

Liste des abréviations

AC	A gréger puis C omparer
AD	A ide à la D écision
AMCD	A ide M ulti C ritères à la D écision
AMFI	A ggregation M ethod by F uzzy I ntegrals
Comp	C omparaison
Conf	C onfrontation
CPT	C umulative P rospect T heory
DA2AC	D etermination A lgorithm of the 2 - A dditive C apacity
DCU	D iagramme des C as d' U tilisation
DSS	D ecision S upport S ystem
GDSS	G roup D ecision S upport S ystem
LIO	L aboratoire d' I nformatique O ran
MMAD	M éthode M ulticritères d' A ide à la D écision
MOPI	M onotony of P referential I nformation
NDSS	N egotiation D ecision S upport S ystem
PLM	P rogrammation L inéaire M ulticritères
SAD	S ystème d' A ide à la D écision
SIAD	S ystème I nteractif d' A ide à la D écision
ULB	l' U niversité L ibre de B ruelles
UML	U nified M odeling L anguage

Table des matières

Liste des abréviations	viii
Introduction	2
Contexte de l'étude	2
Problématique	5
Contribution	6
Organisation de la thèse	7
I Synthèse de l'État de l'Art	9
1 L'Aide multicritères à la décision	10
1.1 Introduction	11
1.2 L'aide à la décision : concepts fondamentaux	12
1.2.1 La décision	12
1.2.2 Le processus de décision	12
1.2.3 Les acteurs de l'aide à la décision	13
1.3 Les systèmes d'aide à la décision	14
1.3.1 Les systèmes interactifs d'aide à la décision	14
1.3.2 Les systèmes d'aide à la décision de groupe	16
1.4 L'Aide MultiCritères à la Décision (AMCD)	16
1.4.1 Paradigme multicritères	16
1.4.1.1 Propriété 1 - Problème mal posé	17
1.4.1.2 Propriété 2 - Relation de dominance (I, P, R)	17

TABLE DES MATIÈRES

1.4.1.3	Propriété 3 - Pareto-optimalité (efficacité)	18
1.4.1.4	Propriété 4 - transitivité	18
1.4.2	L'aide multicritères à la décision : concepts fondamentaux	18
1.4.2.1	Action	19
1.4.2.2	Objectifs et attributs	19
1.4.2.3	Critère	19
1.4.2.4	Matrice de performance	20
1.4.3	Typologie des problématique de l'AMCD	20
1.4.4	L'analyse multicritères	21
1.4.4.1	Objectifs de l'analyse multicritères	21
1.4.4.2	Démarche de l'analyse multicritères	22
1.5	Bases méthodologiques de l'AMCD	23
1.5.1	Énumérer les actions potentielles	23
1.5.2	Modélisation des préférences	24
1.5.2.1	Dresser la liste des critères	24
1.5.2.2	Établir la matrice des performance	27
1.5.3	Agrégation des performances	27
1.6	Conclusion	28
2	L'Agrégation multicritères	30
2.1	Introduction	31
2.2	L'agrégation des performances	31
2.3	Les opérateurs d'agrégation	32
2.3.1	Propriétés fondamentales	32
2.3.2	Typologie des opérateurs d'agrégation	34
2.3.2.1	Les opérateurs conjonctifs	34
2.3.2.2	Les opérateurs disjonctifs	34
2.3.2.3	Les opérateurs de compromis	35
2.3.2.4	Les opérateurs hybrides	35
2.4	Typologie des MMAD	36

2.4.1	Agréger puis comparer (AC)	36
2.4.2	Comparer puis agréger (CA)	38
2.4.3	Classification des MMAD selon la nature de l'agrégation	39
2.4.3.1	Méthodes par agrégation totale	39
2.4.3.2	Méthodes par agrégation partielle	40
2.4.3.3	Méthodes par agrégation locale	41
2.5	Avantages et limites des MMAD	42
2.6	Travaux connexes	46
2.7	Conclusion	48
3	Mesures floues et Intégrale de Choquet	49
3.1	Introduction	50
3.2	Interactions entre les critères	51
3.2.1	Corrélation	51
3.2.2	Interchangeabilité et complémentarité	52
3.2.3	Dépendance préférentielle	53
3.3	Mesures floues et Intégrales floues	54
3.3.1	Définition de la mesure floue	55
3.3.2	Utilisation des mesures floues	56
3.3.2.1	Échelles unipolaires	56
3.3.2.2	Échelles unipolaires et mesures floues	57
3.3.2.3	L'indice d'importance globale	57
3.3.2.4	L'indice d'interaction entre les critères	58
3.3.3	Mesures floues k-additives	60
3.3.4	Intégrales floues	60
3.4	Intégrale de Choquet	60
3.5	Modèles bipolaires	61
3.5.1	Échelles bipolaires	63
3.5.2	Échelles bipolaires et bi-capacités	63
3.6	Bi-capacités et Intégrale de Choquet	64

3.6.1	Définition d'une bi-capacité	64
3.6.2	Intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires	65
3.7	Travaux connexes	66
3.8	Conclusion	67
II	Contribution de la thèse	68
4	Approche d'analyse multicritères proposée	69
4.1	Introduction	70
4.2	Présentation de la méthode AMFI	71
4.3	Principe de la méthode AMFI	71
4.3.1	Phase de comparaison	71
4.3.1.1	Estimation de la complexité	72
4.3.1.2	Résultat de la phase de comparaison	72
4.3.2	Phase d'agrégation	72
4.3.2.1	Choix de la bi-capacité	73
4.3.2.2	Détermination de la bi-capacité	73
4.3.2.3	Algorithme de détermination de la capacité 2-additive	76
4.3.2.4	Exemple d'illustration de l'algorithme "DA2AC"	77
4.3.2.5	Algorithme de la phase d'agrégation	80
4.3.2.6	Estimation de la complexité	81
4.3.3	Phase d'exploitation	81
4.3.3.1	Étape de scorage	81
4.3.3.2	Étape de rangement	83
4.3.3.3	Estimation de la complexité	84
4.3.4	Récapitulatif des concepts d'AMFI	84
4.3.5	Paramètres subjectifs d'AMFI	86
4.3.5.1	Seuil de discrimination	86
4.3.5.2	Seuils de transcendance et d'équivalence	86
4.4	Récapitulatif des variables de la méthode AMFI	87

4.5	Démarche globale de la méthode AMFI	87
4.6	Situation dans la littérature, apports et limites	89
4.6.1	Apports de la méthode AMFI	90
4.6.1.1	Utilisation des mesures floues et l'intégrale de Choquet	90
4.6.1.2	Nombre limité de paramètres subjectifs	91
4.6.1.3	Facilité d'implémentation	91
4.6.2	Limites de la méthode AMFI	92
4.7	Conclusion	92
5	Expérimentation de l'approche	93
5.1	Introduction	94
5.2	Le prototype AMFI	94
5.3	Description des données expérimentales	95
5.4	Scénario 1 : Détermination de la bi-capacité	96
5.4.1	Résultats de l'algorithme "DA2AC"	97
5.4.2	Discussion et analyse des résultats	98
5.5	Scénario 2 : Déroulement détaillé de la méthode	99
5.5.1	Bi-capacité et paramètres subjectifs	99
5.5.2	Déroulement du scénario	100
5.5.2.1	Phase de comparaison	100
5.5.2.2	Phase d'agrégation	101
5.5.2.3	Phase d'exploitation	102
5.5.3	Discussion et analyse des résultats	104
5.6	Scénario 3 : échantillon étendu	105
5.6.1	Déroulement du scénario	105
5.6.2	Discussion et analyse des résultats	107
5.7	Scénario 4 : Sensibilité et robustesse	107
5.7.1	Perturbation 1 : Seuil de discrimination	109
5.7.1.1	Analyse de sensibilité	110
5.7.1.2	Analyse de robustesse	110

5.7.2	Perturbation 2 : Seuils de transcendance et d'équivalence	111
5.7.2.1	Analyse de sensibilité	112
5.7.2.2	Analyse de robustesse	112
5.7.3	Illustrations graphiques	112
5.7.4	Discussion et analyse des résultats	115
5.8	Scénario 5 : Comparaison avec d'autres méthodes	116
5.8.1	Configuration des méthodes	116
5.8.2	Discussion et analyse des résultats	118
5.9	Conclusion	119
Conclusions et perspectives		120
III Annexes		125
A Algorithmes de la méthode AMFI		126
A.1	Introduction	127
A.2	Algorithme DA2AC	127
A.3	Algorithmes développés pour les phases d'AMFI	129
A.3.1	Algorithme spécifique à la phase de comparaison	130
A.3.2	Algorithme de la phase d'agrégation	130
A.3.3	Algorithmes de la phase d'exploitation	132
A.3.3.1	Étape de scorage	132
A.3.3.2	Étape de rangement	132
A.4	Conclusion	136
B Le Prototype AMFI		137
B.1	Introduction	138
B.2	Modélisation UML du prototype	138
B.2.1	Diagramme Use-case	139
B.2.2	Diagramme de classes	139

TABLE DES MATIÈRES

B.2.3	Diagrammes de séquence	140
B.3	Mise en œuvre du prototype	141
B.3.1	Lancement du prototype	141
B.3.2	Chargement des données d'entrée	142
B.3.3	Exécution de la méthode AMFI	143
B.3.4	Edition des résultats	145
B.4	Conclusion	145
Références		147
Webographie		159

Table des figures

1.1	Processus décisionnel de Simon	13
1.2	Composition d'un système interactif d'aide à la décision	15
1.3	Démarche bottom-up de Roy	22
1.4	Démarche top-down de Kenney	22
1.5	Démarche intermédiaire de Laaribi	23
4.1	Graphe $G = (V, E)$	78
4.2	Graphe $G = (V, E)$ mis à jour (arcs ajoutés en rouge)	79
4.3	Graphe réduit $G' = (V', E')$	79
4.4	Graphe des variations du score en fonction de la confrontation	83
4.5	Démarche globale de la méthode AMFI	88
5.1	Interface du prototype AMFI	95
5.2	Approche globale de l'analyse de sensibilité	108
5.3	Évolution des rangs des actions pour la perturbation 1	113
5.4	Évolution des rangs des actions pour la perturbation 2	113
5.5	Évolutions des rangs par rapport au seuil de discrimination	114
5.6	Évolutions des rangs par rapport au seuil de transcendance	114
5.7	Évolution des rangs des actions par rapport au seuil d'équivalence	115
B.1	Diagramme des cas d'utilisation du prototype AMFI	139
B.2	Diagramme de classes du prototype AMFI	140
B.3	Diagramme de classes du prototype AMFI	141
B.4	Boites de dialogue pour charger la matrice de performance	142

TABLE DES FIGURES

B.5	Boîtes de dialogue pour charger les paramètres subjectifs	142
B.6	Affichage de la matrice de performance et des paramètres subjectifs	143
B.7	Affichage des résultats de l'exécution de la méthode AMFI	144
B.8	Matrice de confrontation	144
B.9	Rangement final de la méthode AMFI	145

Liste des tableaux

1.1	Les quatre problématiques de référence pour l'AMCD	21
1.2	Définitions des différentes situations de préférence	25
1.3	Les paramètres subjectifs intracritères	27
2.1	Propriétés fondamentales des opérateurs d'agrégation	33
2.2	Quelques opérateurs de compromis ainsi que leurs propriétés	35
2.3	Quelques opérateurs hybrides et leurs propriétés	36
2.4	Quelques méthodes procédant par agrégation totale	40
2.5	Quelques méthodes procédant par agrégation partielle	41
2.6	Quelques méthodes procédant par agrégation locale	42
2.7	Avantages et limites des méthodes de l'agrégation totale	43
2.8	Avantages et limites des méthodes de l'agrégation partielle	45
2.9	Avantages et limites des méthodes de l'agrégation locale et itérative	46
3.1	Exemple du choix d'une voiture	54
3.2	Exemple d'évaluation des étudiants	62
3.3	Récapitulatif des travaux utilisant les mesures floues et les intégrales floues	66
4.1	Résultats de la détermination de la capacité 2-additive	80
4.2	Récapitulatif des concepts de la méthode AMFI	85
4.3	Récapitulatif des variables et paramètres de la méthode AMFI	87
4.4	Tableau comparatif des méthodes AMFI, PROMETHEE II et ELECTRE III	90
5.1	Description des critères [JOE 97]	96

5.2	Extrait de la matrice de performance	96
5.3	Traduction des préférences du décideur en relations binaires $\{P, I\}$	97
5.4	Résultats des calculs de la capacité 2-additive	98
5.5	Résultats des calculs de la bi-capacité symétrique	98
5.6	Matrice de performance pour le scénario 2	99
5.7	Valeurs du seuil de discrimination pour le critère "Équipements"	100
5.8	Résultats des comparaisons pour l'action z_1	101
5.9	Scénario 2 : Matrice de confrontations	102
5.10	Résultats de l'étape de scorage	103
5.11	Rangement final pour le scénario 2	104
5.12	Scénario 3 : Seuils de discrimination pour chaque critère	105
5.13	Extrait du rangement final	106
5.14	Rangs modifiés après le raffinement	106
5.15	Matrice de performance pour le scénario 4	109
5.16	Scénario 4 : Seuils de discrimination pour chaque critère	109
5.17	Résultats des variations du seuil de discrimination pour le critère "Bruit"	110
5.18	Résultats des variations des seuils de transcendance et d'équivalence	111
5.19	Configurations des méthodes	117
5.20	Configurations des méthodes	118

Liste des algorithmes

- 1 Phase 1 de "DA2AC" 128
- 2 Phase 2 de "DA2AC" 129
- 3 Comparaison de deux actions a et b 130
- 4 Agrégation du vecteur de comparaison $Comp(a_i, a_j)$ 131
- 5 L'étape de scorage 133
- 6 Rangement préliminaire 134
- 7 Raffinement du rangement préliminaire 135

Introduction générale

Introduction générale

Dans cette introduction, nous présenterons le contexte de notre étude à savoir l'aide multicritères à la décision. Nous nous focaliserons sur l'agrégation qui constitue une étape importante dans toute démarche d'analyse multicritères. Nous nous intéresserons également à la pondération des critères et la prise en compte des différentes interactions les reliant. Nous exposons essentiellement la problématique concernant le choix le plus adéquat d'une approche d'analyse multicritères capable de satisfaire au mieux les besoins des décideurs. Nous passerons ensuite à une analyse des besoins justifiant notre contribution à travers ce travail de thèse.

Contexte de l'étude

La majorité des problèmes de notre vie ont la particularité d'inclure plusieurs points de vue à la fois contradictoires et mesurant des quantités de natures différentes. A ce titre, la résolution de ces problèmes passe par la prise en considération de tous les points de vue jugés pertinents. La fin des années soixante et le début des années soixante-dix ont connu la naissance du paradigme multicritères afin de pallier aux limites du paradigme de l'optimisation monocritère. Cela se faisait généralement en développant des outils d'analyse permettant de mettre l'accent sur plusieurs problématiques multicritères qui avait auparavant l'aspect d'énigmes. Cependant, la résolution de ces problèmes a fait apparaître d'autres problèmes encore plus compliqués à l'image de la pondération des critères ou encore les diverses procédures d'agrégation.

L'objectif principal des recherches effectuées dans le cadre de l'aide multicritères à la décision, est de développer des modèles plus ou moins bien formulés dans la perspective de faciliter la prise de décision pour le décideur et d'en améliorer les conditions. A cet effet, les solutions possibles au problème (alternatives) doivent être identifiées et il est nécessaire de modéliser les préférences du décideur.

En outre, vu que le paradigme multicritères impose la prise en considération de tous les points de vue pertinents, il est tout à fait naturel que trouver un consensus entre ces différents points de vue représente un des objectifs suprême de toute méthode d'aide multicritères à la décision.

Dans cette optique, le concept de "critère" a été introduit permettant ainsi de modéliser les préférences du décideur. Un critère est une expression conçue pour évaluer et comparer des actions potentielles selon un point de vue bien défini. Il est défini formellement par Vincke [VIN 89] comme "*une fonction g , définie dans A , prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné et représentant les préférences du décideur selon un certain point de vue*".

Cela nous mène à constater que l'opération d'agrégation des critères n'est autre que la prise en compte des différents points de vue jugés pertinents. L'importance de cette opération s'exprime par le fait qu'elle représente à elle seule un critère de classification des familles de MMAD¹. En effet, trois types d'agrégation existent dans la littérature associée, à savoir, l'agrégation totale, partielle, et locale et les approches adoptées par les MMAD sont généralement basées sur l'un de ces trois types.

Par conséquent, le choix de la MMAD utilisée doit se faire conformément à l'approche d'agrégation la mieux convoitée au problème décisionnel traité afin de garantir une meilleure aide. Ce choix rigoureux est justifié par le fait que chaque méthode adopte sa propre manière pour traiter le problème décisionnel : modéliser les préférences du décideur, agréger les performances des alternatives et éditer les résultats. A cet effet, chaque méthode d'analyse multicritères montre une puissance dans certains domaines d'application (aménagement du territoire, santé, etc.) et présente malencontreusement des limites dans d'autres.

En outre, beaucoup de méthodes d'analyse multicritères tentent d'exprimer la subjectivité du décideur à travers des paramètres sous forme de seuils. Ces quantités sont souvent déterminées grâce à la collaboration de l'expert du domaine (l'intervenant) et l'analyste (l'homme d'étude). Dans d'autres cas, des formules mathématiques sont utilisées de façon à inclure des constantes faisant apparaître les aspects socio-personnels du décideur. Ainsi, plus des seuils sont considérés, mieux la subjectivité de la décision et des décideurs est exprimée.

Dans la littérature, nous retrouvons une large panoplie de travaux de recherche dont l'objectif est :

- Soit d'enrichir les approches d'agrégation multicritères existantes ;
- Soit de proposer de nouvelles méthodes d'analyse multicritères palliant aux limites des approches existantes ;
- Soit d'optimiser les résultats obtenus, par l'une ou l'autre des alternatives, à travers le couplage de plusieurs techniques et architectures.

Dans le contexte de la présente étude, nous nous intéressons à la pondération des critères, et plus particulièrement à la représentation de l'influence des critères sur la décision finale en tenant compte des interactions entre ces critères. En effet, les critères ne sont pas toujours

¹Méthode Multicritères d'Aide à la Décision

indépendants. Il est tout à fait possible d'avoir plusieurs types de liens entre les critères tels que la corrélation, l'interchangeabilité, la complémentarité ou encore la dépendance préférentielle.

Cependant, un grand nombre de méthodes d'aide multicritères à la décision se base sur l'hypothèse de l'indépendance des critères et affecte à ces derniers des poids sans tenir compte des éventuelles interactions qui les relient. Les résultats fournis par ces méthodes sont souvent sujets à des imprécisions et ne sont pas toujours aptes à modéliser certaines préférences des décideurs. C'est ainsi que plusieurs travaux de recherches ont vu le jour avec comme objectif, la représentation des interactions entre les critères afin d'améliorer la précision des résultats obtenus.

Ces travaux se basent sur plusieurs techniques parmi lesquelles l'utilisation des mesures et intégrales floues pour l'agrégation multicritères. En effet, la mesure floue, appelée aussi capacité, associée à un ensemble de critères E représente l'importance de la coalition E dans le problème d'agrégation en question, autrement dit, l'influence des critères appartenant à E sur la prise de décision. De ce fait, il est possible de mesurer le degré d'interaction entre les critères en fonction des capacités des différentes associations possibles des critères.

En réalité, les intégrales sont considérées comme des opérateurs d'agrégation de type "moyenne" car, de façon générale, une intégrale est utilisée pour calculer la valeur moyenne d'une fonction. Le principe de l'intégrale floue a été proposé par Sugeno [SUG 74] et représente en quelque sorte, une extension de celui de l'intégrale de Lebesgue. Deux grands types d'intégrales floues existent, l'intégrale de Sugeno [SUG 74] et l'intégrale de Choquet [CHO 53].

Plusieurs auteurs ont exploité les intégrales floues afin d'enrichir certaines MMAD existantes dans l'objectif de pallier à certaines difficultés d'implémentation ou quelques imprécisions dans les recommandations fournies aux décideurs. Dans [HAM 08], les auteurs ont proposé un modèle d'aide à la décision spatiale fondé sur l'hybridation d'une approche multicritères et une approche de négociation. Ce modèle exploite des mesures floues pour la représentation des interactions entre les critères.

M. GRABISCH s'intéresse non seulement à l'agrégation multicritères mais aussi aux domaines des capacités et des intégrales floues. Plusieurs de ses recherches ont pour thématique l'utilisation des intégrales floues en tant qu'opérateur d'agrégation dans des approches d'analyse multicritères. Dans ce sens, il propose avec **M. ROUBENS** dans [GRA et al 00b] une approche pour l'application des intégrales de Choquet dans une prise de décision multicritères.

Problématique

Dans un contexte multicritères, un problème décisionnel implique le traitement de plusieurs solutions possibles, souvent imparfaitement connues, par rapport à plusieurs critères en conflit. De ce fait, la prise de décision, vue comme la prise en compte des différents points de vue conflictuels, revient à agréger les différentes évaluations (performances) des actions par rapport aux critères. Ainsi, l'agrégation multicritères est une opération d'une importance capitale dans un processus décisionnel constituant une étape cruciale dans le fonctionnement d'une méthode d'analyse multicritères d'aide à la décision.

L'agrégation nécessite un intérêt particulier de la part de l'homme d'étude se traduisant par le nombre important de travaux de recherche réalisés dans ce domaine dans le but d'améliorer la précision des opérateurs d'agrégation en tenant compte de tous les aspects intervenant dans cette opération. Parmi ces aspects, l'interaction entre les critères pour lesquels les actions sont évaluées. Dans certaines situations, l'influence d'un critère sur la décision finale n'est pas totalement indépendante de celle d'un autre critère. Dans d'autres cas, l'association de certains critères est plus influente que les critères pris séparément. Aussi, certains critères se chevauchent par leur importance ce qui implique une certaine redondance dans la résolution du problème. De ce fait, la prise en compte de ces interactions a un effet considérable sur la précision des résultats d'une MMAD, ce qui explique les limites dont souffrent plusieurs MMAD en termes d'efficacité de la modélisation des préférences du décideur.

Dans ce contexte, plusieurs techniques existent pour tenir compte des interactions entre les critères dont nous citons principalement l'utilisation des mesures floues et des intégrales floues. Les intégrales floues sont des opérateurs d'agrégation utilisés le plus souvent dans des méthodes d'agrégation totale agrégeant ainsi les performances afin d'évaluer les actions par rapport à un critère unique de synthèse. Cependant, il est intéressant d'utiliser les intégrales floues dans une procédure d'agrégation partielle ciblant à agréger les préférences partielles plutôt que les performances des actions.

Les méthodes d'analyse multicritères adoptant l'agrégation partielle procèdent souvent en deux grandes étapes, à savoir, l'agrégation et l'exploitation. Cette dernière, comme son nom l'indique, consiste à exploiter les résultats de l'étape d'agrégation afin de fournir au décideur une recommandation dans le cadre de la problématique à résoudre (choix, rangement, tri, etc.). Cela dit, il est important de maintenir la précision obtenue grâce aux intégrales floues à travers une étape d'exploitation correspondante.

Ainsi la problématique abordée peut être résumée en deux grandes interrogations :

- *Comment tenir compte des interactions entre les critères en utilisant les mesures et les intégrales floues dans une procédure d'agrégation partielle ?*
- *Comment exploiter les résultats de l'agrégation pour aboutir à une recommandation à la fois robuste et précise ?*

Contribution

Afin de répondre à la problématique exposée ci-dessus, nous proposons à travers la présente thèse une nouvelle méthode d'analyse multicritères pour la résolution de la problématique de rangement par la mise en place d'une nouvelle approche d'agrégation. Cette procédure d'agrégation s'appuie essentiellement sur l'utilisation de l'intégrale de Choquet [CHO 53] [GRA et al 92] [GRA et al 95] [GRA 97] [GRA et al 02b] et des mesures floues (capacités) [CHO 53] [GRA et al 02b] afin d'évaluer l'influence des sous-ensembles de critères (plus particulièrement les paires de critères) sur la décision finale.

L'objectif principal de l'approche proposée est la prise en compte et la représentation des interactions entre les critères afin d'améliorer la cohérence et la précision des résultats de l'analyse multicritères. L'approche vise également à présenter une recommandation au décideur à travers une technique d'analyse multicritères facile à implémenter avec moins de paramètres subjectifs et donc moins de difficultés à les évaluer. Dans cette optique, nous concrétisons notre approche à travers la méthode d'agrégation multicritères **AMFI** (**A**ggregation **M**ethod by **F**uzzy **I**ntegrals).

AMFI compare les actions deux à deux et calcule les préférences partielles pour chaque critère. Ces préférences feront l'objet d'une agrégation dont les résultats sont exploités afin d'aboutir à un rangement des actions de la meilleure à la moins bonne selon un ordre total. Ainsi, la méthode proposée procède en trois grandes étapes, à savoir, la comparaison, l'agrégation et l'exploitation.

- **Phase de comparaison** : Il s'agit de comparer les actions deux à deux pour obtenir des préférences partielles. Ces préférences sont représentées sur une échelle bipolaire (valeurs -1, 0, 1). Cela permet d'exprimer le fait qu'entre deux actions "*a*" et "*b*" (dans cet ordre) pour un critère donné, soit "*a*" est meilleure que "*b*" (valeur 1), soit l'inverse (valeur -1), soit les deux actions sont indifférentes (valeur 0). Ces trois cas de figure sont déterminés par rapport à un seuil de discrimination.
- **Phase d'agrégation** : Cette phase consiste à agréger les préférences partielles de manière à obtenir pour chaque paire d'actions (*a, b*) une valeur comprise entre 0 et 1 appelée

confrontation. L'utilisation dans la phase d'agrégation d'une bi-capacité, calculée à base d'une capacité 2-additive [GRA et al 02b], permet de représenter les interactions entre les critères. En effet, les capacités (mesures floues) permettent de mesurer l'influence de chaque critère et chaque association de critères sur la décision finale. Les bi-capacités représentent une notion plus avancée qui est l'influence positive et l'influence négative et permettent ainsi de mesurer les résultats des conflits entre les associations des critères. Les capacités permettent également de calculer les indices d'importance des critères [SHA 53] et les indices d'interaction pour les paires de critères.

L'intégrale de Choquet associée à la bi-capacité et généralisée aux échelles bipolaires [GRA et al 02b] permet d'agrèger les préférences partielles tout en tenant compte des interactions entre les critères. Les résultats de cette agrégation sont des valeurs comprises entre 0 et 1 pouvant être traduites en pourcentages de supériorité d'une action par rapport à une autre.

- **Phase d'exploitation** : elle consiste, principalement, en une procédure de scorage attribuant à chaque action un score global permettant d'obtenir un ordre total et donc un rangement des actions de la meilleure à la moins bonne. Les confrontations obtenues dans la phase précédente sont comparées à des seuils afin de dégager soit une situation de transcendance, de pseudo-transcendance ou d'équivalence.

Organisation du mémoire

Afin de mettre le point sur tout ce qui est relié à notre approche, le présent manuscrit est organisé en deux grandes parties :

Dans la **première partie (Synthèse de l'état de l'art)**, nous présentons successivement les notions fondamentales liées à l'aide à la décision multicritères, l'agrégation multicritères ainsi que les mesures et intégrales floues. Elle comporte trois chapitres :

- **Chapitre I : L'aide à la décision multicritères** : Ce chapitre est consacré à une présentation des concepts de base et des définitions de l'aide à la décision multicritères. Dans ce chapitre, une attention particulière est réservée à l'illustration du paradigme multicritères ainsi qu'aux différentes problématiques décisionnelles associées.
- **Chapitre II : L'agrégation multicritères** : Ce chapitre constitue une présentation détaillée de l'agrégation constituant l'étape la plus importante dans toute démarche d'une méthode multicritères d'aide à la décision. Dans ce chapitre, nous présentons une liste des opérateurs d'agrégation et nous classifions les MMAD en se basant sur la nature de l'agrégation qu'elles adoptent.

- **Chapitre III : Mesures floues et intégrale de Choquet** : Ce chapitre est une synthèse des notions les plus importantes relatives aux mesures et intégrales flous, en particulier l'intégrale de Choquet défini pour les bi-capacités.

La **deuxième partie (Contribution de la thèse)** étale l'approche que nous décrivons en deux chapitres :

- **Chapitre IV : Approche d'analyse multicritères proposée** : Dans ce chapitre, nous expliquons, en détails, l'approche proposée en mettant l'accent sur son principe, sa démarche d'utilisation, ainsi que ses avantages et ses limites.
- **Chapitre V : Expérimentation de l'approche proposée** : Ce chapitre illustre succinctement les expérimentations effectuées visant à mettre en évidence les avantages de l'approche proposée. Les résultats obtenus feront l'objet d'analyses et de discussions détaillées.

La **troisième partie** de ce mémoire (**Annexes**) expose, sous forme d'annexes, les algorithmes utilisés dans l'approche d'agrégation proposée et un tutorial pour l'utilisation du logiciel AMFI mis en place pour expérimenter la méthode proposée.

- **Annexe A : Les algorithmes de la méthode AMFI** : Cette annexe est consacrée à la présentation des algorithmes introduits dans les différentes étapes de l'approche proposée.
- **Annexe B : Le prototype AMFI** : Nous exposons dans cette annexe, un tutorial pour l'exploitation du logiciel AMFI utilisé dans nos expérimentations en illustrant un scénario de son utilisation.

Première partie

Synthèse de l'État de l'Art

Chapitre 1

L'Aide multicritères à la décision

Dans ce chapitre, nous présentons les différents concepts et définitions se rapportant à l'activité de l'aide à la décision. Nous donnons tout d'abord un aperçu sur les concepts fondamentaux de l'aide à la décision, à savoir, la décision, ses niveaux et ses types, les étapes et les acteurs impliqués dans un processus décisionnel ainsi que la définition d'un système d'aide à la décision. Nous détaillerons ensuite l'aide multicritères à la décision (AMCD) en exposant le paradigme multicritères, les fondements de l'AMCD, l'analyse multicritères et enfin les bases méthodologiques de l'AMCD.

Plan

1.1	Introduction	11
1.2	L'aide à la décision : concepts fondamentaux	12
1.2.1	La décision	12
1.2.2	Le processus de décision	12
1.2.3	Les acteurs de l'aide à la décision	13
1.3	Les systèmes d'aide à la décision	14
1.3.1	Les systèmes interactifs d'aide à la décision	14
1.3.2	Les systèmes d'aide à la décision de groupe	16
1.4	L'Aide MultiCritères à la Décision (AMCD)	16
1.4.1	Paradigme multicritères	16
1.4.2	L'aide multicritères à la décision : concepts fondamentaux	18
1.4.3	Typologie des problématique de l'AMCD	20
1.4.4	L'analyse multicritères	21
1.5	Bases méthodologiques de l'AMCD	23
1.5.1	Énumérer les actions potentielles	23
1.5.2	Modélisation des préférences	24
1.5.3	Agrégation des performances	27
1.6	Conclusion	28

Chapitre 1

L'Aide multicritères à la décision

1.1 Introduction

Il est possible de dater les origines de l'aide à la décision à la période un peu antérieure à la deuxième guerre mondiale ; elles se trouvent dans les études menées par l'armée britannique dans le cadre de l'installation des systèmes radar et les efforts de décodage du code secret des communications allemandes (1936 - 1937). En effet, les scientifiques et les gestionnaires étaient déjà occupés à partir du XVIII^{ème} siècle par les problèmes combinatoires et les procédures de décision collective. Au début du XX^{ème} siècle, l'intérêt s'est porté vers les problèmes économiques à dimensions multiples essentiellement la gestion scientifique des entreprises, la théorie de probabilité et bien évidemment la décidabilité.

Cependant, c'est l'indéniable succès de la recherche opérationnelle à organiser les activités militaires des alliés qui accrédita l'idée de la prise de décision. Ce même succès a prouvé que la prise de décision peut être étudiée de façon scientifique en concevant des modèles généraux pour cette fin. Entre la fin des années 40 et le début des années 50, plusieurs contributions fondamentales ont vu le jour, non seulement, pour la programmation linéaire, pour la théorie de la décision et la théorie des jeux, mais aussi pour l'algorithmique et l'existence de machines capables de résoudre "toute sorte de problème". C'est à cette époque que sont apparues les premières sociétés savantes de recherche opérationnelle (en 1948 en Angleterre, en 1950 aux États-Unis).

Cet historique large et riche ne fait qu'augmenter l'envie d'étudier l'aide à la décision en mettant l'accent sur les différents aspects qui lui sont associés.

1.2 L'aide à la décision : concepts fondamentaux

Selon Roy [ROY 85], l'aide à la décision peut être définie comme étant "*L'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à recommander, ou simplement à favoriser, un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part*".

Sous la cape de l'aide à la décision, se regroupent les travaux qui se basent sur des modèles plus ou moins formalisés. Ces travaux ont pour objectif d'améliorer, de faciliter ou d'accompagner le déroulement d'un processus de décision [HAM 08].

1.2.1 La décision

Dans [LEV et al 89], les auteurs définissent la décision comme étant "*une action qui est prise pour faire face à une difficulté ou répondre à une modification de l'environnement, c'est-à-dire, pour résoudre un problème qui se pose à l'individu ou à l'organisation*".

Dans [SCH 96], une décision est définie comme "*un choix entre plusieurs alternatives*", ou encore par "*le fait qu'elle concerne aussi le processus de sélections de buts et d'alternatives*". Roy et Bouyssou [ROY et al 93] estiment que la décision est souvent présentée comme "*le fait d'un individu isolé (décideur) qui exerce librement un choix entre plusieurs possibilités d'actions à un moment donné dans le temps*".

1.2.2 Le processus de décision

L'activité d'AD¹ s'articule autour d'un processus de décision qui peut être défini comme "un ensemble d'activités déclenché par un stimulus, et aboutissant à un engagement spécifique à l'action" [CHA et al 05].

Roy [ROY 85] définit le processus de décision comme étant "*le déroulement des confrontations et des interactions régulées par différents processus compensatoires, apparaissant successivement entre les différents acteurs*".

Le modèle du processus de décision adopté par la majeure partie des travaux en aide à la décision est sans doute le modèle proposé par Simon [SIM, 77]. Ce processus opère en 4 étapes non nécessairement séquentielles :

¹Aide à la décision

- **Information (Renseignement)** : Cette étape détermine l'ensemble des données nécessaires (mais pas forcément suffisantes) qui seront utilisées lors des phases suivantes. Il s'agit d'une phase d'étude du contexte et de la situation problématique qui fait appel à la décision. Ainsi, cette phase se focalise sur l'existence même du problème.
- **Conception (Modélisation)** : C'est une étape d'analyse et de développement des différentes alternatives qui forment l'ensemble des possibilités. Les différentes solutions sont donc élaborées à ce stade.
- **Choix (Sélection)** : Il s'agit de l'étape de décision proprement dite. Elle consiste à choisir un modèle particulier parmi les modèles d'actions possibles. En réalité, elle consiste à restreindre l'ensemble des possibilités à un sous-ensemble de possibilités sélectionnées, répondant le mieux aux exigences d'une décision correcte.
- **Evaluation (Contrôle)** : Cette étape peut amener à la réactivation de l'une des trois phases précédentes ou, au contraire, à la validation de la solution. En effet, il s'agit d'une phase d'évaluation visant à confirmer le choix effectué ou à remettre en question le processus de décision en réactivant l'une des trois phases précédentes.

La figure (1.1) illustre le processus décisionnel de Simon [SIM 77].

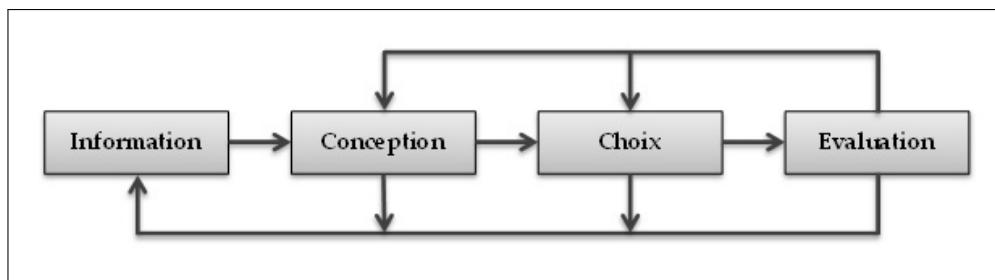


FIG. 1.1 – Processus décisionnel de Simon

1.2.3 Les acteurs de l'aide à la décision

Même si la responsabilité de la prise de décision incombe à un seul individu (contexte monodécideur), la décision peut être prise dans un cadre de concertation et de sollicitation collective. En effet, le terme acteur désigne généralement un individu ou un groupe d'individus ayant une quelconque intervention dans le processus d'AD au même moment ou à des moments différents et pouvant être dans un même endroit, ou bien répartis géographiquement. Maystre [MAY et al 94] distingue 8 acteurs différents dont les plus importants sont le décideur, l'homme d'étude et les intervenants.

- **Le décideur** : l'AD vise à résoudre des problèmes encore très confus dans l'esprit de celui qui se les pose, cette personne s'appelle un décideur. Le décideur est assisté par

l'aide à la décision pour mieux exprimer ses préférences vis-à-vis d'une situation donnée [HAM 08], son rôle n'est pas une tâche facile à automatiser. Ceci est dû au fait que le décideur intervient dans le processus de prise de décision très souvent d'une manière humaine, c'est-à-dire que son raisonnement est influencé par des aspects plus ou moins subjectifs [ROY et al 93].

- **L'homme d'étude** : L'homme d'étude, appelé aussi analyste, est celui qui prend en charge l'AD. Concevant et mettant en œuvre des modèles dans le cadre d'un processus de décision, il contribue à l'orienter et à la transformer [ROY et al 93].
- **Les intervenants** : qui par leurs intervention, conditionnent directement la décision en fonction du système de valeurs dont ils sont porteurs [ROY et al 93].

Les autres acteurs impliqués dans un processus décisionnel sont :

- **Les Agis** : sont les acteurs concernés par les conséquences de la prise de décision.
- **Les demandeurs** : demandent l'étude et allouent les moyens.
- **Le négociateur** : mandaté par un décideur en vue de faire valoir la position de celui-ci dans une négociation et de rechercher une action de compromis.
- **Le médiateur** : intervient en vue d'aider le décideur, voire les négociateurs, à rechercher le compromis.
- **L'arbitre (le juge)** : intervient en se substituant aux acteurs dans la recherche du compromis.

1.3 Les systèmes d'aide à la décision

Le concept de Système d'Aide à la Décision, abrégé en SAD ou DSS² est extrêmement large et ses définitions reposent souvent sur le point de vue de l'auteur. Certains définissent un DSS comme étant "*un système informatique qui facilite le processus de prise de décision*" [TRE 96]. D'une manière plus détaillée, il est possible de définir un DSS comme "*un système informatique interactif doté de flexibilité et d'adaptabilité aidant les décideurs à dégager les informations utiles en partant de données brutes, de documents, de connaissances personnelles, dans le but d'identifier et résoudre les incidents et ainsi prendre des décisions*".

1.3.1 Les systèmes interactifs d'aide à la décision

Évoquer l'idée de dispositifs pouvant aider un décideur à faire un choix (la mise en relation de l'homme et de la machine) a fait apparaître la notion de SIAD autrement dit, le Système Interactif d'Aide à la Décision. Diverses définitions ont été proposées pour qualifier un SIAD.

²Decision Support System

Keen et Scott-Morton [KEE et al 78] proposent une définition de référence pour le concept de SIAD en le décrivant comme étant "un système ouvert qui augmente la qualité des processus de décisions plutôt que leur productivité". **Bonczek** [BON et al 84] définit un SIAD comme étant "un système informatisé qui utilise ses connaissances sur un sujet particulier dans le but d'aider le responsable durant la prise de décision dans une catégorie de problèmes peu ou pas structurés."

Autrement dit, un SIAD est essentiellement un système interactif ce qui impose qu'il assiste le décideur tout au long de son processus de décision par le biais d'interactions adaptées.

Un système interactif d'aide à la décision se compose, essentiellement, des éléments suivants (figure 1.2) :

- Une base d'informations regroupant les données sur le système.
- Une base de modèles décrivant le comportement du système.
- Une base de connaissances qui peut être un système indépendant apportant une expertise supplémentaire spécifique au système étudié.
- Une interface Homme/Machine permettant au décideur de gérer et interroger le système d'aide à la décision et intégrer des connaissances heuristiques qui ne sont pas explicables dans un langage informatique.

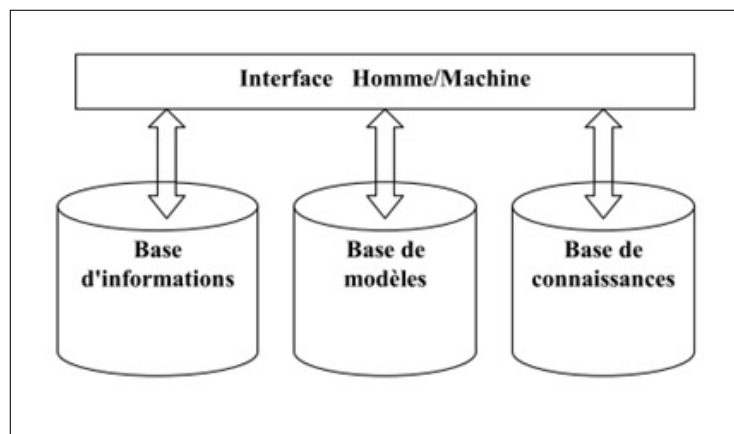


FIG. 1.2 – Composition d'un système interactif d'aide à la décision

Pour de plus amples détails sur les SIAD, nous orientons le lecteur vers [KEE et al 78] [BON et al 84] [LEV et al 89] [COU 88] [COU 93] [BOU 06] [HAM et al 15].

1.3.2 Les systèmes d'aide à la décision de groupe

Les DSS peuvent adopter des approches visant à aider des groupes, soit pour dégager une solution commune (GDSS³) [JEL et al 87], soit dans le cadre d'un protocole de négociation (NDSS⁴) [BUI 94] [CHA et al 95].

1.4 L'Aide MultiCritères à la Décision (AMCD)

Comme nous l'avons cité précédemment dans ce chapitre, la prise de décision s'est montrée comme l'activité principale et essentielle des gestionnaires dans l'organisation. Étant donné que ces gestionnaires (décideurs) cherchent à intégrer dans leur décision plusieurs facteurs de nature assez diversifiée, la prise de décision est devenue de plus en plus complexe. Les situations de choix sont nombreuses où les alternatives sont évaluées sur la base de plusieurs objectifs ou critères.

L'aide multicritères à la décision est un paradigme possédant ses propres approches, modèles, et méthodes qui cherchent à aider le décideur, à décrire, évaluer, ranger choisir ou rejeter un ensemble d'actions. Ce paradigme s'appuie sur l'évaluation à l'aide de notes, de valeurs et d'intensités de préférences, en fonction d'un ensemble de critères.

1.4.1 Paradigme multicritères

Les critiques principales de l'approche monocritère pour un problème de décision portent essentiellement sur deux grands aspects : ne pas tenir compte de la situation d'incomparabilité (caractéristique bien humaine) et ne pas considérer qu'il existe des cas où l'indifférence est intransitive. C'est ainsi que le paradigme multicritères est introduit afin de remédier à ces problèmes.

Bernard Roy [ROY 85] caractérise le paradigme multicritères comme un "*nouveau schéma de pensée pour comprendre ou agir sur un système*", en considérant que :

- Plusieurs critères œuvrent pour conduire le système ou guider son évolution.
- Ces critères sont, au moins, localement conflictuels.
- Les compromis ou arbitrages ont pour objet de conférer aux critères des valeurs compatibles avec une certaine forme d'équilibre et, s'il y a succession, cela tient au caractère transitoire de l'équilibre atteint.

³Group Décision Support System

⁴Negotiation Decision Support System

Le paradigme multicritères s'énonce de la façon suivante :

$$\mathbf{Max}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) / x \in A\} \quad (1.1)$$

Où A est l'ensemble des alternatives et F l'ensemble des k critères et $f_j(x), j = 1, \dots, k$ sont des applications de A sur l'ensemble des nombres réels. Ces critères sont en général exprimés dans des unités distinctes. Nous considérons ici le cas où le décideur souhaite maximiser tous les critères, ce qui facilite l'énoncé des propriétés. Ce cas n'est cependant pas restrictif et les résultats énoncés s'étendent directement au cas plus général dans lequel certains critères sont à maximiser et d'autres à minimiser.

Le paradigme multicritères est caractérisé par les propriétés suivantes :

1.4.1.1 Propriété 1 - Problème mal posé

Dans un problème multicritères le décideur souhaite optimiser plusieurs critères simultanément. Cela dit, le problème n'admet généralement pas de solution x' telle que :

$$f_j(x') \geq f_j(x), \forall x \in A, \forall j = 1, 2, \dots, k \quad (1.2)$$

Dès lors, il s'agit d'un problème sans solution, donc mathématiquement mal posé. Bien entendu, s'il existe une solution optimale sur l'ensemble des critères (cas rare), cette solution sera soumise au décideur dans le cas d'une problématique de choix. Sinon, il faudra se contenter d'une solution de compromis. Chaque méthode multicritères s'efforce de proposer les meilleures solutions de compromis possibles.

1.4.1.2 Propriété 2 - Relation de dominance (I, P, R)

Les k critères induisent de façon naturelle la relation de dominance suivante sur A :

$$\left\{ \begin{array}{l} aPb \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_j(a) \geq f_j(b), \forall j = 1 \dots k \\ \exists h : f_h(a) \succ f_h(b) \end{array} \right. \\ aIb \Leftrightarrow f_j(a) = f_j(b), \forall j = 1 \dots k \\ aRb \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists h : f_h(a) \succ f_h(b) \\ \exists h' : f_{h'}(a) \prec f_{h'}(b) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Où " P " désigne la **préférence**, " I " l'**indifférence** et " R " l'**incomparabilité**, c'est-à-dire l'absence de relation entre a et b . La relation de dominance, si l'on exclut R , est donc une relation partielle.

Il est clair que la préférence et l'indifférence sont fondées sur l'unanimité des points de vue (de tous les critères).

1.4.1.3 Propriété 3 - Pareto-optimalité (efficacité)

Une solution $a \in A$ est appelée **Pareto-optimale** ou efficace si elle n'est dominée par aucune autre solution. Cependant, il faut observer que la détermination de l'ensemble E (à laquelle se limite d'ailleurs un certain nombre de méthodes multicritères) ne résout généralement pas le problème. En réalité, d'une part E contient souvent un nombre élevé de solutions (il n'est pas du tout rare que toutes les solutions soient efficaces) et d'autre part les solutions efficaces sont souvent de nature opposée ce qui signifie que quand une solution est bonne sur un critère, elle est généralement moins bonne sur d'autres.

1.4.1.4 Propriété 4 - transitivité

Certaines méthodes multicritères respectent la transitivité de la préférence ou de l'indifférence, d'autres non. Ceci dépend de la technique proposée par chaque méthode pour la recherche de solutions de meilleur compromis.

1.4.2 L'aide multicritères à la décision : concepts fondamentaux

L'AMCD désigne un ensemble d'outils d'aide à la décision développés depuis les années 1960. Elle vise la résolution des problèmes incluant plusieurs alternatives et en considérant plusieurs critères de décision simultanément [HAM 08]. Il existe plusieurs définitions de l'aide multicritères à la décision.

D'après Vincke [VIN 89], l'analyse multicritères est "*une approche constructiviste visant à fournir des outils permettant de progresser dans la résolution d'un problème ou plusieurs point de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte*".

