

---

# Sommaire

<b>Sommaire</b> .....	I
<b>Liste des figures</b> .....	V
<b>Liste des tableaux</b> .....	VI
<b>Liste des symboles et abréviations</b> .....	VII
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Généralités</b> .....	4
1.1. Interaction fluide-structure .....	4
1.2. Couplage thermo-élastique .....	8
1.3. Revue de littérature .....	8
1.3.1. Vibration libre .....	8
1.3.2. Fluide-Structure .....	11
1.3.3. Thermique .....	13
1.4. Motivation et objectif de cette thèse .....	17
<b>Chapitre 2 : Couplages thermique fluide- structures</b> .....	18
2.1. Equations fondamentales .....	18
2.1.1. Equations du fluide .....	18
2.1.2. Equations fondamentales de structure .....	18
2.2. Couplage fluide structure .....	21
2.2.1. Hypothèse général .....	21
2.2.2. Formulation du problème fluide-structure .....	22
2.2.3. Couplage fort .....	23
2.2.4. Couplage faible .....	23
2.2.5. Approche par masse ajoutée .....	24
2.3. Couplage thermo-élastique .....	24
<b>Chapitre 3 : Théorie des plaques épaisses</b> .....	25
3.1. Plaques stratifiée composites .....	25
3.1.1. Définition .....	25
3.1.1.1. Isotrope .....	25
3.1.1.2. Orthotrope .....	26

---

---

3.1.1.3. Composites à fibres Unidirectionnelles.....	26
3.2. Vue générale sur les théories des plaques .....	28
2.3. Champs des déplacements .....	31
2.4. Energie cinétique .....	34
3.5. Energie de déformation dynamique.....	34
3.6. Energie de déformation thermique .....	34
3.7. Equations de mouvement .....	34
<b>Chapitre 4 : Modélisation du fluide.....</b>	<b>36</b>
4.1. Effets d'une surface libre du fluide.....	36
4.2. Formulation du fluide .....	36
4.2.1. Condition aux limites plaque-fluide.....	38
4.2.1.1. Modèle plaque-fluide avec surface libre (CL1) .....	38
4.2.1.2. Modèle plaque délimité par une paroi rigide (CL2) .....	39
4.2.1.3. Fluide délimitée par deux plaques identiques (CL3) .....	40
<b>Chapitre 5 : Analyse thermique.....</b>	<b>42</b>
5.1. Transfert thermique dans une plaque en matériaux composites.....	42
5.2. Variation de la température dans un matériau composite .....	43
5.3. Equations de la chaleur.....	46
<b>Chapitre 6 : Modélisation par l'élément-p rectangulaire.....</b>	<b>47</b>
6.1. Formulation par élément-p de la partie structure .....	47
6.1.1. Energie cinétique .....	50
6.1.2. Energie de déformation .....	50
6.2. Vecteur charge thermique.....	57
6.3. Modélisation par élément-p fluide-structure .....	57
6.4. Analyse thermique.....	58
6.4.1. Choix de l'élément.....	58
6.4.2. Distribution de la température .....	60
6.4.3. Matrice de conduction thermique .....	60
6.4.4. Matrice de convection .....	61
6.4.5. Matrice de capacitance .....	62
6.4.6. Vecteur charge.....	62

---

---

6.4.6. 1. Vecteur de convection thermique .....	62
6.4.6.2. Vecteur source de chaleur externe.....	62
6.4.6.3. Température aux parois.....	62
<b>Chapitre 7 : Organisation de la programmation .....</b>	<b>63</b>
7.1. Environnement de programme .....	63
7.2. Organigramme général .....	63
7.2.1 Organigramme d'analyse des vibrations libres .....	64
7.2.2 Organigramme d'analyse des vibrations libres avec interaction fluide structure .....	65
7.2.3. Organigramme d'analyse thermique .....	66
7.2.4. Organigramme d'analyse thermo-élastique.....	67
7.3. Organisation de la programmation .....	68
7.3.1. Analyse de vibration libre.....	68
7.3.2. Analyse d'interaction fluide-structure .....	69
7.3.3. Analyse thermo-élastique .....	69
7.3.4. Analyse thermique .....	69
7.4. Méthodes de résolution.....	70
7.4.1. Analyse des vibrations libres .....	70
7.4.2. Procédure de Householder.....	71
7.4.3. Méthode QR .....	73
7.4.4. Analyse thermique transitoire.....	73
7.4.5. Analyse thermo-élastique .....	75
7.4.5.1. Méthode d'intégration de Newmark.....	75
<b>Chapitre 8 : Validation et interprétation des résultats.....</b>	<b>77</b>
8.1. Convergence et comparaison.....	77
8.1.1 Etude de Convergence .....	77
8.1.2. Comparaison des résultats .....	81
8.1.2.1. Plaques isotropes .....	81
8.1.2.2. Plaques stratifiées composites .....	83
8.1.2.3. Plaques sandwich.....	86
8.1.2.4. Validation des résultats dans le cas de plaques immergées	91
8.2. Etude paramétrique.....	93

---

---

8.2.1. Plaque sandwich .....	93
8.2.2. Plaques immergées .....	107
8.2.2.1. Influence de la hauteur du fluide .....	107
8.2.2.2. Influence de l'orientation des fibres .....	117
8.2.2.3. Influence des modules d'élasticités .....	118
8.4. Etude thermique des plaques composites .....	119
8.4.1. Validation des résultats thermiques stationnaires.....	119
8.4.1.1. Cas de conditions aux limites uniformes.....	119
8.4.1.2. Cas des conditions non uniformes .....	121
8.4.2. Validation des résultats thermiques transitoires .....	122
8.5. Analyse Thermo – élastique .....	125
<b>Conclusion et perspectives .....</b>	<b>129</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>131</b>
<b>Annexe A .....</b>	<b>145</b>

---

# Liste des figures

<b>Figure. 1.1</b> : Différentes vues successives de l'effondrement du Pont de Tacoma (STRUCTURAE) .....	4
<b>Figure 1.2</b> : Visualisation de l'effet de sol et de l'écoulement tourbillonnaire complexe autour du corps d'un train à grande vitesse TGV (Cd-adapco) .....	5
<b>Figure 1.3</b> : Pressions pariétales de l'ensemble voilure / mâts / nacelles d'un avions (ONERA).....	5
<b>Figure. 1.4</b> : Analyse d'interaction fluide-structure d'une vanne biomédical (SIMUTECHGROUP) .....	5
<b>Figure. 1.5</b> : Pompe immergée (PREDICTIVEENGINEERING).....	6
<b>Figure. 1.6</b> : Eolienne avec structure immergée en mer (MERETMARINE).....	6
<b>Figure 1.7</b> : Turbines sous-marines alimentées par la marée (THECONSTRUCTIONINDEX) ....	6
<b>Figure 1.8</b> : Porte mécanique d'écluse immergée dans l'eau (MERETMARINE).....	7
<b>Figure 1.9</b> : Barre de contrôle de combustible d'un réacteur nucléaire immergée dans l'eau (IPNL.IN2P3).....	7
<b>Figure 1.10</b> : Différentes sections de fuselage d'avions Airbus A380 (FUTURA-SCIENCES) .....	8
<b>Figure 2.1</b> : représentation du domaine couplé fluide-structure.....	25
<b>Figure 3.1</b> : Plaque composite avec différentes couches et différentes épaisseurs .....	25
<b>Figure 3.2</b> : plaque composite à fibre avec orientation unidirectionnelle .....	26
<b>Figure 3.3</b> : Typologie des matériaux composites renforcés par des fibres .....	27
<b>Figure 3.4</b> : Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque dans diverses théories de plaques .....	29
<b>Figure 3.5</b> : Représentation des références des couches de la plaque stratifiée et l'orientation des fibres .....	32
<b>Figure 4.2</b> : Model de plaque-fluide totalement immergée (CL1) .....	26
<b>Figure 4.3</b> : Plaque délimitée par une paroi rigide et l'air libre (CL2) .....	27
<b>Figure 4.4</b> : Plaque submergée (CL2) .....	28
<b>Figure 4.5</b> : Deux plaques identiques couplées à un fluide délimité (CL3) .....	28
<b>Figure 5.1</b> : Représentation des différentes couches d'une plaque composite .....	43
<b>Figure 5.2</b> : Représentation de la variation de température dans un composite à plusieurs couches.....	44
<b>Figure 5.3</b> : Cordonnées des couches dans une plaque en composite à plusieurs couches ...	46

---

<b>Figure 6.1</b> : Élément-p utilisé pour l'analyse des vibrations libre des plaques et thermo-élastique.....	47
<b>Figure 8.1</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, AAAA.....	78
<b>Figure 8.2</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, EEEE .....	79
<b>Figure 8.3</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, ELEL .....	79
<b>Figure 8.4</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, ELLL .....	80
<b>Figure 8.5</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, EELL .....	80
<b>Figure 8.6</b> : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, AEAE .....	81
<b>Figure 8.7</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [0/90/0/âme/0/90/0] EEEE .....	94
<b>Figure 8.8</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [45/-45/45/âme/-45/45/-45], EEEE .....	95
<b>Figure 8.9</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [90/-60/30/âme/30/-60/90], EEEE.....	95
<b>Figure 8.10</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [0/90/0/âme/0/90/0], AAAA.....	96
<b>Figure 8.11</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [45/-45/45/âme/-45/45/-45], AAAA.....	96
<b>Figure 8.12</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [90/-60/30/âme/30/-60/90], AAAA.....	97
<b>Figure 8.13</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [0/90/0/âme/0/90/0], AEAE .....	97
<b>Figure 8.14</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [45/-45/45/âme/-45/45/-45], AEAE.....	98
<b>Figure 8.15</b> : Effet du rapport d'épaisseur ( $h_c/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [90/-60/30/âme/30/-60/90], AEAE.....	98
<b>Figure 8.16</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich EEEE .....	102

---

<b>Figure 8.17</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich LLLL .....	103
<b>Figure 8.18</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich EELL .....	104
<b>Figure 8.19</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich AAAA.....	105
<b>Figure 8.20</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich AEAE.....	106
<b>Figure 8.21</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich ELLL, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	107
<b>Figure 8.22</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AAAA, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	108
<b>Figure 8.23</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich EEEE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	108
<b>Figure 8.24</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AEAE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	109
<b>Figure 8.25</b> : variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich ELLL .....	109
<b>Figure 8.26</b> : variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AAAA .....	110
<b>Figure 8.27</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich EEEE .....	110
<b>Figure 8.28</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AEAE .....	111
<b>Figure 8.29</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $h_1$ de fluide, d'une plaque sandwich ELLL immergée avec une surface à l'air libre.....	111
<b>Figure 8.30</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $h_1$ de fluide, d'une plaque sandwich AAAA immergée avec une surface à l'air libre .....	112
<b>Figure 8.31</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $h_1$ de fluide, d'une plaque sandwich EEEE immergée avec une surface à l'air libre.....	112
<b>Figure 8.32</b> : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $h_1$ de fluide, d'une plaque sandwich EAEA immergée avec une surface à l'air libre .....	113
<b>Figure 8.33</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich immergée $h_1=0.2$ et $h_2 \gg a$ .....	114
<b>Figure 8.34</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich immergée avec surface à l'air libre $h_1=0.2$ .....	115
<b>Figure 8.35</b> : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich totalement immergée au fond $h_1=0.2$ .....	116

---

<b>Figure 8.36</b> : Températures utilisées pour la comparaison suivant la direction verticale de la couche du Stratifié ( $k+1=NC$ ).....	120
<b>Figure 8.37</b> : Plaque composite à trois couches avec une convection sur la partie supérieure et inférieure de la partie (1) de la plaque.....	121
<b>Figure 8.38</b> : Plaque composite à trois couches avec un flux de chaleur sur la partie supérieure et une convection sur la partie inférieure de la partie (1) de la plaque.....	122
<b>Figure 8.39</b> : Variation de la température en fonction du temps dans une plaque sandwich.....	125
<b>Figure 8.40</b> : Plaque sandwich immergée .....	126
<b>Figure 8.41</b> : Variation des températures $T_1$ et $T_6$ en fonction du temps .....	127
<b>Figure 8.42</b> : Variation de gradient de température $T$ en fonction du temps .....	127
<b>Figure 8.43</b> : Représentation des déplacements sous l'effet d'un chargement thermique en fonction du temps dans le cas d'une plaque sandwich E-L-L-L ( $\nu=1, \nu=0.5$ ).....	128

---



# Liste des tableaux

<b>Tableau 7.1</b> : Degrés de liberté aux nœuds .....	68
<b>Tableau 6.2</b> : Degrés de liberté aux bords .....	68
<b>Table 8.1</b> : Comparaison de paramètre de fréquence dans le cas de plaque carrée isotrope AAAA .....	82
<b>Tableau 8.2</b> : Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque composite carrée a antisymétrique SSSS (SS2) 84	
<b>Tableau 8.3</b> : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque composite carrée à plis croisés AAAA .....	85
<b>Tableau 8.4</b> : Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque composite carrée multicouche [0/90/.../90] appuyée AAAA.....	87
<b>Tableau 8.5</b> : Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque sandwich carrée et antisymétrique [0/90/ âme /0/90], AAAA.....	89
<b>Tableau 8.6</b> : Comparaison des paramètres de fréquence $\Omega$ pour une plaque sandwich carrée et symétrique, simplement appuyée AAAA .....	89
<b>Tableau 8.7</b> : Effet du rapport $a/b$ , longueur sur l'épaisseur $a/h$ , sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich rectangulaire AAAA, $hc/hf = 14.66$ .....	90
<b>Tableau 8.8</b> : Effet du nombre de couches et des conditions aux limites sur le paramètre de fréquence $\Omega$ pour une plaque sandwich carrée avec $\frac{a}{h} = 10$ .....	91
<b>Tableau 8.9</b> : Comparaison des cinq premières fréquences (rd/s) d'une plaque appuyée sur deux cotées et libre sur les deux autres ALAL, submergée dans l'eau .....	92
<b>Tableau 8.10</b> : Comparaison des trois premières fréquences (rd/s) ELLL submergée dans l'eau, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ).....	92
<b>Tableau 8.11</b> : Comparaison des fréquences (Hz) fondamentales d'une plaque composite, LLLLE en graphite/epoxy avec huit plis.....	93
<b>Tableau 8.12</b> : Propriétés mécanique de la plaque sandwich. 99	
<b>Tableau 8.13</b> : Effet du rapport du module d'élasticité $E_c/EI_f$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich EEEE .....	99
<b>Tableau 8.14</b> : Effet du rapport du module d'élasticité $E_c/EI_f$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich LLLL .....	100
<b>Tableau 8.15</b> : Effet du rapport du module d'élasticité $E_c/EI_f$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich EELL .....	100



<b>Tableau 8.16:</b> Effet du rapport du module d'élasticité $E_f/E_c$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich AAAA .....	101
<b>Tableau 8.17:</b> Effet du rapport du module d'élasticité $E_f/E_c$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich AEAE.....	101
<b>Tableau 8.18:</b> Effet du rapport du module d'élasticité $E_c/E_l f$ sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich avec .....	117
<b>Tableau 8.19:</b> Effet de l'angle d'orientation des fibres sur le paramètre de fréquence .....	118
<b>Tableau 8.20:</b> Effet du rapport des modules d'élasticités $E_1/E_2$ .....	119
<b>Tableau 8.19 :</b> Conduction thermique et épaisseur des couches de la plaque sandwich.....	120
<b>Tableau 8.20 :</b> Variation de la température dans une plaque sandwich à cinq couches avec une convection sur la surface supérieure et inférieure ( $hc_1 = 50 W/m^2 K$ , $hc_2 = 40 W/m^2 K$ ) avec les températures $T_{\infty_1} = 60 C^\circ$ , $T_{\infty_2} = -10 C^\circ$ .....	120
<b>Tableau 8.21 :</b> variation de la température dans une plaque sandwich a cinq couches avec un flux sur la surface supérieur $q_1 = 800 W/m^2 K$ et une convection $hc_2 = 40 W/m^2 K$ avec une température $T_{\infty_2} = 5 C^\circ$ sur la surface inférieure .....	121
<b>Tableau 8.22:</b> Variation de la température dans une plaque stratifiée soumise une convection sur une seule partie .....	123
<b>Tableau 8.23 :</b> variation de la température dans une plaque stratifiée soumise une convection et un flux de chaleur sur une seule partie.....	124
<b>Tableau 8.25:</b> Conduction thermique et épaisseur des couches de la plaque sandwich dans le cas d'un régime transitoire	125
<b>Tableau 8.27 :</b> Propriétés des différents matériaux du stratifié .....	126
<b>Tableau 8.28 :</b> Variation du flux en fonction du temps.....	126
<b>Tableau A.1 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich ELLL, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	145
<b>Tableau A.2 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AAAA, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	145
<b>Tableau A.3 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich EEEE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	145
<b>Tableau A.4 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AEAE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$ variable et $h_2 \gg a$ ) .....	145
<b>Tableau A.5 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich ELLL .....	146

---

<b>Tableau A.6 : Variation</b> de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AAAA .....	146
<b>Tableau A.7 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich EEEE .....	146
<b>Tableau A.8 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AEAE .....	146
<b>Tableau A.9 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $hl$ de fluide, d'une plaque sandwich ELLL immergée avec une surface a l'air libre .....	147
<b>Tableau A.10 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $hl$ de fluide, d'une plaque sandwich AAAA immergée avec une surface a l'air libre .....	147
<b>Tableau A.11 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $hl$ de fluide, d'une plaque sandwich EEEE immergée avec une surface a l'air libre .....	147
<b>Tableau A.12 :</b> Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur $hl$ de fluide, d'une plaque sandwich EAEA immergée avec une surface a l'air libre .....	147

---

## Liste des symboles et abréviations

$G$	Module de cisaillement, Coefficient de poisson,
$E$	Module de Young,
$E_f$	Module d'élasticité longitudinal de la fibre,
$E_m$	Module d'élasticité longitudinal de la matrice,
$V_f$	Fractions volumiques de la fibre,
$V_m$	Fractions volumiques de la matrice,
$G_f$	Module de cisaillement de la fibre,
$G_m$	Module de cisaillement de la matrice,
$l_f$	Longueur de la fibre,
$d_f$	Diamètre de la fibre,
$x$	Déformation suivant l'axe x
$y$	Déformation suivant l'axe y
$x$	Contrainte normale suivant l'axe x
$y$	Contrainte normale suivant l'axe y
$\nu_{yx}$	Coefficient de Poisson suivant la direction yx
$\nu_{xy}$	Coefficient de Poisson suivant la direction xy
$G_{xy}$	Module de cisaillement suivant la direction xy
$u$	Déplacement longitudinal dans la direction x,
$v$	Déplacement longitudinal dans la direction y,
$w$	Déplacement transversal dans la direction z,
$\theta_x$	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x,
$\theta_y$	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y,
$\{\sigma\}^k$	Tenseur contrainte pour $k^{\text{ième}}$ couche orthotrope,
$\{\varepsilon\}^k$	Tenseur déformation pour $k^{\text{ième}}$ couche orthotrope,
$[C]^k$	Matrice des propriétés matérielles,
$[Q]^k$	Matrice de changement de repère,
$Ec$	Energie cinétique,
$Ed$	Energie de déformation,
$Ed_T$	Energie de déformation due au gradient de température,
$[M], [M_s], [M_f]$	Matrice masse (indice $s$ pour structure et $f$ pour fluide),
$[K], [K_s], [K_f]$	Matrice de rigidité (indice $s$ pour structure et $f$ pour fluide),

$\{q\}$	Vecteur coordonnées généralisés,
$\{F(t)\}$	Vecteur de forces généralisées,
$c$	La vitesse du son dans le milieu de fluide,
$\rho_0$	La densité moyenne du fluide,
$[C_s], [C_f]$	Amortissement structurelle,
$\nabla^2 \phi$	Fonction potentielle de la vitesse,
$P_u$	La pression du fluide à l'interface fluide-plaque surface supérieur,
$P_L$	La pression du fluide à l'interface fluide-plaque surface inférieur,
$T$	Température dans la plaque,
$q_i$	Composantes du vecteur flux de chaleur,
$k_{ij}$	Composantes du tenseur de conductivité thermique,
$\left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$	Gradient de température,
	Densité du milieu considéré,
$C$	Capacité thermique du milieu considéré,
$Q$	Source de chaleur interne,
$C$	Matrice capacitance thermique,
$A_1$	Matrice de conduction thermique,
$A_2$	Matrice de convection thermique,
$Q_a$	Vecteur flux interne,
$Q_c$	Vecteur convection,
$Q_B$	Température aux parois,
$Q_q$	Vecteur source de chaleur,
$\langle, y$	Coordonnées adimensionnelles,
$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}$	Nombre de fonctions de forme utilisé,

## Abréviations

FEM	Méthode des éléments finis
TSDT	Théorie de déformation de troisième ordre
HSDT	Théorie de déformation d'ordre élevé
CPT	Théorie classique des plaques
FSDT	Théorie des plaques de premier ordre
CUF	Formulation unifiée de Carrera

ESL	Equivalent Single Layer
2D	Bidimensionnel
3D	Tridimensionnel

# Introduction

La simulation numérique des phénomènes couplés a connu un essor constant ces dernières années. Ce développement est dû en particulier aux succès précédents de la simulation numérique en général, mais aussi à l'accroissement permanent des performances des calculateurs. Parmi ces phénomènes couplés se trouvent les interactions fluide-structure. Elles mettent en jeu une structure toujours mobile (rigide ou déformable) et un fluide (liquide ou gazeux) en écoulement autour ou contre une partie de la structure. Ces phénomènes sont dits couplés, parce que l'évolution de chacun des deux éléments dépend de celle de l'autre. Ainsi, par exemple, la forme de la voile d'un bateau (en régime permanent) dépend de l'écoulement de l'air autour de celle-ci. Réciproquement, cet écoulement dépend de la forme de la voile.

Les Plaques couplées avec le fluide sont d'une grande importance pratique dans le nucléaire, océan et ingénierie navals. Ainsi, la nécessité d'une bonne compréhension de l'interaction dynamique entre une plaque élastique et fluide. Il est bien connu que les vibrations des plaques en contact avec le fluide génèrent un mouvement du fluide. En outre, l'existence du fluide autour de la plaque provoque l'augmentation de l'énergie cinétique considérablement.

Un autre phénomène qui affecte une structure, est l'effet de température, comme un flux thermique naturel ou artificiel, qui peut créer des oscillations, des déplacements, et des déformations permanentes, l'exemple d'un panneau solaire d'un satellite, le fuselage et les ailes d'un avion, etc... différentes solutions peuvent se proposer pour diminuer cet effet, comme le choix de matériaux composites d'une bonne isolation ou ayant une plus grande rigidité.

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'influence de température sur une plaque stratifiée composite en contact avec un fluide, la modélisation est faite par la méthode des éléments finis version- $p$ , un élément rectangulaire est utilisé avec des fonctions de forme trigonométrique hiérarchique de type  $C^0$  et  $C^1$ .

## Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée en sept chapitres

Dans le premier chapitre ont mis le point sur les différents phénomènes de couplage, en suivie par une recherche bibliographique menée sur les trois thématiques abordées dans cette

thèse. En premier, une synthèse est faite concernant les travaux en analyse vibratoire des plaques isotropes et composites et en particulier sur les modèles d'ordre élevé HSDT (higher order shear deformation theory), la deuxième partie concerne l'interaction fluide structure, et la troisième partie sur l'analyse thermique des plaques composites. Cette recherche est clôturée par l'analyse thermo-élastique avec un historique des travaux réalisés dans ce cadre, en dernier le en présente les objectifs de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre ont présente les différentes approches des couplages, fluide-structure et thermo-élastique, ainsi que les différentes formulations de chaque partie des couplages.

Le troisième chapitre commence par des définitions sur les matériaux composites, suivi d'une description des principales théories des plaques, pour la formulation du modèle des plaques de troisième ordre TSDT (Third Order Shear Deformation Theory) développé par Reddy est donnée à la fin, les expressions de l'énergie de déformation et l'énergie cinétique pour une plaque stratifiée composite sont données.

La formulation de la partie fluide est présentée dans le quatrième chapitre, la fonction potentielle de vitesse de Bernoulli est utilisée pour déterminer la pression sur la surface de la plaque et cela dans différentes conditions entre fluide et structure.

Le cinquième chapitre est réservé à la formulation de la conduction dans une plaque stratifiée composite, modélisée par la théorie TLT qui permet de transformer le problème thermique à trois dimensions à un problème à deux dimensions.

Dans le sixième chapitre, un élément- $p$  rectangulaire à quatre nœuds et quatre côtés est développé pour l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses stratifiées en matériaux composites, les parties thermique et fluide sont modélisées par le même élément utilisé pour l'analyse des vibrations libres.

Le septième chapitre décrit l'organisation de la programmation, où l'organigramme du programme est présenté en détail avec les différentes méthodes utilisées pour la résolution.

Le chapitre huit est réservé aux différents résultats obtenus par le programme élaboré. En premier lieu, une étude de la convergence avec différentes conditions aux limites dans le cas des vibrations libres de plaque stratifiée composite est présentée, cela est suivi d'une



validation des résultats obtenus avec ceux de la littérature. Ensuite, une étude paramétrique des plaques sandwich est faite. Les résultats obtenus dans la partie interaction fluide-structure est aussi validée et suivie d'une étude paramétrique avec différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus en analyse thermique sont validés avec le code de calcul éléments finis ANSYS. Dans la dernière partie une étude d'un cas d'une plaque sandwich immergée avec une surface à l'air libre soumise à un flux de chaleur. La variation de la température est obtenue pour chaque pas de temps et introduite comme force. Le problème des vibrations forcées est résolu pour obtenir les déplacements pour chaque pas de temps.

Cette thèse est clôturée par des conclusions générales et des perspectives.

Rapport-Gratuit.com

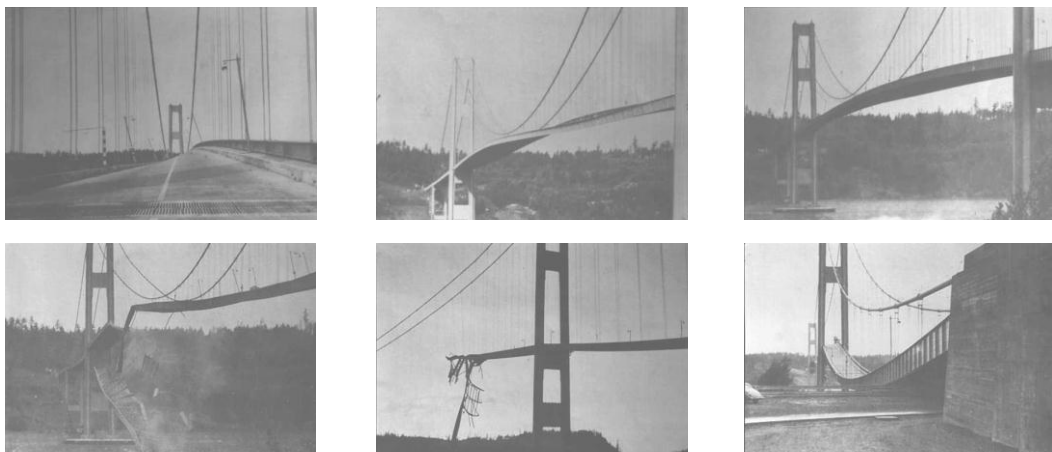
# Chapitre 1 : Généralités

*Ce chapitre porte sur les différents couplages fluide-structure et thermo-élastique, des applications sont données comme exemples, cela est suivi par l'historique de la littérature pour chaque partie des couplages, afin de donner le cadre de notre travail dans cette thèse et ses objectifs.*

## 1.1. Interaction fluide-structure

L'interaction fluide-structure se traduit par les effets échangés entre deux milieux continus, fluide et solide. Le couplage entre les deux milieux est régi par plusieurs conditions qui commandent leurs mouvements, ce qui veut dire que chaque milieu influe sur l'autre.

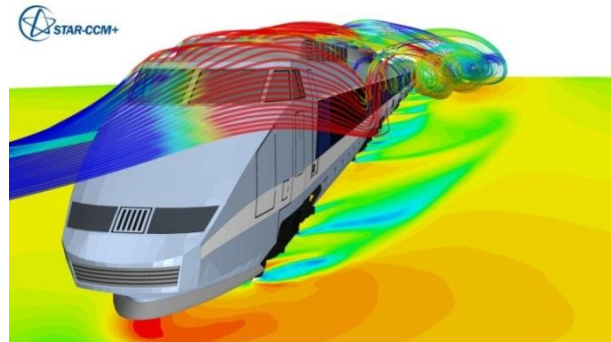
Il existe différents cas pratiques d'interaction fluide-structure, dans divers domaines, parmi ces cas : les réservoirs remplis de liquide, écoulement autour d'un navire, sous-marin, écoulement liquide à l'intérieur de pipelines, fondations d'un pont (figure 1.1), barrage, écoulement autour d'un véhicule terrestre (train à grande vitesse, automobile,...etc) (figure 1.2), en aéronautique (avions, missiles,..etc) (figure 1.3), turboréacteurs, aubes de turbines, et l'écoulement sanguin dans les artères en hémodynamique (figure 1.4).



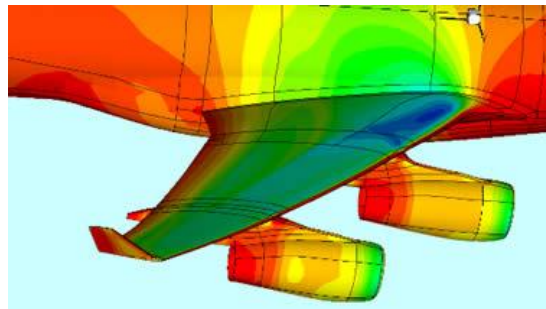
**Figure. 1.1** : Différentes vues successives de l'effondrement du Pont de Tacoma (STRUCTURAE).

L'évolution importante des calculateurs a poussé les chercheurs à fournir des efforts pour l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure, et de développer des modèles

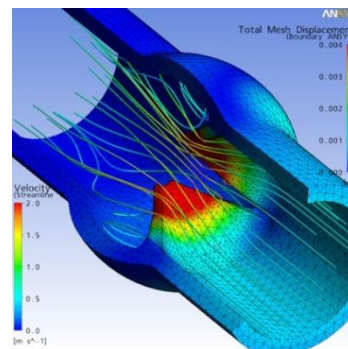
numériques pour mieux comprendre et améliorer les systèmes en interactions fluide-structure.



**Figure 1.2 :** Visualisation de l'effet de sol et de l'écoulement tourbillonnaire complexe autour du corps d'un train à grande vitesse TGV (Cd-adapco).



**Figure 1.3 :** Pressions pariétales de l'ensemble voilure / mâts / nacelles d'un avions (ONERA).



**Figure. 2.4 :** Analyse d'interaction fluide-structure d'une vanne biomédical (SIMUTECHGROUP).

Il existe divers cas de structure partiellement ou totalement immergée comme : pompes immergées (figure 1.5), structures des éoliens immergés en mer (Figure 1.6), turbine sous-marine (figure 1.7), portes écluse (figure 1.8) et barre de contrôle et combustible de réacteur nucléaire immergée dans l'eau (figure 1.9).





*Figure. 1.5 :* Pompe immergée (PREDICTIVEENGINEERING).



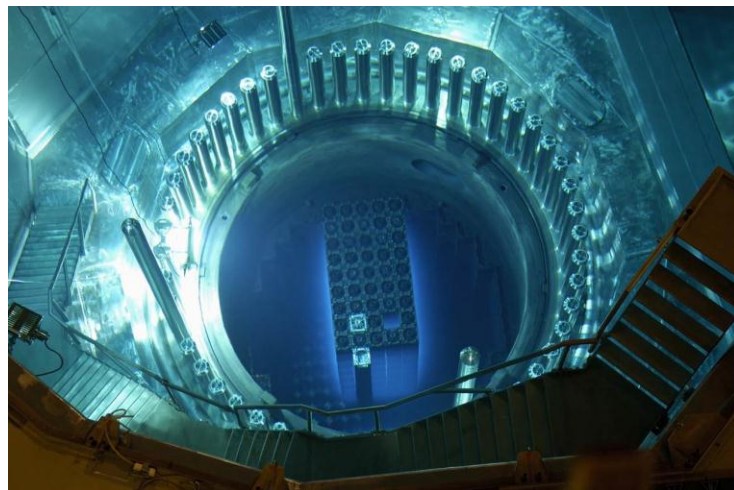
*Figure. 1.6 :* Eolienne avec structure immergée en mer (MERETMARINE).



*Figure 1.7 :* Turbines sous-marines alimentées par la marée (THECONSTRUCTIONINDEX).



**Figure 1.8** : Porte mécanique d'écluse immergée dans l'eau (MERETMARINE).



**Figure 1.9** : Barre de contrôle de combustible d'un réacteur nucléaire immergée dans l'eau (IPNL.IN2P3).

L'écoulement de fluide engendre des forces de pression sur la structure, cela génère des déplacements et des déformations sur la structure qui change l'interface fluide-structure, et influe sur les conditions de l'écoulement dans ce cas-là on parle de couplage fort, c'est l'exemple d'une conduite avec différents diamètres, ou d'un réservoir partiellement rempli, dans le cas où seulement le fluide qui influe sur la structure ou l'inverse, on parle d'un couplage faible, c'est l'exemple d'une structure d'une pompe immergée (figure 1.5), ou porte d'une écluse (figure 1.8).

Les phénomènes de couplage fluide-structure sont courants, ils sont à la fois, source de fonctionnement et de dysfonctionnement. Le cas du vent qui traverse une éolienne en la faisant tourner, ou l'écoulement au tour d'un gouvernail d'un bateau lui permet de changer

de direction. En revanche, les vibrations produites à cause du contact avec le fluide sont aussi source de dégâts, le cas du vent sur les ailes d'avions ou les ouvrages en génie civil. Le cas du pont de Tacoma (figure 1.1) qui s'est effondré sous l'effet du vent, où aussi le comportement du fluide lors des déplacements de la structure, on retrouve ce problème dans les tankers, les camions-citernes, et le lanceur de fusées.

## 1.2. Couplage thermo-élastique

Un autre type de couplage d'une grande importance dans l'étude des structures c'est le couplage thermo-élastique, dans ce cas de couplage, la structure subie des déformations sous l'effet de la chaleur, cela se traduit par des déformations et d'une façon réciproque, la variation de la température dans la structure est influencée par ces déformations, mais en général ce couplage est dans une seule direction. Différentes applications mécaniques peuvent être citées, le fuselage d'avions (figure 1.10) qui subit des changements de températures, de plus basses aux hautes altitudes, aux plus hautes températures au sol en quelques minutes, et aussi les panneaux solaires avec le lever de soleil.



*Figure 1.10* : Différentes sections de fuselage d'avions Airbus A380 (FUTURA-SCIENCES).

## 1.3. Revue de littérature

### 1.3.1. Vibration libre

Les plaques composites épaisses sont largement utilisées dans de nombreux domaines d'ingénierie, notamment l'aérospatiale, les structures en génie civil, les ouvrages hydrauliques, etc. Pour l'analyse des plaques, il existe différentes théories. La théorie des plaques classique (CPT) est adoptée pour les plaques minces, où l'effet de déformation de cisaillement est négligé (Love, 1888). La théorie de Reissner-Mindlin est utilisée pour les plaques d'épaisseur modérée, connue sous le nom de théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), où l'effet de la déformation en cisaillement est considéré en utilisant un choix convenable d'un facteur de correction de cisaillement qui

dépend de chargement et des conditions aux limites (Mindlin, 1956). Les hypothèses de simplification faites dans la CPT et la FSDT engendrent des erreurs avec un pourcentage élevé dans les résultats de l'analyse des plaques épaisses. Pour ces plaques, l'utilisation des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) est nécessaire. Les modèles HSDT assurent un état zéro contrainte de cisaillement sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque, et ne nécessitent pas un facteur de correction de cisaillement, qui est une caractéristique majeure de ces théories.

Nelson et Lorch (Nelson et Lorch 1974), et Lo et al. (Lo et al, 1979) ont présenté un modèle HSDT pour plaques stratifiées, mais le champ de déplacement ne satisfait pas la condition de contrainte de cisaillement sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. (Levinson, 1980), (Murthy, 1981), et (Reddy, 1984) ont présenté un nouveau modèle de théorie d'ordre élevé de déformation en cisaillement, considéré comme une extension de la théorie de Hencky, qui comprend un champ de déplacement réel répondant aux conditions de zéro contraintes de cisaillement transversale des couches, connue comme la théorie de troisième ordre de Reddy. Ce modèle nécessite des éléments de continuité  $C^1$ . Phan et Reddy ont développé un élément rectangulaire non conforme, avec sept degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie de troisième ordre  $C^1$  de Reddy pour l'analyse des plaques composites stratifiées. Kant et al (Kant et al, 1990) ont étudié les vibrations libres et transitoires des plaques sandwich en matériaux composites sur la base d'une théorie raffinée en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode analytique. Nayak et al. (Nayak et al 2002,2004) ont étudié les vibrations libres et transitoires de plaques sandwich composites en utilisant des éléments finis  $C^0$  basée sur la théorie de troisième ordre de Reddy. Asadi et Fariborz (Asad et Fariborz, 2012) ont utilisé un modèle HSDT et la méthode de quadrature différentielle généralisée à l'analyse des vibrations libres des plaques composites. Batra et al. (Batra et Aimane, 2005) ont utilisé un modèle HSDT et la méthode des éléments finis pour l'analyse des vibrations libres et la répartition des contraintes dans les plaques isotropes épaisses. Kulkarni et Kapuria (Kulkarni et Kapuria, 2007) ont utilisé un élément de Kirchhoff, quadrilatéral basé sur la théorie de troisième ordre pour les plaques composites. Ambartsumian (Ambartsumian, 1958) a proposé des fonctions d'ordre supérieur pour les contraintes de cisaillement transversal pour expliquer la déformation de la plaque. Soldatos et Timarci (Soldatos et Timarci 1993) ont proposé une approche similaire pour l'analyse dynamique des plaques stratifiées. Diverses fonctions ont été proposées par Reddy (Reddy, 1984), Touratier

(Touratier, 1991), Karama. (Karama, 2003) et Soldatos (Soldatos, 1992). Les résultats de certaines de ces méthodes ont été comparés par Aydogdu (Aydogdu, 2006). Swaminathan et Patil (Swaminathan et Patil, 2008) ont utilisé une méthode d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations libres des plaques stratifiées antisymétriques (Aydogdu, 2009). Carrera a proposé une formulation unifiée (CUF) (Carrera Unified Formulation) pour plaques composites, coques et poutres (Carrera 2003). La formulation CUF peut traiter un grand nombre de théories structurelles avec un nombre de variables de déplacement inconnues. Les théories d'ordre supérieur pour plaques composites peuvent être facilement mises en œuvre sur la base de CUF, Le nombre de variables inconnues est un paramètre libre du problème au moyen d'une notation compacte.

Avec la formulation unifiée, différentes théories allant de modèles ESL (Equivalent Single Layer) simples jusqu'à un ordre supérieur. Carrera et Brischetto (Carrera & Brischetto, 2008) ont utilisés la CUF dans une large variété de théories des plaques pour évaluer le comportement vibratoire de structures sandwich. Récemment, Brischetto à proposer des solutions 3D exactes (Brischetto, 2014a) pour les vibrations sans analyse des plaques composites. La méthode utilisée est une approche de couches reliées, qui impose la continuité des déplacements et de cisaillement transversal ou contraintes normales aux interfaces entre couches incorporées dans les plaques multicouches.

Les solutions 3D proposées dans l'étude de Brischetto (Brischetto, 2014 a) sont comparées avec les solutions éléments finis classiques à deux dimensions (2D), obtenues au moyen d'un code commercial des éléments finis (Brischetto, 2014b). La comparaison montre que le modèle utilisé par les codes commercial de la MEF donne des erreurs pour les structures épaisses et modérément épaisses, des séquences complexes de stratification, les fréquences d'ordre supérieur et notamment les modes de vibration. L'examen de la littérature montre clairement que très peu d'éléments conformes, basés sur  $C^1$  et la théorie des plaques de troisième ordre de Reddy sont développés. C'est en raison des difficultés liées à la satisfaction d'assurer la continuité  $C^1$ . Pour surmonter cet obstacle, la méthode des éléments finis hiérarchiques peut être utilisée.

Dans la méthode des éléments finis hiérarchiques, le maillage reste inchangé et le degré de polynôme des fonctions de forme augmente. Voir par exemple les travaux de Szabo et Sahrman (Szabo & Sahrman, 1988), Szabo et Babuska (Szabo et Babuska, 1991) et Hamza-Cherif (Hamza Cherif, 2006).



### 1.3.2. Fluide-Structure

De nombreuses études sur l'analyse des vibrations libres et forcées des plaques partiellement ou totalement immergées dans un liquide, ont été réalisées. Lamb (Lamb, 1920) a calculé les fréquences naturelles d'une plaque circulaire mince, encastrée dans une ouverture d'une paroi plane rigide infinie, couplée avec de l'eau basée sur l'hypothèse selon laquelle les formes de mode humides sont presque les mêmes que ceux dans le vide. Powell et Roberts (Powell et Roberts, 1923) ont mis en place un dispositif expérimental pour vérifier les résultats théoriques rapportés par Lamb (Lamb, 1920). McLachlan (McLachlan, 1932) a effectué une analyse similaire de l'œuvre de Lamb (Lamb, 1920), sauf que les conditions aux limites de la plaque circulaire est libre sur le bord. Peak et Thurston (Peak et Thurston, 1954) ont généralisé le travail de Lamb et McLachlan (McLachlan, 1932), en utilisant une Masse virtuelle ajoutée, dans le cas de plaques rectangulaires ont été présentées par Kito (Kito, 1944) en utilisant le développement en série de Fourier. Lindholm et al (Lindholm et al, 1965) ont étudié les fréquences naturelles des plaques en porte-à-faux dans l'air et dans l'eau, tandis que les actions des fluides ont été évaluées par une théorie de bande. Par masse ajoutée sur plaques rectangulaires minces dans un liquide infini a été étudié par Meyerhoff (Meyerhoff, 1979), les singularités dipolaires ont été utilisées pour modéliser l'écoulement potentiel autour d'une plaque rectangulaire. Muthuveerappan et al (Muthuveerappan et al, 1979) ont étudié le comportement vibratoire d'une plaque carrée en porte-à-faux immergé dans l'eau. Kim et al (Kim et al, 1979) ont présenté les résultats expérimentaux et théoriques pour étudier l'effet des conditions aux limites sur les plaques vibrantes. Les fréquences naturelles fondamentales de la plaque en porte-à-faux vertical, obtenu expérimentalement et par la méthode des éléments finis fluide, ont été présentées par Volcy et al (Volcy et al, 1979) lorsque les plaques sont partiellement ou totalement immergées dans le liquide. Espinosa et Gallego-Juarez (Espinosa et Gallego, 1984) ont déterminé la répartition de la pression de l'eau sur une plaque circulaire à bords libre. Fu et Price (Fu et Price, 1987) ont utilisé une discrétisation par éléments finis pour analyser les caractéristiques dynamiques secs et humides d'une plaque verticale et horizontale. Robinson et Palmer (Robinson et Palmer, 1990) ont mené une étude sur l'analyse modale d'une plaque rectangulaire reposant sur un fluide incompressible. Kwak et Kim (Kwak et Kim, 1991) ont étudié les vibrations axisymétriques de plaques circulaires avec la présence de liquide sur la base du problème mixte. Le cas des vibrations libres d'une plaque rectangulaire élastique en contact avec

l'eau a été étudié par Hagedorn (Hagedorn, 1994). Kwak (Kwak, 1996) a utilisé une division par morceaux pour étudier les vibrations libres des plaques rectangulaires en contact avec de l'eau non bornée d'un côté, tandis que les fonctions des poutres ont été utilisées comme fonctions admissibles. Haddara et Cao (Haddara et Cao, 1996) ont étudié la réponse dynamique des plaques rectangulaires immergées dans un liquide. Les fréquences propres des plaques annulaires en contact avec un fluide d'un côté sont théoriquement obtenues par Amabili et al (Amabili et al, 1996) en utilisant l'approche de masse ajoutée, tandis que le système couplé fluide-structure a été résolu en adoptant la transformée de Hankel. Meylan (Meylan, 1997) a employé une fonction appropriée pour étudier la vibration forcée d'une plaque mince arbitraire flottant à la surface d'un liquide infini. Cheung et Zhou (Cheung et Zhou, 2000) ont également étudié le cas de plaque rectangulaire horizontal reposant au fond d'un récipient rectangulaire semi-rigide. Les caractéristiques dynamiques d'une plaque verticale partiellement en contact avec le fluide ont été étudiées par Ergin et Ugurlu (Ergin et Ugurlu, 2003). Liang et al (Liang et al, 2001) ont adopté une formulation de masse ajoutée empirique pour déterminer les fréquences et les modes de plaques en porte-à-faux submergées. Basé sur un développement en série de Fourier. Jeong et al (Jeong et al, 2004) ont étudié les fréquences de résonance humides et les formes de mode associé de deux plaques rectangulaires identiques couplées avec un fluide borné. Tayler et Ohkusu (Tayler et Ohkusu, 2000) ont suggéré des expressions en termes sinusoidaux pour les plaques rectangulaires libre-libre et des modes propres de faisceau épinglé. Zhou et Cheung (Zhou et Cheung, 2000) ont utilisé une méthode d'analyse de Ritz pour étudier une plaque rectangulaire en contact avec l'eau sur un côté. Ugurlu et al (Ugurlu et al, 2008) ont étudié l'effet de fondation élastique et du fluide sur la réponse dynamique des plaques de Kirchhoff en utilisant la méthode des éléments de frontières. Récemment, Hosseini Hashemi et al (Hosseini et al, 2010a, 2000b) ont présenté une recherche approfondie sur l'hydro-élastique et l'analyse des vibrations d'une plaque rectangulaire horizontale et verticale reposante sur une fondation Pasternak pour différentes conditions aux limites. Kerboua et al (Kerboua et al, 2008) ont présenté une recherche sur l'analyse des vibrations d'une plaque immergée horizontale et verticale par la méthode des éléments finis. Hosseini et al (Hosseini et al, 2010c) ont étudié les vibrations libre d'une plaque rectangulaire horizontale, soit immergée dans le liquide ou flottante sur sa surface libre.

