

LISTE DES ABREVIATIONS

V	Volume total de sol
V_V	Volume de vide
V_s	Volume de partie solide
V_W	Volume de liquide
V_G	Volume de gaz
P	Poids de sol
P_s	Poids de solide
P_W	Poids de l'eau
h	charge hydraulique
u_w	Pression d'eau
γ_w	Poids volumique de l'eau
v	Vitesse d'écoulement de l'eau
g	Accélération de la pesanteur
i	Gradient hydraulique
Q.....	Débit d'écoulement
η	Porosité
Δh	Perte de charge du fluide
R_e	Le nombre de Reynolds
K	Perméabilité
t.....	Temps
S_r	Dégré de saturation
Θ	Teneur en eau volumique
Ψ	Succion
D_0	Diffusivité à la saturation
x, y, et z	Coordonnées cartésien

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre I : Notions de base sur les écoulements	
I.1 : Introduction	2
I.2 : L'eau dans le sol.....	2
I.2.1 : L'eau libre	2
I.2.2 : L'eau capillaire.....	2
I.2.3 : L'eau de constitution	2
I.2.4 : L'eau liée ou adsorbée (Eau de rétention).....	2
I.2.5 : Etude du mouvement d'eau dans le sol.....	3
I.2.5.1 : Théorie de la consolidation	3
I.2.5.2 : Théorie hydrique du sol	3
I.2.6 : Charge hydraulique	3
I.2.7 : Gradient hydraulique	4
I.2.8 : Vitesse d'écoulement.....	4
I.2.9 : Lignes de courant	4
I.3 : Loi de Darcy	5
I.3.1 : Perméabilité	5
I.3.1.1 : Le coefficient de perméabilité	5
I.3.1.2 : La perméabilité intrinsèque	5
I.3.2 : Limite de la loi de Darcy	5
I.3.3 : Généralisation de la loi de Darcy.....	6
I.3.3.1 : Equations des écoulements en régime permanent.....	6
I.3.3.2 : Cas particuliers	7
I.4 : Généralités sur la résolution de ces équations	8
I.4.1 : Conditions aux limites des écoulements souterrains	9
I.4.1.1 : Surface imperméable (condition de Newman).....	9
I.4.1.2 : Surfaces équipotentiels (condition de Dirichlet)	9
I.4.1.3 : Surface de suintement	9
I.4.1.4 : Surface libre (condition mixte).....	9
I.4.2 : Méthodes de résolution de ces équations.....	10
I.4.2.1 : Méthodes analytiques.....	10
I.4.2.2 : Méthodes de similitudes.....	10
I.4.2.3 : Modèles réduits.....	10
I.4.2.4 : Modèles analogiques	11
I.4.2.5 : Méthodes graphiques	11
I.4.2.6 : Méthodes numériques	12
I.5 : Conclusion.....	14

Chapitre II: Processus d'infiltration dans les sols non saturés

II.1 : Introduction	15
II.2 : Aperçu général sur le processus.....	15
II.2.1 : Définitions.....	15
II.2.2 : Paramètres descriptifs de l'infiltration.....	15
II.2.3 : Distribution de l'eau dans le sol durant l'infiltration	17
II.2.4 : Influence de certains paramètres du sol sur l'infiltration.....	18
II.3 : Succion dans le sol et relation avec les paramètres hydrodynamiques	21
II.3.1 : Succion dans le sol.....	21
II.3.2 : Dispositifs de mesure de la succion dans le sol	22
II.3.3 : Relation teneur en eau – succion ; courbe de rétention d'un sol.....	26
II.3.4 : Relation entre la conductivité hydraulique et la succion du sol	27
II.4 : Conclusion.....	29

Chapitre III: Proposition d'une solution analytique

III.1 : Introduction	30
III.2 : Mouvement horizontal.....	30
III.2.1 : Méthode de Boltzmann.....	30
III.2.2 : Méthode de séparation de variables	34
III.2.3 : Méthode exp-fonction	36
III.3 : Mouvement vertical	36
III.4 : Mouvement bidimensionnel	39
III.4.1 : Revue des travaux antérieurs.....	39
III.4.2 : Positionnement de problème à résoudre	40
III.4.3 : Formulation mathématique et méthodologie	41
III.4.3.1 : Cas d'une variation exponentielle de paramètres $K(u)$ et $C(u)$...	41
III.4.3.2 : Cas d'une variation exponentielle en U (exp-fonction)	43
III.4.4 : Résultats et interprétation	45
III.5 : Conclusion.....	47

Chapitre IV: Analyses numériques des écoulements en régime transitoire

IV 1 : Introduction	48
IV.2 : Description globale de la méthodologie	48
IV.3 : Cas d'une colonne verticale (imbibition 1D) (BENYELLES, 1988).....	50
IV.3.1 : Introduction.....	50
IV.3.2 : Conditions aux limites et propriétés des matériaux.....	50
IV.3.3 : Paramètres de convergence	52
IV.3.4 : Résultats et discussion	52
IV.3.5 : Influence de la perméabilité à saturation sur le phénomène d'imbibition	55
IV.3.6 : Influence de la teneur en eau à saturation sur l'évolution de phénomène	56

IV.4 : Réponse hydraulique d'un barrage en terre.....	57
IV.4.1 : Géométrie et conditions aux limites.....	57
IV.4.1.1 : Phase de réservoir vide.....	58
IV.4.1.2 : Phase de remplissage.....	58
IV.4.1.3 : Phase d'exploitation de réservoir plein.....	59
IV.4.1.4 : Phase de vidange rapide.....	59
IV.4.2 : Propriétés de matériau.....	60
IV.4.3 : Résultats et discussions.....	60
IV.5 : Conclusion.....	67
CONCLUSION GENERALE.....	68
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	70

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre I: Notions de base sur les écoulements

Tableau 1.1: Analogie entre écoulement, thermique et électrique	11
---	----

Chapitre II: Processus d'infiltration dans les sols non saturés

Tableau II.1 : Dispositifs de mesure de la succion.....	26
---	----

Tableau II.2 : Quelques expressions empirique de la conductivité hydraulique	28
--	----

Chapitre IV: Analyses numériques des écoulements en régime transitoire

Tableau 4.1 : Caractéristiques numériques du test de la colonne.....	50
--	----

Tableau 4.2. Propriétés des matériaux utilisés pour le sol	52
--	----

Tableau 4.3. Valeurs de K_{sat}	55
---	----

Tableau 4.4. Valeurs de θ_{sat}	56
--	----

Tableau 4.5. Valeurs de temps et $H(Uw)$	58
--	----

Tableau 4.6. Valeurs de temps et $H(Uw)$	59
--	----

LISTE DES FIGURES

Chapitre I: Notions de base sur les écoulements

Figure 1.1: Définition des sols (Daniel Cordary, 1994)	2
Figure 1.2: L'eau gravitaire par égouttage selon (Gilbert Castany, 1998)	3
Figure 1.3: Ecoulement dans un barrage en terre et conditions aux limites.....	10
Figure 1.4: Ecoulement autour d'un rideau de palplanche et conditions aux limites	10
Figure 1.5: Réseau d'écoulement vers un tunnel à front ouvert (Atwa ; 1993)	10
Figure 1.6: Discrétisation du domaine du champ de potentiel.....	13

Chapitre II: Processus d'infiltration dans les sols non saturés

Figure 2.1 : Régime d'infiltration en fonction du temps : A :	16
Figure 2.2 : Schéma typique du profil hydrique au cours de l'infiltration (Musy, Soutter 1991)	17
Figure 2.3 : Profils de charge hydraulique et profils de teneur en eau au cours de l'infiltration dans un sol submergé en surface (Hillel, 1988)	18
Figure 2.4 : Influence de la masse volumique sèche initiale sur l'évolution des profils hydriques au cours d'une infiltration sur une colonne horizontale de silt de « Columbia » (Vachaud, 1968).....	19
Figure 2.5 : Influence de la teneur en eau volumique initiale sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Philip, 1957, 1969).....	19
Figure 2.6 : Influence de la charge d'eau appliquée en surface (h en cm d'eau) sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Philip, 1957, 1969)	19
Figure 2.7 : Influence du confinement sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration pour une infiltration sous charge positive dans une colonne verticale de sable (Vauclin. 1984)	20
Figure 2.8 : Influence de la gravité sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Musy et Soutter, 1991).....	20
Figure 2.9 : Influence de la gravité sur la forme du bulbe de saturation ($t_1 < t_2 < t_3$)	20
Figure 2.10 : Schéma du tensiomètre miniature (Ridley et Berland, 1993)	24
Figure 2.11 : Schéma du tensiomètre osmotique	24
Figure 2.12 : Schéma du psychromètre (Fredlund et Rahardjo, 1993) et cycle de mesure psychrométrique	25
Figure 2.13: Courbe de rétention	27
Figure 2.14 : Allure des relations entre la conductivité hydraulique, la succion et la teneur en eau	28

Chapitre 3: Proposition d'une solution analytique

Figure 3.1 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2.....	32
Figure 3.2 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2. Effet du temps.....	32
Figure 3.3 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5.....	32

Figure 3.4 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5. Effet du temps.....	32
Figure 3.5 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10.....	32
Figure 3.6 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10. Effet du temps.....	32
Figure 3.7 : Infiltration horizontale pour n = 2, $D_0 = 1$	33
Figure 3.8 : Infiltration horizontale pour n = 2, $D_0 = 1$. Effet du temps	33
Figure 3.9 : Infiltration horizontale pour n = 5, $D_0 = 1$	34
Figure 3.10 : Infiltration horizontale pour n= 5, $D_0 = 1$. Effet du temps	34
Figure 3.11 : Infiltration horizontale pour n = 10, $D_0 = 1$	34
Figure 3.12 : Infiltration horizontale pour n= 10, $D_0 = 1$. Effet du temps	34
Figure 3.13. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 40 premiers termes de la série.....	45
Figure 3.14. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 50 premiers termes de la série.....	45
Figure 3.15. Famille 1 : Variation spatiale de la succion pour différents instants. Valeur de u sont divisées par 10	46
Figure 3.16. Solution exacte pour la première famille k = 2	46
Figure 3.17. Solution exacte pour la première famille k = 4	46

Chapitre 4: Analyses numériques des écoulements en régime transitoire

Figure 4.1 : Maillage	51
Figure 4.2 : Condition initiale	51
Figure 4.3 : Modèle global.....	51
Figure 4.4 : Définition de l'axe AA	51
Figure 4.5 : Fonction de la teneur en eau volumétrique.....	52
Figure 4.6 : Fonction de la conductivité hydrique.....	52
Figure 4.7 : Variation de charge hydraulique en fonction de la distance : Effet du temps	53
Figure 4.8 : Variation de la pression interstitielle en fonction de la distance : Effet du temps	53
Figure 4.9 : Charge hydraulique en fonction du temps pour différents points le long de la verticale centrale	53
Figure 4.10 : Avancement de front d'humidification à différents instants.....	54
Figure 4.11 : Distribution de la pression interstitielle de l'eau le long de l'axe AA	54
Figure 4.12 : Effet de la perméabilité à saturation sur la pression interstitielle	56
Figure 4.13 : Effet de la teneur en saturation sur la pression interstitielle le long de l'axe AA.....	57
Figure 4.14 : Capture d'écran SEEP/W	57
Figure 4.15 : Conditions aux limites phase barrage vide	58
Figure 4.16 : Conditions aux limites phase de remplissage	58
Figure 4.17 : Conditions aux limites phase d'exploitation	59
Figure 4.18 : Conditions aux limite phase de vidange rapide	59

Figure 4.19 : Fonction de chargement : différentes phases	60
Figure 4.20 : Fonction de la teneur en eau	60
Figure 4.21 : Fonction de la conductivité hydraulique.....	60
Figure 4.22 : Etat initial.....	61
Figure 4.23 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de remplissage	61
Figure 4.24 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de l'exploitation	62
Figure 4.25 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de vidange.....	63
Figure 4.26 : Illustration des nœuds pour le calcul de bilan hydrique.....	63
Figure 4.27 : Evolution au cours du temps de flux d'eau cumulé en fonction du temps .	64
Figure 4.28 : Evolution au cours du temps de la pression de l'eau le long de l'axe BB	64
Figure 4.29 : Evolution au cours du temps de la charge le long de l'axe BB.....	64
Figure 4.30 : Evolution au cours du temps de la pression de l'eau le long de l'axe CC	65
Figure 4.31 : Evolution au cours du temps de la charge le long de l'axe CC.....	65
Figure 4.32 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique le long de drain.....	66
Figure 4.33 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique à la base.....	66
Figure 4.34 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique le long de l'axe CC .	67

INTRODUCTION GENERALE

La présence d'eau dans l'infrastructure des ouvrages en génie civil représente une menace qui peut engendrer une modification considérable sur les caractéristiques mécanique et hydrique du sol sous-jacent et par conséquent une modification de la stabilité.

Dans notre étude, on se focalise sur les aspects hydriques avec l'hypothèse principale que le milieu objet de cette étude est indéformable. Bien que cette hypothèse reste grossière elle peut être acceptable pour plusieurs situations de calcul de la réponse hydraulique des ouvrages géotechniques et hydro-électriques.

Mon travail de projet de fin d'études consiste à une contribution à l'analyse des écoulements en régime transitoire. Il s'agit de l'étude analytique et une analyse numérique de l'équation d'écoulement pour des situations très utiles dans la pratique de l'ingénieur : l'étude des déformations extrêmes par l'imbibition et le séchage d'une colonne de sol et l'analyse de caractère évolutif de réseau d'écoulement dans le corps d'un barrage en terre.

Après cette introduction et exposé de l'objectif de cette étude, ce mémoire est structuré comme suit :

Le **premier chapitre** est une présentation générale des notions de base sur les écoulements.

A la suite, la description du transfert hydrique en termes d'équation classique régissant les écoulements en non saturé, fait l'objet du **deuxième chapitre**. Dans le même contexte nous étudierons certaines méthodes de résolution de cas particuliers d'écoulement répondant à des conditions initiales et aux limites précises, et ne portant que sur le transfert isotherme de l'eau pure.

Nous présentons dans le **troisième chapitre** une proposition d'une solution analytique, sur la base de la technique exp-fonction. Les résultats ont fait l'objet des présentations graphiques afin qu'on puisse juger de la possibilité d'une exploitation pratique. Le chapitre contient aussi des solutions analytiques connues tel ceux de Philip et Parlange.

Le **quatrième chapitre** est une contribution purement numérique sur les écoulements en régime transitoire. Il s'agit de l'étude de la réponse hydrique d'un barrage en terre sous une fonction de charge fonction du temps bien définie. Cette fonction simule la mise en eau, l'exploitation et la vidange rapide.

Le modèle de la colonne vertical a fait l'objet de cette étude vu la disponibilité des données dans la littérature.

Nous achevons ce travail, par une conclusion générale qui reprend les conclusions partielles de chaque chapitre.

Chapitre I :

Notions de Base Sur

Les écoulements

De quoi constituer le sol ?

Qu'est qu'une perméabilité ?

Qu'est qu'un écoulement ?

Qu'est que la loi de Darcy ?

Qu'est qu'un gradient hydraulique ?

Qu'est qu'une infiltration ?

I.1 INTRODUCTION

Ce chapitre de caractère bibliographique constitue une reproduction des notions fondamentales et des éléments de base qui entrent dans la compréhension et la description des écoulements de l'eau dans les sols avec un regard de point de vue de la géotechnique.

Il est clair que l'effet de l'eau est très important tant sur le comportement mécanique que sur le comportement hydrique, toute fois, notre contribution dans ce projet de fin d'études ne porte que sur l'aspect hydrique sans tenir en compte ni de l'aspect mécanique ni de couplage hydromécanique.

I.2 L'EAU DANS LE SOL

Le sol peut contenir d'une manière globale dans sa structure trois éléments importants (figure 1.1) :

La matrice du sol constitue des particules solides ;

L'eau, particules liquides qui peuvent se mobiliser dans le sol sous certains efforts ;

L'air, qui représente les particules gazeuses.

On peut trouver tous ces trois constituants à la fois dans le sol. En cas d'absence d'air, on parle de sol saturé. Le cas échéant le sol est dit partiellement saturé du non saturé.

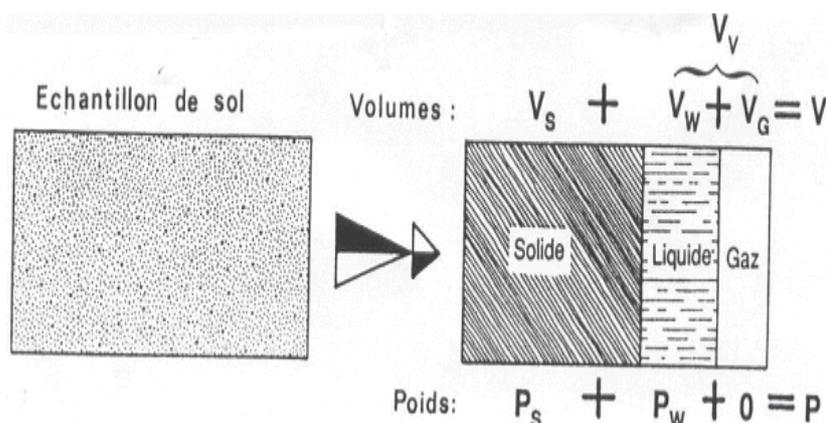


Figure 1.1: Définition des sols (Daniel Cordary, 1994)

I.2.1 L'eau libre

C'est la partie d'eau qui circule librement dans le sol via ses pores qui peuvent être reliées entre elles. Cette circulation est aussi assurée par les forces gravitaires ;

I.2.2 L'eau capillaire

C'est l'eau qui se migre dans les canaux les plus fines sous l'effet de la force gravitaire dans le sol non saturé ;

I.2.3 L'eau de constitution

C'est la partie d'eau qui entre dans la composition minérale du grain solide du sol.

I.2.4 L'eau liée ou adsorbée (Eau de rétention)

C'est la couche fine d'eau qui s'adhère à la périphérie des petites particules solides (les grains fins) sous l'effet des forces électrostatiques et celles d'attractions moléculaires. L'eau liée ne participe pas à la transmission des pressions.

La figure 1.2 résume l'eau gravitaire par égouttage.

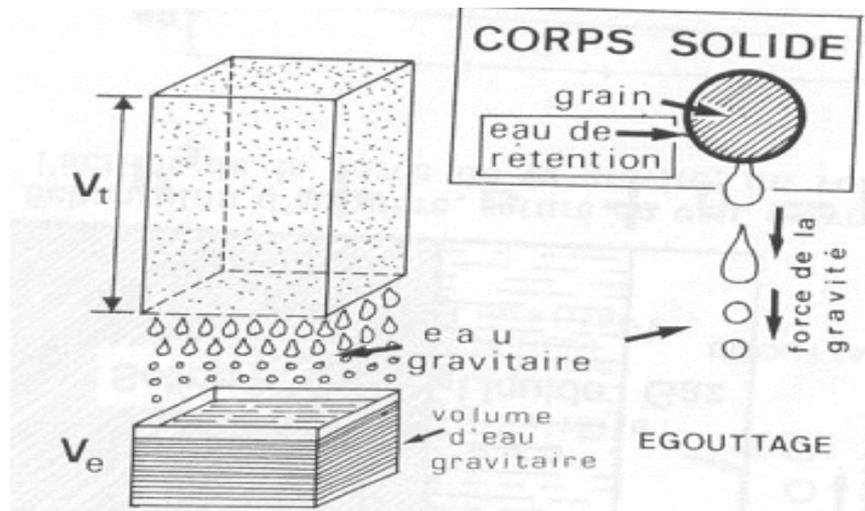


Figure 1.2: L'eau gravitaire par égouttage selon (Gilbert Castany, 1998)

1.2.5 Etude du mouvement d'eau dans le sol

L'étude du mouvement de l'eau libre ou l'eau mobilisable dans un sol est assurée par la porosité du sol. Ses réseaux de pores interconnectés permettent la circulation d'eau étayer par les forces gravitaires. Le mouvement d'eau souterraine est étudié suivant deux approches : la théorie de la consolidation et l'hydraulique du sol.

1.2.5.1 Théorie de la consolidation

Ce principe est basé sur la déformabilité du milieu au cours d'un écoulement transitoire causée par des sollicitations (facteurs externes) ou par le changement des conditions hydrauliques. On parle souvent du terme couplage pour désigner l'interaction dans le temps entre la déformation du sol et l'écoulement d'eau. Elle ne fait pas l'objet de ce projet de fin d'études.

1.2.5.2 Théorie Hydrique du sol

Cette approche est basée sur l'écoulement d'eau étant considéré comme un fluide parfait dans un milieu non déformable. (Benmebarek, N, 2003), ce principe permet de calculer les débits des barrages, des excavations, des puits et aussi de calculer les champs de pression d'eau qui s'avère utile pour l'étude de la stabilité des ouvrages géotechniques.

Dans ce document, nous nous intéressons particulièrement côté hydrique.

1.2.6 Charge hydraulique

En mécanique des fluides, pour décrire les mouvements des fluides, on utilise la notion de charge hydraulique, qui est une énergie potentielle par unité de volume de fluide. Pour l'écoulement d'eau, la charge hydraulique notée h a pour expression (Magnan, 1999):

$$h = \frac{u_w}{\gamma_w} + z + \frac{v^2}{2g} \quad [m] \quad (1.1)$$

Avec : $\frac{u_w}{\gamma_w} + z$ énergie potentielle ; $\frac{v^2}{2g}$ énergie cinétique ; u_w : Pression d'eau kPa

γ_w : Poids volumique de l'eau ; kN/m^3 ; z : Attitude ou cote du point considéré, comptée positive vers le haut à partir du niveau de référence (convention hydraulique) en m

v : Vitesse d'écoulement de l'eau m/s ; g : Accélération de la pesanteur en m/s^2

Dans cette expression de la charge hydraulique, les deux premiers termes correspondent à l'énergie des forces extérieures et le dernier terme correspond à l'énergie cinétique de l'eau en mouvement. En général la vitesse de l'eau dans le sol est très faible surtout dans le cas du sol argileux d'où la négligence du terme de l'énergie cinétique en géotechnique.

La somme des deux premiers termes de la charge hydraulique de l'expression précédente représente la hauteur piézométrique qui est définie étant l'altitude atteint par l'eau dans un tube piézométrique descendu en un point d'écoulement.

1.2.7 Gradient hydraulique

Le gradient hydraulique est le vecteur défini comme l'opposé du gradient de la charge hydraulique h .

$$\vec{i} = -\overrightarrow{grad}h$$

Ses composants dans l'espace sont :

$$\vec{i}_x = -\frac{\partial h}{\partial x} ; \vec{i}_y = -\frac{\partial h}{\partial y} ; \vec{i}_z = -\frac{\partial h}{\partial z}$$

Dans le cas unidimensionnel, il est défini comme le rapport de la perte de charge du fluide et la longueur de la section, il a comme expression : $i = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{\Delta h}{L}$

Les surfaces équipotentiels sont définies par le lieu géométrique des points ayant une charge hydraulique constante. ($h = cste$).

En d'autre terme les surfaces équipotentiels sont les surfaces sur lesquelles la charge hydraulique est constante. Le vecteur du gradient hydraulique est perpendiculaire aux surfaces équipotentiels.

Les surfaces sur lesquelles la pression d'eau est constante sont appelées surfaces isopièzes. (Magnan, 1999).

1.2.8 Vitesse d'écoulement

Les pores du sol ayant des formes quelconques et non semblables. On suppose des dimensions moyennes via lesquelles s'effectue l'écoulement d'eau dans le sol.

La vitesse moyenne apparente est définie comme étant le rapport du débit d'écoulement sur la surface d'une section donnée. Il a pour expression :

$$v = \frac{Q}{S} [m/s]$$

Etant donné que la section d'écoulement est de dimension moyenne alors la vraie vitesse moyenne est définie comme le rapport de la vitesse moyenne apparente sur la porosité du sol. Elle a comme expression :

$$v' = \frac{v}{n} [m/s]$$

La porosité d'un sol étant inférieure à l'unité, la vitesse moyenne apparente est inférieure donc à la vitesse $v \leq v'$

1.2.9 Lignes de courant

On appelle ligne de courant une courbe tangente en chaque point au vecteur vitesse d'écoulement en ce point. Il s'agit donc de la trajectoire moyenne de l'eau dans le sol qui passe par ce point. Si cette courbe est rectiligne alors l'écoulement est dit linéaire.

Les lignes de courant qui partent des points d'une courbe fermée de l'espace délimitent un volume appelé tube de courant.

I.3 LOI DE DARCY

La vitesse d'écoulement de l'eau dans un massif de sol de la géométrie des pores du sol offert à la circulation de l'eau et aussi des différences de charge hydraulique entre les points du massif.

La relation entre la vitesse d'écoulement et la charge hydraulique dans un écoulement unidimensionnel a été déterminé expérimentalement en 1856 par Darcy, qui étudiait le débit de l'eau dans un tube rempli de sable. Cette relation s'écrit sous la forme : $v = k \cdot i$
Où : v : Vitesse d'écoulement en (m/s) i : Gradient hydraulique sans dimension.

k : Coefficient de proportionnalité appelé aussi coefficient de perméabilité en (m/s).

I.3.1 Perméabilité

Le coefficient de proportionnalité k entre la vitesse de décharge et le gradient hydraulique à la dimension d'une vitesse (on l'exprime en cm/s). La perméabilité est l'aptitude d'un milieu poreux à transmettre de l'eau ou d'autres fluides sous l'effet d'un gradient hydraulique. Le coefficient de perméabilité d'un sol est une caractéristique intrinsèque au sol, ce coefficient dépend non seulement des propriétés du matériau poreux (de la granulométrie du sol, de sa nature et de sa structure) mais encore du fluide.

I.3.1.1 Le coefficient de perméabilité

Il est noté k , qui est définie par la loi de Darcy. C'est le volume d'eau gravitaire en unité de volume traversant en une unité de temps, sous l'effet d'un gradient hydraulique, une unité de section en m^2 , orthogonale à cette section de l'écoulement. Il est exprimé en unité de vitesse m/s .

I.3.1.2 La perméabilité Intrinsèque

Aussi appelée la perméabilité géométrique noté k , est le volume de liquide en m^3 d'unité de viscosité cinématique traversant en une unité de temps (en seconde), sous l'effet d'une unité de gradient hydraulique, une unité de section (en m^2) orthogonale à la direction d'écoulement. Elle s'exprime m^2 ou en Darcy.

Toutefois, l'utilisation du coefficient de perméabilité, k , est valable pour caractériser les réservoirs jusqu'à une profondeur d'un millier de mètres.

I.3.2 Limite de la loi de Darcy

On s'est aperçu rapidement que la loi de Darcy n'était plus valable dans le domaine des vitesses élevées ; quand on augmente la perte de charge dans un perméamétrie jusqu'à des valeurs relativement élevées, on constate une déviation par rapport à la loi de Darcy (le débit croit rapidement) ; cette déviation se manifeste d'autant plus vite que la granulométrie du sol devient plus grossière.

Schneebeli ; 1967 a montré que pour de très fortes vitesses, la relation entre les débits et les pertes de charges n'est plus linéaire. Cette déviation intervient pour des nombres de Reynolds voisins de l'unité rarement atteints en physique.

De même, la loi de Darcy n'est plus applicable pour les sols très peu perméables (argiles). Harr ; 1962 cité par Azzou et Ouadah, 2003 a suggéré dans ce cas l'existence d'un gradient initial en delà duquel il n'y a pas d'écoulement.

La loi de Darcy n'est valable que dans les conditions suivantes :

- ❖ Milieu homogène isotrope ;
- ❖ Ecoulement en régime laminaire ;
- ❖ Ecoulement permanent.

Le nombre de Reynolds en milieu poreux est défini par :

$$R_e = \frac{vd_{10}}{\nu}$$

Avec : d_{10} : Diamètre efficace des grains ; ν : viscosité cinématique de l'eau.

De nombreuses études ont montré que cette loi est applicable tant que le nombre de Reynolds R_e ne dépasse pas une certaine limite (entre 1 et 10) ou la vitesse d'écoulement influe directement sur ce nombre.

1.3.3 Généralisation de la loi de Darcy

En réalité les écoulements dans un sol peuvent rarement être assimilés à des écoulements à une dimension, pour lesquels les différents (filets liquides) sont rectilignes et parallèles comme dans la perméamétrie.

La loi de Darcy n'est en fait qu'une relation entre module de la vitesse fictive et module du gradient hydraulique ; les directions de l'écoulement ne jouent aucun rôle puisque la loi est définie pour un écoulement à une dimension rectiligne.

Pour l'étude générale de l'écoulement dans un massif on est conduit à généraliser la loi de Darcy, toujours dans l'hypothèse d'un régime permanent, et en raisonnant à l'échelle macroscopique. Elle s'exprime par :

$$\vec{v} = [K]\vec{i} = -[K]\overrightarrow{grad}\phi$$

1.3.3.1 Equations des écoulements en régime permanent

❖ Sols anisotropes

On définit en tout point un tenseur de la perméabilité tel que :

$$\vec{v} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \overrightarrow{grad}\phi$$

Si l'on choisit les directions des coordonnées telles qu'elles soient confondues avec les directions des perméabilités principales, le tenseur se réduit à sa diagonale, soit :

$$v_x = -K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v_y = -K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad v_z = -K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{v} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \overrightarrow{grad}\phi$$

Le vecteur vitesse n'est plus ici colinéaire au vecteur $\overrightarrow{grad}\phi$.

En admettant que le liquide et le milieu poreux sont incompressibles, l'équation de continuité s'écrit en régime permanent :

$$div\vec{v} = 0$$

Tenant compte de la loi de filtration, on obtient l'équation aux dérivées partielles de l'écoulement :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0$$

Avec x , y et z directions principales de la perméabilité.

K_x , K_y et K_z sont constants dans tout le domaine, si le sol est homogène et anisotrope.

$$\text{La loi devient : } K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

❖ Sols isotropes et homogènes

On admet que la loi de Darcy est valable dans toutes les directions, soit :

$$v_x = -K \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v_y = -K \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad v_z = -K \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{v} = -K \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Le vecteur vitesse de décharge est en tout point collinaire au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ et donc orthogonal aux surfaces équipotentielles.

Lorsque le sol est homogène et isotrope, l'équation devient :

$$K \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

Soit $\Delta \phi(x, y, z) = 0$, qui n'est autre qu'une équation de Laplace.

La solution de cette équation, à condition de fixer les conditions aux limites, permet de déterminer la fonction $\phi(x, y, z)$ en tout point du domaine dans lequel elle est définie.

La connaissance de ϕ entraîne la connaissance complète de l'écoulement. En effet, nous connaissons ainsi, en chaque point, la vitesse de décharge, et le débit à travers un élément de surface ds de vecteur normal \vec{n} sera égale à :

$$dQ = \vec{v} \vec{n} ds$$

Dans un milieu isotrope ($k = \text{constante}$), k ne figurant pas dans l'équation de Laplace, la répartition des charges hydrauliques ne dépend pas du coefficient de perméabilité du sol ; elle ne dépend que de la forme géométrique du domaine de l'écoulement et des conditions aux limites.

1.3.3.2 Cas particuliers

❖ Écoulements plans en milieu isotrope et homogène

Ils sont régis par la relation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Considérons la fonction $\phi(x, z)$ définie par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Par définition, les lignes de courants sont tangentes en tout point au vecteur vitesse.

$$\text{Soit : } \frac{dz}{dx} = \frac{v}{u}$$

Avec v et u composantes de la vitesse suivant oz et ox .

$$v dx - u dz = 0 \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \text{ soit } d\varphi = 0$$

Les lignes de courants sont donc définies par la relation $\varphi(x, z) = \text{constante}$. $\varphi(x, z)$ est la fonction courante.

Montrons que son Laplacien est nul :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \quad \text{soit } \Delta \varphi = 0$$

❖ Milieux homogènes anisotropes

Si le milieu est anisotrope, on effectue le changement de coordonnées suivant :

$$X = \sqrt{\frac{K}{K_x}} x ; \quad Y = \sqrt{\frac{K}{K_y}} y ; \quad Z = \sqrt{\frac{K}{K_z}} z$$

K étant un coefficient quelconque ayant les dimensions d'un coefficient de perméabilité, on obtient l'équation : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = 0$. soit $\Delta \varphi(X, Y, Z) = 0$

L'étude de l'écoulement à travers un milieu anisotrope se ramène donc à l'étude d'une équation de Laplace. Si l'on transforme au préalable cet écoulement par la transformation affine, on obtient un écoulement isotrope correspondant.

L'écoulement transformé, ainsi obtenu, sera un écoulement fictif se déduisant géométriquement de l'écoulement en milieu anisotrope considéré par la transformation, et s'effectuant en un milieu isotrope de perméabilité K .

En des points correspondants, nous aurons entre les composantes des vitesses de l'écoulement réel et celles de l'écoulement isotrope correspondant (U, V, W) les relations suivantes :

$$v_x = \sqrt{\frac{K_x}{K}} U ; \quad v_y = \sqrt{\frac{K_y}{K}} V ; \quad v_z = \sqrt{\frac{K_z}{K}} W$$

Ce qui permettra d'établir la relation qui existe entre les débits traversant des surfaces

$$\text{correspondantes : } dQ = \sqrt{\frac{K_x K_y K_z}{K^3}} dQ'$$

En d'autres termes, le débit dQ' qui traverse le milieu isotrope correspondant avec un coefficient de perméabilité, K tel que : $K^3 = K_x K_y K_z$ est le même que celui qui traverse le milieu anisotrope réel.

1.4 GENERALITES SUR LA RESOLUTION DE CES EQUATIONS

Les caractéristiques physiques du sol dans le domaine étudié étant supposées connues, l'écoulement de l'eau y sera entièrement déterminé par la connaissance du champ de potentiel.

Le potentiel est solution des équations aux dérivées partielles de l'écoulement. Leur intégration nécessite la connaissance des conditions aux limites de l'écoulement. Il faut noter que les conditions aux limites doivent être connues sur tout le contour du domaine pour que la solution soit unique. Il faut y ajouter les conditions à l'intérieur du domaine ayant une influence sur l'écoulement (pompage, cours d'eau ou lac). Ceci est

nécessaire mais n'est pas toujours suffisant. Par exemple, si l'on impose une condition de flux sur tout le contour du domaine, le problème est soit impossible à résoudre, soit indéterminé.

Les différentes conditions aux limites que l'on rencontre sont :

- ❖ La connaissance du flux ;
- ❖ La connaissance du potentiel ;
- ❖ La connaissance d'une relation linéaire entre le flux et le potentiel (la géométrie de la limite étant inconnue).

1.4.1 Conditions aux limites des écoulements souterrains

Sur les figures sont schématisés successivement l'écoulement dans un barrage en terre et l'écoulement autour d'un rideau de palplanches. On y trouve les diverses conditions aux limites des écoulements souterrains, appartenant aux trois catégories énoncées ci-dessus.

1.4.1.1 Surface imperméable (condition de Newman)

C'est une ligne de courant donc : $\vec{v}\vec{n} = 0$

Où \vec{n} : Vecteur unité normal en tout point à la surface.

Sur cette surface, nous avons donc une condition de flux nul. Dans le cas particulier d'un milieu isotrope, elle s'écrit très simplement $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

1.4.1.2 Surfaces équipotentielles (condition de Dirichlet)

Physiquement, ce sont les surfaces filtrantes qui séparent la nappe de la masse d'eau qui l'alimente. Ce sont le fond de la cuvette, ainsi que les parements du barrage baignés par l'eau. Dans d'autre cas elle peut être aussi le lit d'une rivière.

1.4.1.3 Surface de suintement

Ce sont les surfaces filtrantes séparent la nappe de l'air et traversées par un écoulement. L'eau est à la pression atmosphérique : Ce sont des surfaces à potentiel imposé.

1.4.1.4 Surface libre (condition mixte)

C'est la limite supérieure de l'eau dans le sol, ou l'eau est en contact avec l'air (si l'on fait abstraction de la capillarité). L'eau y à la pression atmosphérique : $\phi = h = z$.

D'autre part, en régime permanent, cette surface ne bouge pas et n'est donc traversée par aucun courant : c'est une surface de courant. La surface libre est ainsi définie par les relations :

$$\phi = h = z ; \vec{v}\vec{n} = 0$$

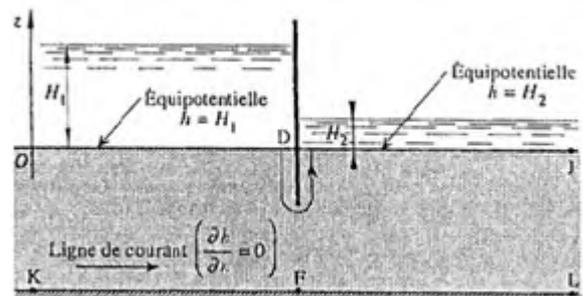
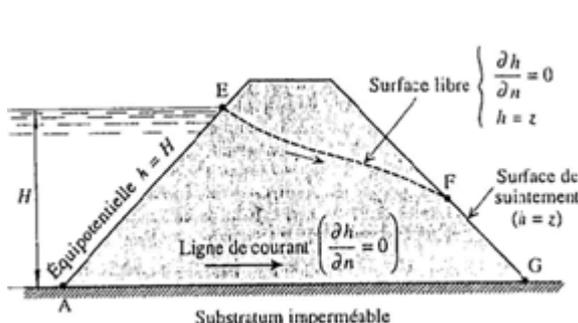
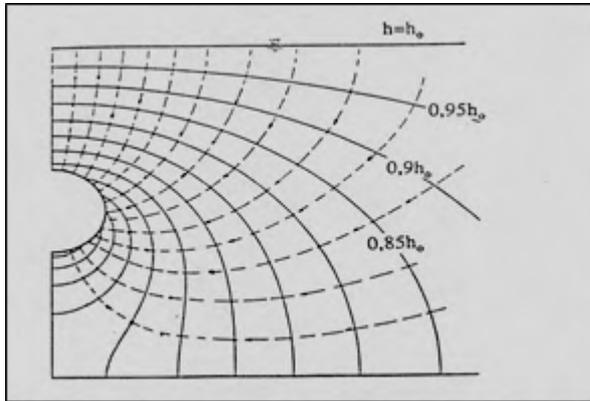


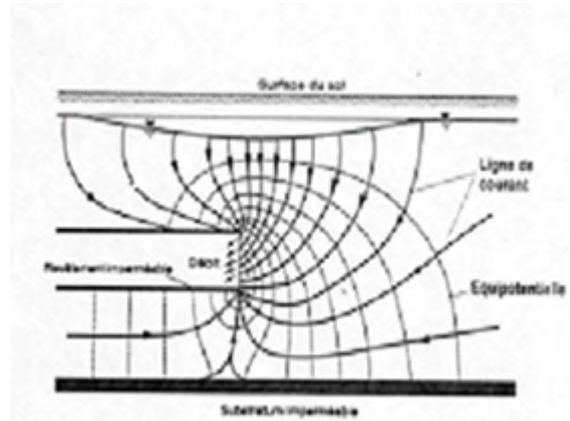
Figure 1.3: Ecoulement dans un barrage en terre et conditions aux limites

Figure 1.4: Ecoulement autour d'un rideau de palplanche et conditions aux limites

Considérons un problème particulier, celui de l'écoulement à travers un réservoir autour d'un tunnel reposant sur un substratum imperméable.