Belton [BEL et al 01] rappelle que la recherche en psychologie a montré que le cerveau humain ne peut considérer simultanément qu'un nombre limité d'informations. En conséquence, le but principal des méthodes de l'AMCD est d'aider les décideurs à organiser et synthétiser leurs informations afin qu'ils se sentent à l'aise dans leur prise de décision.

L'aide multicritères à la décision consiste à apporter un éclairage et des explications à une catégorie de problèmes où plusieurs critères quantitatifs et qualitatifs sont pris en considération. Ces critères sont souvent hétérogènes et généralement conflictuels et d'une importance inégale. De ce fait, l'aide multicritères à la décision repose sur un ensemble de procédures permettant de détailler un problème décisionnel portant sur des situations complexes. Nous détaillons suc-

cinctement, dans les sections suivantes, les concepts de base inhérents à l'aide multicritères à la décision.

1.4.2.1 Action

Roy [ROY 85] définit une action comme étant *"la représentation d'une éventuelle contribution à la décision globale, susceptible, eu égard à l'état d'avancement du processus de décision, d'être envisagée d'une façon autonome et de servir de point d'application à l'aide à la décision"*. De ce fait, une action se définit comme une représentation de l'élément de solution qui contribue à la décision (une région, un site, un investissement, une offre, etc.). Quand les actions sont exclusives, il est possible d'utiliser le terme **"variantes"** ou **"alternatives"**.

Compte tenu de la définition proposée par [ROY 85], une action correspond aux solutions possibles envisagées dans un processus de décision. C'est l'élément qui fera l'objet de la comparaison. Le concept d'actions n'inclue aucune idée de faisabilité ou de réalisme, d'où l'utilité d'introduire certaines distinctions, à savoir une typologie d'une action (réelle, fictive, réaliste, potentielle, action de référence) [ROY et al 93].

1.4.2.2 Objectifs et attributs

Un **objectif** indique le sens de l'amélioration qu'un décideur souhaite apporter à un système lors d'un changement d'état. Il reflète l'aspiration du décideur. Les trois manières de poursuivre un objectif sont de le maximiser, de le minimiser ou de le maintenir dans un certain état. Les **attributs** correspondent aux caractéristiques des alternatives. Ils permettent d'évaluer les niveaux des objectifs.

1.4.2.3 Critère

Un **critère** peut être défini comme étant une expression qualitative ou quantitative qui permet d'examiner les actions et les évaluer (Ex : Nuisances sonores, Puissance moteur, Note d'examen, etc.).

Un critère est défini formellement par Vincke [VIN 89] comme *"une fonction g , définie dans A , prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné et représentant les préférences du décideur selon un certain point de vue"*. La fonction g est définie par la formule suivante :

$$g : A \mapsto X, \quad X \text{ Ensemble ordonné} \quad (1.4)$$

Le choix d'une famille des critères, notée F , n'est pas une opération évidente. Afin de garantir une cohérence entre ce qu'apporte la famille F au problème décisionnel et ce que le décideur veut vraiment, Roy et Bouyssou [ROY et al 93] imposent les axiomes suivants :

- **Axiome d'exhaustivité** : Il s'agit de ne pas oublier aucun critère. Afin de vérifier cela, il faut procéder à un test d'exhaustivité qui consiste à s'assurer qu'entre deux actions a et b , si les performances des deux actions sont identiques pour tous les critères, il faut qu'il y ait une relation d'indifférence entre a et b . Dans le cas échéant, il existe au moins un critère qui n'a pas été pris en compte et qui permet de trancher en faveur de l'une des deux actions.
- **Axiome de cohérence** : Il doit y avoir une cohérence entre les préférences locales de chaque critère et les préférences globales [HAM 08]. Autrement dit, si une action a est égale à une action b pour tous les critères sauf un où elle lui est supérieure, cela signifie que a doit être globalement supérieure à b .
- **Axiome d'indépendance** : Il ne doit pas y avoir de redondance entre les critères. Leur nombre doit être tel que la suppression d'un des critères ne permet de satisfaire les deux conditions précédentes [MAY et al 94].

1.4.2.4 Matrice de performance

Appelée également "**matrice d'évaluation**" ou de **jugements** ou "**tableau de performance**", la matrice de performance est un tableau à deux dimensions dans lequel chaque ligne représente une action et chaque colonne un critère. L'intersection d'une ligne i et d'une colonne j représente l'évaluation de l'action i par rapport au critère j . Chaque action est évaluée par rapport à chacun des critères.

Ainsi, pour comparer deux actions a et b , selon un point de vue (ou un axe de signification) que modélise la fonction critère g de la formule (1.4), il faut comparer deux valeurs $g(a)$ et $g(b)$. Ces valeurs représentent respectivement les performances de a et de b relativement au critère g . En général, l'évaluation de l'action a selon le critère j est notée $g_j(a)$. Elle est aussi appelée performance de a sur le critère j . Dans le cas de plusieurs fonctions critères $g_1, g_2, \dots, g_n / n > 1$, la performance d'une action a pour l'ensemble des critères est notée $g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$.

1.4.3 Typologie des problématique de l'AMCD

Dans cette section, nous illustrons à travers le tableau (1.1) les problématiques multicritères fondamentales et nous orientons le lecteur, pour de plus amples détails, vers les références suivantes : [ROY 75] [ROY 85] [LAA 00] [MAY et al 94].

Problématique	Objectif
Choix (Selection) Alpha (α)	Aider le décideur par le choix d'un sous ensemble "A" de cardinal aussi faible que possible et contenant la ou les meilleures actions en perspective d'un choix final d'une seule action. Ce sous ensemble contient de meilleures actions ou, à défaut, des actions satisfaisantes.
Tri (Affectation) Beta (β)	Réaliser un tri résultant d'une affectation de chaque action à une catégorie définie à priori en fonction de normes. Il s'agit de rechercher un protocole d'affectation, permettant de distribuer les actions de "A" sur l'ensemble des catégories prédéfinies. Idéalement cette distribution devrait aboutir à une partition de "A".
Rangement (Classement) Gamma (γ)	Effectuer un rangement en regroupant toutes ou partie (les plus satisfaisantes) des actions en classes d'équivalence. Ces classes étant ordonnées, de façon complète ou partielle, conformément à un modèle de préférences. La prise en compte de l'équivalence se traduit par une partition de "A" en classes homogènes, tandis que celle de l'incompatibilité se traduit par la prise en compte de relations partielles.
Description Delta (δ)	Décrire dans un langage approprié, les actions et leurs conséquences en vue d'aider directement le décideur à les découvrir, à les comprendre et à les jauger.

TAB. 1.1 – Les quatre problématiques de référence pour l'AMCD

1.4.4 L'analyse multicritères

L'analyse multicritères est une démarche permettant d'orienter un choix en se basant sur plusieurs critères communs. Cette démarche est essentiellement dédiée à la compréhension et à la résolution de problèmes de décision. L'analyse multicritères a été développée dans le cadre des sciences économiques et du génie industriel. Elle connaît un développement très important depuis la deuxième moitié des années 1970 et peut être désormais considérée comme un outil scientifique à part entière [NET 1].

1.4.4.1 Objectifs de l'analyse multicritères

L'analyse multicritères est utilisée pour porter un jugement comparatif entre des éléments ou des mesures (alternatives) hétérogènes. Cette analyse, peut être utilisée en tant qu'outil d'évaluation.

Ainsi, sur la base de plusieurs critères, les décideurs sont en mesure d'intégrer, dans un cadre prospectif ou rétrospectif, la diversité des opinions concernant les alternatives, pour formuler un jugement. Cette méthode implique la participation des acteurs (décideurs, hommes d'études, intervenants, etc.) et aboutit à des recommandations. Son objectif est d'aboutir à une solution par la simplification du problème, tout en respectant les préférences des acteurs.

Pour résumer, l'analyse multicritères est principalement utilisée pour fournir aux décideurs des outils leur permettant de progresser dans la résolution de problèmes décisionnels faisant intervenir plusieurs points de vue, même s'ils sont contradictoires. L'analyse multicritères peut être conduite à partir d'informations à la fois objectives et subjectives.

1.4.4.2 Démarche de l'analyse multicritères

Dans la littérature, l'illustration de la démarche de l'analyse multicritères est proposée de différentes manières, chacune met l'accent sur certains aspects aux dépends d'autres. Par conséquent, chacune a ses avantages et présente ses inconvénients. L'approche à partir des conséquences préconisée par Bernard Roy et l'approche à partir des objectifs de Keeney représentent deux exemples relativement extrêmes.

Keeney [KEE 92] se base sur l'approche du "**haut vers le bas**" (**top-down**) qui consiste à construire une structure hiérarchique ayant à son premier niveau l'objectif global qui se divise en sous-objectifs qui sont à leur tour subdivisés en sous-sous-objectifs jusqu'à ce que l'on atteigne un niveau mesurable que l'on qualifie d'attributs (figure 1.4). **Roy** [ROY 85] se base sur une approche de "**bas vers le haut**" (**bottom-up**) qui consiste à identifier toutes les conséquences pouvant résulter de la mise en œuvre des actions. Ces conséquences sont structurées en dimensions puis en axes de signification autour desquels sont construits les critères (figure 1.3).

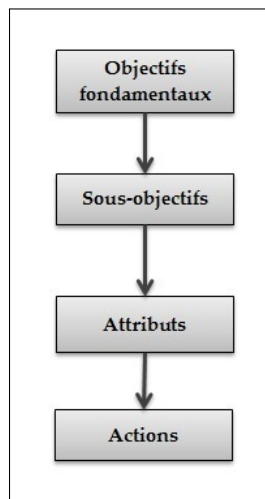


FIG. 1.3 – Démarche bottom-up de Roy

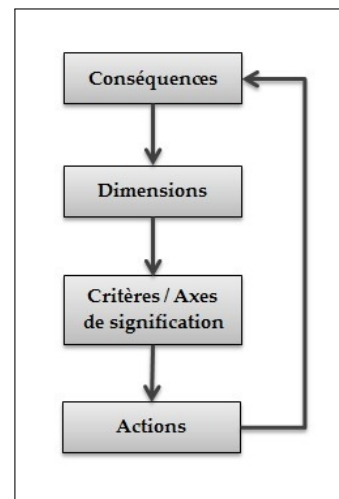


FIG. 1.4 – Démarche top-down de Keeney

Laaribi [LAA 00] a proposé une approche intermédiaire qui, selon lui, est de portée plus générale (figure 1.5).

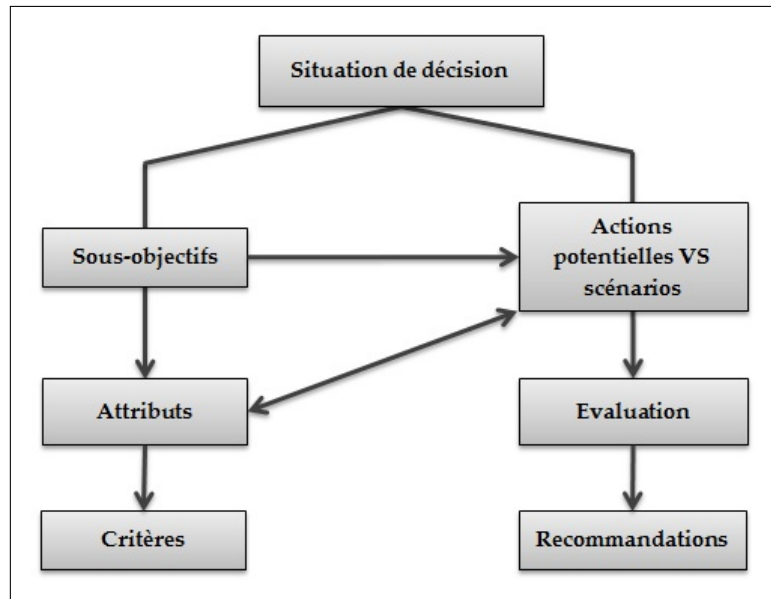


FIG. 1.5 – Démarche intermédiaire de Laaribi

1.5 Bases méthodologiques de l'AMCD

Généralement, lorsqu'un problème multicritères est posé, l'objectif est de trouver la "*solution la plus adéquate*" de façon à prendre en compte un ensemble de critères. Sachant que cette solution peut être de formes différentes (choix, affectation, classement, etc.), il est possible de résumer le principe de l'analyse multicritères en trois principales étapes [HAM 08] [BEN 00].

1. Énumérer les actions potentielles ;
2. Modéliser les préférences du décideur ;
 - (a) Dresser la liste des critères à prendre en considération ;
 - (b) Évaluer les actions par rapport aux critères pour générer la matrice de performance.
3. Procéder à l'agrégation des performances.

1.5.1 Énumérer les actions potentielles

Selon Roy [ROY 85], une action a est non seulement représentée comme une contribution éventuelle à la décision globale, mais peut être aussi considérée de manière autonome afin de servir de point d'application à l'aide à la décision. Il est important de mettre le point sur le terme "*autonome*" qui signifie que l'action a est indépendante de toute autre action en ce qui concerne son influence sur la décision (portée décisionnelle).

L'adjectif "*potentielle*" est également d'une importance capitale. En effet, une action potentielle a la particularité d'être réelle ou fictive mais jugée, ne serait-ce que provisoirement, réaliste par au moins un acteur en vue de l'aide à la décision. L'ensemble des actions potentielles est généralement noté "*A*" [ROY 85] et doit être le plus complet possible, chose qui n'est pas tout le temps tout à fait évidente.

1.5.2 Modélisation des préférences

La comparaison des alternatives à partir de leurs conséquences est souvent rendue difficile à cause du manque de précision, de l'incertitude et de la mauvaise détermination de ces conséquences. Afin de palier à ce problème, la notion de critère est introduite. Les critères permettent de comparer les alternatives entre elles. L'ensemble des critères doit répondre à des exigences d'exhaustivité, de cohésion et de non redondance (voir section 1.4.2.3). Lorsque ces exigences sont vérifiées, la famille de critères est dite cohérente. L'évaluation des alternatives se fait pour chaque critère. Une matrice de performance qui présente les résultats de cette évaluation sur chaque critère donne une vue de l'ensemble des actions. Ainsi, l'étape de la modélisation des préférences du décideur peut être subdivisée en deux sou-étapes, à savoir, construire la famille de critères et établir la matrice de performance.

1.5.2.1 Dresser la liste des critères

Les critères ne sont autres que les conséquences des actions, autrement dit, les effets ou attributs des actions interférant éventuellement avec les objectifs d'un acteur du processus de décision ou avec son système de valeurs. Considérés comme éléments primaires, ces effets ou attributs permettent à l'acteur d'élaborer, justifier ou transformer ses préférences [ROY 85]. Il est à noter qu'une action n'ait rarement qu'une seule conséquence.

Un critère est une fonction g à valeurs réelles définie sur l'ensemble des actions potentielles. Cette fonction est définie de telle sorte que deux alternatives a_1 et a_2 puissent être comparées en s'appuyant sur les valeurs $g(a_1)$ et $g(a_2)$. Un poids peut aussi être associé à chaque critère, selon son importance par rapport aux autres.

Situations de préférence Roy [ROY et al 93] propose quatre situations fondamentales de préférences, à savoir, l'indifférence, la préférence stricte, la préférence faible et l'incomparabilité. Il est possible de résumer les situations possibles dans le tableau (1.2).

Situation	Définition	Relation binaire (propriétés)
Indifférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux actions. L'égalité peut être seulement approximative pour certaines composantes	I : relation symétrique réflexive
Préférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux actions. Les différences entre a et b sont significatives	P : relation asymétrique irréflexive
Préférence faible	Effectuer un rangement en regroupant toutes ou partie (les plus satisfaisantes) des actions en classes d'équivalence. Ces classes étant ordonnées, de façon complète ou partielle, conformément à un modèle de préférences. La prise en compte de l'équivalence se traduit par une partition de " A " en classes homogènes, tandis que celle de l'incompatibilité se traduit par la prise en compte de relations partielles	Q (comme "quasi") relation asymétrique non réflexive
Incomparabilité	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives justifiant l'une des trois situations précédentes. Les actions sont incomparables	R (comme "refus de se prononcer") : relation symétrique non réflexive

TAB. 1.2 – Définitions des différentes situations de préférence

Typologie des critères Il existe également plusieurs types de fonction "critère" et cette diversité permet de représenter au mieux les préférences du décideur. Parmi les types de critères les plus connus nous citons :

- **Vrai critère** : pour deux actions a et b deux situations se présentent sur un critère j :

$$\begin{cases} g_j(a) = g_j(b) & \Rightarrow a I_j b & (\text{Indifférence}) \\ g_j(a) > g_j(b) & \Rightarrow a P_j b & (\text{Préférence stricte}) \end{cases} \quad (1.5)$$

Cependant, ces situations ne représentent pas honnêtement la réalité, car une simple différence positive $g_j(a) - g_j(b)$ n'est pas forcément signe d'une préférence stricte.

- **Pseudo-critère** : à la fonction critère " g " sont associés deux quantités $q_j(g_j(a))$ et $p_j(g_j(a))$ exprimant respectivement le seuil d'indifférence et le seuil de préférence. Grâce aux seuils d'indifférence et de préférence, les situations de l'équation (1.5) sont exprimées à présent à travers l'équation (1.6) en leur ajoutant une troisième situation qu'est la préférence faible :

$$\begin{cases} g_j(a) - g_j(b) \leq q_j(g_j(a)) & \Rightarrow a I_j b \quad (\text{Indifférence}) \\ 0 \leq g_j(a) - g_j(b) < q_j(g_j(a)) & \Rightarrow a Q_j b \quad (\text{Préférence faible}) \\ p_j(g_j(a)) < g_j(a) - g_j(b) & \Rightarrow a P_j b \quad (\text{Préférence stricte}) \end{cases} \quad (1.6)$$

Deux cas particuliers des pseudo-critères peuvent être dégagés :

- **Quasi-critère** : Il s'agit d'un cas particulier de pseudo-critère où :

$$q_j(g_j(a)) = p_j(g_j(a)), \forall a \in A \quad (1.7)$$

- **Pré-critère** : Il s'agit d'un cas particulier de pseudo-critère où :

$$q_j(g_j(a)) = 0, \forall a \in A \quad (1.8)$$

Relation de surclassement La relation S entre deux actions a et b , notée $a S b$, est prononcée " a surclasse b " et vérifiée si et seulement si a est au moins aussi bonne que b et qu'il n'y a pas de raisons refusant cette assertion. La relation S est réflexive mais non nécessairement transitive [ROY 85]. La relation de surclassement S signifie l'existence de raisons claires et positives (critères) justifiant soit une préférence faible ou stricte en faveur de l'une des deux actions, soit une indifférence entre les deux. Cependant, aucune séparation significative n'est établie entre ces trois situations [ROY 85] ce qui nous amène à dire que la relation de surclassement permet en réalité d'exprimer les hésitations du décideur.

Selon [SCH 85] : "*une action a surclasse une action b , notée $a S b$, si elle est au moins aussi bonne que b relativement à une majorité de critères, sans être trop nettement plus mauvaise que b relativement aux autres critères*". Cette définition est donnée mathématiquement par la relation suivante :

$$a S b \Rightarrow (a P b \vee a Q b \vee a I b) \quad (1.9)$$

Paramètres subjectifs Il s'agit de quantités fixées par le décideur, selon l'application et la situation traitée [HAM 08]. Il est possible de classer les paramètres subjectifs en deux catégories [ROY et al 93] :

- **Paramètres intercritères** : Afin d'évaluer l'importance relative de chaque critère, les paramètres intercritères sont utilisés et sont souvent appelés "**pooids**" (*Weights*). Ainsi, à chaque critère est attribuée une valeur w_j (parfois notée P_j), selon son importance vis à vis des autres critères. Cette opération appelée "*pondération des critères*" n'est pas toujours facile pour le décideur qui utilise le plus souvent pour ses préférences des expressions en langage naturel. Ceci étant, l'homme d'étude peut aider le décideur à exprimer clairement son appréciation de l'importance relative de chaque critère en utilisant des méthodes de pondération à l'image de la méthode de cartes de SIMOS [SIM 90] et la méthode

de l'échelle de Saaty [SAA 03] [SAA 03], l'utilisation des mesures floues [GRA 97], la théorie des capacités [CHO 53], etc.

- **Paramètres intracritères** : En plus de son appréciation de l'importance de chaque critère vis à vis des autres, le décideur peut avoir une appréciation subjective des valeurs de chaque critère. Afin d'exprimer cette vue subjective, on utilise les paramètres intracritères parmi lesquels on distingue le seuil d'indifférence, le seuil de préférence et le seuil de veto. Le tableau (1.3) représente, pour un critère " j ", les définitions de ces trois seuils.

Paramètre	Symbole	Définition
Seuil de préférence	p_j	Seuil à partir duquel la différence entre deux actions est strictement perceptible et fait préférer l'une à l'autre
Seuil d'indifférence	q_j	En dessous de ce seuil, deux actions a et b ne peuvent plus être départagées
Seuil de veto	v_j	Il s'agit d'un seuil permettant d'exprimer le respect de la minorité dans la relation de surcalssement Si la différence entre une action a et b dépasse le seuil de veto en faveur de b , cela signifie que l'assertion $a S b$ ne peut pas être prise en compte car le critère j y est fortement contre

TAB. 1.3 – Les paramètres subjectifs intracritères

1.5.2.2 Établir la matrice des performance

Cette matrice est composée, en ligne, des actions A , et en colonnes, des critères de la famille F . Les valeur de la matrice de performance sont en effet les évaluations des actions par rapport au critères notées $g_j(a_i)$. Une performance peut être une fonction dépourvue de toute notion de cardinalité ou encore une fonction carrément discontinue. Dans la majorité des cas, une ligne complémentaire consacrée au poids des critères est ajoutée à la matrice de performance ainsi que des lignes pour les seuils d'indifférence et de préférence.

A partir de cette représentation de la matrice de performance, il est possible de considérer qu'une action a n'est autre qu'un vecteur représenté dans un espace à n dimensions où chaque dimension est un critère.

1.5.3 Agrégation des performances

Une procédure d'agrégation multicritères doit être définie afin de répondre à la problématique de décision posée en se basant sur la matrice de performance qui caractérise les actions potentielles à évaluer. Il s'agit d'établir un modèle de préférences globales, autrement dit, représenter

formellement ces préférences par rapport à un ensemble d'actions potentielles. Cette représentation des préférences doit être perçue par l'homme d'étude comme appropriée au problème d'aide à la décision posé.

Dans le domaine de l'aide à la décision multicritères, il est possible de distinguer trois attitudes d'agrégation [ROY 85]. L'**agrégation totale** synthétise les performances en leur attribuant des poids [ROY 85] et dégage un critère unique par rapport auquel les actions seront évaluées [ROY 85] [MAY et al 94].

L'**agrégation partielle** est basée sur la relation de surclassement [ROY 85] [VIN 89] [BEN 00] dont la mise en œuvre nécessite l'introduction des notions d'intransitivité et d'incomparabilité [ROY, 85] [MAY et al, 94]. Les méthodes d'agrégation partielle comparent les actions deux à deux et vérifient si l'une des deux actions surclasse l'autre. Les surclassements obtenus sont exploités pour établir des préordres totaux ou partiels.

L'**agrégation locale** est une approche qui utilise une solution comme point de départ et procéder ensuite à une série d'itérations en trois phases [SCH 85] visant à trouver une meilleure solution autour de la première tout en interagissant avec le décideur. Il s'agit donc d'une "*approche du jugement local interactif avec itérations essais-erreur*" [ROY 85] [MAY et al 94].

Nous Présenterons dans le prochain chapitre la typologie de l'agrégation multicritères de manière plus détaillée.

1.6 Conclusion

Le but de l'analyse multicritères est de fournir au décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution de problèmes décisionnels en faisant intervenir plusieurs points de vue contradictoires dans la plupart des cas. Ceci étant, Il n'est plus question de chercher des solutions optimales, ou encore les meilleures décisions selon chacun des points de vue, mais d'aider le décideur à dégager une ou plusieurs solutions de compromis, en accord avec son propre système de valeurs.

Toutefois, la majorité des décisions qui font l'objet d'études multicritères sont de nature complexe voir conflictuelle et leurs conséquences sont importantes et stratégiques. L'aspect conflictuel des critères, l'indétermination et le manque d'informations liés au problème sont souvent avancés comme les sources de sa complexité. Les majeures difficultés d'un problème multicritères se résument dans le fait que l'aide multicritères à la décision est condamnée à travailler dans le cadre d'un problème mathématique "mal posé". En effet, il n'existe pas en générale de solution réalisant l'optimum sur tous les critères simultanément.

Les méthodes d'aide multicritères à la décision sont des techniques assez récentes et en plein développement. Par leur manière d'intégrer tout type de critères, ces procédures semblent mieux permettre de se diriger vers un compromis judicieux plutôt que de courir après un op-

timum souvent impossible à trouver. La modélisation des préférences et l'agrégation multicritères sont deux étapes cruciales dans la démarche de l'analyse multicritères. La pondération des critères tout en tenant compte des interactions entre eux représente un défi considérable pour les chercheurs dans le domaine de la modélisation des préférences.

Aussi, le développement de nouveaux modèles mathématiques pour l'agrégation multicritères et le perfectionnement des modèles existants sont des axes de recherche présents dans un grand nombre de travaux dédiés à l'AMCD. A ce titre, nous détaillerons dans le prochain chapitre l'agrégation multicritères tout en justifiant l'importance de cette étape dans la démarche de l'AMCD.

Chapitre 2

L'Agrégation multicritères

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'agrégation multicritères constituant l'étape la plus importante dans une démarche multicritères. Nous présenterons les concepts de base de l'agrégation, les propriétés mathématiques qui gère les opérateurs d'agrégation ainsi qu'une classification de ces derniers. Nous exposerons, également, une classification des méthodes d'aide multicritères à la décision en se basant sur le type d'agrégation adopté. Enfin, nous listerons les principaux travaux de recherche réalisés dans le contexte de l'agrégation multicritères.

Plan

2.1	Introduction	31
2.2	L'agrégation des performances	31
2.3	Les opérateurs d'agrégation	32
2.3.1	Propriétés fondamentales	32
2.3.2	Typologie des opérateurs d'agrégation	34
2.4	Typologie des MMAD	36
2.4.1	Agréger puis comparer (AC)	36
2.4.2	Comparer puis agréger (CA)	38
2.4.3	Classification des MMAD selon la nature de l'agrégation	39
2.5	Avantages et limites des MMAD	42
2.6	Travaux connexes	46
2.7	Conclusion	48

Chapitre 2

L'Agrégation multicritères

2.1 Introduction

L'agrégation multicritères consiste à synthétiser des informations exprimant des points de vue d'une certaine différence allant même jusqu'au conflit au sujet d'un même ensemble d'objets. L'agrégation se manifeste dans de nombreuses procédures liées au domaine de l'aide à la décision, à savoir, des classifications, des comparaisons, des évaluations, etc.

Quel que soit le problème décisionnel traité (choix, rangement, tri, etc.), la préoccupation majeure est : comment les actions sont comparées. En effet, dans un problème de choix, identifier la meilleure action revient à pouvoir la comparer à toutes les autres. Aussi, dans un problème de rangement, les actions doivent être comparées deux à deux dans l'objectif d'en obtenir un classement total. Enfin, dans un problème de tri, la comparaison se fait entre les actions et les profils qui servent de références permettant ainsi d'affecter les actions à des catégories prédéfinies. De ce fait, et du moment que la comparaison de deux actions se fait uniquement sur la base de leurs vecteurs de performances respectifs, il est nécessaire d'agréger ces informations dans le but de déterminer avec précision, si l'une des actions est globalement préférable à l'autre.

2.2 L'agrégation des performances

Le problème de l'agrégation des performances est le fait qu'il existe rarement une unanimité entre les critères dans la comparaison des actions et des conflits sont souvent aperçus. De ce fait, il est important de trouver un compromis en tenant compte de ces conflits tout en cherchant une règle de décision permettant de construire une relation de préférence entre les actions.

En effet, pour toute paire d'actions (a, b) , une règle de décision définit un prédicat binaire $\succeq(a, b)$ dont la valeur est une fonction des vecteurs de performances (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) [GRA et al 02a].

$$\succeq(a, b) = f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \quad (2.1)$$

Lorsque f prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$, on parle d'une relation de préférence "**nette**" et on parle d'une préférence "**valuée**", voire "**floue**", lorsque f est considéré dans un intervalle, voire dans $[0, 1]$. En effet, l'évaluation de la préférence $\succeq(a, b)$ se fait en deux opérations, à savoir, **l'agrégation** ($\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$) des performances a_j et b_j et **la comparaison** ($\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$) des actions a et b à travers leurs vecteurs de performances. L'association de ces deux fonctions aboutit logiquement à deux ordres différents où ψ est une fonction croissante de ces arguments et ϕ est une fonction croissante du premier argument et décroissante du second et $\phi(x, x) = 1$ pour tout réel x .

$$\begin{cases} \succeq(a, b) = \phi(\psi(a_1, \dots, a_n), \psi(b_1, \dots, b_n)) & \text{(Agréger puis Comparer)} \\ \succeq(a, b) = \psi(\phi(a_1, b_1), \dots, \phi(a_n, b_n)) & \text{(Comparer puis Agréger)} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ces deux approches se distinguent par leurs modèles décisionnels différents représentant, ainsi, un bon critère de classification des MMAD¹.

La première approche consiste à **agréger ensuite comparer**, la somme pondérée est un très bon exemple de ce genre d'approche. La seconde procédure, quant à elle, **commence par la comparaison et termine par l'agrégation**, les familles ELECTRE et PROMETHEE s'affichent comme les exemples classiques de cette stratégie.

2.3 Les opérateurs d'agrégation

L'agrégation est une opération qui n'est pas uniquement utilisée dans le contexte décisionnel et c'est bien pour cela que nous traitons dans cette section les fondements formels de l'agrégation afin d'illustrer ses propriétés mathématiques et les différentes catégories d'opérateurs d'agrégation.

2.3.1 Propriétés fondamentales

Un opérateur d'agrégation ψ est généralement considéré comme une fonction de $[0, 1]^n$ dans $[0, 1]$ ce qui signifie qu'il agrège n quantités [GRA et al 02a]. Cependant, il est tout à fait pos-

¹Méthode Multicritères d'Aide à la Décision

sible de définir ψ sur un intervalle plus grand, voire \mathbb{R} tout entier. Le tableau (2.1) présente quelques propriétés fondamentales des opérateurs d'agrégation.

Propriété	Formulation
Unanimité pour les valeurs extrêmes (UVE)	$\psi(0, \dots, 0) = 0$; $\psi(1, \dots, 1) = 1$
Idempotence (I)	$\psi(a, \dots, a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
Continuité (C)	ψ est une fonction continue de a_1, \dots, a_n
Monotonie (M)	Par rapport à chaque argument : $a'_i > a_i \Rightarrow \psi(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) \geq \psi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$
Neutralité (N)	$\mathcal{G}(\mathbb{N})$ est l'ensemble de toutes les permutations sur \mathbb{N} $\psi(a_1, \dots, a_n) = \psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}), \forall \sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$
Compromis (Co)	$\bigwedge_{i=1}^n a_i \leq \psi(a_1, \dots, a_n) \leq \bigvee_{i=1}^n (a_i)$ Avec \wedge et \vee les opérateurs "minimum" et "maximum" respectivement
Associativité (A)	$\psi^{(3)}(a_1, a_2, a_3) = \psi^{(2)}(\psi^{(2)}(a_1, a_2), a_3) = \psi^{(2)}(a_1, \psi^{(2)}(a_2, a_3))$ Avec $\psi^{(2)}$ et $\psi^{(3)}$ agrégation à 2 et 3 éléments respectivement
Stabilité pour les transformations ordinales (SO)	f est une fonction continue sur \mathbb{R} et ψ définie sur \mathbb{R} $\psi(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(\psi(a_1, \dots, a_n))$
Stabilité pour le changement d'échelle (SPL)	Soit $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ $\psi(ra_1 + t, \dots, ra_n + t) = r\psi(a_1, \dots, a_n) + t$
Stabilité comparative pour les transformations ordinales (SCO)	f est une fonction strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} $\psi(a_1, \dots, a_n) < \psi(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \psi(f(a_1), \dots, f(a_n)) < \psi(f(b_1), \dots, f(b_n))$

TAB. 2.1 – Propriétés fondamentales des opérateurs d'agrégation

Les propriétés du tableau (2.1) sont reliées par des implications dont l'étude approfondie [MAR 98] n'est pas l'objet de notre travail. Parmi ces relations nous citons :

- La propriété de **compromis** implique l'**idempotence**.
- L'**idempotence** et la monotonie impliquent la propriété de compromis.
- La **stabilité pour le changement d'échelle linéaire** implique l'**idempotence**.
- La **stabilité pour les transformations ordinales** implique la **stabilité comparative pour les transformations ordinales**.
- La **stabilité comparative pour les transformations ordinales** et l'**idempotence** impliquent la **stabilité pour les transformations ordinales**.

2.3.2 Typologie des opérateurs d'agrégation

Il existe une large panoplie d'opérateurs d'agrégation qui ont fait l'objet de nombreuses recherches et études approfondies [YAG 91] [DUB et al 84] [MAR 98]. Cependant, nous nous contenterons dans ce qui suit de présenter les plus usuels parmi ces opérateurs en les plaçant dans quatre grandes classes [GRA et al 02a].

2.3.2.1 Les opérateurs conjonctifs

Les opérateurs conjonctifs procèdent de la même manière qu'un "et" logique (conjonction). Autrement dit, le résultat de l'agrégation tend vers la valeur extrême (1 si l'agrégation est définie sur $[0, 1]$) si et seulement si les quantités à agréger ont la même tendance (quantités élevées). Cela nous mène vers la propriété suivante en supposant que l'agrégation est définie sur $[0, 1]$ (la propriété s'applique à tout autre intervalle de la même façon) :

$$\psi^{(2)}(1, a) = a, \forall a \in [0, 1] \quad (2.3)$$

En associant à l'équation (2.3) les propriétés de monotonie, de neutralité et d'associativité, on obtient la famille des "**t-normes**" (Normes triangulaires) notées généralement "T". Les "t-normes" ne vérifient pas certaines propriétés des opérateurs d'agrégation, à l'image de l'idempotence, le compromis et la stabilité pour le changement d'échelle linéaire.

2.3.2.2 Les opérateurs disjonctifs

Les opérateurs disjonctifs, comme le nom l'indique, opèrent tels qu'une disjonction ("ou" logique). Par conséquent, pour que le résultat d'une agrégation tende vers la valeur extrême (1 si l'intervalle de définition est $[0, 1]$), il suffit que l'une des quantités à agréger a la même tendance. Ceci dit, nous pouvons exprimer cette propriété de la manière suivante :

$$\psi^{(2)}(0, a) = a, \forall a \in [0, 1] \quad (2.4)$$

De la même façon qu'avec les opérateurs conjonctifs, si les propriétés de monotonie, de neutralité et d'associativité sont ajoutées à l'équation (2.4), le résultat est une famille de co-normes triangulaires appelées "**t-conormes**" et souvent notées "S".

2.3.2.3 Les opérateurs de compromis

Les opérateurs de compromis tiennent leur appellation du fait qu'ils se situent entre les opérateurs conjonctifs et disjonctifs. Nous présentons dans ce qui suit les opérateurs de compromis les plus répondus (tableau 2.2). Les intégrales floues font également partie des opérateurs de compromis mais nous les aborderons avec de plus amples détails dans le troisième chapitre de cette thèse.

Opérateur	Formule	Propriétés
Somme pondérée	$\psi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (w_i a_i)$ $w_i \in [0, 1]$ sont les poids des critères	Idempotence, Continuité Monotonie stricte, Stabilité au changement d'échelle linéaire
Moyenne généralisées	$M_f(a_1, \dots, a_n) = f^{-1}(\sum_{i=1}^n (w_i f(a_i)))$ f : fonction strictement croissante	Idempotence, Continuité Monotonie stricte
Minimum pondéré [DUB et al 84]	$wmin_w(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{i=1}^n [(1 - w_i) \vee a_i]$	Idempotence, Continuité Monotonie
Maximum pondéré [DUB et al 84]	$wmax_w(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1}^n [w_i \wedge a_i]$	Idempotence, Continuité Monotonie
Somme pondérée ordonnée (OWA) [YAG 91]	$OWA_w^f(a_1, \dots, a_n) = f^{-1}(\sum_{i=1}^n w_i f(a_{(i)}))$ $w = (w_1, \dots, w_n)$ un vecteur de poids tel que : $w_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ La notation $(.)$ indique une permutation des indices de façon à avoir $a_{(1)} \leq \dots \leq a_{(n)}$	Idempotence, Continuité, Monotonie, Neutralité Stabilité pour le changement d'échelle linéaire

TAB. 2.2 – Quelques opérateurs de compromis ainsi que leurs propriétés

2.3.2.4 Les opérateurs hybrides

Ce sont des opérateurs qui ne peuvent être classés spécifiquement dans aucune des trois classes déjà citées car ils représentent des hybridations entre plusieurs techniques appartenant à ces classes [GRA et al 02a]. Le tableau (2.3) regroupe quelques opérateurs hybrides ainsi que les propriétés qu'ils vérifient.

Opérateur	Formule	Propriétés
Somme symétrique [SIL 79]	$\psi^{(2)}(a_1, a_2) = \left(1 + \frac{g(1-a_1, 1-a_2)}{g(a_1, a_2)}\right)^{-1}$ g est une fonction croissante, continue avec $g(0, 0) = 0$	Continuité, Non décroissance, Neutralité
Mélanges de t-normes et t-conormes [ZIM et al 80]	$\psi(a_1, \dots, a_n) = (\prod_{i=1}^n a_i)^{1-\gamma} \left(\bigoplus_{j=1}^n a_j\right)^\gamma$ \bigoplus est définie par $\bigoplus_{j=1}^n a_j = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - a_j)$	Continuité, Monotonie, Neutralité, Associativité
Minimum pondéré augmenté [GRA 04]	$\psi(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{j=1, \dots, n} w_j a_j + \epsilon \sum_{j=1, \dots, n} w_j a_j$ ϵ une quantité strictement positive définissant l'importance de la somme pondérée par rapport à l'opérateur minimum	Idempotence, Continuité, Monotonie

TAB. 2.3 – Quelques opérateurs hybrides et leurs propriétés

2.4 Typologie des MMAD

Il existe un grand nombre de méthodes d'analyse multicritères faisant l'objet de plusieurs études et recherches menées par les pionniers de l'aide à la décision multicritères [ROY 85] [BOU 15] [SCH 85]. Afin d'énumérer le maximum de ces méthodes, il est nécessaire de procéder à une classification qui nous permettra de citer les différentes familles de méthodes dans un ordre logique et de mettre l'accent sur leurs avantages et limites. Tout d'abord, nous avons choisi de classer les MMAD selon l'ordre des opérations d'agrégation et de comparaison. Dans ce sens, deux approches se dégagent, "Agréger puis Comparer" et "Comparer puis Agréger". La différence entre les deux approches est d'un ordre formel.

2.4.1 Agréger puis comparer (AC)

L'approche "Agréger puis Comparer" cible à dégager un critère unique à partir de ceux du départ et donc évaluer chaque action par rapport à ce critère pour enfin les comparer aisément et en extraire la ou les meilleures d'entre elles.

Il s'agit de trouver une note globale $v(a)$ qui résume la valeur de l'action a et qui est calculée à partir de son vecteur de performances. Une fois les notes globales de toutes les actions calculées, elles serviront de base à la comparaison multicritères des actions. Cette stratégie est très répandue dans les activités de notre vie de tous les jours. Par exemple, dans les écoles et les universités, la comparaison entre les étudiants se fait grâce à des moyennes générales issues des différentes notes de chaque étudiant.

Pour rester proche du domaine informatique, l'approche "AC" est également utilisée si les performances sont des indices de satisfaction d'un objectif partiel (ou une contrainte). Le problème sera donc de dégager un indice de satisfaction global. Nous pouvons définir formellement la forme générale des règles de décision relevant de l'approche "AC" [GRA et al 02a] de la manière suivante :

$$\succeq (a, b) = \phi(\psi(a_1, \dots, a_n), \psi(b_1, \dots, b_n)) \quad (2.5)$$

Où ψ est une fonction croissante de ses arguments et ϕ une fonction croissante du premier argument et décroissante du second et telle que $\phi(x, x) = 1$ pour tout réel x . Cela dit, la fonction d'agrégation permet de grouper les performances (a_1, \dots, a_n) en une valeur $v(a)$ synthétisant ainsi la valeur globale de l'action a . La fonction de comparaison, quant à elle, permet de mesurer et d'évaluer le degré de préférence de $v(a)$ sur $v(b)$.

Si la préférence est nette, la fonction ϕ prend ses valeurs dans l'ensemble $0, 1$ (formule 2.6) mais si elle est floue, ϕ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ (formule 2.7) [GRA et al 02a]. Notons que p est un seuil de discrimination positif ou nul.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - x \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6) \quad \phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - x \leq 0 \\ \frac{p+x-y}{p} & \text{si } 0 < y - x \leq p \\ 0 & \text{si } y - x > p \end{cases} \quad (2.7)$$

Selon Grabisch, l'approche AC se caractérise par "sa simplicité opératoire et son aspect intuitif" [GRA 04]. L'approche "AC" suppose que toutes les actions sont comparables et que les comparaisons sont transitives. Malheureusement, ces hypothèses sont souvent très discutables à cause des informations imparfaites sur les critères et les possibilités de conflits entre ces critères. Lorsque les écarts entre les critères sont assez considérables, la comparaison entre les valeurs synthétisées des actions devient une tâche ardue. En outre, établir une évaluation globale à partir d'évaluations partielles n'est pas aussi simple que ça en a l'air car les performances sont souvent exprimées dans des échelles différentes (temps, vitesse, masse, etc.). De ce fait, il est nécessaire d'avoir des informations supplémentaires appelées "**intercritère**" permettant de mesurer l'importance des critères (poids des critères).

Pour résumer, cette manière de procéder souffre le plus souvent d'une grande sensibilité au changement d'échelles de mesure des performances et nécessitent également des fonctions d'évaluation commensurables ce qui demande généralement de centrer et réduire la matrice de performance. Aussi, les méthodes suivant cette approche effectuent une agrégation totale et tombent généralement dans le piège de la compensation qui fausse littéralement les résultats obtenus.

2.4.2 Comparer puis agréger (CA)

Contrairement à l'approche "AC", l'approche "**Comparer puis Agréger**" consiste en une agrégation des préférences partielles obtenues à partir de plusieurs comparaisons des actions deux-à-deux. Il s'agit de comparer tout d'abord les performances des actions, critère par critère. Ainsi, pour chaque paire (a, b) et pour chaque critère j , un indice de préférence partielle $\phi_j(a, b)$ est défini tel que ϕ est une fonction croissante de son premier argument, décroissante du second. Cela dit, la préférence est désormais une agrégation des indices de préférence partielle. De façon formelle, la préférence est représentée par la formule (2.8)

$$\succeq(a, b) = \psi(\phi_1(a_1, b_1), \dots, \phi_n(a_n, b_n)) \quad (2.8)$$

Dans l'approche "CA" chaque fonction de comparaison a pour objectif de comparer les performances de deux actions sur le même critère. Il n'est plus question de comparer directement des performances liées à des critères différents. La fonction d'agrégation permet d'agréger des indices de préférences partiels ce qui permet de manipuler les indices de préférences partiels issues de critères différents [GRA et al 02a]. Cette hypothèse est tout à fait réalisée dans le cas d'une préférence nette sur l'ensemble des actions A . Ainsi, une relation de préférence restreinte au critère j et la préférence partielle peuvent être exprimées par la formules (2.9) et (2.10) où p_j est un seuil de discrimination positif propre au critère j .

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - y > p_j \\ 0 & \text{si } |x - y| \leq p_j \\ -1 & \text{si } y - x > p_j \end{cases} \quad (2.9) \quad \succeq_j(a, b) = \phi_j(a_j, b_j) \quad (2.10)$$

Dans ce cas, la préférence définie par l'équation (2.10) n'est autre que l'agrégation des relations de préférence restreinte aux différents critères. La formule (2.10) ne tient pas compte uniquement les critères pour lesquels a a une préférence sur b mais prend en considération les critères à impact positif et ceux à impact négatif [GRA et al 02a]. La préférence peut être floue et prend ainsi ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ (formule 2.11).

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - x \leq 0 \\ \frac{p_j + x - y}{p_j} & \text{si } 0 < y - x \leq p_j \\ -1 & \text{si } y - x > p_j \end{cases} \quad (2.11)$$

L'approche "CA" peut palier au problème de la non-commensurabilité des performances du moment qu'elle permet de comparer des préférences partielles au lieu de comparer les performances elles-mêmes. Aussi, l'approche CA est très bien adaptée lorsqu'il s'agit de critères quantitatifs et des critères qualitatifs.

L'agrégation adoptée par l'approche "CA" est appelée "ordinaire" et consiste à déterminer la préférence globale qui n'est autre que la meilleure synthèse des relations de préférences partielles.

Toutefois, certaines expérimentations [PER 92] ont montrées les limites de l'utilisation de l'agrégation partielle. Parmi ces limites la difficulté d'assurer une transitivité de la relation de préférence (sauf dans certains cas particuliers) ce qui représente un désavantage considérable. D'autre part, l'approche "CA" rencontre des difficultés en l'absence de paramètres subjectifs permettant de délimiter les intervalles de concordance et de discordance. Le choix de ces paramètres est une tâche assez complexe qui nécessite une collaboration entre l'expert du domaine et l'homme d'étude afin d'établir avec précision les seuils entrant dans les calculs de la méthode multicritères.

2.4.3 Classification des MMAD selon la nature de l'agrégation

L'agrégation multicritères est l'opération qui consiste à trouver une représentation formelle des performances des actions par rapport aux critères, de façon appropriée à la problématique d'aide à la décision en question (choix, tri, rangement, etc.). La diversité des méthodes d'analyse multicritères est due presque uniquement au grand nombre d'opérateurs d'agrégation qu'adoptent ces méthodes. Dans le domaine de l'aide à la décision multicritères, il est possible de distinguer trois attitudes d'agrégation (détaillées dans les sections suivantes) [ROY 85] constituant, ainsi, une classification des MMAD dans le domaine de l'analyse multicritères.

2.4.3.1 Méthodes par agrégation totale

L'agrégation totale est basée sur l'utilisation d'une fonction appelée d'utilité ou d'agrégation et dont le but est de synthétiser toutes les performances tout en leur attribuant des poids [ROY 85]. Pour cela, deux suppositions sont nécessaires pour les performances, à savoir, la commensurabilité et la transitivité, ce qui justifie l'appellation "agrégation complète transitive". D'autres auteurs tels que Roy [ROY 85] et Maystre [MAY et al 94] préfèrent l'appeler "approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité" du moment qu'elle évalue chaque action pour un critère unique synthétisant les performances des actions sur l'ensemble des critères. Vincke [VIN 89], quant à lui, utilise l'appellation "théorie de l'utilité multi-attributs". La tableau (2.4) illustre quelques méthodes de l'agrégation totale ainsi qu'une brève description de leurs principes de fonctionnement.

