

Table des matières

Remerciements	6
Introduction	7
1 Rappel	12
1.1 Variétés riemanniennes	12
1.1.1 Connexion affine	12
1.1.2 Parallélisme	13
1.1.3 Variété riemannienne	13
1.1.4 Tenseur de courbure	14
1.1.5 Courbure sectionnelle	15
1.1.6 Courbure de Ricci et Courbure scalaire	15
1.1.7 Produit tordu	16
1.2 Structure presque complexe	16
1.2.1 Variété hermitienne	17
1.2.2 Variété kählerienne	17
1.2.3 Courbure holomorphe	18
1.2.4 Espace forme complexe	18
1.2.5 Espace forme complexe généralisé	18
1.3 Presque-structure de contact	19
1.3.1 Structure quasi-sasakienne	20
1.3.2 Variétés de Sasaki	20
1.3.3 Espace forme de Sasaki	21

2	Sur certains types de symétrie	22
2.1	Introduction	22
2.2	Pseudo-symétrie	22
2.3	Ricci-pseudo-symétrie	25
2.4	Ricci-pseudo-symétrie généralisée	26
2.5	Interprétation géométrique de la pseudo-symétrie	26
2.5.1	Sens géométrique des tenseurs $R \cdot R$ et $Q(g, R)$	27
2.5.2	Courbure sectionnelle de Deszcz	30
2.5.3	Interprétation géométrique de la courbure sectionnelle de Deszcz	30
2.6	Interprétation géométrique de la Ricci-pseudo-symétrie	32
2.6.1	Sens géométrique des tenseurs $R.S$ et $Q(g, S)$	32
2.6.2	Courbure de Ricci de Deszcz	33
2.6.3	Interprétation géométrique de la courbure de Ricci de Deszcz	33
3	S-variétés	35
3.1	Introduction	35
3.2	f -structures	35
3.2.1	$f.pk$ -structure	36
3.2.2	$f.pk$ -structure normale	39
3.2.3	K -structure	40
3.3	S -variété	40
3.3.1	Presque S -structure	40
3.3.2	S -structure	40
3.3.3	Courbure f -sectionnelle	43
3.3.4	S -espace forme	43
4	Propriétés de symétrie des S-espaces formes	47
4.1	Introduction	47
4.2	Pseudo-symétrie sur les espaces formes de Sasaki	47
4.3	Ricci-pseudo-symétrie sur les S -espaces formes	48
4.4	Ricci-pseudo-symétrie généralisée sur les espaces formes de Sasaki	54
4.5	Ricci-pseudo-symétrie généralisée sur les S -espaces formes	56

4.6	S -espaces formes semi symétriques	61
5	Ricci-pseudo-symétrie sur les S-espaces formes généralisés à deux champs de vecteurs de structures	65
5.1	Espace forme de Sasaki généralisé	65
5.2	S -espace forme généralisé avec deux champs de vecteurs de structure . . .	67
5.3	Ricci- pseudo-symétrie sur les S -espaces formes généralisés	71
5.4	Exemples	81
	Perspectives	84
	Bibliographie	90

À la mémoire de mon père

Remerciements

Je remercie Allah qui m'a donné la force de venir à bout de cette thèse.

Mes remerciements les plus vifs vont au professeur M. Belkhefja mon encadreur de thèse, pour sa générosité et son aide inconditionnelle tout le long de ces années.

Mes remerciements vont également au professeur M. Terbeche d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Je suis grandement reconnaissante aux professeurs B. Messirdi, M. Djaa, A. Wade et C. Baba Hamed pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'examiner cette thèse. J'aimerais remercier ici tous ceux qui m'ont transmis, chacun à leur tour, un peu de leur passion pour les mathématiques et plus particulièrement le professeur Bouyacoub A. Je tiens à souligner le soutien amical et chaleureux de mes collègues et amis de tous les jours durant ce parcours doctoral. Que toute personne qui m'a aidé d'une quelconque façon pour la réalisation de ce travail trouve ici ma reconnaissance et ma gratitude.

À titre personnel, je remercie chaleureusement ma mère, mes frères et sœurs qui m'ont constamment soutenu. Enfin le grand merci pour mon mari et mes enfants pour leur patience et leurs encouragements dans les moments difficiles durant toutes ces années.

Introduction

Ces dernières années, de nombreux auteurs se sont intéressés aux structures de contact métriques et aux sujets qui s'y rattachent, notamment à leurs différentes généralisations. Il existe plusieurs facettes de généralisations des structures de contacts voir par exemple [8, 50, 62, 63]. Dans ce travail, nous nous intéressons aux variétés de contact généralisées dans le cadre des f -structures [8]. En 1963, K. Yano [64] définit la notion de f -structure sur une variété de dimension $2n + s$ de classe C^∞ , en considérant un champ de tenseurs f de type $(1, 1)$ et de rang constant égal à $2n$ satisfaisant $f^3 + f = 0$, ce qui est équivalent à une réduction du groupe de structure du fibré tangent à $U(n) \times O(s)$. Cette notion a permis d'unifier, dans le même contexte, les notions de structure presque complexe ($s = 0$) et de structure presque de contact ($s = 1$). Par analogie avec les structures kählerienne et quasi-sasakienne respectivement, dans le cas presque complexe et le cas presque de contact, D. Blair [8] introduit, en 1970, la notion de K -structure sur une f -variété M^{2n+s} avec $s \geq 2$. Les S -structures, qui forment une sous-classe des K -structures, constituent de par leurs propriétés un cas très intéressant à étudier. Lorsqu'une variété M^{2n+s} est associée à une S -structure, elle est dite S -variété. Dans ce cas, le groupe de structure du fibré tangent est réductible à $U(n) \times I_s$. En effet, pour ces variétés, il existe un repère global $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ sur $\ker f$ tel que si $\eta_1, \dots, \eta_s$ sont les 1-formes duales, alors pour tout $X, Y \in \chi(M)$:

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha, \quad \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\},$$

c'est une f -structure à noyau parallélisable, par abréviation, $f.pk$ -structure, (*f-structure with parallelizable kernel*) [31], que nous notons $(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s)$ ou simplement $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$. Sur les variétés munies d'une $f.pk$ -structure, on peut toujours définir une mé-

trique riemannienne g telle que pour tous $X, Y \in \chi(M)$

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \eta_{\alpha}(Y).$$

La structure $(f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$ est dite alors $f.pk$ -structure métrique et la variété $f.pk$ -variété métrique. Soit F la 2-forme définie sur M par

$$F(X, Y) = g(X, fY), \quad \forall X, Y \in \chi(M),$$

F est dite la 2-forme fondamentale de la $f.pk$ -structure métrique $(f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$. Une $f.pk$ -structure est dite normale si

$$[f, f] + 2 \sum_{\gamma=1}^s d\eta_{\gamma} \otimes \xi_{\gamma} = 0.$$

où $[f, f]$ est la torsion de Nijenhuis de f [45]. Une $f.pk$ -structure métrique normale dont la 2-forme fondamentale F est fermée est dite K -structure et M^{2n+s} K -variété. De plus, si cette structure vérifie

$$d\eta_1 = d\eta_2 = \dots = d\eta_s = F \text{ et } \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (F)^n \neq 0,$$

nous l'appellerons alors S -structure et M^{2n+s} une S -variété. L'exemple canonique de ces variétés est l'espace fibré principal toroïdal au-dessus d'une variété de Kähler [8]. Pour les S -variétés, le tenseur de courbure est complètement déterminé par la courbure f -sectionnelle (définie dans le Chapitre 3 § 3.3) [8, 37].

La principale motivation de l'étude de cette classe de variétés provient du fait qu'elle présente une extension de la classe des variétés de Sasaki. Bien que les S -variétés jouissent de beaucoup de propriétés similaires à celles des variétés de Sasaki, nous pouvons voir que la structure des S -variétés peut être différente de celles-ci. En effet, contrairement aux variétés de Sasaki, il n'existe pas de S -variétés M^{2n+s} , $s \geq 2$, de courbure constante strictement positive [8] et aussi les S -structures ne peuvent pas être réalisées sur des variétés compactes et simplement connexes [30]. Par ailleurs, il existe des S -structures sur des variétés de dimension paire. L'exemple illustratif de ce cas est la variété $U(2)$; c'est une variété de

dimension paire qui pour des raisons topologiques, n'admet aucune structure kählérienne, par contre admet une S -structure [29]. Ainsi, il existe des variétés telles que la meilleure structure que l'on puisse leur associer est une S -structure. En 1972, Kobayashi et Tsuchiya [40] ont établi l'expression explicite de la courbure des S -variétés de courbure f -sectionnelle constante, ce qui constitue un outil très important pour l'étude de ces variétés. Si M^{2n+s} est une S -variété de courbure f -sectionnelle constante c alors le champ de tenseurs de courbure est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \sum_{\alpha, \beta=1}^s (\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)f^2Y - \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)f^2X \\ & - g(fX, fZ)\eta_\alpha(Y)\xi_\beta + g(fY, fZ)\eta_\alpha(X)\xi_\beta) \\ & + \left(\frac{c+3s}{4}\right) (g(fX, fZ)f^2Y - g(fY, fZ)f^2X) \\ & + \left(\frac{c-s}{4}\right) (g(fY, Z)fX - g(fX, Z)fY + 2g(X, fY)fZ), \end{aligned}$$

dans ce cas, la S -variété est dite S -*espace forme* que nous notons $M^{2n+s}(c)$.

Pour $s = 1$, nous retrouvons l'expression de la courbure des variétés de Sasaki de courbure f -sectionnelle constante c , dites *espaces formes de Sasaki*. D'autre part, par analogie avec le cas presque complexe, Alegre avec Blair et Carriazo [12] ont défini la notion d'espace forme de Sasaki généralisé comme une variété M , de dimension $2n + 1$, munie d'une presque-structure de contact (f, ξ, η, g) et dont le tenseur de courbure est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & f_1g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ & + f_2g(X, fZ)fY - g(Y, fZ)fX + 2g(X, fY)fZ \\ & + f_3\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M avec f_1, f_2 et f_3 des fonctions différentiables sur M . Si $f_1 = \frac{c+3}{4}$ et $f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4}$, l'espace forme de Sasaki généralisé est réduit à un espace forme de Sasaki de courbure f -sectionnelle c . Avec la même approche Carriazo, Fernández et Fuentes [12] ont introduit les S -espaces formes généralisés à deux champs de vecteurs de structure, notés ξ_1 et ξ_2 . Ainsi, étant donnée une $f.pk$ -variété métrique $(M, f, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, g)$ avec deux champs de vecteurs de structure ξ_1 et ξ_2 , M est dite S -

espace forme généralisé avec deux champs de vecteurs de structure, s'il existe des fonctions différentiables $F_1, \dots, F_8$ sur M telles que le champ de tenseurs de courbure de M vérifie

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z = & F_1\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\
& + F_2\{g(X, fZ)fY - g(Y, fZ)fX + 2g(X, fY)fZ\} \\
& + F_3\{\eta_1(X)\eta_1(Z)Y - \eta_1(Y)\eta_1(Z)X + g(X, Z)\eta_1(Y)\xi_1 - g(Y, Z)\eta_1(X)\xi_1\} \\
& + F_4\{\eta_2(X)\eta_2(Z)Y - \eta_2(Y)\eta_2(Z)X + g(X, Z)\eta_2(Y)\xi_2 - g(Y, Z)\eta_2(X)\xi_2\} \\
& + F_5\{\eta_1(X)\eta_2(Z)Y - \eta_1(Y)\eta_2(Z)X + g(X, Z)\eta_1(Y)\xi_2 - g(Y, Z)\eta_1(X)\xi_2\} \\
& + F_6\{\eta_2(X)\eta_1(Z)Y - \eta_2(Y)\eta_1(Z)X + g(X, Z)\eta_2(Y)\xi_1 - g(Y, Z)\eta_2(X)\xi_1\} \\
& + F_7\{\eta_1(X)\eta_2(Y)\eta_2(Z)\xi_1 - \eta_2(X)\eta_1(Y)\eta_2(Z)\xi_1\} \\
& + F_8\{\eta_2(X)\eta_1(Y)\eta_1(Z)\xi_2 - \eta_1(X)\eta_2(Y)\eta_1(Z)\xi_2\}.
\end{aligned}$$

Notre contribution dans l'étude de ces variétés, consiste à chercher leurs propriétés de symétrie. Ces variétés présentent une extension de celles de Sasaki de courbures f -sectionnelles constantes qui sont elles de dimension impaire $2n + 1$. M. Belkhef et co-auteurs [5] ont démontré que les variétés de Sasaki de courbure f -sectionnelle constante c sont pseudo-symétriques (au sens de R. Deszcz) pour tout $n \geq 1$ et qu'elles sont semi-symétriques si elles sont de courbure constante $c = 1$.

Le mémoire est organisé en cinq chapitres. Après une introduction générale au cours de laquelle un bref historique, les motivations et la description de la thèse ont été mis en exergue, un rappel sur les variétés riemanniennes, la structure presque complexe ainsi que la structure presque de contact, est donné dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition des notions de pseudo-symétrie, de Ricci-pseudo-symétrie et de Ricci-pseudo-symétrie généralisée (dans le sens de R. Deszcz) et leurs interprétations géométriques.

Dans le troisième chapitre, nous commençons par présenter le cadre global de notre travail, à savoir, les f -structures et nous enchainons par la définition des S -variétés. Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des propriétés de symétrie des S -variétés de courbure f -sectionnelle constante de dimension $2n + s$ dites S -espaces formes. Nous avons étudié la Ricci-pseudo-symétrie de celles-ci, nous avons démontré que, contrairement aux variétés de Sasaki de courbure, f -sectionnelle constante, ces variétés ne sont pas Ricci-

pseudo-symétriques pour $c \neq s$ et $n > 1$, par conséquent, elles ne peuvent pas être pseudo-symétriques et avons conclu alors que les seuls S -espaces formes pseudo-symétriques sont les espaces formes de Sasaki. Nous avons aussi étudié un autre type de symétrie, à savoir, la Ricci-pseudo-symétrie généralisée sur les espaces formes de Sasaki ainsi que sur les S -espaces formes. Les résultats obtenus sont négatifs dans les deux cas et enfin nous avons examiné la semi symétrie des S -espaces formes et nous avons établi qu'ils sont semi symétriques si et seulement si la distribution $\mathfrak{L}$ est de courbure constante $c = s$. Dans le cinquième chapitre, nous avons établi les conditions de pseudo-symétrie des S -espaces formes généralisés de dimension $2n + 2$, c'est à dire avec 2 champs de vecteurs de structures. Cette classe de variétés, généralise celle des S -variétés de courbure f -sectionnelle constante. En appliquant les conditions de Ricci-pseudo-symétrie sur des exemples particuliers de ces S -variétés généralisées, nous démontrons qu'elles peuvent être Ricci-pseudo-symétriques dans certains cas. Nous terminons notre présentation en donnant les perspectives de ce travail de thèse. Nous présentons quelques axes que nous envisageons d'investiguer.

Chapitre 1

Rappel

Toutes les variétés, applications, champs et formes qui apparaissent dans ce travail sont supposés être de classe $\mathcal{C}^\infty$. Toutes les variétés sont supposées être paracompactes.

Nous notons l'ensemble de tous les champs de vecteurs différentiables sur M par $\chi(M)$.

1.1 Variétés riemanniennes

Dans cette section, nous rappelons quelques notions basiques sur la géométrie riemannienne qui vont nous servir par la suite (pour plus de détails cf. [41, 65]).

1.1.1 Connexion affine

Définition. Une connexion affine sur une variété M est une opération ∇ qui associe à tout champ de vecteurs $X \in \chi(M)$ une application linéaire ∇_X de l'espace vectoriel $\chi(M)$ dans lui même, qui vérifie

1. $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$

2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X + (Xf)Y,$

pour f, g sont des fonction sur M et $X, Y \in \chi(M)$.

1.1.2 Parallélisme

En utilisant une connexion affine, nous pouvons introduire le concept de parallélisme comme suit : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $\gamma(t)$, $t \in I$ une courbe sur la variété M . Alors $\frac{d}{dt}$ est un champ de vecteurs sur I . On note par $\dot{\gamma}(t)$ le vecteur vitesse de γ .

Définition. Soit $y(t)$ un vecteur tangent à la variété M en $\gamma(t)$, $\forall t \in I$. On dit que $y(t)$ est parallèle le long de $\gamma(t)$ si $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} y(t) \equiv 0$

Définition. Une courbe γ est dite géodésique si son vecteur vitesse est parallèle le long de $\gamma(t)$.

Proposition 1. Soit M une variété munie d'une connexion affine, $p \in M$ et $X_p \in T_p(M)$. Alors il existe une unique géodésique maximale γ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X_p$.

Théorème 1. Soit $J = [a, b] \subset I$. Pour tout vecteur $X \in T_{\gamma(a)}M$, il existe un unique champ de vecteurs $X(t)$ le long de I tel que $X(a) = X$ et $X(t)$ est parallèle le long de γ .

L'application $P : T_{\gamma(a)}M \mapsto T_{\gamma(b)}M$

$$X(a) \mapsto P(X(a)) = X(b)$$

est un isomorphisme linéaire de $T_{\gamma(a)}M$ sur $T_{\gamma(b)}M$.

Cet isomorphisme s'appelle transport parallèle de $\gamma(a)$ sur $\gamma(b)$.

1.1.3 Variété riemannienne

Définition. Une métrique riemannienne définie sur une variété M est un champ de tenseurs g de type $(0, 2)$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $g(X, Y) = g(Y, X)$ pour $X, Y \in \chi(M)$,
- $g(X, X) \geq 0$, pour tout $X \in \chi(M)$ et $g(X, X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

Une variété M munie d'une métrique riemannienne g est dite variété riemannienne et est notée (M, g) . Sur une variété riemannienne (M, g) , il existe une et une seule connexion affine dite connexion de Levi Civita, qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, (c.-à-d. la torsion est nulle)
- $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y)) = 0$ (c.-à-d. $\nabla_X g = 0$ donc g est parallèle,) pour tout $X, Y \in \chi(M)$.

1.1.4 Tenseur de courbure

Soit (M, g) une variété riemannienne. L'application $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ est un tenseur de type $(1, 3)$ tel que

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

R est dit le tenseur de courbure (ou simplement la courbure) de la variété (M, g) , il vérifie les propriétés suivantes :

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

dite première identité de Bianchi et

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

dite seconde identité de Bianchi. Le tenseur de courbure riemannien de type $(0, 4)$ de la variété riemannienne (M, g) , noté aussi R , est défini par

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad \forall X, Y, Z, W \in \chi(M) \quad (1.1.1)$$

et vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} a) R(X, Y, Z, W) &= -R(Y, X, Z, W) \\ b) R(X, Y, Z, W) &= -R(X, Y, W, Z) \\ c) R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) &= 0 \\ d) R(X, Y, Z, W) &= R(Z, W, X, Y). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

1.1.5 Courbure sectionnelle

Soit un plan P (c.-à-d. un sous espace de dimension 2 de l'espace tangent $T_x(M)$, $x \in M$). La courbure sectionnelle est donnée par

$$K(X, Y) = R(X, Y, X, Y) = g(R(X, Y)X, Y), \quad (1.1.3)$$

où $\{X, Y\}$ est une base orthonormée du plan P . Notons que $K(P)$ est indépendante du choix de la base. L'ensemble des valeurs de $K(P)$, pour tous les plans P de $T_x(M)$ détermine le tenseur de courbure de Riemann.

Si la courbure sectionnelle $K(P)$ est constante pour tout plan P de $T_x(M)$ et pour tout $x \in M$ alors la variété M est dite espace de courbure riemannienne constante. Dans ce contexte, nous avons les résultats suivants :

Théorème 2 (Schur[41]). *Soit M , $\dim M \geq 3$, une variété riemannienne connexe. Si la courbure sectionnelle $K(P)$ dépend seulement du point x alors M est une variété de courbure constante.*

Théorème 3. *Un espace est de courbure constante k si et seulement si*

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y),$$

pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M .

1.1.6 Courbure de Ricci et Courbure scalaire

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $T_p(M)$, $p \in M$. Alors

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i), \quad \text{avec } X, Y \in \chi(M), \quad (1.1.4)$$

défini un champ de tenseurs global de type $(0, 2)$. À partir du champ de tenseurs S , nous définissons un champ scalaire global

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (1.1.5)$$

Le champ de tenseurs S et la fonction scalaire r sont appelés, respectivement, tenseur de Ricci et courbure scalaire de M .