Les équations de mouvement d'une plaque rectangulaire modérément épaisse sont analytiquement basées sur la théorie des plaques de Mindlin.

### 1.3.3. Thermique

Le problème de conduction de chaleur est étudié en résolvant l'équation de conduction de chaleur de Fourier comme il est décrit dans Tungikar et Rao (Tungikar et Rao, 1994) pour le cas des plaques. Pour les variations des températures dans les composites, cela a fait l'objet de plusieurs études. Padovan (Padovan, 1974) a proposé une discrétisation avec des éléments à trois dimensions. L'effort peut être réduit en modélisant un couple des couches avec seulement un élément à trois dimensions (Tamma et Yurko, 1988). Où aussi d'utiliser un élément à deux dimensions avec des fonctions de forme hiérarchiques (version-*p*) Bose et Surana (Bose et Surana, 1993). Rolfes (Rolfes, 2000) a utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de distribution de température dans les plaques stratifiées, certaines études ont pris en considération les plaques sandwiches et multicouche avec différents matériaux, comme Heemskerk (Heemskerk, 1971), où il a étudié la conductivité des plaques sandwiches pour les structures utilisées dans l'espace, ou aussi Novack (Novack, 2003) qui a utilisé une nouvelle méthode pour les plaques hybrides, la solution est donnée pour le cas des coques comme elle est proposée par Brischetto (Brischetto, 2009), la géométrie de la plaque peut être considérée comme un cas particulier de la géométrie de la coque lorsque les rayons de courbure sont infinis. Brischetto et Carrera (Brischetto et Carrera, 2011) ont proposé de résoudre l'équation de conduction de la chaleur de Fourier dans le cas des structures multi-couches orthotropes afin d'obtenir un profil de température calculé dans le sens de l'épaisseur. Le profil de température calculé suivant l'épaisseur est obtenu pour les deux types de géométries, plaques et coques.

### 1.3.4. Thermo-élastique

La théorie de la thermo-élasticité représente une généralisation de la théorie d'élasticité et de la théorie de conduction thermique dans les solides. C'est une branche de la mécanique appliquée qui est concernée par les effets de la chaleur sur les déformations et les contraintes des corps solides, qui sont considérés comme des élastiques. Elle est donc considérée comme une extension de la théorie classique de l'élasticité isotherme, à celles des procédés dans lesquelles les déformations et les contraintes sont produites non seulement par des forces mécaniques, mais aussi par des variations de température. L'effet

du gradient de température dans le champ de déformation est un phénomène à un pas unidirectionnel (Nowinski, 1978), une déformation du corps due à la variation de la température, par conséquent, les aspects mécaniques et thermiques sont inséparables. Par comparaison avec l'histoire de la théorie de l'élasticité qui est retracée par Galileo Galilei au 16ème siècle (Galilei, 1638), l'histoire de la thermo-élasticité est beaucoup plus jeune. Le couplage entre les champs de déformation et de température a été publié par Duhamel (Duhamel, 1837), dans son travail il a utilisé une formulation par les valeurs limites du problème et des équations pour le couplage des champs de température et de déformation du corps ont été obtenues. L'équation de thermo-élasticité, comme là souligné Hetnarski et Elsami (Hetnarski et Elsami, 2007), ont été proposées par Neumann (Neumann, 1885) en 1885 par Almansi (Almansi, 1897) en 1897, par Tedone en 1906 (Tedone, 1906) et par Voigt (Voigt, 1910) en 1910. Dans la littérature, peu de travaux ont été consacré à l'analyse thermomécanique couplée à des structures à la fois thermo et analyse thermoplastique, seulement quelques-uns d'entre eux donnent des résultats numériques. Altay et Dökmeci (Altay, Dökmeci 1996a) ont décrit le comportement physique et thermo-élastique en utilisant le principe variationnel avancé qui est formulé en introduisant les potentiels de dislocations et les multiplicateurs indéterminés de Lagrange pour tenir compte de la surface interne de la discontinuité. Les mêmes auteurs ont fourni la description du comportement physique d'un milieu thermo-piezoelectric, (Altay et Dökmeci, 1996b) en ajoutant simplement l'équation de charge électrostatique dans les équations de divergence et les relations des champs potentiels électriques dans les équations de gradient. Das et al. (Das et al, 1983) ont évité l'utilisation du potentiel thermo-élastique pour résoudre le problème général unidimensionnel avec équations linéaires, ils ont obtenu des champs de déplacement et thermiques dans le domaine de transformation de Laplace. Cannarozzi et Umbertini (Cannarozzi et Umbertini, 2001) ont proposé une méthode variationnelle pour l'analyse linéaire couplée thermo-statique. Par l'utilisation des termes de déplacement, de la température, de la contrainte et le flux de chaleur. La déclaration a été basée sur la formulation de contraintes hybride pour la partie élastique et sur la formulation du flux température mixte pour la partie thermique, et ils ont inclus les termes dépendants de taux des équations de bilan énergétique et les conditions initiales. L'équilibre thermique et les conditions initiales ont été appliqués en utilisant la température comme un multiplicateur de Lagrange, et la dissipation thermique a été exprimée par les équations constitutives, en termes de contrainte et de température.

Les erreurs locales de déplacement, de température, de contrainte et des flux de chaleur ont été mesurées dans le temps lorsque la température et / ou les déplacements ont été appliqués. Les comparaisons entre analyses couplées et découplées, et la précision et l'efficacité de la théorie couplée ont été démontrées par Chao et Oh (Chao et Oh, 2004). Un ordre supérieur, théorie de la plaque zig-zag (Carrera, 2003a) a été développé pour affiner la prédiction du comportement mécanique, thermique, électrique et entièrement couplé. Les champs de déplacement et de température dans le plan, à travers l'épaisseur ont été construits par la superposition d'un champ en zigzag linéaire sur le domaine cubique globalement lisse, variant. La théorie donnée est adaptée pour les prédictions de comportement entièrement couplé de plaques composites épaisses, sous chargements mécaniques, thermiques, électriques et combinés. Les mêmes auteurs ont étendu l'analyse proposée à un élément fini triangulaire à trois nœuds, Oh et Chao (Oh et Chao, 2004). Ibrahimbegovic et al. (Ibrahimbegovic et al, 2005) ont présenté un modèle de couplage thermo-mécanique de plaques pliées ou des coques non-lisses qui peuvent être utilisées pour l'analyse de la résistance au feu des structures cellulaires. Le couplage thermo-mécanique a été considéré, y compris les échanges radiatifs et une procédure de solution de répartition de l'opérateur avec différents intervalles de temps. La motivation pour le travail a été le développement des modèles de prédiction, qui serait capable de décrire le comportement inélastique des structures cellulaires, construire soit des plaques pliées et / ou coques, sous haute température soutenue avec effets longs termes. Lee (Lee, 2006) a pleinement discuté la thermo-élasticité avec régime adiabatique de cylindres creux et multicouche encastré dont les limites sont soumises à des températures dépendantes du temps. Les solutions pour la température, le déplacement et la distribution des contraintes thermiques ont été obtenus à la fois dans un état transitoire et stationnaire. Tanaka et al. (Tanaka et al, 1995) ont proposé une nouvelle méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes couplés thermo-statique. Grâce à quelques manipulations mathématiques de l'équation de Navier en élasticité, l'équation de conduction a été transformée en une forme plus simple. Cette procédure a permis de traiter le problème Thermo-élastique couplé comme découplé. Daneshjoo et Ramezani (Daneshjoo et Ramezani, 2004, 2002) ont proposé une nouvelle formulation par éléments finis pour analyser des problèmes couplés transitoires, thermo-élastiques de deux plaques simplement appuyées, soumises à des charges mécaniques et thermiques, ont été considérées. Quand une charge



mécanique est appliquée, les différences entre l'analyse couplée et découplée sont minimales, en termes de contraintes.

Certains modèles de calcul où la température a été considérée comme linéaire à travers la direction de l'épaisseur sont répertoriés comme suit: Wu et Chen (Wu et Chen, 2008) ont étudié les déplacements et les contraintes dans des structures stratifiées en flexion thermique en supposant un profil de température linéaire à travers la direction de l'épaisseur. Dans Brischetto et Carrera (Brischetto et Carrera 2009), le même profil de température linéaire a été utilisé pour évaluer la précision de plusieurs modèles de raffinage pour l'analyse statique de coques composites multicouches. La flexion des stratifiés composites et stratifiés ou coque sandwich a été évaluée au moyen d'un profil de température linéaire à travers la direction d'épaisseur par Bhaskar et al. (Bhaskar et al, 1996) et Khare et al (Khare et al, 2003). Khdeir (Khdeir, 1996) a résolu les équations qui gouverne thermo-élastiques en supposant un profil de température linéaire ou constant à travers l'épaisseur. Un procédé intéressant d'analyser les contraintes thermiques dans des coques, comme là fait Birsan (Birsan, 2009) pour deux champs de température donnés. Autres modèles informatiques ont utilisé un profil de température calculé, parce que dans le cas des structures anisotropes multicouches, le profil de température n'est jamais linéaire, même lorsque la plaque ou la coque est mince, un profil de température incorrecte donne une charge thermique erronée qui conduit à des erreurs plus importantes, même si le modèle est précis structurellement (Carrera, 2000, 2002). Un élément fini coque a été développé par Rolfes et al. (Rolfes et al 1999), ils ont analysé les structures composites simultanément chargées par des charges mécaniques et thermiques, le profil de température a été présumé linéaire ou quadratique dans le sens de l'épaisseur, puis introduit dans l'équation de conduction de la chaleur de Fourier. L'équation de conduction de la chaleur de Fourier a été résolue par les auteurs pour les coques composites multicouches et plaques en matériau fonctionnellement gradué, Brischetto (Brischetto, 2009) et Brischetto et al. (Brischetto et al, 2008), respectivement. Le profil de température calculé donne une charge thermique appropriée pour étudier correctement la flexion thermique de ces structures. Dans les œuvres des auteurs précédents, l'équation de conduction de la chaleur de Fourier a été résolue selon la technique présentée par Tungikar et Rao (Tungikar et Rao, 1994).

#### 1.4. Motivation et objectif de cette thèse

L'examen des différents travaux cités précédemment, montre qu'aucun travail sur les vibrations des plaques épaisses à l'air libre ou immergée avec la théorie TSDT par la version- $p$  de la méthode des éléments finis n'a été effectuée, ainsi que l'analyse des vibrations des plaques sous l'effet de chargement thermique avec la même version de la méthode des éléments finis. La motivation de cette thèse est d'étudier le cas de structure partiellement ou totalement immergée dans un fluide, et d'observer son comportement dynamique sous l'effet des chargements thermiques. Nous étudions dans cette thèse les structures sous forme de plaque sandwich composite. Notre modélisation est faite par la méthode des éléments finis en utilisant un élément- $p$  que soit pour structure, thermique et fluide-structure. Les objectifs de cette thèse sont de développer un code de calcul permet de faire différentes analyses sur des plaques composites (stratifiées et sandwiches) qui sont :

- Analyse des vibrations libres des plaques rectangulaires,
- Analyse des vibrations libres des plaques partiellement ou totalement immergées dans un fluide,
- Analyse thermique,
- Analyse thermo-élastique de plaque à l'air libre ou immergée.

## Chapitre 2 : Couplages thermique fluide-structures

*Ce chapitre donne les différentes approches utilisées pour modéliser des phénomènes d'interaction fluide-structure et thermo-élastique, et donne aussi les différentes formulations utilisées pour modéliser chaque phénomène cité à part.*

### 2.1. Equations fondamentales

#### 2.1.1. Equations du fluide

La formulation Eulerienne est utilisée pour décrire le fluide, considérée qu'il est linéaire, visqueux, généralement appelé fluide Newtonien. Le fluide Newtonien est caractérisé par sa lois de comportement telle que la relation entre la contrainte visqueuse  $\sigma$  et la déformation linéaire, elle est donnée par la corrélation suivante :

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - p \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

avec

$v$ : vecteur vitesse dans le repère des coordonnées cartésiennes  $x_i$

$P$  : pression

$\mu$  : viscosité dynamique

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker

Les lois de conservation de masse, de la quantité de mouvement aussi appelées (équations de Navier-Stokes) et de l'énergie sont représentées par les relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) - p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho Q_i \quad (2.4)$$

Où

$\rho$  : densité du fluide

$e$  : énergie interne spécifique

$f_i$  : forces externes



$Q_i$ : source de chaleur

$q$  : flux de chaleur

Pour le flux de chaleur  $q$  dans l'équation (2.4) est donnée par la loi de Fourier suivante :

$$q = -k_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Avec

$k_i$ : conductivité thermique

La capacité de chaleur spécifique est supposée constante et le travail résultant de la pression et des forces de frottement sont négligés.

Les relations de pression et de l'énergie interne spécifique sont données par les deux corrélations suivantes :

$$p = p(\rho, T) \quad e = e(\rho, T) \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible  $\partial v_i / \partial x_i = 0$ , le seuil de validité de cette hypothèse est donné par le nombre de Mach,  $Ma$  doit être inférieur à 0.3 :

$$Ma = \frac{v_c}{a} \quad (2.7)$$

avec

$v_c$  : vitesse caractéristique de l'écoulement.

$a$ : célérité du son dans le fluide

pour les écoulements incompressibles, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Les équations de conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie deviennent :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho Q_i \quad (2.11)$$

Un fluide est considéré non visqueux si le nombre de Reynolds  $Re > 10^7$ , il est donné par la relation suivante :

$$Re = \frac{v_c L \rho}{\mu} \quad (2.12)$$

L : longueur caractéristique du problème

Négliger la viscosité revient à négliger la conduction de la chaleur. De fait, les sources de chaleurs sont négligées à leurs tours, les équations de conservation de masse de la quantité de mouvement et de l'énergie devient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.15)$$

Si les forces extérieures sont réduites à la pesanteur  $f_i = -\nabla(gz)$ , la masse volumique est considérée constante, la force par unité de volume,  $\rho f_i$  est un gradient, qui peut être associé au gradient de pression  $p^* = p + \rho gz$  appelé la pression modifiée. L'équation de conservation de masse prend la forme suivante, connue sous le nom de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

Dans le cas d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité, on admet que la masse volumique  $\rho$  soit constante et l'écoulement est permanent ( $\partial v/\partial t = 0$ ) et ( $\partial \rho/\partial t = 0$ ), l'écoulement est irrotationnel. Alors on obtient l'équation de Bernoulli, écrite sous la forme suivante :

$$p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho u^2 = Cste \quad (2.17)$$

### 2.1.2. Equations fondamentales de structure

L'objectif en mécanique des structures est de déterminer les déformations d'un corps solide. Il existe un grand nombre de lois, combinées avec les équations de la dynamique conduisant à des systèmes permettant de déterminer les déformations.

Les problèmes linéaires sont caractérisés par une relation linéaire entre déplacements et déformations, elle est exprimée par le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.18)$$

$u_i$  : le vecteur des déplacements.

Les équations de la théorie d'élasticité linéaire sont déduites des relations linéaires de déplacements déformations (2.18), les lois de conservation formulées en déplacements (2.19):

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_p \quad (2.19)$$

Les hypothèses d'élasticité linéaire pour le comportement des matériaux se traduisant par l'équation constitutive appelé loi de Hooke.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

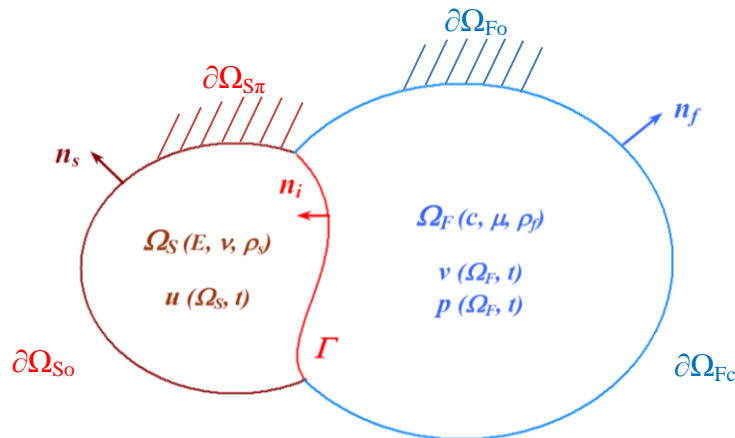
avec

$\lambda, \mu$  : sont les constantes de Lamé.

## 2.2. Couplage fluide structure

### 2.2.1. Hypothèse général

En considérant le cas de structure élastique linéaire couplée avec un fluide incompressible, la figure 2.1 représente le domaine :



**Figure 2.1** : Représentation du domaine couplé fluide-structure

Où  $\Omega_f$  et  $\Omega_s$  sont les domaines occupés par le fluide et la structure respectivement.  $\partial\Omega_{Fo}$ ,  $\partial\Omega_{F\pi}$ ,  $\partial\Omega_{So}$  et  $\partial\Omega_{S\sigma}$  désignent les portions des frontières, fluide et structure respectivement.

### 2.2.2. Formulation du problème fluide-structure

Dans cette section, on définit les équations continues du problème couplé fluide-structure.

Le problème formulé en structure est défini par les équations suivantes :

$$-\omega^2 \rho_s u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad (2.21)$$

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S_0} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad (2.23)$$

Le problème du fluide est formulé en pression est défini par les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (2.24)$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{F_0} \quad (2.25)$$

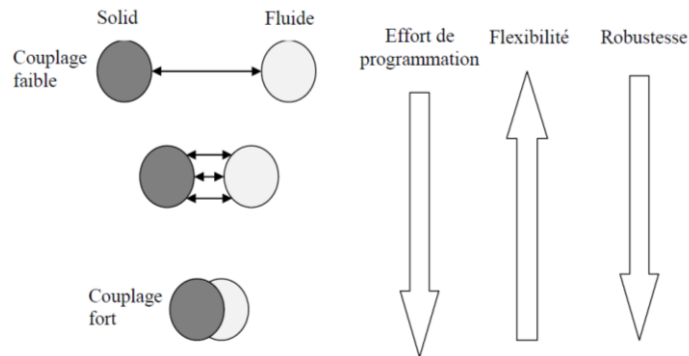
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} n_j^F = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{F\pi} \quad (2.26)$$

Les équations (2.27-28) représentent le problème couplé, elles expriment la continuité des composantes normales du tenseur des contraintes et champ d'accélération à l'interface :

$$\sigma_{ij}(u) n_j^S = p n_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} n_j = -\omega^2 \rho_F u_j u_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.28)$$

Les équations (2.27-28) signifient que le fluide applique des efforts de pression sur la structure dans la direction normale de l'interface et la structure impose une accélération au fluide au niveau de l'interface respectivement.



**Figure 2.2** : Schémas des différentes stratégies de couplage.

L'importance de résolution d'un problème complet fluide structure se situe au niveau de la résolution de chaque partie du couplage fluide et structure, le choix de couplage est défini en fonction des relations physiques entre fluide et structure, il existe différents schémas numériques des procédures de couplage le plus fort au plus faible (figure 2.2).

### 2.2.3. Couplage fort

L'approche dite de couplage fort a été étudiée par (Hron et Turek, 2006), (Ishihara et Yoshimura, 2005) et (Blom, 1998) aussi dite monolithique, consiste à réunir le fluide et la structure en un seul modèle mathématique. Les équations du fluide et de la structure sont résolues d'une façon simultanée par un seul code de calcul. L'influence échangée entre le fluide et la structure peut être directement prise en compte. Ce cas-là est favorable pour la stabilité de calcul. Par contre, un des inconvénients dans un problème couplé est la difficulté à implémenter, à mettre en œuvre et à faire évoluer. Ce type de méthode devient difficile lorsque les géométries ou les propriétés physiques du problème à traiter sont complexes, ce type de méthode n'est plus un bon choix puisque chaque milieu (fluide ou solide) nécessite des procédures de calcul numérique spécifiques qui sont très difficile à mettre en œuvre avec la méthode monolithique. A titre d'exemples, les deux phénomènes physiques sont généralement associées à des formulations différentes (lagrangien pour la structure, eulérien pour le fluide), à des schémas temporels distincts (ordre 2 et 1 respectivement), des variables différentes (déplacements et vitesses), des schémas de discrétisation différents etc.

### 2.2.4. Couplage faible

L'approche de couplage faible a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche comme (Felippa et al, 2001), (Wüchner et al, 2007) et (Causin et al, 2005), elle consiste quant à utiliser deux codes différents associés à la structure et au fluide. Ces deux codes sont couplés via un schéma de couplage en temps pour permettre une mise à jour régulière des grandeurs qui leur sont communes. L'approche partitionnée est aisément modulable, ce qui facilite fortement la mise en œuvre des différents codes et permet des calculs parallèles. Néanmoins, les codes ne fonctionnent pas simultanément mais successivement, ce qui introduit une erreur numérique supplémentaire pour la simulation, erreur qu'il est nécessaire de contrôler au fur et à mesure de l'avancement du calcul.

Le couplage partitionné faible étudié par (Felippa et al, 2001) est particulièrement efficace pour les problèmes d'interaction fluide structure avec des fluides légers (gaz) dont

la densité est nettement inférieure à celle de la structure, comme des applications aéroélectriques, un cas étudié par (Piperno, 1997). En revanche, la convergence n'est plus garantie pour les cas de couplage impliquant des fluides lourds (liquides) et une divergence est observée quel que soit le choix du pas de temps pour les écoulements incompressibles. Ce point est justifié dans les références de (van Brummelen, 2009) et (van Brummelen, 2011). Néanmoins pour des cas de fluides compressibles, la diminution du pas de temps peut avoir un effet bénéfique sur la convergence comme à indiquer (van Brummelen, 2011).

### 2.2.5. Approche par masse ajoutée

Cette approche est utilisée dans le cas où il n'y a pas un mouvement relatif du fluide par rapport au solide, le couplage entre fluide et structure est dit faible. Dans cette méthode le solide est modélisé par les déplacements et le fluide par les pressions.

Lorsque la plaque est en interaction avec un fluide au repos ou en écoulement potentiel, la pression hydrodynamique est exprimée en fonction de la masse volumique du fluide, des conditions aux limites du fluide (mur rigide, surface libre, ...), de la vitesse moyenne d'écoulement et du champ de déplacement de la paroi solide et ses dérivées par rapport au temps. L'élément fini solide-fluide de plaque tient compte de la pression de fluide appliquée sur la plaque en utilisant l'équation de Bernoulli à l'interface fluide-solide et l'équation différentielle gouvernant le potentiel de vitesse. La condition d'imperméabilité assure le couplage entre le fluide et la structure. La limite du fluide peut-être une surface libre à potentiel nul, une surface libre avec effet de surface ou un mur rigide. La pression de fluide s'introduit dans le système comme une masse ajoutée fictive de fluide.

### 2.3. Couplage thermo-élastique

Les structures des différentes applications sont soumises à des variations de température, et d'une façon réciproque la variation de température est influencé par les déformations de la structure. En pratique, l'influence des températures est plus importante sur la structure que les changements de la structure sur la variation de la température. Le problème thermo-élastique est modélisé par les équations suivantes :

$$\rho c T_{,t} = -q_{i,j} + Q \text{ dans } (\Omega(t_0)) \quad (2.29)$$

$$\rho \ddot{u} - \sigma_{i,j,j} = f_i \text{ dans } (\Omega(t)) \quad (2.30)$$

Où  $\Omega(t_0)$  désigne le domaine dans sa configuration initiale, et  $\Omega(t)$  ce domaine déformé au cours du temps.

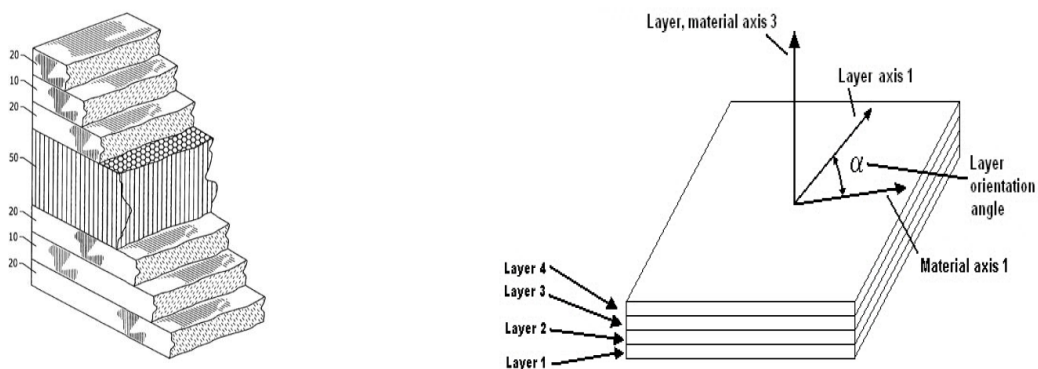
## Chapitre 3 : Théorie des plaques épaisses

*Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie d'ordre élevée TSDT, modèle développé par Reddy. En premier lieu des généralités sur les matériaux composites, en deuxième partie une vue générale sur l'évolution des principales théories des plaques. Cela est suivie par les hypothèses du modèle de Reddy pour les plaques épaisses, les relations contraintes-déformations dans le cas des matériaux composites, les formes générales des relations de l'énergie cinétique et d'énergie de déformation, ainsi que la forme générale de vecteur charge thermique. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la détermination des équations du mouvement à partir de l'équation de Lagrange.*

### 3.1. Plaques stratifiées composites

#### 3.1.1. Définitions

Les plaques stratifiées sont faites de N différentes couches de différentes épaisseurs (Figure 3.1). Chaque couche est appelée une lame. Les stratifiées peuvent être classées dans trois catégories différentes: isotropes, unidirectionnelles, composites à fibres orientées et orthotropes



**Figure 3.1** : Plaque composite avec différentes couches et différentes épaisseurs.

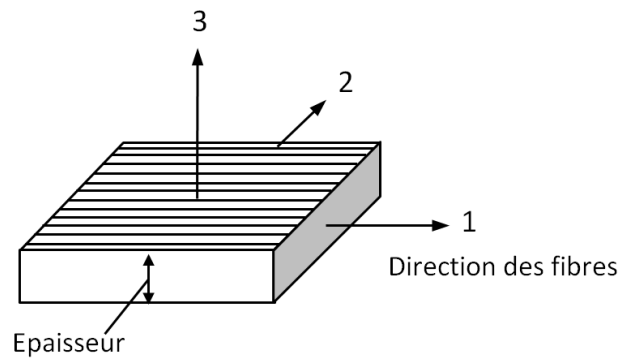
**3.1.1.1. Isotrope** Dans un matériau isotrope, les propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions. Les caractéristiques de la matrice élastique d'un matériau isotrope sont décrites par trois constantes élastiques, à savoir, le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , et le module de cisaillement  $G$ . Seulement deux de ces trois constantes élastiques sont indépendantes car ils peuvent être liés par l'équation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.1)$$

**3.1.1.2. Orthotrope** Un matériau orthotrope qui comprend deux ou trois axes mutuellement orthogonaux de symétrie de rotation de sorte que ses propriétés mécaniques sont, en général, différentes le long de chaque axe. Les caractéristiques de la matrice d'élasticité d'un matériaux orthotrope sont décrites par neuf constantes élastiques,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $G_{2,3}$ ,  $G_{1,3}$ ,  $G_{1,2}$ ,  $\nu_{1,2}$ ,  $\nu_{1,3}$ ,  $\nu_{2,3}$  Où 1, 2, 3 sont les directions principales (Figure 3.2).

**3.1.1.3. Composites à fibres unidirectionnelles** La plupart des matériaux composites artificiels sont fabriqués à partir de deux matériaux: un matériau de renforcement appelé fibre et un matériau de base, appelé matrice.

La figure 3.2 montre un composite à fibres unidirectionnelles dans lequel les fibres sont dans le plan 1-2, les propriétés élastiques sont ainsi les mêmes dans la direction 2-3.



**Figure 3.2:** Plaque composite à fibre avec orientation unidirectionnel.

Pour ces types de matériaux, cinq constantes élastiques indépendantes peuvent décrire les caractéristiques de la matrice élastique ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{1,2}$ ,  $G_{1,2}$ , et  $G_{2,3}$ ) car les autres peuvent être liées à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} E_2 = E_3, & \nu_{1,2} = \nu_{1,3}, & G_{1,2} = G_{1,3}, & \nu_{2,1} = \nu_{3,1} \\ G_{2,3} = E_2 / 2(1 + \nu_{2,3}), & & \nu_{2,1} = (E_2 / E_1) \nu_{1,2} \end{cases} \quad (3.2)$$

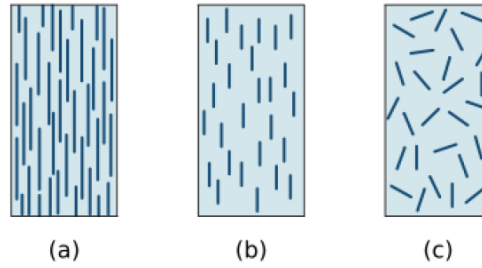
Christensen (Christensen, 1998) a montré que pour les composites renforcés de fibres unidirectionnelles avec fibres orientées dans une direction, la relation entre  $\nu_{2,3}$ ,  $\nu_{1,2}$  et  $\nu_{2,1}$  est comme suit :



$$\nu_{2,3} = \nu_{3,2} = \nu_{1,2} \left( \frac{1 - \nu_{2,1}}{1 - \nu_{1,2}} \right) \quad (3.3)$$

Ainsi, le nombre de constantes indépendantes pour composites à fibres unidirectionnelles est réduit de cinq à quatre.

Les composites à fibres Unidirectionnelles sont divisés en trois branches comme suit (Figure 3.3) :



- a) fibres continues
- b) fibres discontinues
- c) fibres discontinues à orientation aléatoire

**Figure 3.3:** Typologie des matériaux composites renforcés par des fibres.

Les propriétés élastiques de la lame sont calculées en fonction des caractéristiques des fibres et des matrices comme suit (Christensen, 1998).

a) composites à fibres unidirectionnelles et continues :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f); \quad E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f (1 - V_f) + E_m V_f} \\ G_{1,2} = \frac{G_f G_m}{G_f (1 - V_f) + G_m V_m}; \quad \nu_{1,2} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

b) composites à fibres unidirectionnelles et discontinues :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{1 + 2(I_f/d_f)\eta_1 V_f}{1 - \eta_1 V_f} E_m; \quad E_2 = \frac{1 + 2\eta_t V_f}{1 - \eta_t V_f} E_m \\ G_{1,2} = \frac{1 + \eta_g V_f}{1 - \eta_g V_f} G_m; \quad \nu_{1,2} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \end{array} \right. \quad (3.5)$$

c) composites à fibres unidirectionnelles discontinues avec orientation quelconque :

$$\begin{cases} E_{\text{aléatoire}} = \frac{3}{8}E_1 + \frac{5}{8}E_2; & \nu_{\text{aléatoire}} = \frac{E_{\text{random}}}{2G_{\text{random}}} - 1 \\ G_{\text{aléatoire}} = \frac{1}{8}E_1 + \frac{1}{4}E_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont utilisés en (c), sont les mêmes dans (b), les différents rapports  $\eta$  sont données par les relations suivantes

$$\eta_l = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2(I_f/d_f)}; \quad \eta_t = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2}; \quad \eta_g = \frac{(G_f/G_m) - 1}{(G_f/G_m) + 1} \quad (3.7)$$

avec :

$E_f$ : Module d'élasticité longitudinal de la fibre,

$E_m$ : Module d'élasticité longitudinal de la matrice,

$V_f$ : fractions volumiques de la fibre,

$V_m$ : fractions volumiques de la matrice,

$G_f$ : Module de cisaillement de la fibre,

$G_m$ : Module de cisaillement de la matrice,

$I_f$ : Longueur de la fibre,

$d_f$ : Diamètre de la fibre.

### 3.2. Vue générale sur les théories des plaques

Les théories des plaques à deux dimensions peuvent être classées en deux:

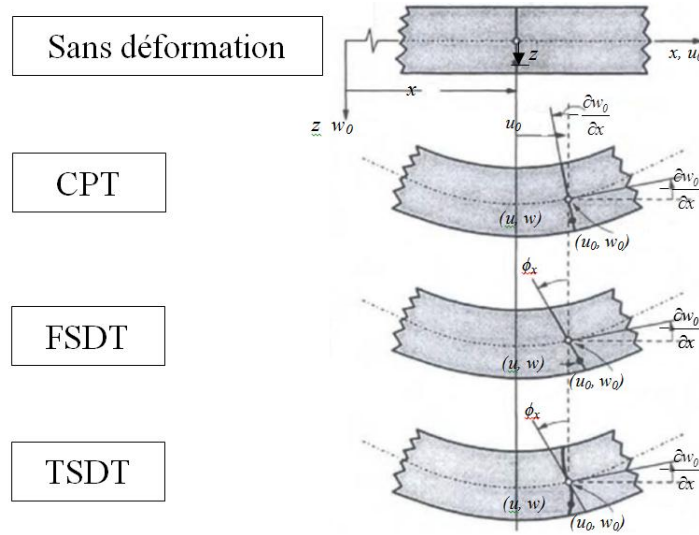
La 1<sup>ère</sup> théorie celle des plaques classique, où dans laquelle les effets de déformations transversales et le cisaillement sont négligés, et la seconde théorie des plaques est celle où les déformations transversales et le cisaillement sont pris en compte, en plus l'effet de l'inertie de rotation.

Dans le cas de la théorie de Kirchhoff (Théorie classique des plaques-CPT) pour les plaques, en flexion pure est basée sur le champ de déplacement donné par (Reddy, 2000) :

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.9)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (3.10)$$



**Figure 3.4 :** Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque pour diverses théories de plaques.

Où  $(u, v, w)$  sont les composantes de déplacement le long des axes  $(x, y, z)$  respectivement, et  $w_0$  est le déplacement transversal d'un point sur le plan médian à  $z = 0$ . Les hypothèses de cette théorie dites que toutes les lignes droites perpendiculaires à un plan  $xy$ , avant déformation restent droites et normales à la surface moyenne après déformation.

Il y a un certain nombre de théories de plaques avec effet de cisaillement. La plus simple est la théorie du premier ordre ou FSDT, aussi connu comme la théorie de la plaque de Mindlin (Mindlin, 1951), et elle est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x,y,z) = z\phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = z\phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  désignent les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Le modèle FSDT étend la cinématique du modèle CPT en incluant une déformation au cisaillement transversal, à savoir que la déformation en cisaillement transversal est supposée constante par rapport à l'épaisseur. Dans le modèle FSDT, les facteurs de correction de cisaillement sont introduits pour corriger l'écart entre les distributions des forces de cisaillement transversal réelles et celles calculées en utilisant les relations cinématiques. Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement des

paramètres géométriques, mais également des conditions de charge et les conditions aux limites de la plaque.

Dans les deux théories CPT et FSDT, l'hypothèse de l'état contraintes plane est utilisée et la forme de la loi constitutive contrainte plane réduite aussi est utilisée dans les deux théories.

La théorie des plaques de deuxième ou d'ordre supérieur utilisent un degré élevé de polynômes des composantes de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque. Les théories d'ordre supérieur introduisent des inconnues supplémentaires qui sont souvent être difficiles à interpréter en termes physiques. La théorie de second ordre est basée sur le champ de déplacement suivant (Reedy 2000).

$$\begin{cases} u(x,y,z) = z\phi_x(x,y) + z^2\psi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = z\phi_y(x,y) + z^2\psi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \quad (3.12)$$

Le fondateur de la théorie des plaques de troisième ordre TSDT est Reddy (Reddy, 1984a). Cette théorie est basée sur le principe que la section plane avant déformation ne reste pas plane après déformation, le champ de déplacement proposé par le même auteur (Reddy, 1984a, 1997a, 1999a) pour cette théorie est donné comme suit :

$$\begin{cases} u(x,y,z) = z\phi_x(x,y) - \alpha z^3 \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x,y,z) = z\phi_y(x,y) - \alpha z^3 \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \quad (3.13)$$

Où  $\alpha = 4 / (3h^2)$ . Notez que si  $\alpha = 0$ , nous obtenons le champ de déplacement du modèle FSDT. Le champ de déplacement reçoit une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales (et donc des contraintes de cisaillement) à travers l'épaisseur et la disparition des contraintes de cisaillement transversales sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque (figure 3.4). Contrairement au modèle FSDT, le modèle TSDT ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement.

En plus de sa simplicité inhérente et faible coût de calcul, la théorie des plaques du premier ordre fournit souvent une description suffisamment précise de la réponse globale (ex : déviations, charges de flambage et fréquences naturelles de vibration) pour les

plaques minces à modérément épaisses. L'inconvénient de la FSDT est le facteur de correction de cisaillement. Par la TSDT, pas de facteur de correction de cisaillement.

### 3.3. Champs de déplacements

Considérons une plaque épaisse en matériaux composites stratifiées, d'épaisseur uniforme  $h$ , présentant un plan rectangulaire ( $a \times b$ ) comme il indiquait sur la figure 3.5.

Le déplacement de la plaque est décomposée en trois composantes orthogonales,  $u$ ,  $v$  et  $w$  parallèle à l'axe  $x$ , l'axe  $y$  et l'axe  $z$ , respectivement.

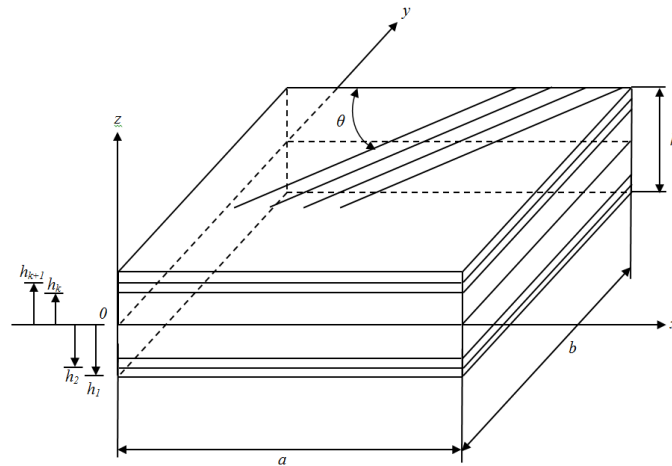
Conformément à la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (Asadi et Friborz, 2012), les déplacements peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{cases} u = u_0 + z \theta_x - f(z) \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) \\ v = v_0 + z \theta_y - f(z) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) \\ w = w_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

avec

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad (3.15)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont des composantes de déplacements extensionnels et flexionnels de la plaque intermédiaire,  $\theta_x$ , et  $\theta_y$  sont les rotations de la normale au plan du milieu dans la couche  $k$  autour de l'axe des  $x$  et l'axe  $y$ , respectivement.



**Figure 3.5 :** Représentation des références des couches de la plaque stratifiée et l'orientation des fibres.

Les relations déformation-déplacement dans le cas de la théorie des plaques TSDT sont données par les relations suivantes :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{Bmatrix} - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ 0 \end{Bmatrix} - f(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Les équations constitutives pour un matériau isotrope élastique linéaire sont :

$$\{\sigma\}^k = [C]^k \{\varepsilon\}^k \quad (3.17)$$

Dans le cas de contrainte plane, le tenseur de contrainte peut être écrit comme suit :

$$\{\sigma\}^k = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}\}^k \quad (3.18)$$

A partir de la loi de Hook l'équation constitutive d'une k<sup>ième</sup> couche orthotrope pour un problème thermo-élastique est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}^k \quad (3.19)$$

Où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les coefficients de dilatation thermique dans les deux directions principales de la couche.

Les constantes matérielles sont donnés par :

$$\begin{cases} C_{11} = E_1 / (1 - \nu_{1,2} \nu_{2,1}) \\ C_{22} = E_2 / (1 - \nu_{1,2} \nu_{2,1}) \\ C_{12} = \nu_{2,1} E_{12} / (1 - \nu_{1,2} \nu_{2,1}) \\ C_{21} = C_{2,1} \\ C_{33} = G_{1,2} \\ C_{44} = G_{2,3} \\ C_{55} = G_{1,3} \end{cases} \quad (3.20)$$

Où 1 et 2 représentent les directions parallèles et perpendiculaires à la direction des fibres respectivement. En effectuant une transformation de coordonnées convenable les relations contrainte-déformation d'une seule couche dans le système de coordonnées Oxyz peuvent être obtenues.

Et  $[C]$  est la matrice des propriétés matérielles,  $E_i$  et  $\nu_{i,j}$  sont respectivement le module de Young, et le coefficient de Poisson.

Après changement de repère, l'équation (3.20) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{xx} \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{yy} \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.21)$$

Avec  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$  et  $\alpha_{xy}$  sont les coefficients de dilatation thermique.

Les éléments de la matrice  $[Q]$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11} = C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{33}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\ Q_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{44}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q_{22} = C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{33}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\ Q_{33} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{33}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{33} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q_{13} = (C_{11} - 2C_{12} - 2C_{33}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{12} - C_{22} - 2C_{33}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ Q_{23} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{33}) \cos \theta \sin^3 \theta + (C_{12} - C_{22} - 2C_{33}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ Q_{44} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\ Q_{45} = (C_{44} - C_{55}) \cos \theta \sin \theta \\ Q_{55} = C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta \end{cases} \quad (3.22)$$

avec  $\theta$  est l'orientation des fibres.

### 3.4. Energie cinétique

La formule de l'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 Ec = \frac{1}{2} \iint \left[ \rho_A \dot{u}_0^2 + \rho_A \dot{v}_0^2 - 2\rho_B \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - 2\rho_B \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + (\rho_B - \rho_D) \dot{v}_0 \dot{\theta}_y + (\rho_B - \rho_D) \dot{u}_0 \dot{\theta}_x + \rho_D \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 \left. + 2\rho_D \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \dot{\theta}_x + \rho_F \dot{\theta}_x^2 + \rho_D \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right)^2 + 2\rho_D \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \dot{\theta}_y + \rho_F \dot{\theta}_y^2 + \rho_A \dot{w}_0^2 \right] dx dy \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique :

$$\rho_A = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad \rho_D = \int_{-h/2}^{h/2} \rho f(z)^2 dz, \quad \rho_F = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (f(z)^2 - 2zf(z) + z^2) dz \quad (3.24)$$

### 3.5. Energie de déformation dynamique

L'expression de l'énergie de déformation d'une plaque s'écrit en coordonnées cartésiennes:

$$Ed = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_{xx} + \sigma_y \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad (3.25)$$

### 3.6. Energie de déformation thermique

L'expression de l'énergie de déformation thermique est déterminée à partir de la relation suivante :

$$Ed_T = \frac{-1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_{Txx} + \sigma_y \varepsilon_{Tyy} + \sigma_{xy} \gamma_{Txy} + \sigma_{xz} \gamma_{Txz} + \sigma_{yz} \gamma_{Tyz}) dx dy dz \quad (3.26)$$

Où  $\varepsilon_T$  représente les déformations dues au gradient de température :

$$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Txx} \\ \varepsilon_{Tyy} \\ \gamma_{Txy} \\ \gamma_{Txz} \\ \gamma_{Tyz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \Delta T \\ \alpha_{yy} \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

### 3.7. Equations de mouvement

En appliquant l'équation de Lagrange aux expressions des énergies cinétique et de déformation :



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ec}{\partial \{\dot{q}\}} \right) - \frac{\partial Ec}{\partial \{q\}} + \frac{\partial Ed}{\partial \{q\}} = Q_i \quad (3.28)$$

On obtient l'équation du mouvement forcé de la plaque :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F_{(t)}\} \quad (3.29)$$

[M] : Matrice masse

[K]: Matrice de rigidité

{q}, { $\dot{q}$ }: Vecteurs coordonnées généralisés

{F<sub>(t)</sub>}: Vecteur de forces généralisées (dans notre cas il représente le chargement thermique).

## Chapitre 4 : Modélisation du fluide

*L'objectif de ce chapitre est de donner un bref aperçu sur l'interaction fluide-structure, en passant par l'équation générale qui régit le phénomène et les différents cas particuliers du fluide. La formulation du fluide est donnée dans le cas des plaques partiellement ou totalement immergées.*

### 4.1. Effets d'une surface libre du fluide

La présence d'une surface libre près de la structure en vibration a tendance à réduire la masse ajoutée. Toutefois, ce comportement possède un effet non-linéaire dont la prédiction est ardue (Brennen, 1982). Essentiellement, la surface libre réduit la quantité d'eau déplacée par le système en vibration ayant par conséquent tendance à diminuer la masse ajoutée. Au niveau de l'amortissement, il y a une dissipation de l'énergie causée par la formation d'ondes à la surface. Cette dissipation tend à accroître le taux d'amortissement.