Méthode	Principe	Références
Somme et Moyenne pondérées	<ul style="list-style-type: none"> – Opérateur d'agrégation de compromis – Nécessite des critères quantitatifs avec la même échelle – Somme des performances multipliées par les poids des critères – Diviser la somme pondérée par la somme des poids (Moyenne pondérée) 	[ROY 85] [VIN 89] [MAY et al 94] [BEN 00] [AYA 10]
MAUT	<ul style="list-style-type: none"> – Basée sur le principe de l'utilité (satisfaction du décideur) – Construire les fonctions d'utilité – Intégrer les fonctions d'utilité dans une "super fonction" 	[FIS 70] [BEN 00] [JAC et al 82]
AHP	<ul style="list-style-type: none"> – Présente un problème complexe sous forme d'une hiérarchie – Effectuer une série de comparaisons binaires – Calculer les poids relatifs des critères – Calculer le ratio de cohérence (RC) et Vérifier la fiabilité des résultats. 	[SAA 80] [GLO et al 87] [SAA 00]

TAB. 2.4 – Quelques méthodes procédant par agrégation totale

2.4.3.2 Méthodes par agrégation partielle

Le surclassement est le principe de base adopté par les méthodes réalisant l'agrégation partielle. Une action a surclasse b si et seulement si a est au moins aussi bonne que b sur une majorité de critères sans être trop mauvaise relativement aux autres critères [BEN 00]. Mettre en œuvre cette idée nécessite l'introduction des notions d'intransitivité et d'incomparabilité d'où l'appellation "approche de surclassement de synthèse acceptant l'incomparabilité" [ROY 85] [MAY et al 94]. Les méthodes d'agrégation partielle comparent les actions deux à deux et vérifient si l'une des deux actions surclasse l'autre. Les surclassement obtenus sont exploités pour établir des préordres totaux ou partiels. Le tableau (2.5) présente certaines méthode de l'agrégation partielle.

Méthode	Principe	Références
ELECTRE (I, II, III, Tri, Is, IV)	<ul style="list-style-type: none"> - Calculer les indices de concordance et de discordance - Etablir les relations de surclassement - Exploitation des relations de surclassement (graphe de surclassement, distillation, procédure optimiste et pessimiste, etc.) 	[ROY 68] [MAY et al 94] [BEN 00] [AYA 10] [BOU 15]
PROMETHEE (I, II, III, IV)	<ul style="list-style-type: none"> - Choisir pour chaque critère le type qui convient - Calculer les préférences partielles et la préférence globale - Calculer les flux entrants et sortants et le flux net - Etablir un préordre partiel ou total 	[BRA et al 01] [HAL et al 09] [HAM 03] [AYA 10]
MACBETH	<ul style="list-style-type: none"> - Définir le contexte qui englobe les critères et les actions - Comparaisons entre les actions en fonction du penchant du décideur - Comparaisons entre les critères en fonction du penchant du décideur - Test de consistance pour la fiabilité des "jugements catégoriques" 	[BAN et al 94] [SCH 85] [AYA 10]

TAB. 2.5 – Quelques méthodes procédant par agrégation partielle

2.4.3.3 Méthodes par agrégation locale

Lorsque l'ensemble des alternatives A est considérablement grand, il faut utiliser une solution comme point de départ et procéder ensuite à une série de tests visant à trouver une meilleure solution autour de la première. Cette procédure est une exploration locale et répétitive de l'ensemble A [BEN 00] ou encore une agrégation locale itérative [SCH 85]. Ces méthodes sont caractérisées par les interactions entre l'homme d'étude et le décideur. Il s'agit donc d'une "approche du jugement local interactif avec itérations essais-erreur" [ROY 85] [MAY et al 94]. Les méthodes de l'agrégation locale réalisent une série d'itérations en trois phases [SCH 85] : Exploiter les résultats de l'itération précédente, soumettre une nouvelle proposition au décideur et enfin s'arrêter s'il est satisfait ou continuer sinon. Le tableau (2.6) expose quelques méthode de l'agrégation locale avec une description de leurs principes de fonctionnement.

Méthode	Principe	Références
Programmation Linéaire Multicritères (PLM)	<ul style="list-style-type: none"> – Désigner pour chaque fonction critère un optimum – Définir le "point de mire" – Trouver un point se rapprochant le plus possible du point de mire tout en appartenant à l'espace à "m" dimensions (optimums des critères) 	[BEN et al 75] [ZIO 80] [ZIO et al 83] [VIN 89] [BEN 00]
STEM et autres	<ul style="list-style-type: none"> – Minimiser une distance pondérée augmentée de Tchebycheff par rapport au " point de mire ". – Variante plus simple proposée par Vincke – Somme pondérée interactive de Zionts, UTA interactive, etc. – Méthodes de Zinots-Wallenius, Jacquet-Lagrèze, Meziani et Slowinski 	[BEN et al 75] [ZIO 80] [ZIO et al 83] [VIN 89]

TAB. 2.6 – Quelques méthodes procédant par agrégation locale

2.5 Avantages et limites des MMAD

Les méthodes d'analyse multicritères présentent des avantages et ne sont pas à l'abri de certaines limites dues essentiellement à l'approche d'agrégation qu'elles adoptent ou encore à la manière avec laquelle elles exploitent les résultats de cette agrégation. Dans cette section nous mettons l'accent sur les avantages et les limites des MMAD sous forme de tableaux récapitulatifs pour chacune des approches d'agrégation citées ci-dessus. Le tableau (2.7 recense les avantages et les limites des méthode de l'agrégation totale.

Méthodes multicritères	Avantages	Limites
Somme et Moyenne pondérées, SMART	<ul style="list-style-type: none"> – Simple et facile à exploiter – Pas de modification du problème sous-jacent 	<ul style="list-style-type: none"> – Nécessite l'homogénéité des unités et l'utilisation d'une même échelle pour tous les critères. – Opérateurs compensatoires (Mauvaises performances se cachent derrière les bonnes performances).
Multiplication des ratios	<ul style="list-style-type: none"> – Possibilité d'échelles différentes pour les critères – Pas de compensation 	Impossible d'avoir des valeurs nulles pour les critères (risque de division par zéro)
MAUT	<ul style="list-style-type: none"> – Permet d'évaluer les actions par rapport à des critères caractérisés par l'aspect d'incertitude (aléatoire). – Représentation mathématique du processus de décision – Accepte l'hétérogénéité des unités et échelles des critères 	<ul style="list-style-type: none"> – Trop exigeante en informations – Difficulté d'établir les fonctions d'utilité et la fonction analytique – Intervention minimale du décideur – L'hypothèse additive n'est exploitable qu'en imposant des hypothèses théoriquement très restrictives.
UTA	Fonctions d'utilité partielles tirées toutes à la fois en partant de la préférence globale qu'exprime le décideur	<ul style="list-style-type: none"> – Utilise des vrai-critères uniquement et nécessite des données cardinales. – Les préférences doivent être indépendantes (aucune influence)
AHP	<ul style="list-style-type: none"> – Modélisation du problème par une structure hiérarchique. – Utilisation d'une échelle sémantique exprimant les préférences du décideur. – Grande flexibilité – Résout une large panoplie de problèmes non structurés 	<ul style="list-style-type: none"> – Trop lourde en nombre de comparaisons par pairs à effectuer pour un grand nombre de critères – L'ordre de priorité des actions est influencé par l'ajout ou la suppression d'une ou plusieurs actions (Renversement de rang). – Comparaisons délicates des critères et des actions.

TAB. 2.7 – Avantages et limites des méthodes de l'agrégation totale

Le tableau (2.8) regroupe les avantages et les limites des méthodes de l'agrégation partielle (agrégation partielle par surclassement).

Méthodes multicritères	Avantages	Limites
ELECTRE I	<ul style="list-style-type: none"> - Première méthode de surclassement adaptée aux problèmes de choix entre actions - La notion de noyau facilite la tâche du décideur en s'intéressant uniquement aux meilleures actions 	<ul style="list-style-type: none"> - Traduire les performances des actions en notes n'est pas convenable à tous les utilisateurs. - Effets de seuil importants. - Modélisation (trop) simple du processus de décision - Vrai critères uniquement
ELECTRE II	<ul style="list-style-type: none"> - La méthode ELECTRE II traite la problématique de rangement (classer les actions depuis les meilleurs jusqu'aux moins bonnes) - Utilise des valeurs fixes pour représenter la préférence, l'indifférence et le veto du décideur. 	<ul style="list-style-type: none"> - Difficulté d'établir le pré-ordre partiel et la préférence faible n'est pas suffisante pour déterminer l'intersection des pré-ordres totaux (classement direct et inverse). - Exige une évaluation cardinale et n'utilise que les vrai-critères.
ELECTRE III	<ul style="list-style-type: none"> - Traite la problématique de rangement - Représente la préférence, l'indifférence et le veto du décideur devant deux actions par des un indice compris entre 0 et 1 (introduction du pseudo-critère et du flou) - Résultats stables. 	<ul style="list-style-type: none"> - Mise en œuvre délicate de la méthode due à sa complexité et au grand nombre de paramètres techniques - Interprétation physique absente pour certains paramètres (seuils de discordance, de veto, ...) - Difficulté pour interpréter éventuellement les résultats.
ELECTRE Is	<ul style="list-style-type: none"> - Traite la problématique de choix - Procédure très similaire à "ELECTRE I" appliquée aux pseudo-critères 	<p>Traduire les performances en notes n'est pas appréciable par tous les utilisateurs</p>
ELECTRE IV	<ul style="list-style-type: none"> - Traite la problématique de rangement - Malgré l'absence de pondération des critères, aucun critère n'est prépondérant ni négligé par rapport aux autres - Utilisation de la logique floue 	<ul style="list-style-type: none"> - Trop de paramètres techniques - Manque en flexibilité dans les calculs

ELECTRE Tri	<ul style="list-style-type: none"> - Première méthode de la famille qui traite la problématique de Tri (classer les actions qui dans une des catégories prédéfinies). - Procédure d'exploitation moins difficile qu'ELECTRE III (Deux approches optimiste et pessimiste) 	<ul style="list-style-type: none"> - Exige trop de paramètres techniques - Difficulté de choisir entre les résultats différents des approches optimiste et pessimiste. - Difficulté parfois pour interpréter certains résultats (appartenance aux catégories)
PROMETHEE I	<ul style="list-style-type: none"> - Méthode proche d'ELECTRE III - Construit une relation de surclassement qui traduit une intensité de préférence. - Le paramétrage se fait en se basant sur des grandeurs physiques compréhensibles par le décideur 	<ul style="list-style-type: none"> - Beaucoup de calculs pour obtenir les flux ce qui implique une indifférence très rare en pratique. - Seuils de préférence et d'indifférence constants - Absence de la notion de discordance
PROMETHEE II	Le pré-ordre total de PROMETHEE II exclue l'incomparabilité et réduit fortement l'indifférence	Méthode d'utilité (calcul des scores), les comparaisons 2 à 2 ne servant qu'à masquer le calcul du score final $\phi(a)$ de chaque action.
PROMETHEE III	Calculs des flux plus faciles à effectuer grâce à l'introduction des seuils d'indifférence sur les flux	Méthode assez difficile à implémenter à cause des calculs statistiques pour les seuils n'ayant pas d'interprétation concrète pour le décideur
PROMETHEE IV	Utilise des intégrales dans les calculs plutôt que des sommes ce qui permet d'éviter certaines failles dans les résultats	<ul style="list-style-type: none"> - Il s'agit d'une méthode qui manipule des ensembles infinis d'actions ce qui la rend plus théorique que pratique - Implémentation plutôt difficile due à l'utilisation des intégrales.
MACBETH	<ul style="list-style-type: none"> - Combine les informations sur les préférences émises par le décideur et celles sur l'importance des critères et leurs interactions. - Méthode interactive. - Permet de réaliser une étude de sensibilité 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilisation d'échelles non bornées. - La détermination des constantes d'échelle et celle des échelles d'attractivité suivent le même processus.

TAB. 2.8 – Avantages et limites des méthodes de l'agrégation partielle

Le tableau (2.9) présente les avantages et les limites de la PLM et la méthode STEM ainsi que ses variantes.

Méthodes multicritères	Avantages	Limites
PLM	<ul style="list-style-type: none"> – Grande interactivité avec le décideur – Généralise les concepts de la programmation linéaire classique pour le cas de plusieurs critères. 	Méthodes complexes et souvent irréalistes vis-à-vis de l'imprécision des données
STEM et ses variantes	Utilisent des approches appartenant à l'origine à l'agrégation totale ou partielle en leur ajoutant l'aspect interactif	<ul style="list-style-type: none"> – Assez complexe à cause de l'utilisation de la distance de Tchebycheff. – Utilisation du point de mire

TAB. 2.9 – Avantages et limites des méthodes de l'agrégation locale et itérative

A la fin de cette section, nous constatons qu'un choix judicieux de la méthode d'analyse multicritères est d'une importance majeure pour un bon déroulement du processus décisionnel. Pour cela, il est important de connaître la nature des entrées en notre possession (critères, actions, etc.), la problématique à traiter (choix, tri, rangement, etc.) et le type d'agrégation à effectuer (totale, partielle, locale). Il est également important de choisir l'opérateur d'agrégation qui s'adapte au mieux avec la situation et de lui associer les bons paramètres tout en respectant l'aspect subjectif du décideur.

Chacune des approches que nous avons citées possède des avantages et souffre de certaines limites et chaque nouvelle méthode adoptant une de ces approches tente de palier à ces limites et apporter une nouvelle contribution. Cependant, la complexité des problèmes d'aide à la décision multicritères ne permet pas à une seule méthode d'exceller dans le traitement de toutes les problématiques. Cela nous mène à dire qu'il est préférable de proposer plusieurs nouvelles méthodes qui se concentrent chacune sur un champ restreint de situations.

2.6 Travaux connexes

Dans la littérature, nous trouvons une large panoplie de travaux de recherche dont l'objectif est d'enrichir les approches d'agrégation multicritères existantes ou de proposer de nouvelles méthodes d'analyse multicritères. Ainsi, les approches proposées tentent à pallier à certaines limites que présentent les approches existantes ou encore d'optimiser les résultats obtenus à travers l'utilisation de plusieurs algorithmes et techniques.

En effet, une méthode d'analyse multicritères opère en une suite d'étapes fortement reliées entre elles. De ce fait, l'optimisation des résultats de la méthode revient à effectuer une étude

approfondie des étapes qui la constituent. Cette étude permet en fin de compte d'évaluer la possibilité d'améliorer le fonctionnement de la méthode en utilisant des techniques, théories et algorithmes dont l'apport se voit au niveau des résultats obtenus.

A cette fin, **C.A. BANA E COSTA** s'est intéressé dans [BAN 86] aux situations conflictuelles souvent rencontrées lors de la pondération des critères et propose une méthodologie d'aide multicritères à la décision pour y remédier.

V. MOUSSEAU traite également, dans [MOU 93], les problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritères à la décision. Il s'intéresse à concevoir et expérimenter des méthodes fiables pour évaluer l'importance de chaque critère et procéder ainsi à sa pondération.

Les auteurs dans [BAN et al 02] proposent une approche multicritères pour l'urbanisme stratégique en prenant comme exemple la municipalité de "Barcelos" dans la région de Braga au Portugal. Dans [ZHI et al 02], les auteurs ont décrit une approche d'aide à la décision multi-attributs basée sur les informations concernant les préférences floues sur les actions. Dans cette approche, le décideur exprime ses préférences sur les actions sous forme d'une relation floue.

Nombreuses des recherches de **M. GRABISCH** ont pour thématique l'utilisation des intégrales floues en tant qu'opérateur d'agrégation dans des approches d'analyse multicritères. Dans ce contexte, il propose avec **M. ROUBENS** dans [GRA et al 00b] une approche pour l'application des intégrales de Choquet dans une prise de décision multicritères. La collaboration de **M. GRABISCH** et **C. LABREUCH** dans [GRA et al 02b], [LAB et al 03] et [LAB et al 06] a permis d'effectuer des études sur l'apport des bi-capacités dans la prise de décision afin de présenter une généralisation des intégrales de Choquet pour la manipulation des échelles bipolaires.

Plusieurs travaux de recherche réalisés au sein de l'équipe "**Modélisation Spatio-Temporelle et Vision Artificielle : du Capteur à la Décision**" (Laboratoire d'Informatique d'Oran) ont porté sur l'optimisation des méthodes d'analyse multicritères (principalement la méthode **ELECTRE III**) par les algorithmes génétiques [LAB et al 07], le recuit simulé [BOU et al 08], les colonies de fourmis [ALN et al 13] ou encore les chauves-souris [BOU 15].

Dans le même contexte, dans [HAM 08], **D. HAMDADOU** propose un modèle de prise de décision en Aménagement du territoire basé sur une approche multicritères et une approche de négociation par utilisation des mesures floues pour la prise en compte des interactions entre les critères.

M.R. GHALEM en collaboration avec **D. HAMDADOU** [GHA 08] ont abordé le problème des interactions entre les critères en introduisant les mesures floues et l'intégrale de Choquet par utilisation de la transformée de Möbius.

Dans [GRE et al 08], **S. GRECO**, **V. MOUSSEAU**, et **R. SLOWINSKI** présentent une nouvelle méthode multicritères de rangement appelée UTA-GMS en utilisant des fonctions additives résultantes de la régression ordinale.

C. LIUHAO et **X. ZESHUI** proposent dans [LIU et al 14] un opérateur d'agrégation prioritaire basé sur la somme pondérée ordonnée (OWA) [YAG 91] et la mesure prioritaire. Dans la même optique, **L. DENG-FENG** et **R. HAI-PING** proposent dans [DEN et al 15a] une nouvelle méthode d'aide à la décision multi-attributs basée sur une nouvelle fonction d'ensembles flous intuitionnistes. Aussi, **L. DENG-FENG** propose en collaboration avec **Y. JIE** dans [DEN et al 15b] une méthode basée sur l'utilisation de l'indice de différence pour le rangement des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux.

Une nouvelle variante de la méthode **ELECTRE Tri** a été proposée par **D. BOUYSSOU** et **T. MARCHANT** dans [BOU 15] en exploitant des profils limitant les catégories afin d'améliorer les résultats dans certaines situations où la méthode originale présente des incohérences par rapport aux préférences et intuitions du décideur.

2.7 Conclusion

L'objectif principal de l'agrégation multicritères est de synthétiser les informations qui expriment des points de vue souvent conflictuels concernant un même ensemble d'objets. L'agrégation, étant une étape très cruciale dans toute démarche multicritères, se manifeste dans divers domaines de notre vie quotidienne et permet de réaliser des classifications, des comparaisons, des évaluations, etc.

L'agrégation est un processus d'investigation mathématique permettant de fournir des éléments de réponse au problème décisionnel en question. Ainsi, définir l'agrégation revient à définir un modèle mathématique composés de données d'entrées, un ou plusieurs opérateurs d'agrégation et des résultats. Il existe un grand nombre d'opérateurs d'agrégation de différentes catégories (conjonctifs, disjonctifs, compromis, hybrides).

Parmi ces opérateurs, nous nous intéressons aux intégrales floues, en particulier, l'intégrale de Choquet. Les intégrales floues sont souvent utilisées dans des procédures d'agrégation totale et il serait donc intéressant de les tester sur des procédures d'agrégation partielle ou locale. Dans le prochain chapitre, nous présenterons en détail les mesures floues et les intégrales floues et nous illustrerons leur utilisation pour la représentation des interactions entre les critères.

Chapitre 3

Mesures floues et Intégrale de Choquet

Dans ce chapitre, nous présentons les mesures floues et les intégrales floues, en particulier celle de Choquet, en tant que solution à l'agrégation des critères interactifs. Nous illustrons d'abord les différents types d'interactions pouvant exister entre les critères et l'apport des mesures floues dans l'agrégation de ces critères. Cet apport est optimisé grâce au concept des bi-capacités que nous exposerons également dans ce chapitre. Enfin, nous présenterons la formule de l'intégrale de Choquet définie pour les bi-capacités et généralisée aux échelles bipolaires.

Plan

3.1	Introduction	50
3.2	Interactions entre les critères	51
3.2.1	Corrélation	51
3.2.2	Interchangeabilité et complémentarité	52
3.2.3	Dépendance préférentielle	53
3.3	Mesures floues et Intégrales floues	54
3.3.1	Définition de la mesure floue	55
3.3.2	Utilisation des mesures floues	56
3.3.3	Mesures floues k-additives	60
3.3.4	Intégrales floues	60
3.4	Intégrale de Choquet	60
3.5	Modèles bipolaires	61
3.5.1	Échelles bipolaires	63
3.5.2	Échelles bipolaires et bi-capacités	63
3.6	Bi-capacités et Intégrale de Choquet	64
3.6.1	Définition d'une bi-capacité	64
3.6.2	Intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires	65
3.7	Travaux connexes	66
3.8	Conclusion	67

Chapitre 3

Mesures floues et Intégrale de Choquet

3.1 Introduction

Un des éléments clés dans un problème d'agrégation multicritères est la pondération des critères, autrement dit, la prise en compte de l'importance de chaque critère pris en considération dans l'analyse. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser, dans les calculs d'agrégation, des opérateurs dédiés à cet effet et dont le plus connu et utilisé est sans doute, la somme pondérée.

Toutefois, l'utilisation de la somme pondérée pour l'agrégation suppose que les critères soient totalement indépendants, hypothèse qui n'est pas toujours vérifiée [AYA 10]. En effet, les critères sont souvent sujets à plusieurs types d'interactions et la plupart des opérateurs d'agrégation pondérés sont incapables de modéliser ce phénomène.

D'autre part, les intégrales sont vues comme des opérateurs d'agrégation de type "moyenne" car, de façon générale, une intégrale est utilisée pour calculer la valeur moyenne d'une fonction. Ainsi, une intégrale peut, non seulement, être utilisée telle qu'un opérateur d'agrégation pondérée mais peut aussi modéliser les interactions entre les critères si elle est associée à une mesure floue. Nous parlons, dans ce cas, d'une "intégrale floue".

Bien que les intégrales floues nécessitent une étude approfondie [GRA et al 95] [GRA et al 00a] [GRA et al 00b], nous tenterons dans ce qui suit d'en exposer le principe brièvement et illustrer la représentation de l'intégrale de Choquet en utilisant les bi-capacités. Cependant, avant d'étudier les mesures floues et l'intégrale de Choquet, il est important de mettre l'accent sur le phénomène des interactions entre les critères.

3.2 Interactions entre les critères

Afin d'éclaircir au mieux le phénomène des interactions entre les critères, nous définissons pour ce qui suit une fonction de pondération f_p comme étant une fonction d'ensemble $f_p : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les conditions limites $f_p(\emptyset) = 0$ et $f_p(N) = 1$ ainsi que la monotonie, i.e. $\forall A, B \subset 2^{\mathbb{N}} : A \subset B \Rightarrow f_p(A) \leq f_p(B)$. Ainsi, pour chaque sous ensemble de critères A , $f_p(A)$ représente le coefficient d'importance (poids) relatif à A , autrement dit, l'influence de A sur la décision finale.

Les interactions entre les critères peuvent être subdivisées en deux grandes catégories. Nous distinguons les interactions détectables en examinant la matrice de performances et celles imposées par les préférences du décideur relativement aux critères. Nous allons détailler, dans ce qui suit, les types d'interactions les plus rencontrées, à savoir, la corrélation, l'interchangeabilité, la complémentarité et enfin la dépendance préférentielle.

3.2.1 Corrélation

Soient x et y deux caractères quantitatifs mesurés sur m individus. Nous appelons coefficient de corrélation de x et y [ADM et al 04] la quantité :

$$r_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{s_x s_y} \text{ telles que } c_{x,y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \text{ et } s_x = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.1)$$

Où \bar{x} et \bar{y} désignent respectivement les moyennes empiriques de x et y . Il est donc clair que le coefficient de corrélation est un réel compris entre 1 et -1. Si des valeurs élevées de la variable x implique souvent des valeurs élevées de la variable y , la corrélation entre x et y est **positive**. De même, si les valeurs élevées de x entraînent souvent des valeurs basses de y , la corrélation est **négative**. Enfin, si le coefficient $r_{x,y}$ est nul ou proche de 0, cela signifie qu'aucune **relation linéaire** n'existe entre x et y [GHA 08].

Dans le cas de deux critères $i, j \in \mathbb{N}$, une corrélation positive entre i et j se traduit par une corrélation positive entre les performances partielles relatives à i et celles relatives à j . De même, i et j sont négativement corrélés s'il existe une corrélation négative entre leurs performances partielles respectives.

Exemple Considérons un problème d'évaluation d'étudiant par rapport à trois cours de mathématiques (représentant dans ce cas les critères), à savoir, statistique, probabilité et algèbre. Il est évident que les deux premiers cours sont corrélés du moment que les étudiants bons en statistique sont, d'habitude, également bon en probabilité et vice versa. De ce fait, les deux critères, statistique et probabilité présentent un certain degré de redondance [HAM 08].

Afin de mettre l'accent sur l'impact de cette redondance, supposons qu'une moyenne pondérée soit utilisée pour l'évaluation des étudiants. Supposons également que l'algèbre soit plus importante que les deux premières matières. Pour cela, le calcul se fera en utilisant les poids 0,25, 0,25, 0,5 pour les trois matières respectivement. Les deux premières matières sont positivement corrélées ce qui implique que l'évaluation globale d'un étudiant sera surestimée s'il est bon en statistique et/ou en probabilité (l'évaluation est sous-estimée s'il est mauvais dans le cas contraire).

Ainsi, il est important d'exprimer non seulement les poids des trois matières prise séparément mais aussi le poids de la paire (probabilité, statistiques). Aussi, le poids de la paire de critère doit être inférieur à la somme des poids des deux critères pris séparément. De manière générale, pour exprimer la corrélation entre deux critères i et j , la fonction de pondération f_p doit associer à la paire $\{i, j\}$ une valeur $f_p(\{i, j\})$ telle que :

$$\begin{cases} f_p(\{i, j\}) < f_p(i) + f_p(j) & \text{Corrélation positive entre } i \text{ et } j \\ f_p(\{i, j\}) > f_p(i) + f_p(j) & \text{Corrélation négative entre } i \text{ et } j \end{cases} \quad (3.2)$$

De ce fait, ces deux inégalités expriment que dans le cas d'une corrélation positive (respectivement négative) entre i et j , la contribution marginale de j à chaque combinaison de critères contenant i est strictement inférieure (respectivement supérieure) à la contribution marginale de j à cette même combinaison mais où i est exclu [GHA 08] [HAM 08]. Pour $T \subseteq N/ij$ nous avons :

$$\begin{cases} f_p(T \cup ij) - f_p(T \cup i) < f_p(T \cup j) - f_p(T) & \text{Corrélation positive entre } i \text{ et } j \\ f_p(T \cup ij) - f_p(T \cup i) > f_p(T \cup j) - f_p(T) & \text{Corrélation négative entre } i \text{ et } j \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.2 Interchangeabilité et complémentarité

Considérons deux critères $i, j \in \mathbb{N}$, et supposons que la satisfaction de l'un des deux produise presque le même effet que la satisfaction des deux en même temps.

Exemple Le choix de l'orientation d'un élève dépend des matières dans lesquelles il est bon, à savoir, scientifiques ou littéraires. Cependant, s'il est bon dans les deux directions, cela n'est que légèrement plus satisfaisant et n'a qu'un infime effet sur l'orientation de l'élève.

Ceci étant, les critères i et j sont dits substitutifs ou "**interchangeables**" car l'influence des deux en même temps n'est que peu conséquente par rapport à l'influence de l'un des deux. C'est ainsi que le critère i peut être substitué par j et vice-vers-ça. Dans cette situation la fonction de pondération f_p doit satisfaire la condition suivante :

$$f_p(T) < \left\{ \begin{array}{l} f_p(T \cup i) \\ f_p(T \cup j) \end{array} \right\} \approx f_p(T \cup ij) \quad / T \subseteq \mathbb{N}/ij \quad (3.4)$$

Dans le cas de l'égalité totale, les critères i et j peuvent être carrément confondus. Une situation alternative existe lorsque le décideur demande à ce que la satisfaction d'un seul critère produit très peu d'effet par rapport à la satisfaction des deux. Il s'agit dans ce cas d'une "**complémentarité**" modélisée grâce à la fonction de pondération f_p comme suit :

$$f_p(T) \approx \left\{ \begin{array}{l} f_p(T \cup i) \\ f_p(T \cup j) \end{array} \right\} < f_p(T \cup ij) \quad / T \subseteq \mathbb{N}/ij \quad (3.5)$$

Remarque Il est à noter que l'interchangeabilité et la complémentarité sont des phénomènes indétectables en observant la matrice de performances (contrairement à la corrélation). En effet, il s'agit uniquement de l'opinion du décideur au sujet de l'importance relative des critères sans tenir compte des performances des actions sur ces critères [GHA 08] [HAM 08].

3.2.3 Dépendance préférentielle

La dépendance préférentielle et son opposée, l'indépendance préférentielle sont des types d'interactions bien connues en théorie de l'utilité multi-attributs [BEN 00].

Supposons que les préférences du décideur sur A (l'ensemble des actions) soient connues et exprimées par un préordre complet \geq . Le sous-ensemble S de critères est dit "préférentiellement indépendant" de \mathbb{N}/S si $\forall x, x', y, z \in E^n$, où E est un intervalle réel, nous avons :

$$x S y \geq x' S y \Leftrightarrow x S z \geq x' S z \quad (3.6)$$

Où $x S y = \sum_{i \in S} x_i e_i + \sum_{i \in \mathbb{N}/S} y_i e_i$ et e_S vecteur caractéristique de S . L'ensemble de tout entier \mathbb{N} des critères est dit "**mutuellement préférentiellement indépendant**" si S est préférentiellement indépendant de \mathbb{N}/S pour chaque $S \subseteq \mathbb{N}$. Pour simplifier, la préférence de $x S y$ sur $x' S y$ n'est pas influencée par la partie commune y .

Exemple Afin d'éclaircir cette notion, prenons l'exemple [MAR 99] du choix entre plusieurs voitures évaluées par rapport à trois critères : le prix, la consommation et le confort. Supposons que l'acheteur (décideur) ne préfère le confort à la consommation que si le prix de la voiture est élevé. Dans le cas contraire, il préfère une voiture à faible consommation.

Ainsi, la préférence du décideur entre le confort et la consommation dépend du prix. Par conséquent, la paire "consommation-confort" est en dépendance préférentielle avec le prix. Le ta-

bleau (3.2) présente une concrétisation de l'exemple précédent avec quatre voitures et les performances de chaque voiture pour chacun des trois critères.

	Prix	Consommation	Confort
Voiture 1	1.250.000 DA	6 L/100 km	8/10
Voiture 2	1.250.000 DA	4,5 L/100 km	5,5/10
Voiture 3	2.500.000 DA	8 L/100 km	9,5/10
Voiture 4	2.500.000 DA	6 L/100 km	7,5/10

TAB. 3.1 – Exemple du choix d'une voiture

Les préférences du décideur dans cet exemple imposent qu'il préfère la voiture 2 à la voiture 1 et la voiture 3 à la voiture 4. A présent, utilisons une moyenne arithmétique pondérée avec w_1, w_2, w_3 les coefficients d'importance (poids) des critères prix, consommation et confort respectivement. Dans ce cas, nous allons vite se rendre compte des inégalités de la formule (3.7) et de la contradiction qu'elles engendrent.

$$f_p(T) \approx \begin{cases} \text{Voiture 2 meilleure que voiture 1} & \Rightarrow w_2 > w_3 \\ \text{Voiture 3 meilleure que voiture 4} & \Rightarrow w_3 > w_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Il est clair qu'une moyenne pondérée n'est pas capable de modéliser la dépendance préférentielle. Dans ce cas, les sous-ensembles de critères concernés par la dépendance préférentielle doivent être regroupés dans un critère formellement équivalent [MOU 99]. Par exemple, nous pouvons traiter la dépendance préférentielle entre le critère "consommation" et le critère "prix" en les regroupant dans un seul critère et en définissant les préférences sur ce critère comme suit :

$$(1.250.000; 4,5) \prec (1.250.000; 6) \prec (2.500.000; 8) \prec (2.500.000; 6)$$

D'autres stratégies consistent à utiliser des fonctions de pondération et des opérateurs d'agrégation capables de modéliser ce genre d'interactions entre les critères. A titre d'exemple, nous citons les bi-capacités et l'intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires que nous détaillerons dans les prochaines sections de ce chapitre.

3.3 Mesures floues et Intégrales floues

Les mesures floues permettent de modéliser les interactions entre les critères dans beaucoup de cas, sans tenir compte de la nature de l'interaction. Les mesures floues ont été introduites par Choquet en 1953 [CHO 53] et définies indépendamment par Sugeno en 1974

[SUG 74] afin de généraliser les mesures additives. En effet, la propriété d'additivité des fonctions mathématiques n'est pas toujours requise dans les situations réelles ce qui a induit à la remplacer par un concept plus faible : la croissance [GHA 08]. De ce fait, les mesures croissantes non additives ont été appelées "**mesures floues**".

3.3.1 Définition de la mesure floue

Une **mesure floue**, appelée également **capacité**, sur l'ensemble \mathbb{N} est une fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$, vérifiant les axiomes suivants :

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(N) = 1$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B), \forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de \mathbb{N} . En effet, $\mu(A)$ représente l'importance de la coalition A dans le problème d'agrégation en question, autrement dit, l'influence des critères appartenant à A sur la prise de décision. Ceci étant, le nombre de coefficients à définir est de $2^n - 2$ (vérifiant la contrainte de monotonie).

Deux cas particuliers des mesures floue s'affichent ; les mesures floues **additives** et les mesures floues **cardinales**. Une mesure floue μ est dite additive si pour tous sous-ensembles $S, T \subseteq \mathbb{N}$ tels que $S \cap T = \emptyset$:

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad (3.8)$$

Dans ce cas, la définition des n coefficients $\mu(1), \dots, \mu(n)$ permet de définir complètement la mesure floue. Si une mesure floue n'est pas additive, cela implique la présence d'interactions entre les critères.

Les mesures floues **cardinales** (symétrique) ne dépendent que de la cardinalité de l'ensemble. Cela se traduit par une égalité des résultats pour deux ensembles A et B si ces deux ensembles ont la même cardinalité.

$$|A| = |B| \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) \quad (3.9)$$

La définition des mesures floues peut être étendue à l'ensemble des parties floues de \mathbb{N} . Nous noterons l'ensemble des parties floues par $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$ et pour un ensemble flou A , f_A désignera sa fonction d'appartenance. Par conséquent, une mesure floue est désormais définie comme étant une fonction $\mu : \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$, vérifiant les axiomes suivants :

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(N) = 1$

$$2. \forall i \in \mathbb{N}, f_A(i) \leq f_B(i) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B), \forall A, B \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$$

Dans le cas d'une famille de critères $F = 1, 2, \dots, j, \dots, n$ où j est un critère donné, la mesure floue est définie de la même manière mentionnée ci-dessus sur $\mathcal{P}(F)$ et de manière étendue sur $\tilde{\mathcal{P}}(F)$.

3.3.2 Utilisation des mesures floues

Les modèles de préférences basés sur les mesures floues (capacités) sont assez riches par rapport à ceux basés sur la somme pondérée [GRA et al 02b]. Cependant, le nombre de paramètres à déterminer sur toutes les parties de F (sauf \emptyset et F lui-même) est de $2^n - 2$ (n étant le nombre de critères) ce qui s'avère, plus ou moins, un grand désavantage. A ce titre, il est intéressant de chercher une manière d'interpréter la mesure floue μ dans le but de simplifier sa détermination.

Tout d'abord, il est important de comprendre ce que signifie l'importance d'un critère j dans un modèle de préférence issu d'un processus d'agrégation. En réalité, cette importance dépend de l'opérateur d'agrégation choisi et de l'échelle de mesure associée au critère. Ainsi, avant de déterminer la relation entre les mesures floues et l'importance des critères, il est nécessaire de définir ce qu'est une échelle de mesure et plus particulièrement une échelle unipolaire.

En effet, l'acte de mesurer une grandeur et plus particulièrement la notion d'échelle sont définies rigoureusement grâce à la théorie du mesurage [KRA et al 71] [ROB 79]. Une "**échelle de mesure numérique**" est un homomorphisme u d'un ensemble d'objet muni d'une relation binaire (A, \gg) dans (\mathbb{R}, \geq) . Il est à noter que la fonction $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite "fonction d'utilité".

3.3.2.1 Échelles unipolaires

Une échelle "**unipolaire**" est une échelle u dont le domaine image est \mathbb{R}^+ . En général, une échelle unipolaire est caractérisée par un plus petit élément a défini tel que $\forall b \in A : b \gg a$. L'élément a est généralement noté **0** et nous avons $u(a) = 0$ [GRA 04].

Une échelle unipolaire a un plus grand élément si $\exists a' \in A, \forall b \in A : a' \gg b$. Dans ce cas, l'échelle est dite "**bornée**". Le plus grand élément d'une échelle u est noté **1**. Une échelle est bornée si elle admet un plus petit élément et un plus grand élément [GRA 04].

Par exemple, dans une problématique de tri, la relation "*appartient plus à la catégorie C que*" est une échelle unipolaire qui admet un plus petit élément que nous pouvons définir par "*hors de la catégorie C*".

Remarque Le plus grand élément d'une échelle unipolaire **1** est parfois appelé "**niveau satisfaisant**". Le niveau satisfaisant est utilisé dans la méthode MACBETH [BAN et al 94] afin

d'assurer la commensurabilité des échelles. Dans MACBETH, "le niveau satisfaisant est considéré comme bon et tout à fait acceptable si le décideur pouvait l'obtenir ; même si des éléments plus attractifs peuvent exister" [BAN et al 94].

Pour un critère quelconque j muni d'une échelle de mesure u_j caractérisée par un plus petit élément $\mathbf{0}_j$ et un plus grand élément $\mathbf{1}_j$, nous avons $u_j(\mathbf{0}_j) = 0$ et $u_j(\mathbf{1}_j) = 1$.

3.3.2.2 Échelles unipolaires et mesures floues

Comme nous l'avons déjà définie, une mesure floue μ définie sur $\mathcal{P}(F)$ attribut à chaque coalition de critères $A \subseteq F$ une valeur réelle $\mu(A)$. Il est possible de définir la valeur $\mu(A)$ comme étant le score attribué à une alternative fictive dite "**alternative binaire**" et notée $(\mathbf{1}_A, \mathbf{0}_{A^c})$. Cette notation signifie que l'alternative vaut $\mathbf{1}_j$ pour les critères $j \in A$ et $\mathbf{0}_j$ sinon. $\mathbf{1}_j$ et $\mathbf{0}_j$ sont respectivement le plus grand et le plus petit élément de l'échelle u associée au critère j .

Cette notation signifie également que l'alternative satisfait uniquement les critères appartenant à la coalition A . En quelque sorte, le score qu'obtiendrait cette alternative suite aux calculs d'agrégation n'est autre que l'importance de la coalition A . De manière générale, si ψ est la fonction d'agrégation alors nous avons $\mu(A) = \psi(\mathbf{1}_A, \mathbf{0}_{A^c})$.

3.3.2.3 L'indice d'importance globale

Afin de déterminer l'importance d'un critère de manière plus exacte, il est judicieux d'introduire la notion d'indice de pouvoir ou de valeur utilisée dans le domaine de la théorie des jeux. Cela se fait en considérant les critères comme des joueurs dans un jeu coopératif, idée donnée pour la première fois par Murofushi [MUR 92].

Il s'agit donc de voir la famille de critères $F = 1, \dots, n$ comme des joueurs et $\mu(F)$ comme un gain à partager entre les joueurs de manière équitable selon leur mérite. Cela implique la définition d'une fonction $\phi_\mu : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sum_j \phi_\mu(j) = \mu(F)$. Cette fonction est dite "**valeur de μ** " et sa valeur doit respecter les axiomes proposés par Shapley [SHA 53] à savoir :

- **Partage** : $\sum_j \phi_\mu(j) = \mu(F)$
- **Équité** : ϕ ne dépend pas de la façon avec laquelle la famille de critères a été établie.
- **Contribution nulle** : Si la contribution d'un critère j à toute coalition A est nulle ($\forall A \subset F, \mu(A \cup j) = \mu(A)$) alors $\phi_\mu(j) = 0$.
- **Linéarité** : ϕ_μ est une fonction linéaire de μ , autrement dit, $\phi_{\alpha\mu + \beta\mu'} = \alpha\phi_\mu + \beta\phi_{\mu'}$

Shapley a également montré [SHA 53] qu'il existe une unique fonction ϕ_μ vérifiant ces quatre axiomes appelés valeur de Shapley :

$$\phi_\mu = \sum_{K \subseteq F/\{i\}} \frac{(n - |K| - 1)!k!}{n!} (\mu(K \cup \{i\}) - \mu(K)) \quad (3.10)$$

Cette formule permet d'exprimer l'importance globale d'un critère j par rapport à une capacité (mesure floue) μ .

Si $\mu(\{j\})$ représente l'importance du critère j à lui seul, $\phi_\mu(j)$ représente l'importance globale de j en tenant compte de sa contribution dans toutes les coalitions appartenant à $\mathcal{P}(F)$. Dans le domaine de l'agrégation multicritères, $\phi_\mu(j)$ est appelé l'**indice d'importance globale** du critère j .

3.3.2.4 L'indice d'interaction entre les critères

L'indice d'importance globale d'un critère j considère la contribution de j dans les différentes coalitions de critères mais ne permet pas de décrire suffisamment les différentes situations de décision que modélise une mesure floue [GRA et al 02b]. Dans ce cas, les interactions entre les critères sont quantifiées de manière plus précise grâce à l'indice d'interaction I_μ .

De manière générale, les importances individuelles de deux critères i, j ne s'accumulent pas forcément pour former l'importance de la coalition $\{i, j\}$. Cela est justifié par l'existence d'interactions entre les deux critères i, j .

Prenons comme exemple une famille réduite à deux critères seulement $F = 1, 2$ et une mesure floue μ exprimant l'importance des critères de F . Soient les quatre situations de préférences suivantes :

- S_1 : Les critères 1 et 2 ne sont pas satisfaits.
- S_2 : Le critère 1 est satisfait et 2 ne l'est pas.
- S_3 : Le critère 2 est satisfait et 1 ne l'est pas.
- S_4 : Les deux critères 1 et 2 sont satisfaits.

Il est clair que la situation S_4 est meilleure que S_1 ($S_4 \prec S_1$) mais la préférence entre S_2 et S_3 est à débattre. En effet, deux cas extrêmes peuvent être dégagés :

- **Cas 1** : lorsque $\mu(1) = \mu(2) = 0$, sachant que $\mu(\emptyset) = 0$ par définition de μ , une indifférence existe entre S_1, S_2 et S_3 ($S_1 \sim S_2 \sim S_3$). Dans ce cas, le décideur n'est satisfait que par la satisfaction des deux critères en même temps et la satisfaction de l'un des deux est insuffisante, voire sans importance. Les critères sont donc appelés "**complémentaires**". Nous parlons aussi de "**synergie positive**" entre les critères.
- **Cas 2** : lorsque $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1$ sachant que $\mu(F) = 1$ par définition de μ , une indifférence existe entre S_2, S_3 et S_4 ($S_2 \sim S_3 \sim S_4$). Dans ce cas, le décideur est satisfait par la

satisfaction de l'un des deux critères et la satisfaction des deux en même temps n'est pas nécessaire. Les critères sont donc dits "**substitutifs**". Ce phénomène est également appelé "**redondance**" ou "**synergie négative**".

De ce fait, dans ces deux situations, les critères 1 et 2 ne sont pas indépendants du moment que la satisfaction de l'un des deux a une influence sur l'utilité de l'autre pour obtenir la satisfaction du décideur (nécessaire dans le premier cas, inutile dans le second) [GRA et al 02b]. Il s'agit donc d'une "*interaction entre les critères*".

De manière générale, pour deux critères i, j et une mesure floue μ sur la famille F , si i, j sont complémentaires (Cas 1), cela se traduit par $\mu(\{i, j\}) > \mu(\{i\}) + \mu(\{j\})$. Dans le cas où i, j sont substitutifs (Cas 2), nous avons $\mu(\{i, j\}) < \mu(\{i\}) + \mu(\{j\})$. L'égalité parfaite est un signe d'indépendance des critères i, j , autrement dit, l'absence d'interactions entre i et j .

Ceci dit, lorsqu'il y a une interaction entre les critères, la différence entre l'importance de la coalition et les importances des critères pris séparément est une quantité non nulle positive ou négative. Cette quantité est appelée l'indice d'interaction entre critères et notée I . Dans l'exemple précédent $I_\mu(1, 2) = \mu(\{1, 2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) + \mu(\emptyset)$.

Dans le cas de plusieurs critères, la définition de l'indice d'interaction est similaire à celle de l'indice d'importance globale (indice d'importance de Shapley), c'est-à-dire que toutes les coalitions de F doivent être prises en compte [GRA et al 02b]. Murofushi et Soneda [MUR et al 93] ont proposé la définition suivante pour une paire de critères i, j :

$$I_\mu(\{i, j\}) = \sum_{K \subseteq F/\{i, j\}} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} [\mu(K \cup \{i, j\}) - \mu(K \cup \{i\}) - \mu(K \cup \{j\}) + \mu(K)] \quad (3.11)$$

L'indice μ est omis s'il n'y a pas d'ambiguïté dans les calculs. Ainsi, l'indice $I_\mu(i, j)$ est noté I_{ij} et il est positif si i, j sont complémentaires, négatif, s'ils sont substitutifs et nul si i, j sont indépendants. La définition de l'indice I_μ a été étendue par Grabisch au cas général de toute coalition $A \subseteq F$ [GRA 97] :

$$I_\mu(\{i, j\}) = \sum_{K \subseteq F/A} \frac{(n-k-|A|)!k!}{(n-|A|+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{|A|-|L|} \mu(K \cup L) \quad (3.12)$$

Pour un critère j , nous remarquons que $I_\mu(\{j\}) = \phi_\mu(j)$ ce qui amène à appeler parfois I_μ l'indice d'interaction de Shapley. Il est à noter que quand la mesure floue est additive, nous avons $I_\mu(A) = 0$ pour toute coalition A telle que $|A| > 1$.

3.3.3 Mesures floues k-additives

En se basant sur la définition de l'indice d'interactions entre les critères, une mesure floue μ est dite "**k-additive**" si et seulement si [GRA 97] :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{P}(F) : |A| > k \Rightarrow I_\mu(A) = 0 \\ \exists B \in \mathcal{P}(F) : |B| \leq k \wedge I_\mu(B) \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour le cas de $k = 1$ la capacité μ est dite "**1-additive**", autrement dit, une capacité "**additive**" au sens usuel, c'est-à-dire que $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(\{i\})$, $\forall A \subset F$. Ce genre de capacité ne représente aucune interaction entre les critères puisque seuls les indices $I_\mu(\{i\})$ (indice d'importance du critère " i ") sont non nuls.

Nous nous intéressons, dans le contexte de la présente étude, aux capacités "**2-additives**" qui représentent, naturellement, les interactions entre les paires de critères. Une mesure floue "2-additive" nécessite seulement $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ paramètres pour être entièrement déterminée [GRA et al 02b].

3.3.4 Intégrales floues

Le principe de l'intégrale floue a été proposé par Sugeno [SUG 74] et représente en quelque sorte, une extension de celui de l'intégrale de Lebesgue. Deux grands types d'intégrales floues existent : L'intégrale de Sugeno et celle de Choquet. Pour une mesure floue μ définie sur \mathbb{N} , l'intégrale de Sugeno [SUG 74] de $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ par rapport à μ est définie par la formule (3.14) avec $a_{(1)} \leq \dots \leq a_{(n)}$.

$$S_\mu(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1}^n \left(a_{(i)} \wedge \mu(\{(i), \dots, (n)\}) \right) \quad (3.14)$$

Il est à noter que les intégrales de Sugeno et Choquet sont idempotentes, continues et monotones et l'intégrale de Choquet est particulièrement stable pour le changement d'échelle linéaire.

3.4 Intégrale de Choquet

De la même manière que l'intégrale de Sugeno, si μ est une capacité (mesure floue) sur l'ensemble des critères F , l'intégrale de Choquet de $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]$ par rapport à μ est définie par la formule (3.15).