Si le tenseur de Ricci S est de la forme

$$S = \lambda g \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante,} \quad (1.1.6)$$

alors M est dite *variété d'Einstein*.

Théorème 4. *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension $n > 2$. Si $S = \lambda g$ où λ est une fonction sur M , alors λ est nécessairement constante.*

Remarque 1. Toute variété de dimension 2 est d'Einstein.

étant donné une variété riemannienne (M, g) , $\dim M \geq 3$, et $U_S = \{x \in M \mid (S - \frac{\tau}{n})_x \neq 0\}$. Alors M est dite *quasi-Einstein* [36] si

$$S = ag + b\omega \otimes \omega \quad \text{sur } U_S \quad (1.1.7)$$

où ω est une certaine 1-forme sur U_S et a, b sont des fonctions sur U_S .

1.1.7 Produit tordu

Soit M et N deux variétés riemanniennes qui sont munies, respectivement, des métriques riemanniennes g_M et g_N , et soit f une fonction positive sur M . Considérons le produit $M \times N$ et notons par $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ et par $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ leurs projections. Le produit tordu $M \times_f N$ est la variété produit $M \times N$ muni de la métrique riemannienne g définie, par

$$g = \pi_1^* g_M + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_N. \quad (1.1.8)$$

1.2 Structure presque complexe

Nous considérons que la théorie des structures presque complexes et presque hermitiennes est bien connue, toutefois nous rappelons ici quelques notions qui sont essentiellement utilisées dans notre étude. Pour plus de détails cf. [42]

Définition. Une structure presque complexe sur une variété M est définie par la donnée d'un champ de tenseurs J de type $(1,1)$ sur M tel que

$$J^2 = -I$$

où I est l'identité sur $T_x(M)$, $x \in M$. Une variété associée à une structure presque complexe est dite variété presque complexe. Toute variété presque complexe est de dimension paire.

Le groupe de structure du fibré tangent de toute variété munie d'une structure presque complexe est réduit au groupe unitaire $U(n)$. La réciproque est aussi vraie.

1.2.1 Variété hermitienne

Définition. Soit M une variété presque complexe de structure presque complexe J . Une métrique hermitienne sur M est une métrique riemannienne g sur M telle que

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M . Une variété presque complexe avec une métrique hermitienne est dite variété presque hermitienne.

Définition. Soit M une variété presque hermitienne. La 2-forme fondamentale ϕ est définie par

$$\phi(X, Y) = g(X, JY)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M où J et g sont respectivement, la structure presque complexe et la métrique hermitienne de M .

Une variété hermitienne est une variété presque hermitienne qui vérifie $[J, J] = 0$, où $[J, J]$ est le tenseur de Nijenhuis, de type $(1,2)$, de J noté aussi N_J définie par

$$[J, J](X, Y) = N_J(X, Y) = J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY].$$

1.2.2 Variété kählérienne

Définition. Une métrique hermitienne g sur une variété M presque complexe est dite métrique kählérienne si la 2-forme fondamentale ϕ est fermée. Une variété presque complexe

M avec une métrique kählerienne est dite variété presque kählerienne.

Définition. Une variété presque kählerienne est kählerienne si elle vérifie $[J, J] = 0$.

Proposition 2. Une variété hermitienne dont la 2-forme fondamentale est fermée est dite variété kählerienne.

1.2.3 Courbure holomorphique

Définition. Le 2-plan engendré par les vecteurs X et JX , où $X \in T_p M$ est dit section holomorphique et la courbure sectionnelle $K(X, JX)$ est dite courbure holomorphique.

1.2.4 Espace forme complexe

Définition. Une variété kählerienne de courbure holomorphique constante k est dite espace forme complexe et son tenseur de courbure est donné par

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{k}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ &\quad + g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ), \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

1.2.5 Espace forme complexe généralisé

Les espaces formes complexes généralisés ont été introduits en 1981 par Tricelli et Vanhecke [60] comme une généralisation des espaces formes complexes.

Définition. Une variété presque hermitienne (M, J, g) est dite espace forme complexe généralisé si son tenseur de courbure de Riemann R satisfait

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= F_1(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &\quad + F_2(g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

pour tous $X, Y, Z \in TM$, où F_1 et F_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M .

Si $F_1 = F_2 = \frac{k}{4}$ alors M est un espace forme complexe.

1.3 Presque-structure de contact

Considérons une variété de dimension impaire $M = M^{2n+1}$ et un triplet de champs de tenseurs (f, ξ, η) , sur la variété M , de types respectifs, $(1, 1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. (La référence principale, pour cette section, est [6]).

Définition. Le triplet de champs de tenseurs (f, ξ, η) , définit une presque-structure de contact sur M s'il vérifie les propriétés suivantes :

$$f^2 = -I + \xi \otimes \eta, \quad \eta(\xi) = 1. \quad (1.3.1)$$

Une variété M dotée d'une presque-structure de contact est dite variété presque de contact, nous la notons par (M, f, ξ, η) .

Proposition 3. *Soit M une variété presque de contact. Alors*

$$\eta \circ f = 0, \quad f(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rang } f = 2n \quad (1.3.2)$$

Sur une variété presque de contact, il existe une métrique riemannienne telle que

$$\eta(X) = g(\xi, X),$$

et

$$g(fX, fY) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

La variété est dite presque de contact métrique et g est une métrique compatible. La 2-forme fondamentale est donnée par

$$F(X, Y) = g(X, fY).$$

Définition. On dit que (f, ξ, η, g) est une structure de contact métrique sur M si c'est une presque-structure de contact métrique sur M satisfaisant $F = d\eta$.

Définition. Une structure de contact métrique est dite de K -contact si le champ de vecteurs de structure est de Killing.

Définition. Une variété presque de contact est dite normale si et seulement si

$$N_f + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

où N_f est le tenseur de torsion de Nijenhuis de f défini par

$$N_f(X, Y) = [f, f](X, Y) = f^2[X, Y] + [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY],$$

$[,]$ désigne le crochet de Lie.

1.3.1 Structure quasi-sasakienne

Définition. [7] Une presque-structure de contact métrique (f, ξ, η, g) est dite *quasi-sasakienne* si, elle est normale et sa 2-forme fondamentale est fermée.

Une variété associée à une structure quasi-sasakienne est une variété quasi-sasakienne.

1.3.2 Variétés de Sasaki

En 1960, Sasaki [52] définit une structure dite (f, ξ, η, g) -structure sur une variété de dimension impaire par analogie avec une structure presque-hermitienne qui, elle, est définie sur une variété de dimension paire .

Définition. Soit (M, f, ξ, η, g) une variété de contact métrique. Si en plus la structure est normale, alors M est dite variété de Sasaki.

Définition. Une variété M de dimension impaire est dite variété de contact s'il existe une 1-forme différentielle η sur M telle que $\eta \wedge d\eta^n = 0$.

Théorème 5 ([48]). Soit M , $\dim M \geq 5$, une variété de contact de courbure sectionnelle constante c . Alors $c = 1$ et M est une variété sasakienne.

Dans ce cas, l'étude des variétés de Sasaki de courbure constante n'a pas beaucoup d'intérêt. Ainsi a été introduite la notion de la courbure f -sectionnelle [6].

Définition. Le 2-plan engendré par les vecteurs X, fX , où $X \in T_p M$ avec X orthogonal à ξ , est dit f -section et la courbure sectionnelle $K(X, fX)$ est dite courbure f -sectionnelle.

1.3.3 Espace forme de Sasaki

La courbure des variétés de Sasaki est complètement déterminée par sa courbure f -sectionnelle [6].

Théorème 6 ([46], [6]). *Si la courbure f -sectionnelle, en tout point d'une variété de Sasaki de dimension $n \geq 5$, est indépendante du choix des f -sections en ce point, alors elle est constante sur toute la variété et le tenseur de courbure est donné par :*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \frac{c-3}{4} (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ & + \frac{c-1}{4} (g(fY, Z)fX - g(fX, Z)fY + 2g(X, fY)fZ \\ & + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

où c est la courbure f -sectionnelle .

Une variété de Sasaki de courbure f -sectionnelle constante est dite espace forme de Sasaki (pour plus de détails cf. [52], [53],[46],[6]).

Chapitre 2

Sur certains types de symétrie

2.1 Introduction

C'est E. Cartan [13] qui a introduit la notion des espaces (localement) symétriques. Ce sont des variétés riemanniennes dont le tenseur de Riemann est parallèle ($\nabla R = 0$), elles constituent une généralisation de la classe des variétés riemanniennes de courbure constante. Il s'intéressa ensuite aux variétés caractérisées par la condition $R \cdot R = 0$.

Z. I. Szabó a donné une classification de ces variétés qu'il appelle espaces semi symétriques ([56], [57]), ils sont aussi dits espaces symétriques au sens de Szabó. Il est clair que les espaces localement symétriques ainsi que tous les espaces de Riemann de dimension 2 sont des espaces semi symétriques. Cependant, il existe des exemples [58] d'espaces semi-symétriques non localement symétriques. R. Deszcz [21] détermine une classe de variétés dite classe de variétés pseudo-symétriques ou espaces symétriques au sens de Deszcz. Dans ce chapitre, nous étudions les notions de pseudo-symétrie et des types de symétries qui en dérivent.

2.2 Pseudo-symétrie

Il est bien connu que tout champ de tenseurs de type $(1, 1)$ sur une variété différentielle, détermine une dérivation qui commute avec les contractions, sur l'algèbre des tenseurs. Ainsi, le champ de tenseurs agit comme un opérateur de dérivation sur tout champ de

tenseurs T de type $(0, k)$. Afin d'aborder la notion de pseudo-symétrie, nous avons besoin de définir, sur une variété riemannienne (M, g) , un champ de tenseurs spécifique, de type $(0, k+2)$ noté $Q(A, T)$, associé à deux champs de tenseurs T et A de types respectifs, $(0, k)$ et $(0, 2)$ par :

$$Q(A, T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) = ((X \wedge_A Y) \cdot T)(X_1, \dots, X_k) \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} &= -T((X \wedge_A Y)X_1, \dots, X_k) - \dots \\ &\quad - T(X_1, \dots, (X \wedge_A Y)X_k), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$\forall X_1, \dots, X_k, X, Y \in \chi(M)$ où $X \wedge_A Y$ est l'endomorphisme donné par

$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y, \quad \forall Z \in \chi(M). \quad (2.2.3)$$

En particulier, si on pose $A = g$ dans (2.2.3) nous obtenons

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y. \quad (2.2.4)$$

où $X \wedge_g Y$ est dit endomorphisme métrique.

Dans la suite, nous notons $(X \wedge_g Y)Z$ par $(X \wedge Y)Z$.

On note par R , l'opérateur de courbure défini par :

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

$R(X, Y)$ est un endomorphisme sur M , (c.-à-d. un champ de tenseurs sur M , de type $(1, 1)$), il agit alors, comme un opérateur de dérivation sur tout champ de tenseurs T , sur M , de type $(0, k)$. Ainsi, $R \cdot T$ est un champ de tenseurs de type $(0, 2 + k)$, il est déterminé par :

$$\begin{aligned} (R \cdot T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) &= (R(X, Y) \cdot T)(X_1, \dots, X_k) \\ &= -T(R(X, Y)X_1, \dots, X_k) - \dots \\ &\quad - T(X_1, \dots, R(X, Y)X_k), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

où

$$R(X, Y) \cdot T = \nabla_X (\nabla_Y T) - \nabla_Y (\nabla_X T) - \nabla_{[X, Y]} T.$$

En posant $T = R$ dans (2.2.5), nous obtenons l'expression définissant le champ de tenseurs $R \cdot R$, de type $(0, 6)$. Donc $R \cdot R$ s'obtient en dérivant le second R , qui est le tenseur de courbure de type $(0, 4)$, en utilisant l'opérateur de courbure R . Le tenseur $R \cdot R$ jouit des mêmes propriétés de symétrie que celles du tenseur de courbure comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4 ([35]). *Le tenseur $R \cdot R$ vérifie les propriétés de symétrie algébriques suivantes :*

$$\begin{aligned}
 a) (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= -(R \cdot R)(X_2, X_1, X_3, X_4; X, Y) \\
 &= -(R \cdot R)(X_2, X_1, X_4, X_3; X, Y) \\
 &= (R \cdot R)(X_3, X_4, X_1, X_2; X, Y) \\
 b) (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &+ (R \cdot R)(X_1, X_3, X_4, X_2; X, Y) \\
 &+ (R \cdot R)(X_1, X_4, X_2, X_3; X, Y) = 0 \\
 c) (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= -(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; Y, X) \\
 d) (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &+ (R \cdot R)(X_3, X_4, X, Y; X_1, X_2) \\
 &+ (R \cdot R)(X, Y, X_1, X_2; X_3, X_4) = 0
 \end{aligned}$$

Définition ([21–23]). Une variété riemannienne connexe M , $\dim M \geq 3$, est dite pseudo-symétrique (dans le sens de R. Deszcz) si les champs de tenseurs, de type $(0, 6)$, $R \cdot R$ et $Q(g, R)$ sont linéairement dépendants c.-à-d. s'il existe une fonction

$$L_R : M \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$R \cdot R = L_R Q(g, R) \tag{2.2.6}$$

soit vérifiée sur $\mathcal{U}_R = \{x \in M \mid R - (\tau/n(n-1))G \neq 0\}$, où τ est la courbure scalaire de M et G est un champ de tenseurs sur M , de type $(0, 4)$, défini par

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = g((X_1 \wedge X_2)X_3, X_4).$$

La condition (2.2.6) est apparue lors de l'étude des sous-variétés totalement ombili-

cales des variétés semi-symétriques et aussi lors de l'étude des applications géodésiques des espaces riemanniens sur des espaces semi-symétriques. Il est clair que toute variété semi-symétrique est pseudo-symétrique, mais l'inverse est faux. Il existe beaucoup d'exemples de variétés pseudo-symétriques qui ne sont pas semi-symétriques, par exemple, l'espace d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$ est pseudo-symétrique mais non semi-symétrique (cf. [4]). Une variété pseudo-symétrique non semi-symétrique est dite pseudo-symétrique propre. Nous remarquons aussi qu'il n'y a pas d'équivalent strict du Théorème de Schur 2 dans le cas de pseudo-symétrie. Pour des exemples de variétés pseudo-symétriques où la fonction L_R est non constante voir [21].

2.3 Ricci-pseudo-symétrie

Il est immédiat que si une variété est pseudo-symétrique alors les champs de tenseurs de type $(0, 4)$, $R \cdot S$ et $Q(g, S)$ sont linéairement dépendants, mais l'inverse est faux en général ce qui a conduit à définir la notion de Ricci-pseudo-symétrie [19, 21, 22, 26].

Définition. [25] Soit M une variété connexe, $\dim M = n$. S'il existe une fonction sur M que l'on note L_S , telle que

$$R \cdot S = L_S Q(g, S) \quad (2.3.1)$$

sur l'ensemble $U_S = \{x \in M \mid S \neq (\frac{\tau}{n})g \text{ en } x\}$ où τ est la courbure scalaire de M , alors M est Ricci-pseudo-symétrique.

Lorsque

$$R \cdot S = 0, \quad (2.3.2)$$

la variété est dite Ricci-semi-symétrique [43, 44].

- Remarques 1.*
1. Toute variété pseudo-symétrique est Ricci-pseudo-symétrique mais l'inverse est faux en général. En effet, étant donnée une variété (M_1, g_1) et une variété (M_2, g_2) , $\dim M_2 = n - 1 \geq 3$, d'Einstein non pseudo-symétrique alors le produit tordu $M_1 \times_f M_2$, où $\dim M_1 = 1$, $\dim M_2 = n - 1 \geq 3$, est Ricci-pseudo-symétrique et non pseudo-symétrique (cf. [19], [25], [26], [35]).
 2. Il est démontré dans [28], qu'une variété riemannienne M de dimension 3 est pseudo-symétrique si et seulement si elle est quasi-einsteinienne, c.-à-d., si son tenseur de

courbure de Ricci S admet une valeur propre de multiplicité ≥ 2 . En plus, [18], (cf. aussi [24]), pour une variété de dimension 3, ces deux types de pseudo-symétrie sont équivalents.

3. Schouten et Struik montrèrent (cf. [54]) que les variétés riemanniennes de dimension 3 sont d'Einstein si et seulement si elles sont de courbure constante k .

2.4 Ricci-pseudo-symétrie généralisée

Si les champs de tenseurs $R \cdot R$ et $Q(S, R)$, où S est le tenseur de courbure de Ricci, sont linéairement dépendants alors la variété M , $\dim M \geq 3$, est dite Ricci-pseudo-symétrique généralisée. Ce qui est équivalent à

$$R \cdot R = LQ(S, R), \quad (2.4.1)$$

sur l'ensemble $\mathcal{U} = \{x \in M \mid Q(S, R) \neq 0 \text{ en } x\}$, où L est une certaine fonction sur $\mathcal{U}$, (cf. [14], [15]). La condition $R \cdot R = Q(S, R)$ est satisfaite sur toute hypersurface M , $n = \dim M \geq 3$, isométriquement immergée dans un espace euclidien $\mathbb{E}^{n+1}$ [27].

2.5 Interprétation géométrique de la pseudo-symétrie

Il s'agit dans cette section de donner l'interprétation géométrique des différents tenseurs qui apparaissent dans la définition de la pseudo-symétrie. Schouten [54] a étudié la variation d'un vecteur $v \in T_p M$ à la suite de son transport parallèle autour d'un parallélogramme coordonné $\mathcal{P}$ de sommet p , et dont les côtés tangents en p aux vecteurs linéairement indépendants x et y , sont de longueurs Δx , Δy , figure 2.1. En revenant au point de départ, c.-à-d. p , il obtient alors un vecteur, à priori, différent de v noté v^* où

$$v^* = v + (R(x, y)v)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y), \quad (2.5.1)$$

donc $R(x, y)v$ mesure la variation du second ordre du vecteur v après son transport parallèle le long d'un parallélogramme infinitésimal [54]. Supposons maintenant que x et y soient deux vecteurs orthonormés, tangents à M en p , et soit $\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$ tel que l'ensemble

$\{x, y, e_3, e_4, \dots, e_n\}$ soit une base orthonormée de $T_p M$. Alors tout vecteur $v \in T_p M$ peut s'écrire sous la forme

$$v = g(v, x)x + g(v, y)y + \sum_{i=3}^n g(v, e_i)e_i.$$

Soit $\bar{\pi} = x \wedge y$, le plan engendré par x et y . Notons par $v_{\bar{\pi}}$ et $\bar{v}_{\bar{\pi}^\perp}$ les composantes respectives du vecteur v suivant $\bar{\pi}$ et son supplémentaire orthogonal dans $T_p M$. Par une rotation d'angle $\Delta\varphi$ du vecteur $v_{\bar{\pi}}$ dans le plan $\bar{\pi}$, sans quitter le point p , le nouveau vecteur $\tilde{v}$ dont les composantes suivant $\bar{\pi}$ sont $\widetilde{v_{\bar{\pi}}}$ et $\bar{v}_{\bar{\pi}^\perp}$, est donné par

$$\tilde{v} = v + (x \wedge y)v\Delta\varphi + O^{>1}(\Delta\varphi), \quad (2.5.2)$$

ainsi $(x \wedge y)v$ mesure la variation du premier ordre du vecteur v après une telle rotation infinitésimale de v dans le plan $x \wedge y$.