### 4.2. Formulation du fluide

Les hypothèses suivantes sont faites pour modéliser le comportement dynamique du fluide :

- L'amplitude des vibrations linéaires est faible (c'est-à-dire, un mouvement de fluide petit),
- Le fluide est incompressible, non visqueux et irrotationnel,
- il n'y a pas de cisaillement et la pression de fluide est purement perpendiculaire à la paroi de plaque,
- L'écoulement de fluide est possible,

La fonction potentielle de la vitesse doit satisfaire l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide. Cette relation est exprimée dans le système de coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

En utilisant l'équation de Bernoulli, et en ignorant les termes non linéaires, la pression du fluide à l'interface fluide-plaque (surface supérieure et inférieure de la plaque) peut être donnée par:

$$P_u = P_{|z=h/2} = -\rho_f \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=h/2} \quad (4.2)$$

$$P_L = P_{|z=-h/2} = -\rho_f \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=-h/2} \quad (4.3)$$

Où  $\rho_f$  est la densité du fluide par unité de volume.

La condition de l'imperméabilité de la surface de la structure, nécessite que le composant du fluide sur la surface de la plaque hors du plan vitesse, doit correspondre aux taux instantanés de variation du déplacement de la plaque dans la direction transversale. Cette condition implique un contact permanent entre la surface de la plaque et la couche de fluide périphérique, qui est de :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h/2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.5)$$

La relation suivante est décrite avec séparation de variable est supposée pour la fonction potentielle de vitesse :

$$\phi(x, y, z, t) = F(z) S(x, y, t) \quad (4.6)$$

Où  $F(z)$  et  $S(x, y, t)$  sont deux fonctions distinctes à déterminer.

L'expression suivante peut être définie par l'introduction de l'équation (4.6) dans (4.4 et 4.5) et en remplaçant  $S(x, y, t)$  :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=h/2}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-h/2}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.8)$$

En remplaçant l'équation (4.7) et (4.8) dans la relation (4.1), on obtient l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \mu_f^2 F(z) = 0 \quad (4.9)$$

Où  $\mu_f$  est un nombre d'ondes planes et une constante réelle qui doit être précise.

La solution générale de l'équation (4.9) peut être écrite :

$$F(z) = B_1 e^{\mu_f z} + B_2 e^{-\mu_f z} \quad (4.10)$$

$B_1$  et  $B_2$  sont des constantes qui doivent être spécifiées en introduisant l'équation (4.8) dans (4.5 et 4.6), on obtient les expressions suivantes pour la fonction potentielle de vitesse :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{B_1 e^{\mu_f z} + B_2 e^{-\mu_f z}}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=h/2}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{B_1 e^{\mu_f z} + B_2 e^{-\mu_f z}}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-h/2}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.12)$$

#### 4.2.1. Condition aux limites plaque-fluide (CL)

Les conditions aux limites à l'interface fluide-structure à l'extrémité de fluide doivent être satisfaites en adoptant une fonction potentielle de vitesse appropriée. Surface libre fluide, paroi rigide et l'imperméabilité sont généralement prises en compte. Afin de parvenir à une bonne compréhension du problème, une plaque rectangulaire souple immergée dans le liquide est étudiée, ou les conditions suivantes doivent être envisagées.

##### 4.2.1.1. Modèle plaque-fluide avec surface libre (CL1)

À la surface libre de liquide, la condition suivante peut être appliquée sur le potentiel de vitesse (Figure 4.1), à condition que le mouvement libre de la surface du liquide crée des perturbations négligeables.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1+h/2} = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=h_1+h/2} \quad (4.11)$$

Où  $g$  est l'accélération due à la gravité. En substituant la condition aux limites dans l'équation (4.9), l'expression suivante de la fonction potentielle s'écrit :

$$\phi = \frac{e^{\mu_f z} + C_1 e^{\mu_f(z-2h_1)}}{\mu_f (1 - C_1 e^{2\mu_f h_1})} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.12)$$

avec

$$C_1 = \frac{\mu_f g - \omega^2}{\mu_f g + \omega^2}, \quad \mu_f = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (4.13)$$

La relation de  $\mu_f$  est donnée par Kerboua (Kerboua, 2008)

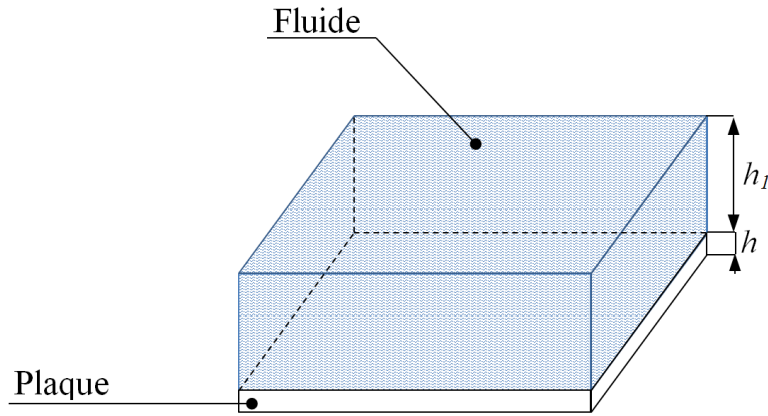


Figure 4.1 : Modèle plaque-fluide totalement immergée (CL1)

L'application d'une pression de fluide sur la surface supérieure de la plaque est obtenue en introduisant des relations (4.15) dans l'équation de Bernoulli :

$$P_U = \frac{-\rho_f}{\mu_f} \left[ \frac{1 + C_1 e^{2\mu_f h}}{1 - C_1 e^{2\mu_f h}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z f_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.14)$$

#### 4.2.1.2. Modèle plaque délimité par une paroi rigide (CL2)

La condition aux limites sur la paroi, montrée dans la figure 4.2, a été étudiée par Lamb (Lamb, 1920) et dénommée état de fréquence nul. Cette condition aux limites de paroi rigide s'exprime par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0 \quad (4.15)$$

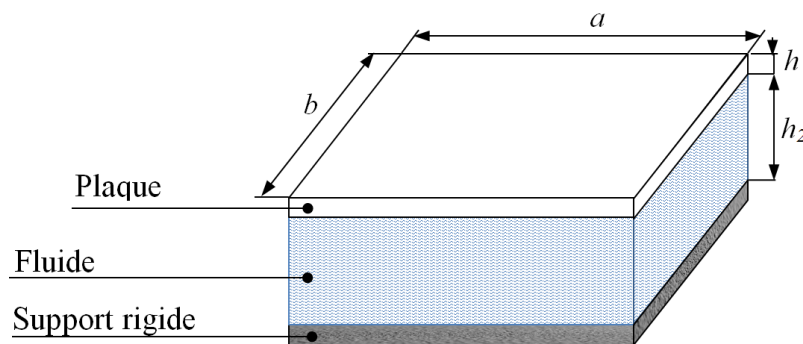


Figure 4.2 : Plaque délimité par une paroi rigide et l'air libre (CL2)

D'une façon similaire en introduisant l'équation (4.12) dans (4.15)

$$\phi = \frac{e^{\mu_f z} + C_2 e^{-\mu_f z}}{\mu_f (e^{\mu_f h/2} - C_2 e^{\mu_f h/2})} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{avec} \quad C_2 = e^{-2\mu_f h_2} \quad (4.16)$$

La pression dynamique cas (surface inférieure de la plaque) est déterminée par :

$$P_L = -\frac{\rho_f}{\mu_f} \left[ \frac{e^{-2\mu_f h_2} + 1}{e^{-2\mu_f h_2} - 1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Zf_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

Dans le cas où la plaque est totalement immergée, comme le montre la figure 4.3, la pression dynamique totale sera une combinaison de pressions correspondant aux conditions aux limites de fluide sur les deux surfaces supérieures et inférieures de la plaque.

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu_f} \left[ \frac{1 + C_2 e^{\mu_f h_1}}{1 - C_2 e^{2\mu_f h_1}} + \frac{e^{\mu_f h_2} + 1}{e^{2\mu_f h_2} - 1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Zf_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

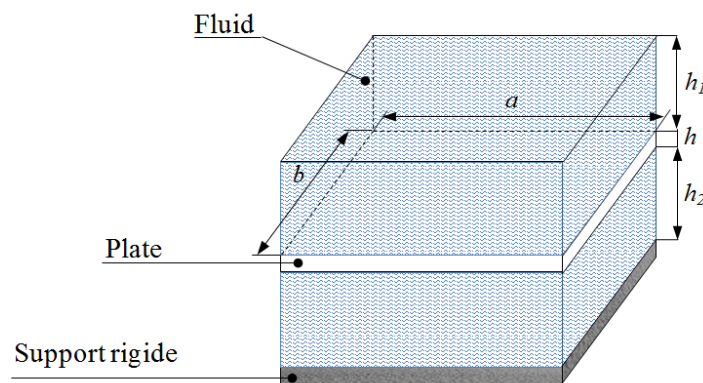


Figure 4.3 : Plaque immergée (CL2)

#### 4.2.1.3. Fluide délimité par deux plaques identiques (CL3)

La figure 4.4 illustre un fluide délimité par deux plaques parallèles, qui représentent les parois latérales d'un réservoir. Condition d'imperméabilité aux deux plaques à  $z = h / 2$  et  $z = dh + h / 2$ .

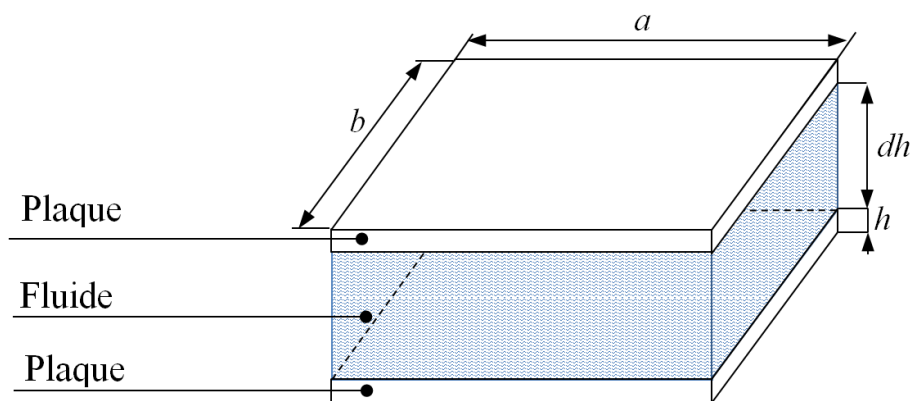


Figure 4.4 : Deux plaques identiques couplées à un fluide délimité (CL3)

Ou  $dh$  est la distance entre les deux plaques.

La pression du fluide sur chaque paroi est obtenue en introduisant l'équation (4.12) et (4.17) dans l'équation de Bernoulli comme suit :

$$\phi = \frac{e^{\mu_f z} + C_3 e^{-\mu_f z}}{\mu_f (e^{\mu_f h/2} - C_3 e^{-\mu_f h/2})} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.19)$$

avec

$$C_3 = \frac{e^{\mu_f (dh+h/2)} - e^{\mu_f h/2}}{e^{-\mu_f (dh+h/2)} - e^{-\mu_f h/2}} \quad (4.20)$$

$$P = \frac{-\rho_f}{\mu_f} \left[ \frac{1 - e^{\mu_f dh} + e^{2\mu_f dh}}{1 - e^{2\mu_f dh}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Zf_4 \quad (4.21)$$

## Chapitre 5 : Analyse thermique

Dans ce chapitre nous présentons la formulation thermique dans une plaque stratifiée en matériaux composites. La variation de la température dans les différentes couches de la plaque est considérée quadratique dans le cas de plaques épaisses ou dans le cas où les conditions aux limites sur les surfaces de la plaque ne sont pas uniformes.

### 5.1. Transfert thermique dans une plaque en matériaux composites

Il est important de quantifier la quantité d'énergie transférée par unité de temps et pour cela nous avons besoin de l'utilisation des équations d'échanges. Pour la conduction de chaleur, l'équation fondamentale du flux de chaleur est connue comme la loi de Fourier, qui est:

$$q_i = -k_{ij} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (5.1)$$

avec

$T$  : température dans la plaque,

$q_i$  : composantes du vecteur flux de chaleur,

$k_{ij}$  : composantes du tenseur de conductivité thermique,

$\left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$  : gradient de température.

Les équations générales de la conduction de la chaleur peuvent être écrites par l'équation suivante :

$$q_{i,j} + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.2)$$

En injectant l'équation (5.1) dans (5.2) nous aurons :

$$\left( -k_{ij} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right)_{,i} + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.3)$$

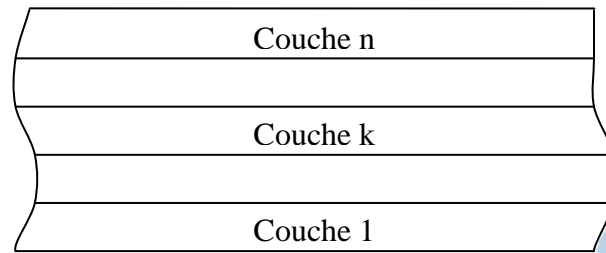
$\rho$ : densité du milieu considéré,

$c$ : capacité thermique du milieu considéré,

$Q$ : source de chaleur interne.

Considérant le cas d'une plaque composite constituée de plusieurs couches, donnée par la figure 5.1.





**Figure 5.1** : Représentation des différentes couches d'une plaque composite

Et supposant les hypothèses suivantes :

- Sources de chaleur interne négligeable,
- Contact thermique parfait entre les couches,
- Propriétés physiques sont indépendantes de la température,
- Transfert de chaleur se fait dans le sens transversal de la plaque,
- Dans chaque couche du composite, la conduction de la chaleur est décrite par un tenseur de conduction thermique donné par :

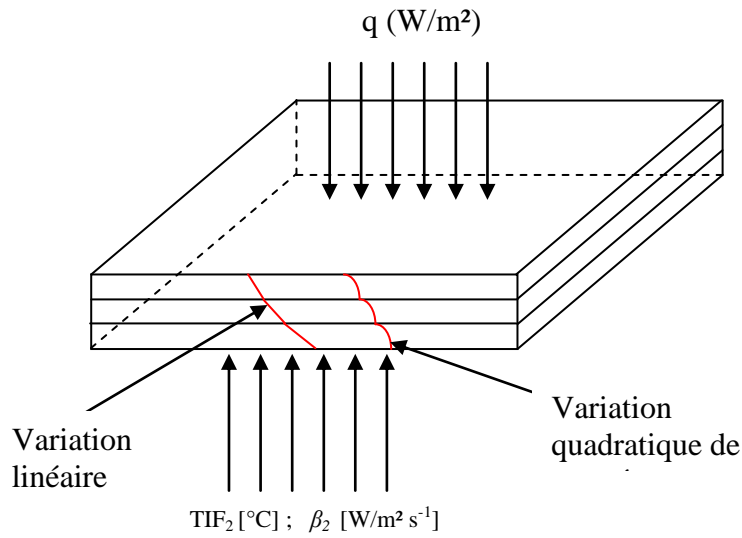
$$k^{(k)} = \begin{bmatrix} k_{xx}^{(k)} & k_{xy}^{(k)} & 0 \\ k_{yx}^{(k)} & k_{yy}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

En Introduisant les conditions aux limites :

- 1- température imposée,
- 2- flux imposé,
- 3- échange de chaleur par convection,
- 4- échange de chaleur par rayonnement.

## 5.2. Variation de la température dans un matériau composite

Pour les problèmes transitoires, la distribution de la température dans la direction transversale est non linéaire. Pour ces cas, l'approche est quadratique (Noack et al, 2003), voir figure 5.2. La variation de la température dans une couche de composite est donnée par :



**Figure 5.2 :** Représentation de la variation de température dans un composite à plusieurs couches

avec

TIF : Température imposée sur la surface.

$\beta_2$  : Convection thermique imposée sur la surface.

$$T^{(k)}(x, y, z) = T_0^{(k)}(x, y) + z_k T_{0,z}^{(b)}(x, y) + \frac{z_k^2}{2} T_{0,zz}^{(b)}(x, y) \quad (5.5)$$

$$-\frac{t_k}{2} \leq z_k \leq \frac{t_k}{2}$$

En utilisant :

- La continuité du champ de température à l'interface entre les couches.

$$T^{(k)}\left(\frac{t_k}{2}\right) = T^{(k+1)}\left(-\frac{t_{k+1}}{2}\right) \quad (5.6)$$

- La continuité du flux de chaleur transversal  $q_z$  à l'interface entre les couches.

$$q_{z,z}^{(k)} = q_{z,z}^{(k+1)} = \text{const} \quad (5.7)$$

- La continuité de la courbure de la température à l'interface.

$$T_{,zz}^{(k)} = T_{,zz}^{(k+1)} = \text{const} \quad (5.8)$$

Ainsi la distribution complète de la température dans la plaque peut être écrite par la relation suivante

$$T(x, y, z) = T_0^{(b)}(x, y) + Z_L(z) T_{0,z}^{(b)}(x, y) + \frac{1}{2} Z_Q(z) T_{0,zz}^{(b)}(x, y) \quad (5.9)$$

Où

$T(x, y, z)$  : température dans un point quelconque du composite

$T_0^{(b)}$  : température dans la couche de référence (figure 5.3)

Avec

$$Z_Q(z) = 2 \cdot (g_k + h_k) + f_k \cdot (t_k v_k + 2d_k + 2z) + (d_k + z)^2 \quad (5.10)$$

et

$$Z_L(z) = K_{zz}^{(b)} \left( s_k + \frac{1}{k_{zz}^{(k)}} (z + d_k) \right) \quad (5.11)$$

Les constantes  $s_k, d_k, v_k, f_k, h_k$  et  $g_k$  sont données par les relations suivantes :

$$s_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=b}^{k-1} \left( \frac{t_i}{k_{zz}^{(i)}} + \frac{t_{i+1}}{k_{zz}^{(i+1)}} \right); & b < k \\ 0; & b = k \\ -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=k-1}^b \left( \frac{t_i}{k_{zz}^{(i)}} + \frac{t_{i-1}}{k_{zz}^{(i-1)}} \right); & b > k \end{cases} \quad (5.12)$$

$$d_k = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=b}^{k-1} (t_i + t_{i+1}); & b < k \\ 0; & b = k \\ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=k-1}^b (t_i + t_{i-1}); & b > k \end{cases} \quad (5.13)$$

$$v_k = \begin{cases} 1; & b < k \\ 0; & b = k \\ -1; & b > k \end{cases} \quad (5.14)$$

$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=b}^{k-1} (t_i + t_{i+1}); & b < k \\ 0; & b = k \\ -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=b}^{k+1} (t_i + t_{i-1}); & b > k \end{cases} \quad (5.15)$$

$$h_k = \begin{cases} \sum_{i=b+1}^{k-1} (t_i \cdot f_i); & b+1 < k \\ 0; & b = k \\ -\sum_{i=b}^{k+1} (t_i \cdot f_i); & b-1 > k \end{cases} \quad (5.16)$$

$$g_k = \frac{1}{8} \left( t_b^2 - \frac{t_b^2 k_{zz}^{(b)}}{k_{zz}^{(k)}} \right) \quad (5.17)$$

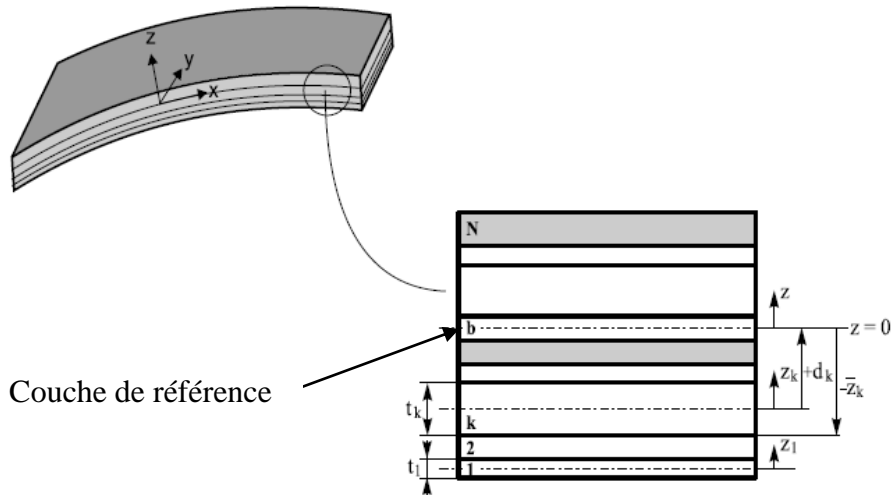


Figure 5.3 : Cordonnées des couches dans une plaque en composite à plusieurs couches

### 5.3. Equations de la chaleur:

L'équation de la chaleur sous forme matricielle est donnée par :

$$C\dot{T} + (A_1 + A_2)T = Ch \quad (5.18)$$

Ou le vecteur charge thermique  $Ch$  est donné par la relation suivante :

$$Ch = Q_a + Q_c - Q_B - Q_q \quad (5.19)$$

$C$  : matrice capacitance thermique.

$A_1$  : matrice de conduction thermique.

$A_2$ : matrice de convection thermique.

$Q_a$  : vecteur flux interne (il est supposé nul dans notre cas d'étude).

$Q_c$  : vecteur convection.

$Q_B$  : température aux parois.

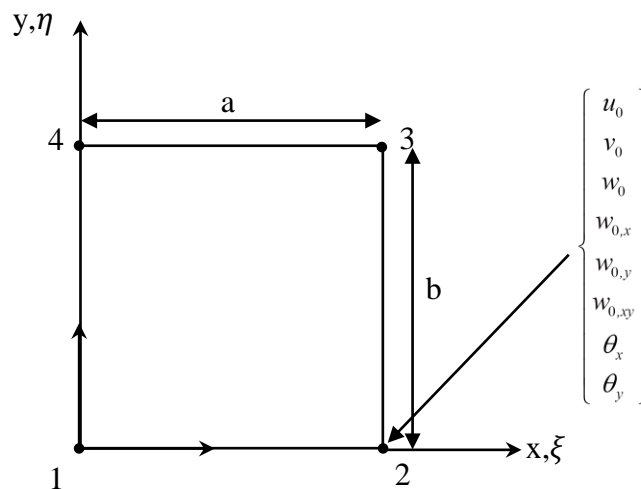
$Q_q$  : vecteur source de chaleur.

## Chapitre 6 : Modélisation par l'élément-p rectangulaire

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les plaques stratifiées composites immergés dans un fluide, soumises à un chargement thermique. La partie structure est modélisée dans le cas des vibrations libres par un élément-p rectangulaire à quatre nœuds et quatre côtés. Les fonctions de formes utilisées dans cet élément sont de familles trigonométriques de type  $C^0$  pour les déplacements membranaires et les rotations sont de type  $C^1$  pour les déplacements flexionnels. La partie thermique est modélisée par le même type d'élément utilisé dans la partie structure avec des fonctions de forme de type  $C^0$  seulement. Dans la partie fluide, la matrice masse est formée à l'aide de la pression calculée par les relations décrites dans le chapitre 3 et des fonctions de forme type  $C^1$ . L'analyse thermo-élastique des cas couplés fluide structure est la combinaison des trois études faites séparément.

### 6.1. Formulation par élément-p de la partie structure

Un élément fini hiérarchique rectangulaire à quatre nœuds, avec huit degrés de liberté par nœud ( $u_0, v_0, w_0, \partial w_0/\partial x, \partial w_0/\partial y, \partial w_0/\partial xy, \theta_x, \theta_y$ ) est utilisé pour la modélisation de la partie structure (figure 6.1). Cet élément est développé sur la base d'une théorie des plaques de troisième ordre. Les fonctions de forme hiérarchique par élément-p sont obtenues à partir des fonctions trigonométriques. Le modèle nécessite la continuité  $C^0$  pour  $u_0, v_0, \theta_x$  et  $\theta_y$ , et la continuité  $C^1$  pour  $w_0$ .



**Figure 6.1 :** Élément-p utilisé pour l'analyse des vibrations libres des plaques et analyse thermo-élastique

Les déplacements et les rotations de la plaque par élément- $p$  rectangulaire sont exprimés par :

$$\left. \begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{P_u} \sum_{n=1}^{P_u} u_{mn}(t) f_m(\xi) f_n(\eta) \\
 v_0(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{P_u} \sum_{n=1}^{P_u} v_{0mn}(t) f_m(\xi) f_n(\eta) \\
 w_0(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{P_w} \sum_{n=1}^{P_w} W_{mn}(t) g_m(\xi) g_n(\eta) \\
 \theta_x(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{P_\theta} \sum_{n=1}^{P_\theta} \theta_{xmn}(t) f_m(\xi) f_n(\eta) \\
 \theta_y(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{P_\theta} \sum_{n=1}^{P_\theta} \theta_{ymn}(t) f_m(\xi) f_n(\eta)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

avec  $P_u$ ,  $P_w$  et  $P_\theta$  sont les nombres des fonctions de forme utilisées dans le modèle de Reddy, pour le champs de déplacement  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $\theta$  respectivement.

Les premières fonctions de forme ( $f_1$  à  $f_2$  et  $g_1$  à  $g_4$ ) sont fréquemment utilisées dans la méthode des éléments finis. Les fonctions ( $f_{n+2}$  et  $g_{n+4}$ ) sont des fonctions de formes trigonométrique qui conduisent à zéro déplacement transversal, et la pente zéro à chaque nœuds. Cette caractéristique est très importante puisque ces fonctions ne donnent qu'un seul degré de liberté supplémentaire pour les bords et à l'intérieur de l'élément.

Les fonctions de formes hiérarchiques trigonométriques  $f_i(\xi)$  sont utilisées pour assurer la continuité  $C^0$  et  $g_i(\xi)$  pour assurer la continuité  $C^1$ , elles sont développées pour la première fois par (Houmat, 1997,2001):

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_1 &= 1 - \xi \\
 f_2 &= \xi \\
 f_{n+2} &= \sin(\delta r \xi) \\
 \delta r &= r \pi \\
 r &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \right. \quad (6.2)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ g_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ g_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ g_4 = -\xi^2 + \xi^3 \\ g_{n+4} = \delta r \left[ -\xi + \left( 2 + (-1)^r \right) \xi^2 - \left( 1 + (-1)^r \right) \xi^3 \right] + \sin(\delta r \xi) \\ \delta r = r \pi \\ r = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Le déplacement et la rotation peuvent être exprimés sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\} = [N] \{q\} \quad (6.4)$$

[N] est la matrice de fonctions de forme représentée par :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_u] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [N_w] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_\theta] \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

avec

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{l} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_{\theta_x} \\ q_{\theta_y} \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Où  $q_u, q_v, q_w, q_{\theta_x}$  et  $q_{\theta_y}$  sont les déplacements généralisés.

Les matrices des fonctions de forme sont données par :

$$[N_w] = \left[ \left( g_1(\xi) g_1(\eta) \right)_1, \left( g_1(\xi) g_2(\eta) \right)_2, \dots, \left( g_k(\xi) g_l(\eta) \right)_r, \dots, \left( g_{P_w}(\xi) g_{P_w}(\eta) \right)_{P_w, P_w} \right] \quad (6.7)$$

avec  $k = 1, \dots, P_w, \quad l = 1, \dots, P_w, \quad \text{and} \quad r = j + (i-1)P_w$

et

$$[N_u] = [N_\theta] = \left[ (f_1(\xi) f_1(\eta))_1, (f_1(\xi) f_2(\eta))_2, \dots, (f_i(\xi) f_j(\eta))_m, \dots, (f_{P_\theta}(\xi) f_{P_\theta}(\eta))_{P_\theta P_\theta} \right] \quad (6.8)$$

avec  $i = 1, \dots, P_\theta$ ,  $j = 1, \dots, P_\theta$ , and  $m = j + (i-1)P_\theta$ .

### 6.1.1. Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique d'une plaque épaisse peut être écrite en coordonnées adimensionnelles par la forme suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \rho_A \dot{u}_0^2 + \rho_A \dot{v}_0^2 - \frac{2\rho_B}{a} \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \xi} - \frac{2\rho_B}{b} \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \eta} + 2(\rho_C) \dot{v}_0 \dot{\theta}_y + 2(\rho_C) \dot{u}_0 \dot{\theta}_x \right. \\ \left. + \frac{\rho_D}{a^2} \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2\rho_F}{a} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \xi} \dot{\theta}_x + \rho_G \dot{\theta}_x^2 + \frac{\rho_D}{a^2} \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{2\rho_F}{b} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \eta} \dot{\theta}_y + \rho_G \dot{\theta}_y^2 + \rho_A \dot{w}_0^2 \right] d\xi d\eta \quad (6.9)$$

Sachant que

$$\rho_A = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz; \quad \rho_B = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(f(z)) dz; \quad \rho_C = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z - f(z)) dz, \quad (6.10-12)$$

$$\rho_D = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(f(z))^2 dz; \quad \rho_F = \int_{-h/2}^{h/2} \rho((f(z))^2 - z f(z)) dz; \quad (6.13-14)$$

$$\rho_G = \int_{-h/2}^{h/2} \rho((f(z)) - z)^2 dz \quad (6.15)$$

avec  $\rho$  la masse par unité de volume.

### 6.1.2. Energie de déformation

Dans la théorie des plaques de troisième ordre, l'expression de l'énergie de déformation peut être représentée en coordonnées adimensionnelles par la forme suivante :

$$E_d = \frac{1}{2} ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{11}}{a^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{A_{33}}{b^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{2A_{13}}{ab} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) + \frac{A_{22}}{a^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{A_{33}}{b^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2A_{23}}{ab} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + \frac{A_{13}}{a^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) + \frac{A_{12}}{ab} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right) + \frac{A_{23}}{b^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right) + \frac{A_{33}}{ab} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{2E_{11}}{a^3} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{4E_{13}}{a^2 b} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \frac{2E_{12}}{ab^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) \\
 & -\frac{2E_{23}}{b^3} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) - \frac{2E_{13}}{a^2 b} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{4E_{33}}{ab^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\
 & -\frac{2E_{12}}{a^2 b} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{2E_{13}}{a^3} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{2E_{22}}{b^3} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) \\
 & -\frac{2E_{23}}{ab^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) - \frac{4E_{33}}{a^2 b} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{4E_{23}}{ab^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\
 & + \frac{2}{a^2} (B_{11} - E_{11}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + \frac{2}{ab} (B_{13} - E_{13}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{b^2} (B_{33} - E_{33}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{ab} (B_{13} - E_{13}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \\
 & + \frac{2}{a^2} (B_{13} - E_{13}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \frac{2}{ab} (B_{12} - E_{12}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{b^2} (B_{23} - E_{23}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{ab} (B_{33} - E_{33}) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \\
 & + \frac{2}{a^2} (B_{13} - E_{13}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + \frac{2}{ab} (B_{33} - E_{33}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{b^2} (B_{23} - E_{23}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{ab} (B_{12} - E_{12}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \\
 & + \frac{2}{a^2} (B_{33} - E_{33}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \frac{2}{ab} (B_{23} - E_{23}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{b^2} (B_{22} - E_{22}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{ab} (B_{23} - E_{23}) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \\
 & + \frac{H_{11}}{a^4} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{H_{22}}{b^4} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{2H_{12}}{a^2 b^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) + \frac{4H_{13}}{a^3 b} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\
 & + \frac{4H_{23}}{ab^3} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) + \frac{H_{33}}{a^2 b^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 + \frac{F_{44}}{a^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2F_{45}}{ab} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right) + \frac{F_{55}}{b^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right)^2 \\
 & + \frac{2}{a^2 b} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{a^3} \left( H_{11} - G_{11} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + \frac{4}{ab^2} \left( H_{33} - G_{33} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \\
 & + \frac{2}{b^3} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{a^2 b} \left( H_{12} - G_{12} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{4}{a^2 b} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{a^2 b} \left( H_{12} - G_{12} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{a^3} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{4}{ab^2} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \\
 & + \frac{2}{b^3} \left( H_{22} - G_{22} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{ab^2} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \frac{4}{a^2 b} \left( H_{33} - G_{33} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \\
 & + \frac{2(F_{45})}{a} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \theta_y \right) + \frac{2(F_{55})}{b} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \theta_r \right) + \frac{I_{22}}{b^2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right)^2 + F_{55} (\theta_y)^2 + \frac{2(F_{44})}{a} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \theta_x \right) + \frac{2(F_{45})}{b} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \theta_x \right) \\
 & + \frac{I_{11}}{a^2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2I_{13}}{ab} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \frac{I_{33}}{b^2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right)^2 + F_{44} (\theta_x)^2 + \frac{I_{33}}{a^2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2I_{23}}{ab} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \\
 & + \frac{2I_{13}}{a^2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \frac{2I_{12}}{ab} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + \frac{2I_{33}}{ab} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \frac{2I_{23}}{ab} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + 2F_{45} (\theta_x \theta_y) \Big] d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

avec

$$A_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} dz \quad B_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} z dz \quad E_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} (z - f(z)) dz \tag{6.17-19}$$

$$F_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad G_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} (2z^2 - 2zf(z)) dz \tag{6.20, 5.21}$$

$$H_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} (f(z)^2 - 2zf(z) + z^2) dz \quad I_{i,j} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} ((f(z))^2) dz \tag{6.22, 6.23}$$

Les relations entre les coordonnées adimensionnelles et les coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{b} \tag{6.24}$$

Le système d'équations de mouvement vibratoire libre de la plaque est exprimé par la forme suivante

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (6.25)$$

[K] est la matrice de rigidité de l'élément-p, déterminée à partir de l'énergie de déformation

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] & [K_{u\theta_x}] & [K_{u\theta_y}] \\ [K_{uv}]^T & [K_{vv}] & [K_{vw}] & [K_{v\theta_x}] & [K_{v\theta_y}] \\ [K_{uw}]^T & [K_{vw}] & [K_{ww}] & [K_{w\theta_x}] & [K_{w\theta_y}] \\ [K_{u\theta_x}]^T & [K_{v\theta_x}]^T & [K_{w\theta_x}]^T & [K_{\theta_x\theta_x}] & [K_{\theta_x\theta_y}] \\ [K_{u\theta_y}]^T & [K_{v\theta_y}]^T & [K_{w\theta_y}]^T & [K_{\theta_x\theta_y}] & [K_{\theta_y\theta_y}] \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Avec les sous matrices:

$$[K_{uu}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{11}}{a^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} + \frac{A_{33}}{b^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} + \frac{2A_{13}}{ab} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.27)$$

$$[K_{vv}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{22}}{a^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} + \frac{A_{33}}{b^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} + \frac{2A_{23}}{ab} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.28)$$

$$[K_{uw}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{A_{13}}{a^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} + \frac{A_{12}}{b^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} + \frac{A_{33}}{ab} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (6.29)$$

$$[K_{uw}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ -\frac{2E_{11}}{a^3} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} - \frac{4E_{13}}{a^2 b} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2E_{12}}{ab^2} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\ \left. - \frac{2E_{23}}{a^2 b} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} - \frac{2E_{13}}{a^2 b} \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} - \frac{4E_{33}}{ab^2} \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{vw}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ -\frac{2E_{12}}{a^3} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} - \frac{2E_{13}}{a^3} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} - \frac{2E_{22}}{b^3} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2E_{23}}{ab^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} - \frac{4E_{33}}{a^2b} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} - \frac{4E_{23}}{ab^2} \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{u\theta_x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2} (B_{11} - E_{11}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2}{ab} (B_{13} - E_{13}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{b^2} (B_{33} - E_{33}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{ab} (B_{13} - E_{13}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{u\theta_y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2} (B_{13} - E_{13}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2}{ab} (B_{12} - E_{12}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{b^2} (B_{23} - E_{23}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{ab} (B_{33} - E_{33}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{v\theta_x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2} (B_{13} - E_{13}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2}{ab} (B_{33} - E_{33}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{b^2} (B_{23} - E_{23}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{ab} (B_{12} - E_{12}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{v\theta_y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2} (B_{33} - E_{33}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2}{ab} (B_{23} - E_{23}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{b^2} (B_{22} - E_{22}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{ab} (B_{23} - E_{23}) \frac{\partial [N_u]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{ww}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{H_{11}}{a^4} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} + \frac{H_{22}}{b^4} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} + \frac{2H_{12}}{a^2b^2} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \right. \\
 & + \frac{4H_{13}}{a^3b} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{4H_{23}}{ab^3} \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} + \frac{4H_{33}}{a^2b^2} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} \\
 & \left. + \frac{F_{44}}{ab} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} + \frac{2F_{45}}{ab} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} + \frac{F_{55}}{b^2} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{w\theta x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2 b} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{a^3} \left( H_{11} - G_{11} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right. \\
 & + \frac{4}{a^2 b} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2}{b^3} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \\
 & + \frac{2}{ab^2} \left( H_{12} - G_{12} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{4}{ab^2} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \\
 & \left. + \frac{2(F_{44})}{a} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_\theta] + \frac{2(F_{45})}{b} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_\theta] \right] d\xi d\eta \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{w\theta y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2}{a^2 b} \left( H_{12} - G_{12} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2}{a^3} \left( H_{13} - G_{13} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & + \frac{4}{ab^2} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{b^3} \left( H_{22} - G_{22} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \\
 & + \frac{2}{ab^2} \left( H_{23} - G_{23} \frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{4}{a^2 b} \left( H_{33} - G_{33} \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 [N_w]^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right) \\
 & \left. + \frac{2(F_{45})}{a} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_\theta] + \frac{2(F_{55})}{b} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_\theta] \right] d\xi d\eta \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{\theta x \theta x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{I_{11}}{a^2} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2I_{13}}{ab} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{I_{33}}{b^2} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + F_{44} [N_\theta]^T [N_\theta] \right] d\xi d\eta \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{\theta y \theta y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{I_{33}}{a^2} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2I_{23}}{ab} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + \frac{I_{22}}{b^2} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + F_{55} [N_\theta]^T [N_\theta] \right] d\xi d\eta \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{\theta x \theta y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 & \left[ \frac{2I_{13}}{a^2} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} + \frac{2I_{12}}{ab} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + \frac{2I_{33}}{ab} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \xi} \right. \\
 & \left. + \frac{2I_{23}}{ab} \frac{\partial [N_\theta]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_\theta]}{\partial \eta} + 2F_{45} [N_\theta]^T [N_\theta] \right] d\xi d\eta \quad (6.42)
 \end{aligned}$$



[M] est la matrice masse de l'élément-p, donnée par la relation suivante

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & [M_{uw}] & [M_{u\theta_x}] & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & [M_{vw}] & 0 & [M_{v\theta_y}] \\ [M_{uw}]^T & [M_{vw}]^T & [M_{ww}] & [M_{w\theta_x}] & [M_{w\theta_y}] \\ [M_{u\theta_x}]^T & 0 & [M_{w\theta_x}]^T & [M_{\theta_x\theta_x}] & 0 \\ 0 & [M_{v\theta_y}]^T & [M_{w\theta_y}]^T & 0 & [M_{\theta_y\theta_y}] \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Avec les sous matrices :

$$[M_{uu}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \rho_A [N_u]^T [N_u] d\xi d\eta \quad (6.43)$$

$$[M_{vv}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \rho_A [N_v]^T [N_v] d\xi d\eta \quad (6.44)$$

$$[M_{uw}] = ab \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\rho_B}{a} [N_u]^T \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} d\xi d\eta \quad (6.45)$$

$$[M_{vw}] = ab \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\rho_B}{b} [N_v]^T \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (6.46)$$

$$[M_{u\theta_x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 (\rho_C) [N_u]^T [N_\theta] d\xi d\eta \quad (6.47)$$

$$[M_{u\theta_y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 (\rho_C) [N_u]^T [N_\theta] d\xi d\eta \quad (6.48)$$

$$[M_{ww}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \rho_A [N_w]^T [N_w] + \frac{\rho_D}{a^2} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} + \frac{\rho_D}{b^2} \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (6.49)$$

$$[M_{w\theta_x}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \rho_F \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_\theta] d\xi d\eta \quad (6.50)$$

$$[M_{w\theta_y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \rho_F \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_\theta] d\xi d\eta \quad (6.51)$$

$$[M_{\theta_x \theta_x}] = [M_{\theta_y \theta_y}] = ab \int_0^1 \int_0^1 \rho_G [N_\theta]^T [N_\theta] d\xi d\eta \quad (6.52)$$

## 6.2. Vecteur charge thermique

Le vecteur charge est déterminé à partir de la relation 3.27. Il est exprimé par la forme suivante :

$$Ed_T = \frac{1}{2} [Ed_{T1} + Ed_{T2} + Ed_{T3} + Ed_{T4} + Ed_{T5}] \quad (6.53)$$

Avec:

$$Ed_{T1} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \Delta T [-A_{11} \alpha_{xx} - A_{12} \alpha_{yy} - A_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial u}{\partial \eta} \Delta T [-A_{13} \alpha_{xx} - A_{23} \alpha_{yy} - A_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.54)$$

$$Ed_{T2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \Delta T [-A_{11} \alpha_{xx} - A_{12} \alpha_{yy} - A_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial v}{\partial \eta} \Delta T [-A_{13} \alpha_{xx} - A_{23} \alpha_{yy} - A_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} Ed_{T3} = & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{xy} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{xx} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy}] + \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Delta T [(B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy} + (B_{13} - E_{13}) \alpha_{xy} + (B_{11} - E_{11}) \alpha_{xx}] + \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} 2 \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{xy} + (B_{23} - E_{23}) \alpha_{xx} + (B_{33} - E_{33}) \alpha_{yy}] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$Ed_{T4} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \Delta T [-E_{11} \alpha_{xx} - E_{12} \alpha_{yy} - E_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \Delta T [-E_{13} \alpha_{xx} - E_{23} \alpha_{yy} - E_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.57)$$

$$Ed_{T5} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \Delta T [-E_{11} \alpha_{xx} - E_{12} \alpha_{yy} - E_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \Delta T [-E_{13} \alpha_{xx} - E_{23} \alpha_{yy} - E_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.58)$$

$\Delta T$  : Gradient de température déterminé par l'analyse thermique.

Le vecteur charge dû à la température est représenté par la forme suivante :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} T_{uu} \\ T_{vv} \\ T_{ww} \\ T_{\theta x} \\ T_{\theta y} \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

Les détails des composants du vecteur  $\{F\}$  remplacé par les matrices des fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned}
 T_{uu} = & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{xy} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{xx} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy}] + \\
 & \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \Delta T [(B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy} + (B_{13} - E_{13}) \alpha_{xy} + (B_{11} - E_{11}) \alpha_{xx}] + \\
 & \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} 2 \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{yy} + (B_{23} - E_{23}) \alpha_{xx} + (B_{33} - E_{33}) \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.60)
 \end{aligned}$$

$$T_{uv} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \Delta T [-A_{11} \alpha_{xx} - A_{12} \alpha_{yy} - A_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \Delta T [-A_{13} \alpha_{xx} - A_{23} \alpha_{yy} - A_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.61)$$

$$T_{vv} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial [N_u]}{\partial \xi} \Delta T [-A_{11} \alpha_{xx} - A_{12} \alpha_{yy} - A_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial [N_u]}{\partial \eta} \Delta T [-A_{13} \alpha_{xx} - A_{23} \alpha_{yy} - A_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned}
 T_{ww} = & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{xy} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{xx} + (B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy}] + \\
 & \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \Delta T [(B_{12} - E_{12}) \alpha_{yy} + (B_{13} - E_{13}) \alpha_{xy} + (B_{11} - E_{11}) \alpha_{xx}] + \\
 & \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} 2 \Delta T [(B_{23} - E_{23}) \alpha_{yy} + (B_{23} - E_{23}) \alpha_{xx} + (B_{33} - E_{33}) \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.63)
 \end{aligned}$$

$$T_{\theta x} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial [N\theta]}{\partial \xi} \Delta T [-E_{11} \alpha_{xx} - E_{12} \alpha_{yy} - E_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial [N\theta]}{\partial \eta} \Delta T [-E_{13} \alpha_{xx} - E_{23} \alpha_{yy} - E_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.64)$$

$$T_{\theta y} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial [\theta_y]}{\partial \xi} \Delta T [-E_{11} \alpha_{xx} - E_{12} \alpha_{yy} - E_{13} \alpha_{xy}] + \frac{\partial [\theta_y]}{\partial \eta} \Delta T [-E_{13} \alpha_{xx} - E_{23} \alpha_{yy} - E_{33} \alpha_{xy}] d\xi d\eta \quad (6.65)$$

### 6.3. Modélisation par élément-p fluide-structure

En utilisant la procédure de modélisation par élément-p d'interface du fluide-structure (figure 6.1), le vecteur de force  $\{fp\}$  est exprimé par un élément fini à l'aide de la relation suivante:

$$\{fp\} = \int [N_w]^T \{Pr\} dx dy \quad (6.66)$$

Où  $[N_w]$  est la matrice des fonctions de forme, et  $\{Pr\}$  est un vecteur exprimant la pression exercée par le fluide sur la plaque (Eq. 4.14, 4.17-18 et 4.21).



La pression dynamique est ensuite définie par :

$$[M_f] = \{fp\} = \int_0^1 \int_0^1 Zf_i \dot{w}_0^2 d\xi d\eta \quad (6.67)$$

Les coefficients  $Zf_i$  ( $i = 1-4$ ) dépendent du contact fluide-structure définies par les équations (Eq. 4.14, 4.17-18 et 4.21).

