

Notation	vi
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xiii
<b>Introduction générale</b>	1
Objectifs et contenu de la thèse	3
<b>CHAPITRE I : Revue bibliographique</b>	5
<b>1.1. Vibration des plaques composites</b>	5
<b>1.2. Vibration des coques composites</b>	12
<b>1.3. Méthode des éléments finis</b>	18
<b>CHAPITRE II : Matériaux anisotropes</b>	20
<b>2.1. Généralités</b>	20
2.1.1. Constituants des matériaux composites	20
2.1.1.1. Les différentes matrices	20
2.1.1.2. Les différentes fibres	21
2.1.1.3. Adhésion renforts / matrice	22
2.1.2. Avantages des matériaux composites :	22
<b>2.2. Comportement des milieux anisotropes</b>	24
2.2.1. Introduction	24
2.2.2. Relations déformations-déplacement	24
2.2.3. Equations de compatibilité des contraintes	26
2.2.4. Loi de <i>Hooke</i> généralisée	26
2.2.5. Matrice de souplesse	27
2.2.6. Symétrie matérielle	28
2.2.6.1. Matériaux monocliniques	28
2.2.6.2. Matériaux orthotropes	29
2.2.6.3. Matériaux isotropes transverses	33
2.2.6.4. Matériaux isotropes	34
<b>CHAPITRE III : Théorie de plaques composites</b>	37
3.1. Introduction	37
3.2. Hypothèses	38
3.3. Relations constitutives	39

3.4. Champs de déplacement	40
3.5. Relations déformations déplacements	40
3.6 Relations contraintes déformations	41
3.7 Critère de changement de base	41
3.8. Énergie de déformation	43
2.9. Énergie cinétique	44
3.10. Équation de mouvement	45
3.11. Structures composites stratifiée	45
3.11.1. Désignation des structures stratifiées	46
3.11.2. Désignation des structures sandwiches	47
3.11.3. Structures composites tissées multidirectionnelles	47
3.12. Formulation des stratifiés	48
3.12.1. Comportement en contraintes planes	49
3.12.2 Champ des contraintes	49
<b>CHAPITRE IV: Formulation des plaques composites par éléments finis</b>	<b>51</b>
4.1. Introduction	51
4.2. Modèle élément fini	51
4.2.1. Transformation des coordonnées	51
4.2.2. Dérivées partielles	52
4.3. Fonctions de forme hiérarchiques	53
4.3.1. Fonctions de forme nodales	54
4.3.2. Fonctions de forme des côtés	54
4.3.3. Fonctions de forme internes	55
4.4. Matrice de rigidité de flexion	56
4.5. La matrice rigidité due au cisaillement transversal	57
4.6. La matrice masse	59
<b>CHAPITRE V : Théorie des coques composites</b>	<b>60</b>
5.1 Introduction	60
5.2. Champ de déplacement	61
5.3. Relations déformations-déplacements	62
5.4. Conditions de compatibilité	64
5.5. Relations contraintes-déformations	64
5.6. Loi de comportement dans la base hors axes d'orthotropie	65
5.7. Théorie des coques de Reissner-Mindlin	66

5.7.1 Relations déformations déplacement	67
5.7.2 Relations contraintes-déformations	67
5.7.3 Energie cinétique	68
5.7.4 Energie de déformations	69
<b>CHAPITRE VI : Formulation des coques composites par éléments finis</b>	<b>71</b>
6.1. Introduction	71
6.2. Discrétisation en éléments triangulaires	72
6.3. Repère locale et repère globale	72
6.4. Élément fini triangulaire type hp	74
6.5. Équation de mouvement	75
<b>CHAPITRE VII : Programmation et résultats</b>	<b>76</b>
<b>7.1. Plaque composites</b>	<b>76</b>
7.1.1. Etude de convergence	77
7.1.2. Validation	80
7.1.3. Plaque orthotrope triangulaire	82
7.1.4. Plaque orthotrope rectangulaire	85
7.1.5. Plaque orthotrope triangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement	89
7.1.6. Plaque orthotrope triangulaire avec fissure interne	92
7.1.7. Plaque orthotrope rectangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement	96
7.1.8. Plaque orthotrope trapézoïdale	97
7.1.9. Plaque trapézoïdale avec fissure	98
7.1.10. Plaque rectangulaire à deux couches	101
<b>7.2. Coques composites</b>	<b>103</b>
7.2.1 Etude de convergence	104
7.2.2 Validation	107
7.2.3 Variation des fréquences en fonction de l'orientation des fibres	108
7.2.4 Fissures au niveau de l'encastrement	109
7.2.5 Fissures internes	110
7.2.6 Effet de l'orientation des fibres sur une coque composite fissurée	111
7.2.7 Coque combiné	112
<b>Conclusion est perspectives</b>	<b>114</b>
<b>Annexe A</b>	<b>115</b>
<b>Annexe B</b>	<b>118</b>
<b>Références</b>	<b>122</b>

## Notations

$x, y, z$	coordonnées cartésiennes
$r, \Theta, z$	coordonnées cylindriques
$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	coordonnées d'aire
$h$	épaisseur
$t$	temps
$A$	aire de l'élément fini
$G_{ij}$	Modules de cisaillement
$E_{ij}$	modules de Young
$k^2$	facteur de correction de cisaillement transversal
$[M]$	matrice masse
$[K]$	matrice de rigidité
$N_{ij}$	coefficients de Poisson
$\rho$	masse volumique
$U_F$	énergie de déformation due à la flexion
$U_C$	énergie de déformation due au cisaillement transversal
$T$	énergie cinétique
$U$	énergie de déformation
$q$	coordonnée généralisée
$u$	déplacement suivant $x$
$v$	déplacement suivant $y$
$w$	déplacement suivant $z$
$\theta_x$	rotation par rapport à $x$
$\theta_y$	rotation par rapport à $y$
$\theta_z$	rotation par rapport à $z$
$\alpha$	angle de l'orientation des fibre
$\omega$	fréquence propre
$\Omega$	paramètre de fréquence
$\sigma$	contrainte
$\varepsilon$	déformation
$N_i$	fonction de forme
$P$	degré de polynôme d'interpolation
$C_{ij}$	constante de rigidité

<b>S</b>	matrice de souplesse
<b>V</b>	volume
$\chi$	vecteur de déformation en flexion
$\gamma$	vecteur de déformation en cisaillement transversale

## Liste des figures

<b>Figure 1.</b>	Matériaux composites dans l'aviation .....	2
<b>Figure 2.</b>	Demande en fibres de carbone des différents secteurs industriels en tonnes/an .....	3
<b>Figure 2.1.</b>	Distinction entre $v_{12}$ et $v_{21}$ .....	32
<b>Figure 2.2.</b>	Matériau composite unidirectionnel .....	34
<b>Figure 3.1.</b>	Géométrie d'une plaque .....	37
<b>Figure 3.2.</b>	Base d'orthotropie et base du système .....	42
<b>Figure 3.3.</b>	Stratifié constitué de couches parfaitement liées .....	46
<b>Figure 3.4.</b>	Désignations du stratifié .....	47
<b>Figure 3.5.</b>	Désignations d'une âme nid d'abeille .....	48
<b>Figure 4.1.</b>	Coordonnées cartésiennes et triangulaires .....	51
<b>Figure 5.1.</b>	Géométrie de la coque .....	61
<b>Figure 5.2.</b>	Coordonnées cylindriques .....	61
<b>Figure 5.3.</b>	Contraintes normales sur un élément de coque .....	64
<b>Figure 5.4.</b>	Contraintes dans les directions $r$ et $\theta$ .....	65
<b>Figure 6.1.</b>	Assemblage par éléments rectangulaires .....	71
<b>Figure 6.2.</b>	Assemblage par éléments triangulaires .....	72
<b>Figure 6.3.</b>	Coordonnées locales et globales pour un élément triangulaire .....	72
<b>Figure 6.4.</b>	Repère local et global .....	73
<b>Figure 6.5.</b>	Degrés de liberté en repère local et global .....	74
<b>Figure 7.1.</b>	Organigramme d'analyse modale des plaques composites .....	76
<b>Figure 7.2.</b>	Plaque triangulaire orthotrope .....	77
<b>Figure 7.3.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 4 éléments .....	77
<b>Figure 7.4.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 9 éléments .....	78
<b>Figure 7.5.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 16 éléments .....	78
<b>Figure 7.6.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 25 éléments .....	79

<b>Figure 7.7.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 36 éléments .....	79
<b>Figure 7.8.</b>	Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour H=49 éléments .....	80
<b>Figure 7.9.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L (b/a = 1) .....	83
<b>Figure 7.10.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L (b/a = 0.5) .....	83
<b>Figure 7.11.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L (b/a = 1) .....	84
<b>Figure 7.12.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L (b/a = 0.5) .....	85
<b>Figure 7.13.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L (b/a = 1) .....	86
<b>Figure 7.14.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L (b/a = 0.5) .....	87
<b>Figure 7.15.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L (b/a = 1) .....	88
<b>Figure 7.16.</b>	Variation de paramètre de fréquence $\Omega = (\rho\omega^2a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L (b/a = 0.5) .....	88
<b>Figure 7.17.</b>	Plaque composite triangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement .....	89
<b>Figure 7.18.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ ) .....	90

<b>Figure 7.19.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=60^\circ$ ) .....	90
<b>Figure 7.20.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ ) .....	91
<b>Figure 7.21.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=60^\circ$ ) .....	92
<b>Figure 7.22.</b>	Plaque composite triangulaire avec fissure perpendiculaire à l'encastrement .....	92
<b>Figure 7.23.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ ) .....	93
<b>Figure 7.24.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=60^\circ$ ) .....	94
<b>Figure 7.25.</b>	Plaque composite triangulaire avec fissure parallèle à l'encastrement ... ..	94
<b>Figure 7.26.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ ) .....	95
<b>Figure 7.27.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ ) .....	96
<b>Figure 7.28.</b>	Plaque composite rectangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement .....	96
<b>Figure 7.29.</b>	Variation des fréquences en fonction de rapport c/b pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L .....	97
<b>Figure 7.30.</b>	Plaque orthotrope trapézoïdale .....	97
<b>Figure 7.31.</b>	Variation des fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L .....	98
<b>Figure 7.32.</b>	Plaque composite trapézoïdale avec fissure au coté droit de l'encastrement .....	98
<b>Figure 7.33.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L.....	99

<b>Figure 7.34.</b>	Plaque composite trapézoïdale avec fissure au coté gauche de l'encastrement .....	99
<b>Figure 7.35.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L .....	100
<b>Figure 7.36.</b>	Plaque composite trapézoïdale avec fissure au cotés droit et gauche de l'encastrement .....	100
<b>Figure 7.37.</b>	Variation des fréquences en fonction de dimension des fissures au cotés gauche et droit de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L .....	101
<b>Figure 7.38.</b>	Organigramme pour l'analyse modale des coques composites .....	103
<b>Figure 7.39.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 40 éléments .....	104
<b>Figure 7.40.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 50 éléments .....	105
<b>Figure 7.41.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 80 éléments .....	105
<b>Figure 7.42.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 100 éléments .....	106
<b>Figure 7.43.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 120 éléments .....	106
<b>Figure 7.44.</b>	Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour H = 120 éléments .....	107
<b>Figure 7.45.</b>	Coque cylindrique ouverte .....	107
<b>Figure 7.46.</b>	Variation de fréquence en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une coque cylindrique ouverte .....	108
<b>Figure 7.47.</b>	Variation de fréquence en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une coque cylindrique fermée .....	109
<b>Figure 7.48.</b>	Coque composite avec fissure au niveau de l'encastrement .....	110
<b>Figure 7.49.</b>	Variation de fréquence en fonction de la dimension de fissure .....	110
<b>Figure 7.50.</b>	Coque composite avec fissure interne .....	111
<b>Figure 7.51.</b>	Variation de fréquence en fonction de la dimension de fissure interne ... ..	111

<b>Figure 7.52.</b>	Variation de fréquence en fonction l'angle de l'orientation des fibres pour une coque composite avec fissure interne .....	112
<b>Figure 7.53.</b>	Coque composite combinée .....	112
<b>Figure 7.54.</b>	Variation des fréquences en fonction l'angle de l'orientation des fibres pour une coque combinée ELEM .....	113

## Liste des tableaux

<b>Tableau 7.1.</b>	Comparaison des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L .....	81
<b>Tableau 7.2.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 1$ ) .....	82
<b>Tableau 7.3.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 0.5$ ) .....	82
<b>Tableau 7.4.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 1$ ) .....	84
<b>Tableau 7.5.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 0.5$ ) .....	84
<b>Tableau 7.6.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 1$ ) .....	86
<b>Tableau 7.7.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 0.5$ ) .....	86
<b>Tableau 7.8.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 1$ ) .....	87
<b>Tableau 7.9.</b>	variation des paramètres de fréquences $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 0.5$ ) .....	87
<b>Tableau 7.10.</b>	variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L .....	89

<b>Tableau 7.11.</b>	variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L .....	91
<b>Tableau 7.12.</b>	variation des fréquences en fonction de dimension de fissure interne perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L .....	93
<b>Tableau 7.13.</b>	variation des fréquences en fonction de dimension de fissure interne parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L .....	95
<b>Tableau 7.14.</b>	variation des fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres de la deuxième couche pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L .....	102
<b>Tableau 7.15.</b>	Comparaison des fréquences [Hz] pour une coque cylindrique .....	108

## INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux composites sont vieux comme le monde, Il y plusieurs millénaires, les artisans de l’Egypte ancienne augmentaient déjà les propriétés mécaniques des briques par une adjonction de paille courte à l’argile fraîche. Certains matériaux naturels comme le bois (fibre de cellulose dans une matrice de lignine) et l’os (mélange complexe de collagène et de phosphate de calcium) sont des matériaux composites.

Il n’existe pas une définition simple d’un matériau composite. En effet, un grand nombre de matériaux modernes sont des alliages. Ils sont constitués d’un mélange à l’échelle microscopique de plusieurs phases, de structure et de composition chimique distinctes, concourant de manière synergique aux propriétés physiques, chimiques ou mécaniques des matériaux. D’une manière stricte, certains alliages peuvent être classifiés comme matériaux composites. Les polymères chargés pas des substances minérales divisées constituent également des matériaux composites ou des céramiques comme la porcelaine.

Une définition générale des matériaux composites est: « Un matériaux composite est constitué de l’assemblage d’au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d’aboutir à un matériau dont l’ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément » [1].

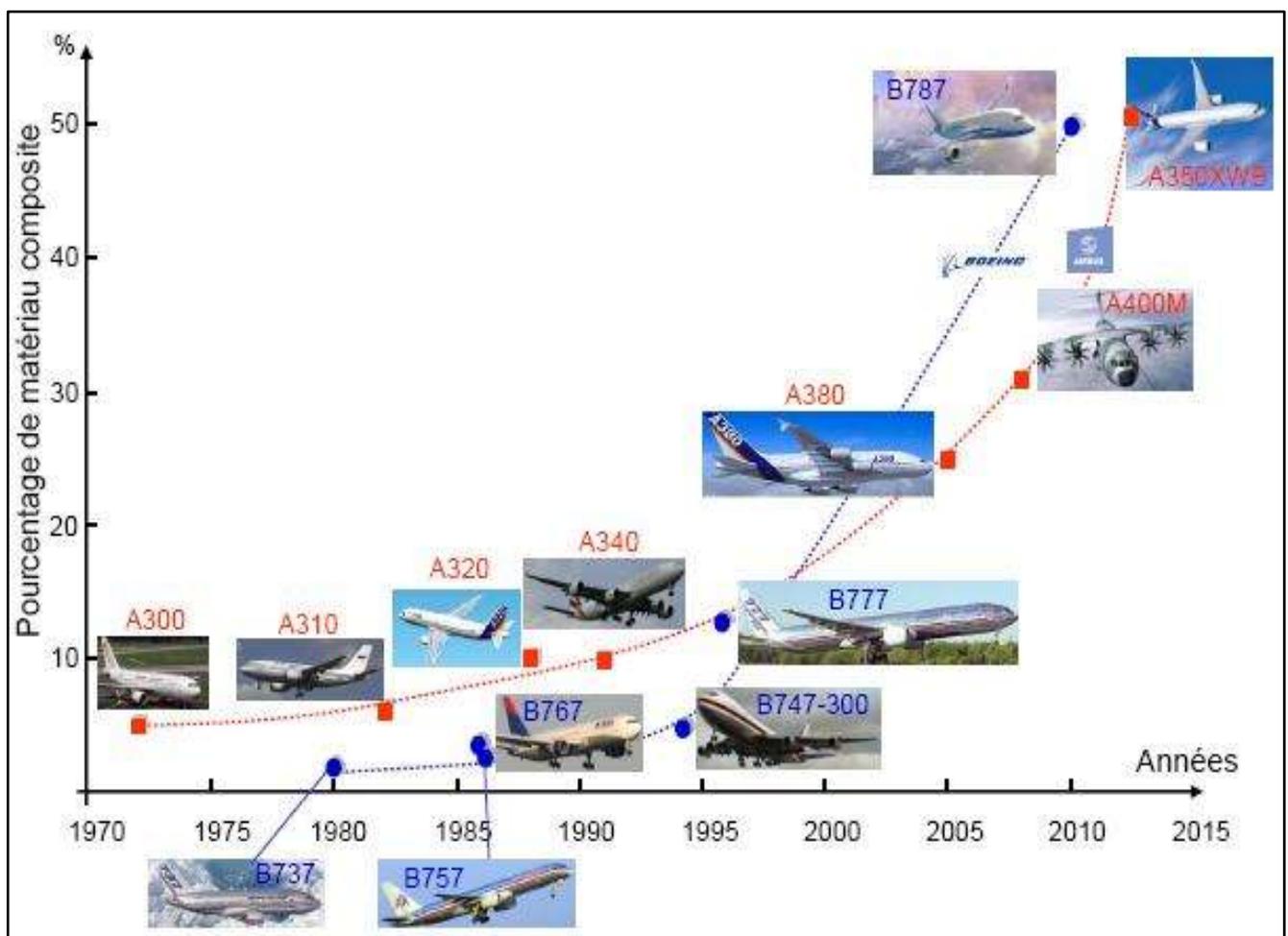
Un matériau composite est constitué d’une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue présente usuellement des propriétés mécaniques (rigidités et résistances) supérieures à celle de la matrice et est notée *renfort*. Les propriétés des matériaux composites résultent des propriétés des matériaux le constituant, de la distribution géométrique des renforts, du taux volumique de renfort, de la nature des interfaces renforts/matrice, du procédé de fabrication, ...

Les matériaux composites sont aujourd’hui principalement utilisés industriellement pour différentes raisons [2] dont voici une liste non exhaustive :

- Excellent rapport masse / rigidité / résistance en comparaison des matériaux métalliques,
- Définition de matériaux au « juste » besoin, c’est-à-dire présentant des propriétés élevées uniquement dans les axes de sollicitation afin d’effectuer des gains de masse supplémentaires [3],
- Dimensionnement de structures ayant des propriétés particulières (matériaux à très faibles coefficients de dilatation thermique, intéressants pour les applications satellites) ou à mémoire de forme (tels que des tubes de déploiement pour satellites),

- Utilisation de matériaux multifonctionnels ayant des fonctions structurales mais également autres telles que de bonnes propriétés acoustiques, transparence aux ondes électroniques, bonne résistance aux feux,
- Sensibilité nettement moindre à la fatigue que pour les matériaux métalliques [4].

Par conséquent, les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie et particulièrement dans les domaines aérospatial et aéronautique, où les gains de masse sur structures sont stratégiques. La figure 1, montre l'évolution continue d'utilisation des composites dans l'aviation.



**Figure 1.** Matériaux composites dans l'aviation

On notera toutefois que, bien que l'industrie aéronautique reste un acteur majeur du développement des structures hautes performances, les matériaux composites sont également très utilisés dans le domaine du sport, du génie civil, du domaine naval, du secteur

automobile, du domaine éolien (principal consommateur actuel de fibres de carbone) et du domaine pétrolier off-shore (réalisation de risers composites) comme montré sur la figure 2 .

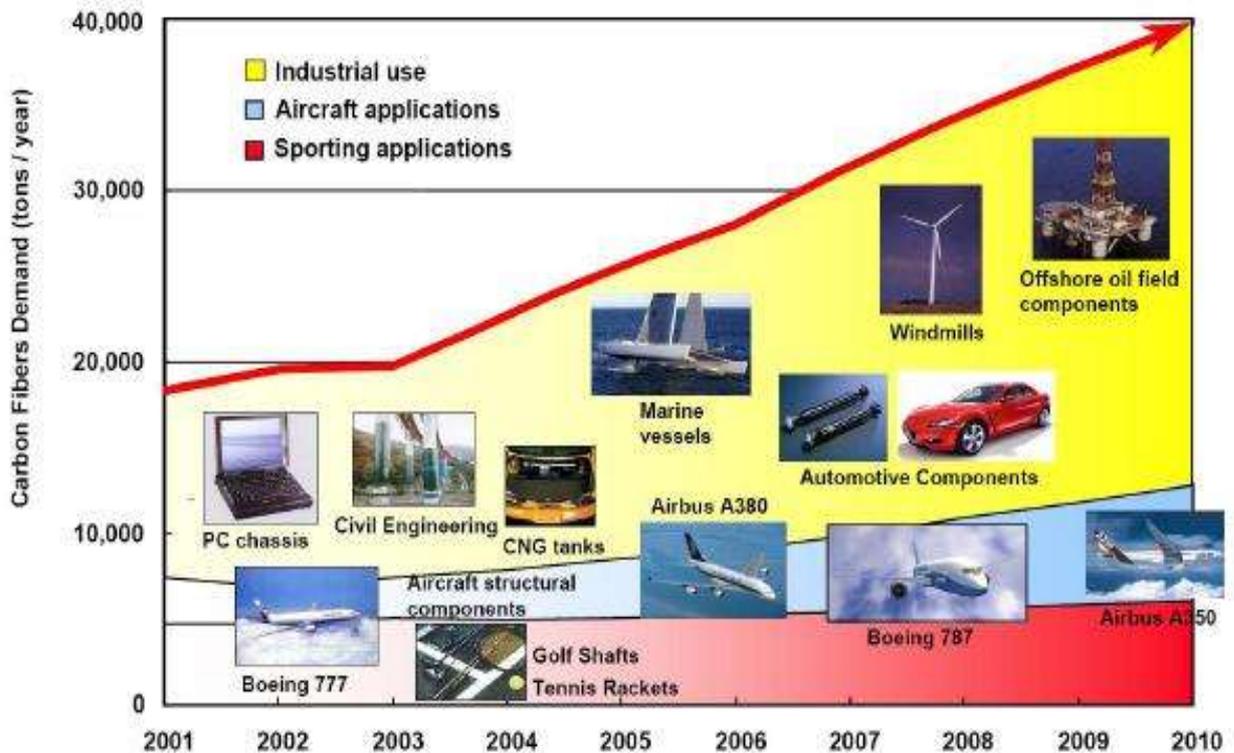


Figure 2. Demande en fibres de carbone des différents secteurs industriels en tonnes/an.

Du fait que l'utilisation des éléments structuraux en forme de plaques et de coques en matériaux composites a considérablement augmenté, il est nécessaire d'étudier le comportement non classique de structures anisotropes. Et parmi les problèmes sensibles qu'il faut s'intéresser c'est le problème vibratoire. Pour cela ce travail comporte une description précise des champs de déformations et des contraintes basée sur les hypothèses de *Reissner-Mindlin* et modélisée par la version *hp* de la méthode des éléments finis.

### Objectifs et contenu de la thèse :

Le but de cette recherche consiste à l'analyse vibratoire des composites par éléments finis fondés sur le concept de *Reissner-Mindlin*.

La thèse débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de sept chapitres et s'achève par une conclusion et des perspectives.

Le premier chapitre fait état d'une revue bibliographique sur les modèles développés pour la modélisation des structures composites en vibration.

Le deuxième chapitre, nous présentons une étude de comportement d'un milieu anisotrope.

Le troisième chapitre consiste à la formulation des plaques composites par la théorie de *Reissner-Mindlin*.

Le quatrième chapitre présente la modélisation des plaques composites en vibration par la version *h-p* de la méthode des éléments finis.

Le cinquième chapitre décrit la théorie des coques composites.

Le sixième chapitre est consacré à modéliser les coques composites par la version *h-p* de la méthode des éléments finis.

Le septième chapitre fait appel à la programmation et la représentation des résultats pour différentes formes des plaques et coques composites et des différentes conditions aux limites ainsi que l'influence de l'orientation des fibres sur les vibrations et aussi des structures contenant des fissures sont aussi analysées.

# Chapitre I

## Revue bibliographique

### 1.1. Vibration des plaques composites

L'analyse des vibrations libres des plaques et coques composites joue un rôle de plus en plus important dans la conception des structures dans plusieurs applications. Une étude approfondie de comportement dynamique de ces structures est essentielle pour évaluer leur plein potentiel. Par conséquent, il est nécessaire de développer des modèles appropriés capables de prédire avec précision leurs caractéristiques dynamiques.

De grands progrès ont été réalisés au cours des dernières décennies vers une meilleure compréhension des caractéristiques de vibration des plaques et coques composites.

En raison de la disponibilité limitée des solutions analytiques pour des applications pratiques, les méthodes approximatives numériques sont devenues des outils les plus efficaces. La méthode des éléments finis est considérée comme une approche très efficace et polyvalent pour ces problèmes.

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La première étude mathématique des problèmes de plaque, a probablement été faite par Euler [5] qui a effectué une analyse de vibration libre des plaques.

Chladni [6], a déterminé les différents modes de vibrations libres par des expériences sur des plaques horizontales, il a utilisé la poudre uniformément répartie, qui forme des motifs réguliers après l'induction de la vibration. La poudre accumulée le long les lignes nodales, où aucun déplacement vertical n'a eu lieu. Bernoulli [7] a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli était basée sur la théorie précédente résultant de la théorie de flexion des poutres d'Euler-Bernoulli.

Germain [8] a développé une équation différentielle de plaque où manquait le terme de gauchissement. Lagrange [9], étant l'un des auteurs de ce travail, corrigea les résultats de Germain en ajoutant le terme manquant ; ainsi, il fut le premier à présenter correctement l'équation générale de la plaque.

Cauchy [10] et Poisson [11] ont été les premiers à formuler le problème de la flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En développant toutes les grandeurs caractéristiques en séries, ils ont retenu seulement les termes du premier ordre. De cette manière, ils ont obtenu l'équation différentielle pour les déflexions qui coïncide complètement avec l'équation de Germain-Lagrange. Poisson étendit avec succès l'équation de la plaque de Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique, cependant, la rigidité à la flexion de la plaque a été fixée à un terme constant. Poisson suggère également de créer trois conditions aux limites pour n'importe quel point d'une frontière libre. Les conditions aux limites dérivées par Poisson et une question sur le nombre et la nature de ces conditions ont fait l'objet de nombreuses controverses et ont fait l'objet d'études plus approfondies.

La première théorie satisfaisante de la flexion des plaques est celle de Navier [12], qui a considéré l'épaisseur de la plaque comme fonction de la rigidité. Il a également introduit une méthode exacte qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques en utilisant des séries trigonométriques de Fourier.

Kirchhoff [13] publie des travaux importants sur la théorie des plaques minces, où il a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie de flexion des plaques et sont connues sous le nom d'"hypothèses de Kirchhoff". En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié la fonction énergétique de la théorie d'élasticité 3D pour les plaques courbées. Il a également souligné qu'il n'existe que deux conditions aux limites sur une extrémité de la plaque. Les autres contributions significatives de Kirchhoff sont la découverte de l'équation fréquentielle des plaques et l'introduction de méthodes de déplacement virtuel dans la résolution des problèmes de plaques. La théorie de Kirchhoff a contribué à la clarté physique de la théorie de la flexion des plaques et a favorisé son utilisation répandue dans la pratique.

Lord Kelvin et Tait [14] ont fourni un aperçu supplémentaire de l'état des équations aux limites en convertissant les moments de torsion le long du côté d'une plaque en forces de cisaillement. Ainsi, les côtés ne sont soumis qu'à deux forces: le cisaillement et le moment.

À la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle, les chantiers navals ont modifié leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par de l'acier de construction. Ce changement dans les matériaux structuraux a été extrêmement fructueux dans le développement de diverses théories des plaques. Les scientifiques russes ont apporté une contribution significative à l'architecture navale en étant les premiers à remplacer les anciennes méthodes par des nouvelles théories mathématiques. En particulier, Krylov [15] et Bubnov [16] ont

largement contribué à la théorie des plaques minces avec des rigidités en flexion et traction. Bubnov annonça les bases de la théorie de flexion des plaques et fut le premier à introduire une classification moderne des plaques. Bubnov a proposé une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles d'élasticité et il a composé des tables de déflexions maximales et des moments de flexion maximaux pour des plaques de diverses propriétés. Ensuite, Galerkin [17] a développé cette méthode et l'a appliquée à l'analyse de flexion des plaques. Il a recueilli de nombreux problèmes de flexion pour des plaques de forme arbitraire dans une monographie.