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(x_{(i)} - x_{(i-1)} \mu(\{(i), \dots, (n)\}) \right) \quad (3.15)$$

Où $x_{(0)} = 0$ et (\cdot) indique une notation qui signifie une permutation d'indices tel que $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Dans le cas d'une capacité 2-additive, l'intégrale de Choquet de X avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ peut être exprimée uniquement en fonction des indices d'interaction pour les paires de critères I_{ij} et les indices d'importance des critères $\phi(i)$ comme suit [GRA et al 02a] [GRA 04] :

$$C_\mu(X) = \sum_{I_{ij}>0} (x_i \wedge x_j) I_{ij} + \sum_{I_{ij}<0} (x_i \vee x_j) |I_{ij}| + \sum_{i=1}^n x_i \left(\phi(i) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |I_{ij}| \right) \quad (3.16)$$

L'intégrale de Choquet de $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n$ (plus particulièrement à $[0, 1]^n$) peut être également exprimée en fonction des indices d'interactions pour les paires de critères I_{ij} et les indices d'importance des critères $\phi(i)$ selon la formule (3.17) [MAY et al 08].

$$C_\mu(X) = \sum_{i=1}^n \phi(i) x_i - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \subseteq \mathbb{N}} I_{ij} |x_i - x_j| \quad (3.17)$$

Avec $\left(\phi(i) - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \subseteq \mathbb{N}} I_{ij} \right) \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}, j \neq i$. L'intégrale est appelée "**intégrale de Choquet 2-additive**". Pour le cas particulier où $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in 0, 1$ la formule (3.18) est une simplification de (3.17).

$$C_\mu(X) = \sum_{x_i=1} \phi(i) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq \mathbb{N} \\ x_i=1 \\ x_j=0}} I_{ij} = \sum_{x_i=1} \mu(\{i\}) + \sum_{\{i,j\} \subseteq F_{(1)}} I_{ij} = \mu(F_{(1)}) \quad (3.18)$$

Où $F_{(1)} = \{i \in F / x_i = 1\}$. Dans ce cas, l'intégrale de Choquet n'est autre que la somme des capacités individuelles des critères i tel que $x_i = 1$ à laquelle on ajoute la somme des interactions entre toutes les paires de critères possibles $(i, j) \in F_{(1)}, i \neq j$. Pour des détails approfondis sur les capacités et l'intégrale de Choquet, nous orientons le lecteur vers [CHO 53], [GRA et al 92], [GRA et al 95] [GRA 97] [GRA et al 02b].

3.5 Modèles bipolaires

Les mesures floues définies dans les sections précédentes permettent de modéliser les préférences du décideur de manière souple et flexible et s'adaptent à des attitudes de décision très variées [GRA et al 02b] [GRA 04]. Cependant, certaines situations de préférence peuvent s'avérer délicates à modéliser par une simple mesure floue. Afin d'éclaircir cela, prenons l'exemple suivant où le décideur exprime ses préférences sous forme de règles [GRA et al 02c]. Il s'agit de l'évaluation des étudiants par rapport à trois matières, à savoir, Les mathématiques

(M), les statistiques (S) et les langues (L). Le directeur de la faculté exprime les deux règles suivantes pour l'évaluation des étudiants :

- **R1** : Pour un étudiant bon en mathématiques, les langues sont plus importantes que les statistiques
- **R2** : Pour un étudiant mauvais en mathématiques, les statistiques sont plus importantes que les langues

Ces règles sont justifiées par le fait que la faculté, étant de nature scientifique, n'accepte pas des étudiants faibles dans les deux matières scientifiques et désire, dans la mesure du possible, des étudiants également bons en langues. Considérons désormais les quatre étudiants A, B, C et D avec les notes suivantes :

	Mathématiques (M)	Statistiques (S)	Langues (L)
Étudiant A	14	16	7
Étudiant B	14	15	8
Étudiant C	9	16	7
Étudiant D	9	15	8

TAB. 3.2 – Exemple d'évaluation des étudiants

D'après la règle (R1), l'étudiant B est préféré à A ($A \succ B$) et d'après la règle (R2) l'étudiant C est préféré à l'étudiant D ($C \prec D$). La modélisation de ces préférences en utilisant une mesure floue μ implique les inégalités suivantes menant clairement à une contradiction.

$$\begin{cases} \text{Règle } R_1 \Rightarrow \mu(\{L\}) > \mu(\{S\}) \\ \text{Règle } R_2 \Rightarrow \mu(\{L\}) < \mu(\{S\}) \end{cases} \quad (3.19)$$

De ce fait, il est impossible de modéliser les préférences du décideur en utilisant une mesure floue ce qui implique qu'une intégrale de Choquet classique n'est pas en mesure d'agrèger les performances tout en respectant ce genre de préférences du décideur. En réalité, les critères de l'exemple précédent (matières) sont interactifs dans le sens où la paire "statistiques - langues" dépend du critère "mathématiques". Il s'agit donc d'une dépendance préférentielle (section 3.2.3).

En effet, l'interprétation d'une note d'un étudiant impose le 10 comme la limite entre les bonnes et les mauvaises notes. Ainsi, il existe un niveau frontière, appelé également niveau neutre, ce qui fait que l'échelle de notation [0,20] est une échelle "**bipolaire**" [GRA et al 02b] [GRA 04].

3.5.1 Échelles bipolaires

En psychologie, les auteurs dans [SLO et al 02] ont montré que la façon humaine de juger, évaluer et prendre des décisions est guidée par l'affect. Ce concept désigne la qualité spécifique de "bon" ou "mauvais" telle qu'elle est ressentie consciemment ou non, et délimitant des zones de stimuli de qualité positive et négative [GRA 04].

L'affect est construit sur deux pôles opposés (bon/mauvais, positif/négatif). Il a donc un caractère bipolaire d'une importance capitale dans l'acte de décision. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir le représenter convenablement. Dans cette optique, l'utilisation d'une échelle bipolaire (un seul axe allant du négatif au positif) est très répandue [OSG et al 57]. D'autres idées ont été proposées telle que celle de Cacioppo et ses collaborateurs [CAC et al 97] basée sur l'utilisation de deux échelles unipolaires, une pour la partie positive et l'autre pour la partie négative.

Une échelle bipolaire est une échelle dont le domaine image est \mathbb{R} . Elle est caractérisée par un élément e appelé "**niveau neutre**". Le niveau neutre possède la propriété suivante :

$$\forall a \in A : \begin{cases} a \prec e \Rightarrow a \text{ est jugé "bon"} \\ a \succ e \Rightarrow a \text{ est jugé "mauvais"} \end{cases} \quad (3.20)$$

L'évaluation de l'élément e pour l'échelle u est posée, par commodité, $u(e) = 0$ et donc :

$$\forall a \in A : \begin{cases} a \prec e \Rightarrow u(a) > 0 \\ a \succ e \Rightarrow u(a) < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Le niveau neutre existe dès lors que la relation de comparaison \succeq corresponde à deux notions appariées et opposées liées à un affect [GRA 04]. Plusieurs exemples de relations basées sur des échelles bipolaires existent. Parmi ces relations, nous pouvons citer "meilleur que", "plus attractif que", "aimer plus que", etc. Pour la dernière relation, les deux niveaux opposés sont "aimer/ détester" et il est clair que des objets qui ne sont ni "aimés" ni "détestés" peuvent exister ; c'est bel et bien le niveau neutre.

Tout comme une échelle unipolaire, une échelle bipolaire peut être bornée et donc admettre un plus petit et un plus grand élément. Pour une échelle bipolaire u , le plus petit élément est noté -1 (au lieu de 0), le plus grand élément est noté 1 et l'élément neutre est noté 0 .

3.5.2 Échelles bipolaires et bi-capacités

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, une échelle bipolaire est caractérisée par un niveau neutre 0 , un niveau satisfaisant 1 et un troisième niveau -1 symétrique au niveau satisfaisant. Pour des raisons de simplification, nous appellerons -1 le "**niveau décevant**". La modélisation

d'une échelle bipolaire nécessite l'utilisation d'alternatives ternaires au lieu des alternatives binaires (échelles unipolaires). Pour deux coalitions $A, B \subseteq F, A \cap B = \emptyset$, une alternative ternaire est notée $(1_A, -1_B, 0_{(A \cup B)^c})$. Cette notation signifie que l'alternative est satisfaisante pour les critères appartenant à A , décevante pour les critères appartenant à B et neutre pour le reste des critères.

De manière générale, $\mathcal{Q}(F)$ note l'ensemble $\mathcal{Q}(F) = (A, B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) / A \cap B = \emptyset$. En donnant un score à chaque alternative ternaire, nous obtenons la fonction $v : \mathcal{Q}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ appelée "**bi-capacité**".

3.6 Bi-capacités et Intégrale de Choquet

L'intégrale de Choquet associée à une simple capacité 2-additive est utilisée pour agréger des valeurs mesurées sur une échelle unipolaire souvent bornée par une valeur maximale (notée **1**) et une valeur minimale (notée **0**). Cependant, certaines situations imposent l'agrégation de valeurs appartenant à une échelle appelée "**bipolaire**" basée sur une valeur positive, une valeur négative et une valeur neutre.

En effet, l'intégrale de Choquet déjà définie est insensible au changement d'échelle de différence ce qui implique qu'aucun point ne peut jouer un rôle particulier [GRA 04]. Par conséquent, il est nécessaire de définir une généralisation de l'intégrale de Choquet pour les échelles bipolaires en l'associant à une bi-capacité plutôt qu'à une mesure floue ordinaire [GRA 04].

3.6.1 Définition d'une bi-capacité

Une bi-capacité est une fonction $v : \mathcal{Q}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\begin{cases} v(\emptyset, \emptyset) = 0 \\ A \subseteq B \Rightarrow (v(A, \cdot) \leq v(B, \cdot)) \wedge (v(\cdot, A) \geq v(\cdot, B)) \end{cases} \quad (3.22)$$

De plus, une bi-capacité est dite "**normalisée**" si $v(F, \emptyset) = 1 = -v(\emptyset, F)$ et elle est de type CPT (Cumulative Prospect Theory) [TVE et al 92] si elle s'écrit sous la forme $v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B)$ où μ^+ et μ^- sont des capacités ordinaires. Si $\mu^+ = \mu^-$, la bi-capacité est dite "**symétrique**".

En revenant à l'exemple de la section 3.5, nous pouvons désormais représenter les préférences du décideur au sujet des étudiants A, B, C et D en utilisant une bi-capacité v au lieu d'une mesure floue ordinaire. Nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} v(\{M, L\}, \{S\}) > v(\{M, S\}, \{L\}) \\ v(\{S\}, \{M\}) > v(\{L\}, \{M\}) \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour de plus amples détails sur les bi-capacités, nous orientons le lecteur vers [GRA et al 02b] [GRA 04].

3.6.2 Intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires

L'intégrale de Choquet de $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ pour une bi-capacité v est définie par la formule suivante [GRA 04] :

$$\mathcal{C}_v(X) = \mathcal{C}_{\mu_{N^+}}(|X|) \quad (3.24)$$

Où μ_{N^+} est une fonction sur $\mathcal{P}(F)$ définie par :

$$\mu_{N^+}(A) = v(A \cap F^+, A \cap F^-) \text{ et } F^+ = \{i \in F / x_i \geq 0\}, F^- = F / F^+ \quad (3.25)$$

De plus, si la bi-capacité v est de type CPT avec $v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B)$, on obtient :

$$\mathcal{C}_v(X) = \mathcal{C}_{\mu^+}(X^+) - \mathcal{C}_{\mu^-} \quad (3.26)$$

Avec $X^+ = X \vee 0$ et $X^- = (-X)^+$. Enfin, si la bi-capacité est symétrique on obtient $\mu^+ = \mu^- = \mu$. Il est donc clair que dans ce dernier cas, il suffit de déterminer la capacité ordinaire μ pour en déduire la bi-capacité v . Pour des détails supplémentaires sur la généralisation de l'intégrale de Choquet pour les échelles bipolaires, nous orientons le lecteur vers [GRA et al 02b] [GRA 04].

3.7 Travaux connexes

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté quelques travaux se rapportant au le domaine de l'aide à la décision multicritères. Dans ce qui suit, nous exposons, sans prétendre à l'exhaustivité, les principaux travaux de recherche ayant utilisé des mesures floues et des intégrales floues dans le contexte de l'aide à la décision multicritères (tableau 3.3).

Auteurs	Travail	Références
T. MUROFUSHI M. SUGENO	Utilisation des modèles de l'intégrale de Choquet et des concepts d'indépendance dans la théorie de l'utilité multi-attributs.	[MUR et al 00]
M. GRABISCH M. ROUBENS	Proposition d'une approche pour l'application des intégrales de Choquet dans une prise de décision multicritères.	[GRA et al 00b]
M. GRABISCH C. LABREUCH	Etude de l'apport des bi-capacités dans la prise de décision et présentation d'une généralisation des intégrales de Choquet pour la manipulation des échelles bipolaires.	[GRA et al 02b] [LAB et al 03] [LAB et al 06]
Y. NARUKAWA T. MUROFUSHI	Proposition d'une approche de modélisation de la décision en utilisant l'intégrale de Choquet.	[NAR et al 04]
D. LIGINLAL T.T. OW	Modélisation de l'attitude de risque dans le processus humain de décision en utilisant les mesures floues.	[LIG et al 06]
P. MEYER M. ROUBENS	Utilisation de l'intégrale de Choquet avec les nombres flous dans l'aide à la décision multicritères.	[MEY et al 06]
M.R. GHALEM D. HAMDADOU	Utilisation des mesures floues et de l'intégrale de Choquet dans une procédure de tri ordinal pour la représentation des interactions entre les critères.	[HAM et al 07] [GHA 08]
Y. NARUKAWA T. MUROFUSHI	Utilisation de l'intégrale de Choquet-Stieltjes telle qu'un outil pour la modélisation de la décision.	[NAR et al 08]
D. HAMDADOU	Proposition d'une approche multicritères basées sur les mesures floues pour la représentation des interactions entre les critères.	[HAM 08]
F. LANGE M. GRABISCH	Proposition de nouvelles approximations de l'indice d'interaction de Shapley pour les bi-capacités.	[LAN et al 11]
Y. NARUKAWA	Généralisation de la somme pondérée ordonnée (OWA) en utilisant l'intégrale de Choquet.	[NAR 12]
B. MAYAG M. GRABISCH C. LABREUCHE	Caractérisation de l'intégrale de Choquet 2-additive en se basant sur l'information ordinale fournie par le décideur.	[MAY et al 15]

TAB. 3.3 – Récapitulatif des travaux ayant utilisé les mesures floues et les intégrales floues dans le domaine de l'aide à la décision multicritères

3.8 Conclusion

Les interactions entre les critères sont un phénomène inévitable dans beaucoup de problèmes d'aide multicritères à la décision. En effet, les critères ne sont pas toujours indépendants car les points de vue qu'ils modélisent sont liés. Ces interactions sont de différents types tels que la corrélation, l'interchangeabilité, la complémentarité et la dépendance préférentielle.

Toutefois, plusieurs des opérateurs d'agrégation ne sont pas capables de modéliser les dépendances entre les critères à cause de l'utilisation de simples coefficients de pondérations représentant l'importance de chaque critère à part. Ainsi, pour remédier à ce problème, il est nécessaire de considérer, non seulement, l'importance des critères pris séparément mais aussi l'importance des sous-ensembles de critères afin d'exprimer l'influence des coalitions de critères sur la décision finale.

Dans ce genre de situation, les relations mathématiques reliant les coefficients de pondération des critères et des sous-ensembles de critères ne sont pas de nature additive. Ces relations non-additives permettent de modéliser les différents types de dépendances entre les critères.

Nous avons montré, dans le présent chapitre, que les mesures floues (capacités) sont un très bon exemple de fonctions de pondération permettant de modéliser les interactions entre les critères. Les mesures floues sont souvent associées aux intégrales floues et plus particulièrement à l'intégrale de Choquet.

Le chapitre suivant présente en détail les concepts théoriques de notre approche et le chapitre 5 illustre les expérimentations réalisées sur plusieurs échantillons de données.

Deuxième partie

Contribution de la thèse

Chapitre 4

Approche d'analyse multicritères proposée

Dans ce chapitre nous présentons, en détails, notre approche proposée se traduisant par la méthode d'analyse multicritères AMFI. Nous mettrons l'accent sur le principe de cette méthode ainsi que sa démarche d'utilisation. La méthode AMFI procédant en trois grandes phases, nous détaillerons chacune de ces phases à travers des formules, des algorithmes et des schémas. Aussi, nous situerons la méthode AMFI dans la littérature et nous exposerons ses apports et ses limites.

Plan

4.1	Introduction	70
4.2	Présentation de la méthode AMFI	71
4.3	Principe de la méthode AMFI	71
4.3.1	Phase de comparaison	71
4.3.2	Phase d'agrégation	72
4.3.3	Phase d'exploitation	81
4.3.4	Récapitulatif des concepts d'AMFI	84
4.3.5	Paramètres subjectifs d'AMFI	86
4.4	Récapitulatif des variables de la méthode AMFI	87
4.5	Démarche globale de la méthode AMFI	87
4.6	Situation dans la littérature, apports et limites	89
4.6.1	Apports de la méthode AMFI	90
4.6.2	Limites de la méthode AMFI	92
4.7	Conclusion	92

Chapitre 4

Approche d'analyse multicritères proposée

4.1 Introduction

Toute méthode d'analyse multicritères est constituée d'une suite d'étapes fortement reliées entre elles. De ce fait, l'optimisation des résultats de la méthode revient à effectuer une étude approfondie des étapes la constituant. Cette étude permet, essentiellement, d'évaluer la possibilité d'améliorer le fonctionnement et les résultats obtenus de la méthode en utilisant différents algorithmes, techniques, et théories.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à deux aspects des plus importants, à savoir, l'agrégation multicritères et la modélisation des interactions entre les critères. D'une part, l'approche d'agrégation adoptée doit être bien adaptée à la problématique multicritères choisie afin de garantir à la fois la cohérence et la précision des résultats. D'autre part, plusieurs techniques ont été proposées pour la représentation des interactions entre les critères parmi lesquelles, les mesures floues et les intégrales floues. Les intégrales floues sont des opérateurs souvent associés à des approches d'agrégation totale. Ainsi, il serait intéressant d'employer les intégrales floues dans une procédure d'agrégation partielle.

Dans cette optique, nous présentons, dans ce qui suit, notre approche d'agrégation multicritères basée sur l'utilisation de l'intégrale de Choquet. Cette approche est concrétisée par une nouvelle méthode d'analyse multicritères **AMFI** (**A**ggregation **M**ethod by **F**uzzy **I**ntegrals). **AMFI** est une méthode d'analyse multicritères pour le traitement de la problématique décisionnelle de rangement procédant par agrégation partielle des préférences. Pour cela, **AMFI** utilise une intégrale floue, à savoir, l'intégrale de Choquet généralisée pour les échelles bipolaires et associée à une bi-capacité [CHO 53] [GRA 97] [GRA et al 00a] [GRA 04] [GRA et al 02b].

4.2 Présentation de la méthode AMFI

AMFI est une méthode d'agrégation multicritères partielle se situant dans la catégorie "Comparer puis Agréger". De ce fait, nous utilisons les intégrales floues dans AMFI pour agréger les préférences partielles $Comp_j(g_j(a), g_j(b))$ obtenues en comparant les actions deux à deux au lieu d'agréger directement les performances des actions pour les différents critères. Les valeurs à agréger, obtenues suite aux comparaisons des actions deux à deux, sont représentées sur une échelle bipolaire symétrique appartenant à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

Afin d'atteindre cet objectif, nous avons utilisé l'intégrale de Choquet généralisée pour les échelles bipolaire en s'appuyant sur une bi-capacité v de type CPT (Cumulative Prospect Theory) symétrique (Chapitre 3) construite selon la formule $v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B)$, $\forall A, B \subset F$ où μ^+ et μ^- sont des mesures floues 2-additives ordinaires et $\mu^+ = \mu^-$.

Ainsi, grâce à l'intégrale de Choquet généralisée pour les échelles bipolaires et associée à une bi-capacité, nous pouvons représenter l'interaction entre les critères qui est une notion négligée dans beaucoup de méthodes appliquant la comparaison puis l'agrégation.

4.3 Principe de la méthode AMFI

La méthode AMFI procède en trois grandes phases : *la comparaison, l'agrégation et l'exploitation*. Partant d'une matrice de performances, AMFI compare les actions deux à deux puis agrège les préférences obtenues, ensuite procède à l'exploitation des valeurs résultantes pour aboutir à un préordre total afin de ranger les actions de la meilleure à la moins bonne. Nous présentons dans ce qui suit chacune de ces trois phases [ALN et al 15].

4.3.1 Phase de comparaison

La comparaison entre les actions est réalisée deux-à-deux en se basant sur une fonction de comparaison $Comp_j$ (formule 4.1) pour chaque critère¹ $j = 1..n$ où n désigne le nombre de critères.

$$Comp_j(g_j(a), g_j(b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a) - g_j(b) > p_j(a, b) \\ 0 & \text{si } |g_j(a) - g_j(b)| \leq p_j(a, b) \\ -1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) < p_j(a, b) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où " j " est un critère à maximiser², $p_j(a, b) = p_j(b, a)$ est le seuil de discrimination pour la paire d'actions (a, b) et $g_j(a)$ et $g_j(b)$ sont respectivement les évaluations des actions " a " et " b " pour le

¹Pour des raisons de simplification, on note la famille de critères par $F = \{1, 2, 3, \dots, i, \dots, j, \dots, n\}$

²Si le critère j est à minimiser, la formule (4.1) est adaptée à la nouvelle situation sans modifier sa sémantique

critère "j". La fonction $Comp_j$ génère donc pour le critère "j" une préférence partielle stricte est nette ou une indifférence approximative.

Les éventuelles préférences faibles ne sont pas représentées à ce niveau, mais seront accumulées pour apparaître dans la phase d'exploitation grâce à des seuils que nous détaillerons dans les prochaines sections. Pour des raisons de simplification, nous considérons que pour la paire d'actions (a, b) , la notation $Comp_j(a, b)$ est équivalente à $Comp_j(g_j(a), g_j(b))$. De ce fait, si "m" est le nombre d'actions, il faut déterminer pour chaque paire d'actions (a, b) le seuil de discrimination $p_j(a, b)$. Cela revient à déterminer $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités positives. Pour toute paire d'actions (a, b) , les résultats des comparaisons pour chaque critère sont regroupés dans un vecteur $Comp(b, a)$ tel que :

$$Comp(a, b) = (Comp_1(a, b), Comp_2(a, b), \dots, Comp_n(a, b)) \quad (4.2)$$

4.3.1.1 Estimation de la complexité

Le calcul du vecteur $Comp(a, b)$ est formalisé par l'algorithme présenté dans l'annexe A. Pour chaque paire d'actions, l'algorithme effectue "n" opérations sachant que pour "m" actions, nous avons $\frac{m(m-1)}{2}$ paires d'actions possibles (une action n'est pas comparée à elle-même, dans ce cas, le résultat de la comparaison est nul). Par conséquent, la complexité de l'algorithme pour le calcul des comparaisons est de $\mathbf{O}(n.m^2)$.

4.3.1.2 Résultat de la phase de comparaison

A la fin de cette phase, nous obtenons pour chaque paire d'actions (a, b) , un vecteur de comparaison de "n" éléments représentant chacun le résultat de la comparaison entre les deux actions "a" et "b" pour un critère donné. Les vecteurs de comparaison $\frac{m(m-1)}{2}$ (vecteurs) représentent les données d'entrée de la deuxième phase de la méthode AMFI, à savoir, la phase d'agrégation.

4.3.2 Phase d'agrégation

C'est la deuxième phase de la méthode AMFI et vise à agréger les vecteurs de comparaison obtenus à la fin de la phase précédente pour aboutir à la matrice de "**confrontation**". La matrice de confrontation est une matrice carrée d'ordre $n \times n$, qui associe à chaque paire d'actions (a, b) , une valeur réelle $Conf(a, b) \in [-1, 1]$.

Pour une paire d'actions (a, b) , le résultat de la confrontation entre les deux actions exprimé par la valeur réelle $Conf(a, b)$ est obtenu en calculant l'intégrale de Choquet pour le vecteur $Comp(a, b)$ issu de la phase de comparaison.

Le vecteur $Comp(a, b) = (Comp_1(a, b), Comp_2(a, b), \dots, Comp_n(a, b))$, $Comp_i(a, b) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout critère $i \in F$. Ainsi, les comparaisons entre deux actions "a" et "b" prennent leurs valeurs sur une échelle symétrique bipolaire dans laquelle nous avons une valeur positive (1), une valeur négative (-1) et une valeur neutre (0).

Par conséquent, nous calculons $Conf(a, b)$ par l'agrégation des composantes du vecteur $Comp(a, b)$ en utilisant une intégrale de Choquet 2-additive généralisée pour les échelles bipolaires. Cette intégrale est basée sur une "bi-capacité" v .

4.3.2.1 Choix de la bi-capacité

Dans la présente étude, nous avons opté pour une bi-capacité de type CPT symétrique du moment qu'il s'agit d'agréger des valeurs appartenant à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ (échelle bipolaire). A ce titre, pour tous sous-ensembles $A, B \subset F$, la bi-capacité $v(A, B)$ est définie par la formule suivante :

$$v(A, B) = \mu(A) - \mu(B) \quad (4.3)$$

Où μ est une capacité 2-additive définie sur la famille de critères F . De ce fait, la confrontation pour une paire d'actions $Conf(a, b)$ est définie par la formule (4.5).

$$Conf(a, b) = \mathcal{C}_v(Comp(a, b)) = C_\mu(Comp^+(a, b)) - C_\mu(Comp^-(a, b)) \quad (4.4)$$

Où $Comp^+(a, b) = Comp(a, b) \vee 0$ et $Comp^-(a, b) = (-Comp(a, b))^+$ et μ est une capacité 2-additive. En se basant sur la formule (3.18) on obtient :

$$\mathcal{C}_v(Comp(a, b)) = v(F^+(a, b), F^-(a, b)) = \mu(F^+(a, b)) - \mu(F^-(a, b)) \quad (4.5)$$

Où $F^+(a, b) = \{i \in F / Comp_i(a, b) = 1\}$ et $F^-(a, b) = \{i \in F / Comp_i(a, b) = -1\}$.

4.3.2.2 Détermination de la bi-capacité

Partons de la formule (4.3), la détermination de la bi-capacité v revient à déterminer la capacité 2-additive μ . Pour cela, nous utilisons l'algorithme proposé par **B. Mayag, M. Grabisch** et **C. Labreuche** [MAY et al 08] et que nous avons simplifié pour l'adapter au mieux à la problématique traitée.

Il s'agit d'un algorithme qui prouve l'existence d'une capacité 2-additive permettant de représenter les préférences (la subjectivité) du décideur. Pour cela, le décideur doit fournir une information "ordinaire" relativement aux critères et aux paires de critères en mentionnant soit

une préférence stricte, soit une indifférence ou en refusant de se prononcer. L'information ordinaire fournie par le décideur est représentée sous forme d'une paire $\{P, I\}$ où P et I sont définies comme suit :

$$\begin{cases} P = \{(A, B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F)\} & / \text{ Le décideur préfère strictement } A \text{ à } B \\ I = \{(A, B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F)\} & / \text{ Le décideur est indifférent entre } A \text{ et } B \\ |A| \leq 2 \wedge |B| \leq 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

P et I sont deux relations binaires entre les critères et les paires de critères. Pour une famille de critères $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3\}P\{2\}$ signifie que la paire $\{1, 3\}$ est strictement plus importante pour le décideur que le critère 2, tandis que $\{2, 4\}I\{1, 3\}$ signifie que les paires de critères $\{2, 4\}$ et $\{1, 3\}$ ont exactement la même importance pour le décideur. De ce fait, une information ordinaire $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet 2-additive s'il existe une capacité 2-additive μ telle que :

$$\begin{cases} \forall (A, B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) : A P B \Rightarrow \mu(A) > \mu(B) \\ \forall (A, B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) : A I B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) \\ |A| \leq 2 \wedge |B| \leq 2 \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous rajoutons à la paire $\{P, I\}$ exprimée par le décideur, une troisième relation M exprimant la propriété de monotonie que doit assurer toute capacité. La relation M est établie entre deux sous-ensembles A, B de F dans les deux cas suivants :

$$\begin{cases} B = \emptyset \wedge \neg (A(P \cup I)B) \\ \exists i, j \in F : (A = \{i, j\} \wedge B = i) \wedge (\neg (A(P \cup I)B)) \end{cases} \quad (4.8)$$

D'après la formule (4.8), nous avons $A M \emptyset \Rightarrow \mu(A) \geq 0$ et $\{i, j\}M\{i\} \Rightarrow \mu(\{i, j\}) \geq \mu(\{i\})$. La relation M exprime essentiellement le fait que l'importance d'une paire de critères (i, j) doit être supérieure à l'importance des critères i et j pris séparément.

Grâce aux relations $\{P, I, M\}$, il est possible de construire un graphe orienté $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets dont chacun est un sous-ensemble de F de cardinalité inférieure ou égale à 2 (L'ensemble vide compris). E est l'ensemble des arcs de G avec :

$$\forall A, B \in V : (A, B) \in E \Leftrightarrow (A, B) \in (P \cup I \cup M) \quad (4.9)$$

Définitions importantes Pour deux éléments quelconques $x, y \in V$ nous avons les définitions suivantes :

– $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in V$ est un chemin de x vers y si et seulement si :

$$\exists R_1, R_2, \dots, R_{p-1} \in (P \cup I \cup M) : x = x_1 R_1 x_2 R_2 x_3 \dots x_{p-1} R_{p-1} x_p = y$$

- Si $\exists R_i \in \{R_1, R_2, \dots, R_{p-1}\}$ alors le chemin de x vers y est dit "**chemin strict**";
- Un chemin de $x \in V$ vers x est appelé "**circuit**" dans $(P \cup I \cup M)$;
- Un chemin strict de $x \in V$ vers x est appelé "**circuit strict**" dans $(P \cup I \cup M)$;
- On note par $x TC y, \forall x, y \in V$ l'existence d'un chemin de x vers y dans $(P \cup I \cup M)$;
- On note par $x TC_p y, \forall x, y \in V$ l'existence d'un chemin strict de x vers y dans $(P \cup I \cup M)$;
- Nous avons la relation $x \sim y$ si et seulement si :

$$x = y \text{ ou } \begin{cases} x TC y \wedge \neg(x TC_p y) \\ \text{et} \\ y TC x \wedge \neg(y TC_p x) \end{cases} \quad (4.10)$$

D'après la définition de la relation \sim il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes sont des circuits non stricts de $(P \cup I \cup M)$.

En notant par $(F \setminus \sim)$ l'ensemble des classes d'équivalence de \sim et par \bar{x} la classe d'équivalence de $x \in F$, nous obtenons, pour une capacité 2-additive μ sur F :

$$\forall \bar{x} \in (F \setminus \sim), \forall A, B \in \bar{x} : \mu(A) = \mu(B) \quad (4.11)$$

Propriété de monotonie de l'information préférentielle (MOPI) Avant de déterminer la capacité 2-additive, il est important de vérifier son existence en s'assurant que l'information ordinaire $(\{P, I\})$ fournie par le décideur respecte les conditions de monotonie [MAY et al 08]. En effet, pour une capacité μ , si pour tout $i, j \in F$ les coefficients μ_i et μ_{ij} sont donnés, les conditions nécessaires et suffisantes (respect de la monotonie) pour que μ soit 2-additive sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\{i,j\} \subseteq F} \mu_{ij} - (n-2) \sum_{i \in F} \mu_i = 1 \\ \mu_i \geq 0, \forall i \in F \\ \sum_{i \in A \setminus \{k\}} (\mu_{ik} - \mu_i) \geq (|A| - 2) \mu_k \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Pour cela, B. Mayag, M. Grabisch et C. Labreuche [MAY et al 08] ont proposé une propriété appelée "**Monotonie de l'information préférentielle**" dans un ensemble K relativement à un élément $i \in K$ abrégée en "**MOPI**³" et notée (K, i) -**MOPI** avec $K \subseteq F$ tel que $|K| = k \geq 3$. Soit $K \setminus \{i\} = \{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}\}$. La propriété (K, i) -**MOPI** est vérifiée si et seulement si l'implication suivante est vérifiée [MAY et al 08] :

³MOtononicity of Preferential Information

$$\left\{ \begin{array}{l} \{i, j_1\} \sim \{l_1\} \\ \{i, j_2\} \sim \{l_2\} \\ \{i, j_3\} \sim \{l_3\} \\ \dots \\ \{i, j_{k-1}\} \sim \{l_{k-1}\} \\ \{l_1, l_2, \dots, l_{k-1}\} \subseteq K^i \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\neg(l_h TC_p \emptyset), \forall l_h \in K^i \setminus \{l_1, l_2, \dots, l_{k-1}\} \right) \quad (4.13)$$

Où K^i est le multi-ensemble de F où seule la répétition de l'élément i est permise $|K| - 2$ fois, TC_p la relation qui indique l'existence d'un chemin strict entre deux sommet du graphe G et \sim la relation d'équivalence qui, reliant deux éléments, affirme qu'ils ont la même importance par transitivité [MAY et al 08].

Cette implication est une adaptation de celle proposée dans [MAY et al 08] afin de simplifier son utilisation dans le contexte de notre étude. Si la propriété (K, i) -MOPI est vérifiée, les éléments $\forall l_h \in K^i \setminus \{l_1, l_2, \dots, l_{k-1}\}$ sont appelés "Critères Neutres", abrégés en "NC⁴" et notés (K, i) -NC.

En effet, la vérification de la propriété MOPI permet de préserver la monotonie pour la capacité μ . La sémantique de MOPI est que pour tout sous-ensemble K de F de cardinalité strictement supérieure à 2, si toutes les paires de critères ont la même importance que certains critères, il faut que le reste des critères soit d'une importance nulle (n'est pas strictement préféré à l'ensemble vide). Il est à noter que si une ou plusieurs paire de critères ne forme pas un circuit non strict avec aucun autre critère, la propriété (K, i) -MOPI est vérifiée et l'ensemble des critères neutres (K, i) -NC = \emptyset .

Ainsi, pour une information ordinaire $\{P, I\}$ obtenue du décideur à laquelle on ajoute la relation M , nous pouvons affirmer l'existence d'une capacité 2-additive μ sur l'ensemble de critères F si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

1. N'admet pas de circuit strict ;
2. Pour tout sous-ensemble $K \subseteq F$ tel que $|K| \geq 3, \forall i \in K : (K, i)$ -MOPI vérifiée.

4.3.2.3 Algorithme de détermination de la capacité 2-additive

Afin de faciliter l'interaction avec le décideur, nous avons adapté l'algorithme de détermination de la capacité 2-additive proposé dans [MAY et al 08] en utilisant la famille de critères F directement comme entrée de l'algorithme au lieu de l'ensemble des actions binaires [MAY et al 08]. Cette modification nous a permis d'alléger les notations mathématiques utilisées dans l'algorithme et de faciliter son assimilation ainsi que son implémentation.

⁴Neutral Criteria

L'algorithme de détermination de la capacité 2-additive que nous abrégeons en "DA2AC⁵" procède en deux grandes phases dont chacune est subdivisée en plusieurs étapes illustrées dans l'annexe A.

4.3.2.4 Exemple d'illustration de l'algorithme "DA2AC"

Soit la famille de critères $=1,2,3$, l'information ordinaire fournie par le décideur est comme suit :

- Le critère 2 a une importance à lui seul ;
- Le critère 2 associé au critère 1 est plus important que lorsqu'il est associé au critère 3 ;
- La paire de critères $\{1,2\}$ a la même importance que le critère 1 pris séparément ;
- La paire de critères $\{2,3\}$ a la même importance que le critère 2 pris séparément.

Nous pouvons, à présent, déterminer les relations P,I comme suit :

La relation $P = \{(\{2\}, \emptyset); (\{1,2\}, \{2,3\})\}$, et la relation $I = \{(\{1,2\}, \{1\}); (\{2,3\}, \{2\})\}$

Il est à noter que la relation I est symétrique, autrement dit, $\forall A, B \subset F : A I B \Rightarrow B I A$, ce qui explique la présence d'arcs dans les deux sens entre deux sommets liés par une indifférence.

DA2AC - Phase 1 : Vérification de l'existence de la capacité 2-additive

- **Étape 1** : Définir la relation M

Selon la définition de la relation M , nous avons

$$M = \{(\{1\}, \emptyset); (\{3\}, \emptyset); (\{1,2\}, \emptyset); (\{1,3\}, \emptyset); (\{1,3\}, \{1\}); (\{1,3\}, \{3\}); (\{2,3\}, \emptyset); (\{2,3\}, \{3\})\}$$

- **Étape 2** : Générer le graphe $G = (V, E)$ (figure 4.1)

- **Étape 3** : Composantes fortement connexes

A partir du graphe G nous avons $SCC(G) = \{\{\{1,2\}, \{1\}\}; \{\{2,3\}, \{2\}\}; \{1,3\}; \{3\}; \emptyset\}$

- **Étape 4** : Aucune composante fortement connexe ne contient un circuit strict.

- **Étape 5** : Vérification de la propriété (K, i) -MOPI

La propriété (K, i) -MOPI est une implication ce qui signifie que lors de la vérification pour un sous-ensemble $K \subseteq F$ et un élément quelconque $i \in K$, nous devons vérifier l'existence des critères neutres que si toutes les paires de critères se trouvent dans un circuit non strict avec un critère pris séparément. Ceci dit, si une ou plusieurs paire de critères ne forme pas un circuit non strict avec aucun autre critère, la propriété (K, i) -MOPI est vérifiée et l'ensemble des critères neutres (K, i) -NC = \emptyset .

Dans cet exemple, le seul ensemble à vérifier est $K = F = \{1,2,3\}$ pour tous ses éléments. Les propriétés $(K, 1)$ -MOPI, $(K, 2)$ -MOPI et $(K, 3)$ -MOPI sont vérifiées

⁵Determination Algorithm of the 2-Additive Capacity

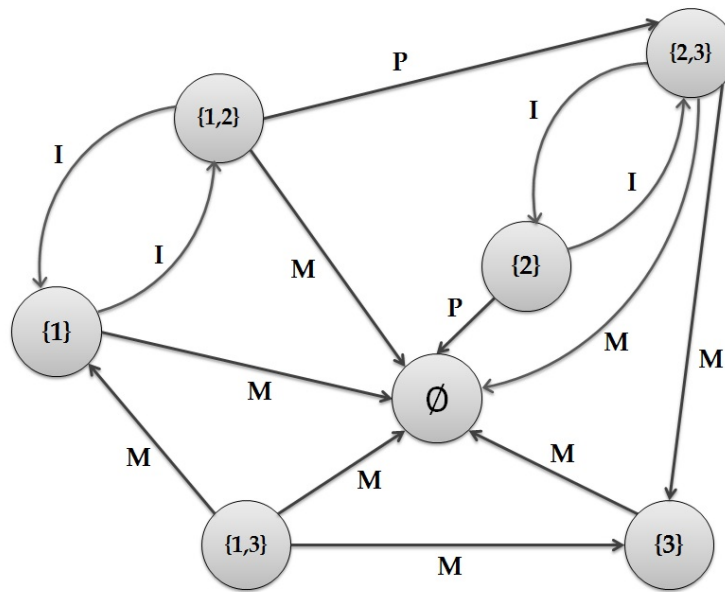


FIG. 4.1 – Graphe $G = (V, E)$

Résultats de la phase 1 Au bout de cette première phase, nous avons prouvé l'existence de la capacité 2-additive μ car aucune composante fortement connexe ne contient un circuit strict et toute les propriétés (K, i) -MOPI sont vérifiées.

DA2AC - Phase 2 : Détermination de la capacité 2-additive

– **Étape 6** : Construire les ensembles (K, i) -NC : D'après l'étape 5, on obtient :

$$(K, 1)\text{-NC} = (K, 2)\text{-NC} = \emptyset \text{ et } (K, 3)\text{-NC} = \{3\}$$

Dans ce cas, nous ajoutons au graphe $G = (V, E)$ l'arc $(\emptyset, \{3\})$ (figure 4.2)

Les composantes fortement connexes sont : $SCC(G) = \{\{1, 2\}, \{1\}\}; \{\{2, 3\}, \{2\}\}; \{\{3\}, \emptyset\}; \{1, 3\}\}$

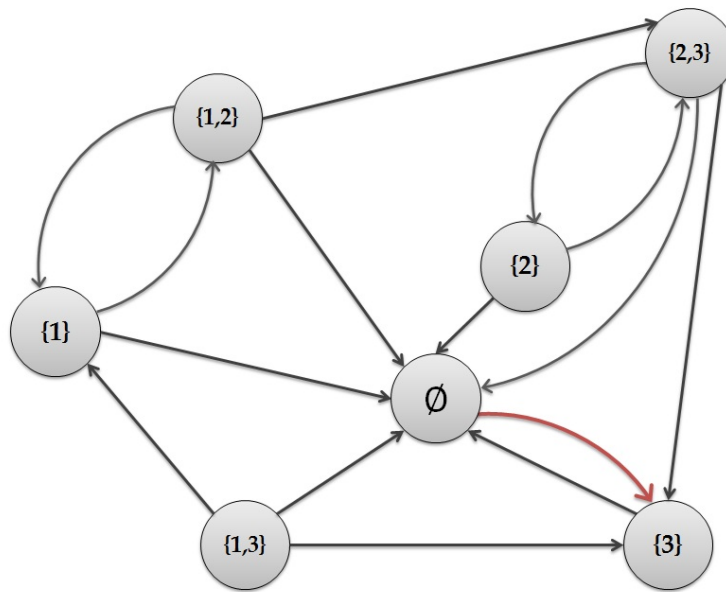


FIG. 4.2 – Graphe $G = (V, E)$ mis à jour (arcs ajoutés en rouge)

– **Étape 7 :** Générer le graphe réduit $G' = (V', E')$ (figure 4.3)

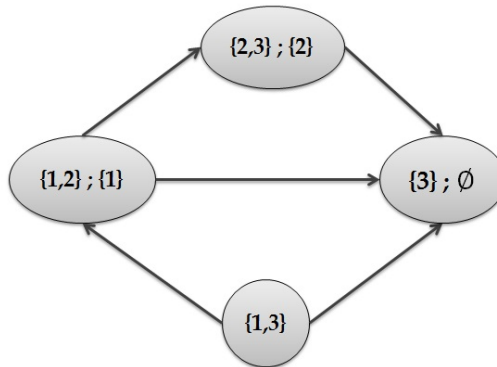


FIG. 4.3 – Graphe réduit $G' = (V', E')$

– **Étape 8 :** Tri topologique du graphe $G = (V, E)$ et partition de V comme suit :

$$V_0 = \{\{3\}, \emptyset\} \quad V_1 = \{\{2,3\}, \{2\}\} \quad V_2 = \{\{1,2\}, \{1\}\} \quad V_3 = \{\{1,3\}\}$$

Étape 9-10-11 : Les valeurs de la fonction ω et la capacité μ pour les critères et les paires de critères sont présentées dans le tableau (4.1).

Critères et paires de critères	ω	μ
\emptyset	0	0
{1}	36	$\frac{6}{36}$
{2}	6	$\frac{1}{36}$
{3}	0	0
{1, 2}	36	$\frac{6}{36}$
{1, 3}	216	1
{2, 3}	6	$\frac{1}{36}$

TAB. 4.1 – Résultats de la détermination de la capacité 2-additive

Ainsi, tous les paramètres qu'utilise l'intégrale de Choquet peuvent être déterminés à partir des éléments du tableau (4.1). Par exemple, l'indice d'interaction entre les critères 1 et 2 est calculé à partir de la capacité μ tel que $I_{12} = \mu_{12} - \mu_1 - \mu_2 = -\frac{1}{36}$. Les critères 1 et 2 sont donc redondant tandis que 2 et 3 sont indépendants car $I_{23} = 0$. L'indice d'importance du critère 1 est obtenu comme suit : $\phi(1) = \mu_1 + \frac{1}{2}(I_{12} + I_{13}) = \frac{27}{36}$.

Résultats de la phase 2 Au bout de cette deuxième phase, nous avons déterminé la capacité 2-additive μ en calculant les coefficients μ_i pour les critères i et μ_{ij} pour les paires de critères (i, j) . En outre, nous avons pu déterminer les indices d'interaction et les indices d'importance des différents critères à partir des coefficients calculés.

4.3.2.5 Algorithme de la phase d'agrégation

Une fois la capacité 2-additive μ déterminée, il est possible de déterminer la bi-capacité v que nous utilisons dans notre approche en appliquant la formule $v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B)$ (avec $\mu^+ = \mu^- = \mu$). Ainsi l'agrégation des résultats des comparaisons (Obtenues lors de la première phase de la méthode AMFI) se fait en calculant, pour la bi-capacité v , l'intégrale de Choquet des vecteurs de comparaison $Comp(a, b) = (Comp_1(a, b), \dots, Comp_n(a, b))$, $\forall a, b \in A$ pour obtenir la valeur de la confrontation $Conf(a, b)$ (formule 4.5). A la fin de la phase d'agrégation, on obtient une matrice carrée à valeurs réelles appelée "**matrice de confrontation**", notée $Conf$ et définie pour l'ensemble des actions potentielles (m est le nombre d'actions) comme suit : $\forall i, k = 1..m : Conf[i, k] = C_v(Comp(a_i, a_k))$.

$$\forall i, k = 1..m : Conf[i, k] = C_v(Comp(a_i, a_k)) = \mu(F^+(a_i, a_k)) - \mu(F^-(a_i, a_k)) \quad (4.14)$$

Où $F^+(a_i, a_k) = \{j \in F / Comp_j(a_i, a_k) = 1\}$ et $F^-(a_i, a_k) = \{j \in F / Comp_j(a_i, a_k) = -1\}$

Il est évident que $\forall i, k \in \{1, \dots, m\}, m \in \mathbb{N} : Conf[i, k] + Conf[k, i] = 0$. Aussi, pour la comparaison de deux actions a_i, a_j nous avons : $Comp(a_i, a_j) + Comp(a_j, a_i) = (0, 0, \dots, 0)$. Enfin, la matrice $Conf[i, k]$ sera utilisée dans la phase d'exploitation de la méthode AMFI.

L'algorithme d'agrégation (annexe A) a comme entrée le vecteur de comparaison $Comp(a_i, a_j)$ pour la paire d'actions (a_i, a_j) et renvoie en sortie la confrontation $Conf[i, j]$ qui est un élément de la matrice carrée $Conf$.

4.3.2.6 Estimation de la complexité

Pour n critères, Le nombre maximal d'opérations effectuées lors de l'exécution de cet algorithme est égal à $3n$ opérations pour détecter les critères en faveur de a_i et ceux en faveur de a_j , plus $2n$ opérations pour ajouter ou soustraire la capacité μ de chaque critère plus n^2 opération pour ajouter ou soustraire les interactions entre les critères. Par conséquent, nous avons en tout $n(n + 5)$ opérations et la complexité de l'algorithme d'agrégation est $\mathbf{O}(n^2)$.

4.3.3 Phase d'exploitation

La phase d'exploitation de la méthode AMFI se déroule en deux principales étapes, le "**scorage**" des actions ensuite le "**rangement**" de la meilleure à la moins bonne.

4.3.3.1 Étape de scorage

La première étape de la phase d'exploitation est une procédure de "**scorage**" exploitant en entrée les éléments de la matrice de confrontation $Conf[i, j]$. Elle fournit, pour chaque action a_i , une valeur réelle $S(a_i) \geq 0$ qui représente son score.

