{D}}$ . En particulier, la fonction  $\tilde{g} \circ g$  est l'inverse à gauche de  $h$ .

Supposons que  $h \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  est une fonction qui possède un inverse à gauche, disons  $g$ . L'inverse d'une fonction holomorphe étant holomorphe,  $g \in H(\Omega, \mathbb{D})$ . Par conséquent,

$$C_{\Omega}(h(z), h(w)) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f \circ h(z), f \circ h(w)) \geq \rho_{\mathbb{D}}(g \circ h(z), g \circ h(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Par ailleurs, comme  $f \circ h \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  pour toute  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ , le lemme de Schwarz-Pick entraîne que

$$C_{\Omega}(h(z), h(w)) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(f \circ h(z), f \circ h(w)) \leq \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(z, w) = \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Donc  $h$  est une géodésique complexe. □

**Exemple 2.2.** Les fonctions  $\varphi_a$  sont des géodésiques du disque unité car elles possèdent un inverse à gauche,  $\varphi_{-a}$ . Plus généralement, tous les automorphismes du disque unité sont des géodésiques.

**Exemple 2.3.** Voici des géodésiques du bidisque symétrisé  $G$ . La **variété royale** est l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{(2z, z^2) : z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2.$$

La fonction

$$z \mapsto (2z, z^2)$$

envoie le disque unité  $\mathbb{D}$  dans  $\mathcal{V} \cap G$ . Il s'agit d'une géodésique complexe du bidisque dont l'inverse à gauche est la fonction

$$(s, p) \mapsto \frac{1}{2}s.$$

Par abus de langage, cette géodésique est souvent appelée la variété royale. Rappelons que les éléments du bidisque  $(s = z_1 + z_2, p = z_1 z_2)$  sont tels que  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  sont les racine du polynôme  $z^2 - sz + p$  (voir la caractérisation (ii) de la proposition 1.1). La variété royale correspond à l'ensemble des points pour lesquels le discriminant du polynôme est nul. Lorsque c'est le cas, il se trouve en effet que le couple  $(s = z_1 + z_2, p = z_1 z_2)$  sera tel que  $z_1 = z_2$ , le polynôme possédant une unique racine de multiplicité 2.

Une autre géodésique complexe est donnée par la propriété (v) de la proposition 1.1. Pour tout  $\beta \in \mathbb{D}$ , l'application  $z \mapsto (\beta z + \bar{\beta}, z)$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans le bidisque

symétrisé. Elle possède un inverse à gauche holomorphe trivial. Ces géodésiques portent le nom de **géodésiques plates**.

Il existe également une autre forme de la pseudodistance de Carathéodory, qui s'apparente mieux à des métriques classiques de la géométrie différentielle.

**Définition 2.17.** La **forme infinitésimale de la pseudodistance de Carathéodory** de  $z$  en  $v$ , un vecteur de l'espace tangent  $T\Omega_z$  de  $\Omega$  en  $z$ , est

$$c_{\Omega}(z; v) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \frac{|df(z)(v)|}{1 - |f(z)|^2}$$

où  $df(z)(v)$  est la différentielle de  $z$  dans la direction de  $v$ . Une fonction pour laquelle le supremum est atteint est appelée une **fonction extrémale de Carathéodory pour  $z$  le long de  $v$**  dans le domaine  $\Omega$ .

*Remarque.* Cette définition est analogue à celle de la pseudodistance de Carathéodory. Au lieu de la distance de Poincaré se trouve la forme infinitésimale de la distance de Poincaré. Les motivations derrière la définition de cette métrique se retrouvent dans [Din89, sections 3.3 et 4.2].

## 2.4 Pseudodistance de Kobayashi

Il serait intéressant de trouver, si possible, le plus grand système de Schwarz-Pick. L'idée est d'utiliser cette fois la technique du *push-forward*. Cela revient à considérer les fonctions holomorphes du disque unité à valeurs dans  $\Omega$ . La distance entre  $z$  et  $w$  sera donnée par leur préimage dans le disque, d'où la définition suivante.

**Définition 2.18.** La **fonction de Lempert** sur un domaine  $\Omega$  est, pour une paire de points  $z, w \in \Omega$ ,

$$\delta_{\Omega}(z, w) = \inf \rho_{\mathbb{D}}(u, v)$$

où l'infimum est pris sur les fonction  $f \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  tels que  $\{z, w\} \subseteq f(\mathbb{D})$ . Dans la définition,  $u, v$  sont deux antécédents respectifs de  $z$  et  $w$ , c'est-à-dire que  $f(u) = z$  et  $f(v) = w$ .

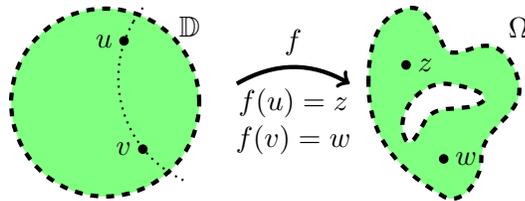


FIGURE 2.4: Le *push-forward* de la métrique  $\rho_{\mathbb{D}}$  par  $f$

Il s'agit d'une définition analogue à celle de la pseudodistance de Carathéodory. Néanmoins, la fonction de Lempert n'est pas une pseudodistance ; l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite en général. Le lecteur peut consulter [Din89, p. 50-51] pour un contre-exemple.

Un autre élément qui rend cette définition un peu naïve est qu'a priori, il n'est pas évident qu'il existe une fonction holomorphe du disque unité interpolant  $z$  et  $w$  des éléments d'un domaine donné. Toutefois, l'existence d'une telle fonction est garantie lorsque  $\Omega$  est un domaine de l'espace à  $d$  variables complexes.

**Proposition 2.19.** *Soit un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  et  $z, w \in \Omega$ . Il existe une fonction  $f \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  telle que  $f(u) = z$  et  $f(v) = w$  pour certains  $u, v \in \mathbb{D}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Omega$  est connexe, il existe un chemin reliant  $z$  à  $w$ , disons  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  de sorte que  $\gamma(0) = z$  et  $\gamma(1) = w$ . En vertu de la version vectorielle du théorème de Stone-Weirstrass, et en ajustant le paramétrage, nous pouvons supposer que  $\gamma$  est un polynôme. Notons  $\tilde{\gamma}$  le polynôme  $\gamma$  à variables complexes.

Il existe un voisinage ouvert simplement connexe  $V$  de  $[0, 1]$  tel que  $\tilde{\gamma}(V) \subseteq \Omega$ . Par le théorème de l'application conforme de Riemann, il existe une fonction biholomorphe  $\varphi$  du disque unité à valeurs dans  $V$ . La fonction  $\tilde{\gamma} \circ \varphi$  fait l'affaire.  $\square$

La fonction de Lempert n'étant pas une pseudodistance, il faut trouver un autre système qui pourrait former le plus grand système de Schwarz-Pick. Comme la fonction de Lempert possédait déjà plusieurs des propriétés désirées, il suffit en fait de produire une pseudodistance à partir de la fonction Lempert qui induira implicitement l'inégalité triangulaire.

**Définition 2.20.** La pseudodistance de Kobayashi sur un domaine  $\Omega$  est

$$K_{\Omega}(z, w) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\Omega}(z_i, z_{i+1})$$

où l'infimum est pris sur tous les  $n \in \mathbb{N}$  et les sous-ensembles joignant  $z$  à  $w$   $\{z = z_0, \dots, z_n = w\} \subset \Omega$  de  $n + 1$  éléments.

La plupart des propriétés désirées pour  $K_{\Omega}$  étaient déjà satisfaites par  $\delta_{\Omega}$ . Pour montrer que  $K_{\Omega}$  les préserve et satisfait de plus l'inégalité triangulaire, il suffit d'utiliser les propriétés de l'infimum.

**Proposition 2.21.**  *$K_{\Omega}$  est une pseudodistance pour tout domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  un domaine. Montrons que  $K_{\Omega}$  est une pseudodistance. La fonction  $K_{\Omega}$  est positive et symétrique, car  $\delta_{\Omega}$  est elle-même positive et symétrique étant

l'infimum de la distance de Poincaré. Soit  $z \in \Omega$ , alors la chaîne  $z_0 = z_1 = z$  est un sous-ensemble valide et clairement  $\delta_\Omega(z, z) = 0$  d'où  $K_\Omega(z, z) = 0$ .

Soit  $z, w, \zeta \in \Omega$ . Soit deux sous-ensembles  $\{z = z_0, \dots, z_n = \zeta\}, \{\zeta = w_0, \dots, w_m = w\} \subset \Omega$ . Comme leur union est en particulier un sous-ensemble joignant  $z$  à  $w$ ,

$$K_\Omega(z, w) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \delta_\Omega(z_j, z_{j+1}) + \sum_{jk=0}^{m-1} \delta_\Omega(w_k, w_{k+1}).$$

En prenant l'infimum sur les sous-ensembles joignant  $z$  à  $\zeta$ , puis sur ceux joignant  $\zeta$  à  $w$ , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$K_\Omega(z, w) \leq K_\Omega(z, \zeta) + K_\Omega(\zeta, w).$$

Ainsi,  $K_\Omega$  est une pseudodistance par définition.  $\square$

*Remarque.* Si  $\delta_\Omega$  est une pseudodistance, alors il suit que  $K_\Omega = \delta_\Omega$ . En effet, dans ce cas, par l'inégalité triangulaire, tout sous-ensemble  $\{z = z_0, \dots, z_n = w\} \subset \Omega$  est tel que

$$\delta_\Omega(z, w) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \delta_\Omega(z_i, z_{i+1}).$$

L'exemple 2.4 montrera également qu'il peut bien s'agir d'une pseudodistance au sens stricte.

Cette démonstration illustre comment la définition de  $K_\Omega$  revient à travailler avec  $\delta_\Omega$ . L'idée est qu'il est tout de même plus naturel et plus simple de d'utiliser la définition de la fonction de Lempert. Les pseudodistances de Kobayashi ainsi définies forment un système de Schwarz-Pick tel que désiré.

**Proposition 2.22.** *Les pseudodistances de Kobayashi  $\{K_\Omega\}$  forment le plus grand système de Schwarz-Pick, c'est-à-dire que si l'ensemble  $\{\rho_\Omega\}$  forme un autre système de Schwarz-Pick, alors pour tout domaine  $\Omega$ ,*

$$K_\Omega(z, w) \geq \rho_\Omega(z, w)$$

pour tout  $z, w \in \Omega$ .

*Démonstration.* Montrons avant tout que les  $\{K_\Omega\}$  forment bien un système de Schwarz-Pick. Soit  $z, w \in \mathbb{D}$ . Comme  $Id_{\mathbb{D}} \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ,

$$\delta_{\mathbb{D}}(z, w) = \inf_{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D}), f(u)=z, f(v)=w} \rho_{\mathbb{D}}(u, v) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Soit maintenant  $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  avec  $u, v \in \mathbb{D}$  tels que  $f(u) = z$  et  $f(v) = w$ . Puisque les fonctions holomorphes sont des contractions pour la distance de Poincaré,

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) = \rho_{\mathbb{D}}(f(u), f(v)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(u, v).$$

En prenant l'infimum, il suit par définition que

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) \leq \delta_{\mathbb{D}}(z, w)$$

Donc  $\delta_{\mathbb{D}} \equiv \rho_{\mathbb{D}}$  et en vertu de la remarque précédente,  $K_{\mathbb{D}} \equiv \rho_{\mathbb{D}}$ . Ainsi la propriété (i) de la définition 2.11 est satisfaite.

Soit  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{C}^d$ ,  $g \in H(\Omega_1, \Omega_2)$  et une paire de points  $z, w \in \Omega_1$ . Il faut montrer que  $g$  est une contraction par rapport aux pseudodistances de Kobayashi. Soit  $h \in H(\mathbb{D}, \Omega_1)$  et  $a, b \in \mathbb{D}$ , deux éléments dans les préimages de  $z$  et  $w$  respectivement. En particulier,  $g \circ h \in H(\mathbb{D}, \Omega_2)$ ,  $g \circ h(a) = g(z)$ ,  $g \circ h(b) = g(w)$  et il suit que

$$\delta_{\Omega_2}(g(z), g(w)) = \inf_{\substack{f \in H(\mathbb{D}, \Omega_2), \\ f(u)=g(z), f(v)=g(w)}} \rho_{\mathbb{D}}(u, v) \leq \rho_{\mathbb{D}}(a, b).$$

Comme c'est vrai pour toute fonction  $h \in H(\mathbb{D}, \Omega_1)$ ,

$$\delta_{\Omega_2}(g(z), g(w)) \leq \inf_{\substack{h \in H(\mathbb{D}, \Omega_1), \\ h(a)=z, h(b)=w}} \rho_{\mathbb{D}}(a, b) = \delta_{\Omega_1}(z, w).$$

Enfin, soit un sous-ensemble  $\{z = z_0, \dots, z_n = w\} \subset \Omega_1$  et son image par  $g$ ,  $\{g(z) = g(z_0), \dots, g(z_n) = g(w)\}$ , qui est un sous-ensemble de  $\Omega_2$ . Alors par définition,

$$K_{\Omega_2}(g(z), g(w)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\Omega_2}(g(z_j), g(z_{j+1})) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\Omega_1}(z_j, z_{j+1}).$$

En prenant l'infimum sur les sous-ensembles joignant  $z$  à  $w$ , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$K_{\Omega_2}(g(z), g(w)) \leq K_{\Omega_1}(z, w).$$

Ainsi, l'ensemble des  $\{K_{\Omega}\}$  satisfait la définition de système de Schwarz-Pick.

Soit maintenant  $\{\rho_{\Omega}\}$ , un autre système de Schwarz-Pick. Considérons un domaine  $\Omega$ , une paire de points  $z, w \in \Omega$  et une fonction  $f \in H(\mathbb{D}, \Omega)$  avec  $u, v \in \mathbb{D}$  telle que  $f(u) = z$  et  $f(v) = w$ . Dans ce cas, il est toujours vrai que

$$\rho_{\Omega}(z, w) = \rho_{\Omega}(f(u), f(v)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(u, v)$$

et en prenant l'infimum sur  $H(\mathbb{D}, \Omega)$ ,

$$\rho_{\Omega}(z, w) \leq \delta_{\Omega}(z, w).$$

Finalement, soit un sous-ensemble joignant  $z$  à  $w$   $\{z = z_0, \dots, z_n = w\} \subset \Omega$ . Il suit que

$$\rho_{\Omega}(z, w) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{\Omega}(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\Omega}(z_i, z_{i+1})$$

et en prenant l'infimum sur les différents sous-ensembles,

$$\rho_{\Omega}(z, w) \leq K_{\Omega}(z, w).$$

Cela montre que  $K_{\Omega}$  est le plus grand système de Schwarz-Pick. □

Avec les définitions précédentes, il est clair que, sur tout domaine  $\Omega$  les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$C_{\Omega} \leq K_{\Omega} \leq \delta_{\Omega}.$$

Cette inégalité sera souvent utile pour calculer  $K_{\Omega}$ . Dans plusieurs cas, il s'avère que  $\delta_{\Omega} = C_{\Omega}$ . Lorsque c'est le cas, nous n'avons pas à calculer  $K_{\Omega}$  à partir de sa définition. Un bon exemple où cette astuce sera utilisée est dans le calcul de la pseudodistance de Kobayashi sur le bidisque symétrisé lui-même, tel que nous le verrons à la section 4.4. Pour l'instant, voici un exemple plus simple du calcul de la distance de Kobayashi.

**Exemple 2.4.** Calculons  $K_{\mathbb{C}}$ . Soit  $z, w \in \mathbb{C}$  et  $u, v \in \mathbb{D}$  distincts. Soit le polynôme

$$p(\zeta) = z + \frac{\zeta - u}{v - u}(w - z).$$

Notons que  $p \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ ,  $p(u) = z$  et  $p(v) = w$ . Comme il existe un tel polynôme pour une paire  $u$  et  $v$  arbitrairement proche dans un même disque de rayon  $r > 0$ , il suit que

$$\delta_{\mathbb{C}}(z, w) = \inf_{f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})} \rho_{\mathbb{D}}(u, v) = 0.$$

Enfin, puisque  $K_{\mathbb{C}} \leq \delta_{\mathbb{C}}$ ,  $K_{\mathbb{C}}(z, w) = 0$  pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Il n'est pas si rare, dans le cas des domaines du plan complexe, que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident.

**Proposition 2.23.** *Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un domaine borné. Si  $\Omega$  est simplement connexe, alors  $C_{\Omega} \equiv K_{\Omega}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  est un domaine borné et simplement connexe. Par le théorème de l'application de Riemann, il existe une fonction biholomorphe  $f \in H(\mathbb{D}, \Omega)$ . Soit  $z, w \in \Omega$  et  $u, v \in \mathbb{D}$  tels que  $f(u) = z$  et  $f(v) = w$ . Par définition,

$$\delta_{\Omega}(z, w) \leq \rho_{\mathbb{D}}(u, v).$$

De plus,  $f^{-1} \in H(\Omega, \mathbb{D})$  et par conséquent,

$$C_{\Omega}(z, w) = \sup_{g \in H(\Omega, \mathbb{D})} \rho_{\mathbb{D}}(g(z), g(w)) \geq \rho_{\mathbb{D}}(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(u, v).$$

Les deux inégalités précédentes entraînent que

$$\delta_{\Omega}(z, w) \leq C_{\Omega}(z, w).$$

Or, puisqu'il est toujours vrai que  $C_{\Omega} \leq K_{\Omega} \leq \delta_{\Omega}$ , les pseudodistances de Carathéodory, de Kobayashi ainsi que la fonction de Lempert coïncident.  $\square$

Plus généralement, Lempert a présenté, dans le cadre d'une conférence [Lem84], la caractérisation suivante :

**Théorème 2.24.** *Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ , pour  $d \geq 2$ . Si  $\Omega$  est un domaine borné et fortement linéairement convexe, alors  $C_\Omega \equiv K_\Omega$ . En particulier, les deux pseudodistances sont égales sur les domaines convexes.*

Lempert décrit la propriété d'être fortement linéairement convexe comme suit [Lem82, Section 1] :  $\Omega$  est dit linéairement convexe si à travers tout  $z_0$  sur le bord de  $\Omega$ , il passe un hyperplan complexe passant par  $z_0$  disjoint de  $\Omega$  ; de plus,  $\Omega$  est dit fortement linéairement convexe s'il est borné par une courbe  $C^2$  et que de petites perturbations  $C^2$  le laissent linéairement convexe. Pour une définition plus technique, voir [KW13] et [PZ12]. Notons au passage qu'un domaine convexe est fortement linéairement convexe.

Ainsi, dans certains cas particuliers, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la pseudodistance de Kobayashi lorsque celle de Carathéodory est connue. Cependant, en général, vérifier qu'un domaine est fortement linéairement convexe est assez compliqué. Enfin, remarquons que cette condition n'est pas a priori nécessaire pour que les deux pseudodistances soient égales. Néanmoins, il n'y a, à ce jour, aucun contre-exemple venant infirmer cette hypothèse.

L'étude des fonctions holomorphes, mène, par le biais de la géométrie, vers l'étude de nouvelles métriques particulières. Sur le disque unité, la distance de Poincaré est en ce sens une métrique de choix. Une manière d'assigner à chaque domaine une pseudodistance avec des propriétés semblables à celles de la distance de Poincaré est appelé système de Schwarz-Pick. Les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi s'illustrent ici comme formant respectivement les plus petit et le plus grand systèmes. Il arrive parfois, sur certains domaines, que les deux pseudodistances soient égales. Néanmoins, calculer explicitement ces pseudodistances n'est pas une mince affaire. Dans le cas du bidisque symétrisé, la solution viendra à travers la théorie des opérateurs.

## Chapitre 3

# Calcul de la pseudodistance de Carathéodory

Comme vu dans le chapitre précédent, la pseudodistance de Carathéodory est un outil mathématique permettant d’approfondir l’étude des fonctions sur un domaine donné. Plus particulièrement, il serait intéressant de calculer celle-ci sur le bidisque symétrisé. Dans [AY04], Agler et Young ont présenté une démarche permettant d’exprimer celle-ci explicitement. Cette méthode nécessitera la construction d’un calcul fonctionnel pour les  $d$ -uplets d’opérateurs. Ensuite, il sera possible de définir les domaines spectraux, qui fournissent de manière surprenante une formule pour la pseudodistance de Carathéodory. Une caractérisation précise des couples d’opérateurs pour lesquels le bidisque symétrisé  $G$  est spectral permettra d’expliciter la pseudodistance de Carathéodory ainsi que sa forme infinitésimale.

### 3.1 Calcul fonctionnel pour un $d$ -uplet matriciel

La théorie des opérateurs peut être utilisée lors du calcul de la pseudodistance de Carathéodory sur un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ . Pour voir ce lien, qui est par ailleurs assez subtil, il faut établir quelques notions du calcul matriciel. La présentation faite ici sera de nature plutôt informelle mais devrait suffire à satisfaire l’intuition du lecteur.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux  $d$ -uplets commutatifs de matrices carrées  $2 \times 2$ , disons  $M = (M^1, \dots, M^d)$ , où les matrices  $M^r \in M_2(\mathbb{C})$  vérifient

$$M^r M^s = M^s M^r \quad \text{pour tout } r, s \in \{1, \dots, d\}$$

L’ensemble de ces  $d$ -uplets d’opérateurs matriciels sera noté  $\mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  et à moins d’indication contraire, nous supposerons toujours que chaque matrice est à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . À chaque  $d$ -uplet, nous pouvons, comme dans le cas d’un seul opérateur, définir et calculer son spectre. Rappelons la définition classique du spectre d’un opérateur [Rud73, p. 98].

**Définition 3.1.** Soit  $T$  un opérateur linéaire borné. Le spectre de  $T$ , noté  $\sigma(T)$ , est l'ensemble des scalaires  $\lambda$  tel que l'opérateur  $T - \lambda I$ , où  $I$  est l'identité, n'a pas d'inverse.

Une généralisation pour les  $d$ -uplets d'opérateurs fut développée par Taylor dans [Tay60]. Dans le cas particulier où les opérateurs du  $d$ -uplet sont des matrices de dimension finie, la définition suivante est équivalente à celle donnée par Taylor à l'époque (voir [Agl90, p. 491]).

**Définition 3.2.** Soit  $M = (M^1, \dots, M^d) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . L'**ensemble résolvant** de  $M$  est l'ensemble des  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d) \in \mathbb{C}^d$  pour lesquels il existe des matrices  $2 \times 2$ , disons  $N^1, \dots, N^d$ , satisfaisant

$$(\lambda^1 I - M^1)N^1 + \dots + (\lambda^d I - M^d)N^d = I \quad (3.1)$$

où  $I$  dénote la matrice identité dans  $M_2(\mathbb{C})$ . Le **spectre** de  $M$ , noté  $\sigma(M)$  est le complément dans  $\mathbb{C}^d$  de l'ensemble résolvant.

*Remarque.* Dans la littérature actuelle, ce spectre est plus couramment appelé **spectre de Taylor** pour le distinguer des autres généralisations.

Comme Taylor le souligne dans son article, cette définition prête au spectre des qualités qui en font une généralisation des plus polyvalentes.

1. Le spectre est un ensemble compact et non vide.
2. Soit  $M = (M^1, \dots, M^d) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  et la projection  $\pi : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$  sur les  $d - 1$  premières coordonnées. Alors  $\sigma((M^1, \dots, M^{d-1})) = \pi(\sigma((M^1, \dots, M^d)))$ .
3. Il est possible de définir un calcul fonctionnel pour les fonctions qui sont holomorphes sur un voisinage du spectre de tout  $d$ -uplet de matrices.

La première propriété est l'une des plus connues du spectre défini classiquement pour un opérateur borné. La seconde nous assure en particulier que si  $\pi_r : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  est la projection sur la  $r^{\text{ième}}$  coordonnée, alors  $\sigma(M^r) = \pi_r(\sigma((M^1, \dots, M^{d-1})))$ , ce qui indique que cette définition est bien une généralisation. La proposition suivante, qui spécialise la seconde propriété, se démontre à partir de la définition du spectre seulement.

**Proposition 3.3.** Soit  $M = (M^1, \dots, M^d) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . Si  $z = (z^1, \dots, z^d) \in \sigma(M)$ , alors  $z^r$  est dans le spectre de  $M^r$  pour tout  $r \in \{1, \dots, d\}$ .

*Démonstration.* Montrons la contraposée de l'énoncé, c'est-à-dire que si  $z^r \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M^r)$ , alors pour tout  $d$ -uplet  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d)$  tel que  $\lambda^r = z^r$ , l'équation

$$(\lambda^1 I - M^1)N^1 + \dots + (\lambda^d I - M^d)N^d = I \quad (3.2)$$

possède une solution  $N^1, \dots, N^d \in M_2(\mathbb{C})$ . Rappelons que  $I$  dénote la matrice identité  $2 \times 2$ .