Timochenko [18] a apporté une contribution importante à la théorie et à l'application de l'analyse de flexion des plaques. Parmi les nombreuses contributions importantes de Timochenko, citons les solutions de plaques circulaires qui tiennent compte des grandes déflexions et de la formulation de problèmes de stabilité élastique. Timochenko et Woinowsky-Krieger [19] ont publié une monographie fondamentale qui représentait une analyse de divers problèmes de pliage de plaques.

Des études approfondies dans le domaine de la théorie de la flexion des plaques et de ses diverses applications ont été menées par des nombreux scientifiques. Hencky [20] a apporté une contribution à la théorie des grandes déformations et à la théorie générale de la stabilité élastique des plaques minces. Nadai [21] a fait de vastes recherches théoriques et expérimentales associées à une vérification de la précision de la théorie des plaques de Kirchhoff. Il a traité différents types de singularités dans des plaques en raison d'une application de force concentrée, d'effets de support ponctuel, etc. Les équations générales pour les grandes déflexions des plaques très minces ont été simplifiées par Föppl [22] qui utilisait la fonction de contrainte agissant dans le plan moyen. La forme finale de l'équation différentielle de la théorie de grande déflexion a cependant été développée par Von Karman [23]. Il a également étudié le comportement de flambement des plaques.

Huber [24], a développé une théorie approximative des plaques orthotropes et des plaques soumises à des charges réparties non symétriques. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropes ont été développées par Gehring [25] et Boussinesq [26]. Lekhnitskii [27] a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et de l'application de l'analyse des plaques anisotropes linéaires et non linéaires. Il a également développé la méthode des variables complexes appliquée à l'analyse des plaques anisotropes.

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une autre impulsion à des recherches analytiques plus rigoureuses sur les problèmes de plaques. Reissner [28] a développé une théorie de plaque qui considère les déformations causées par les forces

transversales de cisaillement. Des travaux de Volmir [29] et de Panov [30] étaient principalement consacrés à la résolution de problèmes de flexion non linéaires des plaques.

L'équation gouvernante pour une plaque mince rectangulaire soumise à des forces de compression directe a été dérivée par Navier [12]. Le problème de flambement pour une plaque simplement supportée soumise aux forces de compression directes et constantes agissant dans une et deux directions a été résolu par Bryan [31] en utilisant la méthode de l'énergie. Cox [32], Hartmann [33] ont présenté des solutions de différents problèmes de flambement pour des plaques rectangulaires en compression et Dinnik [34], Nadai [35], Meissner [36] pour des plaques circulaires.

Un effet des forces de cisaillement direct sur le flambement d'une plaque rectangulaire simplement supportée a été étudié par Southwell et Skan [37]. Timoshenko et Gere [38] et Bubnov [16] ont étudié le comportement de flambement d'une plaque rectangulaire soumise à des forces de compression directe non uniformes. Le comportement de flambement des plaques de différentes formes a été analysé par Karman et al. [39], Levy [40], Marguerre [41]. des analyses complètes des problèmes de flambement linéaires et non linéaires pour des plaques minces de formes variées sous divers types de charges, ainsi qu'une présentation des résultats pour les forces critiques et les modes de flambement ont été présentés par Timochenko et Gere [38], Gerard et Becker [42], Volmir [43], Cox [44].

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant le principe d'Alambert ou la formulation du travail basée sur la conservation de l'énergie. La première solution exacte du problème de vibration libre pour les plaques rectangulaires, dont les deux côtés opposés sont simplement supportés, a été réalisée par Voight [45]. Ritz [46] a utilisé le problème de la vibration libre d'une plaque rectangulaire à côtés libres pour démontrer sa fameuse méthode d'extension du principe de Rayleigh pour obtenir des bornes supérieures sur les fréquences de vibration. Poisson [11] a analysé l'équation de vibration libre pour les plaques circulaires. Les monographies de Timochenko et Young [47], Den Hartog [48], Thompson [49] contiennent une analyse complète et des considérations de conception des vibrations libres et forcées des plaques de diverses formes. Un ouvrage de référence de Leissa [50] présente un ensemble de résultats pour les fréquences et les formes de mode des vibrations libres des plaques.

Pour la théorie des plaques de Kirchhoff, le rapport entre l'épaisseur et les longueurs est considéré faible, et donc le cisaillement transversal et l'inertie rotative sont négligés, mais ce rapport n'est pas toujours considéré comme faible. Mindlin [52] a développé une théorie de la vibration transversale des plaques incluant l'effet du cisaillement transversal et de l'inertie de

rotation. Levinson [53] a obtenu une solution exacte pour les vibrations libres d'une plaque rectangulaire simplement supportée. Srinivas et Rao [54] ont obtenu des solutions analytiques pour le problème de la flexion, du flambage et de la vibration des plaques orthotropes simplement supportées. Chen et Doong [55] ont appliqué la méthode de Galerkin pour étudier la vibration des plaques rectangulaires simplement supportées initialement par une contrainte de flexion uniforme. Dawe et Roufaeil [56] ont appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz au problème de la vibration libre des plaques de Mindlin en utilisant les fonctions du faisceau de Timoshenko comme fonctions d'essai.

Greimann et Lynn [57] ont appliqué la méthode des éléments finis pour étudier la flexion des plaques avec déformation transversale en cisaillement. Rock et Hinton [58] ont appliqué la méthode des éléments finis pour étudier la réponse transitoire et la vibration libre des plaques minces et épaisses. Liew et al. [59] ont appliqué la méthode de Ritz pour obtenir les fréquences propres des plaques non symétriques basées sur la théorie de la déformation par cisaillement. Chung et al. [60] ont appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz aux fonctions du faisceau de Timoshenko pour étudier les vibrations libres des plaques de Mindlin orthotropes. Saha et al. [61] ont étudié l'analyse de la vibration libre des plaques de Mindlin avec des contraintes élastiques par une méthode variationnelle. Rao et Prasad [62] ont dérivé les équations de fréquence sous forme explicite pour diverses conditions aux limites, et ils ont conclu que la déformation de cisaillement a un effet plus important sur les fréquences propres que l'effet d'inertie de rotation. Irie et al. [63] ont étudié la vibration libre des plaques annulaires de Mindlin d'épaisseur variant radialement en utilisant l'approche matricielle de transfert dans laquelle les équations gouvernantes d'une plaque annulaire sont écrites comme un ensemble couplé d'équations différentielles de premier ordre utilisant la matrice de transfert de la plaque. Irie et al. [64] ont obtenu les fréquences propres des plaques annulaires uniformes sous différentes combinaisons de conditions aux limites en assumant les déplacements en fonction des fonctions de Bessel du premier et du second ordre. Sinha [65] a calculé les fréquences propres d'un disque annulaire épais en rotation modélisé comme une plaque de Mindlin en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz avec des fonctions d'essai obtenues numériquement par un schéma itératif. Nayar et al. [66] ont appliqué la méthode des éléments finis pour calculer les charges de flambement et les fréquences propres pour les plaques annulaires moyennement épaisses comprimées uniformément au bord interne. Han et Liew [67] ont obtenu les cinq premières fréquences propres non symétriques de plaques annulaires épaisses pour des épaisseurs et des rapports de rayons différents selon la méthode de quadrature différentielle. Civalek et Giirses [68] ont étudié l'analyse des vibrations libres

des plaques de Mindlin annulaires à côtés libres par la méthode discrète de convolution singulière. Pardoen [69] a étudié l'analyse de vibration et de flambage de plaques circulaires non symétriques en utilisant la méthode des éléments finis. Liew et al. [70] ont appliqué la méthode de la quadrature différentielle pour étudier le problème de la vibration libre des plaques circulaires de Mindlin. Lee et Schultz [71] ont étudié le même problème par la méthode pseudospectrale de Chebyshev.

L'analyse vibratoire des plaques composites est d'une importance capitale dans la conception pratique. De nombreux chercheurs ont analysé la vibration libre des plaques composite. Srinivasan et Thiruvengkatachari [72] ont appliqué la technique de l'équation intégrale pour étudier le problème de la vibration libre des plaques entièrement serrées. Mizusawa [73] a étudié le problème de la vibration libre pour les plaques composites épaisses avec des côtés droits simplement supportés par une méthode semi-analytique. Xiang et al. [74] ont appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'analyse du même problème. Looker et Sader [75] ont obtenu une formule analytique pour le calcul des fréquences propres des plaques rectangulaires minces en utilisant le principe de la variation et la théorie des perturbations singulières. Lanhe et al. [76] ont présenté une analyse vibratoire de plaques épaisses composites stratifiées en couches non-symétriques, basées sur la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre, en utilisant la méthode de quadrature différente des moindres carrés. Xiang et al. [77] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre  $n$  pour résoudre l'analyse vibratoire d'une plaque stratifiée composite. Liew et Liu [78] ont présenté une analyse de la vibration libre des plaques isotropes modérément épaisses pour diverses conditions aux limites, angle d'orthotropie et rapport d'épaisseur basé sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre de Mindlin. Ma et Ang [79] ont étudié la vibration libre des plaques de Mindlin basée sur l'élément de la plaque de déplacement relatif. Les équations du mouvement sont reformulées en utilisant le concept de déplacement relatif avec représentation de l'effet d'inertie de rotation, la matrice de rigidité et la matrice masse sont dérivées en utilisant le concept isoparamétrique et la méthode de déformation supposée. Tai et Kim [80] ont proposé une théorie des plaques raffinée qui tient compte de la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux limites de traction nulles sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteurs de cisaillement, les équations ont été dérivées en utilisant le principe de Hamilton et la solution de Navier a été appliquée pour obtenir la. Gurses et al. [81] ont présenté une analyse de vibration libre de plaque trapézoïdale stratifiée symétrique en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre par la méthode discrète de

convolution singulière. Karami et al. [82] ont considéré la méthode de quadrature différentielle pour résoudre les vibrations libres pour les plaques épaisses composites stratifiées basées sur la théorie de Mindlin. Wang [83] a examiné l'analyse des vibrations libres des plaques stratifiées composites obliques par la méthode Rayleigh-Ritz pour les plaques de Mindlin symétriques et antisymétriques. Daia et al. [84] ont présenté une formulation sans maillage pour la vibration libre des plaques composites de Mindlin via une méthode d'interpolation de point radial conforme linéairement, des fonctions de base radiales et polynomiales ont été utilisées pour construire les fonctions de forme portant les propriétés des fonctions Delta, une technique de stabilisation par lissage des contraintes pour l'intégration nodale a été utilisée pour restaurer la conformabilité et améliorer la précision et la vitesse de convergence. Civalek [85] a développé une convolution singulière discrète pour l'analyse vibratoire de plaques composites modérément épaisses, stratifiées symétriquement, basée sur la déformation de cisaillement de premier ordre. Kant et Mallikarjuna [86] ont rapporté une théorie d'ordre supérieur raffinée pour l'analyse des vibrations libres de plaques multicouches non symétriques, la théorie tient compte de la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et les effets d'inertie de rotation. Nguyen-Van et al. [87] ont présenté une méthode basée sur un élément quadrilatéral à quatre nœuds utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre pour l'analyse vibratoire de plaques stratifiées composites, l'élément a été construit en incorporant une méthode de lissage des déformations dans l'élément fini quadrilatéral bilinéaire à quatre nœuds où l'opération de lissage des déformations est basée sur une intégration nodale conforme sans maillage, les matrices de rigidité en flexion de membrane étaient basées sur les limites des cellules de lissage et le terme de cisaillement était évalué avec la quadrature de Gauss. Liew et al. [88] ont adopté la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre dans la quadrature différentielle des moindres carrés pour l'analyse vibratoire des plaques composites rectangulaires et circulaires stratifiées, le déplacement transversal et les deux rotations de sont approchées indépendamment par déplacement des moindres carrés, les coefficients de pondération sont approchés par le calcul des fonctions de forme et de leurs dérivées partielles. Asadi et Fariborz [89] ont considéré une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour obtenir les équations gouvernantes des plaques composites de manière non symétrique dans diverses conditions aux limites et en couches sous excitation dynamique. La solution temps-harmonique conduit à un problème de valeur propre et est convertie en un ensemble d'équations algébriques homogènes en utilisant une méthode de quadrature différentielle. Liew et al. [90,91] ont utilisé l'analyse

vibratoire de plaques rectangulaires stratifiées de Mindlin avec diverses conditions aux limites. Sari [92] a présenté une analyse des vibrations des plaques rectangulaires isotropes et composite en utilisant la technique de collocation spectrale. Khdeira et Reddy [93] ont présenté une théorie de la déformation de cisaillement du second ordre pour l'analyse des vibrations de plaques composites stratifiées, des solutions analytiques exactes ont été obtenues pour des plaques épaisses et modérément épaisses ainsi que pour des plaques minces et des plaques en bande.

Dimarogonas [94] analyse des vibrations des structures fissurées, y compris des méthodes d'identification des fissures sur la base de signatures de vibration. Les fissures sur des poutres ou des plaques composites sont principalement étudiés par les modèles discrets continu et méthodes d'éléments finis. Nikpour [95] a étudié la vibration d'une coque cylindrique anisotrope stratifié avec une fissure circonférentielle. Ghoneam [96] a étudié une poutre composite stratifié avec une fissure ouverte basée sur le concept de la flexibilité. Leissa et al.[97] ont étudié les vibrations des plaques circulaires avec des fissures radiales. Le champ de déplacement à deux dimensions est décomposé en deux composantes, l'une représentant le déplacement sans la fissure et l'autre représentant le déplacement due à la fissure. Lee et Lim [98] ont utilisé une méthode numérique basée sur la méthode de Rayleigh pour prédire les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire isotropes et orthotropes fissurées. Les effets de la déformation de cisaillement transversal et l'inertie de rotation sont incluses en appliquant l'équivalent dynamique de la théorie de Reissner simplifié.

## 1.2. Vibration des coques composites

Love [99] été le premier à présenter une théorie des coques basée sur l'élasticité linéaire classique. Pour simplifier les relations contrainte-déplacement et, par conséquent, les relations constitutives, Love a appliqué les hypothèses de Kirchhoff développées à l'origine pour la théorie de la flexion des plaques. Cet ensemble d'hypothèses est communément appelé les hypothèses de Kirchhoff-Love. La théorie de Love des coques minces est également appelée théorie d'approximation de premier ordre.

Reissner [100] a développé la théorie linéaire des coques minces (également la théorie d'approximation de premier ordre) où certaines insuffisances de la théorie de Love ont été éliminées. Il a dérivé les équations d'équilibre, les relations contrainte-déplacement, et les expressions résultantes de contrainte pour les coques minces directement de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité, en appliquant les hypothèses de Love-Kirchhoff.

Sanders [101] a également développé la théorie des coques de premier ordre à partir du principe du travail virtuel et en appliquant les hypothèses de Kirchhoff-Love. La théorie de Sanders pour les coques minces a supprimé avec succès les incohérences de la théorie de Love. Koiter [102] a développé une version qui conserve des termes de magnitude compatibles avec ceux retenus par Reissner et résout l'incohérence dans l'expression pour la torsion.

La théorie de Timochenko [103] pour les coques minces était très proche de la théorie de Love. Les relations générales et les équations ont été obtenues en appliquant les hypothèses de Kirchhoff-Love. Naghdi [104] a analysé la précision de la théorie de Love-Kirchhoff des coques minces.

Lurye [105], Flügge [106] et Byrne [107] ont développé indépendamment la théorie d'approximation du second ordre des coques. Les relations générales et les équations de cette théorie sont le résultat direct de l'application des hypothèses de Kirchhoff et de l'hypothèse de faible déflexion aux équations correspondantes de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Les applications de cette théorie ont généralement été limitées à des coques cylindriques.

Novozhilov [108] a développé une autre version de la théorie de l'approximation du second ordre, il a obtenu les relations de déformation-déplacement à partir de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité en appliquant les hypothèses de Kirchhoff. Ensuite, il a utilisé l'expression de l'énergie de déformation pour dériver les formules pour les contraintes résultantes, et il a développé le critère pour simplifier les équations et les relations de la théorie générale des coques minces basées sur les hypothèses de Kirchhoff.

Goldenveizer [109] a apporté de précieuses contributions à la théorie générale des coques minces. Il a été le premier à formuler les conditions de compatibilité des composants de la déformation dans la théorie générale des coques.

Les équations d'approximation de second ordre ont été dérivées par Vlasov [110] directement à partir des équations générales d'élasticité linéaires tridimensionnelles pour une coque épaisse, il a supposé que les composantes de la déformation transversale et de la déformation de cisaillement pouvaient être négligées pour les coques minces, et les déformations restantes étaient représentées par les trois premiers termes de leur expansion en série, lorsque la déformation transversale normale et la déformation de cisaillement transverse soient nulles cela permet une transition rapide de la théorie tridimensionnelle aux équations bidimensionnelles de la théorie de la couche mince.

Des théories qui introduisent les effets de cisaillement transverse et des contraintes normales ont été proposées par Reissner [111], Naghdi [112], et d'autres. Kraus [113], Leissa

[114] ont fait une analyse complète des théories d'approximation de premier ordre et d'ordre supérieur et des équations correspondantes pour les coques.

Reissner [115] a dérivé une théorie non linéaire des coques de révolution chargées symétriquement. Dans cette théorie, l'hypothèse de faible déflexion a été abandonnée tandis que les hypothèses restantes des théories générales d'approximation d'ordre supérieur ont été conservées. Des dérivations d'une théorie géométrique non linéaire plus générale des coques minces ont été réalisées par Naghdi et Nordgren [116], Sanders [117] et Koiter [118]. Un développement de la théorie générale non linéaire des coques minces a été fait par Mushtari et Galimov [119], Simmonds et Danielson [120].

Beaucoup des théories de coques ont été développées pour inclure des caractéristiques de types spéciaux de coques en parallèle avec l'évolution des théories générales des coques minces. Les facteurs influençant les hypothèses et les domaines d'application de ces théories ont été la géométrie de coque, les domaines de déformation, les conditions de chargement et de contrainte, le comportement particulier de la coque, etc. La plupart de ces théories sont basées sur l'approximation de Love.

La forme générale des équations gouvernantes de la théorie de membrane des coques minces a été établie par Beltrami [121] et Lecornu [122]. La théorie de membrane des coques évoluait intensément. Reissner [123] a développé la théorie de membrane des coques minces de révolution sous des charges non symétriques. Sokolovskii [124] a réduit les équations de la théorie des membranes à la forme canonique et a révélé un certain nombre de leurs propriétés caractéristiques. Pucher [125] a découvert l'utilité de la fonction de contrainte d'Airy pour la résolution de problèmes de membrane dans des coques de forme arbitraire.

Donnel [126], et Mushtari [127] ont développé indépendamment une théorie simplifiée des coques minces de forme générale. En raison de leur simplicité, les équations gouvernantes de cette théorie se sont révélées extrêmement pratiques pour résoudre de nombreux problèmes des coques. Mis à part les hypothèses de Kirchhoff-Love, quelques hypothèses supplémentaires qui simplifient les relations de contrainte-déplacement, d'équilibre et de compatibilité ont été utilisées pour dériver ces équations. Il s'est avéré que ces théories pouvaient être appliquées avec une précision suffisante aux coques de faible courbure. Marguerre [128] a établi des équations pour les plaques ayant une courbure initiale.

Reissner [115] a présenté une formulation classique des problèmes de flexion pour une coque de révolution et a étudié une coque sphérique en flexion axisymétrique. Il a réduit les équations différentielles de la coque sphérique à une forme commode et a ensuite appliqué la méthode asymptotique pour leur intégration. Meissner [129] a pu généraliser les résultats de

Reissner à la déformation symétrique de coques de révolution de forme arbitraire et ayant une épaisseur variable. Hoff [130] a analysé des coques coniques circulaires sous un chargement arbitraire. Flügge [131] a donné des solutions générales pour les coques sphériques et coniques soumises à une charge non symétrique. Son approche était basée sur la méthode de déplacement classique.

Wissler [132] a analysé des coques toroïdales. Par convention, les coques cylindriques sont souvent considérées en dehors des coques de révolution. L'analyse des coques cylindriques occupe une place prépondérante dans la littérature en raison de leur grande importance pratique et de la relative simplicité de la théorie. Flügge [106] a dérivé les équations différentielles en termes de déplacements pour des coques cylindriques. Parkus [133] a présenté les équations pour un cylindre d'une section arbitraire. Donnel [126], Dishinger [134], Hoff [135] et Vlasov [110] ont introduit des simplifications pour les relations et les équations de la théorie générale des coques cylindriques. Novozhilov [136] a présenté les équations différentielles de la théorie générale des coques cylindriques d'une forme arbitraire en utilisant des variables complexes et a mentionné quelques simplifications possibles de ces équations.

Love [99] introduit le concept de l'effet de coté appliqué aux coques de révolution, il a montré qu'une première approximation d'une solution générale pouvait être obtenue sous la forme de la somme des solutions des équations de membranes et des équations de l'effet de coté. Goldenveizer [109] a défini les conditions pour lesquelles les solutions en décomposition rapide des équations de la théorie générale des coques peuvent être obtenues, et a analysé un certain nombre de cas possibles. Geckeler [137] a appliqué ce concept à des coques sphériques chargées symétriquement, sa méthode approximative était basée sur la réduction du système des équations différentielles à deux couplages à deux équations différentielles indépendantes, en supposant que pour les coques très minces, les dérivées des fonctions données seront plus grandes que les fonctions elles-mêmes.

Pour une coque cylindrique circulaire soumise à une charge axiale compressive uniforme, les équations différentielles ont été formulées et des solutions ont été trouvées par Lorentz [138] et Timoshenko [139]. Mises [140] et Mushtari et Sachenkov [141] ont traité un problème de flambement linéaire pour des coques cylindriques soumises à une charge combinée (pression externe et forces de compression appliquées axialement). L'effet combiné de la pression axiale et interne a été étudié par Flügge [106] pour les coques cylindriques. Donnel et Wan [142] ont déduit les équations générales et analysé l'effet des imperfections sur

le flambement des coques minces cylindriques sous des forces de compression axiales uniformes.

Le problème de flambement pour une coque sphérique sous une pression externe a été présenté par Zoelly [143] en linéaire et par von Karman et Tsien [144] dans des formulations non linéaires. Koiter [145] a analysé le comportement de flambage d'une coque cylindrique sous compression axiale. Budansky [146], Kaplan et Fung [147] ont étudié le flambement de coques de faible courbure sous une charge superficielle normale pour un problème linéaire et non linéaire respectivement.

Les équations de mouvement pour l'analyse vibratoire des coques peuvent être dérivées comme une simple extension du cas statique en ajoutant les forces d'inertie aux forces et moments du corps qui en résulte des accélérations de la masse de la coque selon le principe D'Alambert. Les équations des vibrations libres des coques minces ont d'abord été dérivées par Love [99]. Ensuite, les équations du mouvement des coques de formes variées selon les approximations de premier ordre et d'ordre supérieur ont été présentées par Kraus [113], Flügge [148], Epstein [149]. Leissa [114] analyse les diverses équations de mouvement des coques minces et représente des résultats pour les fréquences de vibration libres et les modes propres.

Ruotolo [149] a comparé les théories des coques minces de Donnell, Love, Sander et Flügge dans l'évaluation de la fréquence propres des coques cylindriques basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, il a utilisé la fonction d'énergie pour obtenir l'équation du mouvement. Civalek [150,151] a présenté une analyse de vibration libre des stratifiés coniques et cylindriques en utilisant une approche de convolution singulière discrète, cette étude a été réalisée en utilisant la théorie de Love pour les coques minces, l'effet de nombre de couches sur les fréquences propres a été considéré. Lim et al. [152] ont présenté l'analyse des vibrations des coques coniques composites par une méthode d'énergie pour divers de couches symétriques et non symétriques. Kabir [153,154,155] a présenté une solution analytique au problème de valeurs limites pour l'analyse des vibrations libres de panneaux cylindriques stratifiés à angle-pli antisymétrique, la solution est basée sur une série de Fourier à limites continues en tenant compte de l'inertie de rotation, les équations caractéristiques du panneau sont définies par cinq équations différentielles partielles de second et de troisième ordre. Noseir et Reddy [156] ont présenté la théorie de déformation de cisaillement de Donnell et la théorie classique de Donnell pour la vibration et la stabilité des coques cylindriques circulaires stratifiées en utilisant une solution analytique basée sur le type de Levy. Soldatos [157] a considéré l'analyse vibratoire des coques stratifiées en utilisant une

théorie de déformation de cisaillement améliorée, cette théorie tient compte de la variation parabolique des déformations de cisaillement transversale et elle est capable de satisfaire les conditions aux limites de cisaillement nul sur les surfaces externes de la coque, et de ne pas utiliser le facteur de correction de cisaillement transversal. Shu [158,159,160] a appliqué une méthode de quadrature différentielle généralisée pour l'analyse des vibrations de coques cylindriques et coniques stratifiées isotropes et composites basée sur la théorie des coques minces de Love, les champs de déplacement ont été exprimés en tant que produit de fonctions inconnues le long de la direction axiale et de fonctions de Fourier le long de la direction circonférentielle. Ganapathi et al. [161, 162] ont caractérisé la vibration libre de coques épaisses composites stratifiées non circulaires en utilisant une théorie d'ordre supérieur, la formulation tient compte de la variation des déplacements dans le plan et transversal à travers l'épaisseur, de la discontinuité abrupte de la pente des déplacements dans le plan aux interfaces, et inclut les termes d'inertie de rotation, la résolution est faite par la méthode de l'énergie et la méthode des éléments finis. Leissa et al. [163] ont examiné l'analyse vibratoire des coques minces cylindriques en utilisant la méthode de Ritz. Leissa [164] a présenté une solution à forme fermée pour l'analyse vibratoire des réservoirs peu profonds et a étudié les effets de la faible profondeur sur les fréquences propres. Soldatos et Hadjigeorgiou [165] ont étudié l'analyse vibratoire tridimensionnelle des coques épaisses cylindriques isotropes et des panneaux selon la solution de Levy. Asadi et Qatu [166,167] ont présenté l'analyse vibratoire des coques cylindriques composites stratifiées d'épaisseurs modérément épaisses en utilisant une méthode de quadrature différentielle basée sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. Hosseini-Hashemi et Fadaee [168] ont présenté une procédure précise en forme fermée utilisant de nouvelles fonctions auxiliaires et potentielles pour l'analyse libre des vibrations de panneaux sphériques modérément épais basés sur la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre, les relations déformation-déplacements des théories Donnell et Sanders ont été utilisées et comparées avec l'analyse des éléments finis 3D. Chern et Chao [169] ont étudié des panneaux composites tridimensionnels sphériques et cylindriques utilisant la méthode de Ritz et la solution de Levy. Yu et al. [170] ont étudié l'analyse des vibrations libres des coques minces peu basée sur la théorie de Donnell Mushtary Vlasov en utilisant analytiquement la solution analytique généralisée de Navier. Buchanan et Rich [171] ont rapporté l'analyse vibratoire de coques sphériques et toroïdales isotropes épaisses en utilisant des éléments finis lagrangiens à neuf nœuds. Viola et al. [172,173] ont étudié l'analyse des vibrations statiques de coques stratifiées composites doublement incurvées et de panneaux basés sur la théorie de déformation de cisaillement

d'ordre supérieur en utilisant une méthode de quadrature différentielle, les déformations et les contraintes sont corrigées après la récupération pour satisfaire aux conditions aux limites supérieure et inférieure des coques ou panneaux composites stratifiés et ont rapporté les fréquences pour divers types de coques composites doublement incurvées telles que coniques, elliptiques, caténoïdales et toroïdales dans de nombreux types de conditions aux limites. Tornabene [174] a appliqué une méthode de quadrature différentielle généralisée sur les coques composites stratifiées à double courbure selon la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. Bardell et al. [175] ont étudié l'analyse de la vibration libre des coques coniques isotropes à l'aide d'un élément fini hiérarchique basé sur la théorie des coques mince. Zhoa et al. [176] ont examiné l'analyse des vibrations libres des coques coniques par la méthode 2D Ritz.

### **1.3. Méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis utilisée aujourd'hui a été développée jusqu'à présent dans son état actuel. Selon Zienkiewicz [177], le développement s'est déroulé selon deux voies principales: l'une en mathématiques et l'autre en ingénierie. Quelque part entre ces deux extrêmes sont les méthodes résiduelles variationnelles et pondérées, qui nécessitent l'utilisation de fonctions d'essai pour effectuer une solution. L'utilisation de ces fonctions remonte à près de 200 ans.

Une fonction d'essai est une fonction mathématique supposée qui est habituellement basée sur l'intuition physique, qui est appliquée globalement à la région analysée et qui se rapproche du comportement attendu de la région par rapport à certaines forces externes. Ces fonctions sont utilisées dans divers types de formulations intégrales [178].

La méthode des éléments finis est basée sur les mêmes principes avec une exception importante: les fonctions d'essai ne sont pas appliquées globalement à l'ensemble de la région analysée mais localement (c'est-à-dire sur un élément). Ce point est d'une importance primordiale, car la méthode devient applicable à des problèmes réels avec des géométries irrégulières et des solutions inconnues. Cette étape importante ne se produisit qu'en 1943 lorsque Courant [179] introduisit des fonctions d'essai continu par morceaux. Mais cela devance l'histoire, qui commence en 1795.

