Table des matières

Introduction générale

La théorie des jeux est la discipline mathématique qui étudie les situations où le sort de chaque décideur (appelé joueur en théorie des jeux et agent en théorie économique) dépend non seulement des décisions qu'il prend mais également des décisions prises par d'autres décideurs [88]. En conséquence, le choix optimal pour un joueur dépend généralement de ce que font les autres. On dit que les joueurs se trouvent en situation d'*interaction stratégique* dans un cadre déterminé à l'avance. Elle trouve l'origine de son appellation dans les jeux de sociétés, comme les échecs et le bridge, c'est à dire des situations conflictuelles. Donc, l'objectif principale de la théorie des jeux est de créer des modèles mathématiques permettant de décrire ces interactions [54], puis d'introduire des concepts de solution pour prédire les issues possibles d'un jeu, et enfin d'appliquer tous ces outils pour prédire les conséquences d'une interaction stratégique.

Originellement, la théorie des jeux était conçue comme un outil mathématique pour les *sciences économiques*. Au seuil du 19-ième siècle (1874), *Léon. Walras*[1] suggéra d'utiliser les mathématiques en économie, en décrivant certains agents économiques comme des automates cherchant à optimiser des fonctions d'évaluation et en posant le problème de *l'équilibre économique* [133].

Actuellement, la théorie des jeux a connu une véritable explosion au cours de ces dernières années aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. Elle est devenue un outil central dans plusieurs disciplines : dans la biologie (jeux évolutifs définis par *Maynard Smith* [117], [118]), les affaires et la finance [2] tel que la concurrence bancaire [80], le transport routier [101], le marketing [62], les sciences politiques et sociales ([88], [87]), en droit [10], dans la théorie de contrôle ([12], [37]) et dans les réseaux de télécommunications [74]. Elle est à la base de nombreux développements dans les sciences économiques ([53], [48],. . .) : en microéconomie et en macroéconomie, mais aussi dans des domaines plus spécialisés tels que l'économie industrielle qui a été profondément influencée par la mobilisation de la théorie des jeux au cours de ces dernières années en particulier depuis la parution de l'ouvrage du mathématicien *J.V. Neumann* et de l'économiste *O. Morgenstern*, [96] et les travaux de *J.Nash* ([92], [93], [91], [94]) qui constituent

[1] Économiste français (1834-1910).

l'un des apports les plus marquants dans l'histoire de la théorie économique.

La microéconomie traditionnelle étudie la coordination des comportements individuels (firmes, particuliers, ...) sur l'ensemble des marchés, sous la lois de la *concurrence pure et parfaite*. L'application de la théorie des jeux dans la microéconomie a provoqué une reconstitution de cette dernière, désormais appelée théorie de l'***organisation industrielle***. Cette reconstitution qui est naît en opposition avec la pensée courante à la fin du XIX^e siècle : la théorie *microéconomique traditionnelle* où la conception de la théorie néoclassique repose non pas sur la dynamique des marchés, mais sur une approche d'équilibre statique et général de *L. Walras* (1874, [133]). En effet, ce dernier conçoit l'économie en terme **d'équilibre général** et d'optimum social[2]. Selon *Walras*, l'*équilibre* de l'économie est atteint, quand il est simultané sur *tous les marchés* (marché du bien et du service, le marché du travail et le marché des capitaux). Cette simultanéité ne peut se produire que dans un cadre de *Concurrence Pure et Parfaite* **(CPP)**.

L'organisation industrielle moderne réfute ce contexte d'analyse réductrice de la réalité économique. Sa principale préoccupation est l'analyse de nouvelles *structures du marché*, essentiellement **oligopolistiques** (théorie de l'oligopole) et **monopolistiques**, qui provoquent des comportements stratégiques entre les firmes et à une analyse approfondie de ces comportements sur ces marchés. Elle tire l'essentiel de ses outils de la microéconomie et de la théorie des jeux. Parfois, elle est appelée *concurrence imparfaite*, cela montre que l'appellation n'est pas spécifique à l'industrie et concerne tous les acteurs et secteurs économiques dont celui des services. Ces deux dénominations reprennent les titres des versions française et anglaise du l'ouvrage de ***Jean Tirole*** (1988, [128]), qui constitua le point de départ de ce champ.

La théorie de l'oligopole est l'étude des interactions d'un certain nombre de firmes sur un marché. Ce nombre étant insuffisant pour pouvoir considérer que les décisions de chacune d'entre elles a un effet négligeable sur les décisions des autres. L'étude moderne de ce sujet repose presque exclusivement sur la *théorie des jeux*, dont les concepts ont substantiellement clarifié la plupart des premières spécifications ad hoc développées pour analyser les interactions stratégiques sur un marché. Le fondement de cette théorie remonte aux analyses de *Cournot* (1838, [30]) et de *Bertrand* (1883, [18]), dont la formalisation a été achevée par la théorie des jeux notamment grâce au concept d'équilibre de *Nash* (1950, [92]). Du point de vue de la théorie des jeux, ces deux modèles se distinguent par la définition de l'espace des stratégies (quantité ou prix). Ces modèles constituent des équilibres de référence et proposent des résultats contrastés. Le modèle de *Bertrand* [18], aboutit à des situations où un seul joueur sert chaque marché, lorsque des

[2]L'équilibre général fait référence au phénomène d'équilibre sur tous les marchés, du moment où un équilibre est atteint sur un marché (les néoclassiques considère trois marchés : le marché de bien et de service, le marché du travail et le marché des capitaux). Ils ont décrit l'équilibre général de CPP et cherché à montrer que cet équilibre est optimal au sens de *Pareto*.

contraintes de capacité ne viennent pas l'interdire. Les prix sont alors limités aux coûts d'entrants potentiels. Le modèle de *Cournot* [30] correspond à une concurrence moins *dure*, laissant plusieurs joueurs coexister sur le marché. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'applications, on cherche en général à modéliser une structure de marché qui dure plusieurs périodes. Cependant, le véritable renouveau qu'a initié la théorie des jeux est vraisemblablement lié à l'introduction de modèle en deux étapes, introduisant la dimension temporelle présentée dans la plupart des interactions stratégiques. Cette idée était déjà présentée dans le modèle de *H. Von Stackelberg* (1934, [121]) où une firme en place décide de son choix de quantité, avant un entrant potentiel, modélisant ainsi des stratégies de préemption. La première étape du jeu peut se décomposer en deux : une première phase durant laquelle la firme en place prend des décisions de long terme (capacité de production, localisation), et une seconde phase où l'entrant réagit à cette décision par une action stratégique. La dernière étape du jeu étant constituée de choix opérationnels simultanés (jeu de *Bertrand* ou de *Cournot*). La répétition de ces interactions et la prédominance des jeux à *somme non nulle* dans les situations concurrentielles réelles rendent les phénomènes de coopération incontournables lors de l'analyse des oligopoles. Ils sont généralement liés à l'étude des cartels dans lesquels les firmes s'entendent dans une certaine mesure quant à la fixation des prix du marché et des quantités sans accord explicite appelée **collusion tacite**. Ces phénomènes de collusion sont étudiés à travers des stratégies de sanction optimale mais se heurtent à des problèmes de *stabilité*. Une autre voie d'étude de la coopération est abordée par la théorie de la *négociation*, qui propose des solutions axiomatiques relatives au partage du profits lors d'une négociation. La plus classique étant celle de *Nash* ((1950, [91]) ; ([94], 1953)).

Depuis les années 1970, grâce aux développements de la théorie des jeux ([58], [47], [113]) et grâce aux travaux de *Jean Tirole* ([128], [51]), la théorie des jeux s'est imposée donc comme un outil indispensable pour analyser les contextes de concurrence imparfaite. En effet, les principales applications de la théorie des jeux au sein de l'organisation industrielle concernent la théorie de l'oligopole ([48], [49]) où l'application en particulier des jeux non coopératifs (1989, [51]), des jeux répétés (1998, [103]), des jeux à information incomplète, des jeux de négociation (1985, [109]) et plus récemment les jeux stochastiques (2001, [5]) et les jeux différentiels (1994, [29]) s'est avérée extrêmement riche pour l'analyse des comportements oligopolistiques des firmes. Dès lors, on peut voir les marchés comme des jeux où les joueurs sont des producteurs, des distributeurs, des consommateurs et des pays (commerce international). Plus généralement, la formation d'une coalition gouvernementale ou une négociation internationale entre gouvernements (au sein de l'OMC, au sein de l'OPEP, dissuasion nucléaire, négociations climatiques [64] ...) sont autant de jeux différents obéissant à des règles spécifiques [19].

Ce qui marque donc la reconnaissance du rôle essentiel de la théorie des jeux au sein de l'économie, plus précisément en organisation industrielle, ce sont les **prix de Nobel** qui sont attribués aux théoriciens des jeux. En effet, cinquante ans après la publication du livre fondateur de *J.v. Neumann* et *O. Morgenstern* [96] :

- Le premier prix de *Nobel* d'économie fut attribué à trois théoriciens : *John.F Nash* (États-Unis), *John Charles Harsanyi*[3] (Hongrois), *Reinhard Selten* (Allemagne) en 1994,
- Onze ans après, ce prix fut attribué en 2005 aux deux théoriciens : *Robert J. Aumann* (Israël) et *Thomas C.Schelling*[4] (Américain), qui se sont spécialisés dans l'explication des diverses stratégies utilisées (à utiliser) dans les conflits internationaux, tels la guerre froide et la guerre nucléaire (dissuasion. . .) par l'analyse de la théorie des jeux,
- En 2007, le prix de *Nobel* est attribué à trois Américains : *Leonid Hurwicz*[5], *Eric Maskin*[6] et *Roger Myerson* pour leurs travaux basés sur la théorie des jeux dont les mécanismes peuvent expliquer le fonctionnement des marchés. La théorie dite des mécanismes d'incitation "*nous permet de distinguer les situations dans lesquelles les marchés fonctionnent* bien *de celles où les marchés fonctionnent* mal", a annoncé, lundi 15 octobre 2007, le comité *Nobel.* "*Elle a aidé les économistes à identifier les mécanismes d'échanges efficaces, des modèles de régulation et des procédures électorales*", a indiqué l'Académie Royale Suédoise des Sciences dans ses attendus.

L'objectif de ce mémoire est donc de réaliser une synthèse des travaux concernant l'application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle en se basant sur le plan suivant :

- Dans le premier chapitre, nous présentons la théorie des jeux dans le contexte général : définition du concept du jeu, différents types de jeux, les différents notions d'équilibre (équilibre de *Nash*, équilibre de *Bayes* et l'équilibre de *Stackelberg*) et la théorie de négociation à la *Nash*.
- Le second chapitre est consacré à la présentations des principaux concepts de base de l'organisation industrielle à savoir : la notion du marché, de la concurrence pure et de la concurrence imparfaite en présentant les principaux oligopoles (oligopole de *A. Cournot*, de *J. Bertrand*, *d'Edgeworth* et de *Stackelberg*) qui sont considérés comme étant des modèles de référence pour chaque application de la théorie des jeux dans la concurrence imparfaite.
- Une description de quelques modèles ou applications des jeux dans l'organisation industrielle avec leurs fondements mathématiques (type de jeu appliqué et équilibre calculé) à

[3]Il a contribué au développement de la théorie des jeux en mathématiques en approfondissant l'analyse des jeux à information incomplète [58].

[4]Professeur de politique étrangère, de sécurité nationale, de stratégie nucléaire et de contrôle des armes de l'université du Maryland à College Park.

[5]Diplômé de l'université de Varsovie en droit, puis il se tourne vers l'économie et devient professeur d'économie émérite à l'Université du Minnesota.

[6]Économiste américain. Il fut le directeur de thèse de Jean Tirole au MIT. A la fin des années 70, il avait sensibilisé le médaillé à l'importance de la théorie des jeux et la théorie de l'informatique pour l'économie.

savoir la théorie des jeux à information complète ou incomplète, stochastiques et répétés ainsi que des extensions ou des perspectives qu'on a tiré de chaque application étudiée font l'objet du chapitre trois.

Finalement, nous concluons par une récapitulation du travail accompli et quelques travaux futurs.

1

Généralités sur la théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux n'est pas une nouveauté puisque le concept d'équilibre de *Nash* apparaît pour la première fois dans l'oeuvre de *Cournot* en 1838 (mais seulement dans le contexte du modèle du duopole). Quatre-vingt-dix ans après la parution de l'ouvrage d'***Antoine-Augustin Cournot*** (1838, [30]), ***John Von Neumann*** en 1928 proposait une théorie des jeux à somme nulle et à deux joueurs en développant le théorème de **minmax** [95], résultat fondé en particulier à partir des intuitions d'*Emile Borel* (1924, [20]. Cette année-là, *John.F. Nash* naissait aux États Unis. Le jour de ses 22 ans, le 13 juin 1950, il soutenait sa thèse de doctorat à l'université de Princeton sous la direction d'*Albert Tucker* où il propose un modèle de *jeu fini à n joueurs, à information complète* et démontre comment les idées développées par *Cournot* dès 1838 pouvaient servir de base pour construire une *théorie de l'équilibre non coopératif* pour des jeux à somme variable, qui généralise la solution proposée par *J.Von Neumann*. Ce document, jamais publié, reprend et développe l'idée contenue dans la courte note d'une page adressée, le 16 novembre 1949, à l'académie nationale des sciences et publiée l'année suivante (1951, [92]. La même année (1950), il publie dans Econometrica un article [91] sur *la théorie de négociation* qui est le prolongement d'une idée insérée dans son premier enseignement, dispensé en 1948, portant sur l'économie internationale. Ces deux articles célèbres de *Nash* ([91], [93]) constituent donc, l'un des apports les plus marquants dans l'histoire de la théorie économique. Ils ont, chacun, donné lieu à des approfondissements ultérieurs, de la part de *J.Nash* lui-même.

1.1 Définition d'un jeu

On appelle jeu, toute interaction entre plusieurs décideurs ayant des intérêts partiellement (ou totalement) opposés, où chacun est en possession d'un ensemble d'actions parmi lesquelles il fait son choix et dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu), qui permet de déterminer qui peut faire quoi et quand. Une fois que les décideurs (joueurs) ont fait leurs choix, ils reçoivent chacun un gain et ces gains constituent la valeur de ce jeu. On appelle donc joueur tout individu participant à un jeu et l'ensemble de ses actions est dit ensemble de stratégies, où chaque stratégie est une description de la façon dont un joueur entend jouer jusqu'à la fin du jeu.

Exemple 1.1. Dix personnes vont au restaurant. Chacune d'elles paie le prix du menu qu'elle commande. C'est un problème qui relève de la théorie de la décision individuelle. Si, avant d'entrer au restaurant, les dix personnes se mettent d'accord pour partager à égalité le coût des dix menus, c'est un problème de théorie des jeux.

1.2 Typologie et types de jeux

La littérature tend à classifier entre les jeux selon plusieurs critères :

1.2.1 Le comportement des joueurs

On peut distinguer deux types de jeux :

1. **Jeux coopératifs** : un jeu est dit coopératif si les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante où leur stratégie est décidée en commun, afin d'améliorer le gain de tous les joueurs coalisés [88]. C'est le cas par exemple, si les joueurs s'accordent sur un contrat, un accord devant une autorité, etc., où il est prévu une sanction (punition) légale en cas de non respect du contrat ou de l'accord.
2. **Jeux non coopératifs** : on appelle jeu *non coopératif*, un jeu, où les joueurs ne peuvent pas former de coalition. Par contre, ils peuvent communiquer entre eux et échanger des informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant.

1.2.2 Le nombre de coups

Selon l'ordre dans lequel les joueurs annoncent leurs stratégies, il existe deux principales formes de représentation du jeu :

a- Jeu sous forme normale : Un jeu sous forme normale est la donnée de l'ensemble des joueurs, de l'ensemble des stratégies pour chaque joueur et des gains associés à toute combinaison possible de stratégies. La forme normale est adaptée à la représentation des jeux simultanés (à un seul coup).

Définition 1.1. [Jeu sous forme normale] [105], [54]
Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme suivante :

$$J_N =< \mathcal{N}, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}} >, \tag{1.1}$$

où :

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}, \quad N \in \mathbb{N}, \; N \geq 2$ est l'ensemble des protagonistes appelés joueurs. Un joueur quelconque est désigné par l'indice i ; $i \in \mathcal{N}$
2. $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, \; i \in \mathcal{N}$: désigne l'ensemble de stratégies du $i^{\text{ème}}$ joueur.
3. On note par $x = (x_i, x_{-i}) \in X = \prod\limits_{i\in\mathcal{N}} X_i$ une issue, situation, état ou profil du jeu, où :
   x_i : est la stratégie du joueur i et $x_{-i} = x_{\mathcal{N}\setminus\{i\}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$: une situation du jeu qui contient les stratégies de tous les joueurs sauf celle du $\mathrm{i}^{\textbf{ème}}$.
4. $f_i : \quad X = X_1 \times \ldots \times X_N \to \mathbb{R}, \; \forall \; i \; \in \mathcal{N}$, est la fonction gain du $^{\text{ieme}}$ joueur.
5. Chaque joueur connaît les ensembles de stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs (information complète).

Définition 1.2. [Jeu supermodulaire]
Le jeu sous forme normale défini par (1.1) est dit supermodulaire si pour tout $i \in \mathcal{N}$:
- $X_i, i \in \mathcal{N}$, est un intervalle de R,
- $f_i, i \in \mathcal{N}$, est deux fois différentiable et :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} < 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \text{ pour tout } j \neq i \tag{1.3}$$

Le jeu est dit **supermodulaire** compact si de plus X_i est un intervalle compact $[a_i, b_i]$ de $\mathbb{R}$.
1- L'hypothèse de stricte négativité, $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} < 0$, implique la stricte concavité de la fonction de gain du joueur i par rapport à sa stratégie. Sous cette hypothèse, il existe une seule fonction de meilleure réponse à des stratégies adverses.
2- L'hypothèse essentielle ici est la positivité des dérivées croisées, $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j} > 0$. Elle signifie que le gain marginal d'un joueur i augmente quand les stratégies des concurrents augmentent.

b- Jeux sous forme extensive : Un jeu est appelé ainsi, lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les un après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leurs choix s'exercent est fini [136]. *R. Selten* en 1975 a popularisé une représentation arborescente et plus intuitive de ce type de jeux : la forme **extensive** [113]. Il s'agit d'un arbre (appelé aussi arbre de **Kuhn**(1953) [69]) formé d'une racine, de noeuds où chaque noeud de l'arbre spécifie le joueur qui doit choisir une action à ce moment du jeu, ainsi que l'information dont chaque joueur dispose lors de la prise de décision. Les gains que chaque joueur peut réaliser après avoir suivi un chemin possible au sein de l'arbre sont donnés aux noeuds terminaux.

Exemple 1.2. [La dissuasion à l'entrée]
Soit une firme, notée **NC**(Nouveau Concurrent) qui envisage de produire un bien dont le marché est tenu par un monopole appelé **M**. Pour **NC**, le choix est simple : soit il **entre**, soit il **n'entre pas**, tandis que **M** a à décider entre **céder** ; par exemple en limitant sa production afin d'éviter un effondrement des prix, dans le cas où **NC** entre, et **ne pas céder**. Il y a donc trois issues possibles :

1. soit **NC** n'entre pas et **M** fait le bénéfice maximum,
2. soit **NC** entre et **M** cède de sorte qu'il y ait partage des ventes (et des bénéfices) entre les deux firmes,
3. soit **NC** entre et **M** ne cède pas, et toutes deux produisent à perte.

Ce jeu est représenté par l'arbre de *Kuhn* (Fig.1.1) avec des vecteurs de gain de la forme (a, b), où a est le gain du joueur qui intervient au premier coup (ici **NC**), b étant celui intervenant au deuxième coup (ici, **M**).

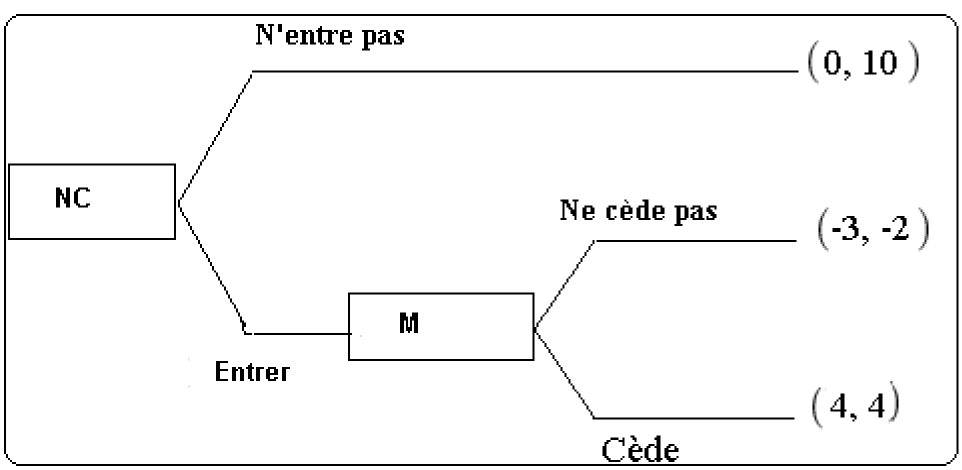


FIG. 1.1 – Arbre de Kuhn, pour le cas du monopole et du nouveau concurrent.

D'après cet arbre, si **NC** n'entre pas, **M** garde sa position du monopole. A l'inverse, si **NC** entre, alors **M** a tout intérêt à céder car il assurera alors un gain de 4, au lieu de perdre **3** ce qui peut être alors une façon de maximiser ses gains en fonction des choix des autres. La solution de ce jeu paraît donc simple et elle est obtenue en utilisant la méthode de *recurrence à rebours*[1] ; **NC** entre(parce que des bénéfices sont prévisibles si **M** à un comportement rationnel), et **M** cède.

1.2.3 Le nombre de stratégies

Définition 1.3. [Jeu fini] [105]
Le jeu sous forme normale défini par la relation (1.1) est dit fini, si les ensembles de stratégies $X_i, \forall\ \ i \in \mathcal{N}$ sont des ensembles finis ($|X_i| < \infty, \ \ \forall\ i \in \mathcal{N}$).

Définition 1.4. [Jeu fini à deux joueurs] [105]
Si $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, $|X_1| = m < \infty$ et $|X_2| = n < \infty$, on dit que le jeu (1.1) est un jeu fini à deux joueurs. Il est représenté par :

$$< \mathcal{N}, X_1, X_2, f_1, f_2 >, \tag{1.4}$$

où :

- X_1 est l'ensemble constitué d'un nombre fini de m stratégies du joueur 1,
- X_2 est l'ensemble constitué d'un nombre fini de n stratégies du joueur 2,
- $f_1 : \ X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur 1,
- $f_2 : \ X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur 2,
- $X = X_1 \times X_2$ est l'ensemble des issues possibles du jeu.

Remarque 1.1. *Les jeux fini à deux joueurs occupent une place privilégiée en théorie des jeux, puisqu'ils permettent une représentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux.*

Définition 1.5. [Jeu fini à deux joueurs à somme nulle]
Si dans le jeu fini à deux joueurs défini dans (1.4) la somme des gains des deux joueurs est nulle en toute situation du jeu ($f_1(x) + f_2(x) = 0, \ \ \forall\ x \in X$), on dit que le jeu (1.4) est un jeu fini à 2 joueurs à somme nulle. Il sera noté par

$$< \mathcal{N}, X_1, X_2, f >, \tag{1.5}$$

où : $f = f_1 = -f_2$ est la fonction que le joueur 1 veut maximiser et que le joueur 2 veut minimiser.

Remarque 1.2. *Les jeux à deux joueurs et à somme nulle constituent une classe certes intéressante, mais très particulière dans le sens où les joueurs n'accordent aucune coopération entre les joueurs, puisque le gain d'un joueur représente la perte du second.*

[1]Backward induction en anglais. L'expression *rebours* c'est pour signaler le fait que l'on commence par la fin-et le mot récurrence c'est parce qu'on procède de façon déductive, par étapes successives

Définition 1.6. [Jeu fini à deux joueurs à somme non nulle]
Si dans le jeu fini à deux joueurs défini dans (1.4) la somme des gains des deux joueurs est non nulle en toute situation du jeu ($f_1(x) + f_2(x) = c^{ste}, \ \ \forall\, x \in X$), on dit que le jeu (1.4) est un jeu fini à 2 joueurs à somme non nulle.

1.2.4 La nature de l'information

L'information dont on dispose chaque fois qu'on doit choisir une action est une dimension très importante des jeux. Elle possède une influence déterminante sur l'évaluation des stratégies par les joueurs et même sur leur perception des stratégies. Selon la nature de l'information, on distingue quatre types de jeu.

Définition 1.7. [Jeu à information parfaite] [136]

Un jeu est à information **parfaite**, si chaque joueur, au moment de choisir sa stratégie, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. La représentation qui semble appropriée à ce type de jeux est la *forme extensive*.

Définition 1.8. [Jeu à information imparfaite]

Contrairement au type précédent, ici les joueurs n'interviennent pas les uns après les autres. Autrement dit, les règles du jeu stipulent l'existence de coups simultanés, ce qui revient à introduire une certaine imperfection au niveau de l'information dont disposent les joueurs. La représentation qui apparaît comme la plus appropriée pour chaque coup est la forme normale.

Exemple 1.3. Le jeu de la bataille Navale est à information imparfaite puisqu'on ignore l'emplacement choisi par l'adversaire pour chacun des navires.

Définition 1.9. [Jeu à information complète] [54], [52].

Les premiers jeux étudiés par *V. Neumann* et *Morgenstern* furent des jeux à information complète. On dit qu'un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision : l'ensemble des joueurs, l'ensemble de ses stratégies ainsi que l'ensemble des stratégies des autres joueurs et les motivations ou les fonctions objectifs de tous les autres joueurs. Dans ce cas, on dit aussi qu'il y a *connaissance commune* de la structure du jeu de la part de tous ceux qui y participent.

Exemple 1.4. [Jeu de négociation de Rubinstein] [108]
.On considère deux joueurs, notés A et B, doivent partager un **1 Dollar**, auquel on peut toujours attribuer une somme unitaire, de sorte que si on note x la part de A, celle de B est $y = (1-x)$, $x + y = 1$ avec $x, y \geq 0$, où x(resp y) représente le montant reçu par le joueur A(resp B). L'ensemble

des accords possibles est donné donc par : $X = \{(x, y) \in R_+^2 : x + y = 1\}$ Plus la négociation se prolonge, plus la valeur de la monnaie se réduit. A chaque coup, elle est multipliée par une constante $\delta(0 < \delta < 1)$ où δ est interprété comme un facteur d'escompte ou d'actualisation par jour. Pour en définir le partage, nous supposons que la négociation ne comporte que deux étapes :

1. À la date $t = 0$, le joueur A fait au joueur B une offre de partage $(x_0, 1 - x_0)$. Le joueur B peut immédiatement accepter ou refuser.
   – Si l'offre est acceptée, le jeu s'arrête : le 1 Dollar est immédiatement partagé et l'utilité des joueurs est donc exactement $(x_0, 1 - x_0)$.
   – Si l'offre est rejetée, le jeu continue, et atteint la date 1.
2. A la date $t = 1$, le joueur B fait à son tour une nouvelle proposition $(x_1, 1 - x_1)$ au joueur A. Si le joueur A accepte, le 1 Dollar est alors partagé et les gains respectives des joueurs A et B sont $(\delta x_1, \delta(1 - x_1))$. Si le joueur A rejette la proposition de B, les règles du jeu stipulent que les gains de A et B sont nuls.

L'arbre de jeu est représenté sur la figure (Fig. 1.2) .

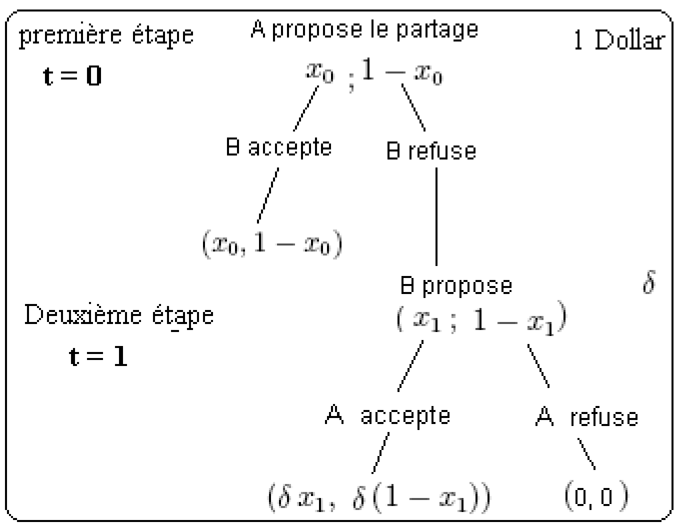


FIG. 1.2 – Arbre simplifié du jeu de marchandage.

Définition 1.10. **[Jeu à information incomplète]**

Si l'une des conditions dans la définition (1.9) n'est pas vérifiée, le jeu est dit à *information incomplète* (appelé aussi *jeu bayésien*). Un travail de pionnier a été réalisé par *J. Harsanyi* (1967-1968). Dans ses articles [58], l'auteur montre que si l'on suppose que chaque joueur dispose d'une distribution de probabilités subjectives sur les caractéristiques inconnues des autres joueurs, alors on peut transformer un jeu *d'information incomplète* en un jeu *d'information complète* mais *imparfaite*. Le système imaginé par *Harsanyi* pour traduire l'incertitude mathématique est pris en compte par l'introduction d'un événement lié à la **nature** qui représente un joueur fictif et qui n'intervient qu'avant le début du jeu.

Définition 1.11. Un jeu *simultané* à information *incomplète* est donné par :

$$\Gamma = < \mathcal{N}, \{A_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\pi_i\}_{i\in\mathcal{N}} >, \tag{1.6}$$

où

- $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}, N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ est l'ensemble des joueurs. Chaque joueur est désigné par l'indice $i,\ i \in \mathcal{N}$,
- $A_i, i \in \mathcal{N}$ est l'ensemble d'actions possibles du $i^{\text{ème}}$ joueur. $a_i \in A_i$ est une action particulière du joueur i.
- $\Theta_i, i \in \mathcal{N}$ est l'ensemble de différents types possibles du joueur i. $\theta_i \in \Theta_i$ est un type du joueur i (appelé aussi caractéristique, état d'information..) résume l'information dont dispose le joueur i avant de jouer, par exemple ses coûts de production ou son estimation de la valeur d'un objet dans une enchère. Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) \in \Theta$, un profil de types,
- $f_i : \ (\prod_{i\in\mathcal{N}} A_i) \times \Theta \to \mathbb{R}, \forall\ i \in \mathcal{N}$ est la fonction de gain du $i^{\text{ème}}$ joueur,
- $\pi_i : \ \ \Theta \to [0,1], \forall\ i \in \mathcal{N}$ représente la distribution de probabilité du joueur i. Elle donne ses **croyance** quant aux types des autres joueurs :

$$\begin{aligned} \pi_i : \ \ & \Theta \to [0,1] \\ & (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) \mapsto \pi_i(\theta_{-i}|\theta_i). \end{aligned}$$

Définition 1.12. [Stratégies]
Une **stratégie** pure du joueur $i \in \mathcal{N}$ dans le jeu (1.6) est définie de manière à préciser une action pour chaque type $\theta_i \in \Theta_i$ à partir de l'ensemble des actions A_i :

$$\begin{aligned} x_i : \ \ & \Theta_i \to A_i \\ & \theta_i \mapsto x_i(\theta_i) = a_i. \end{aligned}$$

Soit X_i l'ensemble de ses stratégies. Une fois ses stratégies sont fixées, on peut calculer le gain espéré du joueur i :

$$\overline{f}_i(x) = E[f_i(x(.);\theta)] = \sum_{\theta\in\Theta} f_i(x(\theta);\theta)\pi(\theta) \tag{1.7}$$

où l'on note : $x(\theta) = (x_1(\theta_1), x_2(\theta_2), \ldots, x_N(\theta_N))$.