2.5.1 Sens géométrique des tenseurs $R \cdot R$ et $Q(g, R)$

Considérons deux vecteurs linéairement indépendants v et w attachés à un point p de la variété (M, g) , et un parallélogramme coordonné $\mathcal{P}$, de sommet p et dont les côtés sont tangents aux vecteurs x et y , et sont de longueurs Δx , Δy . Notons par $\bar{\pi} = x \wedge y$ le 2-plan tangent en p à M , engendré par les vecteurs x et y . Par le transport parallèle des vecteurs v et w tout autour de $\mathcal{P}$ (cf. Figure 2.1), nous obtenons, d'après (2.5.1), les vecteurs orthonormés :

$$v^* = v + (R(x, y)v)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \quad (2.5.3)$$

$$w^* = w + (R(x, y)w)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \quad (2.5.4)$$

Ainsi, $\pi^* = v^* \wedge w^*$, est le plan qui résulte par le transport parallèle du plan $\pi = v \wedge w$, (cf. Figure 2.2) il s'en suit alors que,

$$\begin{aligned} R(v^*, w^*, w^*, v^*) &= R(v, w, w, v) - [(R.R)(v, w, w, v; x, y)]\Delta x\Delta y \\ &\quad + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

par conséquent

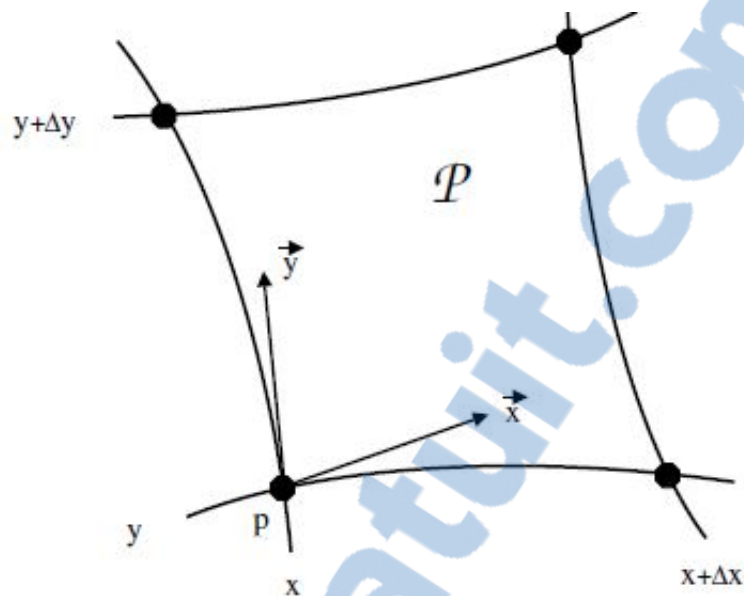
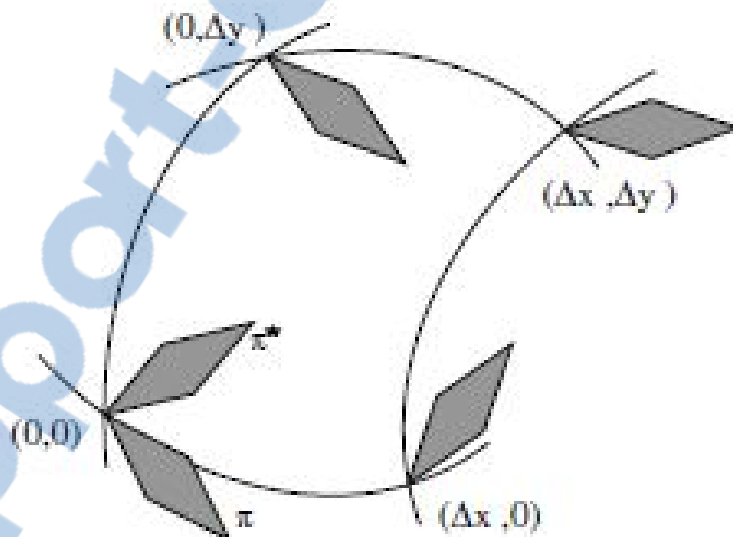


FIGURE 2.1 – parallélogramme infinitésimal

FIGURE 2.2 – Transport parallèle d'un plan le long d'un parallélogramme P

$$K(p, \pi^*) = K(p, \pi) - ((R.R)(v, w, w, v; x, y))\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

Nous pouvons alors, énoncer le théorème suivant :

Théorème 7 ([35]). *Soit M une variété riemannienne, p un point de M et $\mathcal{P}$ un parallélogramme coordonné infinitésimal de sommet p , dont les côtés sont de longueurs Δx et Δy . Soit x et y les vecteurs liés au point p et qui sont tangents aux côtés de $\mathcal{P}$. Soit $\pi^* = v^* \wedge w^*$ le plan obtenu par le transport parallèle du plan $\pi = v \wedge w$, attachés au point p tout autour de $\mathcal{P}$. Alors, une approximation du second ordre près est donnée par,*

$$\delta_{\mathcal{P}} K(p, \pi) = (R.R)(v, w, w, v)\Delta x \Delta y.$$

Ainsi, le $(0,6)$ -tenseur $R.R$ mesure la variation de la courbure sectionnelle en tout point p pour tout plan π , par le transport parallèle de celui-ci autour d'un parallélogramme infinitésimal de sommet p .

Soit $\{x, y, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de $T_p M$, considérons deux vecteurs orthonormés $v, w \in T_p M$, en faisant subir une rotation d'angle ϵ aux projections de ces derniers sur le plan $\bar{\pi} = x \wedge y$, nous obtenons, d'après (2.5.2), les vecteurs $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ définis par

$$\tilde{v} = v + \epsilon(x \wedge_g y)v + O(\epsilon^2), \quad (2.5.5)$$

$$\tilde{w} = w + \epsilon(x \wedge_g y)w + O(\epsilon^2). \quad (2.5.6)$$

En calculant la courbure sectionnelle du plan $\tilde{\pi}$, on obtient alors

$$K(p, \tilde{\pi}) = K(p, \pi) + \epsilon Q(g, R)(v, w, w, v; x, y) + O(\epsilon^2). \quad (2.5.7)$$

Donc, les composantes $Q(g, R)(v, w, w, v; x, y)$ mesurent la variation de la courbure sectionnelle $K(p, \pi)$ après une rotation infinitésimale. Par suite, nous pouvons donc considérer les composantes $Q(g, R)(v, w, w, v; x, y)$ comme une sorte de normalisation des composantes $(R.R)(v, w, w, v; x, y)$.

2.5.2 Courbure sectionnelle de Deszcz

Définition. Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n , $n \geq 3$ de courbure non constante. Soit $U = \{x \in M \mid Q(g, R) \neq 0\}$. Alors, en un point $p \in U$, un plan $\pi = u \wedge v$ de $T_p M$ est dit être courbure-dépendant par rapport à un plan $\bar{\pi} = x \wedge y$ de $T_p M$ si

$$Q(g, R)(u, v, v, u; x, y) \neq 0.$$

Cette définition est indépendante du choix des bases de π et de $\bar{\pi}$.

Définition. [35] En un point $p \in \mathcal{U} = \{x \in M \mid Q(g, R) \neq 0\}$, soit $\pi = u \wedge v$ le plan tangent courbure-dépendant par rapport à un plan $\bar{\pi} = x \wedge y$. Alors la courbure sectionnelle de Deszcz dite aussi la courbure sectionnelle double $L(p, \pi, \bar{\pi})$ du plan π par rapport au plan $\bar{\pi}$ au point p est définie comme un scalaire

$$L(p, \pi, \bar{\pi}) = \frac{(R.R)(u, v, v, u; x, y)}{Q(g, R)(u, v, v, u; x, y)}.$$

Cette définition est indépendante du choix des bases des plans tangents π et $\bar{\pi}$.

Théorème 8 ([35]). *Une variété riemannienne M^n , ($n \geq 3$) est pseudo-symétrique au sens de Deszcz si et seulement si toutes les courbures sectionnelles doubles $L(p, \pi, \bar{\pi})$ sont les mêmes en tout point $p \in \mathcal{U}$ (c.-à-d. pour tous plans π et $\bar{\pi}$ courbure-dépendants en p , $L(p, \pi, \bar{\pi}) = L_R(p)$ pour une certaine fonction $L_R : M \rightarrow \mathbb{R}$).*

2.5.3 Interprétation géométrique de la courbure sectionnelle de Deszcz

Soit u, v deux vecteurs de $T_p M$. Levi-Civita construit, en 1917, un parallélogramoïde, dit squaroïde de Levi Civita, en considérant une géodésique α , issue du point p , de vecteur tangent u , et q un point de α situé à une distance infinitésimale A de p . Notons par v^* le vecteur obtenu par le transport parallèle de v du point p au point q le long de la courbe α . Ensuite, considérons les géodésiques β_p et β_q issues respectivement, de p et q et tangentes respectivement, aux vecteurs v et v^* . Fixons les points $\bar{p}$ et $\bar{q}$ respectivement, sur β_p et β_q à une même distance infinitésimale B respectivement, des points p et q , (cf. Figure 2.3). Soit $\bar{\alpha}$ la géodésique reliant les points $\bar{p}$ et $\bar{q}$ et soit A' la distance géodésique entre

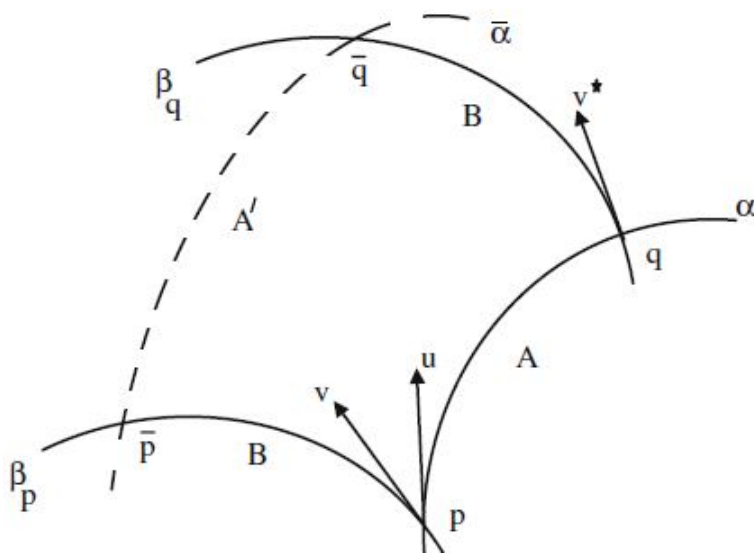


FIGURE 2.3 – Parallélogramoïde de Levi Civita

$\bar{p}$ et $\bar{q}$. Levi-Civita montra que, à une approximation du premier ordre près, la courbure sectionnelle du plan $\pi = u \wedge v$ peut être exprimée par

$$K(p, \pi) = \frac{A^2 - A'^2}{(AB \sin \phi)^2}, \quad (2.5.8)$$

où ϕ est l'angle entre u et v . Considérons maintenant au point $p \in M$ deux plans $\pi = u \wedge v$ et $\bar{\pi} = x \wedge y$, transportons parallèlement les deux vecteurs u et v le long du parallélogramme formé par les vecteurs tangents x, y en p (cf. Figure 2.1). Construisons les deux parallélogramoïdes sur les vecteurs u, v et u^*, v^* , respectivement, de même longueurs A et B en complétant par les géodésiques de longueurs respectives A' et A'^* , qui sont à priori différentes. Plus précisément, nous obtenons, [35], une expression similaire à celle donnée dans (2.5.8)

$$L(p, \pi, \bar{\pi}) = \frac{A'^2 - A'^{*2}}{(AB \sin \phi)^2 Q(g, R)(u, v, v, u; x, y)}.$$

2.6 Interprétation géométrique de la Ricci-pseudo-symétrie

De la manière, Jahanara [38] a donné le sens géométrique des champs de tenseur $R \cdot S$ et $Q(g, S)$.

2.6.1 Sens géométrique des tenseurs $R.S$ et $Q(g, S)$

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de $T_p M$. La courbure de Ricci dans la direction de e_1 , $Ric(e_1)$, est définie par

$$Ric(e_1) = \sum_{i=1}^n K(p, e_1 \wedge e_i).$$

Considérons un vecteur v issu d'un point $p \in M$ et un parallélogramme $\mathcal{P}$ de sommet p dont les longueurs des côtés sont Δx et Δy tangents aux vecteurs linéairement indépendants x , y au point p . Alors par le transport parallèle de v autour de $\mathcal{P}$ nous obtenons le vecteur v^* défini par (2.5.1). Ainsi

$$Ric(v^*) = Ric(v) - R.S(v, v; x, y)\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

Théorème 9. *Soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme coordonné infinitésimal de sommet un point p de M , dont les côtés de longueur Δx et Δy , sont tangents aux vecteurs x et y en p . Soit v^* le vecteur obtenu de v après son transport parallèle le long de $\mathcal{P}$. Alors l'approximation du second ordre,*

$$\delta_p Ric(v) = -(R.S)(v, v; x, y)\Delta x \Delta y,$$

c.-à-d., le tenseur $R.S$ de M mesure la variation du second ordre de la courbure de Ricci en un point p pour tout vecteur v par le transport parallèle de celui-ci autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p .

Expliquons maintenant le sens géométrique de la composante $Q(g, S)$, dite tenseur de Ricci-Tachibana. En comparant la courbure de Ricci, $Ric(v)$ et $Ric(\tilde{v})$ où $\tilde{v}$ est défini par (2.5.2), nous trouvons alors

$$Ric(\tilde{v}) = Ric(v) - \epsilon Q(g, S)(v, v; x, y) + O(\epsilon^2). \quad (2.6.1)$$

Les composantes $Q(g, S)(v, v; x, y)$ mesurent ainsi, la variation de la courbure de Ricci $Ric(v)$ après une rotation infinitésimale réalisée au point p comme il est décrit ci-dessus.

Définition. Soit (M, g) une n -dimensionnelle variété riemannienne, $n \geq 3$, Soit $\mathcal{U} = \{x \in M \mid Q(g, S) \neq 0\}$. Supposons que M n'est pas d'Einstein telle que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Alors, en un point $p \in M$, une direction d , engendrée par un vecteur $v \in T_p M$, est dite être courbure-dépendante du plan $\bar{\pi} = x \wedge y \subset T_p M$ si $Q(g, S)(v, v; x, y) \neq 0$ (qui est indépendant du choix de la base $\{x, y\}$ pour $\bar{\pi}$ et du vecteur v qui détermine la direction d)

2.6.2 Courbure de Ricci de Deszcz

Nous définissons la courbure de Ricci de Deszcz $L_S(p, d, \bar{\pi})$ de direction d et de plan $\bar{\pi}$ par le scalaire,

$$L_S(p, d, \bar{\pi}) = \frac{(R.S)(v, v; x, y)}{Q(g, S)(v, v; x, y)},$$

qui est indépendant du choix de la base $\{x, y\}$ du plan $\bar{\pi}$ et aussi du vecteur v qui détermine la direction d .

Théorème 10 ([38]). *Une variété riemannienne M de dimension n (≥ 3) est Ricci-pseudo-symétrique si ses courbures de Ricci de Deszcz sont les mêmes en tout point p de M , c.-à-d., pour toutes les directions d qui sont courbure-dépendantes par rapport aux plans $\bar{\pi}$, $L_S(p, d, \bar{\pi}) = L_S(p)$.*

2.6.3 Interprétation géométrique de la courbure de Ricci de Deszcz

Jahanar et co-auteurs [38] ont déterminé une expression de la courbure de Ricci de Deszcz similaire à celle de la courbure sectionnelle (2.5.8) (c.-à-d. en terme de longueurs de géodésiques). Soit $p \in M$, $\{v = e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de $T_p M$, construisons pour chaque plan $v \wedge e_j$ les squaroïdes de Levi Civita (cf. Figure 2.3) de longueur de côtés $A = B = \epsilon$. Soit ϵ'_j la longueur de la géodésique qui complète chaque squaroïde. À une approximation de premier ordre près, la courbure de Ricci $Ric(v)$, est donnée par

$$Ric(v) = \sum_{j=2}^n \frac{\epsilon^2 - \epsilon_j'^2}{\epsilon^4}.$$

Considérons maintenant en p un plan $\bar{\pi} = x \wedge y$ et transportons parallèlement les vecteurs de la base $\{v = e_1, e_2, \dots, e_n\}$ autour du parallélogramme coordonné formé par les vecteurs x et y tangents en p (cf. Figures 2.1 et 2.2), nous obtenons alors, $2(n - 1)$ squaroïdes construits sur les plans $v \wedge e_j$ et $v^* \wedge e_j^*$ où $j = 2, \dots, n$ tous de côtés de même longueur ϵ . Mais, en général, les longueurs des géodésiques qui complètent les squaroïdes (c.-à-d. les géodésiques fermantes), ϵ'_j et ϵ'^*_j seront différentes. Par une approximation du second ordre, par rapport aux côtés Δx et Δy , du parallélogramme coordonné, nous trouvons

$$L_S(p, v, \bar{\pi}) = \frac{\sum_{j=2}^n (\epsilon_j^{*'}{}^2 - \epsilon_j'^2)}{\epsilon^4 Q(g, S)(v, v; x, y)}.$$

Remarque 2. Pour conclure ce chapitre nous soulignons que, d'une part, il y a une similitude des propriétés de la courbure de Riemann et du tenseur $R \cdot R$ D'autre part, la relation entre la courbure sectionnelle de Deszcz L_R et le tenseur $R \cdot R$ et celle entre la courbure de Ricci de Deszcz L_S et le tenseur $R \cdot S$ sont similaires à celle qui existe entre la courbure de Riemann R et la courbure sectionnelle K . D'où l'intérêt de ces notions de pseudo-symétrie de Deszcz et de Ricci-pseudo-symétrie de Deszcz.

Chapitre 3

S-variétés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une classe de variétés qui généralisent celle des variétés de contact métriques et que nous pouvons considérer comme une extension des variétés de Sasaki. Elles sont dites *S*-variétés [8]. Nous allons commencer par définir le concept de *f*-structure sur une variété lisse M^{2n+s} , une notion introduite par K. Yano [64]. En termes des *G*-structures, l'existence d'une *f*-structure sur une variété M , $\dim M = 2n + s$, est équivalente à la réduction du groupe de structure du fibré tangent à $U(n) \times O(s)$ où $U(n)$ est le groupe unitaire. Pour $s = 0$, on obtient une structure presque complexe et dans le cas $s = 1$, on obtient une presque-structure de contact. Ce sont donc des exemples de *f*-structures. La notion de *f*-structure, avec $s = 2$, émerge lors de l'étude des hypersurfaces des variétés presque de contact [10, 34].

3.2 *f*-structures

Définition. Soit M une variété de dimension n différentiable de classe C^∞ . Une *f*-structure sur M est un champ de tenseurs f non nuls sur M , de type $(1, 1)$ et de classe C^∞ vérifiant

$$f^3 + f = 0. \tag{3.2.1}$$

L'endomorphisme f est de rang constant [55, 65]. Une variété munie d'une *f*-structure

est dite f -variété.

Proposition 5 ([64]). *Soit M une f -variété. Alors le fibré tangent $T(M)$ se décompose en deux sous fibrés supplémentaires $\text{Im} f$ et $\ker f$*

Proposition 6. *Le rang de f est pair.*

Démonstration. Le rang de f est égal à la dimension de $\text{Im} f$. Par ailleurs, nous avons

$$f^2(f(X)) = f^3(X) = -f(X),$$

nous en déduisons que $f^2|_{\text{Im} f} = -I$ donc c'est une structure presque complexe sur $\text{Im} f$ d'où la dimension de $\text{Im} f$ est paire. $\square$

Nous pouvons aussi définir les f -structures en termes de groupes de structures. En effet, nous avons le résultat suivant :

Théorème 11 ([65]). *Soit M une variété de dimension m . Pour que M admette une f -structure de rang r il faut et il suffit que r soit pair ($r = 2n$) et que le groupe de structure de son fibré tangent se réduise au groupe $U(n) \times O(m - 2n)$.*

3.2.1 $f.pk$ -structure

Une f -structure devient un cas intéressant lorsque le groupe de structure du fibré tangent est réduit à $U(n) \times I_s$, c'est-à-dire lorsque le sous-fibré $\ker f$ est parallélisable, on dit alors que la f -structure est à noyau parallélisable et nous la désignerons dans la suite par $f.pk$ -structure. la variété relative est dite $f.pk$ -variété. Dans ce cas, il existe un repère global $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ pour le sous-fibré $\ker f$. Si $\eta_1, \dots, \eta_s$ sont leurs 1-formes duales, nous avons alors,

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha, \quad \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\} \quad (3.2.2)$$

ce qui justifie l'appellation *f -structure globalement repérée* [33]. On dit aussi *presque-structure de s -contact* [63] ou encore [11] *f -structure à repères complémentaires*. Dans la suite, une $f.pk$ -structure, dont les champs de tenseurs sont f, ξ_α et η_α pour $\alpha \in \{1, \dots, s\}$, sera notée par $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$.

Proposition 7. *Soit M une $f.pk$ -variété de dimension $2n + s$ munie d'une $f.pk$ -structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$. Alors*

$$f(\xi_\alpha) = 0 \text{ et } \eta_\alpha \circ f = 0. \quad (3.2.3)$$

En plus le rang de l'endomorphisme f est $2n$.

Démonstration. Nous avons d'après (3.2.2), $f^2(\xi_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$, d'où $f^3(\xi_\alpha) = 0$. En utilisant (3.2.1), nous obtenons $f(\xi_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$. Pour le second cas, nous avons d'après (3.2.2) et (3.2.1)

$$f^2(f(X)) = -f(X) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(f(X))\xi_\alpha$$

ce qui conduit à

$$\sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(f(X))\xi_\alpha = f^3(X) + f(X) = 0$$

comme les champs de vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_\alpha$ sont linéairement indépendants, on en déduit que $\eta_\alpha(f(X)) = 0 \ \forall \alpha \in \{1, \dots, s\}$.