Tout d'abord, chaque action a_i recevra un score partiel $S_j(a_i)$ correspondant au résultat de sa confrontation à une autre action a_j et le score global de a_i n'est autre que la somme de ses scores partiels.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\} : S(a_i) = \sum_{j \neq i} S_j(a_i) \quad (4.15)$$

Un score partiel $S_j(a_i)$ d'une action a_i par rapport à une action a_j , est calculé en examinant par rapport à des seuils, la confrontation entre les deux actions exprimée à travers la quantité $Conf[i, j] \in [-1, 1]$ de la matrice de confrontation. Les seuils utilisés dans ce calcul sont le **seuil d'équivalence** " ε " et le **seuil de transcendance** " τ " qui sont des valeurs réelles de l'intervalle $[0, 1]$. De manière générale, le score partiel $S_j(a_i)$ d'une action a_i par rapport à une action a_j est donné par la formule (4.16)

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j : S_j(a_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } Conf[i, j] > \tau \\ 1 + \left(\frac{|Conf[i, j]| - \varepsilon}{\tau - \varepsilon} \right) & \text{si } \varepsilon < Conf[i, j] \leq \tau \\ 1 & \text{si } -\varepsilon \leq Conf[i, j] \leq \varepsilon \\ 1 - \left(\frac{|Conf[i, j]| - \varepsilon}{\tau - \varepsilon} \right) & \text{si } -\tau \leq Conf[i, j] < -\varepsilon \\ 0 & \text{si } Conf[i, j] < -\tau \end{cases} \quad (4.16)$$

A cet effet, sur un score partiel maximum de deux points, l'action a_i recevra la totalité si le résultat de sa confrontation avec l'action a_j est strictement supérieur au seuil de transcendance τ . En effet, il s'agit d'une situation de "**transcendance**" de a_i par rapport à a_j , si la confrontation $Conf[i, j]$ est inférieure au seuil d'équivalence ε , l'action a_i recevra la moitié des points possibles (1 point). Nous sommes alors dans une situation "**d'équivalence**" entre les deux actions.

Une situation particulière peut également se manifester lorsque la confrontation $Conf[i, j]$ est comprise entre le seuil d'équivalence ε et le seuil de transcendance τ . Dans ce cas, nous parlons de "**pseudo-transcendance**" en faveur de l'action a_i et plus la confrontation s'éloigne de ε et s'approche de τ , plus le score partiel de a_i s'éloigne de 1 et s'approche de 2. De même, nous citons également les points suivants :

- Lorsque la confrontation $Conf[i, j]$ est négative, la situation d'équivalence se prolonge jusqu'à $-\varepsilon$.
- Si $Conf[i, j] < -\tau$, la situation de transcendance est en faveur de a_j et le score partiel de l'action a_i est nul.
- De même, lorsque $-\tau \leq Conf[i, j] < -\varepsilon$, la "pseudo-transcendance" penche vers a_j , ce qui signifie que plus $Conf[i, j]$ est loin de $-\varepsilon$ et proche de $-\tau$, plus le score partiel de a_i est loin de 1 et proche de 0.

De ce fait, il est évident que pour deux actions a_i, a_j , nous avons $S_j(a_i) + S_i(a_j) = 2$. La figure (4.4) illustre, à travers un graphe, les variations de la fonction $S_j(a_i)$ en fonction de $Conf[i, j], \tau$ et ε .

A la fin de l'étape de scorage, les actions a_i sont munies de scores globaux $S(a_i)$ qui permettront de construire un préordre total entre les actions de la meilleure action à la moins bonne.

Il est clair que le score global d'une action $S(a_i)$ ne peut pas dépasser, dans le meilleur des scénarios possibles (transcendance entre a_i et toutes les autres actions), la valeur de $2m - 2$ où m est le nombre d'actions. L'algorithme de scorage est détaillé dans l'annexe A.

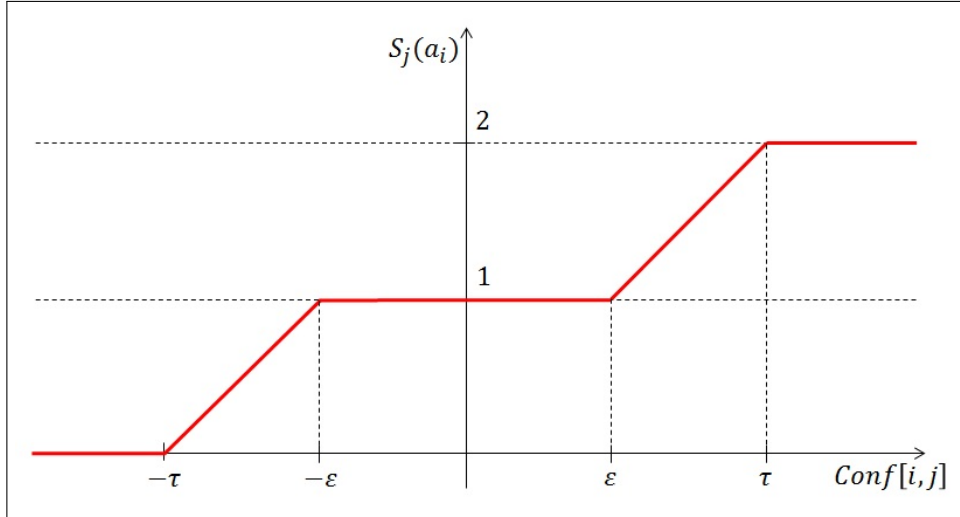


FIG. 4.4 – Graphe des variations du score en fonction de la confrontation

4.3.3.2 Étape de rangement

La deuxième étape de la phase d'exploitation est l'aboutissement final de la méthode AMFI consistant à ranger les actions de la meilleure à la moins bonne en se basant sur les scores calculés dans l'étape précédente.

En effet, les scores permettront d'établir un rangement préliminaire qui fera par la suite l'objet d'un raffinement ciblant à garder le moins d'actions possibles dans un même rang (minimiser les ex aequo), voire même une seule action. Établir le rangement préliminaire consiste à trouver la ou les actions a_i ayant le plus grand score global $S(a_i)$ et les attribuer au rang 1. Cette procédure est répétée pour le reste des actions jusqu'à ce qu'elles soient toutes attribuées à des rangs. Une fois le rangement préliminaire établi, le nombre de rangs $NbRang$ est enregistré.

Le raffinement du rangement préliminaire concerne les rangs contenant plus d'une action. Cette situation est bien évidemment due à une égalité de score entre les actions du rang. De manière générale, il est possible d'avoir dans un rang k plusieurs actions a_1, a_2, \dots, a_p , $p \leq m$. Dans ce cas, pour chaque action a_i , la somme des confrontations de a_i avec les actions partageant avec elle le rang k , $Conf_k[i]$ est calculée (formule 4.17). En effet, il s'agit du **premier niveau de raffinement** du rangement préliminaire.

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} : Conf_k[i] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p Conf[i, j] \quad (4.17)$$

Les actions du rang k sont classées en se basant sur les valeurs $Conf_k[i]$. Ainsi, les actions a_i ayant la plus grande valeur de $Conf_k[i]$ sont attribuées à un nouveau rang numéroté "k.1" tandis

que le reste des actions subira la même procédure de recherche et le nombre de rangs $NbRang$ est incrémenté de 1. Nous obtenons à la fin de cette opération q nouveaux rangs $k.1, k.2, \dots, k.q$ ($1 \leq q \leq p$) contenant chacun au moins une action parmi a_1, a_2, \dots, a_p . Les rangs sont renumérotés de 1 à $NbRang$.

Cependant, il est toujours possible d'avoir dans ce nouveau rangement un rang k' avec plusieurs actions (**résidus**) $a_1, a_2, \dots, a_{p'}$, $p' \leq m$ telles que :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, p'\} : Conf_k[i] = Conf_k[j] \quad (4.18)$$

Où k est l'ancien rang dans lequel se trouvaient ces actions. Dans ce cas, un **deuxième niveau de raffinement** est appliqué pour se débarrasser des résidus du premier niveau. Cela se fait en déterminant le critère j qui a la plus grande capacité $v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$ et de classer les actions du rang k' de la meilleure à la moins bonne selon leurs performances pour le critère en question $g_j(a_i)$.

Par la suite, la même procédure de création des nouveaux rangs est exécutée, le nombre de rangs $NbRang$ est incrémenté en conséquence et les rangs sont renumérotés de 1 à $NbRang$. Si le classement pour le critère j n'est pas possible, le critère suivant dans l'ordre décroissant d'importance est utilisé.

De ce fait, le raffinement du rangement cible à générer des rangs avec le moins d'actions possibles, voire même une seule action par rang. Cependant, si au bout de cette opération, certains rangs contiennent plusieurs actions, elles y resteront et nous parlons dans ce cas d'actions parfaitement équivalentes selon le rangement de la méthode AMFI.

Le **rangement final** obtenu après application des deux niveaux de raffinement représente la finalité de la méthode "AMFI" et est considéré comme la recommandation fournie par la méthode multicritères proposée pour le décideur. Les algorithmes pour établir le rangement préliminaire et pour effectuer le raffinement sont détaillés dans l'annexe A.

4.3.3.3 Estimation de la complexité

Compte tenu de la complexité des algorithmes de scorage, de rangement préliminaire et de raffinement, la complexité de l'algorithme de la phase d'exploitation est de l'ordre de $O(m^2)$ avec $|A| = m$.

4.3.4 Récapitulatif des concepts d'AMFI

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé plusieurs concepts liés à la méthode AMFI. Dans ce qui suit, nous présentons un tableau récapitulatif attribuant à chacun de ces concepts la sémantique qui lui est associée.

Concept	Définition
Bi-capacité CPT symétrique	Bi-capacité qui représente une échelle bipolaire composée de deux échelles unipolaires symétriques et identiques (Ex : La note d'un étudiant sur 20) représentées par une capacité μ
Capacité 2-additive	Capacité dont les indices d'interaction pour les coalitions de cardinalité strictement supérieure à 2 sont nuls
Indice d'interaction	Indice exprimant l'influence de l'interaction entre deux ou plusieurs critères sur la prise de décision (influence positive ou négative)
Indice d'importance	Indice exprimant l'importance globale d'un critère donné en tenant compte des indices d'interaction le reliant à d'autres critères
Relation P (Algorithme DA2AC)	Relation de préférence stricte exprimée par le décideur concernant un critère et un autre critère, une paire de critères et un critère ou deux paires de critères
Relation I (Algorithme DA2AC)	Relation d'indifférence exprimée par le décideur concernant un critère et un autre critère, une paire de critères et un critère ou deux paires de critères
Relation M (Algorithme DA2AC)	Relation permettant de préserver la monotonie de la capacité 2-additive et signifie que l'importance (coefficient de la capacité) de sa partie droite et supérieure ou égale à celle de sa partie gauche
Propriété MOPI (Monotonicity of Preferential Information)	Relation exprimant le fait que pour tout sous-ensemble K de F de cardinalité strictement supérieure à 2, si toutes les paires de critères ont la même importance que certains critères, il faut que le reste des critères soit d'une importance nulle
Fonction de comparaison	Compare les performances des actions deux à deux pour un critère donné j afin d'établir les préférences partielles
Seuil de discrimination	Valeur au-delà de laquelle la préférence d'une action par rapport à une autre est perceptible
Fonction de confrontation	La confrontation des actions a et b oppose l'importance des coalitions de critères en faveur de l'action a à celle des coalitions en faveur de l'action b en tenant compte des interactions entre les critères
Score partiel	Evaluation de l'importance de la coalition de critères en faveur de l'action a (Confrontation) par rapport aux seuils de transcendance et d'équivalence
Score global	La somme des scores partiels obtenus par l'action a par rapport à toutes les autres actions
Seuil de transcendance	Pour deux actions a et b , il s'agit de la valeur au-delà de laquelle l'importance de la coalition de critères en faveur de l'action a (confrontation) est assez significative pour préférer l'action a à l'action b
Seuil d'équivalence	Pour deux actions a et b , il s'agit de la valeur en-dessous de laquelle les deux actions sont équivalentes quelle que soit l'importance de la coalition de critères en faveur de a ou de b
Rangement préliminaire	Ranger les actions de la meilleure à la moins bonne selon l'ordre décroissant des scores globaux
Raffinement de premier niveau	Procède en calculant la somme des confrontations de chaque action avec celles partageant le même rang
Raffinement de deuxième niveau	Procède en choisissant le critère (le plus influant) permettant de classer les actions du rang à raffiner de la meilleure à la moins bonne

TAB. 4.2 – Récapitulatif des concepts de la méthode AMFI

4.3.5 Paramètres subjectifs d'AMFI

Les paramètres subjectifs représentent des éléments essentiels dans le déroulement de la méthode AMFI et ont une influence directe sur le résultat final de la méthode. En plus de la bi-capacité v , trois paramètres subjectifs sont utilisés, un dans la phase de comparaison, à savoir, le seuil de discrimination p_j et deux dans la phase d'exploitation, à savoir, le seuil de transcendance τ et le seuil d'équivalence ε .

4.3.5.1 Seuil de discrimination

Afin de comparer les actions deux à deux, le seuil de discrimination p_j est défini pour chaque critère et pour chaque paire d'actions (a, b) . De ce fait, pour chaque paire d'actions (a, b) , il faut déterminer un vecteur de discrimination $V_p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $|F| = n$. Cela dit, le seuil de discrimination exprime la subjectivité du décideur par rapport aux paires d'actions et non pas par rapport à chaque action prise séparément.

En effet, face à deux paires d'actions (a, b) et (a, c) , le décideur peut exprimer un penchant vers l'action a parce qu'il l'apprécie particulièrement. Cependant, il peut également exprimer un penchant vers a parce qu'il n'apprécie pas les actions b et c . Ainsi, pour couvrir ces deux situations, le seuil de discrimination doit être déterminé pour un critère donné et une paire d'actions donnée. Par conséquent, $p_j(a, b)$ représente le seuil de discrimination pour le critère j et la paire d'actions (a, b) . De plus, il est évident que $\forall a, b \in A, \forall j \in F : p_j(a, b) = p_j(b, a)$.

4.3.5.2 Seuils de transcendance et d'équivalence

Les seuils de transcendance τ et d'équivalence ε sont utilisés lors de la phase d'exploitation de la méthode AMFI. Ce sont deux quantités réelles comprises entre 0 et 1, telles que $\tau \geq \varepsilon$. En réalité, la confrontation $Conf[i, j]$ de deux actions a_i, a_j exprime non seulement la supériorité de l'une par rapport à l'autre à travers mais aussi l'importance de cette supériorité.

En effet, $Conf[i, j]$ n'est autre que la différence entre l'importance de l'ensemble des critères en faveur de a_i et l'ensemble des critères en faveur de a_j . Il est donc nécessaire de définir des limites qui séparent les différentes situations qu'exprime la valeur de $Conf[i, j]$, à savoir, l'équivalence, la pseudo-transcendance et la transcendance. Ces limites sont les seuils τ et ε . Leurs valeurs expriment comment le décideur juge une supériorité d'une action significative pour la préférer à une autre ou une équivalence entre les deux.

En outre, grâce au fait que $(\tau, \varepsilon) \in [0, 1]^2$, Le décideur peut se prononcer à leur sujet sous forme de pourcentages $\% \tau$ et $\% \varepsilon$ tels que $\tau = \frac{\% \tau}{100}$ et $\varepsilon = \frac{\% \varepsilon}{100}$. Par exemple, un décideur peut s'exprimer comme suit : "une alternative n'est supérieure à une autre que si elle lui est supérieure de 70%". Dans ce cas $\tau = 0,7$.

4.4 Récapitulatif des variables de la méthode AMFI

Dans ce qui suit, nous résumons les variables et les paramètres utilisés dans la méthode AMFI à travers un tableau récapitulatif (tableau 4.3) qui illustre pour chaque élément les notations, les appellations et une brève désignation de l'élément en question.

Notation	Appellation	Désignation
v	Bi-capacité	Bi-capacité CPT Symétrique calculée à partir de la capacité 2-additive
μ	Capacité 2-additive	Capacité 2-additive déterminée en utilisant l'algorithme DA2AC
I_{ij}	Indice d'interaction	Indice d'interaction entre les critères i et j
ϕ_j	Indice d'importance	Indice d'importance du critère j
$Comp_j(a_j, b_j)$	Fonction de comparaison	Compare les performances des actions a et b pour le critère j
$Comp(a, b)$	Vecteur de comparaison	Vecteur des valeurs de comparaison entre les actions a et b
p_j	Seuil de discrimination	Valeur au-delà de laquelle la préférence d'une action par rapport à une autre est perceptible
DA2AC	Determination Algorithm of 2-Additive Capacity	Algorithme de détermination de la capacité 2-additive μ
$Conf(a, b)$	Fonction de confrontation	Calcule la préférence globale entre les actions a et b
$Conf[i, j]$	Matrice de confrontation	Matrice qui regroupe les résultats des confrontations entre les actions
$S_j(a)$	Score partiel	Score d'une action a par rapport à une action a_j
$S(a)$	Score global	Score global d'une action a
τ	Seuil de transcendance	Valeur au-delà de laquelle la supériorité d'une action a par rapport à b vaut un score maximale de 2 points
ε	Seuil d'équivalence	Valeur en-dessous de laquelle la différence entre deux actions n'est pas significative

TAB. 4.3 – Récapitulatif des variables et paramètres de la méthode AMFI

4.5 Démarche globale de la méthode AMFI

La figure (4.5) illustre la démarche globale de la méthode AMFI.

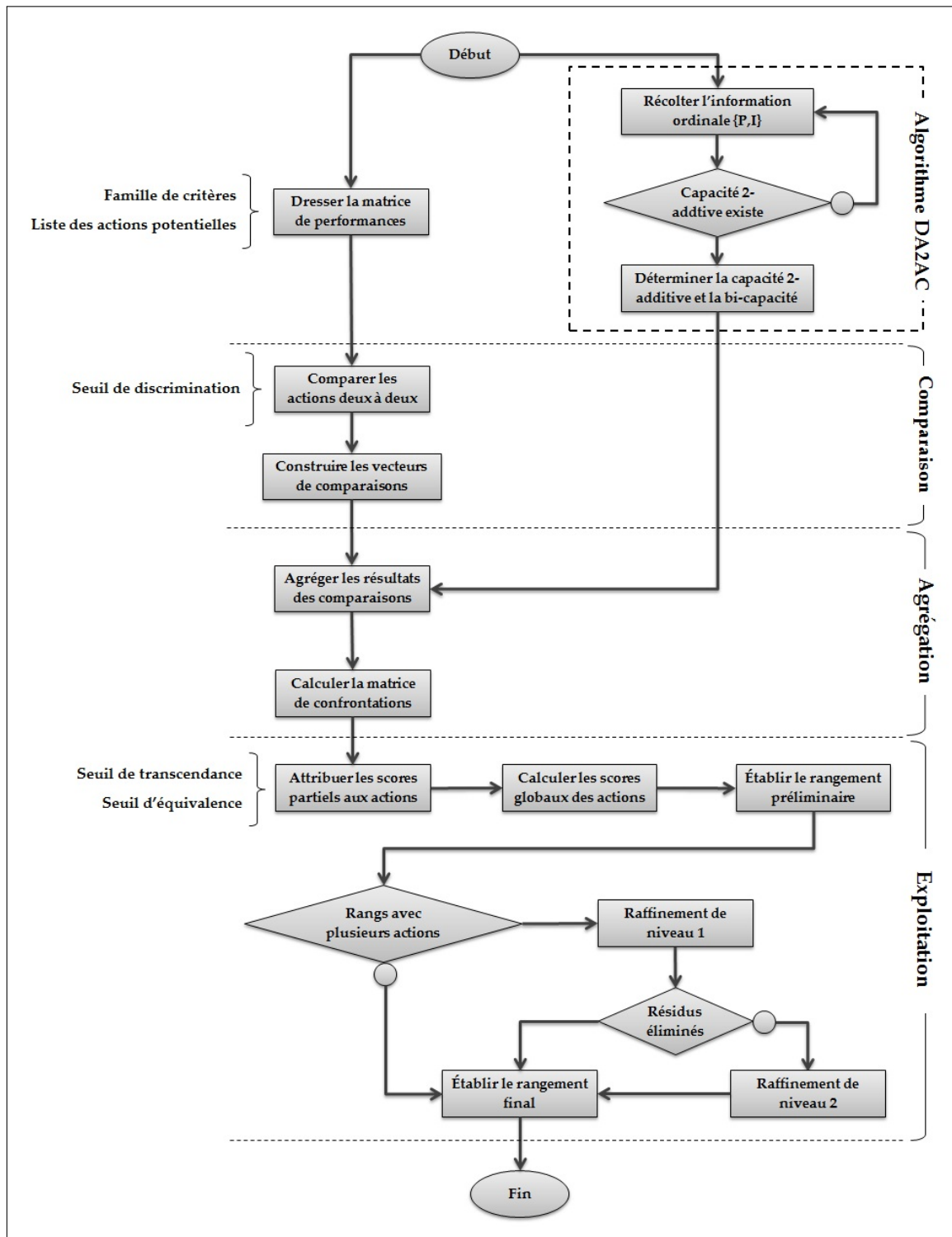


FIG. 4.5 – Démarche globale de la méthode AMFI

4.6 Situation dans la littérature, apports et limites

L'architecture fonctionnelle d'AMFI (Aggregation Method by Fuzzy Integrals) représente beaucoup de points communs avec celle des méthodes de la famille PROMETHEE⁶ (En particulier PROMETHEE I et II) du moment qu'AMFI calcule les préférences partielles et les agrège pour ainsi obtenir une préférence globale. Cette préférence globale fait l'objet d'une exploitation aboutissant à un ordre total des actions.

Cependant, plusieurs différences existent entre AMFI et PROMETHEE. En effet, AMFI utilise uniquement les quasi-critères mais les exprime, contrairement à PROMETHEE, dans une échelle bipolaire (valeur positive, valeur négative, valeur neutre). Aussi, AMFI n'utilise pas la somme pondérée (connue pour être un opérateur d'agrégation fortement compensatoire) pour l'agrégation des préférences partielles mais plutôt une intégrale de Choquet étendue aux échelles bipolaires et basée sur une bi-capacité ν . L'intégrale de Choquet permet à AMFI de prendre en considération les interactions entre les critères pour améliorer la précision des résultats. Enfin, à l'encontre de PROMETHEE (addition des préférences globale pour le calcul des flux), AMFI exploite les résultats de l'agrégation à travers une étape de scorage incluant deux seuils de transcendance τ et d'équivalence ε afin de faire réapparaître la notion de préférence faible absente à la phase de comparaison.

Par rapport aux méthodes de la famille ELECTRE⁷, AMFI se caractérise essentiellement par le nombre réduit de seuils qu'elle utilise, la facilité de ses calculs et surtout par la clarté de sa phase d'exploitation. De manière générale, les méthodes ELECTRE mesurent les concordances et les discordances pour en extraire les relations de surclassement tandis qu'AMFI prend en compte pour chaque action "a" l'importance (poids) des critères pour lesquels elle domine une autre action "b" ainsi que ceux pour lesquels elle est dominée par "b" tout en incluant les interactions entre les critères à travers les mesures floues. Le tableau (4.4) est un récapitulatif de tout ce que nous avons présenté dans cette section.

⁶Preference Ranking Organisation METHod for Enrichment Evaluations

⁷ELimination Et Choix Traduisant la REalité

		AMFI	PROMETHEE II	ELECTRE III
Critères	Pseudo-critères		X	X
	Quasi-critères	X	X	
	Pré-critères		X	
	Vrai-critères		X	
Échelle	Unipolaire		X	X
	Bipolaire	X		
Préordre	Partiel			X
	Total	X	X	
Interactions entre les critères		X		
Résultats de l'agrégation	Surclassement		X	X
	Confrontation	X		
Exploitation	Distillation			X
	Calcul des flux		X	
	Scorage + rangement + raffinement		X	

TAB. 4.4 – Tableau comparatif des méthodes AMFI, PROMETHEE II et ELECTRE III

4.6.1 Apports de la méthode AMFI

La méthode AMFI se caractérise par des avantages que lui confère son approche d'agrégation et sa démarche d'analyse multicritères. Nous présentons dans ce qui suit les avantages de la méthode AMFI.

4.6.1.1 Utilisation des mesures floues et l'intégrale de Choquet

Le principal avantage de la méthode AMFI est l'**utilisation des capacités** (mesures floues) pour déterminer les paramètres inter-critères et l'**intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires** comme opérateur d'agrégation.

Les intégrales floues, en particulier l'intégrale de Choquet, sont des opérateurs d'agrégation permettant de mettre en évidence les interactions entre les critères afin de modéliser au mieux les préférences du décideur. Nous utilisons dans AMFI une intégrale de Choquet associée à une **bi-capacité symétrique** pour pouvoir agréger des valeurs exprimées sur une échelle bipolaire $\{-1, 0, 1\}$. Ainsi, l'agrégation appliquée dans AMFI prend en compte les interactions entre les critères et respecte les préférences du décideur.

D'autre part, au lieu de chercher à déterminer directement les coefficients de la bi-capacité symétrique, nous avons préféré exploiter sa symétrie en déterminant la capacité ordinaire qui

permet de la calculer. Pour cela, nous utilisons l'**algorithme "DA2AC"** qui est une version simplifiée de celui proposé dans [MAY et al 08] en utilisant directement les critères et les paires de critères comme données d'entrée. Cela permet de faciliter la récolte de l'information ordinale (Préférences sur les critères) de la part du décideur.

4.6.1.2 Nombre limité de paramètres subjectifs

La méthode AMFI utilise **moins de paramètres subjectifs** que d'autres méthodes. Le seuil de discrimination utilisé dans la phase de comparaison permet d'exprimer les préférences du décideur pour les actions en se prononçant au sujet des paires d'actions au lieu des actions prises séparément. Les seuils de transcendance et d'équivalence sont utilisés dans la phase d'exploitation et sont des quantités réelles comprises entre 0 et 1. Ces deux seuils permettent au décideur d'exprimer sa vision de la significativité des différences entre les actions, en particulier s'il le fait à travers des pourcentages (section 4.3.5.2).

Aussi, l'utilisation des seuils τ et ε permet de **remettre en évidence la notion de la "pseudo-transcendance"** ("préférence faible" dans les méthodes de surclassement) qui est une situation où une action est supérieure à une autre mais pas assez pour affirmer une "transcendance". En effet, cette situation n'est pas considérée dans la phase de comparaison et cela facilite considérablement l'agrégation mais grâce aux seuils τ et ε , son influence sur le résultat final apparaît à travers les scores attribués aux actions (2 points pour une transcendance et entre 1 et 2 pour une pseudo-transcendance).

4.6.1.3 Facilité d'implémentation

L'agrégation de la méthode AMFI est **facile à implémenter** du moment qu'il s'agit d'agréger des valeurs exprimées sur une échelle discrète $\{-1, 0, 1\}$ obtenue lors de la phase de comparaison des actions deux à deux. Par conséquent, cette échelle discrète permet de simplifier les formules pour le calcul de l'intégrale de Choquet et ainsi faciliter son implémentation.

La phase d'exploitation de la méthode AMFI commence par un **scorage** suivie d'une opération de rangement. D'une part, le scorage est une procédure **facile à assimiler et implémenter** car il s'agit de classer les actions en se basant sur une quantité individuelle qui est le score global $S(a_i)$ de chaque action a_i . Les quantités pour les paires d'actions (a_i, a_j) (telles que les confrontations $Conf[i, j]$) ne sont utilisées que pour raffiner le rangement, autrement dit, lorsque plusieurs actions se retrouvent dans le même rang du rangement préliminaire. Ceci étant, grâce à l'utilisation des scores et le raffinement, le rangement final obtenu contient le maximum de rangs contenant une seule action.

4.6.2 Limites de la méthode AMFI

AMFI peut se heurter à certaines limites liées essentiellement à la détermination des coefficients de la capacité 2-additive qui permet de calculer la bi-capacité symétrique. En effet, la détermination correcte de la capacité nécessite une information ordinale fournie par le décideur sous forme de préférences sur les critères.

Cependant, si cette information contredit la propriété de monotonie, l'aboutissement de l'algorithme "DA2AC" est l'inexistence d'une capacité 2-additive pour représenter les préférences du décideur. Dans ce cas, ce dernier doit revoir ses déclarations et cela peut s'avérer une tâche particulièrement ardue pour certaines catégories de décideurs.

Le même problème se pose en ce qui concerne les seuils τ et ε qui sont extraits à partir des préférences exprimées par le décideur sous forme de pourcentages. Si ces préférences ne garantissent pas que $\tau \geq \varepsilon$, elles sont à revoir dans la mesure du possible.

4.7 Conclusion

L'aide à la décision multicritères est un champ de recherche vaste et riche et cela se traduit par le grand nombre d'études et thèses effectuées dans ce cadre. Cette richesse se manifeste également par le nombre considérable de familles de méthodes d'analyse multicritères subissant constamment des améliorations afin d'obtenir de meilleurs résultats.

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à cet axe de recherche en proposant une nouvelle méthode d'analyse multicritères basée essentiellement sur l'utilisation des intégrales et mesures floues pour l'agrégation multicritères. Nous avons présenté la méthode **AMFI** (**A**ggregation **M**ethod by **F**uzzy **I**ntegrals) en détaillant ses concepts de bases, ses aspects théoriques ainsi que son fonctionnement sous formes de tableaux et schémas.

La méthode AMFI est une méthode d'agrégation partielle adoptant l'approche "Comparer puis Agréger" et traite la problématique de rangement en aboutissant à un ordre total des actions. Elle procède en trois phases, comparaison, agrégation et enfin une phase d'exploitation. La méthode AMFI cible à combler certaines limites des méthodes existantes telles que la complexité de la phase d'exploitation et la réduction du nombre de seuils utilisés. Grâce à l'intégrale de Choquet implémentée dans sa phase d'agrégation, la méthode AMFI exprime les interactions entre les critères ce qui renforce la cohérence de ses résultats. Dans le prochain chapitre nous présenterons une série d'expérimentations permettant de mettre en évidence les éléments théoriques présentés dans le présent chapitre.

Chapitre 5

Expérimentation de l'approche

Nous présentons dans ce chapitre les détails de l'expérimentation de notre approche en présentant les données expérimentales et les différents scénarios exécutés. Ces scénarios ont permis de mettre en valeur les différents aspects théoriques de la méthode AMFI. Pour cela, nous exposerons les résultats obtenus et nous en discuterons afin de mettre en évidence les avantages de notre approche.

Plan

5.1	Introduction	94
5.2	Le prototype AMFI	94
5.3	Description des données expérimentales	95
5.4	Scénario 1 : Détermination de la bi-capacité	96
5.4.1	Résultats de l'algorithme "DA2AC"	97
5.4.2	Discussion et analyse des résultats	98
5.5	Scénario 2 : Déroulement détaillé de la méthode	99
5.5.1	Bi-capacité et paramètres subjectifs	99
5.5.2	Déroulement du scénario	100
5.5.3	Discussion et analyse des résultats	104
5.6	Scénario 3 : échantillon étendu	105
5.6.1	Déroulement du scénario	105
5.6.2	Discussion et analyse des résultats	107
5.7	Scénario 4 : Sensibilité et robustesse	107
5.7.1	Perturbation 1 : Seuil de discrimination	109
5.7.2	Perturbation 2 : Seuils de transcendance et d'équivalence	111
5.7.3	Illustrations graphiques	112
5.7.4	Discussion et analyse des résultats	115
5.8	Scénario 5 : Comparaison avec d'autres méthodes	116
5.8.1	Configuration des méthodes	116
5.8.2	Discussion et analyse des résultats	118
5.9	Conclusion	119

Chapitre 5

Expérimentation de l'approche

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous procédons à l'expérimentation de la méthode AMFI afin de mettre en pratique ses aspects théoriques et de palper ses avantages et ses limites. Pour cela, nous déroulerons plusieurs scénarios visant à illustrer les étapes et le fonctionnement de la méthode AMFI. Nous présentons un exemple de détermination de la bi-capacité symétrique, nous déroulerons dans les détails la méthode AMFI et nous analyserons sa sensibilité et sa robustesse. Enfin, chaque expérimentation est suivie d'une analyse et d'une discussion des résultats obtenus.

5.2 Le prototype AMFI

Les expérimentations de la méthode AMFI ont été réalisées grâce à un logiciel conçu et mis en œuvre spécialement pour cette fin. Le logiciel AMFI permet à l'utilisateur d'introduire sa matrice de performances ainsi que ses paramètres subjectifs et lui fournis le rangement final. Le logiciel fournit également à l'utilisateur certaines informations propres à la méthode AMFI telles que les scores obtenus et la matrices de confrontations.

L'interface principale du logiciel AMFI est de forme rectangulaire subdivisée en plusieurs zones afin d'augmenter la quantité d'informations affichées à l'écran. Pour cela, chaque zone est munie de barres de déroulement horizontal et vertical. La figure (5.1) illustre l'interface du logiciel AMFI. Nous détaillerons la conception, la mise en œuvre et le fonctionnement du logiciel AMFI dans l'annexe B.

The screenshot shows the AMFI software interface. At the top, there are control buttons for 'Load', 'Reset', 'Transcendence threshold' (0,055), 'Equivalence threshold' (0,0015), 'AMFI', and 'Output'. On the right, there are 'View' options for 'Data' and 'Results', and input fields for 'Actions' (650) and 'Criteria' (7). The main area is divided into two tables: 'Confrontations' and 'Ranking'.

Confrontations						Ranking		Scores
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Rank	Action(D)	Score
Z1	0	0	0	0,000123885	0,00012	Rank 1	Z272(2113)	1108,83060846729
Z2	0	0	0	0	0,00173	Rank 2	Z2(209)	1105,37740362617
Z3	0	0	0	0	0	Rank 3	Z25(238)	1068,90114775701
Z4	-0,000123885	0	0	0	0,00173	Rank 4	Z104(706)	1065,51985411215
Z5	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 5	Z29(250)	1062,93910499065
Z6	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 6	Z612(8920)	1061,7237111028
Z7	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 7	Z4(211)	1057,0853119626
Z8	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 8	Z18(230)	1048,94370829906
Z9	0	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 9	Z329(3003)	1046,10849712149
Z10	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 10	Z273(2115)	1039,8382688785
Z11	-0,000123885	-0,00173439	0	-0,00173439	0	Rank 11	Z270(2111)	1038,65402084112
Z12	-0,000123885	-0,00173439	-0,000123885	-0,00173439	0	Rank 12	Z28(249)	1036,3445588972
Z13	-0,000123885	-0,024281466	-0,000123885	-0,00173439	0	Rank 13	Z85(549)	1030,81444181308
Z14	-0,000123885	-0,000123885	-0,000123885	-0,00173439	0	Rank 14	Z603(8747)	1029,06030394392

FIG. 5.1 – Interface du prototype AMFI

5.3 Description des données expérimentales

Nous avons opté pour une problématique d'aménagement de territoire car les problèmes décisionnels dans ce domaine sont caractérisés par le nombre important d'alternatives et le nombre important de points de vue à prendre en considérations (social, politique, culturel, etc.). L'idée de base est de réaliser une carte d'adéquation pour l'habitat dans une région d'étude au nord de Lausanne en Suisse comprenant la localité de "Cossonay" dont la surface est d'environ 50 km^2 [JOE 97]. Cela dit, on se retrouve face à une problématique de tri (trier les zones en trois catégories, bonnes, douteuses, mauvaises) et une problématique de rangement (ranger les zones de la meilleure à la moins bonne) à laquelle nous nous intéressons particulièrement.

L'analyse de la région d'étude a permis de constituer 650 zones différentes [JOE 97] à partir desquelles nous avons pris plusieurs échantillons pour nos expérimentations. Aussi, l'agrégation sémantique des facteurs identifiés sur le terrain a permis d'établir une liste de 7 critères illustrés par le tableau (5.1) [JOE 97]. Ces données ont fait l'objet des expérimentations effectuées par M.R. GHALEM [GHA 08] et D. HAMDADOU [HAM 08] et ceux réalisées au niveau de notre équipe de recherche¹ [ALN et al 13] [BOU 15] évoluant au sein du laboratoire d'informatique d'Oran (LIO).

¹Modélisation Spatio-Temporelle et Vision Artificielle : du Capteur à la Décision

	Critères	Description
1	Nuisances	Pollutions Atmosphériques, Odeurs,...
2	Bruit	Autoroutes, Routes, Chemins de fer,...
3	Impacts	Eaux souterraines, Forêts, Milieux naturels, Paysages,...
4	Géotechnique	Instabilité et dureté de la roche, Glissement de terrain,...
5	Équipements	Distance des équipements : gaz, eaux, électricité,...
6	Accessibilité	Trafic pendulaire, temps de parcours,...
7	Climat	Ensoleillement, brouillard, température,...

TAB. 5.1 – Description des critères [JOE 97]

Chaque zone est évaluée par rapport à chacun des critères pour ainsi obtenir la matrice de performance dont un extrait est présenté dans le tableau (5.2). Il est à noter que certains critères sont à maximiser et d'autres à minimiser et les zones sont identifiées par des valeurs numériques.

Id_Zone	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
202	1,00	0,68	0	1	816	8	0,92
209	1,00	0,45	0	1	1249	9	0,91
210	1,00	0,69	0	1	1165	9	0,89
211	1,00	0,48	0	1	1518	9	0,92
213	1,00	0,92	0	1	1356	9	0,89
215	1,00	1,00	0	1	1434	8	0,75
216	1,00	0,97	0	1	1490	10	0,83
...
Sens de la préférence	Min	Min	Min	Min	Min	Max	Max

TAB. 5.2 – Extrait de la matrice de performance

5.4 Scénario 1 : Détermination de la bi-capacité

Le premier scénario proposé consiste à appliquer l'algorithme "DA2AC" sur l'information ordinaire fournie par le décideur afin de déterminer une capacité 2-additive. Cette capacité est utilisée pour calculer les coefficients de la bi-capacité symétrique que nous utilisons dans la méthode AMFI pour l'agrégation. Pour commencer, les critères numérotés tel qu'il est mentionné dans le tableau (5.1), forment la famille de critères $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Le décideur présente ses préférences au sujet des critères sous forme de phrases en langage naturel. Ces phrases peuvent exprimer une préférence stricte ou une équivalence entre critères $i, \forall i \in F$ ou paires de critères $i, j, \forall (i, j) \in F^2$. Comme les entrées de l'algorithme "DA2AC" sont les relations

binaires $\{P, I\}$, il est nécessaire d'extraire ces relations à partir des préférences du décideur. Le tableau (5.3) illustre les préférences utilisées dans ce scénario et les relations $\{P, I\}$ en résultant.

Préférences du décideur	Relation binaire
Le critère "Impacts" est plus important que le critère "Nuisances"	$\{3\}P\{1\}$
Le critère "Géotechnique" est plus important que le critère "Climat"	$\{4\}P\{7\}$
Le critère "Bruit" est plus important que le critère "Équipements"	$\{2\}P\{5\}$
L'association des critères "Nuisances" et "Géotechnique" est plus importante que celle des critères "Équipement" et "Accessibilité"	$\{1,4\}P\{5,6\}$
Les critères "Équipements" et "Accessibilité" pris ensemble sont plus importants que le critère "Climat"	$\{5,6\}P\{7\}$
Les critères "Équipements" et "Accessibilité" ont la même importance	$\{5\}I\{6\}$
Les critères "Nuisances" et "Bruit" pris ensemble ont la même importance que les critères "Équipement" et "Accessibilité" pris ensemble	$\{1,2\}I\{5,6\}$
Les critères "Nuisances" et "Géotechnique" pris ensemble ont la même importance que les critères "Impact" et "Climat" pris ensemble	$\{1,4\}I\{3,7\}$
Les critères "Bruit" et "Climat" pris ensemble ont la même importance que les critères "Nuisances" et "Impacts" pris ensemble	$\{2,7\}I\{1,3\}$

TAB. 5.3 – Traduction des préférences du décideur en relations binaires $\{P, I\}$

5.4.1 Résultats de l'algorithme "DA2AC"

Une fois les relations binaires $\{P, I\}$ établies, nous appliquons l'algorithme "DA2AC" qui procède en deux phases (Chapitre 4). Dans ce scénario, la première phase nous a permis de prouver l'existence de la capacité 2-additive μ car aucun circuit strict n'existe dans $P \cup I \cup M$ et toutes les relations (K, i) -MOPI sont vérifiées avec $\forall K \subseteq F, |K| \geq 3, \forall i \in K : (K, i)\text{-NC} = \emptyset$.

La détermination de la capacité 2-additive μ se fait dans la deuxième phase en calculant la fonction intermédiaire ω pour les critères et les paires de critères et en déduire les coefficients de la capacité μ ainsi que les indices d'interaction et d'importance des critères. Le tableau (5.4) illustre les résultats obtenus ($\mu_{\emptyset} = 0$). À partir des résultats mentionnés dans ce tableau, les coefficients de la bi-capacité symétrique v sont calculés pour tous les sous-ensembles $A, B \subseteq F$ tels que $v(A, B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Coef	Valeur	Coef	Valeur	Coef	Valeur	Coef	Valeur
μ_1	0,000123885	μ_{12}	0,024281467	μ_{24}	0,024281467	μ_{37}	0,339940535
μ_2	0,00173439	μ_{13}	0,024281467	μ_{25}	0,024281467	μ_{45}	0,024281467
μ_3	0,00173439	μ_{14}	0,339940535	μ_{26}	0,024281467	μ_{46}	0,024281467
μ_4	0,00173439	μ_{15}	0,00173439	μ_{27}	0,024281467	μ_{47}	0,024281467
μ_5	0,000123885	μ_{16}	0,00173439	μ_{34}	0,024281467	μ_{56}	0,024281467
μ_6	0,000123885	μ_{17}	0,00173439	μ_{35}	0,024281467	μ_{57}	0,00173439
μ_7	0,000123885	μ_{23}	0,024281467	μ_{36}	0,024281467	μ_{67}	0,00173439
Coef	Valeur	Coef	Valeur	Coef	Valeur	Coef	Valeur
ϕ_1	0,193818137	I_{12}	0,022423191	I_{24}	0,020812686	I_{37}	0,33808226
ϕ_2	0,067393459	I_{13}	0,022423191	I_{25}	0,022423191	I_{45}	0,022423191
ϕ_3	0,225222993	I_{14}	0,33808226	I_{26}	0,022423191	I_{46}	0,022423191
ϕ_4	0,225222993	I_{15}	0,00148662	I_{27}	0,022423191	I_{47}	0,022423191
ϕ_5	0,047262141	I_{16}	0,00148662	I_{34}	0,020812686	I_{56}	0,024033697
ϕ_6	0,047262141	I_{17}	0,00148662	I_{35}	0,022423191	I_{57}	0,00148662
ϕ_7	0,193818137	I_{23}	0,020812686	I_{36}	0,022423191	I_{67}	0,00148662

TAB. 5.4 – Résultats des calculs de la capacité 2-additive

Le tableau (5.5) présente les résultats des calculs de quelques coefficients de la bi-capacité symétrique v . Par exemple, $v(\{1, 2\}, \{3, 4\}) = (\mu_1 + \mu_2 + I_{12}) - (\mu_3 + \mu_4 + I_{34})$.

Coefficient	Valeur	Coefficient	Valeur
$v(\{1, 2\}, \{3, 4\})$	0	$v(\{1, 5, 6\}, \{2, 4, 7\})$	-0,041873142
$v(\{1, 2, 3\}, \{5, 7\})$	0,067517344	$v(\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7\})$	-0,288528246
...

TAB. 5.5 – Résultats des calculs de la bi-capacité symétrique

5.4.2 Discussion et analyse des résultats

Les résultats obtenus à l'issue de l'exécution de l'algorithme "DA2AC" sont satisfaisants du moment que toutes les préférences du décideur ont été respectées. Ces mêmes préférences peuvent faire l'objet d'interprétation grâce aux valeurs des coefficients de la capacité μ ainsi qu'aux indices d'importance des critères et d'interaction entre critères (tableau 5.4).

En effet, les indices d'importance des critères montrent que le décideur exprime le plus grand intérêt pour l'impact de l'utilisation de la zone sur l'environnement et le niveau de sécurité de la zone en termes de risques naturels. En deuxième position viennent les nuisances et le climat et en troisième position le confort sonore (bruit ambiant).

Enfin, vient la facilité de déplacement exprimée par le niveau d'accessibilité et la distance aux équipements nécessaires (Eau, électricité, gaz, ...). Ainsi, pour notre décideur, la sécurité de la zone pour la vie de l'habitant et sa santé est plus importante que son confort.

Il est à noter que les valeurs du tableau (5.4) représentent l'illustration complète de la finalité de l'algorithme "DA2AC". Cependant, la détermination de la bi-capacité v nécessite uniquement les coefficients des critères μ_i et les indices d'interaction I_{ij} du moment que pour tous sous-ensembles A, B tels que $A \subseteq F, B \subseteq F$ nous avons :

$$v(A, B) = \left(\sum_{i \in A} \mu_i + \sum_{\{i,j\} \in A} I_{ij} \right) - \left(\sum_{i \in B} \mu_i + \sum_{\{i,j\} \in B} I_{ij} \right) \quad (5.1)$$

5.5 Scénario 2 : Déroulement détaillé de la méthode

Dans ce scénario, nous déroulons en détails la méthode AMFI en l'exécutant sur un échantillon extrait aléatoirement à partir des données présentées dans [JOE 97]. Afin de faciliter l'édition des résultats détaillés de la méthode, nous avons limité l'échantillon à 6 zones (actions) $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ choisies aléatoirement et dont les identifiants sont : 417, 511, 706, 913, 1108, 1821 respectivement. Ainsi, la matrice des performances comprend les évaluations de ces six actions pour chacun des critères. Le tableau (5.6) présente la matrice de performances associée à ce scénario.

Zones	Id	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
z_1	417	0,64	0,81	0	6	2083	10	0,78
z_2	511	0,96	0,58	2	1	1548	10	0,70
z_3	706	0,03	0,22	2	6	1543	11	0,67
z_4	913	1,00	0,90	4	3	1336	11	0,77
z_5	1108	1,00	1,00	6	1	1426	10	0,03
z_6	1821	1,00	1,00	0	6	1523	6	0,68

TAB. 5.6 – Matrice de performance pour le scénario 2

5.5.1 Bi-capacité et paramètres subjectifs

Nous avons adopté les mêmes préférences du décideur au sujet des critères (tableau 5.3) pour tous les scénarios d'expérimentation. Ainsi, la **bi-capacité** symétrique v est déterminée à partir des coefficients individuels de la capacité 2-additive $\mu_i, \forall i \in F$ et des indices d'interaction entre les critères $I_{ij}, \forall (i, j) \in F^2$ illustrés dans le tableau 5.5.

Le **seuil de discrimination** $p_j(a, b)$ est déterminé pour chaque critère j et pour chaque couple d'actions (a, b) . Cependant, il est tout à fait possible d'avoir la même valeur du seuil de discrimination pour plusieurs couples d'actions. Il est également possible, mais pas obligatoire, que plusieurs critères reçoivent le même jeu de valeurs pour le seuil de discrimination s'ils sont exprimés via une même échelle de mesure. Dans ce scénario, les critères 1 (Nuisances) et 2 (Bruit) sont deux critères à **minimiser** et prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. De ce fait, les couples d'actions (a, b) reçoivent les mêmes valeurs pour $p_1(a, b)$ et $p_2(a, b)$. Le tableau (5.7) présente un exemple d'un jeu de valeurs pour le seuil de discrimination du critère 5 (Équipements).