Remarque 1.3. *On parle de stratégie* ***séparatrice*** *quand chaque type choisit une action différente et de stratégie* ***mélangente*** *quand tous les types du joueurs choisissent la même action.*

Définition 1.13. [Jeu bayésien sous forme normal]
La forme normale d'un jeu à information incomplète est donnée par :

$$\widetilde{\Gamma} = < \mathcal{N}, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\overline{f}_i\}_{i\in\mathcal{N}} > . \tag{1.8}$$

Définition 1.14. [Équilibre bayésien][58]
L'équilibre de *Nash* en stratégies pures du jeu statique (1.8) est un profil de stratégies $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ si $x_i^*(\theta_i)$ est la solution du problème (1.9) :

$$\underset{a_i \in A_i}{max} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} f_i(x_1^*(\theta_1), \ldots, x_{i-1}^*(\theta_{i-1}), a_i, x_{i+1}^*(\theta_{i+1}), \ldots, x_n^*(\theta_n))\pi_i(\theta_{-i} \backslash \theta_i), \forall i \in \mathcal{N}, \forall \;\; \theta_i \in \Theta_i. \tag{1.9}$$

où : $\theta_{-i} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_N)$

Donc la stratégie d'équilibre du joueur i maximise gain espéré pour chacun de ses types. Par conséquent, quel que soit son type, le joueur i n'aura pas intérêt à dévier de sa stratégie d'équilibre si les autres joueurs continuent à jouer leurs stratégies d'équilibre quel que soit leur type. Il s'agit bien d'un équilibre de *Nash* construit d'une manière à couvrir toutes les combinaisons des types de joueurs.

1.2.5 Déroulement du jeu dans le temps

1.2.5.1 Jeux statiques

Un jeu est dit statique[2], simultané, stratégique ou sous **forme normale** lorsque les joueurs choisissent *simultanément* leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs ([136], [54]). Parmi les jeux statiques, les jeux finis à deux joueurs (définition 1.4) occupent une place privilégiée parce qu'ils permettent une présentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux. Ils sont décrits sous la forme de matrices dans lesquelles le premier joueur joue horizontalement, c'est-à-dire choisit une ligne de la *matrice*, et le second verticalement en choisissant une colonne. On parle dans ce cas de jeux ***matriciels***.

Définition 1.15. [Jeu matriciel] [105]
Le jeu fini à deux joueurs à somme nulle (1.5) peut être entièrement caractérisé par la matrice des gains A, qui est défini par :

$$J_{mat} = < \mathcal{N}, X_1, X_2, A >, \tag{1.10}$$

où

- $A = (a_{ij})_{\,1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} = a(x_i, y_j)$ est le gain du joueur 1 s'il choisit sa stratégie $x_i \in X_i$ et que le joueur 2 choisit sa stratégie $y_j \in X_2$,
- $X_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}$ est l'ensemble des m stratégies pures du joueur **1**,
- $X_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ est l'ensemble des n stratégies pures du joueur **2**.

[2] One-shot game en anglais.

Exemple 1.5. [Le dilemme du prisonnier :][3] Deux hommes, accusés d'avoir conjointement enfreint la loi, sont détenus séparément par la police. Chacun est informé que :

– si l'un des deux avoue et que l'autre non, le premier sera libéré alors que le second sera lourdement condamné (six mois de prison) ;
– si les deux avouent, ils subiront tous les deux une peine de trois mois ;
– si aucun des deux n'avouent, chacun subira une peine légère (1 mois de prison).

Chaque joueur possède donc deux stratégies ; soit d'*Avouer* l'autre ou de ne pas l'avouer (*Nier*). La matrice du gain associée est donnée par :

$$\begin{array}{c} \\ Avouer \\ Nier \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Avouer & Nier \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-3,-3) & (0,-6) \\ (-6,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 1.3 – Jeu du *dilemme du prisonnier*.

Remarque 1.4. *Ce jeu s'applique à une grande variété de situations économiques et politiques. Par exemple la fraude dans un cartel ; en considérant le fait d'avouer comme étant la décision de produire plus que votre quota de production et le fait de nier comme étant la décision de respecter le quota initial.*

Exemple 1.6. Deux firmes se partagent un marché et proposant des biens totalement homogènes. Ces firmes ne peuvent pas se communiquer entre elle dans la fixation de leurs prix de vente. Elles choisissent indépendamment entre des *prix élevés* ou des *prix faibles*. Cette situation de concurrence duopolistique peut être représentée sous forme d'un jeu matriciel (1.10) où :

– L'ensemble des joueurs est : $\mathcal{N} = \{\text{firme1}, \text{firme2}\}$.
– L'ensemble des stratégies de chaque firme $i \in \mathcal{N}$ est : $X_i = \{\text{prix faible},\ \text{prix élevé}\}$.

Donc, la matrice de gain associée est donnée par :

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{firme 1} \quad A = \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{prix faible} \\ \text{prix élevé} \end{array} \begin{array}{c} \text{firme 2} \\ \begin{array}{cc} \text{prix faible} & \text{prix élevé} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (5,5) & (12,0) \\ (0,12) & (10,10) \end{pmatrix} \end{array}$$

[3]Il est une célèbre illustration d'un jeu **simultané** à somme non nulle. Proposé par deux mathématiciens *M. Dresher* et *M. Flood* en janvier 1950 où ils cherchaient à évaluer la robustesse du concept d'équilibre de leur collègue *J. Nash*. Mais *Alfred Tucker*, popularisera ce jeu en le nommant ***dilemme du prisonnier***, lors d'un séminaire à l'Université de Stanford en mai 1950.

Cet exemple correspond bien à un dilemme du prisonnier si on interprète le fait d'*Avouer* comme étant la décision de pratiquer un *prix faible* et le fait de *Nier* comme étant la décision de pratiquer un *prix élevé*.

1.2.5.2 Jeux dynamiques

Un jeu dynamique est un jeu qui se déroule en plusieurs étapes. Ce type de jeux est important car il permet de modéliser le fait qu'une action passée d'un joueur puisse contraindre les gains d'un autre joueur dans le futur. Il existe deux sortes de jeux dynamiques : le jeu en *information parfaite* (appelé *jeu séquentiel*) dans lequel chaque joueur connaît l'ensemble des actions passées de tous les autres joueurs. Le joueur est donc le seul à choisir à une étape donnée. Le jeu de *Stackelberg* (voir chapitre 2) est un exemple de ce type de jeu dynamique. Dans le deuxième type, l'information est imparfaite dans lequel les joueurs choisissent leurs actions *simultanément* à chaque étape du jeu (appelé jeu *répété*). On se trouve donc plus ou moins dans le cadre d'un jeu statique bien que l'historique influence les stratégies des joueurs. Parmi les principaux jeux dynamiques, on distingue :

1.2.5.2.1 Jeux répétés

Un jeu répété consiste en la répétition d'un nombre fini ou infini de fois d'un **jeu sous forme normale** défini par (1.1). C'est le même jeu, appelé jeu *constituant*, qu'on répète de période en période. Appelé jeu stationnaire dans le cas où les conditions du jeu ne se modifient pas au cours du temps (même nombre de joueurs, même ensemble de stratégies, même fonctions de gain et même facteur d'actualisation) ([13], [52]).
Étant donné T, un nombre entier fini ou infini appelé l'horizon du jeu, et δ, un réel dans l'intervalle $[0, 1]$. On définit le jeu (1.1) répété T fois, actualisé par δ, comme le jeu sous forme extensive noté, $J_\delta(T)$.

- **Description des stratégies**

Soit $x_i(t)$ l'action du joueur i à la date t. Alors, le profil d'actions sélectionné par les N joueurs à la date t est : $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \in X = \prod_{i=1}^{N} X_i$.

Définition 1.16. **[Histoire du jeux]**
L'histoire du jeu à la date t est donnée par h_t : $h_t = (x(0), x(1), ..., x(t-1)) \in X^t = \prod_{t=0}^{t-1} X$. Elle correspond à l'ensemble des profils d'actions que les joueurs ont choisi entre la période initiale 0 et la période $t-1$.

Définition 1.17. **[Stratégie de comportement]**[52]
Une stratégie pour le joueur i du jeu $J_\delta(T)$, consiste donc en une séquence de règles de décision,

une par période. Cette stratégie est notée $\sigma_i = (\sigma_i(0), \sigma_i(1), \sigma_i(2), ..., \sigma_i(t), ...)$ où $\sigma_i(t)$ est la règle de décision du joueur i à la date t où :

$$\sigma_i(t) : \quad X^t \to X_i$$

spécifie pour chaque histoire h_t possible du jeu une action du joueur i (appelée **stratégie de comportement**) à tenir à la date $t, (1 \leq t \leq T)$. Donc, le joueur $i \in \mathcal{N}$ joue à la date t l'action $\sigma_i(t)(h_t) \in X_i$ s'il a observé h_t. Par conséquent, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ est le profil de stratégies choisi par les N joueurs.

On distingue plusieurs classes de stratégies selon la place que l'histoire occupe dans les règles de décisions des joueurs :

1. **Les stratégies en boucle ouverte (Open loop) :** le joueur ne tient pas compte de l'histoire du jeu [103]. En fait cela revient à dire que le joueur choisit initialement une séquence d'actions (une par période) et qu'il applique ce programme quel que soit le comportement de ses rivaux. Toute la dimension dynamique du jeu répété est éliminée. Une stratégie en boucle ouverte s'écrit $\sigma_i = \{(x_i(t))_{t=0,1,\ldots}\}$ ou encore $\sigma_i = (\sigma_i(0), \sigma_i(1), \ldots, \sigma_i(t), \ldots)$ avec $\sigma_i(t)[h_t] = \sigma_i(t)[h_t^{'}]$ pour toutes les histoires $h_t, h_t^{'}$ dans X^t et $h_t \neq h_t^{'}$.
2. **Les stratégies en feed-back :** le joueur conditionne son choix présent sur les seules actions de la période précédente et non sur toute l'histoire du jeu. Ce type de stratégie revient à supposer une mémoire imparfaite des joueurs. Nous pouvons aussi concevoir des stratégies qui se fonderaient sur les seules actions des deux ou trois périodes précédentes [103].
3. **Les stratégies en boucle fermée (Closed loop) :** les joueurs tiennent compte de l'histoire du jeu. Initialement, chaque joueur adopte une séquence de règles de décision, une règle par période [103]. À la période t, il observe l'histoire du jeu h_t et joue l'action prescrite par sa règle de décision $\sigma_i(t)$. Nous pouvons alors avoir $\sigma_i(t)[h_t] \neq \sigma_i(t)[h_t^{'}]$ pour toutes les histoires $h_t,\ h_t^{'} \in X^t, \quad h_t \neq h_t^{'}$.

Définition 1.18. [Sentier d'actions] [52]
Soit $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ le profil de stratégies choisi par les N joueurs du jeu $J_\delta(T)$. Cette stratégie, σ, induit par construction une séquence unique de profils d'actions, $\{x(t),\ t = 0, \ldots, T\}$, d'issues appelée *trajectoire* (ou *sentier d'acions*) où :

$$x(0) = \sigma(0),\ x(1) = \sigma(1)(x(0)),\ x(2) = \sigma(2)(x(0), x(1)),\ x(3) = \sigma(3)(x(0), x(1), x(2)), \ldots$$

Ce sentier est une succession de déplacement des joueurs d'un point de décision à un autre point de décision.

- **Les gains actualisés des joueurs**

Si les stratégies σ conduisent à la réalisation des issues $x(t)$, $t = \overline{1, T}$, le gain du joueur i est égal à :

$$G_i(x(t)) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{T} \delta^t f_i(x(t)), & \text{si T est fini,} \\ \lim_{s\to\infty}(1-\delta) \sum_{t=1}^{t=s} \delta^t f_i(x(t)), & \text{si T est infini.} \end{cases} \quad (1.11)$$

1.2.5.2.2 Jeux stochastiques

Un jeu stochastique est un jeu répété où la fonction objectif dépend d'un paramètre qui varie aléatoirement. Ce jeu a été d'abord introduit et étudié par *Loyd Shapley* ([115]). Dans ce travail, l'auteur se concentre sur les jeux à *somme nulle et à deux joueurs*. Par la suite, *Fink* a étendu ce résultat aux jeu stochastique à somme générale [44].

Définition 1.19. [72],[60] Un jeu stochastique discontinu fini est défini par :

$$\Gamma = < \mathcal{N}, \Omega, \{X_i(w)\}_{(i,w)\in\mathcal{N}\times\Omega}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \pi, \delta > \quad (1.12)$$

Où :

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs. Un joueur quelconque est désigné par l'indice i ; $i \in \mathcal{N}$,
- $\Omega = \{w_1, \dots, w_z\}$ est l'espace des états,
- $X_i(w) = \{x_i^1(w), x_i^2(w), \dots, x_i^{m_w^i}(w)\}$ désigne l'ensemble des stratégies du joueur $i \in \mathcal{N}$ à l'état $w \in \Omega$ et $m_w^i = |X_i(w)|$,
- $X(w) = \prod_{i\in\mathcal{N}} X_i(w)$ est donc l'ensemble de tous les profils d'actions admissibles en une étape donnée à l'état $w \in \Omega$,
- $D = \Omega \times X = \{(w, x(w))/w \in \Omega,\ x(w) \in X(w)\}$ est l'ensemble des couples (état, profil d'actions),
- $f_i : \ D = \Omega \times X \to \mathbb{R},\ \ \forall\, i \in \mathcal{N}$, est la fonction du gain instantané (en une seule période) du i$^{\text{ème}}$ joueur si à l'état $w \in \Omega$, le profil $x(w)$ est choisi,
- $\pi : \ D = \Omega\times X \to \Delta(\Omega)^4$ appelée probabilité de transition. Pour chaque couple $(w, x(w)) \in D$. On peut identifier le vecteur $(\pi(w_1/w, x(w)), \dots, \pi(w_z/w, x(w)))$. $\pi(\hat{w}/w, x(w))$ représente la probabilité que le système passe à l'état $\hat{w} \in \Omega$ si à l'état $w \in \Omega$ le profil d'actions $x(w) \in X(w)$ est joué. Cependant, $\pi(\hat{w}/w, x(w)) \geq 0$ et $\sum_{\hat{w}\in\Omega} \pi(\hat{w}/w, x(w)) = 1$
- $\delta = (0, 1)$ est appelé le taux d'actualisation ou le facteur d'escompte.
- Les ensembles $\mathcal{N},\ \Omega\ \ et\ X_i(w)$, pour tout $i \in \mathcal{N}$ sont supposés finis et non vides. La fonction $f_i(w, .)$ est supposée continue sur X, pour tout $w \in \Omega$

Le jeu (1.12) se déroule comme suit :

[4] $\Delta(\Omega)$ est la famille de distributions de probabilités sur l'espace Ω.

1. L'état initial est noté w_1. De manière simultanée et indépendante, chaque joueur choisit une action dans son ensemble d'actions admissibles en w_1. Si le profil $x^1(w_1) = (x_i^1(w_1))_{i\in\mathcal{N}} \in X(w)$ a été choisi, chaque joueur i reçoit pour l'étape 1 le gain $f_i^1 = f_i^1(w_1, x^1(w_1))$. Un état w_2 est alors tiré selon la distribution de probabilité $\pi(w_1, x^1(w_1))$. Ensuite, le couple (état, profil d'actions) (x^1, w_2) est annoncé publiquement à tous les joueurs. Le déroulement est maintenant défini par induction.
2. Étape $t \geq 2$: connaissant l'histoire passée h_t,
$$h_t = (w_1, x^1, \dots, w_{t-1}, x^{t-1}, w_t),$$
simultanément, chaque joueur choisit de façon indépendante aux autres une action dans son ensemble d'actions admissibles en w_t. Si le profil $x^t(w_t) = (x_i^t(w_t))_{i\in\mathcal{N}}$ est choisi, chaque joueur i reçoit pour l'étape t le gain $f_i^t = f_i^t(w_t, x^t(w_t))$. Un état w_{t+1} est alors tiré selon la distribution de probabilité $\pi(w_t, x^t(w_t))$. Enfin, le couple (profil d'actions, état) $(x^t(w_t), w_{t+1})$ est annoncé publiquement à tous les joueurs.

Remarque 1.5. *De manière générale, il n'y a pas de différence entre les jeux stochastiques et les jeux markoviens. Cependant, certains auteurs considèrent le jeux markoviens comme un cas particulier du jeu stochastique ayant des transitions markoviennes. Selon, les auteurs, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de travaux étudiant les jeux stochastiques qui ne posséderaient pas la propriété de Markov.*

1.3 Notion de stratégie

La notion de stratégie[5] constitue un concept central en théorie des jeux. Selon *Andrew Schotter* [112], une stratégie est un plan d'actions complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur.

1.3.1 Stratégie pure

Considérons le jeu (1.1). Une stratégie pure du joueur i est l'action qu'il choisit à chaque fois qu'il est susceptible de jouer, c'est-à-dire, toutes les options possibles qu'a le joueur.
On note par X_i, l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueurs i avec $i \in \mathcal{N}$ tel que $|X_i| = n_i$.

[5] Le mot stratégie vient du grec ancien où il désignait les actions prises par un chef militaire en campagne. Il a gardé ce sens.

1.3.2 Stratégie mixte

Lorsqu'un joueur choisit ses actions de manière aléatoire (on dit qu'il joue en stratégies mixtes). Cette idée est modélisée en introduisant une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures pour chacun des deux joueurs. De tels sous-ensembles sont appelés ensembles de stratégies mixtes.

Définition 1.20. Une stratégie mixte pour le joueur 1 dans le jeu (1.4) est un élément du simplexe défini par :

$$\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \quad \forall\ j = \overline{1, m}\} \tag{1.13}$$

et une stratégie mixte pour le joueur 2 dans le jeu (1.4) est un élément du simplexe défini par :

$$\mathcal{B} = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \quad \forall\ j = \overline{1, n}\} \tag{1.14}$$

Dans ce cas, la composante α_i représente la fréquence avec laquelle le joueur 1 joue la stratégie pure $x_i \in X_1$ et β_j celle avec laquelle le joueur 2 joue la stratégie pure $y_j \in X_2$.
Le gain espéré des joueurs 1 et 2 dans le jeu (1.10) s'ils choisissent respectivement leurs stratégies mixtes $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\beta \in \mathcal{B}$ est défini par :

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ij} \beta_j = \alpha^T A \beta.$$

où $A = (a_{ij})_{\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ est la matrice des gains.

1.4 Concepts de solution

En théorie des jeux et en théorie économique, un concept de solution est un processus par lequel les équilibres d'un jeu sont identifiés. Ils sont donc employés comme des prédictions de jeu, suggérant quel sera le résultat du jeu, c'est-à-dire quelles stratégies seront ou pourront être employées par les joueurs.

Définition 1.21. [Notion d'équilibre]

Par **équilibre** [70], nous entendrons un *état ou une situation dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs.* De façon plus précise, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueur n'a d'intérêt à changer sa stratégie compte tenu des stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu (peu importe la manière dont il a été obtenu), il n'y aucune raison de le quitter. Dans le cadre des jeux non coopératifs, il existe deux grands concepts d'équilibre : les équilibres de *Nash* et de *Stackelberg*. Ils se distinguent, entre autre, dans la structure implicite du jeu : si celui de Nash est compatible avec l'hypothèse de joueurs jouant simultanément, l'équilibre de *Stackelberg* implique généralement un ordre, une hiérarchie entre les joueurs.

Définition 1.22. [93] On appelle *stratégie maxmin* (appelée aussi stratégie prudente ou de garantie) du i^{ieme} joueur une stratégie $\bar{x}_i$ vérifiant :

$$\inf_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(\bar{x}_i,\ x_{-i}) = \sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i,\ x_{-i}). \tag{1.15}$$

Le gain $\alpha_i = \sup\limits_{x_i\in X_i} \inf\limits_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i,\ x_{-i})$ est le *gain minimal garanti* du joueur i, il est aussi appelé *niveau de sécurité* (i.e. ce qu'obtient le joueur i quand son concurrent joue la stratégie la plus défavorable contre lui).
Toute issue $\bar{x} = (\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \in X$ vérifiant :

$$\sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i,\ x_{-i}) \leqq f_i(\bar{x}),\ \forall i \in \mathcal{N}$$

est appelée *issue individuellement rationnelle* ou issue vérifiant le principe de la *rationalité individuelle*.

1.4.1 Équilibre de Nash

L'équilibre de *Nash*, dit aussi *équilibre non coopératif* de *Nash*, est basé sur le principe de *rationalité individuelle*. Il s'agit d'un état dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie si les autres joueurs maintiennent leurs stratégies d'équilibre [93].

Définition 1.23. [Équilibre de Nash]
Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de *Nash* du jeu (1.1), si pour tout $i \in \mathcal{N}$, on a :

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x_i, \bar{x}_{-i}), \qquad \forall x_i \in X_i. \tag{1.16}$$

1.4.2 Conditions d'existence de l'équilibre de Nash

Il existe de nombreux théorèmes relatifs à l'existence de l'équilibre de *Nash*. *Debreu* [35] et *Glicksberg* [55] donnent les conditions d'existence d'un équilibre de *Nash* en stratégies pures. Ce théorème d'existence a été étendu aux jeux à un nombre infini de stratégies ou ayant des fonctions de gain discontinues (*Dasgupta* et *Maskin* [31]). Nous énonçons dans ce qui suit les conditions d'existence d'un équilibre de *Nash* dans le jeu (1.1).

Théorème 1.1 (Nash)**.** *Si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. *$\forall i \in \mathcal{N}$, les ensembles X_i sont convexes et compacts,*
2. *$\forall i \in \mathcal{N}$, les fonctions $f_i(.) : X \to \mathbb{R}$ sont continues,*
3. *$\forall i \in \mathcal{N}$, les fonctions $f_i(., x_{-i}) : X_i \to \mathbb{R}$ sont concaves, $\forall x_{-i} \in X_{-i}$,*

alors le jeu (1.1) admet un équilibre de Nash.

1.4.3 Équilibre de Stackelberg dans un jeu à deux joueurs

Soit un jeu hiérarchique à deux joueurs où chacun d'eux tente de maximiser son gain, le joueur 1 étant le leader et 2 le suiveur. Supposons que X_1 et X_2 sont les ensembles des stratégies des deux joueurs. L'équilibre de *Stackelberg* est défini comme suit.

Définition 1.24. [13] On définit l'ensemble de réaction optimale du deuxième joueur (le suiveur) pour la stratégie $x_1 \in X_1$ du leader (le joueur 1) par :

$$R_2(x_1) = \{y \in X_2 / f_2(x_1, y) \geq f_2(x_1, x_2), \quad \text{pour tout } x_2 \in X_2\}$$

où $R_2 : \quad X_1 \to X_2$

Pour le joueur 1 (leader), une stratégie x_1^* constitue un équilibre de *Stackelberg*, si

$$\inf_{y \in R_2(x_1^*)} f_1(x_1^*, y) = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{y \in R_2(x_1)} f_1(x_1, y), \tag{1.17}$$

alors $x_2^* \in R_2(x_1^*)$ est une stratégie optimale pour le suiveur.

Alors la paire de stratégies $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, avec $x_2^* = R_2(x_1^*)$, constitue un équilibre de *Stackelberg*.

1.4.4 Équilibre de Pareto : rationalité collective

Une issue $\bar{x} \in X$ est de *Pareto* du jeu (1.1), s'il n'existe pas d'autre issue $x \in X$ qui vérifie le système d'inégalités :

$$f_i(x) \geq f_i(\bar{x}), \ \forall \ i \in \mathcal{N}, \tag{1.18}$$

dont, au moins, une inégalité est stricte. On dit que $\bar{x} \in X$ vérifie la condition de *la rationalité collective*.

1.5 La négociation à la Nash

La théorie moderne de la négociation est articulée sur le fait qu'une négociation constitue un jeu à somme *non-nulle*. La théorie des négociations entre deux joueurs s'inspire des travaux pionniers de *Nash*([91], [94]) où deux joueurs (individus, firmes, pays, ...) ont la possibilité de collaborer ensemble afin d'atteindre des situations mutuellement favorables.

1.5.1 Formulation du problème de négociation

Soit deux joueurs, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, qui ont l'opportunité de coopérer afin d'atteindre des situations mutuellement bénéfiques. On note X l'ensemble des accords (issues) réalisables (l'espace de négociation) et $D \in X$ la situation de désaccord (ou le point du conflit). Chaque joueur $i = 1, 2$ est doté d'une fonction d'utilité (ou gain) $f_i : X \to \mathbb{R}$ qui associe à chaque accord $x \in X$ un gain $f_i(x) \in \mathbb{R}$. Cette fonction représente le niveau de satisfaction du joueur i si l'accord x est sélectionné. Soit :

$$U = \{f(x) = (f_1(x), f_2(x)), x \in X\}$$

l'ensemble des paires de gains en cas d'**accord** et

$$d = (f_1(D), f_2(D))$$

la paire du gains en cas de **désaccord**. Par la suite, on notera $d = (d_1, d_2)$.
Un jeu de **négociation** à deux joueur est donné par :

$$G =< U, d >, \tag{1.19}$$

avec

1. $d \in U$,
2. il existe une paire de gains $f = (f_1, f_2) \in U$ telle que $f_i > d_i$ pour tout $i = 1, 2$,

La première condition requiert que le point de désaccord appartient à l'ensemble des gains réalisables par les deux joueurs.
La deuxième condition requiert l'existence d'au moins un point qui domine au sens de *Slater* le point de désaccord d, c-à-d qu'il existe au moins un accord qui est mutuellement profitable.

1.5.2 Concept de solution

Définition 1.25. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des jeux de négociation G à deux joueurs. Une solution est une fonction $\phi : \mathcal{G} \to U$ qui associe à chaque jeu de négociation $G \in \mathcal{G}$ une unique paire de gains $\phi(G) = (\phi_1(G), \phi_2(G)) \in U$.

Afin de déterminer la solution *réalisable* d'un problème de négociation, il faut formuler certaines propriétés ou axiomes souhaitables que la solution devra satisfaire. Les deux premières propriétés sont :

– **Rationalité Individuelle (RI)** : le joueur $i = 1, 2$ refusera tout partage qui lui procure un gain inférieur à son gain de désaccord. Autrement dit, la solution ϕ satisfait $\phi_i \geq d_i$ pour tout $i = 1, 2$.

– **Optimalité au sens de faible de Pareto (OP)** : la solution de l'accord est optimal au sens de *Pareto* c-à-d : $\nexists \ \ f \in U, \ f_i > \phi_i, \ \ \forall i = 1, 2$.

Ces deux axiomes permettent de restreindre l'ensemble des gains candidats à la solution ϕ à la frontière efficace de U, représentée en gras sur la figure (Fig.1.4). Dans cet exemple, notons que tout point optimal au sens de *Slater* est également *individuellement rationnel*. Comme le montre cet exemple, la frontière efficace de U peut ne pas être un point unique.

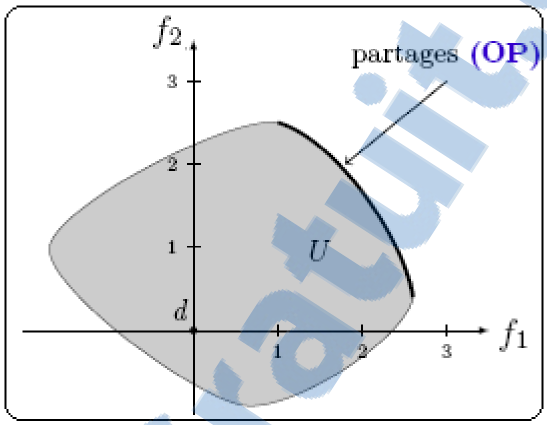


Fig. 1.4 – L'ensemble des partages efficaces.

1.5.3 La solution de Nash

Pour s'assurer de l'unicité de la solution, *Nash* [91] suggère qu'elle doit satisfaire (**OP**) et les trois axiomes suivants :

– **Symétrie(SYM)** : Considérons un jeu G tel que U soit symétrique, c-à-d que $(f_1, f_2) \in U$ implique $(f_2, f_1) \in U$ (la droite de 45°est un axe de symétrie pour U). Alors, $\phi_1(G) = \phi_2(G)$. Autrement dit, si l'ensemble des profits réalisables pour chacun des deux joueurs est identique, alors la solution doit leur attribuer un même gain.

Remarque 1.6. *Les axiomes (**OP**) et (**SYM**) déterminent une unique solution pour les **jeux symétriques** (voir Fig.1.5), mais il est nécessaire de donner d'autres axiomes pour les* jeux coopératifs non symétriques.

– **Indépendance vis-à-vis des Représentations équivalentes d'Utilités (IRU)** : Considérons le problème de négociation $G' = (U', d')$ obtenu à partir de $G = (U, d)$ par une transformation affine croissante, c-à-d : $f_i' = af_i' + b_i$ et $d_i' = a_i d_i + b_i$, avec $a_i > 0$. Alors $\phi_i(G') = a_i\phi_i(G) + b_i$, pour chaque $i = 1, 2$ et $f \in U$.

Remarque 1.7. *L'axiome (**IRU**) requiert que la solution ne soit pas* sensible *à une modification de la fonction de gain des joueurs qui conserve intact les préférences des joueurs envers les accords réalisables.*

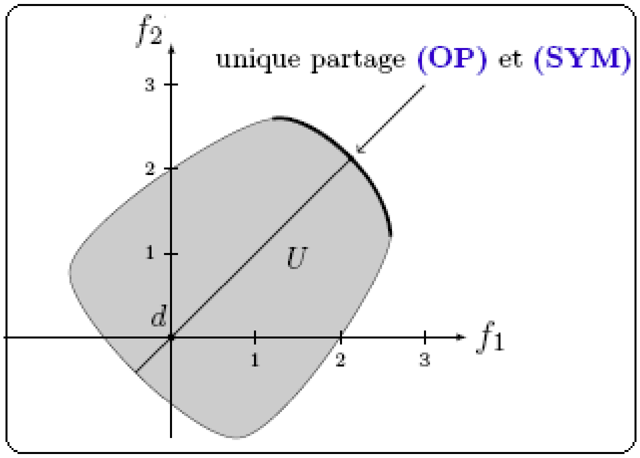


FIG. 1.5 – Partage unique pour un jeux symétriques.

A titre d'exemple, reprenons le jeu coopératif G de la figure (Fig.1.5) et définissons le jeu $G^{'}$ par $f_1^{'} = \frac{f}{2}$ et $f_2^{'} = f_2 + 1$. Le jeu $G^{'}$ et sa solution donnée par (**OP**), (**SYM**) et (**IRU**) sont représentés par la figure (Fig.1.6).

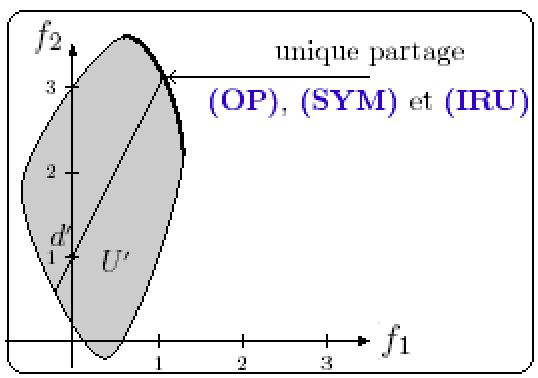


FIG. 1.6 – Représentattion des axiomes **OP**, **SYM** et **IRU**.