Montrons maintenant que $\text{rang } f = 2n$. En effet, nous avons $f(\xi_\alpha) = 0$ avec $\xi_\alpha \neq 0, \ \forall \alpha = 1, \dots, s$ ce qui implique que $\dim \ker \geq s$ donc $\text{rang } f \leq 2n$. D'autre part, pour $\xi \in \ker f$ $f(\xi) = 0$, d'après (3.2.2), nous obtenons

$$0 = -\xi + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(\xi)\xi_\alpha$$

d'où

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(\xi)\xi_\alpha$$

ainsi

$$\xi \in \langle \xi_1, \dots, \xi_s \rangle$$

et donc

$$\dim \text{Im } f = 2n.$$

□

Soit une variété M munie d'une $f.pk$ -structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, alors on peut toujours définir

une métrique riemannienne g sur M telle que

$$g(X, Y) = g(fX, fY) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \eta_{\alpha}(Y) \quad (3.2.4)$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$. Une telle métrique est dite compatible avec la $f.pk$ -structure $(f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha})$, et le quadruplet $(f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$ est dit une $f.pk$ -structure métrique, $(M, f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$, est une $f.pk$ -variété métrique dite aussi une variété presque de s -contact métrique.

Remarque 3. La condition de la compatibilité de la métrique (3.2.4) implique que

$$g(X, \xi_{\alpha}) = \eta_{\alpha}(X) \quad \text{pour } X \in TM \text{ et } \alpha = 1, \dots, s. \quad (3.2.5)$$

Notons que, par rapport à cette métrique, le fibré tangent se décompose comme la somme orthogonale de ses sous fibrés $\text{Im } f$ et $\ker f$ c.-à-d.

$$TM = \text{Im } f \oplus \ker f. \quad (3.2.6)$$

On notera par la suite $\mathcal{L} = \text{Im } f$ et $\mathfrak{M} = \ker f$. Soit F la 2-forme définie sur M par

$$F(X, Y) = g(X, fY) \quad (3.2.7)$$

avec $X, Y \in TM$. F est dite la 2-forme fondamentale de la $f.pk$ -structure métrique $(f, \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, g)$.

Nous avons, en particulier,

$$F(X, \xi_{\alpha}) = g(X, f\xi_{\alpha}) = 0, \quad \text{pour } X \in TM \text{ et } \alpha = 1, \dots, s. \quad (3.2.8)$$

Puisque f est de rang $2n$, nous avons

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge F^n \neq 0,$$

en particulier M^{2n+s} est orientable.

Définition. Une $f.pk$ -structure est dite **f -structure de contact** si $F = d\eta_{\alpha}$ pour tout $\alpha = 1, \dots, s$. D'autre part, une f -structure de contact est dite **$f.K$ -structure de contact** si les champs de vecteurs de structures sont des champs de vecteurs de Killing.

3.2.2 $f.pk$ -structure normale

Etant donné une $f.pk$ -variété M^{2n+s} de structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$. On introduit une structure presque complexe J sur la variété $M^{2n+s} \times \mathbb{R}^s$ par

$$J \left(X, f_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + f_s \frac{\partial}{\partial t_s} \right) = \left(fX - \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \xi_\alpha, \eta_1(X) \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \eta_s(X) \frac{\partial}{\partial t_s} \right),$$

où $\left(X, f_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + f_s \frac{\partial}{\partial t_s} \right)$ est un champ de vecteurs sur $M^{2n+s} \times \mathbb{R}^s$ avec X un champ de vecteurs tangent à M^{2n+s} , $(t_1, \dots, t_s)$ sont le système de coordonnées sur $\mathbb{R}^s$ et f_α sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M^{2n+s} \times \mathbb{R}^s$. Si cette structure complexe est intégrable, c.-à-d. le tenseur de torsion de Nijenhuis de J , $N_J = [J, J] = 0$ alors la $f.pk$ -structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ est dite normale. Pour exprimer la condition de normalité en termes du tenseur de torsion de Nijenhuis de f , il suffit de calculer $[J, J]((X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0))$ et $[J, J]((X, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0))$ pour X et Y deux champs de vecteurs sur M^{2n+s} .

$$\begin{aligned} 1) [J, J]((X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)) &= ([f, f](X, Y) + 2 \sum_{\alpha=1}^s d\eta_\alpha(X, Y) \xi_\alpha, ((\mathcal{L}_{fX} \eta_1)(Y) \\ &\quad - (\mathcal{L}_{fY} \eta_1)(X)) \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, ((\mathcal{L}_{fX} \eta_s)(Y) - (\mathcal{L}_{fY} \eta_s)(X)) \frac{\partial}{\partial t_s}) \\ 2) [J, J] \left((X, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0) \right) &= ((\mathcal{L}_{\xi_\alpha} f)(X), (\mathcal{L}_{\xi_\alpha} \eta_1)(X) \frac{\partial}{\partial t_1}, \\ &\quad \dots, (\mathcal{L}_{\xi_\alpha} \eta_s)(X) \frac{\partial}{\partial t_s}) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \{1, \dots, s\}$. En considérant les quatre champs de tenseurs $N^{(1)}, N_\alpha^{(2)}, N_\alpha^{(3)}$ et $N_{\alpha\beta}^{(4)}$ définis par

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= [f, f](X, Y) + 2 \sum_{\gamma=1}^s d\eta_\gamma(X, Y) \xi_\gamma, \\ N_\alpha^{(2)}(X, Y) &= ((\mathcal{L}_{fX} \eta_\alpha)(Y) - (\mathcal{L}_{fY} \eta_\alpha)(X)) \\ &= 2d\eta_\alpha(fX, Y) - 2d\eta_\alpha(fY, X), \\ N_\alpha^{(3)} &= \mathcal{L}_{\xi_\alpha} f, \text{ et } N_{\alpha\beta}^{(4)} = \mathcal{L}_{\xi_\alpha} \eta_\beta. \end{aligned}$$

Alors la $f.pk$ -structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ est normale si et seulement si les quatre tenseurs sont nuls. Cependant, la nullité de $N^{(1)}$ implique la nullité de $N_\alpha^{(2)}, N_\alpha^{(3)}$ et $N_{\alpha\beta}^{(4)}$ [65], d'où le résultat suivant :

Théorème 12 ([65]). *Une $f.pk$ -structure est normale si et seulement si le champ de tenseurs*

$$[f, f] + 2 \sum_{\gamma=1}^s d\eta_\gamma \otimes \xi_\gamma = 0.$$

3.2.3 K -structure

Cette structure a été introduite et étudiée dans [8], elle représente une extension naturelle de la structure kählérienne et quasi sasakienne qui coïncide respectivement, avec le cas $s = 0$ et $s = 1$.

Définition. Une $f.pk$ -structure métrique $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ est dite K -structure si elle est normale et vérifie $dF = 0$. Une variété associée à une K -structure est dite K -variété.

Sur une K -variété $(M, f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ les champs de vecteurs ξ_α , $\alpha = 1, \dots, s$ sont de Killing. Il est à noter que puisque $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge F^n \neq 0$, toute K -variété est orientable. Parmi les K -variétés nous distinguons le cas particulier où $F = d\eta_\alpha$ pour tout $\alpha = 1, \dots, s$

3.3 S -variété

3.3.1 Presque S -structure

Définition ([31]). Une $f.pk$ -structure métrique $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ est dite presque S -structure si $F = d\eta_\alpha$ pour tout $\alpha = 1, \dots, s$.

Une variété munie d'une presque S -structure est dite presque S -variété.

3.3.2 S -structure

Nous donnons la définition des S -variétés telle qu'elle a été introduite par Blair [8]. Soit M^{2n+s} une variété riemannienne et $\eta_1, \dots, \eta_s$ des 1-formes globales telles que

$$d\eta_1 = \dots = d\eta_s \quad \text{et} \quad \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n \neq 0.$$

Posons $\mathfrak{L}(m) = \{X \in T_m M \mid \eta_\alpha(X) = 0, \alpha = 1, \dots, s\}$, donc $\mathfrak{L}$ détermine une distribution avec son supplémentaire, réduit le groupe de structure à $O(2n) \times O(s)$. Si $\xi_1, \dots, \xi_s$ sont les champs de vecteurs duaux à $\eta_1, \dots, \eta_s$ et $X_1, \dots, X_{2n}$ sont des champs de vecteurs linéairement indépendants dans $\mathfrak{L}$, alors

$$\begin{aligned} (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n)(\xi_1, \dots, \xi_s, X_1, \dots, X_{2n}) \\ = (d\eta_\alpha)^n(X_1, \dots, X_{2n}) \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui dote $\mathfrak{L}$ d'une structure symplectique. le groupe de structure est alors réduit à $U(n) \times O(s)$. D'après le Théorème 11, M^{2n+s} a une $f.pk$ -structure dont la 2-forme fondamentale est $F = d\eta_\alpha$. Si cette structure est une K -structure nous l'appellerons alors, S -structure. Donc nous pouvons aussi les présenter comme des $f.pk$ -structures particulières. Soit alors, M^{2n+s} une variété riemannienne de dimension $(2n + s)$ associée à une f -structure [64] où f est de rang $2n$. Si en plus, il existe sur M , s champs de vecteurs globaux $\xi_1, \dots, \xi_s$, (dits champs de vecteurs de structure), dont les 1-formes duales sont $\eta_1, \dots, \eta_s$ (cf. [37]), telles que pour tous $X, Y \in TM$ et $\alpha \in \{1, \dots, s\}$

$$\begin{aligned} f\xi_\alpha = 0, \quad \eta_\alpha \circ f = 0, \quad \eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha) \\ f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

alors il existe naturellement sur M une métrique riemannienne g vérifiant,

$$g(X, Y) = g(fX, fY) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y). \tag{3.3.2}$$

M est ainsi dite f -variété. Soit F la 2-forme fondamentale définie sur M par

$$F(X, Y) = g(X, fY),$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M . Considérons une variété $M \times \mathbb{R}^s$, où $\mathbb{R}^s$ est un espace euclidien de dimension s . Un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}^s$, est donné par $(X, \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha})$, où X est un champ de vecteurs tangent à M , $\frac{\partial}{\partial t_\alpha}$ le champ de repère naturel de $\mathbb{R}^s$ et f_α , $\alpha = 1, \dots, s$ des fonctions sur $M \times \mathbb{R}^s$. Nous définissons une application

linéaire J sur l'espace tangent à $M \times \mathbb{R}^s$ par

$$J(X, \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}}) = (fX - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \xi_{\alpha}, \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}}). \quad (3.3.3)$$

Comme $J^2 = -I$ alors J est une structure presque complexe sur $M \times \mathbb{R}^s$. Si la structure presque complexe J sur $M \times \mathbb{R}^s$ est intégrable, la presque S -structure $(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s)$ est dite normale [63]

Proposition 8 ([8]). *Une K -structure dont la 2-forme fondamentale vérifie $F = d\eta_{\alpha}$, $\forall \alpha = 1, \dots, s$ est dite S -structure et la variété respective est dite S -variété.*

Dans le cas où $s = 1$ la S -variété est une variété de Sasaki. Pour $s \geq 2$ des exemples de S -variété sont donnés dans [8], [9] et [40]. Si M^{2n+s} est une S -variété avec ∇ la connexion de Levi-Civita de g , nous avons [8]

$$\nabla_X \xi_{\alpha} = -fX, \quad X \in TM, \alpha = 1, \dots, s,$$

$$\nabla_X fY = \sum_{\alpha=1}^s (g(fX, fY) \xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y) f^2 X).$$

Notons par $\mathfrak{M}$ la distribution supplémentaire de la distribution $\mathfrak{L}$, engendrée par $\xi_1, \dots, \xi_s$. Alors,

$$TM = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}.$$

Si $X \in \mathfrak{L}$, alors $\eta_{\alpha}(X) = 0$ pour tout $\alpha = 1, \dots, s$ et si $X \in \mathfrak{M}$ alors $fX = 0$.

Remarque 4. Il est clair que $\mathfrak{L} = \bigcap_{i=1}^s \ker \eta_i = \text{Im} f$ et que $\mathfrak{M} = \ker f$.

Théorème 13 ([8]). *Dans le cas des S -structure, la courbure sectionnelle $K(X, Y)$ vérifie :*

1. $K(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{M}$, c.-à-d., la distribution $\mathfrak{M}$ est plate.
2. $K(X, Y) = 1$ pour $X \in \mathfrak{L}$ et $Y \in \mathfrak{M}$.

Exemple 1. Nous savons [6] que la sphère S^{2n+1} de dimension impaire qui est un fibré en cercle au dessus de l'espace projectif complexe CP^n par la fibration de Hopf, est un exemple de variété de Sasaki. Blair [8] a construit une S -variété, en généralisant cet exemple. Soit $\pi' : S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ la fibration de Hopf. Alors en utilisant l'application diagonale Δ nous

définissons un fibré principal toroïdal au dessus de CP^n par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+s} & \xrightarrow{\hat{\Delta}} & S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \pi' \times \dots \times \pi' \\ PC^n & \xrightarrow{\Delta} & PC^n \times \dots \times PC^n \end{array}$$

ainsi, $H^{2n+s} = \{(p_1, \dots, p_s) \in S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \mid \pi'(p_1) = \dots = \pi'(p_s)\}$. Soit η'_α une forme de contact sur S^{2n+1} et soit η_α la forme définie par $\eta_\alpha = \hat{\Delta}^*|_{S^{2n+1}} \eta'_\alpha \equiv \hat{\Delta}^* \eta'_\alpha$. Alors

$$d\eta_\alpha = d\hat{\Delta}_\alpha^* \eta'_\alpha = \hat{\Delta}_\alpha^* d\eta'_\alpha = \hat{\Delta}_\alpha^* \pi'_\alpha^* \Omega_\alpha = \pi^* \Delta_\alpha^* \Omega_\alpha = \pi^* \Omega,$$

où Ω_α est la 2-forme fondamentale sur PC^n_α et Ω c'est la 2-forme sur PC^n . Nous concluons d'après le Théorème 3.1 de [8] que H^{2n+s} est une S-variété.

3.3.3 Courbure f-sectionnelle

Une section plane π est dite f-section si elle est engendrée par les champs de vecteurs orthonormés X et fX où $X \in \mathfrak{L}_p$, $p \in M^{2n+s}$. La courbure sectionnelle $K(X, fX)$ est dite courbure f-sectionnelle.

3.3.4 S-espace forme

Théorème 14 ([11, 37, 40]). Soit M^{2n+s} une S-variété dont la courbure f-sectionnelle est une constante c . Alors le tenseur de courbure de M vérifie :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \sum_{\alpha, \beta=1}^s (\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)f^2Y - \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)f^2X \\ &\quad - g(fX, fZ)\eta_\alpha(Y)\xi_\beta + g(fY, fZ)\eta_\alpha(X)\xi_\beta) \\ &\quad + \left(\frac{c+3s}{4}\right) (g(fX, fZ)f^2Y - g(fY, fZ)f^2X) \\ &\quad + \left(\frac{c-s}{4}\right) (g(fY, Z)fX - g(fX, Z)fY + 2g(X, fY)fZ). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Définition. Une S-variété M^{2n+s} de courbure f-sectionnelle constante c est dite S-espace forme de courbure f-sectionnelle c , que nous notons $M^{2n+s}(c)$.

En utilisant (1.1.4) et (3.3.4), nous obtenons l'expression du tenseur de courbure de Ricci S

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)g(fX, fY) + 2n \sum_{\alpha, \beta=1}^s \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y), \quad (3.3.5)$$

et en utilisant (1.1.5) et (3.3.5), nous obtenons l'expression de la courbure scalaire

$$\tau = n(n + 1)c + n(3n + 1)s. \quad (3.3.6)$$

Pour $s = 1$, un S -espace forme n'est autre qu'un espace forme de Sasaki et (3.3.4), (3.3.5) prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \left(\frac{c+3}{4}\right)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &+ \left(\frac{c-1}{4}\right)(g(fY, Z)fX - g(fX, Z)fY + 2g(X, fY)fZ \\ &+ \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

et

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}(n(c + 3) + c - 1)g(X, Y) + \frac{1}{2}(n + 1)(1 - c)\eta(X)\eta(Y). \quad (3.3.8)$$

Proposition 9 ([40]). *Il n'existe pas de S -variété M^{2n+s} d'Einstein pour $n \geq 1$ et $s \geq 2$.*

La courbure sectionnelle $K(X, Y)$ des sections engendrées par $X, Y \in \mathfrak{L}$ dans le cas d'un S -espace forme, est donnée par le théorème adapté suivant (cf. Théorème 2.7 [8]),

Théorème 15. *La courbure sectionnelle $K(X, Y)$ d'un S -espace forme M^{2n+s} de courbure f -sectionnelle c , satisfait*

1. $c \leq K(X, Y) \leq \frac{c+3s}{4}$, si $c < s$,
2. $\frac{c+3s}{4} \leq K(X, Y) \leq c$, si $c > s$,
3. $K(X, Y) = c$, si $c = s$.

$\forall X, Y \in \mathfrak{L}$,

Remarque 5 ([40]). D'après la Proposition 9 et du fait qu'un espace de courbure constante est d'Einstein, on déduit qu'il ne peut exister de S -variété de courbure constante.

Dans ce qui suit nous présentons quelques exemples de S -espaces formes ([8], [37]) que nous adoptons à notre notation.

Exemple 2 ([8, 37] les espaces Euclidiens). Soit $\mathbb{R}^{2n+s}$ un espace Euclidien, de coordonnées cartésiennes $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_s\}$. Posons

$$\xi_\alpha = \frac{2\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \eta_\alpha = \frac{1}{2} \left(dz_\alpha - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) \quad \alpha = 1, \dots, s$$

$$fX = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \left(\sum_{i=1}^n Y^i y_i \right) \left(\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right)$$

$$g = \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i)$$

où $X = \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^s Z^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$.

Alors $(f, \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \eta_1, \dots, \eta_\alpha, g)$ est une S -structure et $\mathbb{R}^{2n+s}$ muni de cette structure est un S -espace forme de courbure f -sectionnelle $c = -3s$.

Exemple 3 ([37]). Soit CD^n un domaine de $\mathbb{C}^n$ borné et simplement connexe de courbure sectionnelle holomorphique constante $k < 0$. Notons par (J, g) une structure Kählerienne sur CD^n . Puisque la 2-forme fondamentale Ω de cette structure Kählerienne est fermée, $\Omega = d\omega$ où ω est une forme réelle et analytique. Soit $t = (t^1, \dots, t^s)$ le système de coordonnées sur $\mathbb{R}^s$, posons $\eta_\alpha = \pi^* \omega + dt^\alpha$ où $\pi : CD^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow CD^n$ est la projection canonique. Posons $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$, alors η est une forme de connexion sur le fibré trivial $CD^n \times \mathbb{R}^s$, en plus si on pose $\xi_\alpha = (\partial/\partial t^\alpha)$, $(\alpha = 1, \dots, s)$, $\langle, \rangle = \pi^* g + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha$, $f\tilde{X} = (J(\pi_* \tilde{X}))^*$ est un relèvement horizontal de $J(\pi_* \tilde{X})$. Alors $(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, \langle, \rangle)$ est une S -structure sur $CD^n \times \mathbb{R}^s$, muni de cette structure $CD^n \times \mathbb{R}^s$ est un S -espace forme de courbure f -sectionnelle $c = k - 3s < -3s$.

Exemple 4 ([37]). Soit $S^{2n+1}(2)$ une sphère de dimension $(2n+1)$ et de rayon 2, soit $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ une hypersurface du S -espace forme $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}[-3(s-1)]$ de S -structure $(\tilde{f}, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{s-1}, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{s-1}, \langle, \rangle)$ (cf. l'Exemple 2). Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1}, z_1, \dots, z_{s-1})$

un système de coordonnées cartésiennes sur cet espace. Soit ϵ le vecteur normal. Alors

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n+1} \left(y^i \frac{\partial}{\partial y_i} - x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n+1} (x^i y^i) \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right).$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= \tilde{\xi}_\alpha, \quad \eta_\alpha = \tilde{\eta}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, s-1, \\ \xi_s &= -\tilde{f}\epsilon \\ &= -\sum_{i=1}^{n+1} y^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial y_i} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2 \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right), \\ \eta_s(X) &= \langle \xi_s, X \rangle \quad \text{pour tout } X \in \chi(M), \end{aligned}$$

alors $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ est un S -espace forme de S -structure $(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, \langle, \rangle)$ et de courbure f -sectionnelle constante $c = 4 - 3s$. Considérons une déformation D -homothétique de cette structure, qui consiste à poser :

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^* &= \frac{1}{a} \xi_\alpha; \quad \eta_\alpha^* = a \eta_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, s \\ f^* &= f; \quad \langle, \rangle^* = a \langle, \rangle + a(a-1) \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

où a est une constante positive. Alors $(f^*, \xi_1^*, \dots, \xi_s^*, \eta_1^*, \dots, \eta_s^*, \langle, \rangle^*)$ est aussi une S -structure sur M de courbure f -sectionnelle constante $c = \frac{4}{a} - 3s$.