L'utilisation des fonctions d'essai n'est associée ni aux développements purement mathématiques ni aux développements techniques. Gauss [180] en 1795, a utilisé les fonctions d'essai (sur une base globale) dans ce qu'on appelle maintenant la méthode des résidus

pondérés. Plus tard, ces fonctions ont été utilisées dans les méthodes variationnelles par Rayleigh [181] en 1870 et par Ritz [182] en 1909. En fait, toute méthode de solution approximative basée sur la variation est fréquemment appelée aujourd'hui la méthode de RayleighRitz. Galerkin [183] en 1915 introduit un type particulier de méthode des résidus pondérés.

En 1943, Courant [179] a introduit des fonctions d'essai continu par morceaux. Comme leur nom l'indique, ces fonctions n'étaient pas appliquées globalement à l'ensemble de la région analysée, mais plutôt à de nombreuses petites régions ou éléments. En utilisant des fonctions d'essai sur une base locale, Courant a grandement étendu l'applicabilité des fonctions d'essai pour obtenir des solutions approximatives à des problèmes réels.

De façon plus mathématique, la méthode des différences finies a été introduite par Richardson [184] en 1910 puis améliorée par Liebman [185] en 1918 et Southwell [186] en 1946. Varga [187] en 1962. Ces développements mathématiques conduisent directement à la méthode des éléments finis actuels, et l'on peut maintenant dire que la méthode des différences finies est un cas particulier de la méthode des éléments finis plus générale [188].

Au début des années 1940, les ingénieurs aéronautiques développaient et utilisaient des méthodes d'analyse qui sont maintenant reconnues comme les premières formes de la méthode des éléments finis. Les premières applications utilisaient la méthode dite de matrice de force (également appelée méthode de force redondante). Dans cette méthode, les inconnues nodales sont les forces, pas les déplacements. Lorsque les déplacements de chaque nœud sont considérés comme des inconnues, la méthode est appelée méthode de la rigidité.

Cependant, la méthode de rigidité n'a été développée qu'en 1953 par Levy [189], puis Schuerch [190] en 1953, Argyris et Kelsey [191] en 1955, et Turner, Clough, Martin et Topp [192] en 1956. Et c'est en 1960 que Clough [193] a introduit le terme «élément fini».

## Chapitre II

### Matériaux anisotropes

#### 2.1. Généralités :

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le nouveau matériau ainsi constitué possède des propriétés que les composants seuls ne possèdent pas.

Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.) explique l'utilisation croissante des matériaux composites dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine des composites reste complexe du point de vue mécanique de par la non-homogénéité du matériau.

Un matériau composite se compose comme suit :

matrice + renfort + optionnellement: charge et/ou additif.

#### 2.1.1. Constituants des matériaux composites

##### 2.1.1.1. Les différentes matrices

*a. Les matrices thermodurcissables* sont les plus utilisées dans l'industrie. En effet, les matrices polyester ont des propriétés mécaniques intéressantes pour un faible coût et représentent 90% du marché. Toutefois, leurs propriétés mécaniques se dégradent fortement à partir de 120°C et ces matrices sont sensibles à l'impact. Les matrices époxy ne représentent que 5% du marché global, mais sont les plus utilisées pour les applications aéronautiques hautes performances froides (<180°C) car elles présentent de bonnes propriétés mécaniques intrinsèques et ont une forte adhésion avec les fibres de carbone ou de verre. Toutefois, le temps de polymérisation de ces matrices et leur coût limite leur usage aux applications structurales fortement sollicitées mécaniquement.

*b. Les matrices thermoplastiques* contrairement aux matrices thermodurcissables peuvent être réchauffées sans dégradation irréversible du matériau ce qui est particulièrement intéressant pour les réparations ou le recyclage. Ces matrices présentent, de plus, une bonne tenue à l'impact. Toutefois, de par leur sensibilité aux solvants et leur coût de fabrication (les températures de cuisson sont nettement plus élevées que pour les matrices thermodurcissables) leur usage dans le domaine aéronautique et aérospatial reste faible et

limité à des structures «exposées» aux différents types d'impact (utilisation de composite thermoplastique *AS4/PEEK* pour la fabrication de volets secondaires de l'*A380*).

Une tendance actuelle consiste à insérer au sein des matrices thermodurcissables des nodules thermoplastiques afin de doper la tenue à l'impact de ces matériaux (les matériaux *T700GC/M21* ou *T800S/M21*, utilisant ce type de matrice, sont utilisés pour l'*A380* et l'*A400M*).

**c. Les matrices thermostables** présentent de bonnes propriétés mécaniques jusqu'à des températures relativement élevées ( $<300^{\circ}\text{C}$ ) pour des matrices organiques. Elles sont utilisées pour la fabrication de circuits imprimés (matrice bismaléimides) ou pour des pièces aéronautiques (comme le matériau *C/PRM15* développé par la *NASA*).

**d. Les matrices métalliques et céramiques** sont utilisées respectivement pour les applications hautes ( $<500^{\circ}\text{C}$ ) et très hautes températures ( $>1000^{\circ}\text{C}$ ). Ce type de matrice ne peut être associé qu'à des fibres Sic ou des fibres de carbone. Le coût de fabrication de ces matériaux est très élevé.

#### 2.1.1.2. Les différentes fibres

**a. Les fibres de carbone** présentent des propriétés mécaniques très élevées (haut module, haute résistance, faible dilatation thermique) et sont utilisées pour les applications industrielles hautes performances. Leur coût de fabrication est élevé. Ce type de matériau est produit essentiellement aux Etats-Unis et au Japon. Le diamètre d'une fibre de carbone est de l'ordre de  $5\mu\text{m}$ . Il s'agit par sa structure moléculaire d'un matériau anisotrope.

**b. Les fibres de Verre**, plus abordables, présentent des propriétés mécaniques (notamment le module en traction) plus faibles mais néanmoins intéressantes (en particulier la résistance de traction). Les fibres de verre, constituées essentiellement de silicate, ont un diamètre d'environ  $10\mu\text{m}$  et sont des matériaux isotropes.

**c. Les fibres d'aramide**, dont la plus connue est le *kevlar*, ont de bonnes propriétés en traction et une excellente ténacité d'où leur usage pour la fabrication de gilet pare-balles. Le diamètre d'une fibre d'aramide est du même ordre de grandeur que celui d'une fibre de verre.

**d. Les fibres céramiques**, comme les fibres Sic, présentent une bonne stabilité des propriétés à haute température (de  $500^{\circ}\text{C}$  à  $1600^{\circ}\text{C}$ ). Le diamètre de ces fibres est important ( $100\mu\text{m}$ ) et elles présentent un comportement anisotrope. Leur coût de fabrication est très élevé.

*e. Les fibres végétales*, comme le chanvre ou le coton, présentent des propriétés mécaniques faibles mais ont un coût de fabrication dérisoire en regard des autres types de fibre. On notera que le module de traction d'une fibre de chanvre est du même ordre de grandeur ( $E \approx 70GPa$ ) que celui d'une fibre de verre, pour un coût bien moindre. La résistance de traction est toutefois 5 fois inférieure. Ces matériaux sont utilisés dans l'industrie navale, l'industrie automobile ou le génie civil pour des applications présentant un fort aspect écologique.

### **2.1.1.3. Adhésion renforts / matrice**

Le choix des constituants ne peut se résumer à prendre la «meilleure» matrice et la «meilleure» fibre.

Il est nécessaire que l'adhésion entre les fibres et la matrice soit de qualité suffisante pour que les propriétés du matériau composite obtenu soient supérieures à celles de ses constituants.

On notera que les fibres de carbone présentent une bonne adhésion avec les matrices époxy suite à un traitement oxygène. Les fibres d'aramide, chimiquement inertes, s'associent difficilement avec les matrices organiques. Enfin, les fibres de verre, après humidification, présentent une tenue interfaciale intéressante avec toutes les matrices organiques. D'un point de vue physico-chimique, l'adhésion entre les fibres (carbone ou verre) et la matrice (époxy) est généralement due à des liaisons covalentes (mécanisme de liaison le plus tenace).

### **2.1.2 Avantages des matériaux composites :**

Les matériaux composites proposent de nombreux avantages comparés aux matériaux dits traditionnels. Suivant les applications auxquelles ils sont destinés, leurs performances mécaniques et chimiques permettent de répondre à des contraintes techniques plus complexes. Ces matériaux légers peuvent intégrer de la technologie et offrir une grande liberté de forme.

#### **a. Légèreté :**

La densité du composite varie bien évidemment en fonction de la nature des composants et du ratio fibres/matrice. Néanmoins, cette densité reste bien inférieure à celle des matériaux métalliques. A performances équivalentes, le gain de masse obtenu en réalisant la structure en composite n'est cependant pas dans le rapport des densités. Compte tenu des caractéristiques mécaniques généralement plus faibles, on estime globalement ce gain entre 25 et 60 %.

### **b. Forte résistivité électrique**

Les composites à matrice organique et fibres de verre présentent une forte résistivité diélectrique. Cette propriété procure comme avantage la diminution des risques de corrosion galvanique et de court-circuit.

### **c. Facilite de mise en œuvre**

Les composites offrent une grande souplesse de mise en œuvre ce qui permet d'une part de réaliser des structures de grandes dimensions et de géométrie complexes et d'autre part de modifier localement les performances en intégrant des fonctions ou en jouant sur la composition des matériaux.

Autre intérêt, parfois sous estimé des composites : la possibilité de réaliser des assemblages sans engendrer des déformations comme c'est généralement le cas lors des opérations de soudage des structures métalliques.

### **d. Performances mécaniques**

Si on les compare aux matériaux métalliques, les composites se caractérisent par des lois de comportement sensiblement différentes, une tenue en fatigue bien supérieure ainsi que des niveaux de modules d'élasticité généralement inférieurs.

#### ▪ Lois de comportement

Des lois de comportement purement élastiques jusqu'à rupture pour les matériaux composites offrent des avantages. En effet, cette caractéristique permet aux structures de retrouver leur géométrie après de fortes sollicitations.

#### ▪ Résistance à rupture

Les composites sont par nature des matériaux anisotropes. Le degré d'anisotropie d'une structure est très variable et dépend uniquement des choix d'optimisation du concepteur, guidé par une analyse très fine des directions principales des contraintes dans la structure considérée. Les contraintes à rupture des composites sont donc étroitement liées à la nature de leurs constituants, au type de présentation des renforts, et à leur mise en œuvre.

#### ▪ Module d'élasticité

Tout comme pour les contraintes à rupture, les modules d'élasticité des matériaux composites dépendent essentiellement de la nature et de l'orientation des fibres dans la structure.

Leur valeur est donc très variable mais n'atteint cependant pas de niveau très élevé (fibre de verre).

- Tenue en fatigue

Les composites présentent une résistance spécifique à la rupture en fatigue très supérieure à celle des matériaux métalliques, en général considérée comme 3 fois supérieure à celle des alliages légers d'aluminium et 2 fois supérieure à celle des aciers à haute résistance et des alliages de titane.

Comme pour les autres performances des composites, la résistance à la fatigue varie suivant la composition des matériaux. Ainsi, il est généralement admis la supériorité des composites à fibres de carbone sur les autres types de composites. De la même façon, les composites sont plus sensibles à certaines sollicitations cycliques (compression, cisaillement) qu'à d'autres (traction, flexion). L'ascendant pris par les composites sur les matériaux métalliques vis-à-vis de la tenue à la fatigue est manifeste pour les performances intrinsèques des matériaux, et se confirme au niveau des assemblages.

## 2.2. Comportement des milieux anisotropes

### 2.2.1. Introduction

L'analyse des structures en matériaux composites nécessite une connaissance de l'élasticité anisotrope. Les traditionnelles techniques des matériaux isotropes, par exemple les métaux, ne sont ni fiables ni appropriées pour analyser cette nouvelle classe de systèmes de matériau. Si le comportement d'un milieu anisotrope est hétérogène, nous devons avoir une théorie structurelle adéquate pour modéliser correctement la rigidité, prédire les champs de contrainte.

Un matériau est dit isotrope si toutes les propriétés matérielles en un point sont indépendantes de la direction. Autrement dit, si l'on se réfère à un point dans un milieu anisotrope avec un système de coordonnées, les propriétés physiques de ce point resteront invariantes pour toute rotation arbitraire des axes. Un matériau anisotrope est un matériau qui présente des propriétés de matériau qui dépendent de la direction, c'est-à-dire qu'une propriété de matériau donnée peut avoir différentes valeurs dans différentes directions.

### 2.2.2. Relations déformations-déplacement

L'expression déformation d'un corps fait référence aux déplacements relatifs et aux changements dans la géométrie éprouvés par le corps. Référée à un repère cartésien rectangulaire  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ , chaque point  $X$  du corps correspond à un ensemble de coordonnées  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Lorsque le corps est déformé sous l'action de forces extérieures, le point  $X$

se déplace vers une nouvelle position  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Le déplacement de point  $X$  est donné par :

$$u_i = x_i - X_i \quad (2.1)$$

Le tenseur de déformation de *Green-Lagrange*  $E$  est en fonction des gradients de déplacement par :

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u \cdot (\nabla u)^T] \quad (2.2)$$

Ainsi le tenseur de déformation de *Green-Lagrange* est symétrique :

$$E_{ij} = E_{ji} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} E_{jk} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) - \delta_{jk} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La forme explicite des six composantes cartésiennes de la déformation sera donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\ E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\ E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\ E_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ E_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\ E_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Du fait que les gradients de déplacement sont très faibles  $|\nabla u| \ll 1$ , le tenseur de déformation de *Green-Lagrange* se réduit au tenseur de déformation infinitésimal,  $E \approx \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

Les composantes de déformation infinitésimales seront données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} \equiv 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \gamma_{13} \equiv 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \gamma_{23} \equiv 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

### 2.2.3. Equations de compatibilité des contraintes

Les composantes du tenseur de déformation peuvent être calculées à partir d'un champ de déplacement par Eq. (2.2) ou Eq. (2.6). Les déformations doivent être une solution unique aux six équations différentielles reliant les déformations et les déplacements.

La solution sera unique si les composantes de déformation infinitésimales satisfont aux six conditions de compatibilité suivantes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} = 0 \quad (2.9)$$

Où :  $i, j, m, n = 1, 2, 3$

Pour le cas bidimensionnel l'équation (2.9) sera :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.10)$$

### 2.2.4. Loi de Hooke généralisée

Tous les principes mécaniques, cinématiques et thermodynamiques sont applicables à tous milieux continus quelle que soit sa constitution physique.

Un matériau est élastique si son comportement n'est fonction que de l'état de sa déformation. Cependant si le travail effectué par les contraintes au cours d'une déformation dépend uniquement de l'état initial le matériau est dite hyperélastique.

Un matériau isotrope est un matériau dont les propriétés matérielles dans toutes les directions à un point est la même. En revanche un matériau anisotrope est celui qui a

différentes valeurs d'une propriété matérielle dans différentes directions à un point (les propriétés du matériau dépendent de la direction).

La loi de *Hooke* généralisée est le modèle constitutif linéaire pour une déformation infinitésimale où les composantes de contrainte sont supposées être des fonctions linéaires des composantes de déformation, alors la forme la plus générale des équations constitutives linéaires pour des déformations infinitésimales est:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad (2.12)$$

Où  $\sigma_{ij}^0$  est la contrainte résiduelle et  $C$  est le tenseur de rigidité, c'est un tenseur des paramètres du matériau de quatrième ordre ce qui implique qu'il y a  $3^4 = 81$  composantes.

Le nombre des composantes indépendantes de  $C$  sera réduit en raison de la symétrie de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .

Comme le tenseur des contraintes est symétrique,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , il résulte de l'équation (2.11) que  $C_{ijkl}$  doit être symétrique sur les deux premiers indices ( $i$  et  $j$ ) réduisant ainsi le nombre des composantes de rigidité de matériau indépendantes à  $6 \cdot 3^2 = 54$ .

Ainsi, le tenseur de déformation est symétrique  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , alors  $C_{ijkl}$  doit être symétrique dans les deux derniers indices, réduisant ainsi le nombre des composants de rigidité indépendantes à  $6^2 = 36$ .

L'équation (2.11) s'écrit maintenant sous la notation de *Voigt-Kelvin* comme suit :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.13)$$

En notation matricielle, l'équation (2.13) peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Les coefficients  $C_{ij}$  doivent maintenant être symétriques  $C_{ij} = C_{ji}$  par conséquent, nous aurons 21 coefficients de rigidité indépendants pour un matériau anisotrope le plus général.

### 2.2.5. Matrice de souplesse :

Les relations contraintes-déformations (Eq.2.14) sont inversibles. Ainsi, les composants de déformation sont liés aux composants de contrainte par :

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2.15)$$

Où  $S$  est la matrice de souplesse de matériau, avec :

$$[S] = [C]^{-1} \quad (2.16)$$

Sous forme matricielle, l'équation (2.15) sera :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

### 2.2.6. Symétrie matérielle

La réduction supplémentaire du nombre de paramètres indépendants de rigidité provient de la symétrie matérielle.

Lorsque deux systèmes de coordonnées sont une image miroir par rapport à un certain plan, si les paramètres élastiques de matériau en un point ont les mêmes valeurs dans les deux systèmes de coordonnées, ce plan sera un plan de symétrie matériel.

#### 2.2.6.1. Matériaux monocliniques

Dans le cas où l'un des trois plans du système présentent des plans de symétrie matériel, le matériau sera appelé '*un matériau monoclinique*'. La matrice de rigidité doit être telle qu'un changement de base par symétrie par rapport à ce plan de symétrie matériel, et nous aurons 13 constantes de rigidité indépendantes.

Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), la matrice  $C$  sera de la forme:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

La matrice de souplesse  $S$  sera ainsi de la même forme avec 13 constantes d'élasticité indépendantes.

### 2.2.6.2. Matériaux orthotropes

Avec deux plans de symétrie perpendiculaires ce qui implique l'existence d'un troisième plan de symétrie. La matrice  $C$  sera obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un deuxième plan de symétrie perpendiculaire au précédent. Le nombre de coefficients élastiques est réduit à 9. Les relations contraintes déformations pour un matériau orthotrope prennent la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

La matrice de souplesse sera de la même forme comme suit :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} \\ C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \\ C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \\ C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \\ C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \\ C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \\ C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Avec :

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (2.20)$$

Les propriétés d'un matériau sont déterminées par des constantes physiques telles que le module de *Young*, le module de cisaillement, etc. Ces constantes sont mesurées à l'aide des tests simples comme un test de traction ou un test de cisaillement. Ces constantes sont utilisées pour déterminer les coefficients de rigidité  $C_{ij}$  et les coefficients de souplesse  $S_{ij}$ .

La déformation par traction simple  $\varepsilon_{11}^{(1)}$  dans la direction  $x_1$  due à la contrainte  $\sigma_{11}$  dans la même direction est:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} \quad (2.21)$$

Où  $E_1$  désigne le module de *Young* du matériau dans la direction  $x_1$ .

La déformation par traction simple  $\varepsilon_{11}^{(2)}$  dans la direction  $x_1$  due à la contrainte  $\sigma_{22}$  dans la direction  $x_2$  est :

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{-\nu_{21}\sigma_{22}}{E_2} \quad (2.22)$$

Où  $E_2$  désigne le module de *Young* du matériau dans la direction  $x_2$ , et  $\nu_{21}$  est le coefficient de Poisson défini par :

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (2.23)$$

La déformation par traction simple  $\varepsilon_{11}^{(3)}$  dans la direction  $x_1$  due à la contrainte  $\sigma_{33}$  dans la direction  $x_3$  est :

$$\varepsilon_{11}^{(3)} = \frac{-\nu_{31}\sigma_{33}}{E_3} \quad (2.24)$$

Où  $E_3$  désigne le module de *Young* du matériau dans la direction  $x_3$ , et  $\nu_{31}$  est le coefficient de Poisson.

La déformation totale  $\varepsilon_{11}$  due à l'application simultanée des trois composantes de contrainte normales est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(3)} \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}\nu_{21}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}\nu_{31}}{E_3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

De même nous obtenons :

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{11}\nu_{12}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}\nu_{32}}{E_3} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{11}\nu_{13}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}\nu_{23}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (2.27)$$

L'application d'un cisaillement à un matériau orthotrope permet d'obtenir :

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad (2.28)$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \quad (2.29)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \quad (2.30)$$

Où  $2\varepsilon_{ij}$  est la déformation angulaire dans le plan  $(i, j)$  et  $\sigma_{ij}$  est la contrainte de cisaillement.

En écrivant les équations (2.25 à 2.30) sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$\nu_{ij}$  est le coefficient de *Poisson*, défini comme le rapport de la déformation transversale dans la  $j^{\text{ème}}$  direction par la déformation axiale dans la  $i^{\text{ème}}$  direction, et  $G_{23}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{12}$  sont les modules de cisaillement dans les plans (2,3), (1,3), (1,2) respectivement.

Comme la matrice de souplesse  $[S]$  est l'inverse de matrice de rigidité  $[C]$  et cette dernière est symétrique alors il est évident que la matrice  $[S]$  sera aussi symétrique, et il s'en résulte :

$$\begin{cases} \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \\ \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \\ \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \end{cases} \quad (2.32)$$

Ou bien :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j) \quad (2.33)$$

Ainsi les 9 coefficients indépendants pour un matériau orthotrope sont :  $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$

D'après l'équation (2.33) nous remarquons que pour un matériau orthotrope  $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$

En appliquant une contrainte  $\sigma$  dans la direction  $x_1$ , les déformations résultantes seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\sigma}{E_1} \\ \varepsilon_{22}^{(1)} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma \end{cases} \quad (2.34)$$

Et en appliquant la même contrainte  $\sigma$  dans la direction  $x_2$ , les déformations résultantes seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{(2)} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma \\ \varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{\sigma}{E_2} \end{cases} \quad (2.35)$$

Pour un élément carré de longueur  $a$  (Figure 2.1), les déplacements associés seront :

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = a \frac{\sigma}{E_1} \\ u_2^{(1)} = -a \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma \\ u_1^{(2)} = -a \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma \\ u_2^{(2)} = a \frac{\sigma}{E_2} \end{cases} \quad (2.36)$$

D'après l'équation (2.33), on constate que :

$$u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (2.37)$$

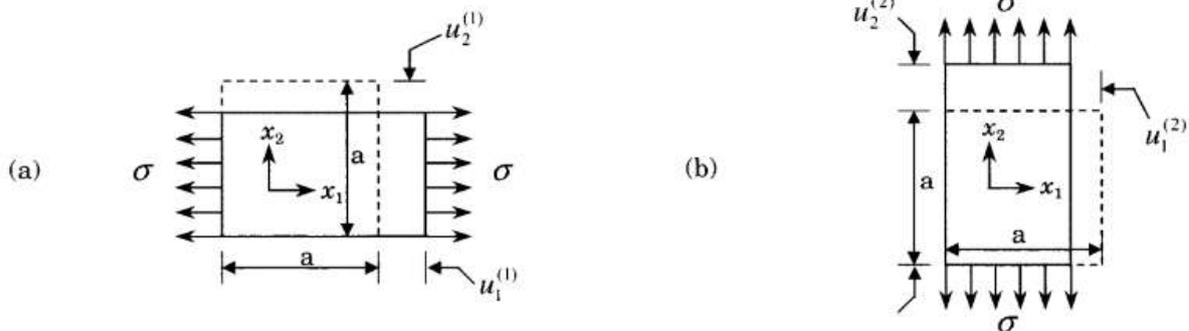


Figure 2.1. Distinction entre  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$

Les équations (2.18) et (2.31) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{1}{E_1} \\ S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} = \frac{1}{E_2} \\ S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ S_{33} = \frac{1}{E_3} \\ S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \\ S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \\ S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

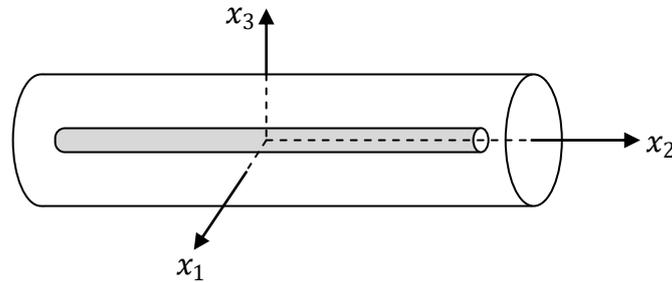
Et à partir de l'équation (2.19), les coefficients de rigidité peuvent être exprimés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} = G_{23} \\ C_{55} = G_{31} \\ C_{66} = G_{12} \\ \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

### 2.2.6.3. Matériaux isotropes transverses

Un matériau isotrope transverse est un matériau composite unidirectionnel. La cellule élémentaire de ce matériau est considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un

cylindre de matrice (figure 2.2). Le matériau se comporte comme un matériau orthotrope possédant un axe de révolution.



**Figure 2.2.** Matériau composite unidirectionnel

Le matériau isotrope transverse en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour d'axe de révolution donne les coefficients de rigidité et de souplesse suivants :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Cependant les propriétés élastiques d'un matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

#### 2.2.6.4 Matériaux isotropes

Lorsque le matériau possède un nombre infini de plans de symétrie, le nombre de coefficients élastiques indépendants est réduit à 2. C'est le cas des matériaux isotropes.

Pour les matériaux isotropes, nous avons :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad (2.42)$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \quad (2.43)$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad (2.44)$$

Les équations (2.17) et (2.31) prennent la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Où

$$A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Les relations contraintes déformations peuvent être écrites sous forme plus compact en introduisant une tenseur isotrope de quatrième ordre comme suit :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.47)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  représentent les constantes de Lamé, dont pour un matériau isotrope sont reliées aux constantes d'élasticité  $E$ ,  $\nu$  et  $G$  par :

$$\begin{cases} E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ G = \mu \end{cases} \quad (2.48)$$

Ainsi, les relations contraintes déformations seront :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.49)$$

Ou encore :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\text{tr}(\varepsilon)\mathbf{I} \quad (2.50)$$

Les relations déformations contraintes seront :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.51)$$

Ou encore :

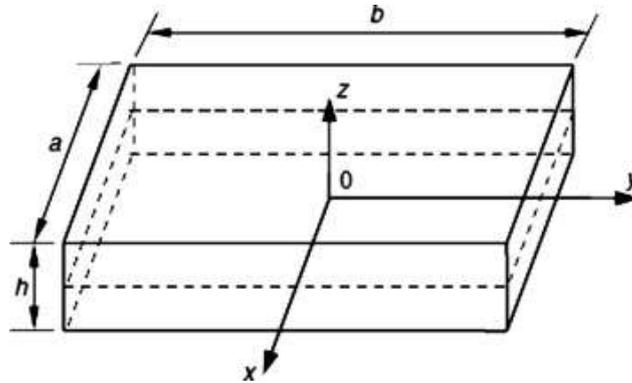
$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma - \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} \text{tr}(\sigma)\mathbf{I} \right] \quad (2.52)$$

## Chapitre III

### Théorie des plaques composites

#### 3.1. Introduction

Les plaques sont initialement des éléments structuraux plats délimités par deux plans parallèles, appelés faces. La distance entre les faces planes s'appelle l'épaisseur ( $h$ ) de la plaque. On supposera que l'épaisseur de la plaque est faible par rapport aux autres dimensions caractéristiques des faces (longueur, largeur, diamètre, etc.). Géométriquement, les plaques sont délimitées par des lignes droites ou courbes limites (Figure 3.1). Les charges statiques ou dynamiques portées par les plaques sont principalement perpendiculaire aux faces de la plaque.



*Figure 3.1 Géométrie d'une plaque*

L'action porteuse d'une plaque est similaire, dans une certaine mesure, à celle de poutres ou câbles; ainsi, les plaques peuvent être approchées par une grille d'un infini nombre de faisceaux ou par un réseau d'un nombre infini de câbles, en fonction de la rigidité en flexion des structures. Cette action structurale bidimensionnelle des plaques donnent des structures plus légères et offrent donc de nombreux avantages économiques. En raison de ces avantages, les plaques sont largement utilisées dans tous les domaines de l'ingénierie. Les plaques sont utilisées dans les structures architecturales, les ponts, structures hydrauliques, trottoirs, conteneurs, avions, missiles, navires, instruments, pièces des machines, etc.

Nous considérons une plaque, pour laquelle l'épaisseur  $h$  est divisée en égal moitiés par un plan parallèle à ses faces. Ce plan est appelé plan moyen de la plaque. Nous allons ne considérer que des plaques d'épaisseur constante. Pour de telles plaques, la forme d'une plaque est adéquatement définie en décrivant la géométrie de son plan moyen.