Remarque 1.8. *Avec ces trois premiers axiomes, une solution de négociation est définie de manière unique pour les problèmes de négociations obtenus par* transformation linéaire des fonctions de gain *à partir d'un problème de négociation symétrique.*

Cependant, il existe des jeux de négociation qui n'appartiennent pas à cette classe de jeux. Afin de déterminer une solution unique pour ces jeux, **Nash** a rajouté l'axiome suivant :
Indépendance vis-à-vis des Alternatives non Pertinentes (IAP) : Soient deux jeux de négociation $G = (U, d)$ et $G^{'} = (U^{'}, d^{'})$ tels que $d^{'} = d$. Si $U^{'} \subseteq U$ et $\phi(G^{'}) \in U^{'}$, alors $\phi(G) = \phi(G^{'})$.

Remarque 1.9. *Cet axiome signifie que le fait d'éliminer des accords réalisables, autres que le* *point de désaccord, qui n'auraient pas été choisis à l'issue de la négociation ne modifie en rien la solution.*

Pour illustrer une telle situation, reprenons le jeu de négociation $G = (U, d)$ de la figure (Fig.1.5). Sur la figure (Fig.1.7), on représente également un second jeu de négociation $G' = (U', d')$ tels que $d = d'$, $U' \subseteq U$ et $\phi(G') \in U'$. D'après l'axiome (**IAP**), on doit donc avoir $\phi(G) = \phi(G')$. *Nash* (1953, [94]) prouve qu'il existe une *unique solution* qui satisfait ces quatre

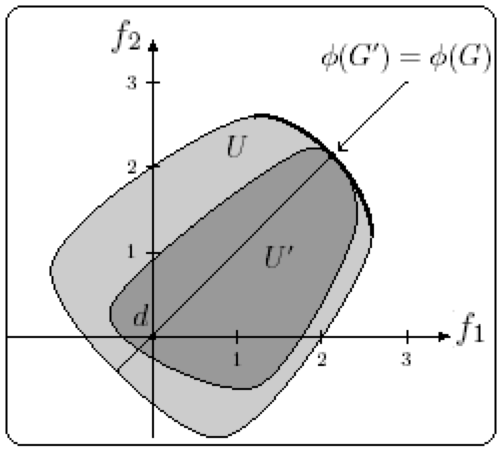


FIG. 1.7 – Représentation des axiomes **OP**, **SYM** et **IAP**.

axiomes.

Théorème 1.2. ***[Nash, 1953]***
*L'unique solution qui satisfait les quatre axiomes (**OP**), (**SYM**), (**IRU**) et (**IAP**) est la solution de* Nash*, qui associe à chaque jeu coopératif $G \in \mathcal{G}$ l'unique paire de gains $\phi^N(G) \in U$ qui maximise :*

$$\begin{cases} \max\limits_{f \in U} (f_1 - d_1)(f_2 - d_2), \\ sc \\ f_i \geq d_i \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{1.20}$$

Théorème 1.3. ***[Nash Généralisé 1953]***
*L'unique solution qui satisfait les quatre axiomes (**OP**), (**SYM**), (**IRU**) et (**IAP**) est la solution de* Nash*, qui associe à chaque jeu coopératif $G \in \mathcal{G}$ l'unique paire de gains $\phi^N(G) \in U$ qui maximise :*

$$\begin{cases} \max\limits_{f \in U} (f_1 - d_1)^{\alpha} (f_2 - d_2)^{\beta}, \quad \alpha \ > 0, \beta > 0 \ et \ \alpha + \beta = 1. \\ sc \\ f_i \geq d_i \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{1.21}$$

1.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation des notions fondamentales de la théorie des jeux, en particulier les jeux non coopératifs qui sont avérés extrêmement riche pour l'analyse des comportements oligopolistiques des firmes. Pour cela, nous avons présenté quelques classes et types de jeux les plus utilisés dans le contexte de l'organisation industrielle à savoir les jeux à information complète ou incomplète et les jeux dynamiques et nous avons introduit certains concepts de solutions connus dans la littérature pour déterminer les choix stratégiques des joueurs vérifiant certaines propriétés.

2

Concepts de base de l'organisation industrielle

Introduction

L'organisation industrielle est une branche de la microéconomie. Étudier l'organisation industrielle, c'est étudier le fonctionnement des marchés, un concept central de la micro-économie naît de la conscience d'une inadéquation de la théorie classique du marché, fondée sur l'hypothèse de concurrence pure et parfaite, à l'étude des marchés réels. Une attention toute particulière est portée à la façon dont les firmes se font concurrence. L'étude moderne de ce sujet repose presque exclusivement sur la théorie des jeux, dont les concepts ont substantiellement clarifié la plupart des premières spécifications ad hoc développées pour analyser les interactions stratégiques sur un marché. En fait, la théorie économique n'a pas attendu les récents développements de la théorie des jeux pour analyser les marchés en situation de duopole. Ainsi, dès 1838, *A. Augustin Cournot* propose un premier modèle de duopole [30]. Ignoré pendant près de cinquante années, ce modèle est ensuite critiqué par le mathématicien français *Joseph Bertrand* en 1883 ainsi que *Edgeworth* en 1897. Tombé en désuétude, il est redécouvert et renouvelé dans les années 1930 par *Von Stackelberg* [121] en particulier, qui lui donne un prolongement en terme de concurrence asymétrique.

L'objet principal de l'organisation industrielle peut donc se résumer par la question suivante : comment, pourquoi et avec quelles conséquences les marchés réels s'éloignent-ils de la situation idéale de concurrence pure et parfaite ?.

Puisque l'organisation industrielle se donne pour objet l'étude du fonctionnement des marchés ; il est important de bien comprendre ses éléments de base en particulier : la notion du marché, la fonction de demande et la fonction d'offre.

2.1 La notion du marché

Définition 2.1. Un marché désigne un lieu de confrontation entre l'*offre* des vendeurs et la *demande* des acheteurs d'un bien ou d'un service qui permet de déterminer le prix d'échange (prix d'équilibre) de ce bien ou de ce service et les quantités qui seront échangées. Au sens commercial large, le marché comprend tout l'environnement d'un produit ou d'une firme : fournisseurs, clients, banques, état, réglementations, technologie. On distingue deux types de marché :

1. le marché **amont** : constitué des fournisseurs de l'entreprise. Ceux-ci sont généralement gérés en fonction de critères précis afin de favoriser la concurrence et répartir les risques.
2. le marché **aval** : englobe les distributeurs et les clients.

En science économique, il existe deux structures de marché : des marchés dits *concurrentiels* basés sur la concurrence pure et parfaite et les marchés de *concurrence imparfaite* basées sur la concurrence oligopolistique où une grande attention est portée aux situations d'interactions stratégiques.

2.2 L'offre et la demande

Les seuls déterminants du prix d'équilibre du marché sont les niveaux de l'offre et de la demande.

Définition 2.2. [L'offre][130]

L'offre d'un bien est exprimée par les firmes. C'est la quantité d'un certain produit offerte par ces firmes. C'est une fonction qui relie la quantité offerte du bien au prix de celui-ci. Elle est notée par $O(p)$ et croissante par rapport au prix : plus un produit est échangé à un prix élevé, plus les firmes seront incitées à le produire. Pour un prix p et une offre de chaque firme notée $q^j(p), \quad j = \overline{1, m}$ (où m est le nombre de firmes), la quantité totale offerte sur le marché est égale à la somme des quantités offertes par chaque firme (voir fig.2.1) :

$$O(p) = \sum_{j=1}^{m} q^j(p). \tag{2.1}$$

Formellement :

$$O(.) : \quad [0, +\infty[\to [0, +\infty[. \tag{2.2}$$

$$O^{'}(p) \geq 0, \quad \forall \ \ p \in [0, +\infty[.$$

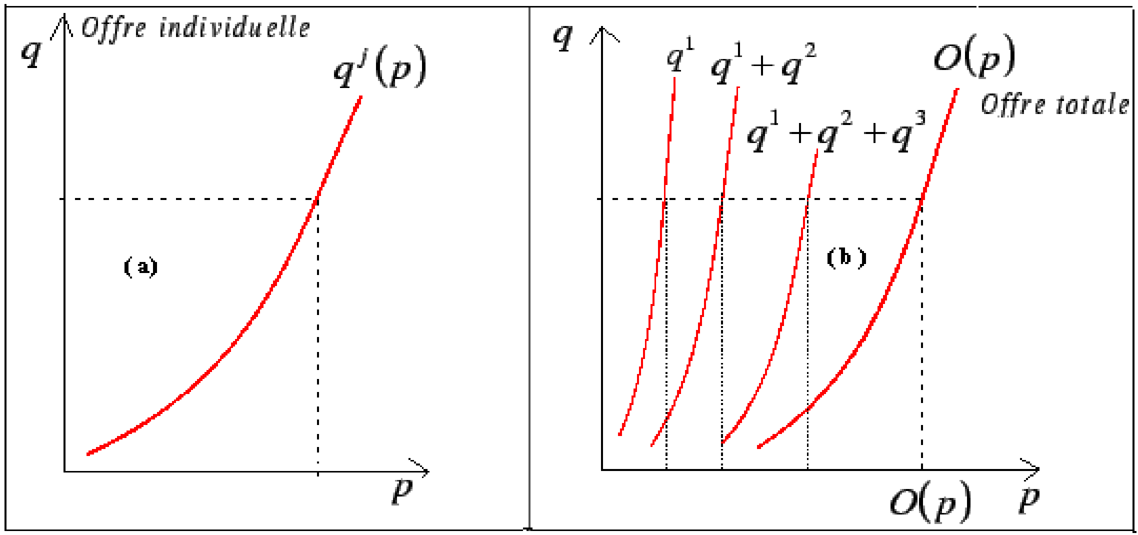


FIG. 2.1 – La fonction de l'offre individuelle et globale.

Définition 2.3. [La demande] [130]
La demande d'un bien est exprimée par les consommateurs. C'est une fonction qui relie la quantité demandée du bien au prix de celui-ci. Une fonction décroissante par rapport au prix. Elle est notée par $D(p)$ (exp : $q = D(p) = 2 - p$).
Plus souvent, elle est exprimée par la fonction inverse de demande, notée $P(q)$, qui relie le prix de ce bien à la quantité de celui-ci disponible sur le marché (exp : $p = P(q) = 2 - q$).
Formellement :

$$P(.) : \qquad [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[. \tag{2.3}$$

C'est une fonction strictement positive sur l'intervalle $[0, \bar{q}[$ tel que :

$$\begin{aligned} P(q) &> 0, \quad \forall \ \ q \in [0, \bar{q}[\\ P(q) &= 0, \quad \forall \ \ q \geq \bar{q}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P^{'}(q) &< 0, \quad \forall \ \ q \in [0, \bar{q}[\\ P^{'}(q) &= 0, \quad \forall \ \ q \geq \bar{q} \end{aligned}$$

Soit $d^i(p)$, la demande individuelle de chaque consommateur $i (i = \overline{1, n})$. Pour un prix p donné, la quantité totale demandée sur le marché est égale à la somme des quantités demandées par chaque consommateur(voir Fig.2.2) :

$$D(p) = \sum_{i=1}^{n} d^i(p), \quad D^{'} \leq 0. \tag{2.4}$$

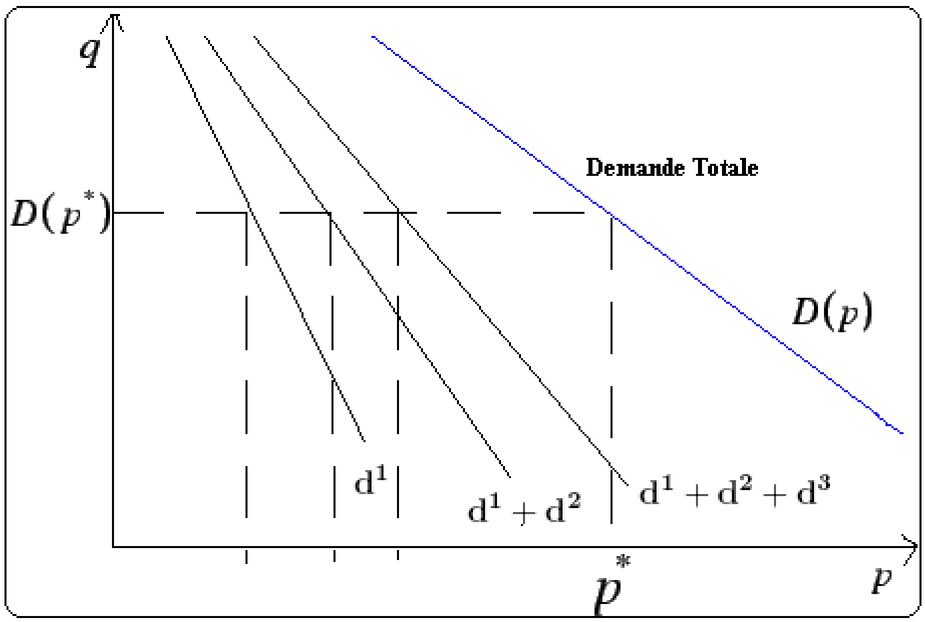


Fig. 2.2 – La fonction de demande totale du marché.

Une notion importante dans l'analyse microéconomique traditionnelle est la notion d'élasticité de la demande.

Définition 2.4. L'élasticité de la demande par rapport au prix mesure la sensibilité de la demande par rapport aux variations de prix, c'est-à-dire la réaction des consommateurs par rapport aux variations de prix. Elle est donnée par :

$$Ed = \frac{\text{\% de variation de la quantité demandée}}{\text{\% de variation de prix}} = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}; \tag{2.5}$$

Remarque 2.1. *La demande est dite* **élastique** *par rapport au prix si une variation du prix entraîne une variation relative identique (ou supérieure) de la quantité demandée. Elle est dite* **inélastique**, *si une variation du prix de* 1% *entraîne une variation relative moindre de la quantité demandée.*

2.3 Marchés concurrentiels ou de concurrence parfaite

Les marchés de **Concurrence Pure et Parfaite (CPP)** sont supposés donner les résultats les plus complets ou idéaux [59]. La concurrence sera qualifiée de pure et parfaite quand les quatres conditions suivantes seront respectées :

- **L'atomicité du marché** : le marché est constitué d'un grand nombre de **petits** acheteurs et vendeurs. On entend par petit le fait qu'aucun acheteur ou vendeur n'a une taille suffisante pour pouvoir influencer significativement le prix du marché. Ils sont donc dits **preneurs de prix**[1].
- **L'homogénéité du produit** : la qualité des biens sur le marché est homogène. Ce sont des substituts parfaits et identiques pour l'acheteur. Par conséquent, les consommateurs sont indifférents entre les vendeurs au moment d'achat et aucun agent (firme, consommateur) ne peut imposer son prix (de vente ou d'achat) sur le marché.
- **Libre entrée ou sortie du marché** : l'entrée sur le marché est libre et n'implique pas de coût de sortie ou en particulier de subir un coût irrécupérable. Il n'existe ni de barrière juridique, ni financière ou réglementaire à l'entrée de nouveaux entrants. Par conséquent, des profits positifs attirent de nouvelles firmes.
- **L'information est complète** : tous les agents impliqués dans ce marché (offreurs et demandeurs) sont parfaitement informés sur les conditions du marché (quantités offertes et demandées, prix des échanges. . .). Par conséquent, les transactions s'effectuent à un prix unique : le prix du marché.

2.3.1 L'équilibre des marchés concurrentiels

Les économistes considèrent qu'une caractéristique essentielle des marchés *concurrentiels* est qu'aucun agent économique n'est en position de modifier le prix du marché. Dans un tel marché, les prix s'imposent comme des données exogènes aux différents agents économiques. Ces prix égalisent par hypothèse l'offre et la demande des différents biens. Il existe deux façons d'aborder ce problème. D'une part, on peut étudier les marchés indépendamment les uns des autres, en négligeant les relations évidentes de substituabilité ou de complémentarité qui lient les divers biens entre eux. Il s'agit alors de **l'équilibre partiel** d'un marché considéré isolément du reste de l'économie, et donc *toutes choses égales par ailleurs*. D'autre part, on peut adopter une approche générale ou l'interdépendance entre biens du point de vue de la consommation et de la production est explicitement prise en compte. Il s'agit alors de **l'équilibre général**.

⋆ **Équilibre partiel :** *L'équilibre partiel* constitue le concept d'équilibre économique le plus fréquent dans la recherche économique. Il est alors défini comme le vecteur de prix qui égalise l'offre et la demande sur le seul marché considéré.

Soit le marché d'un bien A, de prix p. La demande agrégée pour le bien est $D_A(p) = \sum_{i=1}^{n} d_A^i(p)$, et l'offre agrégée pour le bien est $O_A(p) = \sum_{j=1}^{m} q_A^j(p)$

[1]Price takers en anglais, signifie que la firme n'a aucun pouvoir sur les prix, soit parce que l'on se situe en concurrence pure et parfaite, soit parce que la firme est de petite taille et ne dispose d'aucun pouvoir de marché.

Définition 2.5. p^* est un prix d'équilibre partiel si $\sum_{i=1}^{n} d_A^i(p^*) = \sum_{j=1}^{m} q_A^j(p^*)$

La demande est égale à l'offre sur le marché considéré. Graphiquement, le prix d'équilibre est à l'intersection des courbes d'offre et de demande (voir fig.2.3).

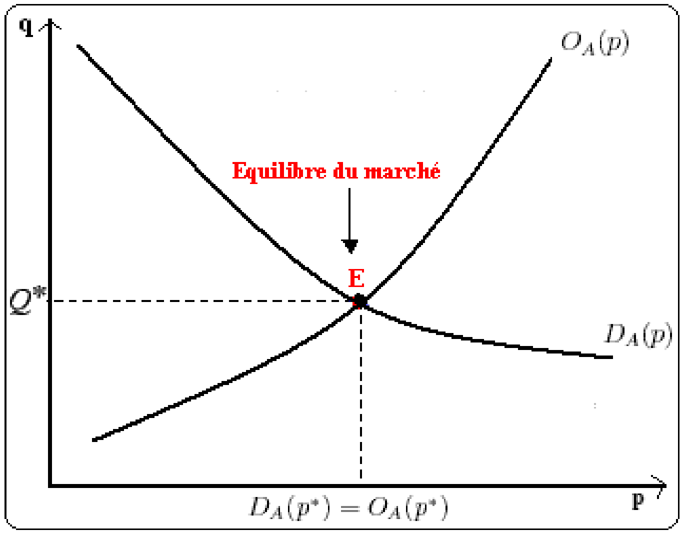


Fig. 2.3 – L'équilibre du marché concurrentiel.

⋆ **Équilibre général** : Un équilibre général est une situation où tous les marchés (marché des biens, marché du travail, marché du capital) sont simultanément en équilibre [2].

Le problème de *Walras* est de déterminer simultanément les quantités échangées et les *prix* permettant d'*égaliser* les *offres* et les *demandes* pour ces quantités. Formellement, puisque les quantités offertes dépendent positivement des prix et que les quantités demandées dépendent négativement des prix, il montre que le problème peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations simultanées. Puisque pour L biens, et donc L marchés, on a $2L$ équations données par les offres et les demandes et qu'il y a $2L$ inconnues (les L quantités échangées et les L prix). *Walras* en déduit que ce système, possédant autant d'équations que d'inconnues, devrait avoir une solution. Or, il est assez bien connu en mathématiques que même un système d'équations algébrique à deux équations et deux inconnues peut ne pas avoir de solutions ou posséder une infinité de solutions. Le problème de l'existence d'une solution à ce problème (équilibre général) restera longtemps sans solution claire malgré des efforts notables d'économistes comme *Cassel* ou *Wicksell*. Il faudra attendre 1953 et

[2] Il résulte à la fois de la confrontation de l'offre et de la demande sur chaque marché (prix d'équilibre) et des comportements des agents qui arbitrent entre les marchés en fonction de leurs préférences (*consommateurs*) et de leur volonté de maximisation du profit (*producteurs*). Signifie que l'équilibre de **CPP** permettrait le plein emploi de tous les facteurs de production : toute la population active serait occupée et tous les capitaux seraient utilisés

les contributions conjointes de **Kenneth Arrow** et de **Gérard Debreu** pour mettre un terme à cette situation.

Remarque 2.2. *Une propriété fondamentale de* l'équilibre concurrentiel *est que chaque bien est vendu à sont* ***coût marginal***[3]*, c-à-d* $P(Q) = CM(q_i) = \frac{dC(q_i)}{dq_i}$.

2.4 Structures des marchés de concurrence imparfaite

Le terme de concurrence parfaite définit donc une structure particulière de marché qui est rarement réalisée dans la réalité. C'est pourquoi l'analyse économique a déterminé d'autres types de marchés plus proches de ce qui se pratique réellement. Les plus pratiqués sont :

2.4.1 Le monopole

Définition 2.6. [Monopole]
Un monopole est un marché composé de plusieurs acheteurs, mais d'un seul vendeur. Ce terme est également utilisé lorsque l'un des vendeurs domine le marché d'une manière très importante (par exemple Microsoft). Être en situation de monopole signifie qu'une firme peut changer le prix auquel son produit sera vendu (dit price maker[4]) sur le marché en modifiant la quantité qu'elle vend (pouvoir sur le prix ou sur le marché)[5].

Exemple 2.1. Les monopoles du rail ou de la production d'électricité constituent deux exemples de monopoles institutionnels consacrés par l'état.

- **Comportement d'un monopole simple** [9]

Considérons une firme commercialisant un seul produit, en situation de monopole. Soit $q = D(p)$ la demande du bien produit avec la fonction de demande inverse $p = P(q)$. La fonction de demande $D(p)$ est supposée positive, dérivable, concave et strictement décroissante par rapport au prix ($D^{'} < 0$).
Soit $C(q)$ la fonction du coût de production de q unités de ce bien. Cette fonction est supposée positive, dérivable, convexe et strictement croissante par rapport au niveau de production q (c-à-d $C^{'}(q) \geq 0$).
Le monopoleur fixe simultanément les prix et les quantités pour maximiser son profit. Il arbitre donc entre produire plus à un prix moins élevé ou produire moins pour bénéficier d'un prix plus élevé pour maximiser son profit .

[3] Le coût marginal est le coût de production d'une unité supplémentaire d'un bien. Il est calculé en faisant le rapport entre la variation du coût total et la variation de quantité.

[4] Signifie que la firme dispose d'un pouvoir de marché, lié à sa taille ou à la différenciation de ses produits.

[5] Power over price en anglais.

Le problème est de trouver donc le prix du monopole p^m (ou bien la production du monopole q^m) qui maximise son profit :

$$\underset{0\leq p<+\infty}{max} \quad Z(p) = pD(p) - C(D(p)) \Leftrightarrow \underset{0\leq q<+\infty}{max} \quad W(q) = P(q)q - C(q). \tag{2.6}$$

La condition d'optimalité du premier ordre du problème (2.6) donne :
Si on raisonne en terme de quantité :

$$W^{'}(q) = 0 \Leftrightarrow P(q) + q.P^{'}(q) - C^{'}(q) = 0. \tag{2.7}$$

Si on raisonne en terme de prix :

$$Z^{'}(p) = 0 \Leftrightarrow D(p) + (p - C^{'}(D(p)))D^{'}(p) = 0. \tag{2.8}$$

Après ré-arrangement de l'équation (2.8), on aura :

$$\begin{aligned} p - C^{'}(D(p)) &= -\frac{D(p)}{D^{'}(p)}, \\ \frac{p^m - C^{'}(D(p^m))}{p^m} &= \frac{-D(p^m)}{p^m D^{'}(p^m)} = \frac{1}{|\varepsilon(p^m)|}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

où

$$\varepsilon(p) = p\frac{D^{'}(p)}{D(p)} = \frac{d\log(D)}{d\log(p)} < 0. \tag{2.11}$$

est appelé l'**élasticité** de la demande au prix. Elle mesure la sensibilité de la demande au prix : elle indique la baisse de la demande, exprimée en pourcentage, résultant d'une hausse du prix de 1%.

La condition d'optimalité du deuxième ordre du problème (2.6) est donnée par :

$$Z^{''}(p) = 2D^{'}(p) + (p - C^{'}(.))D^{''}(p) - C^{''}(.)D^{'}(p) \leq 0. \tag{2.12}$$

Cette condition est vérifiée car la fonction de demande est décroissante ($D^{'} < 0$) et concave ($D^{''} \leq 0$) et la fonction du coût est convexe ($C^{''} \geq 0$).

Donc, tout prix $p = p^m$ vérifiant la relation (2.9) est appelé prix du monopole et $q^m = D(p^m)$ sera la quantité ou la production du monopole.

• **La détermination graphique du prix de monopole** [9]

De la condition d'optimalité (2.7), on obtient :

$$C^{'}(q) = P(q) + q.P^{'}(q), \tag{2.13}$$

où le terme à gauche de la relation (2.13), $C^{'}(q) = \frac{dC(q)}{dq} = CM(q)$, représente le coût marginal de production du monopoleur. Le terme à droite, $RM(q) = P(q) + qP^{'}(q)$, évalue sa recette marginale. Donc, de (2.13), on déduit qu'à l'équilibre :

$$CM(q^m) = C^{'}(q^m) = RM(q^m) = P(q^m) + q^m P^{'}(q^m). \tag{2.14}$$

Graphiquement, la quantité q^m est donnée par l'intersection entre la courbe du coût marginal et la courbe de la recette marginale. Ensuite, en utilisant la courbe de la fonction inverse de la demande $P(q)$ on peut identifier le prix du monopole, (p^m), que les consommateurs sont prêts à payer à la quantité déterminée (q^m) (voir Fig.2.4).

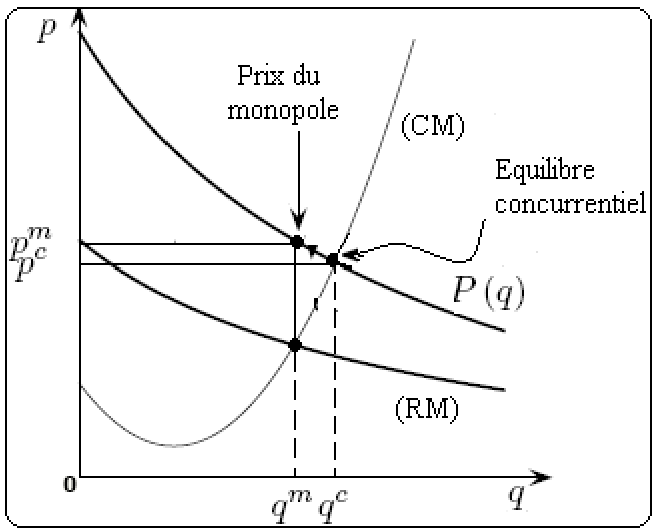


FIG. 2.4 – Maximisation de profit pour un monopole.

Lorsque la fonction de demande P est strictement décroissante (i.e $P'(q) < 0, \ \forall q \in [0, +\infty[$, la courbe de la recette marginale (RM) est située en dessous de la courbe de demande ($P(q)$) :

$$RM(q) = P(q) + q.P'(q) < P(q)$$

Remarque 2.3. *D'après la figure (Fig.2.4), la quantité de monopole (q^m) est inférieure à celle du niveau concurrentiel (q^c) (voir définition 2.5 et Fig.2.3). Par conséquent, le prix de monopole vérifiant $p^m = P(q^m)$, est donc supérieur au prix concurrentiel p^c (définition 2.5, Fig2.3).*

2.4.2 La concurrence oligopolistique

Définition 2.7. [**Oligopole**] Un marché en oligopole est un marché où opère un petit nombre de firmes. Ce nombre est inférieur à celui des firmes en CPP mais supérieur à la firme unique du monopole. L'oligopole se situe donc exactement entre ces deux structures de marché (cas d'Intel et AMD sur le marché des microprocesseurs, le secteur automobile). Ce nombre étant insuffisant aussi pour pouvoir considérer que les décisions de chacune d'entre elles a un effet négligeable sur les décisions des autres. Chaque firme détient un pouvoir du marché, mais doit tenir compte de celui de ses concurrentes. Elles doivent donc adopter un comportement de type stratégique. Dans cette situation, les firmes peuvent se livrer une concurrence ou au contraire coopérer. On distingue alors deux types d'oligopoles : les oligopoles non coopératifs et les oligopoles coopératifs.

2.5 Oligopoles non-coopératifs

Il existe de nombreux modèles d'oligopoles non-coopératifs. Les trois principaux sont : le modèle de *Cournot*, de *Bertrand* et de *Stackelberg*.

2.5.1 Modèle de Cournot (1838)

Le travail de *Augustin Cournot*[6] en 1838, en dépit de son ancienneté, consiste aujourd'hui une pierre angulaire de l'organisation industrielle. C'est de cette époque que date sa principale contribution à la théorie des jeux contemporaine et à la théorie d'oligopole dans son célèbre ouvrage *recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* [30] dont il a consacré cinq chapitres des recherches aux *structures de marché* où les firmes se concurrencent par les quantités. Pour autant, *Cournot* constitue aujourd'hui une référence incontournable pour de nombreux économistes et théoriciens des jeux qui continuent à développer, dans de nombreux modèles, les démonstrations dont il est l'initiateur. A cet égard, on parle à l'heure actuelle d'équilibre de

[6](1801-1877) est une figure unique au XIXème siècle ; mathématicien, économiste et philosophe français. Il est considéré comme l'un des précurseurs de la théorie des jeux non coopératifs.

Cournot-Nash de sorte que l'application de ce concept touche autant l'économie mathématique que l'économie industrielle.
Son modèle célèbre de duopole puis d'oligopole se trouve dans son chapitre VII de son livre [30] proposé de manière séminale par *A. Cournot* en 1838 fait l'hypothèse que le prix d'un bien homogène, produit par deux firmes, reste fixe quand ces deux firmes maximisent leurs profits par rapport aux *quantités* qu'elles désirent produire. Cette concurrence est appelée la concurrence en quantité ou à la *Cournot*.

• **Description du l'oligopole de Cournot** [114]

Soit un marché d'oligopole constitué de N firmes sur lequel ces dernières se font concurrence pour offrir un produit homogène. La fonction inverse de demande du marché est donnée par $p = P(Q)$ où : p est le prix du marché, $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ est la quantité totale du produit offerte sur le marché et q_i la quantité produite par la firme i. Cette fonction est supposée non négative ($P(Q) \geq 0 \ \ \forall\, Q$), deux fois continûment différentiable et elle est strictement décroissante ($P^{'}(Q) < 0, \ \forall Q$).
Soit $C_i(q_i)$, la fonction de coût de production de la firme i de q_i unités du produit. Cette fonction est supposée : non négative, convexe, deux fois continûment différentiable et non-décroissante.
L'objectif de chaque firme i est la maximisation de son profit étant donné la production des autres firmes concurrentes :

$$\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(\sum_{j \in \mathcal{N}} q_j)q_i - C_i(q_i) \rightarrow \underset{0 \leq q_i < +\infty}{max}, \qquad \forall\, i = \overline{1, N}. \tag{2.15}$$

où $q_{-i} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_N)$ est un vecteur de $\mathbb{R}_+^{N-1}$ représente l'offre de chaque firme sauf celle de la i^{me}.
Formellement, la concurrence à la *Cournot* (ou la concurrence par quantité) est caractérisée par un jeu sous forme normal :

$$J_C =< \mathcal{N}, \{Q_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\Pi_i\}_{i \in \mathcal{N}} >, \tag{2.16}$$

où :

- $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ est l'ensemble des firmes qui constituent l'oligopole du *Cournot*. Une firme quelconque est désignée par l'indice $i, \quad i \in \mathcal{N}$,
- $Q_i = [0, +\infty[= \{q_i / 0 \leq q_i < +\infty\}$ désigne l'ensemble des stratégies de la firme $i \in \mathcal{N}$. Il caractérise les valeurs des quantités admissibles que la firme i est prête à offrir sur le marché,
- $\Pi_i : \ \prod_{i=1}^{N} Q_i \subset R_+^N \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de gain de la firme $i \in \mathcal{N}$.