Coupe Longitudinale



Coupe Transversale

Figure 1.5: Réseau d'écoulement vers un tunnel à front ouvert (Atwa ; 1993).

- ❖ **Couche imperméable :** (revêtement imperméable). Il n'y a pas d'écoulement à travers cette couche, c'est donc toujours une ligne de courant. Toute ligne de potentiel et ainsi orthogonale à toutes frontières imperméables.

$$\vec{v} = -K \frac{dh}{dz} = 0 \quad \text{D'où la condition de Newman } \frac{dh}{dz} = 0$$

- ❖ **Surface libre de la nappe :** la surface libre est le lieu géométrique où règne la pression atmosphérique :

$$U = \gamma_w (h - z) = 0 \quad h = \frac{U}{\gamma_w} + z \rightarrow h = z$$

- ❖ **Ligne de suintement :** La ligne de suintement est à la pression atmosphérique $h = z$

1.4.2 Méthodes de résolution de ces équations

1.4.2.1 Méthodes analytiques

Elles ont pour but de donner une solution du problème sous forme littérale, avant la mise en chiffre, ce qui suppose que l'on sache intégrer analytiquement l'équation différentielle de l'écoulement. Ceci est souvent impossible dès lors que les conditions aux limites sont compliquées.

On a pu cependant trouver de telles solutions dans des cas simples, très utiles en pratique, par exemple les problèmes d'écoulement vers les puits et tranchées.

Le chapitre 03 de ce projet de fin d'études contient une contribution dans ce sens.

1.4.2.2 Méthodes de similitudes

Les problèmes réels présentent le plus souvent des conditions aux limites complexes et n'ont pas de solution analytique.

La solution de connaissance du champ de potentiel réel peut être obtenue par l'étude d'un domaine semblable présentant un champ similaire, facilement mesurable. C'est la méthode des similitudes. On peut y distinguer les modèles réduits et les modèles analogiques.

I.4.2.3 Modèles réduits

Cette méthode consiste à étudier l'écoulement de l'eau dans un milieu poreux, sur un domaine géométriquement réduit. Pour que le modèle soit représentatif, il faut respecter les lois de la similitude. Cette méthode séduisante a priori, n'est guère utilisée car sa mise en œuvre est délicate et peu commode.

En fin, les phénomènes capillaires, relativement importants sur le modèle réduit peuvent sensiblement fausser les résultats.

I.4.2.4 Modèles analogiques

Ces modèles reposent sur le fait que les équations qui décrivent différents phénomènes physiques ont des formes identiques à celle qui décrivent les écoulements souterrains. Une telle similitude formelle des équations fondamentales qui régissent deux phénomènes complètement différents constitue une analogie.

Les phénomènes sont en particulier :

- L'écoulement de la chaleur ou de l'électricité dans un corps conducteur,
- L'écoulement d'un liquide visqueux entre deux plaques rapprochées.

❖ **Analogie électrique et thermique**

L'étude du phénomène d'analogie se ramène directement à l'étude du phénomène réel par des rapports sans dimensions. Le tableau représente quelques phénomènes analogues.

Cette analogie entre le domaine hydraulique et les autres domaines (électrique, thermique) est basée essentiellement sur la similitude entre les équations qui régissent les trois domaines différents. Selon le tableau précédent d'analogie, on pourra donc étudier un écoulement souterrain à l'aide d'un modèle électrique ou thermique, par l'utilisation des rapports sans dimensions pour transformer les grandeurs hydrauliques.

Tableau 1.1: Analogie entre écoulement, thermique et électrique. .

Écoulement souterrain	Conduction électrique	Conduction thermique
Vecteur vitesse $\vec{v} = -k \overrightarrow{\text{grad}H}$	Vecteur de courant $\vec{i} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}U}$	Vecteur de température $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$
Loi de Darcy	Loi d'Ohm	Loi de Fourier
h : Charge hydraulique	U : voltage	T : température
K : Perméabilité	γ : conductivité spécifique	λ : conductivité thermique
H = c ^{te} : surface équipotentielle	U = cte : surface équipotentielle	T = C ^{te} : surface isotherme
$\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ limite perméable	$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ limite isolante	$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ limite isolante

❖ **Analogie visqueuse (ou modèle de Hele Shaw)**

Cette technique, applicable aux écoulements plans est basée sur la similitude des équations de l'écoulement en milieu poreux avec celle de l'écoulement d'un liquide entre deux plaques très rapprochées. Cette technique de mise en œuvre délicate n'est employée en fait que pour simuler les écoulements transitoires à surface libre pour lesquels elle s'applique également.

I.4.2.5 Méthodes graphiques

La méthode graphique est appelée aussi méthode des petits carreaux. Elle est le procédé le plus usuel pour résoudre les problèmes d'écoulements en milieu poreux. Elle consiste à tracer le réseau orthogonal des lignes de courant et des lignes équipotentiels en tenant compte des conditions aux limites de l'écoulement.

La méthode graphique nécessite une expérience de la part de l'utilisateur et des approximations successives du tracé de réseau. Les résultats obtenus par cette méthode donnent un ordre de grandeur des valeurs recherchées, et permettront ainsi de contrôler les résultats d'autres méthodes.

Le procédé est simple et constitué des étapes suivantes :

- a) Définir les conditions aux limites concernant l'écoulement, c'est-à-dire les lignes de courants et les lignes équipotentiels ;
- b) Tracer quelques lignes de courant en essayant de satisfaire les conditions aux limites. Le tracé est à refaire jusqu'à la satisfaction de ces conditions. Il est commode que les lignes tracées soient équidistantes ;
- c) Tracer des lignes équipotentiels de telle façon qu'elles soient perpendiculaires aux lignes de courant et qu'elles vérifient les conditions aux limites. Les lignes sont choisies équidistantes et ayant un pas identique à celui des lignes de courant.

I.4.2.6 Méthodes numériques

Elles sont largement utilisées dans les études des écoulements à travers et sous les ouvrages en surface libre ou confinée. Elles sont basées sur le calcul numérique. Les méthodes les plus usuelles sont : la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

❖ Méthode des différences finies

Elle consiste à remplacer les grandeurs différentielles infiniment petites $dx, dy, dz, dh, dv, dt, etc.$, par des grandeurs de dimensions finies que l'on note $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta h, \Delta v, \Delta t$, petites vis à vis du volume à étudier. La précision des résultats du calcul est d'autant meilleure que les Δ_i sont plus petits. Il y a intérêt à choisir des éléments d'aussi grande dimension que possible pour en limiter le nombre. Mais, si les éléments sont trop grands, le calcul diverge. Il n'y a plus de solution. De telles méthodes doivent donc comporter un critère de convergence qui limite les dimensions des éléments.

En différences finies, l'équation de Laplace :

$$\frac{\Delta^2 h}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 h}{\Delta z^2} = 0 \quad (1.2)$$

C'est l'équation de la diffusion en régime permanent pour un écoulement dans un plan vertical d'un milieu homogène et isotrope.

La fonction $h(x, z)$, la charge hydraulique (figure 1.6), prend les valeurs h_0 pour le point x_0 , h_1 pour le point $x_1 = x_0 - \Delta x$ et h_2 pour le point $x_2 = x_0 + \Delta x$.

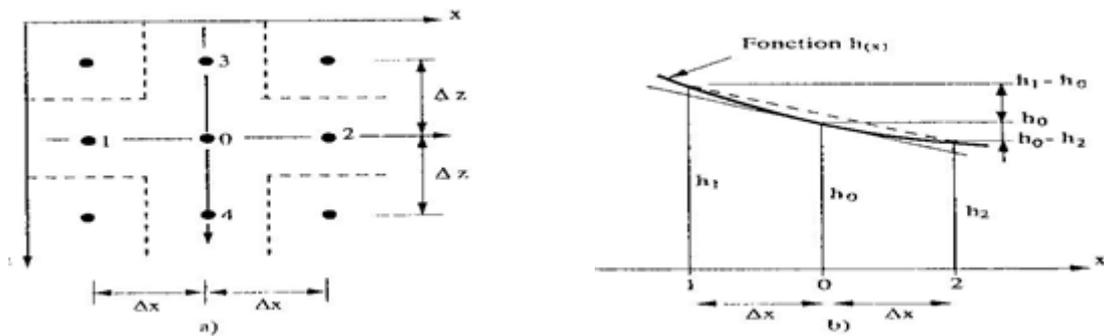


Figure 1.6: Discretisation du domaine du champ de potentiel

Toute fonction $h_{(x-\Delta x)}$ où $h_{(x+\Delta x)}$ peut être développée en série de Taylor :

$$h_1 = h_{(x-\Delta x)} = h_{(x)} - (\Delta x) \frac{dh}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3h}{dx^3} + \dots \quad (1.3)$$

$$h_2 = h_{(x+\Delta x)} = h_{(x)} + (\Delta x) \frac{dh}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3h}{dx^3} + \dots \quad (1.4)$$

En ne prenant que les trois premiers termes des développements en série et en additionnant les deux équations précédentes :

$$h_1 + h_2 = 2h_0 + (\Delta x)^2 \frac{d^2h}{dx^2} \quad \text{Ou} \quad \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2} \quad (1.5)$$

Le même raisonnement dans la direction de l'axe des z donne :

$$h_3 + h_4 = 2h_0 + (\Delta z)^2 \frac{d^2h}{dz^2} \quad \text{Ou} \quad \frac{d^2h}{dz^2} = \frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{(\Delta z)^2} \quad (1.6)$$

L'équation de Laplace en régime permanent s'écrit :

$$\frac{\Delta^2 h}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 h}{\Delta z^2} = 0 = \frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2} + \frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{(\Delta z)^2} \quad (1.7)$$

Donc, si $\Delta z = \Delta x$, ce que l'on choisit habituellement :

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} = h_0 \quad (1.8)$$

La charge h_0 est égale à la moyenne des charges des points 1 à 4 voisins, à la distance Δx du point zéro. La vitesse se calcule par :

$$v_x = -k \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad \text{et} \quad v_z = -k \frac{\Delta h}{\Delta z} \quad (1.9)$$

Cette méthode permet par exemple de trouver les valeurs numériques de Φ ou de h , champ du potentiel, entre les limites amont et aval ou il est connu comme dans les exemples du barrage et rideau, mais pour une géométrie quelconque, par la méthode des interactions.

❖ Méthode des éléments finis

Cette méthode est la plus utilisée aujourd'hui. Elle consiste à diviser l'espace en polynômes, triangles ou quadrilatères le plus souvent, dont les sommets, les nœuds du réseau sont définis par les coordonnées x, y, z choisies judicieusement pour s'adapter à la géométrie. L'équation de Laplace s'écrit, dans le cas de bidimensionnel et en écoulement permanent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.10)$$

En chaque nœud, la fonction h ou Φ à une valeur bien définie, elle est continue dans la région étudiée.

La méthode consiste à minimiser l'intégrale :

$$\chi = \iint \frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1.11)$$

Ce qui permet de trouver le champ de charge, donc les équipotentielles (Humbert, 1984). Le même calcul peut être fait pour la fonction de courant et l'on trouve les lignes de courant.

I.5 CONCLUSION

L'eau joue un rôle important dans les ouvrages géotechniques son état défini le champ d'application les potentiels à prendre en compte dans les équations régissant le phénomène de l'écoulement dans le sol.

La loi de Darcy avec l'expression de continuité et l'état isotherme de sol donne l'équation qui régit le problème étudié dans ce projet de fin d'études.

L'ingénieur dispose d'un ensemble de méthodes et techniques permettant de résoudre la problématique de l'eau dans le sol. Il est confronté donc à un problème de choix. Son choix peut être bon dans une situation et mauvais dans une autre, selon les moyens disponibles sa mise en œuvre et surtout de l'intuition et l'expérience de géotechnicien. Ce qui définit par la suite le modèle de calcul par simplification de la structure réelle moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

Le chapitre suivant donne un aperçu sur les modèles disponibles dans la littérature.

Chapitre II :

Processus

d'infiltration dans les

sols non saturés

Conductivité hydrique ?

Qu'est-ce que la succion ?

Profile hydrique ?

Vitesse d'infiltration ?

Front de l'humidification ?

II.1 INTRODUCTION

Ce chapitre contient un aperçu bibliographique sur des éléments permettant la compréhension des écoulements en non saturés. Après quelques définitions de bases sur le processus d'infiltration, le chapitre comporte les méthodes de mesure de la succion et de la conductivité dans le cas d'un sol non saturé, le phénomène d'hystérésis, la non linéarité physique de la courbe de rétention font l'objet de ce chapitre. Ces éléments sont nécessaires pour la modélisation numérique pour le chapitre 4 de projet de fin d'études.

II.2 APERÇU GENERAL SUR LE PROCESSUS D'INFILTRATION

II.2.1 Définitions

L'infiltration peut se définir comme le processus physique d'entrée d'eau à l'intérieur du sol à travers sa surface, in-situ l'infiltration représente le même phénomène à travers les parois d'un puits peu profond. Nous intéressons dans ce travail au processus d'infiltration unidirectionnel sous charge constante, qui sera étudié à travers une surface de sol compacté (pour simuler l'infiltration des lixiviats issue de l'évacuation dans les décharges de déchets ménagers)

Afin de mieux mener cette étude, nous allons commencer par une description générale du processus d'infiltration ainsi que l'état énergétique de l'eau dans un sol non saturé, ensuite, on présentera les équations de base décrivant l'écoulement de l'eau dans un sol non saturé et en particulier dans le cas qui nous intéresse qui est celui de l'infiltration en considérant l'approche monophasique de l'écoulement. Enfin, on donne quelques approches physico-empiriques d'estimation de l'infiltration souvent exprimées sous forme de loi d'infiltration.

II.2.2 Paramètres descriptifs de l'infiltration

Le processus d'infiltration est souvent engendré par une modification brutale des conditions de pression et de teneur en eau régnant à la surface du sol lorsque celui-ci reçoit une averse ou s'il est soumis à une submersion. Il est conditionné par divers facteurs dont les plus importants relèvent d'une part, du sol par le biais de ses caractéristiques hydrodynamiques ($k_w(\theta)$, $D(\theta)$), de sa structure, de sa texture et de son uniformité de profil, et d'autre, part des conditions spécifiques dans lesquelles se déroulent le processus à savoir les conditions initiales et le débit d'alimentation (Musy et Soutter, 1991).

En surface, le processus d'infiltration est caractérisé par le flux traversant le sol et s'écoulant dans le profil appelé le régime d'infiltration $i(t)$. Cette grandeur permet de déterminer la lame d'eau infiltrée $I(t)$ donnée par l'intégrale dans le temps de $i(t)$.

$$I(t) = \int_0^t i(t) dt \text{ [m]} \quad (2.1)$$

$$i(t) = \frac{dI(t)}{dt} \text{ [m/s]} \quad (2.2)$$

On définit également la capacité d'infiltration ou l'infiltrabilité du sol comme le flux maximum que le sol est en mesure d'absorber à travers sa surface lorsque celle-ci est maintenue en contact avec de l'eau à pression atmosphérique (Hillel, 1988 ;Vauclin,

1984; Musy et Soutter, 1991). En général, l'infiltrabilité du sol est élevée au début de l'infiltration (en particulier pour les sols initialement secs) et décroît rapidement durant les premiers instants jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur stable appelée infiltration permanente (k_{ws}). Cette décroissance est due avant tout à la diminution du gradient de succion matriciel, conséquence de l'augmentation de la distance sur laquelle se répartie la différence globale de la charge hydraulique. Dans certains cas, cette diminution peut être renforcée par des facteurs secondaires qui provoquent l'augmentation de la résistance à l'écoulement et qui peuvent être résumés de la façon suivante :

- Dégradation graduelle de la structure du sol qui entraîne, par migration des particules, un colmatage partiel du système poreux et par la suite, la formation d'une croûte dense en surface.
- Foisonnement des argiles.
- Piégeage des bulles d'air ou compression de la masse d'air si elle ne peut s'échapper quand elle est déplacée par l'arrivée d'eau.

Si la surface du sol est alimentée en eau avec une vitesse croissante $q_s(t)$, tôt ou tard, l'alimentation dépassera la capacité d'adsorption en eau du sol. Le processus d'infiltration peut être résumé de la manière suivante (Vauclin.1984) : Aussi longtemps que le débit d'alimentation en surface $q_s(t)$ est inférieur au régime d'infiltration $i(t)$, l'eau s'infiltré dans le sol aussi vite qu'elle est fournie (la vitesse d'infiltration $v(t) = q_s(t)$). Dans ce cas, c'est le régime d'alimentation qui détermine le régime d'infiltration et le processus se déroule à flux contrôlé. Quand $q_s(t)$ dépasse l'infiltrabilité du sol, cette dernière détermine la vitesse d'infiltration de l'eau dans le sol ($v(t) = i(t)$) et par conséquent, le processus est contrôlé par le profil du sol. La surface du sol devient saturée et l'excès d'eau ($q_s(t) - i(t)$) stagne ou ruisselle en présence de pente. Quand le débit d'alimentation $q_s(t)$ est constante ($q_s(t) = q_0$) et inférieur à l'infiltrabilité du sol, il s'établit au sein du sol un profil d'humidité q_0 uniforme pour lequel la conductivité hydraulique $k_w(q_0)$ est égale q_0 . La figure 2.1 résume le processus d'infiltration à charge constante et à flux constant k_{ws} représente la conductivité hydraulique à la saturation du sol.

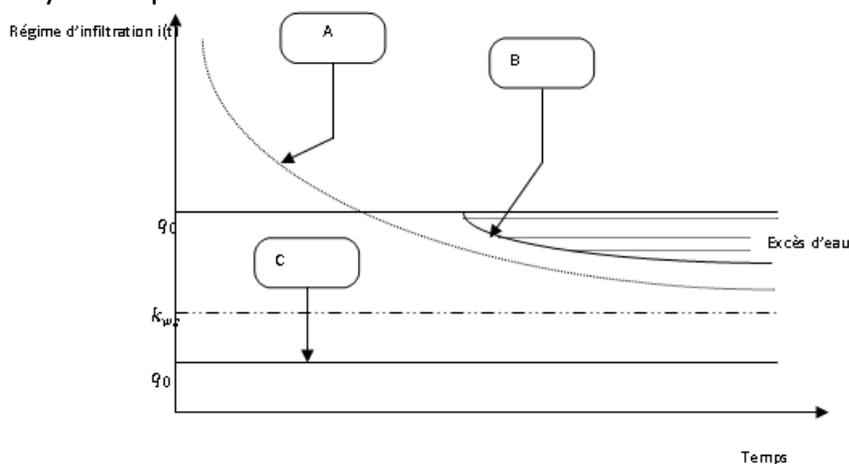


Figure 2.1 : Régime d'infiltration en fonction du temps : A : Infiltration sous charge nulle ; B : Infiltration sous flux constant $q_0 > k_{ws}$; C : Infiltration sous flux constant $q_0 < k_{ws}$.

II.2.3 Distribution de l'eau dans le sol durant l'infiltration

La répartition de l'eau dans le sol à un instant donné peut être décrite par le profil hydrique. La forme de celui-ci est liée d'une part aux propriétés physiques du sol et d'autre part aux circonstances météorologiques très variables. L'infiltration de l'eau en surface provoque une perturbation du profil hydrique qui se propage en profondeur à mesure que le processus se poursuit. Cette perturbation lui confère une structure qui est caractérisée selon Musy et Soutter (1991) par quatre zones (figure 2.2). Dans le cas d'un profil homogène soumis à une alimentation constante en surface, ces zones sont arrangées comme suit :

- La zone de saturation en surface qui s'étend généralement à une profondeur de 1 cm ; dans le cas des sols argileux, cette zone peut être soumise à un phénomène de gonflement qui conduit à des teneurs en eau très élevées ;
- La zone de transmission, presque saturée, caractérisée par une diminution très rapide de la teneur en eau jusqu'à des valeurs de 70 à 80% de la saturation ; cette zone s'allonge au cours de l'infiltration ;
- La zone d'humidification dans laquelle le teneur en eau change rapidement avec la profondeur et le temps, elle se termine avec le front d'humidification ;
- Le front d'humidification est une région d'un gradient d'humidité très élevé qui représente une limite visible de pénétration d'humidité surtout quand le sol est initialement sec.

Pendant l'infiltration, l'eau entre dans le sol et descend progressivement vers le bas en établissant des profils de teneur en eau successifs (figure 2.3). La distribution de l'eau dans le sol dépend d'une manière générale de la taille des grains. L'examen périodique des profils d'humidité pendant l'infiltration montre que la zone de transmission s'allonge continuellement, et, que la zone d'humidification et le front se déplacent vers le bas. Ce dernier devient moins net en profondeur. Le gradient de succion, initialement élevé notamment pour un sol sec, diminue au cours de l'infiltration jusqu'à des valeurs unitaires (figure 2.3). Ceci explique la diminution de la vitesse d'infiltration avec le temps.

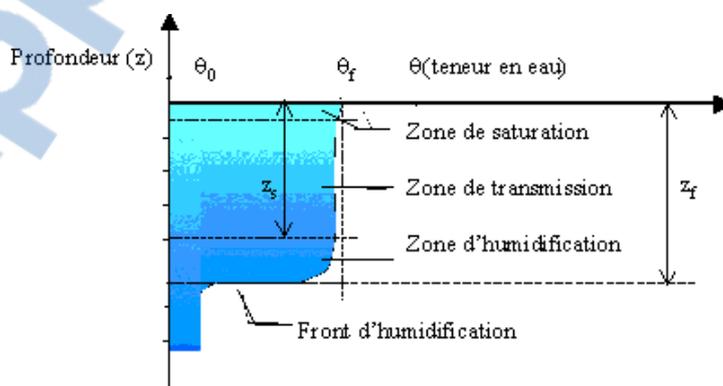


Figure 2.2 : Schéma typique du profil hydrique au cours de l'infiltration (Musy, et Soutter 1991)

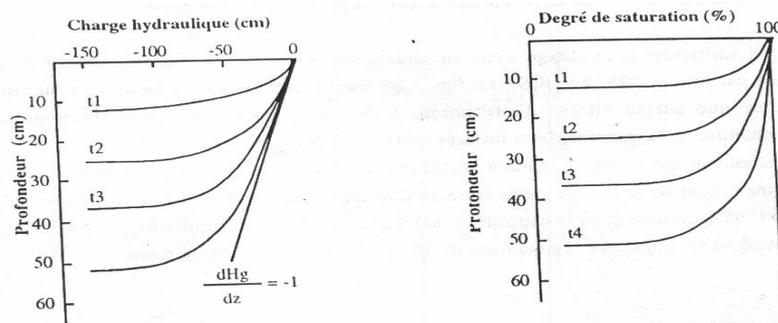


Figure 2.3 : Profils de charge hydraulique et profils de teneur en eau au cours de l'infiltration dans un sol submergé en surface (Hillel, 1988).

II.2.4 Influence de certains paramètres du sol sur l'infiltration

En général, les paramètres qui influent sur processus d'infiltration sont nombreux. Ils sont liés soit aux propriétés du sol soit aux conditions initiales et aux limites dans lesquelles l'infiltration se déroule. Les paramètres liés aux propriétés du sol sont : la taille des grains, le type et le degré de développement de la structure, la teneur en matière organique, la porosité, la masse volumique et l'uniformité du profil (Hillel, 1988; Vauclin, 1984). La figure 2.4 montre un exemple de l'influence de la masse volumique sèche du sol sur l'avancement du front d'humidité au cours d'une infiltration. Si on considère que le déplacement du front peut être caractérisé par une teneur en eau q de 10%, on constate que ce front avance de 5 fois plus vite pour le sol ayant la densité la plus faible. Les conditions initiales d'humidité et de succion et les conditions aux limites (charge d'eau appliquée, milieu d'écoulement ouvert ou fermé à la base...) peuvent être contrôlées et étudiées au laboratoire. Ainsi l'influence de ces paramètres a été établie par certains chercheurs (Philip, 1957 et Vauclin, 1986).

L'humidité initiale du sol q_i a une grande influence sur la vitesse d'infiltration de l'eau dans le sol surtout au début de l'infiltration. La diminution de q_i entraîne une augmentation de la vitesse d'infiltration initiale mais son effet diminue pour des temps d'infiltration élevés (figure 2.5). En effet, pour des faibles q_i , la succion correspondante dans le sol est élevée et par conséquent, l'écoulement dû à la capillarité est important entraînant ainsi des vitesses d'écoulement considérables au début de l'infiltration. Au fur et à mesure que le sol se sature, l'effet de la succion sur l'écoulement devient faible par rapport à celui dû à la gravité ; l'influence de la teneur en eau initiale ne se fait plus sentir. Par contre, quand le sol est initialement humide, le gradient de succion est faible au niveau du front d'humidification et réduit donc la vitesse d'entrée d'eau. La vitesse d'avancement du front peut être rapide du fait du déplacement vers le bas de l'eau déjà existante dans le sol.

L'influence de la charge d'eau en surface sur la dynamique d'infiltration a été également étudiée par Philip (1957 f). La figure 2.6 montre cette influence aussi bien sur l'infiltration cumulée que sur la vitesse d'infiltration. L'augmentation de la charge d'eau entraîne une augmentation de la qualité d'eau infiltrée dans le sol et par conséquent de la vitesse d'infiltration. Ce phénomène est surtout important au début mais devient moins marqué pour des temps élevés. L'augmentation de la charge d'eau entraîne une augmentation de la sorptivité du sol défini par Philip (1957) comme étant la capacité du

sol à absorber l'eau par capillarité. Ainsi, la sorptivité du sol augmente typiquement de 2% par centimètre de charge d'eau.

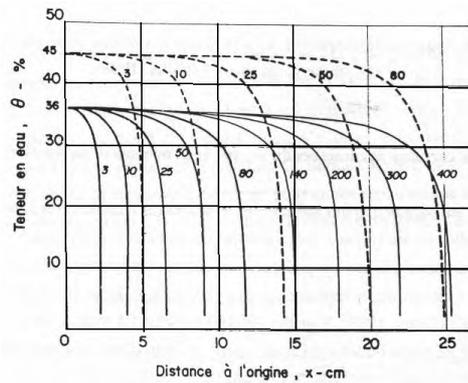


Figure 2.4 : Influence de la masse volumique sèche initiale sur l'évolution des profils hydriques au cours d'une infiltration sur une colonne horizontale de silt de « Columbia » (Vachaud, 1968).

L'influence du confinement sur la lame d'eau infiltrée dans le sol et le flux correspondant a été étudiée par Vauclin (1984) et Wang et Feyen (1995) cité par Amraoui (1996). La figure 2.7 montre que ces deux paramètres d'infiltration diminuent quand l'air initialement présent dans la zone non saturée n'est pas libre de circuler. En effet, dans ce type de milieu et au cours de l'infiltration, l'air ne peut pas s'échapper ; sa pression augmente jusqu'à une valeur critique qui lui permet de se libérer vers le haut au profit d'une avancée d'eau vers le bas. Ce phénomène ralentit la vitesse d'avancement du front d'infiltration. L'air est surtout piégé dans des pores isolés et l'infiltration se réduit par diminution de la porosité effective.

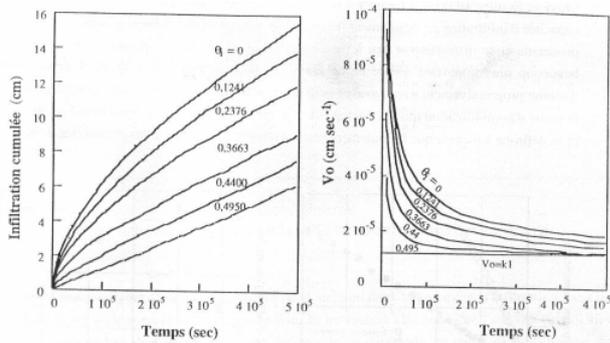


Figure 2.5 : Influence de la teneur en eau volumique initiale sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Philip, 1957e, 1969)

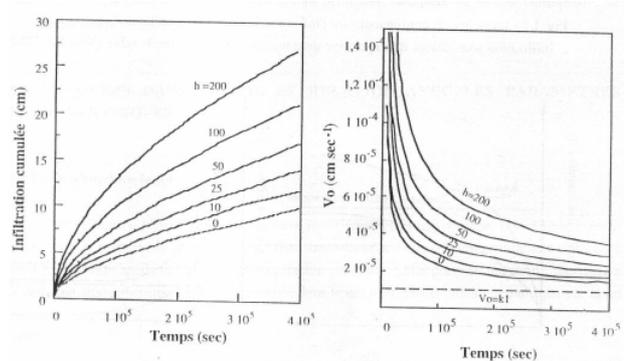


Figure 2.6 : Influence de la charge d'eau appliquée en surface (h en cm d'eau) sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Philip, 1957 f, 1969).

La gravité influe également l'infiltration cumulée et le flux correspondant (Vachaud, 1968; Musy et Soutter, 1991). La figure I2.8 montre un exemple donné par Musy et Soutter (1991). Les capacités d'infiltration en écoulement horizontal et en écoulement vertical sont proches au début du processus et se différencient peu à peu. En effet, au début de l'infiltration, le terme diffusif est beaucoup plus important que le terme gravitaire (surtout pour des sols secs). Cette différence diminue progressivement avec l'avancement du front d'humidification. C'est la raison pour laquelle le bulbe d'humidification qui se développe lors d'une infiltration localisée est initialement

sphérique et se déforme à mesure que l'écoulement vertical domine l'écoulement horizontal (figure .9).

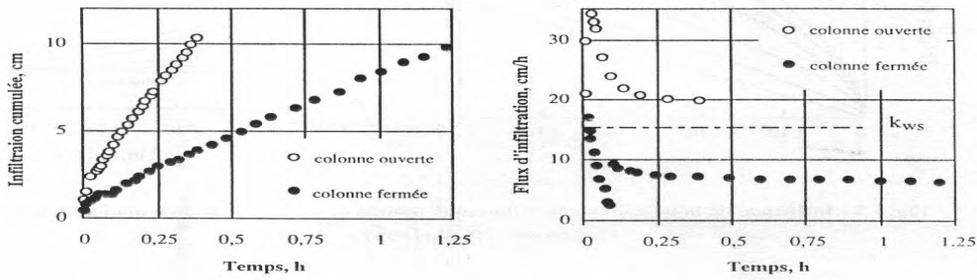


Figure 2.7 : Influence du confinement sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration pour une infiltration sous charge positive dans une colonne verticale de sable (Vauclin, 1984).

Il faut souligner l'importance relative de la succion dans le processus d'infiltration dans un sol non saturé surtout en régime transitoire dans la mesure où elle constitue l'une des principales forces motrices lors de l'écoulement. L'évaluation de ce paramètre au cours de l'infiltration est indispensable dans l'analyse de l'écoulement transitoire dans un sol non saturé, cependant sa mesure est très difficile et nécessite le plus grand soin. Dans ce qui suit, un bref aperçu sur la notion de succion dans les sols non saturés, sa relation avec les caractéristiques hydrodynamiques du sol et les méthodes qui permettent leur évaluation seront présentés, ceci afin de mieux comprendre leur contribution au phénomène d'infiltration.

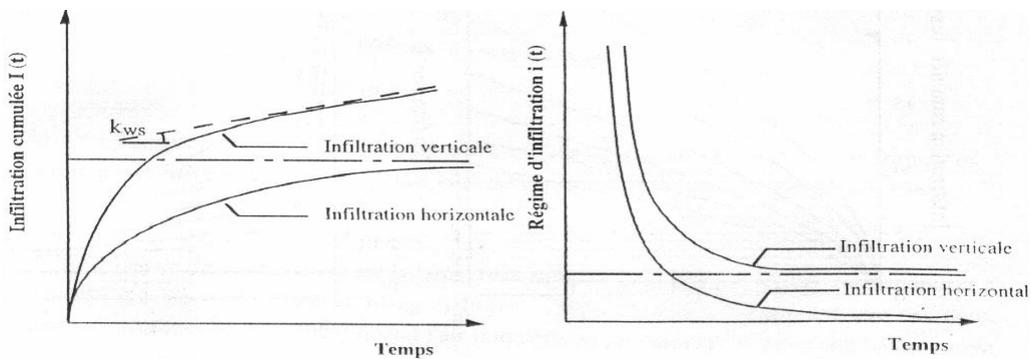


Figure 2.8 : Influence de la gravité sur l'infiltration cumulée et la vitesse d'infiltration (Musy et Soutter, 1991)

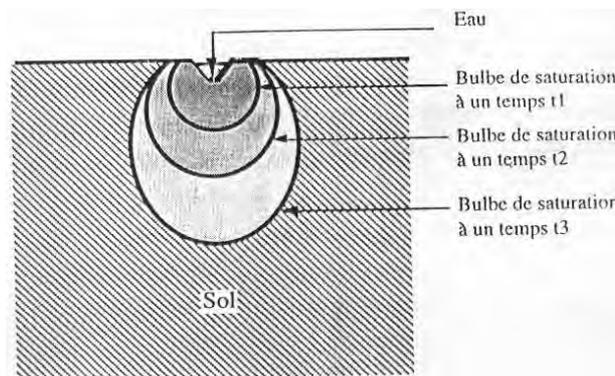


Figure 2.9 : Influence de la gravité sur la forme du bulbe de saturation ($t_1 < t_2 < t_3$).

II.3 SUCCION DANS LE SOL ET RELATION AVEC LES PARAMETRES HYDRODYNAMIQUES

II.3.1 Succion dans le sol

On définit en général la succion comme la différence de pression entre l'air et l'eau présente dans le sol. A l'échelle du pore, l'existence d'une interface entre l'eau et l'air engendre une différence de pression entre les deux fluides appelée pression capillaire. Cette pression négative (inférieure à la pression atmosphérique) peut être exprimée dans le cas d'un tube capillaire cylindrique par la loi de Jurin :

$$\Psi = u_a - u_w = \frac{2T_s \cos \theta}{r} \quad (2.3)$$

Où

u_a = La pression d'air, u_w = La pression d'eau, r = Le rayon du capillaire,

T_s = La tension superficielle à l'interface eau-air ($T_s = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m à 20°C),

θ = L'angle de contact solide interface eau-air.

Aitchison. 1965 (cité par Amraoui, 1996) propose une définition quantitative de la succion dans le sol et ses composantes en utilisant le contexte de la thermodynamique. La succion est définie d'un point de vue énergétique comme un potentiel négatif qui correspond à l'état de l'énergie libre de l'eau dans le sol. Cette énergie peut être mesurée en termes de pression partielle de l'eau dans le sol (humidité relative). La relation thermodynamique entre la succion du sol et la pression partielle de la vapeur d'eau dans les pores peut être exprimée par la loi de Kelvin :

$$\Psi_t = \frac{-RT}{VM} \ln\left(\frac{e}{e_0}\right) \quad (2.4)$$

Où

Ψ_t = Succion totale du sol (kPa) ; R = Constante de gaz parfait (8,314 J/mol °K) ;

T = Température en degré Kelvin (°K) ; V = Volume spécifique de l'eau (1/w), (m³/kg) ;

M = Masse moléculaire de la vapeur d'eau (18,016 kg/k mol) ;

e = Pression partielle de la vapeur d'eau dans les pores (kPa) ;

e_0 = Pression de vapeur saturante de l'eau pure à la même température (kPa).

Le rapport $e/e_0 = H$ représente l'humidité relative. Pour une température constante de 20°C, la relation entre la succion totale en kPa et l'humidité relative H_r est donnée par :

$$\Psi_t = -135022 \ln(H_r) \quad (2.5)$$

Etant donné que la succion varie dans une gamme très large, de 0 (pour un sol saturé) à 10⁶ kPa (pour un sol séché à l'étuve), Schifield (1935) (cité par Amraoui, 1996) propose l'utilisation du symbole pF (Potentiel of Free Energy) qui représente le logarithme décimal de la succion, exprimée en centimètre de colonne d'eau, $pF = \log(\Psi)$.

La succion quantifiée en termes d'humidité relative représente la succion totale Ψ_t du sol. Elle peut être divisée en deux composantes principales, une composante matricielle Ψ_m et une autre osmotique Ψ_0 . Cette dernière devient importante quand la concentration en sel de l'eau dans les pores augmente. La succion matricielle est souvent attribuée à la capillarité, elle est donc liée à des facteurs géométriques tels que

la taille et la forme des pores, cependant des facteurs chimiques tels que la composition influence sans doute la capillarité.

$$\Psi_t = \Psi_m + \Psi_0 \quad (2.6)$$

Les succions matricielle et osmotique constituent deux composantes de l'énergie potentielle de l'eau dans le sol. En effet, Buckingham (1907) cité par Amraoui (1996) montre, à partir d'une étude thermodynamique, que le potentiel chimique de l'eau et peut être décomposé en une somme de potentiels indépendants. L'importance relative de chacun de ces potentiels varie en fonction de plusieurs facteurs parmi lesquels, la nature du milieu, sa composition chimique, les conditions de pression et de température et la salinité de l'eau.

$$\Psi_t = \Psi_m + \Psi_0 + \Psi_p + \Psi_a + \Psi_T \quad (2.7)$$

Ψ_m = Potentiel matriciel traduisant les forces d'interaction entre l'eau et la phase solide;

Ψ_0 = Potentiel osmotique traduisant l'influence des solutés ;

Ψ_p = Potentiel traduisant l'action de la pression s'exerçant sur un volume de sol;

Ψ_a = Potentiel traduisant l'action des pressions exercées par la phase gazeuse de pression du sol;

Ψ_T = Contribution entropique de la température.