### 3.2. Hypothèses

Dans la théorie classique des plaques minces connue sous le nom de la théorie des plaques de *Kirchhoff* pour les vibrations, les hypothèses suivantes ont été faites [13] :

- Aucune déformation ne se produit sur le plan moyen de la plaque.
- Le cisaillement transversal n'est pas considéré.
- Les normales au plan moyen non déformé restent droites et normales au plan moyen déformé et non déformées en longueur.
- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

L'hypothèse concernant les normales au plan moyen restant normal au plan déformé revient à négliger l'effet de la déformation de cisaillement transversal. Cet effet, associé à l'effet d'inertie rotation, devient important lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes de vibration plus élevés sont souhaitées. Wittrick [194] a estimé l'erreur dans la théorie des plaques de *Kirchhoff* par une fonction  $O(h^2/u^2)$ , où  $h$  est l'épaisseur et  $u$  est une demi-longueur d'onde typique de la plaque en vibration.

Si la théorie des plaques de *Kirchhoff* est utilisée, les réponses des fréquences sont surestimées. Une théorie des plaques plus raffinée est donc nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Plusieurs théories sont proposées avec l'objectif implicite de réduire l'erreur à moins de  $O(h^2/u^2)$ .

*Reissner* [195,196] a proposé la théorie des plaques épaisses la plus simple en introduisant l'effet de la déformation de cisaillement transversal à travers un principe d'énergie complémentaire. Contrairement au travail de *Reissner*, *Mindlin* [197] a présenté la théorie du premier ordre des plaques où il tenait compte de la déformation de cisaillement en conjonction avec un facteur de correction de cisaillement transversal. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de *Kirchhoff* sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet de la déformation de cisaillement transversal, la théorie reconstitue la troisième hypothèse de telle sorte que:

- Les normales au plan moyen non déformé restent droites et non déformées en longueur mais pas nécessairement normales au plan moyen déformé.

Cette hypothèse implique une déformation de cisaillement transversal non nulle, mais elle conduit également à des contraintes de cisaillement non nulles sur les surfaces libres puisque

la contrainte de cisaillement devient constante à travers l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, *Mindlin* [197] a proposé un facteur de correction de cisaillement  $k^2$  à appliquer à l'effort de cisaillement.

En outre, *Mindlin* [197] a modifié la quatrième hypothèse pour que:

- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

### 3.3. Relations constitutives

Considérons un système d'axes cartésien  $(x,y,z)$ , dans le cadre d'élasticité linéaire, la relation contraintes déformations donnée par la loi de *Hooke* généralisée peut être exprimée par :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.1)$$

ou sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où  $C_{ij}$  sont les coefficients élastiques du matériau, et :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.4. Champs de déplacement

D'après la théorie des plaques de *Mindlin*, les composantes de champs de déplacement sont :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

où :  $t$  représente le temps

$u$  et  $v$  sont les déplacements longitudinaux

$w$  et le déplacement transversal

$\theta_x, \theta_y$  sont les rotations en flexion des normales aux axes  $x$  et  $y$

### 3.5. Relations déformations déplacements

Les relations déformations déplacements s'expriment comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} = \begin{cases} z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ z \left( -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{cases} \quad (3.6)$$

Le vecteur de déformation en flexion  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T$  peut également s'écrire sous la forme:

$$\{\varepsilon\} = -z\{\chi\} \quad (3.7)$$

où,

$$\{\chi\} = \begin{cases} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{cases} \quad (3.8)$$

et le vecteur de déformation en cisaillement  $\{\gamma\} = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T$  s'exprime comme suit:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.6. Relations contraintes déformations

En élasticité linéaire les contraintes  $\sigma$  sont données en fonction des déformations  $\varepsilon$  par la relation :

$$\sigma_{ij} = C_{ik} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.10)$$

où  $C_{ik}$  sont les composantes de la matrice de rigidité  $C$ .

Pour le cas des matériaux orthotropes, les coefficients  $C_{ik}$  sont définis dans le chapitre 2.

### 3.7. Critère de changement de base

Pour un matériau composite, il se trouve que les coordonnées du système sont différentes de celles du matériau notamment dans le cas des matériaux à plusieurs couches avec différentes orientations des fibres. Dans ce cas il est nécessaire de faire un changement de base de la matrice de rigidité.

Si la matrice de rigidité définie sur la base d'orthotropie du matériau composite est  $[\bar{C}]$ , et dans une base hors la base d'orthotropie est  $[C]$ . Les deux matrices sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$[C] = [A][\bar{C}][A^T] \quad (3.11)$$

tel que:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \cdot \sin \alpha & -\cos \alpha \cdot \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$\alpha$  est l'angle entre la base du système et la base d'orthotropie (figure 3.2).

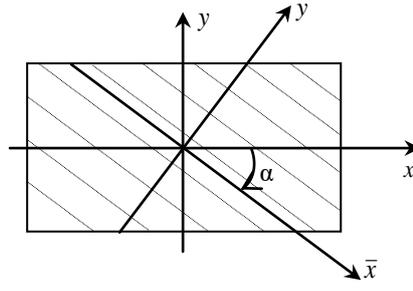


Figure 3.2. Base d'orthotropie et base du système

Dans la base d'orthotropie  $(\bar{x}, \bar{y})$ , la loi de comportement sera :

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

lorsque  $\bar{\sigma}_{zz} = \bar{C}_{13}\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{C}_{23}\bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{C}_{33}\bar{\varepsilon}_{zz} = 0$ , la déformation  $\bar{\varepsilon}_{zz}$  sera :

$$\bar{\varepsilon}_{zz} = -\frac{\bar{C}_{13}\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{C}_{23}\bar{\varepsilon}_{yy}}{\bar{C}_{33}} \quad (3.14)$$

les contraintes normales seront :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{C}_{11}\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{C}_{12}\bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{C}_{13}\bar{\varepsilon}_{zz} \quad (3.15.a)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{C}_{12}\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{C}_{22}\bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{C}_{23}\bar{\varepsilon}_{zz} \quad (3.15.b)$$

Nous remarquons que les contraintes  $\bar{\sigma}_{xx}$  et  $\bar{\sigma}_{yy}$  s'expriment uniquement en fonction des déformations  $\bar{\varepsilon}_{xx}$  et  $\bar{\varepsilon}_{yy}$  comme suit :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \left( \bar{C}_{11} - \frac{\bar{C}_{13}^2}{\bar{C}_{33}} \right) \bar{\varepsilon}_{xx} + \left( \bar{C}_{12} - \frac{\bar{C}_{13}\bar{C}_{23}}{\bar{C}_{33}} \right) \bar{\varepsilon}_{yy} \quad (3.16.a)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \left( \bar{C}_{12} - \frac{\bar{C}_{13}\bar{C}_{23}}{\bar{C}_{33}} \right) \bar{\varepsilon}_{xx} + \left( \bar{C}_{22} - \frac{\bar{C}_{23}^2}{\bar{C}_{33}} \right) \bar{\varepsilon}_{yy} \quad (3.16.b)$$

La loi de comportement dans la base de système peut être écrite sous une forme réduite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 C_{44} & k^2 C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & k^2 C_{45} & k^2 C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où  $k^2$  est le facteur de correction de cisaillement transversal.

Les coefficients  $Q_{ij}$  seront :

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}, \quad Q_{ji} = Q_{ij} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.19)$$

La matrice constitutive  $[B]$  peut être écrite sous la forme :

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_F] \\ [B_C] \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

tel que :

$$[B_F] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[B_C] = \begin{bmatrix} k^2 C_{44} & k^2 C_{45} \\ k^2 C_{45} & k^2 C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.8. Énergie de déformation

L'énergie de déformation s'exprime par la forme tensorielle comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (3.23)$$

où  $V$  est le volume de la plaque,

en utilisant les relations constitutives (3.17), la relation (3.23) peut encore s'écrire :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [B] \{\varepsilon\} dV \quad (3.24)$$

L'énergie de déformation  $U$  peut être écrite sous la forme:

$$U = U_F + U_C \quad (3.25)$$

tel que :

$$U_F = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [B_F] \{\chi\} dA \quad (3.26)$$

$$U_C = \frac{1}{2} \int_A h \{\gamma\}^T [B_C] \{\gamma\} dA \quad (3.27)$$

### 3.9. Énergie cinétique

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (3.28)$$

Où:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial t} = z \dot{\theta}_y \quad (3.29.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial t} = -z \dot{\theta}_x \quad (3.29.b)$$

L'équation (3.28) peut être écrite :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho \left\{ \dot{w} \quad \dot{\theta}_x \quad \dot{\theta}_y \right\} [D_M] \left\{ \begin{matrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{matrix} \right\} dA \quad (3.30)$$

avec :

$$[D_M] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.10. Équation de mouvement

L'équation de Lagrange de mouvement de la plaque se résout par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (3.32)$$

Où  $q$  est la coordonnée généralisée et  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

Remarquant que l'énergie cinétique ne dépend pas de  $q$ , l'équation (3.32) devient :

$$\frac{\partial U}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.33)$$

La substitution de la matrice de rigidité  $[K]$  et la matrice masse  $[M]$  dans l'équation (3.34) conduit à :

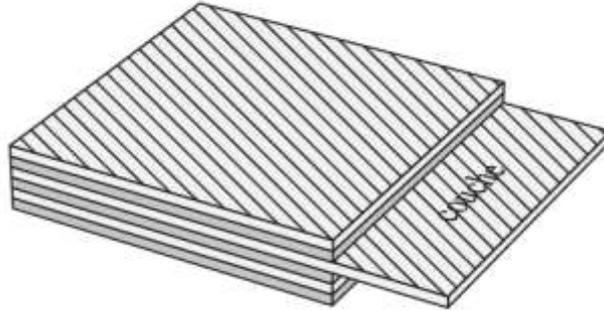
$$[[K] - \omega^2 [M]]\{q\} = 0 \quad (3.35)$$

### 3.11. Structures composites stratifiées

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la figure 3.3, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle

particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).



*Figure 3.3. Stratifié constitué de couches parfaitement liées*

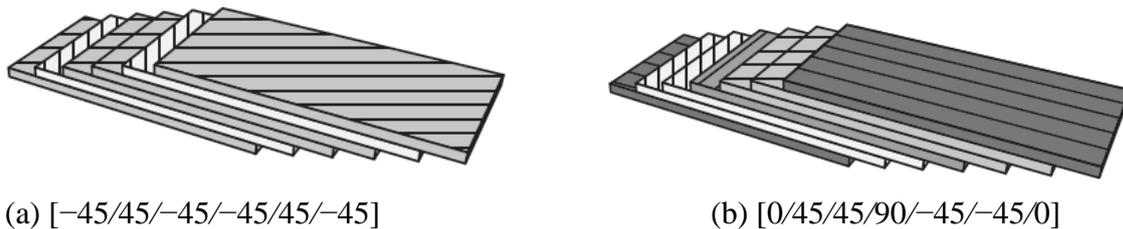
### 3.11.1. Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de  $0,125\text{ mm}$  pour un matériau carbone époxy de type aéronautique et  $0,3\text{ mm}$  pour ceux qui sont utilisés dans l'industrie nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence  $x$ . Sur les figures (3.4.a) et (3.4.b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;
- les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la figure (3.4.a) :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  ;
- les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure (3.4.b) :  $[0/45_2/90/-45_2/0]$  ;
- en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;

– en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole  $s$  indique la symétrie :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  devient  $[-45/45/-45]_s$



**Figure 3.4.** Désignations du stratifié

### 3.11.2. Désignation des structures sandwichs

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure 3.5.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

### 3.11.3. Structures composites tissées multidirectionnelles

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D-Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aéronautique. Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice. Quelques exemples de matériaux composites multidirectionnels sont maintenant présentés. Les structures massives sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique et restent très marginales en raison de leur coût de production très élevé.

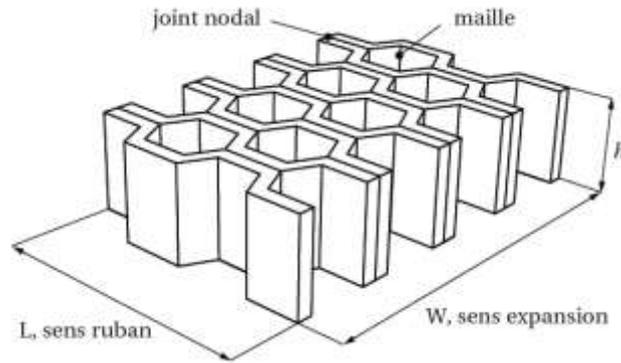


Figure 3.5. Désignations d'une âme nid d'abeille

### 3.12. Formulation des stratifiés

Les stratifiés sont constitués des couches successives (plis) de renforts (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résine.

Les stratifiés à base de fils unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (Figure 3.4) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

En jouant sur l'ordre et l'orientation des plis, il est possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures, et donc d'atteindre un haut niveau d'optimisation en mettant la matière là où elle est le plus utile. A l'échelle de la structure, les comportements mécaniques ainsi obtenus peuvent être très complexes, et vont du quasi-isotrope à une anisotropie marquée lorsque l'application le nécessite.

Le comportement mécanique des structures composites stratifiées n'est pas toujours linéaire jusqu'à la phase ultime de la rupture. En particulier, les empilements constitués de couches désorientées présentent généralement un comportement non linéaire dès que le chargement dépasse une valeur critique à partir de laquelle les dégradations s'accroissent. Néanmoins, dans une première phase de la conception, la théorie élastique linéaire des plaques stratifiées permet d'effectuer le dimensionnement des structures composites. De nombreux travaux ont été consacrés à la mise au point de théories de plaques composites multicouches. Ces différentes théories vont d'une théorie quasitridimensionnelle, à la théorie de *Love-Kirchhoff*. Ce dernier modèle convient lorsque les plaques sont minces. En revanche, pour des plaques épaisses ou sandwichs, les effets du cisaillement transverse deviennent importants et la théorie de *Reissner-Mindlin* est plus appropriée.

### 3.12.1. Comportement en contraintes planes

Le tenseur des contraintes et celui des déformations sont des tenseurs d'ordre deux symétriques.

En contraintes planes, le nombre de composantes nécessaire pour représenter chacun des deux tenseurs dans une base est donc de trois. La représentation matricielle classique des tenseurs des contraintes et des déformations dans une base orthonormée directe :  $\sigma_{ij} = C_{ik} \cdot \varepsilon_{kl}$

Dans le cas où les plaques composites stratifiées sont minces, le comportement de chacune des couches peut être supposé dans un état de contraintes planes. En conséquence, les équations de comportement de matériaux orthotropes sont présentées dans la section précédente.

De nombreuses structures stratifiées présentent des couches décalées les unes par rapport aux autres par rotation autour de la normale au plan de la structure. En conséquence, les composantes du comportement dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont exprimées en fonction des composantes dans la base d'orthotropie  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans le cas d'une rotation entre les deux bases d'axe  $\vec{z} = \vec{z}$ . La forme de l'expression du comportement dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en fonction de ses composantes dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est identique que la loi de comportement soit exprimée en rigidité ou en souplesse.

Le vecteur contrainte pour la  $p^{\text{ème}}$  couche de stratifié est :

$$\sigma_{ik}^p = C_{ik}^p \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.36)$$

Où  $C_{ik}^p$  est la matrice de rigidité élémentaire du  $p^{\text{ème}}$  pli.

Les propriétés élastiques du multicouches dépendent de l'orientation des fibres, de la séquence de plis et du type de matériaux, les contraintes obtenues, dans le plan, sont généralement discontinues aux interfaces entre les couches. Néanmoins, cette discontinuité des contraintes n'affecte pas le comportement global de structure.

### 3.12.2 Champ des contraintes

La forme de la matrice de rigidité d'une couche orthotrope d'un composite est donnée par la relation (2.17). L'état des contraintes en un point M appartient à la couche k du stratifié et s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Où  $C_{ij}$  sont les coefficients de rigidité de la couche  $p$ .

## Chapitre IV

### Formulation des plaques composites par éléments finis

#### 4.1. Introduction

La version  $h$  de la méthode des éléments finis est basée sur une discrétisation fine de la structure, la version  $p$  utilise des éléments hiérarchiques avec un degré d'interpolation élevé. Le principe de la version  $hp$  de la méthode des éléments finis qui est la combinaison des versions  $h$  et  $p$  permet de profiter des avantages des deux versions, en utilisant un maillage moins raffiné et un degré d'élément modéré. Dans notre travail nous utilisons la version  $h-p$  de la *MEF*.

#### 4.2. Modèle élément fini

Un élément triangulaire à trois nœuds sera employé, cependant il est préférable d'utiliser les coordonnées triangulaires (coordonnées d'aire).

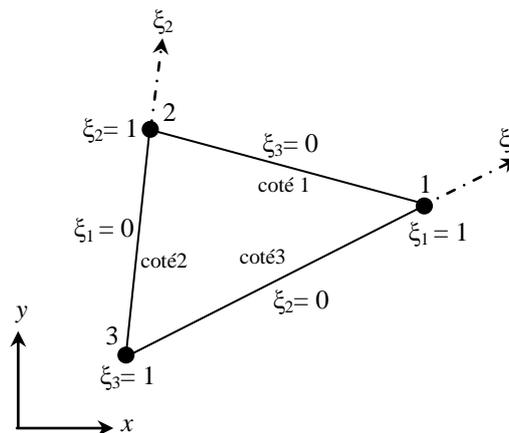


Figure 4.1. coordonnées cartésiennes et triangulaires

##### 4.2.1. Transformation des coordonnées

Le critère qui relie les coordonnées d'aire et les coordonnées cartésiennes est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où  $(x,y)$  et  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sont respectivement les coordonnées cartésiennes et d'aire d'un point du triangle,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  et  $(x_3, y_3)$  sont les coordonnées cartésiennes des trois nœuds du triangle.

D'après l'équation (4.1), on peut déduire :

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \quad (4.2.a)$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \quad (4.2.b)$$

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (4.2.c)$$

La détermination des coordonnées d'aire à partir des coordonnées cartésiennes peut être obtenue par l'inverse de l'équation (4.1) comme suit :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où  $A$  est l'aire de triangle donnée par :

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.2.2. Dérivées partielles

En utilisant les équations (4.2) et (4.3), on peut déduire les relations suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = x_i \quad (4.5.a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_i} = y_i \quad (4.5.b)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_j - y_k) \quad (4.5.c)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_k - x_j) \quad (4.5.d)$$

$j$  et  $k$  dénotent la permutation cyclique de  $i$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (y_2 - y_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (y_3 - y_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (y_1 - y_2) \right] \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (x_3 - x_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (x_1 - x_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (x_2 - x_1) \right] \quad (4.7)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (4.9)$$

où :  $a_1 = x_3 - x_2$  ,  $a_2 = x_1 - x_3$  ,  $a_3 = x_2 - x_1$

$b_1 = y_2 - y_3$  ,  $b_2 = y_3 - y_1$  ,  $b_3 = y_1 - y_2$

La substitution des équations (4.8) et (4.9) dans l'équation (3.8) donne :

$$\{\mathcal{X}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ 0 & \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -\sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

La substitution des équations (4.8) et (4.9) dans l'équation (3.9) donne:

$$\{\mathcal{Y}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

L'équation (4.10) est de la forme :

$$\{\mathcal{X}\} = [A_F] \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

### 4.3. Fonctions de forme hiérarchiques

Les fonctions de forme hiérarchiques sont généralement choisies dans l'espace de *Serendipity*, elles sont définies à partir des polynômes de *Legendre*.

Le polynôme de *Legendre*  $P_n(x)$  est défini sur l'intervalle  $x \in [-1, 1]$  par :

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n] \quad (4.13a)$$

Avec un changement de variable :

$$X = 2x - 1 \quad x \in [0,1]$$

Nous obtenons le polynôme de *Legendre* déplacé défini sur l'intervalle [0,1] par :

$$P_n^*(x) = (n!)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - x)^n] \quad (4.13b)$$

On peut également exprimer le polynôme de *Legendre* déplacé par une formule de récurrence comme suit :

$$P_0^*(\xi) = 1, \quad (4.14.a)$$

$$P_1^*(\xi) = 2\xi - 1, \quad (4.14.b)$$

$$P_{i+1}^*(\xi) = \frac{1}{i+1} \{[-2i-1 + (4i+2)\xi]P_i^*(\xi) - iP_{i-1}^*(\xi)\} \quad (4.14.c)$$

#### 4.3.1. Fonctions de forme nodales

Les trois fonctions de forme nodales sont données par :

$$f_1 = \xi_1 \quad (4.15.a)$$

$$f_2 = \xi_2 \quad (4.15.b)$$

$$f_3 = \xi_3 \quad (4.15.c)$$

#### 4.3.2. Fonctions de forme des côtés

Les  $(p-1)$  fonctions de forme pour chaque côté sont :

- coté 1 (définie par le nœud 1 et 2) :

$$\begin{cases} f_4 = \xi_1 \xi_2 \\ f_{(4i+3)} = \xi_1 \xi_2 P_i^*(\xi_2) \quad i=1,2,\dots, p-2 \end{cases} \quad (4.16.a)$$

- coté 2 (définie par le nœud 2 et 3) :

$$\begin{cases} f_5 = \xi_2 \xi_3 \\ f_{(4i+4)} = \xi_2 \xi_3 P_i^*(\xi_3) \quad i=1,2,\dots, p-2 \end{cases} \quad (4.16.b)$$

- coté 3 (définie par le nœud 3 et 1) :

$$\begin{cases} f_6 = \xi_1 \xi_3 \\ f_{(4i+5)} = \xi_1 \xi_3 P^*_i(\xi_3) \quad i=1,2,\dots,p-2 \end{cases} \quad (4.16.c)$$

Le but des fonctions de forme des côtés est de produire des nœuds fictifs sur les trois cotées, ces fonctions de forme seront égales à 0 sur les trois nœuds.

#### 4.3.3. Fonctions de forme internes:

Les  $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$  fonctions de forme internes sont :

$$f_{(4i+10)} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 P^*_j(\xi_2) P^*_k(\xi_3) \quad j=0,1,\dots,p-3 \text{ et } k=p-j-3. \quad (4.17)$$

Le but des fonctions de forme internes est de produire des nœuds fictifs à l'intérieur de l'élément, elles seront égales à 0 sur les trois nœuds et les trois côtés.

Ce qui donne un nombre total des degrés de liberté :

$$N = \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \quad (4.18)$$

Dans le système des coordonnées d'aire, le déplacement  $w$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont donnés en fonction de degré de l'élément et les fonctions de forme par :

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^N f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_i \quad (4.19.a)$$

$$\theta_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^N f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \theta_{xi} \quad (4.19.b)$$

$$\theta_y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^N f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \theta_{yi} \quad (4.19.c)$$

Les équations (4.19) peuvent être écrites sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [F] \{q\} \quad (4.20)$$

où:

$$\{q\} = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, w_N, \theta_{xN}, \theta_{yN}\}^T \quad (4.21)$$

$$[F] = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} f_2 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{ccc} f_N & 0 & 0 \\ 0 & f_N & 0 \\ 0 & 0 & f_N \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (4.22)$$

#### 4.4. Matrice de rigidité de flexion

En introduisant l'équation (4.20) dans l'équation (4.12), nous obtenons :

$$\{\chi\} = [A_F][F]\{q\} \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) sera donc :

$$\{\chi\} = [D_F]\{q\} \quad (4.24)$$

tel que :

$$[D_F] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ 0 & \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -\sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} [F] \quad (4.25)$$

L'équation (3.26) sera donc exprimée par:

$$U_F = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{q\}^T [D_F]^T [B_F] [D_F] \{q\} dA \quad (4.26)$$

Cette équation est de la forme :

$$U_F = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_F] \{q\} \quad (4.27)$$

avec :

$$[K_F] = \int_A \frac{h^3}{12} [D_F]^T [B_F] [D_F] dA \quad (4.28)$$

tel que :

$$dA = dx dy = 2A d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.29)$$

L'équation (4.28) peut être écrite :

$$[K_F] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{h^3}{12} [D_F]^T [B_F] [D_F] d\xi_2 d\xi_1 \quad (4.30)$$

$[K_F]$  est la matrice de rigidité globale de flexion, elle contient  $N \times N$  sous-matrice de type :

$$[K_F^e]_{(i,j)} = \frac{1}{2A} \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{F22(i,j)} & K_{F23(i,j)} \\ 0 & K_{F32(i,j)} & K_{F33(i,j)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Introduisons l'intégrale suivant:

$$I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial f_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\beta} d\xi_2 d\xi_1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{et } \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (4.32)$$

nous obtenons :

$$K_{F22(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 Q_{22} a_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{26} b_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{26} a_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{66} b_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta}, \quad (4.33.a)$$

$$K_{F23(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 -Q_{12} a_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{16} b_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{26} a_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{66} b_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta}, \quad (4.33.b)$$

$$K_{F32(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 -Q_{12} b_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{26} a_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{16} b_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - Q_{66} a_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta}, \quad (4.33.c)$$

$$K_{F33(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 Q_{11} b_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{16} a_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{16} b_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + Q_{66} a_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta}. \quad (4.33.d)$$

#### 4.5. La matrice rigidité due au cisaillement transversal $[K_c]$

En introduisant l'équation (4.20) dans l'équation (4.11), nous obtenons :

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -1 & 0 \end{bmatrix} [F] \{q\} \quad (4.34)$$

L'équation (3.27) peut être exprimée par :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A h \{q\}^T [D_c]^T [B_c] [D_c] \{q\} dA \quad (4.35)$$

Avec:

$$[D_c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -1 & 0 \end{bmatrix} [F] \quad (4.36)$$

L'équation (4.36) est de la forme:

$$U_c = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_c] \{q\} \quad (4.37)$$

où :

$$[K_c] = \int_A [D_c]^T [B_c] [D_c] dA \quad (4.38)$$

La substitution de l'équation  $dA = 2Ad\xi_1 d\xi_2$  dans l'équation (4.38) donne :

$$[K_c] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h [D_c]^T [B_c] [D_c] d\xi_2 d\xi_1 \quad (4.39)$$

$[K_c]$  est la matrice de rigidité globale de cisaillement transversal, elle contient  $N \times N$  sous-matrice de type :

$$[K_c^e]_{(i,j)} = h \begin{bmatrix} K_{C11(i,j)} & K_{C12(i,j)} & K_{C13(i,j)} \\ K_{C21(i,j)} & K_{C22(i,j)} & K_{C23(i,j)} \\ K_{C31(i,j)} & K_{C32(i,j)} & K_{C33(i,j)} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Introduisons les intégrales suivantes:

$$\tilde{I}_{(i,j)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} f_i \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\alpha} d\xi_2 d\xi_1 \quad (4.41.a)$$

$$\hat{I}_{(i,j)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial f_i}{\partial \xi_\alpha} f_j d\xi_2 d\xi_1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{et } \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.41.b)$$

Nous obtenons :

$$K_{C11(i,j)} = \frac{k^2 C_{44}}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \frac{k^2 C_{45}}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha b_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \frac{k^2 C_{45}}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \frac{k^2 C_{55}}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha a_\beta I_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \quad (4.42.a)$$

$$K_{C12(i,j)} = -k^2 C_{45} \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha \hat{I}_{(i,j)}^\alpha - k^2 C_{55} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha \hat{I}_{(i,j)}^\alpha \quad (4.42.b)$$

$$K_{C13(i,j)} = k^2 C_{44} \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha \hat{I}_{(i,j)}^\alpha + k^2 C_{45} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha \hat{I}_{(i,j)}^\alpha \quad (4.42.c)$$

$$K_{C21(i,j)} = -k^2 C_{45} \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha \tilde{I}_{(i,j)}^\alpha - k^2 C_{55} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha \tilde{I}_{(i,j)}^\alpha \quad (4.42.d)$$

$$K_{C22(i,j)} = 2Ak^2 C_{55} J_{(i,j)} \quad (4.42.e)$$

$$K_{C23(i,j)} = -2Ak^2 C_{45} J_{(i,j)} \quad (4.42.f)$$

$$K_{C31(i,j)} = k^2 C_{44} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} \tilde{I}_{(i,j)}^{\alpha} + k^2 C_{45} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} \tilde{I}_{(i,j)}^{\alpha} \quad (4.42.g)$$

$$K_{C32(i,j)} = -2Ak^2 C_{45} J_{(i,j)} \quad (4.42.h)$$

$$K_{C33(i,j)} = 2Ak^2 C_{44} J_{(i,j)} \quad (4.42.i)$$

#### 4.6. La matrice masse

En introduisant l'équation (4.20) dans l'équation (3.30), nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho \{\dot{q}\}^T [F]^T [D_M] [F] \{\dot{q}\} dA \quad (4.43)$$

cette équation est de la forme:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (4.44)$$

où:

$$[M] = 2A \rho \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [F]^T [D_M] [F] d\xi_2 d\xi_1 \quad (4.45)$$

$[M]$  est la matrice masse globale, elle contient  $N \times N$  sous-matrice de type :

$$[M^e]_{(i,j)} = 2A \rho J_{(i,j)} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

où :

$$J_{(i,j)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} f_i f_j d\xi_2 d\xi_1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.47)$$

# Chapitre V

## Théorie des coques composites

### 5.1. Introduction

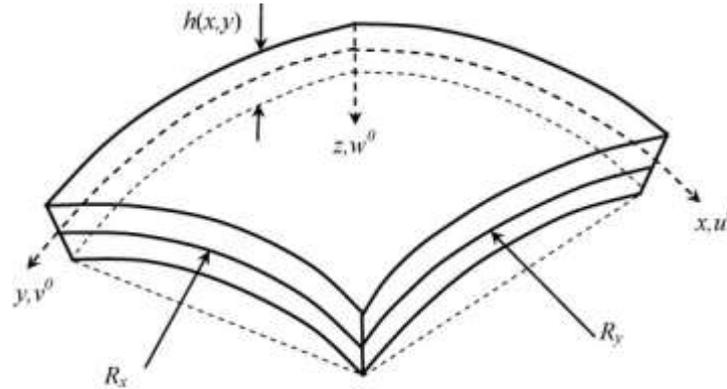
Les coques en tant qu'éléments structurels occupent une position essentielle en ingénierie et, en particulier, en génie civil, mécanique, architectural, aéronautique et maritime. Des exemples de structures de coque dans le génie civil et architecture sont des toits de grande envergure, des structures de retenue de liquide et des réservoirs d'eau, des réservoirs de confinement de centrales nucléaires, et des dômes de voûte en béton. En génie mécanique, les formes de coque sont utilisées dans les systèmes de tuyauterie, les disques de turbine et la technologie des réservoirs sous pression. Les avions, les missiles, les roquettes, les navires et les sous-marins sont des exemples de l'utilisation des obus dans l'ingénierie aéronautique et marine. Une autre application de l'ingénierie des coques est dans le domaine de la biomécanique: les coques se trouvent dans diverses formes biologiques, telles que l'œil et le crâne, et les formes végétales et animales.