Il s'agit donc d'un modèle statique dans le sens où les firmes ne se rencontrent qu'une seule fois sur le marché et elle fixe les quantités simultanément et de manière non coopératif et qu'un commissaire priseur détermine *le prix qui égalise l'offre à la demande du marché*. Simultanément, signifie que chaque firme n'a pas encore observé la quantité de l'autre firme au moment de choisir la sienne mais qu'elle l'anticipe. Les anticipations s'effectuent sur la base d'un processus dit de *Cournot*. Celui-ci consiste à admettre que chaque firme suppose que si elle modifie les quantités qu'elle produit, son adversaire ne modifiera pas les siennes. Cette éventualité est appelée *conjecture de Cournot*. Formellement, elle est interprétée par :

$$\frac{dq_{-i}}{dq_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.17}$$

- **L'équilibre du jeu de Cournot** [114]

Définition 2.8. L'équilibre oligopolistique de *Cournot-Nash* du jeu (2.16) est un vecteur de quantités $q^c \in \mathbf{R}_+^N$ tel que :

$$\Pi_i(q^c) = \underset{q_i \in [0,+\infty[}{max} \Pi_i(q_1^c, q_2^c, \ldots, q_{i-1}^c, q_i, q_{i+1}^c, \ldots, q_N^c), \quad \forall\, i \in \mathcal{N}. \tag{2.18}$$

Remarque 2.4. *D'après cette définition, l'une des premières propriétés de l'équilibre de* Cournot *est la* stabilité *dans le sens où une fois l'équilibre est réalisé, aucune des deux firmes n'a intérêt à modifier unilatéralement les quantités qu'elle produit sous peine de voir ses profits diminuer ce qui correspond à un équilibre de* Nash*.*

La condition d'optimalité du premier ordre du problème (2.15) est donnée par :

$$\frac{\partial \Pi_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i} = P(\sum_{j=1}^{N} q_j) + q_i P^{'}(\sum_{j=1}^{N} q_j) - C_i^{'}(q_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.19}$$

L'équilibre oligopolistique de *Cournot*, $q^c = (q_1^c, q_2^c, \ldots, q_N^c)$ où $q_i^c \geq 0, \ \ i \in \mathcal{N}$, est déterminé par N équations satisfaisant la condition du premier ordre ; $\frac{\partial \Pi_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i} = 0, \ i \in \mathcal{N}$. La $i^{\text{ème}}$ équation est appelée la **fonction de meilleure réaction** (appelée *règle de décision optimale* en terme de la théorie des jeux) de la firme i ; un concept fondamental introduit par *Cournot* afin d'expliquer comment le modèle peut être résolu. Elle décrit l'offre optimale, q_i, qui maximise le profit de la firme i étant donné les quantités produites par les autres firmes q_{-i}. Selon *Cournot*, Elle est définit par :

Définition 2.9.

$$\begin{aligned} R_i(q_{-i}) &= \{q_i^* \in Q_i \ / \ \Pi_i(q_i^*, q_{-i}^*) = \underset{q_i \in Q_i}{max} \Pi_i(q_i, q_{-i}^*)\}, \\ &\equiv \{q_i^* \in Q_i \ / \ \tfrac{\partial \Pi_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_i^*} = 0\}, \qquad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $R_i : \prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} Q_j \to Q_i$. Elle donne la quantité q_i que doit produire la firme i pour chaque niveau de production de ses concurrentes q_{-i}.

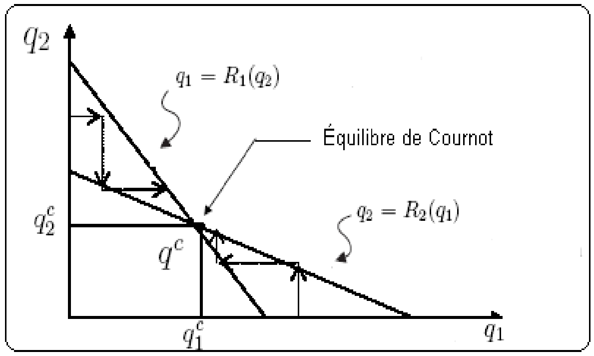


FIG. 2.5 – Représentation graphique de l'équilibre de duopole de Cournot

En analysant son duopole ($\mathcal{N} = \{1, 2\}$) et à l'aide d'un graphe, l'équilibre de *Cournot* est donné par l'intersection des deux courbes de réaction des deux firmes (voir Fig. 2.5).
Après réarrangement de l'équation (2.19), la fonction de meilleure réaction de la firme i est donnée par la condition de premier ordre suivante :

$$\frac{P(Q) - C_i'(q_i)}{P(Q)} = \frac{s_i}{\varepsilon}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.21}$$

où :

* $s_i \equiv \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{N} q_i} \leq\ 1$: est la part du marché de la firme i,

* $\varepsilon \equiv -Q\ \frac{P'(Q)}{P(Q)} > 0$: définit l'élasticité de la demande du marché au point Q.

L'équation (2.21) est la formule de base de la fixation du prix du l'oligopole de *Cournot*. La marge réalisée par la firme i dépend de ses parts de marché. Deux cas particuliers peuvent être mentionnés :

1. Si $s_i = 1$, la firme est en **situation de monopole**. Par conséquent, la marge est maximale.
2. Si $s_i = 0$, la part du marché de la firme i est négligeable par rapport à la taille du marché (hypothèse d'atomicité). Il s'agit d'une situation de **Concurrence Pure et Parfaite (CPP)**, la marge est nulle ($p = P(Q) = C_i'(q_i)$).

• Application au cas du duopole linéaire

Soit deux firmes $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ produisant un bien homogène dont la fonction de demande est linéaire donnée par : $q = D(p) = \max\{0, a - p\}$, où q représente la quantité totale offerte et p le prix du marché. Le coût de production de chaque firme i est donnée par la fonction :

$$C_i(q_i) = c_i q_i, \quad i = 1, 2. \tag{2.22}$$

où c_i est le coût unitaire de production de la firme i supposé constant.
L'objectif de chaque firme $i (i \in \mathcal{N})$ est la maximisation de son profit étant données la quantité

de sa concurrente :

$$\Pi_i(q_1, q_2) = (p - c_i)q_i = [a - (q_1 + q_2) - c_i]q_i \to \underset{q_i \in [0,a[}{max}, \quad i = 1, 2. \tag{2.23}$$

où $a = D(P^{\max}) = 0$. Signifie que $P^{\max}$ est le prix maximum (prix plafond) sous lequel la demande devient nulle.

• **L'équilibre de Cournot-Nash :** Soit $E = (q_1^C, q_2^C)$ un équilibre de *Cournot-Nash*. Donc :

$$\Pi_i(q_i^C, q_j^C) = \underset{0 \le q_i < a}{max} \Pi_i(q_i, q_j^C) \;\; \forall\, i, j = \overline{1, 2}, \;\; \text{avec } i \neq j \tag{2.24}$$

Les conditions du premier et du second ordre sont nécessaires et suffisantes pour le problème d'optimisation (2.23) :

$$\frac{\partial \Pi_i(q_1^C, q_2^C)}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Pi_i(q_1^C, q_2^C)}{\partial q_i^2} < 0, \qquad i = 1, 2.$$

Nous obtenons alors :

$$q_i(q_j) = \frac{1}{2}(a - c_i - q_j) \;\; \forall\, i, j = \overline{1, 2}, \;\; \text{avec } i \neq j.$$

Notons par

$$R_i(.) : \quad Q_j = [0, a[\to Q_i = [0, a[, \quad i, j = \overline{1, 2}, \;\; \text{avec } i \neq j$$

la fonction du meilleure réponse de la firme i vis-à-vis de toute stratégie q_j prise par la firme j. Elle est donnée donc par :

$$R_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - c_i - q_j), & \text{Si } q_j < a - c_i \quad \forall\, i, j = \overline{1, 2}, \;\; \text{avec } i \neq j; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{2.25}$$

La quantité d'équilibre de chaque firme est sa meilleure réaction à la quantité d'équilibre de son concurrent. Pour que (q_1^C, q_2^C) soit un équilibre de ce duopole, la quantité de chaque firme doit donc vérifier :

$$\left| \begin{array}{ll} q_1^C \in R_1(q_2^C) \Rightarrow q_1^C = R_1(q_2^C) = \frac{1}{2}(a - c_1 - q_2^C), & (a) \\ q_2^C \in R_2(q_1^C) \Rightarrow q_2^C = R_2(q_1^C) = \frac{1}{2}(a - c_2 - q_1^C). & (b) \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Nous avons donc un système à deux équations linéaires à deux inconnues $\left(q_1^C, q_2^C\right)$ à résoudre. En résolvant ce système, nous obtenons :

$$\begin{cases} q_1^C = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3}, \\ q_2^C = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Par conséquent, l'offre et le prix d'équilibre du marché sont donnés par :

$$\left| \begin{array}{l} Q^C = q_1^C + q_2^C = \frac{2a - c_1 - c_2}{3}, \\ p^C = a - Q^C = \frac{a + c_1 + c_2}{3}, \end{array} \right. \tag{2.28}$$

ainsi que les profits des deux firmes :

$$\left| \begin{array}{l} \Pi_1^C(q_1^C, q_2^C) = p^C q_1^C - c_1 q_1^C = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3}\right)^2, \\ \Pi_1^C(q_1^C, q_2^C) = p^C q_2^C - c_2 q_2^C = \left(\frac{a-2c_2+c_1}{3}\right)^2. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Remarque 2.5. *Si le duopole de* Cournot *est* ***symétrique*** $(c_1 = c_2 = c)$*, on aura donc :*

$$\left| \begin{array}{l} Q^C = q_1^C + q_2^C = 2\frac{(a-c)}{3}, \\ p^C = a - q^C = \frac{a+2c}{3}, \\ \Pi_1^C(q_1^C, q_2^C) = \Pi_2^C(q_1^C, q_2^C) = \frac{(a-c)^2}{9}. \end{array} \right. \tag{2.30}$$

- **Caractérisation de l'équilibre de Cournot**

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'équilibre de *Cournot* et de son unicité (en particulier en analyse d'équilibre partiel) est très important pour l'étude de complexes questions économiques conçues comme étant des problèmes stratégiques, dans lesquels l'oligopole de *Cournot* fait partie de la structure interactive. La quasi-concavité ou la concavité des fonctions de profits des firmes par rapport à leurs niveaux de production est une hypothèse commune dans les théorèmes d'existence de l'équilibre de *Cournot* (*Frank and Quandt* [46] en 1963, *Szidarovskszky* et *Yakowitz* [123] en 1982, *Kolstad* et *Mathiesen* [66] en 1987) ; la preuve de ces théorèmes est basée sur le théorème du *point fixe* de *Kakutani.*
Une hypothèse forte qui est suffisante pour l'existence est que Π_i soit une fonction concave par rapport à q_i. Cette hypothèse est réalisée si $\frac{\partial^2 \Pi_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i^2} < 0$ pour tout $q_i \in Q_i$. Dans le cas des produits homogènes, elle est donnée par :

$$a_i \equiv \frac{\partial^2 \Pi_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i^2} = 2P'(\sum_j^N q_j) + q_i P''(\sum_{j=1}^N q_j) - C_i''(q_i) < 0, \; i = \overline{1, N}. \tag{2.31}$$

Si la fonction de demande est concave $P''(Q) \leq 0$, et si la fonction du coût marginal, $C_i'(q)$, est non décroissante, i.e $C_i'' \geq 0$, alors l'équation (2.31) est satisfaite.
Suivant les hypothèses ci-dessous, *J. Friedman* (1977 [48]) a donné quelques théorèmes concernant l'existence et l'unicité de l'équilibre de *Cournot.*

- **Hypothèse 1 : la fonction de demande**

  . $P(Q)$ est supposé définie et continue pour tout $Q \geq 0$,

  . $\exists \; \overline{Q} > 0$, $P(Q) > 0$ pour tout $Q \in [0, \overline{Q}[$ et $P(Q) = 0$ pour tout $Q \in [\overline{Q}, +\infty[$. De plus, $P(0) = \bar{p} < \infty$,

  . Pour $0 < Q < \overline{Q}$, $P'(Q) < 0$ (P est strictement décroissante) et que $P''(Q)$ existe et continue($P \in \mathcal{C}^2$).

- **Hypothèse 2 : la fonction du coût**

  . $C_i(q_i)$ est supposée définie et continue pour tout $q_i \geq 0$, $C_i(0) \geq 0$ et elle est aussi

strictement croissante i.e. $C_i^{'}(q_i) > 0,\ q_i \geq 0,\ i \in \mathcal{N}$.
. $C_i^{''}$ existe et continue pour tout $q_i \geq 0$ (C_i de classe $\mathcal{C}^2$).

– **Hypothèse 3**
. Pour tout $q_i > 0$ et $Q < \overline{Q},\ P^{'}(Q) + q_i P^{''}(Q) < 0$ et $P^{'}(Q) - C_i^{''}(q_i) < 0,\ i \in \mathcal{N}$.

Théorème 2.1. *[48]. Un oligopole de* Cournot *satisfaisant les hypothèses 1-3 admet un équilibre de* Cournot *q^c et cet équilibre est unique.*

Théorème 2.2. *[48]. Sous les hypothèses du théorème 2.1, si $q^c > 0$, alors $\exists\ q^* \geq 0$ tel que : $\pi_i(q^*) > \pi_i(q^c),\ \ \forall\ i = \overline{1, N}$.*

Remarque 2.6. *Le théorème 2.2 montre que si l'équilibre de* Cournot *est un point intérieur, alors cet équilibre n'est pas efficace au sens de* Pareto*.*

Plus tard, *Novshek* (1985, [97]) a démontré sous de faibles conditions l'existence de l'équilibre de *Cournot* dans le cas des produits homogènes. En supposant que la fonction de demande et du coût sont différentiables et monotones à condition que la fonction $QP^{'}(Q)$ décroît par rapport à Q, c-à-d :

$$P^{'}(\sum_{j=1}^{N} q_j) + QP^{''}(\sum_{j=1}^{N} q_j) \leq 0, \quad \text{pour tout } Q. \tag{2.32}$$

Cette condition est équivalente à :

$$b_i \equiv \frac{\partial^2 \Pi_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i \partial q_j} = P^{'}(\sum_{k=1}^{N} q_k) + q_i P^{''}(\sum_{k=1}^{N} q_k) \leq 0,\ i = j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \tag{2.33}$$

La comparaison des équations (2.31) et (2.33) révèle que la généralisation de *Novshek* consiste à réduire les conditions sur les fonctions de coût qui sont nécessaires pour assurer l'existence.
La condition (2.33) établit que le revenu marginal ; ($RM = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = P^{'}(Q) + q_i P^{''}(Q)$) de la firme i, n'augmente pas avec l'augmentation des quantités des firmes concurrentes. Alors, le jeu comprend des *substituabilités stratégiques*. Une autre condition forte et suffisante pour l'unicité de l'équilibre est donnée par *Friedman* [47] :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{q_i^2} + \sum_{j \neq i} |\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i \partial q_j}| < 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.34}$$

Dans le cas des produits homogènes, cette condition devient :

$$a_i + (n-1)|b_i| < 0, \ \ \forall \ \ i = \overline{1, N}. \tag{2.35}$$

où a_i doit être négatif à l'équilibre. Cette inégalité peut être réécrite comme suit :

$$|a_i| > (n-1)|b_i|, \ \ \forall \ \ i = \overline{1, N}. \tag{2.36}$$

Néanmoins, des résultats semblables à ceux de *Novshek* sont obtenus en considérant le jeu de *Cournot* comme un jeu *supermodulaire* (*X. Vives* [132] en 1990, *R. Amir* [4] en 1996) en se basant pour démontrer la condition d'existence sur le théorème du *point fixe* de *Tarski* [124].
Considérons le jeu (2.16) de *Cournot*, quand $N = 2$ (duopole de *Cournot*).

Théorème 2.3. *[4]. Le duopole de* Cournot *est un jeu supermodulaire ordinaire si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- $P(.)$ *est strictement décroissante et log-concave,*
- $C_i,\ i \in \mathcal{N}$ *est strictement croissante et continue à gauche,*
- $\exists\ \bar{Q} > 0$, *tel que* $QP(Q) - C_i < 0$ *pour tout* $Q > \bar{Q}$ *et pour tout* $i \in \mathcal{N}$.

Théorème 2.4. *[4]. Sous les hypothèses du théorème 2.3 et si* C_i *est convexe, alors le duopole de* Cournot *possède un équilibre de Nash en stratégies pures et il est unique.*

- **Extension du modèle :**

La version standard d'oligopole de *Cournot* est l'étude du comportement des firmes produisant des biens homogènes avec information complète concernant la fonction de demande et les coûts de production a été extensivement étudiée. Cependant, dans les dernières années, ce modèle statique a été généralisé pour traiter les situations où :

- les firmes ne disposent pas d'information complète concernant la fonction de demande (demande aléatoire) et les fonctions de coûts ce qui est l'objet de ces deux articles [(2006, [71]), (2007,[41])] ;
- la fonction de demande et les fonctions de coût sont supposées non linéaires (2006, [90]) ;
- les firmes se trouvent dans une situation d'interaction stratégique répétée (2007, [7]) ;
- les firmes sont contraintes en capacité (2008, [73]). Dans cet article, les auteurs ont montré que dans un modèle de *Cournot* multi-marchés, le problème est équivalent à la maximisation d'une fonction objectif concave sur un domaine convexe ce qui garantit l'existence et l'unicité de l'équilibre de *Cournot-Nash* avec contraintes de capacité.

2.5.2 Modèle de Bertrand (1883)

Lors d'une recension du livre de *Cournot*, dans un article intitulé *Théorie des richesses* [18] publié dans le Journal des Savants en 1883, la première critique de fond adressée au modèle de *Cournot* est le fait d'un mathématicien français, *Joseph Bertrand*[7], qui devait objecter le travail de *Cournot* en exposant deux critiques :

- *Cournot* suppose que les firmes choisissent les quantités et qu'un commissaire priseur détermine le prix qui égalise l'offre à la demande. Le modèle a été critiqué en soulignant q'un tel

[7]Développa son propre modèle à l'occasion d'une présentation des travaux de Cournot.

commissaire n'existe pas et que les firmes choisissent les prix en dernier ressort. Donc, pour *Bertrand* les prix consistent les variables stratégiques les plus naturelles pour les firmes.

– Dû à la non optimalité au sens de *Pareto* de l'équilibre de *Cournot* (théorème 2.2), les firmes sont incitées à pratiquer la *collusion* afin d'obtenir de meilleurs profits en déviant simultanément de l'équilibre de *Cournot.*

Joseph Louis Bertrand propose un mécanisme de concurrence par les prix dans le cadre des situations oligopolistiques.

- **Présentation du modèle du Bertrand** : Soit deux firmes $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ produisant un bien homogène sans contrainte de capacité. Ce duopole retient une concurrence en prix, avec p_i le prix proposé par la firme i. La demande qui s'adresse à chaque firme dépend du prix qu'elle fixe, du prix qu'affiche la firme concurrente. Formellement, si les deux firmes appliquent les prix p_1 et p_2, la demande à laquelle fait face chaque firme est donnée par :

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{si } \; p_i < p_j; \\ \frac{1}{2}D(p), & \text{si } \; p_i = p_j = p; \\ 0, & \text{si } \; p_i > p_j; \end{cases} \tag{2.37}$$

où $\quad D(p) = D_1(p, p) + D_2(p, p)$ est la demande du marché.

Il en découle que la demande s'adresse à la firme qui pratique le prix le plus faible. Si les firmes pratiquent le même prix, elles vont partager la demande du marché avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

– Les coûts unitaires de production sont constants et sont donnés par : c_1 et c_2

– L'objectif de chaque firme $i (i \in \mathcal{N})$ est la maximisation de son profit étant donnés le prix de sa concurrente :

$$\Pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i)(p_i - c_i), & \text{si } \; p_i < p_j; \\ \frac{1}{2}D(p_i)(p_i - c_i), & \text{si } \; p_i = p_j = p; \\ 0, & \text{si } \; p_i > p_j. \end{cases} \tag{2.38}$$

Formellement, la concurrence à la **Bertrand** est caractérisée par un jeu sous forme normale :

$$J_B =< \mathcal{N}, \{P_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\Pi_i\}_{i \in \mathcal{N}} >, \tag{2.39}$$

où :

– $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ est l'ensemble des firmes (ici c'est un duopole). Une firme quelconque est désignée par l'indice $i, \quad i \in \mathcal{N}$;

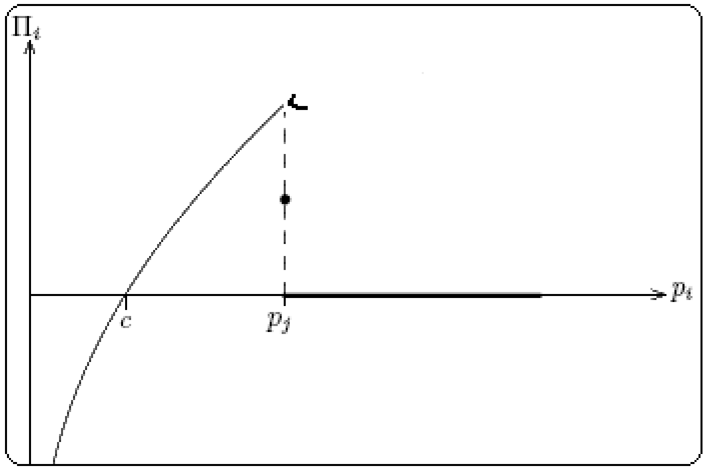


FIG. 2.6 – variation du profit de la firme i en fonction de son prix

– $P_i = [0, +\infty[= \{p_i / 0 \leq p_i < +\infty\}$ désigne l'ensemble des stratégies de la firme $i \in \mathcal{N}$. Il caractérise l'ensemble des prix admissibles avec lesquels la firme i est prête à vendre son produit.
– $\Pi_i : \ P_1 \times P_2 \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain de la firme $i \in \mathcal{N}$.

Les firmes ne se rencontrent qu'une seule fois sur le marché et elles fixent les prix simultanément de façon non coopératif. Il s'agit donc bien d'un jeu statique, simultané et à information complète. Par conséquent, l'équilibre de ce duopole est donné par l'équilibre de *Nash* appelé aussi l'équilibre de *Bertrand-Nash*.

- **L'équilibre du jeu de Bertrand**

Définition 2.10. L'équilibre oligopolistique de *Bertrand-Nash* du jeu (2.39) est un vecteur de prix $p^b \in \mathbf{R}_+^N$ tel que :

$$\Pi_i(p^c) = \max_{p_i \in P_i} \Pi_i(p_1^b, p_2^b, \ldots, p_{i-1}^b, p_i, p_{i+1}^b, \ldots, p_N^b), \quad \forall \ \ i \in \mathcal{N}. \tag{2.40}$$

Le théorème suivant est fourni par *J. Bertrand* dans le cas d'un duopole symétrique, i.e $c_1 = c_2 = c$.

Théorème 2.5. ***[Bertrand, 1883]****[128]*
Si $c_1 = c_2 = c$, alors $(p_1^* = c,\ p_2^* = c)$ est un équilibre symétrique de Bertrand-Nash *du jeu (2.39).*

Preuve du Théorème 2.1. *Pour montrer que (c, c) est un équilibre de Nash, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de déviation profitable.*
- **1^{ier}cas** *: supposons que $p_1^* > p_2^* > c$. Dans ce cas, nous aurons :*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = (p_1^* - c).0 = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = D(p_2^*) & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = (p_2^* - c).D(p_2^*) > 0. \end{cases}$$

Si la firme 1 propose un prix $p_1 = p_2^* - \varepsilon$*, avec* $p_2^* - c > \varepsilon > 0$*, alors :*

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2^*) = D(p_1) & \Rightarrow \Pi_1(p_1, p_2^*) = (p_1 - c).D(p_1) \geq \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0 \quad si \quad p_1 > c, \\ D_2(p_1, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1, p_2^*) = (p_2^* - c).0 = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\Pi_1(p_1, p_2^*) > \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0.$$

Donc (p_1^*, p_2^*) *avec* $p_1^* > p_2^* > c$ *ne serait pas un équilibre de Nash puisque la première firme obtiendrait un gain supérieur en changeant sa stratégie :* $p_1^* \to p_1 = p_2^* - \varepsilon$*.*

- **2**$^{\text{ème}}$**cas** *: Si* $p_2^* > p_1^* > c$*,*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = D(p_1^*) & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = (p_1^* - c).D(p_1^*) > 0, \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = (p_2^* - c).0 = 0. \end{cases}$$

Soit $p_2 = p_1^* - \varepsilon$ *avec* $p_1^* - c > \varepsilon > 0$*, alors on aura :*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2) = 0 & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2) = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2) = D(p_2) & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2) = (p_2 - c).D(p_2) \geq \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0, \quad si \quad p_2 > c. \end{cases}$$

D'où

$$\Pi_2(p_1^*, p_2) > \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0.$$

Donc la seconde firme gagnerait à changer de stratégie $p_2^* \to p_2 = p_1^* + \varepsilon$*. Par conséquent,* (p_1^*, p_2^*) *avec* $p_2^* > p_1^* > c$ *ne peut être un équilibre de Nash.*

- **3**$^{\text{ème}}$**cas** *: Si* $p_2^* = p_1^* = p^* < c$*,*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}D(p^*) & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}(p^* - c).D(p^*) < 0; \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}D(p^*) & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}(p^* - c)D(p^*) < 0. \end{cases}$$

Les deux firmes devront quitter le marché, parce que dans ce cas les firmes vendront moins cher que le coût de production. Par conséquent, (p_1^*, p_2^*) *ne peut être un équilibre de* Nash.

- **4**$^{\text{ème}}$**cas** *: Si* $p_1^* = p_2^* = p^* > c$

$$D_1(p_1^*, p_2^*) = D_2(p_1^* p_2^*) = \frac{1}{2}D(p^*), \quad p_1^* = p_2^* = p^*.$$

Si une firme $i \in \{1, 2\}$ *décide de baisser légèrement son prix tandis que l'autre le maintient, par exemple :*

$$p_1 = p_1^* - \varepsilon, \qquad avec \;\; \varepsilon > 0 \qquad \textbf{\textit{et}} \quad p_1^* - \varepsilon > c,$$

alors :

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2^*) = D(p_1) & \Rightarrow \;\Pi_1(p_1, p_2^*) = (p_1^* - \varepsilon - c).D(p_1) > 0, \\ D_2(p_1, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Donc, la firme 1 gagnerait à changer sa stratégie de $p_1^* \to p_1 = p_1^* - \varepsilon$ *et par conséquent* (p_1^*, p_2^*) *ne peut être un équilibre de* Nash.

- **5èmecas** *Si* $p_2^* > p_1^* = c$*, alors :*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = D(p_1^*) & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = (p_1^* - c).D(p_1^*) = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Soit : $p_1 = p_1^* + \varepsilon < p_2^*$*. Alors :*

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2^*) = D(p_1) & \Rightarrow \Pi_1(p_1, p_2^*) = (p_1^* + \varepsilon - c).D(p_1) = \varepsilon.D(p_1) > 0, \\ D_2(p_1, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Donc en changeant de stratégie $p_1^* \to p_1$*, la firme 1 améliorerait son gain par rapport à la situation* (p_1^*, p_2^*)*. Par conséquent,* (p_1^*, p_2^*) *avec* $p_2^* > p_1^* = c$ *ne peut être un équilibre de* Bertrand-Nash.

- **6èmecas** *Si* $p_1^* > p_2^* = c$*, on aura*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = D(p_2^*) & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = (p_2^* - c).D(p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Soit : $p_2 = p_2^* + \varepsilon < p_1^*$*. On aura :*

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2) = 0 & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2) = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2) = D(p_2) & \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2) = (p_2^* + \varepsilon - c).D(p_2) = \varepsilon D(p_2) > 0. \end{cases}$$

Donc en changeant de stratégie $p_2^* \to p_2$*, la firme 2 améliorerait son gain en déviant de la situation* (p_1^*, p_2^*)*. Donc,* (p_1^*, p_2^*) *ne peut être un équilibre de Nash.*

- **7èmecas** *Si* $p_1^* = p_2^* = c = p^*$

$$\begin{cases} D_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}D(p^*) \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0, \\ D_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}D(p^*) \Rightarrow \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Supposons que la firme 1 propose un prix p_1 *inférieur, i.e :* $p_1 < p_1^* = c$*, on aura donc :*

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2^*) = D(p_1) & \Rightarrow \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = (p_1 - c).D(p_1) < 0, \\ D_2(p_1, p_2^*) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(p_1, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \Pi_1(p_1, p_2^*) < \Pi_1(p_1^*, p_2^*), \\ \Pi_2(p_1, p_2^*) = \Pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

Donc la firme 1 n'a pas intérêt à changer sa stratégie $p_1^* = c \rightarrow p_1 < p_1^*$ *pendant que la seconde maintient sa stratégie* p_2^*.
Supposons que la firme 1 propose un prix supérieur, i.e : $p_1 > p_1^* = c$, *on aura*

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2^*) = 0 \quad \Rightarrow \; \Pi_1(p_1, p_2^*) = \Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0, \\ D_2(p_1, p_2^*) = D(p_2^*) \quad\quad \Rightarrow \Pi_2(p_1, p_2^*) = 0. \end{cases}$$

La firme 1 ne gagnerait pas à changer sa stratégie $p_1^* = c$ *à* $p_1 > c$ *pendant que la seconde maintient sa stratégie* p_2^*.
Par symétrie, on obtiendrait les mêmes résultats pour la seconde firme. D'où (p_1^*, p_2^*), *avec* $p_1^* = p_2^* = c$, *est un équilibre de* Bertrand-Nash.

Le prix et le profit d'équilibre du duopole de **Bertrand symétrique** sont donc donnés par :

$$\begin{cases} p_1^* = p_2^* = c, \\ \Pi^*(p_1^*, p_2^*) = (\Pi_1^*, \Pi_2^*) = (p^* - c).\frac{1}{2}D(p^*) = 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Interprétation 2.1. ***[Paradoxe de Bertrand]***
Le résultat (2.41), dû à Bertrand (des profits nuls et un prix égal au coût marginal), peut toutefois sembler ***paradoxal****. Il est appelé* Paradoxe *car il est difficile de croire que les firmes des industries qui n'en comprennent qu'un petit nombre, ne réussissent jamais à manipuler le prix du marché pour faire des profits positifs. Ce paradoxe, établit, que sous de telles hypothèses, les oligopoleurs se comportent comme des firmes en* CPP, *c-à-d que le nombre de firmes du marché n'est pas une variable à prendre en compte pour étudier le comportement de prix. Ce paradoxe peut être donc résolu en relâchant l'une des hypothèses cruciales du modèle :*
*- Les capacités de production peuvent également limiter l'aptitude d'une firme à s'attaquer à la part du marché de ses concurrents (modèle d'*Edgeworth *(1897, [40])).*
- Les firmes proposent souvent des produits ***différenciés*** *et bénéficient ainsi d'une certaine fidélisation de leur clientèle si on relâche l'hypothèse d'homogénéité des produits (modèle de* Hotelling *(1929, [61]) et de* Chamberlin*(1933, [27])).*

2.5.2.1 La solution d'Edgeworth (1897)

Dans cette solution, l'hypothèse d'absence de contrainte de capacité n'est pas vérifiée. Chaque firme $i \in \mathcal{N}$ a une capacité de production égale à K_i et se font concurrence par les prix. Cette solution est appelée aussi modèle de **Bertrand-Edgeworth** avec contrainte de capacité [40].
Soit deux firmes $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ produisant un bien homogène dont la fonction de demande est donnée par $D(p)$ et chacune possède une capacité de production égale à K_i.
Partons d'une situation initiale : $p_2 > p_1$. Dans ce cas, toute la demande s'adresse à la firme 1

$$D_1(p_1, p_2) = D(p_1).$$

Tous les consommateurs qui ont un prix de réserve supérieur à p_1 désirent donc acheter le bien chez la firme 1. Deux types de situations peuvent alors apparaître :

1. $K_1 > D(p_1)$, on aura

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) = D(p_1); \\ D_2(p_1, p_2) = 0. \end{cases}$$

   La firme 2 sera donc fortement incitée à baisser son prix et la guerre des prix va s'engager.