Lorsque  $z^r \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M^r)$ , la matrice  $z^r I - M^r$  est inversible et par conséquent, pour toute matrice  $B \in M_2(\mathbb{C})$ , il existe  $N^r \in M_2(\mathbb{C})$  telle que

$$(z^r I - M^r)N^r = B.$$

C'est en particulier vrai si

$$B = I - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^d (\lambda^s I - M^s)N^s$$

pour un choix quelconque de matrices  $N^s \in M_2(\mathbb{C})$  avec  $s \neq r$ . Ainsi, l'équation 3.2 possède une solution et, par définition, les  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d) \in \mathbb{C}^d$  tels que  $\lambda^r = z^r$  ne sont pas dans le spectre de  $M$ .  $\square$

*Remarque.* Si  $z_1 \neq z_2$ , et qu'en particulier  $z_1^r, z_2^r$  sont distincts, alors  $\sigma(M^r) = \{z_1^r, z_2^r\}$  car  $M^r$  est une matrice  $2 \times 2$ .

Cette propriété permet de calculer le spectre d'un  $d$ -uplet commutatif d'opérateurs.

**Exemple 3.1.** Soit  $z_1 = (z_1^1, \dots, z_1^d)$ ,  $z_2 = (z_2^1, \dots, z_2^d) \in \mathbb{C}^d$  et le  $d$ -uplet

$$M = (M^1, \dots, M^d) = \left( \begin{bmatrix} z_1^1 & (z_2^1 - z_1^1)c \\ 0 & z_1^1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} z_1^d & (z_2^d - z_1^d)c \\ 0 & z_1^d \end{bmatrix} \right)$$

où  $c$  est un nombre réel positif. Montrons que le spectre de  $M$  est l'ensemble

$$\{(z_1^1, \dots, z_1^d), (z_2^1, \dots, z_2^d)\}.$$

Par construction, le spectre de chaque matrice  $M^r$  correspond à l'ensemble  $\{z_1^r, z_2^r\}$  pour  $r \in \{1, \dots, d\}$ . Ainsi, si  $z = (z^1, \dots, z^d) \in \sigma(M)$ ,  $z^r$  est égal à  $z_1^r$  ou  $z_2^r$  par la proposition précédente.

Posons  $z_j = (z_j^1, \dots, z_j^d)$  pour  $j = 1, 2$ . Un calcul montre que  $z_1, z_2 \in \sigma(M)$ . En effet, supposons qu'il existe des matrices deux par deux telles que

$$(z_1^1 I - M^1)N^1 + \dots + (z_1^d I - M^d)N^d = I.$$

Alors

$$(z_2^1 - z_1^1) \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N^1 + \dots + (z_2^d - z_1^d) \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N^d = I,$$

et nous avons en particulier

$$\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left( (z_2^1 - z_1^1)N^1 + \dots + (z_2^d - z_1^d)N^d \right) = I,$$

ce qui signifierait que la première matrice est inversible. Or, ce n'est jamais le cas. Un calcul similaire montrerait que  $z_2 \in \sigma(M)$ , mais qu'il existe des matrices  $N^1, \dots, N^d$  pour toutes les autres combinaisons de  $z_j^r$ .

Revenons maintenant à la troisième propriété du spectre mentionnée précédemment. Celle-ci se rapporte plutôt à la construction habituelle du calcul fonctionnel : pour une fonction holomorphe  $f$  et un opérateur  $T$  donnés, nous aimerions définir l'opérateur  $f(T)$ , de sorte à ce qu'il étende de manière naturelle  $T$  par rapport à  $f$ . Pour cela, il faut que  $1(T) = I$ , que  $z(T) = T$  et que la correspondance soit stable par rapport à l'addition et la multiplication. Nous verrons comment cette idée dépend du spectre d'un opérateur, et dans ce cas, comment généraliser le procédé aux fonctions à plusieurs variables et aux  $d$ -uplets d'opérateurs.

Restreignons-nous d'abord au cas  $d = 1$ . Pour une matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , une définition toute simple s'impose pour les polynômes : si  $p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$ , alors, pour satisfaire aux exigences décrites ci-haut, il suffit de définir  $p(M) = \sum_{k=0}^N a_k M^k$ . En particulier, si la matrice est diagonalisable, disons  $M = PDP^{-1}$  l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} p(M) &= \sum_{k=0}^N a_k P D^k P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N a_k \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^N a_k \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $M$ . Ainsi, il suffit d'appliquer  $p$  aux valeurs propres de  $M$ . Or, les matrices ne sont malheureusement pas toutes diagonalisables. Au mieux, elles sont toujours tridiagonalisables. Supposons que la matrice a la forme suivante :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire que c'est une matrice de Jordan avec une valeur propre  $\lambda$  de multiplicité  $n$ . Un calcul similaire montre que

$$\begin{aligned} p(J) &= \begin{bmatrix} p(\lambda) & \sum_{k=1}^N a_k k \lambda^{k-1} & \dots & \sum_{k=n}^N a_k \binom{k}{n} \lambda^{k-n} \\ & p(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=1}^N a_k k \lambda^{k-1} \\ (0) & & & p(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(\lambda) & \frac{p'(\lambda)}{1!} & \frac{p''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{p^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & p(\lambda) & \frac{p'(\lambda)}{1!} & \ddots & \frac{p^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & p(\lambda) & \frac{p'(\lambda)}{1!} \\ (0) & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ces deux remarques permettent de définir un calcul fonctionnel valide pour une fonction holomorphe  $f$  et un opérateur matriciel  $M$  donnés. La nature de l'opérateur  $f(M)$  dépend toujours entièrement des valeurs propres de  $M$ , soit, comme nous sommes en dimension finie, du spectre de  $M$ . L'exemple 1.3 montrait que comme  $\sigma(M)$  est un ensemble fini, c'est aussi un ensemble polynomialement convexe. Par conséquent, si la fonction  $f$  est holomorphe au voisinage du spectre de  $M$ , les hypothèses du théorème d'Oka-Weil (voir le théorème 1.5) sont satisfaites et donc  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes sur ce dernier. C'est ce qui motive la définition suivante.

**Définition 3.4.** Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Supposons que  $M$  possède la tridiagonalisation  $M = PJP^{-1}$  où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_k \end{bmatrix}, J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \Omega$  sont les valeurs propres de  $M$  de multiplicité  $n_j$ . Si  $f \in H(\Omega, \mathbb{C})$ , alors

$$f(M) = P \begin{bmatrix} f(J_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f(J_s) \end{bmatrix} P^{-1}, \text{ où } f(J_j) = \begin{bmatrix} f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} \\ & f(\lambda_j) & \ddots & \frac{f^{(n_j-2)}(\lambda_j)}{(n_j-2)!} \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & f(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

Revenons aux  $d$ -uplets  $M = (M^1, \dots, M^d) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . De même, nous désirons trouver un homomorphisme qui, à toute fonction  $f \in H(\Omega)$  telle que  $\sigma(M) \subseteq \Omega$ , lui associe un opérateur matriciel. De plus, il faut que  $1(M) = I$  et que le monôme  $z^r$  satisfasse  $z^r(M) = M^r$ . Comme précédemment, commençons par définir la notion pour un polynôme à  $d$ -variables complexes  $p \in \mathbb{C}^d[z]$ . Si  $p(z) = \sum a_k z^k$ , avec la somme sur le multi-indice  $k = (k_1, \dots, k_d)$ , alors tout naturellement  $p(M) = \sum a_k (M^1)^{k_1} \dots (M^d)^{k_d}$ . Comment expliciter la relation ? Nous ne pouvons malheureusement répéter le calcul fait dans le cas à une variable.

Les  $d$ -uplets commutatifs d'opérateurs de  $\mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  possèdent une décomposition similaire à la tridiagonalisation des matrices. En effet, les  $d$ -uplets de matrices de même spectre sont équivalents unitairement.

**Définition 3.5.** Une matrice  $U$  est dite **unitaire** si  $U^* = U^{-1}$ .

*Remarque.* Cette notion se veut une généralisation des matrices réelles orthogonales.

**Définition 3.6.** Soit  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . Le  $d$ -uplet d'opérateur  $M_1$  est dit **unitairement équivalent** à  $M_2$  s'il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $M_2 = U^* M_1 U$ , c'est-à-dire que  $M_2^r = U^* M_1^r U$  pour tout  $r \in \{1, \dots, d\}$ . Notons cette équivalence  $\cong$ .

Il est clair que  $\cong$  satisfait bien toutes les propriétés d'une relation d'équivalence, soit la réflexivité, la symétrie et la transitivité. L'intérêt de l'équivalence unitaire vient, en partie, du fait qu'elle laisse le spectre d'une matrice invariant. Plus généralement, si  $P$  est une matrice inversible, alors

$$\begin{aligned}\lambda I - P^{-1}MP &= P^{-1}(\lambda P - MP) \\ &= P^{-1}(\lambda(PP^{-1} - M)P) \\ &= P^{-1}(\lambda I - M)P.\end{aligned}$$

Ainsi, les opérateurs  $\lambda I - P^{-1}MP$  et  $P^{-1}(\lambda I - M)P$  satisfont simultanément l'équation 3.1. Comme  $U^* = U^{-1}$ , l'équivalence unitaire préserve elle aussi le spectre. Mais encore, il s'avère que tout  $d$ -uplet commutatif d'opérateurs  $M$  de matrices  $2 \times 2$  avec valeurs propres distinctes possède une décomposition en termes de matrice unitaire. Cette décomposition ressemble beaucoup au principe selon lequel une matrice réelle symétrique deux par deux possède une diagonalisation dont la matrice de passage est orthogonale.

**Proposition 3.7.** *Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  distincts, et soit  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  telle que  $\sigma(M) = \{z_1, z_2\}$ . Alors il existe une constante  $c \geq 0$  telle que*

$$M \cong \left( \begin{bmatrix} z_1^1 & (z_2^1 - z_1^1)c \\ 0 & z_1^1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} z_1^d & (z_2^d - z_1^d)c \\ 0 & z_1^d \end{bmatrix} \right) \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Comme  $z_1 \neq z_2$ , il existe un indice  $r$  tel que  $z_1^r \neq z_2^r$ . Ainsi, par la proposition 3.3,  $\sigma(M^r) = \{z_1^r, z_2^r\}$ . Ce sont deux éléments distincts, et par conséquent,  $M^r$  possède deux vecteurs propres linéairement indépendants  $u_1, u_2$ , que nous pouvons supposer normalisés et tels que  $\langle u_2, u_1 \rangle = |\langle u_2, u_1 \rangle|$ . Mais encore, puisque les matrices  $M^s$ , où  $s \in \{1, \dots, d\}$ , commutent entre elles, elles partagent les mêmes vecteurs propres  $u_1, u_2$  avec valeurs propres respectives  $z_1^s, z_2^s$ . Par le procédé de Gram-Schmidt, les vecteurs

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = \frac{u_2 - |\langle u_2, u_1 \rangle|u_1}{(1 - |\langle u_2, u_1 \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

forment une base orthonormale.

Soit  $U$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $u'_1, u'_2$ . Alors  $U$  est une matrice unitaire et, pour tout  $r \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$U^* M^r U = \begin{bmatrix} z_1^r & (z_2^r - z_1^r)c \\ 0 & z_1^r \end{bmatrix} \text{ où } c = \frac{|\langle u_2, u_1 \rangle|}{(1 - |\langle u_2, u_1 \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4)$$

L'équivalence suit de cette égalité.

Pour montrer l'équation 3.4, utilisons le fait que  $M^r$  est diagonalisable, car elle possède deux vecteurs propres linéairement indépendants, c'est-à-dire que

$$M^r = P \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} P^{-1}$$

où  $P$  est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$  et  $u_2 = (u_2^1, u_2^2)$ . Pour simplifier les calculs, posons  $c_1 = |\langle u_2, u_1 \rangle|$  et  $c_2 = (1 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}$ . Remarquons que  $c_1$  et  $c_2$  ainsi définis sont deux nombres réels positifs. De plus,  $c_2$  est non nul, car il correspond à la norme du vecteur  $u_2 - |\langle u_2, u_1 \rangle|u_1$ , un vecteur non nul puisque  $u_1$  et  $u_2$  sont linéairement indépendants. En utilisant la définition du produit scalaire des vecteurs complexes et le fait que  $U$  est unitaire, il suit que

$$\begin{aligned} U^* M^r U &= (U^* P) \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} (U^* P)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{u_1^1} & \overline{u_1^2} \\ \frac{\overline{u_2^1} - c_1 \overline{u_1^1}}{c_2} & \frac{\overline{u_2^2} - c_1 \overline{u_1^2}}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \overline{u_1^1} & \overline{u_1^2} \\ \frac{\overline{u_2^1} - c_1 \overline{u_1^1}}{c_2} & \frac{\overline{u_2^2} - c_1 \overline{u_1^2}}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 \\ u_2^1 & u_2^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_2, u_1 \rangle \\ \frac{\langle u_1, u_2 \rangle - c_1 \langle u_1, u_1 \rangle}{c_2} & \frac{\langle u_2, u_2 \rangle - c_1 \langle u_2, u_1 \rangle}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_2, u_1 \rangle \\ \frac{\langle u_1, u_2 \rangle - c_1 \langle u_1, u_1 \rangle}{c_2} & \frac{\langle u_2, u_2 \rangle - c_1 \langle u_2, u_1 \rangle}{c_2} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que par définition,  $|\langle u_2, u_1 \rangle| = \langle u_2, u_1 \rangle$ , et que la norme de  $u_1$  est 1, le produit donne

$$\begin{aligned} U^* M^r U &= \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ \frac{c_1 - c_1}{c_2} & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ \frac{c_1 - c_1}{c_2} & c_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^r & 0 \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_1}{c_2} \\ 0 & \frac{1}{c_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1^r & \frac{c_1}{c_2} (z_2^r - z_1^r) \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En posant  $c := \frac{c_1}{c_2}$ , nous retrouvons l'équation 3.4, qui est satisfaite pour tout  $r \in \{1, \dots, d\}$ .  $\square$

Le  $d$ -uplet du membre de droite de l'équation 3.3, noté dorénavant  $M(z, c)$  pour  $z = \{z_1, z_2\}$ , ont une structure qui permet de représenter toutes les matrices de spectre contenant les deux éléments distincts  $\{z_1, z_2\}$ . Un tel  $d$ -uplet satisfait les deux propriétés qui suivent, qui en font un bon représentant d'une classe d'équivalence formée de  $d$ -uplets de même spectre.

**Proposition 3.8.** *Soit  $M(z, c) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . Alors  $\sigma(M(z, c)) = \{z_1, z_2\}$  et  $M(z', c') \cong M(z, c)$  si et seulement si  $z = z'$  et  $c = c'$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $M(z, c) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . Il a déjà été démontré, dans l'exemple 3.1, que  $\sigma(M(z, c)) = \{z_1, z_2\}$ .

Supposons que  $M(z', c') \cong M(z, c)$ . Comme l'équivalence unitaire laisse, entre autre, le spectre invariant, il suit que  $z = z'$ . De même, puisque  $U$  est une matrice unitaire, le produit scalaire entre les vecteurs propres associés aux matrices sera laissé invariant et donc  $c = c'$ .  $\square$

Comme les  $d$ -uplets de matrices qui n'ont pas de valeurs propres doubles sont unitairement équivalents à une matrice de la forme  $M(z, c)$ , il suffit, pour une fonction holomorphe  $f$ , de définir l'opérateur  $f(M)$  pour ces  $d$ -uplets seulement. Dans le cas particulier d'un polynôme  $p(w) = \sum_k a_k w^k \in \mathbb{C}[w^d]$ , où  $k = (k_1, \dots, k_d)$  est un multi-indice, l'opérateur  $p(M)$  est toujours défini par

$$p(M) = \sum_k a_k M^k.$$

Or, puisque  $M = U^* M(z, c) U \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  et que  $U$  est unitaire,

$$p(M) = U^* p(M(z, c)) U.$$

Soit maintenant  $M(z, c) = (M^1, \dots, M^d) \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  avec valeurs propres distinctes  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^d$ . Remarquons que pour un monôme quelconque  $q(w) = w^r w^s$ , avec  $r, s \in \{1, \dots, d\}$ , la définition donne

$$\begin{aligned} q(M(z, c)) &= M^r M^s \\ &= \begin{bmatrix} z_1^r & (z_2^r - z_1^r)c \\ 0 & z_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^s & (z_2^s - z_1^s)c \\ 0 & z_2^s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1^r z_1^s & (z_2^r z_2^s - z_1^r z_1^s)c \\ 0 & z_2^r z_2^s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$q(M(z, c)) = \begin{bmatrix} q(z_1) & (q(z_2) - q(z_1))c \\ 0 & q(z_2) \end{bmatrix},$$

une structure similaire aux matrices du  $d$ -uplet  $M(z, c)$ . Un résultat similaire pourrait être obtenu avec un monôme quelconque. Par linéarité, il devient clair que pour tout polynôme  $p$ ,

$$p(M(z, c)) = \begin{bmatrix} p(z_1) & (p(z_2) - p(z_1))c \\ 0 & p(z_2) \end{bmatrix}.$$

Cette dernière égalité permet de définir  $f(M)$  pour toute fonction  $f$  holomorphe sur un domaine  $\Omega$  qui contient  $\sigma(M)$ . Encore une fois, puisque  $\sigma(M) \subseteq \Omega$ , le théorème d'Oka-Weil permet d'affirmer que  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes sur  $\sigma(M)$ . La caractérisation des  $d$ -uplets commutatifs de matrices  $M$  de la proposition 3.7 nous amène à définir l'opérateur  $f(M)$  de la manière suivante :

**Définition 3.9.** Soit  $z = \{z_1, z_2\}$ , tels que  $z_1 \neq z_2$ , un  $d$ -uplet commutatif de matrices  $M$  dont le spectre est  $z$  et un domaine  $\Omega \in \mathbb{C}^d$  qui contient  $z_1, z_2$ . Si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $\Omega$ , alors l'opérateur  $f(M)$  est défini comme suit :

$$f(M) = U^* f(M(z, c)) U = U^* \begin{bmatrix} f(z_1) & (f(z_2) - f(z_1))c \\ 0 & f(z_2) \end{bmatrix} U$$

où  $c \geq 0$  et la matrice unitaire  $U$  satisfont  $M = U^* M(z, c) U \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ .

N'oublions pas que cette définition de  $f(M)$  ne s'applique qu'aux  $d$ -uplets dont le spectre possède deux valeurs propres distinctes. Or, comme nous n'avons développé cette théorie que dans le but de calculer la pseudodistance de Carathéodory, seuls les opérateurs ayant dans leur spectre deux éléments distincts seront à l'étude. En effet, la suite de notre démarche montrera que le calcul de la pseudodistance de Carathéodory entre deux points  $z_1, z_2$  passe par l'étude des opérateurs qui ont ces deux éléments comme spectre. Puisque le calcul de la pseudodistance entre deux mêmes points est une question triviale, nous n'aurons pas à considérer les  $d$ -uplets commutatifs de matrices dont le spectre ne contient qu'un seul élément.

## 3.2 À propos des domaines spectraux

Maintenant que nous avons donné un sens à l'expression  $f(M)$  pour les  $d$ -uplets commutatifs d'opérateurs  $M$  de matrices deux par deux dont le spectre est formé de deux éléments distincts, nous pouvons définir les domaines spectraux. C'est d'ailleurs cette notion qui lie la pseudodistance de Carathéodory à la théorie des opérateurs. Désignons d'abord  $\|T\|$ , la norme de l'opérateur  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  qui correspond plus précisément à l'expression

$$\|T\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^2, \|v\| \leq 1} \|Tv\|.$$

**Définition 3.10.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ . Un domaine borné  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$  est un **domaine spectral pour**  $M$  si  $\Omega$  contient  $\sigma(M)$  et est tel que, pour toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ ,

$$\|f(M)\| \leq 1. \quad (3.5)$$

Un ensemble compact et borné  $K$  est un **ensemble spectral pour**  $M$  si  $K$  contient  $\sigma(M)$  et si l'inégalité 3.5 est satisfaite pour toute fonction  $f$  holomorphe définie sur un voisinage de  $K$ .

Rappelons que l'hypothèse  $\sigma(M) \subseteq \Omega$  est essentielle pour que l'expression  $f(M)$  ait du sens. L'inégalité 3.5, appelée inégalité de Von Neumann, pourrait être réécrite de façon tout à fait équivalente comme suit

$$\|f(M)\| \leq \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \quad (3.6)$$

pour toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{C})$  bornée sur  $\Omega$ .

Remarquons de plus que la propriété d'être un domaine spectral dépend de l'opérateur en question. L'inégalité de Von Neumann garantit que l'opérateur associé à une fonction holomorphe bornée demeure borné. Mieux encore, elle permet de contrôler  $\|f(M)\|$  par la norme de  $f$ . C'est ce qui lie la géométrie du domaine  $\Omega$  à ses fonctions holomorphes. La démonstration de la proposition suivante montre bien comment travailler avec la définition des ensembles spectraux.

**Proposition 3.11.** *Soit  $(S, P)$  une paire d'opérateurs commutatifs matriciels et supposons que le rayon spectral de  $S$  est strictement plus petit que 2. L'ensemble  $\Gamma$  est spectral si et seulement si  $G$  est un domaine spectral.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $G$  est un domaine spectral. Puisque  $G$  est inclus dans  $\Gamma$ , le spectre  $\sigma(S, P)$  est aussi inclus dans  $\Gamma$ . De plus, comme pour toute fonction  $f \in H(G, \mathbb{D})$ ,

$$\|f(S, P)\| \leq 1$$

et que  $H(\Gamma, \mathbb{D}) \subseteq H(G, \mathbb{D})$ , l'inégalité de Von-Neumann est satisfaite pour toutes les fonctions holomorphes sur  $\Gamma$ .

Supposons maintenant que  $\Gamma$  est un ensemble spectral. Soit  $(s, p) \in \sigma(S, P)$ . Puisque le rayon spectral de  $S$  est inférieur à 2,  $|s| < 2$  et comme pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ ,  $\|\alpha\Phi_\alpha(S, P)\| \leq 1$ , la relation

$$\left| \frac{2\alpha p - s}{2 - \alpha s} \right| < 1$$

est satisfaite. Il suit de la propriété (iv) de la caractérisation de  $G$  que  $(s, p) \in G$ . En particulier,  $\sigma(S, P) \subseteq G$ .

Il ne reste à montrer que toute fonction  $f \in H(G, \mathbb{C})$  satisfait

$$\|f(S, P)\| \leq \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

Montrons d'abord que c'est vrai pour un polynôme  $q$ . Un polynôme est en particulier holomorphe et borné sur tout voisinage borné  $U$  de  $\Gamma$  et comme  $\Gamma$  est spectral,

$$\|q(S, P)\| \leq \sup_{z \in U} |q(z)|.$$

Par continuité, il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un voisinage  $U_\varepsilon$  sur lequel

$$\sup_{z \in U_\varepsilon} |q(z)| \leq \sup_{z \in \Gamma} |q(z)| + \varepsilon = \sup_{z \in G} |q(z)| + \varepsilon.$$

Donc

$$\|q(S, P)\| \leq \sup_{z \in G} |q(z)| + \varepsilon,$$

et comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|q(S, P)\| \leq \sup_{z \in G} |q(z)|.$$

Soit enfin une fonction  $f \in H(G, \mathbb{C})$  bornée. Puisque  $G$  est polynomialement convexe, le théorème d'Oka-Weil montre que  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes  $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sur

$$\overline{G_r} := \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : |z_1| \leq r, |z_2| \leq r\}$$

pour tout  $r \in (0, 1)$ . Pour toute suite  $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , la relation suivante est satisfaite :

$$\|q_j(S, P)\| \leq \sup_{z \in G} |q_j(z)|.$$

Lorsque  $r \rightarrow 1$ ,  $\sigma(S, P) \subseteq G_r$  et puisque  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynôme satisfaisant la relation précédente,

$$\|f(S, P)\| \leq \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

L'inégalité de Von Neumann est par conséquent aussi satisfaite pour toute fonction bornée dans  $H(G, \mathbb{C})$ . Ainsi, les deux propriétés pour que  $G$  soit spectral pour  $(S, P)$  sont vérifiées.  $\square$

Pour vérifier l'inégalité de Von Neumann, nous aurons souvent recours à la proposition suivante, une caractérisation fort simple des opérateurs qui sont des contractions.