Le système d'équations de mouvement global d'une plaque rectangulaire en interaction avec un fluide peut être représenté comme suit:

$$([M_s] - [M_f])\{\ddot{q}\} + [K_s]\{q\} = 0 \quad (6.68)$$

Où les indices  $s$  et  $f$  se réfèrent à la plaque respectivement à l'air libre et dans un fluide.  $[M_s]$  et  $[K_s]$  représentent la matrice masse et de rigidité de la plaque à l'air libre.  $[M_f]$  représente la force d'inertie du fluide et  $\{q\}$  est le vecteur des déplacements généralisés.

## 6.4. Analyse thermique

### 6.4.1. Choix de l'élément

L'analyse thermique de plaque stratifiée en matériaux composites est modélisée par un élément fini hiérarchique a quatre nœuds et quatre côtés (figure 6.1). Cet élément possède trois degrés de liberté par nœuds ( $T_0$ ,  $T_{0,z}$ ,  $T_{0,zz}$ ) qui sont respectivement la température, le gradient et la courbure.

Les coordonnées adimensionnelles sont exprimées en fonction des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (6.69)$$

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (6.70)$$

Les températures dans le plan  $(x, y)$  sont exprimées à l'aide des fonctions de forme représentées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_{n+2} = \sin(\delta r \xi) \\ \delta r = r \pi \\ r = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6.71)$$

La température dans le plan  $(x, y)$  exprimé par les fonctions de formes est donnée par la relation suivante :

$$T_0(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{M+2N+2} \sum_{j=1}^{M+2N+2} \varphi_{0(i,j)} f_i(x) f_j(y) = [N] \varphi \quad (6.72)$$

avec

$$[N] = \left[ (f_1(\xi) f_1(\eta))_1, (f_1(\xi) f_2(\eta))_2, \dots, (f_i(\xi) f_j(\eta))_m, \dots, (f_{(M+2)}(\xi) f_{(N+2)}(\eta))_{(M+2)(N+2)} \right] \quad (6.73)$$

#### 6.4.2. Distribution de la température

Dans cette partie, on veut déterminer la distribution de la température à n'importe quel point de la plaque. Pour cela, nous avons recours à la version- $p$  de la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, on considère un régime stationnaire et le problème que l'on veut étudier est régi par l'équation différentielle suivante :

$$C\dot{T} + (A_1 + A_2)T = Ch \quad (6.74)$$

#### 6.4.3. Matrice de conduction thermique

La matrice conduction est obtenue à l'aide de l'intégrale suivante :

$$A_1 = \int_s [B]^T [\bar{K}] [B] ds \quad (6.75)$$

Où La matrice  $[B]$  est donnée par la relation suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ N, x & 0 & 0 \\ N, y & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & N, x & 0 \\ 0 & N, y & 0 \\ 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & N, x \\ 0 & 0 & N, y \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

$$[\bar{K}] = \int_z [S]^T [k] [S] dz \quad (6.77)$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{S}1 & 0 & 0 & \tilde{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{S}1 & 0 & 0 & \tilde{r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{zz}^{(b)}}{k_{zz}^{(k)}} & 0 & 0 & \tilde{S}2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

La valeur de  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{S}1$  et  $\tilde{S}2$  est définie par :

$$\tilde{r} = g_k + h_k + \frac{f_k t_k v_k}{2} + g_k (z + d_k) + \frac{k_{zz}^{(b)} (z + d_k)^2}{2k_{zz}^{(k)}} \quad (6.79)$$

$$\tilde{S}1 = k_{zz}^{(b)} s_k + \frac{k_{zz}^{(b)}}{k_{zz}^{(k)}} (z + d_k) \quad (6.80)$$

$$\tilde{S}2 = f_k + \frac{k_{zz}^{(b)}}{k_{zz}^{(k)}} (z + d_k) \quad (6.81)$$

La matrice  $[\bar{K}]$  est donnée par la relation suivante :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 & B_{xx} & B_{xy} & 0 & F_{xx} & F_{xy} \\ 0 & A_{yx} & A_{yy} & 0 & B_{yx} & B_{yy} & 0 & F_{yx} & F_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & A_{zz} & 0 & 0 & B_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & B_{xx} & B_{xy} & 0 & C_{xx} & C_{xy} & 0 & G_{xx} & G_{xy} \\ 0 & B_{yx} & B_{yy} & 0 & C_{yx} & C_{yy} & 0 & G_{yx} & G_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & B_{zz} & 0 & 0 & C_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & F_{xx} & F_{xy} & 0 & G_{xx} & G_{xy} & 0 & H_{xx} & H_{xy} \\ 0 & F_{yx} & F_{yy} & 0 & G_{yx} & G_{yy} & 0 & H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

La matrice de conduction en coordonnées adimensionnelles est donnée par :

$$A_1 = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [\bar{K}] [B] d\xi d\eta \quad (6.83)$$

#### 6.4.4. Matrice de convection

La matrice de convection est donnée par la relation suivante :

$$A_2 = hc \int_S [B]^T [R]^T [R] [B] ds \quad (6.84)$$

avec

$$[R]^T = [1 \ 0 \ 0 \ ZL(h_1, h_{N+1}) \ 0 \ 0 \ \tilde{r} \ 0 \ 0] \quad (6.85)$$

En coordonnées adimensionnelles la matrice  $[A_2]$  est donnée par :

$$A_2 = hc \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [R]^T [R] [B] d\xi d\eta \quad (6.86)$$

#### 6.4.5. Matrice de capacitance

La matrice capacitance est donnée par la relation suivante :

$$C = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [\bar{R}] [B] d\xi d\eta \quad (6.87)$$

avec

$$[\bar{R}] = \int_z [R]^T (\rho_c)^k [R] dz \quad (6.88)$$

#### 6.4.6. Vecteur charge

##### 6.4.6. 1. Vecteur de convection thermique

Le vecteur convection représente les charges thermiques extérieures sous la forme de convection :

$$\{Q_c\} = hc \int_S [B]^T [\bar{R}]^T T_\infty ds \Big|_{(z=h_1, h_N)} \quad (6.89)$$

avec

$T_\infty$  : Température à la surface.

$hc$  : convection imposée sur la surface.

##### 6.4.6.2. Vecteur source de chaleur externe

Le vecteur convection représente les charges thermiques extérieures sous la forme de convection, appliquées à la partie supérieure et inférieure de la plaque. Ce vecteur est donné par la relation suivante :

$$\{Q_q\} = hc \int_S [B]^T [\bar{R}]^T q ds \Big|_{(z=h_1, h_N)} \quad (6.90)$$

##### 6.4.6.3. Température aux parois

La température sur les parois est présentée par la relation suivante :

$$\{Q_B\} = [A1] \{T\} \Big|_{(z=h_1, h_N)} \quad (6.91)$$

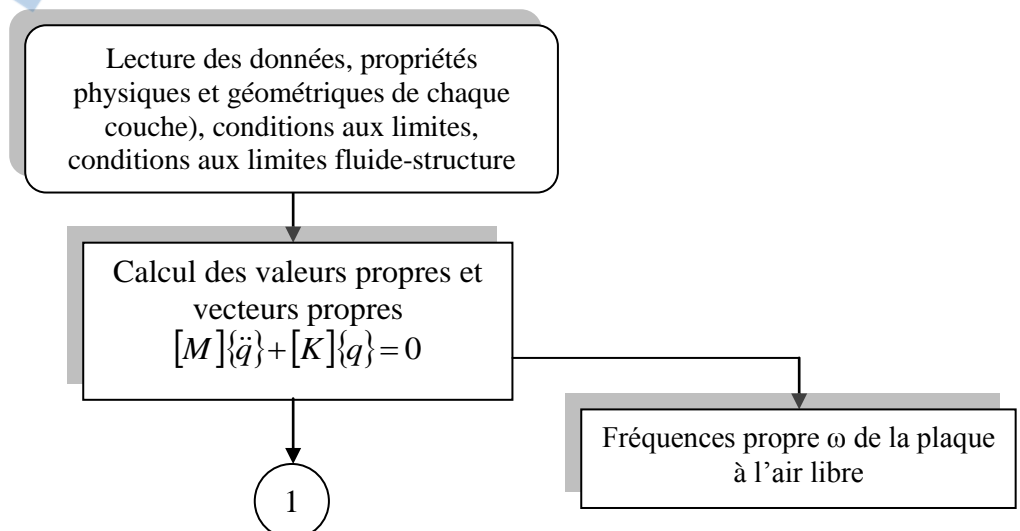
## Chapitre 7 : Organisation de la programmation

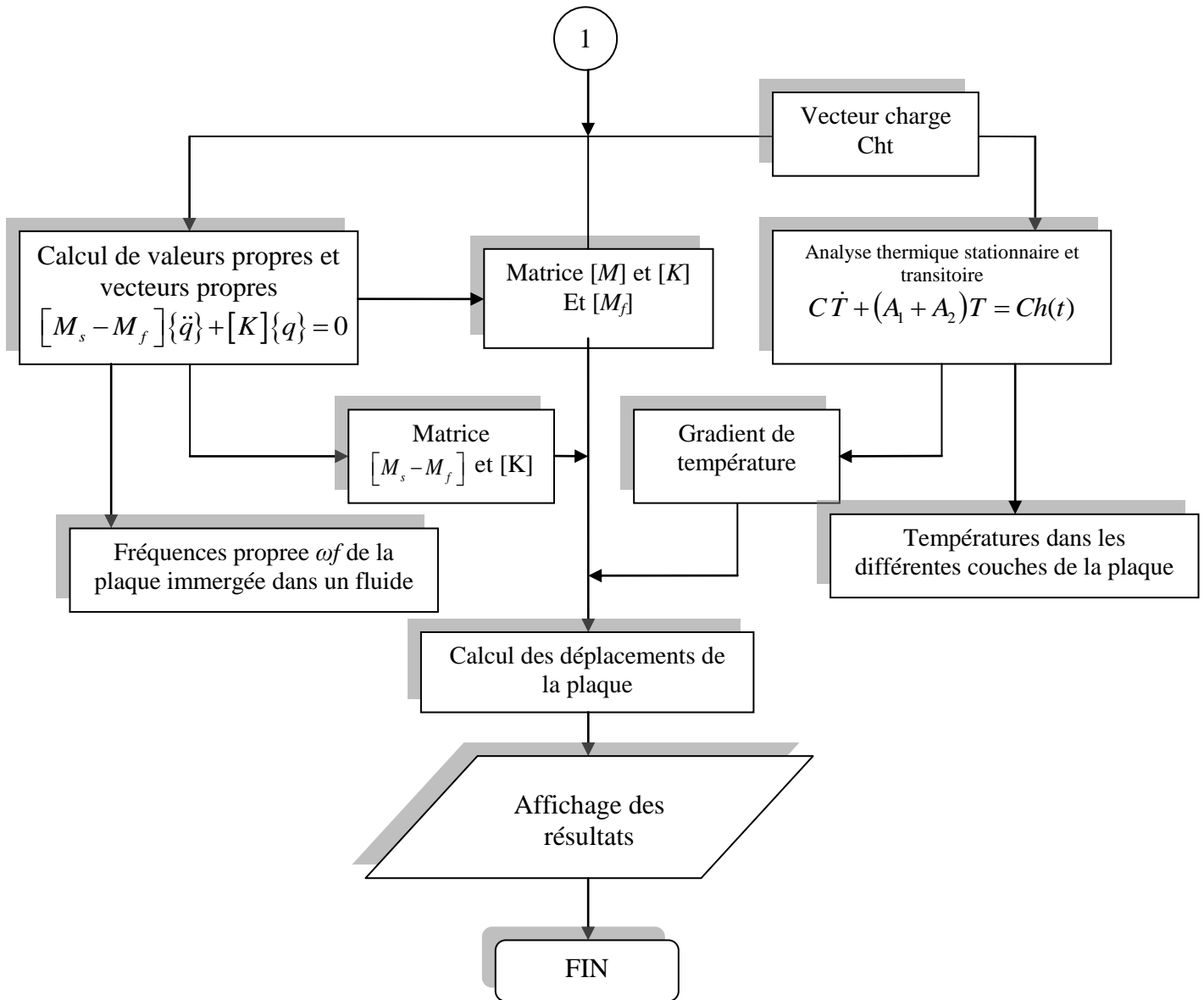
Dans ce chapitre on donne une description de l'environnement de programme, des organigrammes des programmes élaborés. Ces derniers sont développés sous Mathcad et Matlab, où l'analyse des vibrations libres des plaques composites par le modèle de troisième ordre TSDT et l'analyse thermique stationnaire et transitoire dans le cas de conditions aux limites uniformes est développé sur Mathcad. Pour l'analyse thermique stationnaire avec des conditions aux limites non uniformes et l'analyse thermo-élastique et développé Matlab. Enfin les différentes méthodes et procédures utilisées dans le programme, sont décrites et détaillées.

### 7.1. Environnement du programme

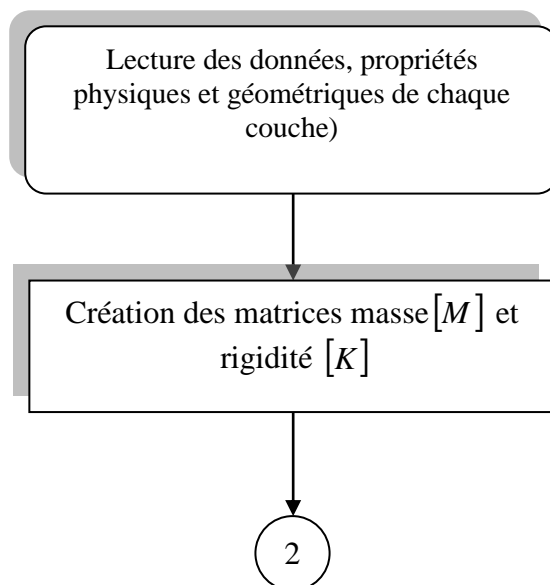
Le matériel utilisé pour la programmation est un micro-ordinateur avec un processeur Intel Core i7 3.4 Ghz, et une Ram de 12 Go. Les logiciels Mathcad et Matlab ont été utilisés pour la réalisation du programme qui est répartie en trois parties. La première partie est destinée pour l'analyse des vibrations des plaques stratifiées composites épaisses. avec et sans interaction fluide-structure, la deuxième partie est utilisée pour l'analyse thermique stationnaire et transitoire. Dans la dernière partie les résultats obtenus dans les précédents programmes sont utilisées pour résoudre le problème des vibrations forcées des plaques sous charge thermique avec interaction avec le fluide.

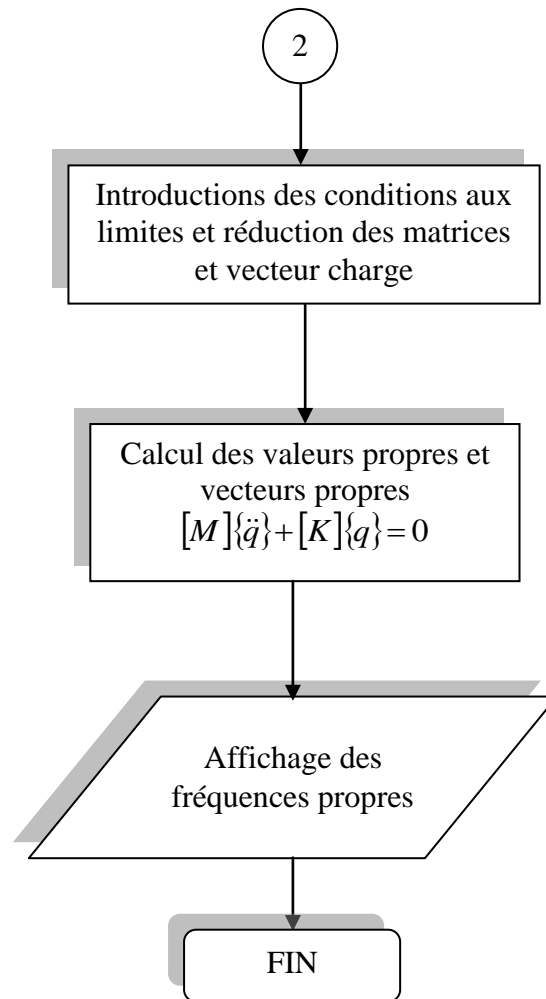
### 7.2. Organigramme général :



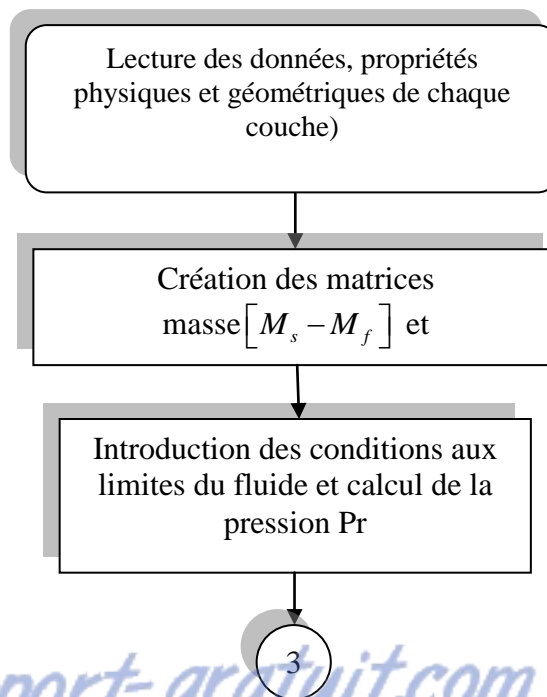


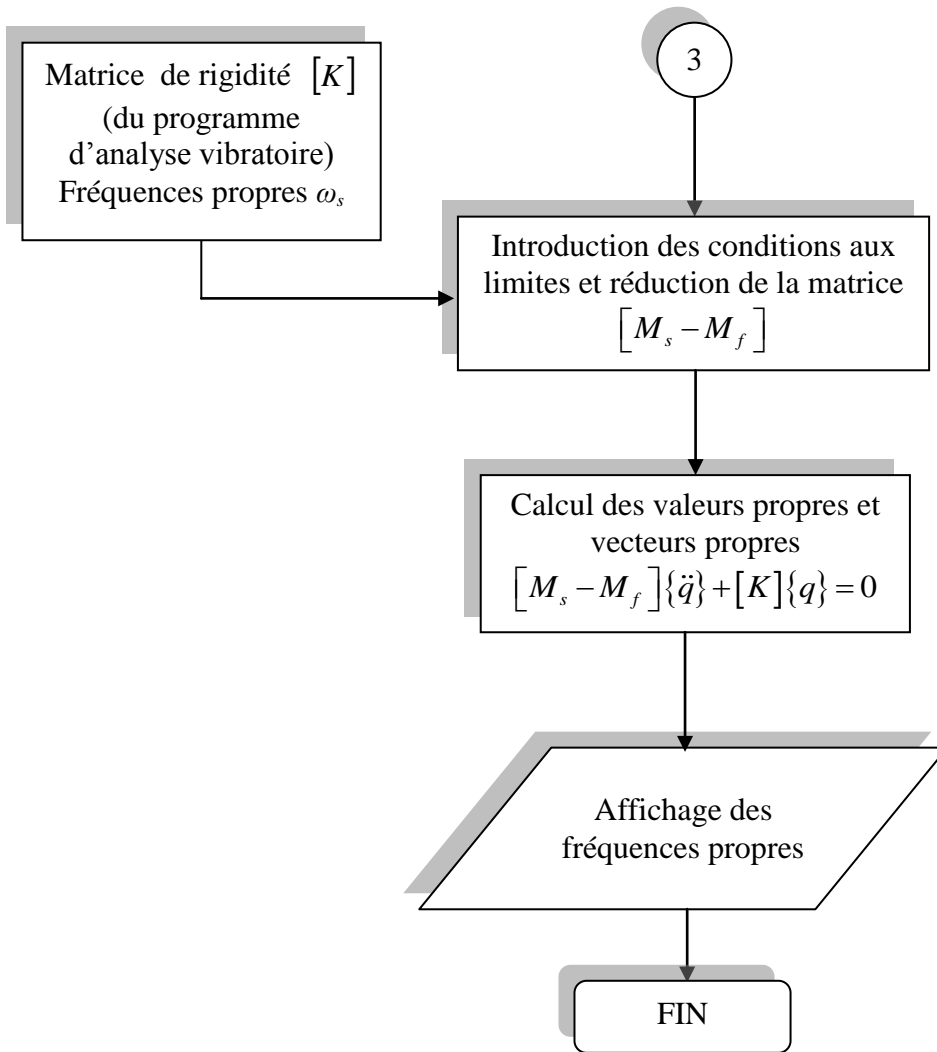
**7.2.1 Organigramme d'analyse des vibrations libres**



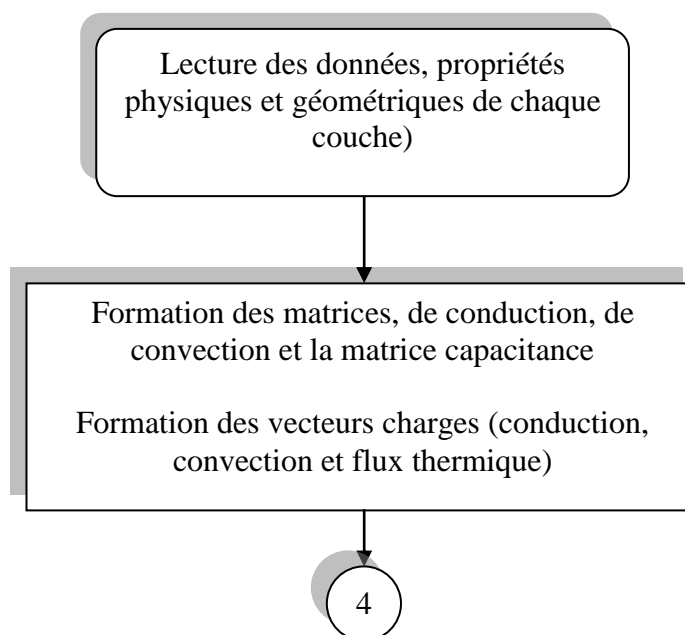


### 7.2.2 Organigramme d'analyse des vibrations libres avec interaction fluide structure

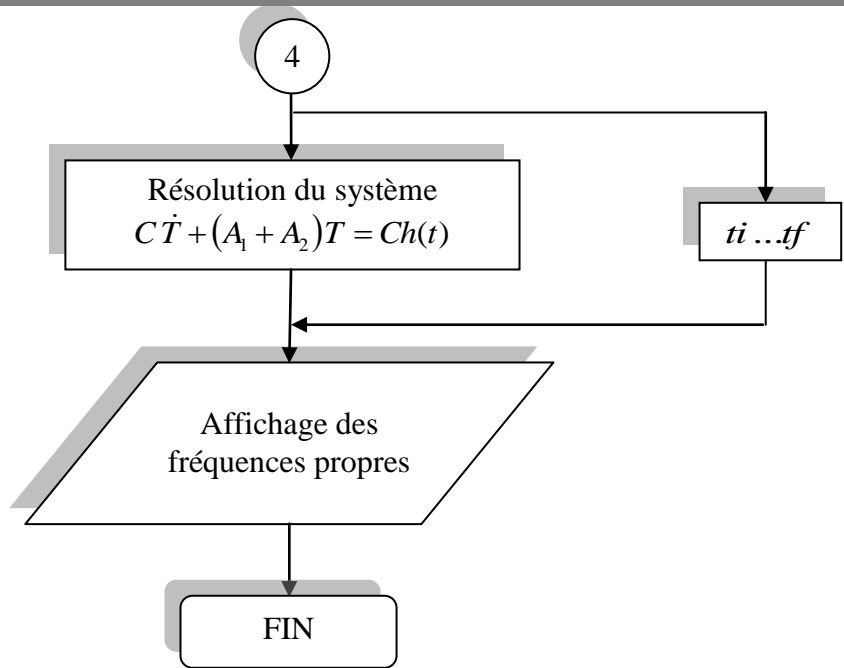




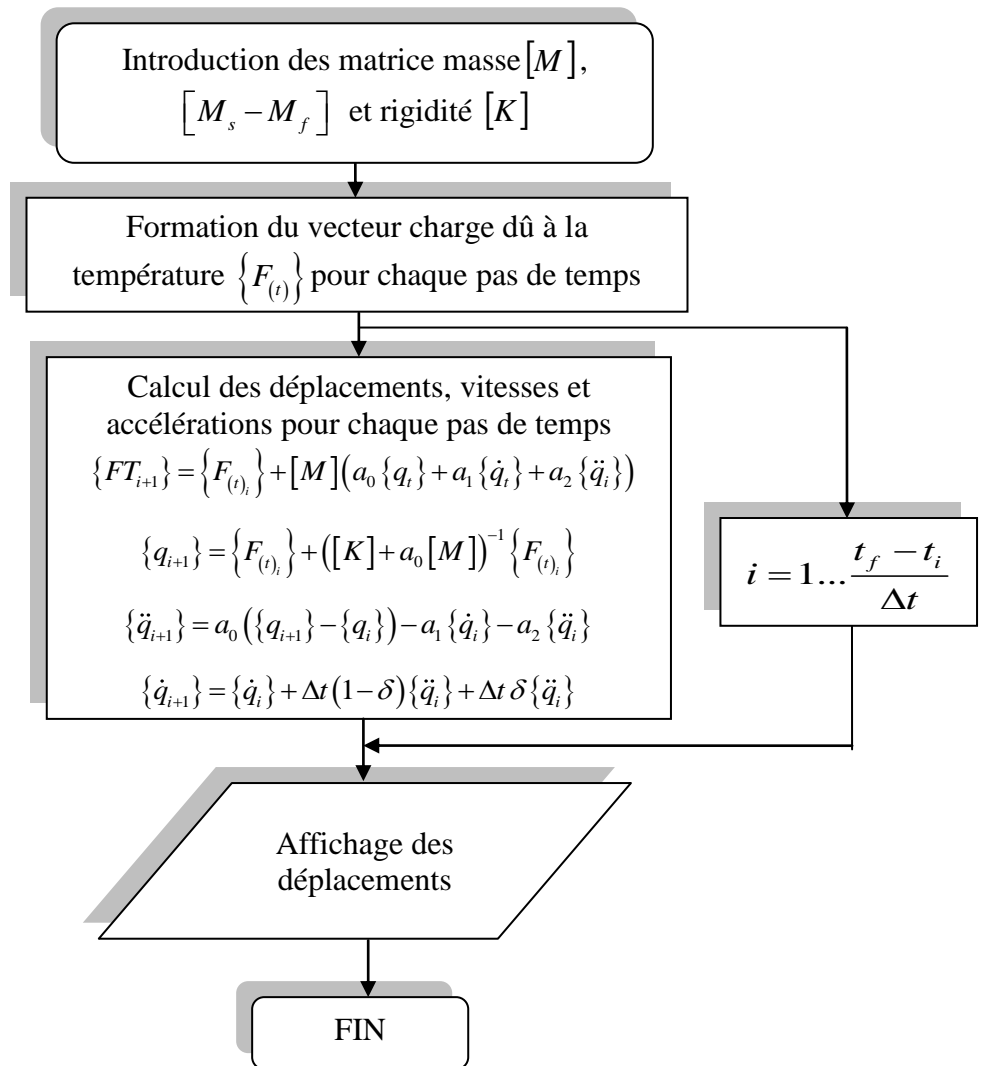
### 7.2.3 Organigramme d'analyse thermique







**7.2.4 Organigramme d'analyse thermo-élastique**



### 7.3. Organisation de la programmation

#### 7.3.1. Analyse de vibration libre

Les données d'entrée du programme d'analyse des vibrations libres sont les suivantes :

- $PF$  : Nombre de fonctions de formes
- $a, b$  : Longueur et largeur de la plaque
- $e$  : Epaisseur de la plaque
- $hcf$  : Rapport d'épaisseur de l'âme sur la peau
- $NC$  : nombre de couches
- $E1_k, E2_k$  : modules d'élasticité
- $\rho_k$  : masse volumique
- $G12_k, G13_k, G23_k$  : modules de cisaillement
- $\nu12_k$  : coefficient de poisson correspondant à la direction 12
- $\theta_k$  : angle d'orientation des fibres

L'indice  $k$  pour le numéro de la couche

- *Application des conditions aux limites*

Les déplacements aux nœuds et des bords peuvent prendre deux valeurs (1 ou 0), ou 1 signifie qu'il y'a un déplacement et 0 signifie qu'il n'y a pas de déplacement. Il existe huit degrés de liberté qui peuvent prendre ces deux valeurs au niveau des nœuds et sept degrés de liberté aux bords. Les tableaux 7.1 et 7.2 donnent les détails des nœuds et des bords et la représentation de l'élément- $p$  est donnée au chapitre 6 (figure 6.1).

**Tableau 7.1** : Degrés de liberté aux nœuds

nœuds	$u$	$v$	$w$	$w,x$	$w,y$	$w,xy$	$\theta_x$	$\theta_y$
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

**Tableau 7.2** : Degrés de liberté aux bords

bords	$u$	$v$	$w$	$w,x$	$w,y$	$\theta_x$	$\theta_y$
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Les valeurs des déplacements au niveau des nœuds et des bords sont introduites sous forme d'un vecteur. Les matrices de rigidité  $[K]$  et la matrice masse  $[M]$  sont réduites si la valeur est égale à 0, par suppression des lignes et des colonnes qui coïncident avec le degré de liberté concerné.

### 7.3.2. Analyse d'interaction fluide-structure

Les données d'entrée du programme d'analyse des vibrations libres de plaques en contact avec un fluide sont les suivantes :

- $[M_s]$  : Matrice masse structure
- $[KRED]$  : Matrice de rigidité réduite
- $\rho_f$  : masse volumique du fluide
- $h1, h2$  : hauteur supérieure et inférieure du fluide à la plaque

- ***Application des conditions aux limites***

La même méthode utilisée dans le cas de structure est appliquée pour l'interaction fluide structure sauf qu'il y a un seul degré de liberté aux nœuds et aux bords  $w$  aussi que la même procédure de réduction est appliquée à la matrice masse  $[M_s - M_f]$ .

### 7.3.2. Analyse thermo-élastique

Dans le cas d'analyse thermo-élastique les matrices  $[MRED]$  et  $[KRED]$  sont lues à partir des fichiers Excel et la liste des données représentée comme suit :

- $[MRED]$  : Matrice masse réduite
- $[KRED]$  : Matrice de rigidité réduite
- $\alpha11_k, \alpha22_k, \alpha33_k$  : coefficients d'expansion thermique
- $T_i, T_f$  : Temps initial et final
- $\Delta T$  : intervalle de temps

- ***Application des conditions aux limites***

La même méthode utilisée dans le cas de structure est réutilisée pour l'analyse thermo-élastique. Le vecteur charge thermique  $\{F_{(t)}\}$  est réduit si la valeur est égale à 0 par suppression des lignes et qui coïncident avec le degré de liberté concerné (Tableau 7.1-2).

### 7.3.2. Analyse thermique

- $h_k$  : Epaisseur de chaque couche
- $KXX_k, KYY_k, KZZ_k$  : Coefficients de conduction thermique

- $\rho_k$  : masse volumique
- $C_k$  : capacité thermique calorifique
- $\beta_1, \beta_2$  : Convection thermique de la surface supérieure et inférieure
- $TINF_1, TINF_2$  : Température sur la surface supérieure et inférieure
- $q_1, q_2$  : flux de chaleur sur la surface supérieure et inférieure
- $t_i, t_f$  : Temps initial et final
- $\Delta t$  : intervalle de temps

- **Application des conditions aux limites**

Les conditions aux limites sont introduites pour calculer le vecteur charge défini dans la section (5.5.6.). Les conditions aux limites sont représentées par : la convection ( $\beta_1$  et  $\beta_2$ ), la température sur la surface ( $TINF_1$  et  $TINF_2$ ) et le flux de chaleur ( $q_1$  et  $q_2$ ). Les indices 1 et 2 définissent respectivement la surface supérieure et inférieure de la plaque.

## 7.4. Méthodes de résolution

### 7.4.1. Analyse des vibrations libres

Dans cette partie, on veut transformer le problème généralisé aux valeurs propres qui se présente sous la forme suivante :

$$([K] - \omega^2 [M])\{q\} = 0 \quad (7.1)$$

Ou aussi dans le cas d'interaction fluide-structure

$$([K_s] - \omega^2 ([M_s] - [M_f]))\{q\} = 0 \quad (7.2)$$

A un problème standard de la forme suivante :

$$([A] - \omega^2 I)\{q\} = 0 \quad (7.3)$$

Avec

$\omega$  : Fréquences propres de la plaque

$\{q\}$  : Vecteurs coordonnées généralisés

La méthode de Cholesky utilisée permet dans un premier temps de décomposer la matrice masse symétrique définie positive

$$M = L^T L \quad (7.4)$$

Où

$L$  : est une matrice triangulaire inférieure (tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls).

On crée un vecteur  $y$  tel que :

$$y = L^T q \quad (7.5)$$

et en remplaçant les relations (7.4) et (7.5) dans (7.3), nous obtenons l'équation suivante :

$$(L^{-1}K L^T - \omega^2 I)y = 0 \quad (7.6)$$

Avec

$$A = L^{-1}K L^T \quad (7.7)$$

La dernière relation peut être écrite sous la forme

$$K = L A L^T \quad (7.8)$$

La dernière relation subira une première substitution en arrière ou :

$$Z = A L^T \quad (7.9)$$

Dans la deuxième substitution :

$$LZ = K \quad (7.10)$$

La relation (7.9) peut être exprimée comme suit :

$$L A = Z^T \quad (7.11)$$

En dernier, l'équation (7.11) subit une substitution en arrière pour déterminer la matrice [A].

#### 7.4.2. Procédure de Householder

Cette méthode permet d'obtenir une matrice tridiagonale symétrique au bout d'un nombre de transformations semblables. elle consiste à faire apparaître des zéros en dehors de la bande tridiagonale.

La méthode de Householder utilise une suite de transformations orthogonales sur la matrice [A] donnée par la relation suivante :

$$A H_{r+1} = Q H_r \quad A H_r = Q H_r \quad (7.12)$$

Avec

$$A H_1 = A \quad (7.13)$$

Et

$$QH_r = I - 2\beta z z^T \quad (7.14)$$

Où  $\beta$  est un scalaire et  $\mathbf{z}$  un vecteur défini par :

$$z_i = \begin{cases} 0 & i < r+1 \\ a_{r,r+1} + s & i = r+1 \\ a_{ri} & i > r+1 \end{cases} \quad (7.15)$$

Avec  $s$  une constante donnée par la relation suivante :

$$s^2 = \sum_{i=r+1}^n a_{ri}^2 \quad (7.16)$$

$a_{ri}$  sont les éléments de la matrice  $AH_r$  et s'écrit pris du même signe que l'élément  $a_{r,ri}$ .

Le vecteur  $\mathbf{z}$  vérifie la multiplication vectorielle suivante :

$$\mathbf{z} \mathbf{z}^T = \frac{1}{\beta} \quad (7.17)$$

En remplaçant (7.15) et (7.16) dans (7.17), nous obtenons :

$$QH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & QH_1^{(n-1)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Après transformation de Housholder, la matrice  $AH_2$  aura la forme suivante :

$$AH_1 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & x & & & \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Au bout de  $(n-2)$  étapes, la matrice finale  $AH_{n-1}$  est tridiagonale et symétrique, elle se présente sous la forme suivante :

$$AH_{n-1} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

### 7.4.3. Méthode QR

Cette méthode permet d'obtenir les valeurs propres de la matrice symétrique tridiagonale  $AH$ . La méthode QR permet de décomposer la matrice  $AH$  en un produit de deux matrices, une matrice  $Q$  orthogonale et une deuxième  $R$  qui est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux positifs.

Partant de  $AH = AH_0$ , on crée une suite de matrices  $AH_1; AH_2; \dots; AH_r; AH_{r+1}$  ainsi définie.

On factorise  $A$  en QR telle que

$$AH_r = Q_r R_r \quad (7.21)$$

Et

$$AH_{r+1} = R_r Q_r \quad (7.22)$$

Après un certain nombre d'itération  $AH_{r+1}$  converge vers la matrice diagonale des valeurs propres.

### 7.4.4. Analyse thermique transitoire

Différentes méthodes sont utilisées pour résoudre les problèmes de transfert thermique transitoire (méthode des différences finis, la méthode  $\alpha$  généralisée et la méthode PTIM (Precise Time Intégration Method) (Wanxie et al, 1995)), cette dernière à été utilisée sous la forme:

$$C\dot{T} + (A_1 + A_2)T = Ch(t) \quad (7.23)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante

$$\dot{T} = HT + f(t) \quad (7.24)$$

avec

$$H = -C^{-1} (A_1 + A_2) \quad (7.25)$$

et

$$f(t) = C^{-1} Ch(t) \quad (7.26)$$

Qu'on peut la mettre sous la forme :

$$f(t) = r_0 + r_1(t - t_n) \quad (7.27)$$

Le vecteur  $r_0$  est obtenu par la relation suivante :

$$r_0 = C^{-1} Ch_{(t)} \quad (7.28)$$

telque  $r_1$  est donné par la relation suivante

$$r_1 = \frac{C^{-1} Ch_{(t+\Delta t)} - r_0}{\Delta t} \quad (7.29)$$

La température  $\mathbf{T}$  est obtenue à l'aide de plusieurs itérations. Chaque itération correspond à un intervalle temps  $\Delta t$  à partir d'une température initiale :

$$T^{n+1} = T_0 [T^n + H^{-1} (r_0 + H^{-1} r_1)] - H^{-1} [r_0 + H^{-1} r_1 + r_1 \tau] \quad (7.30)$$

$Ch(t)$  : vecteur charge

$A_1$  : matrice de conduction thermique

$A_2$  : matrice de convection thermique

La matrice  $[T_0]$  est obtenue par la relation suivante :

$$T_0 = (I + TP)^{2^M} \quad (7.31)$$

Avec

$$TP = H \tau + \frac{(H \tau)^2}{2!} + \frac{(H \tau)^3}{3!} + \frac{(H \tau)^4}{4!} \quad (7.32)$$



### 7.4.5. Analyse thermo-élastique

#### 7.4.5.1. Méthode d'intégration de Newmark

Il existe différentes méthodes utilisées pour résoudre les problèmes thermo-élastiques. On peut citer,  $\theta$ -Wilson, PTIM (Precise Time Intégration Method) étudié pour différents types de chargement dynamique (Jiahao et al, 1994) et la méthode de Newmark utilisée par beaucoup de chercheurs, on peut citer le travail de Parhi (Parhi et al. 2001) dans l'analyse dynamique des plaques composites sous l'effet hygrothermique et Lee et Han (Lee et Han 2006) dans l'analyse des vibrations libres et forcées des plaques et coques composites.

C'est une méthode implicite à un pas, stable et converge rapidement dans la plus part des cas.

Elle se présente sous la forme suivante :

$$\{q_{i+1}\} = \{q_i\} + \Delta t \{\dot{q}_i\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1-2\alpha)\{\ddot{q}_i\} + 2\alpha\{\ddot{q}_{i+1}\}] \quad (7.33)$$

$$\{\dot{q}_{i+1}\} = \{\dot{q}_i\} + \Delta t [(1-\delta)\{\ddot{q}_i\} + \delta\{\ddot{q}_{i+1}\}] \quad (7.34)$$

où :

$\alpha, \delta$  : paramètres d'intégration de Newmark,

$\{q_i\}, \{q_{i+1}\}$  : vecteur des déplacements généralisés à l'instant  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,

$\{\dot{q}_i\}, \{\dot{q}_{i+1}\}$  : vecteur des vitesses généralisées à l'instant  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,

$\{\ddot{q}_i\}, \{\ddot{q}_{i+1}\}$  : vecteur des accélérations généralisées à l'instant  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,

$\Delta t$  : pas de temps.

L'objectif est la détermination du vecteur des déplacements généralisés  $\{q_{i+1}\}$  en utilisant les équations d'équilibre à l'instant  $t_{i+1}$ , d'où :

$$[M]\{\ddot{q}_{i+1}\} + [M]\{\dot{q}_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} \quad (7.35)$$

pour cela réarrangeant (7.33) et (7.34) en vue de déterminer  $\{\ddot{q}_{i+1}\}$

$$\{\ddot{q}_{i+1}\} = a_0 (\{q_{i+1}\} - \{q_i\}) - a_1 \{\dot{q}_i\} - a_2 \{\ddot{q}_i\} \quad (7.36)$$

injectons (7.36) dans (7.35) on obtient  $\{q_{i+1}\}$  :

$$(a_0[M] + [K])\{q_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} + [M](a_0\{q_i\} + a_1\{\dot{q}_i\} + a_2\{\ddot{q}_i\}) \quad (7.37)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (7.38)$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (7.39)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (7.39)$$

une fois  $\{q_{i+1}\}$  calculé on peut déterminer  $\{\ddot{q}_{i+1}\}$  en utilisant l'équation (7.36).

D'après Zienkiewicz (Zienkiewicz et Taylor, 2005), la solution du système (7.35) est inconditionnellement stable si les paramètres d'intégration vérifient les conditions suivantes :

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2 \quad (7.40)$$

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad (7.41)$$

$$\frac{1}{2} + \alpha + \delta > 0 \quad (7.42)$$

# Chapitre 8 : Validation et interprétation des résultats

*L'objectif de ce chapitre est de présenter et d'interpréter les différents résultats obtenus par le programme élaboré, basé sur l'élément-p. En premier lieu, une étude de convergence est faite pour la vibration libre et l'analyse thermique, est cela en faisant varier le nombre des fonctions de forme. Les résultats obtenus dans les différentes parties de cette étude, thermique, vibration libre et vibration avec interaction fluide structure sont validés avec ceux de la littérature et avec des logiciels des éléments finis. Pour la partie thermo-élastique, de différents cas de plaques sandwich sont présentés avec et sans interaction fluide-structure.*

## 8.1. Convergence et comparaison

### 8.1.1 Etude de Convergence

Pour tester l'efficacité du programme des vibrations libres des plaques épaisses, basées sur un élément-p rectangulaire, la convergence est étudiée en augmentant le nombre de fonctions de forme  $p$ , à l'inverse de la version  $h$  de la méthode des éléments finis, où on augmente le nombre d'éléments avec un nombre de fonction de forme fixe. La convergence est faite suivant les conditions aux limites AAAA, EEEE, ELEL, ELLL, EELL et AEAE.

Où

A : Appuyée

L : Libre

E : encastré

La plaque composite est constituée de deux couche antisymétrique [45/-45].

avec

$$E1/E2=40, G_{12} = G_{13}= 0.6 E2, G_{23}=0.5 E2, \nu_{12}=0.25, a/b=1, a/h=2.$$

Le paramètre de fréquence utilisé dans cette étude est :

$$\Omega = \omega \frac{b^2}{h^2} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

avec

$\omega$  : fréquence propres de la plaque

b : largeur de la plaque

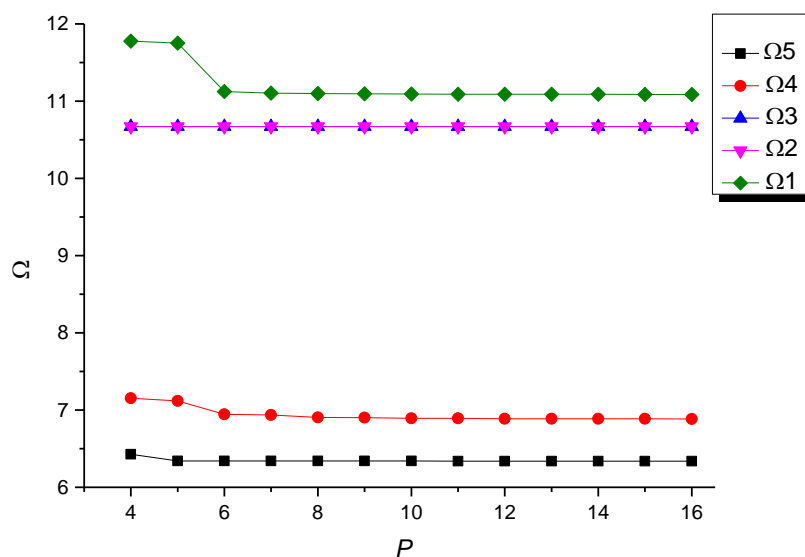
h : épaisseur de la plaque

$E_2$  : Module d'élasticité longitudinal

Les figures 8.1-8.6 présentent la variation des valeurs des cinq premiers paramètres d'une plaque carrée de deux couches en fonction des degrés du polynôme- $p$ .

Une bonne convergence et la précision de la méthode utilisée, les solutions sont obtenues en augmentant le nombre des fonctions de forme trigonométriques.

On constate que 12 fonctions de forme sont suffisantes pour assurer la convergence. Une erreur maximale de  $10^{-3}$  est obtenue, par conséquent 12 fonctions de forme dans le reste de cette étude.