Chapitre 4

Propriétés de symétrie des S -espaces formes

4.1 Introduction

Nous savons que les seules variétés kähleriennes, de dimension $n \geq 6$, qui soient pseudo-symétriques sont les semi-symétriques [16, 17]. Il est de même pour les variétés Ricci-pseudo-symétriques [49]. Olszak [49] a présenté une variété d'exemples de variétés kähleriennes pseudo-symétriques. En dimension 4, il a donné un exemple d'une variété kählerienne qui est pseudo-symétrique mais non semi-symétrique. En parallèle, existe-t-il des variétés sasakiennes qui soient pseudo-symétriques et non semi-symétriques? contact

4.2 Pseudo-symétrie sur les espaces formes de Sasaki

Dans ce contexte, nous avons les résultats suivants :

Théorème 16 ([47]). *Tout espace de contact normal symétrique est un espace de courbure constant $k = 1$.*

Théorème 17 ([59], [3]). *Une variété de Sasaki est semi-symétrique si et seulement si c'est une variété de courbure constante $k = 1$.*

Théorème 18 ([5]). *Tout espace forme de Sasaki $M^{2n+1}(c)$, $n \geq 1$, est pseudo-symétrique. Plus précisément, nous avons*

$$R \cdot R = Q(g, R).$$

Remarques 2. 1. Tout espace forme de Sasaki $M^{2n+1}(c)$ est Ricci-pseudo-symétrique.
 2. Pour $c \neq 1$, l'espace forme de Sasaki $M^{2n+1}(c)$ n'est pas Ricci semi-symétrique, et par conséquent, ne peut être semi-symétrique.

Corollaire 1 ([3]). *Tout espace forme de Sasaki $M^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, est un espace pseudo-symétrique propre.*

4.3 Ricci-pseudo-symétrie sur les S -espaces formes

Dans cette section nous considérons un S -espace forme M de dimension $2n+s$, $s \geq 2$ et $n \geq 1$, de S -structure $(f, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, $\alpha = 1, \dots, s$ et de courbure f -sectionnelle c , que nous noterons $M^{2n+s}(c)$. Nous commençons par établir les lemmes suivants [39] :

Lemme 1. *Soit $M^{2n+s}(c)$, avec $s \geq 2$ et $n \geq 1$, un S -espace forme et soit X, Y, ξ_k des champs de vecteurs orthonormés, $\forall k = 1, \dots, s$. Alors*

1. $R(X, Y) = \left(\frac{c-s}{4}\right)(fX \wedge fY + 2g(X, fY)f) + \left(\frac{c+3s}{4}\right)(X \wedge Y),$
2. $R(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0,$
3. $R(X, \xi_k) = \sum_{\alpha=1}^s X \wedge \xi_\alpha.$

Démonstration. En écrivant l'équation (3.3.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R(U, V) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left(\eta_\alpha(U)(f^2V \wedge \xi_\beta) - \eta_\alpha(V)(f^2U \wedge \xi_\beta) \right) \\ &\quad + \left(\frac{c-s}{4} \right) (fU \wedge fV + 2g(U, fV)f) \\ &\quad + \left(\frac{c+3s}{4} \right) (f^2U \wedge f^2V), \end{aligned}$$

où $U, V \in \chi(M)$. En prenant

- $U = X$ et $V = Y$, et en utilisant les équations (3.3.2) et (3.3.1), nous obtenons le résultat 1. Pour obtenir le deuxième résultat il suffit de poser

- $U = \xi_\alpha$ et $V = \xi_\beta \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, s$ et de conclure d'après les équations (3.3.2) et (3.3.1). De même pour le dernier résultat il suffit de prendre
- $U = X$ et $V = \xi_k, \quad k = 1, \dots, s$ et de conclure en utilisant les équations (3.3.2) et (3.3.1).

□

Lemme 2. Soit $M^{2n+s}(c), \quad s \geq 2$ et $n \geq 1$, un S -espace forme. Soit $X, Y, \xi_\alpha, \alpha = 1, \dots, s$ des champs de vecteurs orthonormés. Alors

$$1. f \cdot S = 0,$$

$$2. (X \wedge Y) \cdot S = 0,$$

$$3. ((\xi_\alpha \wedge \xi_\beta) \cdot S)(Z, W) = (\eta_\alpha(Z) - \eta_\beta(Z))S(\xi_\alpha, W) + (\eta_\alpha(W) - \eta_\beta(W))S(\xi_\alpha, Z),$$

$$4. ((X \wedge \xi_\alpha) \cdot S)(Z, W) = -\frac{1}{2}(n(c+3s) + c - s)(\eta_\alpha(Z)g(X, W) + \eta_\alpha(W)g(X, Z))$$

$$+ 2n \sum_{\beta=1}^s (\eta_\beta(Z)g(X, W) + \eta_\beta(W)g(X, Z)),$$

où S est le tenseur de courbure de Ricci de M et $Z, W \in \chi(M)$.

Démonstration. Comme f est un champ de tenseurs, de type $(1, 1)$, sur TM , nous avons alors

$$(f \cdot S)(Z, W) = -S(fZ, W) - S(Z, fW)$$

pour tous $Z, W \in \chi(M)$. En utilisant les équations (3.3.5), (3.3.2) et (3.3.1), nous obtenons

$$(f \cdot S)(Z, W) = -\frac{1}{2}(n(c+3s) + c - s)g(fZ, W) - \frac{1}{2}(n(c+3s) + c - s)g(Z, fW),$$

qui donne la première identité.

D'où d'après (2.2.1) et (2.2.4)

$$\begin{aligned} ((U \wedge V) \cdot S)(Z, W) &= -S((U \wedge V)Z, W) - S(Z, (U \wedge V)W) \\ &= -g(V, Z)S(U, W) + g(U, Z)S(V, W) \\ &\quad - g(V, W)S(Z, U) + g(U, W)S(Z, V). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Soit $X, Y, \xi_1, \dots, \xi_s$ des champs de vecteurs orthonormés.

- a) Si on pose $U = X$ et $V = Y$ dans l'équation (4.3.1), en utilisant les équations (3.3.5), (3.3.1) et (3.3.2) nous obtenons (2).
- b) Si on pose $U = \xi_\alpha$ et $V = \xi_\beta$ dans (4.3.1), en utilisant les équations (3.3.5), (3.3.1) et (3.3.2) nous obtenons (3).
- c) Si on pose $U = X$ et $V = \xi_\alpha$ dans (4.3.1), en utilisant (3.3.5), (3.3.1) et (3.3.2) nous obtenons (4).

□

Lemme 3. Soit $M^{2n+s}(c)$, $s \geq 2$ et $n \geq 1$, un S -espace forme et soit X, Y, ξ_α , $\alpha = 1, \dots, s$ des champs de vecteurs orthonormés. Alors

1. $R(X, Y) \cdot S = 0$,

2. $R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot S = 0$,

3. $(R(X, \xi_\alpha) \cdot S)(U, V) = \frac{1}{2}(n+1)(s-c) \sum_{\beta=1}^s (\eta_\beta(U)g(X, V) + \eta_\beta(V)g(X, U))$,

où S est le tenseur de courbure de Ricci de M et $U, V \in \chi(M)$.

Démonstration. a) D'après le 1. du Lemme 1, comme fX, fY, ξ_α sont des champs de vecteurs orthonormés pour tout $\alpha = 1, \dots, s$, en utilisant 1. et 2. du Lemme 2, nous déduisons le premier résultat.

b) D'après 2. du Lemme 1, nous déduisons le second résultat.

c) D'après 3. du Lemme 1, et 4. du Lemme 2 nous déduisons le dernier résultat.

□

Proposition 10 ([39]). Un S -espace forme $M^{2n+s}(c)$, où $s \geq 2$ et $n \geq 1$, est Ricci semi-symétrique si et seulement si $c = s$.

Démonstration. Soit Z, W , des champs de vecteurs quelconques sur M . Puisque nous pouvons écrire $Z = X + \sum_{i=1}^s \eta_i(Z)\xi_i$ et $W = Y + \sum_{j=1}^s \eta_j(W)\xi_j$, où $X, Y \in \mathcal{L}$. En utilisant

les propriétés du tenseur de courbure, nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(Z, W) = R(X, Y) + \sum_{j=1}^s \eta_j(W) R(X, \xi_j) + \sum_{i=1}^s \eta_i(Z) R(\xi_i, Y) \\ + \sum_{i=1}^s \eta_i(Z) \sum_{j=1}^s \eta_j(W) R(\xi_i, \xi_j). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Supposons que M^{2n+s} est Ricci-semi-symétrique, il en découle alors que

$$R(Z, W) \cdot S = 0 \quad \forall Z, W \in \chi(M). \quad (4.3.3)$$

En particulier,

$$R(X, \xi_\alpha) \cdot S = 0, \quad \text{pour tout } \alpha = 1, \dots, s. \quad (4.3.4)$$

D'après (3) du Lemme 3 nous avons

$$(n+1)(s-c) \sum_{\beta=1}^s (\eta_\beta(U)g(X, V) + \eta_\beta(V)g(X, U)) = 0, \quad (4.3.5)$$

où U, V sont des champs de vecteurs quelconques sur M .

Si nous posons $U = X$ et $V = \xi_\alpha$ dans (4.3.5), nous obtenons

$$(n+1)(s-c) = 0,$$

qui implique que

$$c = s.$$

Réciproquement, si $c = s$ d'après (3) du Lemme 3 nous obtenons

$$R(X, \xi_\alpha) \cdot S = 0, \quad (4.3.6)$$

D'autre part d'après le Lemme 3, nous avons

$$R(X, Y) \cdot S = 0 \quad \text{et} \quad R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot S = 0, \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, s. \quad (4.3.7)$$

En substituant (4.3.7) et (4.3.6) dans (4.3.2), nous déduisons que M est semi-symétrique.

□

Corollaire 2. *Les S -espaces formes $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$, $(CD^n \times \mathbb{R}^s)(k-3s)$ et $(S^{2n+1}(2) \times R^{s-1})(4-3s)$, pour $s \geq 2$ et $n \geq 1$, ne sont pas Ricci semi-symétriques.*

Théorème 19 ([39]). *Les S -espaces formes $M^{2n+s}(c)$, $s \geq 2, n \geq 1$ et $c \neq s$, ne peuvent être Ricci-pseudo-symétriques.*

Démonstration. Soit $X, Y, \xi_\alpha, \alpha = 1, \dots, s$, des champs de vecteurs orthonormés, nous avons d'après le 3 du Lemme 1

$$R(X, \xi_\alpha) = \sum_{k=1}^s X \wedge \xi_k, \quad \forall \alpha = 1, \dots, s. \quad (4.3.8)$$

Il en découle que pour tout $\alpha, \beta = 1, \dots, s$

$$R(X, \xi_\alpha) \cdot S = R(X, \xi_\beta) \cdot S. \quad (4.3.9)$$

Supposons que $M^{2n+s}(c)$ soit Ricci-pseudo-symétrique. Il existe, par définition, une fonction L_S , sur M telle que (2.3.1) soit vérifiée c.-à-d.

$$R(Z, W) \cdot S = L_S(Z \wedge W) \cdot S$$

pour $Z, W \in \chi(M)$. En particulier, nous avons

$$\begin{aligned} R(X, \xi_\alpha) \cdot S &= L_S(X \wedge \xi_\alpha) \cdot S, \\ R(X, \xi_\beta) \cdot S &= L_S(X \wedge \xi_\beta) \cdot S. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

D'après (4.3.9) et (4.3.10) on voit que

$$(X \wedge \xi_\alpha) \cdot S = (X \wedge \xi_\beta) \cdot S, \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, s. \quad (4.3.11)$$

Ainsi, d'après (4.3.8) et (4.3.11) on obtient :

$$R(X, \xi_\alpha) \cdot S = s(X \wedge \xi_\alpha) \cdot S.$$

D'une part, si on pose $Z = X$ et $W = \xi_\gamma$ dans (4) du Lemme 2, pour $\gamma \neq \alpha$, on obtient :

$$((X \wedge \xi_\alpha) \cdot S)(X, \xi_\gamma) = 2n \neq 0,$$

ce qui implique que

$$(X \wedge \xi_\alpha) \cdot S \neq 0.$$

D'où

$$L_S = s, \tag{4.3.12}$$

alors

$$R(U, V) \cdot S = s(U \wedge V) \cdot S,$$

pour tous champs de vecteurs U, V sur M .

D'autre part, d'après (2) du Lemme 2 nous avons

$$R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot S = 0. \tag{4.3.13}$$

Il suit que

$$(R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot S)(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = 0. \tag{4.3.14}$$

Si on pose $Z = W = \xi_\alpha$ dans (3) du Lemme 2, nous obtenons

$$((\xi_\alpha \wedge \xi_\beta) \cdot S)(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = 4n \neq 0 \quad \forall \alpha \neq \beta. \tag{4.3.15}$$

D'où, d'après (4.3.14) et (4.3.15), nous déduisons que

$$L_S = 0. \tag{4.3.16}$$

Ce qui contredit (4.3.12). □

Remarque 6. Les S -espaces formes $M^{2n+s}(c)$, $s \geq 2$ et $n \geq 1$, ne peuvent être pseudo-symétriques pour $c \neq s$.

Corollaire 3. *Un S -espace forme $M^{2n+s}(c)$, $n \geq 1$, est pseudo-symétrique si et seulement si $s = 1$.*

Corollaire 4. *Les S -espaces formes $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$, $(CD^n \times \mathbb{R}^s)(k - 3s)$ et $(S^{2n+1}(2) \times R^{s-1})(4 - 3s)$, pour $s \geq 2$, et $n \geq 1$, décrits dans les exemples ci-dessus, ne sont pas Ricci-pseudo-symétriques.*

4.4 Ricci-pseudo-symétrie généralisée sur les espaces formes de Sasaki

Dans ce qui suit, nous étudions la Ricci-pseudo-symétrie généralisée de l'espace forme de Sasaki M^{2n+1} . Pour $n = 1$ nous avons le résultat suivant :

Théorème 20 ([20]). *Toute variété semi-riemannienne de dimension 3 satisfait*

$$R \cdot R = Q(S, R).$$

Par conséquent, dans cette section nous allons supposer que $n > 1$. Nous commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 4. *Soit M^{2n+1} un espace forme de Sasaki. Alors*

1. $g((R(X, \xi) \cdot R)(U, V, Z), \xi) = -R(U, V, Z, X) + g(U, X)g(V, Z) - g(X, V)g(U, Z),$
2. $g(((X \wedge_S \xi) \cdot R)(U, V, Z), \xi) = -2n\eta(Z)\eta(U)g(X, V) + 2n\eta(Z)\eta(V)g(X, U) - S(X, R(U, V)Z) + S(X, U)g(V, Z) - S(X, U)\eta(Z)\eta(V) - S(X, V)g(U, Z) + S(X, V)\eta(Z)\eta(U)$

où $X, U, V, Z \in \chi(M)$.

Démonstration. Pour U, V, Z, X, Y des champs de vecteurs sur M , nous avons

$$\begin{aligned} (R \cdot R)(U, V, Z; X, Y) &= (R(X, Y) \cdot R)(U, V, Z) \\ &= R(X, Y)R(U, V)Z - R(R(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - R(U, R(X, Y)V)Z - R(U, V)R(X, Y)Z, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

$$\begin{aligned} ((X \wedge_S Y) \cdot R)(U, V, Z) &= (X \wedge_S Y)R(U, V)Z - R((X \wedge_S Y)U, V)Z \\ &\quad - R(U, (X \wedge_S Y)V)Z - R(U, V)(X \wedge_S Y)Z. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Si nous posons $Y = \xi$, en prenant le produit scalaire avec ξ dans les deux équations (4.4.1) et (4.4.2) et en prenant en compte (3.3.7) nous obtenons le Lemme 4 $\square$

Théorème 21 ([39]). *les espaces de Sasaki $M^{2n+1}(c)$, $n \geq 2$ et $c \neq 1$, ne sont pas Ricci-pseudo-symétriques généralisés.*

Démonstration. Supposons que M est Ricci- pseudo symétrique generalisé, d'après (2.4.1)

$$R(X, \xi) \cdot R - L(X \wedge_S \xi) \cdot R = 0, \quad \forall X \in \chi(M).$$

où L est une fontion sur $\mathcal{U} = \{x \in M \mid Q(S, R) \neq 0 \text{ at } x\}$, Il suit que

$$(R(X, \xi) \cdot R)(U, V, Z) - L((X \wedge_S \xi) \cdot R)(U, V, Z) = 0, \quad (4.4.3)$$

où $X, U, V, Z \in \chi(M)$.

Multiplions (4.4.3) par ξ , ce qui donne

$$g((R(X, \xi) \cdot R)(U, V, Z), \xi) - Lg(((X \wedge_S \xi) \cdot R)(U, V, Z), \xi) = 0. \quad (4.4.4)$$

Substituons 1 et 2 du Lemme 4 dans (4.4.4), en utilisant le Théorème 18 nous obtenons alors

$$L\eta(Z)(S(X, V) - 2ng(X, V)) = 0, \quad (4.4.5)$$

ce qui implique que $L = 0$ ou $S(X, V) = 2ng(X, V)$.

Si $L = 0$ cela implique que M est semi-symétrique, comme $c \neq 1$ nous obtenons alors une contradiction.

Si $S(X, V) = 2ng(X, V)$ cela signifie que M est un espace forme de Sasaki d'Einstein, en comparant avec (3.3.5), nous déduisons que $\frac{1}{2}(n(c+3) + c - 1) = 2n$ ce qui entraîne que $c = 1$ donc nous obtenons aussi une contradiction. $\square$

4.5 Ricci-pseudo-symétrie généralisée sur les S -espaces formes

Dans ce qui suit, nous étudions la Ricci-pseudo-symétrie généralisée d'un S -espace forme M^{2n+s} , avec $n \geq 1$ et $s \geq 2$. Nous commençons avec les lemmes suivants pour une utilisation ultérieure.

Lemme 5. *Soit $M^{2n+s}(c)$ un S -espace forme, Soit X, Y, ξ_α , où $\alpha = 1, \dots, s$, des champs de vecteurs orthonormés sur M . Nous avons alors*

$$\begin{aligned} ((X \wedge \xi_k) \cdot R)(U, V, Z, W) = & -(\eta_k(U)R(X, V, Z, W) + \eta_k(V)R(U, X, Z, W) \\ & + \eta_k(Z)R(U, V, X, W) + \eta_k(W)R(U, V, Z, X)) \\ & + g(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) + g(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) \\ & + g(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) + g(X, W)R(U, V, Z, \xi_k), \end{aligned}$$

où $U, V, Z, W \in \chi(M)$.

Démonstration. En posant $T = R$ et $A = g$, dans l'équation (2.2.1), en utilisant les équations (2.2.4) et (3.3.1) nous obtenons les égalités requises. $\square$

Lemme 6. *Soit $M^{2n+s}(c)$ un S -espace forme, Soit X, Y, ξ_α où $\alpha = 1, \dots, s$ des champs de vecteurs orthonormés sur M . Alors*

$$(1) \quad (X \wedge_S Y) \cdot R = \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)(X \wedge Y) \cdot R,$$

$$\begin{aligned} (2) \quad ((X \wedge_S \xi_k) \cdot R)(U, V, Z, W) = & -2n \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(U)R(X, V, Z, W) \\ & + \eta_\alpha(V)R(U, X, Z, W) + \eta_\alpha(Z)R(U, V, X, W) \\ & + \eta_\alpha(W)R(U, V, Z, X)) \\ & + \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)(g(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) \\ & + g(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) + g(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) \\ & + g(X, W)R(U, V, Z, \xi_k)), \end{aligned}$$

où $U, V, Z, W \in \chi(M)$.