La large application des structures de coque en ingénierie est conditionnée par les avantages suivants:

- Efficacité du comportement de support de charge.
- Haut degré de force réservée et intégrité structurelle.
- Haute résistance: rapport de poids. Ce critère est couramment utilisé pour estimer une efficacité des composants structurels: plus ce rapport est grand, plus la structure est optimale. Selon ce critère, les structures de coque sont mieux adaptées que les autres systèmes structuraux ayant la même portée et les mêmes dimensions.
- Très grande rigidité

En plus de ces avantages mécaniques, les structures de coque bénéficient de la position unique d'avoir une valeur esthétique extrêmement élevée dans diverses conceptions architecturales.

La coque est un corps délimité par deux surfaces courbes, où la distance entre les surfaces est faible par rapport aux autres dimensions du corps (figure 5.1).

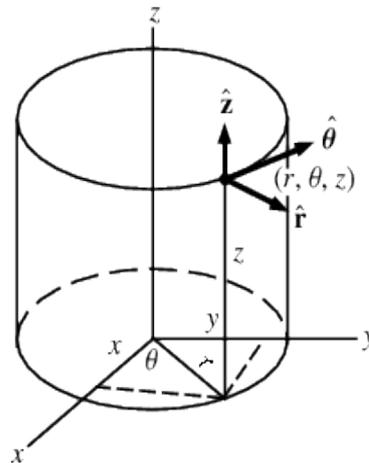


**Figure 5.1** géométrie de la coque

Le plan qui se trouve à égale distance de ces deux surfaces incurvées et le plan moyen de la coque. La longueur du segment, qui est perpendiculaire aux surfaces courbes, est l'épaisseur de la coque. La géométrie d'une coque est entièrement définie en spécifiant la forme de la surface moyenne et l'épaisseur de la coque en chaque point, nous considérons principalement des coques d'épaisseur constante.

## 5.2. Champ de déplacement

Le champ de déplacement de la coque sera dérivé dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (Figure 5.2).



**Figure 5.2.** Coordonnées cylindriques

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (5.3)$$

Il s'ensuit que toute dérivée par rapport aux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  peut être transformée en dérivées par rapport à  $r$  et  $\theta$  par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (5.4)$$

Les relations entre les composantes de vecteurs de déplacement en coordonnées cylindriques ( $u_r, u_\theta, u_z$ ) et les composantes en coordonnées cartésiennes ( $u, v, w$ ) sont :

$$\begin{cases} u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\ v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \\ w = u_z \end{cases} \quad (5.5)$$

Où  $u_r, u_\theta$  et  $u_z$  représentent respectivement les déplacements dans les directions  $r, \theta$  et  $z$ .

### 5.3. Relations déformations-déplacements

La loi de transformation du tenseur de déformation est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{yy} \cos^2 \theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{r\theta} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \varepsilon_{zr} = \varepsilon_{zx} \cos \theta + \varepsilon_{zy} \sin \theta \\ \varepsilon_{z\theta} = -\varepsilon_{zx} \sin \theta + \varepsilon_{zy} \cos \theta \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

La substitution des équations (5.3) et (5.4) dans l'équation (5.7) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \\ \quad = \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin^2 \theta \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) - \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \sin^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2 \theta \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) + \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

En substituant l'équation (5.8) dans l'équation (5.6) et la réduction, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

## 5.4. Conditions de compatibilité

En utilisant les expressions des dérivées partielles de tenseur de déformations données en annexe [A], les conditions de compatibilité en coordonnées cylindriques peuvent être exprimées comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}) \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\gamma_{r\theta}}{r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{rz} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} - \gamma_{\theta z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} + \frac{\gamma_{\theta z}}{r^2} \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \left( \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - \frac{\varepsilon_{zz}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} - \frac{\gamma_{\theta z}}{r} \right) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

## 5.5. Relations contraintes-déformations

La relation constitutive entre les contraintes et les déformations pour un élément de coque en matériaux composites peut être exprimé par la loi de Hooke comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

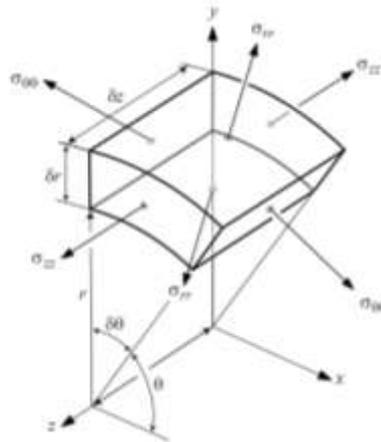


Figure 5.3. Contraintes normales sur un élément de coque

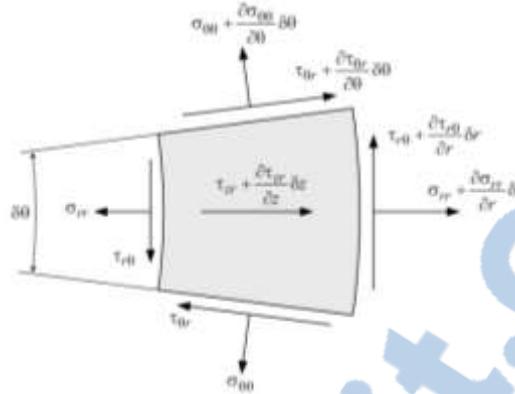


Figure 5.4. Contraintes dans les directions  $r$  et  $\theta$

En cas des coques en matériaux orthotropes, la loi de comportement dans la base d'orthotropie sera :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} \\ \bar{\sigma}_{rz} \\ \bar{\sigma}_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\varepsilon}_{r\theta} \\ \bar{\varepsilon}_{rz} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

### 5.6. Loi de comportement dans la base hors axes d'orthotropie

Quand les axes de la base de référence de la coque ne coïncident pas avec les axes de la base de matériau, les relations contraintes-déformations prennent la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Où les coefficients  $C_{ij}$  seront obtenus à partir de critère de changement de base défini en chapitre 3.

Dans le repère Cartésien les contraintes sont déterminées en utilisant la loi de transformation comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \cos^2 \theta \sigma_{rr} - \sin 2\theta \sigma_{r\theta} + \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{yy} = \sin^2 \theta \sigma_{rr} + \sin 2\theta \sigma_{r\theta} + \cos^2 \theta \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} = \sin \theta \sigma_{rz} + \cos \theta \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zx} = \cos \theta \sigma_{rz} - \sin \theta \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xy} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \sigma_{rr} + \cos 2\theta \sigma_{r\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sigma_{\theta\theta} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \cos \theta \left( \cos^2 \theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left( -\sin 2\theta \sigma_{rr} \right. \\ \quad \left. + \cos^2 \theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - 2 \cos 2\theta \sigma_{r\theta} - \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sin 2\theta \sigma_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \cos \theta \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left( \cos 2\theta \sigma_{rr} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - 2 \sin 2\theta \sigma_{r\theta} + \cos 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \cos 2\theta \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \cos \theta \left( \cos \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial r} \right) \\ \quad - \frac{\sin \theta}{r} \left( -\sin \theta \sigma_{rz} + \cos \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \cos \theta \sigma_{\theta z} - \sin \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \sin \theta \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left( \cos 2\theta \sigma_{rr} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - 2 \sin 2\theta \sigma_{r\theta} + \cos 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \cos 2\theta \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \sin \theta \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \cos^2 \theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left( \sin 2\theta \sigma_{rr} \right. \\ \quad \left. + \sin^2 \theta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} + 2 \cos 2\theta \sigma_{r\theta} + \sin 2\theta \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \sin 2\theta \sigma_{\theta\theta} + \cos^2 \theta \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \sin \theta \left( \sin \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial r} \right) \\ \quad + \frac{\cos \theta}{r} \left( \cos \theta \sigma_{rz} + \sin \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sin \theta \sigma_{\theta z} + \cos \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \sin \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

## 5.7. Théorie des coques de *Reissner-Mindlin*

Basé sur le travail de *Kirchhoff* pour les problèmes de plaque, *Love* [198] a dérivé une théorie générale pour les surfaces courbes et planes. L'hypothèse de normalité pour les structures de coque est donc fréquemment associée au terme d'hypothèse de *Kirchhoff-Love*.

Une multitude de théories des coques de type *Kirchhoff-Love* ont été développées : *Reissner* [199], *Green et Zerna* [200], *Wunderlich* [201], *Koiter* [202,203].

Avec l'augmentation de l'épaisseur de la structure et, les effets de cisaillement transversal deviennent plus prononcés, contribuant ainsi de manière significative à l'énergie de déformation totale du système.

Pour les modèles *Reissner-Mindlin*, la cinématique *Kirchhoff-Love* est relaxée en introduisant l'effet de cisaillement transversal et l'inertie de rotation.

Selon la théorie de *Reissner-Mindlin*, les relations des déplacements peuvent être exprimées comme:

$$\begin{cases} u = u_0 + z\theta_y \\ v = v_0 - z\theta_x \\ w = w_0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les déplacements d'un point  $(x, y, z)$  de la coque dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.  $u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements en membrane et  $w_0$  et le déplacement transversal de point de la surface moyenne de la coque.  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $y$  et  $x$  respectivement.

### 5.7.1. Relations déformations déplacement

En substituant les équations (5.16) dans l'équation de tenseur de déformation (5.7) nous obtenons :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

### 5.7.2. Relations contraintes-déformations

Les relations contraintes-déformations peuvent être écrites sous la forme compacte comme suit :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (5.18)$$

En tenant comptes de la variation entre les axes principaux de la coque est les axes d'orthotropie de matériaux composite, la relation (5.18) sera :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 Q_{44} & k^2 Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & k^2 Q_{45} & k^2 Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Les coefficients  $Q_{ij}$  sont définis dans le chapitre 3, et  $k^2$  est le facteur de cisaillement transversal de *Riessner*.

### 5.7.3. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un élément des coques est représenté par :

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (5.20)$$

En substituant les équations (5.16) dans l'expression (5.20) nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[ \dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 + z^2 (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + 2z(\dot{u}_0 \dot{\theta}_y - \dot{v}_0 \dot{\theta}_x) \right] dV \quad (5.21)$$

Par intégration suivant l'épaisseur de la coque de  $-\frac{h}{2}$  à  $\frac{h}{2}$ , l'équation (5.21) devient :

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_A \left[ h(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + \frac{h^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{h^2}{2} (\dot{u}_0 \dot{\theta}_y - \dot{v}_0 \dot{\theta}_x) \right] dA \quad (5.22)$$

On peut également écrire l'équation (5.22) sous forme matricielle :

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_A (\dot{u}_0 \quad \dot{v}_0 \quad \dot{w}_0 \quad \dot{\theta}_x \quad \dot{\theta}_y) [D_M] \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{pmatrix} dA \quad (5.23)$$

Tel que :

$$[D_M] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{4} \\ 0 & h & 0 & -\frac{h^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{4} & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ \frac{h^2}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

#### 5.7.4. Energie de déformation

L'énergie de déformation est donnée par la forme :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (5.25)$$

En introduisant l'équation (5.19), l'expression de l'énergie de déformation sera :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [Q] \{\varepsilon\} DV \quad (5.26)$$

Par intégration suivant l'épaisseur de la coque de  $-\frac{h}{2}$  à  $\frac{h}{2}$  nous obtenons :



## Chapitre VI

### Formulation des coques composites par éléments finis

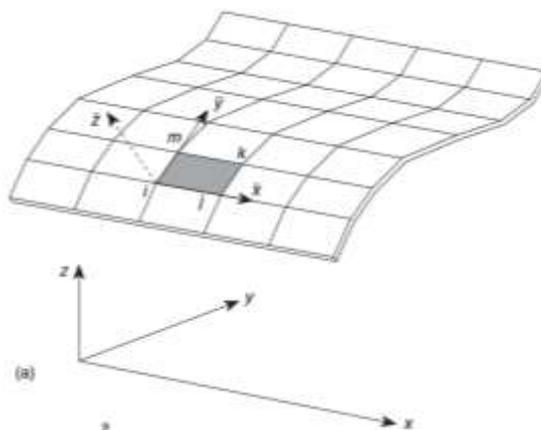
#### 6.1. Introduction

Une coque est une structure qui peut être issue d'une plaque à simple ou double courbure. Les mêmes hypothèses concernant la distribution des déformations et contraintes sont valables.

Pour modéliser une structure coque par éléments finis, de nombreux types d'élément ont été proposés qu'on peut regrouper dans trois approches principales:

- éléments de coque incurvés : basés sur la théorie des coques classique avec des coordonnées curvilignes
- éléments de coque dégénérés dérivés d'éléments solides tridimensionnels
- éléments de coque plats obtenus par la combinaison de la membrane et le comportement en flexion des éléments de plaque.

En général, il est difficile d'identifier quel élément de coque est le plus avantageux. Parmi ces approches, les éléments à coque plats (Figure 6.1.) sont considérés comme les plus attrayants car ils peuvent être facilement construits en combinant des éléments de plaque et de membrane. Ils ont été largement utilisés en raison de la simplicité de leur formulation, de l'efficacité de l'exécution du calcul et de la souplesse des applications à la fois sur les structures en plaques et en coques. De plus, les performances des éléments plats pour les structures épaisses à fines ont également été significativement améliorées à l'aide de la cinématique *Reissner-Mindlin*.



**Figure 6.1.** Assemblage par éléments rectangulaires

En outre, la discrétisation d'une coque peut s'effectuer à partir des éléments quadrilatéraux ou triangulaires, ces derniers sont plus efficaces pour discrétiser des géométries arbitraires.

## 6.2. Discrétisation en éléments triangulaires

Pour le maillage des coques de différentes formes en éléments plats, des éléments triangulaires peuvent être utilisés pour des surfaces simple et double courbures. Bien que le concept de l'utilisation de tels éléments dans cette analyse ait été suggéré par *Greene et al* [204].

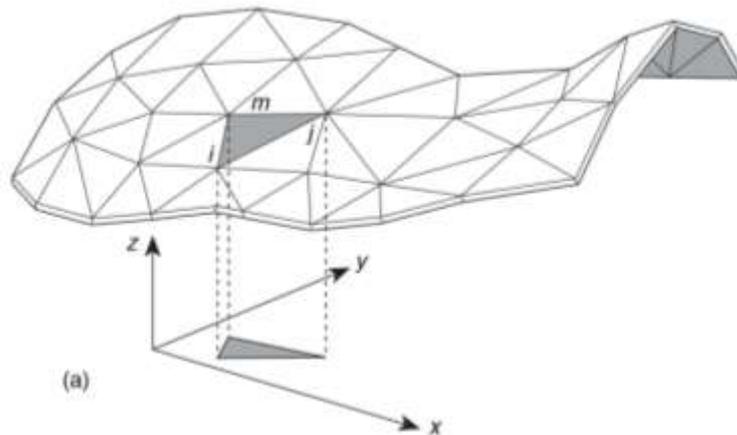


Figure 6.2. Assemblage par éléments triangulaires

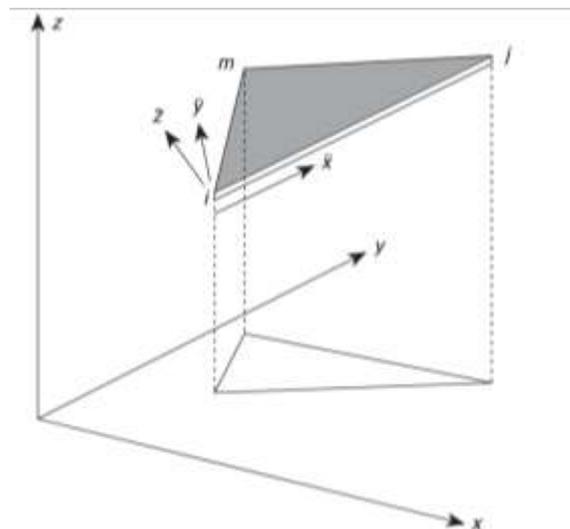


Figure 6.3. Cordonnées locales et globales pour un élément triangulaire

## 6.3. Repère locale et repère globale

La transformation des coordonnées en un système global commun sera nécessaire pour assembler les éléments et écrire les équations d'équilibre appropriées.

Lors de la discrétisation de la coque en éléments triangulaires, l'étude de comportement sera effectuée dans un repère local associé à chaque élément, cependant il faut définir une matrice de passage qui permet le passage de repère local en repère global.

Dans les deux systèmes de coordonnées (Fig. 6.4) les déplacements et les contraintes d'un nœud se transforment de repère global au repère local par une matrice de transformation  $T$ .

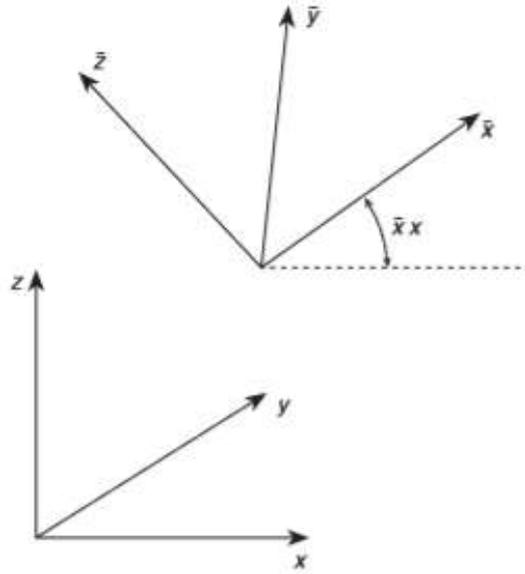


Figure 6.4. Repère local et global

La relation qui relie les coordonnées locales et globales est :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Où :  $x_0, y_0, z_0$  sont les coordonnées de l'origine de repère local dans le repère global.

La matrice de transformation  $T$  est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Pour les coques cylindrique, la transformation de repère local en repère global se fait par une rotation selon un seul axe  $x$  par un angle  $\varphi_x$ , et la matrice de passage sera réduite en :

$$T^x(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Où  $\varphi_x$  est l'angle entre les axes  $x$  et  $\bar{x}$

La rotation autour de l'axe  $y$  par un angle  $\varphi_y$  sera :

$$T^y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Où  $\varphi_y$  et l'angle entre les axes  $y$  et  $\bar{y}$

La rotation autour de l'axe  $z$  par un angle  $\varphi_z$  sera :

$$T^z(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Où  $\varphi_z$  et l'angle entre les axes  $z$  et  $\bar{z}$

#### 6.4. Élément fini triangulaire

La coque sera discrétisée en éléments triangulaires à trois nœuds. Les éléments seront ensuite enrichis en termes de degrés de libertés par interpolation polynomiales et c'est le principe de la version  $hp$  de la méthode des éléments finis.

La modélisation de l'élément triangulaire est définie dans le chapitre 4.

Un système de coordonnées local  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  sera établi pour chaque élément.

Les degrés de liberté pour chaque nœud dans le repère local seront :

$$\{\bar{q}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{x_i} \\ \bar{\theta}_{y_i} \\ \bar{\theta}_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

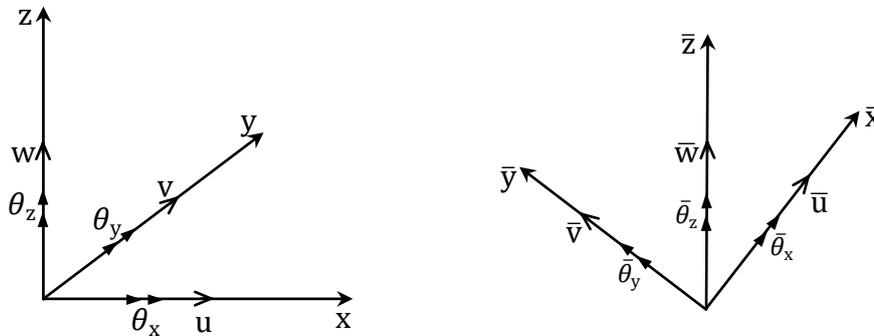


Figure 6.5. Degrés de liberté en repère local et global

En repère global, les degrés de liberté nodaux seront obtenus par la loi de transformation comme suit :

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix} = \bar{T} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{x_i} \\ \bar{\theta}_{y_i} \\ \bar{\theta}_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Tel que :

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Par conséquent, les matrices de rigidité élémentaires obtenues dans le repère local seront transformées en repère global pour permettre l'assemblage.

$$K^e = \bar{T}^T \bar{K}^e \bar{T} \quad (6.9)$$

De même les matrices masse élémentaires seront transformées en repère global par :

$$M^e = \bar{T}^T \bar{M}^e \bar{T} \quad (6.10)$$

## 6.5. Équation du mouvement

L'assemblage des matrices de rigidité et de masse permet d'obtenir l'équation différentielle de mouvement pour les vibrations libres :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (6.11)$$

Posons la solution de la forme :

$$\{q(t)\} = \{\tilde{q}\}e^{i\omega t} \quad (6.12)$$

Et

$$\{\ddot{q}(t)\} = -\omega^2\{\tilde{q}\}e^{i\omega t} = -\omega^2\{q(t)\} \quad (6.13)$$

Ce qui conduit à :

$$([K] - \omega^2[M])\{\tilde{q}\} = \{0\} \quad (6.14)$$

Avec :

$\omega^2 = \lambda$  est la valeur propre

$\{\tilde{q}\}$  est le vecteur propre associé

## Chapitre VII

### Programmation et résultats

#### 7.1. Plaques composites

En utilisant la version *hp* de la méthode des éléments fini, nous étudions les vibrations libres des plaques composites avec les différentes conditions aux limites.

Pour cette étude, nous choisissons un élément triangulaire à trois nœuds pour la discrétisation de la plaque.

La formulation par la théorie des plaques de *Reissner-Mindlin* qui inclut les effets de cisaillement transversal et de l'inertie de rotation permet d'obtenir une bonne précision.

Pour le calcul numérique, un programme en *Fortran* (Fig. 7.1) est établi, ce programme permet de déterminer la matrice masse et de rigidité globales, et d'obtenir les fréquences propres de la plaque composite.

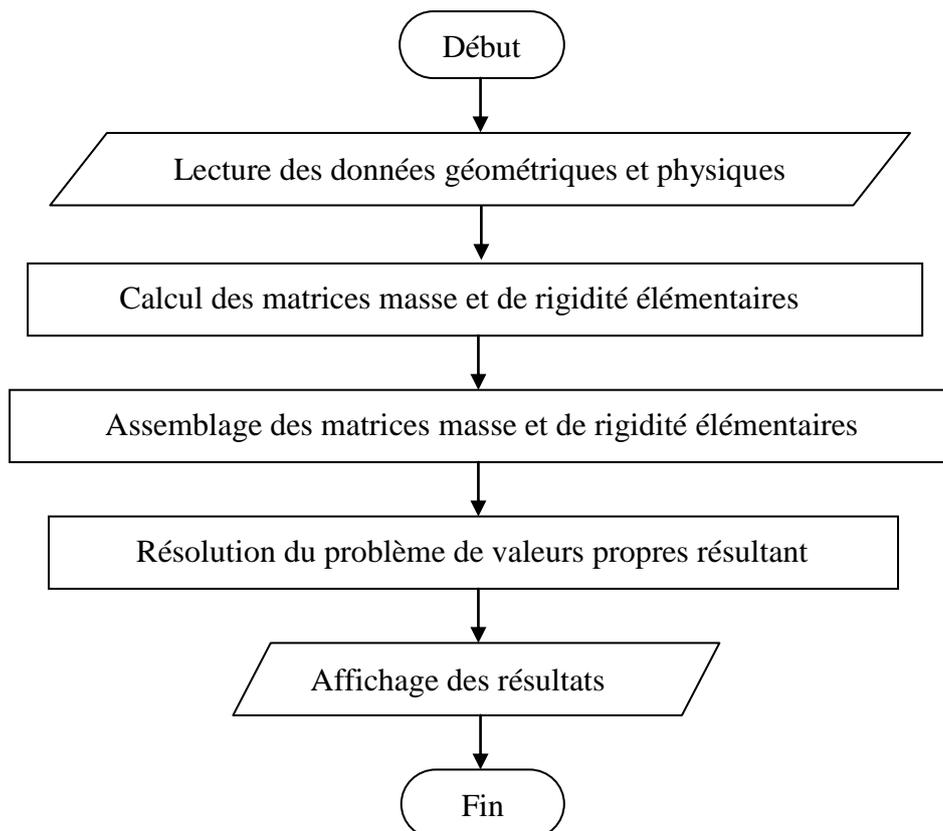


Fig. 7.1. Organigramme d'analyse modale des plaques composites

### 7.1.1. Etude de convergence

La convergence est évaluée en déterminant les pulsations d'une plaque triangulaire orthotrope (Fig. 7.2) en T300/5208 Carbon/Epoxy.

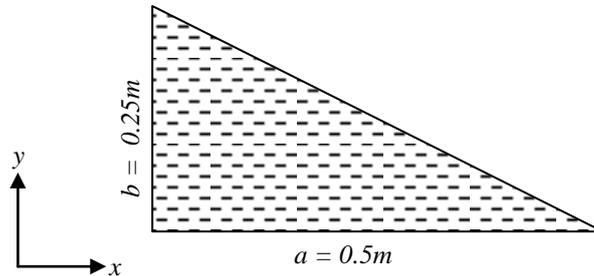


Fig. 7.2. plaque triangulaire orthotrope

La plaque est encastree de coté b est libre sur les deux autre cotés.

L'angle de l'orientation des fibres est  $\alpha = 0$

La discrétisation de la plaque est faite par : 4, 9, 16, 25, 36 et 49 éléments, et les fréquences sont déterminées en utilisant des différentes valeurs de degré d'interpolation.