**Figure 8.1** : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, AAAA.

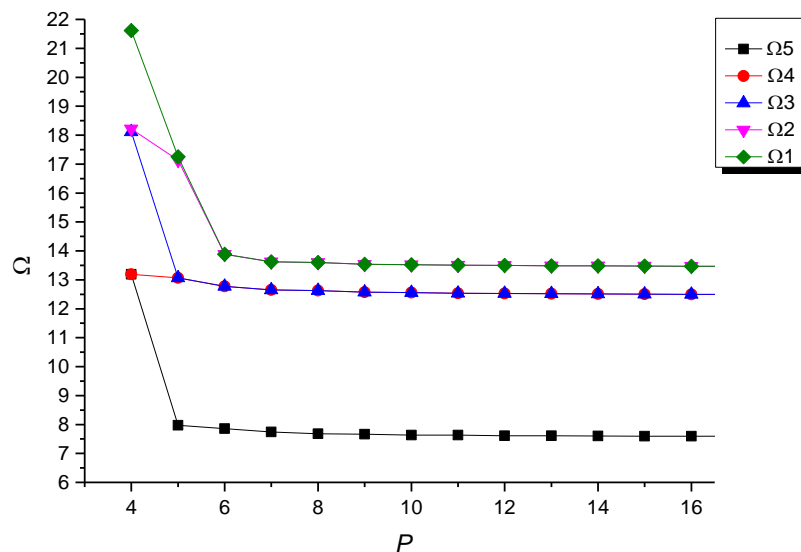


Figure 8.2 : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, EEEE.

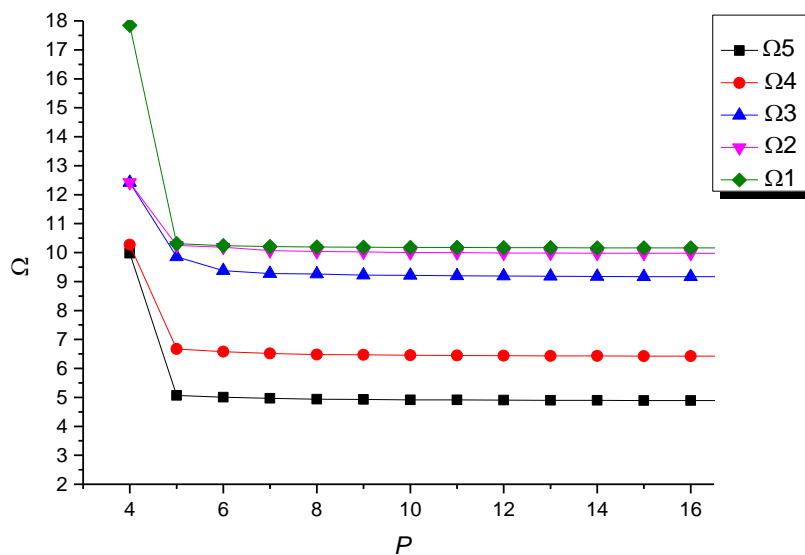


Figure 8.3 : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, ELEL.

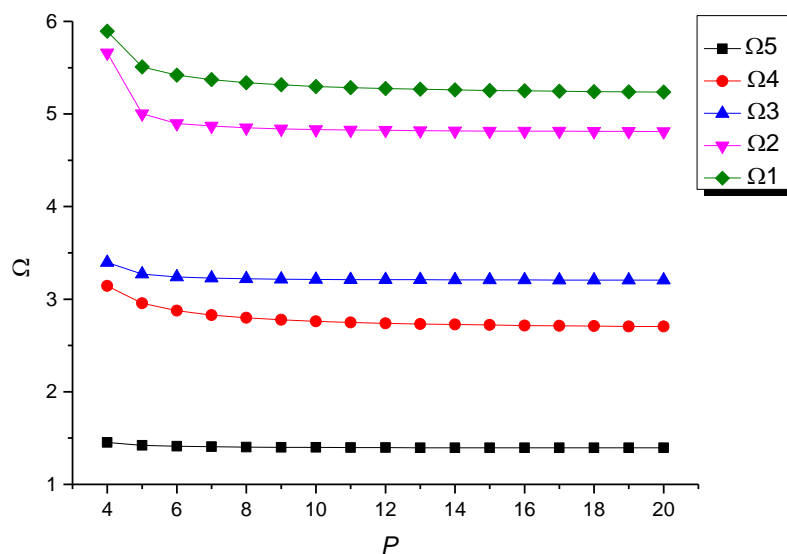


Figure 8.4 : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d’une plaque composite carrée, ELLL.

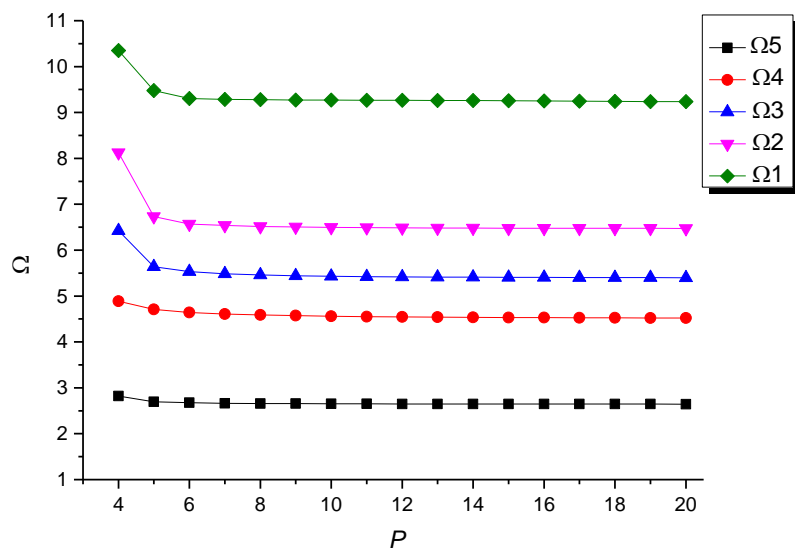
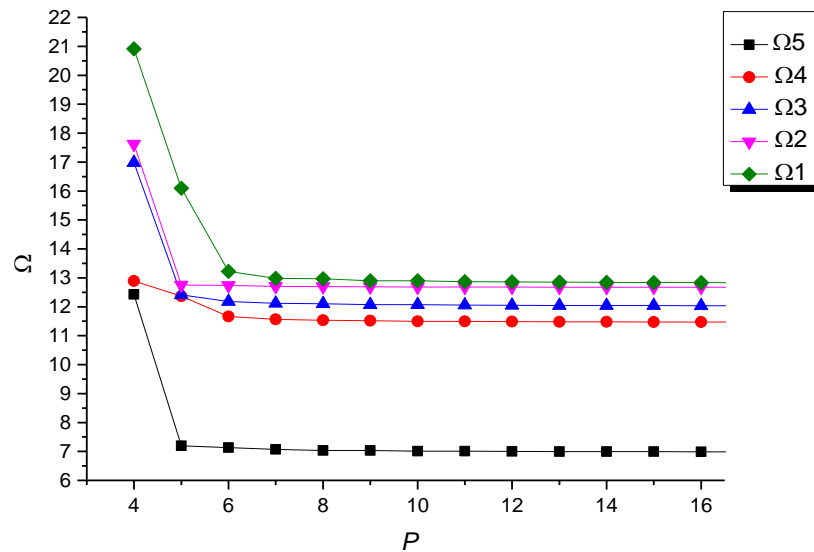


Figure 8.5 : Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d’une plaque composite carrée, EELL.



**Figure 8.6 :** Convergence des cinq premiers paramètres dans le cas d'une plaque composite carrée, AEAE.

## 8.1.2. Comparaison des résultats

### 8.1.2.1. Plaques isotropes

En appliquant la théorie de troisième ordre avec un élément- $p$  rectangulaire sur une plaque isotrope mince et épaisse, les résultats obtenus, sont comparés aux résultats de Leissa (Leissa, 1973) obtenus par une solution exacte avec la théorie CPT, de Mindlin et al (Mindlin et al, 1956) qui ont utilisé la théorie FSDT, de Nayak et al (Nayak et al, 2002), Lim et al (Lim et al, 1998) utilisant la théorie TSDT de Reddy basés respectivement sur la méthode des éléments finis  $h$  et la méthode de Ritz; aussi avec Srinivas et al (Srinivas et al, 1970) et Zhou et al (Zhou et al, 2002) qui ont utilisé un modèle 3D exact et avec la méthode de Ritz.

Le paramètre de fréquence de la plaque est exprimé par :

$$\Omega = \omega \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad (9.1)$$

Où  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité en flexion de la plaque

et

$\nu$ : Coefficient de poisson  $\nu = 0.3$

**Table 8.1** : Comparaison de paramètre de fréquence dans le cas de plaque carrée isotrope AAAA.

h/a	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
0.001	Présente étude*	2,000	5,003	5,003	8,004	10,017
	Leissa (1973)	2,000	5,000	5,000	8,000	10,000
0.1	Présente étude	1,932	4,609	4,609	7.074	8.622
	Nayak et al (2002)	1,931	4,614	4,614	7.085	8.657
	Mindlin et al (1956)	1,931	4,605	4,605	7.064	8.607
	Lim et al (1998)	1,932	4,609	4,609	7.073	8.617
	Srinivas et al (1970)	1,934	4,622	4,622	7.103	8.662
	Présente étude					
0.2	(P <sub>0</sub> =P <sub>w</sub> =12)	1,768	3.870	3.870	5.599	6.619
	Mindlin et al (1956)	1,766	3.858	3.858	5.573	-
	Srinivas et al (1970)	1,756	3.899	3.899	5.653	-
0.5	Présente étude					
	(P <sub>0</sub> =P <sub>w</sub> =6)	1,245	2.308	2.308	2.919	2.919
	Lim et al (1998)	1,245	2.308	2.308	2.917	2.917
	Srinivas et al (1970)	1,259	-	-	-	-
	Zhou et al (2002)	1,259	2.331	2.331	-	-

\* Les résultats obtenus par 19 fonctions de forme.

Les cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  sont utilisées pour les plaques carrées simplement appuyées (SSSS) avec différents rapports d'épaisseur sur le côté ( $h/b = 0.001, 0.1, 0.2, 0.5$ ). Les résultats du présent travail sont représentés dans le Tableau 8.1 et comparés avec les autres résultats publiés par. Leissa (Leissa, 1973), Nayak et al (Nayak, 2002), Mindlin et al (Mindlin et al, 1956), Lim et al (Lim et al, 1998), Srinivas et al (Srinivas et al, 1970), Zhou et al, (Zhou et al, 2002). Un très bon accord est observé. Les résultats obtenus par Nayak et al (Nayak et al, 2002) qui a utilisé la méthode des éléments finis classique avec un élément rectangulaire à neuf nœuds, où 1245 degrés de liberté (DDL) sont nécessaires par contre dans la présente étude seulement pour 340 DDL qui



sont nécessaires pour obtenir les mêmes résultats avec. Une très bonne précision qui est observée dans l'exemple illustré dans le tableau 8.1.

### 8.1.2.2. Plaques stratifiées composites

Dans les résultats obtenus dans cette partie pour les plaques, antisymétrique et sandwich, est appliquons la théorie du troisième ordre avec un élément- $p$  rectangulaire puis ils sont comparés avec d'autres résultats de la littérature. Les fréquences linéaires dans le cas de plaque simplement appuyée SS-1 et SS-2, dans le cas encastré sur les quatre côtés et dans d'autres cas de conditions aux limites combinées (CFCF), (CFFF), (CSCS). Le cas simplement appuyé, avec (SS1) pour plaque croisé et (SS2) dans les autres cas des autres orientations des fibres.

*Sur les bords à  $x=0$  et  $x=a$*

$$\text{SS-1: } u_0 = w_0 = 0 ; \partial w_0 / \partial x = \theta_x = 0; \partial w_0 / \partial y = \theta_y = 0; \partial w_0 / \partial xy = 0$$

$$\text{SS-2: } v_0 = w_0 = 0 ; \partial w_0 / \partial x = \theta_x = 0; \partial w_0 / \partial y = \theta_y = 0; \partial w_0 / \partial xy = 0$$

*Sur les bords à  $y=0$  et  $y=b$*

$$\text{SS-1: } v_0 = w_0 = 0 ; \partial w_0 / \partial x = \theta_x = 0; \partial w_0 / \partial y = \theta_y = 0; \partial w_0 / \partial xy = 0$$

$$\text{SS-2: } u_0 = w_0 = 0 ; \partial w_0 / \partial x = \theta_x = 0; \partial w_0 / \partial y = \theta_y = 0; \partial w_0 / \partial xy = 0$$

Le premier paramètre de fréquence  $\Omega = \omega b^2 / h \sqrt{\rho / E_2}$  est utilisé dans le cas de plaque carrée antisymétrique simplement appuyée, avec différents rapports d'épaisseur sur la longueur  $h/b = 2, 4, 5, 10, 12.5, 20, 25, 50, 100$ . Les résultats obtenus en utilisant la présente méthode sont représentés dans le tableau 8.2 et sont comparés avec les résultats de Swaminathan et al (Swaminathan et al, 2008), qui ont utilisé un modèle HSDT avec une solution analytique, et Reedy (Reedy, 1984) a présenté une solution exacte de son modèle TSDT. Un très bon accord entre les prédictions du présent modèle et les solutions analytiques peut être observé.

Les propriétés du matériau orthotrope utilisé sont :

$$E_1 = 40 E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, G_{23} = 0.5 E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

**Tableau 8.2:** Comparaison de paramètre de fréquence fondamental pour une plaque composite carrée a antisymétrique SSSS (SS2).

Couches	Méthode	a/h				
		2	5	12.5	20	100
[45°/-45°] <sub>1</sub>	Présente étude	6.377	10.840	13.704	14.247	14.622
	Swaminathan et al, (2008)	5.333	10.035	13.469	14.171	14.667
	Reddy (1984)	6.284	10.840	13.704	14.246	14.621
[45°/-45°] <sub>2</sub>	Présente étude	6.107	12.533	19.762	21.807	23.452
	Swaminathan et al, (2008)	5.567	11.947	19.406	21.623	23.450
	Reddy (1984)	6.1067	12.533	19.762	21.806	23.451
[45°/-45°] <sub>4</sub>	Présente étude	6.314	12.972	20.889	23.239	25.175
	Swaminathan et al, (2008)	5.923	12.752	20.778	23.183	25.174
	Reddy (1984)	6.284	12.972	20.888	23.239	25.174

Les premiers paramètres de fréquence  $\Omega = \omega (b^2/h) (\sqrt{\rho/E_2})$  sont utilisés dans le cas de plaques carrées stratifiées à plis croisés ([0/90], [0/90/90/0], [90/0/90] et [0/90/0/90]) simplement appuyées, sont donnés dans le Tableau 8.3. Les solutions pour les différentes valeurs du rapport de longueur sur l'épaisseur a/h sont comparées aux solutions exactes 3D données par Brischetto (Brischetto, 2014) et Nosier et al (Nosier et al, 1993), la théorie globale d'ordre supérieur étudiée par (G-HSDT) (Matsunaga, 2000), la théorie d'ordre supérieur local présenté par (Wu & Chen, 2008), aussi celle des plaques à couche individuelle étudiée par (Cho et al, 1994) et la théorie de couche par couche des stratifiées étudiée par (LLT) (Nosier et al, 1993). Dans le tableau 8.3, les présents résultats sont aussi comparés avec les solutions MEF, avec élément 2D du logiciel ANSYS (Brischetto & Torre, 2014), éléments  $C^0$  à quatre nœuds quadrilatère (Natarajan, 2013) et formulation unifiée de Carrera basée sur la méthode des éléments finis lissés (Natarajan, 2013) CUF (CS-FEM Q4 ). On peut remarquer que les présents résultats sont en excellent accord

avec ceux de solutions 3D et HSDT FEM. Les résultats numériques montrent que le présent procédé est approprié pour des plaques stratifiées épaisses ainsi que les plaques minces.

**Tableau 8.3:** Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque composite carrée à plis croisés AAAA.

Couches	Méthode	a/h				
		2	5	12.5	20	100
[0/90]	Présente étude	4.8669	9.0874	10.8140	11.1057	11.3019
	Matsunaga (2000)	4.9562	8.5301	10.6545	11.0373	11.2973
	Wu et al (1994)	4.9590	8.5270	10.6530	11.0370	11.300
	Nosier (1993)	4.9350	8.5180	-	11.0360	11.297
	Nosier (1993)	4.9390	8.5210	-	11.0360	11.297
	Cho et al (1994)	4.8100	8.3880	--	11.0160	11.296
[90/0/90]	Présente étude	4.4650	7.9456	10.4800	10.9986	11.3656
	Brischetto et al (2014)	-	-	-	10.9874	11.3630
	Brischetto et al (2014)	-	-	-	11.0068	11.3655
[0/90/90/0]	Présente étude	4.8669	11.0215	16.3428	17.7452	18.8424
	Matsunaga (2000)	5.3211	10.6876	16.1367	17.6369	18.8352
	Wu & Chen (1994)	5.3170	10.6820	16.1340	17.6360	18.835
	Cho et al (1991)	5.9230	10.6730		17.5350	18.835
	Natarajan (2013)	5.4029	-	-	17.7578	18.9657
	Natarajan (2013)	5.4026	-	-	17.7540	18.9611
[90/0/90/0]	Présente étude	4.5553	8.1767	10.1132	10.4520	10.6814
	Brischetto & Torre (2014)	-	-	-	10.4204	10.6772
	Brischetto & Torre (2014)	-	-	-	10.4252	10.6797

Les propriétés des matériaux utilisés dans ce cas sont les suivants :

Pour un stratifié [0/90] et [0/90/90/0]



$$E_1 = 40 E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, G_{12} = 0.5 E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25,$$

Pour un stratifié [90/0/90] et [0/90/0/90]

$$E_1 = 132.38 \text{ Gpa}, E_2 = 10.756 \text{ Gpa}, G_{12} = G_{13} = 5.6537 \text{ Gpa}, G_{23} = 3.603 \text{ Gpa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.24, \nu_{23} = 0.49, \rho = 1600 \text{ kg/m}^3$$

Dans le Tableau 8.4, les solutions d'élasticité 3D données par Noor (Noor, 1973) sont considérées comme des résultats de référence pour la comparaison.

Le paramètre de fréquence fondamentale  $\Omega = \omega (1/h) (\sqrt{\rho/E_2})$ , la plaque est composite carrée multicouches [0/90/.../0], AAAA.

Les propriétés des matériaux utilisés dans ce cas sont les suivants :

$$a/h = 5, E_1/E_2 = \text{variable}, G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, G_{12} = 0.5 E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25,$$

Le rapport  $E_1/E_2$  est pris entre 3 et 40, et le nombre de couches est variable. Très bon accord est obtenu en comparant les résultats actuels avec ceux qui sont obtenues par la théorie d'élasticité 3D (Noor, 1973). Les résultats sont obtenus en utilisant la théorie de plaque stratifiée classique CLT (Owen & Li, 1987), un modèle des éléments finis local basé sur une théorie approximative raffinée (Owen & Li, 1987), éléments finis hybride (Sun & Liou, 1987), ordre supérieur d'éléments finis C0 basée sur les théories raffinées avec trois, cinq et six degrés de liberté par nœud (Mallikarjuna & Kant 1993). Un bon accord est obtenu en comparant les résultats actuels avec ceux obtenus par les différents modèles de la méthode des éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur.

### 8.1.2.3. Plaques sandwich

L'effet du rapport du côté sur l'épaisseur ( $a/h$ ) dans le cas des vibrations libres avec une plaque carrée sandwich antisymétrique [0/90/ âme /0/90], simplement appuyée est étudié dans le tableau 8.5, où le paramètre de fréquence fondamentale est :  $\Omega = \omega(a^2/h) (\sqrt{\rho_c/E_{2c}})$  et  $a/b = 1$  et  $hc/hf = 10$ .

Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente analyse sont les suivants:

Propriétés de la peau (Graphite-Epoxy T300/934)

$$E_1 = 131 \text{ Gpa}, E_2 = 10.34 \text{ Gpa}, G_{12} = 6.895 \text{ Gpa}, G_{13} = 6.205 \text{ Gpa}, G_{23} = 6.895 \text{ Gpa},$$

$$\nu_{12} = 0.22, \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49, \rho = 1627 \text{ kg/m}^3$$

Propriétés de l'âme (isotopique)

$$E_1 = E_2 = 6.89 \times 10^{-3} \text{ Gpa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45 \times 10^{-3} \text{ Gpa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0, \rho = 97 \text{ kg/m}^3$$

**Tableau 8.4:** Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque composite carrée multicouche [0/90/.../0] appuyée AAAA.

Nombre de couches	Méthode	E1/E2				
		3	10	20	30	40
3	Présente étude	2.621	3.261	3.694	3.939	4.105
	Noor (1973)	2.647	3.284	3.834	4.109	4.301
	Nayak 2002	2.624	3.265	3.698	3.941	4.105
	Noor <sup>a</sup> (1973)	2.626	3.267	3.780	4.030	4.200
	Noor <sup>b</sup> (1973)	2.613	3.253	3.725	3.988	4.152
	Noor (1973)	2.612	3.252	3.722	3.972	4.150
	Owen (1987)	2.920	4.126	5.404	6.434	7.320
	Owen (1987)	2.6948	3.392	3.898	4.194	4.395
	Sun (1987)	2.652	3.336	3,829	4,114	4,306
5	Présente étude	2.634	3.372	3.937	4.274	4.505
	Nosier (1993)	2.659	3.409	3.979	4314	4.537
	Nayak (2002)	2.637	3.373	3.929	4.258	4.479
	Noor <sup>a</sup> (1973)	2.639	3.377	3.934	4.262	4.483
	Noor <sup>b</sup> (1973)	2.626	3.362	3.919	4.248	4.470
	Noor (1973)	2.626	3.362	3.919	4.246	4.463
	Owen (1987)	2.920	4.126	5.404	6.434	7.320
	Owen (1987)	2.699	3.453	4.030	4.370	4.599
	Sun (1987)	2.661	3.410	3.980	4.315	4.538
9	Présente étude	2.638	3.413	4.024	4.648	4.648
	Noor (1973)	2.664	3.443	4.055	4.421	4.668
	Nayak (2002)	2.637	3.373	3.929	4.258	4.479
	Noor <sup>a</sup> (1973)	2.643	3.418	4.026	4.390	4.637
	Noor <sup>b</sup> (1973)	2.630	3.404	4.011	4.376	4.622
	FSDT [39]	2.630	3.404	4.011	4.376	4.623
	Owen (1987)	2.920	4.126	5.404	6.434	7.320
	Owen (1987)	2.697	3.471	4.074	4.436	4.680

a: HSDT, Modèle avec 5 DDL, b: HSDT, Modèle avec 6 DDL

Les résultats obtenus pour les paramètres de fréquence fondamentale en fonction du rapport de longueur sur l'épaisseur ( $a/h$ ), sont représentés sur le Tableau 8.5. Les résultats montrent clairement que les valeurs de fréquences obtenues par la présente étude sont en bon accord avec ceux de Reddy (Readdy, 1984a), Senthilnathan et al. (Senthilnathan et al, 1987) et ceux de Kant et Swaminathan (Kant & Swaminathan, 2001) dans lesquels les déplacements sont développés comme des fonctions cubiques des coordonnées de l'épaisseur. Il est clair que les valeurs données par FSDT (Whitney & Pagano, 1970) sont plus élevées que celles prédites par les modèles HSDT.

Dans l'exemple suivant, une plaque sandwich composée d'une peau de fibres en plastique renforcé (FRP) et l'âme en mousse à base de chlorure de polyvinyle (PVC). Les paramètres de fréquence fondamentale sont comparés avec la solution analytique de Meunier et Shenoï (Meunier & Shenoï, 1999) et avec la solution des éléments finis de Nayak et al (Nayak et al et al, 2002) dans le cas de deux plaques sandwich carrées simplement appuyée AAAA constituées de cinq couches, à savoir [0/90/0/ âme /0/90/0] et [45/-45/45/ âme /-45/45/-45]. où le paramètre de fréquence fondamentale est :  $\Omega = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_{2c}}$  et  $a/b = 1$  et  $hc/hf = 14.66$ . Les propriétés des matériaux utilisés dans cet exemple sont les suivants:

Propriétés de la peau composée de fibres de verre et de matrice de résine de polyester :

$$E_1 = 24.51 \text{Gpa}, E_2 = 7.77 \text{Gpa}, G_{12} = 3.34 \text{Gpa}, G_{13} = 3.34 \text{Gpa}, G_{23} = 1.34 \text{Gpa}, \\ \nu_{12} = 0.078, \nu_{21} = 0.24, \rho = 1800 \text{kg/m}^3$$

Propriétés de l'âme en HEREX C70.130 :

$$E_c = 103.63 \text{Mpa}, G_c = 50 \text{Mpa}, \nu_{12} = 0.32, \rho_c = 130 \text{kg/m}^3$$

Dans le Tableau 8.6, il est clair que les résultats de la présente formulation sont assez proches des résultats d'analyse comparés aux résultats donnés par (Nayak et al, 2002) dans lesquels deux éléments  $C^0$  avec l'approche de contrainte supposée (éléments de contrainte rectangulaire à 4 nœuds et 9 nœuds) sont utilisés.

Dans le tableau 8.7, l'effet des rapports  $a/h$  et  $a/b$  sur les paramètres de fréquence  $\Omega$  de plaque sandwich symétrique [0/90/0/âme/0/90/0] et [45/-45/45/âme/45/-45/45] est pris en considération. Un bon accord est obtenu en comparant les résultats actuels avec ceux obtenus par l'approche de contrainte supposée par la méthodes des éléments finis (Nayak et al, 2002). Les matériaux mentionnés dans l'exemple précédent sont utilisés de nouveau.

**Tableau 8.5:** Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque sandwich carrée et antisymétrique [0/90/ âme /0/90], AAAA.

a/h	Présente étude	Readdy (1984a)	Senthilnalhan et al (1987)	Kant et al (2001a)	Kant et al (2001b)	Whitney et Pagano (1970)
2	1.6260	1.6252	1.6252	1.1941	1.1734	5.2017
4	3.1039	3.1013	3.1013	2.1036	2.0913	9.0312
10	7.0529	7.0473	7.0473	4.8594	4.8519	13.8694
20	11.2725	11.2664	11.2664	8.5955	8.5838	15.5295
30	13.3723	13.6640	13.6640	11.0981	11.0788	15.9155
40	14.4440	14.4390	14.4390	12.6821	12.6555	16.0577
50	15.0366	15.0323	15.0323	13.6899	13.6577	16.1264
60	15.3911	15.3868	15.3868	14.3497	14.3133	16.1612
70	15.6174	15.6134	15.6134	14.7977	14.7583	16.1845
80	15.7699	15.7660	15.7660	15.1119	15.0702	16.1991
90	15.8770	15.8724	15.8724	15.3380	15.2946	16.2077
100	15.9551	15.9522	15.9522	15.5093	15.4647	16.2175

a: Modèle avec 12 DDL, b: Modèle avec 9 DDL

**Tableau 8.6:** Comparaison des paramètres de fréquence  $\Omega$  pour une plaque sandwich carrée et symétrique, simplement appuyée AAAA.

Mode	[0/90/0/ âme /0/90/0]				[45/ -45/45/ âme /-45/45/- 45]			
	Présente étude	Meunier et Shenoï (1999)	Nayak et al, (2002a)	Nayak et al, (2002b)	Présente étude	Meunier et Shenoï (1999)	Nayak et al, (2002a)	Nayak et al, (2002b)
1	15.29	15.28	15.34	15.04	16.44	16.38	16.43	16.09
2	28.89	28.69	30.18	28.10	29.84	29.65	31.17	28.93
3	30.14	30.01	31.96	29.20	29.84	29.65	31.17	28.93
4	39.14	38.86	40.94	37.76	40.34	40.00	42.78	38.76

[a]: élément avec 4 nœuds, [b]: élément avec 9 nœuds

Dans le Tableau 8.8, l'effet des conditions aux limites et le nombre de couches d'une plaque carrée sandwich avec [0/90/ âme /0/90] et [0/90/0/ âme /0/90/0] sur le paramètre de fréquence  $\Omega = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_{2c}}$  est aussi pris en considération, le rapport de l'épaisseur

du corps sur l'épaisseur de la peau est  $hc/hf = 14.66$ . Les résultats des cinq premières fréquences sont comparés avec les résultats publiés de Nayak et al (Nayak et al, 2002).

**Tableau 8.7:** Effet du rapport  $a/b$ , longueur sur l'épaisseur  $a/h$ , sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich rectangulaire AAAA,  $hc/hf = 14.66$ .

a/h	Modes	[0/90/0/ âme /0/90/0]				[45/ -45/45/ âme /45/-45/ 45]				
		a/b				a/b				
		0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0	
5	Présente étude	1	07.50	09.71	12.83	16.31	7.42	10.01	13.15	16.64
		2	09.72	16.31	18.80	20.41	10.01	16.60	18.87	21.60
		3	10.21	16.81	20.41	21.35	13.14	16.65	24.16	28.01
	Nayak et al, 2002	1	07.29	09.42	12.36	15.55	7.23	9.68	12.62	15.80
		2	09.43	15.56	17.74	19.95	9.69	15.72	17.79	20.11
		3	10.20	15.96	20.41	20.41	12.68	15.91	22.34	25.52
10	Présente étude	1	11.38	15.29	21.48	28.69	11.23	16.44	22.73	29.70
		2	15.29	28.69	33.79	38.86	16.43	29.58	34.46	40.02
		3	20.41	30.01	40.83	40.83	22.71	29.76	44.70	52.58
	Nayak et al, 2002	1	11.20	15.04	21.08	28.07	11.08	16.14	22.24	28.95
		2	15.05	28.10	32.86	37.73	16.14	28.71	33.50	38.76
		3	20.41	29.20	40.82	40.82	22.33	29.23	43.29	50.72
20	Présente étude	1	13.94	19.36	29.22	42.11	13.71	21.79	32.41	44.92
		2	19.36	42.11	51.86	61.15	21.77	44.30	54.51	65.70
		3	29.22	45.52	72.21	81.65	32.36	45.46	73.65	90.84
	Nayak et al, 2002	1	13.85	19.23	28.97	41.65	13.64	21.62		44.33
		2	19.24	41.70	51.12	60.24	21.61	43.63	53.71	64.59
		3	29.16	44.88	71.17	81.65	32.19	45.09	72.49	89.33
30	Présente étude	1	14.65	20.56	31.87	47.59	14.39	23.52	36.11	51.64
		2	20.56	47.60	60.16	71.98	23.49	50.64	64.34	79.57
		3	31.88	52.45	87.49	111.1	36.03	52.58	89.67	114.9
	Nayak et al, 2002	1	14.60	20.49	31.73	47.29	14.36	23.43	35.90	51.24
		2	20.50	47.36	59.66	71.32	23.41	50.21	63.78	78.73
		3	31.95	52.03	86.73	110.1	36.02	52.35	88.82	113.8
40	Présente étude	1	14.93	21.04	33.00	50.11	14.66	24.24	37.75	54.85
		2	21.04	50.12	64.22	77.44	24.21	53.62	69.33	87.06
		3	33.01	55.78	95.78	124.1	37.66	56.03	98.5	129.4
	Nayak et al, 2002	1	14.90	20.99	32.90	49.91	14.63	24.18	37.61	54.58
		2	21.01	49.99	63.90	77.00	24.17	53.36	68.96	86.46
		3	33.14	55.53	95.26	123.6	37.74	55.90	97.91	128.7
50	Présente étude	1	15.06	21.27	33.56	51.43	14.79	24.6	38.59	56.57
		2	21.27	51.44	66.41	80.45	24.56	55.2	72.09	91.35
		3	33.57	57.57	100.5	132.0	38.49	57.88	103.6	138.4
	Nayak et al, 2002	1	15.04	21.24	33.50	51.29	14.77	24.55	38.50	56.38
		2	21.26	51.37	66.21	80.15	24.54	55.04	71.84	90.93
		3	33.75	57.42	100.1	131.9	38.63	57.82	103.2	138.1



Pour de différentes conditions aux limites, les solutions actuelles fournies par l'élément- $p$  coïncident avec les résultats donnés par (Nayak et al, 2002).

**Tableau 8.8:** Effet du nombre de couches et des conditions aux limites sur le paramètre de fréquence  $\Omega$  pour une plaque sandwich carrée avec  $\frac{a}{h} = 10$ .

Nombre de couches	Méthode	Modes	Conditions aux limites				
			CFFF	CFCF	SSSS	CSCS	CCCC
[0/90/âme/90/0]	Présente étude	1	03.94	14.07	15.30	17.78	20.13
		2	06.59	15.63	29.39	30.39	32.74
		3	15.63	26.59	29.39	31.75	32.74
		4	16.20	29.03	38.88	40.60	42.29
		5	20.02	31.18	40.83	40.83	48.23
	Nayak et al, 2002	1	03.85	13.83	15.03	17.56	19.98
		2	06.51	15.45	28.43	29.85	32.53
		3	15.62	26.40	28.78	31.50	32.88
		4	15.89	28.85	37.66	39.94	42.14
		5	19.72	30.98	40.82	40.82	48.72
[0/90/0/âme/0/90/0]	Présente étude	1	03.65	13.55	15.29	17.84	20.11
		2	06.47	15.24	28.69	29.76	32.13
		3	15.07	27.17	30.01	32.39	33.32
		4	15.44	28.1	38.86	40.64	42.29
		5	19.55	30.42	40.83	40.83	47.19
	Nayak et al, 2002	1	03.63	13.52	15.04	17.54	20.01
		2	06.43	15.21	28.10	30.23	32.23
		3	15.07	26.83	29.20	31.14	33.34
		4	15.39	28.32	37.76	39.96	42.27
		5	19.43	30.55	40.82	40.82	48.16

#### 8.1.2.4. Validation des résultats dans le cas de plaques immergées

Dans cette partie les résultats obtenus par la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature, dans le tableau 8.9. Une comparaison est faite avec ceux de Kerboua et al (Kerboua et al, 2008) qui ont utilisé la méthode des éléments finis et une approche expérimentale présentée par Haddara et Cao (Haddara & Cao, 1996). La plaque utilisée dans cet exemple, est isotrope, totalement submergée dans le fluide (figure 4.3 (CL2)), d'une longueur  $a=0.20165$  m, une largeur  $b=0.655$  m et d'épaisseur  $h=9.63 \cdot 10^{-3}$  m. Pour les conditions aux limites fluide-structure  $h1=h2=0.4 \cdot (h/2)$ , la plaque est en acier où  $E_1= 207$  Gpa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, la masse volumique du fluide est  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

**Tableau 8.9:** Comparaison des cinq premières fréquences (Hz) d'une plaque appuyée sur deux cotées et libre sur les deux autres ALAL, submergée dans l'eau.

Mode	Présente étude	Haddara et Cao	Kerboua et al 2008
		1996	
1	32.410	28.720	31.280
2	130.70	117.13	126.40
3	145.51	154.51	141.78
4	295.95	281.79	285.98
5	312.61	335.04	304.57

**Tableau 8.10:** Comparaison des trois premières fréquences (rd/s) ELLL submergée dans l'eau, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).

$h_1/a$	Méthode	Mode		
		1	2	3
A l'air libre	Présente étude	12.82	31.31	78.39
	Kerboua et al (2008)	12.93	31.69	79.37
	Fu et Price (1987)	12.94	31.69	79.37
0.05	Présent	8.20	20.05	50.20
	Kerboua et al (2008)	8.60	21.09	52.92
	Fu et Price (1987)	8.95	23.1	55.7
0.1	Présente étude	7.82	19.11	47.86
	Kerboua et al (2008)	8.17	20.05	50.32
	Fu et Price (1987)	8.04	21.54	53.23
0.3	Présente étude	7.11	17.37	43.50
	Kerboua et al (2008)	7.41	18.16	45.59
	Fu et Price (1987)	7.51	20.34	50.83
	Lindholm et al (1965)	6.97	17.02	42.63

Dans le tableau 8.10, une comparaison est faite entre les résultats obtenus par le présent travail et ceux de Kerboua et al (Kerboua et al 2008) et Fu et Price (Fu et Price 1987) qui ont utilisé la méthode des éléments finis et une étude expérimentale présentée par Lindholm et al (Lindholm et al 1965), la plaque est carrée,  $a=10\text{ m}$ , une largeur  $b=10\text{ m}$  et d'épaisseur  $h=0.238\text{ m}$ , la plaque est en acier où  $E_I=206\text{ Gpa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7830\text{ kg/m}^3$ , la masse volumique du fluide est  $\rho_f=1000\text{ kg/m}^3$ .

.Un très bon accord des résultats obtenus par la présente étude et les résultats des références sont mentionnées dans les tableaux 8.09 et 8.10.

**Tableau 8.11:** Comparaison des fréquences (Hz) fondamentales d'une plaque composite, LLLE en graphite/epoxy avec huit plis.

Fréquence fondamentale (Hz)	Méthode		
	Présente étude	Pal et al 2001	Jalali 2012
Plaque avec surface libre (CL1)	8.38	8.13	8.35
Plaque totalement submergée (CL2)	6.02	5.94	6.01

Pour le dernier exemple de validation d'interaction fluide – structure, une plaque rectangulaire stratifiée composite ( $a=0.152m$ ,  $b=0.076m$ ) et  $a/h = 0.00104 m$  à huit couches  $[45/-45/-45/45]_{sym}$  est considérée. Le tableau 8.11 représente les premières fréquences naturelles pour deux situations : une plaque en porte à faux sur la surface libre du fluide et une plaque en porte à faux totalement immergée dans le liquide. Il convient de mentionner que la plaque est encadrée sur le côté le plus court, elle est constituée de graphite-époxy,

avec

$$E_1 = 128 \text{ Gpa}, E_2 = 11 \text{ Gpa}, G_{12} = 4.48 \text{ Gpa}, \nu_{12} = 0.078, \rho = 1500 \text{ kg/m}^3, \\ \rho_f = 1500 \text{ kg/m}^3.$$

On remarque clairement la concordance entre les résultats de l'actuelle étude et ceux de Jalali (Jalali, 2012) Pal et al (Pal et al, 2001), à noter que dans ces deux références, ils ont utilisé la méthode des éléments finis combinés aux théories CPT et FSDT respectivement.

## 8.2. Etude paramétrique

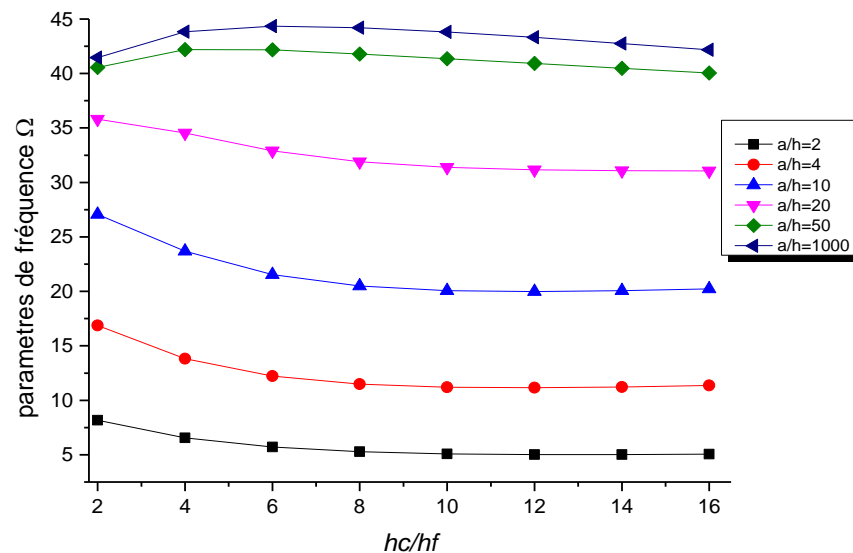
Dans cette section on étudie le comportement dynamique de plaques composites stratifiées et sandwich à l'air libre et immergées dans un fluide, avec différents paramètres.

### 8.2.1. Plaque sandwich

La variation des paramètres de fréquence fondamentale  $\Omega = \omega (1/h) \sqrt{\rho_c/Ec_2}$  par rapport aux différents paramètres, à savoir le rapport de longueur sur l'épaisseur ( $a/h$ ) et l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur de la peau ( $h_c/h_f$ ) d'une plaque carrée totalement encadrée EEEE, AAAA et AEAE sandwich avec une orientation des fibres symétrique croisées  $[0/90/0/âme/0/90/0]$  et une plaque stratifiée antisymétrique  $[45/-45/45/âme/-$

45/45/-45] et symétrique [90/-60/30/âme/30/-60/90]. Les figures 8.7-15 montrent les effets de la variation de l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur de la peau ( $hc/hf$ ) avec les différents rapports de longueur sur l'épaisseur ( $a/h$ ) et sur les paramètres de fréquence fondamentale. Les matériaux mentionnés dans les deux exemples précédents sont utilisés de nouveau.

Comme c'est représenté sur les figures, le paramètre de fréquence fondamentale pour les plaques d'épaisseur ( $a/h=2, 5, 10$  et  $20$ ) diminue d'abord et augmente par la suite. Cela est dû au fait que pour les plaques épaisses, que si le rapport ( $hc/hf$ ) de la plaque augmente, la plaque devient plus raide qui conduit à un abaissement de la valeur de fréquence, en même temps la plaque devient également plus légère ce qui provoque l'augmentation de la valeur de la fréquence. Il y a un compromis entre la rigidité des plaques et des effets de masse sur les fréquences naturelles pour ce cas. Cependant, pour les plaques minces ( $a/h=50, 1000$ ), le paramètre de fréquence augmente et diminue avec l'augmentation du rapport de l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur de la peau, car l'augmentation du rapport a pour effet de diminuer la masse et comme la plaque est mince elle devient plus rigide.



**Figure 8.7 :** Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/hf$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [0/90/0/âme/0/90/0] EEEE.

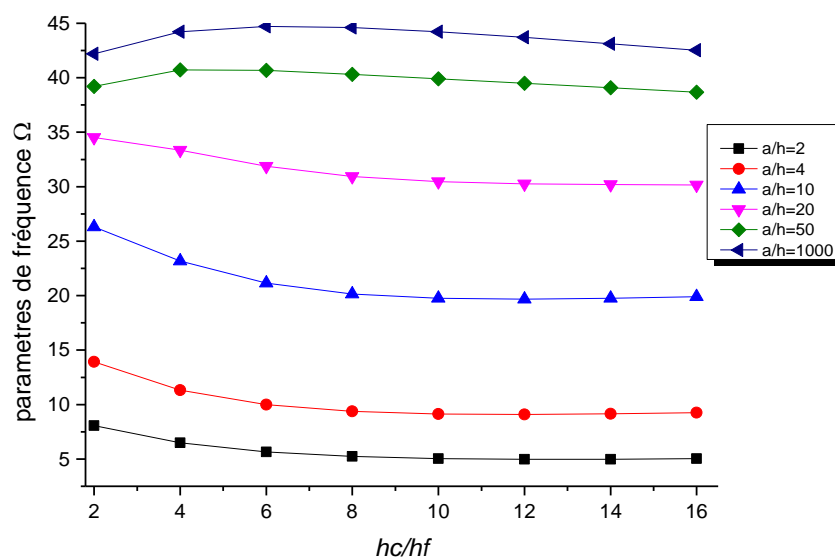


Figure 8.8 : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/hf$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [45/-45/45/âme/-45/45/-45], EEEE.