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
z_1		627,5	493,5	502,5	502,5	529
z_2	627,5		611	570	555,5	600
z_3	493,5	611		502	616,5	550
z_4	502,5	570	502		497	497
z_5	502,5	555,5	616,5	497		570
z_6	529	600	550	497	570	

TAB. 5.7 – Valeurs du seuil de discrimination pour le critère "Équipements"

Enfin, les seuils de transcendance τ et d'équivalence ε sont fixés à partir des informations fournies par le décideur. Dans ce scénario, le décideur juge qu'une supériorité significative d'une action par rapport à une autre doit être supérieure à 5,5%. Tandis qu'une équivalence entre deux actions n'est plus envisageable au-delà de 0,15%. Ainsi $\tau = 0,055$ et $\varepsilon = 0,0015$.

5.5.2 Déroulement du scénario

Une fois les paramètres subjectifs et la bi-capacité symétrique déterminés, l'exécution de la méthode AMFI commence par la **phase de comparaison** qui agit directement sur la matrice de performances en comparant les actions deux à deux pour chaque critère.

5.5.2.1 Phase de comparaison

Nous pouvons résumer les résultats de la comparaison de chaque action (zone) z_i par rapport aux autres $z_j / j \neq i$, dans une matrice de taille $[m - 1, n]$. Chaque ligne $j, \forall j \in \{1, \dots, m\} / j \neq i$ de cette matrice n'est autre que le vecteur de comparaisons $Comp(z_i, z_j)$. Le tableau (5.8) représente les résultats des comparaisons entre l'action z_1 et le reste des actions.

Zones	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
z_2	1	0	0	-1	0	0	0
z_3	1	0	0	-1	0	0	0
z_4	1	0	1	0	-1	0	0
z_5	1	0	1	-1	-1	0	1
z_6	0	0	0	0	-1	1	0

TAB. 5.8 – Résultats des comparaisons pour l'action z_1

Pour deux actions quelconques (a, b) et un critère j la valeur $Comp_j(a, b) \in \{-1, 0, 1\}$ et exprime si la comparaison est en faveur de l'une des deux actions. Dans le tableau (15), nous remarquons que $Comp_2(z_1, z_3) = -1$, autrement dit, la comparaison entre l'action z_1 et l'action z_3 pour le critère 2 (Bruit) est en faveur de z_3 . De plus, $Comp_3(z_1, z_4) = 1$, ce qui signifie que la comparaison entre z_1 et z_4 pour le critère 4 (Impact) est en faveur de z_1 . Enfin, puisque $Comp_5(z_1, z_2) = 0$, la comparaison pour le critère 5 (Équipements) entre z_1 et z_2 se voue à une équivalence entre les deux actions. Ces résultats sont obtenus en appliquant la formule (4.1) pour le calcul des comparaisons $Comp_j(a, b), \forall (a, b) \in A^2$. Il est à noter que, bien évidemment, la comparaison d'une action à elle-même $Comp(z_i, z_i) = \vec{0}$.

A la fin de la phase de comparaison, chaque action (zone) z_i a été comparée pour chaque critère j à chacune des autres actions de l'ensemble A (actions potentielles). Ces résultats serviront d'entrée pour la deuxième phase de la méthode AMFI.

5.5.2.2 Phase d'agrégation

La phase d'agrégation agit sur les vecteurs de comparaisons pour les couples d'actions (z_i, z_j) et en agrège les valeurs pour déterminer les valeurs des confrontations entre les actions $Conf(z_i, z_j)$ qui formeront la matrice de confrontations $Conf[i, j]$. Les confrontations sont calculées en utilisant l'intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires associée à la bi-capacité symétrique déjà déterminée v . Par exemple, pour un vecteur de comparaisons $Comp(z_i, z_j) = (1, 0, -1, 1, 0, 0, -1)$, la confrontation $Conf[i, j]$ est obtenue comme suit :

$$Conf[i, j] = v(\{1, 4\}, \{3, 7\}) = \mu_{14} - \mu_{37} = (\mu_1 + \mu_4 + I_{14}) - (\mu_3 + \mu_7 + I_{37}) \quad (5.2)$$

Le tableau (5.9) représente la matrice des confrontations $Conf[i, j], \forall (a_i, a_j) \in A^2$. Il est évident que les éléments $Conf[i, i]$ représentant la confrontation d'une action à elle-même sont nuls. Aussi $\forall (a_i, a_j) \in A^2 : Conf[i, j] = -Conf[j, i]$.

Chaque valeur de la matrice de confrontation $Conf[i, j]$ représente l'importance la supériorité d'une action z_i par rapport à une autre z_j ou encore l'équivalence entre les deux. De ce fait, $Conf[1, 4] = 0,024157582$ signifie que l'action z_1 est supérieure à l'action z_4 et l'importance

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
z_1	0	-0,001610505	-0,048315164	0,024157582	0,339692765	0
z_2	0,001610505	0	-0,02254708	0,00173439	0,3849108	0,02428147
z_3	0,04831516	0,022547076	0	0,02428147	0,4296333	0,04831516
z_4	-0,02415758	-0,00173439	-0,02428147	0	0,00012389	-0,00161051
z_5	-0,33969277	-0,384910803	-0,4296333	-0,00012389	0	-0,31565907
z_6	0	-0,024281467	-0,04831516	0,00161051	0,31565907	0

TAB. 5.9 – Scénario 2 : Matrice de confrontations

de cette supériorité est de 0,024157582, voire de 2,41%. De même, le résultat $Conf[5,3] = -0,4296333$ implique que l'action z_5 est inférieure à l'action z_3 et l'importance de cette infériorité est de 0,4296333, voire de 42,96%. Par contre, $Conf[1,6] = 0$ est signe d'une équivalence indiscutable entre les actions z_1 et z_6 .

En réalité, on ne peut pas se prononcer au sujet des supériorités ou des équivalences entre les actions que lors de la phase d'exploitation. En effet, la supériorité d'une action z_i par rapport à une action z_j n'est pas forcément importante, voire suffisante, pour avoir une situation de transcendance en faveur de z_1 . Cette situation n'est obtenue que si la supériorité de z_i par rapport à z_j est strictement supérieure au seuil de transcendance τ .

De ce fait, les valeurs de la matrice des confrontations doivent faire l'objet de vérifications avant d'attribuer aux actions les scores reflétant les différentes situations possibles (transcendance, pseudo-transcendance, équivalence). Cette procédure est exécutée lors de l'étape de **scoring** de la **phase d'exploitation**.

5.5.2.3 Phase d'exploitation

La **phase d'exploitation** consiste premièrement à attribuer à chaque action z_i un score partiel $S_j(z_i)$ pour chacune de ses confrontations avec les autres actions z_j . Les scores partiels sont ensuite additionnés pour obtenir un score global $S(z_i)$ pour chaque action.

En deuxième lieu, les scores globaux sont utilisés pour établir un rangement préliminaire pouvant subir un raffinement afin de minimiser le nombre d'actions par rang. Ainsi, la phase d'exploitation peut être décomposée en deux grandes étapes : le **scorage** et le **rangement**.

Étape de scorage La formule (4.16) est utilisée pour calculer le score partiel $S_j(z_i)$ pour une action z_i à partir du résultat de sa confrontation $Conf[i,j]$ avec l'action z_j . Les scores partiels peuvent être rassemblés dans une matrice carrée $[m,m]$ dont la somme des lignes représentent les score globaux $S(z_i)$ des actions z_i . Notons que le score partiel d'une action z_i par rapport à

elle-même n'est pas calculé. Le tableau (5.10) illustre les résultats de l'étape de **scorage**, à savoir, les scores partiels et globaux.

	$S_1(z_i)$	$S_2(z_i)$	$S_3(z_i)$	$S_4(z_i)$	$S_5(z_i)$	$S_6(z_i)$	$S(z_i)$
z_1		0,99955531	0,124950214	1,423506201	2	1	5,546390893
z_2	1,002065522		0,606596704	1,004381131	2	1,425821809	6,038865167
z_3	1,87504979	1,3934033		1,42582181	2	1,87504979	8,569324676
z_4	0,5764938	0,99561887	0,57417819		1	0,99793448	4,144225336
z_5	0	0	0	1		0	1
z_6	1	0,57417819	0,12495021	1,00206552	2		4,701193928

TAB. 5.10 – Résultats de l'étape de scorage

Le score partiel d'une action z_i par rapport à une action z_j est une valeur réelle positive comprise entre 0 et 2. Par exemple, le score partiel de l'action z_1 par rapport à l'action z_5 , $S_5(z_1) = 2$, autrement dit, nous avons une **transcendance** en faveur de z_1 car le résultat de la confrontation entre les deux actions $Conf[1,5] = 0,339692765$ est strictement supérieur au seuil de transcendance $\tau = 0,055$. Aussi, le score partiel de l'action z_5 par rapport à l'action z_3 , $S_3(z_5) = 0$, ce qui signifie que la **transcendance** est en faveur de z_3 car la confrontation $Conf[5,3] = -0,4296333$ est strictement inférieure à $-\tau = -0,055$.

L'équivalence est une situation approximative enregistrée lorsque la confrontation entre deux actions est comprise entre le seuil d'équivalence ε et $-\varepsilon$. Par exemple, la confrontation entre l'action z_5 et z_4 , $Conf[5,4] = -0,00012389$ qui a beau montrer que z_5 est inférieure à z_4 , cette infériorité n'est pas suffisante pour trancher en faveur de z_4 , autrement dit, les deux actions sont vues comme étant équivalentes. D'autre part, le score partiel de l'action z_1 par rapport à z_6 est nul et cela est signe d'une équivalence exacte et indiscutable entre z_1 et z_6 .

Enfin, lorsque la confrontation de deux actions se trouve comprise entre ε et τ ou entre $-\tau$ et $-\varepsilon$, nous nous retrouvons devant une situation de "**pseudo-transcendance**" qui exprime une supériorité de l'une des deux actions mais pas assez suffisante pour lui attribuer le score maximal, à savoir 2 points. Dans ce cas, le score de l'action supérieure sera compris entre 1 et 2 aussi proche de 2 que l'importance de sa supériorité tandis que celui de l'action inférieure sera compris entre 0 et 1 et aussi proche de 0 que l'ampleur de son infériorité (formule 4.16). Par exemple, $S_3(z_6) = 0,12495021$ et $S_6(z_3) = 1,87504979$ car $Conf[3,6] = 0,04831516$. Par conséquent, il est possible d'en déduire que $\forall (z_i, z_j) \in A^2 : S_j(z_i) + S_i(z_j) = 2$.

Étape de rangement Une fois les scores globaux calculés, un **rangement préliminaire** peut être établi et fera éventuellement l'objet d'un **raffinement** ciblant à garder le minimum d'actions dans le même rang. Les scores globaux sont ordonnés de façon décroissante pour classer les actions de la meilleure à la moins bonne. Dans ce scénario, le rangement préliminaire ne

nécessite aucun raffinement car chaque rang contient une et une seule action (zone). Ainsi, le rangement final est présenté dans le tableau (5.11).

Rangs	Rang 1	Rang 2	Rang 3	Rang 4	Rang 5	Rang 6
Actions	z_3	z_2	z_1	z_6	z_4	z_5
Id_Zone	706	511	417	1821	913	1108
Scores	8,569324676	6,038865167	5,546390893	4,701193928	4,144225336	1

TAB. 5.11 – Rangement final pour le scénario 2

L'action z_3 (zone 706) est considérée dans ce rangement comme la meilleure action à envisager avec un score global $S(z_3) = 8,569324676$. Dans les rangs inférieurs nous trouvons, dans un ordre décroissant, les actions z_2, z_1, z_6, z_4 et finalement l'action z_5 qui est la moins bonne.

5.5.3 Discussion et analyse des résultats

L'objectif de ce scénario était un déroulement détaillé de la méthode AMFI à travers un échantillon pris à partir du jeu de données proposé dans [JOE 97] et composé de 6 zones $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$. Les trois phases de la méthode AMFI se sont déroulées avec succès et nous avons obtenu un rangement final recommandant au décideur les zones de la meilleure (action z_3 , i.e. zone 706) à la moins bonne (action z_5 , i.e. zone 1108).

En observant la matrice de performances (tableau 5.6), nous remarquons que l'action z_3 n'a pas les meilleures performances sur tous les critères. Cependant, en regroupant les critères selon leurs indices d'importance $\phi(i)$ et en analysant les données de l'action z_3 par rapport aux 4 niveaux d'importance obtenus (section 5.4.2), nous remarquons que pour chaque niveau elle représente globalement soit la meilleure performance soit un assez bon compromis. Par exemple, la zone z_3 est la moins bruyante (meilleure performance pour le niveau 3 d'importance) et compense ainsi sa performance moyenne en termes de climat.

D'autre part, en regroupant les critères selon l'échelle de mesure dans laquelle ils sont exprimés, l'action z_3 affiche les mêmes performances. A titre d'exemple, les critères "Nuisances", "Bruit" et "Climat" sont représentés à travers une même échelle de mesure prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. L'action z_3 couvre son évaluation moyenne pour le critère "Climat" en étant la meilleure pour les deux autres critères.

Enfin, en étudiant les résultats des comparaisons entre actions pour chaque critère, l'action z_3 a enregistré 14 situations de supériorité ($Comp_j(z_3, z_i) = 1$), 19 équivalences approximatives ($Comp_j(z_3, z_i) = 0$) et seulement 2 cas d'infériorité ($Comp_j(z_3, z_i) = -1$). De ce fait, l'action z_3 présente un bilan assez équilibré qui justifie pleinement sa recommandation comme étant la meilleure action.

5.6 Scénario 3 : échantillon étendu

Dans ce scénario, nous étendons l'exécution de la méthode AMFI à la totalité du jeu de données que nous avons décrit dans la section 5.3. Ainsi, nous disposons à présent de 7 critères et 650 actions en utilisant la même capacité μ et donc la même bi-capacité v . Le seuil de transcendance est égal à 0,055 et le seuil d'équivalence est fixé à 0,0015.

Cependant, comme le nombre d'actions est important dans ce scénario, nous avons utilisé une seule valeur du seuil de discrimination pour chaque critère relativement à tous les couples d'actions. Le tableau (5.12) présente les seuils de discrimination pour les différents critères.

Critère	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
p_j	0,32	0,35	3	4	502,5	3,655	0,275

TAB. 5.12 – Scénario 3 : Seuils de discrimination pour chaque critère

5.6.1 Déroulement du scénario

Le déroulement de la méthode AMFI est exactement le même que pour un jeu de données réduit (scénario 2), autrement dit, la matrice des confrontations est calculée, les scores sont établis, le rangement préliminaire est obtenu et un raffinement est appliqué en cas de besoin pour aboutir au rangement final. Les tableaux (5.13) et (5.14) illustrent deux extraits des résultats obtenus pour cet exemple.

L'action z_{272} correspondant à la zone à l'identifiant 2113 se trouve au rang 1 avec un "excellent" score de 1108,83060846729 tandis que l'action z_{505} (zone 5542) se trouve au 649^{ème} et dernier rang avec un score "douteux" de 313,90282317757. Les termes "excellent" et "douteux" sont le fruit de la comparaison inévitable du score d'une action aux scores, maximal (dominer toutes les autres actions), moyen (équivalence avec toutes les autres actions) et minimal (dominée par toutes les autres actions), à savoir respectivement, $S_{max} = 2 * 650 - 2 = 1298$, $S_{moy} = 649$ et $S_{min} = 0$. Ainsi, le score de z_{272} se rapproche de S_{max} et celui de z_{505} se trouve tout juste entre S_{moy} et S_{min} .

Rang	Action	Score	Rang	Action	Score
1	Z ₂₇₂ (2113)	1108,83060846729	300	Z ₃₂₂ (2734)	662,287097607476
2	Z ₂ (209)	1105,37740362617	301	Z ₁₀₂ (640)	661,899419532711
3	Z ₂₅ (238)	1068,90114775701	302	Z ₅₁₂ (5562)	661,573991495326
4	Z ₁₀₄ (706)	1065,51985411215	303	Z ₄₅₉ (4923)	661,040125925233
5	Z ₂₉ (250)	1062,93910499065	304	Z ₁₁₂ (721)	659,993146766354
6	Z ₆₁₂ (8920)	1061,7237111028	305	Z ₂₀₄ (1126)	657,480645700933
7	Z ₄ (211)	1057,08533119626	306	Z ₂₁₃ (1227)	657,480468672896
...
108	Z ₃₃ (316)	808,426125925232	643	Z ₅₀₇ (5544)	354,186946523364
109	Z ₃₃₁ (3011)	808,348783570092	644	Z ₄₂₅ (4116)	343,972410859813
110	Z ₇₉ (529)	804,713463214952	645	Z ₆₃₉ (9413)	342,581201850467
111	Z ₅₉₉ (8717)	799,032581943924	646	Z ₆₄₃ (9503)	323,800278579438
112	Z ₆₁₇ (8930)	798,752338317756	647	Z ₆₄₇ (9525)	318,512326542056
113	Z ₃₆₃ (3404)	798,569469065418	648	Z ₅₀₀ (5530)	318,063070747663
114	Z ₈₁ (537)	797,485070373832	649	Z ₅₀₅ (5542)	313,90282317757
...			

TAB. 5.13 – Extrait du rangement final

Rang	Action	Score	Action	Score
189	Z ₅₅₇ (7408)	721,532441065421	\	\
190	Z ₅₅₈ (7409)	721,532441065421	\	\
191	Z ₅₅₉ (7410)	721,530125457944	\	\
192	Z ₅₆₀ (7411)	721,530125457944	\	\
...
198	Z ₅₅₀ (7401)	719,121198336449	\	\
199	Z ₅₅₂ (7403)	719,121198336449	Z ₅₅₁ (7402)	719,121198336449

TAB. 5.14 – Rangs modifiés après le raffinement

5.6.2 Discussion et analyse des résultats

L'objectif de ce scénario était non seulement d'exécuter la méthode AMFI sur un échantillon de données assez large mais aussi de mettre en évidence le raffinement appliqué au rangement préliminaire lors de la phase d'exploitation. Le tableau (5.14) montre les rangs modifiés après le raffinement du rangement préliminaire. Nous remarquons que les actions z_{557} et z_{558} ont le même score mais se retrouvent dans deux rangs différents (Rang 189 et Rang 190).

En réalité, ces deux actions se trouvaient dans le même rang (189) à l'issue du rangement préliminaire ce qui a nécessité l'application du premier niveau de raffinement calculant pour chaque action du même rang la somme de ses confrontations avec le reste des actions du rang. Malheureusement, ce niveau de raffinement n'aboutit à rien puisque la confrontation $Conf[z_{557}, z_{558}] = 0$. Par conséquent, le deuxième niveau de raffinement s'impose en vérifiant les critères j un par un dans un ordre décroissant d'importance (μ_j) afin de trouver le premier critère permettant de classer les actions du même rang de la meilleure à la moins bonne. Dans notre cas, le critère "Équipements" permet de trancher en faveur de l'action z_{557} (280 pour z_{557} et 308 pour z_{558}) qui sera ainsi placée dans le rang 189 et l'action z_{558} dans le rang 190.

Un deuxième cas de figure se présente pour les actions $z_{550}, z_{551}, z_{552}$ qui ont également le même score et se trouvaient dans le même rang à l'issue du rangement préliminaire. Dans cette situation le raffinement de premier niveau n'aboutit à rien du moment que les confrontations $Conf[z_{550}, z_{551}] = Conf[z_{551}, z_{552}] = Conf[z_{550}, z_{552}] = 0$. Le deuxième niveau de raffinement permet d'utiliser le critère "Équipements" pour classer l'action z_{550} dans un rang à part (198) tandis que les actions z_{551} et z_{552} restent dans le même rang (199) du moment qu'elles ont, pratiquement, les mêmes performances pour tous les critères.

5.7 Scénario 4 : Sensibilité et robustesse

L'objectif principal d'une analyse de sensibilité, comme le montre la figure (5.2), est de tester à quel point les résultats d'une méthode d'analyse multicritères sont sensibles aux changements des données d'entrée, en particulier les paramètres subjectifs (seuils). Dans ce scénario, nous reprenons l'échantillon de données du scénario 2 en lui ajoutant 3 autres actions tel que c'est mentionné dans le tableau (5.15) (lignes en gras). Nous avons utilisé la même bi-capacité v et les mêmes seuils de transcendance $\tau = 0.055$ et d'équivalence $\varepsilon = 0.0015$. En ce qui concerne le seuil de discrimination, nous avons utilisé une seule valeur pour chaque critère comme le mentionne le tableau (5.16).

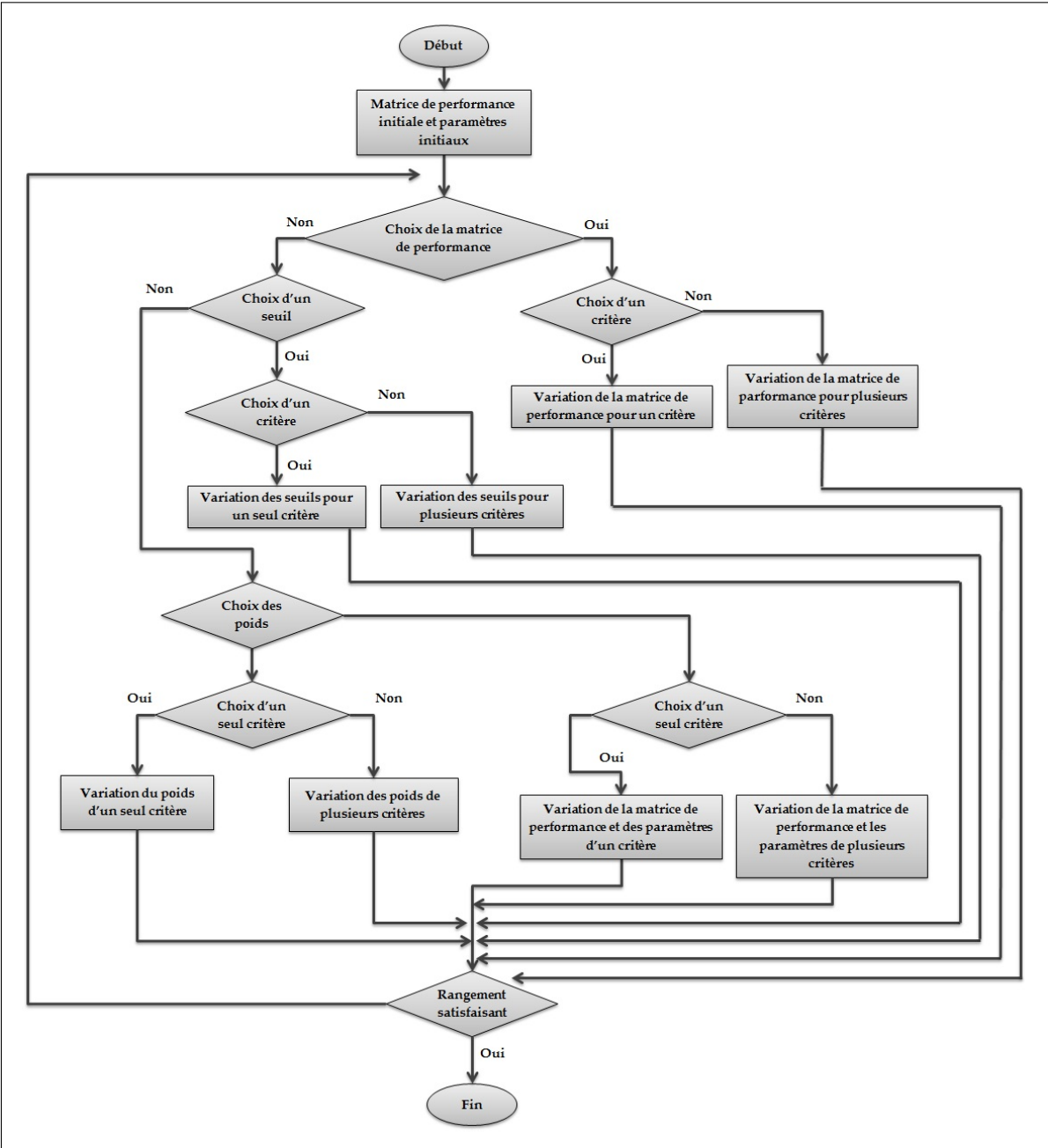


FIG. 5.2 – Approche globale de l’analyse de sensibilité

Zones	Id	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
z_1	417	0,64	0,81	0	6	2083	10	0,78
z_2	422	1,00	0,54	0	6	1707	10	0,76
z_3	511	0,96	0,58	2	1	1548	10	0,70
z_4	706	0,03	0,22	2	6	1543	11	0,67
z_5	845	1,00	1,00	4	1	2240	13	0,79
z_6	913	1,00	0,90	4	3	1336	11	0,77
z_7	1108	1,00	1,00	6	1	1426	10	0,03
z_8	1302	1,00	1,00	6	6	760	2	0,81
z_9	1821	1,00	1,00	0	6	1523	6	0,68

TAB. 5.15 – Matrice de performance pour le scénario 4

Critère	Nuisances	Bruit	Impacts	Géotechnique	Équipements	Accessibilité	Climat
p_j	0,32	0,35	3	4	502,5	3,655	0,275

TAB. 5.16 – Scénario 4 : Seuils de discrimination pour chaque critère

L'étape suivante consiste à effectuer de petites perturbations des valeurs des différents seuils utilisés et comparer les résultats obtenus. Pour cela, nous avons procédé à deux types de perturbations concernant chacune certaines données d'entrée, à savoir, le seuil de discrimination et les seuils de transcendance et d'équivalence.

5.7.1 Perturbation 1 : Seuil de discrimination

Dans cette expérimentation, nous avons fixé les seuils de transcendance et d'équivalence aux valeurs respectives de 0,055 et 0,0015. Nous avons choisi de perturber le seuil de discrimination associé au critère "Bruit" non seulement parce qu'il figure parmi les critères les plus importants ($\mu_2 = 0,00173439$) mais aussi parce que $\forall a_i \in A : 0 \leq g_2(a_i) \leq 1$, autrement dit, la valeur du seuil de discrimination p_2 varie également entre 0 et 1.

Il est à noter que le seuil de discrimination n'influence que le calcul des confrontations $Conf[i, j]$ tandis que les scores partiels $S_j(a_i)$ ne dépendent que des seuils τ et ε . Nous avons varié le seuil p_2 entre 0 et 1 et enregistré les changements dans le rangement final obtenu pour chaque tentative. Les rangements obtenus sont illustrés par le tableau (5.17).

Variation	p_2	Rangement	Variation	p_2	Rangement
1	[0; 0,189]	4, 3, 2, 1, 6, 9, 5, 7, 8	5	[0,421; 0,459]	4, 2, 3, 1, 9, 6, 5, 7, 8
2	[0,19; 0,32]	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 7, 8	6	[0,46; 0,59]	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7
3	[0,321; 0,359]	4, 2, 3, 1, 9, 6, 5, 7, 8	7	[0,6; 0,779]	4, 3, 1, 2, 9, 6, 5, 8, 7
4	[0,36; 0,42]	4, 3, 2, 1, 6, 9, 5, 7, 8	8	[0,78; 1]	3, 1, 4, 2, 9, 5, 6, 8, 7

TAB. 5.17 – Résultats des variations du seuil de discrimination pour le critère "Bruit"

5.7.1.1 Analyse de sensibilité

A partir des résultats du tableau (5.17), nous remarquons que le rangement obtenu ne subit que de légers changements lorsque p_2 se trouve compris entre 0 et 0,36. En effet, les actions z_6 et z_9 changent de rangs entre 0,19 et 0,32 et pareil pour z_3 et z_2 entre 0,321 et 0,359. Entre 0,36 et 0,46, les permutations de rangs entre les actions z_3, z_2 et z_6, z_9 se font ensemble tandis que les autres actions gardent leurs rangs de départ. Entre 0,46 et 0,78 les permutations concernent les actions z_2, z_1 et z_7, z_8 tandis que z_6, z_9 gardent désormais leurs rangs respectifs. Au-delà de 0,78, le rangement "3, 1, 4, 2, 9, 5, 6, 8, 7" reste stable.

Ainsi, nous jugeons que le rangement obtenu est assez stable dans l'ensemble et même si certaines variations touchent des rangs avancés (rang 2, rang 3), nous avons constaté que l'action z_4 placée en tête du classement, garde son rang pour l'intervalle [0; 0,779] et peut donc être recommandée au décideur comme étant la meilleure action.

Nous remarquons également qu'à partir de 0,78, le seuil p_2 dépasse toutes les différences possibles entre deux actions $g_2(a_i) - g_2(a_j)$ ce qui se traduit par des valeurs nulles pour les comparaisons entre les actions pour le critère "Bruit". Par conséquent, si $p_2 \geq 0,78$ le critère "Bruit" n'aura aucune influence sur le calcul des confrontations car toutes les actions sont considérées approximativement équivalentes pour ce critère.

5.7.1.2 Analyse de robustesse

Compte tenu des résultats obtenus dans le tableau (5.17), nous pouvons établir les recommandations suivantes en termes de robustesse. Tout d'abord, l'action z_4 est proposée au décideur comme étant la meilleure action pour un choix du seuil p_2 se situant dans l'intervalle [0; 0,779]. En termes de rangement, "4, 3, 2, 1, 6, 9, 5, 7, 8" s'avère le rangement le plus stable pour un seuil $p_2 \in [0; 0,189] \cup [0,36; 0,42]$ tout en préservant l'influence du critère "Bruit" dans le calcul des confrontations.

Le rangement "3, 1, 4, 2, 9, 5, 6, 8, 7" peut être aussi recommandé au décideur du moment qu'il affiche une stabilité pour un choix du seuil p_2 dans l'intervalle [0,78; 1]. Cependant, avec ce

rangement, le critère "Bruit" perd son influence sur les résultats des confrontations puisque toutes les actions seront équivalentes par rapport à ce critère.

5.7.2 Perturbation 2 : Seuils de transcendance et d'équivalence

Dans cette expérimentation, nous avons fixé le seuil de discrimination pour chaque critère (tableau 5.12) et procédé à des changements des seuils de transcendance et d'équivalence. Il est à noter que les seuils de transcendance et d'équivalence sont utilisés uniquement pour le calcul des scores et les confrontations ne sont pas concernées par leurs variations.

Les valeurs de départ pour les deux seuils τ et ε sont nulles, ensuite nous avons fixé le seuil d'équivalence et varié la valeur de τ de 0 à 1. Une fois $\tau = 1$, nous fixons cette valeur et varions cette fois la valeur de ε de 0 à 1. Enfin, nous avons effectué des variations des deux seuils en même temps. Les rangements obtenus sont regroupés dans le tableau (5.18).

Variation	τ	ε	Rangement
1	0	0	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 7, 8
2	[0,001 ; 0,0099]	0	4, 3, 2, 1, 9, 5, 6 , 7, 8
3	[0,01 ; 0,0259]	0	4, 3, 2, 1, 9, 5, 6, 7, 8
4	[0,026 ; 0,0749]	0	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5 , 7, 8
5	[0,075 ; 0,08649]	0	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7
6	[0,0865 ; 1]	0	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7
7	1	[0,001 ; 0,1349]	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7
8	1	[0,135 ; 0,429634]	4, 3, 2, 1, 9, 5, 6 , 8, 7
9	1	[0,429635 ; 1]	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5 , 8, 7
10	[1 ; 0,1349]	0,135	4, 3, 2, 1, 9, 5, 6, 8, 7
11	0,404235	[0,1155867 ; 0,1349]	4, 3, 2, 1, 9, 6, 5 , 8, 7
12	0,404235	[0,11 ; 0,1155866]	3, 4 , 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7
13	[0,404235 ; 0,1155867]	0,1155866	3, 4, 2, 1, 9, 6, 5, 8, 7

TAB. 5.18 – Résultats des variations des seuils de transcendance et d'équivalence

5.7.2.1 Analyse de sensibilité

Nous remarquons que le rangement final ne subit que de légers changements en effectuant des variations des seuils τ et ε . En effet :

- Les actions z_7 et z_8 permutent leurs rangs à partir de $\tau = 0,075$ et gardent leurs emplacements dans le rangement ;
- Les actions z_5 et z_6 s'échangent de rangs de manière assez fluctuante ;
- Le podium est stable, à savoir, z_4, z_3, z_2 sauf lorsque τ et ε varient entre 0,11 et 0,404235.

5.7.2.2 Analyse de robustesse

Les résultats précédents nous mènent à constater que le rangement "4,3,2,1,9,6,5,8,7" est le plus stable en choisissant les seuils τ et ε dans l'intervalle de variation $[0,429635; 1]$. De ce fait, il est possible de recommander ce rangement comme étant un résultat robuste de la méthode AMFI pour ce jeu de données dans le cas où le décideur ne fournit pas d'information concernant les seuils τ et ε .

5.7.3 Illustrations graphiques

Nous présentons dans ce qui suit quelques illustrations graphiques afin de mettre en évidence les résultats des expérimentations réalisées pour ce scénario. Les figures (5.3) et (5.4) illustrent, respectivement, l'évolution du rang de chaque action au cours des expérimentations réalisées pour les perturbations 1 et 2.

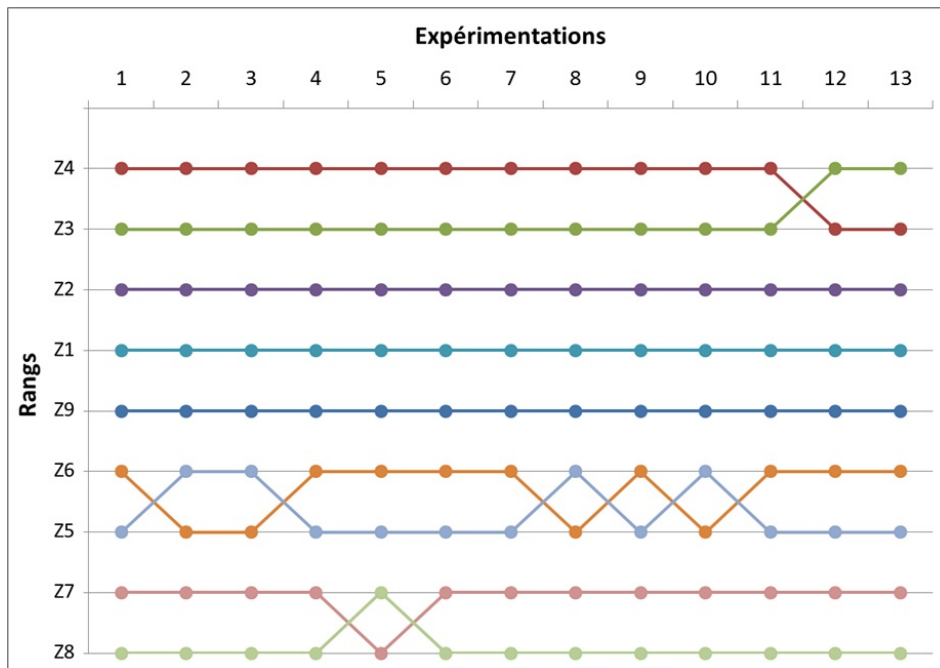


FIG. 5.3 – Évolution des rangs des actions au cours des expérimentations de la perturbation 1

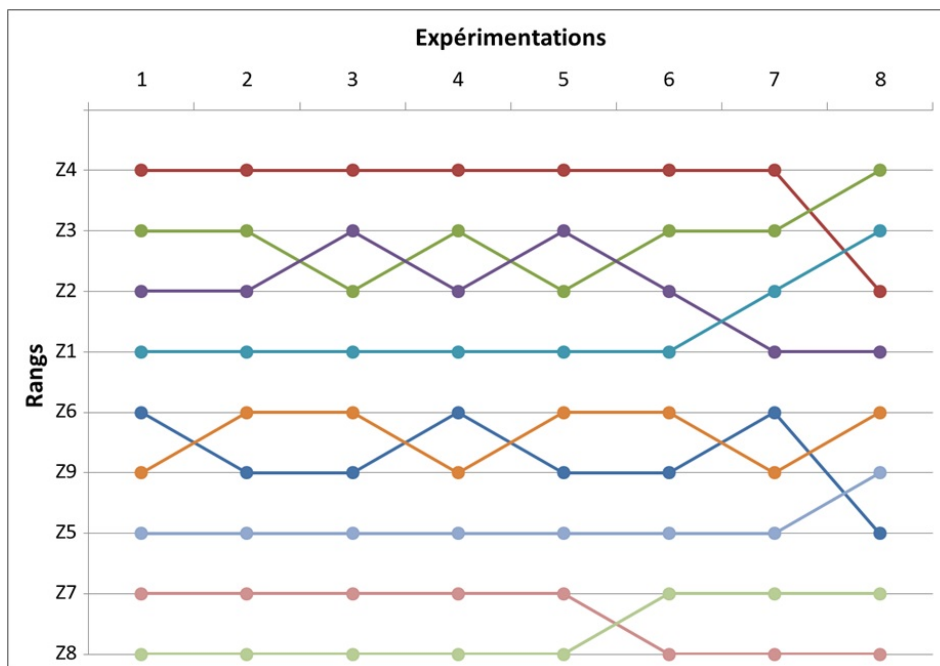


FIG. 5.4 – Évolution des rangs des actions au cours des expérimentations de la perturbation 2

La figure (5.5) représente l'évolution des rangs des actions par rapport aux variations du seuil de discrimination.

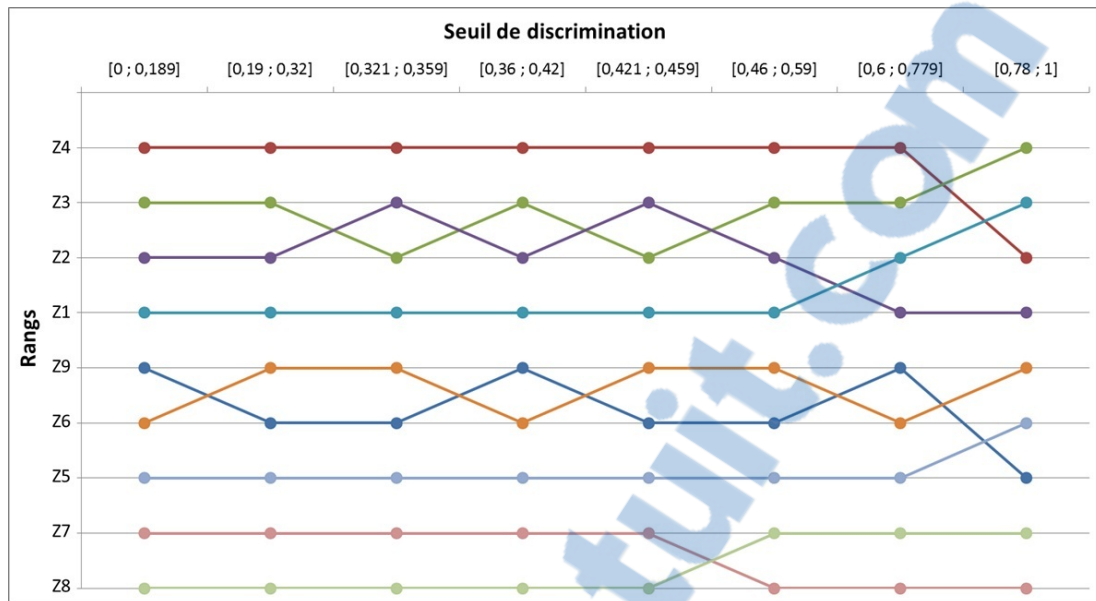


FIG. 5.5 – Évolution des rangs des actions par rapport aux variations du seuil de discrimination

Les figures (5.6) et (5.7) montrent l'évolution des rangs des actions par rapport aux variations respectives des seuils de transcendance (seuil d'équivalence fixé à 0) et d'équivalence (seuil de transcendance fixé à 1).

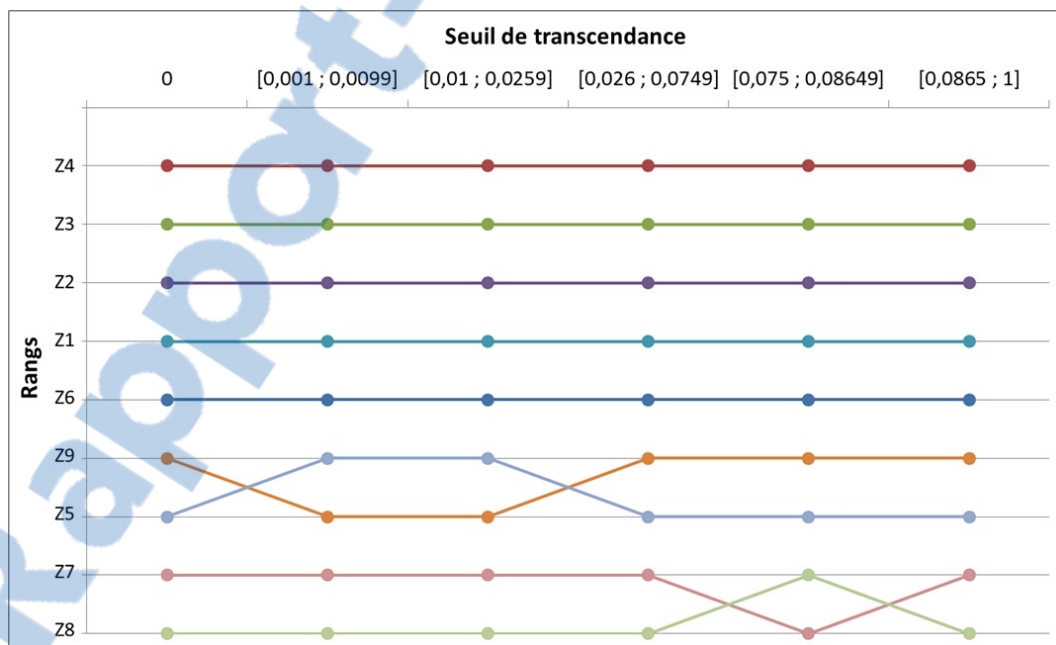


FIG. 5.6 – Évolution des rangs des actions par rapport aux variations du seuil de transcendance

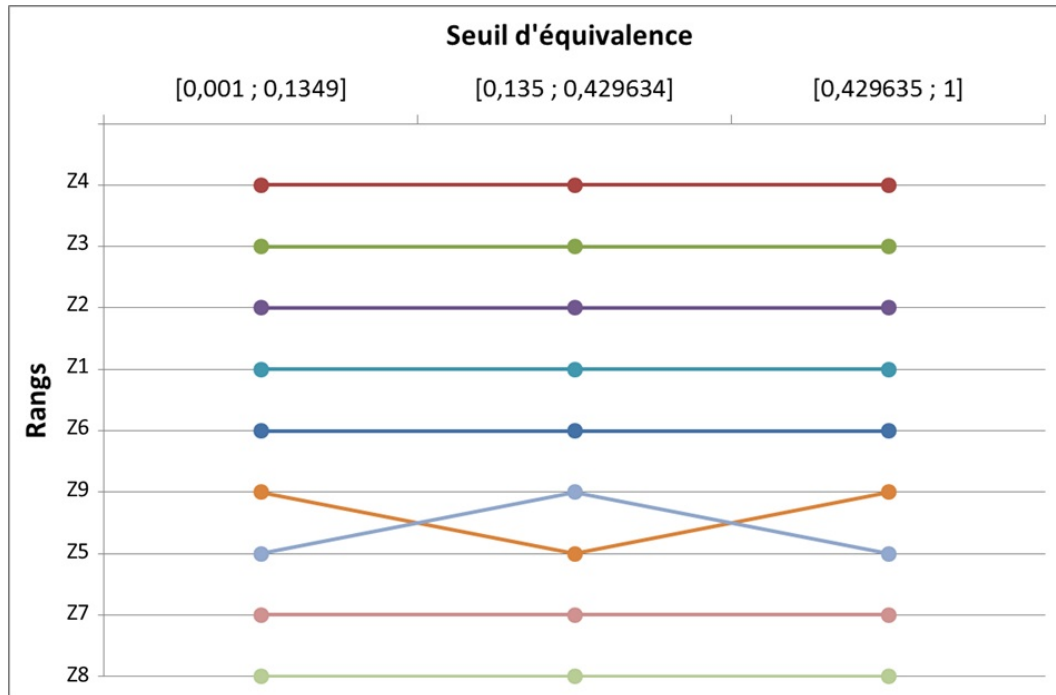


FIG. 5.7 – Évolution des rangs des actions par rapport aux variations du seuil d'équivalence

5.7.4 Discussion et analyse des résultats

Dans ce scénario nous avons effectué une analyse de sensibilité et de robustesse sur un échantillon de données composé de 9 actions et 7 critères en perturbant les trois seuils intervenant dans les calculs de la méthode AMFI, à savoir, le seuil de discrimination p_j et les seuils de transcendance τ et d'équivalence ε . Plusieurs expérimentations ont été effectuées en se basant sur différentes variations des seuils en question et les résultats obtenus ont permis, non seulement, de vérifier à quel point les calculs de la méthode AMFI sont sensible au changements de seuils, mais aussi de recommander les rangements les plus stables au décideur dans le cas où il ne fournit aucune information sur les seuils au préalable.

De manière générale, l'influence des variations du **seuil de discrimination** sur le rangement final a une relation directe avec les évaluations des actions pour les critères. En effet, plus les évaluations des actions sont dispersées sur l'échelle de mesure d'un critère, plus les intervalles de stabilité des rangements obtenus pour les variations de p_j sont larges. Par contre, si les évaluations des actions sont très proches les unes des autres, de petites variations de p_j impliquent que plusieurs comparaisons $Comp(a_i, a_k)$ passent de 1 ou -1 à la valeur nulle et perdent ainsi leur influence sur le calcul de la confrontation $Conf[i, k]$. En outre, au-delà d'une valeur de p_j que nous appelons la "*valeur de non influence*", le critère perd totalement son influence sur les

résultats des confrontations car toutes les actions sont approximativement équivalentes à partir de cette valeur pour p_j .

D'un autre côté, plus les seuils de **transcendance** et d'**équivalence** sont proches (minimiser la quantité $\tau - \varepsilon$), plus le résultat est stable. En effet, lorsque la quantité $(\tau - \varepsilon)$ est assez petite, la plupart des confrontations seront soit au-delà de τ soit en dessous de ε . De ce fait, le nombre de cas de confrontations se trouvant entre les deux seuils diminue et avec lui le nombre de scores calculés en fonction de $(\tau - \varepsilon)$. Ces scores sont les seuls concernés par les variations de τ et ε puisqu'ils sont calculés à partir de leurs valeurs.

5.8 Scénario 5 : Comparaison avec d'autres méthodes

Afin d'illustrer les apports de la méthode AMFI, nous avons comparé les résultats obtenus en exécutant AMFI sur l'échantillon de données du scénario 2 avec les résultats obtenus en exécutant d'autres méthodes sur le même échantillon. Pour cela, nous avons choisi deux méthodes traitant la problématique de rangement, à savoir, PROMETHEE II [BRA et al 01] [HAM 03] [HAL et al 09] et ELECTRE III [ROY 68] [MAY et al 94] [AYA 10].

Nous avons choisi PROMETHEE II car son principe de fonctionnement est similaire à celui d'AMFI. Le choix de la méthode ELECTRE III est justifié par le fait qu'elle est utilisée fréquemment dans les travaux de notre équipe de recherche (Modélisation Spatio-Temporelle et Vision Artificielle : du Capteur à la Décision) au sein du Laboratoire d'Informatique d'Oran (LIO).

5.8.1 Configuration des méthodes

Pour exécuter la méthode PROMETHEE II, nous avons utilisé le logiciel "*Visual PROMETHEE Academic*" [NET 2] développé par "*VP Solutions*" sous la supervision du Pr. B. Mareschal de la Solvay Brussels School de l'Université Libre de Bruxelles (ULB) [MAR 13]. Pour la méthode ELECTRE III, nous avons eu recours à un prototype développé pour des fins expérimentales au sein de notre équipe de recherche.