2. $K_1 < D(p_1)$, la firme 1 ne peut satisfaire cette demande et une partie de ses consommateurs sera rationnée. La firme 2 aura alors le monopole sur cette demande résiduelle. Elle ne sera pas nécessairement incitée à baisser son prix.

- **La composition de cette demande résiduelle**

Parmi les consommateurs qui ont un prix de réserve supérieur à p_1, seulement une fraction K_1 pourra obtenir cette demande. Mais, il n'y a à priori aucun mécanisme qui détermine ce sous-ensemble de consommateurs. Cela dépendra du mécanisme de rationnement qui est en vigueur dans cette industrie. Il peut y avoir un ensemble de clients favorisés de la firme 1 qui seront servis les premiers ou bien les premiers arrivés seront servis les premiers. Dans ce dernier cas, ceux qui désirent le plus le bien (ceux qui ont les prix de réserve les plus élevés) peuvent se présenter avant les autres (*rationnement efficace*). L'autre cas qui peut être considéré est le cas ou l'arrivée peut se faire de manière tout-à-fait aléatoire (*rationnement proportionnel*).

Hypothèse 2.1. ***Rationnement efficace*** *: la règle de rationnement efficace suppose que la demande résiduelle de la firme 2 est donnée par :*

$$D_2^r(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - K_1, & si\ D(p_2) > K_1, \\ 0 & sinon\ . \end{cases} \tag{2.42}$$

Les consommateurs achètent d'abord chez la firme 1 et ceux qui ne peuvent être servis se retournent vers la firme 2. Cette dernière a une demande résiduelle qui est la translation de la demande totale par K_1 (voir Fig.2.7).

Pour résumer, la demande de la firme i est donnée par la fonction suivante :

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} min\{D(p_i), K_i\} & \text{si } \ p_i < p_j, \\ min\{D(p_i) - K_j, K_i\} & \text{si } \ p_i > p_j \text{ et } D(p_j) > K_j, \\ 0 & \text{si } \ p_i > p_j \text{ et } D(p_j) < K_j, \\ min\{\frac{1}{2}D(p_i), K_i\} & \text{si } \ p_i = p_j, \\ \forall \ \ i, j = 1, 2 \text{ avec } i \neq .j \end{cases} \tag{2.43}$$

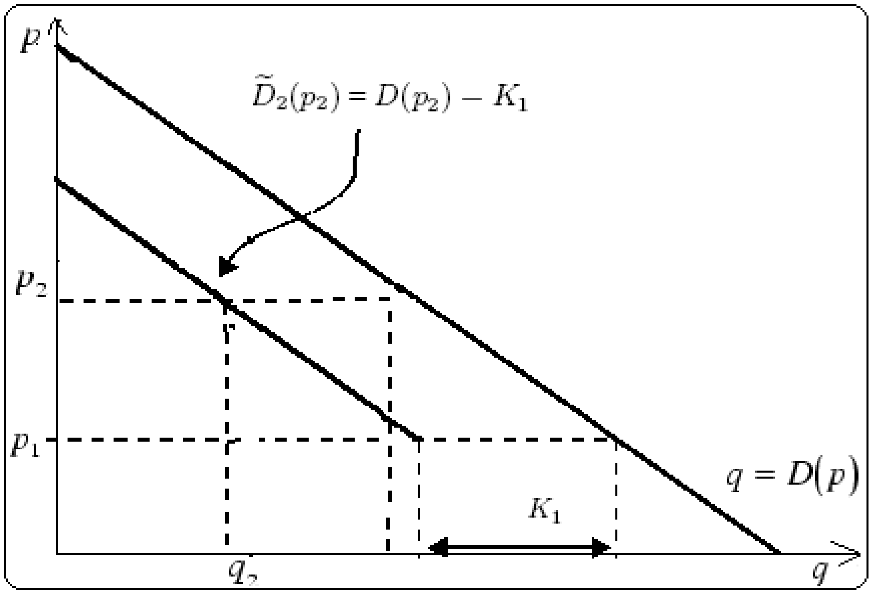


FIG. 2.7 – Rationnement efficace de la demande

Hypothèse 2.2. ***Rationnement proportionnel :*** *selon cette règle, chaque consommateur a la même probabilité d'être rationné. La probabilité de ne pas pouvoir acheter chez la firme 1 est donnée par :* $\frac{D(p_1)-K_1}{D(p_1)}$. *La demande résiduelle qui s'adresse à la firme 2 est alors donnée par :*

$$D_2^r(p_2) = \begin{cases} D(p_2)\frac{D(p_1)-K_1}{D(p_1)}, & si\ D(p_1) > K_1, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{2.44}$$

Le second terme donnant donc la proportion des consommateurs qui n'ont pu être servis par la firme 1 (voir fig.2.8). Par conséquent, la demande effective destinée à la firme i est donnée par :

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} min\{D(p_i), K_i\} & \text{si } \ p_i < p_j, \\ min\{D(p_i)\frac{D(p_j)-K_j}{D(p_j)}, K_i\} & \text{si } \ p_i > p_j \text{ et } D(p_j) > K_j, \\ 0 & \text{si } \ p_i > p_j \text{ et } D(p_j) < K_j, \\ min\{\frac{1}{2}D(p_i), K_i\} & \text{si } \ p_i = p_j, \\ \forall \ \ i, j = 1, 2 \text{ avec } i \neq j. \end{cases} \tag{2.45}$$

Cette règle n'est pas efficace, car il peut exister des consommateurs qui ont un prix de réserve inférieur à p_2 (et donc qui n'auraient pas acheté le bien). La firme 2 préfère néanmoins cette règle car sa demande résiduelle est plus élevée que dans le cas précédent pour chaque niveau du prix.

- **L'élimination du paradoxe de Bertrand**

Supposons que la capacité est acquise à un coût unitaire constant b, et qu'aucune firme n'a une capacité trop élevée $K_i < D(c)$, $\ i \in \mathcal{N}$. Les profits des firmes deviennent alors :

$$\Pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c)q_i - bK_i \rightarrow \max_{0 \leq p_i < +\infty}, \quad i = 1, 2. \tag{2.46}$$

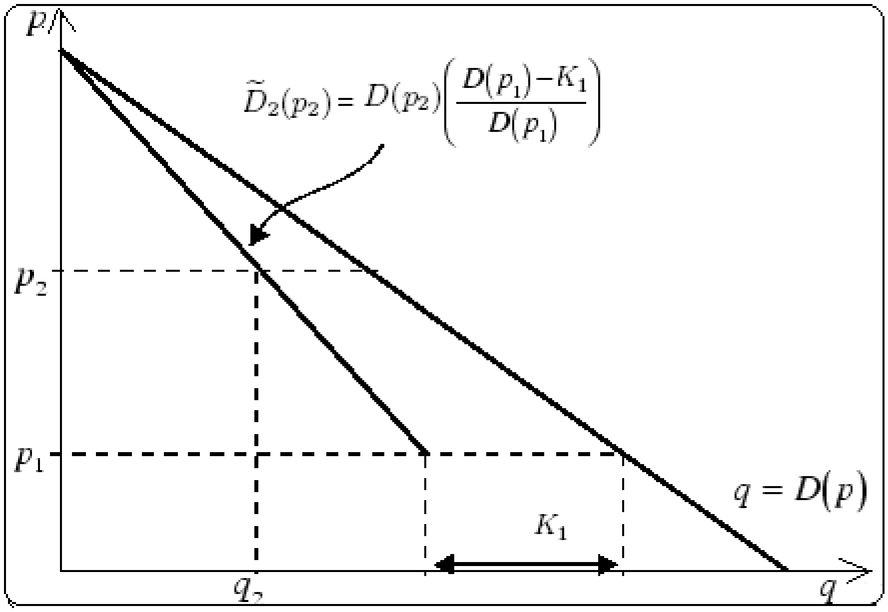


Fig. 2.8 – Rationnement proportionnel de la demande

Supposons que $p_1^* = p_2^* = c$ est l'équilibre du *Bertrand* de ce modèle, alors :

$$\Pi_i(p_1^*, p_2^*) = (c - c)q_i - bK_i < 0. \tag{2.47}$$

Donc (p_1^*, p_2^*) ne peut être un équilibre, puisque les deux firmes forment des profits négatifs (vendre moins cher que le coût de production) qu'elles pourraient éviter en augmentant leurs prix.

Preuve 2.1. *Si la firme 2 augmente légèrement son prix $p_2 = p_2^* + \varepsilon > c$, la demande va prioritairement s'adresser à la firme 1 ($D_1(p_1^*, p_2) = D(p_1^*)$). Mais celle-ci ne pourra la satisfaire totalement ($D_1(c) > K_1$).*
La demande résiduelle (Hypothèse.2.1 ou Hypothèse.2.2) va s'adresser à la firme 2. Le profit de la firme 2 devient alors

$$\Pi_2(p_1^*, p_2) > 0 > \Pi_2(p_1^*, p_2^*). \tag{2.48}$$

La firme 2 a donc intérêt à augmenter son prix de $p_2^* \to p_2$.
Par conséquent $p_1^* = p_2^* = c$ ne peut être un équilibre. L'existence de capacités limitées élimine donc l'équilibre de Bertrand et le paradoxe qui en résulte.

- **L'existence de l'équilibre de Bertrand-Edgeworth**

L'existence de l'équilibre de *Nash* en stratégies pures du modèle de *Bertrand-Edgeworth* a été démontré pour le cas d'une fonction de demande linéaire que ce soit pour des grandes capacités ($K \gg 0$) ou de petites capacités (*Tirole* [128] en 1988, *Wolfstetter* [135] en 1993). Par contre, pour des capacités moyennes, le modèle a seuleument un équilibre en stratégies mixtes. Mais, ce modèle est bien connu qu'en général ne possède pas un équilibre en stratégies pures. Cependant, les résultats récents de *Dasgupta* et *Maskin* montrent qu'il existe toujours un équilibre de Nash en stratégies *mixtes* ([31], [32]). L'équilibre en stratégies mixtes a été aussi calculé par *Beckman* [14] (en 1965) pour un *rationnement proportionnelle* de la demande et par *Levitan* et *Shubik* (1972) pour un *rationnement efficace* (voir Hypothèse.2.1) de la demande [**?**]. Plus tard en 1999, *Tasnadi* a donné dans son article [125] des conditions nécessaires et suffisantes qui sont imposées sur la fonction de demande pour garantir l'existence de l'équilibre de *Nash* en stratégies *pures* du jeu de *Bertrand-Edgeworth* dans la cas d'un rationnement *efficace* de la demande.

2.5.2.2 La différenciation des produits

Le modèle de *Bertrand* suppose l'existence d'un produit homogène. Or si l'on remet en cause cette hypothèse, les firmes peuvent éliminer le paradoxe du *Bertrand*, en différenciant leur produit peuvent avoir, localement, un pouvoir de monopole, ou elles peuvent entrer dans des situations d'interactions stratégiques. Cette différenciation concerne la localisation (différenciation horizontale [61]) ou sa qualité du produit (différenciation verticale [89]). La différenciation des produits joue comme une barrière à l'entrée lorsque les consommateurs sont particulièrement fidèles à une sorte de produit, celle produite par les firmes déjà en place.

Remarque 2.7. *Le modèle de* Bertrand *et le modèle de Cournot sont les modèles de base de l'interaction non répétée (statique) entre oligopoleurs produisant le même produit. Ce qui distingue vraiment le mode de concurrence en prix de celle en quantités n'est pas vraiment la variable stratégique de chaque firme, mais plutôt la réaction stratégique que chacune anticipe pour ses rivales. Certains concepts peuvent justifier l'emploi des quantités : lorsque les capacités de production doivent être fixées pour le long terme (exp : capacité de production), alors que les prix sont rapidement ajustés pour solder le marché au moment des ventes. En effet,* Kreps *et* Scheinkman *(1983) ont en montré qu'un modèle de concurrence en prix (décision simultanée) précédé d'une étape de choix de capacité (décision à long terme) peut, sous certaines hypothèses de rationnement des consommateurs, conduire aux mêmes résultats que le modèle en une étape de concurrence en quantité. Ce résultat a souvent été cité pour justifier l'utilisation de l'équilibre de* Cournot.

Le véritable renouveau qu'a initié la théorie de l'oligopole est vraisemblablement lié à l'introduction du modèle en deux étapes, introduisant la dimension temporelle. Cette idée était déjà présentée dans le modèle de **Stackelberg** (1934), où une firme en place décide de son choix de quantité, avant un entrant potentiel, modélisant ainsi des stratégies de préemption (dans les problèmes de barrières à l'entrée).

2.5.3 Modèle de Stackelberg (1934)

Dans le modèle de *Cournot* (concurrence en quantités) et de *Bertrand* (concurrence en prix), les firmes agissent ou jouent simultanément et aucune d'elles ne bénéficient d'un rapport de force a priori favorable relativement à l'autre. Or, dans la réalité des marchés oligopolistiques, il est fréquent qu'une firme domine ses rivales, par exemple parce qu'elle détient initialement une position de monopole avant que le marché s'ouvre à la concurrence.
Près d'un siècle après l'élaboration du modèle de *Cournot* (1838), l'allemand *Heinrich Von Stackelberg* (1934) le réhabilite en apportant une modification substantielle, ouvrant sur l'analyse des situations de concurrence dynamique ou asymétrique [121]. La seule différence avec celui de *Cournot* est que ce modèle est caractérisé par l'existence d'une précédence dans l'annonce des stratégies des deux firmes : une firme se voit assigner le rôle du leader (premier niveau de décision) annonce sa stratégie au suiveur (second niveau de décision) dans la détermination de sa propre stratégie[8] [122]. Le paradigme de *Stackelberg* fait l'hypothèse que le leader (la firme dominante) agit en connaissant la réaction optimale du suiveur (la firme dominée) à son annonce[9].

- **Présentation du duopole de Stackelberg**

Remarque 2.8. *On garde les mêmes notations pour les ensembles de stratégies, les fonctions de profit, les fonctions de coût et la fonction de demande qui sont définies dans le modèle de Cournot.*

La fonction inverse de demande du marché, $D^{-}(Q) = P(Q)$, est supposée strictement décroissante $(P^{'}(Q) < 0,\ \forall Q \in Q_i)$ et concave $(P^{''}(Q) \leq 0\ \forall Q \in Q_i)$.
La fonction du coût de la firme $i \in \mathcal{N}$, $C_i(q_i)$, est supposée strictement croissante $(C_i^{'}(q_i) > 0,\ \forall q_i \in Q_i)$ et convexe $(C_i^{''}(q_i) \geq 0\ \forall q_i \in Q_i)$. Le jeu dynamique de *Stackelberg* se déroule en deux étapes :
1. Dans la première étape, la firme leader (supposée la firme 1) choisit une quantité quelconque $q_1 \in Q_1$ à produire,
2. Dans la deuxième étape, la firme 2 (suiveuse) décide à son tour de son propre niveau de production, q_2, en réagissant à la quantité q_1 fournie par la firme leader suivant une fonction de réaction R_2 où :

$$q_2 \in R_2(q_1) = arg \max_{q_2^{'} \in Q_2} \Pi_2(q_1, q_2^{'}), \tag{2.49}$$

ou bien :

$$R_2(q_1) = \{q_2^{*} \in Q_2 /\ \ \Pi_2(q_1, q_2^{*}) = \max_{q_2^{'} \in Q_2} \Pi_2(q_1, q_2^{'}), \qquad \text{pour tout } q_1 \in Q_1\}. \tag{2.50}$$

[8]En terme de la théorie des jeux, ce modèle est appelé jeu séquentiel.

[9]Notons bien que la *programmation bi-niveaux* tient son origine à partir des travaux de *V. Stackelberg* dans le contexte de l'économie des marchés de concurrence imparfaite.

Noter que R_2 est la fonction de meilleure réaction de la firme 2 (appelée *règle de décision optimale* au sens de la théorie des jeux). Elle est la solution en q_2' de la condition d'optimalité du premier ordre du problème de maximisation de la firme 2 suivante :

$$q_2' P'(q_1 + q_2') + P(q_1 + q_2') - C_2'(q_2') = 0, \tag{2.51}$$

Pour maximiser le profit de la firme 1 (leader), cette dernière intègre le comportement anticipé par la firme 2 (suiveuse) dans la détermination de sa stratégie optimale $q_2 \in R_2(q_1)$, qui est sa meilleure réaction à la décision q_1. Par conséquent, le programme de maximisation du profit de la firme leader est formulé comme un programme bi-niveau suivant :

$$\max_{q_1 \in Q_1} \Pi_1(q_1, R_2(q_1)) \equiv \max_{q_1 \in Q_1} \; [q_1 P(q_1 + R_2(q_1)) - C_1(q_1)], \tag{2.52}$$

$$\text{où} \left\{ \; R_2(q_1) = arg \max_{q_2 \in Q_2} \; \Pi_2(q_1, q_2) \equiv R_2(q_1) = arg \max_{q_2 \in Q_2} \; (q_2 P(q_1 + q_2) - C_2(q_2)). \right.$$

où $\Pi_i : \; Q_1 \times Q_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q_i \in Q_i \subset R_+^{n_i}$, et $R_2 : \; Q_1 \longrightarrow Q_1$ est la fonction de réaction du suiveur.
Le problème (2.52) est appelé *modèle standard hiérarchique* de *Stackelberg*. C'est-à-dire, un modèle dans lequel chaque firme choisit son offre séquentiellement.

Définition 2.11. [Équilibre de Stackelberg]
S'il existe une application $R_2 : \; Q_1 \longrightarrow Q_2$ telle que pour toute valeur fixée $q_1 \in Q_1$,

$$\Pi_2(q_1, R_2(q_1)) \geq \Pi_2(q_1, q_2), \;\; \forall \;\; q_2 \in Q_2, \tag{2.53}$$

et s'il existe $q_1^* \in Q_1$ tel que

$$\Pi_1(q_1^*, R_2(q_1^*)) \geq \Pi_1(q_1, R_2(q_1)), \;\; \forall \;\; q_1 \in Q_1, \tag{2.54}$$

alors, la paire (q_1^*, q_2^*), où $q_2^* = R_2(q_1^*)$ est appelé *l'équilibre de Stackelberg* du problème (2.52).

Remarque 2.9. *Selon la définition (2.11), l'équilibre de* Stackelberg *se rapporte à une stratégie optimale du leader (firme 1) si le suiveur réagit selon sa stratégie optimale, chaque fois que le leader annonce en premier son choix.*
*En supposant que $R_2(q_1)$ est un singleton (*Basar *et* Olsder *(1982, [13]);* Mallozzi *et* Morgan *(1995, [77])), ce qui signifie que la réaction du suiveur à toute stratégie du meneur est unique. Cependant, lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite, on pourrait assister à une ambigüïté dans les réactions du suiveur. Si $R_2(q_1)$ n'est pas unique, le concept de solution de* Stackelberg *introduit dans la solution ci-dessus (définition 2.11) n'est pas directement applicable et par conséquent, les niveaux de gain réalisable du leader.*

- **Caractérisation de l'équilibre de Stackelberg**

Plusieurs travaux ont été réalisés concernant l'existence et l'unicité de *l'équilibre hiérarchique de Stackelberg* du problème (2.52). Sous les hypothèses de la linéarité de la fonction de demande et les fonctions du coût, *Boyer* et *Moreax* (1986, [22]), *Shinkai*, *Okamura* et *Vives* (1988, [131]) ont montré l'existence et l'unicité de l'équilibre hiérarchique de *Stackelberg*.
En supposant que le coût marginal de production de chaque firme est nulle et que la fonction de demande est de la forme $P(Q) = 1 - p^{\alpha}, \alpha > 0$, *Anderson* et *Engers* (1992, [6]) ont donnée les conditions d'existence et d'unicité de l'équilibre de *Stackelberg*. Dans l'article de *Marhfour* (2000, [78]), l'auteur a donné les conditions d'existence et de stabilité de l'équilibre de *Stackelberg* en stratégies *mixtes*.

• Application au cas de duopole linéaire :

Suppose que la fonction inverse de demande du marché est linéaire : $p = P(Q) = a - Q$, avec $Q = q_1 + q_2$. Soit $C_i(q_i) = cq_i$, la fonction du coût de production de la firme i, où c est le coût marginal de production supposé identique pour les deux firmes (duopole symétrique).

Déroulement du jeu : À la première période, la firme 1 choisit une quantité $q_1 \in Q_1$ à produire. Ce choix q_1 est observé par la firme 2 qui décide de produire $q_2 = R_2(q_1)$ à la seconde période où $R_2(.)$ est la fonction de meilleure réaction de la firme 2 (dominée). Elle est définie par :

$$R_2(q_1) = \{q_2^* \in Q_2 / \ \ \Pi_2(q_1, q_2^*) = \underset{0 \le q_2 < +\infty}{max} \ \Pi_2(q_1, q_2), \qquad \text{pour tout } q_1 \in Q_1\} \tag{2.55}$$

Cette fonction R_2 est obtenue en résolvant le problème suivant :

$$\underset{+\infty > q_2 \ge 0}{max} \Pi_2(q_1, q_2) = \underset{\infty > q_2 \ge 0}{max} \ q_2[a - q_1 - q_2 - c] \tag{2.56}$$

On obtient alors :

$$q_2^* = R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-q_1-c}{2} & \text{si } q_1 < a - c; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.57}$$

Donc, la fonction de réaction de la firme 2 est donnée par :

$$R_2(q_1) = \{q_2 \in Q_2 / \ \ q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}, \qquad \text{pour tout } 0 \le q_1 \le a - c\}$$

De même, la firme 1 sait que la firme 2 va sélectionner $q_2 = R_2(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2}$. Le problème de la firme 1 devient alors :

$$\begin{aligned} \underset{+\infty > q_1 \ge 0}{max} \Pi_1(q_1, R_2(q_1)) \ &\equiv \ \underset{+\infty > q_1 \ge 0}{max} \ q_1[a - q_1 - R_2(q_1) - c] \\ &\equiv \ \underset{+\infty > q_1 \ge 0}{max} \ q_1[\frac{a - q_1 - c}{2}] \end{aligned} \tag{2.58}$$

Ce qui nous donne : $q_1^* = \frac{a-c}{2}$ et $q_2^* = R_2(q_1^*) = \frac{a-c}{4}$.
Cependant, $q_s^* = (q_1^*, q_2^*)$ avec $q_2^* = R_2(q_1^*)$ est appelé l'**équilibre de Stackelberg**.
Les profits de duopole de *Stackelberg* sont donnés par :

$$\begin{cases} \Pi_1(q_s^*) = \frac{(a-c)^2}{8} & \longrightarrow \text{ pour le leader} \\ \Pi_2(q_s^*) = \frac{(a-c)^2}{16} & \longrightarrow \text{ pour le suiveur.} \end{cases} \tag{2.59}$$

Remarque 2.10. *Si on compare cet équilibre (séquentiel) avec celui de* Cournot *(simultané), on trouve que la quantité totale du* Stackelberg, $\frac{3(a-c)}{4}$, *est supérieure à celle trouvée dans le jeu de Cournot,* $\frac{2(a-c)}{3}$. *De ce fait, le prix d'équilibre du marché du Cournot,* $\frac{a+2c}{3}$, *est supérieur à celui du jeu de* Stackelberg, $\frac{4-3(a-c)}{4}$ *, c'est pourquoi les consommateurs préfère ce duopole de celui de* Cournot.

Remarque 2.11. Bowley *(1924) a étudié le cas où les deux firmes ont un comportement de leader. Dans ce cas, les deux firmes essaient d'établir un point d'intersection entre leur courbes d'iso-profit et la courbe de réaction de leur concurrent [21]. En se basant sur les conjectures de* Cournot*(voir l'équation 2.17),* bowley *récrit la condition de premier ordre de* Cournot*(équation (2.19)) comme suit :*

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = P(Q) + q_i P^{'}(Q) - C_i^{'}(q_i) + q_i P^{'}(Q) \underbrace{\frac{dq_j}{dq_i}}_{\equiv 0}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \tag{2.60}$$

où le dernier terme de (2.60) est appelé variation conjecturale de Bowley. *La partie* $q_i P^{'}(Q)$ *est la dérivée de la fonction du profit de la firme i par rapport au niveau de production de la firme j, i.e* $q_i P^{'}(Q) = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j}$. *Comme le montre la figure (Fig.2.9), ces comportements sont incompatibles et donc il n'existe pas d'équilibre dans ce cas. Les deux firmes se feront la* guerre *jusqu'à ce que l'une d'entre elles acceptent de suivre l'autre. Donc c'est une situation instable qui conduit à un duopole de* Stackelberg.

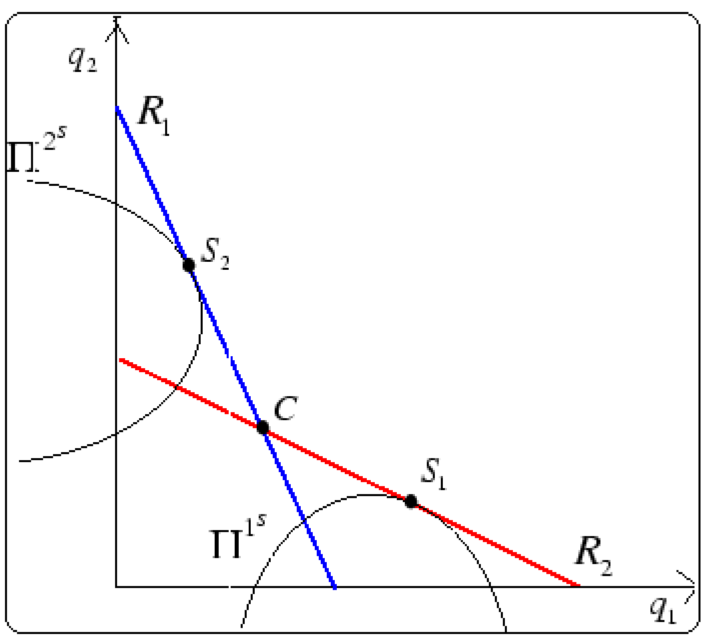


FIG. 2.9 – Deux firmes ont un comportement de leader

Remarque 2.12. ***[Modèle de Stackelberg en prix]***
Le modèle original de Stackelberg *(2.52) est un jeu de choix séquentiel de quantité sur un marché de produits homogènes. Par contre, il y a peu de littérature traitant le jeu de* Stackelberg *en prix sur un marché de biens homogènes. Plus tard il a été prolongé au marché de biens différenciés pour un jeu de choix en prix [33]. Dans l'article [33], l'auteur* K.Ghosh.Dastidar *caractérise l'équilibre du duopole du* Stakelberg *où les variables stratégiques des firmes sont les prix. Il démontre que si : la fonction de demande est concave, la fonction du coût de production est strictement convexe et sous l'hypothèse d'un* rationnement efficace *de la demande, il existe un équilibre parfait en sous-jeu* unique *où le suiveur pratiquera un prix strictement plus élevé que le leader, mais les deux firmes obtiendraient des profits égaux.*

2.6 Oligopole coopératif et collusion

Lorsque les firmes sont en concurrence à la *Cournot* ou à la *Bertrand*, les profits agrégés sont plus faibles que ceux d'un monopole. Les firmes ont, donc, intérêt à s'entendre pour limiter la concurrence entre elles et essayer d'obtenir les mêmes profits qu'un monopole. Toutefois, les ententes ne sont pas du même ordre, et l'on peut les distinguer selon la nature de l'accord. Des accords formels, dont le cartel est l'exemple type et des accords implicites ou tacites (collusion).

2.6.1 Le cartel

Un cartel est un oligopole où quelques vendeurs obtiennent le monopole d'un marché par une entente explicite. Cette entente est généralement mise en oeuvre pour fixer les prix et les critères qui les régissent et est destinée à empêcher l'arrivée de nouveaux concurrents sur le marché. Il en existe des célèbres :

- L'OPEP est un cartel entre pays producteurs de pétrole,
- De Beers est un cartel entre vendeurs de diamants.

Soit N firmes, $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geq 2$ produisant un bien homogène et se font la concurrence en quantité. La fonction inverse de demande du marché est donnée par $P(Q)$ où $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ est l'offre totale mis sur le marché. Les firmes s'entendent donc pour offrir des quantités qui maximisent la somme de leur profit ou de leur profit joint. Dans cet oligopole organisé en cartel, l'accord est donc le profil de stratégies $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_N^*)$ qui est solution du programme suivant :

$$\begin{cases} \Pi_T(q_1, q_2, \ldots, q_N) = QP(Q) - \sum_{i=1}^{N} C_i(q_i) \longrightarrow \underset{q_1, q_2, \ldots, q_N}{max} \\ q_i \in [0, +\infty[, \qquad\qquad i = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.61}$$

La condition d'optimalité du premier ordre du problème (2.61) nous donne :

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{N} q_i P(\sum_{i=1}^{N} q_i))}{\partial q_i} = \frac{\partial(C_i(q_i))}{\partial\ q_i} \tag{2.62}$$

La partie de gauche de l'égalité (2.62) exprime la variation de la recette totale provoquée par une petite variation de la quantité produite par le producteur i, et la partie droite exprime la variation du coût engendrée par la même petite variation de q_i (coût marginal du producteur i). La recette marginale (notée RM), provoquée par une variation donnée de production q est la même, quel que soit le producteur qui a modifié sa production. En effet, l'influence d'une production additionnelle sur l'offre totale et sur le prix est identique, que cette production additionnelle vienne d'un producteur ou d'un autre. On obtient donc comme condition de maximisation du profit :

$$RM(Q^*) = \frac{\partial(C_i(q_i^*))}{\partial\ q_i} \tag{2.63}$$

Remarque 2.13. *Cette égalité signifie que le profit total est maximum à condition que toutes les firmes du cartel aient leur coût marginal au même niveau, correspondant à la recette marginale du marché. Cette condition est la même que la condition de maximisation du profit d'un monopole (voir l'équation 2.14 du chapitre 2).*

Mais la condition d'égalité du coût marginal n'est certainement pas une condition facile à remplir dans la réalité des ententes.

2.6.2 La collusion

Chamberlin ([26], 1929) a critiqué les modèles de *Cournot* et en particulier celui de *Bertrand* où il a supposé que dans un oligopole à produit homogène, les firmes peuvent se rendre compte de leur interdépendance répétée et sont alors capables d'établir le prix de monopole d'une manière implicite. De plus, en pratique, les firmes sont en général dans une situation *d'interaction répétée*. Donc, le meilleur domaine d'application de *la théorie des jeux répétés* est sans aucun doute la concurrence oligopolistique et en particulier dans *les problèmes de coopération* ou d'*entente*. Dans un tel jeu, les firmes entretiennent donc des relations non-coopératives qui sont équivalentes stratégiquement à un *dilemme du prisonnier*. Comme les firmes ne peuvent légalement s'accorder sur une solution coopérative, elles doivent le faire de manière tacite en tirant parti de leurs interactions répétées sur le marché. C'est là qu'interviennent les codes pénaux comme mode de garantie de l'accord tacite entre les firmes. En effet, *Friedman* ([47], 1971) est le premier à proposer un code pénal crédible. Ce dernier est composé de punitions symétriques et stationnaires consistant à jouer indéfiniment l'équilibre de *Cournot-Nash* du jeu constituant (jeu de *Cournot* du chapitre 2). Les stratégies proposées par *Friedman* et connues sous le nom de **stratégies de déclic**), prescrivent de suivre initialement un sentier de production qui donne un gain actualisé moyen supérieur au profit de *Cournot*. Ce sentier est appelé le *sentier collusif*. Dès qu'une déviation est observée, les firmes déclenchent la procédure de punitions qui consiste à revenir à l'équilibre de *Cournot-Nash indéfiniment*.