Dans la plupart des milieux poreux, la succion matricielle constitue le potentiel de pression le plus important au cours de l'écoulement.

II.3.2 Dispositifs de mesure de la succion dans le sol

L'étude des mouvements de l'eau dans un sol non saturé est conditionnée par la connaissance des gradients de potentiel matriciel qui les provoquent. Pour évaluer ces potentiels, il est nécessaire d'utiliser un dispositif, qui en se mettant en équilibre avec l'eau du sol mesure son énergie libre.

Les techniques de mesure de la succion, actuellement opérationnelles, en régime transitoire sont peu nombreuses. En outre, elles ne permettent pas de balayer avec une précision satisfaisante toute la gamme des succions rencontrées dans le sol. Les dispositifs les plus connus sont le tensiomètre classique à eau, le tensiomètre miniature, le tensiomètre osmotique, les psychromètres à thermocouple (Zerhouni, 1991), et la méthode du papier filtre. Le principe de chacune de ces méthodes et les difficultés qu'elles posent seront développés par la suite. Il existe d'autres méthodes de mesure qui ne seront que cités dans le tableau II.1.

D'autres techniques (Amraoui, 1996) permettent d'imposer la succion au sol. Ceci se fait soit à l'aide d'une plaque de pression, d'une plaque tensiométrique, d'une solution osmotique ou alors par la méthode des dessiccateurs à solutions. Ces méthodes ne seront pas détaillées ici.

- **Le tensiomètre à eau mesure la pression négative de l'eau dans le sol.** Il est constitué d'une sonde poreuse en céramique, connectée à un dispositif de mesure de pression par un tube généralement en plastique. En contact avec le sol, l'eau dans le tensiomètre entre en contact avec l'eau du sol. A l'équilibre, l'eau du sol et celle contenue dans le tensiomètre auront une pression identique. La succion mesurée par cette technique est limitée à des pressions négatives de 90 kPa. Ceci est

dû d'une part aux problèmes de cavitation de l'eau dans le tensiomètre lorsque la pression dépasse cette valeur et d'autre part, à la pression d'entrée d'air de la sonde poreuse.

- **Le tensiomètre miniature** (figure 2.10) a été développé à l' « Imperial College of Science » par Ridley et Burland (1993) afin de surmonter le problème de cavitation posé par le tensiomètre à eau. Son principe de mesure est identique à celui du tensiomètre à eau. Il consiste en un capteur de pression type miniature capable de recevoir de hautes pressions négatives absolues (3500 kPa), ce capteur est enveloppé par une gaine en acier inoxydable équipée d'une céramique poreuse ayant une pression d'entrée d'air de 1500 kPa. L'espace entre la pierre poreuse et le capteur est de 250 cm ce qui correspond à un volume de 3 mm³ d'eau libre dans le réservoir. Ce dispositif mesure des suctions pouvant atteindre des valeurs de -1500 kPa avec un temps de réponse très faible (Amraoui 1996). La saturation de la pierre poreuse et du réservoir est accomplie par injection d'eau sous pression en utilisant une pression limite du capteur (3500 kPa). Le phénomène de cavitation peut être évité si de l'eau propre et pure est utilisée dans le réservoir, la surface de contact eau-réservoir est lisse et petite, le système est purgé par une application de vide afin de chasser une quantité maximale d'air piégé dans les crevasses et enfin, l'étape la plus importante est la pressurisation du système à une pression élevée afin de dissoudre l'air présent dans l'eau.

Sur des échantillons d'argile d'Angleterre compactée préparés avec de l'eau pure et avec de l'eau salée (NaCl), Marinho et Chandler (cité par Ridley et Burland, 1994) utilisent le tensiomètre miniature et la méthode du papier filtre pour évaluer la succion. Ils trouvent que les suctions données par le tensiomètre sont comparables aux suctions totales obtenues par le papier filtre surtout pour des suctions supérieures à 500 kPa. Ils concluent que le tensiomètre mesure des suctions totales et non matricielles. En effet, la céramique utilisée se comporte comme une membrane semi perméable laissant passer l'eau et non les ions de sels ; de ce fait, il s'établit un gradient osmotique entre l'eau du sol et celui du tensiomètre et la succion mesurée est une résultante d'une succion osmotique et matricielle. Cependant, Ridley et Burland, (1994) utilisent ces mêmes méthodes pour mesurer la succion d'échantillons d'argile compactée préparés avec de l'eau pure et une solution de sel (qui impose une succion de 5500 kPa). Ils montrent que le tensiomètre miniature mesure des suctions matricielles et l'hypothèse de membrane semi perméable établie par Marinho et Chandler n'est justifiée. Ridley et Burland, (1994) attribuent les résultats obtenus par Marinho et Chandler à la structure en motte des argiles compactées, en effet le papier filtre en contact avec le sol nécessite un temps d'équilibre assez long et de ce fait, il mesure une succion du sol après qu'un équilibre soit établie entre les mottes et l'espace inter-motte (degré de saturation homogène). Cependant, le tensiomètre réalise des mesures rapides qui correspondent plutôt aux suctions des zones inter-mottes (moins saturé); de ce fait, la succion mesurée est supérieure à celle donnée par le papier filtre en contact. L'influence de la microstructure sur la succion mesurée doit être étudiée avant de tirer une conclusion définitive sur la succion mesurée par ce dispositif.

- **Le tensiomètre osmotique** a été développé pour vaincre également le problème de cavitation d'eau. Ils utilisent une solution aqueuse introduite dans la chambre du tensiomètre sous pression afin d'avoir une pression de référence élevée de l'ordre de 1380 kPa à 2070 kPa. Cette pression est définie comme la pression de référence de la solution à l'intérieur de la chambre sous les conditions d'équilibre à une température de 20°C quand le dispositif est plongé dans l'eau distillée à pression nulle.

Le dispositif (figure 2.11) consiste en une chambre fermée contenant une solution de Polyéthylène Glycol (PEG 20000), un trou de remplissage pour introduire la solution à l'intérieur de la chambre, un capteur assurant la mesure de la pression interne de la solution et enfin une membrane semi perméable cellulosique en contact avec une céramique de haute pression d'entrée d'air (1500 kPa) placée en bas de la chambre. Quand le tensiomètre osmotique, initialement sous condition de référence, est placé en contact avec le sol, une quantité minuscule d'eau coulera vers la chambre à travers la membrane semi perméable, la pression dans la chambre sera donc réduite d'une quantité équivalente à la pression négative de l'eau dans le sol. Le problème majeur rencontré lors de l'utilisation du tensiomètre osmotique est la difficulté de maintenir la pression de référence constante au cours du temps. Plusieurs explications ont été données par Backing et Fredlund (1979) (cité par Amraoui, 1996) parmi lesquelles, les fuites à travers la céramique poreuse de solutés confinées ou alors une détérioration physique de la céramique. L'augmentation de la température diminue également la pression de référence. Jusqu'à présent aucune solution n'a été trouvée pour résoudre ce problème. Compte tenu des difficultés posées par ce dispositif, il est préférable de ne l'utiliser que pour des applications où la température et la pression d'eau dans le sol restent constantes.

- **Les psychromètres** sont utilisés pour évaluer la succion totale du sol en mesurant l'humidité relative de la phase air dans les pores. En effet, grâce à une mesure de la température, le psychromètre permet de déterminer l'humidité relative d'une enceinte fermée. Les températures mesurées sont d'une part la température ambiante T_0 de l'enceinte et d'autre part la température d'évaporation T_e de l'eau dans l'atmosphère de cette enceinte (Zerhouni, 1995 ; cité par Ghembazza ;1999).

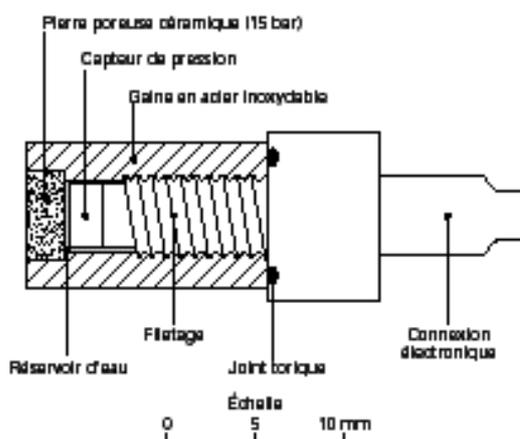


Figure 2.10 : Schéma du tensiomètre miniature (Ridley et Berland, 1993).

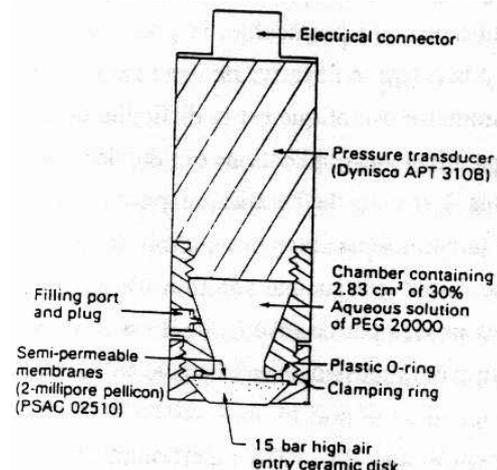


Figure 2.11 : Schéma du tensiomètre osmotique (Backing et Fredlund, 1979 ; cité).

par Amraoui, 1996).

La différence de température ($T_0 - T_e$) est une fonction de l'humidité relative régnant dans l'enceinte. La loi de Kelvin (équation (2.4)) permet de relier cette humidité à la succion dans le sol. Dans le cas d'un psychromètre à thermocouple (figure 2.12), la mesure s'effectue à l'aide d'un capteur qui permet de mesurer par effet Seebeck, La température T_0 ensuite de créer par effet Peltier, la condensation d'une faible quantité d'eau sur le capteur puis de mesurer la température d'évaporation T_e de cette eau (Verbugge, 1978 ; Zerhouni, 1991 cité par Ghembazza ;1999). L'étalonnage du dispositif se fait à l'aide d'une solution de NaCl à différentes concentrations. Les mesures psychrométriques sont principalement influencées par la température qui agit d'une part sur les pressions partielles de vapeur d'eau et d'autre part sur la sensibilité des psychromètres. D'autres paramètres influent la qualité de mesure tel que l'échauffement, par effet Joule, du thermocouple lors de la phase de condensation par refroidissement sous l'effet Peltier et la corrosion des sondes psychrométriques qui réduit la sensibilité des capteurs.

➤ **La méthode du papier filtre** est une technique de mesure indirecte de la succion (le papier filtre est utilisé comme un capteur de pression). Elle est basée sur l'hypothèse de l'établissement d'un équilibre hydrique entre le papier filtre et un échantillon de sol ayant une succion donnée. A l'équilibre hydrique, la teneur en eau du papier filtre est mesurée puis reportée sur sa courbe d'étalonnage. La valeur de la succion qui correspond à la teneur en eau du papier filtre est identique à celle de l'échantillon testé.

Suivant que l'équilibre hydrique s'établit par un échange d'eau en phase liquide ou sous forme de vapeur d'eau, les succions mesurées sont différentes. En effet, quand le papier filtre sec est mis en contact avec l'échantillon du sol, l'eau circule de l'échantillon vers le papier filtre jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, dans ce cas c'est la succion matricielle du sol qui est mesurée. D'un autre côté, quand le papier filtre est suspendu au-dessus de l'échantillon du sol (sans contact avec l'échantillon) l'écoulement aura lieu en phase vapeur à partir de l'échantillon de sol jusqu'à établissement de l'équilibre hydrique. Dans ce cas, c'est la succion totale du sol qui est mesurée.

Cette méthode à l'avantage d'être peu onéreuse, de mesurer la succion du sol dans une gamme très étendue et de fournir aussi bien la succion totale que la succion matricielle. Ces raisons, ainsi que la disponibilité des matériels, nous ont permis de l'adopter pour notre étude expérimentale.

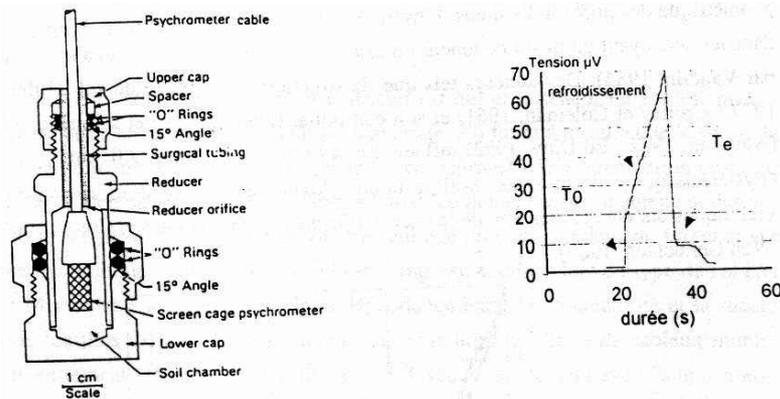


Figure 2.12 : Schéma du psychromètre (Fredlund et Rahardjo, 1993) et cycle de mesure psychrométrique.

Tableau II.1 : Dispositifs de mesure de la succion

Méthodes	Composante de succion mesurée	Gamme de succion (kPa)
Tensiomètre à eau	<ul style="list-style-type: none"> • Pression négative de l'eau dans le sol ; • Succion matricielle (pression d'air dans le sol est atmosphérique) 	0 → 90
Tensiomètre miniature	<ul style="list-style-type: none"> • Succion matricielle (en contact) • Succion totale (sans contact) 	0 → 1500
Tensiomètre osmotique	<ul style="list-style-type: none"> • Succion matricielle 	0 → 1500
Psychromètre	<ul style="list-style-type: none"> • Succion totale 	300 → 7000
Papier filtre	<ul style="list-style-type: none"> • Succion matricielle (en contact) • Succion total (sans contact) 	1 → 10000
Translation d'axe	<ul style="list-style-type: none"> • Succion matricielle 	0 → 1500
Capteur à dissipation de chaleur	<ul style="list-style-type: none"> • Succion matricielle 	0 → 400

II.3.3 Relation teneur en eau – succion ; courbe de rétention d'un sol

Considérons un sol initialement saturé en eau. Si on lui applique une pression d'air, à partir d'une valeur de pression critique appelée d'entrée d'air du sol, les larges pores commencent à se vider. La loi de Jurin (équation 2.3) permet d'affirmer qu'une augmentation de la pression d'air appliquée au sol entraînera un drainage de pores de taille de plus en plus réduite jusqu'à ce que pour de forte succion, seuls les pores de très petites dimensions retiennent l'eau. La succion du sol est donc liée à la qualité d'eau qui y est présente à cause des interactions de type capillaire ou d'adsorption entre l'eau et les particules du sol. Cette relation est une caractéristique spécifique d'un type de sol et peut être déterminée expérimentalement par les méthodes de mesure et d'imposition de succion citées précédemment. Elle est représentée graphiquement par une courbe appelée « courbe de rétention d'humidité dans le sol $\psi(\theta)$ » (figure 2.13) dont l'analyse s'avère délicate. A priori, on peut dire que les forces capillaires sont dominantes pour des succions matricielles faibles ($0 < \psi < 100$ kPa) alors que les forces d'adsorption prédominent dans la gamme des succions élevées ($\psi > 100$ kPa). Ce qui veut dire que pour le premier cas, la succion dépend essentiellement de la géométrie des pores, alors que dans le second cas, elle dépend de la surface spécifique des particules de sol.

La relation $\psi(\theta)$ n'est pas univoque. En effet, les courbes déterminées par drainage en partant d'un sol initialement humide diffèrent de celles obtenues par humidification en partant d'un sol initialement sec. L'hystérésis ainsi présente entre les deux courbes est généralement attribuée à plusieurs facteurs (Hillel, 1988). Parmi ceux-ci, l'effet de l'angle de contact, la présence d'air piégé qui tend à réduire la teneur en eau du sol en chemin d'humidification, le gonflement et le retrait qui provoquent des variations différentielles de la structure du sol et enfin, la non uniformité géométrique des pores individuels. L'hystérésis peut être également importante durant l'infiltration dans les sols ayant un profil de teneur en eau initiale non uniforme (Vachaud et Thony, 1971 cités par Vauclin, 1984). Des facteurs tels que la structure et la texture du sol (Hillel, 1988 ; Cronney et Coleman, 1961) et son état initial teneur en eau et sa masse volumique sèche (Amraoui, 1992) influencent la forme de la courbe $\psi(\theta)$ ainsi que l'importance de l'hystérésis qui y est présente. Malgré la complexité de cette relation, de nombreuses fonctions analytiques ont été établies afin de la décrire (Gardner, 1960 ; Brooks et Corey, 1966 ; Visser, 1966 ; Van Genuchten, 1980) cité par Derouf et Bouhmidi ;2001.

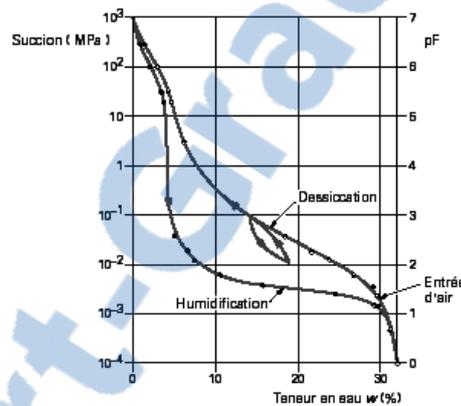


Figure 2.13: Courbe de rétention

II.3.4 Relation entre la conductivité hydraulique et la succion du sol

Le coefficient de conductivité hydraulique d'un sol non saturé $k_w(\theta)$ est définie par la loi de Darcy généralisée (Buckingham, 1907 ; Richards, 1931 cité par Didier et al; 1996) comme le facteur de proportionnalité reliant le débit par unité de surface et par unité de temps au gradient de potentiel d'écoulement ϕ provoquant l'écoulement :

$$k_w(\theta) = -\frac{q}{\text{grad } \phi} \quad (2.8)$$

En l'absence de potentiels thermique et osmotique, le terme ϕ regroupe le potentiel matriciel Ψ et le potentiel gravitaire z .

En conditions saturées, le potentiel matriciel est nul et la teneur en eau est maximale, la conductivité est alors constante et sa valeur est maximale. Au fur et à mesure que le sol se désature, sa teneur en eau diminue et sa succion augmente. Ceci entraîne une augmentation de la tortuosité des chemins d'écoulement, une diminution des débits d'écoulement et un changement des propriétés de l'eau dans le sol. De ce fait, la conductivité hydraulique diminue rapidement. La relation entre la conductivité hydraulique et la succion du sol est complexe et dépendent du type de sol considéré. La figure 2.14 montre l'allure générale de la dépendance entre la conductivité et la succion pour deux sols de texture différentes. Par rapport aux sols argileux, les sols sableux

montrent une conductivité nettement élevée à la saturation et qui diminue rapidement avec l'augmentation de la succion jusqu'à des valeurs inférieures à celles du sol argileux. Ceci s'explique par le fait que dans un sol à petits pores, un grand nombre d'entre eux restent pleins et conduisent l'eau, bien que la teneur en eau diminue.

Il est important de souligner que la relation entre la conductivité et la succion dépend de l'hystérésis et diffère si le sol est en voie de dessèchement ou en voie d'humidification. La raison est que pour une même succion, un sol qui se dessèche contient plus d'eau qu'un sol qui s'humecte ; en revanche, la relation conductivité hydraulique-teneur en eau semble moins affectée par ce phénomène (Didier et al., 1996).

Tableau II.2 : Quelques expressions empirique de la conductivité hydraulique. (Amraoui, 1996)

Auteurs	Equations	Définition des paramètres
Gardner, (1958) Gardner, (1960)	<p>Relation $k_w(\psi)$</p> $k_w(\psi) = k_{ws} \exp(\alpha\psi)$ $k_w(\psi) = \frac{k_{ws}}{b + \psi m}$ $k_w = \frac{k_{ws}}{(1 + \frac{\psi}{\psi_m})}$	A est une constante qui dépend de la nature du sol et (a, b, m) sont des constantes empiriques. ψ_m est la succion matricielle pour la quelle $k_w = 0,5 k_{ws}$
Brooks et Corey, (1966)	$k_w(\psi) = k_{ws} \left(\frac{\psi_a}{\psi}\right)^m \quad \psi \leq \psi_a$ $k_w(\psi) = k_{ws} \quad \psi \geq \psi_a$	Avec m est une constante caractéristique du sol ψ_a est la pression d'entrée d'air
Rijitima, (1965)	$k_w(\psi) = \frac{k_{ws}}{\exp(a \psi)}$ $k_w(\psi) = \frac{k_{ws}}{\exp(-a(\psi - \psi_a))}$	Avec a est une constante qui varie de 1 pour les argiles à 3 pour les sables ψ_a Est la pression d'entrée d'air
Van Genuchten (1980) et Mualem, (1976)	<p>Relation $k_w(\theta)$</p> $k_w(\theta) = k_{ws} \theta^{0.5} \left(1 - \left(1 - \theta^{1/m}\right)^m\right)$ <p>($m = 1 - 1/n$) et ($0 < m < 1$)</p> $\theta = \frac{\theta - \theta_{res}}{\theta_s - \theta_{res}} = (1 - (\alpha\psi)^n)^{-m}$	α, n et m : constantes caractéristiques du sol
Campbell, (1965) et Brooks et Corey, (1966)	$k_w(\theta) = k_{ws} \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^m$ $\psi = \psi_a \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{-b} \quad \text{et } m = 2b + 3$	m et b : constantes empiriques
Irmay, (1954)	<p>Relation $k_w(S_r)$</p> $k_w(S_r) = k_{ws} \left(\frac{S_r - S_{r_{res}}}{1 - S_{r_{res}}}\right)^3$	S_r et $S_{r_{res}}$ sont définies précédemment
Corey, (1963)	$k_w(S_r) = k_{ws} \left(\frac{S_r - S_{r_{res}}}{1 - S_{r_{res}}}\right)^4$	
Scott, (1963)	$k_w(S_r) = k_{ws} (1 - n(1 - S_r))$	n : constante empirique
Brutsaet, (1968)	$k_w(S_r) = k_{ws} S_r^n$	n : constante empirique

Kovacs, (1981)	$k_w(S_r) = k_{ws} \left(\frac{S_r - S_{r_{res}}}{1 - S_{r_{res}}} \right)^{3.5}$	
Nielson et al., (1986)	$k_w(S_r) = k_{ws} S_{r_e} \left[1 - \left(1 - S_{r_e}^{1/m} \right)^m \right]^2$	S_{r_e} : degré de saturation effective défini précédemment

Selon la même référence il n'existe pas de relation théorique générale traduisant les variations de la conductivité hydraulique en fonction de la succion ou de la teneur en eau du sol. Cependant de nombreuses équations empiriques, fondées sur des relations obtenues expérimentalement, ont été proposées. Nous les avons regroupés dans le tableau II.2 les différents paramètres de ces relations sont définis comme suit : $k_w(S_r)$, $k_w(\theta)$ et $k_w(\psi)$ sont respectivement les conductivités hydrauliques pour une succion (ψ), une teneur en eau volumique (θ) et un degré de saturation (S_r) donnés ; θ_{res} et θ_s sont respectivement, la teneur en eau volumique résiduelle et à la saturation ; Θ est la teneur en eau effective définie par : $\Theta = \frac{\theta - \theta_{res}}{\theta_s - \theta_{res}}$; $S_{r_{res}}$ et S_{r_f} sont respectivement le degré de saturation résiduelle et de saturation au champ ; S_{r_e} est le degré de saturation effective définie par : $S_{r_e} = \frac{S_r - S_{r_{res}}}{S_{r_f} - S_{r_{res}}}$; K_{ws} est la conductivité hydraulique à la saturation.

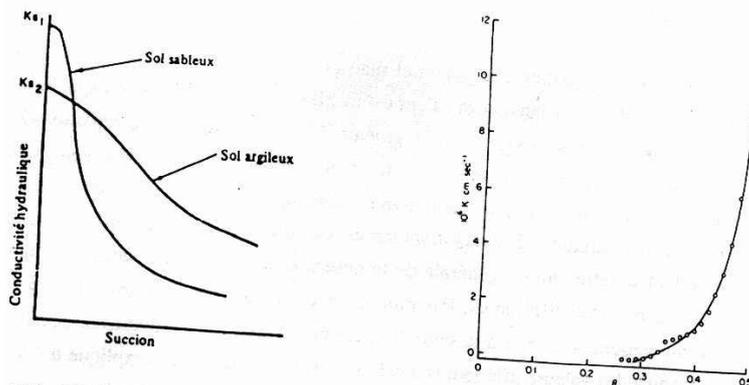


Figure 2.14 : Allure des relations entre la conductivité hydraulique, la succion et la teneur en eau.

II.4 CONCLUSION

Le phénomène d'infiltration est un phénomène très complexe. Plusieurs paramètres interviennent dans la phénoménologie de ce processus. La densité initiale sèche, la teneur en eau, la compacité et la nature de sols sont les paramètres à tenir en compte dans le choix de pas temps, le maillage de point de vue de numérique et les hypothèses simplificatrices dans le cas d'une tentative d'une analyse analytique.

Il a été conclu que la succion est le paramètre induisant l'hystérésis dans le sol, il donc recommandé de contourner cette difficulté par une présentation des relations hydrodynamiques en fonction de la teneur ou la charge hydraulique au lieu de la succion.

Malheureusement, pour notre cas (voir le chapitre 3 et chapitre 4) nous n'avons pas pu prendre en compte de la difficulté mentionnée dans ce modeste projet de fin d'étude.

Par la suite nous tentons de faire une étude analytique de phénomène d'infiltration dans les sols non saturés en tenant compte de l'aspect évolutif de phénomène c'est-à-dire en régime transitoire.

CHAPITRE 3:

Proposition d'une solution analytique

Solution analytique ?

Solution de Philip ?

Solution de Parlange ?

Equations Richards non linéarité hystérésis ?

Méthode exp-fonction ?

Méthode de séparation des variables ?

III.1 INTRODUCTION

Les solutions de l'équation générale de l'écoulement ne peuvent être obtenues que pour des cas particuliers de l'écoulement, et après la définition des conditions initiales et des conditions aux limites du domaine dans lequel elles s'appliquent.

En effet, l'aspect fortement non linéaire des équations du transfert d'eau en milieu poreux non saturés rend difficile, dans le cas général, la recherche des solutions analytiques du problème d'infiltration.

L'objet de ce chapitre de ce projet de fin d'études est ainsi double : d'une part, il s'agit de la reproduction détaillée des solutions quasi-analytiques développées par Philip, 1955 et 1969 ; Parlange, 1971 pour des conditions particulières de l'écoulement définies comme conditions initiales et conditions aux limites du domaine d'écoulement. Et d'autre part, une tentative d'une proposition d'une solution analytique de l'équation de Richards dans une configuration bidimensionnelle en tenant compte de l'aspect non linéaire des paramètres hydrodynamiques.

III.2 MOUVEMENT HORIZONTAL

Soit l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Où x est l'ordonnée horizontale, D est une fonction de la variable θ .

Les conditions initiales et aux limites sont :

$$\text{Pour } t = 0 \text{ et } x > 0 : \theta = \theta_i$$

$$\text{Pour } t \geq 0 \text{ et } x = 0 : \theta = \theta_0 \quad (3.2)$$

III.2.1 Méthode de Boltzmann

Soit la transformation de **Boltzmann** $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} x \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Remplaçant (3.3) dans l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$x = 0 \Rightarrow \eta = 0 : \theta = \theta_i, \quad t = 0 \Rightarrow \eta \rightarrow \infty : \theta = \theta_0,$$

Et la solution de l'équation (3.1) sujette aux conditions (3.2) est

$$x(\theta, t) = \eta(\theta) \cdot \sqrt{t}$$

Après intégration l'équation (3.4a) par rapport à θ , on trouve

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) d\theta = \left[-2D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\theta_i}^{\theta},$$

$$Y(\theta) = \sqrt{\frac{2}{(\frac{m}{2}+1) \cdot \frac{m}{2}}} \cdot \theta^{(\frac{m}{2}+1)}$$

$$\eta(\theta) = Y' = \sqrt{\frac{2(\frac{m}{2}+1)}{\frac{m}{2}}} \cdot \theta^{\frac{m}{2}}$$

Ainsi $X = \eta\sqrt{T}$

$$X(\theta, T) = \sqrt{\frac{2(\frac{m}{2}+1)}{\frac{m}{2}}} \cdot \theta^{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{T}$$

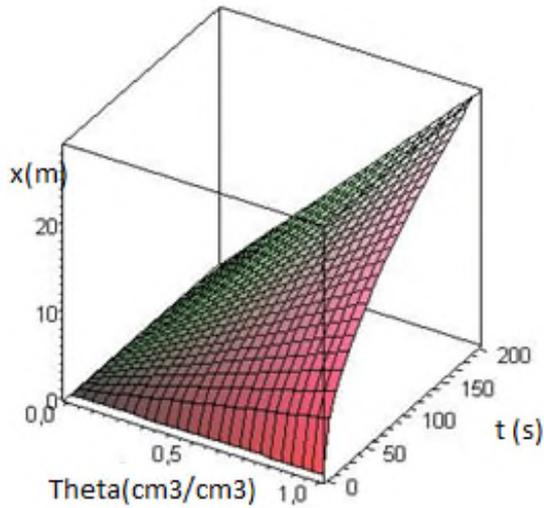


Figure 3.1 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2.

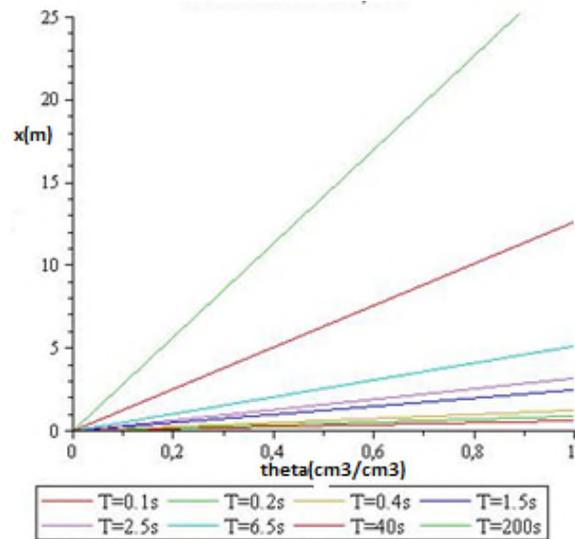


Figure 3.2 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2. Effet du temps.

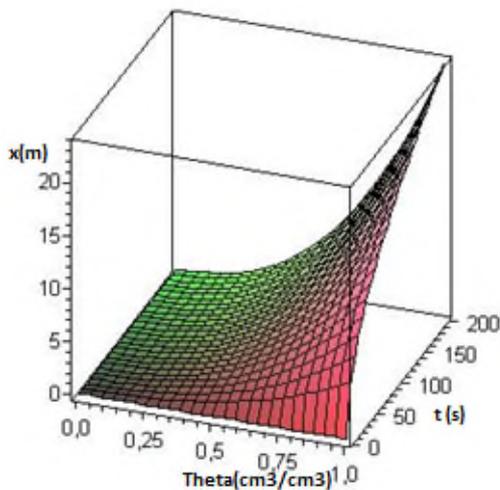


Figure 3.3 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5.

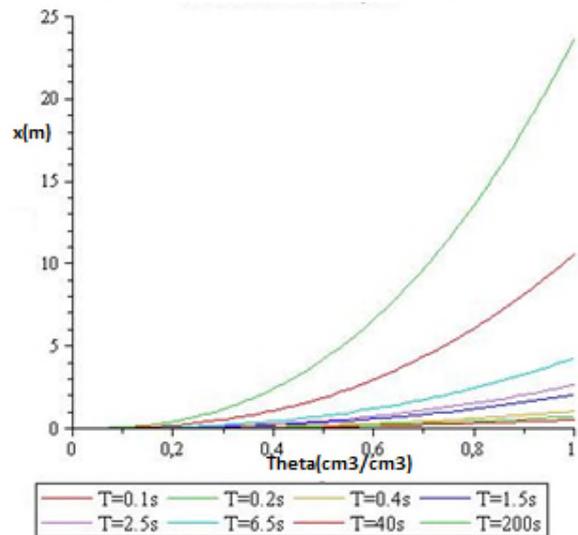


Figure 3.4 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5. Effet du temps.

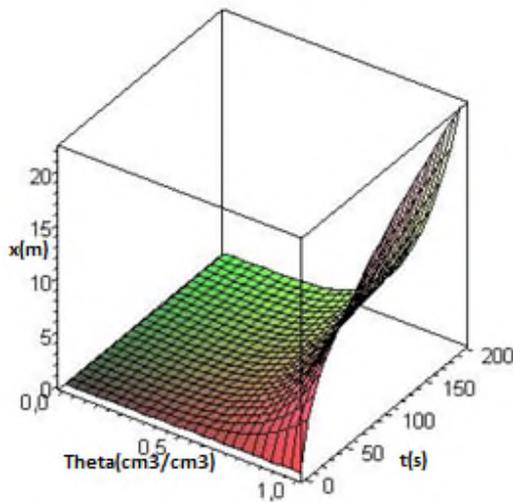


Figure 3.5 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10.

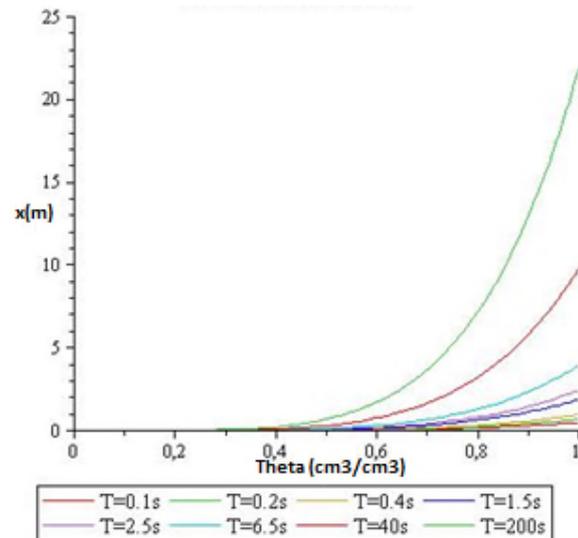


Figure 3.6 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10. Effet du temps.

Exemple 2 :

Considérons l'équation (3.1) avec : $D(\theta) = \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})$

n, D_0 sont déterminés expérimentalement pour le sol. D_0 est la diffusivité à la saturation, $1 < n < 10$ dépend de la répartition de la taille des pores.

Alors la transformation de Boltzmann donne :

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial\theta = \left[-2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1}) \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right]_{\theta_i}^{\theta} \tag{3.8}$$

De même posons : $Y(\theta) = \int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial\theta$

Ce qui donne à partir de l'équation (3.8) $\Rightarrow Y(\theta) = \frac{-2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})}{Y''(\theta)}$

$\Rightarrow Y \cdot Y'' = -2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})$ alors $Y(\theta) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (\theta - \frac{\theta^{n+1}}{n+1})$

Ainsi la solution de l'équation (3.8) est donnée par $\eta(\theta) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (1 - \theta^n)$

Ce qui implique que la répartition spatio-temporelle s'écrite :

$$x(\theta, t) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (1 - \theta^n) \sqrt{t}$$

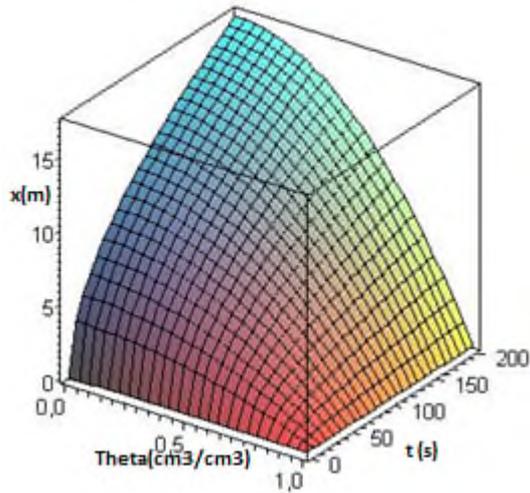


Figure 3.7 : Infiltration horizontale pour $n = 2, D_0 = 1$.

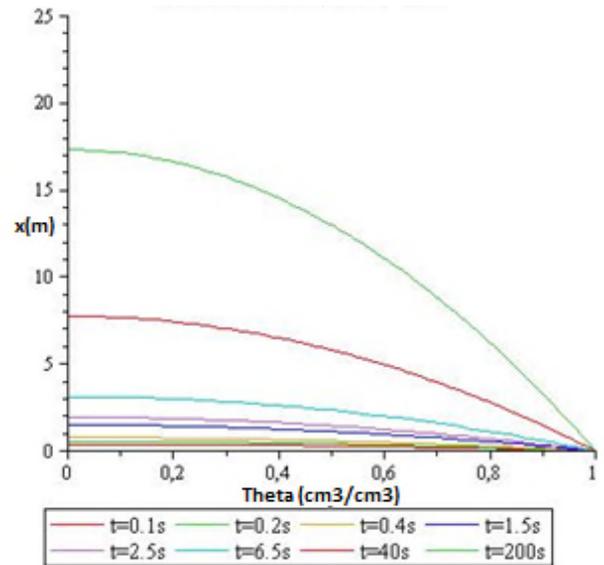


Figure 3.8 : Infiltration horizontale pour $n = 2, D_0 = 1$. Effet du temps.