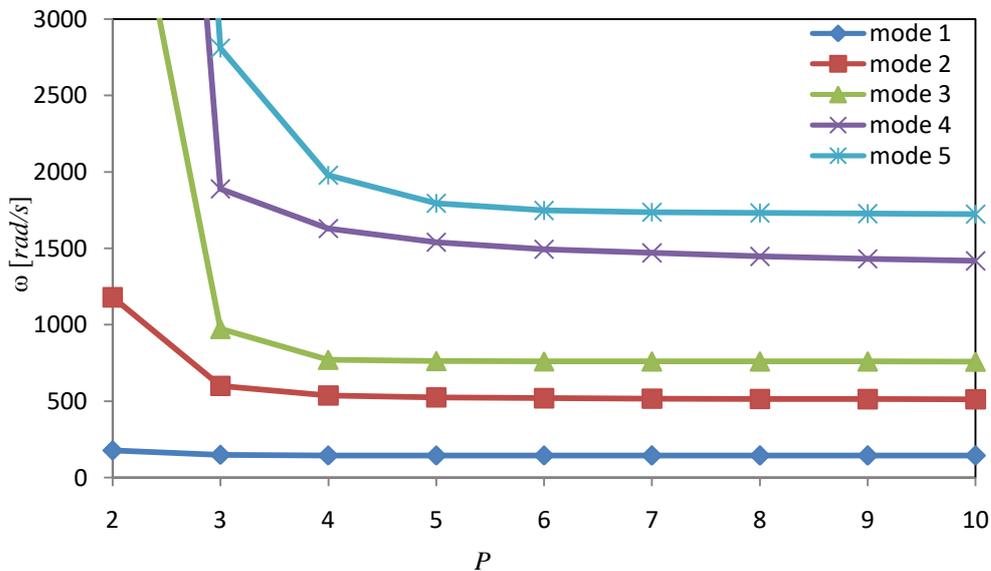
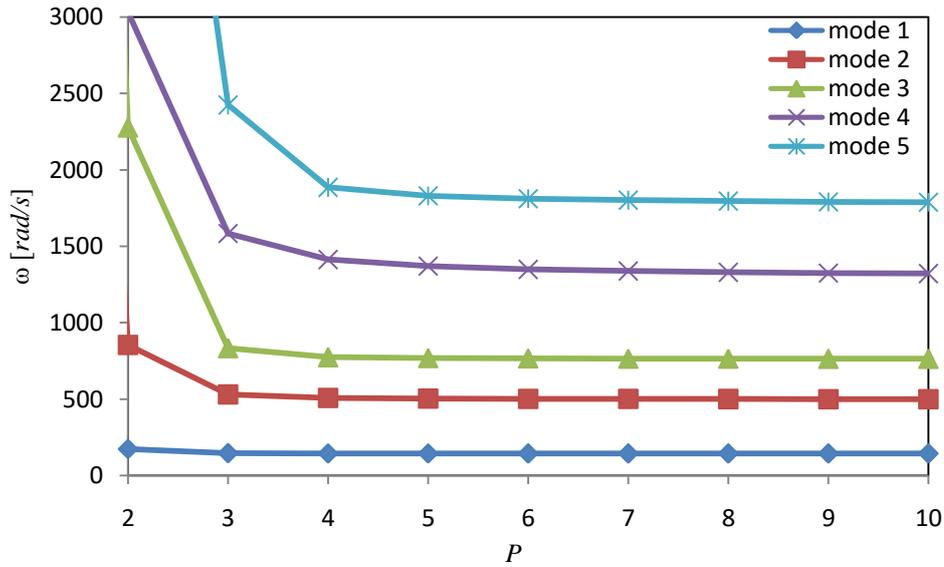


Fig. 7.3. Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 4 éléments

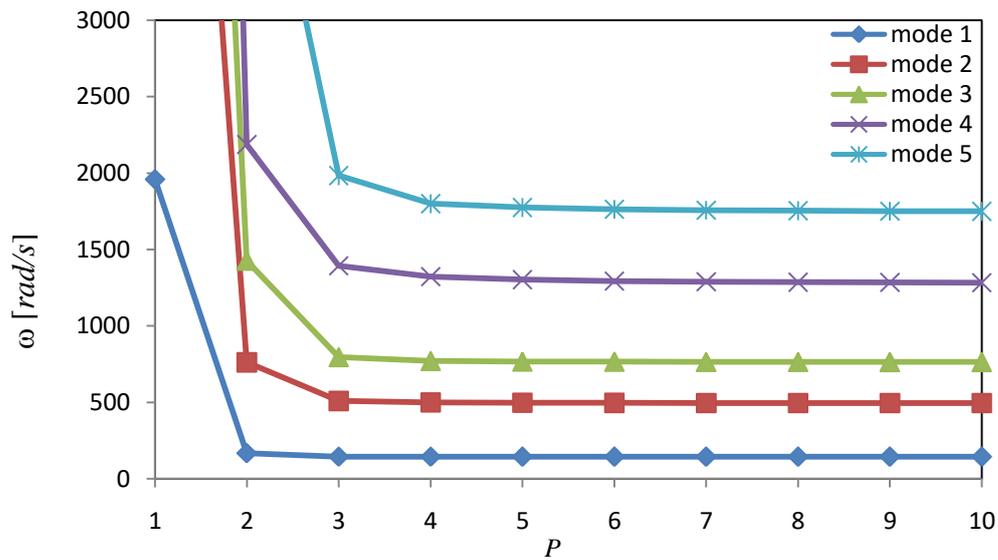
La figure 7.3 montre la variation des fréquences de 5 premiers modes en fonction de degré  $P$  de polynôme avec un maillage en 4 éléments.

Nous remarquons que les résultats ne se stabilisent qu'à partir de  $P=4$  pour les 3 premières fréquences, et pour les hautes fréquences la convergence est beaucoup plus lente.

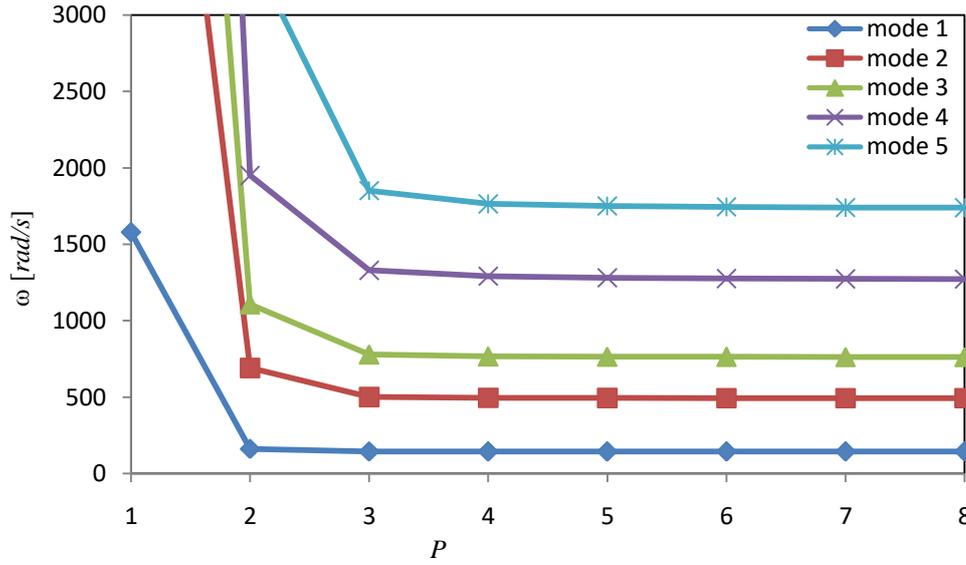


**Fig. 7.4.** Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 9 éléments

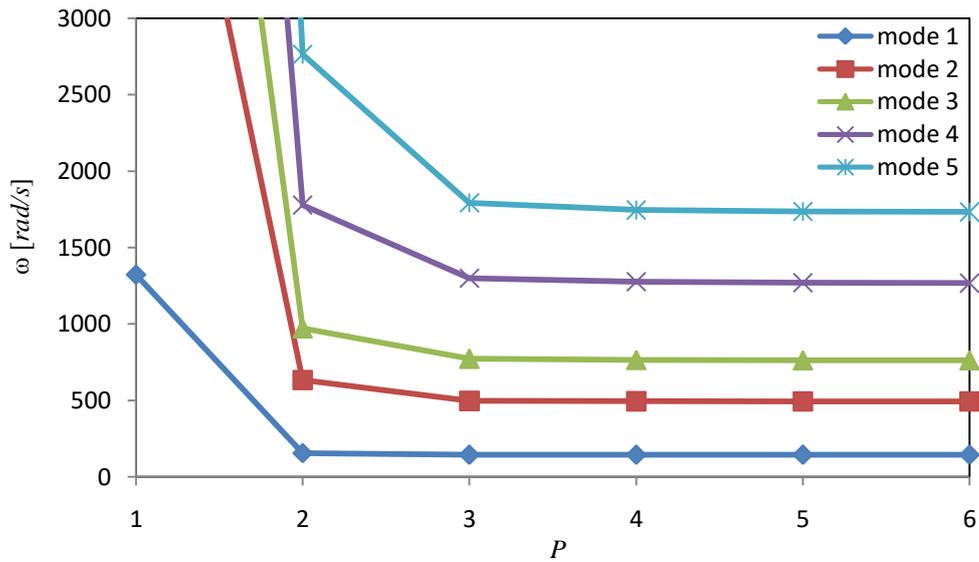
Pour un maillage de 9 éléments, la figure 7.4 montre une convergence des 3 premiers modes dès  $P=3$ , et à partir  $P=4$  pour les deux autres fréquences.



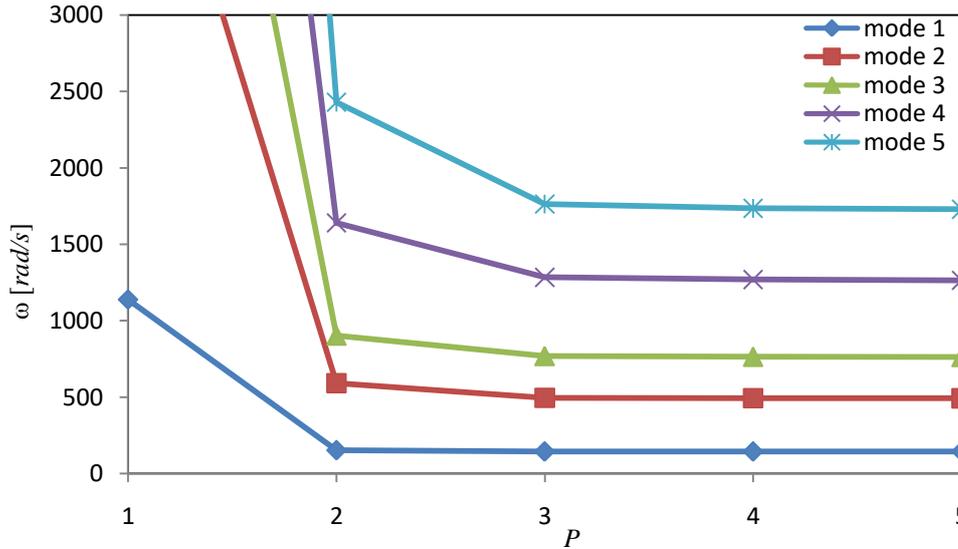
**Fig. 7.5.** Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 16 éléments



**Fig. 7.6.** Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 25 éléments



**Fig. 7.7.** Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour 36 éléments



**Fig. 7.8.** Convergence de fréquences en fonction degré de polynôme d'interpolation pour  $H=49$  éléments

Avec un maillage plus raffiné, (Fig. 7.5, 7.6, 7.8, 7.9) la convergence est atteinte beaucoup plus rapidement, ceci nous montre la non nécessité d'utiliser un degré de polynôme élevé, il est donc préférable de prendre un nombre d'éléments modéré  $H = 9$  et un degré de polynôme égale à  $P = 4$ .

### 7.1.2. Validation

La validation de cette approche sera faite par la comparaison avec des résultats obtenus par *Kim et Dickinson* [51], ils ont utilisé la méthode de *Rayleigh-Ritz* pour analyser les vibrations des plaques triangulaires isotropes et orthotropes.

Nous considérons une plaque orthotrope triangulaire ( $b=254\text{mm}$ ,  $h=1.6\text{mm}$ ), encastée sur un côté et libre sur les deux autres côtés.

Le matériaux utilisé est le *T300/5208Carbon/Epoxy* ( $\frac{D_x}{H} = 10.55$ ,  $\frac{D_y}{H} = 0.60$ ,  $\frac{D_{xy}}{H} = 10.55$ )

Les propriétés physiques de ce matériau sont :

$$\rho = 1600\text{kg/m}^3$$

$$E_x = 181\text{GPa}$$

$$E_y = 10.28\text{GPa}$$

$$G_{xy} = 7.172\text{GPa}$$

$$\nu_{xy} = 2.28$$

$$\nu_{yx} = 0.016$$

Les résultats représentés sont des paramètres de fréquences non dimensionnelles, qui sont définis par :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h \omega^2 a^4}{\tilde{H}}} \quad (7.1)$$

avec:

$$\tilde{H} = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy} \quad (7.2)$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \quad (7.3)$$

$$D_y = \frac{D_x E_y}{E_x} \quad (7.4)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} \quad (7.5)$$

**Tableau 7.1.** Comparaison des paramètres de fréquences  $(\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L

<i>b/a</i>	source	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
	présent travail	20,33	80,66	114,66	206,53	280,89	391,72
1/3	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	20,31	80,22	114,20	202,80	277,40	386,60
	$\epsilon(\%)$	0,098	0,545	0,401	1,806	1,242	1,307
	présent travail	19,75	73,94	107,29	190,63	258,23	337,15
1/2.5	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	19,74	73,71	106,90	188,40	255,70	337,80
	$\epsilon(\%)$	0,050	0,311	0,363	1,169	0,979	0,192
	présent travail	19,01	65,10	100,74	167,24	228,65	282,98
1/2	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	19,00	65,02	100,50	166,40	227,60	283,90
	$\epsilon(\%)$	0,052	0,122	0,238	0,502	0,459	0,324
	présent travail	18,05	54,21	94,45	133,06	186,27	250,69
1/1.5	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	18,05	54,55	94,33	133,20	186,20	251,70
	$\epsilon(\%)$	0	0,623	0,127	0,105	0,037	0,401
	présent travail	16,77	41,66	83,35	94,56	136,53	172,50
1	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	16,78	41,72	83,58	95,08	137,00	173,20
	$\epsilon(\%)$	0,059	0,143	0,275	0,546	0,343	0,404
	présent travail	15,64	32,64	58,70	85,45	91,04	125,11
1.5	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	15,66	32,72	58,91	86,21	91,78	127,80
	$\epsilon(\%)$	0,127	0,244	0,356	0,881	0,806	2,104
	présent travail	14,95	27,96	45,89	67,04	83,26	91,65
2	<i>Kim et Dickinson</i> [51]	14,98	28,06	46,13	68,29	84,42	97,01
	$\epsilon(\%)$	0,200	0,356	0,520	1,830	1,374	5,525

	présent travail	14,48	25,09	38,62	54,26	72,09	81,27
2.5	Kim et Dickinson [51]	14,52	25,21	38,96	55,97	79,36	82,91
	$\varepsilon(\%)$	0,275	0,476	0,872	3,055	9,160	1,978
	présent travail	14,13	23,13	33,96	46,24	60,05	75,43
3	Kim et Dickinson [51]	14,18	23,28	34,44	48,36	69,40	81,54
	$\varepsilon(\%)$	0,352	0,644	1,393	4,383	13,472	7,493

### 7.1.3. Plaque orthotrope triangulaire

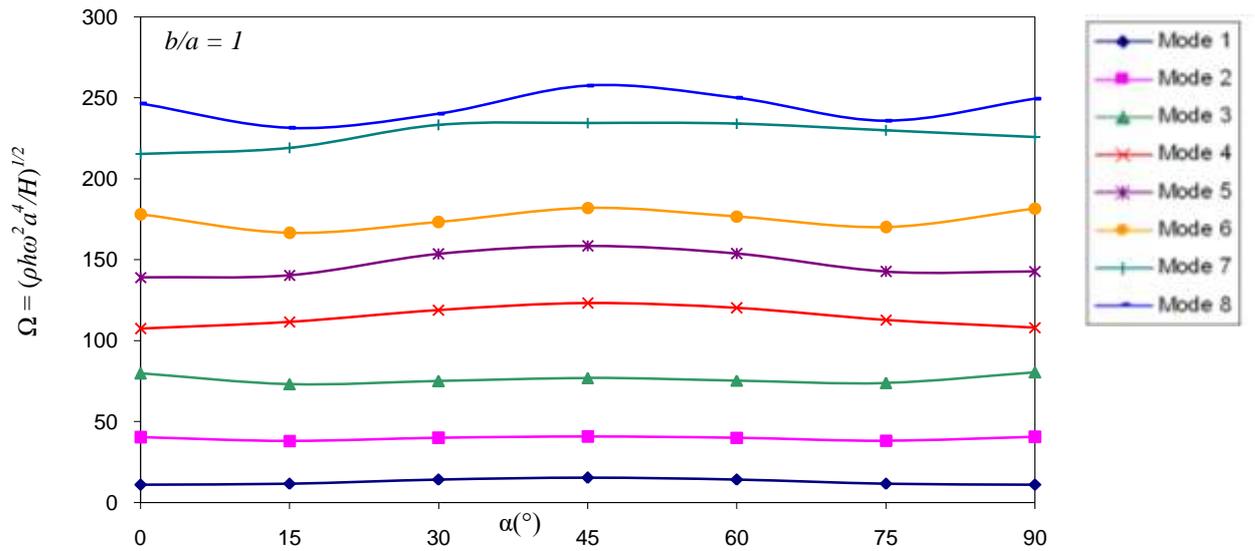
Nous considérons une plaque triangulaire orthotrope avec différents rapports  $b/a$  ( $b/a=1$  et  $b/a=0.5$ ), et des conditions aux limites  $SSL$  et  $ELL$ , et nous étudions les variations des paramètres de fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres.

**Tableau 7.2.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 1$ )

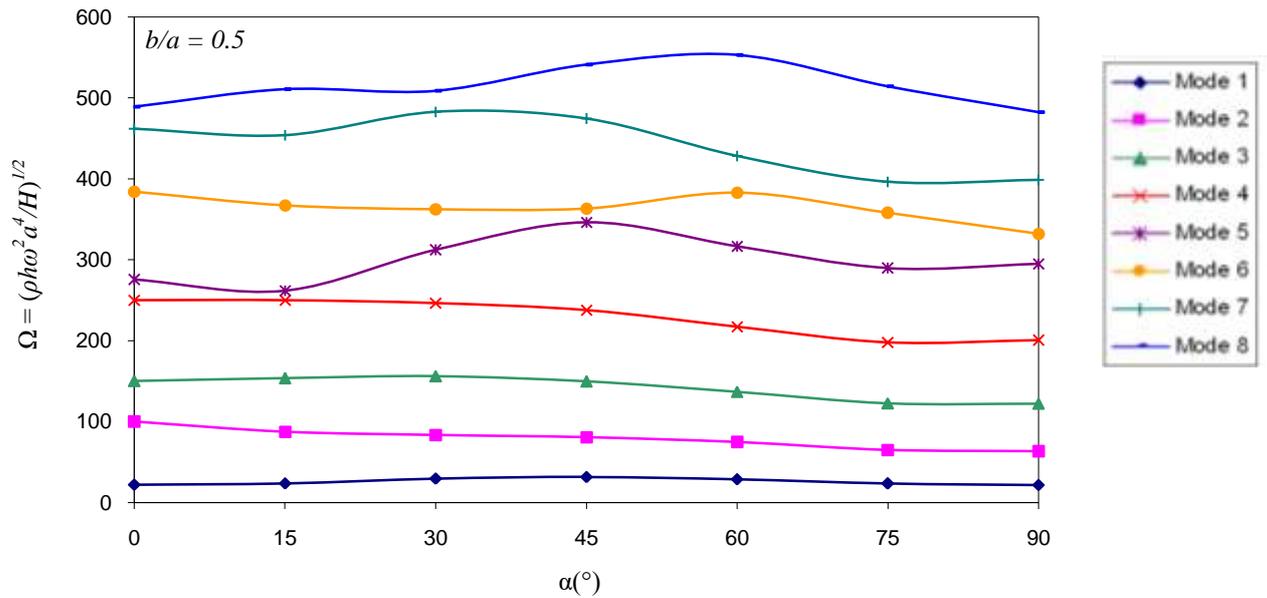
$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	10,98	40,27	79,74	107,39	139,10	177,99	215,28	246,48
15	11,63	38,01	73,15	111,57	140,41	166,57	219,04	231,45
30	14,14	39,88	75,01	118,94	153,53	173,26	233,25	240,17
45	15,24	40,67	76,94	123,18	158,49	182,00	234,47	257,65
60	14,18	39,94	75,37	120,18	153,76	176,78	234,12	250,12
75	11,62	38,17	73,86	112,86	142,66	170,11	229,86	235,95
90	10,98	40,47	80,45	108,09	142,83	181,64	225,80	249,49

**Tableau 7.3.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 0.5$ )

$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	22,14	99,87	150,32	250,16	275,47	384,14	461,69	489,26
15	23,68	87,63	153,60	250,11	261,79	367,27	454,00	510,85
30	29,42	83,56	156,10	246,53	312,18	362,40	482,96	508,72
45	31,54	80,74	149,69	237,80	346,32	363,33	474,42	541,13
60	28,75	74,67	136,86	217,38	316,83	382,94	428,33	553,14
75	23,43	65,09	122,64	197,86	289,72	357,91	396,44	514,31
90	21,71	63,23	122,14	200,58	295,03	332,18	398,74	482,21



**Fig. 7.9.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 1$ )



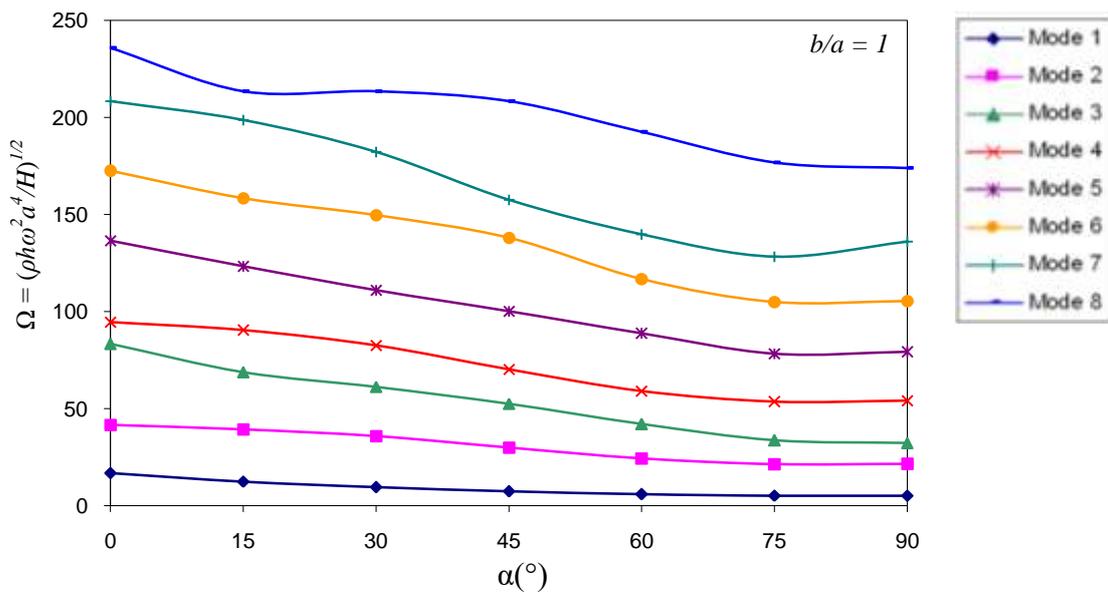
**Fig. 7.10.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope S-S-L ( $b/a = 0.5$ )

**Tableau 7.4.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 1$ )

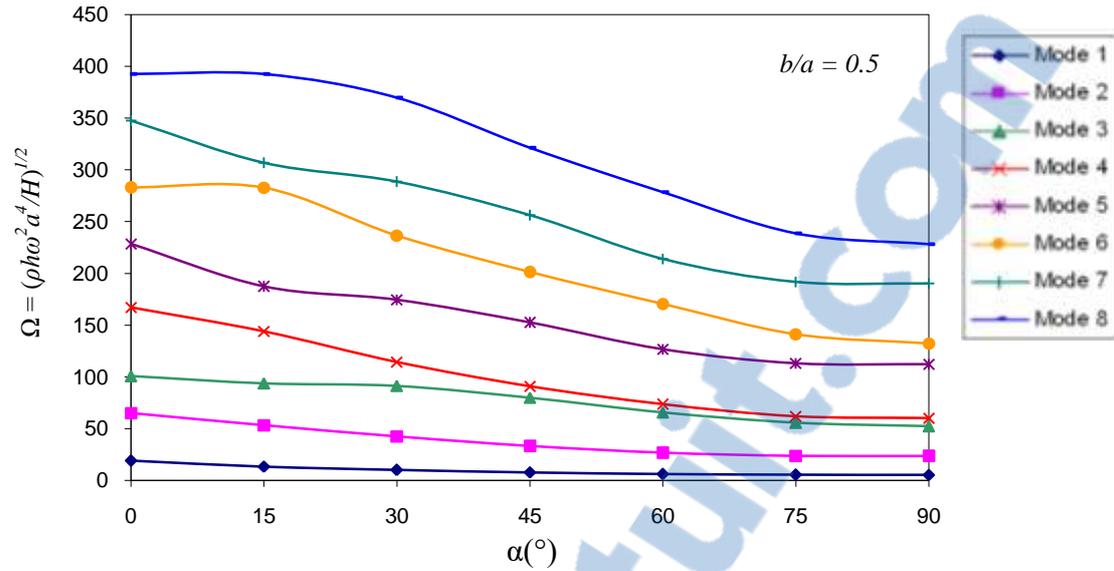
$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	16,77	41,66	83,35	94,56	136,53	172,50	208,40	235,83
15	12,37	39,34	68,78	90,42	123,45	158,43	198,71	213,56
30	9,48	35,87	61,18	82,55	111,04	149,71	182,26	213,58
45	7,33	29,90	52,44	70,22	100,24	138,01	157,63	208,46
60	5,82	24,38	42,01	59,08	88,75	116,79	139,88	192,58
75	5,14	21,36	33,65	53,58	78,27	105,01	128,30	176,85
90	5,07	21,45	32,26	54,15	79,21	105,50	135,98	173,98

**Tableau 7.5.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 0.5$ )

$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	19,01	65,10	100,74	167,24	228,65	282,98	347,70	392,51
15	13,42	53,34	93,80	144,14	187,36	282,76	306,72	392,48
30	10,09	42,54	91,36	114,49	174,63	236,55	288,53	369,68
45	7,72	33,28	79,87	91,05	152,60	201,27	256,20	321,25
60	6,13	26,80	65,74	73,62	126,89	170,53	214,03	278,36
75	5,44	23,88	55,79	61,99	113,23	141,29	191,82	238,55
90	5,37	23,65	52,40	60,20	112,37	132,43	190,25	228,25



**Fig. 7.11.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 1$ )



**Fig. 7.12.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $b/a = 0.5$ )

Les tableaux 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5 représentent l'effet de l'orientation des fibres pour les plaques orthotropes triangulaires (SSL et ELL). La variation des paramètres de fréquences en fonction de l'orientation des fibres est représentée sur les figures 7.9, 7.10, 7.11 et 7.12, l'angle de l'orientation des fibres varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ .

Pour les plaques triangulaires SSL nous remarquons que l'angle qui correspond à la fréquence minimale varie suivant les dimensions de la plaque, les conditions aux limites et le mode de vibration.

Pour les plaques triangulaires ELL les fréquences diminuent au fur et à mesure que d'angle de l'orientation des fibres diminue pour tous les modes de vibration.

#### 7.1.4. Plaque orthotrope rectangulaire

On considère une plaque rectangulaire orthotrope avec un rapport  $b/a=1$  et  $b/a=0.5$ , et des conditions aux limites SSSL et ELLL.

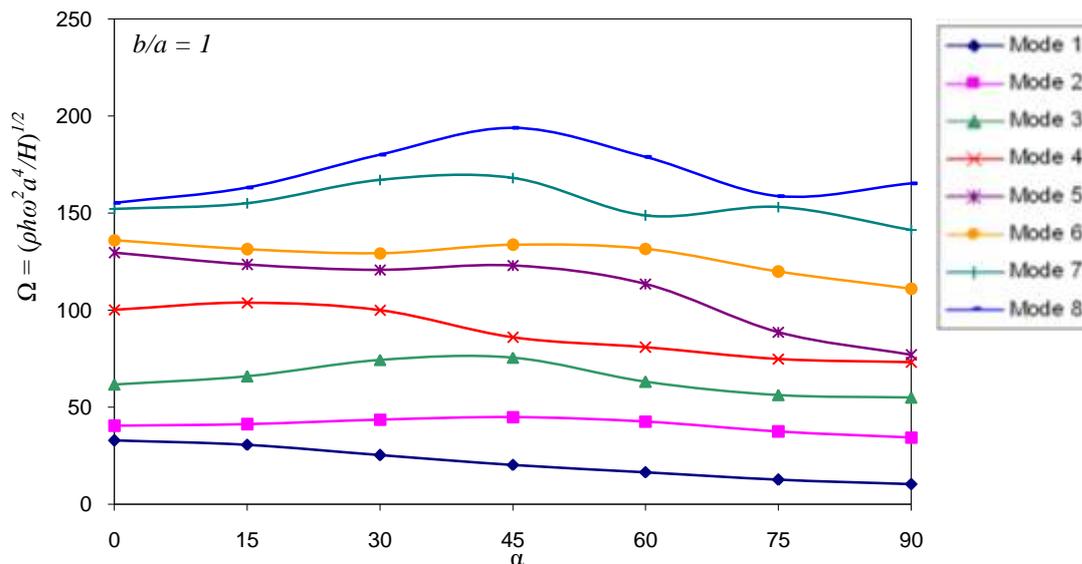
On étudie la variation des paramètres de fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres.