- **Modélisation de la collusion**

Une stratégie de *déclic* peut être entièrement décrite par deux sentiers : le sentier collusif $Q^0 = \{q^o, q^o, \ldots, q^o, \ldots\}$ et le sentier de punition $Q^c = \{q^c, q^c, \ldots, q^c, \ldots\}$ tels que le vecteur des quantités collusives q^o domine strictement au sens de faible de *Pareto* le vecteur des quantités de *Cournot* q^c (i.e $\Pi_i(q^c) > \Pi_i(q)$ $\forall\ i = 1, \ldots, N$).
La stratégie de *déclic* est alors équivalente au profil de stratégies simples $\sigma(Q^o, Q^c)$.
Soit $\Pi_i^d(q^o) = \underset{y}{max}\ \Pi_i(y, q_{-i}^o)$: le profit *maximum de déviation* que le joueur i peut espérer si les $N-1$ autres joueurs produisent q_{-i}^o.
Freidman ([47], 1971) a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une collusion en stratégies de *déclic*.

Proposition 2.1. *[47] Soit $Q^c = \{q^c, q^c, \ldots, q^c, \ldots\}$ le sentier stationnaire de l'équilibre de* Cournot-Nash *du jeu constituant (jeu de* Cournot*). Pour tout sentier stationnaire $Q^0 = \{q^o, q^o, \ldots, q^o, \ldots\}$ tel que $\Pi_i(q^o) > \Pi_i(q^c)$ $\forall\ i = 1, \ldots, N$, les stratégies de* déclic *$\sigma(Q^o, Q^c)$ forment un équilibre parfait du jeu de* Cournot répété *si et seulement si :*

$$\Pi_i^d(q^o) - \Pi_i(q^o) \leq \frac{\delta}{1-\delta}[\Pi_i(q^o) - \Pi_i(q^c)], \quad \forall\ i = \overline{1, N}. \tag{2.64}$$

L'inégalité (2.64) garantit la non profitabilité de ces déviations. Le terme de gauche représente le gain net d'une déviation de q^o et le terme de droite son coût (différence actualisée entre le profit *collusif* et le profit de *Cournot*.
Puisque $\delta \in [0, 1]$, l'inégalité (2.64) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$1 \geq \delta \geq \frac{\Pi_i^d(q^o) - \Pi_i(q^o)}{\Pi_i^d(q^o) - \Pi_i(q^c)}, \quad \forall\ i = 1, \ldots, N. \tag{2.65}$$

Donc, une condition sur la valeur du facteur d'actualisation est obtenue. Le terme de droite de l'inégalité (2.65) correspond au *facteur d'actualisation* seuil, en dessous duquel les firmes ne peuvent soutenir le sentier collusif q^o à l'aide de stratégies de *déclic*. *Friedman* montre donc, que des punitions de Nash permettent de soutenir n'importe quel profit qui domine au sens de Pareto le profit de Cournot si le facteur d'actualisation utilisé par les firmes est suffisamment proche de 1.

2.7 Conclusion

Comme l'organisation industrielle tire l'essentiel de ses outils de la microéconomie et de la théorie des jeux, donc, avant de présenter les modèles mathématiques d'application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle, nous avons présenté dans ce chapitre les notions de base liées à la théorie de l'organisation industrielle en introduisant : la notion du marché, la concurrence pure et parfaite. Ce qui est important dans ce chapitre est la présentation des modèles d'oligopoles de base de la concurrence imparfaite à savoir le modèle de *Cournot* où les firmes se concurrencent en quantités, le modèle de *Bertrand* où les firmes se concurrencent en prix et le modèle de *Stackelberg* qui sont considérés aujourd'hui comme une référence incontournable pour de nombreux économistes et théoriciens des jeux concernant l'application des modèles de jeux dans l'organisation industrielle.

3

Modèles d'application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle

Introduction

L'organisation industrielle a connu de remarquables changements dans la dernière décennie. Des modèles cohérents de stratégies interne et externe de l'entreprise ont vu le jour grâce aux progrès spectaculaires de la théorie des organisations et de la théorie des jeux [128]. Cette dernière s'est imposée donc comme un outil qui permet de mieux analyser les contextes de concurrence imparfaite, notamment celui de l'oligopole, et l'évolution des structures de marché. Donc, la théorie des jeux a encore trouvé en organisation industrielle un champ d'application fructueux, lui procurant encore un essor très important. En effet, les articles et ouvrages récents portant sur la théorie des jeux sont très nombreux et témoignent de la richesse et des possibilités d'exploitation de cette théorie. À titre illustratif, depuis 1980, 60% des articles d'économie industrielle publiés dans les cinq revues généralistes d'économie les plus citées, mobilisent la théorie des jeux [25], à savoir la théorie des jeux à information complète et à information incomplète, jeux répétés, jeux stochastiques,...etc.

3.1 Application de la théorie des jeux à information complète

La théorie des jeux à information complète apparaît comme une technique très employée dans la nouvelle économie industrielle dans les années quatre-vingts. Plusieurs travaux (*Friedman* (1977), *Dixit* (1979-1980), *Ulph*(1987), *Tirole* (1988), *Martin* (1995),...) ont discuté l'application des jeux à information complète dans l'économie industrielle. En effet, les deux livres essentiels qui traitent les applications de la théorie des jeux à information complète et constituent le point de départ de l'organisation industrielle, sont :

- Le livre de *Friedman* intitulé *Oligopole et la théorie des jeux* [48] où l'auteur a été intéressé par le lien étroit entre la théorie de l'oligopole et la théorie des jeux. La première partie est consacrée aux modèles d'oligopoles (statiques puis dynamiques) et la seconde à la théorie des jeux non coopératifs (statiques puis dynamiques).
- Le livre de *J. Tirole*[1] intitulé **la théorie de l'organisation industrielle** [128], où l'auteur donne une synthèse de travaux récents sur les stratégies de firmes. Après avoir consacré une première partie à l'étude de l'exercice du pouvoir du monopole, l'auteur expose, dans une deuxième partie, un certain nombre de stratégies de firmes rivales où la théorie des jeux à information complète occupe une place de choix. Il présente ainsi notamment les travaux récents sur les barrières à l'entrée.

Un exemple d'application des jeux à *information complète* dans le contexte de *la concurrence oligopolistique* est l'objet de l'article [24] où une formule explicite de l'équilibre de *Cournot-Nash* est proposée lorsque des producteurs en concurrence sur des marchés différenciés sont contraints en capacité. La prise en compte de contraintes de capacité est motivée par la question du rôle des capacités de production dans l'obtention de parts de marché.

La concurrence internationale des producteurs de vigne en est une illustration particulièrement intéressante dans le secteur agro-alimentaire. Plus précisément, deux producteurs (la France et l'Australie) se font la **concurrence en quantité** sur deux marchés et sont *contraints en capacité* par *les surfaces plantées* en vigne. Du côté de la demande, le bien homogène proposé est destiné aux deux marchés : britannique et nord américain où les variables stratégiques de chaque producteur sont les quantités que chacun des producteurs décide d'allouer aux différents marchés, sous contrainte de capacité.

Après avoir établi la relation non triviale qui existe entre **l'optimum contraint** et la projection sur l'ensemble des contraintes de **l'optimum non contraint**, les auteurs ont montré que la solution du problème se réduit à la recherche du zéro d'une certaine fonction.

[1] Ses recherches sur l'organisation industrielle lui valent aujourd'hui de recevoir le médaille d'or 2007 du Centre Nationale de Recherche Scientifique (CNRS).

D'un point de vue théorique, l'introduction de ces contraintes dans un modèle de concurrence en prix a été étudié par *Kreps* et *Sheinkmann* [67]. Les auteurs montrent que dans un jeu à deux étapes avec choix de capacité puis concurrence en prix, et ce sous certaines règles de rationnement, l'équilibre obtenu est identique à l'équilibre obtenu sans contraintes de capacité dans une concurrence en quantité. Il est cependant pertinent d'introduire des contraintes de capacité au sein de l'équilibre de *Cournot*.

Le modèle présenté dans l'article [24](que nous allons décrire dans la section suivante), se limite au cas d'une demande et d'une fonction de coût linéaires. D'autre part, les contraintes de capacité sont supposées fixées, la concurrence entre les producteurs s'effectue dans un contexte multi-marchés.

3.1.1 Description du modèle

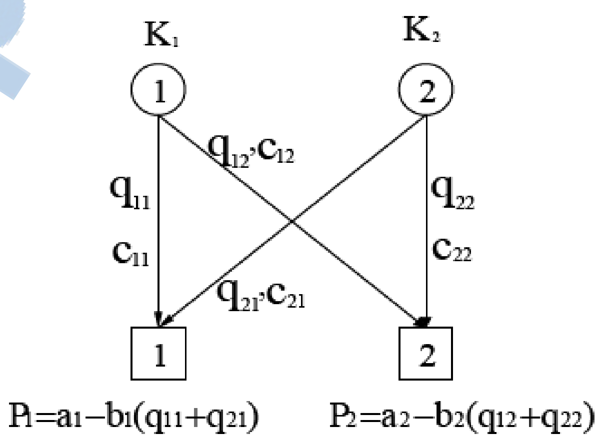
Soit q_{ij} la quantité que le producteur $i \in \{1,2\}$ destine au marché $j \in \{1,2\}$. Le prix p_j sur chaque marché est une fonction linéaire et décroissante de la quantité totale offerte : $Q_j = q_{1j}+q_{2j}$:

$$\begin{cases} p_1(Q_1) = a_1 - b_1(q_{11}+q_{21}), \\ p_2(Q_2) = a_2 - b_2(q_{12}+q_{22}). \end{cases} \tag{3.1}$$

Chacun des deux producteurs peut fournir les deux marchés, sous sa contrainte de capacité, c-à-d que :

$$\begin{cases} q_{11}+q_{12} \leq K_1, \\ q_{21}+q_{22} \leq K_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Le schéma suivant précise les flux de vigne, des régions productrices vers les marchés consommateurs. Les producteurs sont représentés par des cercles (1 : producteur français, 2 : producteur



Australien) et les marchés par des carrés (1 : Grande Bretagne, 2 : États-Unis).

Soit c_{ij} la somme des coûts de production, des coûts de transports et autres coûts proportionnels à la quantité produite, pour le producteur i lorsqu'il dessert le marché j, qui sera toujours défini par la relation bilatérale existant entre pays producteurs et marchés consommateurs (distance, politique douanière,... etc).

• **Fonctions objectifs** :

L'objectif des deux producteurs est de maximiser leurs profits qui ont pour expression :

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1, q_2) = [p_1 - c_{11}]q_{11} + [p_2 - c_{12}]q_{12}, \\ \Pi_2(q_1, q_2) = [p_2 - c_{21}]q_{21} + [p_2 - c_{22}]q_{22}, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $q_i = (q_{i1}, q_{i2})$ est le vecteur des quantités destinées aux deux marchés par le producteur i.
L'objectif de chaque producteur est de maximiser sous contraintes de sa capacité de production son profit en tenant compte des décisions des quantités mises sur chaque marché par son concurrent.
Le programme d'optimisation final de chaque producteur $i \in \{1, 2\}$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} \underset{q_i}{max} \quad \Pi_i(q_i, q_j) \\ q_{i1} + q_{i2} \leq K_i \\ q_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, 2. \\ i = j = 1, 2 \ \text{ avec } i \neq j. \end{cases} \tag{3.4}$$

Équilibre du jeu : Soient

- $q_i^{BR}(q_j)$: meilleure réponse du producteur i à la stratégie q_j de du producteur j ;
- $\bar{q}_i$: stratégie du producteur i lorsqu'il est contraint en capacité ;
- q_i^* : stratégie d'équilibre de *Nash* du producteur i non contraint en capacité ;
- $\bar{q}_{ij}^*$: quantité mise sur le marché j par le producteur i à l'équilibre de *Nash* avec contraintes de capacité.

• **Calcul d'équilibre sans contraintes** :

L'équilibre sans contrainte est l'équilibre de *Cournot-Nash*. Il sert comme un point de départ pour résoudre l'équilibre sous contrainte de capacité. En remplaçant les prix par leurs valeurs dans l'expression des profits (3.3), on obtient :

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1, q_2) = [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{11}]q_{11} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{12}]q_{12} = \Pi_{11}(q_1, q_2) + \Pi_{12}(q_1, q_2), \\ \Pi_2(q_1, q_2) = [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{21}]q_{21} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{22}]q_{22} = \Pi_{21}(q_1, q_2) + \Pi_{22}(q_1, q_2), \end{cases} \tag{3.5}$$

où Π_{ij} est la part du profit Π_i qui provient de la quantité q_{ij}.
Étant données les propriétés (continuité, concavité) des fonctions de profit, la condition du premier ordre, $\frac{\partial \Pi_{ij} \Pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_{ij}} = 0$, fournit la meilleure réponse sur chaque marché du producteur i à la

quantité mise sur le même marché par le producteur j :

$$\begin{cases} q_{11}^{BR}(q_{21}) = (a_1 - b_1 q_{21} - c_{11})/2b_1, \\ q_{12}^{BR}(q_{22}) = (a_2 - b_2 q_{22} - c_{12})/2b_2, \\ q_{21}^{BR}(q_{11}) = (a_1 - b_1 q_{11} - c_{21})/2b_1, \\ q_{22}^{BR}(q_{12}) = (a_2 - b_2 q_{12} - c_{22})/2b_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

L'équilibre de *Cournot-Nash* s'obtient donc par substitution :

$$\begin{cases} q_{11}^* = (a_1 + c_{21} - 2c_{11})/3b_1, \\ q_{12}^* = (a_2 + c_{22} - 2c_{12})/3b_2, \\ q_{21}^* = (a_1 + c_{11} - 2c_{21})/3b_1, \\ q_{22}^* = (a_2 + c_{12} - 2c_{22})/3b_2. \end{cases} \tag{3.7}$$

On en déduit que $p_j^* = (a_j + c_{1j} + c_{2j})/3$ est le prix à l'équilibre sur chacun des deux marchés, et que le profit à l'équilibre s'écrit :

$$\Pi_i^*(q_1^*, q_2^*) = b_1 q_{i1}^{*2} + b_2 q_{i2}^{*2}, \quad \forall\ i = 1, 2. \tag{3.8}$$

Remarque 3.1. *On remarque que l'équilibre de* Cournot-Nash *ne dépend que des coûts c_{ij} des producteurs sur les différents marchés.*

Maintenant, comment l'introduction de contraintes de capacité va-t-elle influencer l'équilibre de *Cournot-Nash* ?

• **Calcul d'équilibre sous contraintes** :

- Fonction de meilleure réponse et projection : Dans un premier temps, on cherche à savoir comment l'introduction des contraintes de capacité influence la fonction de meilleure réponse.

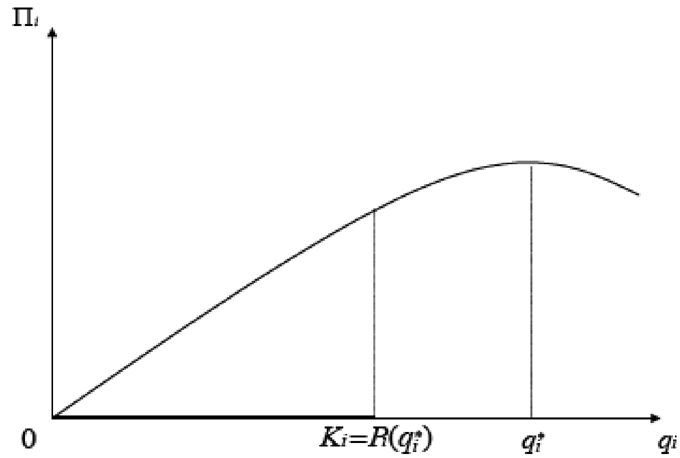
Lemme 3.1. *[24] La fonction de meilleure réaction d'un producteur lorsqu'il est contraint en capacité est la projection sur l'ensemble des contraintes de sa meilleure réponse sans contraintes, c-à-d :*

$$\bar{q}_i^{BR} = P_{S_i}(q_i^{BR}), \tag{3.9}$$

où P_{S_i} est la projection sur l'ensemble :

$$S_i = \{q_i = (q_{i1}, q_{i2}) \in R_+^2, \quad q_{i1} + q_{i2} \leq K_i\}. \tag{3.10}$$

Preuve 3.1. *La courbe de la fonction profit d'un producteur i lorsque la quantité du concurrent est fixée, est alors une parabole et l'ensemble des contraintes n'est autre que le segment $[0, K_i]$. Il est alors évident que s'il est contraint en capacité, la meilleure réponse du producteur i consiste à mettre la quantité K_i sur le marché si $K_i < q_i^*$, ne pas desservir le marché si $q_i^* < 0$, et à choisir la quantité q_i^* si $q_i^* \in [0, K_i]$. En d'autres termes sa meilleure réponse est le projeté de q_i^* (meilleure réponse sans contrainte) sur $[0, K_i]$.*



- Relation entre équilibre contraint et non contraint :
L'étape suivante qui est déterminante pour la suite de la résolution, est d'exprimer l'équilibre de *Nash* avec contrainte en fonction de l'équilibre de *Nash* non contraint.

Proposition 3.1. *[24] Les vecteurs $\bar{q}_1^*$ et $\bar{q}_2^*$ des quantités mises sur les 2 marchés par chaque producteur i à l'équilibre de* Nash *avec contrainte de capacité vérifient le système suivant :*

$$\begin{cases} \bar{q}_1^* = P_{S_1}[q_1^* - (\bar{q}_2^* - q_2^*)/2], \\ \bar{q}_2^* = P_{S_2}[q_2^* - (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2], \end{cases} \tag{3.11}$$

où P_{S_i} est la projection sur l'ensemble :

$$S_i = \{q_i \in R_+^2, \quad q_{i1} + q_{i2} \leq K_i\}. \tag{3.12}$$

Les auteurs (*Christophe Caron et Jacques-Alexandre Laye* [24]) montrent que la résolution du système d'équations (3.11) se ramène à la recherche d'un zéro d'une fonction.

Théorème 3.1. *Soit $\Delta = (q_1^* - \bar{q}_1^*) + (q_2^* - \bar{q}_2^*)$ la somme des écarts entre les vecteurs quantité à l'équilibre non contraint et à l'équilibre contraint. Trouver l'équilibre de Nash sous contraintes de capacité revient à résoudre en Δ l'équation :*

$$\psi(\Delta) = \Delta + P_{t_{-u_1^*}S_1}(\Delta) + P_{t_{-u_2^*}S_2}(\Delta) = 0 \tag{3.13}$$

où $P_{t_{-u_i^*}S_i}$ est la projection sur le translaté de S_i de vecteur $-u_i^*$

3.1.2 Extension du modèle

Parmi les extensions possibles du modèle, on peut souligner de futures directions de recherches :

1. La généralisation de cette approche au cas d'un duopole bi-critère dans lequel chaque producteur possède deux objectifs à optimiser.
2. Puisque les quantités d'équilibres sans et avec contraintes (système (3.7), système (3.11)) dépendent uniquement des coûts c_{ij} des producteurs sur les différents marchés, faire inclure dans le modèle des coûts particuliers (coûts de transport, coûts de communication droits de douanes, coût de négociation...) rend le modèle plus fiable et plus proche de la réalité,
3. Les fonctions de demande définies dans (3.1) sont supposées linéaires. Considérés ses fonctions non linéaires comme définies dans [90] en prenant :

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - b_1\sqrt{q_{11} + q_{21}}, \\ p_2 = a_2 - b_2\sqrt{q_{11} + q_{12}}. \end{cases}$$

   ou bien des fonctions aléatoires (car en général sont obtenue par estimation) constituent autant de développements possibles du modèle,
4. Le jeu est à information complète. En pratique, il est à information *incomplète*(manque d'information concernant : la demande sur chaque marché, le coût de production et de transport du concurrent ainsi que les capacités de production et les objectifs du chaque firme),
5. Le jeu étudié est un jeu *statique* (en une seule période). Dans la réalité, il s'agit d'un jeu répété à horizon fini ou infini.
6. Étudier la possibilité de collusion en prix de ces deux producteurs en faisant référence à l'article de *Bernheim* et *whinson* (1990) où ces derniers étudient les conditions sous lesquelles les contacts multi-marchés rendent la collusion tacite plus facile à soutenir.

3.2 Application de la théorie des jeux à information incomplète

Dans la première section, nous avons cité quelques applications des jeux à information complète. Par contre, l'univers économique dans lequel nous vivons est cependant un univers d'incertitude et d'information incomplète sur les caractéristiques des firmes [57]. En effet, la décentralisation de l'information et donc la nécessité pour les agents économiques d'agir en information incomplète est une caractéristique essentielle des systèmes économiques. Sa prise en compte a conduit les économistes à considérer les interactions sur le marché comme un jeu avec **asymétrie d'information** [128]. L'outil de base pour étudier ces asymétries d'informations est le jeu *bayésien.*

En fait, sur un marché d'oligopoles, les offreurs sont influencés par de nombreuses variables (leur propre fonction de coût, celles de leurs concurrents, l'état de la demande ou les potentialités du marché, les décisions stratégiques de leurs concurrents, etc...) qu'ils ne peuvent observer, ni estimer avec précision.
L'une des premières applications de la théorie des jeux à *information incomplète* a été l'étude des problèmes d'*appels d'offre*. Présentés sommairement dans l'article de *J. Pierre Ponssaed*. Ce sujet a été plus amplement développé dans un certain nombre d'articles dont celui de *R. Wilson* [134]. Les jeux à information incomplète ont ainsi été plus spécialement appliqués aux problèmes de barrières stratégiques à l'entrée (*Kreps* et Wilson [68], *Migroh* et *Roberts* [85], *P. Milgrom et J. Roberts* en 1982 [84]). Dans l'article [84], les auteurs constatent que la théorie des prix-limite[2] n'a de sens qu'en information incomplète.

3.2.1 Les jeux bayésiens et la stratégie du prix limite

Dans les premiers modèles qui posent le problème de prix limite (*Bain*(1949)[9], *Modigliani* (1958) [86])[3], les firmes installées sur le marché menacent de maintenir leurs productions actuelles même s'il y a entrée, ce qui conduirait à un prix post-entrée très faible et donc des pertes pour l'entrant. Toutefois, cette menace n'est guère crédible, car un tel comportement conduirait aussi à des pertes pour les firmes en place[4]. Une fois l'entrée est réalisée, il est dans l'intérêt des firmes déjà installées de s'en accommoder au mieux, par exemple en réduisant leurs productions.
Récemment, deux sortes de justification du prix limite ont été proposées :

1. Dans la première, le faible prix actuel est le résultat d'actions observables, prises par les firmes en place (par exemple investissement, publicité, choix de technologie), qui déterminent un comportement rationnel de post-entrée conduisant à des pertes pour l'entrant. Ces ripostes sont crédibles car les dépenses qui les permettent ont déjà été réalisées. Le prix faible aujourd'hui n'est qu'une conséquence de ces actions plus fondamentales ; on peut alors l'oublier et restreindre l'attention à l'étude des engagements réels que peut réaliser une firme pour décourager l'entrée (*Spence* (1977) [119], *Flaherty* (1980) [45], *Spulber* (1981) [120], *Fudenberg* et *Tirole* (1983) [50]).

2. La deuxième sorte de justification de la crédibilité d'un prix limite a été développée dans un contexte d'un coût faible avec information incomplète. Dans l'article de *Milgrom* et *Robert* (1982) que nous allons décrire son modèle, l'entrant ne sait pas si la firme en place a un

[2]Signifie un prix juste suffisant pour dissuader les entrants. Sous lequel, les firmes peuvent avoir intérêt à limiter leurs prix aujourd'hui pour décourager l'entrée demain.

[3]*Bain* et *Modigliani* pensent que le prix courant sur un marché influence le comportement des firmes qui envisagent d'entrer.

[4]Ceci a été noté pour la première fois par *Freidman*(1979).

coût faible ou un coût élevé. En effet, si le coût est faible, il conduit à une augmentation de la production et donc à un prix faible.

3.2.2 Description du modèle

On considère un monopole (firme 1) sur un marché où la fonction de demande inverse est donnée par $p = P(q) = a - bq, \quad a > 0, \ b > 0$ et q est la quantité offerte sur le marché. À la première période, le monopole doit décider de la quantité qu'il met sur le marché, et donc du prix. Ce prix sera observé par un entrant potentiel (firme 2) qui décidera ou non d'entrer à la deuxième période. S'il entre, il doit payer un coût fixe, K, il découvre le coût de la firme 1 et l'équilibre stratégique de deuxième période est représenté par un équilibre de *Cournot*.
Le coût marginal constant de la firme 1 peut être de deux *types*, soit faible $\underline{c}^1$ avec une probabilité π, soit élevé $\bar{c}^1$ avec une probabilité $(1-\pi)$. Le coût marginal de l'entrant potentiel, c^2, est constant et est connu par les deux firmes.

Les stratégies pures des firmes

Soit : $q_i^t \quad (i = 1, 2, \quad t = 1, 2)$, la production choisie par la firme i à la période t.
À la période 1, la firme 1 choisit sa production q_1^1 comme fonction de son coût. Une stratégie pure pour la firme 1 est donc donnée par :

$$q_1^1(.) : \quad \{\underline{c}^1, \bar{c}^1\} \to \mathbb{R}_+ \tag{3.14}$$

qui associe à toute valeur de son coût marginal $c^1 \in (\underline{c}^1, \bar{c}^1)$ une production de première période $q_1^1(c^1)$, ce qui lui procure à la première période un profit égale à :

$$f(q_1^1(c^1), c^1) = (a - bq_1^1(c^1) - c^1)q_1^1(c^1). \tag{3.15}$$

La firme 2 décide, au vu de q_1^1 (ou de p^1), d'entrer ou non. Sa décision d'entrer est notée e avec :

$$e = \begin{cases} 1, & \text{si elle entre;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Une stratégie pure est donc une application :

$$e(.) : \quad \mathbb{R}_+ \to \{0, 1\}. \tag{3.17}$$

qui associe à toute quantité observée $q_1^1 \in \mathbb{R}_+$, la décision $e(q_1^1) \in \{0, 1\}$. Deux cas peuvent se présenter :

1. Si $e = 0$, la firme 1 restera seule et aura le monopole. Sa production optimale, q_1^*, de monopole est est obtenue en maximisant la fonction (3.15) :

$$\begin{cases} \frac{df(q_1^1(c^1))}{dq_1^1} = a - 2bq_1^1 - c^1 = 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{a-c^1}{2b}, \text{ et} \\ \\ \frac{d^2 f(q_1^1(c^1))}{{dq_1^1}^2} = -2b < 0. \end{cases}$$

La quantité et le profit de monopole sont donnés par :

$$\begin{cases} q_1^*(c^1) = \frac{a-c^1}{2b}, \\ f_1^*(c^1) = \frac{(a-c^1)^2}{4b}. \end{cases} \tag{3.18}$$

2. Si $e = 1$, la firme 1 perd sa position de monopole. Les firmes constituent alors un duopole sur le marché (concurrence duopolistique) où se font la concurrence à la *Cournot* (les variables stratégiques sont les quantités). Donc, l'équilibre qui s'instaure sur le marché à la période 2 est un équilibre de *Cournot* (voir chapitre 2). On obtient alors :

$$\begin{cases} q_1^2(c^1) = \frac{a-2c^1+c^2}{3b} \\ q_2^2(c^1) = \frac{a-2c^2+c^1}{3b} \end{cases} \tag{3.19}$$

et, en notant $f_1^2(c^1)$ et $f_2^2(c^1)$ les profits des firmes 1 et 2 respectivement, on aura :

$$f_1^2(c^1) = \frac{(a-2c^1+c^2)^2}{9b} \tag{3.20}$$

et

$$f_2^2(c^1) = \frac{(a-2c^2+c^1)^2}{9b} - K \begin{cases} > 0, & \text{si } c^1 = \bar{c}^1; \\ < 0, & \text{si } c^1 = \underline{c}^1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Les auteurs supposent que le coût fixe K est tel que $f_2^2(c^1)$ est positif, si $c^1 = \bar{c}^1$ et négatif si $c^1 = \underline{c}^1$. Donc en information complète, d'après ces hypothèses, l'entrant potentiel n'entre que si $c^1 = \bar{c}^1$.

Pour simplifier au maximum les notations, l'auteur choisit un facteur d'actualisation $\delta = 1$ pour les deux firmes. Par conséquent, les profits des deux firmes sur les deux périodes sont donnés respectivement par :

$$f_1(q_1,q_2) = f_1^1(q_1,q_2) + \delta f_1^2(q_1,q_2) = \begin{cases} f_1^1(q_1^1,\underline{c}^1) + f_1^*(\underline{c}^1), & \text{si } c^1 = \underline{c}^1 \text{ et } e = 0, \\ f_1^1(q_1^1,\underline{c}^1) + f_1^2(\underline{c}^1), & \text{si } c^1 = \underline{c}^1 \text{ et } e = 1, \\ f_1^1(q_1^1,\bar{c}^1) + f_1^*(\bar{c}^1), & \text{si } c^1 = \bar{c}^1 \text{ et } e = 0, \\ f_1^1(q_1^1,\bar{c}^1) + f_1^2(\bar{c}^1), & \text{si } c^1 = \bar{c}^1 \text{ et } e = 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

et

$$f_2(q_1,q_2) = f_2^1(q_1,q_2) + \delta f_2^2(q_1,q_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } c^1 = \underline{c}^1 \text{ et } e = 0 \\ f_2^2(\underline{c}^1), & \text{si } c^1 = \underline{c}^1 \text{ et } e = 1 \\ 0, & \text{si } c^1 = \bar{c}^1 \text{ et } e = 0 \\ f_2^2(\bar{c}^1), & \text{si } c^1 = \bar{c}^1 \text{ et } e = 1 \end{cases} \tag{3.23}$$

On associe à ce jeu l'arbre décrit par la figure (FIG.3.1).