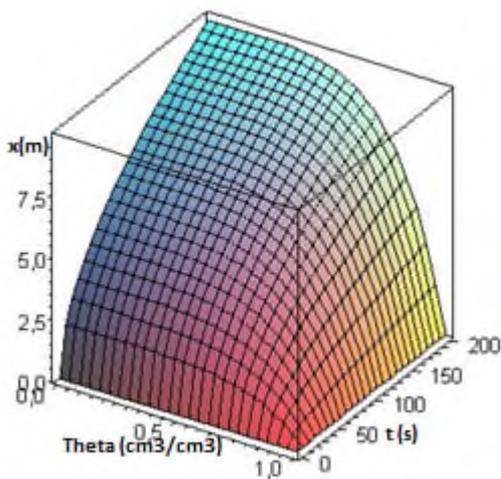


Figure 3.9 : Infiltration horizontale pour $n = 5, D_0 = 1$.

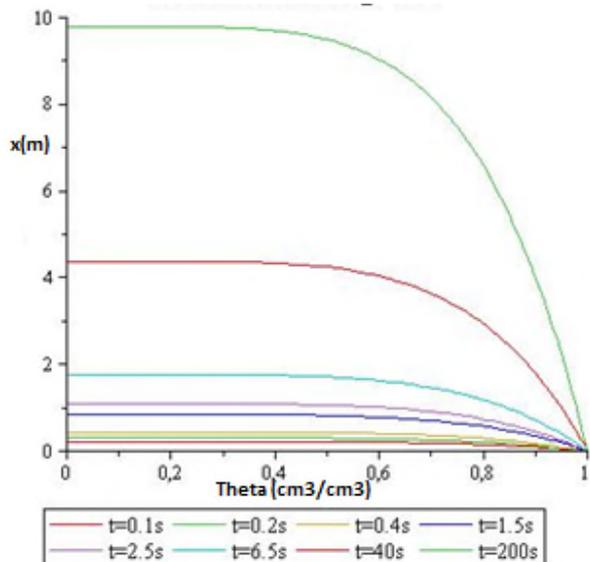


Figure 3.10 : Infiltration horizontale pour $n = 5, D_0 = 1$. Effet du temps.

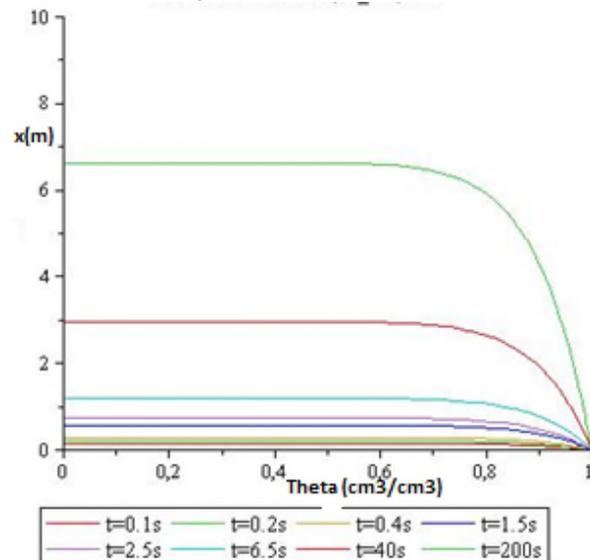
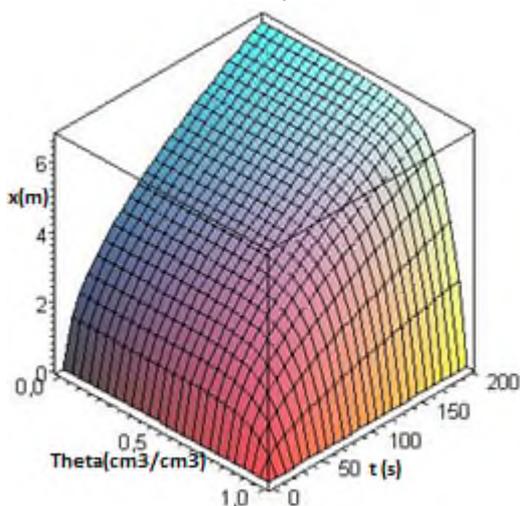


Figure 3.11 : Infiltration horizontale pour $n = 10, D_0 = 1$.

Figure 3.12 : Infiltration horizontale pour $n = 10, D_0 = 1$. Effet du temps.

III.2.2 Méthode de séparation de variables

Exemple1 :

Soit l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0$$

$$t = 0, x > 0, \theta = \theta_0$$

$$t \geq 0, x = 0, \theta = \theta_i$$

(3.9)

Posons $u = \theta^{m+1}$

C'est-à-dire $\theta = u^{\frac{1}{m+1}}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta} = (m+1)\theta^m$

L'équation (3.9) peut s'écrire

$$\frac{1}{m+1} u^{\frac{1}{m+1}-1} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m+1} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

(3.10)

Ainsi on obtient ce qui suit :

$$u^{\frac{1}{m+1}-1} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(3.11)

Utilisons la méthode de séparation de variables en posant :

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

On obtient

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-1} X(x)^{\frac{1}{m+1}} T'(t) = T(t) X''(x)$$

(3.12)

Ce qui mène à résoudre deux équations différentielles

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-2} T'(t) = X(x)^{\frac{1}{m+1}} X''(x) = k \text{ (constante)}$$

(3.13)

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-2} T'(t) = k$$

$$X(x)^{\frac{1}{m+1}} X''(x) = k$$

(3.14)

La première équation implique

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-1} = -\frac{m}{m+1} (kt + c), \quad c: \text{constante}$$

(3.15)

Ce qui donne

$$T(t) = \left(-\frac{m}{m+1} (kt + c) \right)^{\frac{m+1}{m}}$$

(3.16)

Donc

$$u(x, t) = \left(-\frac{m}{m+1} (kt + c) \right)^{\frac{m+1}{m}} X(x)$$

(3.17)

Où $X(x)$ est la solution de l'équation différentielle $X(x)^{\frac{1}{m+1}} X''(x) = k$

Ainsi la solution de (3.9) prend la forme

$$\theta(x, t) = u(x, t)^{\frac{1}{m+1}} = \left(-\frac{m}{m+1}(kt + c) \right)^{-\frac{1}{m}} F(x)$$

Exemple 2 :

Considérons à nouveau le même exemple :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0$$

$$t = 0, x > 0, \theta = \theta_0 \tag{3.18}$$

$$t \geq 0, x = 0, \theta = \theta_i$$

Posons

$$\Theta = \theta t^{-\frac{1}{m+2}}, \chi = x t^{-\frac{m+1}{m+2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{m+2} t^{-\frac{m+1}{m+2}} \Theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \chi} = t^{-\frac{m+1}{m+2}} \frac{\partial}{\partial \chi} \tag{3.19}$$

Dans ce cas l'équation (3.18) se transforme en une équation différentielle

$$\frac{1}{m+2} \Theta = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\Theta^m \frac{\partial \Theta}{\partial \chi} \right), \tag{3.20}$$

Posons $G = \Theta^{m+1}$, ou encore $\Theta = G^{\frac{1}{m+1}}$, on a donc $\frac{\partial G}{\partial \Theta} = (m+1)\Theta^m$

L'équation (3.20) peut s'écrire :

$$\frac{m+1}{m+2} G^{\frac{1}{m+1}} = \frac{\partial^2 G}{\partial \chi^2} \tag{3.21}$$

Ainsi une solution de l'équation (3.18) prend la forme

$$\theta(x, t) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot \Theta(x) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot G^{\frac{1}{m+1}}(x)$$

Ou encore

$$\theta(x, t) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot G^{\frac{1}{m+1}} \left(x \cdot t^{-\frac{m+1}{m+2}} \right)$$

Ou la fonction G est la solution de l'équation différentielle (3.21).

III.2.3 Méthode exp-fonction

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0 \tag{3.22}$$

Posons $\theta(x, t) = F(\xi)$,

Avec $\xi = \alpha(x + \beta t)$, où α, β deux constants arbitraires, ainsi l'équation (3.22) prend la forme

$$\frac{d}{d\xi} \left(F^m \frac{dF}{d\xi} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{dF}{d\xi} \tag{3.23}$$

En utilisant la transformation suivante

$$G = F^m$$

L'équation (3.23) peut s'écrire

$$\frac{1}{m} \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^2 + G \frac{d^2 G}{d\xi^2} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{dG}{d\xi} \dots \dots \dots \tag{3.24}$$

La forme générale de la solution de cette équation par la méthode "exp-fonction" est donnée par

$$G(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi+a_0+a_{-1}e^{-\xi}}}{b_1 e^{\xi+b_0+b_{-1}e^{-\xi}} \dots \dots \dots} \quad (3.25)$$

Pour déterminer les constantes $a_1, a_0, a_{-1}, b_1, b_0$ et b_{-1} on remplace la fonction (3.25) dans l'équation (3.24) et on compare les coefficients des exponentielles.

III.3 MOUVEMENT VERTICAL

Soit l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

Pour $t = 0$ et $z > 0 : \theta = \theta_i$ et $t \geq 0$ et $z = 0 : \theta = \theta_0$

Utilisons l'identité

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = - \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.27)$$

L'équation (3.26) devient

$$- \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial \theta} \quad (3.28)$$

En intégrant l'équation (3.28) par rapport à θ , on trouve :

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta_i}^{\theta} z \cdot \partial \theta = D \frac{\partial \theta}{\partial z} - (k - k_i) \quad (3.29)$$

Ou $k_i = k(\theta_i)$ avec la condition $\lim_{\theta \rightarrow \theta_i} D \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \forall t$

Posons :

$$Z(\theta, t) = f_1 t^{\frac{1}{2}} + f_2 t + f_3 t^{\frac{3}{2}} + \dots + f_n t^{\frac{n}{2}} + \dots \quad (3.30)$$

Les f_n dépendent que de θ .

Remplaçons l'équation (3.30) dans l'équation (3.29) on trouve :

$$\begin{aligned} & - \int_{\theta_i}^{\theta} \left[\frac{1}{2} f_1 t^{-\frac{1}{2}} + f_2 + \frac{3}{2} f_3 t^{\frac{1}{2}} + \dots + \frac{n}{2} f_n t^{\frac{n-1}{2}} + \dots \right] \partial \theta \\ & = \frac{D}{f_1 t^{\frac{1}{2}} + f_2 t + f_3 t^{\frac{3}{2}} + \dots + f_n t^{\frac{n}{2}} + \dots} - (k - k_i) \\ \Rightarrow & - \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_1 \partial \theta - \int_{\theta_i}^{\theta} f_2 \partial \theta - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_3 \partial \theta - \dots - \frac{n}{2} t^{\frac{n-1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_n \partial \theta + \dots \\ & = \frac{D}{f_1 t^{\frac{1}{2}} \cdot 1 + \frac{f_2'}{f_1'} t^{\frac{1}{2}} + \frac{f_3'}{f_1'} t + \dots + \frac{f_n'}{f_1'} t^{\frac{n-1}{2}} + \dots} - (k - k_i) \\ & = \frac{D}{f_1' t^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \left[\frac{f_2'}{f_1'} t^{\frac{1}{2}} + \frac{f_3'}{f_1'} t + \dots + \frac{f_n'}{f_1'} t^{\frac{n-1}{2}} + \dots \right]^j \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des puissances de $t^{\frac{1}{2}}$, on trouve les formules suivantes :

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_1(\theta) d\theta = - \frac{2D(\theta)}{f_1'(\theta)} \quad (3.31)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_2(\theta) d\theta = \frac{D(\theta)f_2'}{(f_1')^2} + (k - k_i) \quad (3.32)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_3(\theta) d\theta = \frac{2D(\theta)}{3} \left[\frac{f_3'}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{(f_1')^3} \right] \quad (3.33)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_4(\theta) d\theta = \frac{D(\theta)}{2} \left[\frac{f_4'}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{(f_1')^3} \left(2 \frac{f_3'}{f_2'} - \frac{f_2'}{f_1'} \right) \right] \quad (3.34)$$

En tenant compte de la seconde condition dans (3.26), la condition sur les f_n est :

$$\theta = \theta_i, \quad f_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.35)$$

Avec f_1 connu, nous pouvons résoudre l'équation (3.32) sous réserve de la condition (3.35) pour f_2 ;

Puis, avec f_2 connu, nous pouvons résoudre l'équation (3.33) sous réserve de la condition (3.35) pour f_3 et ainsi de suite. Les différentes équations (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), ... sont linéaires et peuvent être rapidement résolus avec précision par la méthode numérique de Philip.

Notons que les équations (3.32), (3.33), (3.34), ... peuvent s'écrire sous la forme

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f(\theta) d\theta = \alpha(\theta) f'(\theta) - \beta(\theta) \quad (3.36)$$

Sujette à la condition

$$\theta = \theta_i, \quad f = 0 \quad (3.37)$$

Où α et β sont des fonctions connues.

Nous procédons à discuter de la solution numérique de (3.36) sujette à la condition (3.37), sachant que la procédure de ce cas général peut être appliquée à tous les équations ci-dessus en remplaçant à chaque fois les fonctions appropriées pour α , β et f

Subdivisons l'intervalle $[\theta_i, \theta]$ en n sous-intervalles de même longueur $\partial\theta$

Soit

$$\theta = \theta_i$$

$$\theta_r = \theta_0 - r \cdot \partial\theta \text{ avec } r = 0, 1, \dots, n \quad (3.38)$$

En remplaçant la courbe de la fonction $f(\theta)$ par la ligne polygonale de sommets $(\theta_r, f(\theta_r)) = (\theta_r, f_r)$ on obtient l'approximation

$$\int_{\theta_r}^{\theta_{r+1/2}} f(\theta) d\theta = -\frac{1}{4} (f_{r+1} + 3f_r) \frac{1}{2} \partial\theta \quad (3.39)$$

On utilise aussi l'approximation

$$\left(\alpha(\theta) f'(\theta) \right)_{r+1/2} = \bar{\alpha}_{r+1/2} \frac{f_r - f_{r+1}}{\delta\theta} \quad (3.40)$$

Où

$$\bar{\alpha}_{r+1/2} = -\frac{1}{\partial\theta} \int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} \alpha(\theta) d\theta \quad (3.41)$$

Remplaçant (3.39) et (3.40) dans (3.36) on obtient

$$\int_{\theta_n}^{\theta_r} f(\theta) d\theta - \frac{1}{4} (f_{r+1} + 3f_r) \frac{1}{2} \partial\theta = \frac{\bar{\alpha}_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta} (f_r - f_{r+1}) - \beta_{r+\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

Qui peut être mise sous la forme

$$f_{r+1} - f_r = - \frac{\frac{\beta_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta} + I_{r+\frac{1}{2}}}{\frac{\bar{\alpha}_{r+\frac{1}{2}}}{(\partial\theta)^2} - \frac{1}{8}} \quad (3.43)$$

Où

$$I_{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\partial\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} f(\theta) d\theta - \frac{1}{2} f_r \quad (3.44)$$

De plus, l'approximation polygonale de la courbe de $f(\theta)$ implique que

$$I_{r+\frac{1}{2}} = I_{r-\frac{1}{2}} - f_r \quad (3.45)$$

Il est commode d'introduire la quantité I_n définie par

$$I_n = I_{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} f_n \quad (3.46)$$

L'approximation polygonale exige que $I_n = 0$. La méthode numérique de Philip consiste à ;

1. Tabuler les valeurs $\frac{\bar{\alpha}_{r+\frac{1}{2}}}{(\partial\theta)^2} - \frac{1}{8}$ et $\frac{\beta_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta}$ obtenues à partir des fonctions connues α et β
2. Prendre les valeurs initiales $I_{\frac{1}{2}} = 0$ et $f_0 = 0$, appliquer alternativement (3.43) et (3.45) pour évaluer un ensemble de valeurs de f et finalement I_n . Notons ces valeurs par $f_r^{(1)}$ et $I_n^{(1)}$.
3. Répéter cette procédure avec $I_{\frac{1}{2}} = -1$ et $f_0 = 0$, mais cette fois-ci négliger les valeurs tabulées de $\frac{\beta_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta}$ et procéder comme si cette quantité est toujours nulle. Notons les nouvelles valeurs de f_r et I_r par $f_r^{(2)}$ et $I_n^{(2)}$.

4. Alors les bonnes valeurs de $I_{\frac{1}{2}}$ et f_r sont données par

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{I_n^{(1)}}{I_n^{(2)}} \quad (3.47)$$

$$f_r = f_r^{(1)} - I_{\frac{1}{2}} f_r^{(2)} \quad (3.48)$$

5. Le calcul peut être vérifié pour les erreurs numériques en introduisant la valeur de $I_{\frac{1}{2}}$ donnée par (3.47) dans la procédure 2. Les f évaluées de cette manière doivent être égales à celles données par (3.48) et I_n doit être nulle.

Exemple :

Résoudre l'équation (3.26) où D est une constante et $\frac{\partial K}{\partial\theta} = \rho = \text{constante}$.

Il est commode d'introduire les quantités :

$$c = \frac{\theta - \theta_n}{\theta_0 - \theta_n}, \quad T = \frac{\rho^2 t}{D}, \quad \xi = \frac{\rho x}{D} \quad (3.49)$$

Alors l'équation (3.26) s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} - \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad (3.50)$$

$$c = 0, \quad T = 0, \quad \xi > 0 \quad (3.51)$$

$$c = 1, \quad \xi = 0, \quad T \geq 0$$

En utilisons la transformation

$$u = ce^{-\left(\frac{\xi-T}{2}\right)} \quad (3.52)$$

L'équation (3.50) prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (3.53)$$

$$u = 0, \quad T = 0, \quad \xi > 0; \quad (3.54)$$

$$u = e^{\frac{T}{4}}, \quad \xi = 0, \quad T \geq 0$$

La solution de (3.53) sujette aux conditions (3.54) est donnée par

$$u = \frac{1}{2} e^{\frac{T}{4}} \left(e^{-\frac{\xi}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi-T}{2T^{\frac{1}{2}}} \right) + e^{\frac{\xi}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi+T}{2T^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \quad (3.55)$$

Ce qui donne

$$c = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{\xi-T}{2T^{\frac{1}{2}}} \right) + e^{\xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi+T}{2T^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \quad (3.56)$$

Où erfc est la fonction erreur complémentaire donnée par

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La figure suivante (Philip 1957) compare les solutions analytique et numérique pour $T=0.36$, $T=1.00$. Le calcul numérique est basé en considérant les trois premiers termes

de (3.30), i.e. $Z(\theta, t) = f_1 t^{\frac{1}{2}} + f_2 t + f_3 t^{\frac{3}{2}}$.

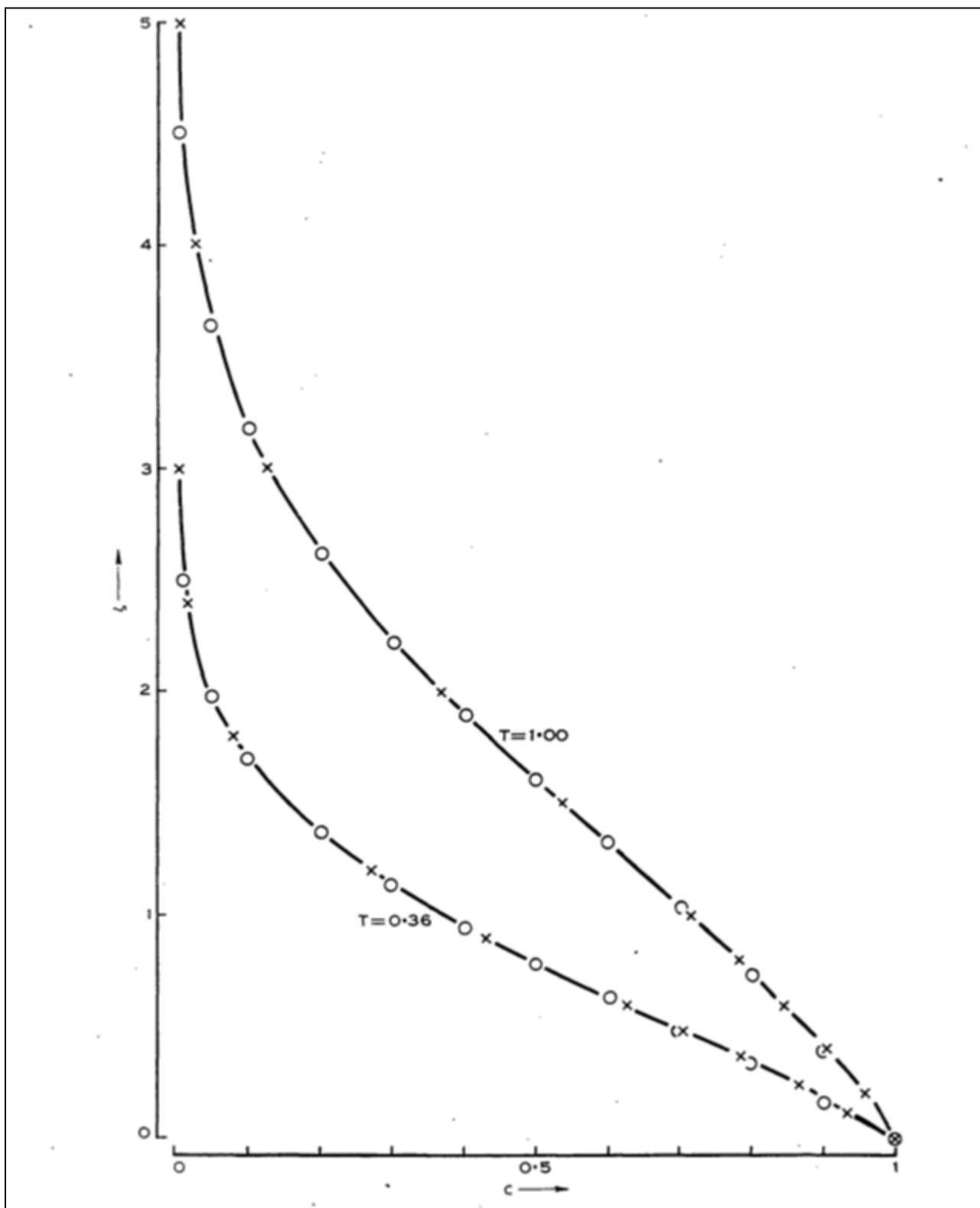


Figure : Comparaison des solutions analytique et numérique pour $T=0.36$, $T=1.00$. Le calcul numérique est basé en considérant les trois premiers termes de (3.30). Solution analytique =X, solution numérique=o

III.4 MOUVEMENT BIDIMENSIONNEL

Dans ce paragraphe une solution analytique de l'équation de Richards est proposée. Il s'agit d'une tentative de connaître la répartition spatio-temporelle de la teneur en eau et ou la succion afin de prédire les mouvements extrêmes des sols. Les résultats de cette contribution nécessitent une validation est vérification par la suite.

III.4.1 Revue des travaux antérieurs.

Ce paragraphe est inspiré en totalité des travaux d'Asgari et al., (2011). Ainsi que ceux de Zadjou et Zahaf (2015).

Actuellement, les équations utilisées pour décrire l'écoulement du fluide à travers les milieux poreux sont principalement basés sur les équations semi-empiriques données par Buckingham (1907) et Richards (1931). Malgré les limites et les inconvénients, l'équation de Richards est toujours l'équation la plus largement utilisée pour modéliser l'écoulement non saturé dans le sol (Hoffmann, 2003) tant sur le plan numérique que sur le plan expérimental. En raison des applications importantes et des problèmes diverses, de nombreuses recherches ont été consacrés dans le passé à une évaluation adéquate des différentes formes de l'équation de Richards. Les deux approches analytiques et numériques ont été étudiées dans la littérature. Cependant, les solutions analytiques de l'équation de Richards sont plutôt rares et sont généralement limités à des cas particuliers (Ju et Kung, 1997 ; Arampatzis et al., 2001). Ceci est principalement dû à la dépendance de la conductivité hydraulique et de l'emmagasinement avec la teneur en eau, combinée et/ou de la succion avec les conditions aux limites simples qui sont souvent rencontrées dans la pratique de l'ingénieur (Ju et Kung, 1997 ; Arampatzis et al. 2001. Kavetski et al, 2002). En conséquence, l'application de nombreuses méthodes numériques à la solution de l'équation de Richards avec diverses applications de génie civil ont été recensées dans les travaux antérieurs. Les méthodes des éléments finis et les méthodes de différences finies ont été adoptées par plusieurs chercheurs (Haverkamp, 1983 ; Humbert, 1984, Clément et al., 1994 ; Baca et al., 1997 ; Bergamaschi et Putti, 1999 ; Milly, 1985 ; Kormi, 2003). Ross (2003) a introduit une solution non-itératif efficace pour l'équation de Richards utilisant des descriptions de propriété du sol tel que proposé par Brooks et Corey (1964). Dans sa méthode, Ross a utilisé un schéma de discrétisation d'espace et du temps afin d'en tirer un ensemble d'équations linéaires tri-diagonale qui ont ensuite été résolus d'une manière non itérative.

Bien que différentes approches quasi-analytique de résolution aient été développées dans la littérature, elles ne sont applicables uniquement que pour des conditions initiales et aux limites particulières, rarement rencontrées en pratique. Dans ce sens avec le développement de l'outil mathématique, le projet en question se veut comme une synthèse de l'applicabilité des techniques mathématiques à des cas complexes régissant la phénoménologie des transferts et les problèmes connexes dans les sols non saturés dans un premier temps. (Richards L. A., 1931, Philip, 1957, Vachaux et al., 1973 ; 1974, Hillel, 1980, Zadjou, 2009).

Plusieurs autres solutions itératives ont également été citées dans la littérature par exemple celle de Farthing et al., (2003), qui ont utilisé l'approche de continuation pseudo-transitoire bien connue pour résoudre le problème d'infiltration d'eau transitoire non linéaire, les auteurs ont préconisé des schémas de stabilité pour la solution exacte de l'équation de Richards. Dans les applications de géo-environnement, Bunsri et al., (2008) a résolu l'équation de Richards accompagnée d'advection-dispersion et équations de transport de soluté par la technique de Galerkin.

Witelski (1997) a utilisé des méthodes de perturbation pour étudier l'interaction des fronts mouillants avec des frontières imperméables dans les sols stratifiés régies par l'équation de Richards par comparaison avec des solutions numériques, Witelski a conclu que les méthodes de perturbation sont capables de donner des solutions très précises de l'équation de Richards (Witelski, 1997).

Dans ce paragraphe, l'équation de Richards et les modèles relatifs impliqués sont introduits, suivie d'une explication approfondie des méthodes d'analyse utilisées pour résoudre l'équation d'une manière analytique. Nous avons utilisé des techniques simples qui peuvent être utiles dans la pratique de l'ingénieur (implémentation sur Maple ou Excel aisée). Des exemples illustratifs sont donnés afin de montrer l'efficacité du procédé en résolvant l'équation de Richards. Malgré, Les grands progrès de la science dans le domaine de la résolution des équations différentielles, il est encore très difficile à résoudre ces problèmes non linéaires analytiquement pour des conditions aux limites (BC) et des conditions initiales (IC) quelconques.

III.4.2 Positionnement de problème à résoudre.

Suite aux équations décrivant le phénomène d'écoulement (combinaison de l'équation de Darcy généralisée et de l'équation de continuité) divers termes de l'équation d'écoulement sont exprimés comme des fonctions de la succion, l'équation est dite de Richards.

Dans le cas d'un problème de déformation plane, l'hypothèse de considéré l'écoulement bidimensionnel est pleinement justifiée. Ce qui donne l'équation différentielle aux dérivées partielles à résoudre qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial z} + 1 \right) = C(u) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.49)$$

Avec $K(u)$ et $C(u)$ sont des fonctions données respectivement la conductivité hydraulique et la capacité capillaire, u la variable recherchée dite succion et $0 \leq x \leq D$ (largeur de la colonne du sol), $0 \leq z \leq H$ (hauteur de la colonne). Les conditions aux limites et la condition initiale associés à ce problème sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, z, t) = 0; \quad u(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(D, z, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, H, t) = 0 \\ u(x, z, 0) = \gamma_e z \end{cases} \quad (3.50)$$

III.4.3 Formulation mathématique et méthodologie

Posons $U = u - z$ alors l'équation (3.49) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(K(U - z) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(K(U - z) \frac{\partial U}{\partial z} + 1 \right) = C(U - z) \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.51)$$

Avec les CL et CI :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(0, z, t) = 0, U(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(D, z, t) = 0, \frac{\partial U}{\partial z}(x, H, t) = 1 \\ u(x, z, 0) = (\gamma_e + 1)z \end{cases}$$

III.4.3.1 Cas d'une variation exponentielle de paramètres $K(u)$ et $C(u)$

Si $K(U) = ke^{\alpha U}$ et $C(U) = ce^{\alpha U}$

avec $\alpha = -0,953$, $k = 4,4 \cdot 10^{-13}$, $c = 2,428$ et $\gamma_e = 10 \text{ kN/m}^3$

Posons $F = \frac{k}{a}(e^{\alpha(U-z)})$ ce qui implique $\frac{\partial F}{\partial u} = K(U-z) = ke^{\alpha(U-z)}$, alors on trouve l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{c}{k} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.52)$$

Avec

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0, z, t) = 0, F(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(D, z, t) = 0, \frac{\partial F}{\partial z}(x, H, t) = 0 \\ F(x, z, 0) = \frac{k}{a}(e^{\alpha \gamma_e z} - 1) \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de séparation de variables.

Posons $F(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot T(t)$ et la remplaçons dans l'équation (3.52), on trouve

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{c}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3.53)$$

On obtient les trois équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} T'(t) + \frac{k}{c}(\mu + \nu)T(t) = 0, t \geq 0 \\ X''(x) + \mu X(x) = 0, 0 < x < D, X'(0) = X'(D) = 0 \\ Z''(z) + \nu Z(z) = 0, 0 < z < H, X'(H) = Z(0) = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

La solution de la deuxième équation différentielle est :

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\mu}x) + C_2 \cos(\sqrt{\mu}x) \quad (3.55)$$

Avec

$$X'(0) = C_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}0) - C_2 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X'(D) = C_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}D) - C_2 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}D) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{D}, n = 0, 1, 2 \dots$$

$$\text{Ainsi } X(x) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{D}x\right)$$

La solution de la troisième équation différentielle est

$$Z(z) = C_3 \sin(\sqrt{\nu}z) + C_4 \cos(\sqrt{\nu}z) \quad (3.56)$$

Avec

$$\begin{aligned} Z(0) &= C_3\sqrt{v}\sin(\sqrt{v}0) + C_4\sqrt{v}\cos(\sqrt{v}0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ Z'(H) &= C_3\sqrt{v}\cos(\sqrt{v}H) - C_4\sqrt{v}\sin(\sqrt{v}H) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{v}H) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{v} = \frac{(2m+1)\pi}{2H}, m = 0,1,2 \dots \end{aligned}$$

Ainsi $Z(z) = C_3\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}z\right)$

La première équation différentielle a pour solution $T(t) = C_5e^{\frac{k}{c}\lambda_{nm}t}$; où

$$\lambda_{nm} = -\left(\left(\frac{n\pi}{D}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}\right)^2\right), n = 0,1,2 \dots ; m = 0,1,2, \dots$$

On obtient la solution de (3.51) sous la forme :

$$F(x, z, t) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \left(a_{nm} \cos\frac{n\pi x}{D} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H} \right) e^{\frac{k}{c}\lambda_{nm}t} \tag{3.57}$$

Où

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{\int_0^D \int_0^H F(x, z, 0) \cos\frac{n\pi x}{D} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx}{\int_0^D \int_0^H \cos^2\frac{n\pi x}{D} \sin^2\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx} \\ &= \frac{\int_0^D \int_0^H \frac{k}{a} (e^{\alpha\gamma_e z} - 1) \cos\frac{n\pi x}{D} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx}{\int_0^D \int_0^H \cos^2\frac{n\pi x}{D} \sin^2\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx} \end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned} a_{nm} &= 0, \text{ pour } n = 1,2,3, \dots ; m = 0,1,2, \dots \\ a_{0m} &= -\frac{8kH\gamma_e}{(2m+1)\pi} \frac{2aH\gamma_e + (-1)^{m+1}e^{aH\gamma_e}\pi(2m+1)}{4a^2H^2\gamma_e^2 + \pi^2(2m+1)^2}, \quad m = 0,1,2, \dots \end{aligned}$$

Donc la solution qui vérifiée les conditions aux limites et la condition initiale est :

$$F(x, z, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(a_{0m} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H} \right) e^{\frac{k}{c}\lambda_{0m}t} \tag{3.58}$$

Et par suite la solution recherchée prend la forme suivante :

$$(x, z, t) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{k}F(x, z, t) + 1\right) \tag{3.59}$$

III.4.3.2 Cas d'une variation exponentielle en U (technique exp-fonction)

Cette idée a été inspirée des travaux d'Asgari et al., 2011. Les auteurs donnent une piste d'un schéma de la solution de l'équation de Richards, sous des hypothèses simplificatrices.

Si $K(U) = kU^m$ et $C(U) = cU^{m'}$, avec $m \neq m'$,

$$k = 4,4.10^{-13} \frac{m}{S} \text{ et } c = 2,428$$

Posons $F = \frac{c}{m'+1}(U - z)^{m'+1}$ ce qui implique que $\frac{\partial F}{\partial U} = c(U - z) = c(U - z)^{m'}$

Alors l'équation (3.50) devient

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(F^p \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left(F^p \frac{\partial F}{\partial z} \right) = b \frac{\partial F}{\partial t} \tag{3.60}$$

Avec $p = \frac{m+1}{m'+1} - 1$, $b = \frac{c}{k} \left(\frac{m'+1}{c}\right)^p$

Posons $F(x, z, t) = F(\xi)$, avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Où α, β deux constants arbitraires, ainsi l'équation (3.60) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{d\xi} \left(F^p \frac{dF}{d\xi} \right) = \frac{b\beta}{2\alpha} \frac{dF}{d\xi} \quad (3.61)$$

En utilisant la transformation suivante : $G = F^p$

L'équation (3.60) peut s'écrire

$$\frac{1}{p} \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^2 + G \frac{d^2G}{d\xi^2} = \frac{b\beta}{2\alpha} \frac{dG}{d\xi} \quad (3.62)$$

En utilisant la méthode « exp-fonction » la forme générale de la solution de cette équation est donnée par :

$$G(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.63)$$

Pour déterminer les constantes $a_1, a_0, a_{-1}, b_1, b_0, b_{-1}$ on remplace la fonction (3.64) dans l'équation (3.62) et on compare les coefficients des exponentielles.

En utilisant le logiciel Maple on trouve le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} &4b_{-1}b_0p\alpha a_0a_1 - 16a_{-1}b_{-1}pb_1\alpha a_1 - 4b\beta b_{-1}b_0^2p\alpha a_1 + 8b_{-1}^2\alpha a_1^2 + 4a_{-1}b_0pb_1\alpha a_0 \\ &\quad - 4b\beta b_{-1}^2pb_1a_1 - 4a_{-1}b_0^2\alpha a_1 + 4b\beta a_{-1}b_{-1}pb_1^2 + 4b\beta a_{-1}b_0^2pb_1 \\ &\quad - 16a_{-1}b_{-1}b_1\alpha a_1 + 4b_{-1}b_0\alpha a_0a_1 + 8b_{-1}^2p\alpha a_1^2 + 4a_{-1}b_0b_1\alpha a_0 \\ &\quad + 8a_{-1}^2b_1^2\alpha - 4b_{-1}b_1\alpha a_0^2 + 8b_{-1}^2pab_1^2\alpha + 4a_{-1}b_0^2p\alpha a_1 - 12b_{-1}pb_1\alpha a_0^2 \\ &= 0 \\ &\quad - 2a_1^2b_0b_1\alpha p + 2a_1a_0b_1^2\alpha p - a_1\beta b_0bb_1^2p + a_0\beta bb_1^3p = 0 \\ &\quad b\beta pa_{-1}b_0b_{-1}^2 + 2p\alpha a_{-1}a_0b_{-1}^2 - 2p\alpha a_{-1}^2b_0b_{-1} - b\beta pa_0b_{-1}^3 = 0 \\ &2a_0\beta b_0b_1^2p + 2a_0^2b_1^2\alpha p + 2\beta a_{-1}bb_{-1}^3p + 8a_1a_{-1}b_1^2\alpha p + 2a_0^2b_1^2\alpha - 4a_1a_0b_0b_1\alpha p \\ &\quad - 8a_1^2b_{-1}b_1\alpha p - 2a_1\beta b_0^2bb_1p + 2a_1^2b_0^2\alpha p - 4a_1a_0b_0b_1\alpha + 2a_1^2b_0^2\alpha \\ &\quad - 2a_1\beta b_{-1}bb_1^2p = 0 \\ &\quad - 4a_0a_{-1}b_{-1}b_0\alpha p + 8p\alpha a_{-1}a_1b_{-1}^2 - 8p\alpha a_{-1}^2b_1b_{-1} + 2a_{-1}^2b_0^2\alpha p - 4a_0a_{-1}b_{-1}b_0\alpha \\ &\quad - 2b\beta pa_1b_{-1}^3 + 2a_{-1}^2b_0^2\alpha + 2a_0^2b_{-1}^2\alpha p - 2a_0\beta b_{-1}^2b_0bp \\ &\quad + 2b\beta pa_{-1}bb_{-1}^2 + 2\beta a_{-1}b_{-1}b_0bp = 0 \\ &\quad 5\beta a_{-1}b_0bb_1^2p + 10a_1a_{-1}b_1^2\alpha p + 8a_1^2b_{-1}b_0\alpha - a_1\beta b_0^3bp + 6a_1^2b_{-1}b_0\alpha p \\ &\quad + 2a_1a_0b_0^2\alpha p - 8a_1a_0b_{-1}b_1\alpha + a_0\beta b_{-1}bb_1^2p - 2a_0^2b_0b_1\alpha p \\ &\quad + 4a_1a_{-1}b_0b_1\alpha p + 8a_0a_{-1}b_1^2\alpha - 20a_1a_0b_{-1}b_1\alpha p + a_0\beta b_0^2bb_1p \\ &\quad - 6a_1\beta b_{-1}b_0bb_1p - 8a_1a_{-1}b_0b_1\alpha = 0 \\ &\quad - a_0\beta b_{-1}^2bb_1p - 8a_0a_{-1}b_{-1}b_1\alpha - 5a_1\beta b_{-1}^2b_0bp + 2a_0a_{-1}b_0^2\alpha p - 20a_0a_{-1}b_{-1}b_1\alpha p \\ &\quad + 8a_{-1}^2b_0b_1\alpha + \beta a_{-1}b_0^3bp + 4a_1a_{-1}b_{-1}b_0\alpha p - a_0\beta b_{-1}b_0^2bp \\ &\quad + 10a_1a_0b_{-1}^2\alpha p + 6a_{-1}^2b_0b_1\alpha p + 6\beta a_{-1}b_0bb_1b_1p - 8a_1a_{-1}b_{-1}b_0\alpha \\ &\quad - 2a_0^2b_{-1}b_0\alpha p + 8a_1a_0b_{-1}^2\alpha = 0 \end{aligned}$$

La solution de l'équation (3.60) est donc

$$F(x, z, t) = F(\xi) = \left(\frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.64)$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$ ainsi la solution de l'équation (3.50) est

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(\frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

En essayant de résoudre le système d'équilibre algébriques par Maple on a distingué les familles de solutions suivantes :

a Première famille

$$\left\{ a_1 = 0, a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b\beta b_0}{\alpha}, a_{-1} = \frac{1}{2} \frac{b\beta b_{-1}}{\alpha}, b_1 = 0, b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1} \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(-\frac{b\beta}{2\alpha} \frac{1 - \frac{b_{-1}}{b_0} e^{-\xi}}{1 + \frac{b_{-1}}{b_0} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes $\alpha, \beta, b_0, b_{-1}$ peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

b Deuxième famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = -\frac{4\alpha a_1}{b b_1}, a_1 = a_1, a_0 = 0, a_{-1} = \frac{b_{-1}(1 + 3p)a_1}{b_1(1 + p)}, \\ b_1 = b_1, b_0 = 0, b_{-1} = b_{-1} \end{array} \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(\frac{a_1}{b_1} \frac{e^\xi + \frac{b_{-1}(1+3p)}{b_1(1+p)} e^{-\xi}}{e^\xi + \frac{b_{-1}}{b_1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes α, a_1, b_1, b_{-1} peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

c Troisième famille

$$\left\{ a_1 = 0, a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b\beta b_0}{\alpha}, a_{-1} = a_{-1}, b_1 = 0, b_0 = b_0, b_{-1} = 0 \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(-\frac{b\beta}{2\alpha} + \frac{a_{-1}}{b_0} e^{-\xi} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes α, β, a_{-1} et b_0 peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

Supposons dans ce cas que

$$a_{-1} = b_0, \alpha = -\frac{\delta}{2k} \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{p-1} \text{ et } \beta = -\frac{2\alpha}{b} = \frac{\delta}{m'+1}$$

$$\text{Alors } u(x, z, t) = \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} (1 + e^{-\xi})^{\frac{1}{m'+m}} \text{ et } \xi = -\frac{\delta}{2k} \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{p-1} \left(x + z + \frac{\delta}{m'+1} t \right)$$

III.4.4 Résultats et interprétation

La figure 3.13 (40 premiers termes de la série équation 3.59), représente une présentation graphique de la succion en fonction du temps et de la profondeur z. Il est clair que dans ce cas la solution ne dépend pas de x. nous constatons une évolution en

fonction du temps pour chaque profondeur, de même à chaque instant donné, la succion varie en profondeur. Cependant, la figure 2 schématise la même situation avec un nombre important des termes de la série ici 50. Une stabilisation plus claire et nette de la succion est remarquée sans apport particulier sur la précision de la succion d'équilibre.