Nous avons exécuté les trois méthodes sur l'échantillon de données réduit du scénario 2 (6 zones) en se basant sur six configurations telles que :

- p_j^{AMFI} est le seuil de discrimination de la méthode AMFI utilisé dans le scénario 2.
- p_j^G, q_j^G, v_j^G sont respectivement, les seuils de préférence, d'indifférence et de veto générés à partir des performances des actions en utilisant la formule suivante :

$$\begin{cases} q_j^G = 0,2 * \max (g_j(a_i)), \quad \forall a_i \in A \\ p_j^G = 0,4 * \max (g_j(a_i)), \quad \forall a_i \in A \\ v_j^G = 0,6 * \max (g_j(a_i)), \quad \forall a_i \in A \end{cases} \quad (5.3)$$

- w_j^ϕ est le poids du critère j tel que $w_j^\mu = \mu_j / (\sum_{j \in F} \mu_j)$ le coefficient normalisé de la mesure floue 2-additive calculé dans le scénario 1.
- w_j^ϕ est le poids du critère j tel que $w_j^\phi = \phi_j$ l'indice d'importance globale du critère j calculé dans le scénario 1.

Chaque configuration (tableau 5.19) spécifie le seuil de discrimination de la méthode AMFI, les seuils d'indifférence de la méthode PROMETHEE II et les seuils de préférence, d'indifférence et de veto de la méthode ELECTRE III. Les poids pour PROMETHEE II et ELECTRE III sont également spécifiés pour chacune des six configurations.

Configurations		AMFI	PROMETHEE II	ELECTRE III
Config 1	Seuils	p_j^{AMFI}	$q_j = p_j^{AMFI}$	p_j^G, q_j^G, v_j^G
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^ϕ	w_j^ϕ
Config 2	Seuils	p_j^{AMFI}	$q_j = p_j^{AMFI}$	p_j^G, q_j^G, v_j^G
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^μ	w_j^μ
Config 3	Seuils	p_j^{AMFI}	$q_j = p_j^{AMFI}$	$p_j = q_j^G, q_j^G, v_j^G$
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^ϕ	w_j^ϕ
Config 4	Seuils	p_j^{AMFI}	$q_j = p_j^{AMFI}$	$p_j = q_j^G, q_j^G, v_j^G$
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^μ	w_j^μ
Config 5	Seuils	p_j^{AMFI}	$q_j = p_j^{AMFI}$	$p_j = p_j^{AMFI}, q_j^G, v_j^G$
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^μ	w_j^μ
Config 6	Seuils	$p_j = q_j^G$	q_j^G	p_j^G, q_j^G, v_j^G
	Poids	$v(\{j\}, \emptyset) = \mu_j$	w_j^μ	w_j^μ

TAB. 5.19 – Configurations des méthodes AMFI, PROMETHEE II et ELECTRE III pour le scénario 5

Les résultats de nos expérimentations avec les méthodes PROMETHEE II et ELECTRE III sont présentés dans le tableau (5.20) comparés au rangement obtenu en utilisant la méthode AMFI.

Config	Rang	Rang 1	Rang 2	Rang 3	Rang 4	Rang 5	Rang 6
1	AMFI	z_3	z_2	z_1	z_4	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_3	z_2	z_1	z_6	z_4	z_5
	ELECTRE III	z_2	z_3	z_1	z_4	z_6	z_5
2	AMFI	z_3	z_2	z_1	z_4	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_2	z_3	z_1	z_6	z_4	z_5
	ELECTRE III	z_2	z_3	z_1	z_6	z_4	z_5
3	AMFI	z_3	z_2	z_1	z_4	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_3	z_2	z_1	z_6	z_4	z_5
	ELECTRE III	z_2	z_1	z_3	z_4, z_6	z_5	
4	AMFI	z_3	z_2	z_1	z_4	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_2	z_3	z_1	z_6	z_4	z_5
	ELECTRE III	z_2	z_3	z_1, z_6	z_4	z_5	
5	AMFI	z_3	z_2	z_1	z_4	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_2	z_3	z_1	z_6	z_4	z_5
	ELECTRE III	z_2	z_3	z_4	z_1	z_6	z_5
6	AMFI	z_3	z_2	z_4	z_1	z_6	z_5
	PROMETHEE II	z_2	z_3	z_1	z_6	z_5	z_4
	ELECTRE III	z_2	z_3	z_1	z_6	z_4	z_5

TAB. 5.20 – Comparaison des résultats des méthodes AMFI, PROMETHEE II et ELECTRE III

5.8.2 Discussion et analyse des résultats

Le tableau (5.20) montre certaines différences entre le rangement fourni par la méthode AMFI et ceux fournis par PROMETHEE II et ELECTRE III. Ces différences sont, essentiellement, dues aux interactions entre les critères prises en compte par AMFI et non par les deux autres méthodes. En effet, les méthodes PROMETHEE II et ELECTRE III utilisent uniquement des coefficients d'importance pour les critères. La méthode AMFI, quant à elle, repose sur l'utilisation d'une bi-capacité déterminée à partir d'une mesure floue 2-additive.

Prenons comme exemple la configuration 5 pour laquelle la meilleure action est z_3 pour AMFI tandis qu'elle est z_2 pour les autres méthodes. Pour cette configuration, les calculs de PROMETHEE II dans sa phase d'exploitation montrent que :

- z_3 est meilleure que z_2 en ce qui concerne le flux positif ;
- L'inverse dans le cas du flux négatif ;
- Le flux net donne l'avantage à z_2 .

De façon similaire, pour la méthode ELECTRE III :

- La distillation ascendante montre une indifférence entre les deux actions ;
- La distillation descendante donne l'avantage à z_2 .

Ces calculs prennent en compte uniquement l'influence individuelle de chaque critère sur la décision finale exprimée par les poids des critères. Ces poids sont utilisés dans PROMETHEE II pour le calcul des préférences globales et dans ELECTRE III pour calculer la concordance globale.

Toutefois, tel que nous l'avons illustré dans le scénario 1, le décideur a exprimé des préférences qui procurent une influence additionnelle à certaines paires de critères. De ce fait, donner l'avantage à z_2 n'est pas précisément correct car des interactions entre les critères n'ont pas été prises en considération. Dans ce sens, AMFI, en utilisant l'intégrale de Choquet, peut, non seulement, exprimer ces interactions mais aussi les inclure dans les calculs et montrer leur influence sur le rangement final recommandé au décideur. Dans cet exemple, les calculs d'AMFI montrent que z_3 est la meilleure action et non pas z_2 . Ainsi, prendre en compte les interactions entre les critères dans les calculs d'agrégation est le plus grand avantage de la méthode AMFI.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une série d'expérimentations permettant de mettre en évidence les éléments théoriques de la méthode proposée AMFI présentée dans le chapitre précédent. Ces expérimentations se sont déroulées sous forme de plusieurs scénarios dont le premier concerne la construction de la bi-capacité v à partir des préférences du décideur sur les critères en utilisant l'algorithme "DA2AC". Cet algorithme est une amélioration de celui proposé dans [MAY et al 08]. Le deuxième scénario a été consacré à un déroulement détaillé de la méthode AMFI sur un échantillon réduit de données tandis que le troisième scénario est une exécution de la méthode AMFI sur un jeu de données large (650 actions, 7 critères). Le dernier scénario n'est autre qu'une analyse de sensibilité et de robustesse de la méthode. Le dernier scénario permet de comparer les résultats de la méthode AMFI avec ceux de deux autres méthodes d'analyse multicritères, à savoir, PROMETHEE II et ELECTRE III. Les résultats obtenus ont été satisfaisants, affichant ainsi des recommandations à la fois faciles à construire et considérablement stables et robustes.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au vaste domaine de l'aide multicritères à la décision et plus particulièrement à l'agrégation multicritères. Ainsi, nous avons abordé la problématique de la représentation des interactions entre les critères dans le cadre d'une agrégation partielle et une problématique multicritères de rangement. Dans cette optique, nous avons proposé une approche d'agrégation multicritères basée sur l'utilisation des mesures floues et d'une intégrale floue, à savoir, l'intégrale de Choquet.

La première partie de notre thèse est une synthèse de l'état de l'art composée de trois chapitres. Le premier chapitre a été consacré à la présentation des principaux concepts liés à l'aide multicritères à la décision en exposant le paradigme multicritères et le principe de l'analyse multicritères. Le deuxième chapitre introduit en détail l'agrégation multicritères en mettant le point sur son importance dans l'analyse multicritères et en présentant une classification des méthodes d'analyse multicritères basée sur le type d'agrégation qu'elles adoptent. Le troisième chapitre a été consacré à une présentation détaillée des mesures floues et de l'intégrale de Choquet. Ce chapitre expose également la notion de bi-capacité et la généralisation de l'intégrale de Choquet pour les échelles bipolaires.

La deuxième partie de la thèse étale l'approche proposée en deux grands chapitres. Le premier chapitre est une modélisation de l'approche proposée se traduisant par la méthode d'analyse multicritères **AMFI** (**A**ggregation **M**ethod by **F**uzzy **I**ntegrals). Le deuxième chapitre illustre les expérimentations effectuées dans le but de mettre en valeur les aspects théoriques de la méthode proposée.

La méthode AMFI est une méthode d'agrégation partielle qui adopte l'approche "Comparer puis Agréger" et traite la problématique de rangement. AMFI procède en trois phases, comparaison, agrégation et enfin une phase d'exploitation pour aboutir à un ordre total des actions. La méthode AMFI cible à pallier à certaines limites de méthodes existantes telles que la complexité de la phase d'exploitation et la réduction du nombre de seuils utilisés. L'utilisation de l'intégrale de Choquet dans la phase d'agrégation de la méthode AMFI permet d'exprimer les interactions entre les critères (en particulier la dépendance préférentielle) ce qui renforce la cohérence des résultats.

La méthode AMFI procède en trois grandes phases, à savoir, la comparaison, l'agrégation et l'exploitation. La phase de comparaison consiste à comparer les actions deux à deux pour éta-

blir les préférences partielles. En effet, le résultat d'une comparaison de deux actions a et b prend sa valeur dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ et exprime ainsi soit l'avantage de a par rapport à b soit une indifférence soit un désavantage de a par rapport à b . Ainsi, les résultats de la phase de comparaison sont exprimés dans une échelle bipolaire.

La phase d'agrégation consiste à calculer la matrice de confrontation en utilisant une intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires et associée à une bi-capacité CPT symétrique. La confrontation de deux actions représente l'importance de la coalition de critères en faveur de l'une des deux actions opposée à l'importance de la coalition en faveur de l'autre action en tenant compte des interactions entre les critères.

L'agrégation est effectuée en utilisant une intégrale de Choquet généralisée aux échelles bipolaires et associée à une bi-capacité CPT symétrique. Les coefficients de la bi-capacité, étant symétrique, sont calculés à partir d'une capacité 2-additive déterminée grâce à l'algorithme **DA2AC**. Cet algorithme procède en deux phases et permet d'extraire les coefficients de la capacité à partir d'informations ordinales exprimées par le décideur au sujet des critères.

La phase d'exploitation opère en deux étapes successives, à savoir, le scorage et le rangement. Le scorage est un procédé qui associe à chaque valeur de la matrice de confrontation une valeur comprise entre 0 et 2. La confrontation des deux actions est comparée aux seuils d'équivalence et de transcendance. Le résultat permet de dégager soit une situation de transcendance, de pseudo-transcendance ou d'équivalence.

L'étape de rangement établit un préordre total selon l'ordre décroissant des scores globaux obtenus par les actions. Ce rangement préliminaire subit deux niveaux de raffinement afin d'obtenir un rangement final en générant un maximum de rangs et un minimum d'actions par rang.

Dans le but d'illustrer au mieux le fonctionnement ainsi que l'architecture de l'approche proposée, nous avons développé un prototype expérimental portant le même nom que la méthode et permet de l'expérimenter.

Les expérimentations de la méthode AMFI se sont déroulées selon 5 scénarios. Le premier scénario visait la détermination des coefficients de la bi-capacité utilisée pour la pondération des critères au cours de la phase d'agrégation. Il s'agissait donc de dérouler l'algorithme DA2AC afin de calculer les coefficients de la capacité 2-additive puis en déduire ceux de la bi-capacité.

Le deuxième scénario était un déroulement complet et détaillé de la méthode AMFI sur un échantillon de données issu d'une problématique décisionnelle d'aménagement de territoire. Le domaine de l'aménagement de territoire offre aux chercheurs de l'AMCD de vastes possibilités de mise en œuvre des méthodes d'analyse multicritères. Cela est justifié par la nature multicritères des problèmes posés dans ce domaine dans le sens où les décisions sont difficilement prises et les décideurs ont souvent besoin de recommandations et d'orientations afin de prendre des décisions efficaces. Ainsi, nous avons déroulé la méthode AMFI d'abord sur un

exemple constitué de 6 actions et 7 critères ensuite nous avons étendu son exécution, dans le scénario 3, à 650 actions et 7 critères. Ce déroulement détaillé nous a permis de mettre en valeur les avantages de notre approche proposée.

Le quatrième scénario portait sur une analyse de sensibilité et de robustesse de la méthode d'analyse multicritères AMFI. Pour cela, nous avons procédé à une série de perturbations de certaines données d'entrées, à savoir, le seuil de discrimination et les seuils de transcendance et d'équivalence. Les résultats obtenus ont permis de prouver que les rangements issus d'AMFI sont considérablement stables et peu sensibles aux variations des paramètres subjectifs.

Enfin, le dernier scénario consistait à comparer notre méthode proposée à d'autres méthodes traitant la même problématique décisionnelle. Notre choix s'est porté sur la méthode PROMETHEE II, proche d'AMFI par son principe de fonctionnement, et la méthode ELECTRE III, méthode très utilisée dans les problèmes décisionnels d'aménagement de territoire. Nous avons effectué plusieurs expérimentations en utilisant des configurations différentes pour chaque méthode et nous avons constaté que l'expression des interactions entre les critères permet à la méthode AMFI de présenter des résultats plus cohérents .

Dans la présente étude, nous avons parcouru le domaine de l'aide à la décision multicritères et nous avons eu l'occasion de voir de près les apports de ce domaine riche en matière scientifique, dans notre vie de tous les jours. Il est présent dans la vie des humains à travers leurs achats, leurs constructions, leur industrie et leurs recherches scientifiques.

Le vaste espace de recherche que représente l'aide à la décision multicritères se manifeste par le grand nombre d'études et thèses effectuées dans ce cadre. Cette richesse se traduit également par le nombre considérable de familles de méthodes d'analyse multicritères. Ces méthodes subissent constamment des améliorations afin d'obtenir de meilleurs résultats.

Nous avons suivi une démarche de recherche bien tracée en commençant d'abord par énumérer le maximum de méthodes d'analyse multicritères existantes en classifiant les opérateurs d'agrégation qu'elles utilisent et en présentant une typologie de ces méthodes en fonction de la nature de l'agrégation qu'elles effectuent. Nous avons également dressé un tableau regroupant les avantages et les limites des différentes méthodes que nous avons rencontrées dans notre parcours de recherche.

Arrivant à cette étape, nous avons pu construire une idée sur les problèmes auxquels il faut parler, les éléments à enrichir ainsi que les aspects dans lesquels il faut investir. Ainsi, nous avons pu proposer la méthode d'analyse multicritères **AMFI** en détaillant ses concepts de bases, ses aspects théoriques ainsi que son fonctionnement sous formes de tableaux et schémas.

Nous avons procédé par la suite à une série d'expérimentations permettant de mettre en évidence les éléments théoriques déjà présentés. Ces expérimentations se sont déroulées sous forme de plusieurs scénarios dont les résultats ont fait l'objet d'analyses et de discussion ap-

profondies. Les résultats obtenus des expérimentations ont été satisfaisants, affichant ainsi des recommandations que nous jugeons stables et robustes.

Perspectives

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse ouvre plusieurs perspectives de projets de recherches futures. Ces dernières concernent, essentiellement, l'optimisation de la méthode d'analyse multicritères AMFI par :

- L'amélioration de la méthode proposée en utilisant d'autres fonctions de comparaison et en implémentant d'autres types d'intégrales floues pour la phase d'agrégation.
- L'utilisation d'une bi-capacité générale au lieu d'une bi-capacité CPT symétrique. Cela permettra de modéliser les interactions entre les critères avec d'avantage de précision.
- L'amélioration de l'algorithme de détermination de la capacité additive "DA2AC" dans le but de réduire sa complexité et améliorer davantage son interaction avec le décideur.
- L'expérimentation de la méthode AMFI sur d'autres échantillons de données issus de problématiques décisionnelles réelles relevant de domaines d'application différents.

Enfin, notre plus grande perspective est de proposer une variante de la méthode AMFI dédiée à la problématique décisionnelle de tri afin de tester l'influence des interactions entre les critères sur ce type de problématique multicritères.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Algorithmes de la méthode AMFI

Nous présentons dans cette annexe les algorithmes développés pour le fonctionnement de la méthode AMFI, à savoir, l'algorithme de détermination de la capacité 2-additive "DA2AC", l'algorithme de la phase de comparaison, l'algorithme de la phase d'agrégation, et les algorithmes respectifs des étapes de rangement et de raffinement.

Plan

A.1 Introduction	127
A.2 Algorithme DA2AC	127
A.3 Algorithmes développés pour les phases d'AMFI	129
A.3.1 Algorithme spécifique à la phase de comparaison	130
A.3.2 Algorithme de la phase d'agrégation	130
A.3.3 Algorithmes de la phase d'exploitation	132
A.4 Conclusion	136

Annexe A

Algorithmes de la méthode AMFI

A.1 Introduction

Cette première annexe est consacrée à la présentation des différents algorithmes exploités par la méthode AMFI. Le premier algorithme intitulé "DA2AC" permet de déterminer la capacité 2-additive afin de calculer les coefficients de la bi-capacité v . Par la suite, la méthode AMFI procède en trois phases : la comparaison, l'agrégation et l'exploitation. Ainsi, nous présenterons pour chacune des trois phases l'algorithme correspondant.

A.2 Algorithme DA2AC

L'algorithme de détermination de la capacité 2-additive μ "DA2AC" procède en deux phases subdivisées chacune en plusieurs étapes. En effet, la première phase consiste à vérifier l'existence de la capacité 2-additive μ et la deuxième phase détermine les coefficients de cette même capacité si elle existe.

Algorithme 1 Phase 1 de "DA2AC"**Entrées :** Famille des critères F , information ordinale $\{P, I\}$ **Sorties :**

- Renvoyer "vrai" si la capacité 2-additive μ existe et "faux" sinon
- Déterminer la capacité μ , des indices d'importance $\phi(i)$ et d'interaction I_{ij}

Phase 1 : Vérification de l'existence de la capacité μ **Étape 1 : Début :** Construire la relation binaire M telle que :

$$\forall A, B \in F : A M B \Leftrightarrow \begin{cases} B = \emptyset \wedge \neg(A(P \cup I)B) \\ \exists i, j \in F : (A = \{i, j\}, B = \{i\}) \wedge (\neg(A(P \cup I)B)) \end{cases}$$

Étape 2 : Générer le graphe orienté $G = (V, E)$ où :

- V : Ensemble des sommets de G tel que $V = \{K \in \mathcal{P}(F), |K| \leq 2\} \cup \emptyset$
- E : Ensemble des arcs de G tel que $\forall A, B \in V : (A, B) \in E \Leftrightarrow (A, B) \in (P \cup I \cup M)$

Étape 3 : Construire l'ensemble des composantes fortement connexes $SCC(G)$ où :

$$SCC(G) = \{W \subset V / \forall a, b \in W : (a T C b) \wedge (b T C a)\}$$

Étape 4 : Pour tout $W \in SCC(G)$:**Si** $\exists (A, B) \in W$ tel que $(A, B) \in P$ (préférence stricte) **alors**Renvoyer "faux" (Circuit strict dans W); **Aller à Fin**;**Sinon** **Aller à l'étape 5.****Étape 5 :** $\forall K \subseteq F, |K| \geq 3, \forall i \in K$: Tester la propriété (K, i) -**MOPI****Si** $\exists K$ ensemble et un élément i tels que (K, i) -**MOPI** n'est pas vérifiée **alors**Renvoyer "faux"; **Aller à Fin**;**Sinon** **Aller à la phase 2.**

Algorithme 2 Phase 2 de "DA2AC"**Phase 2 : Détermination de la capacité 2-additive μ** **Étape 6 : Début :**

- Construire les ensembles (K, i) -NC pour chaque relation (K, i) -MOPI vérifiée
- $\forall K \subseteq F, \forall i \in K, \forall A \in (K, i)$ -NC : Ajouter au graphe G l'arc (\emptyset, A) .
- Mettre à jour l'ensemble des composantes fortement connexes $SCC(G)$.

Étape 7 : Générer le graphe réduit $G' = (V', E')$ où :

- V' : Ensemble des sommets de G' tel que $V' = SCC(G)$
- E' : défini tel que $\forall W_1, W_2 \in V' : (W_1, W_2) \in E' \Leftrightarrow \exists A \in W_1, \exists B \in W_2 : (A, B) \in E$

Étape 8 : Faire un tri topologique sur le graphe G' , la partition obtenue de V' est :

$$\{V_0, V_1, V_2, \dots, V_q\}, \quad 1 \leq q \leq |V'|$$

Étape 9 : à partir de la partition de V' , Construire la fonction ω comme suit :

Pour $l \in \{0, 1, \dots, q\}, W \in V_l$:

$$\forall A \in W, \omega(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ (2n)^l & \text{sinon} \end{cases}$$

Étape 10 : Construire la capacité 2-additive μ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\emptyset} = 0 \\ \mu_i = \frac{\omega(\{i\})}{\alpha}, \quad \forall i \in F \\ \mu_{ij} = \frac{\omega(\{i,j\})}{\alpha}, \quad \forall i, j \in F \\ \mu(K) = \sum_{\{i,j\} \subseteq K} \mu_{ij} - (|K| - 2) \sum_{i \in K} \mu_i, \quad \forall K \subseteq F, |K| > 2 \end{array} \right.$$

Étape 11 : Renvoyer "vrai" (μ capacité 2-additive existante et construite à l'étape 10)**Étape 12 : Fin de l'algorithme.****A.3 Algorithmes développés pour les phases d'AMFI**

La méthode AMFI procède en trois phases distinctes, à savoir, **la comparaison**, **l'agrégation** et **l'exploitation**. La troisième phase est à son tour subdivisée en deux étapes, **le scoring** et **le rangement**. Le rangement préliminaire établi subit éventuellement deux niveaux de raffinement afin d'obtenir un rangement final avec le maximum de rangs et le minimum d'actions par rang. Nous présentons dans ce qui suit l'algorithme de chacune des phases de la méthode AMFI.

A.3.1 Algorithme spécifique à la phase de comparaison

La méthode AMFI compare les actions deux-à-deux en utilisant une fonction de comparaison $Comp_j$ (chapitre 4) pour chaque critère j . Les résultats des comparaisons pour chaque critère sont regroupés dans un vecteur $Comp(b, a)$. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 4, la complexité de l'algorithme pour le calcul des comparaisons est de l'ordre de $\mathbf{O}(n.m^2)$ avec " n " le nombre de critères et " m " le nombre d'actions.

Algorithme 3 Comparaison de deux actions a et b

Entrées : $Mat_Perf[1..m][1..n]$ de **Réel** ; // Matrice de performance

Sorties : $Comp_a_b[1..n]$ de **Réel** ; // Vecteur de comparaison paire (a, b)

Début

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** n **faire** // n est le nombre de critères

$Comp_a_b[i] \leftarrow 0$; // Equivalence entre a et b

Début

Si $(a <> b)$ **alors** // Ne pas comparer l'action à elle même

Début

Si $(Mat_Perf[a][i] - Mat_Perf[b][i] > pi_a_b)$ **alors**

// pi_a_b seuil de discrimination du critère i et la paire (a, b)

$Comp_a_b[i] \leftarrow 1$; //Préférence en faveur de a

Sinon

Si $(Mat_Perf[b][i] - Mat_Perf[a][i] > pi_a_b)$ **alors**

$Comp_a_b[i] \leftarrow -1$; //Préférence en faveur de b

Finsi ;

Finsi ;

Finsi ;

Finpr ;

Fin.

A.3.2 Algorithme de la phase d'agrégation

Pour une paire d'actions (a_i, a_j) , L'algorithme de la phase d'agrégation adopte comme entrées le vecteur de comparaison $Comp(a_i, a_j)$ et les coefficients de la bi-capacité v renvoie en sortie la confrontation $Conf[i, j]$ qui est un élément de la matrice carrée $Conf$. La complexité de l'algorithme d'agrégation est de l'ordre de $\mathbf{O}(n^2)$.

Algorithme 4 Agrégation du vecteur de comparaison $Comp(a_i, a_j)$ **Entrées :**

$Comp_{ij}[1..n]$ de **Réel**; // Vecteur de comparaison de (a_i, a_j)
 $Cr_{faveur1}[1..n]$ de **Booléen**; // Critères en faveur de l'action 1
 $Cr_{faveur2}[1..n]$ de **Booléen**; // Critères en faveur de l'action 2
 $Mu[1..n]$ de **Réel**; // Capacité 2-additive
 $I[1..n][1..n]$ de **Réel**; // Indices d'interactions entre critères

Sorties :

$Conf[1..m][1..m]$ de **Réel**; // Matrice de confrontations

Début

$Conf[i][j] \leftarrow 0$

Pour $k \leftarrow 1$ **jusqu'à** n **faire** // Parcourir le vecteur de comparaisons

Début

$Cr_{faveur1}[k] \leftarrow \text{faux}$;

$Cr_{faveur2}[k] \leftarrow \text{faux}$;

Si $(Comp_{ij}[k] = 1)$ **alors**

$Cr_{faveur1}[k] \leftarrow \text{vrai}$; // critère k en faveur de a_i

Si $(Comp_{ij}[k] = -1)$ **alors**

$Cr_{faveur2}[k] \leftarrow \text{vrai}$; // critère k en faveur de a_j

Finpr;

//—————

Pour $k \leftarrow 1$ **jusqu'à** n **faire** // ajouter la capacité au calcul

Début

Si $(Cr_{faveur1}[k])$ **alors**

$Conf[i][j] \leftarrow Conf[i][j] + Mu[k]$;

Si $(Cr_{faveur2}[k])$ **alors**

$Conf[i][j] \leftarrow Conf[i][j] - Mu[k]$;

Finpr;

//—————

Pour $p \leftarrow 1$ **jusqu'à** n **faire** // ajouter les interactions au calcul

Début

Pour $q \leftarrow p$ **jusqu'à** n **faire**

Début

Si $(Cr_{faveur1}[p] \text{ ET } Cr_{faveur1}[q])$ **alors**

$Conf[i][j] \leftarrow Conf[i][j] + I[p][q]$;

Si $(Cr_{faveur2}[p] \text{ ET } Cr_{faveur2}[q])$ **alors**

$Conf[i][j] \leftarrow Conf[i][j] - I[p][q]$;

Finpr;**Finpr;**

//—————

Fin.

A.3.3 Algorithmes de la phase d'exploitation

La phase d'exploitation de la méthode AMFI se déroule en deux principales étapes, le "**scorage**" des actions ensuite le "**rangement**" de la meilleure à la moins bonne. Compte tenu de la complexité des algorithmes de scorage, de rangement préliminaire et de raffinement, la complexité de l'algorithme de la phase d'exploitation est de l'ordre de $\mathbf{O}(m^2)$ où " m " désigne le nombre d'actions.

A.3.3.1 Étape de scorage

L'étape de scorage est une procédure qui permet d'affecter à chaque action un score global issu de l'addition des scores partiels (Chapitre 4). L'algorithme de scorage utilise comme entrée la matrice de confrontations donnée par les éléments $Conf[i, j]$ et fournie, pour chaque action a_i , une valeur réelle $S(a_i) \geq 0$ qui désigne le score de l'action en question.

A.3.3.2 Étape de rangement

La deuxième étape de la phase d'exploitation permet de ranger les actions de la meilleure à la moins bonne en se référant aux scores calculés dans l'étape précédente. Il s'agit donc de classer les actions selon l'ordre décroissant des scores globaux pour obtenir un préordre total. Ce préordre représente le rangement préliminaire qui fera l'objet d'un raffinement en deux niveaux. Ainsi, l'étape de rangement passe par deux sous-étapes :

1. Établir le rangement préliminaire et ;
2. Raffiner le rangement en deux niveaux (chapitre 4).

Rangement préliminaire L'algorithme permettant d'établir le rangement préliminaire utilise comme entrées les scores globaux des actions et fournit en sortie un classement des actions de la meilleure à la moins bonne. Il est tout à fait possible d'avoir plusieurs actions dans le même rang si ces actions ont le même score global.

Raffinement du rangement préliminaire L'algorithme de raffinement permet de réduire le nombre de rangs contenant plusieurs actions et ainsi aboutir à un rangement avec le maximum de rangs et le minimum d'actions par rang.

Algorithme 5 L'étape de scorage**Entrées :**

$Conf[1..m][1..m]$ de Réel; // Matrice de confrontations
 τ, ϵ Réel; // Seuil de transcendance et d'équivalence

Sorties :

$S[1..m][1..m]$ de Réel; // Matrice des scores partiels
 $SG[1..m]$ de Réel; // Vecteur des scores globaux

Début

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // Calcul des scores partiels

Début

Pour $j \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire**

Début

Si ($i <> j$) **alors**

Début

Si ($Conf[i][j] > \tau$) **alors**

$S[i][j] \leftarrow 2$;

Finsi;

Si ($Conf[i][j] \leq \tau$ **ET** $Conf[i][j] > \epsilon$) **alors**

$S[i][j] \leftarrow 1 + ((Abs(Conf[i][j]) - \epsilon) / (\tau - \epsilon))$;

Finsi;

Si ($Conf[i][j] \leq \epsilon$ **ET** $Conf[i][j] \geq -\epsilon$) **alors**

$S[i][j] \leftarrow 1$;

Finsi;

Si ($Conf[i][j] < \epsilon$ **ET** $Conf[i][j] \geq -\tau$) **alors**

$S[i][j] \leftarrow 1 - ((Abs(Conf[i][j]) - \epsilon) / (\tau - \epsilon))$;

Finsi;

Si ($Conf[i][j] < -\tau$) **alors**

$S[i][j] \leftarrow 0$;

Finsi;

Finsi;

Finpr;

Finpr;

//—————

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // Calcul des scores globaux

Début

$SG[i] \leftarrow 0$;

Pour $j \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire**

Début

Si ($i <> j$) **alors**

$SG[i] \leftarrow SG[i] + S[i][j]$;

Finsi;

Finpr;

Finpr;

//—————

Fin.

Algorithme 6 Rangement préliminaire**Entrées :**

$S[1..m]$ de Réel ; // Scores des actions
 $Conf[1..m][1..m]$ de Réel ; // Matrice de confrontations
 $Phi[1..n]$ de Réel ; // Indices d'importance des critères
 $Classement[1..m][1..2]$ de Réel ; // Tableau pour classer les scores

Sorties :

$Rang[1..m][1..m]$ de Entier ; // Rangs
 $NbRang$ Entier ; // Nombre de rangs

Début

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // Affecter les scores

$Classement[i][1] \leftarrow S[i]$; $Classement[i][2] \leftarrow i$;

Finpr ;

// _____

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // trier le tableau classement

Pour $j \leftarrow i + 1$ **jusqu'à** m **faire** // Permutation de colonnes

Si ($Classement[j] > Classement[i]$) **alors**

$Z1 \leftarrow Classement[j][1]$; $Z2 \leftarrow Classement[j][2]$;

$Classement[j][1] \leftarrow Classement[i][1]$;

$Classement[j][2] \leftarrow Classement[i][2]$;

$Classement[i][1] \leftarrow Z1$; $Classement[i][2] \leftarrow Z2$;

Finsi ;**Finpr ;****Finpr ;**

// _____

$i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 1$; $Rang[1][1] \leftarrow Classement[i][2]$;

Pour $k \leftarrow 2$ **jusqu'à** m **faire** // Rangement préliminaire

Début

Si ($Classement[k][1] < Classement[k-1][1]$) **alors**

Début

$i \leftarrow i + 1$; $j \leftarrow 1$;

Sinon

$j \leftarrow j + 1$;

Finsi ;

$Rang[i][j] \leftarrow Classement[k][2]$;

Finpr ;

$NbRang \leftarrow i$; // Nombre de rangs

// _____

Fin.

Algorithme 7 Raffinement du rangement préliminaire**Entrées :**

$S[1..m]$ de Réel; // Scores des actions
 $R, NbRang$ Entier; // Nombre de rangs et Rang à raffiner
 $Conf[1..m][1..m]$ de Réel; // Matrice de confrontations
 $Conf_R[1..m][1..2]$ de Réel; // Classer les sommes des confrontations

Sorties :

$Rang[1..m][1..m]$ de Entier; // Rangs
 $Nouv_Rang[1..m][1..m + 1]$ de Entier; // Nouveaux Rangs

Début

// _____

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // calculer les sommes des confrontations $Conf[i][1] \leftarrow Rang[R][i];$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire****Si** ($i <> j$) **alors** $Conf[i][2] \leftarrow Conf[i][2] + Conf[i][j];$ **Finpr;****Finpr;**

// _____

Pour $i \leftarrow 1$ **jusqu'à** m **faire** // trier le tableau des sommes**Pour** $j \leftarrow i + 1$ **jusqu'à** m **faire****Si** ($Conf_R[j][2] > Conf_R[i][2]$) **alors** $Z1 \leftarrow Conf_R[j][1]; Z2 \leftarrow Conf_R[i][1];$ $Conf_R[j][1] \leftarrow Conf_R[i][1];$ $Conf_R[i][1] \leftarrow Z1;$ $Conf_R[i][2] \leftarrow Z2;$ **Finpr;****Finpr;**

// _____

 $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1; Nouv_Rang[1][1] \leftarrow Conf_R[i][2];$ **Pour** $k \leftarrow 2$ **jusqu'à** m **faire** // Rangement raffiné**Début****Si** ($Conf_R[k][1] < Conf_R[k - 1][1]$) **alors****Début** $i \leftarrow i + 1; j \leftarrow 1; NbRang \leftarrow NbRang + 1;$ **Sinon** $j \leftarrow j + 1;$ **Finsi;** $Nouv_Rang[i][j] \leftarrow Conf_R[k][2];$ **Finpr;****Fin.**

A.4 Conclusion

ans cette annexe, nous avons présenté les différents algorithmes implémentés dans la méthode AMFI en commençant par l'algorithme de détermination de la capacité 2-additive et en passant par les algorithmes des différentes phases de la méthode AMFI, à savoir, la comparaison, l'agrégation et l'exploitation. Dans la prochaine annexe, nous présenterons le prototype utilisé dans nos expérimentations ainsi qu'un scénario d'utilisation muni de captures d'écran.

Annexe B

Le Prototype AMFI

Dans cette annexe, nous présentons le prototype expérimental qui nous a permis d'effectuer les différentes expérimentations de la méthode AMFI. Pour cela, nous présenterons les aspects de la conception et de la mise en œuvre du prototype. Nous exposerons par la suite les interfaces du prototype AMFI à travers des captures d'écran dans le cadre d'un scénario d'utilisation.

Plan

B.1	Introduction	138
B.2	Modélisation UML du prototype	138
	B.2.1 Diagramme Use-case	139
	B.2.2 Diagramme de classes	139
	B.2.3 Diagrammes de séquence	140
B.3	Mise en œuvre du prototype	141
	B.3.1 Lancement du prototype	141
	B.3.2 Chargement des données d'entrée	142
	B.3.3 Exécution de la méthode AMFI	143
	B.3.4 Edition des résultats	145
B.4	Conclusion	145

Annexe B

Le Prototype AMFI

B.1 Introduction

Afin de mettre en évidence les aspects théoriques de la méthode AMFI présentés dans le chapitre 4, nous avons procédé à une série d'expérimentations réalisées sur plusieurs échantillons de données [JOE 97]. Pour cela, nous avons conçu et mis en œuvre un prototype expérimental permettant d'expérimenter la méthode proposée. Dans cette annexe nous présentons le prototype AMFI à travers des captures d'écran et un scénario d'utilisation.

Les expérimentations de la méthode AMFI ont été réalisées grâce à un prototype conçu et mis en œuvre spécialement pour cette fin. Le prototype AMFI permet à l'utilisateur d'introduire sa matrice de performances ainsi que ses paramètres subjectifs et lui fournis le rangement final. Le prototype fournis également à l'utilisateur certaines informations propres à la méthode AMFI telles que les scores obtenus et la matrice de confrontation.

B.2 Modélisation UML du prototype

Nous décrivons dans cette partie la démarche de développement de notre Prototype. Nous avons exploité la méthode UML¹ pour exprimer les besoins et ainsi maîtriser la vision statique et dynamique de notre application. Cette méthode nous a permis d'avoir une vision simple et schématique de notre prototype.

La modélisation en utilisant UML passe par trois catégories de diagrammes, à savoir, les diagrammes comportementaux, les diagrammes statiques, et les diagrammes dynamiques. Nous avons opté pour le diagramme des cas d'utilisation (comportemental), le diagramme de classes (statique) et le diagramme de séquence (dynamique).

¹Unified Modeling Language

B.2.1 Diagramme Use-case

Le diagramme des cas d'utilisation (DCU) décrit sous la forme d'actions et de réactions le comportement externe du système, c'est-à-dire, du point de vue des Utilisateurs. Il permet de définir les frontières du système et les relations entre le système et l'environnement. Un DCU comprend les acteurs (souvent l'opérateur humain), le système et les cas d'utilisation. La figure (B.1) représente le diagramme des cas d'utilisation du prototype AMFI.

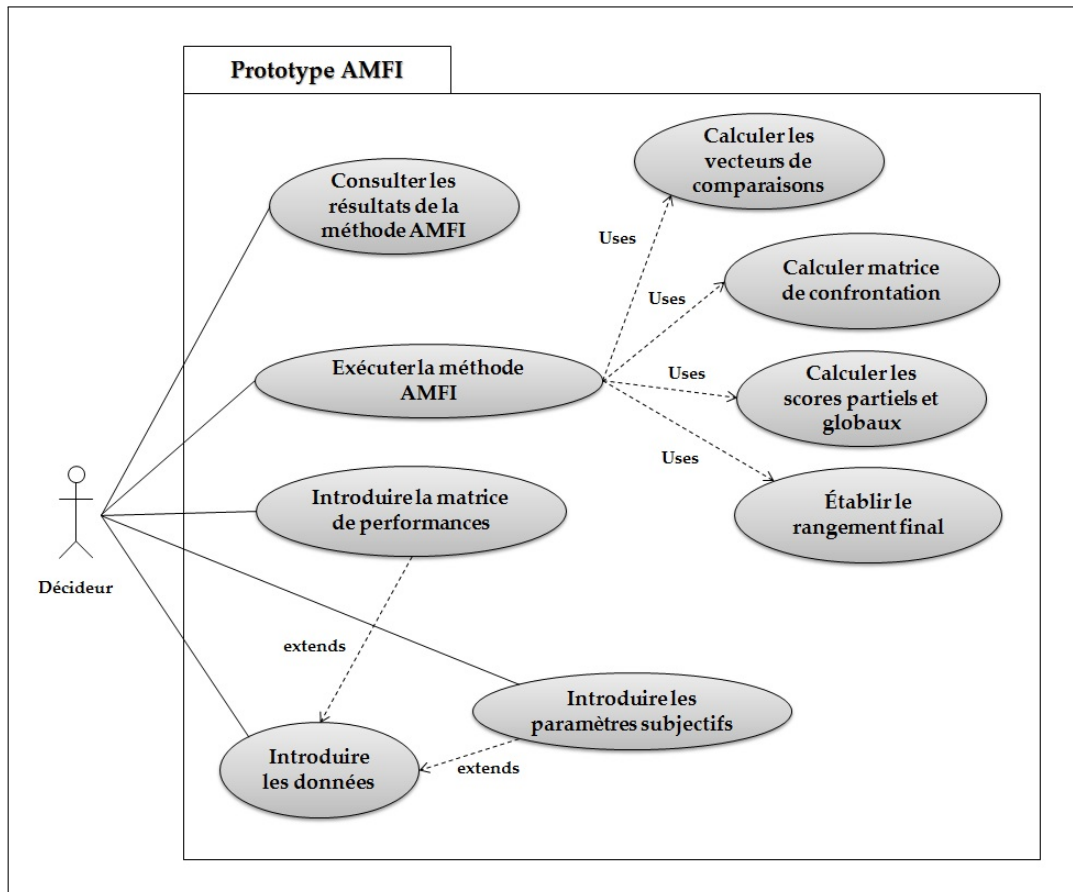


FIG. B.1 – Diagramme des cas d'utilisation du prototype AMFI

B.2.2 Diagramme de classes

Un diagramme de classes est une collection d'éléments de modélisation statiques (classes, paquets, etc.), qui montre la structure d'un modèle de données. Un diagramme de classes fait abstraction des aspects dynamiques et temporels. Pour un modèle complexe, plusieurs diagrammes de classes complémentaires doivent être construits. La figure (B.2) présente le diagramme de classes du prototype AMFI.

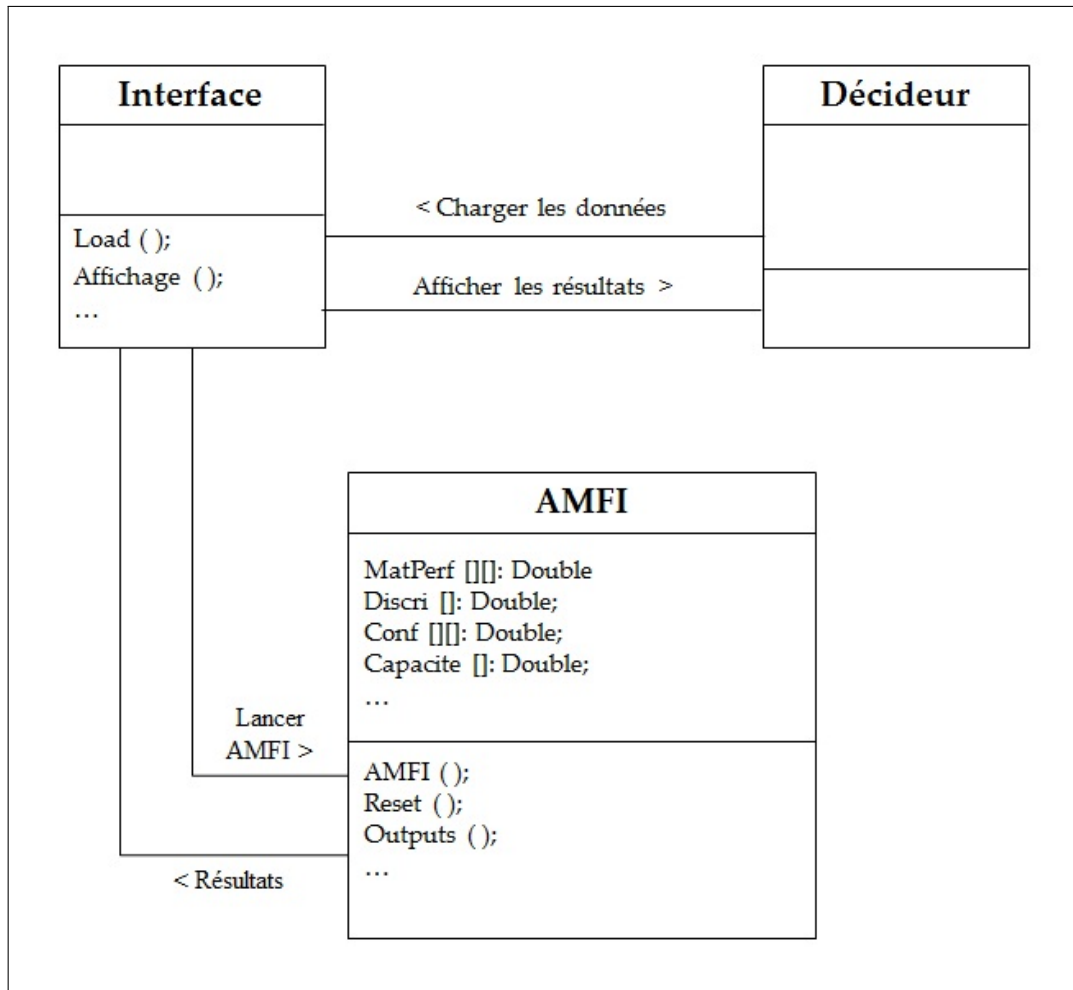


FIG. B.2 – Diagramme de classes du prototype AMFI

B.2.3 Diagrammes de séquence

Les diagrammes de séquence permettent de représenter les collaborations entre objets selon un point de vue temporel en s'intéressant à la chronologie des envois de messages. Contrairement au diagramme de collaboration, le contexte ou l'état des objets ne sont pas décrit, la représentation se concentre sur l'expression des interactions. Les diagrammes de séquence peuvent servir à illustrer un cas d'utilisation. La figure (B.3) représente le diagramme de séquence d'un scénario d'utilisation du prototype AMFI.

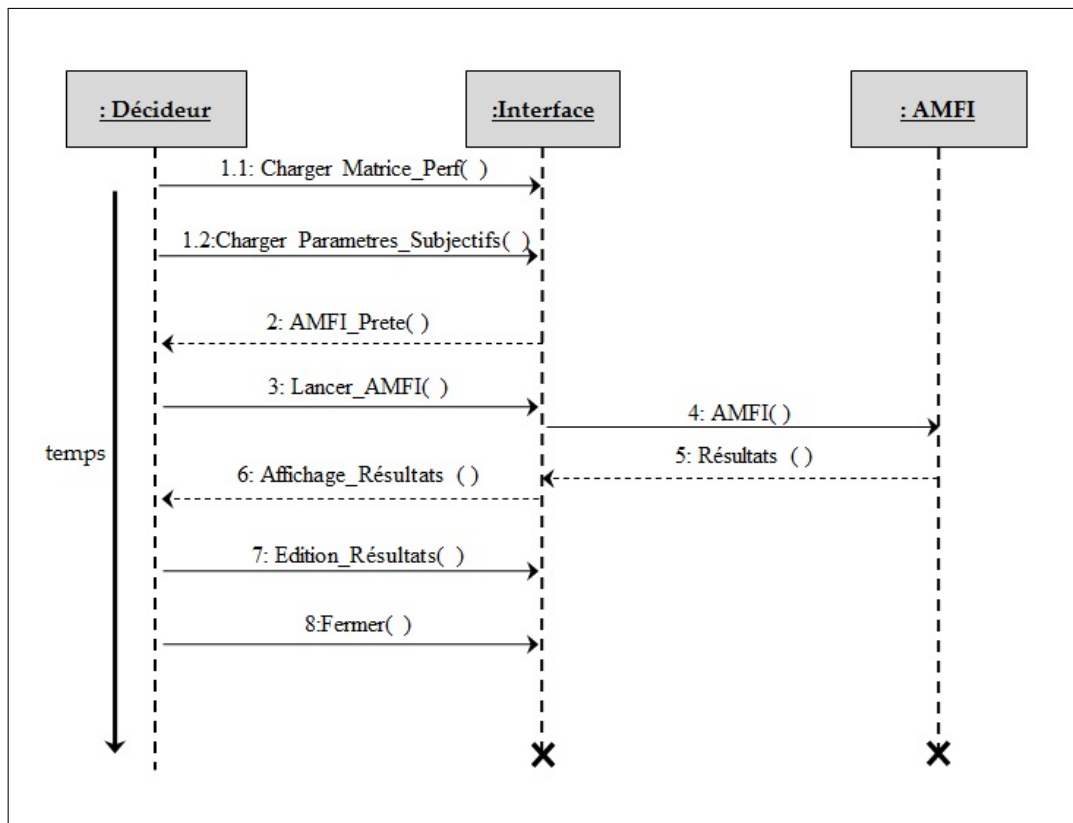


FIG. B.3 – Diagramme de classes du prototype AMFI

B.3 Mise en œuvre du prototype

Nous avons utilisé pour la réalisation du prototype AMFI l'environnement "Borland C++ Builder 6²" et le langage de programmation orienté-objet C++. L'interface principale du prototype AMFI est de forme rectangulaire subdivisée en plusieurs zones afin d'augmenter la quantité d'informations affichées à l'écran. Pour cela, chaque zone est munie de barres de déroulement horizontal et vertical. Afin d'illustrer les différentes interfaces du prototype AMFI, nous présentons dans ce qui suit un scénario d'utilisation du prototype.