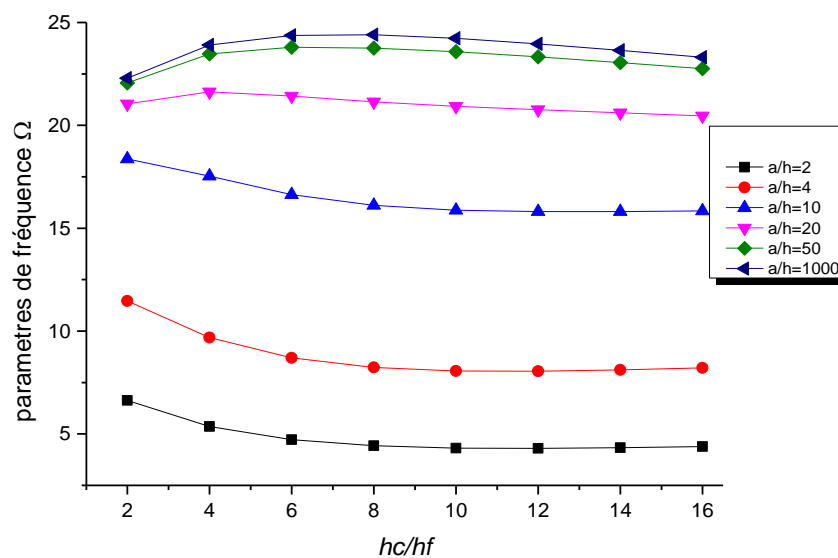
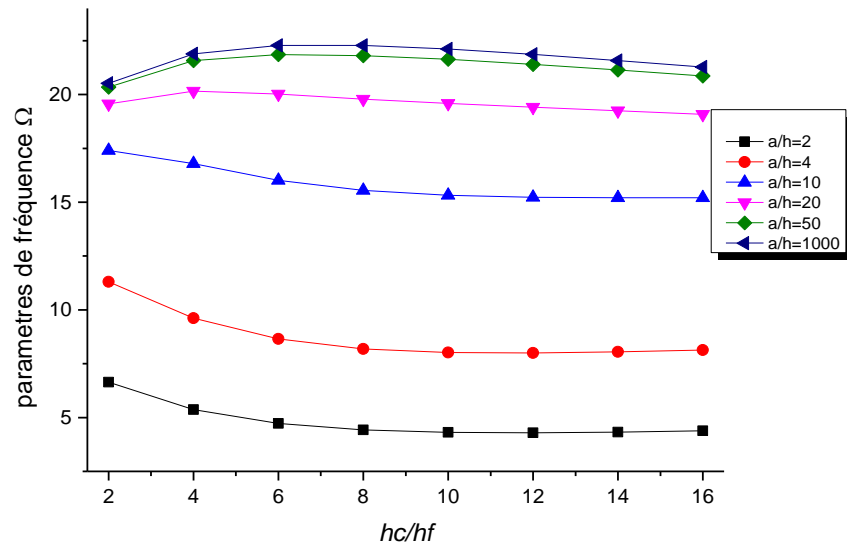
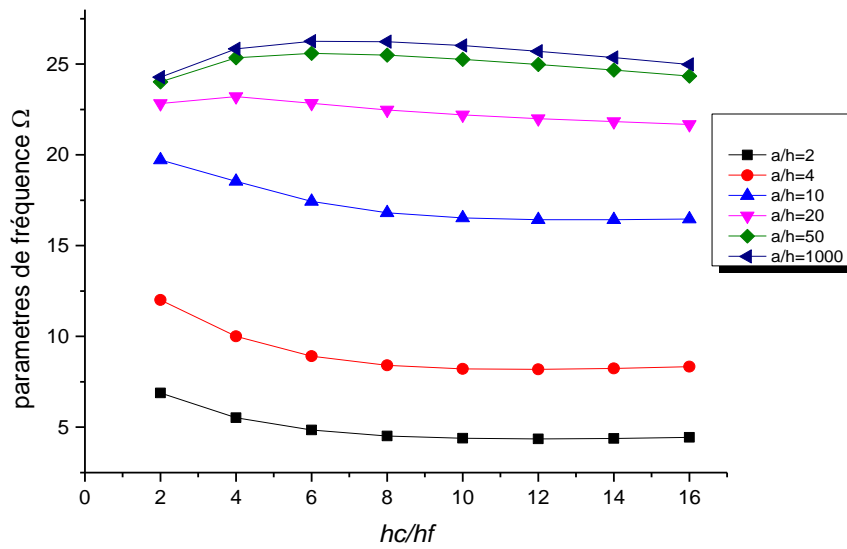


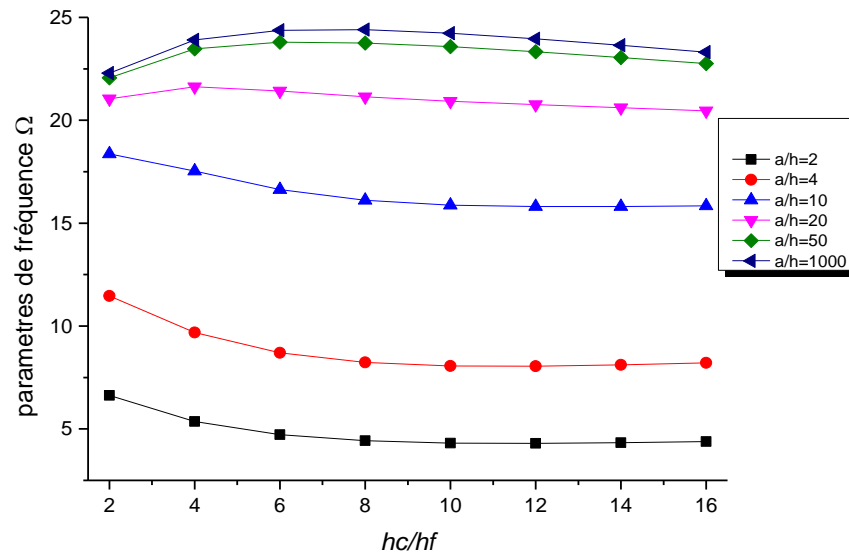
Figure 8.9 : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/hf$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [90/-60/30/âme/30/-60/90], EEEE.



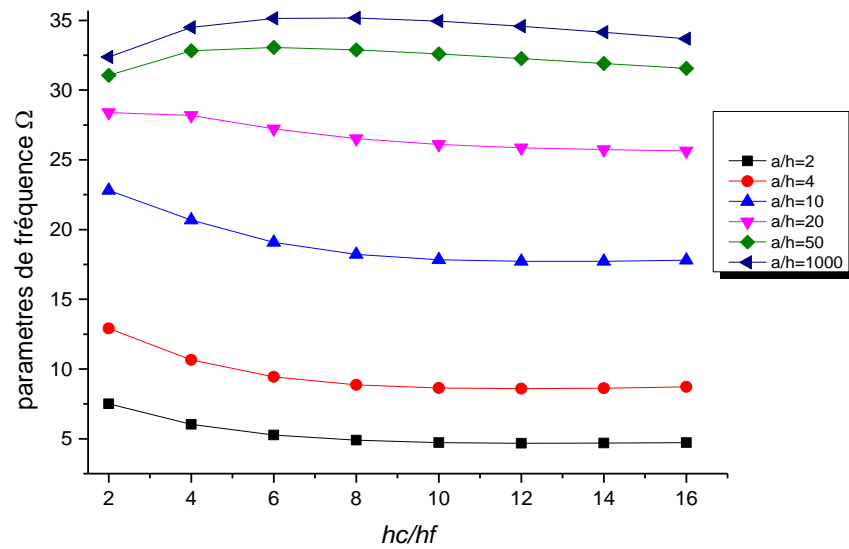
**Figure 8.10** : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich  $[0/90/0/\hat{a}me/0/90/0]$ , AAAA.



**Figure 8.11** : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich  $[45/-45/45/\hat{a}me/-45/45/-45]$ , AAAA.



**Figure 8.12** : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich  $[90/-60/30/\text{âme}/30/-60/90]$ , AAAA.



**Figure 8.13** : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/h_f$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich  $[0/90/0/\text{âme}/0/90/0]$ , AEAE.

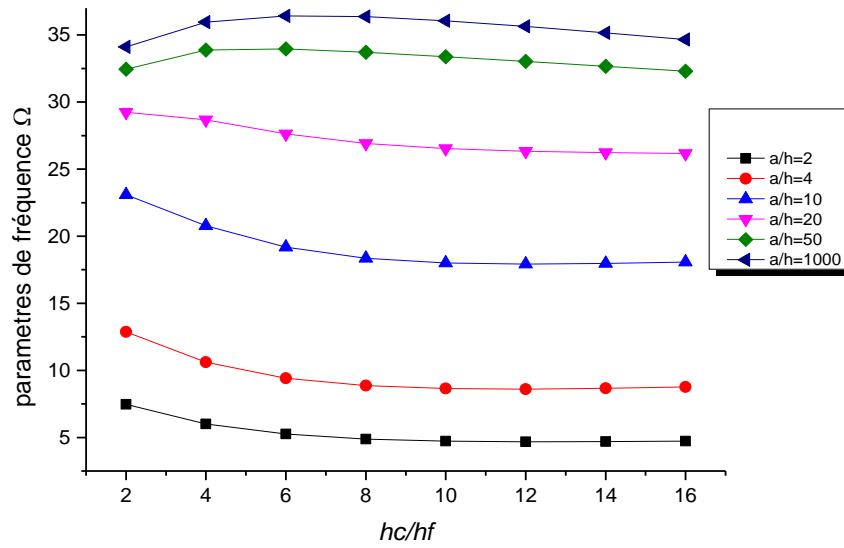


Figure 8.14 : Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/hf$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [45/-45/45/âme/-45/45/-45], AEAE.

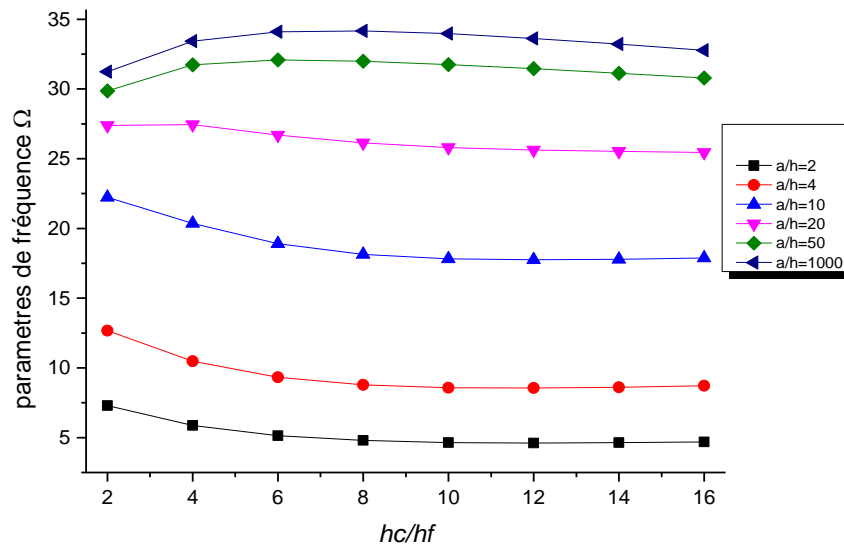


Figure 8.15: Effet du rapport d'épaisseur ( $hc/hf$ ) sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich [90/-60/30/âme/30/-60/90], AEAE.

Les exemples suivants ont pour préoccupations l'étude de l'influence du rapport du module de Young de la peau sur celui l'âme ( $Ec/EI_f$ ) et le rapport de la longueur sur l'épaisseur ( $a/h$ ) sur les cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega = \omega(a/h)\sqrt{\rho_c/E_{2c}}$  pour une plaque sandwich carrée de sept couches symétriques (90/-60/30/âme/90/-60/30)



et antisymétriques [-90/60/-30/ âme /90/-60/30], avec  $hc/hf = 16$ . Les propriétés du matériau de la peau est composée de fibres de verre et de matrice de résine de polyester et celui de l'âme en mousse et de la gamme de Herex C70, qui sont donnés par Nayak et al (Nayak et al, 2002), (tableau 8.12);

**Tableau 8.12:** Propriétés mécanique de la plaque sandwich.

	Graphite- Epoxy T300/934	HEREX C70.40	HEREX C70.55	HEREX C70.75	HEREX C70.90	HEREX C70.130
$E1 (Mpa)$	$24.51 \cdot 10^6$	$22.69 \cdot 10^{-3}$	$37.81 \cdot 10^{-3}$	$56.95 \cdot 10^{-3}$	$73.11 \cdot 10^{-3}$	$103.63 \cdot 10^{-3}$
$E2(Mpa)$	$7.77 \cdot 10^6$	$22.69 \cdot 10^{-3}$	$37.81 \cdot 10^{-3}$	$56.95 \cdot 10^{-3}$	$73.11 \cdot 10^{-3}$	$103.63 \cdot 10^{-3}$
$G12(Mpa)$	$3.34 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^{-3}$	$22 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$38 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
$G23(Mpa)$	$1.34 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^{-3}$	$22 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$38 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
$G13(Mpa)$	$3.34 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^{-3}$	$22 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$38 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
$\nu12$	0.078	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32
$\rho (kg/m3)$	1800	40	55	75	90	130

Les tableaux 8.13-17 montrent les résultats pour cinq conditions aux limites différentes (EEEE, EELL, LLLL, AAAA, AEAE). Ces paramètres de fréquences exploitées devraient être utiles en tant que solutions de référence pour les chercheurs qui développent des techniques et des logiciels numériques pour résoudre les problèmes de vibration de plaque sandwich TSDT.

**Tableau 8.13:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_c/E1f$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich EEEE.

a/h	Modes	[90/-60/30/âme /90/-60/30]					[-90/60/-30/âme /90/-60/30]				
		$(E_c/E1f) \times 10^{-4}$									
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
2.5	1	5.295	5.408	5.560	5.738	6.089	5.295	5.408	5.559	5.738	6.089
	2	8.544	8.686	8.909	9.178	9.726	8.561	8.697	8.917	9.185	9.731
	3	8.714	8.853	9.081	9.357	9.922	8.695	8.841	9.073	9.350	9.916
	4	11.24	11.38	11.64	11.98	12.68	11.24	11.38	11.65	11.98	12.68
	5	12.74	12.86	13.14	13.50	14.27	12.74	12.86	13.14	13.50	14.27
5	1	9.863	10.09	10.37	10.68	11.29	9.865	10.10	10.37	10.68	11.29
	2	15.61	16.00	16.43	16.94	17.91	15.70	16.04	16.46	16.96	17.92
	3	15.88	16.25	16.71	17.25	18.28	15.80	16.21	16.69	17.23	18.26
	4	20.15	20.64	21.24	21.93	23.25	20.17	20.66	21.25	21.93	23.25
	5	22.78	23.23	23.83	24.55	25.96	22.78	23.23	23.83	24.54	25.96

**Tableau 8.14:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_c/EI_f$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich LLLL.

a/h	Modes	[90/-60/30/âme /90/-60/30]					[-90/60/-30/âme /90/-60/30]				
		$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$					$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$				
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
2.5	1	4.527	4.631	4.746	4.877	5.131	4.537	4.637	4.749	4.879	5.133
	2	5.262	5.522	5.821	6.119	6.723	5.275	5.529	5.826	6.123	6.726
	3	5.926	6.224	6.542	6.861	7.407	6.013	6.292	6.602	6.917	7.405
	4	6.193	6.419	6.697	6.992	7.479	6.116	6.356	6.641	6.939	7.535
	5	6.596	6.711	6.862	7.043	7.588	6.592	6.71	6.862	7.042	7.535
5	1	8.298	8.306	8.340	8.412	8.631	8.314	8.315	8.348	8.420	8.642
	2	12.07	12.08	12.15	12.27	12.62	12.09	12.08	12.13	12.24	12.58
	3	12.53	12.75	12.99	13.27	13.83	12.52	12.74	12.97	13.25	13.81
	4	13.85	14.13	14.42	14.74	15.41	14.02	14.21	14.46	14.76	15.41
	5	14.36	14.59	14.90	15.27	16.02	14.22	14.53	14.86	15.25	16.00

**Tableau 8.15:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_c/EI_f$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich EELL.

a/h	Modes	[90/-60/30/âme /90/-60/30]					[-90/60/-30/âme /90/-60/30]				
		$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$					$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$				
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
2.5	1	2.407	2.447	2.500	2.564	2.693	2.380	2.427	2.483	2.549	2.680
	2	5.359	5.437	5.542	5.669	5.942	5.391	5.462	5.566	5.696	5.972
	3	5.562	5.664	5.802	5.967	6.297	5.502	5.618	5.762	5.929	6.258
	4	7.581	7.741	7.952	8.202	8.692	7.576	7.737	7.948	8.198	8.688
	5	9.201	9.329	9.533	9.490	9.122	9.191	9.325	9.531	9.673	9.337
5	1	4.344	4.331	4.342	4.378	4.493	4.307	4.304	4.320	4.358	4.475
	2	9.646	9.672	9.757	9.900	10.26	9.707	9.728	9.814	9.96	10.33
	3	10.19	10.30	10.47	10.68	11.16	10.08	10.21	10.38	10.60	11.07
	4	14.09	14.39	14.74	15.14	15.94	14.09	14.38	14.73	15.14	15.93
	5	16.96	17.23	17.59	18.04	18.24	16.95	17.23	17.59	18.04	18.69

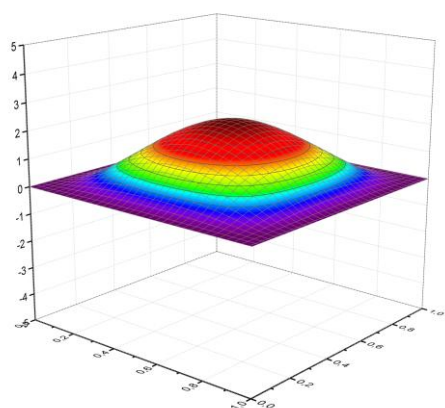
**Tableau 8.16:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_f/E_c$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich AAAA.

a/h	Modes	[90/-60/30/âme /90/-60/30]					[-90/60/-30/âme /90/-60/30]				
		$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$									
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
2.5	1	4.643	4.771	4.914	5.079	5.388	4.644	4.771	4.915	5.079	5.388
	2	7.574	7.766	7.997	8.265	8.778	7.607	7.785	8.010	8.275	8.785
	3	7.683	7.87	8.106	8.382	8.910	7.650	7.85	8.093	8.372	8.903
	4	9.921	10.13	10.41	10.75	11.41	9.924	10.13	10.41	10.75	11.41
	5	11.25	11.45	11.75	12.11	12.46	11.25	11.44	11.74	12.11	12.47
5	1	8.854	9.026	9.216	9.442	9.888	8.858	9.028	9.218	9.443	9.888
	2	14.37	14.77	15.18	15.65	16.53	14.48	14.82	15.21	15.67	16.54
	3	14.61	14.99	15.42	15.93	16.87	14.52	14.94	15.40	15.91	16.86
	4	18.55	19.07	19.65	20.31	21.54	18.57	19.08	19.66	20.31	21.55
	5	20.96	21.47	22.08	22.79	24.15	20.95	21.46	22.07	22.79	24.15

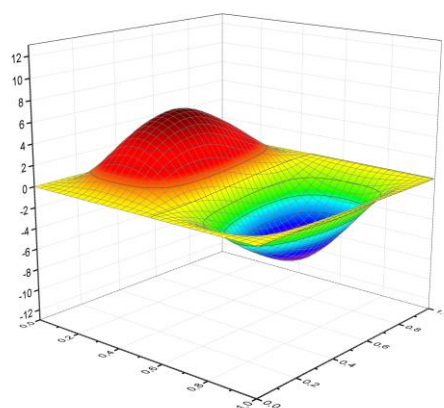
**Tableau 8.17:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_f/E_c$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich AEAE.

a/h	Modes	[90/-60/30/âme /90/-60/30]					[-90/60/-30/âme /90/-60/30]				
		$(E_c/EI_f) \times 10^{-4}$									
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
2.5	1	4.961	5.081	5.229	5.4	5.728	4.96	5.081	5.229	5.399	05.72
	2	7.864	8.054	8.294	8.573	9.111	7.869	8.058	8.298	8.576	09.11
	3	8.350	8.495	8.716	8.983	9.522	8.342	8.489	8.712	8.98	9.519
	4	10.55	10.73	11.01	11.35	12.03	10.56	10.73	11.01	11.35	12.03
	5	11.63	11.82	12.14	12.51	12.48	11.62	11.82	12.13	12.51	12.53
5	1	9.354	9.553	9.78	10.04	10.56	9.356	9.554	9.781	10.04	17.17
	2	14.77	15.21	15.66	16.19	17.16	14.80	15.22	15.68	16.20	17.62
	3	15.45	15.78	16.20	16.68	17.63	15.43	15.77	16.18	16.67	22.39
	4	19.34	19.85	20.43	21.11	22.38	19.36	19.86	20.44	21.11	24.82
	5	21.26	21.87	22.57	23.35	24.83	21.24	21.86	22.56	23.35	10.56

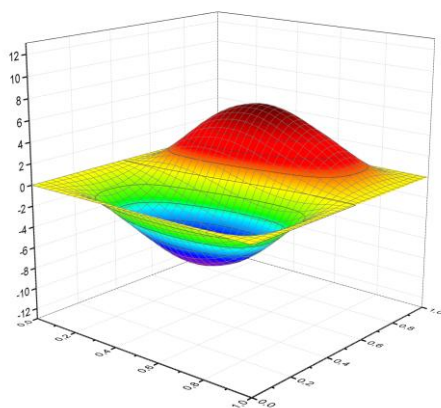
Les figures 8.16-20 montrent les cinq premiers modes d'une plaque sandwich [90/-60/30/âme/90/-60/30] dans le cas symétrique avec un rapport  $(E_c/EI_f=42.28 \cdot 10^{-4})$  et  $a/h=2.5$ , les propriétés physiques de la plaque sandwich sont présentées dans l'exemple précédent.



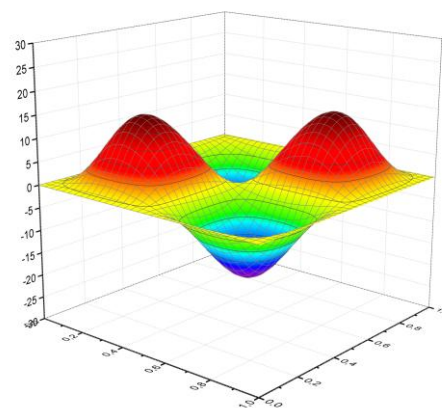
Mode 1



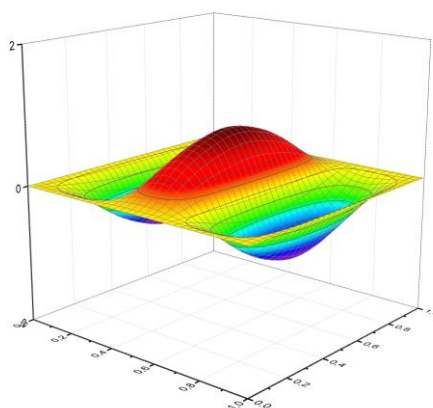
Mode 2



Mode 3

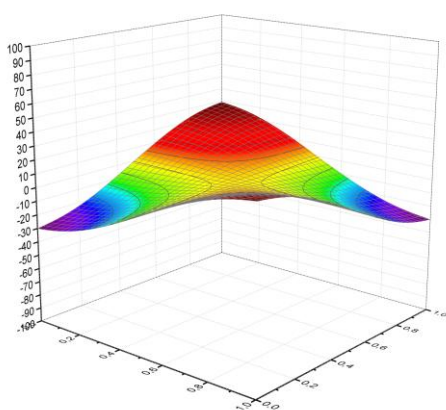


Mode 4

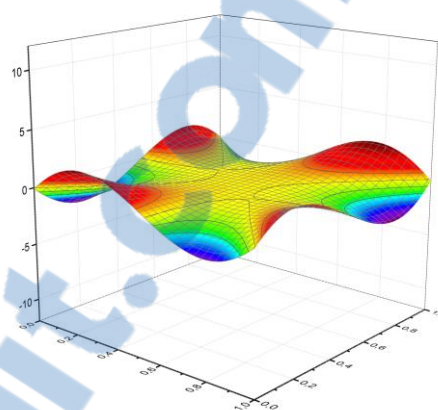


Mode 5

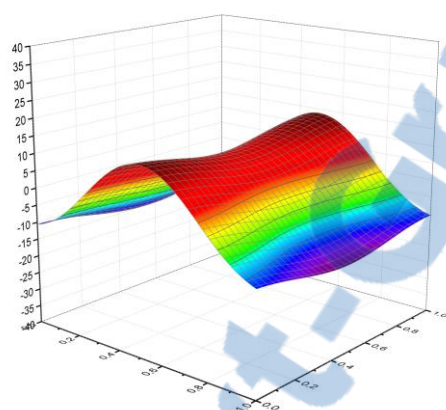
**Figure 8.16** : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich EEEE.



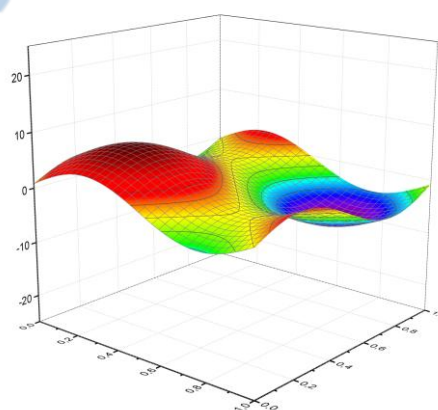
Mode 1



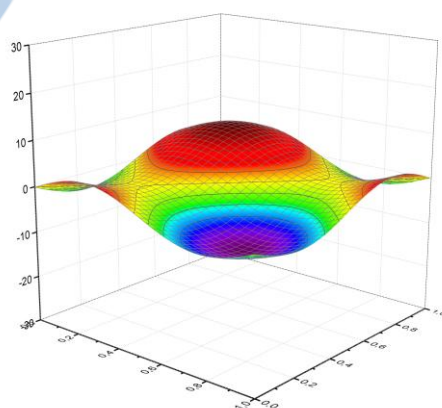
Mode 2



Mode 3

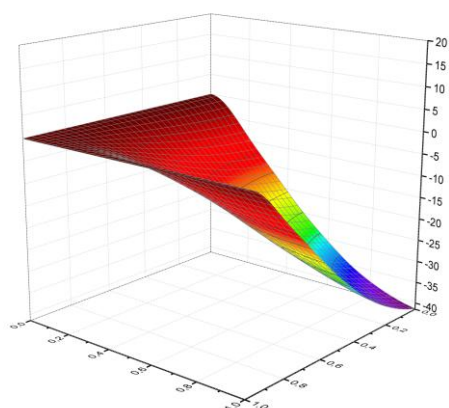


Mode 4

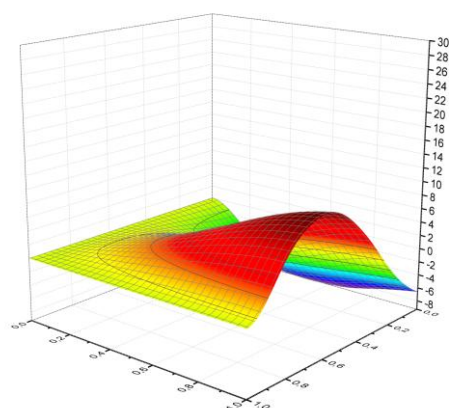


Mode 5

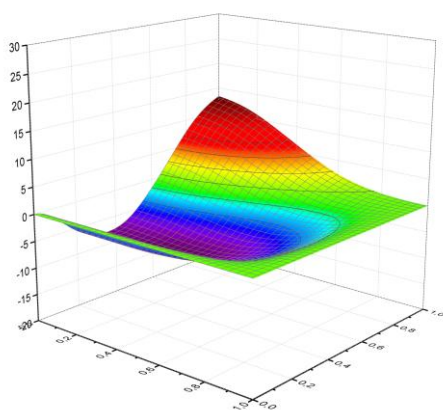
**Figure 8.17** : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich LLLL.



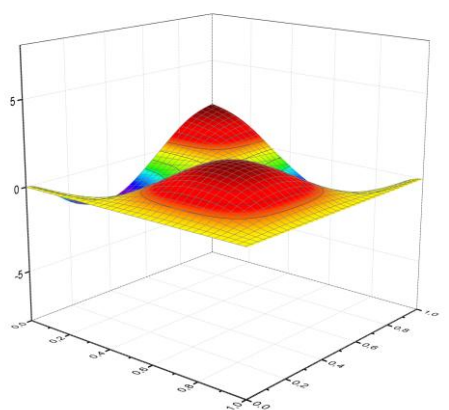
Mode 1



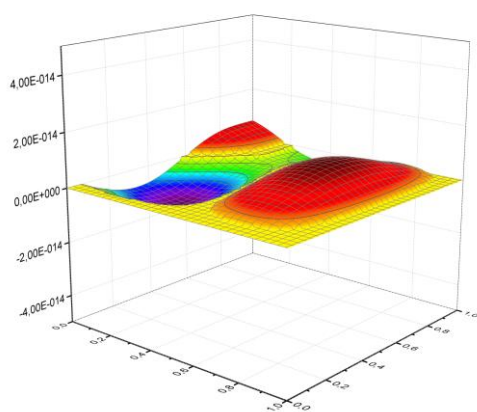
Mode 2



Mode 3

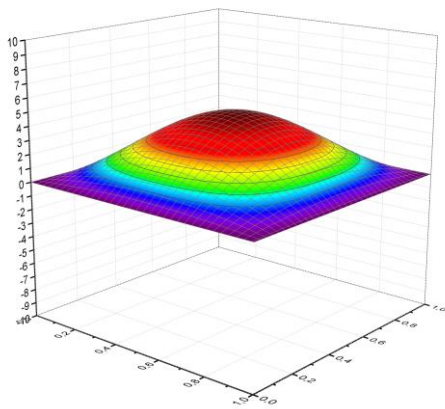


Mode 4

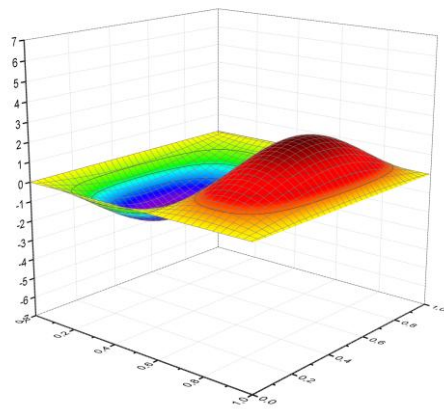


Mode 5

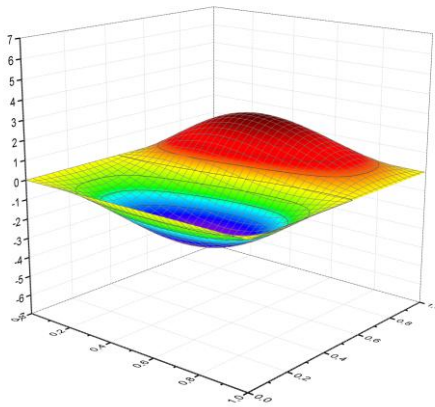
**Figure 8.18** : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich EELL.



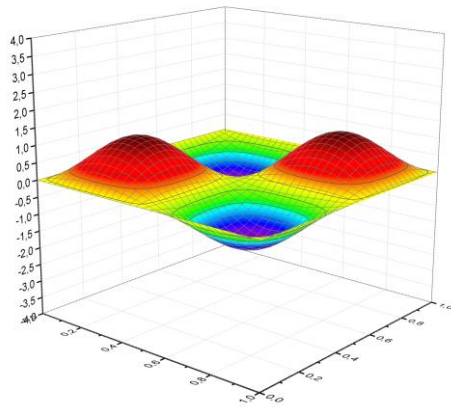
Mode 1



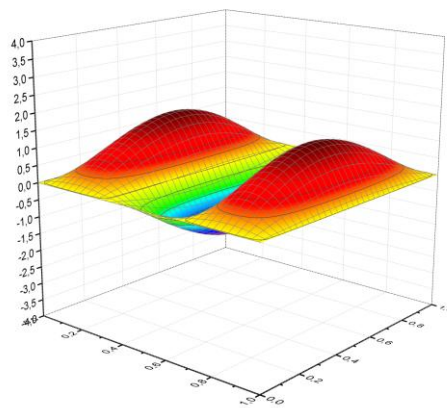
Mode 2



Mode 3

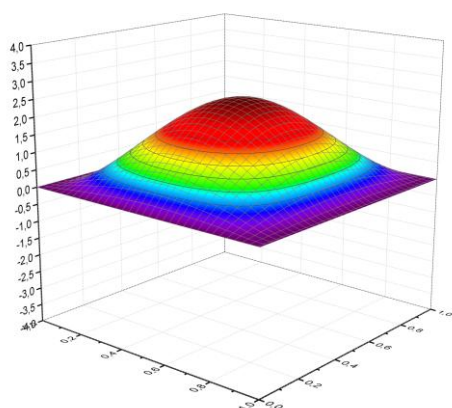


Mode 4

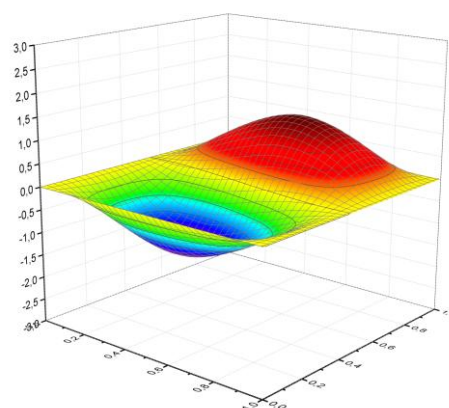


Mode 5

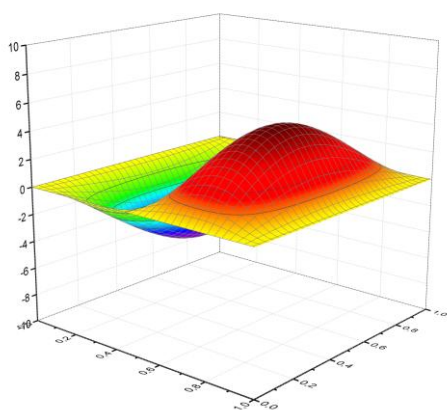
Figure 8.19 : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich AAAA.



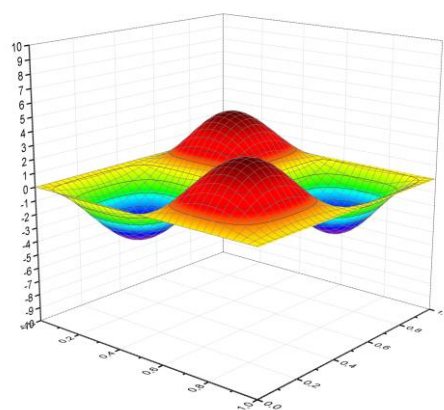
Mode 1



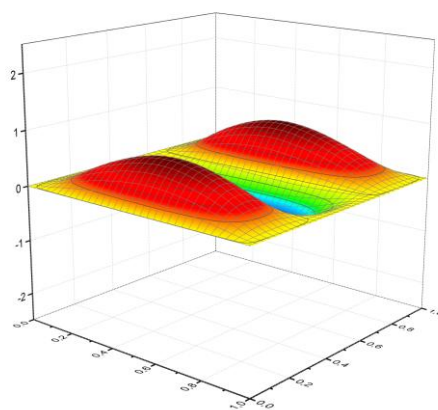
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

**Figure 8.20** : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich AEAE.



### 8.2.2. Plaques immergées

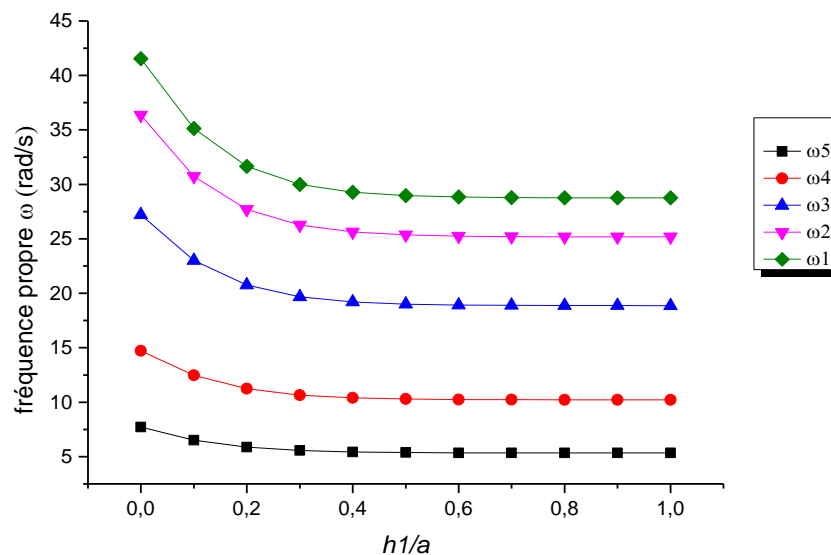
Dans cette section, une étude paramétrique est réalisée avec différentes conditions aux limites des plaques composite et sandwich totalement ou partiellement immergées dans un réservoir rempli avec un fluide parfait stationnaire et irrotationnel.

#### 8.2.2.1. Influence de la hauteur du fluide

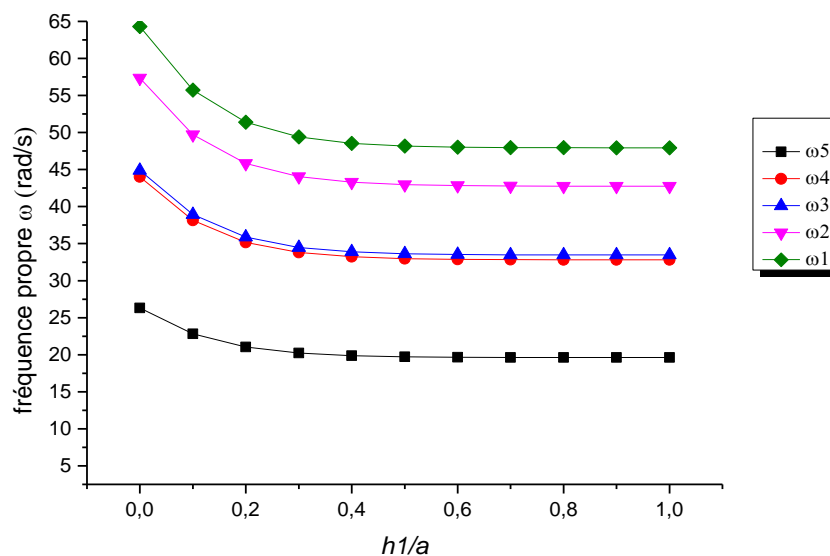
On prend comme exemple d'étude une plaque carrée sandwich a cinq couches symétriques [90/-60/30/âme/90/-60/30] avec une épaisseur  $h=0.2\text{ m}$ . Le rapport de l'épaisseur de l'âme sur celui de la peau  $h_c/h_f = 16$ . La peau de la plaque est constituée de fibres de verre avec une matrice de résine de polyester, et l'âme est en HEREX C70.130 (Tableau 8.9), la masse volumique du fluide  $\rho_f = 1000\text{ kg/m}^3$ .

Les figures 8.21-24 représentent la variation de la fréquence en fonction de la hauteur de fluide  $h_1$ , la plaque est immergée dans le fluide é délimité par deux hauteurs  $h_1$  et  $h_2$ . Dans le premier cas, on fixe la hauteur  $h_2 \gg a$  en faisant varier le rapport  $h_1/a$  (figure 4.3). Les résultats numériques sont donnés dans l'annexe A du tableau A.1 à A.4.

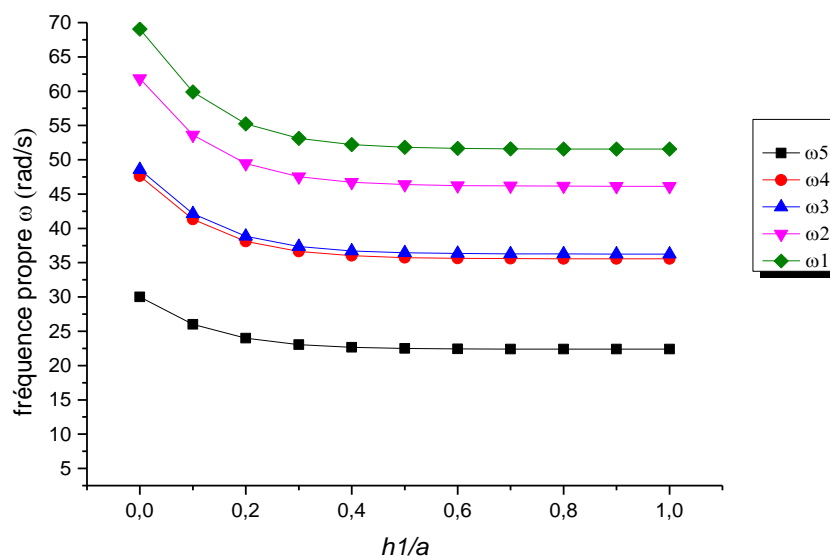
On remarque que les fréquences diminuent en fonction du rapport; et commencent à se stabiliser à partir du rapport  $h_1/a=0.8$  pour les différents cas des conditions aux limites de la plaque.



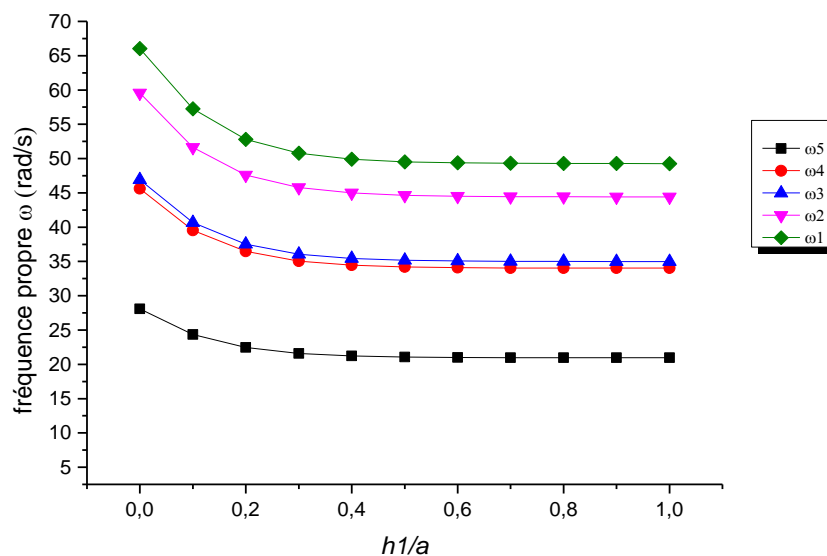
**Figure 8.21** : Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich ELLL, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).



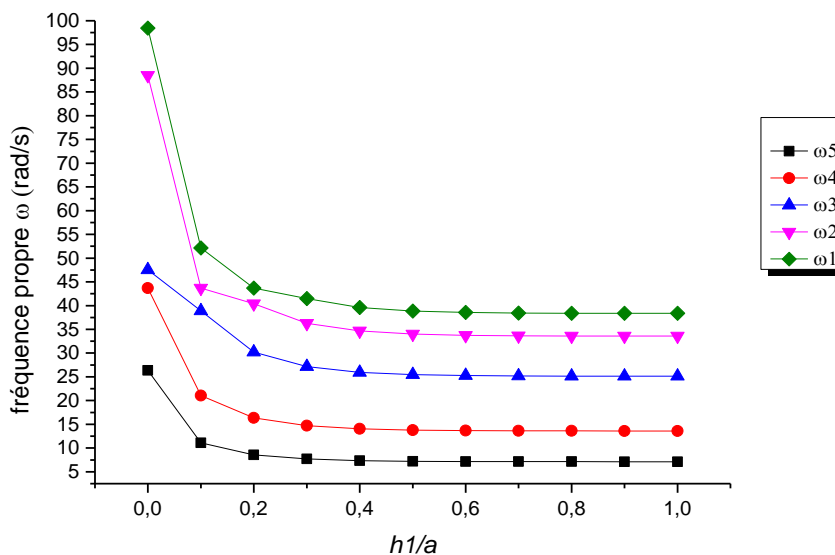
**Figure 8.22 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque sandwich AAAA, en fonction du niveau du liquide ( $h1$  variable et  $h2 \gg a$ ).



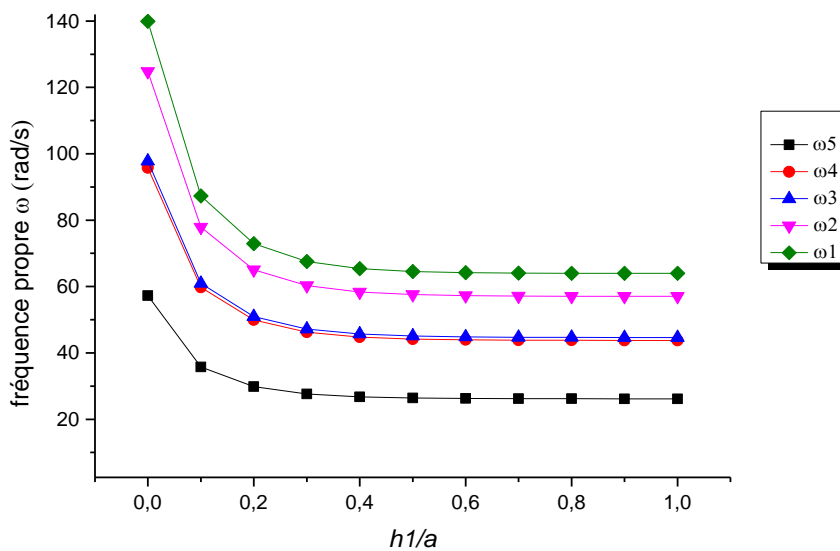
**Figure 8.23 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque sandwich EEEE, en fonction du niveau du liquide ( $h1$  variable et  $h2 \gg a$ ).



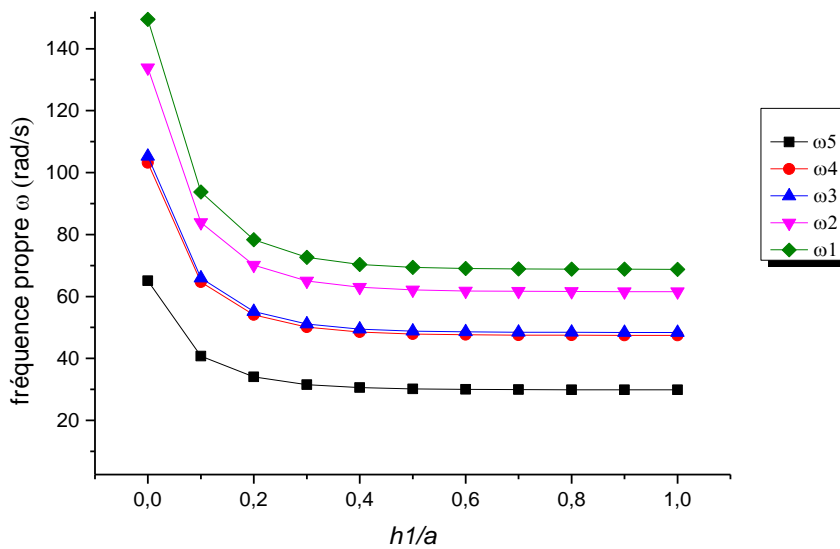
**Figure 8.24 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque sandwich AEAE, en fonction du niveau du liquide ( $h1$  variable et  $h2 \gg a$ ).