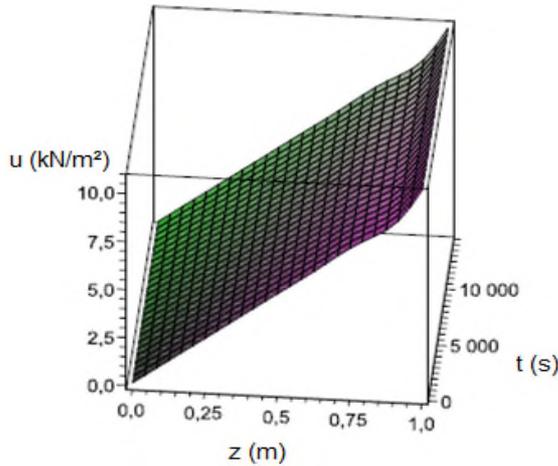


Figure 3.13. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 40 premiers termes de la série.

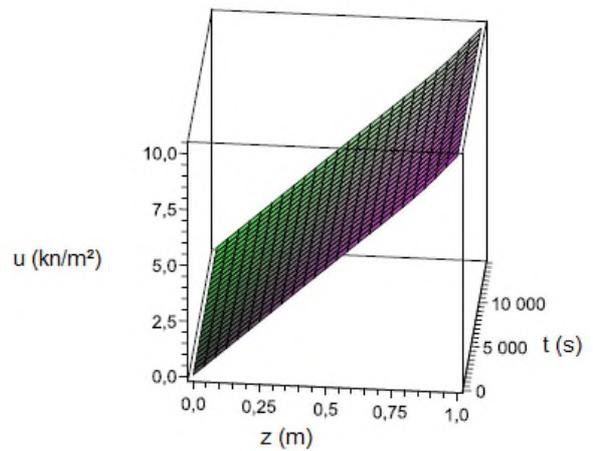
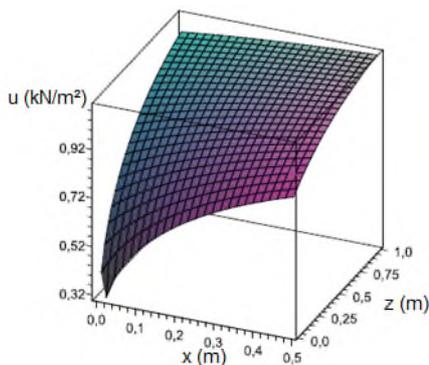


Figure 3.14. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 50 premiers termes de la série.

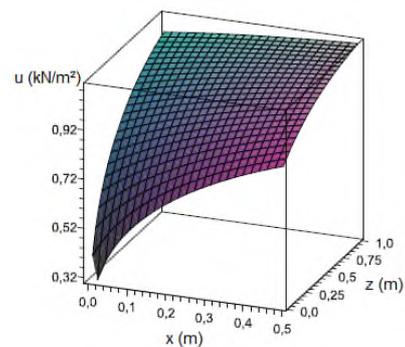
Par contre l'application de la méthode d'Asgari et al., 2010 soit une technique exp-fonction nécessite d'une part les conditions aux limites et les conditions initiales bien précises. Les valeurs de la succion sur la figure 3.15 sont divisées par 10.

Il s'agit d'une évolution spatiale de la succion pour différents instants pour la première famille.

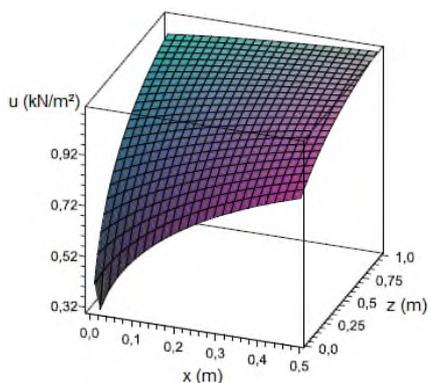
Les figures 3.16 et 3.17 représentent une solution en teneur en eau volumique pour la première famille respectivement pour $k = 2$ et $k = 4$. Encore une autre fois, la teneur augmente Il est clair que le résultat dépend des CI et des CL. La teneur eau augmente avec l'augmentation du temps à n'importe quelle profondeur. Néanmoins, la teneur en eau diminue avec l'augmentation de la profondeur pour chaque instant.



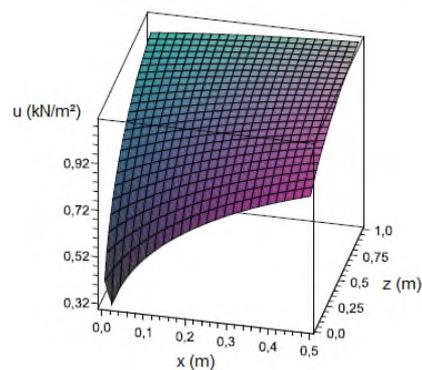
$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 600s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 3600s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 7200s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 14400s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$

Figure 3.15. Famille 1 : Variation spatiale de la succion pour différents instants. Valeur de u sont divisées par 10.

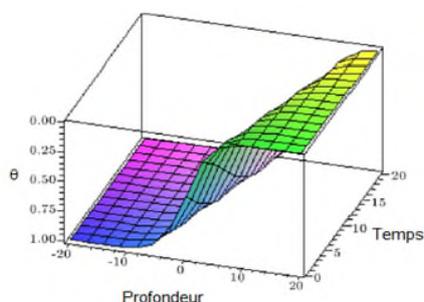


Figure 3.16. Solution exacte pour la première famille k = 2.

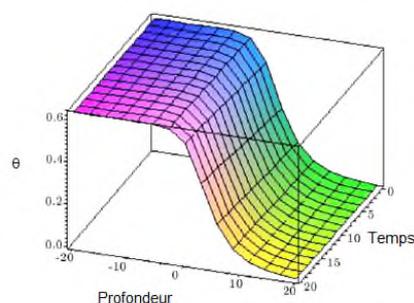


Figure 3.17. Solution exacte pour la première famille k = 4.

III.5 CONCLUSION

Malgré des hypothèses simplificatrices, la description des processus d'écoulement en non saturé est en général très complexe, car souvent ils donnent lieu à des variations de l'état hydrique du sol pendant l'écoulement. Ces variations impliquent des relations complexe entre la teneur en eau, la succion et la conductivité hydraulique.

La non saturation du terrain est directement liée à la conductivité hydraulique, qui elle-même dépend de la teneur en eau volumique. Par contre l'évolution dans le temps est liée au coefficient d'emmagasinement (coefficient de consolidation de la théorie de la consolidation).

Les applications présentées ici nous ont permis d'apprécier le degré de validité de la démarche proposée. Finalement, l'ingénieur doit être en mesure d'estimer toutes les conséquences de l'évolution de la charge hydraulique au sein de l'infrastructure surtout lorsqu'un nouveau régime d'écoulement n'est pas encore atteint.

Dans cette étude, le procédé mathématique exp-fonction, avec le logiciel de calcul Maple, ont été utilisé pour résoudre l'équation Richards afin d'évaluer la succion et la teneur en eau et de trouver une solution plus réaliste et généralisée au problème posé. Cependant, la définition des conditions initiales et aux limites du problème constitue le paramètre clés de la solution non triviale. La teneur en eau du sol peut être dérivée de

la solution obtenue, et ses variations, en fonction du temps et de la profondeur du sol, sont déterminées.

III.1 INTRODUCTION

Les solutions de l'équation générale de l'écoulement ne peuvent être obtenues que pour des cas particuliers de l'écoulement, et après la définition des conditions initiales et des conditions aux limites du domaine dans lequel elles s'appliquent.

En effet, l'aspect fortement non linéaire des équations du transfert d'eau en milieu poreux non saturés rend difficile, dans le cas général, la recherche des solutions analytiques du problème d'infiltration.

L'objet de ce chapitre de ce projet de fin d'études est ainsi double : d'une part, il s'agit de la reproduction détaillée des solutions quasi-analytiques développées par Philip, 1955 et 1969 ; Parlange, 1971 pour des conditions particulières de l'écoulement définies comme conditions initiales et conditions aux limites du domaine d'écoulement. Et d'autre part, une tentative d'une proposition d'une solution analytique de l'équation de Richards dans une configuration bidimensionnelle en tenant compte de l'aspect non linéaire des paramètres hydrodynamiques.

III.2 MOUVEMENT HORIZONTAL

Soit l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Où x est l'ordonnée horizontale, D est une fonction de la variable θ .

Les conditions initiales et aux limites sont :

$$\text{Pour } t = 0 \text{ et } x > 0 : \theta = \theta_i$$

$$\text{Pour } t \geq 0 \text{ et } x = 0 : \theta = \theta_0 \quad (3.2)$$

III.2.1 Méthode de Boltzmann

Soit la transformation de **Boltzmann** $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} x \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Remplaçant (3.3) dans l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$x = 0 \Rightarrow \eta = 0 : \theta = \theta_i, \quad t = 0 \Rightarrow \eta \rightarrow \infty : \theta = \theta_0,$$

Et la solution de l'équation (3.1) sujette aux conditions (3.2) est

$$x(\theta, t) = \eta(\theta) \cdot \sqrt{t}$$

Après intégration l'équation (3.4a) par rapport à θ , on trouve

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) d\theta = \left[-2D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\theta_i}^{\theta},$$

Avec $\eta = 0 : \theta = \theta_i$

Exemple1 :

Etudions le cas $D(\theta) = -d \cdot \theta^m \quad m \geq 0, d > 0$

L'équation (3.1) s'écrit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (-d \cdot \theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x}) \tag{3.4b}$$

Posons : $X = \frac{x}{d}$ et $T = \frac{t}{d}$.

Donc on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{d} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{d} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$(3.4b) \text{ et } (3.5) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} (-\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial X}), m \geq 0, \tag{3.6}$$

$T = 0, \text{ et } X > 0 : \theta = \theta_i$ $T \geq 0, \text{ et } X = 0 : \theta = \theta_0$

Posons : $\eta = \frac{X}{\sqrt{T}} \Rightarrow X = \eta \sqrt{T}$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial \theta = \left[-2D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\theta_i} \quad \text{Avec : } \eta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_i$$

$$D(\theta) = -\theta^m \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial \theta = \left[2 \cdot \theta^m \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\theta_i}$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial \theta = \left[\frac{2\theta^m}{\frac{\partial \eta}{\partial \theta}} \right]_{\theta_i} \tag{3.7}$$

Posons $Y(\theta) = \int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) \partial \theta$

Dans ce cas l'équation (3.7) $\Rightarrow Y(\theta) = \frac{2\theta^m}{Y''(\theta)} \Rightarrow Y \cdot Y'' = 2\theta^m$

$$Y = \alpha \cdot \theta^{(\frac{m}{2}+1)} \quad Y' = \alpha \cdot (\frac{m}{2} + 1) \theta^{(\frac{m}{2})}$$

$$Y'' = \alpha \cdot (\frac{m}{2} + 1) \frac{m}{2} \theta^{(\frac{m}{2}-1)}$$

$$Y \cdot Y'' = \alpha^2 \cdot (\frac{m}{2} + 1) \cdot \frac{m}{2} \cdot \theta^m = 2\theta^m \quad \Rightarrow \alpha^2 \cdot (\frac{m}{2} + 1) \cdot \frac{m}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{2}{(\frac{m}{2}+1) \cdot \frac{m}{2}} \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{(\frac{m}{2}+1) \cdot \frac{m}{2}}}$$

Alors

$$Y(\theta) = \sqrt{\frac{2}{(\frac{m}{2}+1) \cdot \frac{m}{2}}} \cdot \theta^{(\frac{m}{2}+1)}$$

$$\eta(\theta) = Y' = \sqrt{\frac{2(\frac{m}{2}+1)}{\frac{m}{2}}} \cdot \theta^{\frac{m}{2}}$$

Ainsi $X = \eta \sqrt{T}$

$$X(\theta, T) = \sqrt{\frac{2(\frac{m}{2}+1)}{\frac{m}{2}}} \cdot \theta^{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{T}$$

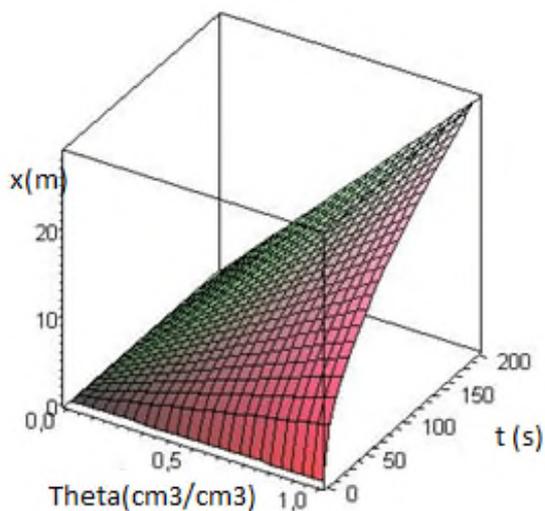


Figure 3.1 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2.

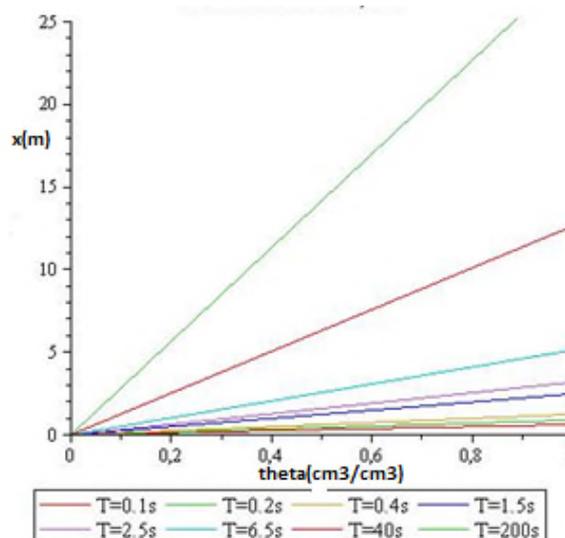


Figure 3.2 : Infiltration horizontale selon x pour m = 2. Effet du temps.

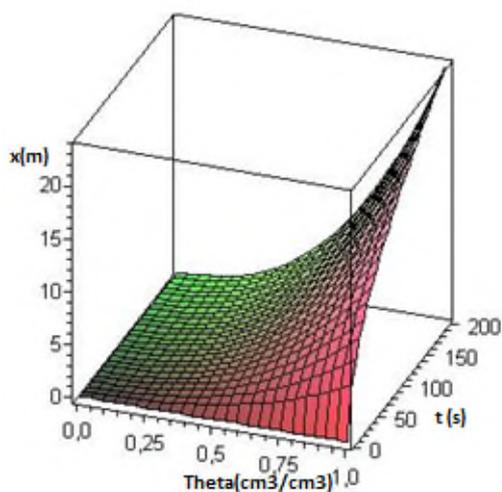


Figure 3.3 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5.

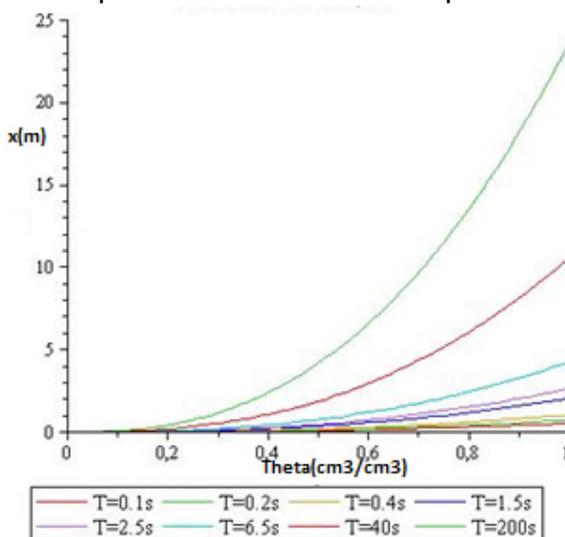


Figure 3.4 : Infiltration horizontale selon x pour m = 5. Effet du temps.

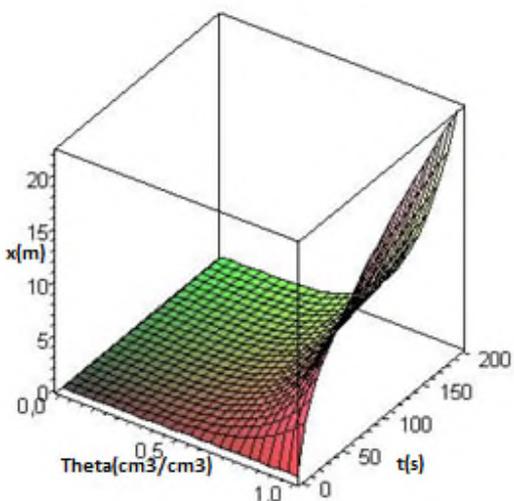


Figure 3.5 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10.

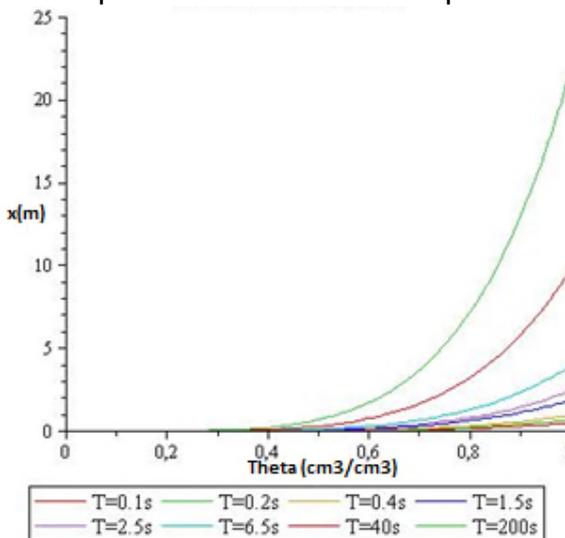


Figure 3.6 : Infiltration horizontale selon x pour m = 10. Effet du temps.

Exemple 2 :

Considérons l'équation (3.1) avec : $D(\theta) = \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})$

n, D_0 sont déterminés expérimentalement pour le sol. D_0 est la diffusivité à la saturation, $1 < n < 10$ dépend de la répartition de la taille des pores.

Alors la transformation de Boltzmann donne :

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) d\theta = \left[-2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1}) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\theta_i}^{\theta} \tag{3.8}$$

De même posons : $Y(\theta) = \int_{\theta_i}^{\theta} \eta(\theta) d\theta$

Ce qui donne à partir de l'équation (3.8) $\Rightarrow Y(\theta) = \frac{-2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})}{Y''(\theta)}$

$\Rightarrow Y \cdot Y'' = -2 \frac{D_0(n+1)}{n} \theta^n (1 - \frac{\theta^n}{n+1})$ alors $Y(\theta) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (\theta - \frac{\theta^{n+1}}{n+1})$

Ainsi la solution de l'équation (3.8) est donnée par $\eta(\theta) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (1 - \theta^n)$

Ce qui implique que la répartition spatio-temporelle s'écrit :

$$x(\theta, t) = (\frac{2D_0(n+1)}{n^2})^{\frac{1}{2}} (1 - \theta^n) \sqrt{t}$$

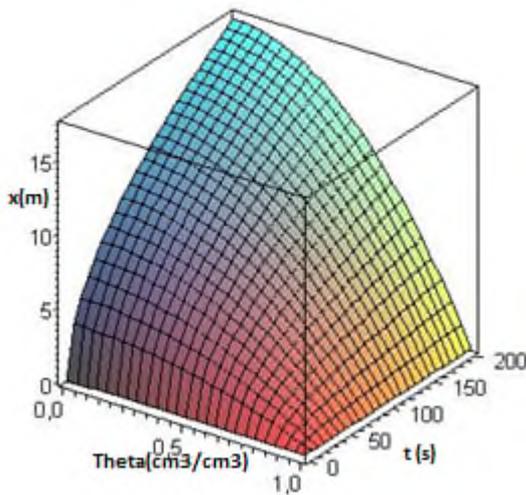


Figure 3.7 : Infiltration horizontale pour $n = 2, D_0 = 1$.

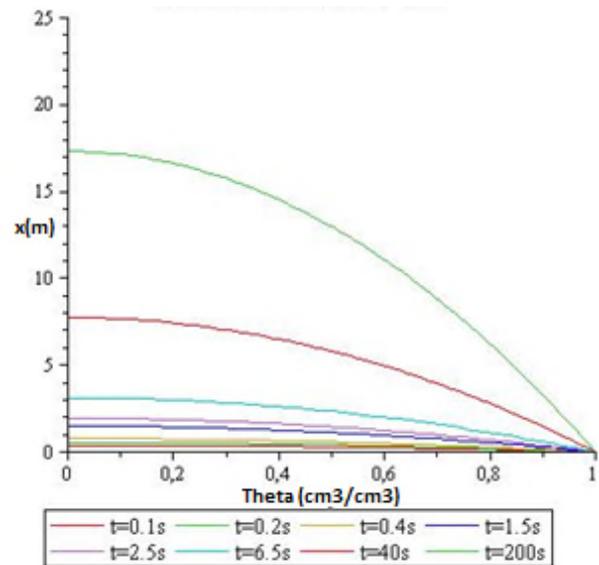


Figure 3.8 : Infiltration horizontale pour $n = 2, D_0 = 1$. Effet du temps.

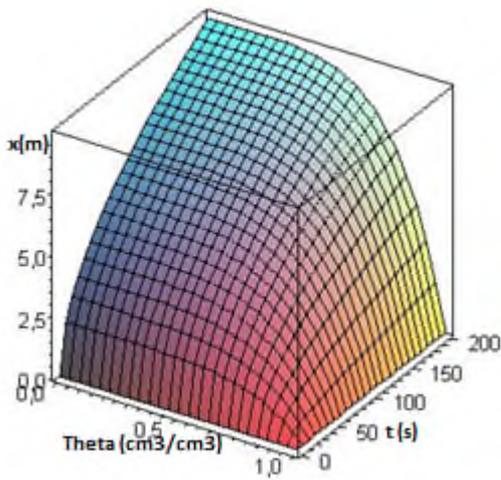


Figure 3.9 : Infiltration horizontale pour $n = 5, D_0 = 1$.

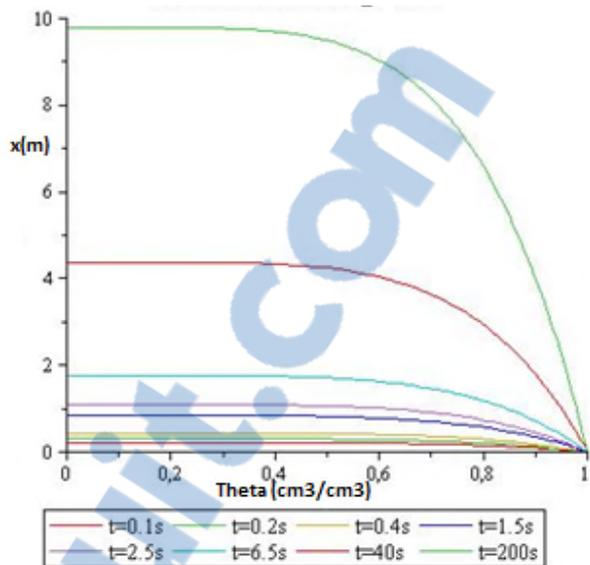


Figure 3.10 : Infiltration horizontale pour $n = 5, D_0 = 1$. Effet du temps.

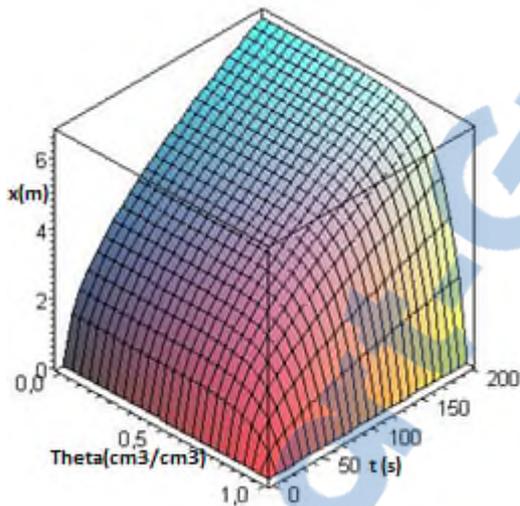


Figure 3.11 : Infiltration horizontale pour $n = 10, D_0 = 1$.

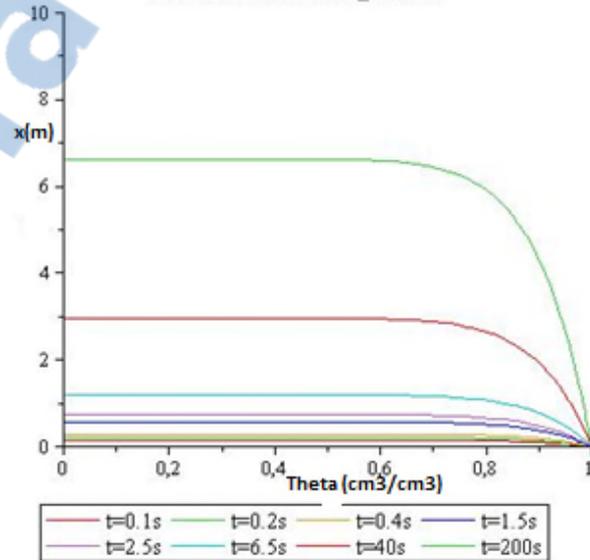


Figure 3.12 : Infiltration horizontale pour $n = 10, D_0 = 1$. Effet du temps.

III.2.2 Méthode de séparation de variables

Exemple1 :

Soit l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0$$

$$t = 0, x > 0, \theta = \theta_0$$

$$t \geq 0, x = 0, \theta = \theta_i$$

(3.9)

Posons $u = \theta^{m+1}$

C'est-à-dire $\theta = u^{\frac{1}{m+1}}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta} = (m + 1)\theta^m$

L'équation (3.9) peut s'écrire

$$\frac{1}{m+1} u^{\frac{1}{m+1}-1} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m+1} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

(3.10)

Ainsi on obtient ce qui suit :

$$u^{\frac{1}{m+1}-1} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

Utilisons la méthode de séparation de variables en posant :

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

On obtient

$$T(t)^{\left(\frac{1}{m+1}-1\right)} X(x)^{\left(\frac{1}{m+1}\right)} T'(t) = T(t)X''(x) \quad (3.12)$$

Ce qui mène à résoudre deux équations différentielles

$$T(t)^{\left(\frac{1}{m+1}-2\right)} T'(t) = X(x)^{\left(-\frac{1}{m+1}\right)} X''(x) = k \text{ (constante)} \quad (3.13)$$

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-2} T'(t) = k$$

$$X(x)^{-\frac{1}{m+1}} X''(x) = k \quad (3.14)$$

La première équation implique

$$T(t)^{\frac{1}{m+1}-1} = -\frac{m}{m+1} (kt + c), c: \text{constante} \quad (3.15)$$

Ce qui donne

$$T(t) = \left(-\frac{m}{m+1} (kt + c) \right)^{-\frac{m+1}{m}} \quad (3.16)$$

Donc

$$u(x, t) = \left(-\frac{m}{m+1} (kt + c) \right)^{-\frac{m+1}{m}} X(x) \quad (3.17)$$

Où $X(x)$ est la solution de l'équation différentielle $X(x)^{-\frac{1}{m+1}} X''(x) = k$

Ainsi la solution de (3.9) prend la forme

$$\theta(x, t) = u(x, t)^{\frac{1}{m+1}} = \left(-\frac{m}{m+1} (kt + c) \right)^{-\frac{1}{m}} F(x)$$

Exemple 2 :

Considérons à nouveau le même exemple :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0$$

$$t = 0, x > 0, \theta = \theta_0 \quad (3.18)$$

$$t \geq 0, x = 0, \theta = \theta_i$$

Posons

$$\Theta = \theta t^{-\frac{1}{m+2}}, \chi = x t^{-\frac{m+1}{m+2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{m+2} t^{-\frac{m+1}{m+2}} \Theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \chi} = t^{-\frac{m+1}{m+2}} \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (3.19)$$

Dans ce cas l'équation (3.18) se transforme en une équation différentielle

$$\frac{1}{m+2} \Theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Theta^m \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right), \tag{3.20}$$

Posons $G = \Theta^{m+1}$, ou encore $\Theta = G^{\frac{1}{m+1}}$, on a donc $\frac{\partial G}{\partial \Theta} = (m + 1)\Theta^m$

L'équation (3.20) peut s'écrire :

$$\frac{m+1}{m+2} G^{\frac{1}{m+1}} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{3.21}$$

Ainsi une solution de l'équation (3.18) prend la forme

$$\theta(x, t) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot \Theta(x) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot G^{\frac{1}{m+1}}(x)$$

Ou encore

$$\theta(x, t) = \theta_i + t^{\frac{1}{m+2}} \cdot G^{\frac{1}{m+1}} \left(x \cdot t^{-\frac{m+1}{m+2}} \right)$$

Ou la fonction G est la solution de l'équation différentielle (3.21).

III.2.3 Méthode exp-fonction

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad m > 0 \tag{3.22}$$

Posons $\theta(x, t) = F(\xi)$,

Avec $\xi = \alpha(x + \beta t)$, où α, β deux constants arbitraires, ainsi l'équation (3.22) prend la forme

$$\frac{d}{d\xi} \left(F^m \frac{dF}{d\xi} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{dF}{d\xi} \tag{3.23}$$

En utilisant la transformation suivante

$$G = F^m$$

L'équation (3.23) peut s'écrire

$$\frac{1}{m} \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^2 + G \frac{d^2 G}{d\xi^2} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{dG}{d\xi} \dots \dots \dots \tag{3.24}$$

La forme générale de la solution de cette équation par la méthode "exp-fonction" est donnée par

$$G(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi+a_0} + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi+b_0} + b_{-1} e^{-\xi}} \dots \dots \dots \tag{3.25}$$

Pour déterminer les constantes $a_1, a_0, a_{-1}, b_1, b_0$ et b_{-1} on remplace la fonction (3.25) dans l'équation (3.24) et on compare les coefficients des exponentielles.

III.3 MOUVEMENT VERTICAL

Soit l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \tag{3.26}$$

Pour $t = 0$ et $z > 0$: $\theta = \theta_i$ et $t \geq 0$ et $z = 0$: $\theta = \theta_0$

Utilisons l'identité

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = - \frac{\partial z}{\partial t} \tag{3.27}$$

L'équation (3.26) devient

$$- \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial \theta} \tag{3.28}$$



En intégrant l'équation (3.28) par rapport à θ , on trouve :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta_i}^{\theta} z \cdot \partial\theta = D \frac{\partial\theta}{\partial z} - (k - k_i) \quad (3.29)$$

Ou $k_i = k(\theta_i)$ avec la condition $\lim_{\theta \rightarrow \theta_i} D \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \forall t$

Posons :

$$Z(\theta, t) = f_1 t^{\frac{1}{2}} + f_2 t + f_3 t^{\frac{3}{2}} + \dots + f_n t^{\frac{n}{2}} + \dots \quad (3.30)$$

Les f_n dépendent que de θ .

Remplaçons l'équation (3.30) dans l'équation (3.29) on trouve :

$$\begin{aligned} & - \int_{\theta_i}^{\theta} \left[\frac{1}{2} f_1 t^{-\frac{1}{2}} + f_2 + \frac{3}{2} f_3 t^{\frac{1}{2}} + \dots + \frac{n}{2} f_n t^{\frac{n-1}{2}} + \dots \right] \partial\theta \\ &= \frac{D}{f_1' t^{\frac{1}{2}} + f_2' t + f_3' t^{\frac{3}{2}} + \dots + f_n' t^{\frac{n}{2}} + \dots} - (k - k_i) \\ \Rightarrow & -\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_1 \partial\theta - \int_{\theta_i}^{\theta} f_2 \partial\theta - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_3 \partial\theta - \dots - \frac{n}{2} t^{\frac{n-1}{2}} \int_{\theta_i}^{\theta} f_n \partial\theta + \dots \\ &= \frac{D}{f_1' t^{\frac{1}{2}} + \frac{f_2'}{f_1'} t + \frac{f_3'}{f_1'} t^{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{f_n'}{f_1'} t^{\frac{n-1}{2}} + \dots} - (k - k_i) \\ &= \frac{D}{f_1' t^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \left[\frac{f_2'}{f_1'} t^{\frac{1}{2}} + \frac{f_3'}{f_1'} t + \dots + \frac{f_n'}{f_1'} t^{\frac{n-1}{2}} + \dots \right]^j \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des puissances de $t^{\frac{1}{2}}$, on trouve les formules suivantes :

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_1(\theta) d\theta = -\frac{2D(\theta)}{f_1'(\theta)} \quad (3.31)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_2(\theta) d\theta = \frac{D(\theta) f_2'}{(f_1')^2} + (k - k_i) \quad (3.32)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_3(\theta) d\theta = \frac{2D(\theta)}{3} \left[\frac{f_3'}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{(f_1')^3} \right] \quad (3.33)$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f_4(\theta) d\theta = \frac{D(\theta)}{2} \left[\frac{f_4'}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{(f_1')^3} \left(2 \frac{f_3'}{f_2'} - \frac{f_2'}{f_1'} \right) \right] \quad (3.34)$$

En tenant compte de la seconde condition dans (3.26), la condition sur les f_n est :

$$\theta = \theta_i, \quad f_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.35)$$

Avec f_1 connu, nous pouvons résoudre l'équation (3.32) sous réserve de la condition (3.35) pour f_2 ;

Puis, avec f_2 connu, nous pouvons résoudre l'équation (3.33) sous réserve de la condition (3.35) pour f_3 et ainsi de suite. Les différentes équations (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), ... sont linéaires et peuvent être rapidement résolues avec précision par la méthode numérique de Philip.

Notons que les équations (3.32), (3.33), (3.34), ... peuvent s'écrire sous la forme

$$\int_{\theta_i}^{\theta} f(\theta) d\theta = \alpha(\theta) f'(\theta) - \beta(\theta) \quad (3.36)$$

Sujette à la condition

$$\theta = \theta_i, f = 0 \quad (3.37)$$

Où α et β sont des fonctions connues.