**Proposition 3.12.** *Soit une matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors la norme de  $M$  est inférieure ou égale à 1, c'est-à-dire que  $M$  est une contraction, si et seulement si  $1 - M^*M$  est semi-définie positive.*

*Démonstration.* La démonstration est assez élémentaire. Pour tout  $z \in \mathbb{C}^n$  non nul,

$$\begin{aligned} z^*(1 - M^*M)z \geq 0 &\Leftrightarrow z^*z \geq (Mz)^*Mz \\ &\Leftrightarrow \|z\|^2 \geq \|Mz\|^2 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{\|Mz\|}{\|z\|}. \end{aligned}$$

Il suit par définition que les deux conditions de la proposition sont équivalentes.  $\square$

Une première application de cette propositions se fera dans le théorème suivant. Dans [Agl90], il est démontré comment la pseudodistance de Carathéodory sur un domaine  $\Omega$  peut être calculée lorsque les opérateurs pour lesquels  $\Omega$  est spectral sont connus.

Pour des raisons pratiques, posons

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) := \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)).$$

La fonction  $\operatorname{arctanh}$  étant strictement croissante, il se trouve que la pseudodistance de Carathéodory  $C_\Omega$  est telle que

$$C_\Omega(z_1, z_2) = \operatorname{arctanh} \tilde{C}_\Omega(z_1, z_2).$$

Le fameux  $\operatorname{arctanh}$  n'a d'intérêt que pour la complétude de la métrique de Poincaré sur le disque : la plupart des théorèmes présentés demeurent valides en utilisant la simple métrique pseudohyperbolique  $d_{\mathbb{D}}$ . Pour alléger ces résultats, ceux-ci seront donc énoncés par le biais de  $\tilde{C}_\Omega$ .

**Théorème 3.13.** Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^d$  avec  $z_1 \neq z_2$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  avec  $\sigma(M) = \{z_1, z_2\}$  et leurs vecteurs propres normalisés  $u_1, u_2$ . Alors un domaine borné  $\Omega$  qui contient  $\sigma(M)$  est un domaine spectral pour  $M$  si et seulement si

$$1 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \geq \tilde{C}_\Omega(z_1, z_2).$$

*Démonstration.* Soit  $z_1, z_2$  et  $M$  tels que dans le théorème ainsi que  $u_1, u_2$  une paire de vecteurs propres normalisés. Soit également  $\Omega$  un domaine borné qui contient  $\sigma(M)$ . Par définition de domaine spectral, il ne reste qu'à montrer que  $\|f(M)\| \leq 1$  pour toute  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$  si et seulement si

$$1 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \geq \tilde{C}_\Omega(z_1, z_2).$$

Posons  $z = \{z_1, z_2\}$  et  $c = \frac{|\langle u_2, u_1 \rangle|}{(1 - |\langle u_2, u_1 \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}}$ . La proposition 3.7 dit que  $M \cong M(z, c)$ , une forme avec laquelle il sera plus simple de travailler.

Supposons dans un premier temps que  $\|f(M)\| \leq 1$  pour toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ . La proposition 3.12 indique que si  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$ , alors la matrice

$$I - f(M(z, c))^* f(M(z, c)) = \begin{bmatrix} 1 - |f(z_1)|^2 & -c \overline{f(z_1)} (f(z_2) - f(z_1)) \\ -c f(z_1) \overline{(f(z_2) - f(z_1))} & 1 - c^2 |f(z_2) - f(z_1)|^2 - |f(z_2)|^2 \end{bmatrix}$$

est semi-définie positive. Selon le critère de Sylvester, c'est le cas lorsque les mineurs principaux de cette matrice sont supérieurs ou égaux à 0. Cette condition se traduit simplement par

$$\begin{aligned} 1 - |f(z_1)|^2 &\geq 0 \\ 1 - c^2 |f(z_2) - f(z_1)|^2 - |f(z_2)|^2 &\geq 0 \\ (1 - |f(z_1)|^2)(1 - c^2 |f(z_2) - f(z_1)|^2 - |f(z_2)|^2) - c^2 |f(z_2) - f(z_1)|^2 |f(z_1)|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas présent, puisque  $f$  est à valeurs dans le disque unité  $\mathbb{D}$ , seule la dernière inégalité doit être vérifiée, la seconde étant une conséquence de celle-ci. Cette dernière inégalité est équivalente à

$$1 - c^2 |f(z_2) - f(z_1)|^2 - |f(z_1)|^2 - |f(z_2)|^2 + |f(z_1)|^2 |f(z_2)|^2 \geq 0. \quad (3.7)$$

Lorsque  $f(z_1) \neq f(z_2)$ ,

$$\frac{(1 - |f(z_1)|^2)(1 - |f(z_2)|^2)}{|f(z_2) - f(z_1)|^2} \geq c^2.$$

En utilisant l'identité

$$1 + \frac{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}{|b - a|^2} = \frac{|1 - \bar{a}b|^2}{|b - a|^2},$$

il suit que l'inégalité est satisfaite :

$$\frac{|1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)|^2}{|f(z_2) - f(z_1)|^2} - 1 \geq c^2.$$

En explicitant  $c$  en termes des vecteurs  $u_1, u_2$ , il suit que

$$\frac{|f(z_2) - f(z_1)|^2}{|1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)|^2} \leq \frac{1}{1 + c^2} = 1 - |\langle u_2, u_1 \rangle|^2. \quad (3.8)$$

Si toute  $f \in H(G, \mathbb{D})$  est telle que  $f(z_1) = f(z_2)$ , alors  $\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) = 0$  et l'inégalité est trivialement vraie. Sinon, alors il existe au moins une fonction  $f$  telle que  $f(z_1) \neq f(z_2)$ . Dans ce cas, l'inégalité 3.8 entraîne, par définition de  $\tilde{C}_G$ , que

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) \leq 1 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2.$$

Réciproquement, si

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) \leq 1 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2,$$

alors toute fonction  $f \in H(\Omega, \mathbb{D})$  satisfait l'inégalité 3.8. Conséquemment, la matrice

$$I - f(M(z, c))^* f(M(z, c))$$

est semi-définie positive et cela démontre que l'opérateur  $f(M)$  est une contraction.  $\square$

Le théorème précédent, caractérisant les domaines spectraux  $\Omega$  pour un  $d$ -uplet d'opérateurs  $M$ , donne une formule plus explicite pour calculer la pseudodistance de Carathéodory.

**Corollaire 3.14.** *Si  $\Omega$  est un domaine borné dans  $\mathbb{C}^d$  et si  $z_1, z_2 \in \Omega$  avec  $z_1 \neq z_2$ , alors*

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) = 1 - \sup |\langle u_1, u_2 \rangle|^2$$

où le supremum est pris sur toute les bases normalisées  $u_1, u_2$  des vecteurs propres associés à un  $d$ -uplet  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  qui a pour spectre  $\{z_1, z_2\}$  et pour lequel  $\Omega$  est un domaine spectral.

*Démonstration.* Puisque le théorème précédent est vrai pour tous les opérateurs  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  de spectre  $\{z_1, z_2\}$  pour lesquels  $\Omega$  est un domaine spectral, en prenant l'infimum sur les toutes les bases normalisées possibles de chaque côté de l'équation, le théorème 3.13 entraîne que

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) \leq 1 - \sup |\langle u_1, u_2 \rangle|^2.$$

Étant donné que le théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour  $\tilde{C}_\Omega$ , il se trouve en réalité que

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) = 1 - \sup |\langle u_1, u_2 \rangle|^2. \quad \square$$

Les outils développés précédemment produisent une formule permettant de calculer précisément la pseudodistance de Carathéodory en étudiant certains opérateurs. Le lien entre les domaines spectraux et la pseudodistance  $C_\Omega$  peut être surprenant pour les néophytes dans le domaine. C'est essentiellement l'inégalité de Von Neumann dans la définition de domaine spectral qui fait le pont entre les deux concepts : elle impose une condition sur les fonctions holomorphes de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{D}$ .

### 3.3 Pseudodistance de Carathéodory sur le bidisque symétrisé

Comme dit précédemment, la spectralité d'un domaine dépend de l'opérateur dont il est question. Heureusement, dans le cas du bidisque symétrisé  $G$ , il est possible de caractériser les opérateurs pour lesquels l'ensemble est spectral. La proposition suivante, qui se retrouve dans [AY99] fournit un critère permettant de vérifier si  $G$  est spectral pour un couple commutatif d'opérateurs. Nous n'en ferons pas la démonstration ici car elle est assez longue et dépasse le cadre de ce mémoire.

**Proposition 3.15.** *Soit  $(S, P)$  une paire commutative d'opérateurs matriciels. Alors  $\Gamma$  est un ensemble spectral pour  $(S, P)$  si et seulement si l'opérateur*

$$2(1 - \bar{\alpha}^2 P^* \alpha^2 P) - \alpha S + \bar{\alpha} S^* \alpha^2 P - \bar{\alpha} S^* + \bar{\alpha}^2 P^* \alpha S$$

*est semi-défini positif pour tout  $\alpha \in \mathbb{D}$ .*

Ce critère s'exprime mieux en utilisant les fameuses fonctions  $\Phi_\omega$ , si pratiques dans l'étude du bidisque symétrisé. En ces termes, la proposition suivante est d'une ressemblance frappante avec la propriété (iv) de la caractérisation en coordonnées  $(s, p)$  du bidisque symétrisé.

**Théorème 3.16.** *Soit  $(S, P)$  une paire commutative d'opérateurs matriciels et supposons que le rayon spectral de  $S$  est plus petit que 2. Alors  $G$  est un domaine spectral pour  $(S, P)$  si et seulement si, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,*

$$\|\Phi_\omega(S, P)\| \leq 1.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $G$  est un domaine spectral pour  $(S, P)$ . La proposition 3.11 montre que  $\Gamma$  est un ensemble spectral pour  $(S, P)$ . En factorisant la relation de la proposition 3.15, il suit que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{D}$ ,

$$(2 - \alpha S)^*(2 - \alpha S) - (2\alpha^2 P - \alpha S)^*(2\alpha^2 P - \alpha S) \geq 0.$$

En réorganisant les termes, cela donne

$$\|2 - \alpha S\|^2 \geq |\alpha|^2 \|2\alpha P - S\|^2.$$

Autrement dit, comme par hypothèse le rayon spectral de  $\alpha S$  est plus petit que 2, cette dernière relation est équivalente à dire que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{D}$ ,

$$|\alpha| \|\Phi_\alpha(S, P)\| \leq 1. \tag{3.9}$$

Par continuité, la relation 3.9 est satisfaite pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  et il suit que

$$\|\Phi_\omega(S, P)\| = |\omega|^2 \|\Phi_\omega(S, P)\| \leq 1.$$

Supposons maintenant que  $\|\Phi_\omega(S, P)\| \leq 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Dans ce cas, l'application  $\alpha \mapsto \alpha\Phi_\alpha(S, P)$  est holomorphe dans  $\overline{\mathbb{D}}$ , c'est-à-dire que les entrées de la matrice  $\alpha\Phi_\alpha(S, P)$  sont des fonctions holomorphes de  $\overline{\mathbb{D}}$ . Ainsi, le principe du maximum entraîne que  $\|\alpha\Phi_\alpha(S, P)\| \leq 1$  sur le domaine de  $\alpha$ . Le critère pour les contractions donne

$$1 - \overline{\alpha}\Phi_\alpha(S, P)^* \alpha\Phi_\alpha(S, P) \geq 0.$$

En explicitant, cela montre que pour tout  $\alpha \in \mathbb{D}$ ,

$$(2 - \alpha S)^*(2 - \alpha S) - (2\alpha^2 P - \alpha S)^*(2\alpha P - \alpha S) \geq 0.$$

Par le théorème 3.15,  $\Gamma$  est spectral pour  $(S, P)$ . L'équivalence de la proposition 3.11 entraîne que  $G$  est un domaine spectral.  $\square$

Sur  $G$ , les coordonnées  $(s, p)$  peuvent être exploitées pour définir des couples d'opérateurs de spectre donné. Soit  $z_1 = (s_1, p_1)$  et  $z_2 = (s_2, p_2) \in G$  distincts et soit une base  $u = (u_1, u_2)$  de vecteurs normalisés. Définissons  $(S_u, P_u)$  la paire commutative d'opérateurs qui a pour représentation dans la base  $u$

$$S_u = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \quad P_u = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Remarquons que tout couple commutatif d'opérateur qui a pour spectre deux éléments distincts  $z_1, z_2 \in G$  possède une telle représentation, et que par conséquent, en prenant toutes les bases  $u$  possibles, les opérateurs  $(S_u, P_u)$  forment un inventaire exhaustif de tous les couples d'opérateurs de spectre  $\{z_1, z_2\}$ . En ces termes, reformulons le corollaire 3.14 pour  $G$ .

**Corollaire 3.17.** *Soit  $z_1 = (s_1, p_1), z_2 = (s_2, p_2) \in G$  distincts. Alors*

$$\tilde{C}_\Omega(z_1, z_2) = 1 - \sup |\langle u_1, u_2 \rangle|^2$$

*où le supremum est pris sur toute les bases normalisées  $u = (u_1, u_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  tel que  $G$  est un domaine spectral pour le couple commutatif d'opérateurs  $(S_u, P_u)$  défini par les équations 3.10.*

Les deux derniers résultats orientent nos recherches vers les opérateurs  $(S_u, P_u)$  qui font de  $\Phi_\omega(S_u, P_u)$  une contraction. Notre critère pour les opérateurs de norme inférieure ou égale à 1 permet ici de caractériser leur action par rapport à la base  $u$ .

**Lemme 3.18.** *Soit  $\omega \in \mathbb{T}$  et une base normalisée  $u = (u_1, u_2)$ . Considérons les couple commutatif d'opérateurs  $(S_u, P_u)$  tels que définis précédemment sur  $G$ . Alors*

$$\|\Phi_\omega(S_u, P_u)\| \leq 1$$

*si et seulement si*

$$|\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \leq 1 - d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))^2.$$

*Démonstration.* La proposition 3.12 montre que  $\Phi_\omega(S_u, P_u)$  est une contraction si et seulement si  $I - \Phi_\omega(S_u, P_u)^* \Phi_\omega(S_u, P_u)$  est un opérateur semi-défini positif. Avec la base  $u$ , cette condition est équivalente au fait que la matrice suivante est semi-définie positive :

$$[\langle (I - \Phi_\omega(S_u, P_u)^* \Phi_\omega(S_u, P_u)) u_i, u_j \rangle]_{i,j=1}^2.$$

Or, par définition,

$$\Phi_\omega(S_u, P_u) u_i = \Phi_\omega(s_i, p_i) u_i = \Phi_\omega(z_i) u_i.$$

Donc  $\Phi_\omega(S_u, P_u)$  est une contraction si et seulement si

$$\left[ \left\langle \left( I - \overline{\Phi_\omega(z_j)} \Phi_\omega(z_i) \right) u_i, u_j \right\rangle \right]_{i,j=1}^2 = \left[ \left( 1 - \overline{\Phi_\omega(z_j)} \Phi_\omega(z_i) \right) \langle u_i, u_j \rangle \right]_{i,j=1}^2 \quad (3.11)$$

est semi-définie positive. Par le critère de Sylvester, puisque les entrées sur la diagonale de cette matrice sont positives, le déterminant de 3.11 doit lui aussi être positif, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} (1 - |\Phi_\omega(z_1)|^2) |u_1|^2 (1 - |\Phi_\omega(z_2)|^2) |u_2|^2 &\geq |1 - \overline{\Phi_\omega(z_1)} \Phi_\omega(z_2)|^2 |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \\ \Rightarrow \frac{(1 - |\Phi_\omega(z_1)|^2) (1 - |\Phi_\omega(z_2)|^2)}{|1 - \overline{\Phi_\omega(z_1)} \Phi_\omega(z_2)|^2} &\geq |\langle u_1, u_2 \rangle|^2. \end{aligned}$$

Des calculs montrent que

$$1 - d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))^2 = 1 - \frac{|\Phi_\omega(z_1) - \Phi_\omega(z_2)|^2}{|1 - \overline{\Phi_\omega(z_1)} \Phi_\omega(z_2)|^2} = \frac{(1 - |\Phi_\omega(z_1)|^2) (1 - |\Phi_\omega(z_2)|^2)}{|1 - \overline{\Phi_\omega(z_1)} \Phi_\omega(z_2)|^2}.$$

En remplaçant dans l'inégalité précédente, cela démontre que le lemme est satisfait.  $\square$

Tous ces résultats permettent d'expliciter la pseudodistance de Carathéodory, comme cela a été fait dans [AY04].

**Théorème 3.19.** *Soit  $z_1, z_2 \in G$ . La distance de Carathéodory sur  $G$  est donnée par la formule suivante :*

$$C_G(z_1, z_2) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} (\rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))).$$

*Remarque.* L'une des conséquences du théorème est que  $C_G$  est bien une distance et pas seulement une pseudodistance. En effet, puisque

$$\Phi_\omega(z_1) = \Phi_\omega(z_2)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  si et seulement si  $z_1 = z_2$ , il est désormais vrai que

$$C_G(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

*Démonstration.* Soit  $z_1 = (s_1, p_1), z_2 = (s_2, p_2) \in G$ . Si  $z_2 = z_1$ , alors  $C_G(z_1, z_2) = 0$  et il est évident que  $d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))$  sera également nulle. Dans ce cas, la question est triviale.

Si maintenant  $z_1$  et  $z_2$  sont distincts, le corollaire 3.17 stipule que

$$\tilde{C}_G(z_1, z_2)^2 = 1 - \sup |\langle u_1, u_2 \rangle|^2$$

où le supremum est pris sur toutes les bases normalisées  $u_1, u_2$  de  $\mathbb{C}^2$  telles que  $G$  est un domaine spectral pour le couple d'opérateurs  $(S_u, P_u)$  défini par les équations 3.10.

Comme  $z_1, z_2 \in G$ , il suit que  $|s_1| < 2$ , que  $|s_2| < 2$  et donc que le rayon spectral de  $S_u$  est strictement inférieur 2. Par conséquent, les conditions du théorème 3.16 sont satisfaites et  $G$  est spectral pour le couple d'opérateurs  $(S_u, P_u)$ . Prenons le supremum sur les  $\omega$  tels que l'opérateur  $\|\Phi_\omega(S_u, P_u)\|$  est une contraction. Ces opérateurs sont également caractérisés dans le lemme 3.18. En résumé :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_G(z_1, z_2)^2 &= 1 - \sup\{|\langle u_1, u_2 \rangle|^2 : |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \leq 1 - d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))^2 \forall \omega \in \mathbb{T}\} \\ &= 1 - \inf_{\omega \in \mathbb{T}} (1 - d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))^2) \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{T}} d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))^2. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbb{T}$  étant fermé, le supremum est bien un maximum. Finalement, puisque la fonction  $\operatorname{arctanh}$  est bijective sur l'intervalle  $(-1, 1)$ , il suit que

$$C_G(z_1, z_2) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \operatorname{arctanh} d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)).$$

□

Ce théorème donne une expression précise pour  $C_G$ . Puisque  $\Phi_\omega(s, p) = \frac{2\omega p - s}{2 - \omega s}$ , une formulation plus explicite serait

$$C_G(z_1, z_2) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \operatorname{arctanh} \left| \frac{(s_2 p_1 - s_1 p_2) \omega^2 + 2(p_2 - p_1) \omega + s_1 - s_2}{(s_1 - \overline{s_2} p_1) \omega^2 - 2(1 - p_1 \overline{p_2}) \omega + \overline{s_2} - s_1 \overline{p_2}} \right|.$$

En plus de nous permettre de calculer explicitement la distance de Carathéodory entre toute paire de points dans  $G$ , le théorème nous en apprend également sur la forme d'une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1, z_2 \in G$ . Sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ , le maximum sera toujours atteint, et donc, il existe un  $\omega_0$  pour lequel  $\Phi_{\omega_0}$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1$  et  $z_2$ .

Remarquons enfin que, dans certains cas particuliers, l'expression pour  $C_G$  peut être énormément simplifiée. Voici quelques exemples intéressants.

**Exemple 3.2.** Supposons que  $z_1 = (0, 0)$  et  $z_2 = (s, p)$ . Il a été démontré dans [AY01] que dans ce cas particulier,

$$C_G(z_1, z_2) = \operatorname{arctanh} \left( \frac{2|s - \bar{s}p| + |s^2 - 4p|}{4 - |s|^2} \right).$$

La fraction rationnelle étant forcément inférieure à 1, cette égalité fortifie l'intuition derrière la propriété (vi) de la caractérisation du bidisque symétrisé.

**Exemple 3.3.** Supposons que  $z_1$  et  $z_2$  sont tous deux sur la variété royale  $\mathcal{V}$ . Dans ce cas, il existe  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$  tels que  $z_j = (2\zeta_j, \zeta_j^2)$  pour  $j = 1, 2$ . Un calcul direct donne, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(z_j) &= \Phi_\omega(2\zeta_j, \zeta_j^2) = \frac{2\omega\zeta_j^2 - 2\zeta_j}{2 - \omega 2\zeta_j} \\ &= -\zeta_j. \end{aligned}$$

Remarquons que l'expression de  $\Phi_\omega$  est indépendante du choix de  $\omega$ . Ainsi, la formule précédente montre que

$$C_G(z_1, z_2) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \rho_{\mathbb{D}}(-\zeta_1, -\zeta_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\zeta_1, \zeta_2).$$

**Exemple 3.4.** Soit  $z_1$  et  $z_2$  sur une même géodésique plate  $\beta \in \mathbb{D}$ . Dans ce cas, il existe  $p_1, p_2 \in \mathbb{D}$  tels que  $z_i = (\beta p_i + \bar{\beta}, p_i)$  pour  $j = 1, 2$ . Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(z_j) &= \Phi_\omega(\beta p_j + \bar{\beta}, p_j) = \frac{2\omega p_j - (\beta p_j + \bar{\beta})}{2 - \omega(\beta p_j + \bar{\beta})} = \frac{(2\omega - \beta)p_j - \bar{\beta}}{\omega(2\bar{\omega} - \bar{\beta} - \beta p_j)} \\ &= \frac{2\omega - \beta}{2 - \omega\bar{\beta}} \cdot \frac{p_j - \frac{\bar{\beta}}{2\omega - \beta}}{1 - p_j \frac{\beta}{2\bar{\omega} - \bar{\beta}}}. \\ &= c\varphi_a(p_j) \end{aligned}$$

où  $c = \frac{2\omega - \beta}{2 - \omega\bar{\beta}} \in \mathbb{T}$  et  $a = \frac{\bar{\beta}}{2\omega - \beta} \in \mathbb{D}$ . Par conséquent, dans le cas particulier où  $z_j$  est sur une géodésique plate,  $\Phi_\omega(z_j)$  est en fait un produit de Blaschke de degré 1 évalué en  $p_j$ . Puisque de telles fonctions sont des automorphismes du disque unité, elles laissent la métrique de Poincaré invariante. Plus précisément,

$$\begin{aligned} C_G(z_1, z_2) &= \max_{\omega \in \mathbb{T}} \rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \rho_{\mathbb{D}}(c\varphi_a(p_1), c\varphi_a(p_2)) \\ &= \rho_{\mathbb{D}}(p_1, p_2). \end{aligned}$$

Remarquons que cette dernière expression est encore une fois indépendante de  $\omega$  et que l'expression de  $C_G$  revient à calculer la distance de Poincaré entre les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  des deux éléments sur la géodésique plate  $\beta$ .

### 3.4 La forme infinitésimale de Carathéodory

Nous cherchons maintenant à calculer, pour un certain  $z_0 \in G$  et un vecteur  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial s} + v_2 \frac{\partial}{\partial p} \in TG_{z_0}$ , la quantité

$$c_\Omega(z_0; v) = \sup_{f \in H(\Omega, \mathbb{D})} \frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2}$$

où  $df(z_0)(v)$  est la différentielle de  $z_0$  dans la direction de  $v$ . Cela peut être réalisé tel qu'il a été montré précédemment, c'est-à-dire en exprimant  $c_G$  selon les couples d'opérateurs pour lesquels  $G$  sera spectral.

Commençons par définir certains opérateurs dépendants d'un élément  $z_0 \in \Omega$  et d'un certain vecteur  $v \in T\Omega_{z_0}$ . Notons de plus  $\mathcal{P}_{z_0, v}$  l'ensemble des polynômes qui s'annulent en  $z_0$  et dont la dérivée dans la direction de  $v$  s'annule en  $z_0$ .

**Proposition 3.20.** *Soit  $z_0 \in \mathbb{C}^d$ ,  $v = \sum_r v^r \frac{\partial}{\partial z_0^r} \in T\mathbb{C}_{z_0}^d$  et  $\mathcal{P}_{z_0, v}$  l'ensemble des polynômes qui s'annulent en  $z_0$  et dont la différentielle dans la direction de  $v$  s'annule en  $z_0$ . Soit maintenant  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$  tel que  $p(M) = 0$  pour tout polynôme  $p \in \mathcal{P}_{z_0, v}$ . Alors il existe une constante réelle  $\kappa \geq 0$  telle que*

$$M \cong \left( \begin{bmatrix} z_0^1 & \kappa v^1 \\ 0 & z_0^1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} z_0^d & \kappa v^d \\ 0 & z_0^d \end{bmatrix} \right).$$

La démonstration de cette proposition, qui provient de [Agl90, proposition 3.8], est en tout point similaire à celle de la proposition 3.7. Comme nous n'utiliserons cette forme que pour le cas particulier  $z_0 \in G$ , nous n'insisterons pas plus sur cette affirmation. L'important ici est qu'une telle caractérisation permet encore une fois de donner un sens à l'expression  $f(M)$  pour tous ces  $d$ -uplets d'opérateurs  $M \in \mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$ , où  $f$  est toujours une fonction holomorphe.