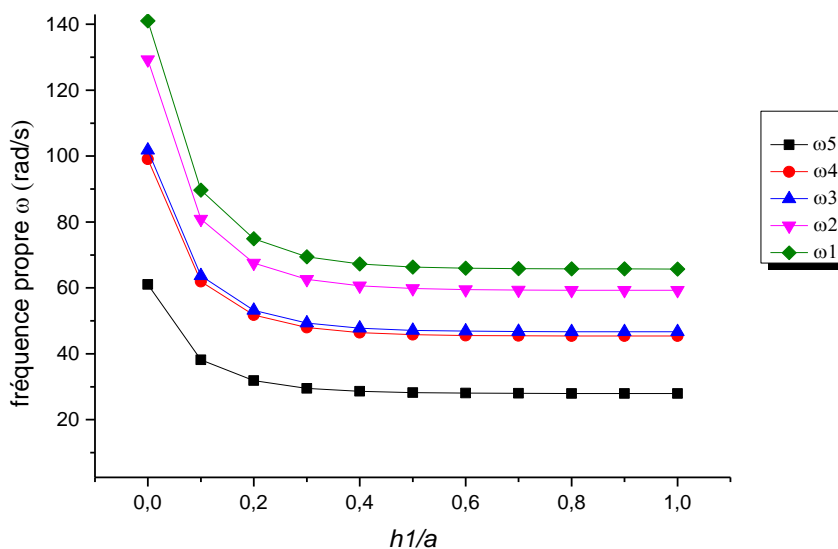
**Figure 8.25 :** variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d’une plaque sandwich ELLL.



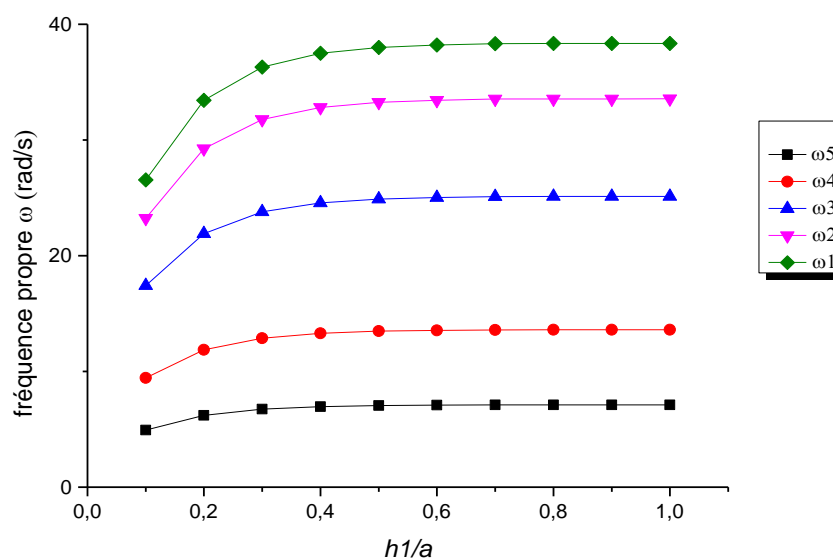
**Figure 8.26 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AAAA.



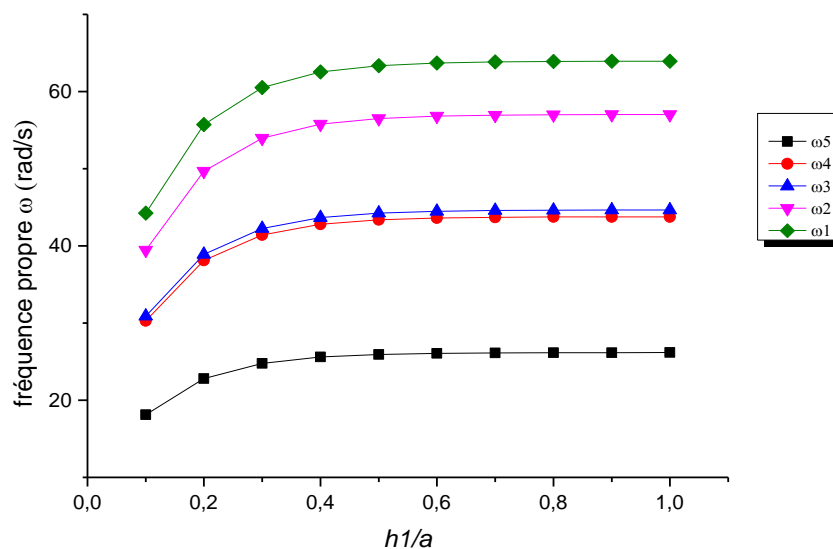
**Figure 8.27 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich EEEE.



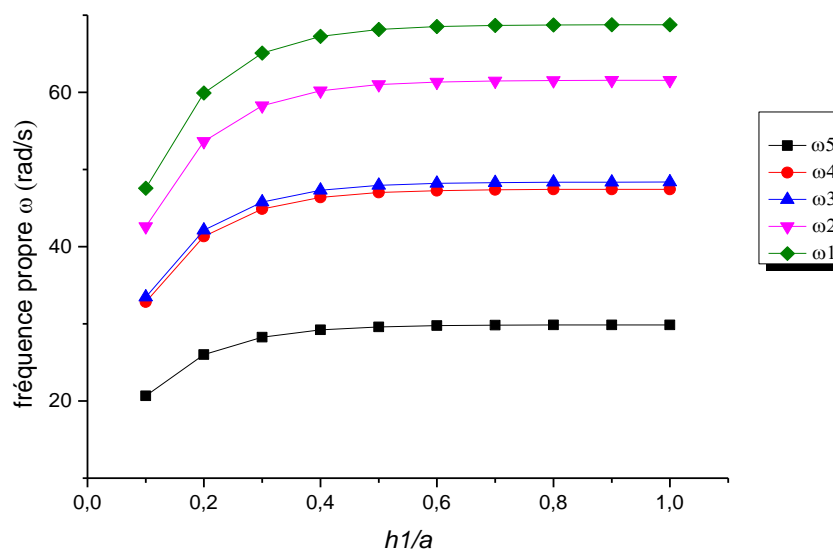
**Figure 8.28 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AEAE.



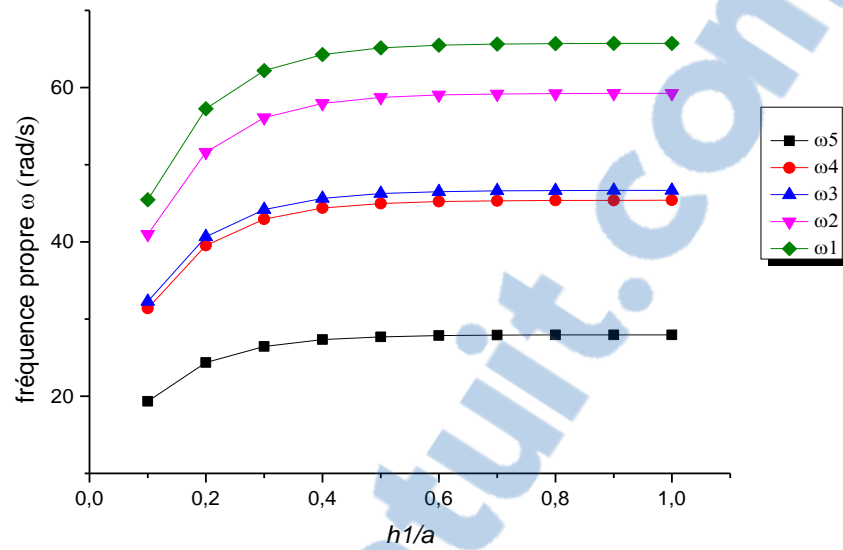
**Figure 8.29 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $h1$  de fluide, d'une plaque sandwich ELLL immergée avec une surface à l'air libre.



**Figure 8.30 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $h1$  de fluide, d'une plaque sandwich AAAA immergée avec une surface a l'air libre.



**Figure 8.31 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $h1$  de fluide, d'une plaque sandwich EEEE immergée avec une surface a l'air libre.

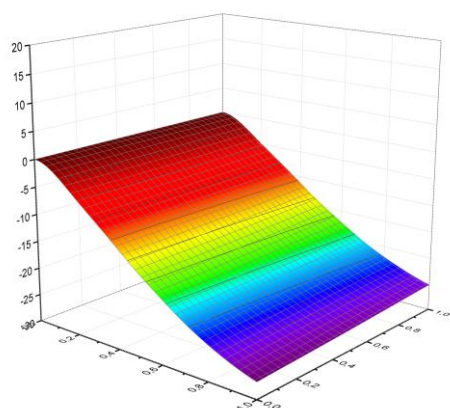


**Figure 8.32** : Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $h1$  de fluide, d'une plaque sandwich EAEA immergée avec une surface à l'air libre.

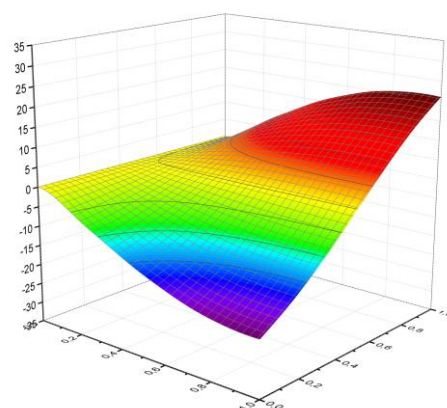
Les figures 8.25-28 représentant la variation de la fréquence en fonction de la hauteur de fluide  $h2$ , les résultats numériques sont donnée dans les l'annexe A tableaux A.5 à A.8, dans cet exemple la hauteur  $h2=0$ , et en fait varier le rapport  $h1/a$  (figure 4.2), en remarque que les fréquences diminuent en fonction du rapport, les fréquences commencent à se stabilisé à partir du rapport  $h2/a=0.8$  est cela pour les différents cas de condition aux limite de la structure.

Les figures 8.29-32 représentent la variation de la fréquence en fonction de la hauteur du fluide  $h1$ . Les résultats numériques sont donnés dans l'annexe A des tableaux A.8 à A.12. Dans le troisième cas, la plaque et au fond d'un réservoir, en fait varier le rapport  $h1/a$ , (figure 4.1), on remarque que les fréquences augmentent en fonction du rapport et commencent à se stabilisé à partir du rapport  $h1/a=0.7$ , pour les quatre différents cas des conditions aux limites considérées.

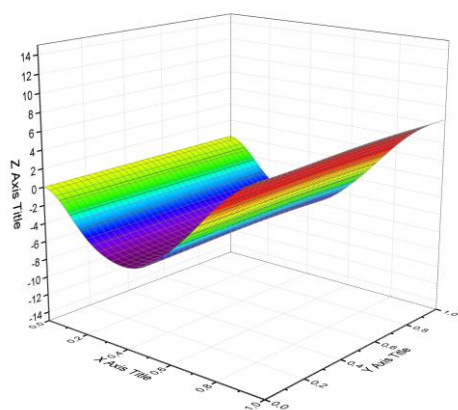
Les figures 8.33-35 montrent les cinq premiers modes d'une plaque sandwich [90/-60/30/âme /90/-60/30] symétrique, ELLL, totalement immergée au fond, Plaque immergée et immergée avec surface à l'air libre respectivement, dans le cas avec un rapport  $(Ec/E1f=42.28 \cdot 10^{-4})$  et  $a/h=2$ , les propriétés physiques de la plaque sandwich sont présentées dans l'exemple précédent.



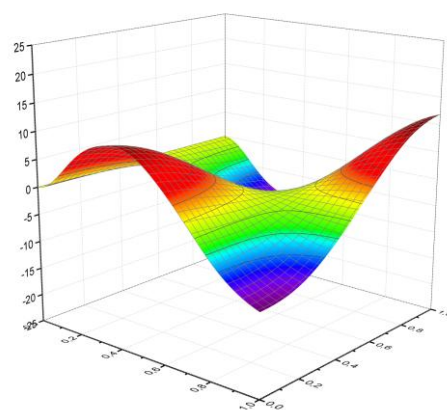
Mode 1



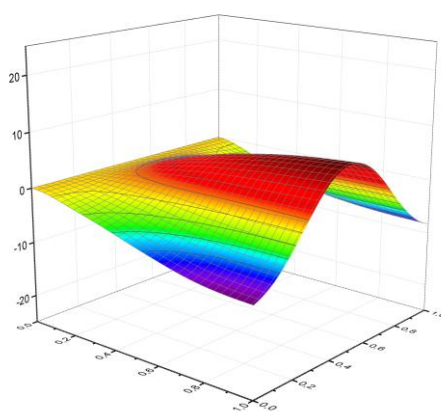
Mode 2



Mode 3



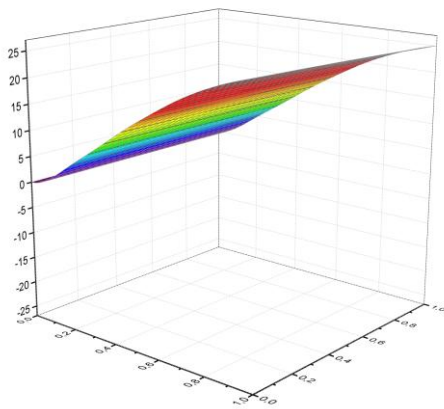
Mode 4



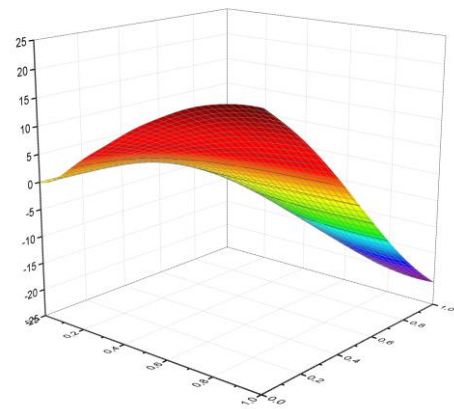
Mode 5

**Figure 8.33** : Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich immergée  $h1=0.2$  et  $h2 \gg a$ .

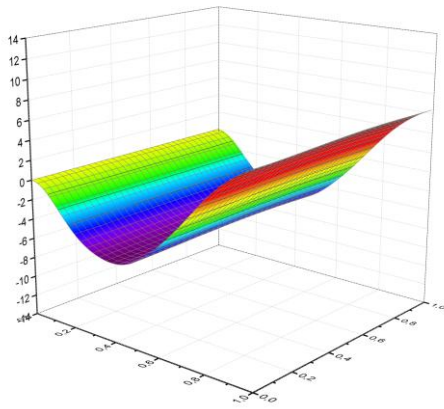




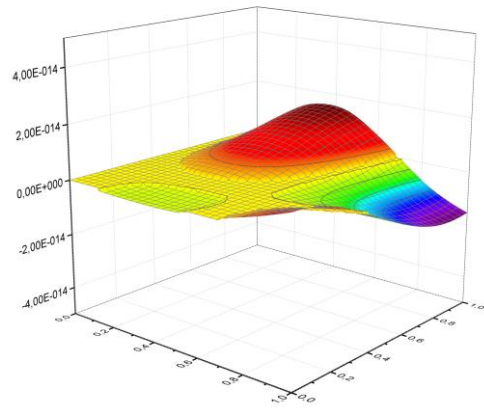
Mode 1



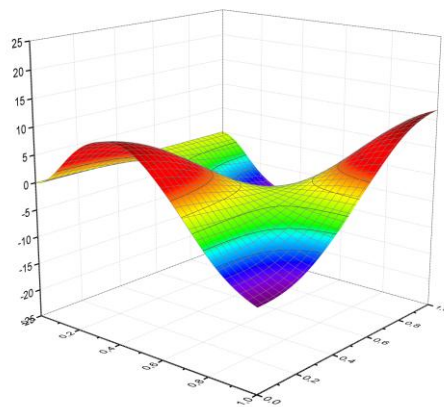
Mode 2



Mode 3

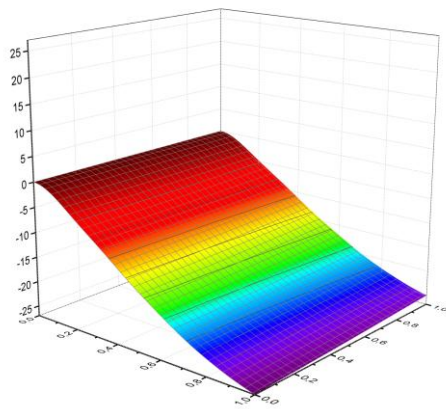


Mode 4

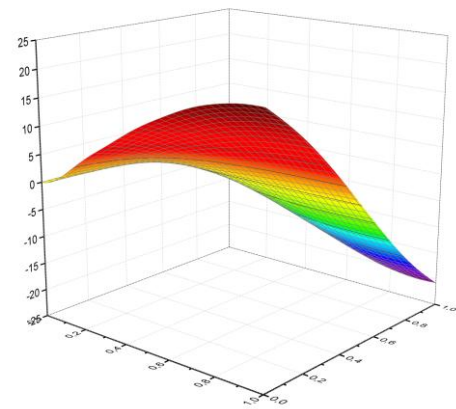


Mode 5

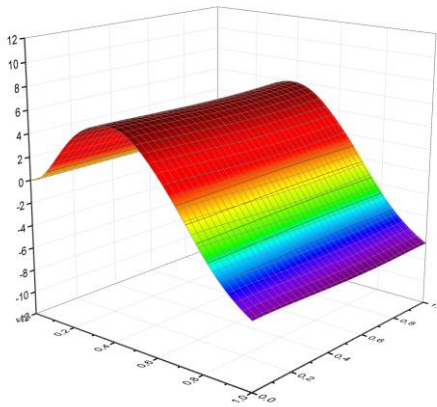
**Figure 8.34 :** Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich immergée avec surface à l'air libre  $hI=0.2$ .



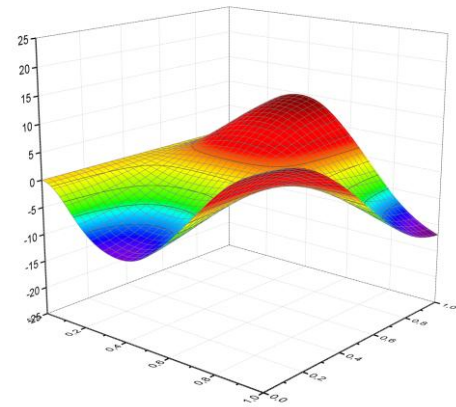
Mode 1



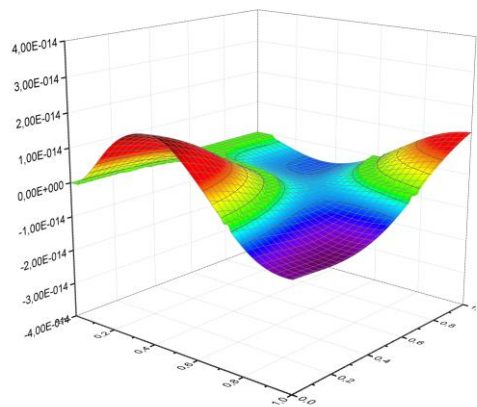
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

**Figure 8.35:** Graphe des cinq premiers modes d'une plaque sandwich totalement immergée au fond  $h_l=0.2$ .

### 8.1.2. Influence de rapport de module d'élasticité

Les cas suivants ont pour préoccupations d'étudier l'influence du rapport du module d'élasticité de l'âme sur celui de la peau ( $E_c/E_l f$ ), sur les cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$ , (le rapport de la longueur sur l'épaisseur ( $a/h=2.5$ ) et de l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur de la peau ( $h_c/h_f=16$ )). La plaque sandwich carrée ( $a=b=1$ ) est formée de sept couches symétriques [90/-60/30/âme/90/-60/30] immergée dans un fluide (Figure 4.4) avec ( $h1/a=0.1$  et  $0.5$  m) et  $h2 \gg a$ . Les propriétés du matériau de la peau est composée de fibres de verre et de matrice de résine de polyester, par contre celui de l'âme est de la gamme de Herex C70.130 en mousse. Les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 8.12, et la masse volumique du fluide  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Tableau 8.18:** Effet du rapport du module d'élasticité  $E_c/E_l f$  sur le paramètre de fréquence pour une plaque sandwich avec.

h1/a	Modes	EEEE					AAAA				
		$(E_c/E_l f) \times 10^{-4}$					$(E_c/E_l f) \times 10^{-4}$				
		9.257	15.43	23.24	29.83	42.28	9.257	15.43	23.24	29.83	42.28
0.1	1	2.541	2.648	2.794	2.935	3.253	2.230	2.338	2.471	2.600	2.880
	2	4.105	4.261	4.486	4.705	5.209	3.643	3.811	4.027	4.237	4.700
	3	4.187	4.343	4.572	4.797	5.314	3.695	3.863	4.083	4.298	4.772
	4	5.409	5.591	5.875	6.156	6.81	4.777	4.979	5.254	5.524	6.127
	5	6.139	6.327	6.638	6.944	7.671	5.424	5.632	5.932	6.228	6.900
0.5	1	2.216	2.315	2.448	2.577	2.867	1.943	2.043	2.164	2.281	2.537
	2	3.581	3.726	3.932	4.132	4.592	3.174	3.330	3.527	3.718	4.141
	3	3.652	3.797	4.008	4.212	4.685	3.220	3.375	3.576	3.771	4.205
	4	4.719	4.89	5.151	5.406	6.005	4.163	4.350	4.602	4.848	5.399
	5	5.356	5.533	5.819	6.099	6.764	4.727	4.921	5.197	5.466	6.081

Le tableau 8.18 montre les résultats pour les deux conditions aux limites (EEEE, et AAAA). On remarque que le paramètre de fréquence augmente en fonction du rapport ( $E_c/E_l f$ ). Cette augmentation est moins importante quand le rapport ( $h1/a$ ) augmente. Cela est dû à la pression élevée du fluide qui diminue la rigidité de la plaque d'une façon significative.

#### 8.2.2.2. Influence de l'orientation des fibres

Dans cet exemple, on varie les angles d'orientation des fibres pour voir leurs influences sur les cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$  d'une

plaque épaisse carrée ( $a=b=1$ ), AAAA, formée de quatre couches antisymétriques [ $\theta/-\theta/\theta/-\theta$ ]. Le rapport de la longueur sur l'épaisseur ( $a/h=2.5$ ). La plaque est immergée dans un fluide (Figure 4.3) avec ( $h1/a=0.1$  et  $0.5$  m) et  $h2 \gg a$ . La masse volumique du fluide  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Propriétés de la peau composée de fibres de verre et de matrice de résine de polyester  
 $E_1 = 24.51 \text{ Gpa}$ ,  $E_2 = 7.77 \text{ Gpa}$ ,  $G_{12} = 3.34 \text{ Gpa}$ ,  $G_{13} = 3.34 \text{ Gpa}$ ,  $G_{23} = 1.34 \text{ Gpa}$ ,  
 $\nu_{12} = 0.078$ ,  $\nu_{21} = 0.24$ ,  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$

Le tableau 8.19 montre que le paramètre de fréquence diminue en fonction de la hauteur du fluide et augmente entre les angles d'orientation 0 et 30°.

**Tableau 8.19:** Effet de l'angle d'orientation des fibres  $\theta$  sur le paramètre de fréquence.

h1/a	Modes	Immergée				A l'air libre			
		Orientation des fibres $\theta$				Orientation des fibres $\theta$			
		0	30	45	60	0	30	45	60
0.1	1	3.592	3.749	3.803	3.749	4.287	4.480	4.546	4.480
	2	5.149	6.182	6.600	6.182	5.149	7.003	7.284	7.003
	3	5.149	6.749	6.600	6.749	5.149	7.055	7.474	7.055
	4	5.592	7.234	7.284	7.234	6.678	7.577	7.474	7.577
	5	7.587	7.503	7.816	7.503	9.018	8.006	8.250	8.006
0.5	1	3.398	3.545	3.596	3.545	4.287	4.480	4.546	4.480
	2	5.149	5.856	6.262	5.856	5.149	7.003	7.284	7.003
	3	5.149	6.522	6.262	6.522	5.149	7.055	7.474	7.055
	4	5.288	7.221	7.284	7.221	6.678	7.577	7.474	7.577
	5	7.173	7.34	7.788	7.340	9.018	8.006	8.250	8.006

### 8.2.2.3. Influence des modules d'élasticités

Dans cet exemple, on varie le rapport des modules d'élasticités  $E_1/E_2$  pour voir son influence sur les cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$ , d'une plaque épaisse carrée ( $a=b=1$ ), AAAA, formée de quatre couches antisymétrique [45/-45/45/-45] et de rapport de la longueur sur l'épaisseur ( $a/h=2.5$ ), la plaque est immergée dans un fluide (Figure 4.3) avec ( $h1/a=0.1$  et  $0.5$  m) et  $h2 \gg a$ . On garde les mêmes matériaux utilisés dans l'exemple précédent sauf qu'on fait varier le rapport  $E_1/E_2$ .

$E_1 = \text{variable Gpa}$ ,  $E_2 = 1 \text{ Gpa}$ ,  $G_{12} = 3.34 \text{ Gpa}$ ,  $G_{13} = 3.34 \text{ Gpa}$ ,  $G_{23} = 1.34 \text{ Gpa}$ ,  
 $\nu_{12} = 0.078$ ,  $\nu_{21} = 0.24$ ,  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ .

La masse volumique du fluide  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Tableau 8.20:** Effet du rapport des modules d'élasticités  $E_1/E_2$ .

h1/a	Modes	<i>Immergée</i>					A l'air libre				
		$E_1/E_2$					$E_1/E_2$				
		40	30	20	10	5	40	30	20	10	5
0.1	1	10.831	10.320	9.512	7.988	6.512	12.956	12.324	11.326	9.453	7.662
	2	18.129	17.392	15.86	12.26	9.262	20.303	19.273	16.545	12.359	9.282
	3	18.129	17.392	15.86	12.26	9.262	20.867	19.273	16.545	12.359	9.282
	4	20.303	20.303	18.667	16.138	14.211	20.867	20.303	20.302	18.904	16.573
	5	24.014	21.375	18.667	16.138	14.211	24.977	23.042	21.303	18.904	16.573
0.5	1	10.240	9.760	9.002	7.571	6.181	12.956	12.324	11.326	9.453	7.662
	2	17.227	16.609	15.409	12.20	9.252	20.303	19.273	16.545	12.359	9.282
	3	17.227	16.609	15.409	12.20	9.252	20.867	19.273	16.545	12.359	9.282
	4	20.303	20.303	18.18	15.377	13.523	20.867	20.303	20.302	18.904	16.573
	5	23.578	21.161	18.18	15.377	13.523	24.977	23.042	21.303	18.904	16.573

Le tableau 8.20 montre que la plaque devient moins rigide en présence du fluide et aussi en fonction du rapport de la hauteur du fluide sur le côté de la plaque ( $h1/a$ ) et du rapport des modules d'élasticité ( $E_1/E_2$ ).

## 8.4. Etude thermique des plaques composites

### 8.4.1. Validation des résultats thermiques stationnaires

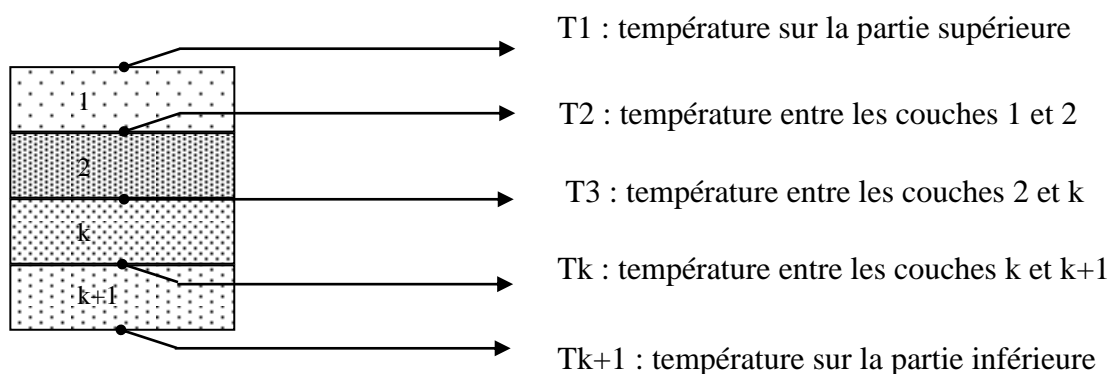
Pour la validation du programme plusieurs exemples sont utilisés sur les cas étudiés 1 et 2 et dans le cas où les conditions aux limites sont distribuées d'une façon uniforme sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque, les cas étudiés 3 à 5 dans le cas où les conditions aux limites sont différentes sur les surfaces de la plaque. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des différents logiciels de simulation.

La figure 8.36 représente les points des températures prises pour une comparaison. entre le programme élaboré et le logiciel ANSYS suivant la direction z.

#### 8.4.1.1. Cas de conditions aux limites uniformes

Dans cet exemple, nous considérons le cas d'une plaque sandwich carrée, constituée de cinq couches La peau est en aluminium et en plastique renforcée par des fibres de carbone CFRP. L'âme est aussi en aluminium. Les propriétés et les épaisseurs des différentes couches sont données sur le tableau 8.19. Dans le premier cas, une convection est imposée sur la surface supérieure et inférieure de la plaque d'une façon uniforme.

Dans le deuxième cas un flux de température sur la partie supérieure de la plaque et une convection sur la partie inférieure.



**Figure 8.36 :** Températures utilisées pour la comparaison suivant la direction verticale de la couche du Stratifié ( $k+1=NC$ )

**Tableau 8.19 :** Conduction thermique et épaisseur des couches de la plaque sandwich.

Couche	Epaisseur [m]	Matériaux	$K_{xx}$ [W/m k]	$K_{yy}$ [W/m k]	$K_{zz}$ [W/m k]
1	0.03	Aluminium	235.0	235.0	235.0
2	0.05	CFRP [0°,90°]s	26.208	0.96	0.96
3	0.15	Aluminium	235.0	235.0	235.0
4	0.05	CFRP [0°,90°]s	26.208	0.96	0.96
5	0.03	Aluminium	235.0	235.0	235.0

**Tableau 8.20 :** Variation de la température dans une plaque sandwich à cinq couches avec une convection sur la surface supérieure et inférieure ( $hc_1 = 50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $hc_2 = 40 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ) avec les températures  $T_{\infty_1} = 60 \text{ C}^\circ$ ,  $T_{\infty_2} = -10 \text{ C}^\circ$ .

Température	MEF <i>P</i>	Ansys
T1	50.67	50.67
T2	50.61	50.61
T3	26.32	26.32
T4	26.02	26.02
T4	1.72	1.72
T5	1.66	1.66

Les tableaux 8.20-21 représentent la comparaison des résultats obtenus par la présente méthode avec les résultats obtenus par le logiciel Ansys, où il utilise un élément cubique à

huit degrés de liberté. On remarque que les résultats obtenus sont identiques avec ceux du logiciel Ansys.

**Tableau 8.21** : variation de la température dans une plaque sandwich a cinq couches avec un flux sur la surface supérieur  $q_1 = 800 \text{ W / m}^2 \text{ K}$  et une convection  $hc_2 = 40 \text{ W / m}^2 \text{ K}$  avec une température  $T_{\infty_2} = 5 \text{ C}^\circ$  sur la surface inférieure.

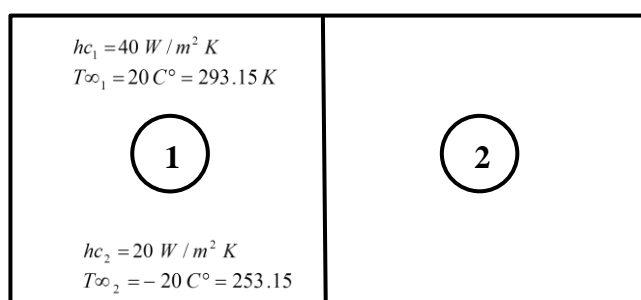
Température	MEF <i>P</i>	Ansys
T1	109.05	109.05
T2	108.95	108.95
T3	67.28	67.28
T4	66.77	66.77
T4	25.1	25.1
T5	25	25

#### 8.4.1.2. Cas des conditions non uniformes

Dans ces cas, nous considérons une plaque d'une longueur de 2 m et d'une largeur de 1 m (Figures 8.37-38), constituée de trois couches,  $t_1=0.013\text{m}$ ,  $t_2=0.05\text{m}$ , et  $t_3=0.1\text{m}$ , en plastique renforcée par des fibres de carbone CFRP, avec conduction thermique ( $K_{xx} = 28.6 \text{ [W/m k]}$ ;  $K_{yy} = 28.6 \text{ [W/m k]}$ ;  $K_{zz} = 0.96 \text{ [W/m k]}$ ).

Premier cas :

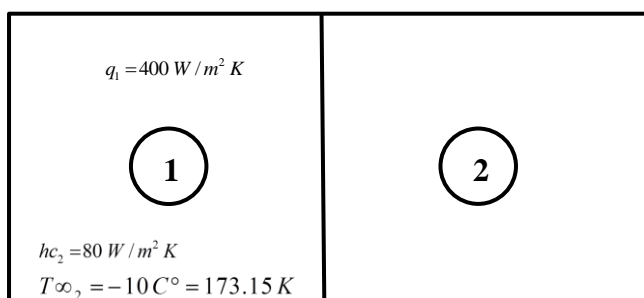
Une convection est imposée sur la surface inférieure et supérieure à la partie (1) de la plaque (Figure 8.37).



**Figure 8.37:** Plaque composite à trois couches avec une convection sur la partie supérieure et inférieure de la partie (1) de la plaque

Deuxième cas :

Dans cet exemple, nous considérons le cas d'un flux de température sur la partie supérieure de la plaque (1) et une convection sur la partie inférieure de la plaque (1) (Figure 8.38):



**Figure 8.38 :** Plaque composite à trois couches avec un flux de chaleur sur la partie supérieure et une convection sur la partie inférieure de la partie (1) de la plaque.

Les tableaux 8.22-23 représente la comparaison des résultats obtenus par la présente méthode avec les résultats obtenus par le logiciel ANSYS, où il utilise un élément volumique à huit degrés de liberté. On remarque que les résultats obtenus par notre programme son très proche de ceux qui sont obtenus à l'aide du logiciel Ansys, la version- $p$  donne de bon résultats avec un minimum de degrés de liberté.

#### 8.4.2. Validation des résultats thermiques transitoires

Dans cette partie nous avons fait une comparaison entre deux méthodes utilisées pour résoudre les problèmes thermiques transitoires. La présente méthode PTIM ( précise time intégration méthode), la seconde la méthode des ( différences finis ) et le logiciel ANSYS dans le but de valider le programme. Les propriétés thermiques et les dimensions géométriques de la plaque carrée utilisée dans cet exemple sont représentées sur le tableau 8.25.

La figure 8.39 montre que les courbes tracées sont totalement confondues ce qui montre l'exactitude des résultats obtenus à l'aide de la méthode PTIM.



**Tableau 8.22:** Variation de la température dans une plaque stratifiée soumise une convection sur une seule partie.

Coordonnées	Température	MEF <i>H</i>			MEF <i>P</i>			ANSYS
		P=2, 10 x 10 363 DDL	P=2, 20 x 20 1323 DDL	P=2, 30 x 30 2883 DDL	P=3, 10 x 10 432 DDL	P=3, 14 x 14 768 DDL	P=3, 20 x 20 1452 DDL	
X=0 Y=0	T1	15.96	15.96	15.95	15.88	15.89	15.94	15.93
	T2	13.77	3.77	13.77	13.70	13.71	13.75	13.73
	T3	05.32	05.32	05.32	05.29	05.29	05.30	05.29
	T4	-11.75	-11.74	-11.74	-11.69	-11.71	-11.75	-11.72
X=1 Y=0	T1	11.93	11.75	11.71	11.32	11.431	11.51	11.57
	T2	10.39	10.24	10.21	9.89	9.98	10.04	09.81
	T3	04.60	04.55	04.54	04.45	04.473	04.49	04.31
	T4	-06.38	-06.31	-06.30	-06.00	-06.08	-06.14	-06.37
X=2 Y=0	T1	02.94	02.93	02.92	02.88	02.86	02.83	02.86
	T2	02.88	02.87	02.86	02.82	02.81	02.78	02.85
	T3	02.68	02.65	02.64	02.61	02.61	02.61	02.59
	T4	02.27	02.21	02.20	02.18	02.20	02.25	02.06

**Tableau 8.23** : variation de la température dans une plaque stratifiée soumise une convection et un flux de chaleur sur une seule partie.

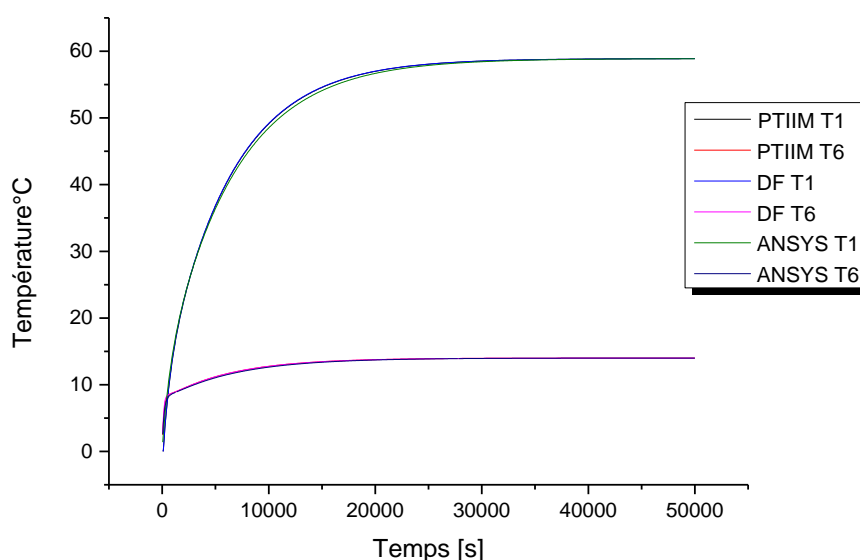
Coordonnées	Température	MEF <i>H</i>			MEF <i>P</i>			ANSYS
		P=2, 10 x 10 363 DDL	P=2, 20 x 20 1323 DDL	P=2, 30 x 30 2883 DDL	P=3, 10 x 10 432 DDL	P=3, 14 x 14 768 DDL	P=3, 20 x 20 1452 DDL	
X=0 Y=0	T1	57.72	57.738	57.75	58.18	58.31	58.36	58.19
	T2	52.40	52.421	52.43	52.88	52.99	53.03	52.81
	T3	32.38	32.407	32.42	32.86	32.90	32.92	32.75
	T4	-05.54	-05.536	-05.54	-05.33	-05.34	-05.45	-05.47
X=1 Y=0	T1	38.87	38.95	38.98	38.81	38.91	38.96	39.72
	T2	36.46	36.53	36.55	36.40	36.50	36.55	37.01
	T3	26.21	26.26	26.27	26.34	26.37	26.38	26.39
	T4	01.00	01.16	01.21	02.27	01.99	01.78	1.00
X=2 Y=0	T1	22.07	22.16	22.19	22.63	22.49	22.31	22.54
	T2	21.95	22.04	22.07	22.49	22.37	22.21	22.51
	T3	21.49	21.57	21.60	22.00	21.92	21.82	22.06
	T4	20.57	20.64	20.66	21.04	21.02	21.04	21.06

**Tableau 8.25:** Conduction thermique et épaisseur des couches de la plaque sandwich dans le cas d'un régime transitoire.

Couche	Epaisseur [m]	Matériaux			
1	0.03	Aluminium			
2	0.05	T300/934			
3	0.15	Aluminium			
4	0.05	T300/934			
5	0.03	Aluminium			

Matériaux	$K_{xx}$ [W/m k]	$K_{yy}$ [W/m k]	$K_{zz}$ [W/m k]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$C$ [J/kg K]
T300/934	5.73	5.73	5.73	1460	1300
Aluminium 6061	167.0	167.0	167.0	2700	896

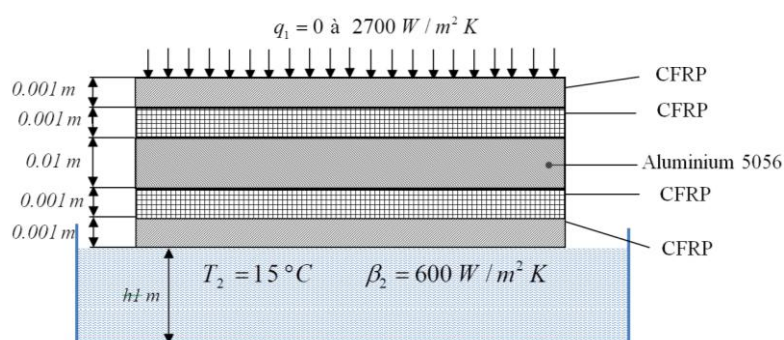


**Figure 8.39 :** Variation de la température en fonction du temps dans une plaque sandwich.

### 8.5. Analyse Thermo – élastique

Dans cette partie nous étudions le cas d'une plaque sandwich constituée de cinq couches symétriques [0/90/âme/90/0]. L'âme est en aluminium 5052 sous la forme de nid d'abeille et la peau en CFRP (Figure 8.40). Les propriétés des deux matériaux sont représentées sur le tableau 8.27. La masse volumique du fluide  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ . La plaque flotte dans un réservoir de liquide et soumise à un flux thermique variable sur la partie supérieure, données dans le tableau 8.28 et une convection du fluide sur la partie

inférieure, l'influence du chargement thermique et du fluide sur les déplacements de la plaque sont étudiées.



**Figure 8.40:** Plaque sandwich immergée.

**Tableau 8.27 :** Propriétés des différents matériaux du stratifié

Matériau	Propriétés mécaniques et thermomécaniques						
	$k_{xx}/k_{yy}/k_{zz}$ ( $W/m^2 K$ )	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$C$ (J/kg $^{\circ}C$ )	$E_{11}/E_{22}$ (GPa)	$G_{12}/G_{13}/G_{23}$ (GPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^{\circ}C^{-1}$ ) $10^{-6}$
Aluminium 5052	2.1	48	921	0.41/0.24	0.15	0.3	23.76
CFRP	26.21/0.96/0. 96	1600	1300	105/8.74	4.56	0.327	2.15

Dimension de la plaque  $a=1m$ ,  $b=1m$

Conditions aux limites  $q_1$  varie de 0 à 2700  $W/m^2 K$  ;  $\beta_2 = 600 W/m^2 K$  ;  $T_{\infty_2}=15^{\circ}C$

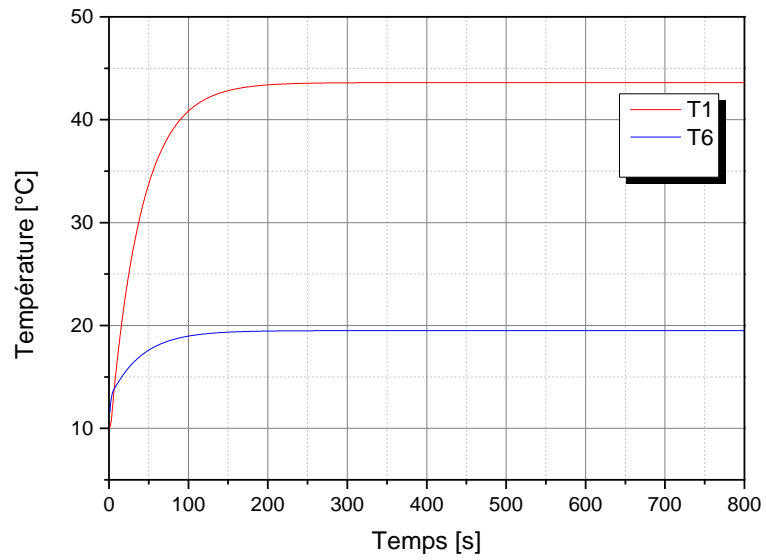
Température initiale  $T_{init}=10^{\circ}C$

Le tableau 8.28 représente la variation du flux thermique appliqué sur la plaque

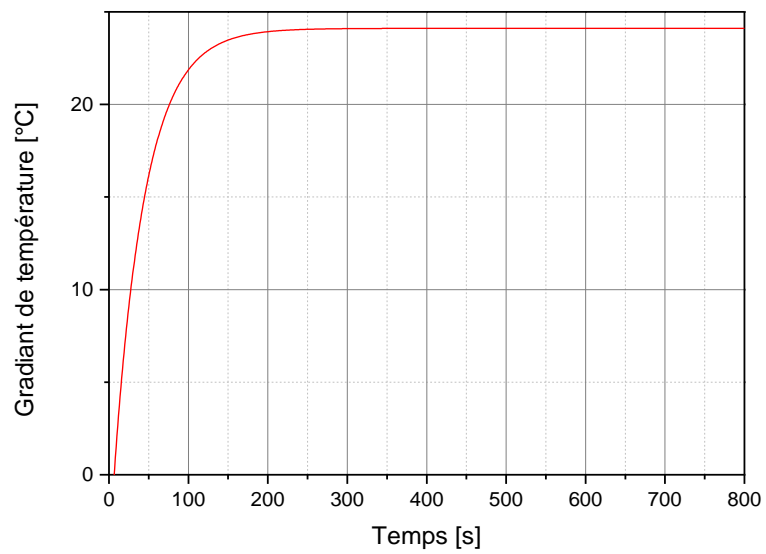
La figure 8.41 représentent la variation de la température T1 et T6, de la plaque sandwich et la figure 8.42 représente la variation du gradient de température.