Nous procédons à discuter de la solution numérique de (3.36) sujette à la condition (3.37), sachant que la procédure de ce cas général peut être appliquée à tous les équations ci-dessus en remplaçant à chaque fois les fonctions appropriées pour α , β et f

Subdivisons l'intervalle $[\theta_i, \theta]$ en n sous-intervalles de même longueur $\partial\theta$

Soit

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_i \\ \theta_r &= \theta_0 - r \cdot \partial\theta \text{ avec } r = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.38)$$

En remplaçant la courbe de la fonction $f(\theta)$ par la ligne polygonale de sommets $(\theta_r, f(\theta_r)) = (\theta_r, f_r)$ on obtient l'approximation

$$\int_{\theta_r}^{\theta_{r+1/2}} f(\theta) d\theta = -\frac{1}{4} (f_{r+1} + 3f_r) \frac{1}{2} \partial\theta \quad (3.39)$$

On utilise aussi l'approximation

$$(\alpha(\theta) f'(\theta))_{r+1/2} = \bar{\alpha}_{r+1/2} \frac{f_r - f_{r+1}}{\delta\theta} \quad (3.40)$$

Où

$$\bar{\alpha}_{r+1/2} = -\frac{1}{\partial\theta} \int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} \alpha(\theta) d\theta \quad (3.41)$$

Remplaçant (3.39) et (3.40) dans (3.36) on obtient

$$\int_{\theta_n}^{\theta_r} f(\theta) d\theta - \frac{1}{4} (f_{r+1} + 3f_r) \frac{1}{2} \partial\theta = \frac{\bar{\alpha}_{r+1/2}}{\partial\theta} (f_r - f_{r+1}) - \beta_{r+1/2} \quad (3.42)$$

Qui peut être mise sous la forme

$$f_{r+1} - f_r = -\frac{\frac{\beta_{r+1/2} + I_{r+1/2}}{\partial\theta}}{\frac{\bar{\alpha}_{r+1/2} \frac{1}{\partial\theta}}{(\partial\theta)^2 \frac{1}{8}}} \quad (3.43)$$

Où

$$I_{r+1/2} = \frac{1}{\partial\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} f(\theta) d\theta - \frac{1}{2} f_r \quad (3.44)$$

De plus, l'approximation polygonale de la courbe de $f(\theta)$ implique que

$$I_{r+1/2} = I_{r-1/2} - f_r \quad (3.45)$$

Il est commode d'introduire la quantité I_n définie par

$$I_n = I_{n-1/2} - \frac{1}{2} f_n \quad (3.46)$$

L'approximation polygonale exige que $I_n = 0$. La méthode numérique de Philip consiste à ;

1. Tabuler les valeurs $\frac{\bar{\alpha}_{r+\frac{1}{2}}}{(\partial\theta)^2} - \frac{1}{8}$ et $\frac{\beta_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta}$ obtenues à partir des fonctions connues α et β
2. Prendre les valeurs initiales $I_{\frac{1}{2}} = 0$ et $f_0 = 0$, appliquer alternativement (3.43) et (3.45) pour évaluer un ensemble de valeurs de f et finalement I_n . Notons ces valeurs par $f_r^{(1)}$ et $I_n^{(1)}$.
3. Répéter cette procédure avec $I_{\frac{1}{2}} = -1$ et $f_0 = 0$, mais cette fois-ci négliger les valeurs tabulées de $\frac{\beta_{r+\frac{1}{2}}}{\partial\theta}$ et procéder comme si cette quantité est toujours nulle. Notons les nouvelles valeurs de f_r et I_r par $f_r^{(2)}$ et $I_n^{(2)}$.
4. Alors les bonnes valeurs de $I_{\frac{1}{2}}$ et f_r sont données par

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{I_n^{(1)}}{I_n^{(2)}} \quad (3.47)$$

$$f_r = f_r^{(1)} - I_{\frac{1}{2}} f_r^{(2)} \quad (3.48)$$

5. Le calcul peut être vérifié pour les erreurs numériques en introduisant la valeur de $I_{\frac{1}{2}}$ donnée par (3.47) dans la procédure 2. Les f évaluées de cette manière doivent être égales à celles données par (3.48) et I_n doit être nulle.

III.4 MOUVEMENT BIDIMENSIONNEL

Dans ce paragraphe une solution analytique de l'équation de Richards est proposée. Il s'agit d'une tentative de connaître la répartition spatio-temporelle de la teneur en eau et ou la succion afin de prédire les mouvements extrêmes des sols. Les résultats de cette contribution nécessitent une validation est vérification par la suite.

III.4.1 Revue des travaux antérieurs.

Ce paragraphe est inspiré en totalité des travaux d'Asgari et al., (2011). Ainsi que ceux de Zadjoui et Zahaf (2015).

Actuellement, les équations utilisées pour décrire l'écoulement du fluide à travers les milieux poreux sont principalement basés sur les équations semi-empiriques données par Buckingham (1907) et Richards (1931). Malgré les limites et les inconvénients, l'équation de Richards est toujours l'équation la plus largement utilisée pour modéliser l'écoulement non saturé dans le sol (Hoffmann, 2003) tant sur le plan numérique que sur le plan expérimental. En raison des applications importantes et des problèmes diverses, de nombreuses recherches ont été consacrés dans le passé à une évaluation adéquate des différentes formes de l'équation de Richards. Les deux approches analytiques et numériques ont été étudiées dans la littérature. Cependant, les solutions analytiques de l'équation de Richards sont plutôt rares et sont généralement limités à des cas particuliers (Ju et Kung, 1997 ; Arampatzis et al., 2001). Ceci est principalement dû à la dépendance de la conductivité hydraulique et de l'emmagasinement avec la teneur en eau, combinée et/ou de la succion avec les conditions aux limites simples qui

sont souvent rencontrées dans la pratique de l'ingénieur (Ju et Kung, 1997 ; Arampatzis et al. 2001. Kavetski et al, 2002). En conséquence, l'application de nombreuses méthodes numériques à la solution de l'équation de Richards avec diverses applications de génie civil ont été recensées dans les travaux antérieurs. Les méthodes des éléments finis et les méthodes de différences finies ont été adoptées par plusieurs chercheurs (Haverkamp, 1983 ; Humbert, 1984, Clément et al., 1994 ; Baca et al., 1997 ; Bergamaschi et Putti, 1999 ; Milly, 1985 ; Kormi, 2003). Ross (2003) a introduit une solution non-itératif efficace pour l'équation de Richards utilisant des descriptions de propriété du sol tel que proposé par Brooks et Corey (1964). Dans sa méthode, Ross a utilisé un schéma de discrétisation d'espace et du temps afin d'en tirer un ensemble d'équations linéaires tri-diagonale qui ont ensuite été résolus d'une manière non itérative.

Bien que différentes approches quasi-analytique de résolution aient été développées dans la littérature, elles ne sont applicables uniquement que pour des conditions initiales et aux limites particulières, rarement rencontrées en pratique. Dans ce sens avec le développement de l'outil mathématique, le projet en question se veut comme une synthèse de l'applicabilité des techniques mathématiques à des cas complexes régissant la phénoménologie des transferts et les problèmes connexes dans les sols non saturés dans un premier temps. (Richards L. A., 1931, Philip, 1957, Vachaux et al., 1973 ; 1974, Hillel, 1980, Zadjajoui, 2009).

Plusieurs autres solutions itératives ont également été citées dans la littérature par exemple celle de Farthing et al., (2003), qui ont utilisé l'approche de continuation pseudo-transitoire bien connue pour résoudre le problème d'infiltration d'eau transitoire non linéaire, les auteurs ont préconisé des schémas de stabilité pour la solution exacte de l'équation de Richards. Dans les applications de géo-environnement, Bunsri et al., (2008) a résolu l'équation de Richards accompagnée d'advection-dispersion et équations de transport de soluté par la technique de Galerkin.

Witelski (1997) a utilisé des méthodes de perturbation pour étudier l'interaction des fronts mouillants avec des frontières imperméables dans les sols stratifiés régies par l'équation de Richards par comparaison avec des solutions numériques, Witelski a conclu que les méthodes de perturbation sont capables de donner des solutions très précises de l'équation de Richards (Witelski, 1997).

Dans ce paragraphe, l'équation de Richards et les modèles relatifs impliqués sont introduits, suivie d'une explication approfondie des méthodes d'analyse utilisées pour résoudre l'équation d'une manière analytique. Nous avons utilisé des techniques simples qui peuvent être utiles dans la pratique de l'ingénieur (implémentation sur Maple ou Excel aisée). Des exemples illustratifs sont donnés afin de montrer l'efficacité du procédé en résolvant l'équation de Richards. Malgré, Les grands progrès de la science dans le domaine de la résolution des équations différentielles, il est encore très difficile à résoudre ces problèmes non linéaires analytiquement pour des conditions aux limites (BC) et des conditions initiales (IC) quelconques.

III.4.2 Positionnement de problème à résoudre.

Suite aux équations décrivant le phénomène d'écoulement (combinaison de l'équation de Darcy généralisée et de l'équation de continuité) divers termes de l'équation d'écoulement sont exprimés comme des fonctions de la succion, l'équation est dite de Richards.

Dans le cas d'un problème de déformation plane, l'hypothèse de considéré l'écoulement bidimensionnel est pleinement justifiée. Ce qui donne l'équation différentielle aux dérivées partielles à résoudre qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial z} + 1 \right) = C(u) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.49)$$

Avec $K(u)$ et $C(u)$ sont des fonctions données respectivement la conductivité hydraulique et la capacité capillaire, u la variable recherchée dite succion et $0 \leq x \leq D$ (largeur de la colonne du sol), $0 \leq z \leq H$ (hauteur de la colonne). Les conditions aux limites et la condition initiale associés à ce problème sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, z, t) = 0; u(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(D, z, t) = 0; \frac{\partial u}{\partial z}(x, H, t) = 0 \\ u(x, z, 0) = \gamma_e z \end{cases} \quad (3.50)$$

III.4.3 Formulation mathématique et méthodologie

Posons $U = u - z$ alors l'équation (3.49) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(K(U - z) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(K(U - z) \frac{\partial U}{\partial z} + 1 \right) = C(U - z) \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.51)$$

Avec les CL et CI :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(0, z, t) = 0, U(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(D, z, t) = 0, \frac{\partial U}{\partial z}(x, H, t) = 1 \\ u(x, z, 0) = (\gamma_e + 1)z \end{cases}$$

III.4.3.1 Cas d'une variation exponentielle de paramètres $K(u)$ et $C(u)$

Si $K(U) = ke^{\alpha U}$ et $C(U) = ce^{\alpha U}$

avec $\alpha = -0,953$, $k = 4,4 \cdot 10^{-13}$, $c = 2,428$ et $\gamma_e = 10 \text{ kN/m}^3$

Posons $F = \frac{k}{a} (e^{\alpha(U-z)})$ ce qui implique $\frac{\partial F}{\partial U} = K(U - z) = ke^{\alpha(U-z)}$, alors on trouve

l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{c}{k} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.52)$$

Avec

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0, z, t) = 0, F(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(D, z, t) = 0, \frac{\partial F}{\partial z}(x, H, t) = 0 \\ F(x, z, 0) = \frac{k}{a} (e^{\alpha \gamma_e z} - 1) \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de séparation de variables.

Posons $F(x, z, t) = X(x).Z(z).T(t)$ et la remplaçons dans l'équation (3.52), on trouve

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{c}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3.53)$$

On obtient les trois équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} T'(t) + \frac{k}{c}(\mu + \nu)T(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < D, \quad X'(0) = X'(D) = 0 \\ Z''(z) + \nu Z(z) = 0, \quad 0 < z < H, \quad X'(H) = Z(0) = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

La solution de la deuxième équation différentielle est :

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\mu}x) + C_2 \cos(\sqrt{\mu}x) \quad (3.55)$$

Avec

$$\begin{aligned} X'(0) &= C_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}0) - C_2 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ X'(D) &= C_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}D) - C_2 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}D) = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{D}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ainsi $X(x) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{D}x\right)$

La solution de la troisième équation différentielle est

$$Z(z) = C_3 \sin(\sqrt{\nu}z) + C_4 \cos(\sqrt{\nu}z) \quad (3.56)$$

Avec

$$\begin{aligned} Z(0) &= C_3 \sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}0) + C_4 \sqrt{\nu} \cos(\sqrt{\nu}0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ Z'(H) &= C_3 \sqrt{\nu} \cos(\sqrt{\nu}H) - C_4 \sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}H) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\nu}H) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\nu} = \frac{(2m+1)\pi}{2H}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ainsi $Z(z) = C_3 \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}z\right)$

La première équation différentielle a pour solution $T(t) = C_5 e^{\frac{k}{c}\lambda_{nm}t}$; où

$$\lambda_{nm} = -\left(\left(\frac{n\pi}{D}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}\right)^2\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

On obtient la solution de (3.51) sous la forme :

$$F(x, z, t) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \left(a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{D} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \right) e^{\frac{k}{c}\lambda_{nm}t} \quad (3.57)$$

Où

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{\int_0^D \int_0^H F(x, z, 0) \cos \frac{n\pi x}{D} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx}{\int_0^D \int_0^H \cos^2 \frac{n\pi x}{D} \sin^2 \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx} \\ &= \frac{\int_0^D \int_0^H \frac{k}{a} (e^{\alpha \gamma e z} - 1) \cos \frac{n\pi x}{D} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx}{\int_0^D \int_0^H \cos^2 \frac{n\pi x}{D} \sin^2 \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz dx} \end{aligned}$$

On trouve que

$$a_{nm} = 0, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{0m} = -\frac{8kH\gamma_e}{(2m+1)\pi} \frac{2aH\gamma_e + (-1)^{m+1}e^{aH\gamma_e}\pi(2m+1)}{4a^2H^2\gamma_e^2 + \pi^2(2m+1)^2}, \quad m = 0,1,2, \dots$$

Donc la solution qui vérifiée les conditions aux limites et la condition initiale est :

$$F(x, z, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(a_{0m} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \right) e^{\frac{k}{c}\lambda_{0m}t} \quad (3.58)$$

Et par suite la solution recherchée prend la forme suivante :

$$(x, z, t) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{k} F(x, z, t) + 1 \right) \quad (3.59)$$

III.4.3.2 Cas d'une variation exponentielle en U (technique exp-fonction)

Cette idée a été inspirée des travaux d'Asgari et al., 2011. Les auteurs donnent une piste d'un schéma de la solution de l'équation de Richards, sous des hypothèses simplificatrices.

Si $K(U) = kU^m$ et $C(U) = cU^{m'}$, avec $m \neq m'$,

$$k = 4,4.10^{-13} \frac{m}{S} \text{ et } c = 2,428$$

Posons $F = \frac{c}{m'+1} (U - z)^{m'+1}$ ce qui implique que $\frac{\partial F}{\partial U} = c(U - z) = c(U - z)^{m'}$

Alors l'équation (3.50) devient

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(F^p \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left(F^p \frac{\partial F}{\partial z} \right) = b \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.60)$$

$$\text{Avec } p = \frac{m+1}{m'+1} - 1, \quad b = \frac{c}{k} \left(\frac{m'+1}{c} \right)^p$$

Posons $F(x, z, t) = F(\xi)$, avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Où α, β deux constants arbitraires, ainsi l'équation (3.60) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{d\xi} \left(F^p \frac{dF}{d\xi} \right) = \frac{b\beta}{2\alpha} \frac{dF}{d\xi} \quad (3.61)$$

En utilisant la transformation suivante : $G = F^p$

L'équation (3.60) peut s'écrire

$$\frac{1}{p} \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^2 + G \frac{d^2G}{d\xi^2} = \frac{b\beta}{2\alpha} \frac{dG}{d\xi} \quad (3.62)$$

En utilisant la méthode « exp-fonction » la forme générale de la solution de cette équation est donnée par :

$$G(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.63)$$

Pour déterminer les constantes $a_1, a_0, a_{-1}, b_1, b_0, b_{-1}$ on remplace la fonction (3.64) dans l'équation (3.62) et on compare les coefficients des exponentielles.

En utilisant le logiciel Maple on trouve le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} &4b_{-1}b_0p\alpha a_0a_1 - 16a_{-1}b_{-1}pb_1\alpha a_1 - 4b\beta b_{-1}b_0^2p\alpha a_1 + 8b_{-1}^2\alpha a_1^2 + 4a_{-1}b_0pb_1\alpha a_0 \\ &\quad - 4b\beta b_{-1}^2pb_1a_1 - 4a_{-1}b_0^2\alpha a_1 + 4b\beta a_{-1}b_{-1}pb_1^2 + 4b\beta a_{-1}b_0^2pb_1 \\ &\quad - 16a_{-1}b_{-1}b_1\alpha a_1 + 4b_{-1}b_0\alpha a_0a_1 + 8b_{-1}^2p\alpha a_1^2 + 4a_{-1}b_0b_1\alpha a_0 \\ &\quad + 8a_{-1}^2b_1^2\alpha - 4b_{-1}b_1\alpha a_0^2 + 8b_{-1}^2p\alpha b_1^2\alpha + 4a_{-1}b_0^2p\alpha a_1 - 12b_{-1}pb_1\alpha a_0^2 \\ &= 0 \\ &\quad - 2a_1^2b_0b_1\alpha p + 2a_1a_0b_1^2\alpha p - a_1\beta b_0bb_1^2p + a_0\beta bb_1^3p = 0 \\ &\quad b\beta p a_{-1}b_0b_{-1}^2 + 2p\alpha a_{-1}a_0b_{-1}^2 - 2p\alpha a_{-1}^2b_0b_{-1} - b\beta p a_0b_{-1}^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_0\beta b_0 b_1^2 p + 2a_0^2 b_1^2 \alpha p + 2\beta a_{-1} b b_{-1}^3 p + 8a_1 a_{-1} b_1^2 \alpha p + 2a_0^2 b_1^2 \alpha - 4a_1 a_0 b_0 b_1 \alpha p \\
& - 8a_1^2 b_{-1} b_1 \alpha p - 2a_1 \beta b_0^2 b b_1 p + 2a_1^2 b_0^2 \alpha p - 4a_1 a_0 b_0 b_1 \alpha + 2a_1^2 b_0^2 \alpha \\
& - 2a_1 \beta b_{-1} b b_1^2 p = 0 \\
& -4a_0 a_{-1} b_{-1} b_0 \alpha p + 8p \alpha a_{-1} a_1 b_{-1}^2 - 8p \alpha a_{-1}^2 b_1 b_{-1} + 2a_{-1}^2 b_0^2 \alpha p - 4a_0 a_{-1} b_{-1} b_0 \alpha \\
& - 2b \beta p a_1 b_{-1}^3 + 2a_{-1}^2 b_0^2 \alpha + 2a_0^2 b_{-1}^2 \alpha p - 2a_0 \beta b_{-1}^2 b_0 b p \\
& + 2b \beta p a_{-1} b b_{-1}^2 + 2\beta a_{-1} b_{-1} b_0 b p = 0 \\
& 5\beta a_{-1} b_0 b b_1^2 p + 10a_1 a_{-1} b_1^2 \alpha p + 8a_1^2 b_{-1} b_0 \alpha - a_1 \beta b_0^3 b p + 6a_1^2 b_{-1} b_0 \alpha p \\
& + 2a_1 a_0 b_0^2 \alpha p - 8a_1 a_0 b_{-1} b_1 \alpha + a_0 \beta b_{-1} b b_1^2 p - 2a_0^2 b_0 b_1 \alpha p \\
& + 4a_1 a_{-1} b_0 b_1 \alpha p + 8a_0 a_{-1} b_1^2 \alpha - 20a_1 a_0 b_{-1} b_1 \alpha p + a_0 \beta b_0^2 b b_1 p \\
& - 6a_1 \beta b_{-1} b_0 b b_1 p - 8a_1 a_{-1} b_0 b_1 \alpha = 0 \\
& -a_0 \beta b_{-1}^2 b b_1 p - 8a_0 a_{-1} b_{-1} b_1 \alpha - 5a_1 \beta b_{-1}^2 b_0 b p + 2a_0 a_{-1} b_0^2 \alpha p - 20a_0 a_{-1} b_{-1} b_1 \alpha p \\
& + 8a_{-1}^2 b_0 b_1 \alpha + \beta a_{-1} b_0^3 b p + 4a_1 a_{-1} b_{-1} b_0 \alpha p - a_0 \beta b_{-1} b_0^2 b p \\
& + 10a_1 a_0 b_{-1}^2 \alpha p + 6a_{-1}^2 b_0 b_1 \alpha p + 6\beta a_{-1} b_0 b b_1 b_1 p - 8a_1 a_{-1} b_{-1} b_0 \alpha \\
& - 2a_0^2 b_{-1} b_0 \alpha p + 8a_1 a_0 b_{-1}^2 \alpha = 0
\end{aligned}$$

La solution de l'équation (3.60) est donc

$$F(x, z, t) = F(\xi) = \left(\frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.64)$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$ ainsi la solution de l'équation (3.50) est

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(\frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

En essayant de résoudre le système d'équilibrium algébriques par Maple on a distingué les familles de solutions suivantes :

a Première famille

$$\left\{ a_1 = 0, a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b\beta b_0}{\alpha}, a_{-1} = \frac{1}{2} \frac{b\beta b_{-1}}{\alpha}, b_1 = 0, b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1} \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(-\frac{b\beta}{2\alpha} \frac{1 - \frac{b_{-1}}{b_0} e^{-\xi}}{1 + \frac{b_{-1}}{b_0} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes $\alpha, \beta, b_0, b_{-1}$ peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

b Deuxième famille

$$\left\{ \beta = -\frac{4\alpha a_1}{b b_1}, a_1 = a_1, a_0 = 0, a_{-1} = \frac{b_{-1}(1+3p)a_1}{b_1(1+p)}, \right. \\ \left. b_1 = b_1, b_0 = 0, b_{-1} = b_{-1} \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(\frac{a_1 e^\xi + \frac{b_{-1}(1+3p)}{b_1(1+p)} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + \frac{b_{-1}}{b_1} e^{-\xi}} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes α, a_1, b_1, b_{-1} peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

c Troisième famille

$$\left\{ a_1 = 0, a_0 = -\frac{1}{2} \frac{b\beta b_0}{\alpha}, a_{-1} = a_{-1}, b_1 = 0, b_0 = b_0, b_{-1} = 0 \right\}$$

Qui donne la solution suivante :

$$u(x, z, t) = \left(\frac{m' + 1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} \left(-\frac{b\beta}{2\alpha} + \frac{a_{-1}}{b_0} e^{-\xi} \right)^{\frac{1}{m'+m}}$$

Avec $\xi = \alpha(x + z + \beta t)$

Les constantes α, β, a_{-1} et b_0 peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites et la condition initiale.

Supposons dans ce cas que

$$a_{-1} = b_0, \alpha = -\frac{\delta}{2k} \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{p-1} \text{ et } \beta = -\frac{2\alpha}{b} = \frac{\delta}{m'+1}$$

$$\text{Alors } u(x, z, t) = \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{\frac{1}{m'+1}} (1 + e^{-\xi})^{\frac{1}{m'+m}} \text{ et } \xi = -\frac{\delta}{2k} \left(\frac{m'+1}{c} \right)^{p-1} \left(x + z + \frac{\delta}{m'+1} t \right)$$

III.4.4 Résultats et interprétation

La figure 3.13 (40 premiers termes de la série équation 3.59), représente une présentation graphique de la succion en fonction du temps et de la profondeur z. Il est clair que dans ce cas la solution ne dépend pas de x. nous constatons une évolution en fonction du temps pour chaque profondeur, de même à chaque instant donné, la succion varie en profondeur. Cependant, la figure 2 schématise la même situation avec un nombre important des termes de la série ici 50. Une stabilisation plus claire et nette de la succion est remarquée sans apport particulier sur la précision de la succion d'équilibre.

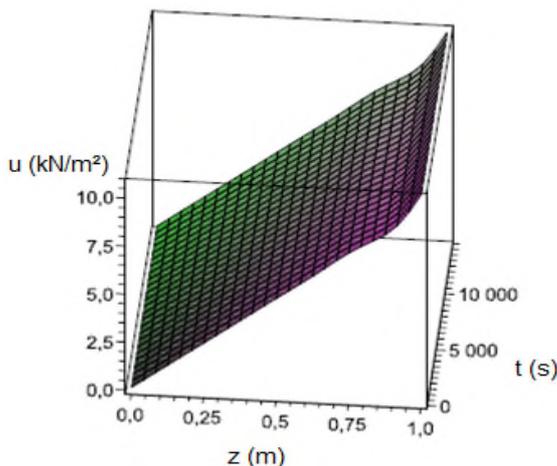


Figure 3.13. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 40 premiers termes de la série.

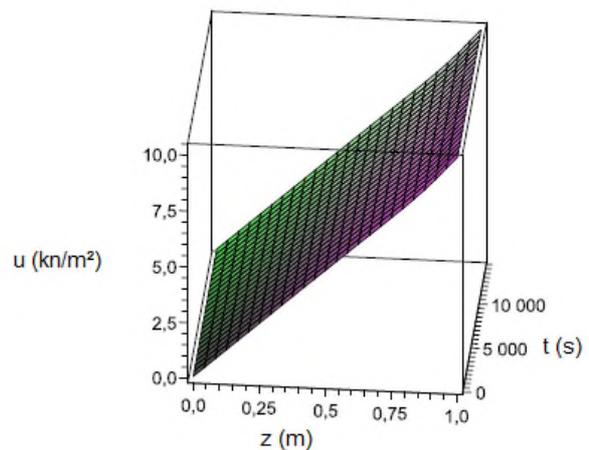
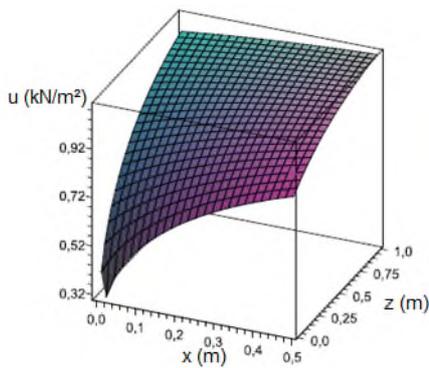


Figure 3.14. Distribution de la succion en fonction de temps selon la profondeur. Les 50 premiers termes de la série.

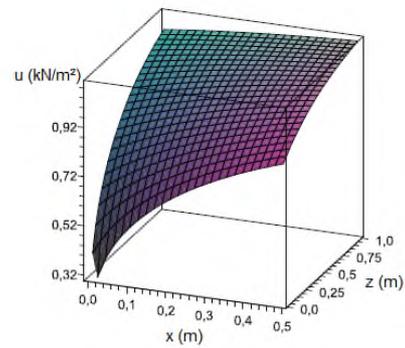
Par contre l'application de la méthode d'Asgari et al., 2010 soit une technique exp-fonction nécessite d'une part les conditions aux limites et les conditions initiales bien précises. Les valeurs de la succion sur la figure 3.15 sont divisées par 10.

Il s'agit d'une évolution spatiale de la succion pour différents instants pour la première famille.

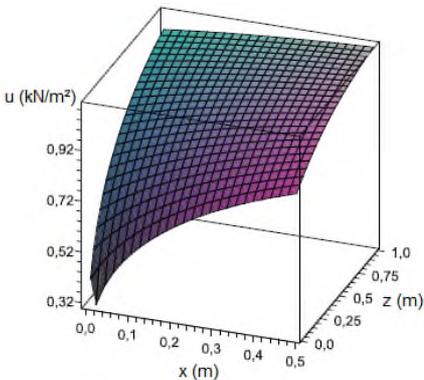
Les figures 3.16 et 3.17 représentent une solution en teneur en eau volumique pour la première famille respectivement pour $k = 2$ et $k = 4$. Encore une autre fois, la teneur augmente Il est clair que le résultat dépend des CI et des CL. La teneur eau augmente avec l'augmentation du temps à n'importe quelle profondeur. Néanmoins, la teneur en eau diminue avec l'augmentation de la profondeur pour chaque instant.



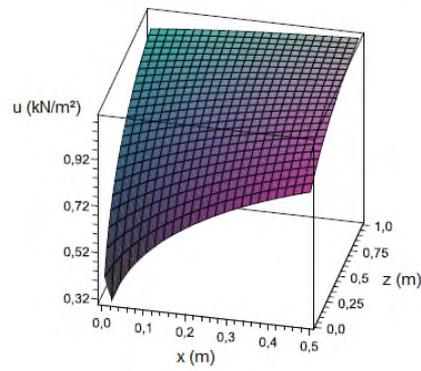
$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 600s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 3600s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 7200s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$



$$\beta = -\frac{2\alpha}{b}, b_0 = b_{-1}, t = 14400s, \alpha = 1, m = 6 \text{ et } m' = 3$$

Figure 3.15. Famille 1 : Variation spatiale de la succion pour différents instants. Valeur de u sont divisées par 10.

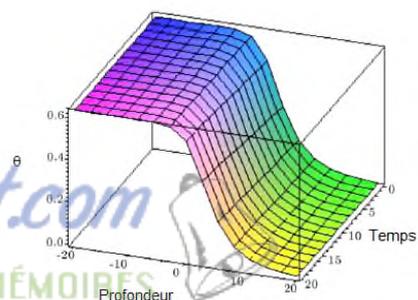
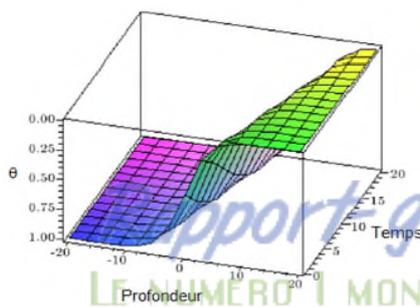


Figure 3.16. Solution exacte pour la première famille $k = 2$.

Figure 3.17. Solution exacte pour la première famille $k = 4$.

III.5 CONCLUSION

Malgré des hypothèses simplificatrices, la description des processus d'écoulement en non saturé est en général très complexe, car souvent ils donnent lieu à des variations de l'état hydrique du sol pendant l'écoulement. Ces variations impliquent des relations complexent entre la teneur en eau, la succion et la conductivité hydraulique.

La non saturation du terrain est directement liée à la conductivité hydraulique, qui elle-même dépend de la teneur en eau volumique. Par contre l'évolution dans le temps est liée au coefficient d'emmagasinement (coefficient de consolidation de la théorie de la consolidation).

Les applications présentées ici nous ont permis d'apprécier le degré de validité de la démarche proposée. Finalement, l'ingénieur doit être en mesure d'estimer toutes les conséquences de l'évolution de la charge hydraulique au sein de l'infrastructure surtout lorsqu'un nouveau régime d'écoulement n'est pas encore atteint.

Dans cette étude, le procédé mathématique exp-fonction, avec le logiciel de calcul Maple, ont été utilisé pour résoudre l'équation Richards afin d'évaluer la succion et la teneur en eau et de trouver une solution plus réaliste et généralisée au problème posé. Cependant, la définition des conditions initiales et aux limites du problème constitue le paramètre clés de la solution non triviale. La teneur en eau du sol peut être dérivée de la solution obtenue, et ses variations, en fonction du temps et de la profondeur du sol, sont déterminées.

CHAPITRE 4:

Analyses numériques des écoulements en régime transitoire

Imbibition d'une colonne ?

Evolution hydrique dans le temps ($Q(t)$; $i(t)$; $U_w(t)$; $v(t)$?

Mise en eau d'un barrage ?

Exploitation d'un barrage ?

Vidange rapide ?

IV.1 INTRODUCTION

Ce chapitre contient l'application de la méthode des éléments finis à l'étude des écoulements en conditions bidimensionnelles pour le cas d'un barrage en terre homogène avec drain horizontal en cours de la mise en œuvre (Mise en eau et remplissage) et en cours de l'exploitation (vidange rapide), ainsi que le cas de l'infiltration (imbibition) d'une colonne verticale.

L'étude présente dans ce chapitre visait à comparer les caractéristiques de l'écoulement obtenue par le calcul avec les phénomènes généralement observés sur les sites des barrages.

Les premiers calculs sont réalisés en considérant le régime permanent des écoulements, dans un second temps, des modélisations en régime transitoire ont permis d'étudier l'évolution des phénomènes dans le temps.

Le choix des modèles peut être justifié par la disponibilité de l'ensemble des données permettant le lancement de calcul correctement dans les travaux antérieurs.

IV.2 DESCRIPTION GLOBALE DE LA MÉTHODOLOGIE

Le module SEEP/W de logiciel Géo-Studio a été utilisé pour répondre aux objectifs cités dans les chapitres précédents. Ce paragraphe présente les éléments nécessaires Pour se familiariser avec les méthodes, les équations et les techniques utilisées dans la formulation et le développement de dit module.

Il s'agit de la résolution numérique par la méthode des éléments finis de l'équation d'écoulement en régime transitoire. Cette équation est définie dans un domaine Ω , elle est associée aux conditions aux limites et aux conditions initiales dans le cas d'un régime transitoire. Il est clair que les conditions aux limites portent sur la charge hydraulique (Dirichlet) et sur le flux (Newman).

La démarche suivie pour arriver à une formulation « éléments finis » est une démarche en deux étapes :

- 1) On ramène le problème de la résolution d'un système différentiel à celui de la résolution d'un système algébrique.
- 2) Ensuite on ramène le problème à celui de calcul d'un nombre fini d'inconnus par décomposition de domaine supposé borné en un nombre fini d'élément sur chacun desquels on impose le type de la variation de la fonction recherchée.

Il est intéressant de noter que dans ce travail on s'intéresse uniquement à l'aspect hydrique. C'est-à-dire pas de déformation dans le milieu étudié.

La transcription donc de problème en équations matricielle repose sur la division de domaine en un nombre d'éléments finis chacun à un nombre de nœuds et l'approximation s'effectue par les fonctions d'interpolation.

Dans le cas de régime transitoire la discrétisation dans l'espace conduit à un système d'équation différentielle en temps « t », du premier ordre. Le traitement de ce point

nécessite donc une intégration dans le temps. L'ingénieur dispose de plusieurs techniques pour résoudre cette problématique.

Il est aussi important de dire à ce niveau qu'il est facile actuellement de prendre en charge le cas du non linéarité : d'ordre physique et d'ordre géométrique. Ce qui donne par voie de conséquence que la résolution doit être effectuée d'autant qu'il y'a de pas de temps.

Lorsque la solution converge, on obtient la valeur de la charge hydraulique et de la pression interstitielle, le code calcul nous donne aussi les valeurs des gradients hydrauliques, les vitesses d'écoulement dans le sens de Darcy, ainsi que le débit d'écoulement dans les points d'intégration de chaque élément.

En plus de la géométrie la méthodologie de module SEEP/W nécessite les informations suivantes :

➤ **Fonction de la capacité hydrique (emmagasinement)**

- ✓ Cette fonction exprime la relation entre la pression interstitielle de l'eau et la teneur en eau. Ainsi que l'eau coule à travers le sol certaine quantité d'eau est stockée ou conservé avec la structure du sol. Elle régit l'évolution dans le temps de phénomène.

➤ **Fonction de conductivité hydraulique**

- ✓ C'est la capacité du sol à résister à un écoulement. Elle dépend de la teneur en eau qui elle-même fonction de la pression interstitielle de l'eau.

L'équation différentielle à résoudre est la même détaillée au chapitre 2 de ce projet de fin d'études :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + Q = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Où :

H : La charge hydraulique ;

k_x : Conductivité hydraulique dans la direction x ;

k_y : Conductivité hydraulique dans la direction y ;

Q : Source qui peut être positive ou négative ;

θ : Teneur en eau volumétrique.

Cependant, le système de coordonnées utilisé par le module SEEP/W est le premier quadrant du système cartésien classique x-y.

En ce qui concerne les techniques d'interpolation le module préconise l'utilisation de fonctions de lissage (pour la conductivité et la capacité hydrique) type : splines pondéré ou les meilleurs splines d'ajustement.

Finalement, SEEP / W utilise la même fonction d'interpolation à la fois pour décrire la distribution de la variable de champ dans un des éléments et dans le système local et global de coordonnées.

IV.3 CAS D'UNE COLONNE VERTICALE (IMBIBITION 1D) **(BENYELLES, 1988)**

IV.3.1 Introduction

L'infiltration dans un sol non saturé est un problème d'un grand intérêt dans les domaines de l'hydrologie, de la science du sol, la science agricole, et de l'ingénierie géotechnique. Quelques exemples typiques de problèmes pratiques comprennent le mouvement de l'eau dans les sections de la chaussée, le transport des contaminants à travers la zone non saturée, la conception de la couverture du sol, et de l'irrigation et des études de drainage. Fait intéressant, les solutions d'éléments finis à l'infiltration des problèmes à partir d'un état de sol sec qui peuvent présenter des problèmes numériques sévères (par exemple l'oscillation de la solution malgré la simplicité apparente), ce qui implique que le système ne converge pas vers la bonne solution. Cet exemple qui semble simple mais il est compliqué par des propriétés hydrauliques fortement non linéaires et par les gradients de pression à travers le front de mouillage qui sont relativement importants.

IV.3.2 Conditions aux limites et propriétés des matériaux

Il s'agit ici d'une colonne de sol en imbibition d'une hauteur de 1m et largeur de 0,2m. La figure 4.1 présente le maillage utilisé, le tableau 4.1 résume les caractéristiques numériques de modèle étudié.

Tableau 4.1 : Caractéristiques numériques du test de la colonne.

Nombre de nœuds	33
Nombre des éléments	20
Type d'élément	Quadrilatérale à 04 nœuds

Les conditions aux limites type charge de pression constante à l'état initial (-1 m) et final (0 m) sont représenté sur la figure 4.2. Cependant, la figure 4.3 schématise la condition initiale pour le calcul transitoire. C'est à dire, on impose à la tête de la colonne une charge de pression nulle, tandis que la base de la colonne est maintenue à - 1m. Ces conditions aux limites simulent les conditions d'infiltration que la pression négative de l'eau interstitielle dans la partie inférieure de la colonne est ramené à zéro dès que l'infiltration commence.

La pression de l'eau interstitielle initiale du sol est établie en utilisant la fonction « Activation PWP sous le KeyIn » Les propriétés des matériaux de la boîte de dialogue. Cette condition initiale qui correspond à un sol avec une teneur en eau volumétrique presque résiduelle (voir la fonction de la teneur en eau volumétrique figure 4.5).