Soit un  $d$ -uplet commutatif de matrices  $M = M(z_0, v, \kappa)$  et un polynôme  $p(w) = \sum_k a_k w^k \in \mathbb{C}[w^d]$  où  $k = (k_1, \dots, k_d)$  est un multi-indice. Définissons, tel que précédemment, l'opérateur  $P(M)$  par

$$P(M) = \sum_k \left[ a_k \left( \prod_r (M^r)^{k_r} \right) \right].$$

Dans le cas présent, la forme particulière des matrices  $M(z_0, v, \kappa)$  permettra d'explicitier plus simplement l'opérateur  $P(M)$ .

Si  $q(w) = w^r w^s$ , il est possible de calculer directement  $q(M)$ . En effet, le produit donne

$$\begin{aligned} q(M) &= \begin{bmatrix} z_0^r & \kappa v^r \\ 0 & z_0^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0^s & \kappa v^s \\ 0 & z_0^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0^r z_0^s & \kappa(z_0^s v^r + z_0^r v^s) \\ 0 & z_0^r z_0^s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q(z_0) & \kappa \cdot dq(z_0)(v) \\ 0 & q(z_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En itérant la méthode, un calcul similaire permet de montrer qu'il en est de même pour un monôme quelconque. En effet, supposons que  $q(w)$  est un monôme quelconque satisfaisant

$$q(M) = \begin{bmatrix} q(z_0) & \kappa \cdot dq(z_0)(v) \\ 0 & q(z_0) \end{bmatrix}.$$

Posons  $p(w) := q(w)w^r$  pour un certain  $r \in \{1, \dots, d\}$ . Par définition,

$$p(M) = q(M)M^r.$$

Il suit donc que

$$\begin{aligned} p(M) &= \begin{bmatrix} q(z_0) & \kappa \cdot dq(z_0)(v) \\ 0 & q(z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0^r & \kappa v^r \\ 0 & z_0^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(z_0)z_0^r & \kappa \cdot (q(z_0)v^r + z_0^r dq(z_0)(v)) \\ 0 & q(z_0)z_0^r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(z_0) & \kappa \cdot (q(z_0) \frac{\partial w^r}{\partial w^r}(z_0)v^r + z_0^r dq(z_0)(v)) \\ 0 & p(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z_0) & \kappa \cdot dp(z_0)(v) \\ 0 & p(z_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par linéarité, pour un polynôme  $p \in \mathbb{C}^d[w]$ , l'opérateur  $P(M)$  est défini par

$$p(M) = \begin{bmatrix} p(z_0) & \kappa \cdot dp(z_0)(v) \\ 0 & p(z_0) \end{bmatrix}.$$

Soit maintenant une fonction holomorphe  $f$  sur un domaine  $\Omega$ . Lorsque  $z_0 \in \Omega$ , le théorème d'Oka-Weil, montre qu'il est possible d'étendre la définition précédente à l'opérateur  $f(M(z_0, v, \kappa))$  :

$$f(M(z_0, v, \kappa)) = \begin{bmatrix} f(z_0) & \kappa \cdot df(z_0)(v) \\ 0 & f(z_0) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Sur  $G$ , pour profiter du système de coordonnées  $(s, p)$ , nous allons redéfinir un couple commutatif d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$  particulier. Soit un élément  $z_0 = (s_0, p_0) \in G$  et un vecteur  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial s} + v_2 \frac{\partial}{\partial p} \in TG_{z_0}$ . Pour  $\kappa > 0$ , considérons les opérateurs  $S_\kappa, P_\kappa$  sur  $\mathbb{C}^2$  définis par

$$S_\kappa = \begin{bmatrix} s_0 & \kappa v_1 \\ 0 & s_0 \end{bmatrix}, \quad P_\kappa = \begin{bmatrix} p_0 & \kappa v_2 \\ 0 & p_0 \end{bmatrix}.$$

La proposition suivante, une spécialisation du théorème 3.10 dans [Agl90], montre comment les opérateurs pour lesquels  $G$  est spectral permettent de calculer  $c_G$ .

**Proposition 3.21.** *Soit  $z_0 = (s_0, p_0) \in G$  et  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial s} + v_2 \frac{\partial}{\partial p}$ . Alors*

$$c_G(z_0; v) \leq \frac{1}{\kappa} \Leftrightarrow G \text{ est un domaine spectral pour } (S_\kappa, P_\kappa) \quad (3.13)$$

En particulier, il suit que

$$c_G(z_0; v) = \inf \frac{1}{\kappa}$$

où l'infimum est pris sur les  $\kappa > 0$  tel que  $G$  est un domaine spectral pour le couple commutatif d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ .

*Démonstration.* Soit  $z_0$  et  $v$  tels que dans l'énoncé.

Supposons premièrement que  $G$  est un domaine spectral pour  $(S_\kappa, P_\kappa)$ . Soit une fonction  $f \in H(G, \mathbb{D})$ . Comme  $G$  est spectral, l'inégalité de Von Neumann est satisfaite, c'est-à-dire que

$$\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| \leq 1.$$

De plus, puisque  $\sigma(S_\kappa, P_\kappa) = \{z_0\} \subseteq G$ , le développement 3.12 donne ici

$$f(S_\kappa, P_\kappa) = \begin{bmatrix} f(z_0) & \kappa \cdot df(z_0)(v) \\ 0 & f(z_0) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Pour simplifier le problème, supposons maintenant que  $f$  s'annule en  $z_0$ . Dans ce cas, la matrice 3.14 devient bien plus simple et sa norme est

$$\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| = \sup_{\|x\|=1} |f(S_\kappa, P_\kappa)x| = |\kappa \cdot df(z_0)(v)|.$$

Il suit que  $|\kappa \cdot df(z_0)(v)| \leq 1$  ou encore, comme  $f(z_0) = 0$ , que

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leq \frac{1}{\kappa}.$$

Regardons maintenant le cas plus général où  $f(z_0) \neq 0$ . Considérons la fonction  $\varphi_{f(z_0)} \circ f$  où  $\varphi_{f(z_0)}(w) = \frac{w - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}w}$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . C'est également une fonction holomorphe dans  $H(G, \mathbb{D})$  qui s'annule en  $z_0$ . Ainsi, comme

$$|d(\varphi_{f(z_0)} \circ f)(z_0)(v)| = \frac{|df(z)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2},$$

le cas précédent montre que

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{\kappa}.$$

Enfin, puisque l'inégalité précédente est respectée pour toute fonction  $f \in H(G, \mathbb{D})$ , il suit, par définition de  $c_G$ , que

$$c_G(z_0; v) = \sup_{f \in H(G, \mathbb{D})} \frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leq \frac{1}{\kappa}.$$

Supposons maintenant que  $c_G(z_0; v) \leq \frac{1}{\kappa}$  pour un certain  $\kappa \geq 0$ . Par hypothèse,  $z_0 \in G$  et donc  $\sigma(S_\kappa, P_\kappa) \subseteq G$ . Soit  $f \in H(G, \mathbb{D})$ . La définition de  $c_G$  montre que

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leq \frac{1}{\kappa}.$$

Nous allons de nouveau utiliser l'expression 3.12. Mieux encore, la démonstration de l'implication précédente indique qu'en choisissant judicieusement la fonction à appliquer au couple d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ , la matrice 3.14 se voit grandement simplifiée. Pour ce faire, les automorphismes du disque  $\varphi_a$  sont des candidats idéaux et en effet,

$$\begin{aligned} \varphi_{f(z_0)} \circ f(S_\kappa, P_\kappa) &= \begin{bmatrix} \varphi_{f(z_0)}(f(z_0)) & \frac{\kappa \cdot df(z_0)(v)}{1 - |f(z_0)|^2} \\ 0 & \varphi_{f(z_0)}(f(z_0)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa \cdot df(z_0)(v)}{1 - |f(z_0)|^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\varphi_{f(z_0)} \circ f(S_\kappa, P_\kappa)\| = \frac{\kappa \cdot df(z_0)(v)}{1 - |f(z_0)|^2} \leq 1.$$

Notons au passage que  $f(z_0) \in \mathbb{D}$  car  $f$  est, par hypothèse à valeurs dans  $\mathbb{D}$ . Comme de plus, l'opérateur  $f(S_\kappa, P_\kappa)$  est donné par l'expression

$$f(S_\kappa, P_\kappa) = \varphi_{-f(z_0)} \circ \varphi_{f(z_0)} \circ f(S_\kappa, P_\kappa),$$

il est lui aussi une contraction. Autrement dit, l'inégalité de Von Neumann est satisfaite pour toute fonction  $f \in H(G, \mathbb{D})$ . Par conséquent,  $G$  est bien un domaine spectral pour le couple d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ .

Nous avons démontré l'équivalence 3.13. En prenant l'infimum sur les  $\kappa > 0$  tels que  $G$  est un domaine spectral pour le couple d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ , la relation d'équivalence donne la formule pour  $c_G$ .  $\square$

Un critère permettant de vérifier plus facilement, à travers les fonctions  $\Phi_\omega$ , si  $G$  est spectral pour un couple d'opérateurs donné, a déjà été démontré. Le théorème précédent peut être reformulé en suivant le dit théorème 3.16.

**Corollaire 3.22.** *Soit  $z_0 \in G$  et  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial s} + v_2 \frac{\partial}{\partial p}$ . Alors*

$$c_G(z_0; v) = \inf \frac{1}{\kappa}$$

*où l'infimum est pris sur les  $\kappa \geq 0$  tels que le couple commutatif d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$  associé satisfait  $\|\Phi_\omega(S_\kappa, P_\kappa)\| \leq 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ .*

Reste que ce corollaire ne donne toujours pas explicitement une expression pour calculer  $c_G$ . Ce qui a été fait précédent laisse entendre que la réponse sera liée aux fonctions  $\Phi_\omega$ . Une

formule précise de  $c_G(z_0, v)$  sera plutôt dévoilée lors de la recherche d'une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_0$  le long de  $v$ .

**Théorème 3.23.** *Soit  $z_0 = (s_0, p_0) \in G$  et  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial s} + v_2 \frac{\partial}{\partial p}$ . Une fonction  $f \in H(G, \mathbb{D})$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_0$  le long de  $v$  si et seulement si  $\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| = 1$  pour un certain  $\kappa > 0$  tel que  $G$  est spectral pour le couple commutatif d'opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ .*

*Démonstration.* Si  $v = 0$ , alors les opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$  sont des multiples de l'identité et donc l'équivalence est trivialement vraie.

Supposons d'abord que  $f \in H(G, \mathbb{D})$  est telle que

$$\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| = 1 \quad (3.15)$$

pour un certain  $\kappa > 0$  pour lequel  $G$  est spectral par rapport à  $(S_\kappa, P_\kappa)$ . Or,

$$\begin{aligned} \|f(S_\kappa, P_\kappa)\| &= \|\varphi_{f(z_0)} \circ f(S_\kappa, P_\kappa)\| \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa \cdot df(z_0)(v)}{1 - |f(z_0)|^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{|\kappa \cdot df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} \end{aligned}$$

L'hypothèse 3.15 devient

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} = \frac{1}{\kappa}.$$

Par conséquent, puisque  $G$  est spectral pour  $(S_\kappa, P_\kappa)$ , la relation d'équivalence dans la proposition 3.21 montre que

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} = \frac{1}{\kappa} \geq c_G(z_0; v).$$

Or, par définition de  $c_G$ , l'inégalité

$$\frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leq c_G(z_0; v)$$

est toujours satisfaite. Ainsi, les deux expressions sont égales et  $f$  est bien une fonction extrémale.

Supposons maintenant que  $f \in H(G, \mathbb{D})$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_0$  le long de  $v$ , c'est-à-dire que

$$c_G(z_0; v) = \frac{|df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2}.$$

Il faut montrer que  $\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| = 1$  pour un certain  $\kappa$  qui satisfait d'autres conditions particulières. Un choix naturel est  $\kappa := \frac{1}{c_G(z_0; v)}$ . Si  $v$  est non nul, la quantité  $c_G(z_0; v)$  est elle aussi

non nulle. Cela garantit de plus que  $c_G(z_0; v) \leq \frac{1}{\kappa}$  et que, en appliquant la proposition 3.21,  $G$  est un domaine spectral pour les opérateurs  $(S_\kappa, P_\kappa)$ . De plus, l'égalité suivante est satisfaite :

$$\|\varphi_{f(z)} \circ f(S_\kappa, P_\kappa)\| = \frac{|\kappa \cdot df(z_0)(v)|}{1 - |f(z_0)|^2} = 1.$$

Or,  $\varphi_{f(z)}$  étant un automorphisme du disque, il laisse invariante la norme de  $f(S_\kappa, P_\kappa)$  et il suit que

$$\|f(S_\kappa, P_\kappa)\| = 1.$$

□

La mystérieuse fonction extrémale recherchée est, telle qu'annoncé précédemment, une fonction  $\Phi_\omega$ . Cette affirmation ainsi que sa démonstration est le contenu de la proposition qui suit.

**Proposition 3.24.** *Pour tout  $z_0 \in G$  et  $v \in \mathbb{C}^2$ , il existe  $\omega_0 \in \mathbb{T}$  tel que  $\Phi_{\omega_0}$  est une fonction extrémale de Carathéodory de  $z$  le long de  $v$ .*

*Démonstration.* Si  $v = 0$ , alors l'énoncé est trivial.

Supposons maintenant que  $c_G(z_0; v) > 0$ . L'ensemble

$$K = \{\kappa \geq 0 : G \text{ est un domaine spectral pour } (S_\kappa, P_\kappa)\}$$

est fermé et borné : il existe donc un  $\kappa$  maximal. Définissons une fonction

$$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$\kappa \mapsto \sup_{\omega \in \mathbb{T}} \|\Phi_\omega(S_\kappa, P_\kappa)\|.$$

Cette fonction est continue et tend vers l'infini lorsque  $\kappa$  tend vers l'infini. Posons  $\kappa_0 := \sup_{\kappa \geq 0, g(\kappa) \leq 1} \kappa$ . Donc par continuité,  $g(\kappa_0) = 1$ . Ainsi, il existe un  $\omega_0 \in \mathbb{T}$  tel que  $\|\Phi_{\omega_0}(S_{\kappa_0}, P_{\kappa_0})\| = 1$ . Comme de plus  $\|\Phi_\omega(S_{\kappa_0}, P_{\kappa_0})\| \leq 1$ , le critère dans 3.16 nous assure que  $G$  est un domaine spectral pour  $(S_{\kappa_0}, P_{\kappa_0})$ . Le théorème 3.23 démontre que  $\Phi_{\omega_0}$  est Carathéodory extrémale pour  $z$  le long de  $v$ .

□

Maintenant que nous connaissons explicitement la nature de la fonction extrémale, nous sommes en mesure d'établir une formule algébrique pour retrouver la forme infinitésimale de la distance de Carathéodory de  $z_0$  le long de  $v$ .

**Corollaire 3.25.** *Soit  $z = (s, p)$  et  $v \in TG_z$ . Alors*

$$c_G(z; v) = \sup_{\omega \in \mathbb{T}} \left| \frac{v_1(1 - \omega^2 p) - v_2(2 - \omega s)}{(s - \bar{s}p)\omega^2 - 2(1 - |p|^2)\omega + \bar{s} - \bar{p}s} \right|$$

*est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z$  le long de  $v$  est donné en un  $\omega_0 \in \mathbb{T}$  pour lequel le supremum dans l'équation précédente est atteint.*

*Démonstration.* La proposition précédente montre qu'il existe  $\omega \in \mathbb{T}$  tel que  $\Phi_\omega$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z$  le long de  $v$ . Donc  $c_G$  est donné par

$$c_G(z; v) = \frac{|d\Phi_\omega(z)(v)|}{1 - |\varphi_\omega(z)|^2}.$$

Remarquons que puisque  $\omega \in \mathbb{T}$ ,  $\Phi_\omega$  est une fonction holomorphe. Il suffit maintenant de faire le calcul :

$$\begin{aligned} d\Phi_\omega(z)(v) &= v_1 \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial s}(z) + v_2 \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial p}(z) \\ &= \frac{-2v_1(1 - \omega^2 p) + 2v_2 \omega(2 - \omega s)}{(2 - \omega s)^2}. \end{aligned}$$

Plus précisément,  $c_G(z; v)$  est donné par

$$\begin{aligned} c_G(z; v) &= \frac{|d\Phi_\omega(z)(v)|}{1 - |\varphi_\omega(z)|^2} \\ &= \frac{2|v_1(1 - \omega^2 p) - v_2 \omega(2 - \omega s)|}{|2 - \omega s|^2 - |2\omega p - s|^2} \\ &= \frac{|v_1(1 - \omega^2 p) - v_2 \omega(2 - \omega s)|}{(s - \bar{s}p)\omega^2 - 2(1 - |p|^2)\omega + \bar{s} - \bar{p}s}. \end{aligned}$$

N'oublions pas que  $1 - |\Phi_\omega(z)|^2$  est strictement positif car l'image de  $\Phi_\omega(z)$  est dans  $\mathbb{D}$ . En prenant la valeur absolue au dénominateur, cette quantité étant forcément positive, et en utilisant le fait que  $|\omega| = 1$ , l'équation devient enfin

$$\begin{aligned} \frac{|d\Phi_\omega(z)(v)|}{1 - |\varphi_\omega(z)|^2} &= \frac{|v_1(1 - \omega^2 p) - v_2 \omega(2 - \omega s)|}{(s - \bar{s}p)\omega^2 - 2(1 - |p|^2)\omega + \bar{s} - \bar{p}s} \\ &= \frac{|v_1(1 - \omega^2 p) - v_2 \omega(2 - \omega s)|}{|(s - \bar{s}p)\omega^2 - 2(1 - |p|^2)\omega + \bar{s} - \bar{p}s|} \cdot \frac{1}{|\omega|}. \end{aligned}$$

□

Bien qu'un peu fastidieux à premier abord, le développement d'un calcul fonctionnel pour les  $d$ -uplets commutatifs d'opérateurs est un moyen ingénieux de calculer les pseudodistances de Carathéodory. Ce problème peut en effet être résolu à travers l'étude des domaines spectraux de von Neumann. Dans une série d'articles, Agler et Young ont développé une caractérisation des opérateurs pour lesquels le bidisque symétrisé est un domaine spectral, ce qui leur a permis de trouver une formule explicite pour les deux formes de la pseudodistance de Carathéodory. Il a été mentionné plus tôt que le bidisque symétrisé, de par sa non convexité, constituait un exemple intéressant sur lequel les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi étaient égales. Une formule explicite pour cette deuxième pseudodistance est maintenant tout juste à notre portée, mais encore faut-il démontrer l'égalité, une tâche des moins évidentes.



## Chapitre 4

# Calcul de la pseudodistance de Kobayashi

Maintenant que nous connaissons la pseudodistance de Carathéodory, il serait intéressant de calculer la plus grande pseudodistance définie sur le bidisque symétrisé, soit la pseudodistance de Kobayashi. Il a déjà été mentionné précédemment qu'en réalité, ces deux quantités sont égales entre toute paire de points du bidisque symétrisé. Il est possible de démontrer cette affirmation en résolvant un problème d'interpolation sur le disque unité avec des valeurs cibles dans le bidisque symétrisé. La solution est intimement liée au problème de Nevanlinna-Pick classique, c'est-à-dire au problème d'interpolation du disque dans lui-même. À partir de cela, il sera possible de déterminer un critère permettant de résoudre un tel problème sur le bidisque symétrisé. Ce critère devient encore plus simple lorsqu'il n'y a que deux points d'interpolation. Au final, ce sera encore la géométrie particulière du bidisque symétrisé qui permettra, entre autre, de montrer que la pseudodistance de Kobayashi est égale à la pseudodistance de Carathéodory.

### 4.1 Problème de Nevanlinna-Pick classique

Pour démontrer que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur le bidisque symétrisé, il suffit de démontrer que la fonction de Lempert et la pseudodistance de Carathéodory sont égales. En effet, puisqu'il est toujours vrai que

$$C_G \leq K_G \leq \delta_G,$$

le résultat sur la pseudodistance de Kobayashi suivra immédiatement. Pour ce faire, il suffit d'exhiber, pour toute paire de points  $z_1, z_2 \in G$ , une fonction holomorphe  $h : \mathbb{D} \rightarrow G$  et une paire de points  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$  telles que  $h(\lambda_j) = z_j$  et  $\rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = C_G(z_1, z_2)$ . Cela revient donc à résoudre un problème d'interpolation.

Rappelons le problème de Nevanlinna-Pick classique, un problème d'interpolation du disque unité dans lui-même. Pour  $n$  éléments distincts du disque unité  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $n$  valeurs cibles  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \overline{\mathbb{D}}$ , il faut trouver une fonction  $f$  holomorphe sur le disque unité et à valeurs dans le disque unité fermé qui satisfait  $f(\lambda_j) = \mu_j$ . Ce problème est complètement résolu depuis longtemps et l'existence de la solution est garantie par le théorème de Nevanlinna-Pick classique. Le problème et le théorème ont été nommés en l'honneur de Georg Pick et Rolf Nevanlinna, qui avaient tous deux résolu le problème indépendamment en 1916 et 1919.

**Théorème 4.1** (Nevanlinna-Pick classique). *Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  points  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \overline{\mathbb{D}}$ . Il existe une fonction  $f \in H(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$  satisfaisant  $f(\lambda_j) = \mu_j$  si et seulement si la matrice de Pick*

$$\mathcal{P} = \left[ \frac{1 - \mu_j \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^n$$

*est semi-définie positive. Dans ce cas, il existe un produit de Blaschke  $B_{a_1, \dots, a_m, \omega}$  de degré au plus  $n$  qui est une solution du problème d'interpolation :*

$$B_{a_1, \dots, a_m, \omega}(z) = \omega \varphi_{a_1}(z) \cdot \dots \cdot \varphi_{a_m}(z) = \omega \prod_{j=1}^m \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$$

où  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{D}$  avec  $m \leq n$  et  $\omega \in \mathbb{T}$ .

*Remarque.* Les produits de Blaschke sont le produit d'une constante unitaire et de transformations de Möbius  $\varphi_{a_j}$ . Remarquons que les  $a_j$  étant dans  $\mathbb{D}$ , les produits de Blaschke sont des fonctions holomorphes sur le disque unité, à valeurs dans le disque unité. De plus, les produits de Blaschke envoient le cercle unité dans lui-même.

*Démonstration.* Nous ne ferons qu'une esquisse de la preuve, laquelle se retrouve en totalité dans [Gar81]. Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  points  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \overline{\mathbb{D}}$  tels que dans l'énoncé. Premièrement, remarquons que la matrice  $\mathcal{P}$  est semi-définie positive si et seulement si  $t^* \mathcal{P} t \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{C}^n$ , ou autrement dit, si la forme quadratique

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1 - \mu_j \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} t_j \overline{t_k}$$

est supérieure ou égale à zéro. Remarquons que ce quotient est toujours bien défini puisque  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ .

Procédons par induction. Supposons d'abord que  $n = 1$ . Dans le cas où  $|\mu_1| = 1$ , il suffit de prendre  $f(z) = \mu_1$ , qui est bien un produit de Blaschke de degré inférieur à 1. Si plutôt  $|\mu_1| < 1$ , comme les transformations de Möbius  $\varphi_a$ ,  $a \in \mathbb{D}$  agissent transitivement sur le disque unité, il existe une telle solution. Réciproquement, s'il existe une solution qui est un produit de Blaschke de degré 0, alors c'est une fonction constante unitaire et dans ce cas  $|\mu_1| = 1$ . S'il

s'agit d'un produit de Blaschke de degré 1, alors c'est un automorphisme du disque unité et dans ce cas,  $\mu_1$  et  $\lambda_1$  sont dans le disque unité. Ainsi, comme  $Q_1(t_1) \geq 0$  si et seulement si  $|\mu_1| \leq 1$ , l'équivalence est satisfaite.