B.3.1 Lancement du prototype

Au lancement du prototype, l'interface d'accueil apparaît sous une forme rectangulaire afin de favoriser son ergonomie. L'interface est composée d'une barre de menu permettant d'accéder à toutes les fonctionnalités du prototype. L'espace de travail ne contient que deux boutons :

²La dernière version de C++ builder est la "10 Seattle" lancée en Aout 2015 par "Embarcadero" [NET 3]

- Le bouton "**Load**" permettant de charger les données d'entrée à partir de fichiers.
- Le bouton "**Reset**" qui permet remettre l'interface du prototype à l'état initial.

B.3.2 Chargement des données d'entrée

En cliquant sur le bouton "**Load**", une boîte de dialogue apparaît invitant l'utilisateur à choisir en premier lieu le fichier de données contenant la matrice de performance et dont l'extension spécifique est ".amf" (figure B.4). Une fois ce fichier choisi, une autre boîte de dialogue apparaît afin que l'utilisateur puisse charger les paramètres subjectifs à partir d'un fichier en extension ".sub" (figure B.5).

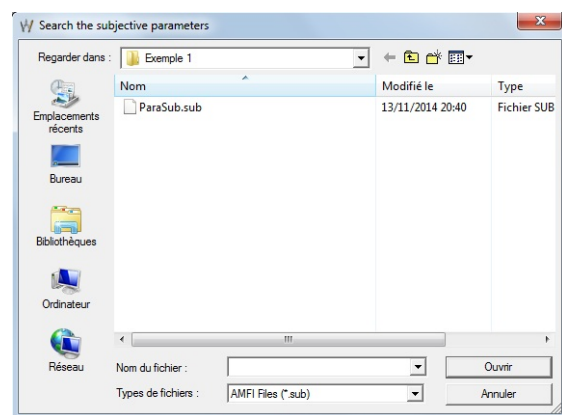
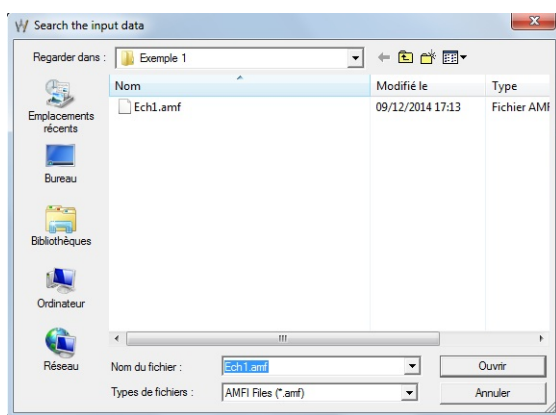


FIG. B.4 – Boîtes de dialogue pour charger la matrice de performance

FIG. B.5 – Boîtes de dialogue pour charger les paramètres subjectifs

Après chargement des deux fichiers de données, le nombre d'actions et de critères, la matrice de performance ainsi que les paramètres subjectifs sont affichés dans l'espace de travail de l'interface du prototype (figure B.6). Il est à noter que les paramètres subjectifs chargés par l'utilisateur et affichés sur l'interface du prototype sont :

- Les seuils de discrimination p_j
- Les coefficients de la capacité 2-additive pour chaque critère μ_j .
- Les indices d'interaction des paires de critères (capacité 2-additive) I_{ij}

L'utilisateur peut relancer le processus de chargement des données en cliquant sur le bouton "**Reset**" ce qui a pour effet de revenir à l'interface d'accueil du prototype. L'appui sur le bouton "**AMFI**" permet de lancer l'exécution de la méthode AMFI sur les données chargées par l'utilisateur.

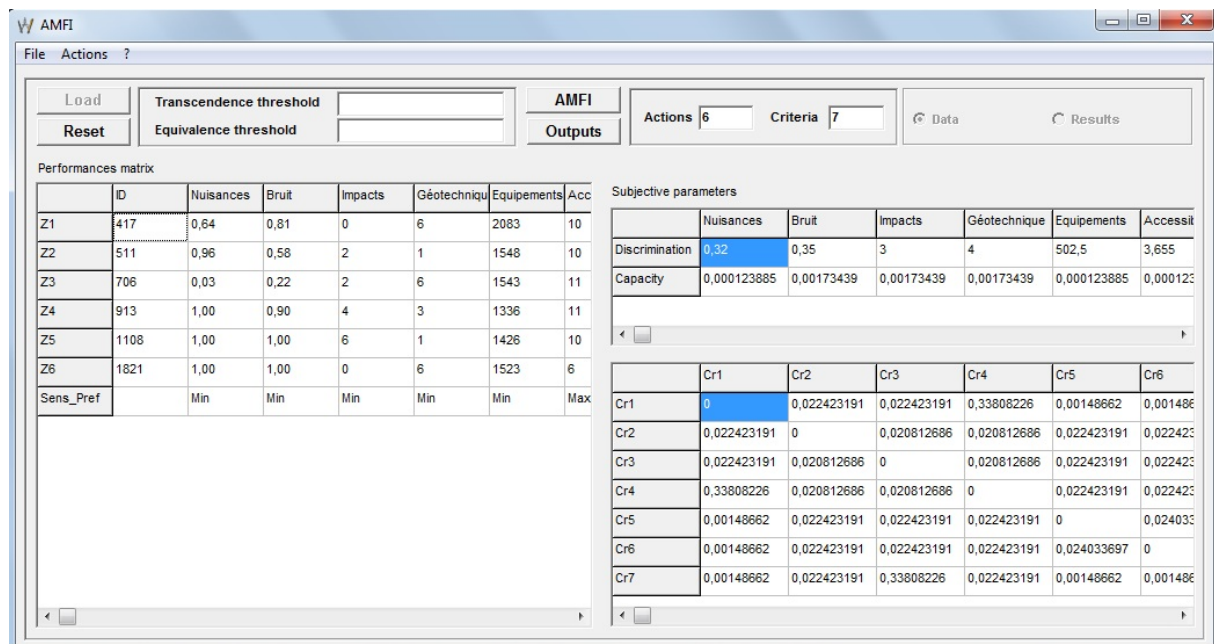


FIG. B.6 – Affichage de la matrice de performance et des paramètres subjectifs

B.3.3 Exécution de la méthode AMFI

En cliquant sur le bouton "AMFI" l'utilisateur lance l'exécution de la méthode AMFI et obtient un nouvel espace de travail (figure B.7) lui affichant les résultats obtenus, à savoir, la matrice de confrontation (figure B.8) et le rangement final (figure B.9). L'utilisateur peut revoir en cas de besoin les données d'entrée en cliquant sur le bouton radio "Data" ou revenir aux résultats en cliquant sur le bouton radio "Results".

Confrontations						Ranking		Scores
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Rank	Action(D)	Score
Z1	0	-0,024281466	-0,048315162	0,024157581	0,33969276	Rank 1	Z3(706)	8,56932459813084
Z2	0,024281466	0	-0,022547076	0	0,38491080	Rank 2	Z2(511)	7,0324185046729
Z3	0,048315162	0,022547076	0	0,024281466	0,42963329	Rank 3	Z1(417)	5,12470014953271
Z4	-0,024157581	0	-0,024281466	0	0,00012388	Rank 4	Z4(913)	4,1486065046729
Z5	-0,339692765	-0,384910802	-0,429633299	-0,000123885	0	Rank 5	Z6(1821)	4,12495024299065
Z6	-0,001610505	-0,069251733	-0,048315162	0,001610505	0,31565906	Rank 6	Z5(1108)	1

FIG. B.7 – Affichage des résultats de l'exécution de la méthode AMFI

Confrontations					
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
Z1	0	-0,024281466	-0,048315162	0,024157581	0,33969276
Z2	0,024281466	0	-0,022547076	0	0,38491080
Z3	0,048315162	0,022547076	0	0,024281466	0,42963329
Z4	-0,024157581	0	-0,024281466	0	0,00012388
Z5	-0,339692765	-0,384910802	-0,429633299	-0,000123885	0
Z6	-0,001610505	-0,069251733	-0,048315162	0,001610505	0,31565906

FIG. B.8 – Matrice de confrontation

Ranking		Scores
Rank	Action(ID)	Score
Rank 1	Z3(706)	8,56932459813084
Rank 2	Z2(511)	7,0324185046729
Rank 3	Z1(417)	5,12470014953271
Rank 4	Z4(913)	4,1486065046729
Rank 5	Z6(1821)	4,12495024299065
Rank 6	Z5(1108)	1

FIG. B.9 – Rangement final de la méthode AMFI

B.3.4 Edition des résultats

L'interface permet également à l'utilisateur de cliquer sur le bouton "**Outputs**" qui a pour rôle de créer un fichier Excel appelé "**Ranking.xls**" contenant le rangement final et le stocker au même emplacement depuis lequel les fichiers d'entrée ont été chargés.

B.4 Conclusion

Dans cette annexe, nous avons présenté les différents aspects de modélisation et de mise en œuvre du prototype AMFI à travers des diagrammes UML. Aussi, nous avons illustré les interfaces de notre prototype dans le cadre d'un scénario d'exécution qui commence par charger les données d'entrée à partir de fichiers, exécuter la méthode d'analyse multicritères AMFI et enfin afficher les résultats obtenus.

Références

Références

- [ABD et al 07] S. ABDELLATIF, N. ZOUBIR, D. HAMDADOU et K. LABED, "*Contribution A l'analyse De Sensibilité Et De Robustesse De La Méthode Multicritère Electre III*", Mémoire pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en informatique, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2007.
- [ADM et al 04] O. ADMANE, K. HOANG et N. OUAKLI, "*Statistique, cours et exercices*", Office des Publication Universitaires, Alger, ISBN : OPU3053, pp 179, 2004.
- [ALN et al 13] E. ALNAFIE, D. HAMDADOU, A. BENYELLOUL et M. MESSAOUDI, "*Optimisation De La Méthode Multicritère Electre III Par Les Colonies De Fourmis*", 8^{me} Conférence Internationale, Conception et production Intégrées, Tlemcen, Algérie, 2013.
- [ALN et al 15] E. ALNAFIE, D. HAMDADOU et K. BOUAMRANE, "*Towards a New Multicriteria Decision Analysis Method Using Fuzzy Measures and the Choquet Integral*", International Journal of Fuzzy System Applications, vol 5(1), pp 65-94, 2016.
- [ARG et al 78] C. ARGYRIS et D.A. SCHÖN, "*Organizational learning : a theory of action perspective*", Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [ATT et al 91] J.M. ATTONATY, M.H. CHATELIN, J.C. POUSSIN et L.G. SOLER, "*Advice and decision support systems in agriculture : new issues*", Presented at Decision Support Systems, Bruges, Belgium, 1991.
- [AYA 10] D. AYADI AZZABI, "*Optimisation Multicritere De La Fiabilite : Application Du Modele De Goal Programming Avec Les Fonctions De Satisfactions Dans L'industrie De Traitement De Gaz*", Thèse de Doctorat en cotutelle, Université de Sfax, Université d'Angers, 2010.
- [BAN 86] C. A. BANA E COSTA, "*A multicriteria decision aid methodology to deal with conflicting situations on weights*", European Journal of Operational Research, vol 26, pp 22-34, 1986.
- [BAN et al 94] C.A. BANA E COSTA et J.C. VANSNICK, "*MACBETH : an interactive path towards the construction of cardinal value functions*", International Transactions in Operational Research, vol 1(4), pp 489-500, 1994.
- [BAN et al 02] C.A. BANA E COSTA, M.L. COSTA-LOBO, I.A.J. RAMOS et J.C. VANSNICK, "*Multicriteria approach for strategic town planning : The case of Barcelos*", Aiding Decisions with Multiple Criteria : Essays in Honour of Bernard Roy, pp 429-456, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [BEL et al 01] V. BELTON et T.J. STEWART, "*Multiple criteria decision analysis : An integrated approach*", Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 2001.
- [BEN 00] S. BEN MENA, "*Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la Décision*", Unité de Mathématique, Faculté Universitaire des Sciences Agronomiques de Gembloux, 2000.

- [BEN et al 75] R. BENAYOUN, J. DE MONTGOLFIER, J. TERGNY et O. LARICHEV, "*Linear programming with multiple objective functions : STEP method (STEM)*", Mathematical programming, vol 1, pp 366-375, 1975.
- [BEN 10] A. BENNABOU, "*Vers un Système Interactif d'Aide Multicritères à la Décision de Groupe en Aménagement du Territoire*", Mémoire pour l'obtention du diplôme de Magister, Université Abou-Bekr-Belkaid Tlemcen, 2010.
- [BEN et al 12] A. BENYELLOUL et M. MESSAOUDI, "*Optimisation de la Methode Multicritere ELECTRE III Par Les Colonies De Fourmis*", Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2012.
- [BON et al 84] R.H. BONCZEK, C.W. HOLSHAPPLE et A.B. WHINSTON, "*Developments in decision support system*", Advances in Computers, vol 23, pp 145-175, 1984.
- [BOU et al 90] P. BOURGINE et J.L. LEMOIGNE, "*Les bonnes décisions sont-elles optimales ou adéquates ?*" présenté au XII^{me} congrès européen de recherche opérationnelle, Athènes, Grèce, 1990.
- [BOU 06] K. BOUAMRANE, "*Un système interactif d'aide à la décision pour la régulation d'un réseau de transport urbain bimodal : Approche multi-agent et raisonnement à base de cas*", Thèse Doctorat, Département d'informatique, Université d'Oran 1-Ahmed Ben Bella, 2006.
- [BOU et al 08] H. BOURAS et K. BOUDRIA, "*Optimisation de la Méthode Multicritères ELECTRE III Par Le Recuit Simulé*", Mémoire pour l'obtention du diplôme d'ingénieur, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2008.
- [BOU 93] D. BOUYSSOU, "*Décision multicritère ou aide multicritère ?*", Newsletter of the european working group, 2nd series, 1993.
- [BOU 15] D. BOUYSSOU et T. MARCHANT, "*On the relations between ELECTRE TRI-B and ELECTRE TRI-C and on a new variant of ELECTRE TRI-B*", European Journal of Operational Research, vol 242(1), pp 201-211, 2015.
- [BOU 15] N. BOUAZZA HAMADOUCHE, "*Optimisation de la méthode ELECTRE III par les algorithmes des chauves-souris*", Mémoire de Master en Informatique, spécialité MSID, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2015.
- [BRA et al 01] J.P. BRANS et B. MARESCHAL, "*Prométhée - Gaia : Une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples*", Série : Statistique et mathématiques appliquées, Editions de l'université de Bruxelles, Belgique, pp 192, 2001.
- [BUI 94] T. BUI, "*Evalauting Negotiation Support Systems : A Conceptualization*", presented at 27th Hawaii International Conference on System Science, Maui, Hawaii, 1994.

- [CAC et al 97] J.T. CACIOPPO, W.L. GARDNER et G.G. BERNTSON, "*Beyond bipolar conceptualizations and measures : the case of attitudes and evaluative space*", *Personality and Social Psychology Review*, vol 1(1), pp 3-25, 1997.
- [CHA et al 95] A.M. CHANG et T.D. HAN, "*Design of an Argumentation-Based Negotiation Support System*", *Decentralized A.I 3*, Editors : E. Werner and Y. Demazeau, pp 89-198, 1995.
- [CHA et al 05] S. CHAKHAR, V. MOUSSEAU, C. PUSCEDU et B. ROY, "*Decision map for spatial decision making in urbanism planning*", *ROADEF'2005*, Tours, France, 2005.
- [CHO 53] G. CHOQUET, "*Theory of capacities*", *Annales de l'Institut Fourier*, vol 5, pp 131-295, 1953.
- [COH et al 80] J.L. COHON, C.S. REVELLE, J. CURRENT, T. EAGLES, R. EBERHARD et R. CHURCH, "*Application of a multiobjective facility location model to power plan siting in a six-state region of the US*", *Computers & Operations Research*, vol 7, pp 107-123, 1980.
- [COU 88] J.C. COURBON, "*Les SIAD : outils, concepts et mode d'action*", *AFCET interfaces*, vol 9, pp 30-36, 1988.
- [COU 93] J.C. COURBON, "*Systèmes Interactifs d'Aide à la Décision*", Editions PUF, 1993.
- [CYE et al 63] R.M. CYERT et J.G. MARCH, "*A Behavioural Theory of the Firm*", New Jersey : Prentice-Hall, 1963.
- [DAL 05] O. DALLE, "*Communication par les sockets*", Support de cours, Université de Nice, Sophia Antipolis, 2005.
- [DEN et al 15a] L. DENG-FENG et R. HAI-PING, "*Multi-attribute decision making method considering the amount and reliability of intuitionistic fuzzy information*", *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol 28, pp 1877-1883, 2015.
- [DEN et al 15b] L. DENG-FENG et Y. JIE, "*A difference-index based ranking method of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to multiattribute decision making*", *Mathematical and Computational Applications*, vol 20(1), pp 25-38, 2015.
- [DEN 14] L. DENG-FENG, "*Decision and Game Theory in Management with Intuitionistic Fuzzy Sets*", Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2014.
- [DEN 10] L. DENG-FENG, "*A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems*", *Computers & Mathematics with Applications*, vol 60(6), pp 1557-1570, 2010.
- [DUB et al 84] D. DUBOIS et H. PRADE, "*Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory*", *Fuzzy Sets and Decision Analysis*, vol 20, pp 209-240, 1984.

- [EDW 71] W. EDWARDS, "*Social utilities*", Engineering Economist, 6th Series of Summer Symposium, pp 119-129, 1971.
- [ELL 88] J.H. ELLIS, "*Multiobjective mathematical programming models for acid rain control*", European Journal of Operational Research, vol 35, pp 365-377, 1988.
- [FIS 70] P.C. FISHBURN, "*Utility theory for decision-making*", New-York : Wiley, 1970.
- [GHA 08] M.R. GHALEM, "*Système D'aide A La Decision En Aménagement Du Territoire : Approche Du Tri Multicritere, Integrale De Choquet Et SIG*", Mémoire pour l'obtention du diplôme de Magister, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2008.
- [GLO et al 87] F. GLOVER et F. MARTINSON, "*Multiple-use land planning and conflict by multiple objective linear programming*", European Journal of Operational Research, vol 28, pp 343-350, 1987.
- [GRA et al 92] M. GRABISCH, T. MUROFUSHI et M. SUGENO, "*Fuzzy measures of fuzzy events defined by fuzzy integrals*", Fuzzy Sets and Systems, vol 50, pp 293-313, 1992.
- [GRA et al 95] M. GRABISCH, H.T. NGUYEN et E.A. WALKER. "*Fundamentals of Uncertainty Calculi, with Applications to Fuzzy Inference*", Kluwer Academic, 1995.
- [GRA 97] M. GRABISCH, "*k-order additive discrete fuzzy measures and their representation*", Fuzzy Sets and Systems, vol 92, pp 167-189, 1997.
- [GRA et al 00a] M. GRABISCH, T. MUROFUSHI et M. SUGENO, "*Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*", Physica-Verlag, 2000.
- [GRA et al 00b] M. GRABISCH et M. ROUBENS, "*Application of the Choquet integral in multicriteria decision making*", Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications, pp 348-374, Physica-Verlag, 2000.
- [GRA et al 02a] M. GRABISCH et P. PERNY, "*Agrégation Multicritère*", Document Pédagogique, Université Paris I - Panthéon-Sorbonne, 2002.
- [GRA et al 02b] M. GRABISCH et CH. LABREUCHE, "*Bi-capacities for decision making on bipolar scales*", In EUROFUSE Workshop on Informations Systems, Varenna, Italy, pp 185-190, September 2002.
- [GRA et al 02c] M. GRABISCH et CH. LABREUCHE, "*Fuzzy measures and integrals in MCDA*", Multiple Criteria Decision Analysis, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [GRA 04] M. GRABISCH, "*Une approche constructive de la décision multicritère*", Document Pédagogique, Université Paris I - Panthéon-Sorbonne, Février 2004.

- [GRE et al 08] S. GRECO, V. MOUSSEAU et R. SLOWINSKI, "*Ordinal regression revisited : multiple criteria ranking using a set of additive value functions*", *European Journal of Operational Research*, vol 191(2), pp 415-435, 2008.
- [HAL 84] R.I. HALL, "*The natural logic management policy making its implications for the survival of an organisation*", *Management Science*, vol 30, pp 905-927, 1984.
- [HAL et al 09] N. HALOUANI, H. CHABCHOUB et J.M. Martel, "*PROMETHEE-MD-2T method for project selection*", *European Journal of Operational Research*, vol 195, pp 841-849, 2009.
- [HAM et al 07] D. HAMDADOU et M.R. GHALEM, "*A Multicriterion SDSS for the Space Process Control : Towards a Hybrid Approach*", *MICAI 2007 : Advances in Artificial Intelligence*, LNCS, Springer, ISSN 0302-9743 1611-3349, pp 139-150, 2007.
- [HAM 08] D. HAMDADOU, "*Un modèle pour la prise de décision en aménagement de territoire, une approche multicritère et une approche de négociation*", Thèse de Doctorat, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2008.
- [HAM et al 15] D. HAMDADOU, K. BOUAMRANE et O.E.K. NAOUI, "*Méthodologie Multi-critère d'Aide à la Décision*", Document Pédagogique, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2015.
- [HAM 03] A. HAMMAMI, "*Modélisation technico-économique d'une chaîne logistique dans une entreprise réseau*", Thèse de Doctorat, L'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2003.
- [HOR 89] E. HORVITZ, "*Reasoning about beliefs and actions under computational resource constraints*", in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, Edition Elsevier, vol 3, pp 301-324, 1989.
- [HUC et al 14] L. HUCHANG et X. ZESHUI, "*Multi-criteria decision making with intuitionistic fuzzy PROMETHEE*", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol 27(4), pp 1703-1717, 2014.
- [IGN 78] J.P. IGNIZIO, "*A review of goal programming : a tool for multiobjective analysis*", *Journal of the Operational Research Society*, vol 29(11), pp 1109-1119, 1978.
- [INE et al 09] Convention ONEMA-INERI, Action 18a, "*Priorisation des pesticides et des substances chimiques à surveiller Panorama des méthodes d'analyse multicritère comme outils d'aide à la décision*", INERIS Direction des Risques Chroniques, 2009.
- [JAC et al 82] E. JACQUET-LAGREZE et J. SISKOS, "*Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making, the UTA method*", *European Journal of Operational Research*, vol 10(2), pp 151-164, 1982.

- [JEL et al 87] M.T. JELASSI et R.A. BEAUCLAIR, "*An integrated framework for group decision support systems design*", *Information & Management*, vol 13, pp 143-153, 1987.
- [JOE 97] F. JOERIN, "*Décider sur le territoire : Proposition d'une approche par l'utilisation de SIG et de méthodes d'analyse multicritère*", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, pp 268, 1997.
- [JOE et al 01a] F. JOERIN et M.C. REY, "*Information et participation pour l'aménagement du territoire : Rôle des instruments d'aide à la décision*", *Revue internationale de géomatique*, vol 11, pp 7-30, 2001.
- [JOE et al 01b] F. JOERIN, M.C. REY et G. DESTHIEUX, "*Participation et information en aménagement du territoire urbain*", *Potentiels des instruments d'aide à la négociation et à la décision*, vol 1, pp 123-136, 2001.
- [KAB et al 13] G. KABIR, M. AHSAN et A. HASIN, "*Integrating modified Delphi method with fuzzy AHP for optimal power substation location selection*", *International Journal of Multicriteria Decision Making*, vol 3(4), pp 381-398, 2013.
- [KEE et al 78] P.G.W. KEEN et M.S. SCOTT-MORTON, "*Decision Support Systems : An Organizational Perspective*", Publisher : Addison-Wesley, 1978.
- [KEE 92] R.L. KEENEY, "*Valued_Focused thinking : A path to creative decision*", Harvard University Press, USA, 1992.
- [KRA et al 71] D.H. KRANTZ, R.D. LUCE, P. SUPPES et A. TAVERSKY, "*Foundations of measurement, volume 1 : Additive and Polynomial Representations*", Academic Press, 1971.
- [LAA 95] A. LAARIBI, "*Systèmes d'Information Géographique et Analyse Multicritère : Intégration pour l'aide à la décision à référence Spatiale*", Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 1995.
- [LAA 00] A. LAARIBI, "*SIG et analyse multicritère*", Edition Hermès, Science Publications, Paris, 2000.
- [LAB et al 03] C. LABREUCHE et M. GRABISCH, "*The Choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making*", *Fuzzy Sets and Systems*, vol 137(1), pp 11-26, 2003.
- [LAB et al 06] C. LABREUCH et M. GRABISCH, "*Generalized Choquet-like aggregation functions for handling bipolar scales*", *European Journal of Operational Research*, vol 172(3), pp 931-955, 2006.
- [LAB et al 07] K. LABED, A. BENYETTOU et D. HAMDADOU, "*Expérimentation des Algorithmes Génétiques Multiobjectifs dans un Processus Décisionnel Multicritère en Aménagement*

- du Territoire*", Mémoire pour l'obtention du diplôme de Magister, Université d'Oran 1 - Ahmed Ben Bella, 2007.
- [LAN et al 11] F. LANGE et M. GRABISCH, "New axiomatizations of the Shapley interaction index for bi-capacities", *Fuzzy Sets and Systems*, vol 176(1), pp 64-75, 2011.
- [LEB 68] H. LE BOULANGER et B. ROY, "L'entreprise face à la sélection et à l'orientation des projets de recherche : la méthodologie en usage dans le groupe SEMA", *Revue METRA*, vol 7(4), pp 641-669, 1970.
- [LEB 02] M. LE BARS, "Un Simulateur Multi-Agent pour l'Aide à la Décision d'un Collectif : Application à la Gestion d'une Ressource Limitée Agro-environnementale", Thèse de Doctorat, Université Paris IX-Dauphine, 2002.
- [LEV et al 89] P. LEVINE et J.C. POMEROL, "Systèmes Interactifs D'Aide à la décision et Systèmes Experts-coll", *Traité des nouvelles technologies, Série décision assistée par ordinateur*, Hermès, Paris, 1989.
- [LEY 05] J.C LEYVA LOPEZ , "Multicriteria Decision Aid Application to a Student Selection Problem", *Pesquisa Operacional*, vol 25(1), pp 45-68, 2005.
- [LIG et al 06] D. LIGINLAL et T.T. OW, "Modeling attitude to risk in human decision processes : An application of fuzzy measures", *Fuzzy Sets and Systems*, vol 157(23), pp 3040-3054, 2006.
- [LIN et al 13] W. LI-LING, L. DENG-FENG et Z. SHU-SHEN, "Mathematical programming methodology for multiattribute decision making using interval-valued intuitionistic fuzzy sets", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* vol 24(4), pp 755-763, 2013.
- [LIU et al 14] C. LIUHAO et X. ZESHUI, "A prioritized aggregation operator based on the OWA operator and prioritized measure", *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol 27(3), 2014.
- [MAR 98] J. MARICHAL, "Aggregation operators for multicriteria decision aid", Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1998.
- [MAR 99] J.L. MARICHAL et M. ROUBENS, "Determination of weights of interacting criteria from a reference set", *European Journal of Operational Research*, vol 124(3), pp 641-650, 1999.
- [MAR 02] J. MARICHAL, "Aggregation of interacting criteria by means of the discrete choquet integral", *New trends and applications*, pp 224-244, Heidelberg, 2002.
- [MAR 13] B. MARESCHAL, "Visual PROMETHEE 1.4 Manual", *Visual PROMETHEE 1.4 Manual and Help file*, VPSolutions, 2013.
- [MAS et al 81] A.S. MASUD et C.L. HWANG, "Interactive sequential goal programming", *Journal of the Operational Research Society*, vol 32(5), pp 391-400, 1981.

- [MAY et al 08] B. MAYAG, M. GRABISCH et C. LABREUCHE. "*Un algorithme de détermination de la capacité pour l'intégrale de Choquet 2-additive*", In Proceedings Rencontres Francophone sur la Logique Floue et ses Applications, pp 260-267, Lens, France, 2008.
- [MAY et al 15] B. MAYAG, M. GRABISCH et C. LABREUCHE, "*A characterization of the 2-additive Choquet integral through cardinal information*", Fuzzy Sets and Systems, vol 184(1), pp 84-105, 2011.
- [MAY et al 94] L.Y. MAYSTRE, J. PICTET et J. SIMOS, "*Méthodes multi - critères Electre. Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale*", Presses polytechniques et universitaires romandes, 1994.
- [MEY et al 06] P. MEYER et M. ROUBENS, "*On the use of the Choquet integral with fuzzy numbers in multiple criteria decision support*", Fuzzy Sets and Systems, vol 157(7), pp 927-938, 2006.
- [MIL et al 12] B. MILEVA-BOSHKOSKA et M. BOHANEK, "*A Method for Ranking Non-Linear Qualitative Decision Preferences using Copulas*", International Journal of Decision Support System Technology, vol 4(2), pp 42-58, 2012.
- [MIN 93] H. MINTZBERG, "*Structure et dynamique des organisations*", EYROLLES - Editions d'organisation, pp 26, Paris, 1993.
- [MOS et al 76] J. MOSCAROLA et B. ROY, "*Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur un classement trichotomique en présence de critères multiples*", Cahiers du Lamsade, Université Paris Dauphine, pp 32, 1976.
- [MOU 93] V. MOUSSEAU, "*Problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision : Réflexions théoriques, expérimentations et implémentations informatiques*", Thèse de Doctorat, Université Paris-Dauphine, 1993.
- [MOU 99] V. MOUSSEAU, "*Concepts de base en aide multicritère à la décision*", Séminaire au sein de l'Ecole Centrale Paris, 2009.
- [MUR 92] T. MUROFUSHI, "*A technique for reading fuzzy measures (I) : the Shapley value with respect to a fuzzy measure*", In 2nd Fuzzy Workshop, pp 39-48, Nahaoka, Japan, 1992.
- [MUR et al 93] T. MUROFUSHI et S. SONEDA, "*Techniques for reading fuzzy measures (III), interaction index*", In 9th Fuzzy System Symposium, pp 693-696, Sapporo, Japan, 1993.
- [MUR et al 00] T. MUROFUSHI et M. SUGENO, "*Choquet Integral Models and Independence Concepts in Multiattribute Utility Theory*", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol 8(4), pp 385-416, 2000.
- [NA et al 15] C. NA, X. ZESHUI et X. MEIMEI, "*The ELECTRE I Multi-Criteria Decision-Making Method Based on Hesitant Fuzzy Sets*", International Journal of Information Technology and Decision Making, vol 14(3), pp 621-658, 2015.

- [NAF 10] A. NAFI et C. WEREY, "*Aide à la décision multicritère : introduction aux méthodes d'analyse multicritère de type ELECTRE*", Support de cours, Module "Ingénierie financière", Université ENGEES, 2010.
- [NAR et al 04] Y. NARUKAWA et T. MUROFUSHI, "*Decision Modelling Using the Choquet Integral*", Modeling Decisions for Artificial Intelligence (MDAI), vol 3131, pp 183-193, 2004.
- [NAR et al 08] Y. NARUKAWA et T. MUROFUSHI, "*Choquet-stieltjes integral as a tool for decision modeling*", International Journal of Intelligent Systems, vol 23(2), pp 115-127, 2008.
- [NAR 12] Y. NARUKAWA, "*Choquet Integral on the Real Line as a Generalization of the OWA Operator*", Modeling Decisions for Artificial Intelligence (MDAI), vol 7647, pp 56-65, 2012.
- [NOR et al 13] M. NORESE, E. LIGUIGLI et Ch. NOVELLO, "*Integrated use of mathematical programming and multiple criteria methods in engineering design processes*", International Journal of Multicriteria Decision Making, vol 3(4), pp 346-361, 2013.
- [OSG et al 57] C.E. OSGOOD, G.J SUCI et P.H. TANNENBAUM, "*The measurement of meaning*", University of Illinois Press, 1957.
- [PAE 78] J. PAELINCK, "*Qualiflex, a flexible multiple criteria method*", Economics Letters, vol 3, pp 193-197, 1978.
- [PER 92] P. PERNY. "*Sur le non-respect de l'axiome d'indépendance dans les méthodes de type ELECTRE*", Cahiers du CERO, vol 34, pp 211-232, 1992.
- [RAH et al 13] I. RAHIMI et R. BEHMANESH, "*A Hybrid Method for Prediction and Assessment Efficiency of Decision Making Units : Real Case Study : Iranian Poultry Farms*", International Journal of Decision Support System Technology, vol 5(1), pp 66-83, 2013.
- [ROB 79] F.S. ROBERTS, "*Measurement Theory*", Addison-Wesley, 1979.
- [ROU 81] M. ROUBENS, "*Preference relations on actions and criteria in multiple criteria decision making*", European Journal of Operational Research, vol 10, pp 51-55, 1981.
- [ROY 68] B. ROY, "*Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)*", Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, vol 8, pp 57-75, 1968.
- [ROY 75] B. ROY, "*Interactions et compromis : la procédure du point de mire*", Cahiers belges de la recherche opérationnelle, 1975.
- [ROY 81] B. ROY, "*A multicriteria analysis for trichotomic segmentation problems*", Multiple criteria analysis, UK : Gower Press, pp 245-257, 1981.
- [ROY 85] B. ROY, "*Méthodologie multicritère d'aide à la décision*", Journal Economica, Paris, 1985.

- [ROY 92] B. ROY, "Science de la décision ou science de l'aide à la décision ?", Revue Internationale de systémique, vol 6, pp 497-529, 1992.
- [ROY et al 93] B. ROY et D. BOUYSSOU, "Aide multicritère à la décision : méthodes et cas", Editions Economica, Série (Production et techniques quantitatives appliquées à la gestion), Paris, 1993.
- [ROY 97] B. ROY et D. VANDERPOOTEN, "Multicriteria Aid for Decisions", Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol 6(2), pp 63-64, 1997.
- [ROY 97] B. ROY, "Un Chainon manquant en RO-AD, les conclusions robustes", Cahier du LAMSADE N° 144, Laboratoire d'Analyse Multicritère et Modélisation de Systèmes pour Aide à la Décision, Université de Paris Dauphine, 1997.
- [ROY 00] B. ROY, "Réflexions sur le thème : quête de l'optimum et aide à la décision.", Cahier du LAMSADE N° 167, Université Paris-Dauphine, pp 21, 2000.
- [RUS 99] S. RUSSEL, "Rationality and Intelligence in Foundations of rational agency", Applied logic series, vol 14, pp 11-33, 1999.
- [SAA 80] T.L. SAATY, "The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation", McGraw-Hill, New york, 1980.
- [SAA 00] T.L. SAATY, "Fundamentals of the Analytic Hierarchy Process", RWS Publications, Pittsburgh, USA, 2000.
- [SAA 03] T.L. SAATY, "Decision-making with the AHP : Why is the principal Eigenvector necessary", European Journal of Operational Research, vol 145, pp 85-91, 2003.
- [SAA 07] T.L. SAATY, "Time dependent decision-making ; dynamic priorities in the AHP/ANP : Generalizing from points to functions and from real to complex variables", Mathematical and Computer Modelling, vol 46, pp 860-891, 2007.
- [SCH 85] A. SCHÄRLIG, "Décider sur plusieurs critères : Panorama de l'aide à la décision multicritère", Presse polytechniques romandes, 1985.
- [SCH 96] A. SCHÄRLIG, "Pratiquer Electre et Prométhée : un complément à décider sur plusieurs critères", Presses polytechniques et universitaires romandes, 1996.
- [SHA 53] L.S. SHAPLEY, "A value for n-person games", Contributions to the Theory of games, vol 2, pp 307-317, 1953.
- [SHU et al 14] W. SHU-PING et L. DENG-FENG, "Atanassov's intuitionistic fuzzy programming method for heterogeneous multiattribute group decision making with Atanassov's intuitionistic fuzzy truth degrees", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 22(2), pp 300-312, 2014.

- [SIL 79] W. SILVERT, "*Symmetric summation : a class of operations on fuzzy sets*", IEEE Systems, Man, and Cybernetics, vol 9, pp 657-659, 1979.
- [SIM 47] H.E. SIMON, "*Administrative Behaviour*", MacMillan, New York, 1947.
- [SIM 58] H.E. SIMON, "*Rational choice and the structure of the environment*", Models of bounded rationality, vol 2, Cambridge : MIT Press, 1958.
- [SIM 77] H. SIMON, "*Science of Management Decision, New Jersey, Prentice-Hall, Administration et processus de décision*", 3^{me} édition, Paris, Editions Economica, 1977.
- [SIM 82] H. SIMON, "*From substantive to Procedural Rationality*", Models of Bounded Rationality, vol 2, pp 424-443, 1982.
- [SIM 90] J. SIMOS, "*L'évaluation environnementale : Un processus cognitif négocié*". Thèse de Doctorat (PhD), 1990.
- [SLO et al 02] P. SLOVIC, M. FINUCANE, E. PETERS et D.G. MACGREGOR, "*The affect heuristic*", Heuristics and biases : the psychology of intuitive judgment, pp 397-420, Cambridge University Press, 2002.
- [SUG 74] M. SUGENO, "*Theory of fuzzy integrals and its applications*", Thèse de Doctorat, Institut de Technologie de Tokyo, 1974.
- [TAI et al 10] B. TAIBI et M. BELMOKADEM, "*L'analyse Multicritère comme outil d'aide à la décision Application de la méthode PROMETHEE : Etude de cas : l'entreprise SEROR*", Mémoire de Magister, Université Abou Bekr-Belkaid, Tlemcen, Algérie, 2010.
- [TRE 96] D. TRENTESAUX, "*Conception d'un système de pilotage distribué, supervisé et multicritère pour les systèmes automatisés de production*", Thèse de Doctorat, Institut Nationale polytechnique de Grenoble, France, 1996.
- [TVE et al 92] A. TVERSKY et D. KAHNEMAN, "*Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty*", Journal of Risk and Uncertainty, vol 5(4), pp 297-323, 1992.
- [VEU 94] L. VEUVE, "*Urbanisme et génie civil*", Support du cours, Département de génie civil, École polytechnique de Lausanne, Lausanne, Suisse, 1994.
- [VIN 89] P. VINCKE, "*L'aide multicritère à la décision*", Éditions de l'Université de Bruxelles, pp 179, 1989.
- [WAN et al 08] X. WANG et E. TRIANTAPHYLLOU, "*Ranking Irregularities When Evaluating Alternatives by Using Some ELECTRE Methods*", Journal Omega, vol 36(1), pp 45-63, 2008.
- [YAG 91] R.R. YAGER, "*Connectives and quantifiers in fuzzy sets*", Fuzzy Sets & Systems, vol 40, pp 39-75, 1991.

RÉFÉRENCES

- [ZIM et al 80] H.J. ZIMMERMANN, P. ZYSNO, "Latent connectives in human decision making", *Fuzzy Sets & Systems*, vol 4, pp 37-51, 1980.
- [ZIO 80] S. ZIONTS, "*Methods for solving management problems involving multiple objectives*", The series *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol 177, pp 540-558, 1980.
- [ZIO et al 83] S. ZIONTS et J. WALLENIUS, "*An interactive programming method for solving the multiple criteria problem*", *Management Science*, vol 22(6), pp 652-663, 1983.
- [ZHI et al 02] F. ZHIPING, M. JIAN et Z. QUAN, "*An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives*", *Fuzzy Sets and Systems*, vol 131(1), pp 101-106, 2002.

Webographie

[NET 1] "*Analyse multicritères*", Site officiel de la commission européenne, "http://ec.europa.eu/europeaid/evaluation/methodology/tools/too_cri_def_fr.htm".

[NET 2] "*PROMETHEE Methods, Multicriteria Decision Aid Methods, Modeling and Software*", Site officiel du logiciel Visual PROMETHEE Academic, "<http://www.prometheegaia.net/>".

[NET 3] "*C++ Builder 10 Seattle*", Site officiel des produits de la société "Embarcadero", "<http://www.embarcadero.com/products/cbuilder>".

إلى ابني الغالي و قرة عيني و كل آمالي في الحياة. يا من كنت يسيرا في تربيتك و دراستك. يا من كنت سهلا مع
والديك و أخيك و محبا لهم و بارا بهم فكانت لك بجهودك و دعائنا درجات العلم. وفقك الله.

والدتك

إذا أحبّ الله عبدا أنعم عليه و أكرم نعم الله هي نعمة العلم فمن اكتسبها استفاد و أفاد، كان على ما أراد الله له.
إني أسأل الله لك يا ولدي أن تأخذ منزلة العلماء فتصبح ممن قال فيهم المولى عزّ و جلّ : " إنما يخشى الله من عباده
العلماء " .

والدك

إلى أخي الحبيب الذي أخلص وقته لنصحي و توجيهي. إلى أخي الذي ابتهج عند قدومي على الدنيا و زاحم أتي و
أبي في الاعتناء بي. إلى أخي الذي لم يستفرد يوما بشيء طالته يداه إلا و فيه شاركني. إلى أخي الذي بعدها فارق
غرفتي و لم يفارق قلبي.

إلى وزيرتي الذي شدّ الله به أزري و أشركه في أمري. إلى وزيرتي الذي بذكائه ألهمني و بفضلته أرشدني. إليك يا
أخي، بارك الله فيك و أبغاك لي ذخرا و أفرش طريقك بالبركة و النجاح و أسأله أن أشاركك منزلتك في الحجة إن شاء
الله آمين.

أخوك و وزيرك و رفيقك المخلص

¡Qué bien tener una persona tan excepcional a mi lado! una persona luchadora,
incansable, llena de fortaleza, determinada y por eso la vida te seguirá llenando de
más logros exitosos, a tu lado he aprendido muchas cosas. Gracias por tu sonrisa que
alegre mis días, gracias por tu presencia en mi vida. Espero que podamos celebrar
muchos más logros juntos Incha'Allah.

Que Dios el más poderoso te proteja, te dé paciencia y te bendiga querido mío.

Tu mujer

Résumé

La résolution des problèmes de notre vie passe par la prise en considération de tous les points de vue jugés pertinents. Trouver un consensus entre ces différents points de vue représente un des objectifs suprême de toute méthode d'aide multicritères à la décision. L'opération d'agrégation des critères n'est autre que la prise en compte des différents points de vue jugés pertinents. Dans l'analyse multicritères d'aide à la décision, trois types d'agrégation existent : l'agrégation totale, partielle, et locale et les approches adoptées par les MMAD sont généralement basées sur l'un de ces trois types. Dans le contexte de la présente étude, nous nous intéressons à la fois à l'agrégation des performances et à la pondération des critères, et plus particulièrement à la représentation de l'influence des critères sur la décision finale en tenant compte des interactions entre ces critères.

Nous proposons à travers la présente thèse une nouvelle approche d'agrégation pour l'élicitation des préférences du décideur dans la résolution de la problématique décisionnelle de rangement. La procédure d'agrégation proposée s'appuie, essentiellement, sur l'utilisation de l'intégrale de Choquet et des mesures floues (capacités). L'objectif principal de l'approche proposée est la prise en compte et la représentation des interactions entre les critères afin d'améliorer la cohérence et la précision des résultats de l'analyse multicritères. Dans cette optique, nous concrétisons notre approche à travers la méthode d'agrégation multicritères AMFI (Aggregation Method by Fuzzy Integrals). Nous avons effectué plusieurs expérimentations de cette méthode afin de mettre en valeur les aspects théoriques de l'approche proposée.

Mots clés : Aide Multicritères à la Décision, Analyse Multicritères, Agrégation des performances, Elicitation des Préférences, Problématique de Rangement, Interactions entre Critères, Mesures Floues, Intégrales Floues, Intégrale de Choquet.

Abstract

Solving problems of our daily life is possible through taking into account all the viewpoints considered pertinent. Finding a consensus between the different viewpoints is one of the supreme objectives of any multicriteria decision support method. This consideration of the different relevant viewpoints is none other than the operation of aggregating criteria. In the multicriteria analysis of decision support, three types of aggregation exist : the total, the partial and the local aggregation and the approaches adopted by the multicriteria decision support methods is generally based on one of these three types. In the present study context, we are interested at the same time by the aggregation of the performances and the criteria weighing, especially , by the representation of the criteria influence on the final decision taking into account the interactions between these criteria.

We propose through the present thesis a new aggregation approach for the elicitation of the decision-maker preferences in the resolution of ranking decisional problem. The aggregation proposed procedure is based essentially on the use of the Choquet integral and the fuzzy measures (capacities). The principal objective of the proposed approach is taking into account the representation of the interactions between the criteria to ameliorate the coherence and the precision of the multicriteria analysis results. In this context, we concretise our approach through the multicriteria aggregation method AMFI (Aggregation Method by Fuzzy Integrals). We have made several experimentations of this method to enhance the theoretical aspects of the proposed approach.

Keywords : Multicriteria decision support, Multicriteria analysis, Aggregation of the performances, Elicitation of the preferences, Ranking problem, Interactions between criteria, Fuzzy measures, Fuzzy integrals, The Choquet integral.

ملخص

البحث عن حلول للمشكلات التي نواجهها في حياتنا عزّ عزّ أخذ جميع وجهات النظر ذات الصلة بعين الاعتبار. إيجاد إجماع بين جميع وجهات النظر المختلفة يشكل واحدا من الأهداف السامية لأي طريقة متمعددة المعايير لدعم اتخاذ القرار. في الحقيقة، إنّ اعتبار جميع وجهات النظر ذات الصلة ليس سوى عملية تجميع المعايير. عندما يتعلّق الأمر بالتحليل متمعدد المعايير الخاص بالمساعدة على اتخاذ القرار، نجد ثلاثة أنواع من التجميع هي التام و الجزئي و المحلي و إنّ المقاربات التي تتبناها الطرق متمعددة المعايير لدعم اتخاذ القرار تقوم عموما على أساس أحد هذه الأنواع الثلاثة. في سياق هذه الدراسة، نحن نهتمّ في الوقت نفسه بعملية تجميع الأداءات و ترجيح المعايير و بالخصوص بتمثيل تأثير المعايير على القرار النهائي مع الأخذ بعين الاعتبار التفاعلات بين هذه المعايير.

نحن نقدم من خلال هذه الأطروحة مقارنة تجميع جديدة لاستنباط تفضيلات صانع القرار عند حلّ مشكلة صنع القرار المتعلقة بالترتيب. إجراء التجميع المقترح يعتمد أساسا على استخدام تكامل "شوكي" و القياسات الضبابية (القدرات). الهدف الرئيسي من المقاربة المقترحة هو اعتبار و تمثيل التفاعلات بين المعايير قصد تحسين ترابط و دقة نتائج التحليل متمعدد المعايير. في هذا الإطار، نجسد مقاربتنا من خلال طريقة التجميع متمعدد المعايير "ط. ت. ت. ض" (طريقة التجميع عن طريق التكمالات الضبابية). لقد قمنا بعدة تجارب على هذه الطريقة بغية تعزيز الجوانب النظرية للمقاربة المقترحة.

الكلمات المفتاحية : المساعدة متمعددة المعايير على اتخاذ القرار، التحليل متمعدد القرار، جميع الأداءات، التفضيلات، مشكلة الترتيب، التفاعلات بين المعايير، القياسات الضبابية، التكمالات الضبابية، تكامل "شوكي".