La fonction de la teneur en eau volumétrique du sol utilisé dans l'analyse a été générée à l'aide du modèle de sol de Van Genuchten. Les paramètres clés sont présentés dans le

tableau 4.2 et sont typiques d'un limon argileux sableux. La fonction de la conductivité hydraulique (figure 4.6) a été générée à l'aide de la fonction «estimation» sous Fonctions KeyIn conductivité hydraulique. L'estimation de la fonction a été réalisée en utilisant une valeur de k_{sat} de 1×10^{-6} m/s avec la fonction de la teneur en eau volumétrique de même matériau.

Le maillage comprend vingt éléments dans la direction verticale (à savoir $y = 0,05$ m) et un total de 10 pas de temps. Le cas de discrétisation bien utilisé un espacement vertical de 0,02 m et 100 pas de temps. La durée totale de temps pour l'analyse était 46 800 secondes (soit 13 heures).

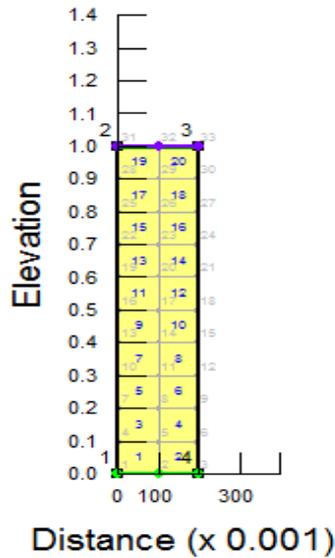


Figure 4.1 : Maillage

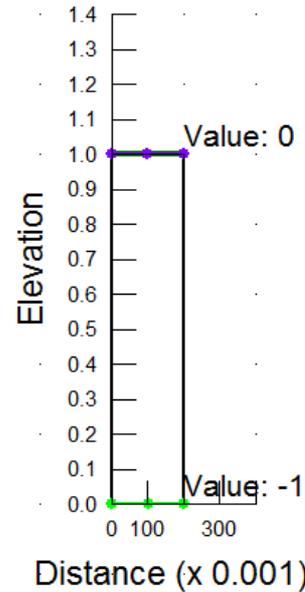


Figure 4.2 : Condition initiale

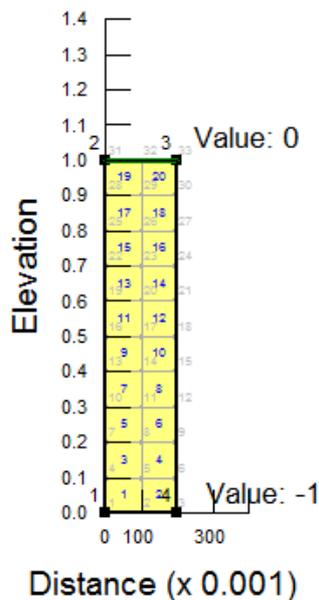


Figure 4.3 : Modèle global



Figure 4.4 : Définition de l'axe AA (Numéro des nœuds 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 29 et 32).

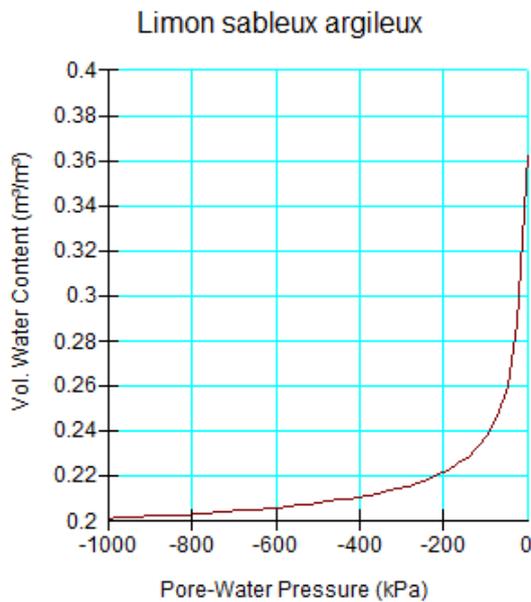


Figure 4.5 : Fonction de la teneur en eau volumétrique

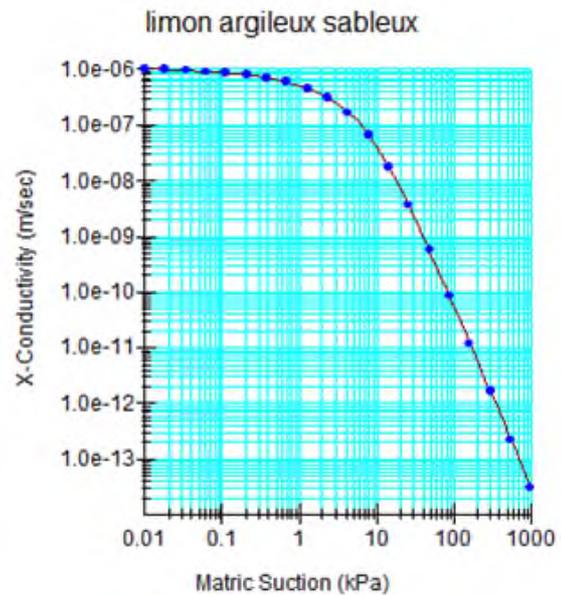


Figure 4.6 : Fonction de la conductivité hydrique

Tableau 4.2. Propriétés des matériaux utilisés pour le sol

Paramètre	Valeur	Unités
Teneur en eau volumétrique à saturation θ_{sat}	0,363	cm^3/cm^3
Teneur en eau volumétrique résiduelle θ_r	0,186	cm^3/cm^3
α	9.81	1/kPa
n	1,53	---
Conductivité hydraulique à saturation k_{sat}	10^{-6}	m/s

IV.3.3 Paramètres de convergence

L'option "Gauss point de conductivité" a été sélectionnée afin de déterminer si la solution a convergé à l'intérieur de chaque intervalle de temps. Un problème est convergé si 100% des points de Gauss ont une conductivité hydraulique dans la tolérance prédéfinie. La tolérance représente la différence maximale des ordres de grandeur entre la conductivité hydraulique utilisée dans la dernière itération et la conductivité réelle de ce point de Gauss. Les champs de saisie sous « Conductivité » (dans les ordres de grandeur) représentent un niveau supplémentaire de sous-relaxation, qui est utilisé pour accélérer la solution.

IV.3.4 Résultats et discussion

La figure 4.7 présente les résultats de l'évolution de la charge hydraulique en fonction du temps le long de la hauteur de la colonne.

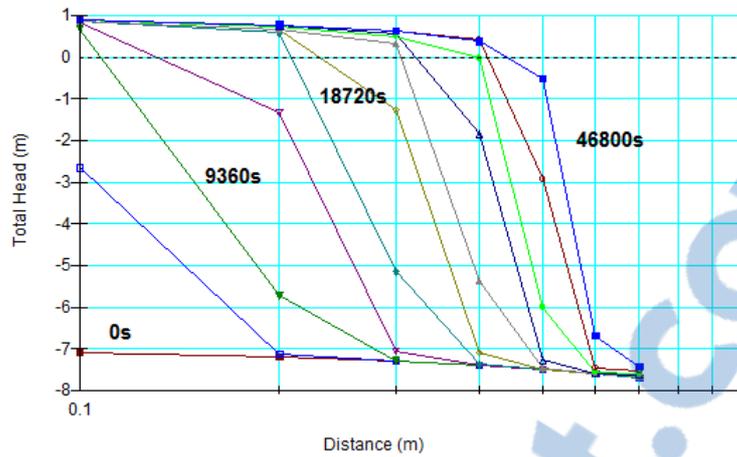


Figure 4.7 : Variation de charge hydraulique en fonction de la distance :
Effet du temps

La figure 4.8 représente plutôt la variation de la pression interstitielle le long de cette profondeur.

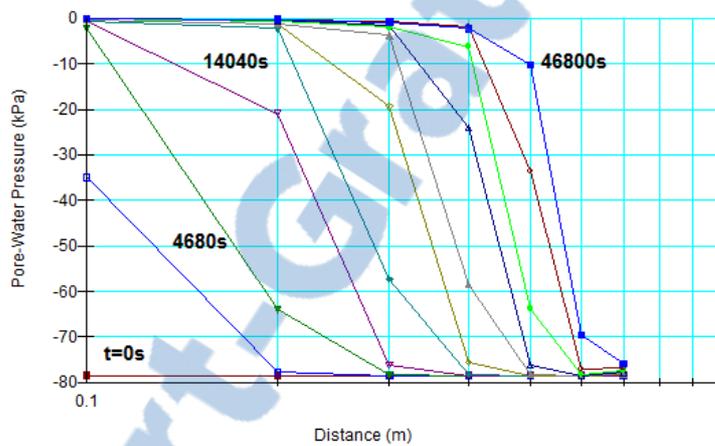


Figure 4.8 : Variation de la pression interstitielle en fonction de la distance : Effet du temps

Sur une section verticale soit l'axe AA l'évolution de la charge hydraulique en fonction du temps pour l'ensemble des nœuds de cet axe (figure 4.4) est représenté sur la figure 4.9.

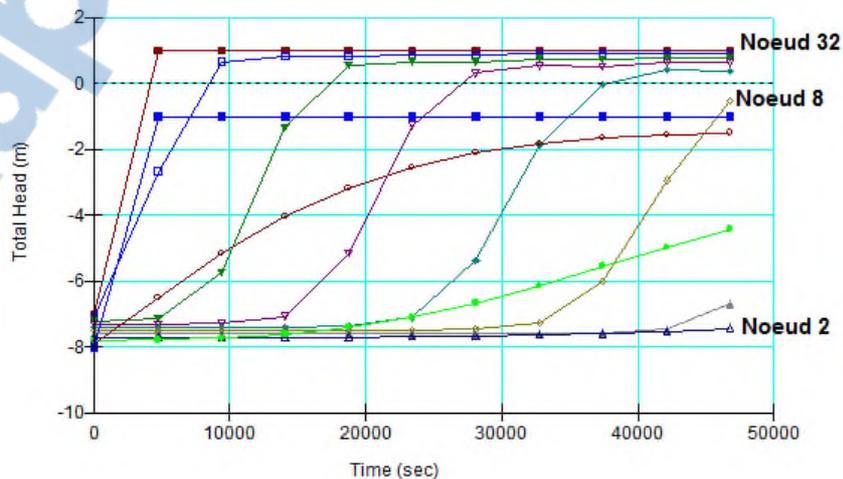


Figure 4.9 : Charge hydraulique en fonction du temps pour différents points le long de la verticale centrale.

Cette application présente un intérêt pratique est celui de l'avancement de front d'humidification : la figure 4.10 présente l'avancement de ce front à l'état initial, l'état final et à $t= 42120s$, $23400s$ et $14040s$. Il est clair que l'avancement de front d'humidification est très semblable à celui observé expérimentalement. Néanmoins une perturbation est enregistrée à la fin d'avancement qui est pratiquement indépendante de la hauteur de la colonne.

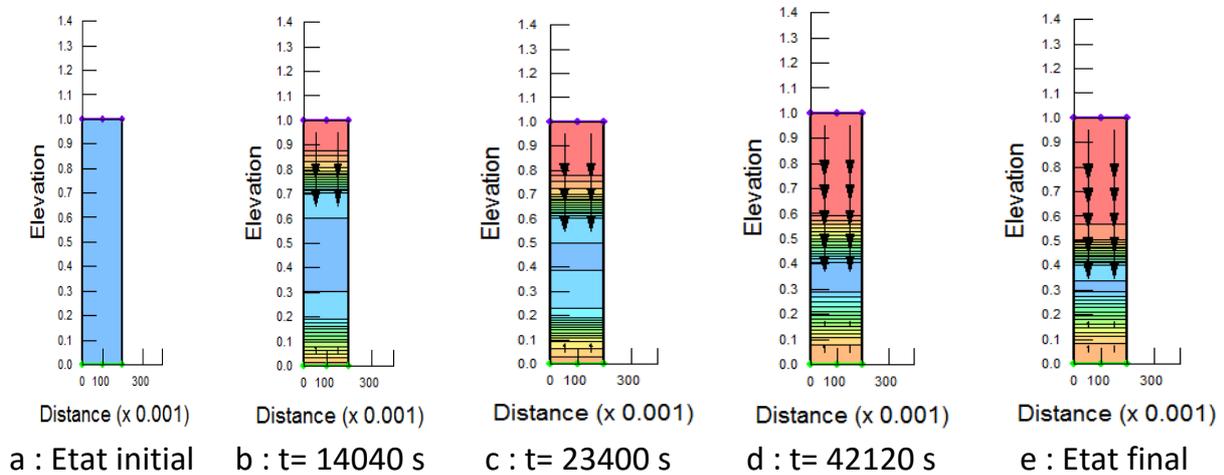


Figure 4.10 : Avancement de front d'humidification à différents instants.

Etant donné la solution semi-analytique de Warrick et al. (1985), une tentative de validation avec le résultat numérique a été effectuée. La figure 4.11. Il s'agit de la variation de la pression interstitielle en fonction de la profondeur.

Les résultats des simulations de notre modèle montrent une divergence avec le modèle analytique. Ces constatations peuvent être liées à la faible perméabilité associée à la force de désaturation du sol, refreine le phénomène de transfert d'eau.

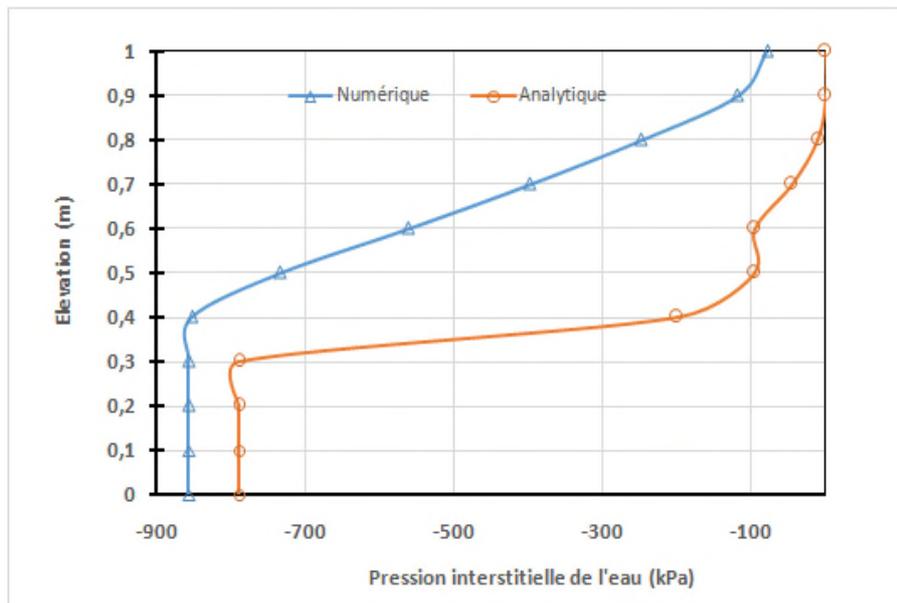


Figure 4.11 : Distribution de la pression interstitielle de l'eau le long de l'axe AA. .

L'évolution à court terme de la pression selon la hauteur montre clairement que la répartition de la pression tend vers un équilibre qui est difficilement atteint pour les profondeurs importantes. La cohérence est acceptable.

En conclusion SEEP / W est capable de modéliser l'infiltration dans un sol sec, ce qui peut être un problème difficile en raison de la non-linéarité dans les fonctions hydrauliques et des gradients hydrauliques excessif au bord du front de mouillage. Les résultats démontrent qu'une solution correcte est produite (spatiale et temporelle), bien que la précision de l'élévation avant le front de mouillage peut être améliorée par le raffinement de pas du temps.

IV.3.5 Influence de la perméabilité à saturation sur le phénomène d'imbibition

L'effet de la perméabilité à saturation a été étudié pour déduire l'effet de ce paramètre sur l'imbibition et l'avancement de front de mouillage. Autrement dit que la connaissance de cette profondeur est un élément pertinent pour l'ingénieur afin de connaître et prédire l'impact sur les phénomènes extrêmes à savoir le gonflement et le retrait. Les valeurs de k_{sat} suivantes ont été choisies (Tableau 4.3).

La figure 4.12 montre l'effet de ce paramètre.

Une constatation en cohérence avec la phénoménologie de l'imbibition que le coefficient de perméabilité à saturation n'affecte pas la pression de l'eau pour des profondeurs élevées. Ceci est dû à la propagation du front d'imbibition qui est d'autant plus rapide que la perméabilité augmente. C'est-à-dire que la profondeur d'humidification est d'autant importante que la perméabilité est grande. Cette constatation ne peut être généralisée pour les faibles valeurs de la perméabilité.

Tableau 4.3. Valeurs de k_{sat}

k_{sat}	10^{-6}
	10^{-7}
	10^{-8}
	10^{-9}
	10^{-10}

Les courbes d'évolution au cours du temps de la pression d'eau en fonction de la profondeur confirment la conclusion que nous venons d'obtenir sur l'évolution de la charge d'eau. On tend dans un temps relativement court vers une distribution hydrostatique. Ceci montre probablement que ce sol contient une partie importante de fines pour que la colonne reste quasi saturée.

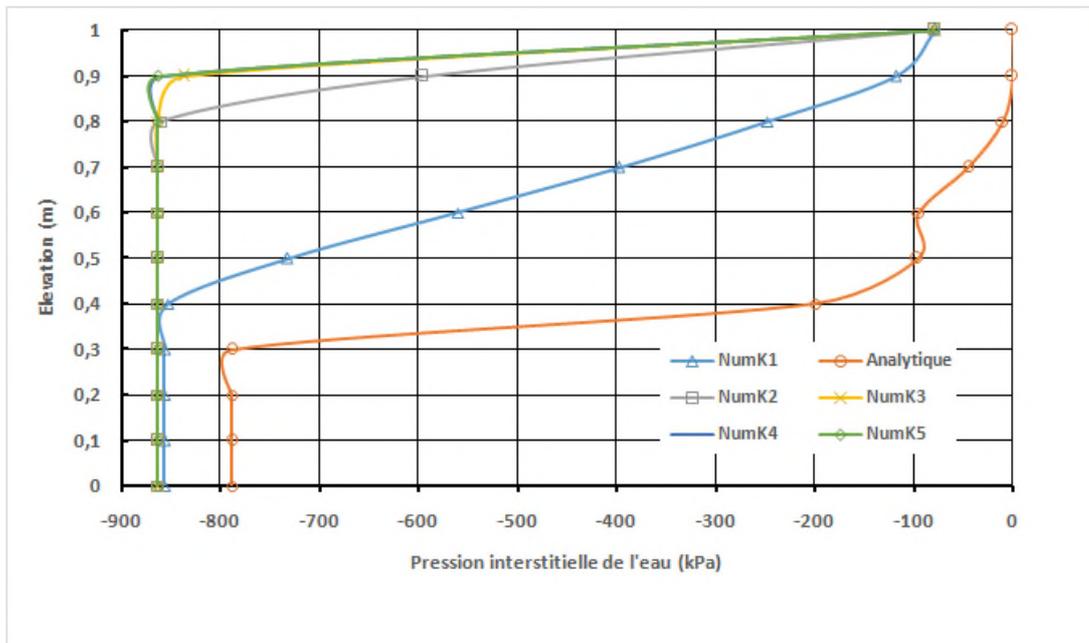


Figure 4.12 : Effet de la perméabilité à saturation sur la pression interstitielle.

IV.3.6 Influence de la teneur en eau à saturation sur l'évolution de phénomène

L'effet de la porosité a fait l'objet d'une étude paramétrique. Vu la sensibilité de ce paramètre nous avons choisi des petits intervalles de variation afin de mieux connaître l'effet de ce paramètre sur la réponse hydrique. Le tableau 4.4 résume les valeurs prises en compte.

La figure 4.13 illustre l'effet de θ_{sat} sur le phénomène hydraulique.

Encore une autre fois une divergence par rapport au cas analytique est enregistrée. La méthode analytique semble plus pertinente dans la détermination de la profondeur d'humidification, malgré que la valeur finale est la même pour l'ensemble des simulations. Il est sans doute très intéressant de dire suivant les résultats que l'effet de la teneur en eau à saturation est très important dans l'évolution des pressions dans la colonne. Nous avons pu mettre en évidence que les valeurs très proches ne présentent pas un effet différent comme nous avons supposé au début par comparaison à la sensibilité de coefficient de poisson et de la densité sèche.

Tableau 4.4. Valeurs de θ_{sat}

θ_{Sat}	0.363
	0.36
	0.35
	0.25
	0.2

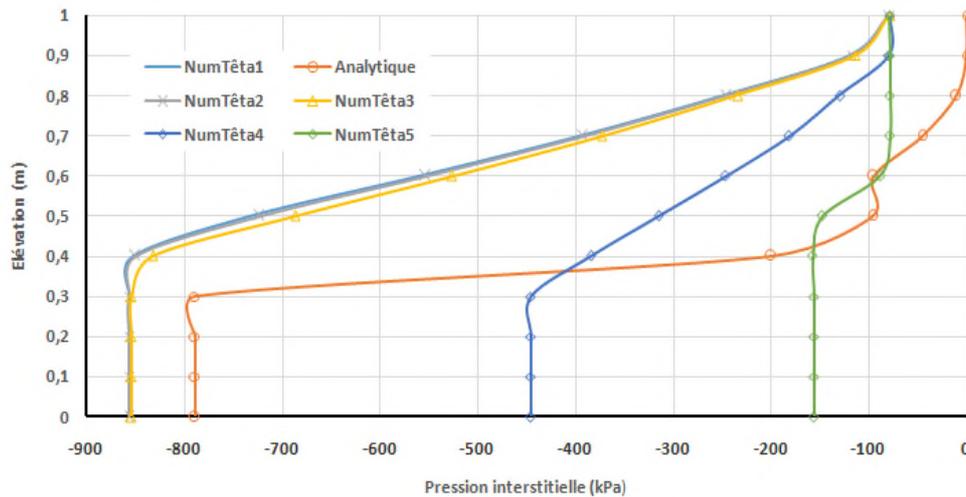


Figure 4.13 : Effet de la teneur en saturation sur la pression interstitielle le long de l’axe AA.

IV.4 RÉPONSE HYDRAULIQUE D’UN BARRAGE EN TERRE

Ce paragraphe ce veut comme une analyse numérique de la réponse hydraulique d’un barrage en terre homogène avec drain horizontal. La mise en eau, l’exploitation et le problème de la vidange rapide en cas des crues exceptionnelles méritent une attention particulière pour la sécurité de l’ouvrage et son environnement ainsi que sa durabilité et son fonctionnement dans de bonnes conditions.

La particularité de cette contribution réside que les conditions aux limites sont transitoires tant pour la mise en eau que pour l’exploitation et le processus de vidange.

IV.4.1 Géométrie et conditions aux limites :

Une capture d’écran de SEEP/W donne une image claire (figure 4.14) de cet exemple. Il y a quatre analyses dans le fichier et la différence entre les quatre situations (phases successives) est due principalement aux conditions aux limites qui varient en fonction du temps.

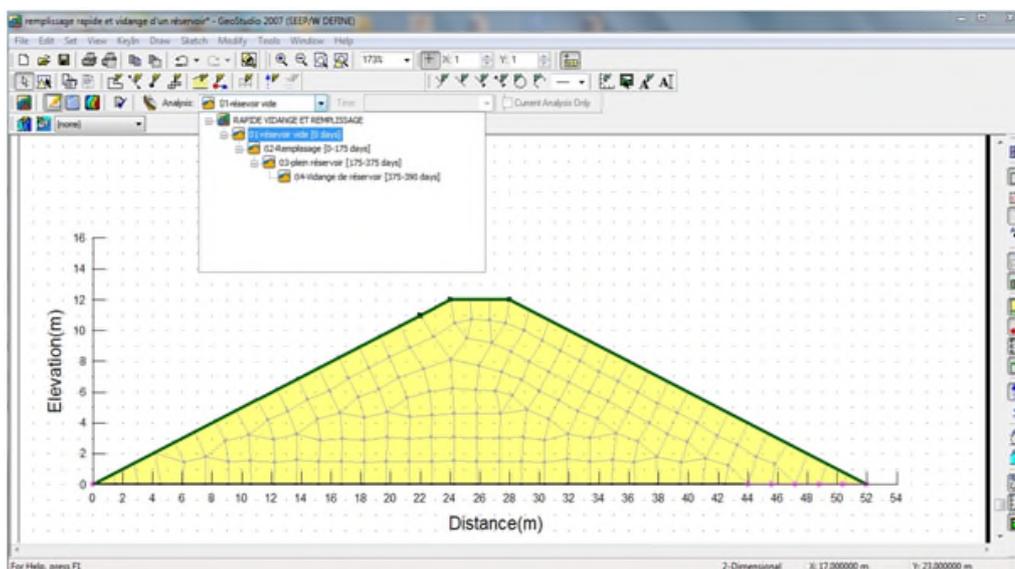


Figure 4.14 : Capture d’écran SEEP/W.

IV.4.1.1 Phase de réservoir vide

Ceci correspond à l'état initial avec des conditions initiales $t = t_0$ qui correspond au régime permanent. Cette étape est obligatoire pour le lancement des simulations par la suite.

Il s'agit d'un barrage de hauteur de 12 m, une base de 52 m et la largeur de la crête vaut 4m.

Pour les conditions aux limites du côté amont du barrage nous avons mis une pression nulle de type "press, head(p)" avec une action constante de zéro (0) m au point bas (figure 4.15).

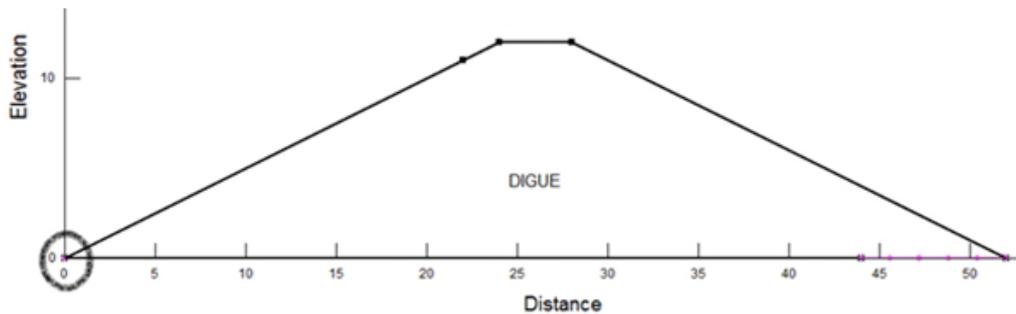


Figure 4.15 : Conditions aux limites phase barrage vide

IV.4.1.2 Phase de remplissage :

En fonction des résultats de la première analyse (phase précédente), le calcul dans cette phase diffère uniquement par le changement des conditions aux limites : ce qui veut dire la suppression de la pression nulle qui sera remplacée par une nouvelle condition aux limites (tableau 4.5) de type "function" avec une action de "total head vs time: type spline data point function" appliquée le long de la face amont (figure 4.16).

Tableau 4.5. Valeurs de temps et $H(U_w)$:

Temps(jours)	$H(U_w)$ (m)
0	0
175	11

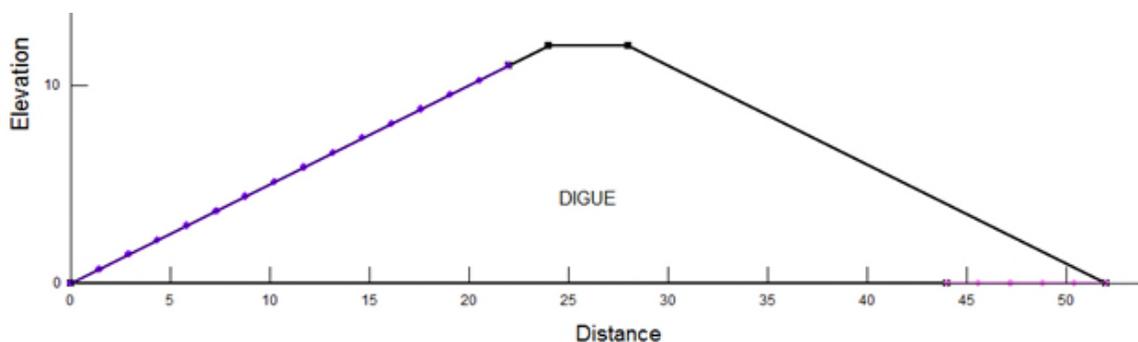


Figure 4.16 : Conditions aux limites phase de remplissage

IV.4.1.3 Phase d'exploitation de réservoir plein :

Il s'agit aussi d'un changement des conditions aux limites. Soit une nouvelle condition aux limites de type "head" avec une action constante de 11m sur toute la ligne de l'amont de barrage (figure 4.17).

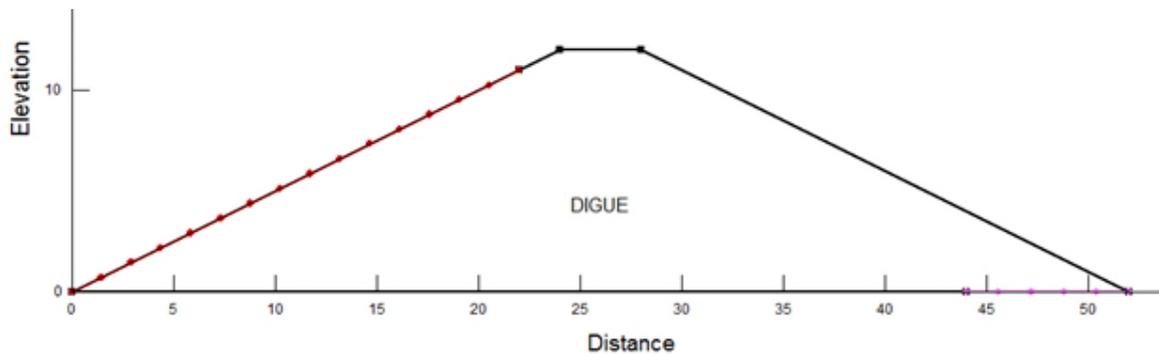


Figure 4.17 : Conditions aux limites phase d'exploitation.

IV.4.1.4 Phase de vidange rapide

Dans cette phase une nouvelle condition (tableau 4.6) aux limites de type "fonction" avec une action de "total head vs time: type spline data point function" est appliquée toujours sur la même la frontière (figure 4.18). Dans ce cas il est important de ne pas oublier la sélection de la commande "potentialseepage face review".

Tableau 4.6. Valeurs de temps et $H(U_w)$:

Temps(jours)	$H(U_w)$ (m)
375	11
390	0

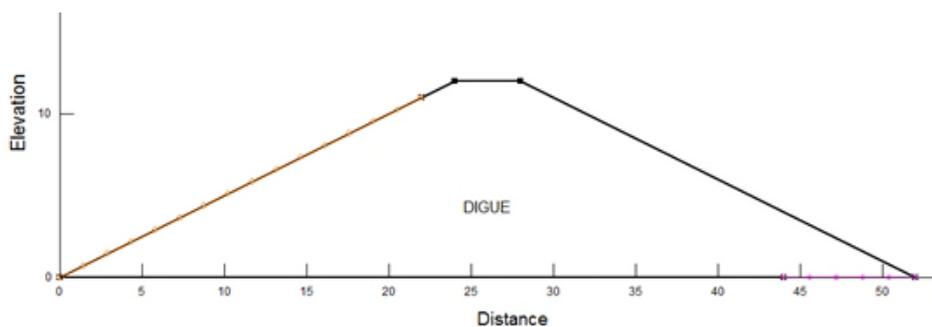


Figure 4.18 : Conditions aux limite phase de vidange rapide.

Le drain horizontal est constitué des matériaux tels que le gravier grossier afin que l'eau sorte d'une manière continue et correctement.

Comme le montre la figure 4.19 l'enchaînement des phases se déroule selon un planning bien défini : à partir de l'instant $t = 0$ s le remplissage commence progressivement selon une loi linéaire jusqu'à atteindre le temps $t = 175$ jours. Entre 175 jours et 375 jours, une charge constante de 11 m a été appliquée sur le parement amont de barrage. Par la suite, une diminution encore linéaire de cette charge simule la vidange pendant une durée de 15 jours soit un temps $t = 390$ jours.

Il est probable que ce temps ne correspond pas à la réalité dans le cas des crues exceptionnelles. Cependant, nous n'avons pas pu faire des calculs pour des durées plus courtes en raison de la stabilisation numérique et le choix du pas de temps très petit.

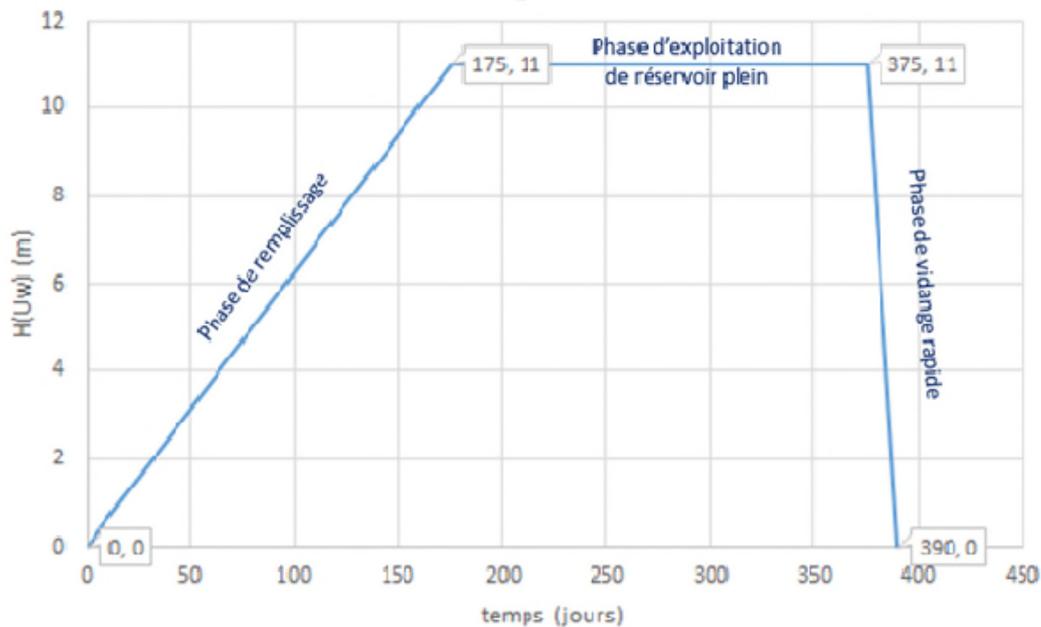


Figure 4.19 : Fonction de chargement : différentes phases.

IV.4.2 Propriétés de matériau :

Comme il s'agit d'un calcul en régime transitoire dans des conditions non saturées, il était nécessaire de choisir le modèle de sol qui correspond à cette situation. Ce modèle requiert une fonction de teneur en eau et fonction d'une conductivité hydraulique. Ces dernières sont schématisées sur les figures 4.20 et 4.21 respectivement.

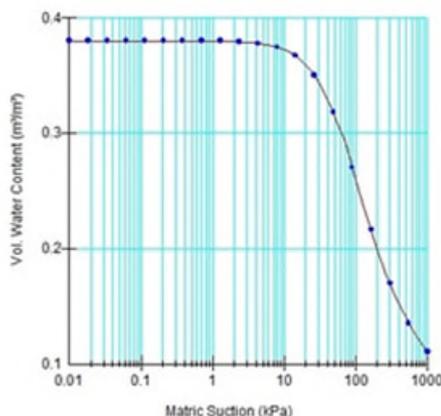


Figure 4.20 : Fonction de la teneur en eau

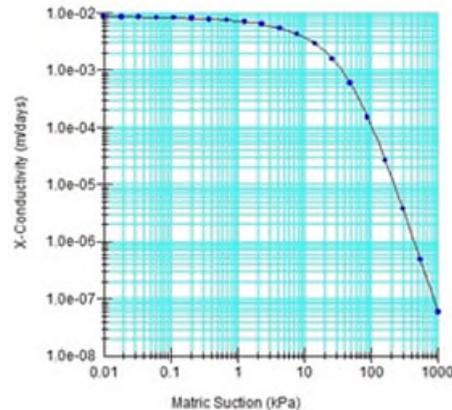


Figure 4.21 : Fonction de la conductivité hydraulique

IV.4.3 Résultats et Discussions

La figure 4.22 montre l'état initial qui correspond au régime permanent.

L'analyse des conditions initiales est en cohérence avec la présence du drain à la partie aval du barrage et la condition de pression nulle au nœud en bas à gauche. Le profil de pression de l'état d'équilibre résolu montre des pressions hydrostatiques négatives au-

dessus de l'emplacement de la nappe phréatique (dans notre cas c'est la base de notre modèle), ce qui serait acceptable pour une colonne de sol sans infiltration à la surface.



Figure 4.22 : Etat initial.

La figure 4.23 montre clairement l'effet de la chronologie de remplissage de réservoir sur l'évolution des pressions interstitielles et la surface libre dans le corps de barrage. Ce résultat est conditionné par le choix de point de départ et fortement influencé par le choix de la perméabilité et de la capacité capillaire. Il est intéressant de noter ici l'effet du non linéarité géométrique induit par la mobilité de la surface libre. Ce calcul nécessite une discrétisation particulière du temps entre $t = 0$ s et $t = 175$ jours.