Supposons maintenant que  $n > 1$ . Il est possible de grandement simplifier le problème. Considérons d'abord les cas où  $|\mu_n| = 1$ . S'il existe une fonction d'interpolation  $f$ , alors  $|f(\lambda_n)| = 1$ , et par le principe du maximum  $|f| = 1$  sur  $\overline{\mathbb{D}}$ . Donc  $f$  doit être la fonction constante  $\mu_n$  et en particulier,  $\mu_j = \mu_n$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ . Dans ce cas,  $Q_n$  est nulle. Supposons maintenant que  $Q_n = 0$ , et prenons  $t_k = 1$  et  $t_j = 0$  pour  $j$  différent de  $k$ , ce qui donne

$$\frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - |\lambda_k|^2} = 0.$$

Cela entraîne que  $|\mu_k| = 1$ . De même, avec  $t_k = t_n = 1$  et  $t_j = 0$  pour  $j$  différent de  $k$  et  $n$ ,  $Q_n = 0$  entraîne que

$$\frac{1 - \mu_k \overline{\mu_n}}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_n}} + \frac{1 - \mu_n \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_n \overline{\lambda_k}} + \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - |\lambda_k|^2} + \frac{1 - |\mu_n|^2}{1 - |\lambda_n|^2} = 0.$$

Comme de plus  $|\mu_n| = |\mu_k| = 1$ , il suit que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1 - \mu_k \overline{\mu_n}}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_n}} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Avec le choix  $t_k = 1$ ,  $t_n = -i$  et  $t_j = 0$  pour  $j$  différent de  $k$  et  $n$ ,  $Q_n = 0$  entraîne que

$$\frac{1 - \mu_k \overline{\mu_n}}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_n}} i - \frac{1 - \mu_n \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_n \overline{\lambda_k}} i + \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - |\lambda_k|^2} + \frac{1 - |\mu_n|^2}{1 - |\lambda_n|^2} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1 - \mu_k \overline{\mu_n}}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_n}} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Les équations (4.1) et (4.2) montrent que

$$\frac{1 - \mu_k \overline{\mu_n}}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_n}} = 0$$

et donc  $\mu_k = \mu_n$ . Ainsi la fonction  $f \equiv \mu_n$  satisfait le problème d'interpolation.

Il reste maintenant le cas  $|\mu_n| < 1$ . En utilisant les transformations de Möbius  $\varphi_{\mu_n}$  et  $\varphi_{-\lambda_n}$ , il est possible de supposer, sans perte de généralité, que  $\lambda_n = \mu_n = 0$ . Cela simplifie énormément la preuve et le lecteur peut consulter [Gar81, Théorème 2.2] pour plus de détails. Une fonction  $f$  satisfaisant ce problème d'interpolation existe si et seulement si il existe une fonction holomorphe  $g \in H(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$  telle que  $g(\lambda) = \frac{\mu_j}{\lambda_j}$  et  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ . Par hypothèse d'induction, ce problème possède une solution, qui est un produit de Blaschke de degré au plus  $n-1$ , si et seulement si la forme quadratique

$$\tilde{Q}_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) := \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\mu_j \overline{\mu_k}}{\lambda_j \lambda_k}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} t_j \overline{t_k}$$

est positive. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que  $Q_n(t_1, \dots, t_n) \geq 0$  si et seulement si  $\tilde{Q}_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \geq 0$  pour  $\lambda_n = \mu_n = 0$ .

Dans ce cas particulier, il est possible d'expliciter facilement la forme quadratique :

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = |t_n|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \bar{t}_j t_n + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - \mu_j \bar{\mu}_k}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} t_j \bar{t}_k.$$

En complétant les carrés, nous obtenons

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{t}_j \right|^2 + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left( \frac{1 - \mu_j \bar{\mu}_k}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} - 1 \right) t_j \bar{t}_k.$$

Or, puisque

$$\frac{1 - \mu_j \bar{\mu}_k}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} - 1 = \frac{1 - \frac{\mu_j \bar{\mu}_k}{\lambda_j \bar{\lambda}_k}}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k,$$

l'égalité précédente devient

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{t}_j \right|^2 + \tilde{Q}_{n-1}(\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_{n-1} t_{n-1}).$$

Ainsi, lorsque  $\tilde{Q}_{n-1}$  est supérieure ou égale à zéro, la forme quadratique  $Q_n$  est elle aussi positive. De même, la réciproque s'obtient en posant

$$t_n = - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{t}_j.$$

Comme la fonction  $g$  trouvée était un produit de Blaschke de degré  $n - 1$ ,  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n$ .  $\square$

Les résultats précédents ont été présentés d'un point de vue plutôt théorique. Néanmoins, la nature récursive de la démonstration indique comment il serait possible de construire une solution au problème de Nevanlinna-Pick classique. Dans [Sch17], Schur a développé une méthode récursive permettant de déterminer l'existence d'une solution et de la construire le cas échéant. Baribeau, Rivard et Wegert ont raffiné cet algorithme en s'inspirant des tables de différences divisées utilisée dans la méthode de Newton pour les polynômes d'interpolation (voir théorème 4.1 dans [BRW09]). Lorsque la matrice de Pick n'est pas singulière, l'algorithme montre que pour n'importe quel  $\omega \in \mathbb{T}$  fixé, il est possible de construire une unique solution qui est un produit de Blaschke de degré exactement  $n$ . Observons que l'ensemble des  $\omega \in \mathbb{T}$  permettent de construire une famille de solutions au problème d'interpolation qui sont toutes des produits de Blaschke de degré  $n$ .

Dans le cas particulier où la matrice de Pick est singulière, il est possible d'extraire plus d'information sur la nature de la solution. L'essentiel est contenu dans le corollaire suivant,

tiré de [Gar81, chapitre 1, corollaire 2.3]. Le lecteur peut s'y référer pour une démonstration, qui se fait de manière tout à fait similaire à ce qui a été fait précédemment.

**Corollaire 4.2.** *Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  points  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \overline{\mathbb{D}}$ . Supposons de plus que la matrice de Pick est semi-définie positive. Le problème possède une solution unique si et seulement si la matrice de Pick est singulière. Si la matrice est singulière de rang  $m < n$ , la solution sera un produit de Blaschke de degré  $m$ . À l'inverse, si un produit de Blaschke de degré  $m < n$  résout le problème, alors la matrice est de rang  $m$ .*

Baribeau, Rivard et Wegert proposent un algorithme permettant de construire une telle solution au problème dans ce cas [BRW09].

## 4.2 Premier critère d'interpolation dans le bidisque symétrisé

Comme dit précédemment, la pseudodistance de Kobayashi sur le bidisque symétrisé peut être calculée en résolvant un problème d'interpolation. Dans [AY99, théorème 5.2], Agler et Young avaient déjà démontré une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction du disque unité à valeurs dans le bidisque symétrisé satisfaisant un certain problème d'interpolation. L'idée est de ramener, en quelque sorte, le problème à un problème du disque unité dans lui-même afin d'utiliser le théorème de Nevanlinna-Pick classique.

**Théorème 4.3** (Condition nécessaire). *Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  valeurs cibles  $z_j = (s_j, p_j) \in G$  pour  $j = 1, \dots, n$ . S'il existe une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  satisfaisant  $h(\lambda_j) = z_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ , alors la matrice*

$$\left[ \frac{2(1 - p_j \overline{p_k}) - \omega(s_j - p_k \overline{s_k}) - \overline{\omega}(\overline{s_k} - s_j \overline{p_k})}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^n$$

est semi-définie positive pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ .

Avant de démontrer ce théorème, voici un lemme qui permettra d'alléger certains calculs.

**Lemme 4.4.** *Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  valeurs cibles  $z_j = (s_j, p_j) \in G$ . La matrice*

$$\mathcal{P} = \left[ \frac{1 - \Phi_\omega(z_j) \overline{\Phi_\omega(z_k)}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^n$$

est semi-définie positive si et seulement si la matrice

$$\left[ \frac{2 - 2p_j \overline{p_k} - \omega(s_j - p_j \overline{s_k}) - \overline{\omega}(\overline{s_k} - \overline{p_k} s_j)}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^n.$$

est semi-définie positive.

*Démonstration.* Rappelons que

$$\Phi_\omega(s_j, p_j) = \frac{2\omega p_j - s_j}{2 - \omega s_j}.$$

Par conséquent, la matrice  $\mathcal{P}$  correspond à la matrice

$$\left[ \frac{1 - (2\omega p_j - s_j)(2 - \omega s_j)^{-1}(2\omega p_k - s_k)(2 - \omega s_k)^{-1}}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n.$$

Soit  $D$  la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} 2 - \omega s_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2 - \omega s_n \end{bmatrix}.$$

Observons qu'il ne s'agit pas d'une matrice singulière, car  $(s_j, p_j)$  est dans  $G$  pour  $j = 1, \dots, n$ . Ainsi, les matrices  $\tilde{\mathcal{P}} := D^* \mathcal{P} D$  et  $\mathcal{P}$  sont simultanément semi-définies positives. Un calcul élémentaire montre que

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left[ \frac{(2 - \omega s_j)(2 - \omega s_k) - (2\omega p_j - s_j)(2\omega p_k - s_k)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n.$$

En développant chaque coefficient, puis en factorisant par rapport à  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , la matrice peut s'écrire sous la forme

$$\left[ \frac{4 - 4p_j \bar{p}_k - 2\omega(s_j - p_j \bar{s}_k) - 2\bar{\omega}(\bar{s}_k - \bar{p}_k s_j)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n.$$

C'est la seconde matrice du lemme à un scalaire près. Par conséquent, les deux matrices sont semi-définies positives simultanément.  $\square$

Le théorème est une conséquence directe de ce lemme.

*Démonstration du théorème 4.3.* Comme, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,  $\Phi_\omega$  est une fonction holomorphe de  $G$  dans  $\mathbb{D}$ , il suit que  $\Phi_\omega \circ h \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  et que

$$\Phi_\omega \circ h(\lambda_j) = \Phi_\omega(z_j).$$

Par conséquent, le problème d'interpolation des  $\lambda_j$  vers  $\Phi_\omega(z_j)$  dans  $\mathbb{D}$  possède une solution. Dans ce cas, le théorème de Nevanlinna-Pick classique indique que la matrice de Pick associée à ce problème est semi-définie positive.

Par le lemme 4.4, cela montre que la matrice de l'énoncé est semi-définie positive, car il s'agit de la seconde matrice du lemme à un scalaire près.  $\square$

Dans la dernière démonstration, les fonctions  $\Phi_\omega$  ont été utilisées pour ramener le problème dans le disque unité. Il s'agit d'une astuce qui sera souvent exploitée dans le présent chapitre. Ces fonctions furent d'un grand intérêt dans les chapitres précédents. L'avantage à travailler dans le disque unité vient du théorème de Nevanlinna-Pick classique. Sur le disque unité, les problèmes d'interpolation sont complètement résolus. De plus, lorsqu'une solution existe, alors il y en a une, peut-être différente, qui est un produit de Blaschke. Ce sont des fonctions holomorphes qui possèdent de jolies propriétés.

Néanmoins, la réciproque du théorème précédent est fautive en général, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'une condition suffisante pour démontrer l'existence d'une solution au problème d'interpolation sur  $G$ . Toutefois, en ajoutant une hypothèse supplémentaire, elle devient vraie.

**Théorème 4.5** (Condition nécessaire et suffisante). *Soit  $n$  points distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  valeurs cibles  $z_j = (s_j, p_j) \in G$  pour  $j = 1, \dots, n$ . Supposons que la matrice*

$$\left[ \frac{1 - p_j \bar{p}_k}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n \quad (4.3)$$

*est singulière. Alors il existe une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  satisfaisant  $h(\lambda_j) = z_j$  si et seulement si, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , la matrice*

$$\left[ \frac{2(1 - p_j \bar{p}_k) - \omega(s_j - p_j \bar{s}_k) - \bar{\omega}(\bar{s}_k - s_j \bar{p}_k)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n \quad (4.4)$$

*est semi-définie positive.*

Démontrer que la condition est suffisante est assez laborieux et semble peu intuitif à première vue. La condition sur 4.3, qui ne se trouvait pas dans le théorème précédent, nous assure, avec 4.4, que le problème d'interpolation pour  $\lambda_j \mapsto p_j$  possède une unique solution dans  $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . En utilisant des opérateurs bien choisis, cette même condition permet d'interpoler les  $\lambda_j$  en  $\Phi_\omega(s_j, p_j)$ . Il est possible ensuite d'en extraire une définition pour  $s$ . Celle-ci découle de  $\Phi_\omega$ , elle possède de jolies propriétés et en posant  $h = (s, p)$ ,  $h$  satisfera bien l'énoncé du théorème. La méthode employée permettra de plus d'explicitier  $s$  et  $p$ .

Avant de débiter la démonstration, considérons les fonctions

$$\kappa_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}.$$

Observons que les fonctions  $\kappa_\lambda(z)$  sont en fait des noyaux reproduisants de l'espace de Hardy  $H^2$ , c'est-à-dire qu'elles satisfont  $\langle f, \kappa_{\lambda_j} \rangle = f(\lambda_j)$  pour toute fonction  $f \in H^2$ . Le lecteur peut se référer à [Gar81, Chapitre 2] pour une présentation générale des espaces de Hardy  $H^p$ . Néanmoins, la brève introduction qui suit devrait suffire pour le présent ouvrage. Rappelons que l'espace de Hardy  $H^2$  est l'ensemble des fonctions  $f$  holomorphes sur le disque unité et qui satisfont

$$\sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \right) < \infty.$$

Observons que les produits de Blaschke sont des éléments de  $H^2$ . Il s'agit en fait d'un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z) \overline{g(z)}}{z} dz.$$

On peut vérifier que les noyaux reproduisants  $\kappa_{\lambda_j}$  vérifient bien l'identité mentionnée précédemment :

$$\langle f, \kappa_{\lambda_j} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{1 - \lambda_j \bar{z}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z - \lambda_j} dz.$$

La dernière expression étant la formule de représentation de Cauchy, le produit scalaire est donné par l'expression suivante :

$$\langle f, \kappa_{\lambda_j} \rangle = f(\lambda_j).$$

Définissons l'espace de Hilbert  $\mathcal{M} := \text{span}\{\kappa_{\lambda_1}, \dots, \kappa_{\lambda_n}\}$ , un sous-espace de  $H^2$ . Considérons les deux opérateurs suivant sur  $\mathcal{M}$  :

$$S\kappa_{\lambda_j} = \bar{s}_j \kappa_{\lambda_j} \text{ et } P\kappa_{\lambda_j} = \bar{p}_j \kappa_{\lambda_j}.$$

Ces opérateurs ont comme vecteurs propres les  $\kappa_{\lambda_j}$  dont les valeurs propres associées sont respectivement  $\bar{s}_j$  et  $\bar{p}_j$ . Cette définition n'est pas sans rappeler les opérateurs 3.10 étudiés dans le cadre du calcul de la pseudodistance de Carathéodory.

*Démonstration du théorème 4.5.* La nécessité correspond au théorème 4.3.

Le fait que la condition est suffisante se démontre en trois étapes.

1. Montrer que le problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  possède une solution  $p$  qui est un produit de Blaschke et exprimer  $p$  en fonction de l'opérateur  $P$ .
2. Déterminer la solution du problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto \Phi_{\bar{\omega}}(s_j, p_j)$  et déterminer  $s$  à partir de celle-ci.
3. Démontrer que la fonction  $h := (s, p)$  satisfait l'énoncé du théorème.

*Première étape.* Tout d'abord, observons que l'intégrale des composantes de la matrice 4.4 par rapport à  $\omega$  avec la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$  donne, par le théorème de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2(1 - p_j \bar{p}_k) - \omega(s_j - p_j \bar{s}_k) - \bar{\omega}(\bar{s}_k - s_j \bar{p}_k)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2(1 - p_j \bar{p}_k)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \frac{d\omega}{\omega} \quad (4.5)$$

$$= \frac{2(1 - p_j \bar{p}_k)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k}. \quad (4.6)$$

Puisque la matrice (4.4) est semi-définie positive, la matrice de Pick associée au problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  est elle aussi semi-définie positive. Le théorème de Nevanlinna-Pick classique montre que ce dernier possède une solution. De plus, la matrice (4.3) étant singulière, cette solution  $p$  est unique et c'est un produit de Blaschke de degré au plus  $n - 1$ .

Nous allons maintenant montrer que la matrice (4.3) correspond à la matrice de l'opérateur  $1 - P^*P$ . Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \langle (1 - P^*P)\kappa_{\lambda_j}, \kappa_{\lambda_k} \rangle &= \langle \kappa_{\lambda_j}, \kappa_{\lambda_k} \rangle - \langle P\kappa_{\lambda_j}, P\kappa_{\lambda_k} \rangle \\ &= \langle \kappa_{\lambda_j}, \kappa_{\lambda_k} \rangle - \langle \bar{p}_j \kappa_{\lambda_j}, \bar{p}_k \kappa_{\lambda_k} \rangle \\ &= \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \lambda_k} - \frac{\bar{p}_j p_k}{1 - \bar{\lambda}_j \lambda_k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, (4.3) est la matrice de  $1 - P^*P$  dans  $\mathcal{M}$  et puisqu'elle est singulière, l'opérateur  $1 - P^*P$  est singulier. Le critère 3.12 entraîne que  $\|P\| = 1$ .

L'idée est d'exprimer l'opérateur  $P$  en terme du produit de Blaschke  $p$ . Soit  $h \in H^2$ . La formule de représentation avec  $k_{\lambda_j}$  donne

$$\langle h, Pk_{\lambda_j} \rangle = \langle h, \bar{p}_j k_{\lambda_j} \rangle = p_j \langle h, k_{\lambda_j} \rangle = p(\lambda_j)h(\lambda_j) = \langle ph, k_{\lambda_j} \rangle,$$

car  $p$  étant un produit de Blaschke,  $ph$  est dans  $H^2$ . Il suit que

$$\langle h, Pk_{\lambda_j} \rangle = \langle h, \bar{p}k_{\lambda_j} \rangle.$$

Il n'est pas possible de conclure à cette étape, car  $\bar{p}$  n'est pas dans  $H^2$  en général. Or, comme  $h \in H^2$  et que la projection  $\text{proj}_{H^2} : L^2 \rightarrow H^2$  est un opérateur auto-adjoint,

$$\langle h, Pk_{\lambda_j} \rangle = \langle \text{proj}_{H^2}(h), \bar{p}k_{\lambda_j} \rangle = \langle h, \text{proj}_{H^2}(\bar{p}k_{\lambda_j}) \rangle.$$

Par conséquent,  $Pk_{\lambda_j} - \text{proj}_{H^2}(\bar{p}k_{\lambda_j})$  est dans l'orthogonal de  $H^2$  et sera donc identiquement nul. Cette relation est valide pour tous les éléments  $k_{\lambda_j}$  de la base de  $\mathcal{M}$  et donc il suit que

$$Pg = \text{proj}_{H^2}(\bar{p}g) \tag{4.7}$$

pour tout  $g \in \mathcal{M}$ . Le lecteur pourra reconnaître dans le membre de droite l'opérateur de Toeplitz avec symbol  $\bar{p}$ .

Soit maintenant  $f \in \mathcal{M}$  un vecteur unitaire maximisant  $P$ . Pour cet élément maximisant, il est possible de montrer que  $p = \frac{f}{Pf}$ . En effet, comme

$$1 = \|Pf\| = \|\text{proj}_{H^2}(\bar{p}f)\| \leq \|\bar{p}f\| = \|f\| = 1,$$

il suit que

$$\text{proj}_{H^2}(\bar{p}f) = \bar{p}f$$

et donc que

$$Pf = \bar{p}f.$$

Étant donné que  $p\bar{p} \equiv 1$  sur  $\mathbb{T}$ ,

$$p = \frac{f}{Pf} \tag{4.8}$$

sur  $\mathbb{T}$  et donc sur  $\mathbb{D}$  en entier par le principe d'identité.

*Deuxième étape.* Le but est maintenant de définir  $s$  à partir des opérateurs  $P$  et  $S$  de sorte que le couple  $(s, p)$  satisfasse le problème d'interpolation. Pour ce faire, nous allons montrer que, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , le problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto \Phi_{\bar{\omega}}(s_j, p_j)$  possède une unique solution qui est un produit de Blaschke.

Remarquons d'abord que pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , l'égalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(S, P) \kappa_{\lambda_j} &= (2\omega P - S)(2 - \omega S)^{-1} \kappa_{\lambda_j} \\ &= \frac{2\omega \bar{p}_j - \bar{s}_j}{2 - \omega \bar{s}_j} \kappa_{\lambda_j} \\ &= \overline{\Phi_{\bar{\omega}}(s_j, p_j)} \kappa_{\lambda_j}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice de Pick pour le problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto \Phi_{\bar{\omega}}(s_j, p_j)$  correspond à

$$\left[ \langle (1 - \Phi_{\omega}(S, P)^* \Phi_{\omega}(S, P)) \kappa_{\lambda_j}, \kappa_{\lambda_k} \rangle \right]_{j,k=1}^n, \quad (4.9)$$

où le produit scalaire  $\langle \kappa_{\lambda_j}, \kappa_{\lambda_k} \rangle$  est égal à  $\frac{1}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k}$ . L'idée est de démontrer que l'opérateur  $1 - \Phi_{\omega}(S, P)^* \Phi_{\omega}(S, P)$  possède certaines propriétés qui, comme à la première étape, permettront d'expliciter le produit de Blaschke trouvé en fonction de l'opérateur  $\Phi_{\omega}(S, P)$ . Pour ce faire, il faut montrer que  $\|\Phi_{\omega}(S, P)\| = 1$  et trouver un vecteur maximisant pour cet opérateur.

Observons que la matrice (4.9), qui est la matrice de  $1 - \Phi_{\omega}(S, P)^* \Phi_{\omega}(S, P)$  dans  $\mathcal{M}$  correspond à la matrice  $\mathcal{P}$  du lemme 4.4. Puisque par hypothèse la matrice

$$\left[ \frac{2 - 2p_j \bar{p}_k - \omega(s_j - p_j \bar{s}_k) - \bar{\omega}(\bar{s}_k - \bar{p}_k s_j)}{1 - \lambda_j \bar{\lambda}_k} \right]_{j,k=1}^n$$

est semi-définie positive, le lemme montre que l'opérateur  $1 - \Phi_{\omega}(S, P)^* \Phi_{\omega}(S, P)$  est semi-défini positif. Plus précisément, le lemme indique que les opérateurs  $1 - \Phi_{\omega}(S, P)^* \Phi_{\omega}(S, P)$  et

$$1 - P^* P - \frac{\omega}{2}(S^* - P^* S) - \frac{\bar{\omega}}{2}(S - S^* P)$$

sont semi-définis positifs sur  $\mathcal{M}$  simultanément. En particulier, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  et un vecteur  $f$  unitaire maximisant  $P$ , le produit scalaire suivant est positif :

$$\langle (1 - P^* P - \frac{\omega}{2}(S^* - P^* S) - \frac{\bar{\omega}}{2}(S - S^* P)) f, f \rangle \geq 0. \quad (4.10)$$

Il est possible, à partir de  $f$ , un vecteur unitaire maximisant  $P$ , de construire un vecteur maximisant pour l'opérateur  $\Phi_{\omega}(S, P)$ . En effet, puisque  $\|Pf\| = \|P\|\|f\| = \|f\|$ , il suit que

$$\begin{aligned} \|(1 - P^* P)f\|^2 &= \|f\|^2 - \langle P^* P f, f \rangle - \langle f, P^* P f \rangle + \|P^* P f\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \langle P f, P f \rangle - \langle P f, P f \rangle + \|P f\|^4 \\ &= \|f\|^2 - \|P f\|^2 - \|P f\|^2 + \|P f\|^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc que  $(1 - P^*P)f = 0$ . Puisque l'intégrale de (4.5) est nulle et que le produit scalaire (4.10) est positif, cela entraîne aussi que

$$(1 - P^*P - \frac{\omega}{2}(S^* - P^*S) - \frac{\bar{\omega}}{2}(S - S^*P))f = 0$$

presque partout pour  $\omega \in \mathbb{T}$ . Par continuité, cette relation tient partout sur  $\mathbb{T}$ . En utilisant les fonctions  $\Phi_\omega$ , cette relation peut être réécrite comme suit :

$$(2 - \bar{\omega}S^*) (1 - \Phi_\omega(S, P)^*\Phi_\omega(S, P)) (2 - \omega S)f = 0. \quad (4.11)$$

Ces relations montrent que  $\|\Phi_\omega(S, P)\| = 1$  pour tout  $\omega$ . De plus, la relation 4.11 implique  $(2 - \omega S)f$  est un vecteur maximisant. En effet :

$$\begin{aligned} & \langle (2 - \bar{\omega}S^*) (1 - \Phi_\omega(S, P)^*\Phi_\omega(S, P)) (2 - \omega S)f, f \rangle = 0 \\ & \Rightarrow \langle (1 - \Phi_\omega(S, P)^*\Phi_\omega(S, P)) (2 - \omega S)f, (2 - \omega S)f \rangle = 0 \\ & \Rightarrow \langle (2 - \omega S)f, (2 - \omega S)f \rangle - \langle \Phi_\omega(S, P)(2 - \omega S)f, \Phi_\omega(S, P)(2 - \omega S)f \rangle = 0 \\ & \Rightarrow \|(2 - \omega S)f\|^2 = \|\Phi_\omega(S, P)(2 - \omega S)f\|^2. \end{aligned}$$

Les équations précédentes entraînent que la matrice (4.9), qui est la matrice de Pick pour le problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto \Phi_{\bar{\omega}}(s_j, p_j)$ , est singulière et semi-définie positive. Le problème possède donc une unique solution qui est un produit de Blaschke  $q_\omega$  de degré  $n - 1$ . Le vecteur  $(2 - \omega S)f$  maximisant l'opérateur  $\Phi_\omega(S, P)$ , il serait possible de démontrer, exactement comme à l'étape précédente, que le produit de Blaschke est donné explicitement par

$$q_\omega = \frac{(2 - \omega S)f}{\Phi_\omega(S, P)(2 - \omega S)f} = \frac{2f - \omega Sf}{2\omega Pf - Sf}.$$

En divisant par  $Pf$  et utilisant l'expression 4.8 pour  $p$ , le produit devient

$$q_\omega = \frac{2p - \omega \frac{Sf}{Pf}}{2\omega - \frac{Sf}{Pf}} = \Phi_{\bar{\omega}}\left(\frac{Sf}{Pf}, p\right).$$

Définissons  $s$  par

$$s = \frac{Sf}{Pf}, \quad (4.12)$$

de sorte que pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,  $\Phi_{\bar{\omega}} \circ (s, p)$  est le produit de Blaschke  $q_\omega$ . Ce choix garantit, entre autre, que  $s$  interpole  $\lambda_j \mapsto s_j$ . La fonction possède d'autres propriétés qui, combinées à celle de  $p$ , entraîneront que le couple de fonctions  $(s, p)$  satisfera l'énoncé du théorème.