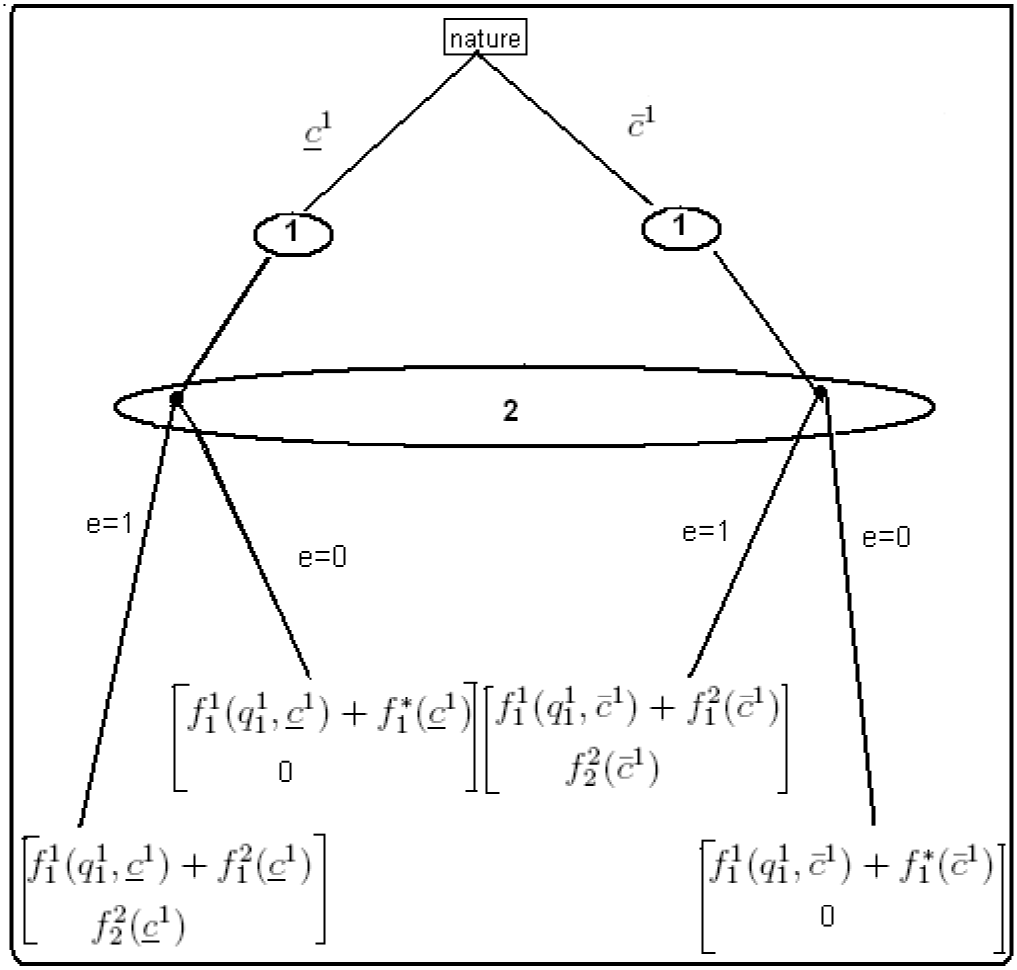


Fig. 3.1 – Arbre du jeu d'entré

3.2.3 Discussion

La possibilité de déduire parfaitement le coût de la firme en place par l'observation des prix est un trait peu réaliste du modèle. *Matthews* et *Mirman* [82] ainsi que *Saloner* [111] on introduit un bruit dans la fonction inverse de demande (**demande stochastique**) ce qui empêche une déduction ou une inférence aussi précise. *Saloner* a étudié une version à plusieurs périodes de ce modèle et a noté que l'information incomplète avait pour effet parfois de retarder l'entrée certes, mais conduisait à plus d'entrée dans le long terme. En effet, dans le long terme les firmes par leurs observations répétées découvrent la vraie valeur du coût de la firme en place. L'entrée, sur un marché, est décision qui concerne une de plusieurs mois ou plusieurs années, alors qu'un prix peut être souvent changé en quelque jours ou quelques semaines. Donc, les prix ont une faible valeur d'engagement.

Un autre cas particulier intéressant de concurrence en prix avec *information incomplète* est celui d'une enchère au premier prix [15]. Sous sa forme la plus simple, le système fonctionne de la façon

suivante : l'acheteur (qui joue le rôle des consommateurs du modèle du *Bertrand*) a une demande unitaire. Chaque vendeur (firme) connaît son coût d'offre d'une unité du bien, mais pas les coûts de ses concurrents. Avec une enchère au premier prix, on choisit l'enchérisseur qui annonce le prix le plus bas.
Dans la première section, nous avons présenté quelques applications de la théorie des jeux statiques. Pour conclure cette première partie, il s'avère donc nécessaire de présenter quelques travaux d'application des jeux dynamiques (comme les jeux répétés et stochastiques).

3.3 Application de la théorie des jeux répétés à information complète

Depuis 1990, de nombreux travaux de recherche en économie sont fondés sur la théorie des jeux répétés ([127], [126], [104], [102], ...). Cette théorie est très utile pour modéliser et évaluer les comportements stratégiques qui facilitent la coopération et la collusion (tacite ou explicite) entre firmes [103]. De manière générale, un marché oligopolistique peut être modélisé dans une perspective dynamique, comme un jeu stratégique répété sur une infinité de périodes[5].
L'application de ce type de jeux pour soutenir une collusion tacite entre deux firmes et les différents facteurs qui la favorisent a été l'objet d'étude de l'article [102]. L'auteur (*T. Pénard*) tente de donner un fondement théorique à l'idée qu'un marché symétrique est plus favorable à la collusion qu'un marché asymétrique à l'aide d'un jeu répété dans lequel les firmes choisissent initialement leurs capacités de production avant de se livrer une concurrence infinie en prix. Ce modèle est une synthèse des modèles de *Kreps* et *Scheinkman* [67] (1983) et de *Brock* et *Scheinkman* (1985) [23]. Les premiers ont analysé les choix de capacité et de prix dans un jeu non répété. Les seconds ont étudié les possibilités de collusion dans un jeu infiniment répété en prix pour des capacités symétriques exogènes. Par la suite, *Benoit* et *Krishna* [16] ont essayé d'endogénéiser les choix de capacités et de caractériser les capacités des équilibres de collusion tacite. En 1990, *Davidson* et *Deneckere* ont repris ce modèle afin d'étudier le lien entre les excès de capacité et le degré de collusion en prix pour des taux d'intérêt et des coûts de capacité variables [34]. Toutefois, aucun des articles précédents ne considèrent les effets de l'asymétrie sur les possibilités de collusion ce qui est l'objet du l'article [102] de *T.Pénard*. Le but de cette étude est de montrer que le degré de *symétrie d'un marché*[6] est un élément structurel qui peut jouer sur les possibilités de collusion. L'auteur retenu comme critère de symétrie **les capacités de**

[5] L'horizon infini du jeu se justifie par le fait qu'aucune des firmes ne connaît la date de fin du jeu, c'est-à-dire la date à laquelle elle se retirera du marché.

[6] Un marché est dit symétrique si les entreprises présentes sur ce marché disposent de capacités ou de ressources similaires ; c'est-à-dire si elles ont le même pouvoir sur le marché.

production. Nous présentons ci-après le modèle de *T.Pénard* [102].

3.3.1 Description du modèle

Soit deux firmes $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ produisant un bien homogène qui doivent dans une première étape choisir simultanément leurs capacités de production, avant de se livrer une concurrence infinie en prix. Leur intérêt commun est de donner au marché, à travers ce choix initial, une configuration favorisant l'émergence d'une collusion tacite. La modélisation de cette situation stratégique est donnée par un jeu répété en prix avec contrainte de capacité endogène.

- Soient S_i l'ensemble des actions (des prix) que la firme i peut annoncer et $S = S_1 \times S_2$ l'ensemble des couples de prix possibles,
- Soient K_i l'ensemble des capacités que la firme i peut annoncer dans la première étape du jeu et $K = K_1 \times K_2$ l'ensemble de couples de capacités possibles,
- Soit P_{it} le prix annoncé par la firme i à la date t. Alors, le profil de prix annoncés par les deux firmes à date t est : $P_t = (P_{1t}, P_{2t})$,
- L'ensemble des histoires possibles du jeu à la date t est donnée par h_t, où :

$$h_t = ((k_1; k_2), (P_{10}; P_{20}), (P_{11}; P_{21}), \dots, (P_{1t}; P_{2t})) \in K \times (\prod_{t=0}^{t-1} S)$$

- Soit $\mu_{it} : K \times \prod_{t=0}^{t-1} S \longrightarrow S_i$ la règle de décision (ou bien la stratégie) de la firme i à la date t. Étant donnée l'histoire du jeu, μ_{it} prescrit à la firme i de pratiquer l'action P_{it} à la date t,
- Soit V_{it} l'ensemble des règles de décision possibles de la firme i à la date t.

• Les stratégies des deux firmes

Une stratégie pour la firme i sur l'ensemble du jeu, consiste alors dans le choix d'une capacité $k_i \in K_i$ et d'une séquence infinie de règles de décision $(\mu_{i0}, \mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{it}, \dots)$ une par période. Elle est donnée par :

$$\sigma_i = (k_i, \mu_{i0}, \mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{it}, \dots) \in \Sigma_i$$

où : $\Sigma_i = K_i \times V_{i0}, V_{i1} \times \dots V_{it} \times \dots$ est l'ensemble des stratégies de la firme i sur l'ensemble du jeu.

Désignons par $\sigma_{(t)}$ les stratégies des firmes à la date t, où :

$$\sigma_{(t)} = ((k_1; k_2), \mu_{1t}, \mu_{2t})$$

Le couple de stratégies $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ induit un profil dynamique de prix (*un trajectoire ou sentier d'actions en terme de la théorie des jeux répétés*) ; $P_\sigma = (P_{\sigma(0)}, P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(t)}, \dots)$, où $P_{\sigma(t)}$ est le couple de prix que les deux firmes pratiqueront à la date t si elles respectent leurs

stratégies.
Soit δ le facteur d'actualisation et Π_i la fonction du profit instantané de la firme i. Le gain actualisé de la firme i associé au profil dynamique P_σ s'écrit :

$$G_i(P_\sigma) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Pi_i(P_{\sigma(t)}), \tag{3.24}$$

Donc, le jeu répété d'horizon infini décrivant la concurrence des deux firmes est donné par :

$$\Gamma^\infty = < \mathcal{N}, \Sigma, \delta, G > . \tag{3.25}$$

Le jeu (3.25) est supposé à information complète et que les ensembles de stratégies et les fonctions de gains sont connaissance commune.
Les firmes souhaitent parvenir une issue collusive en prix et en capacités. Elles doivent donc s'accorder sur un couple de capacités (k_1^c, k_2^c) et sur un prix collusif P^c où ce dernier doit maximiser les profits joints des firmes. L'objectif étant donc de soutenir une collusion maximale en prix. Lorsque l'accord tacite est appliqué, chaque firme peut avoir à dévier des capacités ou du prix prévus initialement. Les stratégies simples d'*Abreu* [1] ont pour objet de dissuader de tels comportements en rendant les déviations en capacité et en prix non profitables.

• Le mode de rationnement de la demande

Dans une concurrence en prix, les consommateurs se dirigent en priorité vers la firme affichant le prix le plus bas. Si ses capacités de production ne lui permettent pas de servir intégralement la demande, elle doit rationner les consommateurs. Pour un mode d'un rationnement efficace, pour des capacités de production installées (k_1, k_2) et une fonction de demande du marché linéaire $D(p) = a - p$, la demande s'adressant à la firme i s'écrit alors :

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si} \ \ p_i < p_j, \\ max\{0, D(p_i) - k_j\} & \text{si} \ \ p_i > p_j, \\ max\{\frac{D(p_i)}{2}, D(p_i) - k_j\} & \text{si} \ \ p_i = p_j, \\ \forall \ \ i, j = 1, 2 \text{ avec } i \neq .j \end{cases} \tag{3.26}$$

Comme la firme $i \in \mathcal{N}$ ne peut offrir au delà de ses capacités, ses ventes effectives sont définies par $min\{k_i, D_i(p_i, p_j)\}$. Sa fonction du coût est donnée par :

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} cq_i + fk_i, & \text{si} \ \ q_i \leq k_i; \\ \\ \infty, & \text{si } q_i > k_i; \end{cases} \qquad \forall \ i \geq 1, 2. \tag{3.27}$$

où c est le coût unitaire de production, f comme le coût unitaire d'entretien des capacités de production. Le profit de la firme $i \in \mathcal{N}$ s'écrit donc :

$$\Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)min\{k_i, D_i(p_i, pj)\} - fk_i, \ \ \forall \ i = 1, 2 \text{ avec } \ \ i \neq j, \tag{3.28}$$

et son profit brut (hors coût de capacité) est noté par :

$$\pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)min\{k_i, D_i(p_i, pj)\}, \quad \forall\ i = 1, 2 \text{ avec } \quad i \neq j, \tag{3.29}$$

•La collusion en prix et la symétrie Étant donné les capacités de production k_1 et k_2 sélectionnées par les firmes à la première étape du jeu, le profil collusif $P^c = (P_1^c, P_2^c)$ constitue un profil d'équilibre parfait dans le jeu (3.25) si pour chaque firme i le facteur d'actualisation δ (commun aux deux firmes) est supérieur la valeur $\underline{\delta}_{i\{k_i,k_j\}}$ appelée facteur d'actualisation seuil de la firme i :

$$\delta \geq \frac{\pi_i^d(k_i) - \pi_i^c}{\pi_i^d(k_i) - \underline{\pi}_i(k_i, k_j)} = \underline{\delta}_{i\{k_i,k_j\}}, \qquad i = 1, 2 \text{ et } i \neq j, \tag{3.30}$$

où :

- $\pi_i^d(k_i)$ est le profit maximum que la firme i peut espérer en déviant de sa capacité initiale k_i,
- π_i^c est le profit de la firme i en pratiquant le prix collusif P^c (profit collusif),
- $\underline{\pi}_i(k_i, k_j) = max\{\max\limits_p (p-c)(D(p)-k_j)\}$. $\underline{\pi}_i(k_i, k_j)$ maximise le profit de la firme i compte tenu de sa demande résiduelle et de ses capacités k_i.

Soit $\underline{\delta}_{\{k_1,k_2\}} = max\ \{\underline{\delta}_{1\{k_1,k_2\}}, \underline{\delta}_{2\{k_1,k_2\}}\}$ le seuil minimum du facteur d'actualisation à partir duquel le prix P^c peut être soutenu, capacités (k_1, k_2).

Proposition 3.2. *[102] Les possibilités de collusion sont toujours plus grandes sur un marché symétrique en termes de capacités que sur un marché asymétrique. Formellement, la valeur du seuil minimum à partir duquel la collusion tacite est soutenable satisfait l'inégalité suivante :*

$$\underline{\delta}_{\{k_i,k\}} \geq \underline{\delta}_{\{k,k\}}, \qquad \forall \quad k_i \neq k. \tag{3.31}$$

Interprétation 3.1. *Selon cette proposition (3.31), il existe des situations dans lesquelles la collusion est soutenable sur le marché de configuration symétrique ($k_1 = k_2 = k$). En effet, des capacités asymétriques rendent plus profitable une déviation pour la firme en position de force parce que sa rivale n'a pas les capacités suffisantes pour punir sévèrement cette déviation. L'intervalle des facteurs d'actualisation δ compatibles avec une collusion en prix est donc plus large dans une configuration symétrique.*

L'intervalle des valeurs de δ compatibles avec une collusion en prix est égal à $[\underline{\delta}_{i\{k_1,k_2\}}, 1]$. Plus le seuil $\underline{\delta}_{\{k_1,k_2\}}$ est bas et plus les possibilités de collusion sont grandes.

3.3.2 Extension du modèle

- L'extension du modèle analysé à d'autres modes de rationnement, notamment le rationnement *proportionnel* (voir chapitre 2, la relation 2.45) est tout à fait très important.

- Prendre d'autres critères de symétrie qui favorisent la collusion (par exemple les coûts de production). En essayant de répondre à la question suivante : existent-ils des configurations de marché en terme du coût de production plus favorables à la collusion tacite ?.

3.4 Application de la théorie des jeux stochastiques

Comme les jeux stochastiques sont une extension des jeux dynamiques (répétés), leurs application aux oligopoles dynamiques se sont avérées extrêmement importantes ces dernières années [81]. Beaucoup de situations d'intérêt économique peuvent être modélisées sous forme de jeux stochastiques. Plusieurs travaux, par exemple, *Deshmukh* et *W.Winston* ([38], 1976), *Olley* et *Pakes* ([98], 1996), *Pakes* et *Ericson* ([99], 1989), *Bergemann* et *Välimäki* ([17], 1996), *Pakes* et *McGuire* ([100], 2001) et *Herings* et *Peeters*([60], 2004) sont consacrés à l'application des jeux stochastiques aux problèmes émergeant dans la littérature d'organisation industrielle. Des progrès ultérieurs dans ce domaine de recherche sont consacrés au développement des méthodes numériques pour résoudre ce type de jeux. Dans les deux articles de *K.L. Judd* [63] et de *R.D. McKelvey*, *A. McLennan* [106], les auteurs ont exprimé le rôle important des méthodes numériques dans le développement ultérieur de la théorie économique.
L'une des stratégies industrielles la plus adaptée à cette modélisation (en terme de jeux stochastiques) est l'accumulation du capital d'une firme (*R.Amir* (1996) [4], *R.Amir* [5], *L.Balbus* et *S.Nowak* [11] en 2004). En effet, l'augmentation du capital (capital investit) d'une firme dépend du capital investit de la firme concurrente et ses stratégies d'investissement dépendent d'une variable aléatoire ou variable d'état qui est représentée par son stock (ou son bénéfice net). Selon l'article [3], le modèle en un jeu stochastique d'un choix d'investisement dans le cas d'un duopole :

$$\Gamma =< \mathcal{N}, Z, \{A_i(z)\}_{(i,z)\in\mathcal{N}\times\Omega}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \pi >, \tag{3.32}$$

où

- $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ est l'ensemble des firmes qui constituent le duopole,
- Z est l'ensemble des états qui représente dans cette situation le niveau du stock du capital (ou bien le bénéfice net destiné pour l'investissement) de la firme,
- $A_i(z)$: désigne l'ensemble des stratégies de la firme $i \in \mathcal{N}$ à l'état $z \in Z$,
- f_i est la fonction du gain instantané (en une seule période) de la firme $i \in \mathcal{N}$,
- π désigne la probabilité de transition du système.

La fonction du gain sur plusieurs périodes (à la fin du jeu) de la firme i est donnée par :

$$G_i(a_1^t, a_2^t) = \sum_{t=0}^{T}(1-\delta_i)\delta_i^t f_i(a_1^t, a_2^t), \quad 0 \le a_i^t \le K_i(z_t), \tag{3.33}$$

où

- T est l'horizon du jeu supposé fini,
- a_i^t désigne la stratégie de la firme $i \in \mathcal{N}$. Elle représente le niveau de consommation (ou bien la somme investie) de la firme i à l'instant $t, t \in \{0, , ...T\}$, bornée par K_i considérée comme capacité d'extraction exogène,
- $\delta_i \in [0, 1]$: désigne le facteur d'escompte de la firme $i \in \mathcal{N}$.

La loi de probabilité de transition du système est donnée par :

$$z_{t+1} \to \pi(./z_t - a_1^t - a_2^t) \tag{3.34}$$

3.5 Application du processus de négociation de Nash au modèle d'oligopole bilatéral

Le problème du marchandage (ou de négociation) avec avantage mutuel est au coeur de la réflexion économique (négociation sur le marché du gros entre un producteur et un distributeur, le dialogue Nord-Sud, les négociations au sein de l'OPEC ...) et l'une des voies d'étude de ces problèmes sont les jeux de négociation à la *Nash* [91]. Ces jeux ont été plus spécialement appliqués dans l'analyse économique des marques de distributeurs, plus précisément, à la modélisation des rapports de force existants entre les producteurs et les distributeurs.
L'article [28] analyse l'impact des fusions entre distributeurs dans le cadre d'un oligopole bilatéral et lorsque producteurs et distributeurs négocient deux à deux un prix unitaire sur le marché de gros[7]. Il montre que : (i) une fusion entre distributeurs accroît les prix sur le marché de gros et ne permet pas systématiquement un renforcement de la puissance d'achat ; (2) une réduction de la concurrence inter-marques (entre producteurs) réduit la profitabilité individuelle d'une fusion entre distributeurs.

3.5.1 Description du modèle

On considère une structure de marché verticale composée de deux producteurs en amont offrant des biens différenciés et d'un oligopole de n distributeurs homogènes en aval. Les producteurs se font concurrence sur le marché intermédiaire (marché spot) pour approvisionner les distributeurs. Les biens différenciés sont désignés par un indice $i = 1, 2$. Cette situation est décrite dans la figure suivante :

[7]Depuis les années 80, le secteur de la distribution de détail a connu de profondes mutations en Europe et aux États-Unis. De nombreuses fusions et acquisitions ont notamment conduit à la constitution de grands groupes d'envergure internationale et à une forte concentration de l'offre : près de 30% du chiffre d'affaires réalisé par les 200 plus gros groupes mondiaux de distribution est réalisé par les dix premières firmes de distribution, dont font partie l'américaine Wal-Mart (États-Unis) ou encore la française Carrefour.

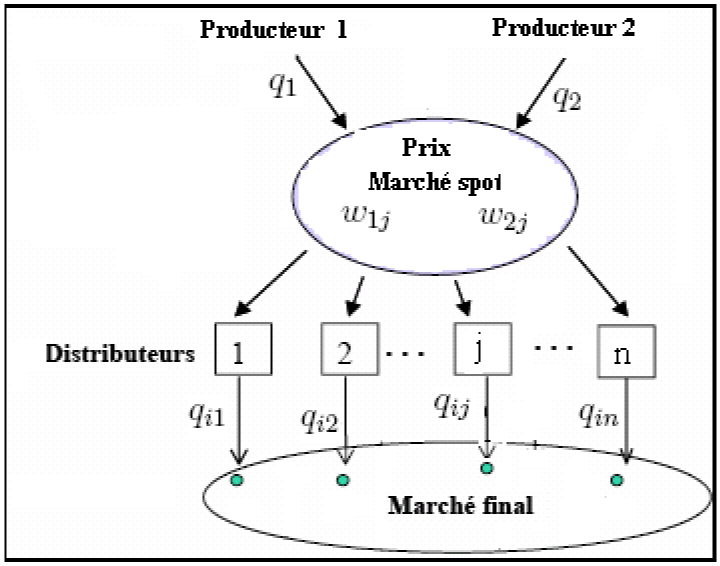


FIG. 3.2 – Relation verticale entre distributeurs et producteurs

Le consommateur a une fonction d'utilité classique, symétrique et quadratique de la forme :

$$U(q_1, q_2) = (q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - cq_1q_2. \tag{3.35}$$

Les quantités q_1 et q_2 sont les quantités totales de chaque type de bien offertes sur le marché. Les biens seront substituts, indépendants, ou complémentaires selon le signe du paramètre $c \in [0, 1]$. Le système de demande obtenu par l'optimisation[8] de l'utilité de ce consommateur représentatif en normalisant son revenu de façon adéquate est :

$$\begin{cases} p_1(q_1, q_2) = 1 - q_1 - cq_2, \\ p_2(q_1, q_2) = 1 - q_2 - cq_1. \end{cases} \tag{3.36}$$

Lorsque c est nul, les biens sont indépendants, tandis que lorsque c tend vers 1, ils deviennent de parfaits substituts (produits homogènes). Le paramètre c représente donc le degré de concurrence *inter-marques* c-à-d le niveau de concurrence entre les producteurs. Tandis que le nombre n de distributeurs en concurrence en aval représente le degré de concurrence *intra-marques*. Les coûts de production et de distribution sont supposés nuls.

Déroulement du jeu : L'accès au marché final est représenté par un jeu à deux étapes :

1. La première étape correspond à une étape de *négociation* de contrat entre les producteurs et les distributeurs sur le *prix de gros*, selon un modèle de *négociation à la Nash*.
2. Les distributeurs font leurs commandes aux fournisseurs et se font *concurrence en quantité* pour la revente des produits aux consommateurs.

[8]Si on représente le prix maximum que les consommateurs sont prêts à payer pour une unité supplémentaire en fonction des quantités déjà consommées, on obtient la courbe de Demande Inverse.

3.5.2 Équilibre du jeu

Ce jeu est résolu par la méthode d'induction à rebours [28].

• **Concurrence entre distributeurs** : A la deuxième étape, les n distributeurs se font concurrence à la *Cournot*.

Soit $q_1 = \sum_{j=1}^{n} q_{1j}$ et $q_2 = \sum_{j=1}^{n} q_{2j}$ les demandes totales de chaque bien. Soit w_{ij} le prix de gros résultant de la négociation entre le distributeur j et le producteur du bien i à la première étape du jeu. Chaque distributeur j choisit les quantités q_{1j} et q_{2j} lui permettant de maximiser son profit Π_j à w_{ij} donné où :

$$\Pi_j(q_{1j}, q_{2j}) = (p_1 - w_{1j})q_{1j} + (p_2 - w_{2j})q_{2j} \longrightarrow \max_{q_{1j}, q_{1j}}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.37}$$

D'après (3.36) et (3.37), les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_j(q_{1j},q_{2j})}{\partial q_{1j}} = 1 - q_{1j} - \sum_{j=1}^{n} q_{1j} - c\sum_{j=1}^{n} q_{2j} - w_{1j} - cq_{2j} = 0, \\ \frac{\partial \Pi_j(q_{1j},q_{2j})}{\partial q_{2j}} = 1 - q_{2j} - \sum_{j=1}^{n} q_{2j} - c\sum_{j=1}^{n} q_{1j} - w_{2j} - cq_{1j} = 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

En sommant ces conditions du premier ordre pour tout $j = 1, \ldots, n$, on obtient ;

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Pi_j}{\partial q_{1j}} = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Pi_j}{\partial q_{2j}} = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Par conséquent, les quantités globales d'équilibre offertes sur le marché pour chaque produit sont données par :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{n(1-c) - \sum_{j=1}^{n} w_{1j} + c\sum_{j=1}^{n} w_{2j}}{(1-c^2)(1+n)}, \\ \\ q_2^* = \frac{n(1-c) - \sum_{j=1}^{n} w_{2j} c\sum_{j=1}^{n} w_{1j}}{(1-c^2)(1+n)}. \end{cases} \tag{3.40}$$

On déduit alors les quantités individuelles $(q_{1j}^*, q_{2j}^*,\ j = \overline{1, n}\ )$ en remplaçant q_1^* et q_2^* par leurs valeurs dans (3.38) :

$$\begin{cases} q_{1j}^* = \frac{(1-c) - nw_{1j} + \sum_{k\neq j} w_{1k} + ncw_{2j} - c\sum_{k\neq j} w_{2k}}{(1-c^2)(1+n)}, \\ \\ q_{2j}^* = \frac{(1-c) - nw_{2j} + \sum_{k\neq j} w_{2k} + ncw_{1j} - c\sum_{k\neq j} w_{1k}}{(1-c^2)(1+n)}. \end{cases} \qquad j = \overline{1, n}, \tag{3.41}$$

Remarque 3.2. *Ces fonctions de demande individuelle décroissent lorsque c augmente. En effet, à q_{1k} fixé, le choix par le distributeur j d'une quantité q_{1j} donnée conduit à un prix de marché d'autant plus faible que le degré de concurrence inter-marques augmente. Anticipant cela, les quantités individuelles d'équilibre décroissent avec le degré de concurrence inter-marques. Par ailleurs, plus le nombre de distributeurs en aval est important, plus les quantités individuelles diminuent et plus la quantité globale de chaque produit offerte aux consommateurs est forte.*

• **Concurrence entre producteurs :** Cette étape de concurrence entre producteurs se réalise à travers les négociations bilatérales sur le prix de gros entre chaque producteur et chaque distributeur. Les terme d'une négociation bilatérale entre un producteur i et un distributeur j résultent du programme du négociation de *Nash* suivant :

$$(\Pi_i - \overline{\Pi_i})^{\alpha}(\Pi_j - \overline{\Pi_j})^{1-\alpha} \rightarrow \max_{w_{ij}} \tag{3.42}$$

où $\Pi_i(\Pi_j)$ et $\overline{\Pi}_i(\overline{\Pi}_j)$ expriment respectivement les profits d'un producteur i (les profits d'un distributeurs j) dans le cas où la négociation a abouti à un accord et dans le cas où celle-ci à échoué.

Les profits respectivement d'un producteur i et d'un distributeur j dans le cas où la négociation a abouti à un accord s'écrivent :

$$\Pi_i = w_{ij}q_{ij} + \sum_{k \neq j} w_{ik}q_{ik}, \quad i = 1, 2. \tag{3.43}$$

$$\Pi_j = \sum_{i=1}^{n}(p_i - w_{ij})q_{ij}, \quad j = 1, 2. \tag{3.44}$$

Le paramètre α représente le pouvoir de négociation exogène du producteur et $1 - \alpha$ celui du distributeur dans la négociation. On suppose sans perte de généralité que ces pouvoirs exogènes sont égaux : $\alpha = \frac{1}{2}$.

Le profit que le producteur i peut réaliser en cas d'échec de sa négociation avec le distributeur j s'écrit :

$$\overline{\Pi_i} = \sum_{k \neq j} w^*_{ik}q^*_{ik}. \tag{3.45}$$

Le profit que le distributeur j peut réaliser en cas d'échec dans sa négociation avec le producteur i s'écrit :

$$\overline{\Pi_j} = (p^*_{-i} - w^*_{-ij})q^*_{ij}. \tag{3.46}$$

La condition du premier ordre du programme de *Nash* s'écrit :

$$(p_i - w_{ij})\frac{\partial \Pi_i}{\partial w_{ij}} + w_{ij}\frac{\partial \Pi_j}{\partial w_{ij}} = 0, \tag{3.47}$$

où :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_i}{\partial w_{ij}} = q_{ij} + w_{ij}\frac{\partial q_{ij}}{\partial w_{ij}} + \sum_{k \neq j} w_{ik}\frac{\partial q_{ik}}{\partial w_{ij}}, \\ \\ \frac{\partial \Pi_j}{\partial w_{ij}} = (\frac{\partial p_i}{\partial w_{ij}} - 1)q_{ij} + (p_i - w_{ij})\frac{\partial q_{ij}}{\partial w_{ij}} + (p_{-i} - w_{-ij})\frac{\partial q_{-ij}}{w_{ij}}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Étant donnée la symétrie du problème, on pose $w_{ij} = w_{-ij}$ et $w_{ij} = w_{ik}$, la résolution de l'équation (3.47), donne :

$$w^*_{1j} = w^*_{2j} = \frac{1 - c}{2n(1 - c) + 2 - c}, \quad \forall\ j = \overline{1, n}. \tag{3.49}$$

Remarque 3.3. *Ce prix de gros d'équilibre décroît strictement avec le degré de concurrence inter-marques c et avec le nombre de distributeurs n en concurrence en aval.*

Lemme 3.2. *Plus le degré de la concurrence intra-marque, n, entre distributeurs est élevé en aval (à c fixé) et plus la concurrence inter-marques c (entre producteurs) est importante en amont (à n fixé), plus les* ***prix de gros d'équilibre*** *définis par (3.49) sont faibles.*

Les prix du marché final : Les prix d'équilibre des deux produits sur le marché final sont donnés par :

$$p_1^* = p_2^* = \frac{3n(1-c)+2-c}{(1+n)(2n(1-c)+2-c)}. \tag{3.50}$$

Lemme 3.3. *Plus la concurrence intra-marque (n) est forte en aval (à c fixé) et plus la concurrence inter-marques (n) est importante en amont (à n fixé), plus les* prix finaux d'équilibre *définis par (3.50) sont faibles.*

Preuve 3.2. *On a :*

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial c} = \frac{-n}{(1+n)(2-c+2(1-c)n)^2} < 0, \quad \forall\ c \in [0,1], \quad i = 1,2. \tag{3.51}$$

Par conséquent, la fonction p_i^* à n fixé est strictement décroissante par rapport à c. Donc, plus la valeur de c (concurrence inter-marques) est importante en amont à n fixé, plus les prix finaux d'équilibre sont faibles.

Les profit des joueurs : Les profits d'équilibre d'un producteur i et d'un distributeur j sont donnés respectivement par :

$$\begin{cases} \Pi_i^* = \frac{n(1-c)(2n(1-c))+1}{(1+n)(1-c)(2n)(2n(1-c)+2-c)^2}, & (a) \\ \\ \Pi_j^* = \frac{2(2n(1-c)+1)^2}{(1+n)^2(1+c)(2n(1-c)+2-c)^2}. & (b) \end{cases} \tag{3.52}$$

3.5.3 Profitabilité des fusions entre distributeurs

Dans cette section, on procède à une analyse de la profitabilité privée de fusions exogènes d'un sous-ensemble m de distributeurs parmi les n initialement en concurrence sur le marché. Il s'agit de reprendre l'analyse menée par *Salant*, *Switzer* et *Reynolds* ([110], 1983) dans le cadre d'un oligopole de *Cournot* afin de comprendre comment la concurrence s'exerçant entre les producteurs et le rapport de force entre producteurs et distributeurs influencent la profitabilité des fusions en aval du marché.