Démonstration. D'après (3.3.5), (3.3.1) et (3.3.2) et comme X, Y, ξ_α sont des champs de vecteurs orthonormés, nous obtenons :

$$S(X, Z) = \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)g(X, Z), \quad \forall Z \in \chi(M) \quad (4.5.1)$$

et

$$S(Z, \xi_k) = 2n \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Z), \quad \forall Z \in \chi(M). \quad (4.5.2)$$

a) Si nous substituons A par S dans l'équation (2.2.3), et en utilisant l'équation (4.5.1), il résulte

$$(X \wedge_S Y)Z = \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)(X \wedge Y)Z, \quad Z \in \chi(M),$$

donc

$$(X \wedge_S Y) = \frac{1}{2}(n(c + 3s) + c - s)(X \wedge Y)$$

d'où il découle le premier cas.

b) Si nous substituons T par R et A par S dans l'équation (2.2.1) en utilisant en suite l'équation (2.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} ((X \wedge_S \xi_k) \cdot R)(U, V, Z, W) &= -S(\xi_k, U)R(X, V, Z, W) \\ &\quad - S(\xi_k, V)R(U, X, Z, W) - S(\xi_k, Z)R(U, V, X, W) \\ &\quad - S(\xi_k, W)R(U, V, Z, X) + S(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) \\ &\quad + S(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) + S(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) \\ &\quad + S(X, W)R(U, V, Z, \xi_k), \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

d'après l'équation (4.5.1) et (4.5.2), nous obtenons (2).

□

Lemme 7. Soit $M^{2n+s}(c)$ un S -espace forme, soit X, Y, ξ_α avec $\alpha = 1, \dots, s$ des champs

de vecteurs orthonormés. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & R(X, Y) \cdot R = s(X \wedge Y) \cdot R. \\
 (2) \quad & R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot R = 0. \\
 (3) \quad & (R(X, \xi_k) \cdot R)(U, V, Z, W) = - \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(U)R(X, V, Z, W) \\
 & \quad + \eta_\alpha(V)R(U, X, Z, W) + \eta_\alpha(Z)R(U, V, X, W) \\
 & \quad + \eta_\alpha(W)R(U, V, Z, X)) + s(g(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) \\
 & \quad + g(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) + g(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) \\
 & \quad + g(X, W)R(U, V, Z, \xi_k)),
 \end{aligned}$$

où $U, V, Z, W \in \chi(M)$.

Démonstration. Si $s \geq 2$ et $n \geq 1$ nous avons :

a) Comme $X, Y, \xi_\alpha, \forall \alpha = 1, \dots, s$ sont des champs de vecteurs orthonormés alors, d'après 1 du Lemme 1, il résulte que

$$\begin{aligned}
 R(X, Y) \cdot R = & \left(\frac{c-s}{4} \right) ((fX \wedge fY) \cdot R + 2g(X, fY)f \cdot R) \\
 & + \left(\frac{c+3s}{4} \right) (X \wedge Y) \cdot R.
 \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

D'autre part, f est un endomorphisme sur TM nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 (f \cdot R)(U, V, Z, W) = & -R(fU, V, Z, W) - R(U, fV, Z, W) \\
 & - R(U, fV, Z, W) - R(U, V, Z, fW).
 \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs U, V, Z, W sur M . Par un calcul directe et en utilisant les équations (3.3.4), (3.3.1) et (3.3.2), nous pouvons vérifier que

$$f \cdot R = 0, \tag{4.5.5}$$

d'après l'équation (3.3.4) et en utilisant les équations (2.2.1), (3.3.1) et (3.3.2), nous

obtenons :

$$(fX \wedge fY) \cdot R = -(X \wedge Y) \cdot R. \quad (4.5.6)$$

En substituant (4.5.5) et (4.5.6) dans l'équation (4.5.4) nous obtenons (1).

b) En utilisant le 2 du Lemme 1, nous obtenons (2).

c) Par l'utilisation de 3 du Lemme 1 et du Lemme 5, nous obtenons (3).

□

Théorème 22 ([39]). *Tout S -espace forme $M^{2n+s}(c)$ avec $s \geq 2$ et $n \geq 1$, ne peut être Ricci-pseudo-symétrique généralisé.*

Démonstration. Supposons que M^{2n+s} est Ricci- pseudo-symétrique généralisée, d'après (2.4.1), nous obtenons alors

$$(R(X, Y) \cdot R)(U, V, Z, W) - L((X \wedge_S Y) \cdot R)(U, V, Z, W) = 0, \quad (4.5.7)$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y, U, V, Z, W \in M$ et L est une certaine fonction sur $\mathcal{U}$, où $\mathcal{U} = \{x \in M \mid Q(S, R) \neq 0 \text{ at } x\}$.

Si nous posons $Y = \xi_k$ et si nous considérons que X est orthogonal à $\xi_k, \forall k = 1, \dots, s$, dans (4.5.7), en utilisant (2) du Lemme 6 et (3) du Lemme 7 nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (2nL - 1) \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(U)R(X, V, Z, W) + \eta_\alpha(V)R(U, X, Z, W) \\ & + \eta_\alpha(Z)R(U, V, X, W) + \eta_\alpha(W)R(U, V, Z, X)) \\ & + (s - \frac{L}{2}(n(c + 3s) + c - s))(g(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) \\ & + g(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) + g(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) \\ & + g(X, W)R(U, V, Z, \xi_k)) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Ainsi pour $X, Y, \xi_k, \forall k = 1, \dots, s$, des champs de vecteurs orthonormés, nous avons :

a) Supposons que $n(c + 3s) + c - s \neq 0$ alors d'après (1) du Lemme 6 et (1) du Lemme 7 nous obtenons

$$R(X, Y) \cdot R = \frac{2s}{n(c + 3s) + c - s} (X \wedge_S Y) \cdot R$$

d'où

$$L = \frac{2s}{n(c+3s)+c-s}. \quad (4.5.9)$$

Substituant (4.5.9) dans (4.5.8) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)(s-c)}{n(c+3s)+c-s} \sum_{\alpha=1}^s (\eta_{\alpha}(U)R(X, V, Z, W) + \eta_{\alpha}(V)R(U, X, Z, W) \\ & + \eta_{\alpha}(Z)R(U, V, X, W) + \eta_{\alpha}(W)R(U, V, Z, X)) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Si nous posons $U = fX$, $V = Y$, $Z = fY$ et $W = \xi_k$, $k = 1, \dots, s$, dans l'équation (4.5.10) nous aurons

$$\frac{(n+1)(s-c)}{n(c+3s)+c-s} \left(\frac{c-s}{4} \right) (-1 + g^2(X, fY)) = 0. \quad (4.5.11)$$

par suite, si nous choisissons des champs de vecteurs X, fY orthogonaux dans l'équation (4.5.11) il résulte alors

$$(n+1)(s-c)^2 = 0$$

qui est équivalent à

$$c = s,$$

ce qui contredit notre hypothèse.

b Si nous supposons que $n(c+3s)+c-s=0$, alors d'après (1) du Lemme 6 nous obtenons

$$(X \wedge_S Y) \cdot R = 0,$$

d'après (4.5.7) nous déduisons que

$$R(X, Y) \cdot R = 0. \quad (4.5.12)$$

D'autre part, nous avons

$$((X \wedge Y) \cdot R)(X, fX, fX, Y) = 3 \left(\frac{s-c}{4} \right) (1 - g^2(fX, Y)),$$

si nous supposons que les champs de vecteurs fX et Y sont orthogonaux puisque

$c \neq s$, donc

$$(X \wedge Y) \cdot R \neq 0. \quad (4.5.13)$$

Ainsi, d'après (1) du Lemme 7 et (4.5.13) nous obtenons finalement que

$$R(X, Y) \cdot R \neq 0,$$

selon l'équation (4.5.12), cela conduit à une contradiction.

□

4.6 S -espaces formes semi symétriques

Nous savons que les espaces formes de Sasaki sont semi-symétriques si et seulement s'ils sont de courbure constante $c = 1$. Concernant les S -espaces formes, nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 23. *Tout S -espace forme $M^{2n+s}(c)$, avec $s \geq 2$ et $n \geq 1$ est semi-symétrique si et seulement si $c = s$.*

Démonstration. Soit $X, Y, \xi_k, \forall k = 1, \dots, s$, des champs de vecteurs orthonormés. D'après (2) du Lemme 7, nous avons

$$R(\xi_\alpha, \xi_\beta) \cdot R = 0. \quad (4.6.1)$$

Supposons que $c = s$, il résulte que un calcul direct que

$$(X \wedge Y) \cdot R = 0, \quad (4.6.2)$$

En remplaçant (4.6.2) dans (1) du Lemme 7, nous obtenons

$$R(X, Y) \cdot R = 0. \quad (4.6.3)$$

Donc pour prouver que M est semi-symétrique, il suffit de vérifier que

$$R(X, \xi_k) \cdot R = 0.$$

Si nous substituons $c = s$ dans (2) du Lemme 6, nous obtenons

$$\begin{aligned}
((X \wedge_S \xi_k) \cdot R)(U, V, Z, W) &= -2n \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(U)R(X, V, Z, W) \\
&\quad + \eta_\alpha(V)R(U, X, Z, W) + \eta_\alpha(Z)R(U, V, X, W) \\
&\quad + \eta_\alpha(W)R(U, V, Z, X)) + 2ns(g(X, U)R(\xi_k, V, Z, W) \\
&\quad + g(X, V)R(U, \xi_k, Z, W) + g(X, Z)R(U, V, \xi_k, W) \\
&\quad + g(X, W)R(U, V, Z, \xi_k)).
\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Comparant (4.6.4) avec (3) du Lemme 7, nous déduisons que

$$R(X, \xi_k) \cdot R = \frac{1}{2n} ((X \wedge_S \xi_k) \cdot R). \tag{4.6.5}$$

D'autre part, si nous substituons $c = s$ dans (2) du Lemme 6, d'après (3.3.4), (3.3.1) et (3.3.2) nous avons

$$(X \wedge_S \xi_k) \cdot R = 0,$$

ainsi, d'après (4.6.5) nous avons aussi

$$R(X, \xi_k) \cdot R = 0. \tag{4.6.6}$$

Par substitution des équations, (4.6.1), (4.6.3) et (4.6.6) dans (4.3.2) nous obtenons

$$R(Z, W) \cdot R = 0,$$

pour tous champs de vecteurs Z, W sur M . Ce qui implique que $M^{2n+s}(s)$ est un S -espace forme semi-symétrique. Réciproquement, si nous supposons que M est un S -espace forme semi-symétrique cela implique qu'il est Ricci-semi-symétrique. D'après la Proposition 10, il résulte que $c = s$. $\square$

Corollaire 5. *Soit M^{2n+s} un S -espace forme semi-symétrique. Alors la courbure sectionnelle $K(X, Y)$ satisfait*

1. $K(X, Y) = s$ si $X, Y \in \mathfrak{L}$,

2. $K(X, Y) = 0$ si $X, Y \in \mathfrak{M}$,
3. $K(X, Y) = 1$ si $X \in \mathfrak{L}$ et $Y \in \mathfrak{M}$.

Démonstration. Comme M^{2n+s} est un S -espace forme semi-symétrique, le premier résultat découle d'après le 3 du Théorème 15 et la Proposition 23. M^{2n+s} étant un S -espace forme en particulier c'est une S -variété. Nous obtenons les deux résultats qui suivent d'après le Théorème 13. $\square$

Proposition 11. *Un S -espace forme, $M^{2n+s}(c)$ avec $s \geq 2$ et $n \geq 1$, est semi-symétrique si et seulement la distribution $\mathfrak{L}$ est de courbure constante $c = s$.*

Démonstration. Supposons que M est semi-symétrique, nous déduisons de la Proposition 23, que $c = s$. Le résultat découle alors de 3 du Théorème 15. Réciproquement, soit $\{X, Y\}$ une paire de champs de vecteurs orthonormés de $\mathfrak{L}$, d'après le Lemme 1, la courbure sectionnelle de la section engendrée par X, Y est alors donnée par :

$$K(X, Y) = \frac{3(c-s)}{4}g^2(X, fY) + \frac{c+3s}{4}. \quad (4.6.7)$$

D'autre part, si la distribution $\mathfrak{L}$ est de courbure constante alors ,

$$K(X, Y) = c, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{L}$$

Il en découle que,

$$\frac{3(c-s)}{4}(g^2(X, fY) - 1) = 0.$$

En posant $g(X, fY) = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ nous obtenons $\frac{3(c-s)}{4} \sin^2 \theta = 0$. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons $c = s$, ce qui implique, d'après la Proposition 23, que l'espace est semi-symétrique. $\square$

Exemple 5. *D'après l'Exemple 4, $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ est un S -espace forme de courbure f -sectionnelle constante $c = 4 - 3s$. Si maintenant nous considérons une déformation D -homothétique de sa S -structure, en prenant $a = \frac{1}{s} > 0$ dans (3.3.9), nous trouvons [1] :*

$$\bar{\xi}_\alpha = s\xi_\alpha; \quad \bar{\eta}_\alpha = \frac{1}{s}\eta_\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, s;$$

$$\bar{f} = f; \quad \bar{g} = \frac{1}{s}g + \frac{1-s}{s^2} \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \otimes \eta_{\alpha},$$

donc, d'après [37], $(M, \bar{f}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s, \bar{g})$ est un S -espace forme de courbure f -sectionnelle $c = s$. Il suit alors, d'après le Théorème 23, que $(M, \bar{f}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s, \bar{g})$ est un S -espace forme semi-symétrique.

Chapitre 5

Ricci-pseudo-symétrie sur les S -espaces formes généralisés à deux champs de vecteurs de structures

5.1 Espace forme de Sasaki généralisé

Récemment, dans [2], Alegre, Blair et Carriazo, ont introduit la notion d'espace forme de Sasaki généralisé comme une variété presque de contact métrique (M, f, ξ, η, g) dont le champ de tenseurs de courbure vérifie :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= f_1(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &+ f_2(g(X, fZ)fY - g(Y, fZ)fX + 2g(X, fY)fZ) \\ &+ f_3(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ &- g(Y, Z)\eta(X)\xi), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M et où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions différentiables sur M . Des exemples variés d'espaces de Sasaki généralisés [2], sont construits à partir de

submersion riemannienne, de produit tordu de variétés, de transformation conforme, de déformation D -homothétique et de déformation D -conforme. Parmi ces exemples, nous citerons ceux que nous utiliserons par la suite : Nous pouvons remarquer qu'en particulier, les espaces formes de Sasaki et de Kenmotsu sont des espaces formes de Sasaki généralisés. En effet,

Exemple 6. *Tout espace forme de Sasaki de courbure f -sectionnelle c , est un espace forme de Sasaki généralisé avec*

$$f_1 = \frac{c+3}{4} \text{ et } f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4}.$$

Exemple 7. *Tout espace de Kenmotsu de courbure f -sectionnelle c , est un espace forme de Sasaki généralisé avec*

$$f_1 = \frac{c-3}{4} \text{ et } f_2 = f_3 = \frac{c+1}{4}.$$

L'exemple suivant est obtenu par une submersion riemannienne (voir [2]).

Exemple 8. *Soit $N(F_1, F_2)$ un espace forme complexe kählerien généralisé. Alors $M = N \times \mathbb{R}$ est un espace forme de Sasaki généralisé avec les fonctions*

$$f_1 = f_3 = F_1 \circ \pi \text{ et } f_2 = F_2 \circ \pi,$$

où π est une submersion riemannienne, c'est la projection de M sur N .

Celui-ci est obtenu par l'utilisation d'un produit tordu et d'une déformation D -homothétique.

Exemple 9. *Etant donné un espace de forme complexe $N(c)$, une constante positive a et la fonction f définie par $f(t) = K \exp(kt)$, $k \in \mathbb{R}$, $K > 0$, la déformation D -homothétique de constante a , munit le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_f N(c)$ d'une structure d'espace forme de Sasaki généralisé $M(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ avec*

$$f_1^* = \frac{c}{4a^2 K^2 e^{2kt}} - \left(\frac{k}{a}\right)^2, \quad f_2^* = f_3^* = \frac{c}{4a^2 K^2 e^{2kt}}. \quad (5.1.2)$$

Exemple 10. Soit $N(c)$ un espace forme complexe. Considérons le produit tordu $\widetilde{M} =]-\pi/2, -\pi/2[\times_f N$, avec $f(t) = \cos t$. Alors M est un espace forme de Sasaki généralisé avec les fonctions

$$f_1 = \frac{c - 4 \sin^2 t}{4 \cos^2(t)}, \quad f_2 = \frac{c}{4 \cos^2(t)}, \quad f_3 = \frac{c - 4 \sin^2 t}{4 \cos^2(t)} - 1.$$

5.2 *S*-espace forme généralisé avec deux champs de vecteurs de structure

Par la même approche que celle utilisé pour définir les espaces formes de Sasaki généralisés [2], Carriazo, Fernández et Fuentes [12] introduisent la notion des *S*-espaces formes généralisés avec deux champs de vecteurs de structure. Étant donné $(M, f, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, g)$ une *f.pk*-variété métrique avec deux champs de vecteurs de structures ξ_1 et ξ_2 . M est dite *S*-espace forme généralisé s'il existe des fonctions différentiables $F_1, \dots, F_8$ sur M telles que le champ de tenseurs de courbure de M vérifie (cf. [12])

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= F_1\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &+ F_2\{g(X, fZ)fY - g(Y, fZ)fX + 2g(X, fY)fZ\} \\ &+ F_3\{\eta_1(X)\eta_1(Z)Y - \eta_1(Y)\eta_1(Z)X + g(X, Z)\eta_1(Y)\xi_1 - g(Y, Z)\eta_1(X)\xi_1\} \\ &+ F_4\{\eta_2(X)\eta_2(Z)Y - \eta_2(Y)\eta_2(Z)X + g(X, Z)\eta_2(Y)\xi_2 - g(Y, Z)\eta_2(X)\xi_2\} \\ &+ F_5\{\eta_1(X)\eta_2(Z)Y - \eta_1(Y)\eta_2(Z)X + g(X, Z)\eta_1(Y)\xi_2 - g(Y, Z)\eta_1(X)\xi_2\} \\ &+ F_6\{\eta_2(X)\eta_1(Z)Y - \eta_2(Y)\eta_1(Z)X + g(X, Z)\eta_2(Y)\xi_1 - g(Y, Z)\eta_2(X)\xi_1\} \\ &+ F_7\{\eta_1(X)\eta_2(Y)\eta_2(Z)\xi_1 - \eta_2(X)\eta_1(Y)\eta_2(Z)\xi_1\} \\ &+ F_8\{\eta_2(X)\eta_1(Y)\eta_1(Z)\xi_2 - \eta_1(X)\eta_2(Y)\eta_1(Z)\xi_2\} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$. Ces variétés généralisent de façon naturelle les *S*-espaces formes M^{2n+2} . En effet, en utilisant (3.3.4) avec (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4), nous déduisons que tout *S*-espace forme $M^{2n+2}(c)$ est un *S*-espace forme généralisé avec

$$F_1 = \frac{c+6}{4}; \quad F_2 = F_7 = F_8 = \frac{c-2}{4}; \quad F_3 = F_4 = \frac{c+2}{4}; \quad F_5 = F_6 = -1$$

Un calcul direct, nous permet d'avoir les expressions de la courbure de Ricci S et de la courbure scalaire τ , suivantes :

$$\begin{aligned}
 S(X, Y) = & g(X, Y)((2n + 1)F_1 + 3F_2 - F_3 - F_4) \\
 & + \eta_1(X)\eta_1(Y)(-3F_2 - 2nF_3 + F_8) \\
 & + \eta_2(X)\eta_2(Y)(-3F_2 - 2nF_4 + F_7) \\
 & + \eta_1(X)\eta_2(Y)(-2nF_5) \\
 & + \eta_2(X)\eta_1(Y)(-2nF_6)
 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

et

$$\tau = (2n + 1)(2n + 2)F_1 + 6nF_2 - (4n + 2)F_3 - (4n - 2)F_4 + F_7 + F_8.$$

D'autre part nous avons

Théorème 24 ([61]). *Soit $(M, f, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, g)$ un S-espace forme généralisé. Alors $F_7 = F_8$.*

Proposition 12. *Soit $(M, f, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, g)$ un S-espace forme généralisé. Alors $F_5 = F_6$.*

Démonstration. En posant $X = \xi_1$ et $Y = \xi_2$ dans l'équation (5.2.2), il en découle que $S(\xi_1, \xi_2) = -2nF_5$ et $S(\xi_2, \xi_1) = 2nF_6$, sachant que S est symétrique nous obtenons alors, $F_5 = F_6$. $\square$