*Troisième étape.* Posons maintenant  $h := (s, p)$ , la fonction définie sur  $\mathbb{D}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^2$ . Le théorème stipule que la fonction  $h$

(i) est holomorphe sur  $\mathbb{D}$ ,

- (ii) satisfait le problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto (s_j, p_j)$  pour  $j = 1, 2$ ,  
 (iii) est à valeurs dans le bidisque symétrisé  $G$ .

Pour la première partie, il ne reste qu'à démontrer que  $s$  est holomorphe. En effet, la fonction  $p$  étant un produit de Blaschke, c'est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ . Comme  $s$  est une fonction rationnelle, elle est holomorphe partout où son dénominateur ne s'annule pas. Supposons que  $s$  possède un pôle  $\lambda$ . Dans ce cas, puisque le produit de Blaschke  $q_\omega$  est lui holomorphe, il faut que

$$q_\omega(\lambda) = \frac{2p(\lambda) - \omega s(\lambda)}{2\omega - s(\lambda)} = \frac{2\frac{p(\lambda)}{s(\lambda)} - \omega}{2\frac{\omega}{s(\lambda)} - 1} = \omega.$$

Dans ce cas, par le principe du maximum,  $q_\omega$  est le produit de Blaschke de degré 0 constant sur  $\mathbb{D}$ . Par conséquent, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , l'égalité suivante est satisfaite :

$$\omega = q_\omega(\lambda_1) = \Phi_{\bar{\omega}}(s_1, p_1) = \frac{2\bar{\omega}p_1 - s_1}{2 - \bar{\omega}s_1}.$$

Cela est impossible et donc  $s$  est holomorphe partout sur  $\mathbb{D}$ . La fonction  $h$  ainsi définie est de ce fait elle aussi holomorphe.

Par définition,  $s$  et  $p$  interpolent  $s_j$  et  $p_j$  respectivement et il est clair que

$$h(\lambda_j) = (s(\lambda_j), p_j(\lambda_j)) = (s_j, p_j).$$

Enfin, pour trouver l'image de  $h$ , il faut d'abord déterminer celle de  $s$ . Nous allons montrer que  $|s| < 2$ . Supposons d'abord que  $|s| = 2$  quelque part sur  $\mathbb{D}$ , disons  $s(\lambda) = 2\omega$ , pour un certain  $\lambda \in \mathbb{D}$  et  $\omega \in \mathbb{T}$ . En particulier, étant donné que  $q_\omega$  est elle holomorphe en  $\lambda$ , il faut que  $p(\lambda) = \omega^2$ . Par conséquent,  $|p(\lambda)| = 1$  et  $p$  est un produit de Blaschke de degré 0 constant. Or cela entraînerait que

$$|p_1| = |p(\lambda_1)| = |\omega^2| = 1,$$

contredisant l'hypothèse que  $p_1 \in \mathbb{D}$ . Ainsi,  $|s| \neq 2$  sur  $\mathbb{D}$  et le théorème des valeurs intermédiaires dit que ou bien  $|s| < 2$ , ou alors  $|s| > 2$ . Or, puisque  $s$  interpole les  $\lambda_j$  en  $s_j$ , et que  $|s_j| < 2$  par hypothèse, il suit que  $|s| < 2$ .

Cette affirmation sur  $s$  entraîne que

$$\Phi_z(s(\lambda), p(\lambda)) = \frac{2zp(\lambda) - s(\lambda)}{2 - zs(\lambda)}$$

est une fonction holomorphe pour  $z \in \bar{\mathbb{D}}$ . En particulier, lorsque  $z$  est sur le bord  $\mathbb{T}$ ,

$$|\Phi_z(s(\lambda), p(\lambda))| = |q_{\bar{z}}(\lambda)| \leq 1.$$

Par le principe du maximum,  $|\Phi_z(s(\lambda), p(\lambda))| \leq 1$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . En utilisant la caractérisation (iv) de la proposition 1.1, il suit que  $(s(\lambda), p(\lambda)) \in \Gamma$ . Mieux encore,  $h$  étant holomorphe, le théorème de l'application ouverte entraîne que son image est ouverte et il suit que

$$h(\mathbb{D}) \subseteq G.$$

En somme, cela démontre que la fonction  $h$  satisfait le problème d'interpolation tel que désiré. □

La démonstration de ce théorème est constructive. En effet, si  $[x_1, \dots, x_n]^T$  est un vecteur non nul du noyau de la matrice de Pick 4.3, alors la fonction d'interpolation  $h$  est donnée par  $h(w) = (s(w), p(w))$  où

$$s(w) = \frac{\sum x_j \bar{s}_j \kappa_{\lambda_j}(w)}{\sum x_j \bar{p}_j \kappa_{\lambda_j}(w)} \text{ et } p(w) = \frac{\sum x_j \kappa_{\lambda_j}(w)}{\sum x_j \bar{p}_j \kappa_{\lambda_j}(w)}$$

avec  $\kappa_\lambda(w) = (1 - \bar{\lambda}w)^{-1}$  pour  $\lambda, w \in \mathbb{D}$ .

La raison est qu'un tel vecteur, disons

$$f = \sum_{j=1}^n x_j \kappa_{\lambda_j} \in \mathcal{M},$$

maximise  $P$ . Il suit que

$$Sf = \sum_{j=1}^n x_j \bar{s}_j \lambda_j \text{ et } Pf = \sum_{j=1}^n x_j \bar{p}_j \lambda_j.$$

Les expressions (4.12) et (4.8) permettent d'expliciter respectivement  $s$  et  $p$ .

Il sera démontré ultérieurement que dans le cas où il n'y a que deux points d'interpolation, la condition du théorème 4.3 était déjà suffisante. C'est néanmoins une conséquence du fait que la pseudodistance de Carathéodory et la fonction de Lempert sont égales sur le bidisque symétrisé. La démonstration est par conséquent reportée à la toute fin du chapitre.

Pour résoudre le cas où il n'y a que deux points d'interpolation, nous allons reprendre les idées de la démonstration du théorème 4.5. Nous montrerons comment, en interpolant les  $\lambda_j$  vers  $p_j$  à l'aide d'un produit de Blaschke, il est possible de définir une fonction  $s$  tel que  $h := (s, p)$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , dont l'image est dans le bidisque symétrisé  $G$  et qui satisfait le problème d'interpolation.

### 4.3 Simplification du problème

Lorsque le problème est réduit à deux points d'interpolation, il se simplifie énormément. Dans ce cas, la condition sur la matrice de Pick est liée à la distance pseudohyperbolique entre les points d'interpolation, comme le lemme suivant l'indique.

**Lemme 4.6.** *Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i)  $d_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2) \leq d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2)$  ;
- (ii)  $|\varphi_{\mu_2}(\mu_1)| \leq |\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)|$  ;

$$(iii) \det \left[ \frac{1 - \mu_j \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^2 \geq 0.$$

De plus, l'équivalence reste vraie en remplaçant les inégalités par des égalités ou par des inégalités strictes.

*Remarque.* Lorsque (iii) est satisfaite, comme il s'agit d'une matrice  $2 \times 2$ , le critère de Sylvester permet de conclure que cette même matrice est semi-définie positive, car  $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{D}$  pour  $j = 1, 2$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que (i) et (ii) sont équivalentes. Cela découle simplement de la définition de la distance pseudohyperbolique  $d_{\mathbb{D}}$  et de la transformation de Möbius  $\varphi_a$  :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2) \leq d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) &\Leftrightarrow \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \overline{\mu_2} \mu_1} \right| \leq \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \overline{\lambda_2} \lambda_1} \right| \\ &\Leftrightarrow |\varphi_{\mu_2}(\mu_1)| \leq |\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)|. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que (i) et (iii) sont équivalentes. Nous aurons besoin de l'identité

$$(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2) = |1 - \overline{\mu_2} \mu_1|^2 - |\mu_1 - \mu_2|^2,$$

qu'il est possible de vérifier facilement en exprimant chaque module en termes du conjugué. Le reste suit d'un simple calcul :

$$\begin{aligned} \det \left[ \frac{1 - \mu_j \overline{\mu_k}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2)}{(1 - |\lambda_1|^2)(1 - |\lambda_2|^2)} - \left| \frac{1 - \mu_1 \overline{\mu_2}}{1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}} \right|^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2)}{|1 - \mu_1 \overline{\mu_2}|^2} \geq \frac{(1 - |\lambda_1|^2)(1 - |\lambda_2|^2)}{|1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}|^2} \\ &\Leftrightarrow 1 - \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \overline{\mu_2} \mu_1} \right|^2 \geq 1 - \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \overline{\lambda_2} \lambda_1} \right|^2 \\ &\Leftrightarrow d_{\mathbb{D}}^2(\mu_1, \mu_2) \leq d_{\mathbb{D}}^2(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

□

Tel que mentionné précédemment, la résolution du problème d'interpolation suivra les grandes lignes de la preuve du théorème 4.5. Le début consistait à démontrer l'existence d'une solution au problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  dans le disque unité. Le lemme suivant fournit un critère différent et plus spécifique pour arriver à cette fin.

**Lemme 4.7.** *Soit  $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$  des éléments du disque unité tels que  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) > d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$ . Pour tout  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{T}$ , il existe un unique produit de Blaschke  $p$  de degré 2 tel que*

$$p(\lambda_1) = p_1, p(\lambda_2) = p_2 \text{ et } p(\omega_1) = \omega_2.$$

*Démonstration.* Par le lemme 4.6, l'hypothèse  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) > d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$  entraîne que la matrice de Pick associée au problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  est définie positive. Comme de plus la matrice n'est pas singulière, il est possible, à partir de la méthode présentée dans [BRW09], de construire une famille de solutions qui sont des produits de Blaschke exactement 2. Chaque solution  $p$  de la famille étant associée à un  $\omega \in \mathbb{T}$  fixé au départ, il suffit de bien choisir ce  $\omega$  de sorte que  $p(\omega_1) = \omega_2$ .  $\square$

Il y a d'autres cas où il sera possible de simplifier le problème d'interpolation. Sur les géodésiques du bidisque symétrisé, la pseudodistance de Carathéodory a un comportement intéressant. La simplicité du calcul avait été soulignée à l'exemple 3.4 de la section 3.3.

**Théorème 4.8.** *Soit  $z_1, z_2$  deux points distincts dans  $G$ . Dans ce cas,  $\Phi_\omega$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1, z_2$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  si et seulement si  $z_1, z_2$  sont éléments de la variété royale  $\mathcal{V}$  ou d'une même géodésique plate.*

Afin de démontrer ce théorème, le lemme suivant sera nécessaire.

**Lemme 4.9.** *Soit une transformation de Möbius  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $ad-bc \neq 0$ . Si  $f$  envoie  $\mathbb{T}$  sur un cercle  $C$  centré en 0, alors  $a\bar{c} = b\bar{d}$ .*

*Démonstration.* Soit une transformation de Möbius  $f$  telle que dans l'énoncé. La préimage de 0 est  $\frac{-b}{a}$ . Notons  $z^{*C}$  le point inverse de  $z$  par rapport à un cercle généralisé  $C$ .

Puisque les transformations de Möbius ont la propriété de préserver les points inverses,

$$f\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^{*C}\right) = 0^{*C}.$$

Dans le cas présent,  $\left(\frac{-b}{a}\right)^{*C} = \frac{-\bar{a}}{b}$  et  $0^{*C}$  est l'infini pour tout cercle généralisé  $C$  centré en 0. Remarquons que le dénominateur de  $f$  s'annule en  $\frac{-d}{c}$ .

Enfin, étant donné que les transformations de Möbius  $f$  de l'énoncé sont bijectives,

$$\frac{-d}{c} = \frac{-\bar{a}}{b},$$

d'où  $a\bar{c} = b\bar{d}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.8.* Tout d'abord, remarquons que les fonctions  $\Phi_\omega(s, p)$  sont toutes holomorphes par rapport à  $\omega \in \mathbb{T}$  lorsque  $(s, p) \in G$  car  $|s| < 2$ . Comme

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \Phi_\omega(s, p) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{2\omega p - s}{2 - \omega s} = \frac{4p - s^2}{(2 - \omega s)^2},$$

la fonction  $\Phi_\omega(s, p)$  est constante par rapport à  $\omega$  si et seulement si  $4p = s^2$ .

Ainsi,  $z_1, z_2 \in \mathcal{V}$  si et seulement si  $\Phi_\omega(z_j)$  sont indépendantes de  $\omega$  pour  $j = 1, 2$ . En particulier,  $\rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))$  est constante et donc  $\Phi_\omega$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1$  et  $z_2$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ .

Supposons maintenant que  $z_1 = (s_1, p_1)$  et  $z_2 = (s_2, p_2)$  sont sur une même géodésique plate, c'est-à-dire que, pour un même  $\beta \in \mathbb{D}$ ,

$$s_1 = \beta p_1 + \bar{\beta} \text{ et } s_2 = \beta p_2 + \bar{\beta}.$$

Nous avons déjà calculé, dans l'exemple 3.4 de la section 3.3, que dans ce cas,

$$\Phi_\omega(\beta p_j + \bar{\beta}, p_j) = c \varphi_a(p_j)$$

où  $c = \frac{2\omega - \beta}{2 - \omega\bar{\beta}} \in \mathbb{T}$  et  $a = \frac{\bar{\beta}}{2\omega - \beta} \in \mathbb{D}$ . Puisque de tels produits de Blaschke laissent la distance de Poincaré invariante, il suit que

$$\rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) = \rho_{\mathbb{D}}(c \cdot \varphi_a(p_1), c \cdot \varphi_a(p_2)) = \rho_{\mathbb{D}}(p_1, p_2).$$

En particulier, la distance de Carathéodory, donnée par le théorème 3.19, est indépendante de  $\omega$ . C'est le cas si  $z_1, z_2$  sont dans la variété royale ou sur une même géodésique plate, ce qui démontre la suffisance dans l'équivalence.

Supposons maintenant que  $\Phi_\omega$  est une fonction extrémale de Carathéodory pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . En particulier, par le théorème 3.19,  $\rho_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))$  doit être constante par rapport à  $\omega$ . Il suit que la fonction  $d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2))$  doit être constante sur  $\mathbb{T}$ . Nous allons expliciter cette expression pour mieux l'analyser.

Tout d'abord, posons

$$\beta_j := \frac{\bar{s}_j - s_j \bar{p}_j}{1 - |p_j|^2} \in \mathbb{D}, \quad (j = 1, 2)$$

de sorte que  $s_j = \beta_j p_j + \bar{\beta}_j$  tel que dans la proposition 1.1. Remarquons que  $z_1$  et  $z_2$  sont sur une même géodésique plate si et seulement si  $\beta_1 = \beta_2$ . Posons maintenant

$$\begin{aligned} f_j(z) &:= \Phi_z(s_j, p_j) = \frac{2zp_j - s_j}{2 - zs_j} \quad (j = 1, 2), \\ g_2(z) &:= \frac{2\bar{p}_2 - \bar{s}_2 z}{2z - \bar{s}_2}, \quad F(z) := \frac{f_1(z) - f_2(z)}{1 - g_2(z)f_1(z)}. \end{aligned}$$

Soulignons que  $\overline{f_2(z)} = g_2(z)$  lorsque  $z \in \mathbb{T}$ . De plus, la fonction  $F$  ainsi définie satisfait

$$d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) = |F(\omega)|$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Par conséquent, la fonction  $F$  a un module constant sur  $\mathbb{T}$ . Observons que la fonction  $F$  n'est en fait qu'une simple fraction rationnelle. Un calcul élémentaire montre que

$$F(z) = \frac{2 - zs_1}{2 - zs_1} \cdot \frac{2 - zs_2}{2z - \bar{s}_2} \cdot \frac{(s_1 p_2 - s_2 p_1)z^2 + 2(p_1 - p_2)z + s_2 - s_1}{-(s_1 - \bar{s}_2 p_1)z^2 + 2(1 - \bar{p}_2 p_1)z - \bar{s}_2 + \bar{p}_2 s_1} =: \frac{2 - zs_1}{2 - zs_1} \cdot \frac{2 - zs_2}{2z - \bar{s}_2} \cdot \frac{p(z)}{q(z)}$$

où  $p, q$  sont respectivement le numérateur et dénominateur du troisième facteur de  $F$ . La fraction rationnelle  $\frac{p(z)}{q(z)}$  possède au plus deux zéros. En effet, il serait possible que cette fraction rationnelle possède plutôt des singularités enlevables. Ainsi, avant de développer la fonction  $F$  sous cette forme, il faut s'attarder au comportement des fonctions  $f_j$  et  $g_2$ . Il y a quatre cas possibles :

1.  $f_1$  et  $f_2$  possèdent une singularité enlevable ;
2.  $f_1$  ou  $f_2$  exclusivement possède une singularité enlevable, l'autre possède exactement un zéro ;
3.  $F(z)$  possède une singularité enlevable, mais pas  $f_1$  ou  $f_2$  ;
4. le calcul précédent est valide et  $\frac{p(z)}{q(z)}$  possède exactement deux zéros en comptant leur multiplicité.

Le cas où  $g_2$  possède une singularité enlevable n'est pas pris en considération, car cette fonction est intimement liée à  $f_2$ , et les deux possèdent les mêmes singularités.

**Cas 1.** Supposons que  $f_1$  et  $f_2$  possèdent une singularité enlevable. Dans les deux cas, cela signifie que

$$\begin{cases} 2zp_j - s_j = 0 \\ 2 - zs_j = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{2}{s_j} \text{ et } s_j^2 = 4p_j.$$

Autrement dit,  $z_1$  et  $z_2$  sont dans la variété royale  $\mathcal{V}$ .

**Cas 2.** Supposons maintenant que  $f_1$  possède une singularité enlevable, et  $f_2$  un zéro. Dans le cas contraire, il est possible d'inverser les rôles de  $z_1$  et  $z_2$  sans perte de généralité, car la distance pseudohyperbolique  $d_{\mathbb{D}}$  est symétrique. Le but est de montrer que  $z_1$  et  $z_2$  sont sur une même géodésique plate. Les calculs du cas 1 montrent que  $z_1 \in \mathcal{V}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\zeta \in \mathbb{D}$  tel que  $z_1 = (2\zeta, \zeta^2)$ . Cette forme permet de simplifier les expressions de  $\beta_1$  et de  $\Phi_{\omega}(z_1)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  :

$$\beta_1 = \frac{2\bar{\zeta} - 2\zeta\bar{\zeta}^2}{1 - |\zeta|^4} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2} \text{ et } \Phi_{\omega}(z_1) = \frac{2\omega\zeta^2 - 2\zeta}{2 - 2\omega\zeta} = -\zeta.$$

De même, l'expression pour la pseudodistance de Carathéodory se simplifie, car pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$\tilde{C}_G(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega}(z_1), \Phi_{\omega}(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(-\zeta, \Phi_{\omega}(z_2)) = |\varphi_{-\zeta} \circ \Phi_{\omega}(z_2)|.$$

Ainsi, l'image de  $\mathbb{T}$  par l'application

$$\alpha \mapsto \varphi_{-\zeta} \circ \Phi_{\alpha}(z_2) = \frac{(2p_2 - \zeta s_2)\alpha - s_2 + 2\zeta}{(2p_2\bar{\zeta} - s_2)\alpha - s_2\bar{\zeta} + 2}$$

a un rayon constant  $\tilde{C}_G(z_1, z_2)$  ; par conséquent, il s'agit d'un cercle centré en 0 de rayon  $\tilde{C}_G(z_1, z_2)$ . Le lemme 4.9 entraîne que

$$(2p_2 - \zeta s_2)(2\bar{p}_2\bar{\zeta} - \bar{s}_2) = (s_2 - 2\zeta)(\bar{s}_2\bar{\zeta} - 2).$$

En factorisant par rapport à  $\zeta$ , l'équation devient

$$(\overline{s_2} - s_2\overline{p_2})\zeta^2 - 2(1 - |p_2|^2)\zeta + s_2 - \overline{s_2}p_2 = 0.$$

En réarrangeant les termes, celle-ci est équivalente à

$$\begin{aligned} (\overline{s_2} - s_2\overline{p_2})\zeta^2 + s_2 - \overline{s_2}p_2 &= 2(1 - |p_2|^2)\zeta \\ \Rightarrow \frac{\overline{s_2} - s_2\overline{p_2}}{(1 - |p_2|^2)}\zeta^2 + \frac{s_2 - \overline{s_2}p_2}{(1 - |p_2|^2)} &= 2\zeta \\ \Rightarrow \beta_2\zeta^2 + \overline{\beta_2} &= 2\zeta \end{aligned}$$

De même,

$$\overline{\beta_2}\zeta^2 + \beta_2 = 2\overline{\zeta}$$

et en substituant  $\overline{\beta_2}$ , on trouve l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (2\zeta - \beta_2\zeta^2)\overline{\zeta}^2 + \beta_2 &= 2\overline{\zeta} \Rightarrow \beta_2(1 - |\zeta|^4) = 2\overline{\zeta}(1 - |\zeta|^2) \\ \Rightarrow \beta_2 &= \frac{2\overline{\zeta}}{1 + |\zeta|^2} = \beta_1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $z_1, z_2$  sont sur une même géodésique plate.

**Cas 3.** Supposons que  $F(z)$  possède une singularité enlevable, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) \text{ et } f_1(\alpha)g_2(\alpha) = 1.$$

La seconde équation devient, en factorisant par rapport à  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} (2p_2\alpha - s_2)(2\overline{p_2} - \overline{s_2}\alpha) &= (2 - s_2\alpha)(2\alpha - \overline{s_2}) \\ \Rightarrow \alpha^2(s_2 - \overline{s_2}p_2) - 2\alpha(1 - |p_2|^2) + \overline{s_2} - s_2\overline{p_2} &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, l'expression peut être réécrite en fonction de  $\beta_2$  et être résolue :

$$\overline{\beta_2}\alpha^2 + \beta_2 = 2\alpha \Rightarrow \beta_2 = \frac{2\alpha}{1 + |\alpha|^2}.$$

Puisque  $s_2 = \beta_2 p_2 + \overline{\beta_2}$ , la fonction  $f_2$  peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} f_2(\alpha) &= \frac{2\alpha p_2 - (\beta_2 p_2 + \overline{\beta_2})}{2 - \alpha(\beta_2 p_2 + \overline{\beta_2})} = \frac{2\alpha p_2 - \frac{2\alpha}{1+|\alpha|^2} p_2 - \frac{2\overline{\alpha}}{1+|\alpha|^2}}{2 - \frac{2\alpha^2}{1+|\alpha|^2} p_2 - \frac{2|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2}} \\ &= \frac{2\alpha p_2 + 2\alpha^2 \overline{\alpha} p_2 - 2\alpha p_2 - 2\overline{\alpha}}{2 + 2|\alpha|^2 - 2\alpha^2 p_2 - 2|\alpha|^2} = -\overline{\alpha}. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme par hypothèse  $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ , alors il suit que  $f_1(\alpha) = -\overline{\alpha}$ . Ainsi, la relation suivante est satisfaite :

$$2p_1\alpha - s_1 = -\overline{\alpha}(2 - \alpha s_1) \Rightarrow s_1 = \frac{2\alpha}{1 + |\alpha|^2} p_1 + \frac{2\overline{\alpha}}{1 + |\alpha|^2} = \beta_2 p_1 + \overline{\beta_2}.$$

De ce fait,  $z_1, z_2$  sont sur la même géodésique plate  $\beta = \frac{2\bar{\alpha}}{1+|\alpha|^2}$ .