**Tableau 7.6.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 1$ )

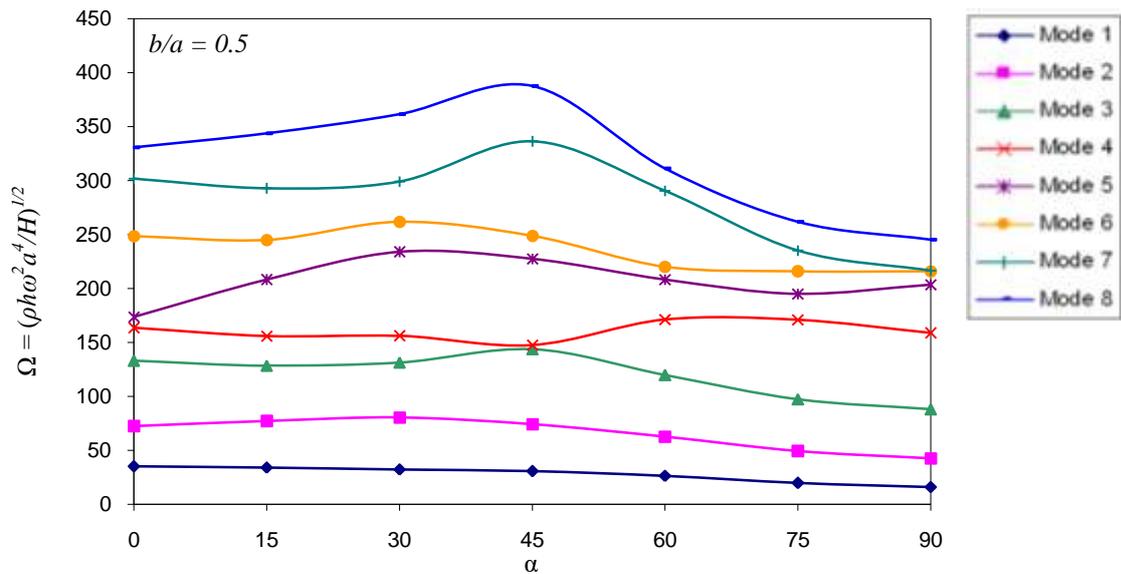
$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	32,80	40,41	61,75	100,16	129,54	136,12	152,18	155,30
15	30,60	41,21	65,91	103,87	123,50	131,36	155,10	163,20
30	25,23	43,60	74,41	100,00	120,79	129,32	167,20	180,15
45	20,23	44,94	75,56	85,97	123,05	133,68	168,18	193,94
60	16,46	42,62	63,07	80,85	113,56	131,63	148,80	178,93
75	12,59	37,41	56,26	74,84	88,70	119,88	153,15	158,78
90	10,38	34,40	54,98	73,23	76,89	110,98	141,27	165,39

**Tableau 7.7.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 0.5$ )

$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	34,99	72,25	132,94	163,47	173,57	248,57	301,83	330,72
15	33,91	77,07	128,46	155,91	208,09	244,97	292,71	343,75
30	32,13	80,52	131,28	156,01	233,86	261,83	299,13	361,61
45	30,56	74,28	143,71	147,53	227,48	248,73	336,25	387,62
60	26,33	62,69	119,85	171,18	208,23	220,13	290,50	311,20
75	19,61	49,16	97,24	170,94	195,04	215,84	235,25	261,87
90	15,99	42,56	87,93	158,68	203,46	215,88	216,49	245,27



**Fig. 7.13.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 1$ )



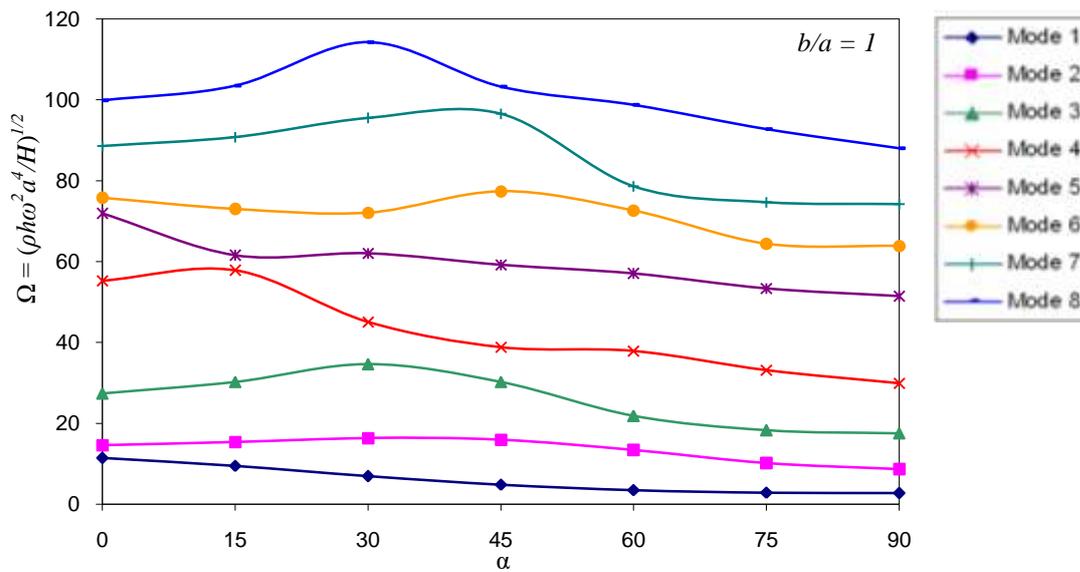
**Fig. 7.14.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope S-S-S-L ( $b/a = 0.5$ )

**Tableau 7.8.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 1$ )

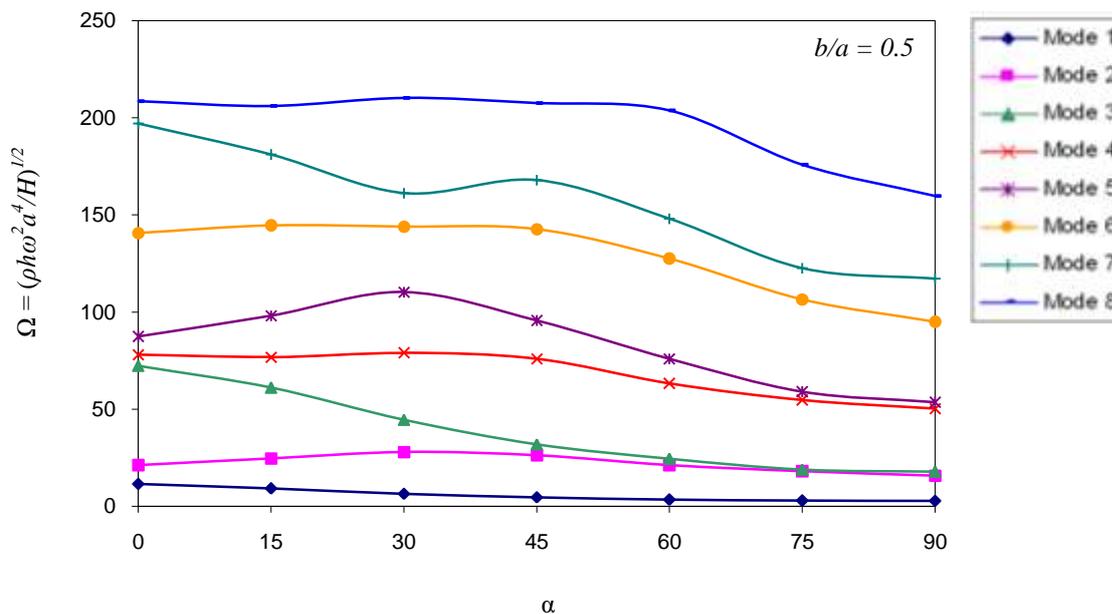
$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	11,42	14,62	27,37	55,29	71,90	75,77	88,60	99,92
15	9,45	15,40	30,26	57,85	61,56	73,00	90,84	103,52
30	6,92	16,37	34,63	45,07	62,06	72,12	95,53	114,28
45	4,83	15,95	30,24	38,83	59,24	77,42	96,56	103,32
60	3,45	13,38	21,84	37,91	57,07	72,68	78,67	98,79
75	2,85	10,14	18,27	33,15	53,41	64,45	74,72	92,79
90	2,73	8,65	17,55	29,95	51,48	63,91	74,24	88,02

**Tableau 7.9.** variation des paramètres de fréquences  $(\rho\omega^2 a^4/H)^{1/2}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 0.5$ )

$\alpha$ (°)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
0	11,44	21,11	72,32	78,06	87,34	140,69	197,02	208,50
15	9,09	24,66	61,03	76,79	98,11	144,57	181,05	206,01
30	6,41	27,91	44,55	78,93	110,31	143,97	161,23	210,24
45	4,52	26,16	31,81	75,88	95,58	142,63	167,98	207,59
60	3,34	21,13	24,36	63,18	75,87	127,48	148,13	203,71
75	2,83	17,98	18,83	54,60	58,90	106,53	122,61	175,85
90	2,73	15,71	17,82	50,30	53,49	94,92	117,21	159,68



**Fig. 7.15.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 1$ )



**Fig. 7.16.** variation de paramètre de fréquence  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L ( $b/a = 0.5$ )

Les tableaux 7.6, 7.7, 7.8 et 7.9 représentent la variation des paramètres de fréquence en fonctions de l'orientation des fibres pour les plaques orthotropes rectangulaires *SSSL* et *ELLL* avec  $b/a = 1$  et  $0.5$ , les figures 7.13, 7.14, 7.15 et 7.16 montrent la diminution de la fréquence

de mode 1 lorsque l'angle de l'orientation des fibres augmente, les fréquences des autres modes ont une allure variable selon la forme de la plaque et le mode de vibration.

### 7.1.5. Plaque orthotrope triangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement

Un autre problème peut être étudié, c'est les cas d'une plaque triangulaire orthotrope encastree avec un angle de l'orientation des fibres  $\alpha=30^\circ$  et  $\alpha=60^\circ$ . Une fissure est présente au niveau de l'encastrement sur le coté droit et gauche (Fig. 7.17).

On analyse les variations des pulsations propres en fonction de la dimension de la fissure.

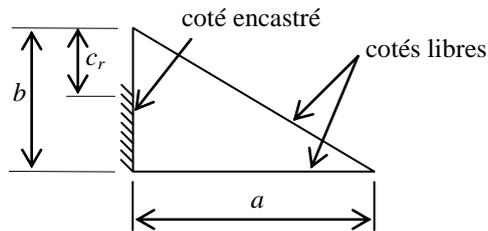


Fig. 7.17. Plaque composite triangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement

Tableau 7.10. variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L

$\alpha$ (°)	$c_r/b$	$\omega_1(rad/s)$	$\omega_2(rad/s)$	$\omega_3(rad/s)$	$\omega_4(rad/s)$	$\omega_5(rad/s)$	$\omega_6(rad/s)$	$\omega_7(rad/s)$	$\omega_8(rad/s)$
30	0.00	59.5633	252.3544	545.9520	678.5093	1057.0876	1441.1222	1765.8703	2270.8941
	0.20	59.5592	252.3245	545.7955	678.5038	1056.3636	1440.9182	1763.4501	2268.6363
	0.40	59.3723	251.6062	542.4612	678.3528	715.5037	1040.5833	1434.7769	1690.1559
	0.60	58.3008	248.8544	315.0128	526.6171	677.8786	931.7506	1376.3052	1523.8660
	0.80	55.1737	169.9421	240.1882	476.8666	675.7005	847.1533	1145.7404	1382.7879
	1.00	40.8401	63.7489	204.3242	431.3923	630.6028	727.7876	855.8471	1276.8120
60	0.00	36.1993	160.2615	399.4509	436.0543	793.6674	1023.6816	1476.8862	1741.3298
	0.20	36.1778	160.1956	399.2638	436.0465	793.3934	1023.4273	1476.2779	1740.0384
	0.40	35.9263	159.4941	397.5399	435.9862	790.6964	1020.1344	1165.6271	1436.5269
	0.60	35.1637	157.9579	391.0766	433.5657	523.3804	780.1846	1009.5206	1400.0800
	0.80	33.3252	153.8479	262.6515	392.6114	442.3689	745.0857	984.7876	1310.2488
	1.00	25.0919	101.7061	148.0801	359.5456	433.9869	689.2802	950.4669	1191.9843

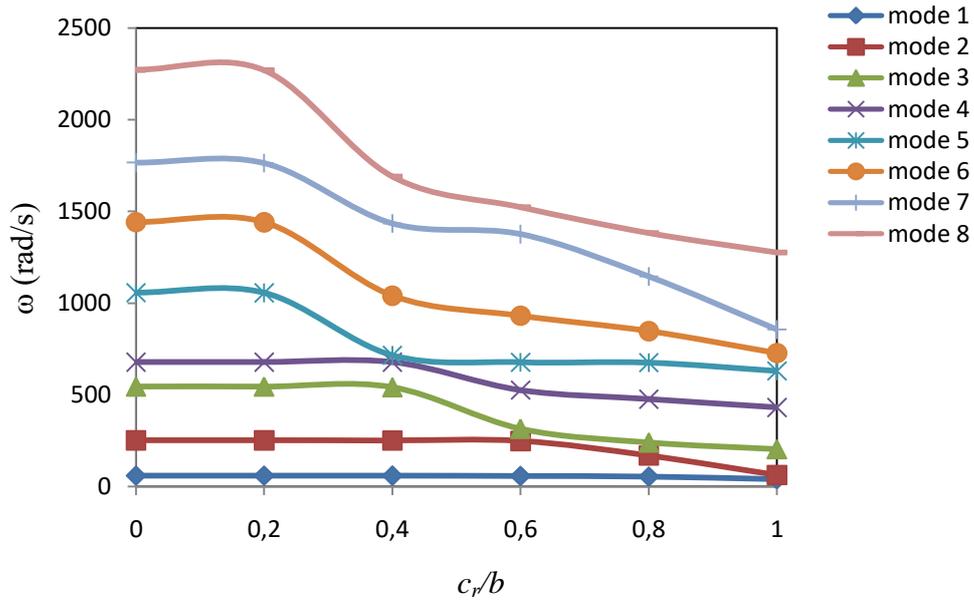


Fig. 7.18. variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=30^\circ$ )

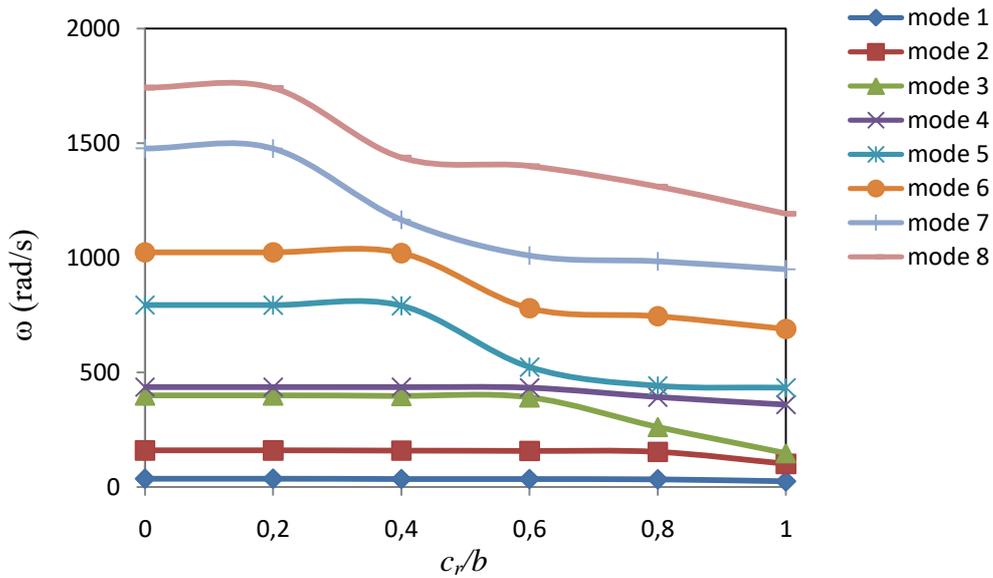
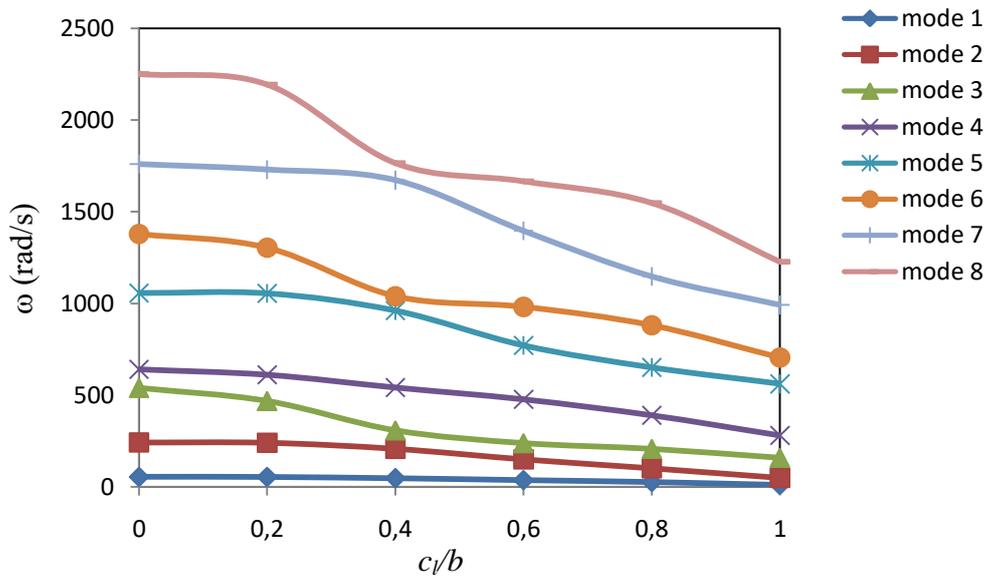


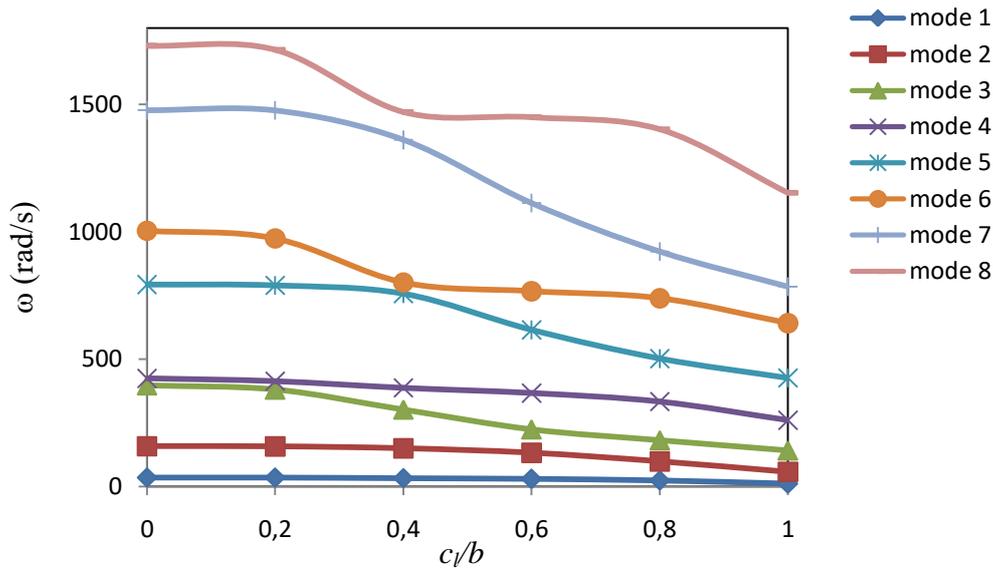
Fig. 7.19. variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=60^\circ$ )

**Tableau 7.11.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L

$\alpha$ (°)	$c_l/b$	$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$	$\omega_7(\text{rad/s})$	$\omega_8(\text{rad/s})$
30	0.00	55.3552	242.3121	539.9045	641.1413	1057.1183	1378.3386	1759.7013	2250.0370
	0.20	54.5873	240.6606	468.6727	611.4459	1055.2706	1303.8213	1729.4657	2193.1094
	0.40	46.7938	208.0687	308.6393	542.0785	961.4915	1039.2856	1672.0123	1764.3280
	0.60	37.5637	150.4005	239.5555	477.3640	771.9644	981.2407	1396.0139	1666.5503
	0.80	26.8587	101.3606	207.4310	390.4100	651.5284	880.9902	1147.5062	1547.2669
	1.00	11.4571	50.0570	159.5385	281.1218	561.7697	705.9504	991.6728	1226.4116
60	0.00	35.5944	158.8628	397.8858	424.7276	792.9234	1003.7475	1476.8193	1729.9408
	0.20	35.3357	157.9398	380.6972	413.8540	789.7891	973.6747	1476.1816	1714.3688
	0.40	33.3531	150.4051	302.2606	387.7825	757.4965	800.9930	1360.6617	1469.9506
	0.60	29.9193	132.7994	225.0985	366.9127	614.9070	766.6617	1112.9237	1449.4525
	0.80	24.0603	98.7832	182.6861	333.6820	502.3547	739.1401	922.6442	1401.7644
	1.00	12.0803	57.8618	142.2232	260.7224	426.5739	641.4274	784.6378	1152.5188



**Fig. 7.20.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L ( $\alpha=30^\circ$ )



**Fig. 7.21.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=60^\circ$ )

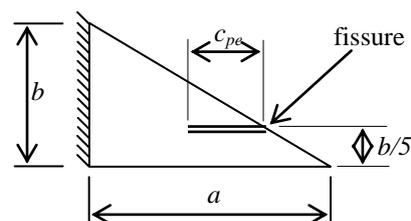
Les tableaux 7.10 et 7.11 représentent la variation des paramètres de fréquences en fonction de la dimension des fissure au niveau de l'encastrement, les figures 7.18 et 7.19 montrent que l'augmentation de la dimension de fissure sur le coté droit de l'encastrement provoque la diminution des paramètres de fréquences pour le deux cas de l'orientation des fibres ( $30^\circ$  et  $60^\circ$ ).

Si la fissure est sur le coté gauche de l'encastrement, la variation des paramètres de fréquence en fonction de la dimension de fissure est représentée sur les figures 7.20 et 7.21, et de même l'augmentation de la dimension de fissure provoque la diminution des paramètres de fréquences.

### 7.1.6. Plaque orthotrope triangulaire avec fissure interne

Les fissures peuvent se présentées sur la face de la plaque, pour cela on considère une plaque orthotrope triangulaire avec un angle de l'orientation des fibres  $\alpha=30^\circ$  et  $\alpha=60^\circ$ .

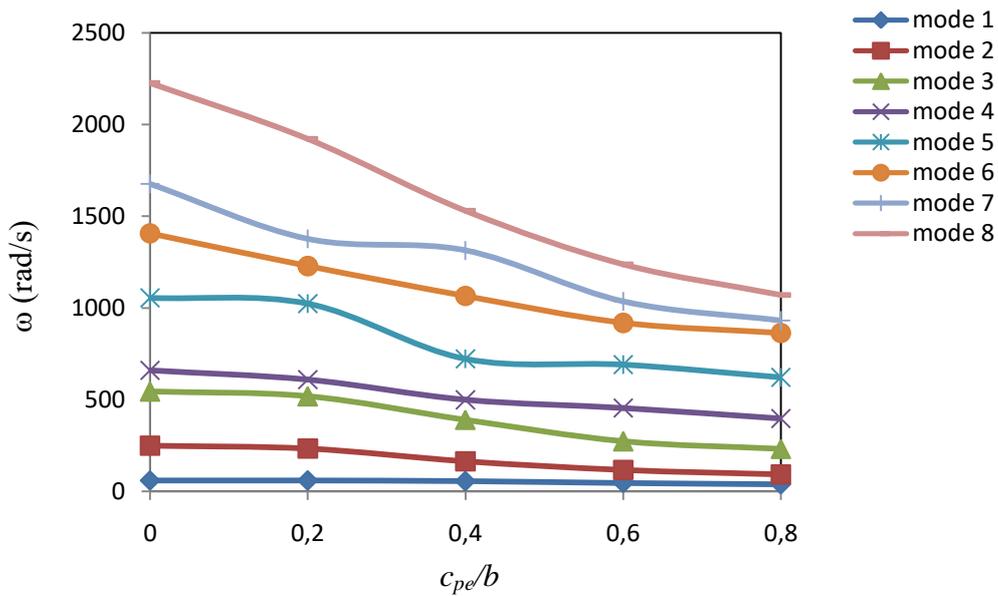
On analyse la variation des pulsations propres en fonction de la dimension des la fissure perpendiculaire à l'encastrement).



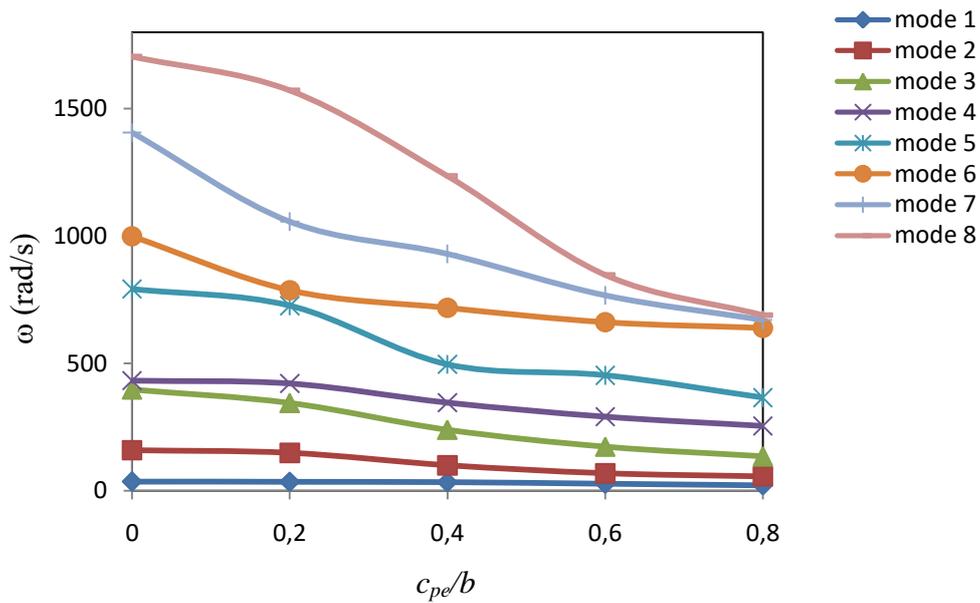
**Fig. 7.22.** Plaque composite triangulaire avec fissure perpendiculaire à l'encastrement

**Tableau 7.12.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure interne perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L

$\alpha$ (°)	$c_{pe}/b$	$\omega_1(rad/s)$	$\omega_2(rad/s)$	$\omega_3(rad/s)$	$\omega_4(rad/s)$	$\omega_5(rad/s)$	$\omega_6(rad/s)$	$\omega_7(rad/s)$	$\omega_8(rad/s)$
30	0.00	59.4992	250.2475	544.4905	660.8027	1055.0916	1406.2294	1676.8730	2226.3754
	0.20	59.1645	233.8194	518.4807	609.7102	1023.8839	1228.5027	1376.6341	1921.8279
	0.40	55.7030	164.6471	390.7898	499.3280	722.8303	1065.2069	1313.4874	1529.1428
	0.60	45.6782	117.5975	273.3923	454.5309	691.0706	918.9337	1035.9931	1237.9296
	0.80	38.8924	93.5015	231.9009	398.0652	622.2722	863.5396	930.8092	1070.6458
60	0.00	36.1946	159.5995	397.6600	432.7076	792.4226	999.0571	1406.1373	1704.1768
	0.20	36.0424	148.8922	345.5132	421.1989	726.4082	787.2920	1056.9407	1570.8750
	0.40	34.3582	100.2152	240.2006	346.4195	496.6966	718.3963	930.0350	1236.0325
	0.60	28.3632	68.7409	173.3696	291.0801	453.4239	661.6840	767.5293	847.3722
	0.80	22.2820	56.8093	135.1892	255.0112	365.9802	639.8068	670.8402	689.5030

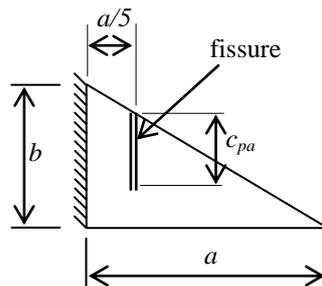


**Fig. 7.23.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=30^\circ$ )



**Fig. 7.24.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure perpendiculaire à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=60^\circ$ )

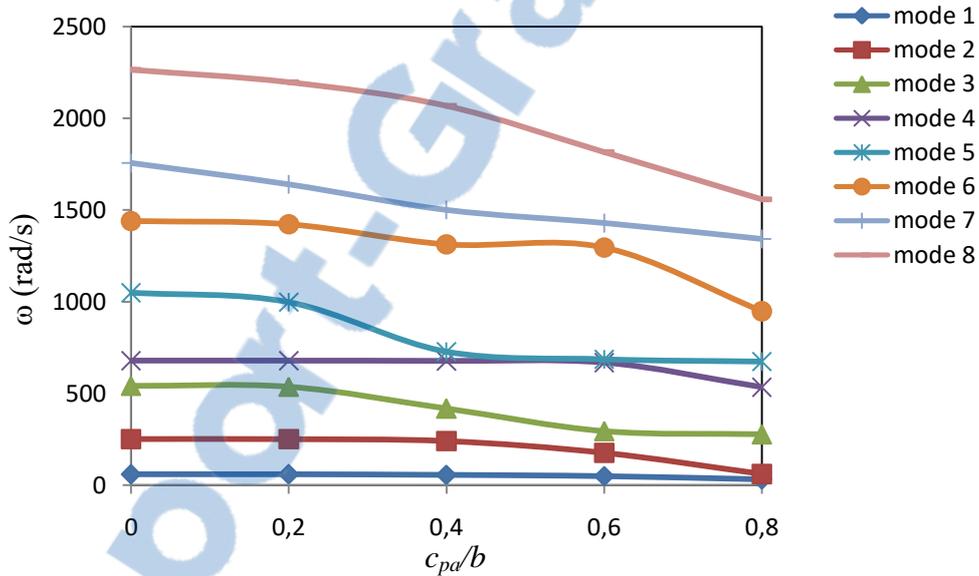
Dans le cas d'une fissure interne parallèle à l'encastrement (Fig. 7.25) on considère une plaque orthotrope triangulaire avec un angle de l'orientation des fibres  $\alpha=30^\circ$  et  $\alpha=60^\circ$ . On étudie la variation des pulsations propres en fonctions le la dimension de la fissure.