Proposition 13 ([12]). *Soit $M = (M, f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, g)$ un S-espace forme généralisé. Si M est une f-K-variété de contact, alors*

$$\begin{aligned}
 F_1 - F_3 &= F_1 - F_4 = 1, \quad F_5 = F_6 = -1 \\
 F_3 &= F_4 = 1 + F_7, \quad F_1 - F_7 = 2.
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Nous présentons des exemples [12] de S-espaces formes généralisés suivants :

Exemple 11. *Soit $M = (M, f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, g)$ une S-variété qui est l'espace fibré d'un fibré principal toroidal au dessus d'une variété kählerienne $N = (N, J, G)$, de dimensions, respectives, $2n + 2$ et $2n$. Notons par $\pi : M \rightarrow N$ la projection qui est une submersion*

riemannienne. Alors, il est connu que

$$(i) \quad \nu_x = \text{span}\{\xi_{1x}, \xi_{2x}\}, \quad (ii) \quad (JX)^* = fX^*, \quad (iii) \quad G(X, Y) = g(X^*, Y^*),$$

pour tout point $x \in M$ et tous champs de vecteurs X, Y sur N , où ν_x est le sous espace vertical en x et $*$ note le relèvement horizontal. Soit R et $\tilde{R}$ les champs de tenseurs de courbure respectivement, de M et N . Alors,

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^* &= R(X^*, Y^*)Z^* + 2(g(X^*, fZ^*)fY^* \\ &\quad - g(Y^*, fZ^*)fX^* + 2g(X^*, fY^*)fZ^*), \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z tangents à N . Dans ces conditions, si N est un espace forme complexe généralisé associé aux fonctions f_1 et f_2 , alors d'après (1.2.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(X^*, Y^*)Z^* &= (f_1 \circ \pi)(g(Y^*, Z^*)X^* - g(X^*, Z^*)Y^*) \\ &\quad + (f_2 \circ \pi - 2)(g(X^*, fZ^*)fY^* - g(Y^*, fZ^*)fX^* \\ &\quad + 2g(X^*, fY^*)fZ^*) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

pour tous X, Y, Z tangents à N . Comme, on peut écrire

$$X = \tilde{X} + \sum_{\alpha=1}^2 \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}$$

pour tout champ de vecteurs X tangents à M , où $\tilde{X}$ est un champ de vecteurs horizontal. En prenant en compte que toute S -variété est aussi une f - K -variété métrique de contact, on déduit à la suite d'un calcul direct (voir [12]) que M est un S -espace forme généralisé, avec les fonctions :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \circ \pi, \quad F_2 = f_2 \circ \pi - 2, \quad F_3 = F_4 = f_1 \circ \pi - 1, \\ F_5 &= F_6 = -1, \quad F_7 = F_8 = f_1 \circ \pi - 2. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Exemple 12. Soit $(\tilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \tilde{g})$ un espace forme de Sasaki généralisé avec les fonctions

f_1, f_2 et f_3 . Alors son champ de tenseurs de courbure $\tilde{R}$ satisfait l'équation (5.1.1). Considérons maintenant le produit $M = \mathbb{R} \times_h \tilde{M}$, où $h > 0$ est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$. La métrique du produit tordu sur M est donnée par

$$g_h = \pi_1^*(g_{\mathbb{R}}) + (h \circ \pi_1)^2 \pi_2^*(\tilde{g}),$$

où π_1 et π_2 sont les projections respectives, de M sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{M}$. Soit X un champ de vecteurs sur M . Il s'écrit alors sous la forme :

$$X = (a \frac{d}{dt}, \tilde{X}), \quad \tilde{X} \in \chi(\tilde{M})$$

où a est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ et t la coordonnée de $\mathbb{R}$, une f -structure sur M est définie par :

$$fX = (0, \varphi \tilde{X}) = (\varphi(\pi_2)_* X)^*.$$

En posant

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (0, \frac{1}{h} \xi), & \xi_2 &= (\frac{d}{dt}, 0), \\ \eta_1((a \frac{d}{dt}, \tilde{X})) &= h \eta(\tilde{X}), & \eta_2((a \frac{d}{dt}, \tilde{x})) &= a. \end{aligned}$$

Nous vérifions, facilement, que $(M, f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, g_h)$ est une $f.pk$ -variété métrique. En plus, nous avons,

$$X = (a \frac{d}{dt}, \tilde{X}) = \eta_2(X) \xi_2 + (0, \tilde{X}), \quad X \in \chi(M).$$

Ainsi M est un S -espace forme généralisé avec les fonctions :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{(f_1 \circ \pi_2) - h'^2}{h^2}, & F_2 &= \frac{f_2 \circ \pi_2}{h^2}, \\ F_3 = F_7 = F_8 &= \frac{f_3 \circ \pi_2}{h^2}, & F_4 &= \frac{f_1 \circ \pi_2 - h'^2}{h^2} + \frac{h''}{h}, \\ F_5 &= F_6 = 0. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Remarque 7. Une conséquence immédiate de l'exemple ci-dessus est que le produit rieman-

nien usuel $\mathbb{R} \times \widetilde{M}$, est un S -espace forme généralisé avec les fonctions :

$$\begin{aligned} F_1 = F_4 = f_1 \circ \pi_2, \quad F_2 = f_2 \circ \pi_2, \quad F_3 = F_7 = F_8 = f_3 \circ \pi_2, \\ F_5 = F_6 = 0. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Exemple 13. Soit $N(c)$ un espace forme complexe de courbure holomorphique constante c . Alors $M = \mathbb{R} \times_{h_2} (\mathbb{R} \times_{h_1} N(c))$ où h_1, h_2 sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}$, est un S -espace forme généralisé avec les fonctions

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{c - 4(h'_1)^2 - 4h_1^2(h'_2)^2}{4h_1^2h_2^2}, \quad F_2 = \frac{c}{4h_1^2h_2^2} \\ F_3 &= F_7 = F_8 = \frac{c - 4(h'_1)^2 + 4h_1h''_1}{4h_1^2h_2^2}, \\ F_4 &= \frac{c - 4(h'_1)^2 - 4h_1^2(h'_2)^2 + 4h_1^2h_2h''_2}{4h_1^2h_2^2}, \\ F_5 &= F_6 = 0. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

5.3 Ricci- pseudo-symétrie sur les S -espaces formes généralisés

Pour les espaces formes de Sasaki généralisés nous avons les résultats suivants (adapté à la terminologie adopté dans ce travail) :

Théorème 25 ([32]). *Tout espace forme de Sasaki généralisé $M(f_1, f_2, f_3)$ est Ricci-pseudo-symétrique avec la fonction $L_S = f_1 - f_3$.*

Proposition 14. *Etant donné $(M, f, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, g)$ un S -espace forme généralisé. Pour tous champs de vecteurs X, Y orthonormés et orthogonaux à ξ_1, ξ_2 , les identités suivantes sont satisfaites :*

- (1) $R(X, Y) \cdot S = 0$,
- (2) $R(X, \xi_1) \cdot S = (F_1 - F_3)(X \wedge \xi_1) \cdot S - F_5(X \wedge \xi_2) \cdot S$,
- (3) $R(X, \xi_2) \cdot S = (F_1 - F_4)(X \wedge \xi_2) \cdot S - F_6(X \wedge \xi_1) \cdot S$,

$$(4) R(\xi_1, \xi_2) \cdot S = (F_1 - F_3 - F_4 + F_7)(\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S.$$

Démonstration. Si nous considérons que X, Y sont deux champs de vecteurs orthonormés et orthogonaux à ξ_1 et ξ_2 dans l'équation (5.2.1), il vient alors, que

$$R(X, Y) = F_1(X \wedge Y) + F_2(fX \wedge fY) + 2g(X, fY)f.$$

D'où

$$\begin{aligned} R(X, Y) \cdot S &= F_1(X \wedge Y) \cdot S \\ &+ F_2((fX \wedge fY) \cdot S + 2g(X, fY)f \cdot S). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Par ailleurs, un calcul direct nous donne $f \cdot S = 0$, $(fX \wedge fY) \cdot S = 0$ et $(X \wedge Y) \cdot S = 0$, en les substituant dans (5.3.1), nous obtenons l'assertion (1). Si nous posons $Y = \xi_1$ et si nous considérons X orthogonal à ξ_1 et ξ_2 dans (5.2.1) ceci, avec (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4), nous donne pour tout $Z \in \chi(M)$

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1)Z &= F_1(X \wedge \xi_1)Z + F_3(-\eta_1(Z)X + g(X, Z)\xi_1) \\ &+ F_5(-\eta_2(Z)X + g(X, Z)\xi_2). \end{aligned}$$

D'où

$$R(X, \xi_1) = (F_1 - F_3)(X \wedge \xi_1) - F_5(X \wedge \xi_2) \quad (5.3.2)$$

ainsi l'assertion (2) suit. De la même manière, si nous posons $Y = \xi_2$ et que nous supposons X orthogonal à ξ_1 et ξ_2 , nous obtenons (3). Pour établir l'assertion (4), posons $X = \xi_1$ et $Y = \xi_2$ dans (5.2.1), d'après Théorème 24, nous obtenons

$$R(\xi_1, \xi_2) = (F_1 - F_3 - F_4 + F_7)(\xi_1 \wedge \xi_2).$$

□

Théorème 26. *Soit $M = (M, f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, g)$ un S -espace forme généralisé de dimension $(2n+2)$. Si M est une f - K -variété de contact alors elle ne peut être Ricci-pseudo-symétrique.*

Démonstration. Comme M est une f - K -variété de contact, en substituant les équations

(5.2.3) dans (2) et (3) de la Proposition 14, il en découle d'une part que

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1) \cdot S &= (X \wedge \xi_1) \cdot S + (X \wedge \xi_2) \cdot S, \\ R(X, \xi_2) \cdot S &= (X \wedge \xi_2) \cdot S + (X \wedge \xi_1) \cdot S, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

nous en déduisons que

$$R(X, \xi_1) \cdot S = R(X, \xi_2) \cdot S.$$

Si en plus M est Ricci-pseudo-symétrique alors, d'après (2.3.1),

$$(X \wedge \xi_1) \cdot S = (X \wedge \xi_2) \cdot S. \quad (5.3.4)$$

Si nous substituons (5.3.4) dans (5.3.3) il en résulte que

$$R(X, \xi_1) \cdot S = 2(X \wedge \xi_1) \cdot S, \quad (5.3.5)$$

comme

$$((X \wedge \xi_1) \cdot S)(X, \xi_2) = -2n \neq 0$$

il suit que

$$L_S = 2. \quad (5.3.6)$$

D'autre part, si on utilise l'équation (5.2.3) nous obtenons

$$F_1 - F_3 - F_4 + F_7 = 0$$

cela avec l'assertion (4) de la Proposition 14 conduisent à

$$R(\xi_1, \xi_2) \cdot S = 0. \quad (5.3.7)$$

Puisque

$$((\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S)(\xi_1, \xi_2) = 4n \neq 0,$$

alors

$$L_S = 0. \quad (5.3.8)$$

qui contredit (5.3.6). $\square$

Corollaire 6. *Soit $M = (M, f, \xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_2, g)$ un S -espace forme généralisé de dimension $(2n + 2)$. Si M est une S -variété alors elle ne peut être Ricci-pseudo-symétrique.*

Démonstration. Comme toute S -variété est en particulier une f - K -variété de contact, la conclusion découle alors du Théorème 26. $\square$

Corollaire 7. *Soit $M = (M, f, \xi_1, \xi_1, \eta_1, \eta_2, g)$ une S -variété, de dimension $(2n + 2)$, qui est l'espace fibré d'un fibré principal toroidal sur une variété kählérienne $N = (N, J, G)$ de dimension $2n$. Alors M ne peut être Ricci-pseudo-symétrique.*

Démonstration. En effet, selon l'exemple 11, la variété M , ainsi définie, est un S -espace forme généralisé. Comme c'est aussi une S -variété, nous concluons alors en utilisant le Corollaire 6. $\square$

Dans le but d'étudier la Ricci-pseudo-symétrie des S -espaces formes généralisés de l'Exemple 12 ci-dessus, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 8. *Soit le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$, avec $h > 0$ où $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ est un espace forme de Sasaki généralisé avec les fonctions f_1, f_2 et f_3 . Alors, pour tous X, Y, ξ_1, ξ_2 des champs de vecteurs orthonormés,*

$$\begin{aligned}
 (1) ((X \wedge \xi_1) \cdot S)(Z, W) &= \frac{(-3f_2 + (1 - 2n)f_3) \circ \pi_2}{h^2} (\eta_1(w)g(X, Z) \\
 &\quad + \eta_1(Z)g(X, W)), \\
 (2) ((X \wedge \xi_2) \cdot S)(Z, W) &= \frac{(-3f_2 - 2nf_1 + f_3) \circ \pi_2 + 2n(h'^2 - hh'')}{h^2} (\eta_2(W) \\
 &\quad g(X, Z) + \eta_2(Z)g(X, W)), \\
 (3) ((\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S)(Z, W) &= \frac{2n((f_3 - f_1) \circ \pi_2 + 2n(h'^2 - hh''))}{h^2} (\eta_1(W)\eta_2(Z) \\
 &\quad + \eta_1(Z)\eta_2(W)),
 \end{aligned}$$

où S est la courbure de Ricci de M et $Z, W \in \chi(M)$.

Démonstration. En utilisant (2.2.1) pour $T = S$ et $A = g$ et en prenant en compte (5.2.2) avec (5.2.7), le résultat en découle facilement. $\square$

Lemme 9. *Sous les conditions ci-dessus. Si $(X \wedge \xi_1) \cdot S \neq 0$ alors $(X \wedge \xi_2) \cdot S \neq 0$ ou $(\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S \neq 0$*

Démonstration. Si nous posons dans le Lemme 8

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-3f_2 + (1 - 2n)f_3) \circ \pi_2}{h^2} \\ C &= \frac{(-3f_2 - 2nf_1 + f_3) \circ \pi_2 + 2n(h'^2 - hh'')}{h^2} \\ D &= \frac{2n((f_3 - f_1) \circ \pi_2 + (h'^2 - hh''))}{h^2}, \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

nous pouvons remarquer que

$$D = C - B \tag{5.3.10}$$

Supposons que $(X \wedge \xi_2) \cdot S = 0$ il découle d'après (2) du Lemme 8 que

$$C(\eta_2(W)g(X, Z) + \eta_2(Z)g(X, W)) = 0. \tag{5.3.11}$$

Si nous posons $Z = X$ et $W = \xi_2$ dans (5.3.11), nous obtenons $C = 0$. Nous déduisons alors, d'après (5.3.10), que

$$D = B \neq 0. \tag{5.3.12}$$

Puisque

$$((\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S)(Z, W) = D(\eta_1(W)\eta_2(Z) + \eta_1(Z)\eta_2(W)),$$

et si nous posons $Z = \xi_1$ et $W = \xi_2$ nous obtenons alors,

$$((\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S)(\xi_1, \xi_2) = D.$$

D'après (5.3.12), nous déduisons que $(\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S \neq 0$. De la même manière, si nous supposons que $(\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S = 0$ nous déduisons alors que $(X \wedge \xi_2) \cdot S \neq 0$. $\square$

Théorème 27. *Soit $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ un espace forme de Sasaki généralisé dont les fonctions sont f_1, f_2 et f_3 telles que $-3f_2 + (1 - 2n)f_3 \neq 0$. Alors, le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$,*

avec $h > 0$, est Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si

$$h''h - h'^2 = (f_3 - f_1) \circ \pi_2. \quad (5.3.13)$$

où π_2 est la projection de M sur $\widetilde{M}$.

Démonstration. Comme il est décrit dans l'Exemple 12 la variété M est un S -espace forme généralisé. Par substitution de (5.2.7) dans (2), (3) et (4) de la Proposition 14 il résulte que :

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1) \cdot S &= \frac{(f_1 - f_3) \circ \pi_2 - h'^2}{h^2} (X \wedge \xi_1) \cdot S, \\ R(X, \xi_2) \cdot S &= -\frac{h''}{h} (X \wedge \xi_2) \cdot S, \\ R(\xi_1, \xi_2) \cdot S &= -\frac{h''}{h} (\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Puisque $-3f_2 + (1-2n)f_3 \neq 0$, le (1) du Lemme 8, implique que $((X \wedge \xi_1) \cdot S) \neq 0$. Supposons que M est Ricci-pseudo-symétrique, nous avons d'une part, d'après les équations (5.3.14) et (2.3.1),

$$L_S = \frac{(f_1 - f_3) \circ \pi_2 - h'^2}{h^2}.$$

Nous avons d'autre part, d'après le Lemme 9 et (5.3.14),

$$L_S = -\frac{h''}{h}.$$

Ce qui implique que

$$\frac{(f_1 - f_3) \circ \pi_2 - h'^2}{h^2} = -\frac{h''}{h}.$$

Ainsi,

$$h''h - h'^2 = (f_3 - f_1) \circ \pi_2.$$

Inversement, si (5.3.13) est vérifiée il en résulte que

$$\frac{(f_1 - f_3) \circ \pi_2 - h'^2}{h^2} = -\frac{h''}{h},$$

substituant cela dans (5.3.14), en utilisant le Lemme 8 nous aurons

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1) \cdot S &= -\frac{h''}{h}(X \wedge \xi_1) \cdot S \\ R(X, \xi_2) \cdot S &= -\frac{h''}{h}(X \wedge \xi_2) \cdot S \\ R(\xi_1, \xi_2) \cdot S &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Soit Z, W des champs de vecteurs sur le S -espace forme généralisé M^{2n+2} , puisque nous pouvons écrire

$$Z = X + \sum_{i=1}^2 \eta_i(Z) \xi_i \quad \text{et} \quad W = Y + \sum_{j=1}^2 \eta_j(W) \xi_j,$$

où X, Y, ξ_1, ξ_2 sont des champs de vecteurs orthonormés, nous avons donc

$$\begin{aligned} R(Z, W) &= R(X, Y) + \eta_1(W)R(X, \xi_1) + \eta_2(W)R(X, \xi_2) \\ &\quad + \eta_1(Z)R(\xi_1, Y) + \eta_2(Z)R(\xi_2, Y) + \eta_1(Z)\eta_2(W)R(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + \eta_2(Z)\eta_1(W)R(\xi_2, \xi_1). \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Par substitution de (5.3.15) et (1) de la Proposition 14 dans (5.3.16), nous trouvons que

$$\begin{aligned} R(Z, W) \cdot S &= -\frac{h''}{h}(\eta_1(W)(X \wedge \xi_1) + \eta_2(W)(X \wedge \xi_2) \\ &\quad - \eta_1(Z)(Y \wedge \xi_1) - \eta_2(Z)(Y \wedge \xi_2)) \cdot S \end{aligned}$$

d'où

$$R(Z, W) \cdot S = -\frac{h''}{h}(Z \wedge W) \cdot S.$$

Comme $(-3f_2 + (1 - 2n)f_3) \neq 0$, d'après le Lemme 8, il résulte

$$(X \wedge \xi_1) \cdot S \neq 0 \text{ ce qui implique que } (Z \wedge W) \cdot S \neq 0,$$

d'où nous déduisons que M est Ricci-pseudo-symétrique et que $L_S = -\frac{h''}{h}$. □

Corollaire 8. *Si $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ est un espace forme de Sasaki généralisé avec des fonctions*

f_1, f_2 et f_3 . Alors, le S -espace forme généralisé $M = \mathbb{R} \times \widetilde{M}$, est Ricci-semi-symétrique si et seulement si $\widetilde{M}$ est Ricci-semi-symétrique.