**Cas 4.** Supposons maintenant que  $\frac{p(z)}{q(z)}$  possède exactement deux zéros, multiplicité comptée. Rappelons que

$$F(z) = \frac{2 - zs_1}{2 - z\bar{s}_1} \cdot \frac{2 - zs_2}{2z - \bar{s}_2} \cdot \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Aussi, par définition de  $F$ ,

$$F(\omega)\overline{F\left(\frac{1}{\bar{\omega}}\right)} = \tilde{C}_G(z_1, z_2)^2,$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Le principe d'identité implique que

$$F(z)\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \tilde{C}_G(z_1, z_2)^2$$

pour tout  $z$  où  $F$  est bien définie et holomorphe. En particulier, cette égalité implique que si  $\alpha$  est un zéro de  $F$ , alors  $\frac{1}{\bar{\alpha}}$  en est un pôle de même multiplicité. En d'autres termes, si  $p(\alpha) = 0$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{C}$ , alors  $q\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$  s'annule aussi. Ainsi,  $p(z)$  et l'expression  $\overline{q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$  sont nulles simultanément. Cela entraîne que

$$p(z) = c \cdot \overline{q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \cdot z^2 \tag{4.13}$$

pour un certain  $c \in \mathbb{C}^2$ . Or,

$$\overline{q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{-(\bar{s}_1 - s_2\bar{p}_1) + 2(1 - \bar{p}_1 p_2)z - (s_2 - p_2\bar{s}_1)z^2}{z^2}.$$

L'égalité (4.13) montre qu'il y a les relations suivantes, où chaque équation se rapporte aux coefficients de  $p$  et de  $q$  :

$$s_1 p_2 - s_2 p_1 = -c(s_2 - p_2 \bar{s}_1), \tag{4.14}$$

$$2(p_1 - p_2) = 2c(1 - \bar{p}_1 p_2), \tag{4.15}$$

$$s_2 - s_1 = -c(\bar{s}_1 - s_2 \bar{p}_1). \tag{4.16}$$

Ces trois équations permettent d'établir des relations entre  $s_1, p_1, s_2$  et  $p_2$  pour enfin montrer que  $\beta_1 = \beta_2$ . En effet, par (4.15),  $c = -\varphi_{p_1}(p_2)$  et par conséquent,

$$p_1 - c = \frac{p_2(1 - |p_1|^2)}{1 - \bar{p}_1 p_2}.$$

Si  $p_2 = 0$ , alors par définition  $\beta_2 = \bar{s}_2$  et la relation précédente devient  $p_1 = c$ . Dans ce cas, l'équation (4.16) devient

$$s_1 - \bar{s}_1 p_1 = s_2(1 - |p_1|^2).$$

Cette expression est équivalente à

$$\bar{s}_2 = \frac{\bar{s}_1 - s_1 \bar{p}_1}{1 - |p_1|^2}$$

et il suit que  $\beta_1 = \overline{s_2} = \beta_2$ .

Supposons maintenant que  $p_2 \neq 0$ . Comme l'équation (4.14) est équivalente à

$$s_2(p_1 - c) = (s_1 - c\overline{s_1})p_2,$$

alors l'égalité suivante est satisfaite :

$$\frac{s_2 p_2 (1 - |p_1|^2)}{1 - \overline{p_1} p_2} = (s_1 - c\overline{s_1})p_2.$$

En divisant par  $p_2$ , l'équation devient

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{(1 - \overline{p_1} p_2) s_1 + (p_2 - p_1) \overline{s_1}}{1 - |p_1|^2} \\ &= \frac{\overline{s_1} - \overline{p_1} s_1}{1 - |p_1|^2} p_2 + \frac{s_1 - p_1 \overline{s_1}}{1 - |p_1|^2} \\ &= \beta_1 p_2 + \overline{\beta_1}. \end{aligned}$$

Encore une fois,  $\beta_1 = \beta_2$  et donc  $z_1$  et  $z_2$  se retrouvent sur une même géodésique plate.  $\square$

La démonstration de ce théorème, en plus d'être assez laborieuse, semble sortir du cadre de ce chapitre. En effet, celle-ci laisse de côté les problèmes de Nevanlinna-Pick. Le théorème aurait même pu être présenté plus tôt dans le cadre de la section sur le calcul de la pseudodistance de Carathéodory. La raison pour laquelle il est présenté ici est parce que ce résultat jouera un rôle clé dans la résolution du problème d'interpolation sur le bidisque symétrisé. Soulignons encore une fois que l'une des directions du théorème avait tout de même été présentée, sous une autre formulation, dans l'exemple 3.4.

## 4.4 Existence d'une solution extrémale de Kobayashi

La motivation derrière l'étude des problèmes d'interpolation dans le calcul de la pseudodistance de Kobayashi a déjà été brièvement présentée au début du présent chapitre. Plus précisément, l'idée est de construire, à partir d'une fonction extrémale de Carathéodory  $\Phi_{\omega_0}$ , une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  de sorte que  $h(\Phi_{\omega_0}(z_j)) = z_j$  pour  $j = 1, 2$ ; c'est-à-dire que  $h$  satisfait le problème d'interpolation

$$\lambda_j := \Phi_{\omega_0}(z_j) \mapsto z_j. \quad (4.17)$$

Or, une telle fonction  $h$  sera une fonction extrémale de Kobayashi. En effet,

$$\begin{aligned} C_G(z_1, z_2) &= \rho_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega_0}(z_1), \Phi_{\omega_0}(z_2)) \\ &= \rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Puisqu'il existe une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  telle que  $h(\lambda_j) = z_j$ , par définition de la fonction de Lempert  $\delta_G$ ,

$$\delta_G(z_1, z_2) \leq \rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Il est aussi toujours vrai que

$$C_G(z_1, z_2) \leq K_G(z_1, z_2) \leq \delta_G(z_1, z_2).$$

Par conséquent, il se trouve que

$$K_G(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2)$$

et  $h$  est par définition une fonction extrémale de Kobayashi. Ainsi, s'il est possible de résoudre le problème d'interpolation (4.17), cela signifie que l'existence d'une fonction extrémale de Carathéodory garantit celle d'une fonction extrémale de Kobayashi. Mais encore, cela entraînera que pour une paire de points  $z_1, z_2 \in G$ ,

$$C_G(z_1, z_2) = K_G(z_1, z_2).$$

Le théorème suivant, ainsi que ceux qui l'ont précédé, permettent d'exposer une telle fonction d'interpolation  $h$ . Cette méthode est tirée de [AY04].

**Théorème 4.10.** *Soit deux points distincts  $z_1 = (s_1, p_1)$  et  $z_2 = (s_2, p_2)$  dans  $G$  et soit  $\Phi_{\omega_0}$  une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1, z_2$ . Posons  $\lambda_j := \Phi_{\omega_0}(z_j) \in \mathbb{D}$  pour  $j = 1, 2$ . Il existe un unique produit de Blaschke  $p$  de degré au plus 2 tel que*

$$p(\lambda_1) = p_1, p(\lambda_2) = p_2 \text{ et } p(\overline{\omega_0}) = \overline{\omega_0}^2.$$

De plus, si  $s$  est définie par

$$s(\lambda) = 2 \frac{\omega_0 p(\lambda) - \lambda}{1 - \omega_0 \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

et  $h = (s, p) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , alors  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  et elle satisfait  $h(\lambda_j) = z_j$  pour  $j = 1, 2$ . De plus, la composition  $\Phi_{\omega_0} \circ h$  est l'identité sur  $\mathbb{D}$ .

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.11.** *Soit  $f$  une fonction rationnelle de degré exactement  $n$  qui satisfait  $|f(\omega)| = 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Alors  $f$  peut s'exprimer comme suit :*

$$f(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$$

où  $a_1, \dots, a_n$  sont les zéros de  $f$  répétés autant de fois que leur multiplicité.

*Démonstration.* Par le principe d'identité, l'hypothèse  $|f(\omega)| = 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$  entraîne que

$$f(z) \cdot \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 1$$

pour tout  $z$  où la fonction  $f(z)$  est bien définie et holomorphe. Par conséquent, si  $a$  est un zéro de  $f(z)$ , alors  $\frac{1}{\bar{a}}$  est un pôle de même multiplicité. Il s'agit du même raisonnement que dans le quatrième cas de la démonstration du théorème 4.8.

Soit maintenant  $a_1, \dots, a_n$  les zéros de  $f(z)$  répétés autant de fois que leur multiplicité. Posons

$$h(z) := \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Ainsi, la fonction  $\frac{f(z)}{h(z)}$  est une fonction rationnelle qui n'a ni zéro, ni pôle, car les pôles de  $h(z)$  sont  $\frac{1}{\bar{a}_j}$  pour  $j = 1, \dots, n$ . De plus, la fonction satisfait

$$\left| \frac{f(\omega)}{h(\omega)} \right| = 1$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Par conséquent, la fonction  $\frac{f(z)}{h(z)}$  est une constante unimodulaire et le résultat suit.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.10.* Clairement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont distincts. Par définition des  $\lambda_j$ , les relations suivantes sont vérifiées :

$$d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{C}_G(z_1, z_2) = \sup_{H(G, \mathbb{D})} d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)).$$

De plus,

$$d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) \geq d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2),$$

car la projection  $G \rightarrow \mathbb{D} : (s, p) \mapsto p$  est une fonction holomorphe. Il y a deux cas possibles :

1.  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$ ,
2.  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) > d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$ .

**Cas 1.** Ce problème se distingue de l'autre, parce qu'il revient essentiellement à ce qui a été fait dans le théorème 4.5. En effet, par le lemme 4.6, l'égalité entre les deux pseudodistances entraîne que

$$\det \left[ \frac{1 - \overline{p_j} p_k}{1 - \lambda_j \lambda_k} \right]_{j,k=1}^2 = 0. \quad (4.18)$$

Ainsi, la matrice de Pick associée au problème d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  est singulière. De plus, les  $\lambda_j$  et  $p_j$  étant dans le disque unité, le critère de Sylvester permet d'affirmer que la matrice est semi-définie positive. Par le théorème de Nevanlinna-Pick classique, le problème

d'interpolation  $\lambda_j \mapsto p_j$  pour  $j = 1, 2$  possède une solution unique  $p$  qui est un produit de Blaschke de degré 1. De même, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{C}_G(z_1, z_2) \geq d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega}(z_1), \Phi_{\omega}(z_2)),$$

et le lemme 4.6 montre que la matrice

$$\left[ \frac{1 - \overline{\Phi_{\omega}(z_j)}\Phi_{\omega}(z_k)}{1 - \overline{\lambda_j}\lambda_k} \right]_{j,k=1}^2$$

est semi-définie positive. Ces deux conditions, par le théorème 4.5 et le lemme 4.4, montrent l'existence d'une fonction  $h = (s, p) \in H(\mathbb{D}, G)$  qui satisfait  $h(\lambda_1) = (s_1, p_1)$  et  $h(\lambda_2) = (s_2, p_2)$ .

Mais encore, pour  $j = 1, 2$ , on a  $\Phi_{\omega_0} \circ h(\lambda_j) = \Phi_{\omega_0}(z_j) = \lambda_j$ . La fonction  $\Phi_{\omega_0} \circ h$  étant une fonction holomorphe du disque dans lui-même qui fixe deux points distincts, c'est l'identité. Cela permet d'expliciter  $s(\lambda)$  :

$$\frac{2\omega_0 p(\lambda) - s(\lambda)}{2 - \omega_0 s(\lambda)} = \lambda \Rightarrow s(\lambda) = 2 \frac{\omega_0 p(\lambda) - \lambda}{1 - \omega_0 \lambda}.$$

Comme  $s$  est une fonction rationnelle et bornée sur  $\mathbb{D}$ , et que  $1 - \omega_0 \overline{\omega_0} = 0$ ,  $s(\lambda)$  possède une singularité enlevable en  $\overline{\omega_0}$ , c'est-à-dire que

$$\omega_0 p(\overline{\omega_0}) - \overline{\omega_0} = 0 \Rightarrow p(\overline{\omega_0}) = \overline{\omega_0}^2. \quad (4.19)$$

Au final, toutes les conclusions du théorème sont respectées dans le cas 1.

**Cas 2.** Supposons maintenant que  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) > d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$ . Il a été démontré dans le théorème 3.19 que  $d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega}(z_1), \Phi_{\omega}(z_2))$  est le module d'une fonction rationnelle de  $\omega$ . Celle-ci est donc ou bien constante, ou alors elle atteint son maximum en un nombre fini de points sur  $\mathbb{T}$ . En effet, la fonction  $d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega}(z_1), \Phi_{\omega}(z_2))$  étant réelle-analytique sur le cercle, un point d'accumulation entraînerait que celle-ci est constante, et par là que la fonction rationnelle est constante.

L'une de ces éventualités a déjà été caractérisée dans un théorème précédent. En effet, si la fonction est constante sur  $\mathbb{T}$ , alors par le théorème 4.8,  $z_1, z_2$  sont tous deux dans la variété royale  $\mathcal{V}$  ou sur une même géodésique plate de paramètre  $\beta$ . Dans le dernier cas, alors les  $\lambda_j$  satisfont, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$\lambda_j = \Phi_{\omega}(\beta p_j + \overline{\beta}, p_j) =: c \varphi_a(p_j)$$

où  $a = \frac{\overline{\beta}}{2\omega - \beta} \in \mathbb{D}$  et  $c = \frac{(2\omega - \beta)\overline{\omega}}{2\overline{\omega} - \beta} \in \mathbb{T}$ , tel qu'il a été calculé dans l'exemple 3.4. Comme les automorphismes du disque  $\varphi_a$  laissent la distance pseudohyperbolique invariante sur le disque unité, il suit que  $d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = d_{\mathbb{D}}(p_1, p_2)$  et ce serait plutôt le cas 1.

Supposons maintenant que  $z_1, z_2$  sont plutôt dans  $\mathcal{V}$ , disons  $z_j = (2\zeta_j, \zeta_j^2)$  pour certains  $\zeta_j \in \mathbb{D}$ . Dans ce cas, nous obtenons tout simplement

$$\lambda_j = \Phi_\omega(2\zeta_j, \zeta_j^2) = -\zeta_j$$

et il suffit de définir  $h : \mathbb{D} \rightarrow G$  satisfaisant  $h(\lambda_j) = z_j$  par

$$h(\lambda) := (-2\lambda, \lambda^2).$$

Il est possible de montrer comme précédemment que  $p$  est un produit de Blaschke de degré au plus 2 qui interpole bien  $p_1, p_2$  mais également  $\overline{\omega_0^2}$  en  $\overline{\omega_0}$  par définition. Il est également clair qu'en définissant  $s$  comme dans l'énoncé du théorème, alors  $s(\lambda) = -2\lambda$  et que  $\Phi_{\omega_0} \circ h$  est l'identité sur  $\mathbb{D}$ .

Il reste à montrer que les conclusions du théorème sont satisfaites lorsque la fonction  $\Phi_\omega$  est Carathéodory extrémale pour  $z_1, z_2$  pour un nombre fini d'éléments  $\omega \in \mathbb{T}$ . Notons  $E$  l'ensemble des  $\omega \in \mathbb{T}$  pour lesquels  $\Phi_\omega$  n'est pas Carathéodory extrémale. Notons que l'ensemble  $\mathbb{T} \setminus E$  est de cardinalité finie et que  $E$  est dense dans  $\mathbb{T}$ .

La méthode consiste à reprendre les idées du théorème 4.5. En effet, nous allons identifier un produit de Blaschke  $p$ , et à partir de celui-ci, définir une fonction  $s$  qui fait que  $h = (s, p)$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  à valeurs dans  $G$ . Le lemme 4.6 garantit l'existence d'un unique produit de Blaschke  $p$  de degré 2, satisfaisant

$$p(\lambda_1) = p_1, p(\lambda_2) = p_2 \text{ et } p(\overline{\omega_0}) = \overline{\omega_0^2}.$$

Définissons maintenant  $s$  par

$$s(\lambda) = 2 \frac{\omega_0 p(\lambda) - \lambda}{1 - \omega_0 \lambda}.$$

L'hypothèse que  $p(\overline{\omega_0}) = \overline{\omega_0^2}$  entraîne que la singularité en  $\overline{\omega_0}$  est enlevable. Par conséquent,  $s$  est holomorphe sur  $\overline{\mathbb{D}}$  : c'est une fonction rationnelle de degré au plus 2 qui possède le même dénominateur que  $p$ . Il est de plus possible de vérifier algébriquement que

$$\begin{aligned} s(\lambda_j) &= 2 \frac{\omega_0 p(\lambda_j) - \lambda_j}{1 - \omega_0 \lambda_j} \\ &= 2 \frac{\omega_0 p_j - \Phi_{\omega_0}(s_j, p_j)}{1 - \omega_0 \Phi_{\omega_0}(s_j, p_j)} \\ &= s_j \end{aligned}$$

et par conséquent, la fonction  $s$  ainsi définie satisfait une partie du problème d'interpolation.

En posant  $h := (s, p)$ , il est clair que  $h$  est elle aussi une fonction rationnelle holomorphe sur  $\mathbb{D}$  qui est telle que  $h(\lambda_j) = (s_j, p_j) = z_j$ . Pour que les conclusions du théorème soient satisfaites, il reste à montrer que  $h$  envoie  $\mathbb{D}$  dans  $G$ . Il s'agit là de la partie la plus difficile de la preuve.

Au lieu d'étudier directement  $h$ , nous allons nous concentrer sur  $\Phi_\omega \circ h$ , une fonction du disque unité à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $\omega \in \mathbb{T}$  et  $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ , considérons

$$\psi_\omega(\lambda) := \Phi_\omega \circ h = \frac{2\omega p(\lambda) - s(\lambda)}{2 - \omega s(\lambda)}$$

pour les  $\lambda$  tels que  $s(\lambda) \neq 2\bar{\omega}$ . Il s'agit toujours d'une fonction rationnelle de degré au plus 2, car  $s(\lambda)$  et  $p(\lambda)$  ont le même dénominateur. En montrant les énoncés ci-dessous, l'étude de  $\psi_\omega(\lambda)$  permettra de montrer que  $h(\mathbb{D}) \subseteq G$  :

1. la fonction  $\psi_\omega$  est unimodulaire sur  $\mathbb{T}$  ;
2.  $\psi_\omega = c\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}$  où  $c \in \mathbb{T}$  et  $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$  pour tout  $\omega \in E$  ;
3. les constantes  $a_1, a_2$  sont dans  $\mathbb{D}$  pour tout  $\omega \in E$  et pour ces  $\omega$ ,  $\psi_\omega$  est un produit de Blaschke de degré 2 ;
4. pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,  $|s(\lambda)| < 2$  et  $|\psi_\omega(\lambda)| < 1$ .

En effet, lorsque  $|\psi_\omega(\lambda)| < 1$ , alors  $|\Phi_\omega(s(\lambda), p(\lambda))| < 1$ . La caractérisation (iv) de la proposition 1.1 entraîne que  $(s(\lambda), p(\lambda)) \in G$  et ainsi,  $h(\mathbb{D}) \subseteq G$ .

*Première étape.* Soit  $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{\bar{\omega}_0\}$ . Puisque  $|p(\lambda)| = 1$ , les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} s(\lambda) - \bar{s}(\lambda)p(\lambda) &= 2\frac{\omega_0 p(\lambda) - \lambda}{1 - \omega_0 \lambda} - 2\frac{\bar{\omega}_0 \bar{p}(\lambda) - \bar{\lambda}}{1 - \bar{\omega}_0 \bar{\lambda}} p(\lambda) \cdot \frac{\omega_0 \lambda}{\omega_0 \lambda} \\ &= 2\frac{\omega_0 p(\lambda) - \lambda}{1 - \omega_0 \lambda} - 2\frac{\lambda - \omega_0 p(\lambda)}{\omega_0 \lambda - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il suit que, pour ces mêmes  $\lambda$ ,

$$\operatorname{Re} \{ \omega (s(\lambda) - \bar{s}(\lambda)p(\lambda)) \} = 0 = 1 - |p(\lambda)|^2.$$

Par le lemme 1.2, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , la relation précédente est équivalente à l'égalité

$$|\Phi_\omega(s(\lambda), p(\lambda))| = 1$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{T}$ , exceptés ceux pour lesquels  $s(\lambda) = 2\bar{\omega}$ . Il y en a au plus trois. Remarquons que ces éléments ont déjà été exclus du domaine de définition de  $\psi_\omega$ . Par continuité,

$$|\psi_\omega(\lambda)| = 1,$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

*Deuxième étape* Par le lemme 4.11, toutes les fonctions rationnelles de degré au plus 2 qui sont unimodulaires sur  $\mathbb{T}$  peuvent s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\psi_\omega = c\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}, \quad \psi_\omega = c\varphi_a, \quad \psi_\omega = c$$

où  $c$  est une constante unimodulaire et  $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ .

Pour  $\omega \in E$ , posons

$$\kappa_\omega(\lambda, \mu) = \frac{1 - \overline{\psi_\omega(\mu)}\psi_\omega(\lambda)}{1 - \overline{\mu}\lambda},$$

une fonction défini sur  $\mathbb{D}$  à l'exception des pôles de  $\psi_\omega$ , s'ils se trouvent dans  $\mathbb{D}$ . Remarquons que  $\kappa_\omega(\lambda, \mu)$  reprend la structure des coefficients d'une matrice de Pick. En particulier, par définition de  $\psi_\omega$ , la fonction  $\kappa_\omega$  est définie en  $(\lambda_j, \lambda_k)$  pour  $j, k = 1, 2$  comme suit :

$$\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k) = \frac{1 - \overline{\psi_\omega(\lambda_k)}\psi_\omega(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} = \frac{1 - \overline{\Phi_\omega(z_k)}\Phi_\omega(z_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j}.$$

De plus, puisque  $\lambda_j = \Phi_{\omega_0}(z_j)$  pour un certain  $\omega_0$  qui n'est pas dans  $E$ , il suit, par définition de  $E$ , que

$$d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) < \sup_{\tilde{\omega} \in \mathbb{T}} d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\tilde{\omega}}(z_1), \Phi_{\tilde{\omega}}(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega_0}(z_1), \Phi_{\omega_0}(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2),$$

pour tout  $\omega \in E$ .

Ainsi, par le lemme 4.6, le déterminant de la matrice

$$[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^2$$

doit être strictement positif. Cela signifie qu'il s'agit d'une matrice de rang 2 pour tout  $\omega \in E$ .

Supposons que  $\psi_\omega$  est une constante  $c \in \mathbb{T}$ , c'est-à-dire un produit de Blaschke de degré 0. Or dans ce cas, la matrice  $[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^2$  serait identiquement nulle et en particulier singulière.

Supposons maintenant que  $\psi_\omega = c\varphi_a$  pour un certain  $c \in \mathbb{T}$  et  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ . La fonction  $\kappa_\omega$  s'exprimerait comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k) &= \frac{1 - \overline{c\varphi_a(\lambda_k)}c\varphi_a(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j)}{(1 - a\overline{\lambda_k})(1 - \overline{a}\lambda_j)} \cdot \frac{1}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)}{(1 - a\overline{\lambda_k})(1 - \overline{a}\lambda_j)}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

En particulier,

$$\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_j) = \frac{(1 - |a|^2)}{|1 - a\overline{\lambda_j}|}.$$

Ainsi, pour un tel  $\psi_\omega$ , le déterminant de la matrice  $[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^2$  sera nul. Cela contredit également l'affirmation que la matrice  $[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]$  n'était pas singulière. La fonction  $\psi_\omega$  ne peut être que de la forme  $c\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}$  pour des constantes  $c \in \mathbb{T}$  et  $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ . Soulignons qu'a priori, le module de  $a_1$  et  $a_2$  n'est pas nécessairement inférieur à 1 et que ce n'est donc pas nécessairement un produit de Blaschke.