**Tableau 8.28 :** Variation du flux en fonction du temps

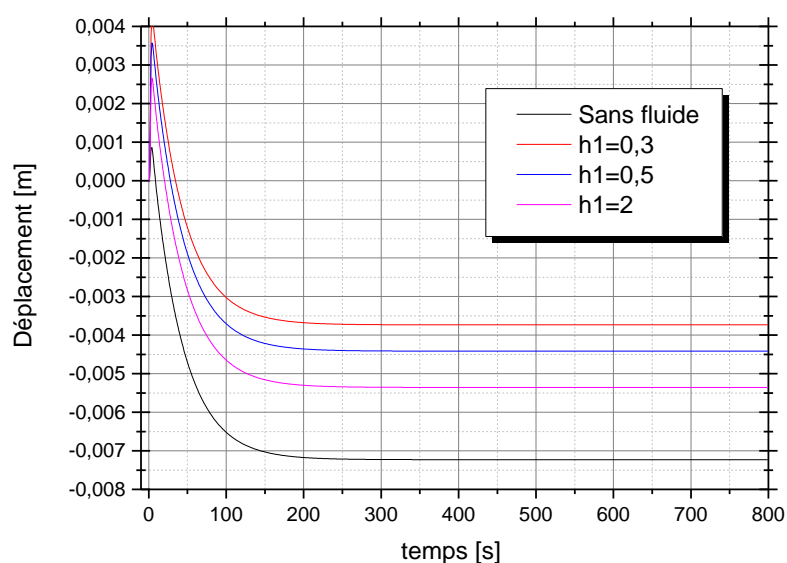
$q$ ( $W/m^2$ $K$ )	0	337.5	675	1012.5	1350	1687.5	2025	2362.5	2700
Temps [s]	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4 à 800



*Figure 8.41* : Variation des températures T1 et T6 en fonction du temps.



*Figure 8.42* : Variation de gradient de température  $\Delta T$  en fonction du temps.



**Figure 8.43 :** Représentation des déplacements sous l'effet d'un chargement thermique en fonction du temps dans le cas d'une plaque sandwich E-L-L-L ( $\xi=1$ ,  $\eta=0.5$ ).

La figure 8.43 représente la variation du déplacement de la plaque en fonction du temps avec un chargement de flux de chaleur variable de 0 à  $2700 \text{ (W/m}^2 \text{ K)}$  en 4 secondes (Tableau 8.29), la variation de déplacement est faite avec et sans interaction avec le fluide. On remarque l'influence du fluide où les déplacements diminuent dans le cas d'interaction, ce qui montre que le fluide joue le rôle d'un amortisseur, les déplacements diminuent avec la hauteur du fluide, cela s'explique par la matrice masse du fluide qui augmente avec la hauteur du fluide, par conséquent, la diminution de la masse globale, ce qui engendre une diminution de l'accélération et par la suite une diminution de la vitesse et de déplacement.

---

## Conclusion et perspectives

La difficulté de résoudre un problème d'interaction fluide-structure varie selon le choix de type de structure, le modèle utilisé et de la formulation fluide-structure. Modéliser par la méthode des éléments finis de ce type structure est devenue une nécessité majeure, vu la complexité d'utiliser des méthodes analytiques. Le travail effectué dans le cadre de cette thèse est d'enrichir les avantages de la MEF et de diminuer les ambiguïtés autour du problème d'interaction fluide-structure.

La plaque étudiée est immergée dans un liquide avec une surface à l'air libre et soumise à un chargement thermique. La variation de la température dans les différentes couches de la plaque est considérée quadratique. Un élément- $p$  rectangulaire à quatre nœuds est utilisé pour la modélisation de la structure, l'interface fluide-structure et la conduction thermique. Le modèle TSDT de Reddy est utilisé pour la modélisation de la plaque avec huit degrés de liberté dans chaque nœud, et avec des fonctions de forme de type  $C^0$  et  $C^1$  et des fonctions de formes hiérarchiques trigonométriques. La partie fluide est modélisée par la fonction potentielle de vitesse de Bernoulli, un seul degré de liberté par nœud et avec les mêmes fonctions de forme  $C^1$  et hiérarchique sont nécessaire pour modéliser l'interface fluide-structure, la conduction thermique est modélisée par la théorie TLT, trois degrés de liberté par nœuds sont considérés avec des fonctions de formes de type  $C^1$  et hiérarchiques trigonométriques. L'analyse thermo-élastique est résolue par la méthode de Newmark.

Les résultats obtenus à l'aide de notre code de calcul développé sont validés avec ceux de littératures et de code de calcul ANSYS, un très bon accord est observé. L'influence des paramètres dans les différents cas, vibration, interaction fluide-structure, analyse thermique, et thermo-élastique est étudiée.

Le travail effectué dans cette thèse a permis d'aboutir aux conclusions suivantes:

- Les vibrations d'une plaque à l'air libre peuvent être influencées par ses dimensions, ses épaisseurs, et son rapport entre épaisseurs de l'âme et de la peau dans le cas de plaque sandwich.
- Les fréquences propres d'une plaque couplée au fluide diminuent de façon significative en comparaison avec celles de la plaque à l'air libre.

- Les fréquences propres de la plaque diminuent en fonction du rapport de la hauteur du fluide et la longueur de la plaque; les fréquences deviennent constantes à partir d'une certaine valeur du rapport.

Un cas d'une plaque sandwich immergée dans un fluide avec une surface à l'air libre et soumise à un chargement thermique est étudié, où l'influence de la hauteur du fluide à une importance considérable sur les déplacements de la plaque.

Les perspectives des travaux qui peuvent être menés dans le même axe de recherche de cette thèse :

- Étudie d'autres formes de structures : panneaux et coque cylindrique, poutre, structure à formes géométriques variables ou arbitraires.
- Applications des matériaux à gradient fonctionnel FGM et composites à rigidité variable.
- Étudie du comportement avec d'autres types de fluides : compressibles, réels et non Newtoniens.
- Influence du rayonnement thermique.



---

## Références bibliographiques

Almansi, E., (1897).

**Use of the stress function in thermoelasticity.**

*In: Memorie Della Reale Accademia Delle Scienze Torino, Series 2.*

Altay, G.A., Dökmeci, M., (1996).

**Fundamental variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields.**

*Int. J. Eng. Sci. 34 (7), 769e782.*

Altay, G.A., Dökmeci, M., (1996).

**Some variational principles for linear coupled thermoelasticity.**

*Int. J. Solid Struct. 33 (26), 3937e3948.*

Amabili M., Frosali G., Kawk M.K., (1996) .

**Free vibrations of annular plates coupled with fluids.**

*J. Sound Vib. 191 (5) 825–846.*

Ambartsumian SA, (1958).

**On the Theory of Bending Plates.**

*Izv Otd Tech Nauk. AN SSSR; 5:69–77.*

Asadi E, Fariborz SJ, (2012).

**Free vibration of composite plates with mixed boundary conditions based on higher-order shear deformation theory.**

*Arch Appl Mech; 82: 755–766.*

Aydogdu M, (2009).

**A new shear deformation theory for laminated composite plates.**

*Composite Structures 2009; 89: 94–101.*

Aydogdu M (2006).

**Comparison of various shear deformation theories for bending, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges.**

*J Compos Struct; 40(23): 2143-2155.*

Batra RC, Aimmanee S, (2005).

**Vibrations of thick isotropic plates with higher order shear and normal deformable plate theories.**

*Comput Struct; 83: 934-955.*

Bhaskar, K., Varadan, T.K., Ali, J.S.M., (1996).

**Thermoelastic solution for orthotropic and anisotropic composite laminates.**

*Composites Part B: Engineering 27 (5), (4), 350–361.*

Birsan, M., (2009).

**Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells.**

*European Journal of Mechanics - A/Solids 28 (1), 94–101.*

---

Blom FJ, (1998).

**A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem.**  
*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 167 369-391.

Bose A, Surana KS (1993).

**Piecewise hierarchical p-version axisymmetric shell element for non-linear heat conduction in laminated composites.**  
*Computers & Structures*;47:1-18.

Brennen, C.E. (1982).

**A Review of Added Mass and Fluid Inertial Forces.**  
*Technical Report CR82.010, Naval Civil Engineering Laboratory, Port Hueneme.*

Brischetto S, Torre R (2014).

**Exact 3D solutions and finite element 2D models for free vibration analysis of plates and cylinders.**  
*Curved and Layer Struct*; 1: 59–92.

Brischetto S, (2014).

**An exact 3D solution for free vibrations of multilayered cross-ply Composite and sandwich plates and shells.**  
*International Journal of Applied Mechanics*; 6(6): 1450076.

Brischetto S, Carrera E, (2009).

**Thermal stress analysis by refined multilayered composite shell theories.**  
*Journal of Thermal Stresses* 32 (1), 165–186.

Brischetto S., Carrera. E, (2011).

**Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells.**  
*Mechanics Research. Communications* 38 449– 455.

Brischetto, S., (2009).

**Effect of the through-the-thickness temperature distribution on the response of layered and composite shells.**  
*International Journal of Applied Mechanics* 1 (4), 1–25.

Brischetto, S., Carrera, E., (2009).

**Thermal stress analysis by refined multilayered composite shell theories.**  
*Journal of Thermal Stresses* 32 (1), 165–186.

Brischetto, S., Leetsch, R., Carrera, E., Wallmersperger, T., Kröplin, B., (2008).

**Thermomechanical bending of functionally graded plates.**  
*Journal of Thermal Stresses* 31 (3), 286–308.

Causin P, Gerbeau J. F, Nobile F, (2005).

**Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems.**  
*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 194 4506-4527.

Cannarozzi, A.A., Umbertini, F.A., (2001).

**A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis.**  
*Int. J. Solid Struct.* 38 (4), 717e739.

Carrera E and Brischetto SA, (2008).

**Survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates.**  
*Appl. Mech. Rev;* 62(1): 010803.

Carrera, E., (2000).

**An assessment of mixed and classical theories for the thermal stress analysis of orthotropic multilayered plates.**  
*Journal of Thermal Stresses* 23 (9), 797–831.

Carrera, E., (2002).

**Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories.**  
*AIAA Journal* 40 (9), 1885–1896.

Carrera, E., (2003)a.

**Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells.**  
*Appl. Mech. Rev.* 56 (3), 287e308.

Carrera E, (2003)b.

**Theories and finite elements for multilayered plates and shells. A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking.**  
*Arch Comput Meth. Engng;* 10; 215–296.

Chao, M., Oh, J., (2004).

**Higher order zig-zag theory for fully-coupled thermoelectric-mechanical smart composite plates.**  
*Int. J. Solid Struct.* 41 (5e6), 1331e1356.

Cheung Y.K., Zhou D, (2000).

**Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate.**  
*J. Fluids Struct.* 14 339–357.

Cho KN, Bert CW, Striz A,G (1991).

**Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by high order individual-layer theory.**  
*J Sound Vib;* 145(3): 429-442.

Christensen R. M, (1998).

**The numbers of elastic properties and failure parameters for fiber composites.**  
*Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 120, pp. 110-113.

D. Zhou a, Y.K. Cheung, F.T.K. Au, S.H. Lo, (2002).

**Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method.**  
*Int. J. Solids Struct*, 63 39–6353.

Daneshjoo, K.C., Ramezani, M, (2002).

**Coupled thermoelasticity in laminated composite plates based on Green-Lindsay model.**  
*Compos. Struct.* 55 (4), 387e392.

Daneshjoo, K.C., Ramezani, M., (2004).

**Classical coupled thermoelasticity in laminated composite plates based on third-order shear deformation theory.**  
*Compos. Struct.* 64 (3e4), 369e375.

Das, N.C., Das, S.N., Das, B., (1983).

**Eigenvalue approach to thermoelasticity.**  
*J. Therm. Stress.* 6 (1), 35e43.

Den Hartog, J. P, (1956).

**Mechanical vibrations.**  
*DoverPublications.Com.*

Duhamel, J.M.C., (1837).

**Second memoire sur les phenomes thermomechaniques (second memorandum on thermo-mechanic phenomena).**  
*J. l'Ecol Polytech.* 15, 1e57.

Ergin A., Ugurlu B, (2003).

**Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid.**  
*J. Fluids Struct.* 17 927–939.

Espinosa F.M., Gallego-Juarez J.A,

**On the resonance frequencies of water-loaded circular plates.**  
*J. Sound Vib.* 94 (2) (1984) 217–222.

Felippa C.A, Park K. C, Farhat C, (2001).

**Partitioned analysis of coupled mechanical systems.**  
*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg,* 190 3247-3270

Fritz, R.J. (1972).

**The Effect of Liquids on the Dynamic Motions of Immersed Solids.**  
*Journal of Engineering for Industry,* 167-173.

Fu Y., Price W, (1987).

**Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid.**  
*J. Sound Vib.* 118 495–513.

Galilei G, (1638).

**Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze (Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences).**  
*Ludovico Elzeviro, Leida, Olanda.*

Haddara M.R., Cao S, (1996).

**A study of the dynamic response of submerged rectangular flat plates.**  
*Marine Struct.* 9 913–933.

Hagedorn P, (1994).

**A note on the vibration of infinite elastic plates in contact with water.**  
*J. Sound Vib.* 175 233–240.

Hamza-Cherif SM, (2006).

**Free vibration analysis of rotating cantilever plates using the p-version of the finite element method.**  
*Engineering and Mechanics*; 22: 151-167.

Heemskerk JF, Delil AAM, Daniels DHW, (1971).

**Thermal conductivity of honeycomb sandwich panels for space application.**  
*Technical report National Aerospace Laboratory NLR, The Netherlands.*

Hetnarski, R.B., Elsami, M.R., (2007).

**Thermal Stresses Advanced e Theory and Applications.**  
first ed. Springer.

Hosseini Hashemi S.H., Karimi M., Rokni Damavandi Taher H, (2010)a.

**Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads.**  
*Soil Dyn. Earthquake Eng.* 30 1487–1499.

Hosseini Hashemi S.H., Karimi M., Rokni Damavandi Taher H, (2010)b.

**Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method.**  
*Ocean Eng.* 37 174–185.

Houmat A, (1997).

**An Alternative Hierarchical Finite Element Method Formulation Applied to Plate Vibrations.**  
*Journal of Sound and Vibration*, 206(2):201-215.

Houmat A, (2001).

**A Sector Fourier p-ELEMENT applied to free vibration analysis of sector plates.**  
*Journal of Sound and Vibration*, 243(2):269-282.

Houmat A, (2001).

**A Sector Fourier p-Element for free vibration analysis of annular sectorial membranes.**  
*Computers and Structures*, 79:1147-1152.

Hron J, Turek S (2006).

**A Monolithic FEM/Multigrid Solver for an ALE Formulation of Fluid-Structure Interaction with Applications in Biomechanics.**  
*Fluid-Structure Interaction*, 53 146-170.

- Ibrahimbegovic, A, Colliat, J.B, Davenne, L, (2005).  
**Thermomechanical coupling in folded plates and non-smooth shells.**  
*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (21e24), 2686e2707.
- Ishihara D, Yoshimura S, (2005).  
**A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure Poisson equation.**  
*Int. J. Numer. Meth. Engng*, 64 167-203.
- Jalali A, (2012)  
**Dynamic analysis of isotropic and laminated reinforced composite plates subjected to flowing fluid.**  
*Maîtrise des sciences appliquées (Génie mécanique), université de Montréal.*
- Jeong K.H., Yoo G.H., Lee S.C, (2004).  
**Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates.**  
*J. Sound Vib.* 272 539–555.
- Jiahao Lin, Weiping She and F. W. Williams, (1994).  
**A high precision direct integration scheme for structures subjected to transient dynamic loading.**  
*Computers and Structures* 0045-7949(94)00537-O.
- Kant T, Swaminathan K, (2001).  
**Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory.**  
*Composite structures* 2001; 53: 73-85.
- Kant T, Varaiya JH, Arora CP, (1990).  
**Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based a refined theory and implicit time integration shemes.**  
*Comput Struct*; 36: 401-420.
- Kapuria S, Kulkarni SD, (2007).  
**An improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory for static analysis of composite and sandwich plates.**  
*J Numer Method Eng* 2007; 69: 1948-1981.
- Karama M, Afaq KS, and Mistou S, (2003).  
**Mechanical Behaviour of Laminated Composite Beam by the New Multi-Layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity.**  
*Inter J Solids Struct*; 40(6): 1525–1546.
- Kerboua Y., Lakis A.A., Thomas M., Marcouiller L, (2008) .  
**Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid.**  
*Appl. Math. Model.* 32 2570–2586.
- Khare, R.K, Kant, T, Garg, A.K, (2003).  
**Closed-form thermo-mechanical solutions of higher-order theories of cross-ply laminated shallow shells.**  
*Composite Structures* 59 (3), 313–340.

---

Khdeir, A.A, (1996).

**Thermoelastic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells.**  
*International Journal of Solids and Structures* 33 (27), 4007–4017.

Kim K.C., Kim J.S., Lee H.Y, (1979).

**An experimental study on the elastic vibration of plates in contact with water.**  
*J. Soc. Naval Archit.* 16 (2) 1–7.

Kito F, (1944).

**On the added mass of flat plates vibrating in water.**  
*Zoxen Kyokai Japan* 266 1–10 (in Japanese).

Kwak M.K.,

**Hydroelastic vibration of rectangular plates.**  
*J. Appl. Mech.-T ASME* 63 110–115.

Kwak M.K., Kim K.C, (1991).

**Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid.**  
*J. Sound Vib.* 146 (3) 381–389.

Lamb H, (1920).

**On the vibrations of an elastic plate in contact with water.**  
*Proc. R. Soc. London, Ser. A* 98 205–206.

Lee W-H and Han S-C (2006)

**Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed shell strain element.**  
*Computational Mechanics*, 39: 41-58.

Lee, Z.Y, (2006).

**Generalized coupled transient thermoelastic problem of multilayered hollow cylinder with hybrid boundary conditions.**  
*Int. Commun. Heat Mass Transf.* 33 (4), 518e528.

Leissa A.W, (1973).

**The free vibration of rectangular plates.**  
*J. Sound Vib.* 31 257–293

Levinson M, 1980.

**An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates.**  
*Mech Res Commun*; 7: 343-350.

Liang C.C., Liao C.C., Tai Y.S, Lai W.H, (2001).

**The free vibration analysis of submerged cantilever plates.**  
*Ocean Eng.* 28 1225–1245.

Liang, Q. W., Rodriguez, C., Egusquiza, E., Escaler, X., Farhat, M., Avellan, F., and Rodriguez, C. G, (2007).

**Numerical simulation of fluid added masse effect on a francis turbine runner.**  
*Computers & Fluids* 36, 6, 1106-1118.

- Liang, Q.W., Rodriguez, C.G, Egusquiza, E., Escaler, X., Avellan, F. (2006).  
**Modal Response of Hydraulic Turbine Runners.**  
*23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Yokohama.* Lim a
- Liew C.W, b K.M, Kitipornchai S, (1998).  
**A Numerical aspects for free vibration of thick Part I: Formulation and verification plates.**  
*Comput. Methods Appl. Mech. Eng, 156 15-29.*
- Lindholm U.S., Kana D.D., Chu W.H., Abramson H.N, (1965).  
**Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water.**  
*J. Ship Res. 9 (1) 11–22.*
- Lo KH, Christen RM, Wu EM, (1979).  
**A higher order rhey of plate deformation – Part 1: Homogeneous plates.**  
*ASME, J Appl Mech; 44: 663-668.*
- Love AEH, (1888).  
**On the small free vibrations and deformations of elastic shells.**  
*Philosophical trans of the Royal Society (London); 17: 491–549.*
- M.R. Haddara, S. Cao, (1996).  
**A study of the dynamic response of submerged rectangular flat plates.**  
*Mar. Struct. 9 913–933.*
- Matsunaga H.  
**Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory.**  
*Composite Structures 2000; 48: 231-244.*
- McLachlan N.W, (1932).  
**The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid.**  
*Proc. Phys. Soc. London 44 546–555.*
- Meunier M, Shenoi RA, (1999).  
**Free vibration analysis of composite sandwich plates.**  
*ProcImechE, Part C. J Mech Engng Sci; 213(7): 715–727.*
- Meyerhoff W.K, (1970).  
**Added masses of thin rectangular plates calculated from potential theory.**  
*J. Ship Res. 14 100–111.*
- Meylan M.H, (1997).  
**The forced vibration of a thin plate floating on an infinite liquid.**  
*J. Sound Vib. 205 (5) 581–591.*
- Mindlin RD. Schacknow, (1956).  
**Deresiewicz A. Flexural vibrations of rectangular plates.**  
*ASME, J Appl Mec; 23: 430–436.*



- Mindlin, R. D, (1951).  
**Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.**  
*J. Appl. Mech.* 18, 31-38.
- Mindlin, R.D. Schacknow, A. Deresiewicz (1955).  
**Flexural vibrations of rectangular plates.**  
*ASME J. Appl. Mec*, 23 (1956) 430–436.
- MULCAHY, T.M, (1980).  
**Fluid Forces on Rods Vibrating in Finite Length Annular Regions.**  
*Journal of Applied Mechanics Volume 47*, 234-240.
- Murty MVV, (1981).  
An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates.  
*NASA Technical Paper 1903*.
- Muthuveerappan, Ganesan N., Veluswami M.A, (1979).  
**A note on vibration of a cantilever plate immersed in water G.**  
*J. Sound Vib.* 63 385–391.
- N. C. Pal, P. K. Sinha, and S. K. Bhattacharyya, (2001)  
**Finite element dynamic analysis of submerged laminated composite plates.**  
*Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 20, pp. 547-563.
- Natarajan S, Ferreira AJM, Bordas SPA, Cinefra EM, (2013).  
**Analysis of composite plates by a unified formulation-cell based smoothed finite element method and field consistent elements.** *Composite Structures*; 105: 75–81.
- Nayak A.K, Moy S.S.J,Shenoi R.A, (2002).  
**Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher order theory.**  
*Composites Part B: Engineering.* 33 (7) 505-519.
- Nayak AK, Shenoi RA, Moy SSJ, (2004).  
**Transient response of composite sandwich plates.**  
*Comput Struct*; 64: 249-267.
- Nelson RB. Lorch DR, (1974).  
**A refined theory for laminated orthotropic plates.**  
*ASME, J Appl Mech*; 41: 177-183.
- Neumann, F., (1885).  
**Vorlesung über die theorie des elasticität der festen körper und des lichtäters.**  
*Teubner, Leipzig*.
- Noack J, Rolfes R, Tessmer J, (2003).  
**New layer wise theories and finite elements for efficient thermal analysis of hybrid structures.**  
*Computers and Structures* 81, 2525–2538.

- 
- Nosier A, Kapania RK, Reddy JN, (1993).  
**Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory.**  
*AIAA J*; 31(12): 2335-46.
- Nowinski, J.L., (1978).  
**Theory of Thermoelasticity with Applications.**  
*First ed. Spinger, Sijthoff and Noordoff, The Netherlands.*
- Padovan J, (1974).  
**Steady conduction of heat in linear and nonlinear fully anisotropic media by finite elements.**  
*Journal of Heat Transfer*; 96:313-8.
- Peake W.H., Thurston E.G, (1954).  
**The lowest resonant frequency of a water-loaded circular plate.**  
*J. Acoust. Soc. Am.* 26 (7) 166–168.
- Piperno S, (1997).  
**Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations.**  
*Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 1207-1226.
- Powell J.H., Roberts J.H.T, (1923).  
**On the frequency of vibration of circular diaphragm.**  
*Proc. Phys. Soc. London* 35170–35182.
- Rolfes R, Rohwer K, (2000).  
**Integrated thermal and mechanical analysis of composite plates and shells, Composites. Science and Technology** 60 2097-2106.
- Reddy J. N, (2004).  
**Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis.**  
*CRC Press.*
- Reddy JN, (1984)a.  
**A simple higher-order theory for laminated composite plates.**  
*ASME, J Appl Mech*; 51: 745-752.
- Reddy JN, (1984)b.  
**Energy and variational methods in applied mechanics.**  
*Wiley, London.*
- Reddy, J. N., (1997)a.  
**Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis.**  
*CRC Press, Boca Raton, Florida.*
- Reddy, J. N, (1999).  
**Theory and Analysis of Elastic Plates.**  
*Taylor & Francis, Philadelphia, PA.*
-

---

Robinson N.J., Palmer S.C, (1990).

**A modal analysis of a rectangular plate floating on an incompressible liquid.**  
*J. Sound Vib.* 142 453–460.

Rolfes, R., Noack, J., Taeschner, M., (1999).

**High performance 3D-analysis of thermo-mechanically loaded composite structures.**  
*Composite Structures* 46 (4), 367–379.

S. Srinivas, C.V. Joga Rao, A.K. Rao, (1970).

**An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick.**  
*Rectangular plates, J. Sound Vib.* 12(2) 187-199.

Senthilnalhan NR, Lim KH, Lee KH. Chow ST, (1987).

**Buckling of shear deformable plates.**  
*AIAA J* ; 25(9): 1268-71.

Shahrokh Hosseini-Hashemi a, Mahmoud Karimi a, Hossein Rokni a,b, (2012).

**Natural frequencies of rectangular Mindlin plates coupled with stationary fluid.**  
*Applied Mathematical Modelling* 36 764–778

Soldatos KP, Timarci T, (1993).

**A unified formulation of laminated composites, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories.**  
*Compos Struct* 1993; 25: 165–171.

Soldatos KP, (1992).

**A Transverse Shear Deformation Theory for Homogeneous Monoclinic Plates.**  
*Acta Mechanica*; 94: 195–200.

Swaminathan K, Patil SS, (2008).

**Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates.**  
*Composite Structures*; 82: 209–216.

Szabo BA, and Sahrman GJ, (1988).

**Hierarchical plate and shells models based on p extension.**  
*Int J Numer Method Eng*; 26: 1855-1881.

Szabo BA, Babuska I, (1990).

**Finite Element Analysis.**  
*Wiley-Interscience, New York 1991.*

Tamma KK, Yurko AA, (1988).

**A unified finite element modelling/analysis approach for thermal structural response in layered composites.**  
*Computers & Structures*;29:743-54.

Tanaka, M., Matsumoto, T., Morandi, M., (1995).

**Application of boundary element method to 3-D problems of coupled thermoelasticity.**  
*Eng. Anal. Bound. Elem.* 16 (4), 297e303.

Tayler R.E., Ohkusu M, (2000).

**Green functions for hydroelastic analysis of vibrating free-free beams and plates.**  
*Appl. Ocean Res.* 22 295–314.

Tedone, O, (1906).

**Allgemeine theoreme der matematischen elastizitätslehre (integration theorie).**  
*Encykl. mat. Wiss.* 4 (Part D), 55e124.

Touratier M, (1991).

**An efficient standard plate theory.**  
*Int J Eng Sci;* 29 (8): 901–916.

Tungikar V., Rao, B.K.M, (1994).

**Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates.**  
*Composite Structures* 27 (4), 419–430.

U.S. Lindholm, D.D. Kana, W.H. Chu, et al, (1965).

**Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water.**  
*J. Ship Res.* 9 (1) 11–22.

Ugurly B., Kutlu A., Ergin A., Omurtag M.H, (2008).

**Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid,**  
*J. Sound Vib.* 317 308–328.

Van Brummelen E. H, (2009).

**Added mass effects of compressible and incompressible flows in fluid-structure interaction.**  
*Journal of Applied Mechanics,* 76 021206 1-7.

van Brummelen E. H, (2011).

**Partitioned iterative solution methods for fluid-structure interaction.**  
*Int. J. Numer. Meth. Fluids,* 65 3-27.

Voigt, W, (1910).

**Lehrbuch der Kristallphysik.**  
*Teubner, Berlin.*

Volcy G.C., Morel P., Bureau M., Tanida K. (1979).

**Some studies and researches related to the hydroelasticity of steel work,**  
*in: Proceedings of 122nd EUROMECH Colloquium on Numerical Analysis of the Dynamics of Ship Structures, Ecole Polytechnique, Paris, , pp. 403–436.*

Wang C.M., Reddy J.N, Lee K.H, (2000).

**Shear Deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions.**  
*ELSEVIER, July.*

Wanxie Zhong, Zhu Jianing, Xiang-Xiang Zhong, (1996).

**On a new time integration method for solving time dependent partial differential equations, frompul.**

*Methods Appl. Mech. Engrg.* 13 (1) 163-178.

Whitney JM, Pagano NJ, (1970).

**Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates.**

*ASME, J Appl Mech;* 37(4): 1031-1036.

Wüchner R, Kupzok A, Bletzinger Kai-Uwe, (2007).

**A framework for stabilized partitioned analysis of thin membrane–wind interaction.**

*Int. J. Numer. Meth. Fluids,* 54 945-963

Wu CP, Chen WY, (1994).

**Vibration and stability of laminated plates based on a local high order plate theory.**

*J Sound Vib;* 177(4): 503-520.

Wu, Z., Chen, W., (2008).

**A global-local higher order theory for multilayered shells and the analysis of laminated cylindrical shell panels.**

*Composite Structures* 84 (4), 350–361.

Y. Fu, W.G. Price, (1987).

**Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid.**

*J. Sound Vibrat.* 118 (3) 495–513.

Y. Kerboua, A.A. Lakis, M. Thomas, L. Marcouiller, (2008).

**Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid.**

*Appl. Math. Model.* 32 2570–2586

Zhou D., Cheung Y.K., (2000).

**Vibration of vertical rectangular plate in contact with water on one side.**

*Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 29 693–710.

Zienkiewicz OC, Taylor RL (2005).

**The finite elemnt method for solid and structural mechanics.**

*Elsevier.*

## Site internet

<http://www.onera.fr>

ANSYS [www.ansys.com](http://www.ansys.com)

CD-ADAPCO <http://www.cd-adapco.com/>

STRUCTURAE <http://structurae.info/ouvrages/>

MERETMARINE <http://www.meretmarine.com/fr/>

THECONSTRUCTIONINDEX <http://www.theconstructionindex.fr/>

PREDICTIVEENGINEERING <http://www.predictiveengineering.com/>

SIMUTECHGROUP [www.simutechgroup.com/Software/ANSYS/](http://www.simutechgroup.com/Software/ANSYS/)

IPNL.IN2P3 [www.ipnl.in2p3.fr](http://www.ipnl.in2p3.fr)

FUTURA-SCIENCES <http://www.futura-sciences.com/>

# Annexe A

## Plaque immergée

**Tableau A.1 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich ELLL, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).

[90/-60/30/core/90/-60/30]												
Mod es	$h_1/a$											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	15.15	7.713	6.52	5.874	5.568	5.434	5.378	5.354	5.344	5.34	5.339	5.338
2	28.50	14.724	12.465	11.237	10.656	10.401	10.293	10.248	10.23	10.222	10.219	10.218
3	43.68	27.205	23.023	20.752	19.677	19.206	19.006	18.923	18.889	18.875	18.869	18.866
4	52.83	36.352	30.739	27.697	26.258	25.627	25.36	25.249	25.203	25.184	25.176	25.173
5	71.17	41.545	35.125	31.647	30.002	29.28	28.975	28.848	28.796	28.774	28.765	28.762

**Tableau A.2 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AAAA, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).

[90/-60/30/core/90/-60/30]												
Mod es	$h_1/a$											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	55.83	26.321	22.815	21.032	20.22	19.87	19.723	19.662	19.637	19.626	19.622	19.62
2	93.38	44.015	38.152	35.17	33.811	33.226	32.981	32.879	32.837	32.819	32.812	32.809
3	95.29	44.896	38.915	35.873	34.487	33.89	33.639	33.536	33.493	33.475	33.468	33.465
4	121.6	57.348	49.709	45.825	44.054	43.291	42.972	42.839	42.784	42.762	42.752	42.749
5	136.3	64.301	55.737	51.383	49.397	48.542	48.184	48.035	47.973	47.948	47.938	47.934

**Tableau A.3 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich EEEE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).

[90/-60/30/core/90/-60/30]												
Mod es	$h_1/a$											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	63.792	29.996	26.01	23.987	23.065	22.668	22.501	22.432	22.404	22.392	22.387	22.385
2	101.17	47.644	41.318	38.105	36.641	36.011	35.746	35.637	35.592	35.573	35.565	35.562
3	103.22	48.581	42.129	38.853	37.36	36.717	36.447	36.335	36.289	36.27	36.262	36.259
4	131.30	61.825	53.616	49.446	47.546	46.728	46.385	46.243	46.184	46.16	46.15	46.146
5	146.61	69.06	59.892	55.235	53.113	52.2	51.817	51.658	51.592	51.565	51.554	51.549

**Tableau A.4 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque sandwich AEAE, en fonction du niveau du liquide ( $h_1$  variable et  $h_2 \gg a$ ).

[90/-60/30/core/90/-60/30]												
Mod es	$h_1/a$											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	59.673	28.092	24.356	22.457	21.591	21.219	21.063	20.998	20.971	20.96	20.955	20.954
2	96.909	45.618	39.549	36.466	35.061	34.456	34.202	34.097	34.053	34.036	34.028	34.025
3	99.562	46.91	40.672	37.502	36.057	35.435	35.174	35.066	35.022	35.003	34.996	34.993
4	126.42	59.55	51.631	47.607	45.773	44.983	44.652	44.514	44.458	44.434	44.425	44.421
5	140.21	66.049	57.266	52.802	50.768	49.892	49.525	49.373	49.31	49.284	49.273	49.269

**Plaque totalement immergée au fond****Tableau A.5 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich ELLL.

Mod es	[90/-60/30/core/90/-60/30]											
	h1/a											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	15.15	26.381	11.077	8.572	7.697	7.355	7.216	7.159	7.136	7.127	7.123	7.121
2	28.50	43.68	21.028	16.343	14.694	14.046	13.784	13.677	13.633	13.615	13.607	13.604
3	43.68	47.554	38.905	30.207	27.151	25.951	25.465	25.266	25.185	25.151	25.138	25.132
4	52.83	88.493	43.68	40.389	36.279	34.667	34.015	33.748	33.639	33.594	33.575	33.568
5	71.17	98.434	52.14	43.68	41.461	39.617	38.871	38.566	38.441	38.39	38.369	38.36

**Tableau A.6 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AAAA.

Mod es	[90/-60/30/core/90/-60/30]											
	h2/a											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	55.83	57.273	35.747	29.854	27.657	26.781	26.424	26.278	26.219	26.194	26.184	26.180
2	93.38	95.795	59.781	49.924	46.249	44.784	44.188	43.944	43.844	43.803	43.786	43.779
3	95.29	97.757	60.984	50.926	47.176	45.681	45.073	44.824	44.722	44.68	44.663	44.656
4	121.6	124.80	77.889	65.047	60.259	58.35	57.574	57.256	57.126	57.072	57.05	57.041
5	136.3	139.89	87.326	72.932	67.565	65.425	64.554	64.198	64.052	63.992	63.967	63.957

**Tableau A.7 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich EEEE.

Mod es	[90/-60/30/core/90/-60/30]											
	h2/a											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	63.792	65.044	40.722	34.041	31.549	30.555	30.151	29.985	29.917	29.889	29.878	29.873
2	101.17	103.14	64.659	54.063	50.109	48.531	47.89	47.627	47.52	47.475	47.457	47.45
3	103.22	105.24	65.939	55.129	51.095	49.486	48.832	48.564	48.454	48.409	48.391	48.383
4	131.30	133.87	83.906	70.155	65.023	62.976	62.144	61.803	61.663	61.606	61.582	61.573
5	146.61	149.47	93.717	78.363	72.632	70.347	69.417	69.037	68.88	68.816	68.79	68.779

**Tableau A.8 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur de fluide d'une plaque sandwich AEAE.

Mod es	[90/-60/30/core/90/-60/30]											
	h2/a											
	Libre	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	59.673	61.016	38.145	31.873	29.533	28.601	28.221	28.066	28.002	27.976	27.965	27.961
2	96.909	99.09	61.943	51.757	47.958	46.443	45.827	45.575	45.472	45.429	45.411	45.404
3	99.562	101.79	63.684	53.219	49.315	47.758	47.125	46.866	46.759	46.716	46.698	46.69
4	126.42	129.26	80.85	67.561	62.604	60.628	59.824	59.495	59.36	59.304	59.281	59.272
5	140.21	141.04	89.672	74.934	69.436	67.244	66.352	65.987	65.838	65.776	65.751	65.74



**Plaque immergée avec surface à l'air libre****Tableau A.9 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $hl$  de fluide, d'une plaque sandwich ELLL immergée avec une surface à l'air libre.

		[90/-60/30/core/90/-60/30]											
		$h1/a$											
Mod es	Libre	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	10	20
1	15.15	4.926	6.203	6.738	6.962	7.055	7.093	7.115	7.118	7.118	7.119	7.12	7.12
2	28.50	9.433	11.864	12.879	13.303	13.479	13.551	13.593	13.598	13.598	13.601	13.602	13.602
3	43.68	17.416	21.911	23.789	24.574	24.9	25.034	25.112	25.121	25.121	25.125	25.128	25.128
4	52.83	23.234	29.249	31.766	32.819	33.256	33.436	33.541	33.554	33.554	33.559	33.563	33.563
5	71.17	26.545	33.422	36.3	37.504	38.004	38.21	38.33	38.344	38.344	38.35	38.354	38.354

**Tableau A.10 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $hl$  de fluide, d'une plaque sandwich AAAA immergée avec une surface à l'air libre.

		[90/-60/30/core/90/-60/30]											
		$h1/a$											
Mod es	Libre	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	10	20
1	55.83	18.107	22.805	24.772	25.595	25.937	26.078	26.136	26.16	26.17	26.174	26.177	26.177
2	93.38	30.279	38.134	41.425	42.802	43.373	43.609	43.706	43.746	43.763	43.769	43.774	43.774
3	95.29	30.883	38.897	42.254	43.659	44.242	44.482	44.582	44.622	44.639	44.646	44.651	44.651
4	121.6	39.451	49.687	53.973	55.768	56.512	56.819	56.946	56.998	57.019	57.028	57.034	57.034
5	136.3	44.237	55.712	60.518	62.53	63.364	63.709	63.85	63.909	63.933	63.943	63.95	63.95

**Tableau A.11 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $hl$  de fluide, d'une plaque sandwich EEEE immergée avec une surface à l'air libre.

		[90/-60/30/core/90/-60/30]											
		$h1/a$											
Mod es	Libre	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	10	20
1	63.79	20.658	26.02	28.266	29.206	29.596	29.757	29.824	29.851	29.862	29.867	29.87	29.87
2	101.1	32.819	41.333	44.898	46.391	47.01	47.266	47.371	47.414	47.432	47.439	47.444	47.444
3	103.2	33.462	42.145	45.781	47.303	47.935	48.195	48.303	48.347	48.365	48.372	48.378	48.378
4	131.3	42.587	53.635	58.262	60.199	61.002	61.334	61.47	61.526	61.55	61.559	61.566	61.566
5	146.6	47.574	59.914	65.081	67.244	68.142	68.512	68.665	68.727	68.753	68.764	68.771	68.771

**Tableau A.12 :** Variation de la fréquence propre (rd/s) en fonction de la hauteur  $hl$  de fluide, d'une plaque sandwich EAEA immergée avec une surface à l'air libre.

		[90/-60/30/core/90/-60/30]											
		$h2/a$											
Mod es	Libre	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	10	20
1	59.67	19.337	24.355	26.457	27.337	27.702	27.852	27.914	27.94	27.95	27.955	27.958	27.958
2	96.90	31.4	39.549	42.962	44.391	44.983	45.228	45.329	45.37	45.387	45.394	45.399	45.399
3	99.56	32.294	40.671	44.18	45.648	46.258	46.509	46.613	46.655	46.673	46.68	46.685	46.685
	126.4	40.995	51.63	56.085	57.949	58.722	59.042	59.173	59.227	59.25	59.259	59.265	59.265
	140.2	45.469	57.265	62.205	64.273	65.131	65.485	65.631	65.691	65.716	65.726	65.733	65.733

## Résumé

Le comportement dynamique d'une structure est influencé par le milieu où elle se trouve, parmi les milieux qui sollicitent le plus la structure, on a le contact avec le fluide et le chargement thermique. Le présent travail étudie une plaque sandwich immergée dans un fluide avec une surface à l'air libre, soumise à une contrainte thermique. La modélisation de la plaque est faite par un modèle de troisième ordre développé par Reddy TSDT (Third Order Shear Déformation Theory), tandis que la fonction potentielle de vitesse de l'équation de Bernoulli est employée pour obtenir la pression du fluide appliquée sur la surface libre de la plaque. La théorie des couches thermiques TLT (Thermal Layers Theory) est utilisée pour transformer le problème thermique tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Ensuite, un élément-p rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et quatre côtés est utilisé pour modéliser la structure, le fluide et la conduction thermique. Dans la partie structure, les fonctions de formes utilisées sont trigonométrique de type C0 pour les déplacements membranaires et les rotations, et de type C1 pour les déplacements flexionnels. Dans la partie fluide-structure, seules les fonctions de formes de type C1 sont nécessaires pour modéliser les vitesses flexionnelles, la partie thermique est modélisée par des fonctions de forme trigonométriques de types C0 où les degrés de liberté aux nœuds sont la température, le gradient de température et la courbure de la température. L'étude thermo-élastique permet de déterminer les déplacements de la plaque immergée par la méthode de Newmark. Finalement, une étude de convergence de notre code de calcul élaboré est faite, les résultats trouvés sont validés avec ceux trouvés dans la littérature, différentes études paramétriques sont faites pour les plaques sandwich dans différents problèmes (structure, interaction fluide-structure, thermique et thermo-élastique).

**Mot clés:** vibration libre, plaque composite épaisse, plaque Sandwich, Méthode des éléments finis hiérarchiques, C1 TSDT, interaction fluide-structure, plaque immergée, conduction thermique, analyse thermo-élastique, méthode de Newmark.

## Abstract

The dynamic behavior of a structure is influenced by the environment in which it is located among the communities who solicit the most a structure; we have the contact with the fluid and the thermal loading. This work investigates a submerged sandwich plate in the fluid and subjected to thermal stress. The modeling of the plate is made by a third order model developed by Reddy TSDT (Third Order Shear Deformation Theory), while the potential function of speed of the Bernoulli's equation is used to obtain the fluid pressure applied to the free surface of the plate. The TLT theory (Theory Thermal Layers) is used to transform the three-dimensional problem to a two-dimensional thermal problem. Next, a rectangular p-element with four nodes at the vertices and four sides is used to model the structure, the fluid and the thermal conduction. In the structure part, the shape functions used are a trigonometric C<sup>0</sup> type for membrane displacements and rotations and C<sup>1</sup> type for flexional movements. In the fluid part only functions C<sup>1</sup> type are necessary to model flexional speeds, the thermal part, is modeled by C<sup>0</sup> type of shape functions where the degrees of freedom to the nodes are the temperature, the temperature gradient and the temperature curve. The thermo-elastic study allows to determine the displacements of the submerged plate by Newmark method. Finally, a study of convergence of our developed numerical code is made, the found results are validated with those found in the literature, different parametric studies are made for the sandwich plates in different problems (structure, and thermal fluid structure interaction).

**Key words:** free vibration, thick composite plates, sandwich plate, method of hierarchical finite element, C1 TSDT, fluid-structure interaction, immersed plate, heat conduction, thermo-elastic analysis, Newmarks method.

يتأثر الديناميكي للبنية الوسط الموجود فيه، من بين الا وساط التي تأثر اكثر على البنية نجد، التفاعل مع سائل و التحميل . في هذه الاطروحة، ندرس صفيحة على شكل ساندويش مغمورة في سائل الهواء الطلق و تعرض لإجهاد حراري. يتم نمذجة الصفيحة بواسطة نموذج من الدرجة الثالثة Reddy TSDT في حين يتم استخدام الدالة الكامنة للسرع لمعادلة Bernoulli المطبق على سطح الصفيحة. تستخدم نظرية TLT "نظرية الطبقات الحرارية" لتحويل المشكلة الحرارية ثلاثية الأبعاد إلى مشكلة ثنائية الأبعاد، يتم استخدام العنصر- p المستطيل المتكون اربعة جوانب لنمذجة البنية، السائل و التوصيل الحراري. في الجزء المخصص للهيكل، الدوال الشكلية المثلثية المستخدمة، من نوع C0 للانتقالات الافقية و الدورانية و من نوع C1 للانتقالات الانحنائية، بالنسبة للسائل الدوال الشكلية المستعملة من نوع C1 لازمة لنمذجة السرعة الانحنائية. الجزء الخاص بالحرارة منمذج بواسطة دوال شكلية مثلثية من نوع C0 حيث درجات الحرية في العقد هم على التوالي: درجة الحرارة، والتدرج في درجة الحرارة و الدراسة المطاطية. حرارية تسمح بتحديد الحركات لصفيحة تطفو فوق سائل بواسطة طريقة Newmark. في الاخير يتم اجراء دراسة التقارب لبرنامج الحاسوب مقدم، و التحقق من صحة النتائج المتحصل عليها مع تلك الموجودة في الابحاث، يتم اجراء دراسات حدودية مختلفة لصفائح من شكل ساندويش (هيكل، حرارية، تواصل الهيكل مع السائل و المطاطية. حراري).

المفتاحية: الاهتزاز صفيحة سميكة، صفيحة ساندويش، طريقة صفيحة هيكلي، صفيحة مغمورة، التوصيل مطاطي- حراري طريقة Newmark. المتناهية المثلثية، C1 TSDT