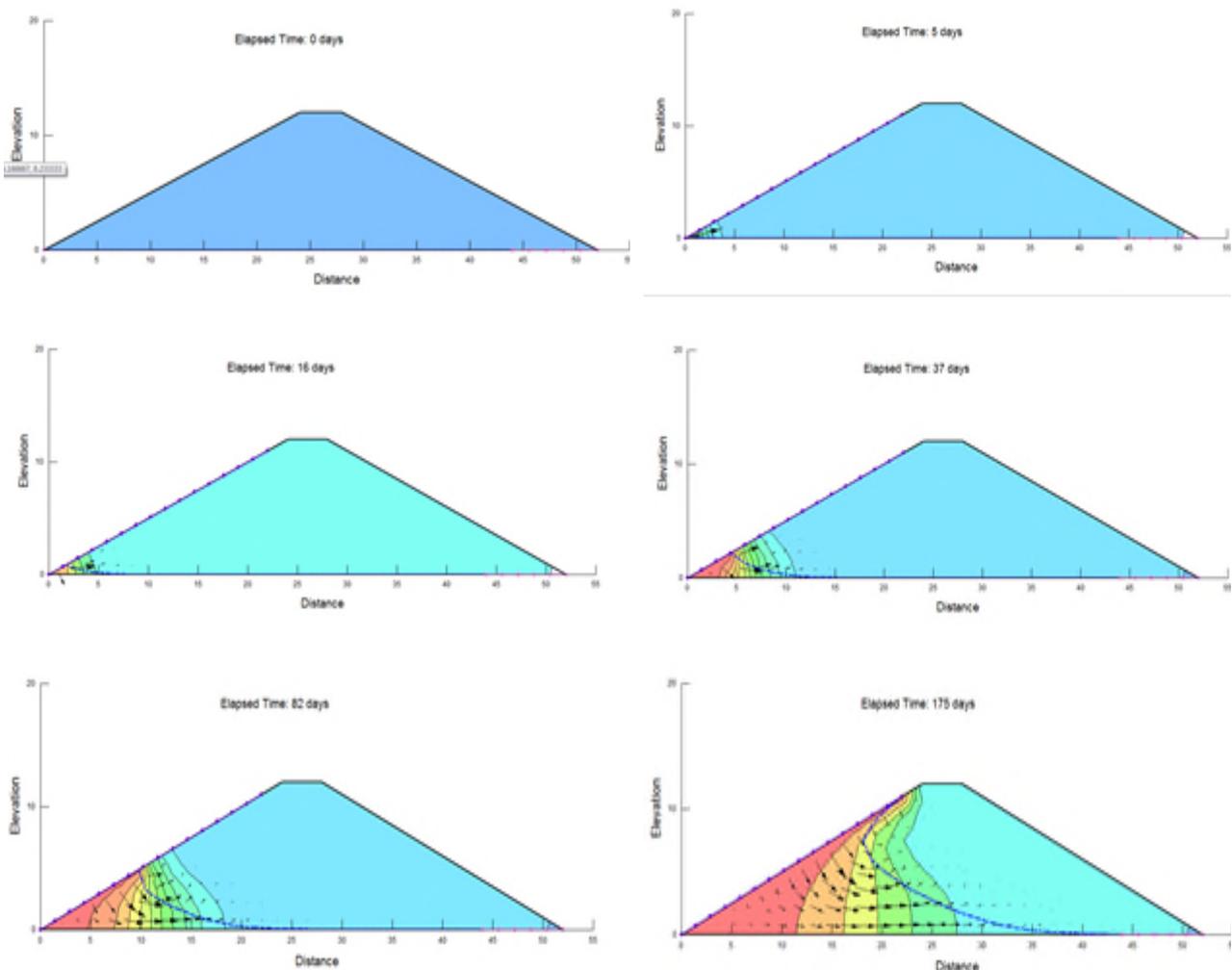


Figure 4.23 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de remplissage

De la même manière la figure 4.24 illustre la même évolution une fois la charge est maintenue constante durant 200 jours environs. L'évolution continue mais d'une manière progressive est douce jusqu'à atteindre un nouveau régime qui correspond au régime permanent. Encore une autre fois la valeur de la perméabilité conditionne cette évolution et le choix d'emmagasinement perturbe le pas de temps énormément.

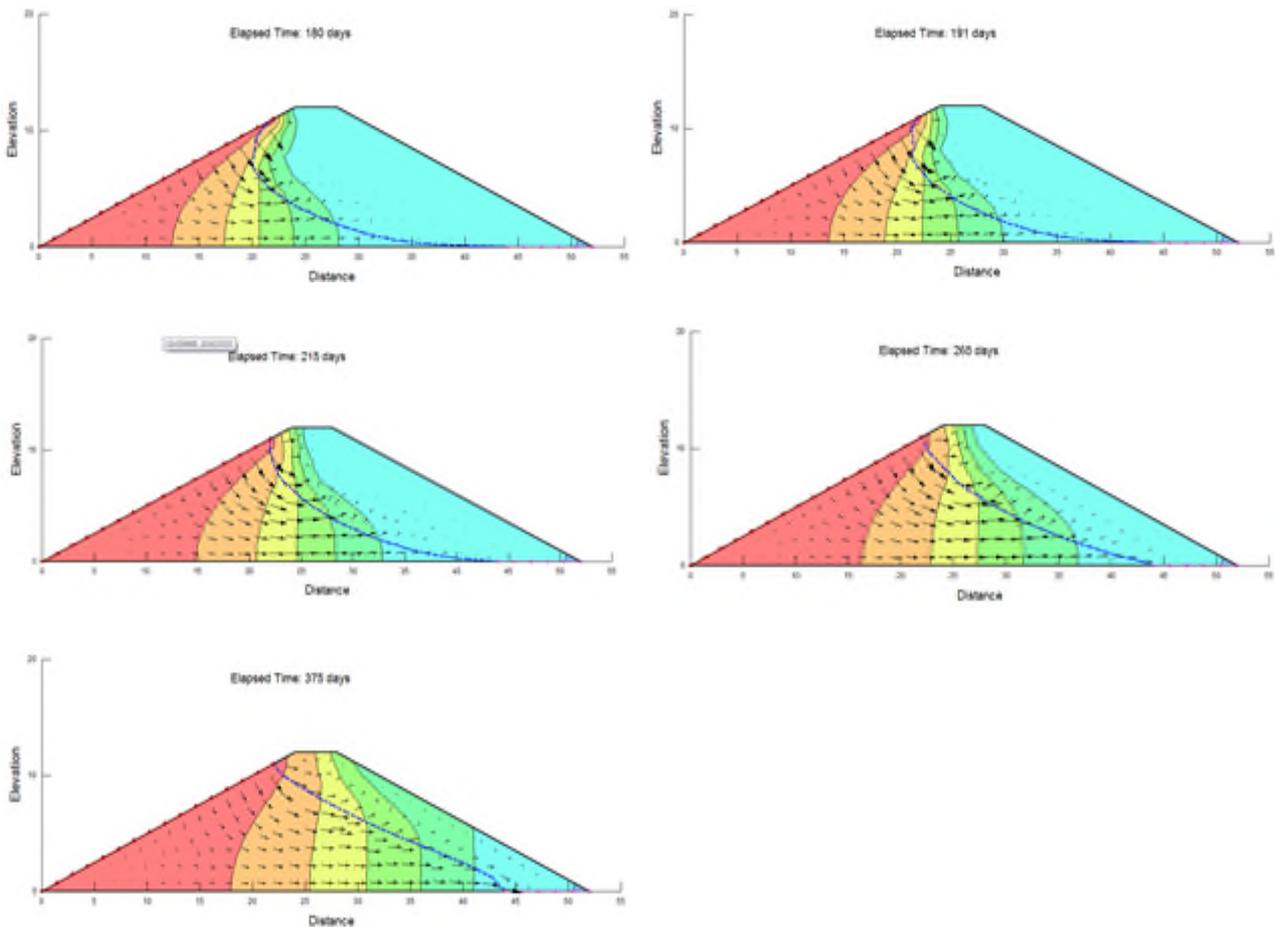


Figure 4.24 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de l'exploitation.

Le choix de la durée de la mise en eau ainsi que la durée d'exploitation peut ne pas être grossière par rapport à la réalité et la pratique de l'ingénieur. Cependant, la durée de la vidange environ 15 jours semble être grossière nécessite une discussion et étude plus profonde. La figure 4.25 résume cette évolution ainsi que la manifestation de l'écoulement au cours de cette période.

Nous n'avons pas pu réduire cette durée pour l'ensemble des simulations effectuées. Le choix du pas de temps reste soumis à des exigences très sévère dans ces conditions. La vidange rapide peut mettre en cause la stabilité de barrage. Aucune tentative a été réussie dans ce sens.

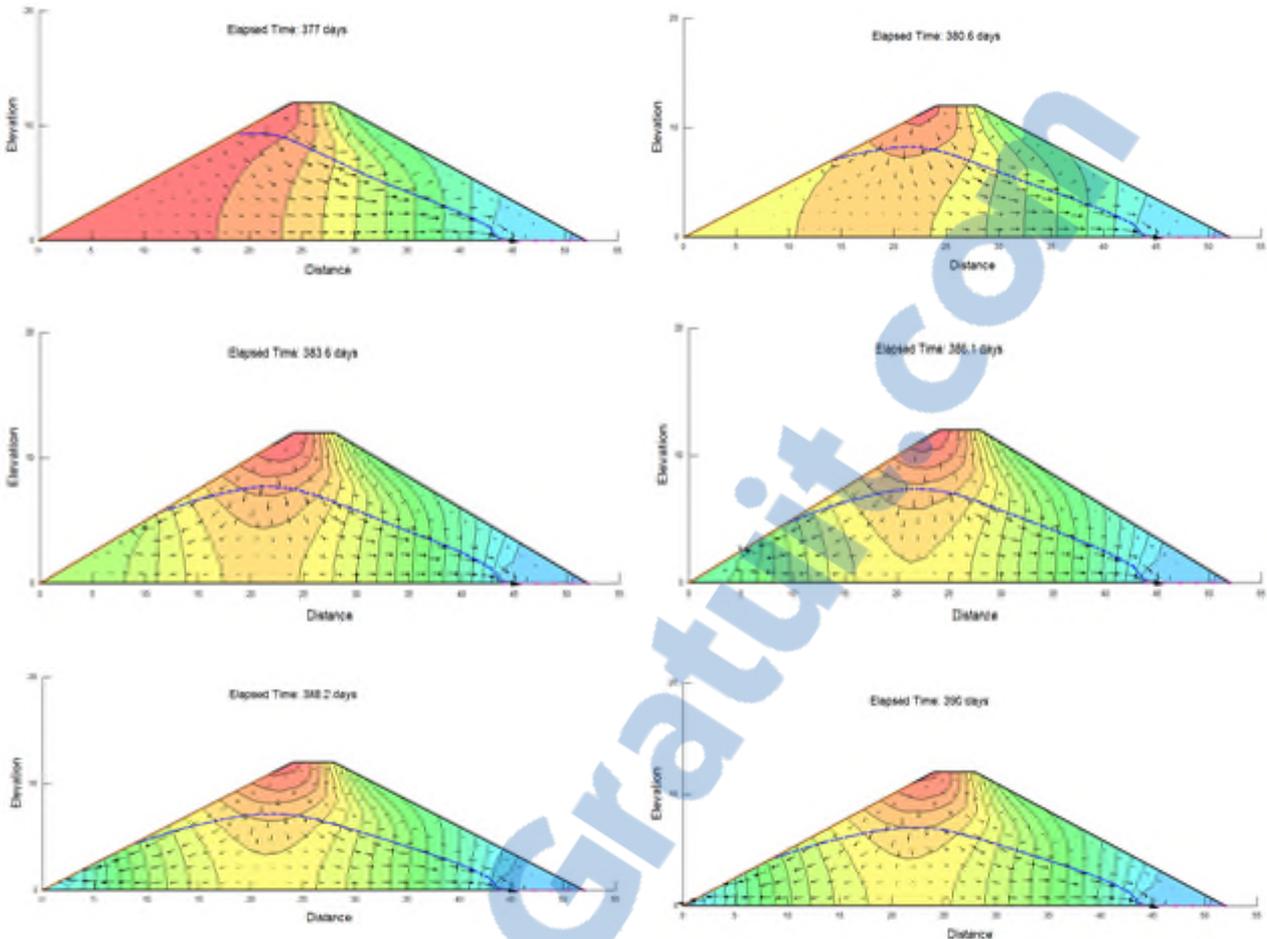


Figure 4.25 : Evolution de la charge hydraulique totale en cours de vidange.

La figure suivante (4.26) schématise le processus de l'accumulation du bilan hydrique dans le corps de barrage durant les trois phases. Le graphique a été assemblé par le choix des nœuds limites sur les deux emplacements en amont et en aval des nœuds limites, puis additionnant les flux cumulés au fil du temps. Les nœuds sélectionnés sont affichés suivi par cette courbe cumulative de stockage dans le barrage.

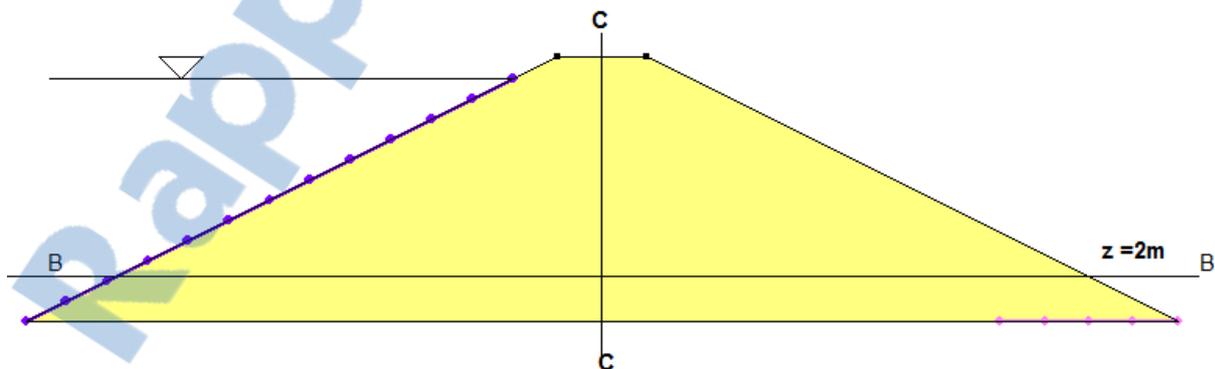


Figure 4.26 : Illustration des nœuds pour le calcul de bilan hydrique.

Ce type de graphique (figure 4.27), qui résume une série de différentes courbes, peut être obtenu directement dans Geo-Studio par le choix de l'option somme (Y) en fonction de la moyenne (X) en cochant la case correspondante dans la boîte de dialogue. Dans ce cas Y représente le flux cumulé pour l'ensemble des points de l'abscisse X ici représente le temps. C'est-à-dire c'est la somme des flux nodaux individuel (Y) en fonction des

valeurs moyennes de (X) , sous réserve que le temps est le même à chaque intervalle de sauvegarde des données, la moyenne de temps est égale au temps de l'ensemble des séries qui contribuent à ce flux.

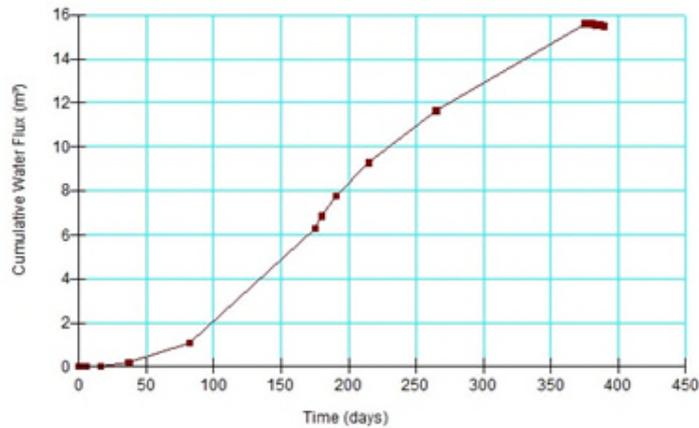


Figure 4.27 : Evolution au cours du temps de flux d'eau cumulé en fonction du temps.

Une exploitation de ce résultat est schématisée sur les figures suivantes : la figure 4.28 indique l'évolution de la pression interstitielle le long de l'axe BB qui se trouve à 2 m de la base de barrage pour différents instants. Il s'agit uniquement des nœuds qui se trouvent sur cet axe. Le résultat semble acceptable vu la description de la zone non saturée par des pressions négatives. Ainsi que la décroissance de la pression lorsqu'on s'éloigne de l'amont. Cette décroissance est moins importante lorsque le temps augmente. De la même manière la figure 4.29 représente la variation de la charge hydraulique le long de même axe.

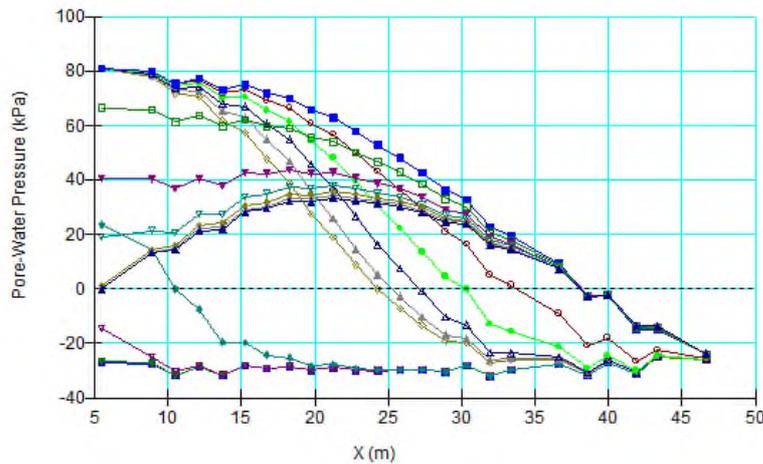


Figure 4.28 : Evolution au cours du temps de la pression de l'eau le long de l'axe BB.

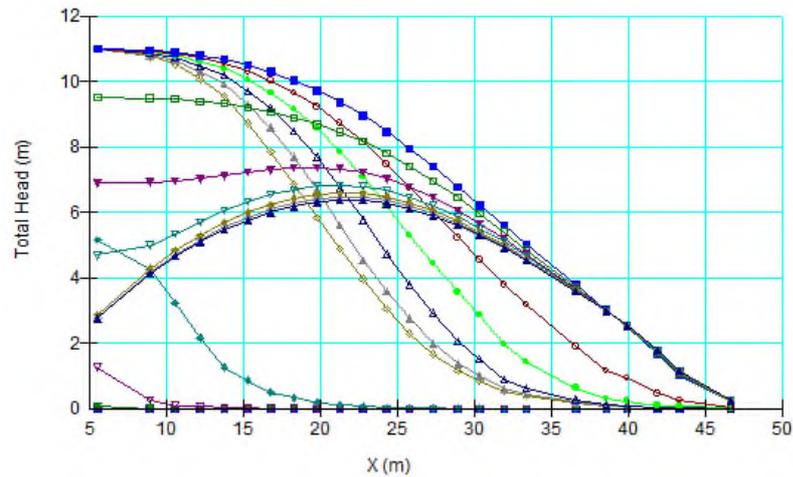


Figure 4.29 : Evolution au cours du temps de la charge le long de l'axe BB.

Les figures 4.30 et 4.31 représentent respectivement la variation de la pression et de la charge hydraulique le long de l'axe vertical CC. Une diminution de la pression d'eau est enregistrée malgré une resaturation rapide la pente des pressions est pratiquement la même. Néanmoins, une faible variation a été constatée à propos de la charge hydraulique. Ceci nécessite d'approfondir les connaissances dans ce sens afin de faire des conclusions utiles à la pratique de l'ingénieur.

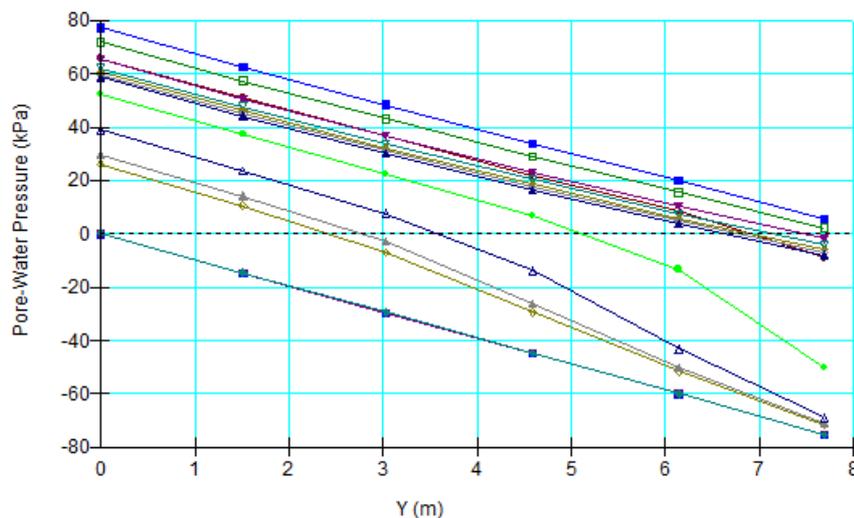


Figure 4.30 : Evolution au cours du temps de la pression de l'eau le long de l'axe CC.

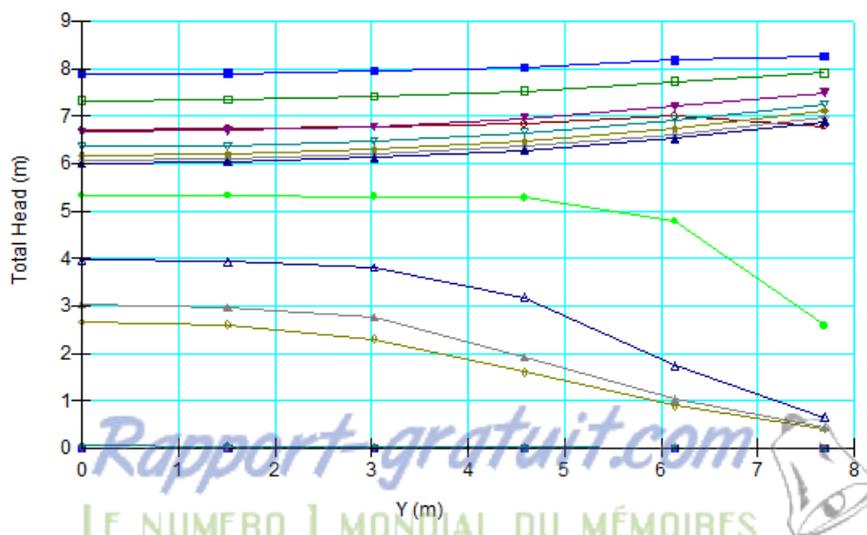


Figure 4.31 : Evolution au cours du temps de la charge le long de l'axe CC.

Un autre volet de l'exploitation de ce résultat est celui de l'évolution des gradients hydrauliques. Il est clair que l'effet de gradient hydraulique conditionne la stabilité de l'ouvrage, ainsi que la boullance qui semble un état limite critique dans la pérennité de l'ouvrage.

La figure 4.32 illustre la répartition des gradients hydrauliques le long de drain horizontal. Les gradients sont plus importants lorsque la stabilisation est obtenue. Il ressort de cette figure aussi que les gradients sont plus élevés au début de drain juste à proximité de la ligne libre. Ceci étant dit que les gradients restent faibles dans cette configuration.

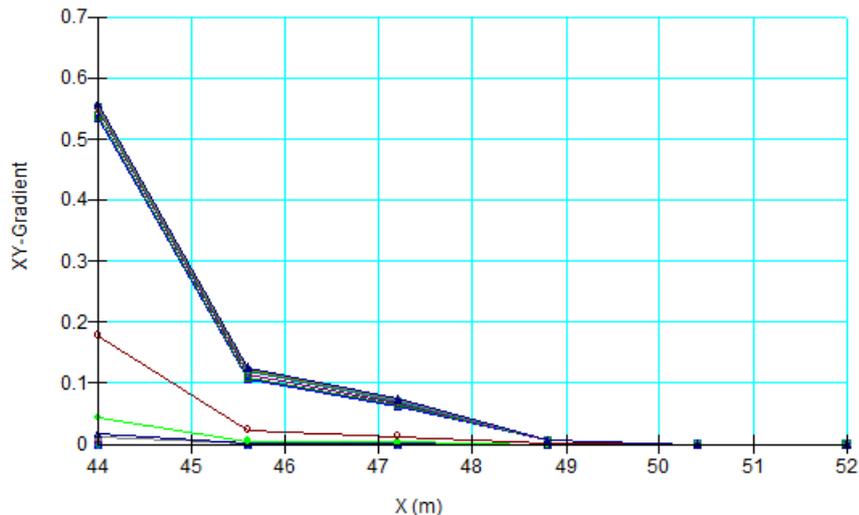


Figure 4.32 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique le long de drain.

Encore une autre fois, les valeurs des gradients enregistrés à la base de l'ouvrage restent dans la limite de l'acceptable. La figure 4.33 présente l'évolution des gradients hydraulique à la base de barrage. A l'exception des points qui se trouvent sur le drain, une grande partie semble identique à une loi normale. Les courbes sont caractérisées par un pic puis une chute.

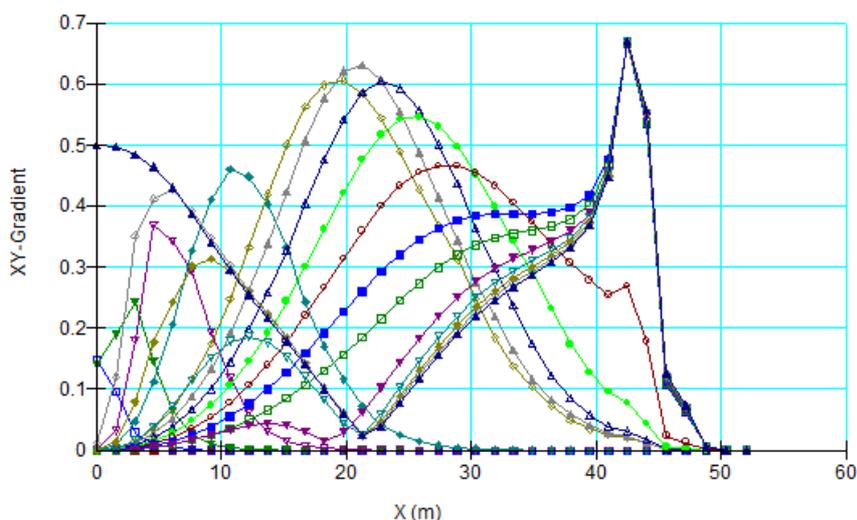


Figure 4.33 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique à la base.

Finalement, le long de l'axe vertical CC de barrage nous avons tracé la variation des gradients. Les valeurs dans ce cas sont plus importantes peuvent atteindre facilement une valeur de 1,8 qui semble plus importante de gradient critique.

C'est pratiquement au cours de la vidange que les gradients hydrauliques s'élèvent aux grandes valeurs.

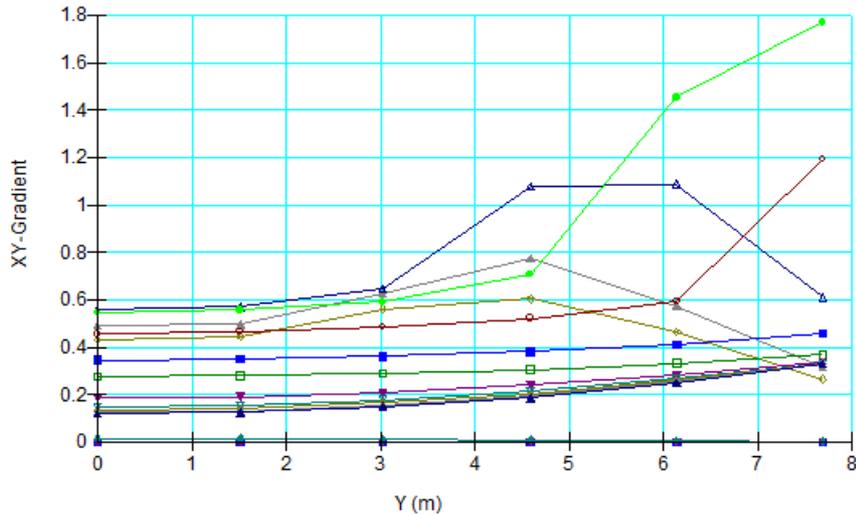


Figure 4.34 : Evolution au cours du temps de gradient hydraulique le long de l'axe Vertical CC.

IV.5 CONCLUSION

Les séries de calculs en éléments finis présentées dans ce chapitre ont été limitées à des situations unidimensionnelles et bidimensionnelles et ont permis d'établir qu'il est possible de calculer un état initial unique pour un ensemble donné de conditions aux limites. Ce résultat ouvre la porte pour des situations similaires à celle de la colonne utilisée dans ce projet de fin d'étude.

Les exemples traités ici dans la première partie donnent une idée sur la distribution des paramètres analysés ici. La principale limitation de modèle est liée à la réversibilité du processus de séchage (drainage) et humidification. Malgré le manque des résultats expérimentaux le travail semble correct et acceptable.

En ce qui concerne le cas d'un barrage en terre, il semble que l'installation des piézomètres ouverts est vivement recommandée afin de faire un suivi dans le temps de l'aspect hydrique et son évolution pour une meilleure gestion de l'ouvrage par rapport à la répartition de la pression interstitielle. Cela a plus d'importance pour le côté amont.

Il a été conclu que la ligne de saturation évolue fortement avec le niveau d'eau soit lors de la mise en œuvre, au cours de l'exploitation ou en cours de la vidange rapide ce qui nécessite de mettre les moyens nécessaires pour la surveillance et l'auscultation de l'ouvrage afin de garantir une pérennité de ce dernier dans de bonnes conditions.

CONCLUSION GENERALE

L'étude de transfert hydrique dans les sols constitue une occupation des ingénieurs dans plusieurs domaines à savoir, la géotechnique, l'agronomie, génie pétrolier, assainissement et hydrologie et hydrogéologie.

Dans ce projet de fin d'études une contribution à l'analyse des écoulements en régime transitoire a été effectuée. Il s'agit d'une contribution analytique et numérique.

L'eau joue un rôle important dans les ouvrages géotechniques son état définit le champ d'application des potentiels à prendre en compte dans les équations régissant le phénomène de l'écoulement dans le sol.

La loi de Darcy avec l'expression de continuité et l'état isotherme de sol donne l'équation qui régit le problème étudié dans ce projet de fin d'études.

L'ingénieur dispose d'un ensemble de méthodes et techniques permettant de résoudre la problématique de l'eau dans le sol. Il est confronté donc à un problème de choix. Son choix peut être bon dans une situation et mauvais dans une autre, selon les moyens disponibles sa mise en œuvre et surtout de l'intuition et l'expérience de géotechnicien. Ce qui définit par la suite le modèle de calcul par simplification de la structure réelle moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

Le phénomène d'infiltration est un phénomène très complexe. Plusieurs paramètres interviennent dans la phénoménologie de ce processus. La densité initiale sèche, la teneur en eau, la compacité et la nature de sols sont les paramètres à tenir en compte dans le choix de pas temps, le maillage de point de vue de numérique et les hypothèses simplificatrices dans le cas d'une tentative d'une analyse analytique.

Il a été conclu que la succion est le paramètre induisant l'hystérésis dans le sol, il donc recommandé de contourner cette difficulté par une présentation des relations hydrodynamiques en fonction de la teneur ou la charge hydraulique au lieu de la succion.

La non saturation du terrain est directement liée à la conductivité hydraulique, qui elle-même dépend de la teneur en eau volumique. Par contre l'évolution dans le temps est liée au coefficient d'emménagement (coefficient de consolidation de la théorie de la consolidation).

Les applications présentées ici nous ont permis d'apprécier le degré de validité de la démarche proposée. Finalement, l'ingénieur doit être en mesure d'estimer toutes les conséquences de l'évolution de la charge hydraulique au sein de l'infrastructure surtout lorsqu'un nouveau régime d'écoulement n'est pas encore atteint.

Dans cette étude, le procédé mathématique exp-fonction, avec le logiciel de calcul Maple, ont été utilisés pour résoudre l'équation Richards afin d'évaluer la succion et la teneur en eau et de trouver une solution plus réaliste et généralisée au problème posé. Cependant, la définition des conditions initiales et aux limites du problème constitue le paramètre clés de la solution non triviale. La teneur en eau du sol peut être dérivée de

la solution obtenue, et ses variations, en fonction du temps et de la profondeur du sol, sont déterminées.

Les séries de calculs en éléments finis présentées dans ce mémoire ont été limitées à des situations unidimensionnelles et bidimensionnelles et ont permis d'établir qu'il est possible de calculer un état initial unique pour un ensemble donné de conditions aux limites. Ce résultat ouvre la porte pour des situations similaires à celle de la colonne utilisée dans ce projet de fin d'étude.

Les exemples traités ici dans la première partie donnent une idée sur la distribution des paramètres analysés ici. La principale limitation de modèle est liée à la réversibilité du processus de séchage (drainage) et humidification. Malgré le manque des résultats expérimentaux le travail semble correct et acceptable.

En ce qui concerne le cas d'un barrage en terre, il semble que l'installation des piézomètres ouverts est vivement recommandée afin de faire un suivi dans le temps de l'aspect hydrique et son évolution pour une meilleure gestion de l'ouvrage par rapport à la répartition de la pression interstitielle. Cela a plus d'importance pour le côté amont.

Il a été conclu que la ligne de saturation évolue fortement avec le niveau d'eau soit lors de la mise en œuvre, au cours de l'exploitation ou en cours de la vidange rapide ce qui nécessite de mettre les moyens nécessaires pour la surveillance et l'auscultation de l'ouvrage afin de garantir une pérennité de ce dernier dans de bonnes conditions.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIE

1. **ABDALLAH, A. (1999)**. Modélisation de l'Infiltration dans les sols fins Compactés: Intégration des Ecoulements Préférentiels Dans les Macropores. Thèse de Doctorat. Génie Civil - Hydrosystèmes - Géotechnique, Institut National Polytechnique de Lorraine.
2. **ABID, M.B., HAMAD, S.N., HUSSAIN, S.M. (2012)**. Analytical Solution of Unsaturated Soil Water Flow From a Point Source. Journal Of Engineering,. Vol. 18.
3. **AMRAOUI, N. (1996)**. Étude de l'infiltration dans les sols fins non saturés. Thèse de doctorat. Nancy. (France). .
4. **ANGUELA, T. P. (2004)**. Etude du transfert d'eau et de solutés dans un sol à nappe superficielle drainée artificiellement. Thèse de Doctorat. Sciences de l'eau, Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts. (France). .
5. **ASGARI, A, BAGHERIPOURB , M.H and MOLLAZADEHB, M.** A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method. Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering,. pp. 28–35. Vol. 18.
6. **AZZOUZ, F.Z. OUADAH, D. (2004)**. Etude des écoulements autour des tunnels en régime permanent. PFE. DGC. Faculté de technologie. Université de Tlemcen (Algérie). .
7. **BENYELLES, Z. (1988)**. Modelling The Flow Of Water A Partly Saturated Soil. Civil And Structure Engineering, University College, Cardiff. Degree Of Master Of Sciences By Research. .
8. **Comité National Algérien des Grands Barrages.** Barrages et Mobilisation des eaux de surface. (1993). Alger: Palais des Nations, Club des Pins.
9. **DELAGE, P., CUI, Y.J. (2001)**. Comportement mécanique des sols non saturés. Techniques de l'Ingénieur. C302. .
10. **DIDIER, G., NOROTTE, V., BENTOMI, O., ALIMI-ICHOLA, I., CAZAUX, D. (1996)**. Mise au Point d'un Protocole Opérateur de la Mesure de la Perméabilité dans le Laboratoire - Cas des Sols Fins Non Saturés. INSA Lyon (France). .
11. **GAIDI, C. S. (2003)**. Ecoulement dans les Milieux Poreux Peu Perméables Saturés ou Non Saturés. Thèse de Doctorat. Mécanique Des Sols, Université du Havre. (France). .
12. **GAIDI, L. (2002)**. Transfert par Infiltration de l'Eau et de Solutés dans les Sols Non Saturés. Thèse de Doctorat. Sol, Matériaux, Structures, Physique du Bâtiment, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon.(France). .
13. **HENRYK, Z. (1993)**. Groundwater flow in saturated and unsaturated soil. Rotterdam: A. A. Balkema Publishers. .
14. **HILLEL, D. and BAKER R.S. (1988)**. A descriptive theory of fingering during. .

15. **KAZDA, I. (1990)**. Finite Element Techniques In Groundwater Flow Studies. Elsevier Science Publishing. Prague: Publisher Of Technical Literature, Prague. .
16. **KORMI, T. (2003)**. Modélisation Numérique Du Gonflement Des Argiles Non Saturées. Thèse de Doctorat. Géotechnique, Ecole Nationale Des Ponts et Chaussées. Champs-Sur-Marne. (France). .
17. **LU, N., LIKOS, W.J. (2004)**. Unsaturated Soil Mechanics. New Jersey: John Wiley & Sons. .
18. **MAGNAN, J.P.** L'eau dans le Sol. (1999). Série Techniques de l'Ingénieur. C – 212.
19. **MEKKAOUI, A., GHENNANE, B. (2003)**. Etude Expérimentale et Modélisation des Ecoulements dans un Sol Non Saturé Peu Perméable. PFE. DGC. Faculté de technologie. Université de Tlemcen (Algérie).
20. **MUSY, A and SOUTTER, M. (1991)**. Physique du sol. Presses polytechniques.
21. **Ouvrage collectif.(2002)**. Barrage Petit. Recommandation pour la Conception, la Réalisation et le Suivi. Edition Engref. Cemagref.
22. **PHILIP, J.R. (1957)**. . The theory of infiltration. .
23. **Societa' Italiana Per Condotte d'Acqua**. Construction du Barrage, Hammam Bougharra à Tlemcen. (1993). Mémoire Technique (Pièce Contractuelle N°7).
24. **TRACY, F.T.** Analytical and Numerical Solutions of Richards' Equation with Discussions on Relative Hydraulic Conductivity. Vol. 11.
25. **VAUCLIN, M and TOUMA, J. (1986)**. Experimental and Numerical Analysis of two phase infiltration in a partially saturated soil. .
26. **WARRICK, A.W. and LOMEN, D.O. and YATES, S.R. A. (2005)**. Generalized solution to infiltration. Soil Science Society of America Journal, Vol. 49, pp. 34-38. .
27. **ZADJAOUI, A et ZAHAF, M.B. (2015)**. Résolution Analytique de l'Equation de Richards. Symposium International Retrait et Gonflement des Sols - Climat et Construction. Pp. 287 - 298. Sec 2015. Marne-La-Vallé (France). .

GEO-SLOPE international Ltd. Code de calcul. www.geo-slope.com. [Online].