*Troisième étape.* Montrons que  $a_1, a_2$  sont bien des éléments du disque unité lorsque  $\omega \in E$ . Pour tout  $\omega \in E$ , la fonction  $\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)$  se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k) &= \frac{1 - \overline{c\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\overline{\varphi_{a_2}(\lambda_k)}c\varphi_{a_1}(\lambda_j)\varphi_{a_2}(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} \\ &= \frac{1 - \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j) + \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j) - \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j)\overline{\varphi_{a_2}(\lambda_k)}\varphi_{a_2}(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} \\ &= \frac{1 - \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} + \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j)\frac{1 - \overline{\varphi_{a_2}(\lambda_k)}\varphi_{a_2}(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j}.\end{aligned}$$

Un calcul similaire à ce qui a été fait en (4.20) montre que

$$\frac{1 - \overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j)}{1 - \overline{\lambda_k}\lambda_j} = \frac{(1 - |a_1|^2)}{(1 - a_1\overline{\lambda_k})(1 - \overline{a_1}\lambda_j)}$$

et il suit que

$$\begin{aligned}\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k) &= \frac{(1 - |a_1|^2)}{(1 - a_1\overline{\lambda_k})(1 - \overline{a_1}\lambda_j)} + \frac{(1 - |a_2|^2)\overline{\varphi_{a_1}(\lambda_k)}\varphi_{a_1}(\lambda_j)}{(1 - a_2\overline{\lambda_k})(1 - \overline{a_2}\lambda_j)} \\ &= (1 - |a_1|^2)\overline{f_1(\lambda_k)}f_1(\lambda_j) + (1 - |a_2|^2)\overline{f_2(\lambda_k)}f_2(\lambda_j),\end{aligned}$$

où  $f_1(\lambda) = \frac{1}{1 - \overline{a_1}\lambda}$  et  $f_2(\lambda) = \frac{\varphi_{a_1}(\lambda)}{1 - \overline{a_2}\lambda}$ . Ainsi, la matrice  $[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^2$  peut s'écrire

$$[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^2 = (1 - |a_1|^2)M_1 + (1 - |a_2|^2)M_2$$

pour certaines matrices  $M_1, M_2$  dont les coefficients sont les fonctions  $\overline{f_1(\lambda_k)}f_1(\lambda_j)$  et  $\overline{f_2(\lambda_k)}f_2(\lambda_j)$  pour  $j, k = 1, 2$ .

Les premiers mineurs de ces matrices sont respectivement  $|f_1(\lambda_1)|^2$  et  $|f_2(\lambda_1)|^2$  et leur déterminant est nul. Le critère de Sylvester permet de conclure qu'elles sont semi-définies positives.

Or, il a déjà été démontré que la matrice  $[\kappa_\omega(\lambda_j, \lambda_k)]$  n'est pas singulière. Par conséquent, les coefficients devant les matrices  $M_1$  et  $M_2$  doivent être strictement positifs, c'est-à-dire que

$$1 - |a_1|^2 > 0 \text{ et } 1 - |a_2|^2 > 0.$$

Ainsi, les constantes  $a_1, a_2$  sont dans  $\mathbb{D}$  et  $\psi_\omega$  est un produit de Blaschke pour tout  $\omega \in E$ .

*Quatrième étape.* Montrons maintenant que  $|s(\lambda)| < 2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$  et que, en particulier, le dénominateur de la fonction rationnelle  $\psi_\omega$  ne s'annule nulle part dans  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $s(\lambda_0) = 2\overline{\omega_1}$  pour un certain  $\omega_1 \in \mathbb{T}$  et  $\lambda_0 \in \mathbb{D}$ . Pour un  $\omega \in E$  différent de  $\omega_1$ , la fonction  $\psi_\omega$  évaluée en  $\lambda_0$  est

$$\begin{aligned}\psi_\omega(\lambda_0) &= \frac{2\omega p(\lambda_0) - s(\lambda_0)}{2 - \omega s(\lambda_0)} \\ &= \frac{2\omega p(\lambda_0) - 2\overline{\omega_1}}{2 - \omega \cdot 2\overline{\omega_1}}.\end{aligned}$$

Le complément de  $E$  étant fini,  $E$  est dense dans  $\mathbb{T}$  et il est possible de laisser  $\omega \in E$  tendre vers  $\omega_1$ . La fonction  $\psi_\omega$  étant un produit de Blaschke pour tout  $\omega \in E$ , c'est une fonction bornée. Toutefois, comme le dénominateur de  $\psi_\omega(\lambda_0)$  tend vers 0 lorsque  $\omega$  tend vers  $\omega_1$ , il doit en être de même pour son numérateur. Plus concrètement, cela entraîne que

$$2\omega_1 p(\lambda_0) - 2\overline{\omega_1} = 0$$

et donc que

$$p(\lambda_0) = \overline{\omega_1}^2.$$

Cela contredit le fait que  $p$  est un produit de Blaschke non-constant. Par conséquent, il suit que  $|s(\lambda)| \neq 2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$ . Comme  $|s(\lambda_1)| = |s_1| < 2$ , le théorème des valeurs intermédiaires montre que  $|s(\lambda)| < 2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$ .

Cela montre que la fonction  $\psi_\omega$  est bien définie et holomorphe sur  $\mathbb{D}$  pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . La fonction étant un produit de Blaschke non constant pour  $\omega \in E$ , il suit par continuité que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,

$$|\psi_\omega(\lambda)| \leq 1.$$

Toutefois, il est impossible que  $|\psi_\omega(\lambda)| = 1$  pour certains  $\omega \in \mathbb{T}$  et  $\lambda \in \mathbb{D}$ . Si c'était le cas, alors

$$1 = |\psi_\omega(\lambda_1)| = |\Phi_\omega(z_1)|,$$

et le lemme 1.2 indique que cette relation est équivalente à

$$\omega(s_1 - \overline{s_1}p_1) = 1 - |p_1^2|.$$

Or, comme  $(s_1, p_1) \in G$ , la caractérisation (iii) de la proposition 1.1 indique plutôt que

$$|s_1 - \overline{s_1}p_1| < 1 - |p_1^2|.$$

Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ ,  $|s(\lambda)| < 2$  et

$$|\Phi_\omega(s(\lambda), p(\lambda))| = |\psi_\omega(\lambda)| < 1.$$

C'est le résultat recherché, qui permet de conclure que l'image du disque unité par  $h$  est contenue dans le bidisque symétrisé.

Pour satisfaire l'énoncé du théorème, il ne reste qu'à montrer que  $\Phi_{\omega_0} \circ h(\lambda)$  est l'identité sur  $\mathbb{D}$ . Un calcul direct suffit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega_0} \circ h(\lambda) &= \frac{2\omega_0 p(\lambda) - s(\lambda)}{2 - \omega_0 s(\lambda)} \\ &= \frac{2\omega_0 p(\lambda) - \frac{2(\omega_0 p(\lambda) - \lambda)}{1 - \omega_0 \lambda}}{2 - \omega_0 \frac{2(\omega_0 p(\lambda) - \lambda)}{1 - \omega_0 \lambda}} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

□

## 4.5 Conséquences

Comme il a été souligné précédemment, le théorème 4.10 démontre que l'existence d'une fonction extrémale de Carathéodory de la forme  $\Phi_{\omega_0}$  garantit celle d'une fonction extrémale de Kobayashi. Ce résultat est la clé qui permet de conclure que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi sont égales sur le bidisque symétrisé.

**Corollaire 4.12.** *Les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi ainsi que la fonction de Lempert coïncident sur le bidisque symétrisé.*

*Démonstration.* Comme il est toujours vrai que

$$C_G \leq K_G \leq \delta_G,$$

il suffit de vérifier que  $\delta_G(z_1, z_2) \leq C_G(z_1, z_2)$  pour toute paire de points  $z_1, z_2$  du bidisque symétrisé.

Soit  $z_1, z_2 \in G$ . Par le théorème 3.19, il existe  $\omega_0 \in \mathbb{T}$  tel que la fonction  $\Phi_{\omega_0}$  est Carathéodory extrémale pour  $z_1$  et  $z_2$ , c'est à dire que

$$C_G(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega_0}(z_1), \Phi_{\omega_0}(z_2)).$$

Posons  $\lambda_j := \Phi_{\omega_0}(z_j)$  pour  $j = 1, 2$ . Par le théorème 4.10, il existe  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  telle que  $h(\lambda_j) = z_j$  pour  $j = 1, 2$ . Par définition de la fonction de Lempert  $\delta_G$ ,

$$\delta_G(z_1, z_2) \leq \rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\Phi_{\omega_0}(z_1), \Phi_{\omega_0}(z_2)) = C_G(z_1, z_2).$$

Cela démontre que, pour toute paire de points  $z_1, z_2 \in G$ , l'égalité suivante est satisfaite :

$$C_G(z_1, z_2) = K_G(z_1, z_2) = \delta_G(z_1, z_2).$$

□

L'égalité entre les deux pseudodistances a de jolies conséquences. Par exemple, cela démontre que chaque paire de points du bidisque peut être reliée par une géodésique complexe.

**Corollaire 4.13.** *À travers toute paire de points distincts de  $G$  il passe au moins une géodésique complexe.*

*Démonstration.* Soit deux points distincts  $z_1, z_2 \in G$ . Posons

$$\mathcal{F} = \{h \in H(\mathbb{D}, G) : \exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ tels que } h(\lambda_j) = z_j \text{ pour } j = 1, 2\}.$$

Par un théorème dû à Montel, tel qu'énoncé dans [Kra04, p. 16], comme la famille  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions holomorphes bornées, c'est une famille normale. Rappelons que par définition,

$$\delta_G(z_1, z_2) = \inf \rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2),$$

où l'infimum est pris sur les couples  $(\lambda_1, \lambda_2)$  tels qu'il existe une fonction  $h$  satisfaisant  $\lambda_j \mapsto z_j$  pour  $j = 1, 2$ . La famille  $\mathcal{F}$  étant normale, il existe une fonction  $h_0 \in \mathcal{F}$  pour laquelle l'égalité est satisfaite pour certains  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$ . Il suffit de montrer que  $h_0$  est une géodésique complexe, c'est-à-dire une isométrie par rapport aux distances de Poincaré  $\rho_{\mathbb{D}}$  sur  $\mathbb{D}$  et  $C_G$  sur  $G$ .

Soit  $\Phi$  une fonction extrémale de Carathéodory pour  $z_1, z_2$ . Puisque,  $\delta_G = C_G$ ,

$$\rho_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2) = C_G(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\Phi \circ h_0(\lambda_1), \Phi \circ h_0(\lambda_2)).$$

Cette égalité montre, par le lemme de Schwarz-Pick, que  $\Phi \circ h_0$  est en fait un automorphisme du disque unité.

De plus, par définition de  $C_G$ , puisque  $\Phi \in H(G, \mathbb{D})$ , alors pour tout  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$ , les relations suivantes sont satisfaites :

$$C_G(h_0(\mu_1), h_0(\mu_2)) \geq \rho_{\mathbb{D}}(\Phi \circ h_0(\mu_1), \Phi \circ h_0(\mu_2)) = \rho_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2).$$

La dernière égalité provient du fait que  $\Phi \circ h_0$  est un automorphisme du disque unité.

Mais encore, la pseudodistance de Carathéodory étant un système de Schwarz-Pick, les fonctions holomorphes sont toujours des contractions, c'est-à-dire que

$$C_G(h_0(\mu_1), h_0(\mu_2)) \leq C_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2).$$

Conséquemment, pour tout  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$ ,

$$C_G(h_0(\mu_1), h_0(\mu_2)) = \rho_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2),$$

la fonction  $h$  est une géodésique complexe par rapport à la distance de Poincaré  $\rho_{\mathbb{D}}$  sur le disque et à la métrique de Carathéodory sur  $G$ .  $\square$

Dans [PZ05], Pflug et Zwonek proposent une description complète des géodésiques du bidisque symétrisé. Ils présentent un traitement différent de la matière de ce mémoire, plus dans l'esprit de la théorie des fonctions.

Enfin, tel que promis à la section 4.2, voici un critère nécessaire et suffisant permettant de trouver une fonction d'interpolation pour deux points du disque unité et des valeurs cibles dans le bidisque symétrisé.

**Théorème 4.14.** Soit deux points distincts  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$  et deux valeurs cibles  $z_j = (s_j, p_j) \in G$  pour  $j = 1, 2$ . Il existe une fonction  $h \in H(\mathbb{D}, G)$  satisfaisant  $h(\lambda_j) = z_j$  pour  $j = 1, 2$  si et seulement si, pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ , la matrice

$$\left[ \frac{2(1 - p_j \overline{p_k}) - \omega(s_j - p_k \overline{s_k}) - \overline{\omega}(s_k - s_j \overline{p_k})}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^2 \quad (4.21)$$

est semi-définie positive.

*Démonstration.* La nécessité est le théorème 4.3.

Supposons dès lors que la matrice 4.21 est semi-définie positive. Dans ce cas, les calculs faits dans la démonstration du lemme 4.4 montrent que la matrice

$$\left[ \frac{1 - \Phi_\omega(z_j) \overline{\Phi_\omega(z_k)}}{1 - \lambda_j \overline{\lambda_k}} \right]_{j,k=1}^2$$

est elle aussi semi-définie positive pour tout  $\omega \in \mathbb{T}$ . Puisqu'il s'agit d'une matrice deux par deux, le lemme 4.6 entraîne que

$$d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Le théorème 3.19 permet de calculer  $C_G$  en fonction des  $\Phi_\omega$  et il suit que

$$C_G(z_1, z_2) = \sup_{\omega \in \mathbb{T}} \operatorname{arctanh} d_{\mathbb{D}}(\Phi_\omega(z_1), \Phi_\omega(z_2)) \leq \operatorname{arctanh} d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Comme de plus la fonction de Lempert et la pseudodistance de Carathéodory sont égales sur le bidisque symétrisé,

$$\delta_G(z_1, z_2) \leq \operatorname{arctanh} d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Or, il existe une fonction  $f \in H(\mathbb{D}, G)$  et  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$  tels que  $f(\mu_j) = z_j$  pour  $j = 1, 2$  et  $\delta_G(z_1, z_2) = \operatorname{arctanh} d_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2)$ . L'existence de celle-ci est garantie, car  $\delta_G(z_1, z_2)$  est donné par un problème extrémal sur une famille normale de fonctions, tel que dans la preuve du corollaire 4.13. De ce fait, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$d_{\mathbb{D}}(\mu_1, \mu_2) \leq d_{\mathbb{D}}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Le lemme 4.6 et le théorème de Nevanlinna-Pick classique nous assurent l'existence d'une fonction d'interpolation  $g \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  qui satisfait  $g(\lambda_j) = \mu_j$  pour  $j = 1, 2$ . La fonction  $h := f \circ g$  est donc une fonction holomorphe du disque unité à valeurs dans le bidisque symétrisé telle que  $h(\lambda_j) = z_j$  pour  $j = 1, 2$ .  $\square$

Il aurait été possible de démontrer l'égalité entre les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi en exploitant certaines propriétés purement géométrique du bidisque symétrisé. En effet, il a récemment été démontré, dans [PZ12], que le bidisque symétrisé peut être exprimé

par une union croissante de domaines fortement linéairement convexes. Or, en 1984, Lempert avait montré dans le cadre d'une conférence [Lem84] que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi étaient égales sur de tels domaines. Les travaux de Lempert ont d'ailleurs été repris en détail dans [KW13]. En particulier, puisque le théorème de Lempert s'applique à de tels domaines, l'égalité suit sur le bidisque symétrisé. Il s'agirait d'une démonstration alternative à celle proposée par Agler et Young.

En ce sens, le tétrabloc  $\mathbb{E}$ , défini par

$$\mathbb{E} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_2 - \bar{z}_1 z_3| + |z_1 z_2 - z_3| + |z_1|^2 < 1\},$$

est un objet géométrique de même souche que le bidisque symétrisé très intéressant. Dans [EKZ13], il a été démontré que  $C_{\mathbb{E}} = K_{\mathbb{E}}$  et que  $\mathbb{E}$  n'était pas biholomorphe à un domaine convexe. Comme il a été souligné par Pflug et Zwonek dans [PZ12], puisqu'il n'est toujours pas clair à ce jour si le Tétrabloc est fortement linéairement convexe, c'est un des rares exemples pour lequel l'égalité entre les deux pseudodistances ne découle pas nécessairement des travaux de Lempert.

Le théorème de Nevanlinna-Pick classique a trouvé son intérêt dans les démonstrations subséquentes du présent chapitre. Des critères plus précis ont été développés pour résoudre des problèmes d'interpolation pour des éléments du disque unité et des valeurs cibles dans le bidisque symétrisé. Cela a permis de démontrer comment l'existence d'une fonction extrémale de Carathéodory garantit celle d'une fonction extrémale de Kobayashi. Au final, il a été démontré que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur le bidisque symétrisé, un résultat non sans conséquence. Ce fait rend le bidisque symétrisé intéressant entre autre parce qu'il s'agit du premier exemple de domaine qui n'est pas biholomorphe à un domaine convexe sur lequel les deux pseudodistances coïncident.

# Conclusion

De par sa géométrie particulière et son rôle dans le problème de Nevanlinna-Pick spectral (NPS), le bidisque symétrisé a suscité l'intérêt de plusieurs mathématiciens au cours des dernières années. Cet ensemble jouit d'une structure simple caractérisée en termes d'un système de coordonnées intuitif. Une étude analytique et géométrique du bidisque symétrisé mène aux systèmes de Schwarz-Pick, des ensembles de métriques intimement liés aux fonctions holomorphes. Les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi jouent un rôle de premier plan, celles-ci formant respectivement le plus petit et le plus grand système. Il est possible de trouver une formule explicite pour la pseudodistance de Carathéodory sur le bidisque symétrisé et ce, en exploitant la structure particulière de cet ensemble et en considérant des opérateurs bien choisis. La pseudodistance de Kobayashi est de plus égale à celle de Carathéodory sur ce domaine en particulier. Pour le démontrer, il faut adopter une stratégie complètement différente. L'idée est de ramener le calcul de la pseudodistance de Kobayashi à un problème d'interpolation sur le disque unité, c'est-à-dire au problème de Nevanlinna-Pick classique.

Que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi soient égales sur le bidisque symétrisé est une découverte mathématique des moins banales. C'est pour cette raison que cet ensemble a été au coeur de plusieurs recherches au cours des dernières années. En plus d'apparaître naturellement dans le NPS, la riche géométrie du bidisque symétrisé a su capter d'autant plus l'attention de plusieurs chercheurs dans le domaine.

Le bidisque symétrisé ne joue un rôle que dans le NPS pour le cas particulier des matrices  $2 \times 2$ . En ce sens, le bidisque symétrisé a amorcé d'autres recherches autour d'ensembles de dimensions supérieures issus du NPS, c'est-à-dire le polydisque symétrisé [NPTZ08], le tétrabloc [EZ09] ou, plus récemment, le pentabloc [ALY]. Ces derniers semblent posséder une structure tout aussi abondante en termes de vertus géométriques et analytiques. Peut-être ces ensembles sauront-ils nous éclairer sur le NPS ? La recherche d'une solution définitive reste une entreprise longue et difficile que plusieurs qualifiaient même d'aride. Cette poursuite demeure toutefois inévitable, car « [il] y a des vérités qui ne peuvent être révélées qu'à la condition d'être découvertes<sup>1</sup> ».

---

1. Wajdi Mouawad, *Incendies*, 2003.



# Annexe A

## Notation

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels strictement positifs.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.
$\Omega$	domaine quelconque dans $\mathbb{C}^d$ .
$\bar{\Omega}$	fermeture d'un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ .
$\mathbb{D}$	disque unité.
$\mathbb{T}$	cercle unité $\{\omega \in \mathbb{C} :  \omega  = 1\}$ .
$G$	bidisque symétrisé $\{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{D}\}$ .
$\Gamma$	fermeture du bidisque symétrisé $G$ .
$\mathcal{V}$	variété royale $\{(2\zeta, \zeta^2) : \zeta \in \bar{\mathbb{D}}\}$ .
$H(\Omega_1, \Omega_2)$	ensemble des fonctions holomorphes sur $\Omega_1$ à valeurs dans $\Omega_2$ .
$\varphi_a$	transformation de Möbius $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ où $a \in \mathbb{C}$ .
$d_{\mathbb{D}}$	distance pseudohyperbolique entre deux éléments du disque unité.
$\rho_{\mathbb{D}}$	distance de Poincaré entre deux éléments du disque unité.
$C_{\Omega}$	pseudodistance de Carathéodory sur $\Omega$ .
$c_{\Omega}$	forme infinitésimale de la pseudodistance de Carathéodory sur $\Omega$ .
$\delta_{\Omega}$	fonction de Lempert sur $\Omega$ .
$K_{\Omega}$	pseudodistance de Kobayashi sur $\Omega$ .
$\sigma(M)$	spectre de l'opérateur $M$
$M_n(\mathbb{C})$	ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficient dans $\mathbb{C}$ .
$\mathcal{M}_2^d(\mathbb{C})$	ensemble des $d$ -uplets commutatifs de matrices $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ .



# Bibliographie

- [Agl90] Jim Agler. Operators theory and the Caratheodory metric. *Invent. Math.*, 101 :483–500, 1990.
- [Ahl79] Lars Ahlfors. *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Education, 2nd edition, 1979.
- [ALY] Jim Agler, Zinaida A. Lykova, and Nicholas J. Young. The complex geometry of a domain related to  $\mu$ -synthesis. *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.
- [AW98] Herbert Alexander and John Wermer. *Several Complex Variables and Banach Algebras*. Number 35 in Graduate texts in mathematics. Springer, 3rd edition, 1998.
- [AY99] Jim Agler and Nicholas J. Young. A commutant lifting theorem for a domain in  $\mathbb{C}^2$  and spectral interpolation. *J. Funct. Anal.*, 161(2) :452–477, 1999.
- [AY00] Jim Agler and Nicholas J. Young. The two-point spectral Nevanlinna-Pick problem. *Integral Equations and Operator Theory*, 37 :375–385, 2000.
- [AY01] Jim Agler and Nicholas J. Young. A Schwarz lemma for the symmetrized bidisc. *Bull. London Math. Soc.*, 33(2) :175–186, 2001.
- [AY03a] Jim Agler and Nicholas J. Young. A model theory for  $\Gamma$ -contractions. *J. Operator Theory*, 49(1) :45–60, 2003.
- [AY03b] Jim Agler and Nicholas J. Young. The two-by-two spectral Nevanlinna-Pick problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :573–585, 2003.
- [AY04] Jim Agler and Nicholas J. Young. The hyperbolic geometry of the symmetrized bidisc. *J. Geom. Anal.*, 14(3) :375–403, September 2004.
- [BRW09] Line Baribeau, Patrice Rivard, and Elias Wegert. On hyperbolic divided differences and the Nevanlinna-Pick problem. *Comput. Methods Funct. Theory*, 9(2) :391–405, 2009.

- [Cos04] Constantin Costara. The symmetrized bidisc and Lempert's theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 36 :656–662, 2004.
- [Din89] Seán Dineen. *The Schwarz Lemma*. Oxford mathematical monograph. Oxford University Press, 1989.
- [DP93] John Doyle and Andrew Packard. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1) :71–109, 1993.
- [EKZ13] Armen Edigarian, Łukasz Kosiński, and Włodzimierz Zwonek. The Lempert theorem and the tetrablock. *J. Geom. Anal.*, 23(4) :1818–1831, October 2013.
- [EZ09] Armen Edigarian and Włodzimierz Zwonek. Schwarz lemma for the tetrabloc. *Bull. London Math. Soc.*, 41 :506–514, 2009.
- [Gar81] John B. Garnett. *Bounded Analytic Function*, volume 96 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press, inc., 1981.
- [Kra01] Steven G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variable*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2001.
- [Kra04] Steven G. Krantz. *Complex Analysis : the Geometric Viewpoint*, volume 23 of *The Carus mathematical monographs*. Mathematical Association of America, 2004.
- [KW13] Łukasz Kosiński and Tomasz Warszawski. Lempert theorem for strongly linearly convex domains. *Ann. Polon. Math.*, 107(2) :167–216, 2013.
- [Lem82] László Lempert. Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains. *Anal. Math.*, 8(4) :257–261, 1982.
- [Lem84] László Lempert. Intrinsic distances and holomorphic retracts. In *Complex analysis and applications '81 (Varna, 1981)*, pages 341–364. Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1984.
- [NPTZ08] Nikolai Nikolov, Peter Pflug, Pascal J. Thomas, and Włodzimierz Zwonek. Estimates of the Carathéodory metric on the symmetrized polydisc. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1) :140–148, 2008.
- [PZ05] Peter Pflug and Włodzimierz Zwonek. Description of all complex geodesics in the symmetrized bidisc. *Bull. London Math. Soc.*, 37(4) :575–584, 2005.
- [PZ12] Peter Pflug and Włodzimierz Zwonek. Exhausting domains of the symmetrized bidisc. *Ark. Mat.*, 50(2) :397–402, October 2012.
- [Roy02] Sylvain Roy. Problème spectral de Nevanlinna-Pick. Mémoire, Université Laval, Août 2002.

- [Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [Sch17] Issai Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. für Math.*, 1917(147) :205–232, 1917.
- [Tay60] Joseph L. Taylor. A joint spectrum for several commuting operators. *J. Functional Analysis*, 1970(6) :172–191, 1960.