Démonstration. Pour $h = 1$, (5.3.14) est réduite à

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1) \cdot S &= \frac{(f_1 - f_3) \circ \pi_2}{h^2} (X \wedge \xi_1) \cdot S \\ R(X, \xi_2) \cdot S &= 0 \\ R(\xi_1, \xi_2) \cdot S &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

D'autre part, d'après (2.3.2), M est Ricci-semi-symétrique si et seulement si pour tous champs de vecteurs U et V sur M

$$R(U, V) \cdot S = 0, \quad (5.3.18)$$

ce qui est équivalent à $f_1 - f_3 = 0$ ou $(X \wedge \xi_1) \cdot S = 0$. Suite au Lemme 8, $(X \wedge \xi_1) \cdot S = 0$ est équivalent à $3f_2 + (2n - 1)f_3 = 0$. Ainsi, les deux cas conduisent, d'après le Théorème 25, à conclure que $\widetilde{M}$ est Ricci-semi-symétrique. $\square$

Théorème 28. Soit $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ un espace forme de Sasaki généralisé avec des fonctions f_1, f_2 et f_3 , tels que $-3f_2 + (1 - 2n)f_3 \neq 0$ et $f_3 - f_1 = \alpha^2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc, le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$, avec $h > 0$ est Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si

$$h(t) = A \cosh(\sqrt{\lambda}t) + B \sinh(\sqrt{\lambda}t),$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant $A > |B|$ et $\lambda = \frac{\alpha^2}{A^2 - B^2}$.

ou

$$h(t) = A \exp(\epsilon \sqrt{\lambda}t), \quad \text{avec } A > 0, \lambda \geq 0 \text{ et } \epsilon = \pm 1.$$

Démonstration. Si nous posons $f_3 - f_1 = \alpha^2$ dans (5.3.13) du Théorème 27, il suit alors, que

$$h''h - h'^2 = \alpha^2 \quad (5.3.19)$$

qui est une équation différentielle linéaire de la forme

$$h'' = f(h, h').$$

avec $h > 0$. En dérivant (5.3.19) nous obtenons

$$h^{(3)}h - h' h'' = 0,$$

donc

$$\frac{h^{(3)}h - h' h''}{h^2} = 0$$

qui est équivalent à

$$\left(\frac{h''}{h}\right)' = 0.$$

Ainsi, il existe une constante λ telle que h soit solution de l'équation différentielle linéaire avec des coefficients constants

$$h'' = \lambda h. \quad (5.3.20)$$

En plus, comme $h > 0$ il en découle d'après (5.3.19) que $h'' \geq 0$ avec (5.3.20) nous obtenons

$$\lambda \geq 0.$$

Par conséquent h est de la forme :

$$h(t) = A \cosh(\sqrt{\lambda}t) + B \sinh(\sqrt{\lambda}t),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$, et $\lambda \geq 0$. Puisque $h(0) = A$ cela conduit à prendre $A > 0$.

Inversement, pour une telle fonction nous avons

$$\begin{aligned} h''(t)h(t) - h'^2(t) &= \lambda(A \cosh(\sqrt{\lambda}t) + B \sinh(\sqrt{\lambda}t))^2 - (A \sinh(\sqrt{\lambda}t) \\ &\quad + B \cosh(\sqrt{\lambda}t))^2 \\ &= \lambda(A^2 - B^2) = \alpha^2. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Nous distinguons deux cas :

$\alpha = 0$: Si $\lambda = 0$, cela signifie que, $h = A$ sur $\mathbb{R}$.

Si $|A| = |B|$, nous obtenons $B = \epsilon A$ où $\epsilon = \pm 1$. Dans ce cas les solutions de l'équation différentielle linéaire sont

$$h(t) = A \exp(\epsilon \sqrt{\lambda}t) \quad (5.3.22)$$

où $A > 0$, $\lambda \geq 0$ et $\epsilon = \pm 1$.

$\alpha \neq 0$: Dans ce cas nous obtenons, pour $A > |B|$, que $\lambda = \frac{\alpha^2}{A^2 - B^2}$.

□

Dans le cas où $f_3 - f_1 = -\alpha^2$, d'après le Théorème 27, M serait Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si $h''h - h'^2 = -\alpha^2$. En résolvant cette équation différentielle par la même méthode que ci-dessus on obtient donc

$$h'' = \lambda h.$$

1) Si $\lambda > 0$ alors les solutions sont de la forme

$$h(t) = k_1 \cosh(\sqrt{\lambda}t) + k_2 \sinh(\sqrt{\lambda}t)$$

avec $\lambda = \frac{-\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2}$ et $0 < k_1 < |k_2|$.

2) Si $\lambda < 0$ alors les solutions sont de la forme

$$h(t) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}t) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}t),$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, et $\lambda \leq 0$. Puisque $h(0) = C_1$ cela conduit à prendre

$$C_1 > 0.$$

Pour ces fonctions nous avons,

$$\begin{aligned} h''(t)h(t) - h'^2(t) &= -|\lambda|(C_1 \cos(|\lambda|t) + C_2 \sin(|\lambda|t))^2 \\ &\quad - (-C_1 \sin(|\lambda|t) + C_2 \cos(|\lambda|t))^2 \\ &= -|\lambda|(C_1^2 + C_2^2) = -\alpha^2. \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons

$$h(t) = C_1 \cos\left(\frac{|\alpha|t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{|\alpha|t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right), \quad (5.3.23)$$

Mais, ces solutions ne sont pas positives sur $\mathbb{R}$, pour remédier à cette contrainte, nous pouvons nous restreindre à des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, convenablement choisis, ainsi, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Théorème 29. *Soit $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ un espace forme de Sasaki généralisé avec des fonctions f_1, f_2 et f_3 telles que $-3f_2 + (1 - 2n)f_3 \neq 0$ et $f_3 - f_1 = -\alpha^2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, le produit tordu $M =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times_h \widetilde{M}$, avec $h(t) = \cos(|\alpha|t)$ est Ricci-pseudo-symétrique.*

Démonstration. En effet, pour $h(t) = \cos(|\alpha|t)$ nous avons

$$h''(t)h(t) - h'(t)^2 = -\alpha^2.$$

Donc

$$h''h - h'^2 = (f_3 - f_1) \circ \pi_2.$$

On conclut, d'après le Théorème 27, que M est Ricci-pseudo-symétrique. $\square$

5.4 Exemples

Dans cette section nous donnons des exemples de S -espaces formes généralisés Ricci-pseudo-symétriques en utilisant les Théorèmes 28 et 29 et les Exemples 6 et 7.

Exemple 14. *Soit $\widetilde{M}$ un espace forme de Kenmotsu de courbure f -sectionnelle $c \neq -1$. Alors $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$ avec $h(t) = \cosh t$ est un S -espace forme Ricci-pseudo-symétrique.*

Exemple 15. *Soit $\widetilde{M}$ un espace forme de Sasaki de courbure f -sectionnelle $c \neq 1$. Alors $M =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times_h \widetilde{M}$ avec $h(t) = \cos t$ est S -espace forme Ricci-pseudo-symétrique.*

Nous savons, d'après [2], que $\widetilde{M} = N \times \mathbb{R}$ où $N(F_1, F_2)$ est un espace de forme complexe kählerien généralisé, est en fait un espace forme de Sasaki généralisé avec des fonctions,

$$f_1 = F_1 \circ \pi, \quad f_2 = F_2 \circ \pi, \quad \text{et} \quad f_3 = F_1 \circ \pi. \quad (5.4.1)$$

Ainsi, nous pouvons énoncer

Corollaire 9. *Sous les conditions ci-dessus $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$ avec $-3f_2 + (1 - 2n)f_3 \neq 0$ est Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si*

$$h(t) = A \exp(\epsilon \sqrt{\lambda} t),$$

avec $A > 0$, $\lambda \geq 0$ et $\epsilon = \pm 1$.

Exemple 16. *Soit $\widetilde{M} = N \times \mathbb{R}$ où $N = N(k)$ un espace forme complexe de courbure holomorphique $k \neq 0$. Alors $M = \mathbb{R} \times_h \widetilde{M}$ avec $h(t) = e^t$ est un S-espace forme généralisé Ricci-pseudo-symétrique.*

Proposition 15. *Soit $N(c)$ un espace forme complexe de courbure holomorphique c constante. Alors le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_{h_2} (\mathbb{R} \times_{h_1} N(c))$, avec $h_1 = h_2 = h$, est Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si $h(t) = \cosh(\lambda t + \gamma)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$. ou M est Ricci-semi-symétrique.*

Démonstration. D'après l'Exemple 13, le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_{h_2} (\mathbb{R} \times_{h_1} N(c))$, est un S-espace forme généralisé. Donc en substituant (5.2.9) dans (2), (3) et (4) de la Proposition 14, il résulte que :

$$\begin{aligned} R(X, \xi_1) \cdot S &= -\frac{h_1(h'_2)^2 + h''_1}{h_1 h_2^2} (X \wedge \xi_1) \cdot S \\ R(X, \xi_2) \cdot S &= -\frac{h''_2}{h_2} (X \wedge \xi_2) \cdot S \\ R(\xi_1, \xi_2) \cdot S &= -\frac{h''_2}{h_2} (\xi_1 \wedge \xi_2) \cdot S. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Si M est Ricci-pseudo-symétrique, d'après (2.3.1), nous aurons

$$\frac{h_1(h'_2)^2 + h''_1}{h_1 h_2^2} = \frac{h''_2}{h_2}. \tag{5.4.3}$$

En posant $h_1 = h_2 = h$, dans (5.4.2) nous obtenons alors

$$\frac{h(h')^2 + h''}{h^3} = \frac{h''}{h}.$$

Supposons que $h \neq 1$, alors

$$h'' = \frac{hh'^2}{h^2 - 1}, \quad (5.4.4)$$

ainsi,

$$\frac{2h''}{h'} = \frac{2hh'^2}{h^2 - 1}, \quad (5.4.5)$$

d'où

$$\frac{h'}{\sqrt{|h^2 - 1|}} = \lambda \quad \text{where } \lambda \in \mathbb{R}^*. \quad (5.4.6)$$

C'est une équation différentielle à variables séparables qui admet les solutions,

$$h(t) = \sin(\lambda t + \eta), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \eta \in \mathbb{R}$$

ou

$$h(t) = \cosh(\lambda t + \gamma), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Or la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc les solutions du premier cas conduisent à une contradiction. Ainsi, les solutions retenues sont les fonctions h satisfaisant

$$h(t) = \cosh(\lambda t + \gamma), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Si $h = 1$ en remplaçant dans (5.4.2), nous déduisons que

$$R(U, V) \cdot S = 0 \quad \forall U, V \in \chi(M).$$

D'où M est Ricci-semi-symétrique. Inversement, si $h(t) = \cosh(\lambda t + \gamma)$, alors

$$\frac{h(h')^2 + h''}{h^3} = \lambda^2 = \frac{h''}{h}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (5.4.7)$$

Substituons (5.4.7) dans (5.4.2) ce qui conduit à

$$R(U, V) \cdot S = -\lambda^2(U \wedge V) \cdot S, \quad \forall U, V \in \chi(M)$$

c.-à-d. que M est Ricci-pseudo-symétrique avec $L_S = -\lambda^2$. Si M est Ricci semi-symétrique alors M est, en particulier, Ricci-pseudo-symétrique. $\square$

Perspectives

Les perspectives de recherche dans le domaine de l'étude de la géométrie des variétés de contact généralisées sont nombreuses et variées. Suite à ce que nous avons fait dans ce travail, je voudrais continuer à examiner d'autres types de symétrie sur les S -variétés, particulièrement sur les S -espaces formes et les S -espaces formes généralisés à s champs de vecteurs de structure avec $s \geq 2$ introduits par [51], d'une part et d'autre part, aborder le thème de la symétrie extrinsèque de ces variétés, en étudiant l'existence des sous variétés pseudo- parallèles des S -espaces formes et des S -espaces formes généralisés.

Bibliographie

- [1] M. A. Akyol, L. M. Luis M. Fernandez, and A. Prieto-Martín, *The $\mathfrak{L}$ -sectional curvature of S -manifolds*, ArXiv : math.DG/1302.1973v3 (2013).
- [2] P. Alegre, D. E. Blair, and A. Carriazo, *Generalized Sasakian-space-forms*, Israel J. Math. **141** (2004), 157–183.
- [3] M. Belkhelfa, *Differential geometry of semi-Riemannian manifolds and submanifolds*, Ph.D. thesis, K.U. Leuven, 2001.
- [4] M. Belkhelfa and R. Deszcz, *Symmetry properties of 3-dimensional D'Atri spaces*, Kyungpook Math. J. **46** (2006), 367–376.
- [5] M. Belkhelfa, R. Deszcz, and L. Verstraelen, *Symmetry properties of Sasakian space-forms*, Soochow J. Math. **4** (2005), 611–616.
- [6] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 203, Birkhäuser, 2002.
- [7] D.E. Blair, *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Differential Geometry **1** (1967), 331–345.
- [8] ———, *Geometry of manifolds with structural groups $U(n) \times O(s)$* , J. Differential Geom. **4** (1970), 155–167.
- [9] ———, *On a generalisation of the Hopf fibration*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) **XVII** (1971), 171–177.

-
- [10] D.E. Blair, G.D. Ludden, and K. Yano, *Differential geometric structures on principal toroidal bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 175–184.
 - [11] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, and M. Fernández, *The curvature tensor fields on f-manifolds with complemented frames*, An. S_t tiint_ș. Univ. Al. I. Cuza Iași Sect_ș. I a Mat. **36** (1990), no. 2, 151–161.
 - [12] A. Carriazo, L.M. Fernández, and A. M. Fuentes, *Generalized S-space-forms with two structure vector fields*, Adv. Geom. **10** (2010), 205–219.
 - [13] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.
 - [14] F. Defever and R. Deszcz, *On semi-Riemannian manifolds satisfying the condition $R \cdot R = Q(S, R)$* , In :Geometry and Topology of Submanifolds World Sci., River Edge, NJ, **III** (1991), 108–130.
 - [15] ———, *On warped product manifolds satisfying a certain curvature condition*, Atti. Acad. Peloritana Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **69** (1991), 213–236.
 - [16] F. Defever, R. Deszcz, and L. Verstraelen, *On pseudo-symmetric para-Kähler manifolds*, Colloq. Math. **74** (1997), 253–260.
 - [17] J. Deprez, R. Deszcz, and L. Verstraelen, *Pseudo-symmetry curvature conditions on hypersurfaces of euclidean spaces and on kählerian manifolds*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **9** (1988), 183–192.
 - [18] ———, *Examples of pseudosymmetric conformally flat warped products*, Chinese J. Math. **17** (1989), 51–65.
 - [19] R. Deszcz, *On Ricci-pseudosymmetric warped products*, Demonstratio Math. **22** (1989), 1053–1065.
 - [20] ———, *On conformally flat Riemannian manifolds satisfying certain curvature conditions*, Tensor (N.S.) **49** (1990), 134–145.

-
- [21] ———, *On pseudo-symmetric spaces*, Bull. Belg. Math. Soc. **Ser. A** (1992), no. 44, 1–34.
- [22] R. Deszcz, M. Glogowska, M. Hotłoś, and K. Sawicz, *A Survey on Generalized Einstein Metric Conditions*, In : Advances in Lorentzian Geometry : Proceedings of the Lorentzian Geometry Conference in Berlin, AMS/IP Stud. Adv. Math. **49** (2011), 27–46.
- [23] R. Deszcz and W. Grycak, *On some class of warped product manifolds*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **15** (1987), 311–322.
- [24] R. Deszcz, S. Haesen, and L. Verstraelen, *On natural symmetries*, Eds. A. Mihai, I. Mihai and R. Miron, Editura Academiei Române, 2008.
- [25] R. Deszcz and M. Hotłoś, *Remarks on Riemannian manifolds satisfying certain curvature condition imposed on the Ricci tensor*, Prace Nauk. Pol. Szczec. **11** (1989), 23–34.
- [26] R. Deszcz, P. Verheyen, and L. Verstraelen, *On some generalized Einstein metric conditions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **60** (1996), no. 74, 108–120.
- [27] R. Deszcz and L. Verstraelen, *Hypersurfaces of semi-Riemannian conformally flat manifolds*, In : Geometry and Topology of Submanifolds III, ((World Sci., River Edge, NJ,) (1991), 131–147.
- [28] R. Deszcz, L. Verstraelen, and S. Yaprak, *Warped products realizing a certain condition of pseudo-symmetry type imposed on the Weyl curvature tensor*, Chinese J. Math. (Taiwan R.O. C.) **22** (1994), 139–157.
- [29] L. Di Terlizzi and J.J. Konderak, *Examples of a generalization of contact metric structures on fibre bundles*, J. Geom. **87** (2007), 31–49.
- [30] G. Dileo and A. Lotta, *On the structure and symmetry properties of almost S -manifolds*, Geom.Dedicata **110** (2005), 191–211.

- [31] K. L. Duggal, S. Ianus, and A. M. Pastor, *Maps interchanging f -structures and their harmonicity*, Acta Appl. Math. **67** (2001), no. 1, 91–115.
- [32] F. Gherib, F. Kadi, and M. Belkhelfa, *Symmetry properties of generalized Sasakian space form*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov **14** (2007), no. N° 49, 107–114.
- [33] S. I. Goldberg and K. Yano, *Non invariant hypersurfaces of almost contact manifolds*, J. Math. Soc., Japan **22** (1970), 25–34.
- [34] ———, *Globally framed f -manifolds*, Illinois J. Math. **15** (1971), 456–474.
- [35] S. Haesen and L. Verstraelen, *Properties of a scalar curvature invariant depending on two planes*, Manuscripta Math. **122** (2007), 59–72.
- [36] S. Haesen and L. Verstraelen, *Natural Intrinsic Geometries*, Sigma **5** (2009).
- [37] I. Hasegawa, Y.O. Kuzama, and T. Abe, *On p -th-Sasakian manifolds*, J. Hokkaido Univ. Ed. (section II A) **37** (1986), 1–16.
- [38] A. Jahanara, S. Haesen, Z. Senturk, and L. Verstraelen, *Transport of the Ricci-curvature*, Journal of geometry and physics **57** (2007), 1771–1777.
- [39] R. Kaid and M. Belkhelfa, *Symmetry properties of S-space-forms*, J. Geom. **106** (2015), no. 3, 513–530.
- [40] M. Kobayashi and S. Tsuchiya, *Invariant submanifold of f -manifold with complemented frames*, Kodai Math. Sem. Rep. **24** (1972), 430–450.
- [41] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, Interscience Publishers, 1963.
- [42] ———, *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience Publishers, 1969.
- [43] V.A. Mirzoyan, *Structure theorems for Riemannian Ric-semisymmetric spaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **6** (1992), 80–89.

-
- [44] V.A. Mirzoyan and G.S. Machkalyan, *Normally flat Ric-semisymmetric submanifolds in Euclidean spaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **9** (2012), 19–31.
 - [45] H. Nakagawa, *f-structures induced on submanifolds in spaces, almost Hermitian or almost Kählerian*, Kodai Math. Sem. Rep. **18** (1966), 161–183.
 - [46] K. Ogiue, *On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility*, Kodai Math. Sem. Rep. **16** (1964), 15–128.
 - [47] M. Okumura, *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tôhoku Math. J. **14** (1962), 135–145.
 - [48] Z. Olszak, *On contact metric manifolds*, Tohoku Math. J. **31** (1979), no. 2, 247–253.
 - [49] ———, *Bochner flat Kählerian manifolds with certain condition on the Ricci tensor*, Simon Stevin **63** (1989), 295–303.
 - [50] Y. S. Poon and A. Wade, *Approaches to generalize contact structures*, Pure and Applied Mathematics Quarterly **6** (2010), no. 2, 603–622.
 - [51] A. Prieto-Martín, L. M. Fernández, and A. M. Fuentes, *Generalized S-space forms*, Publications de l’institut mathématique nouvelle série **94** (2013), no. 108, 151–161.
 - [52] S. Sasaki, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tôhoku Math. J. **12** (1960), 459–476.
 - [53] S. Sasaki and Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tôhoku Math. J. **13** (1961), 281–294.
 - [54] J.A. Schouten and D.J. Struick, *On some properties of general manifolds relating to Einstein’s theory of gravitation*, Amer. J. Math. **43** (1921), 213–216.
 - [55] R.E. Stone, *The rank of an f-structure*, Kodai Math. Sem. Rep. **29** (1977), 207–209.

- [56] Z.I. Szabó, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(x, y) \cdot R = 0$, I. The local version*, J. Differential Geom. **17** (1982), 531–582.
- [57] ———, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(x, y) \cdot R = 0$, II. Global version*, Geom. Dedicata **19** (1985), 65–108.
- [58] H. Takagi, *An example of Riemann manifold satisfying $R(x, y) \cdot R = 0$ but not $\nabla R = 0$* , Tohoku Math. J. **24** (1972), 105–108.
- [59] T. Takahashi, *Sasakian ϕ -symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **29** (1977), 91–113.
- [60] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), no. 2, 365–397.
- [61] M. M. Tripathi, *A note on generalized S-space-forms*, ArXiv : math.DG/0909.3149v1 (2009).
- [62] I. Vaisman, *From generalized kähler to generalized Sasakian structures*, J. Geom. Phys. **18** (2010), 63–86.
- [63] J. Vanzura, *Almost r -contact structures*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **3** (1972), no. 26, 97–115.
- [64] K. Yano, *On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$* , Tensor (N.S.) **14** (1963), 99–109.
- [65] K. Yano and M. Kon, *Structures on manifolds*, vol. 3, Singapore : World Scientific, 1984.