•Situation de référence

Les producteurs sont en concurrence pure et parfaite ($w_{ij} = 0$). Dans l'article [28], les auteurs analysent d'abord la situation de référence R, où les n distributeurs s'approvisionnent pour chaque type de biens 1 et 2 à un coût d'approvisionnement nul. En supposant que sur chaque marché amont, le marché de la production du bien 1 et le marché de la production du bien 2, la concurrence est parfaite ; nous éliminons tout effet stratégique lié au rapport de force s'exerçant entre les producteurs et les distributeurs. En partant des fonctions de demande inverses pour chaque bien donné par (3.36), le distributeur j réalise à l'équilibre de *Cournot* un profit :

$$\Pi_j^R(n) = \frac{2}{(1+c)(1+n)^2}. \tag{3.53}$$

Supposons que parmi les n distributeurs présents, $m+1$ fusionnent.
Avant la fusion (situation désignée par l'exposant NF et R désigne la situation de référence), le profit joint des $(m+1)$ distributeurs qui fusionnent s'écrit :

$$\Pi_j^{NFR}(n,m) = (m+1)\Pi_j^R(n).$$

Après la fusion (situation désignée par l'exposant F), la nouvelle entité fusionnée réalise le profit d'équilibre d'une entreprise parmi $(n-m)$ distributeurs en concurrence :

$$\Pi_j^{FR}(n,m) = \Pi_j^R(n-m).$$

La fusion sera profitable pour les distributeurs participants à la fusion si :

$$g^R(n,m) = \Pi_j^{FR}(n,m) - \Pi_j^{NFR}(n-m) > 0 \tag{3.54}$$

En utilisant, l'expression générale des profits d'équilibre et en notant $a = \frac{m+1}{n}$, la proportion de firmes qui participent à la fusion, l'inégalité ci-dessus devient :

$$g^R(n,a) = \frac{2}{(1+c)}\left(\frac{1}{(2+n-an)^2} - \frac{an}{(1+n)^2}\right) > 0 \tag{3.55}$$

Lemme 3.4. *[28] Lorsque les producteurs sont en concurrence pure et parfaite, on retrouve le résultat de SSR ([110], (1983)) : il faut qu'au moins* 80% *des distributeurs fusionnent pour qu'une telle opération soit individuellement profitable. La monopolisation du marché est toujours profitable quel que soit le nombre de distributeurs initialement en concurrence et le degré de susbtituabilité des produits.*

•Chaque producteur est en monopole sur son marché

Reprenons le cadre d'analyse de l'industrie décrite dans la section (3.5.1). En reprenant l'expression du profit d'équilibre d'un distributeur donné par (3.52.b), et en considérant que $m+1$ fusionnent parmi les n distributeurs présents.
Avant la fusion, le profit joint des $m+1$ distributeurs qui fusionnent s'écrit :

$$\Pi_j^{NF}(n,m) = (m+1)\Pi_j^* = \frac{2(m+1)(2n(1-c)+1)^2}{(1+n)^2(1+c)(2n(1-c)+2-c)^2}.$$

Après la fusion, la nouvelle entité fusionnée réalise le profit d'équilibre d'une entreprise parmi $(n-m)$ distributeurs en concurrence :

$$\Pi_j^F(n,m) = \Pi_j^*(n-m) = \frac{2(2(n-m)(1-c)+1)^2}{(1+n-m)^2(1+c)(2(n-m)(1-c)+2-c)^2}$$

La fusion sera profitable si :

$$g(n,a,c) = \frac{2}{(1+c)}\left[\frac{(2(2(n-an+1)(1-c)+1))^2}{(2+n-an)^2(2(n-an+1)(1-c)+2-c)^2} - \frac{an(2n(1-c)+1)^2}{(1+n)^2(2(1-c)+2-c)^2}\right] > 0, \tag{3.56}$$

L'étude de l'inégalité (3.56) permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.3. *[28] La stratégie de monopolisation du secteur de la distribution est profitable lorsque $n \leq 3$ si et seulement si la concurrence inter marque est suffisamment intense ($c \geq \tilde{c}(n)$). La monopolisation en aval est toujours profitable pour les distributeurs indépendamment du niveau de concurrence inter-marques dès que $n > 3$.*

Preuve 3.3. *La monopolisation survient lorsque $a = 1$. Dans ce cas, la condition de profitabilité (3.56) devient :*

$$g(n,1,c) = -4(2+2(1-c)-c)^2 n(1+2(1-c)n)^2 + (1+2(1-c))^2(1+n)^2(2(1+n)-c(1+2n))^2 > 0. \tag{3.57}$$

Toutes les expressions élevées au carré étant positives, on peut réécrire cette condition plus simplement sous la forme :

$$h(n,1,c) > 0, \tag{3.58}$$

où

$$h(n,1,c) = -2(2+2(1-c)-c)\sqrt{n}(1+2(1-c)n) + (1+2(1-c))(1+n)(2(1+n)-c(1+2n)) \tag{3.59}$$

Etude de la dérivée de la fonction h par rapport à c, nous donne :

$$\frac{\partial h(n,1,c)}{\partial c} = -7 + 4c + 6\sqrt{n} - (17-12c)n + 4(7-6c)n^{\frac{3}{2}} - 2(5-4c)n^2, \tag{3.60}$$

avec

$$\frac{\partial h(n,1,c)}{\partial c} = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{7+\sqrt{n}+18n-10n^{\frac{3}{2}}}{4(1+\sqrt{n}+4n-2n^{\frac{3}{2}})}, \tag{3.61}$$

et

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 h(n,1,c)}{\partial c^2} < 0 & \textit{pour } n \in [1,5], \\ \frac{\partial^2 h(n,1,c)}{\partial c^2} > 0 & \textit{pour } n \geq 6, \end{array} \tag{3.62}$$

Donc, selon la valeur de n, $\hat{c}$ est un maximum ou un minimum.

- *Lorsque* $n \in [1,5]$*, dans ce cas de figure,* $h(n,1,c)$ *atteint sa valeur maximale en* $\hat{c}$*.*

  Dans ce cas de figure $h(n,1,c)$ *est minimale en* $\underline{c} = 0,1$*. Nous obtenons :*

n	*2*	*3*	*4*	*5*
$\underline{c}$	*0*	*0*	*1*	*1*
$\hat{c}$	0.84	0.62	0.083	−3.58

  Nous avons également :

n	*2*	*3*	*4*	*5*
$h(n,1,\underline{c})$	*<0*	*<0*	*>0*	*>0*
$h(n,1,\hat{c})$	*>0*	*>0*	*>0*	*>0*

  On déduit alors que pour $n = [2,3]$*, il existe un unique* $\tilde{c}(n)$ *qui annule la fonction* $h(n,1,c)$*. Par conséquent, si* $c > \tilde{c}(n)$ *la fonction* h *est strictement positive* $(h(n,1,\tilde{c}(n)) > 0)$*.*

- *Lorsque* $n \geq 6$*, la fonction* h *atteint sa valeur minimale en* $\hat{c}$ *et* $h(n,1,\hat{c}) > 0$*. Donc, la monopolisation est profitable pour toutes les valeurs de* c*.*

3.5.4 Extension du modèle

L'analyse de cette concurrence duopolistique ouvre d'autres champs de recherche à savoir :

1. Étendre l'étude au cas d'un oligopole bilatéral multi-objectifs dans lequel chaque joueur (producteurs et distributeurs) a plus qu'un objectif et essayer de décrire le processus de négociation de Nash multicritère ;
2. En pratique, l'information concernant la fonction de demande du marché des deux produits est incomplète. Donc décrire le processus de négociation de *Nash à information incomplète* comme il a été décrit dans le livre du *Lawrence M.Ausubel* ([75], chapitre 50) constitue aussi un champ d'étude ouvert du modèle ;
3. En effet, les producteurs sont contraints par leurs capacités de production et les distributeurs par les capacités (surfaces) de stockage de leurs magasins[9]. Ainsi, l'introduction des contraintes de capacité dans le modèle est indispensable ;
4. Les décisions des distributeurs (quantités commandées auprès des producteurs) dépendent en réalité d'une variable d'état qui est représentés par le niveau de leurs stocks (capacité de stockage). En effet, cette variable est aléatoire. Comme conséquence, ce jeu peut être étendu en un jeu stochastique.

[9]En effet, des lois en vigueur depuis 1996, imposent un contrôle des ouvertures et des extension de surface de magasin au-delà d'un seuil de 300 mètres.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux travaux qui marquent la reconnaissance du rôle indispensable de la théorie des jeux (complète, incomplète, répété, stochastique. . .) au sein de l'organisation industrielle (pour traiter les problèmes de concurrence oligopolistiques, de collusion, de localisation de distribution. . .). Des perspectives nouvelles de recherche ont été proposées tenant compte de l'évolution de la théorie des jeux et des thèmes développés dans le laboratoire *LAMOS* ([42], [43], [65],...etc).

Conclusion Générale

Après avoir introduit au chapitre 1 quelques concepts de base de la théorie des jeux et énumérer certains types de jeux, notamment les jeux non coopératifs, nous avons consacré le deuxième chapitre à la présentation des éléments de base de l'organisation industrielle à savoir la concurrence pure et parfaite *CPP* et les différentes configurations des marchés de concurrence oligopolistique. Nous avons présenté les trois principaux oligopoles non coopératifs qui constituent le noyau de l'organisation industrielle moderne : l'oligopole de *Cournot* (concurrence en quantités), l'oligopole de *Bertrand* (concurrence en prix), l'oligopole hiérarchique de *Stackelberg* (concurrence en quantités) et l'oligopole coopératif qui est représenté par la collusion.
Dans le troisième chapitre, nous avons présenté cinq applications jugées importantes du point de vue théorique que pratique. Elles concernent l'application des jeux à information complète et incomplète, des jeux dynamiques (répétés et stochastiques) et l'application du processus de négociation de *Nash* dans un marché oligopolistique bilatéral. Pour chacune des applications, nous avons proposé quelques perspectives de recherche.

Dans ce mémoire, nous avons réalisé une synthèse des travaux concernant l'application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle. D'après cette synthèse, très peu de travaux ont analysé la coopération entre les firmes (juste en terme de négociation ou bien en terme de collusion tacite). D'autre part, nous avons constater qu'aucun travail n'a pris en considération l'aspect multi-objectifs des firmes en concurrence. Le développement au *LAMOS* de la théorie des jeux multicritères permettraient l'étude de certains modèles de référence en prenant en considération les différents objectifs des firmes en concurrence. En résumé et en guise de perspective, nous pouvons proposer trois directions principales de recherche :

1. La caractérisation des conditions d'existence des équilibres de *Cournot*, de *Bertrand* et de *Stackelberg* dans un oligopole multicritère,
2. Il serait souhaitable de traiter les variantes coopératives de certains modèles de concurrence imparfaite (par exemple [102]),
3. Aborder certaines applications ([24], [28]) en prenant en considération leur aspect multicritère.

Bibliographie

[1] D. Abreu. Extremal equilibria of oligopolistic supergames. *Journal of Economic Theory*, 39 :191–225, 1986.

[2] F. Allen and S. Morris. *Finance applications of game theory.* Advances in Business applications of game theory, Boston, 2001.

[3] R. Amir. Continous sthocastic games of capital acumulation with convex transitions. *Games and Economic Behavior*, 15 :111–131, 1996.

[4] R. Amir. Cournot oligopoly and the theory of supermodular games. *Games and Economic Behavior*, 15 :132–148, 1996.

[5] R. Amir. Stochastic games in economics : the lattice-theoretic approach. *Core discussion paper*, 59, December 2001.

[6] S.P. Anderson and M. Engers. Stackelberg versus Cournot oligopoly equilibrium. *International Journal of Industrial Organisation*, 10 :127–135, 1992.

[7] M. Aramendia. Asymmetric punishments for group deviations in the infinitely repeated Cournot model. *Economics Letters*, 99 :246–248, July 2007.

[8] K.J. Arrow and G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22 :265–290, 1954.

[9] J.S Bain. A note on pricing in monopoly and oligopoly. *American Economic Review*, 39 :448–464, 1949.

[10] D.G Baird, R.H Gertner, and R.C Picker. Game theory and the law. *Cambridge, Mass : Harvard University Press*, 1994.

[11] L. Balbus and A.S. Nowak. Construction of Nash equilibria in symmetric stochastic games of capital accumulation. Institute of Mathematics, Zielona Góra University, March 2004.

[12] T. Basar and P. Bernhard. H-optimal control and relaxed minimax design problems : A dynamic game approach. *Birkhauser, Boston, MA, USA*, 1991 (2nd edition, 1995).

[13] T. Basar and G.J. Olsder. *Dynamic noncooperative game theory.* Academic Press, New York, 1982.

[14] M.J. Beckmann and D. Hochstädter. Bertrand-Edgeworth duopoly revisited. *Operations Research-Verfahren*, 3 :55–68, 1965.

[15] P. Benilan, M. Mougeot, and F. Naegelen. Enchères asymétriques : contribution à la détermination numérique des stratégies d'équilibre bayesien. *Annales d'Économie et de Statistique*, (46) :226–251, 1997.

[16] J.P. Benoit and V. Krishna. Dynamic duopoly : prices and quantities. *Review of Economic Studies*, 54 :23–35, 1987.

[17] D. Bergemann and J. Välimäki. Learning and strategic pricing. *Econometrica*, 64 :1125–1149., 1996.

[18] J. Bertrand. Théorie mathématique de la richesse sociale. *Journal des Savants,*, 48 :499–508, 1883.

[19] K. Binmore, MJ. Osborne, and A. Rubinstein. *Handbook of game theory*, volume 1, chapter 7 : Noncooperative models of bargaining, pages 181–200. Elsevier Science, 1992.

[20] E. Borel. Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habilité des joueurs. *Librairie Scientifique, Hermann, Paris*, 1924.

[21] A. Bowley. The mathematical groundwork of economics. *Oxford University Press, England*, 1924.

[22] M. Boyer and M. Moreaux. Perfect competition as the limit of hierarchical market game. *Economics Letters*, 22 :115–118, 1986.

[23] W.A. Brock and J. Scheinkman. Price setting supergames with capacity constraints. *Review of Economic Studies*, 52 :371–382., 1985.

[24] C. Caron. Capacity constrained Cournot-Nash equilibrium : A simple formula. initial version in december 2002. Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, December 2003.

[25] C. Caron. *Contributions de l'économie industrielle à la stratégie d'entreprise : Le cas des industries de commodité.* Thèse, Ecole Polytechnique, Septembre 2004.

[26] E.C. Chamberlin. Duopoly : value where sellers are few. *The Quarterly Journal of Economics*, 44(1) :63–100, November 1929.

[27] E.C. Chamberlin. *The theory of monopolistic competition.* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1933.

[28] C. Chambolle, L. Muniesa, and M. Ravon. Concentration horizontale et puissance d'achat. *Laboratoire d'Organisation Industrielle Agro-alimentaire, LORIA*, Décembre 2003.

[29] S. Clemhout and H.Y. Wan. *Handbook of Game Theory*, volume 2, chapter 23 : Differential games-Economic applications, pages 802–825. Elsevier Science B.V., 1994.

[30] A. Cournot. *Recherche sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Translated by N.T. Bacon as Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. New York : McMillan (1927).* Librairie J. Vrin, Paris, 1838.

[31] P. Dasgupta and E. Maskin. The existence of equilibrium in discontinuous economic games 2 : Theory. *Review of Economic Studies*, 53 :1–26, 1986a.

[32] P. Dasgupta and E. Maskin. The existence of equilibrium in discontinuous economic games 2 : Applications. *Review of Economic Studies*, 53 :27–42, 1986b.

[33] K.G. Dastidar. On Stackelberg games in a homogeneous product market. *European Economic Review*, 48 :549–562, 2004.

[34] C. Davidson and R. Deneckere. Excess capacity and collusion. *International Economic Review*, 31(3) :521–541, 1990.

[35] G. Debreu. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38 :886–893, 1952.

[36] W.D. Dechert and S.I. Donnellb. The stochastic lake game : A numerical solution. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30 :1569–1587, 2006.

[37] C. Deissenberg and R.F. HARTL. *Optimal control and dynamic games applications in finance, management science and economics*, volume 7. Springer, The Netherlands, 2005.

[38] S.D. Deshmukh and W.Winston. A zero-sum stochastic game model of duopoly. *Discussion paper*, (230) :1–11, July 1976.

[39] A. Dixit. The role of investment in entry deterrence. *Economic Journal*, 90 :95–106, 1980.

[40] F. Edgeworth. La teoria pura del monopolio. traduction anglaise : The pure theory of monopoly 1925 ; traduction française : Théorie pure du monopole 1980. *Giornale degli Economisti*, 1(40) :13–31, 1897.

[41] E. Einy, O. Haimanko, D. Moreno, and B. Shitovitz. On the existence of bayesian Cournot equilibrium, working paper. *Economic Series 03*, February 2007.

[42] K. Fahem. Etude de concepts de solutions dans un jeu multicritère. Mémoire de magistère, Université A. MIRA de Béjaia, 2004.

[43] A. Ferhat. Sur les jeux non-antagonistes multicritères. Mémoire de magistère, Université A. MIRA de Béjaia, 2005.

[44] A.M. Fink. Equilibrium points of stochastic noncooperative games. *J. Sci. Hiroshima University. Ser*, 28 :89–93, 1964.

[45] M.T. Flaherty. Dynamic limit pricing, barriers to entry, and rational firms. *Journal Of Economic Theory*, 23 :160–182, 1980.

[46] C.R. Frank and R.E. Quandt. On the existence of Cournot equilibrium. *International Economic Review*, 4 :92–96, 1963.

[47] J.W. Friedman. A noncooperative equilibrium for supergames. *Review of Eeonomic Studies*, 38 :1–12, 1971.

[48] J.W. Friedman. *Oligopoly and the game theory.* Camridge University Press, New-York, 1977.

[49] J.W. Friedman. *Game theory with appfications to economics.* Oxford University Press, England, 1990.

[50] D. Fudenberg and J. Tirole. Capital as commitment : strategic investment to deter mobility. *Journal of Economic Theory*, 31 :227–250, 1983.

[51] D. Fudenberg and J. Tirole. *Handbook of industrial organization*, volume 1, chapter 5 : Noncooperative game theory for industrial organisation : an introduction and overview, pages 261–305. Elsevier Science, 1989.

[52] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game theory.* MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England, 1991.

[53] R. Gibbons. *Game theory for applied economists.* Princeton University Press, 1992.

[54] R. Gibbons. *A primer in game theory.* Princeton University Press, 1992.

[55] I. Glicksberg. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38 :170–174, 1952.

[56] A. Greenwald and A. Jafari. A general class of no-regret algorithms and game-theoretic equilibria. *Proceedings of National Academy of Sciences of the Computational Learning Theory Conference*, August 2003.

[57] A.A Gremaq. *Dynamique, information incomplète et stratégies industrielles.* Economica, Paris, 1988.

[58] J.C. Harsanyi. Games with incomplète information played by bayesian players part.I : The basic model, part.II : Bayesian equilibrium points, part.III : The basic probability distribution of the game. *Management Science*, 14-15, 1967-1968.

[59] J.M Henderson and R.E Quandt. *Microéconomie : formulation mathématique élémentaire.* Dunod, Paris, 1972.

[60] P.J.J. Herings and R.J.A.P. Peeters. Stationary equilibria in stochastic games : structure, selection, and computation. *Journal of Economic Theory*, (118) :32–60, 2004.

[61] H. Hotelling. Stability in competition. *Economic Journal*, 39 :41–57, 1929.

[62] S. Jorgensen and G. Zaccour. Differential games in marketing. *Kluwer Academic Publishers, Boston*, 2004.

[63] K.L. Judd. Computational economics and economic theory : substitutes and complements. *Dynamic Control*, 21 :907–942, 1997.

[64] C. Kemfert, W. Lise, and S.J.Tol Richard. Games of climate change with international trade. *Environmental and resource economics*, 28(2), 2004.

[65] N. Khimoum. Résolution numérique d'un jeu bi-matriciel multicritère. Mémoire de magistère, Université A. MIRA de Béjaia, 2006.

[66] C.D. Kolstad and L. Mathieson. Necessary and sufficent conditions for uniqueness of Cournot equilibrium. *Review of Economic Studies*, 54(4) :681–690, October 1987.

[67] D.M Kreps and J.A Scheinkman. Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Bell Journal of Economics*, pages 326–337., 1983.

[68] D.M. Kreps and R. Wilson. Reputation and imperfect information. *Journal of Economic Theory*, (27), 1982.

[69] H.W. Kuhn. Extensive games and the problem of information. *Princeton University Press, Princeton*, 2 :193–216, 1953.

[70] O. Labbani. Comparaison des théories des jeux pour l'étude du comportement d'agents. Master's thesis, LIFL-USTL(Université des sciences et technologies de Lille), Juin 2003.

[71] JN.M. Lagerlöf. Equilibrium uniqueness in a Cournot model with demand uncertainty. *Topics in Theoretical Economics*, 6(1) :1–5, 2006.

[72] R. Laraki. A variational approach in zero-sum absorbing games. *Journal of Economic Theory,*, 2006.

[73] J. Laye and M. Laye. Uniqueness and characterization of capacity constrained Cournot–Nash equilibrium. *Operations Research Letters*, 36 :168–172, 2008.

[74] J. Leino. Applications of game theory in Ad Hoc networks. Master's thesis, Helsinki University of Technology. Department of engineering physics and mathematics, Octobbre 2003.

[75] P. Cramton L.M. Ausubel and R. Deneckere. *Handbook of Game Theory*, volume 3, chapter 50 : Bargaining with incomplete information, pages 1899–1945. Elsevier Science, 2002.

[76] N.V. Long and A. Soubeyran. Existence and uniqueness of Cournot equilibrium : a contraction mapping approach. *Economics Letters, Elsevier,*, 67(3) :345–348, June 2000.

[77] L. Mallozzi and J. Morgan. Weak Stackelberg problem and mixed solutions under data perturbations. *Optimization*, 32, 1995.

[78] A. Marhfour. Mixed solutions for weak Stackelberg problems : Existence and stability results. *Journal of optimization theory and applications*, 105(2) :417–440, May 2000.

[79] A.M. Marmol, L. Monroy, and V. Rubiales. An equitable solution for multicriteria bargaining games. *European Journal of Operational Research*, 177 :1523–1534, 2007.

[80] F. Martin. Concurrence bancaire, jeux séquentiels et information complète. *Revue Économique*, 46(2) :301–324, 1995.

[81] E. Maskin and J. Tirole. A theory of dynamic oligopoly I : Overview and quantity competition with large fixed costs. *Econometrica*, 56 :549–569, 1988.

[82] S.A. Matthews and L.J. Mirman. Eqilibrium limit pricing : the effects of private information and sochastic demand. *Econometrica*, 51(981-996), 983.

[83] M. McManus. Equilibrium, numbers and size in Cournot oligopoly. *Yorkshire Bulletin of Social and Economic Research*, (16) :68–75, 1964.

[84] P. Milgrom and J. Roberts. Limit pricing and entry under incomplete information : An equilibrium analysis. *Econometrica*, 50(2) :443–459, March 1982.

[85] P. Milgrom and J. Roberts. Predation, reputation and entry deterrence. *Journal of Economic Theory*, 27, 1982.

[86] F. Modigliani. New developments on the oligopoly front. *Journal of Political Economy*, 66 :215–232, 1958.

[87] J.D Morrow. Game theory for political scientists. *Princeton University Press, New Jersey, USA*, 1994.

[88] H. Moulin. *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*. Herman, Paris, 1981.

[89] M. Mussa and S. Rosen. Monopoly and product quality. *Journal of Economic Theory*, 18(2) :301–317, August 1978.

[90] A.K. Naimzada and L. Sbragia. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions : Two boundedly rational adjustment processes. *Chaos, Solitons and Fractals*, 29 :707–722, 2006.

[91] J.F. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18 :155 –162, 1950.

[92] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36 :48–49, 1950.

[93] J.F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 :286–295, 1951.

[94] J.F. Nash. Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21 :128 –140, 1953.

[95] J. Von Neumann. Zur theorie des gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100 :295–320, 1928.

[96] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press (2 ed, 1947 ; 3 ed, 1953) USA, 1944.

[97] W. Novshek. On the existence of Cournot equilibrium. *Review of Economic Studies*, 52 :85–98, 1985.

[98] G.S. Olley and A. Pakes. The dynamics of productivity in the telecommunications equipment industry. *Econometrica*, 64 :1263–1298., 1996.

[99] A. Pakes and R. Ericson. Empirical implications of alternative models of firm dynamics. *Journal of Economic Theory*, 79 :1–45, 1989.

[100] A. Pakes and P. McGuire. Stochastic algorithms, symmetric markov perfect equilibrium, and the curse of dimensionality. *Econometrica*, 69 :1261–1282, 2001.

[101] M. Patriksson. The traffic assignment problem : models and methods. *Springer, Netherlands*, 1994.

[102] T. Pénard. Choix de capacités et comportements stratégiques : une approche par la théorie des jeux répétés. *Annales d'Économie et de Statistique*, 46, 1997.

[103] T. Pénard. La théorie des jeu répétés : application à la concurrence oligopolistique : Partie 1 : les stratégies de coopération dans un jeu répété. *ENST, Bretagne*, Avril 1998.

[104] T. Pénard. La théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques. Technical report, Université de Rennes 1, CREM, Octobre 2004.

[105] M.S. Radjef. Cours en post graduation sur la théorie des jeux et l'optimisation multicritère. Technical report, Université de A.Mira de Béjaia, 2007.

[106] A. Mclennan R.D. Mckelvey. Computation of equilibria in finite games in handbook of computational economics. *Elsevier Science, Amsterdam*, 1 :87–142, 1996.

[107] J. Roberts and H. Sonnenschein. On the existence of Cournot equilibrium without concave profit functions. *Journal of Economic Theory*, (22) :112–117, 1976.

[108] A. Rubinstein. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, 50(1) :97–109, 1982.

[109] A. Rubinstein and A. Wolinski. Equilibrium in a market with sequential bargaining. *Econometrica*, 53(5), 1985.

[110] S.W. Salant, S. Switzer, and R.J. Reynolds. Losses from horizontal merger : The effects of an exogenous change in industry structure on Cournot-Nash equilibrium. *The Quarterly Journal of Economics*, 98(2) :185–199, 1983.

[111] G. Saloner. *Dynamic equilibrium limit pricing in an uncertain environment.* MIT Press, Cambridge, USA, 1982.

[112] A. Schotter. Microéconomie : une approche contemporaine. *Librairie Vuibert, France*, 1996.

[113] R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 41 :25–55, 1975.

[114] C. Shapiro. *Handbook of Industrial Organization*, volume 1, chapter 6 : Theories of Oligopoly Behavior, pages 330–410. Elsevier Science, 1989.

[115] L.S. Shapley. Stochastic games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39 :1095–1100., 1953.

[116] T. Shinkai and M. Okamura. Hierarchical market structure and welfare under incomplète information. *Discussion Paper Series, Tezukayama university*, 1988.

[117] J.M. Smith. Game theory and the evolution of fighting. *Edinburgh University Press, Edinburgh*, page 8–28, 1972.

[118] M. Smith. Evolution and the theory of games. *Camridge University Press, New-York*, 1982.

[119] A.M. Spence. Entry, capacity, investment and oligopolistic pricing. *Bell Journal of Economics*, 8(2) :534–544, 1977.

[120] D.F. Spulber. Capacity, output, ad sequential entry. *American Economic Review*, 71 :503–514, 1981.

[121] H.V. Stackelberg. Marketform und gleichgewicht. *Springer, Vienna*, 1934.

[122] H.V. Stackelberg. The theory of market economy. *Oxford University Press, England*, 1952.

[123] F. Szidarovszky and S. yakowitz. Contributions to Cournot oligopoly theory. *Journal of Economic Theory*, 28 :51–70., 1982.

[124] A. Tarski. A Lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal Math*, 5 :285–309, 1955.

[125] A. Tasnadi. Existence of pure strategy Nash equilibrium in Bertrand-Edgeworth oligopolies. *Economics Letters*, 63 :201–206, 1999.

[126] J. Thepot and J. Levine. Open loop and closed loop equilibria in a dynamic duopoly. *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, 1982.

[127] J. Thépot. *Analyse dynamique de l'entreprise dans un univers de concurrence : le cas du duopole.* Thèse de doctorat d'état, Paris-Dauphine, 1983.

[128] J. Tirole. *The theory of industrial organisation. Traduction française : la théorie de l'organisation industrielle (vol1 1993 ; vol2,1995).* MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[129] A. Ulph. Recent advances in oligopoly theory from a game theory perspective. *Journal of Economie Surveys*, 1(2), 1987.

[130] H. Varian. *Microeconomic analysis*, volume 35. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 1992.

[131] X. Vives. Sequential entry, industry structure and welfare. *European Economic Review*, 32 :1671–1687, 1988.

[132] X. Vives. Nash equilibrium with strategic complementarities. *Journal of Mathematical Economics*, 19 :305–321, 1990.

[133] L. Walras. Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale. *Lausanne, Corbaz, Paris, Guillaumin*, 1874.

[134] R. Wilson. A bidding model of perfect competition. *Review of Economic Studies*, 4(3) :511–518, 1977.

[135] E. Wolfstetter. Oligopoly and industrial organisation, discussion paper. *Economics series, Humboldt University, Berlin*, (10), 1993.

[136] M. Yildizoglu. *Introduction à la théorie des jeux*. Dunod, Paris, 2003.

[137] M. Zinkevich, A. Greenwald, and M. Littman. Cyclic equilibria in Markov games. January 2005.

Rapport-gratuit.com
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté un état d'art concernant l'application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle. Pour cela, une synthèse bibliographique des principales structures des marchés oligopolistiques (l'oligopole de Cournot, l'oligopole de Bertrand et l'oligopole hiérarchique de Stackelberg) est réalisée afin de mettre en évidence le lien étroit entre la théorie de l'oligopole et la théorie des jeux à travers l'équilibre du Cournot où ce dernier fut le premier à introduire le concept d'équilibre non coopératif de *J. Nash*.
Nous avons aussi détaillé quelques applications de la théorie jeux dans l'économie industrielle à savoir les jeux à information complète et à information incomplète, les jeux répétés, les jeux stochastiques ainsi que les problèmes de négociation de Nash qui témoignent le rôle important de la théorie des jeux dans l'analyse du monde économique.

Mots clés : Jeux non-coopératifs, Équilibre de Nash, Organisation Industrielle, Équilibre du marché, Oligopole de Cournot, Oligopole de Bertrand, Oligopole de Stackelberg.

Abstract

This thesis surveys the literature in which game theory has been applied to industrial organization. For that, a bibliographic synthesis about the principal structures of the oligopolistic markets (Cournot competition, Bertrand competition and hierarchical competition of Stackelberg) is carried out in order to highlight the narrow link between the theory of oligopoly and the games theory through Cournot equilibrium where he was considered the first to introduce the concept of non-cooperative equilibrium of Nash.
We have also detailed some applications of the game theory in the industrial economy such as : static games of complete information and with incomplete information, the repeated games, the stochastic games and the problems of Nash-bargaining. Those applications testify the important role of the game theory in the analysis of the economic world.

Key words : Non-cooperative games, Nash equilibrium , Industrial organisation, Market equilibrium, Cournot oligopoly, Bertrand oligopoly, Stackelberg oligopoly.