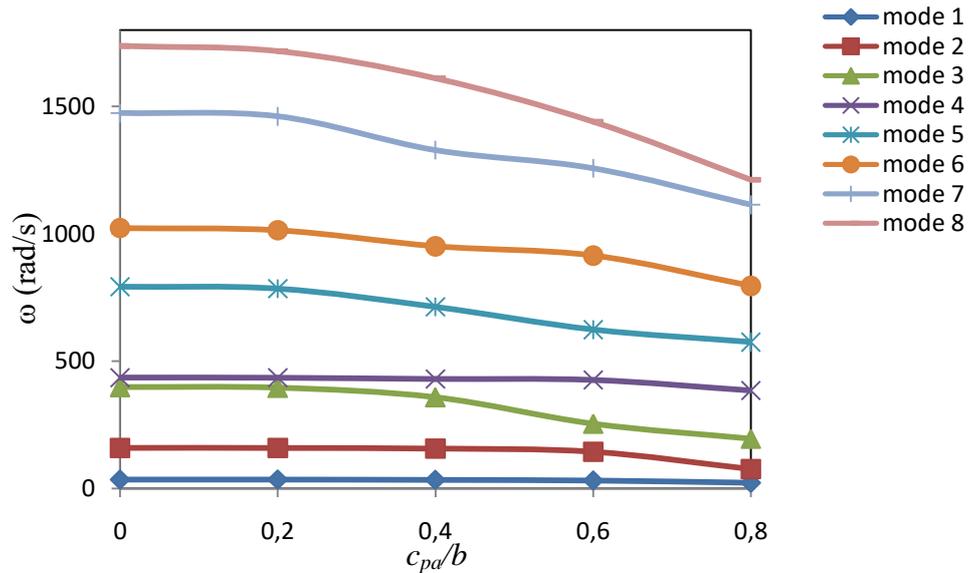
**Fig. 7.25.** Plaque composite triangulaire avec fissure parallèle à l'encastrement

**Tableau 7.13.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure interne parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L

$\alpha$ (°)	$c_{pa}/b$	$\omega_1(rad/s)$	$\omega_2(rad/s)$	$\omega_3(rad/s)$	$\omega_4(rad/s)$	$\omega_5(rad/s)$	$\omega_6(rad/s)$	$\omega_7(rad/s)$	$\omega_8(rad/s)$
30	0.00	59.3818	251.3207	542.1152	678.4239	1049.4010	1439.8559	1755.8822	2264.9023
	0.20	58.9729	251.0915	537.1776	678.3798	997.8334	1421.8745	1640.2769	2196.4416
	0.40	56.3356	240.7230	417.4830	676.9862	728.6680	1313.1016	1500.1983	2066.9392
	0.60	49.7376	176.7691	294.7650	667.8529	686.2462	1295.5618	1428.4625	1816.0947
	0.80	31.2994	61.0639	277.3405	534.4321	674.2267	948.3369	1341.9734	1557.6665
60	0.00	35.9041	159.8950	398.5585	435.6671	792.4545	1022.4885	1473.9412	1736.4584
	0.20	35.7231	159.7755	395.9584	435.1565	785.1694	1013.7279	1460.7749	1716.4681
	0.40	34.2479	156.9638	358.5723	430.4164	713.2341	950.8385	1328.3063	1610.8014
	0.60	31.5679	144.5109	254.9859	426.4585	623.8328	914.4806	1257.3276	1439.8719
	0.80	23.1618	77.0813	196.3463	385.4505	574.8277	795.6426	1113.7403	1211.5127



**Fig. 7.26.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=30^\circ$ )



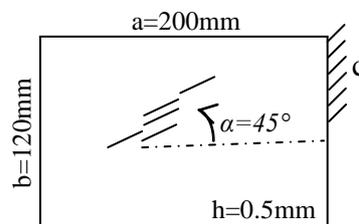
**Fig. 7.27.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure parallèle à l'encastrement pour une plaque triangulaire orthotrope E-L-L( $\alpha=60^\circ$ )

Le *tableau 7.12* représente la variation des paramètres de fréquences en fonction de la dimension d'une fissure située sur la plaque orthotrope triangulaire, cette fissure est perpendiculaire à l'encastrement. Les *figures 7.23* et *7.24* montrent la diminution des paramètres des fréquences quand la dimension de fissure augmente pour les deux angles de l'orientation des fibres.

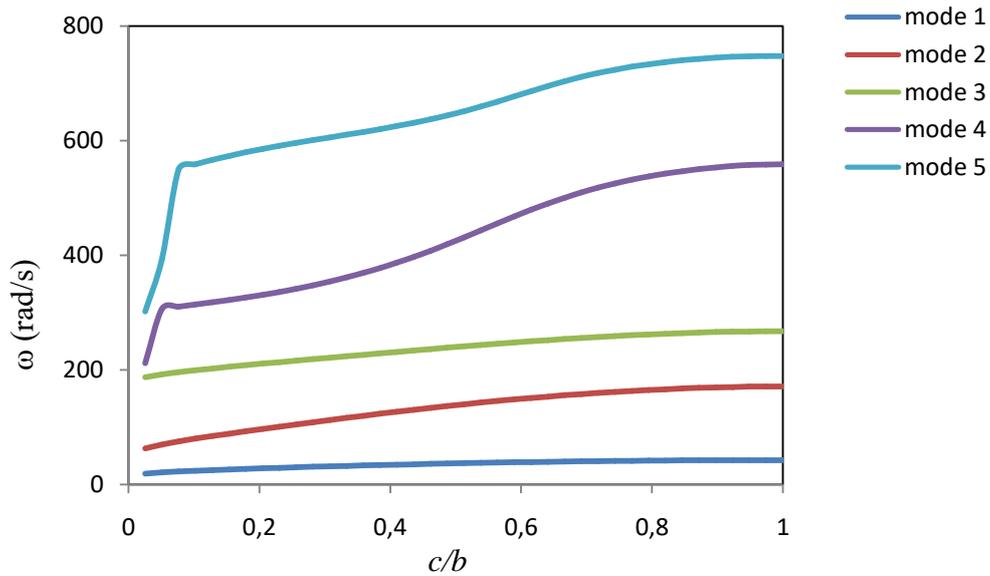
Dans le cas d'une fissure parallèle à l'encastrement, le *tableau 7.13* et les *figure 7.26* et *7.27* représentent la variation des paramètres de fréquences en fonction de la dimension de la fissure.

### 7.1.7. Plaque orthotrope rectangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement

Une plaque orthotrope rectangulaire avec une fissure au niveau de l'encastrement (*Fig. 7.28*).



**Fig. 7.28.** Plaque composite rectangulaire avec fissure au niveau de l'encastrement

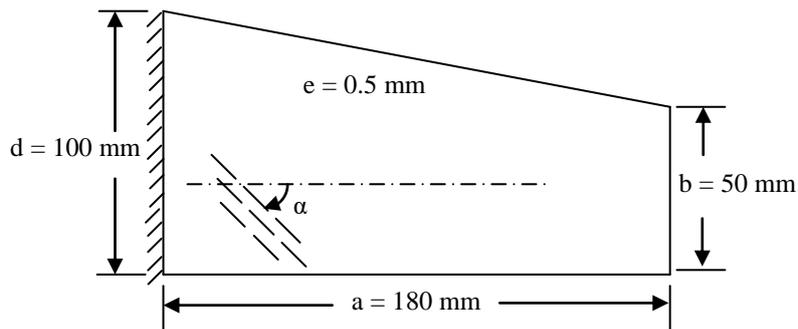


**Fig. 7.29.** variation des fréquences en fonction de rapport  $c/b$  pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L

La figure 7.29 représente la variation des fréquences en fonction de la dimension d'une fissure située au niveau de l'encastrement, l'augmentation de la dimension de fissure provoque la diminution des fréquences et par conséquent une diminution de rigidité de la plaque.

### 7.1.8. Plaque orthotrope trapézoïdale

L'approche présentée dans cette thèse permet de modéliser des plaques de différentes formes géométriques. Un autre cas est étudié c'est les plaques orthotropes trapézoïdales (Fig. 30).



**Fig. 7.30.** plaque orthotrope trapézoïdale

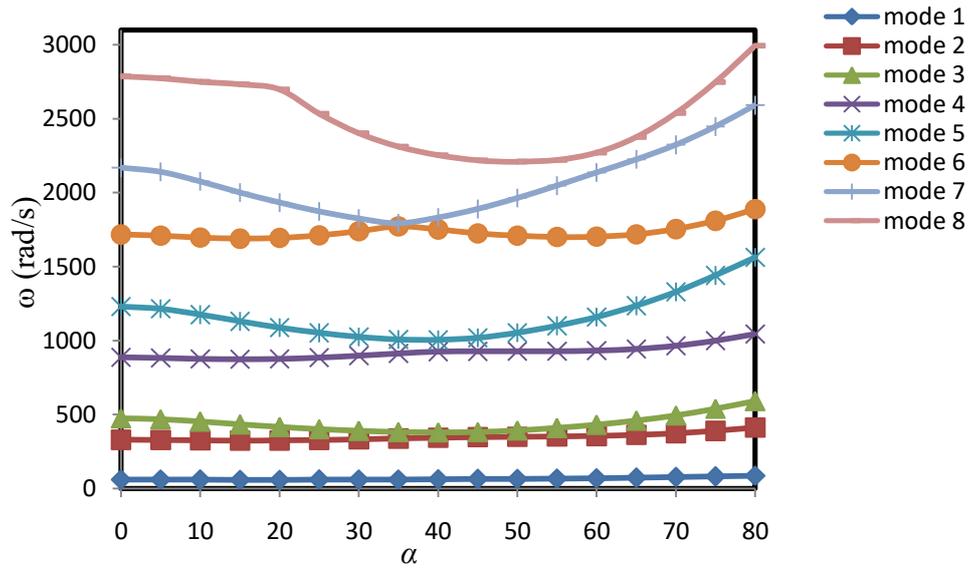


Fig. 7.31. variation des fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L

### 7.1.9. Plaque trapézoïdale avec fissure

#### 7.1.9.1 Fissure sur le côté droit de l'encastrement

Une fissure peut être présente au niveau de côté droit de l'encastrement (Fig.32).

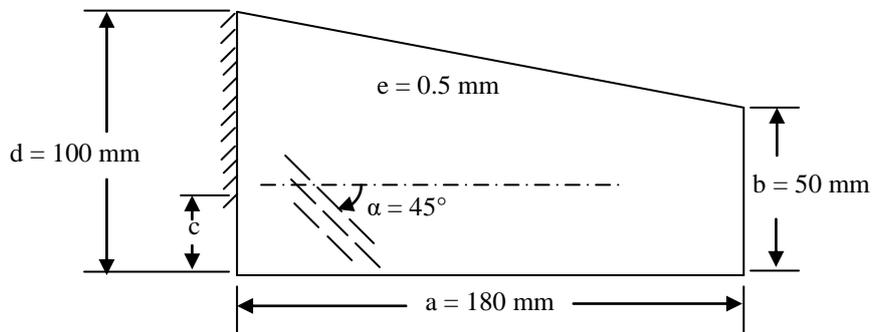
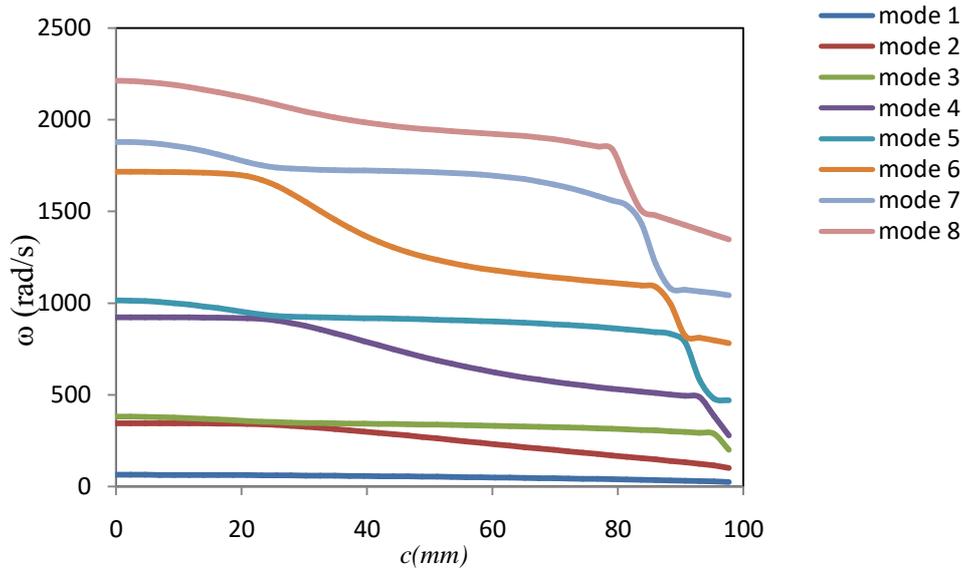


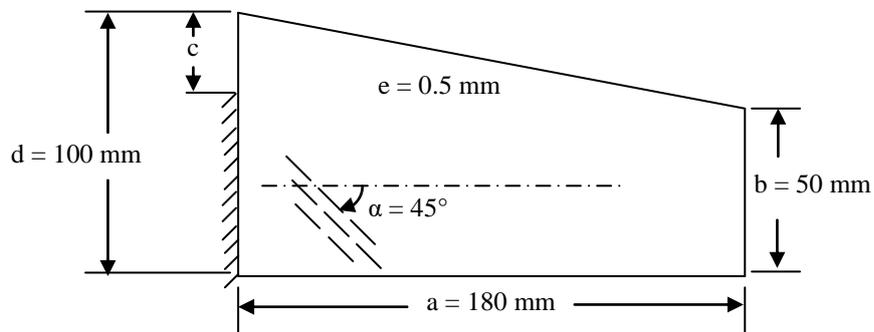
Fig. 7.32. Plaque composite trapézoïdale avec fissure au coté droit de l'encastrement



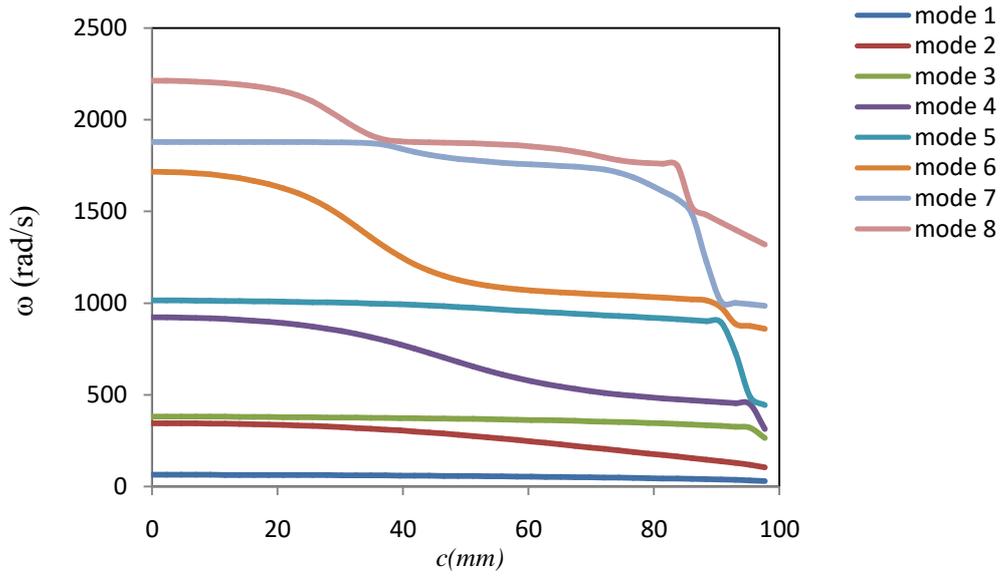
**Fig. 7.33.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté droit de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L

### 7.1.9.2. Fissure sur le côté droit de l'encastrement

Une fissure peut être présente sur le coté gauche de l'encastrement.



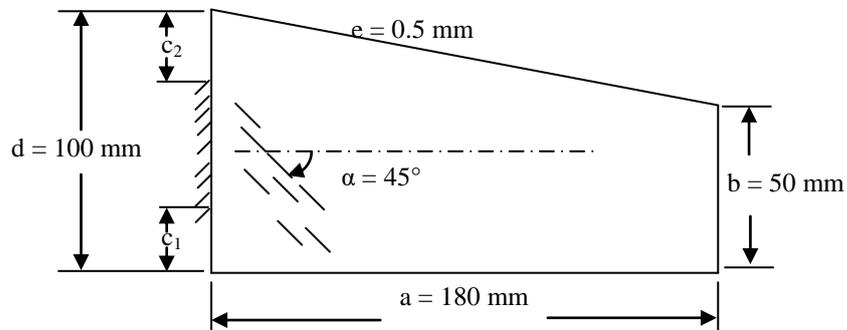
**Fig. 7.34.** Plaque composite trapézoïdale avec fissure au coté gauche de l'encastrement



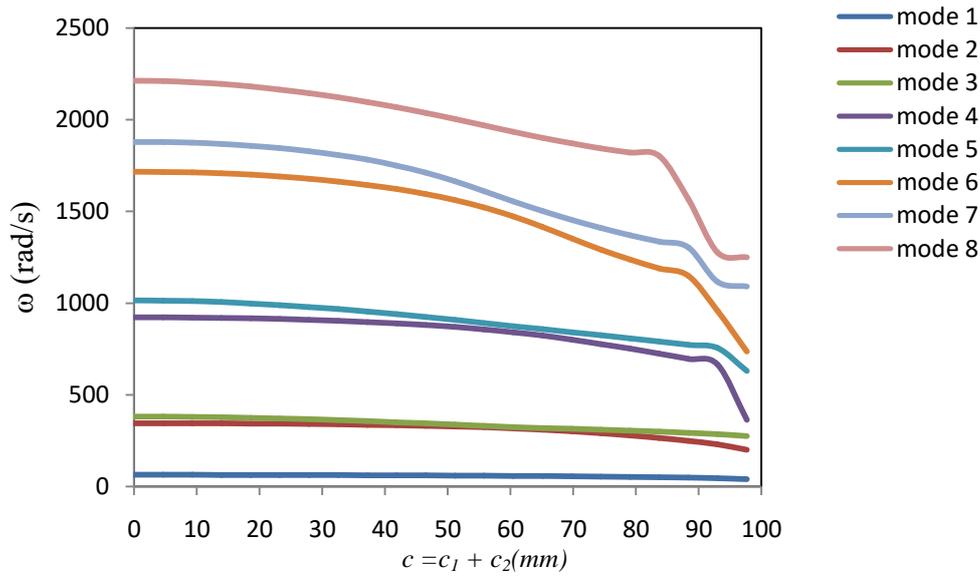
**Fig. 7.35.** variation des fréquences en fonction de dimension de fissure au coté gauche de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L

### 7.1.9.3. Fissures sur les côtés droite et gauche de l'encastrement

Une plaque trapézoïdale orthotrope encasté avec deux fissure au niveau de l'encastrement (Fig. 7.36).



**Fig. 7.36.**Plaque composite trapézoïdale avec fissure au côtés droit et gauche de l'encastrement



**Fig. 7.37.** variation des fréquences en fonction de dimension des fissures au côtés gauche et droit de l'encastrement pour une plaque trapézoïdale orthotrope E-L-L-L

La *figure 7.31* représentent la variation des fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres, pour une plaque composite trapézoïdale encastree, la *figure 7.33* montre l'influence d'une fissure située sur le coté droit de l'encastrement sur les fréquences pour les huit premiers modes de vibration, la *figure 7.35* représente la variation des fréquences en fonction de la dimension d'une fissure située sur le coté gauche de l'encastrement.

Si la fissure s'applique sur les deux côtés de l'encastrement, la variation des fréquences en fonction de la dimension de fissures est représentée sur la *figure 7.37* pour les huit premiers modes, les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la dimension de fissures.

#### 7.1.10. Plaque rectangulaire à deux couches

Le modèle présenté dans cette étude permet d'étudier les plaques stratifiées, un exemple d'une plaque triangulaire en deux couches orthotropes est étudié, avec un angle de l'orientation des fibres de la première couche  $\alpha_1=0^\circ$ , et on analyse la variation des pulsations propres en fonction de l'orientation des fibres de la deuxième couche.

**Tableau 7.14.** variation des fréquences en fonction de l'angle de l'orientation des fibres de la deuxième couche pour une plaque rectangulaire orthotrope E-L-L-L  
 $a = 200\text{mm}$ ,  $b = 120\text{mm}$ ,  $h = 1\text{mm}$  ( $\alpha_1=0^\circ$ )

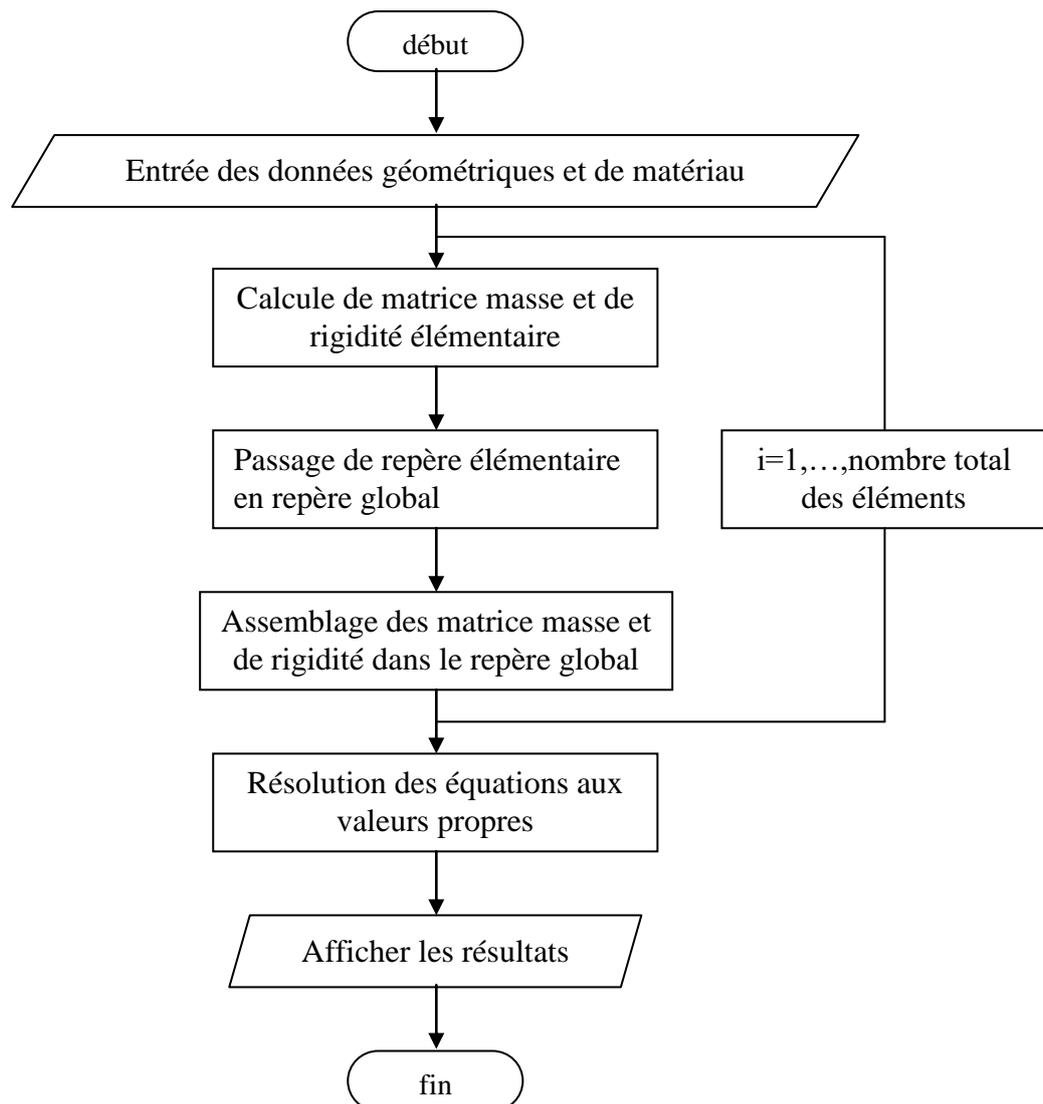
$\alpha_2$ (°)	$\omega_1$ (rad/s)	$\omega_2$ (rad/s)	$\omega_3$ (rad/s)	$\omega_4$ (rad/s)	$\omega_5$ (rad/s)
0	48.2730	276.918	374.684	774.488	1147.31
5	79.4757	378.426	514.609	1166.93	1491.87
10	79.6966	377.846	514.471	1167.65	1487.37
15	80.1573	378.033	515.577	1171.62	1485.32
20	80.9137	379.347	518.573	1179.76	1488.36
25	81.9317	381.450	523.298	1190.98	1496.34
30	83.1411	383.772	529.298	1203.51	1508.09
35	84.4523	385.683	536.012	1215.33	1522.10
40	85.7850	386.758	542.969	1224.92	1537.23
45	87.4575	387.613	552.057	1234.85	1558.51
50	89.2414	388.061	561.980	1243.48	1582.76
55	91.3951	389.075	574.304	1254.01	1614.19
60	93.9752	391.025	589.369	1267.45	1653.65
65	97.0301	394.415	607.474	1285.18	1701.74
70	100.472	399.240	628.069	1306.96	1756.52
75	104.050	404.997	649.605	1330.92	1813.25
80	107.319	410.715	669.345	1353.60	1864.20
85	109.679	415.041	683.617	1370.29	1900.08
90	110.545	416.616	688.850	1376.35	1912.93

Le *tableau 7.14* représente la variation des fréquences en fonction de l'orientation des fibres de la deuxième couche. L'augmentation de l'angle de l'orientation des fibres provoque une augmentation des fréquences pour les cinq premiers modes représentés sur le tableau.

## 7.2. Coques composites

Un programme en *MATLAB* (Fig. 7.38) est établi. Il permet de calculer les matrices masse et de rigidités élémentaires dans un repère local, puis une transformation vers un repère global pour ensuite l'assemblage en matrices masse et de rigidités globales.

Enfin, le programme résout le système à valeurs propres, issu de l'équation de mouvement, pour obtenir les pulsations propres des coques composites en vibration libre.



**Figure 7.38.** Organigramme pour l'analyse modale des coques composites

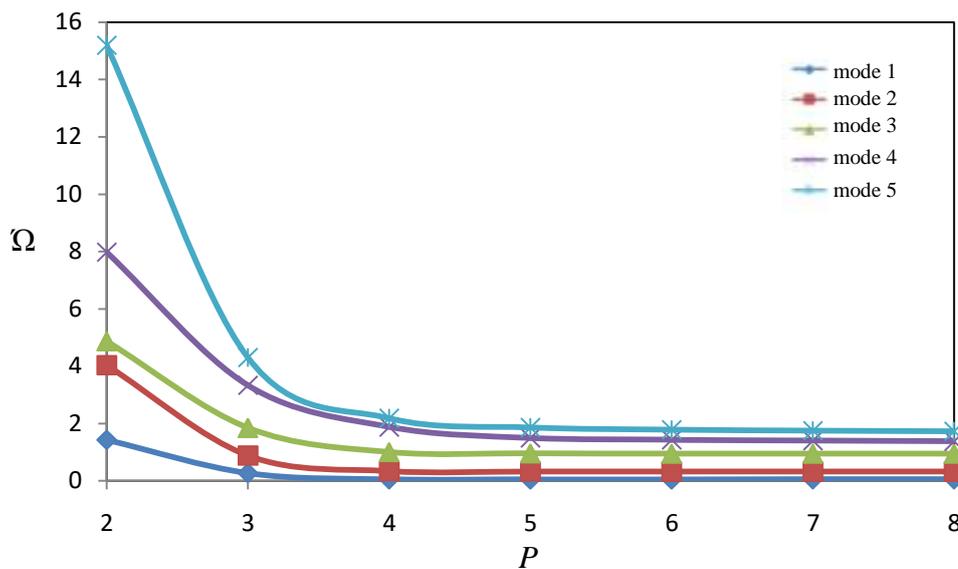
### 7.2.1. Etude de convergence

Pour étudier la convergence de modèle, on détermine les paramètres de fréquence pour différents maillages et différents degrés d'interpolation. Pour cela on propose une coque cylindrique ouverte encastrée en *T300/5208 Carbon/Epoxy* dont les propriétés sont données précédemment et avec un angle d'orientation des fibres  $\alpha = 0$ ,  $L = 2m$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $R = 0.5m$ ,  $h = 0.005m$

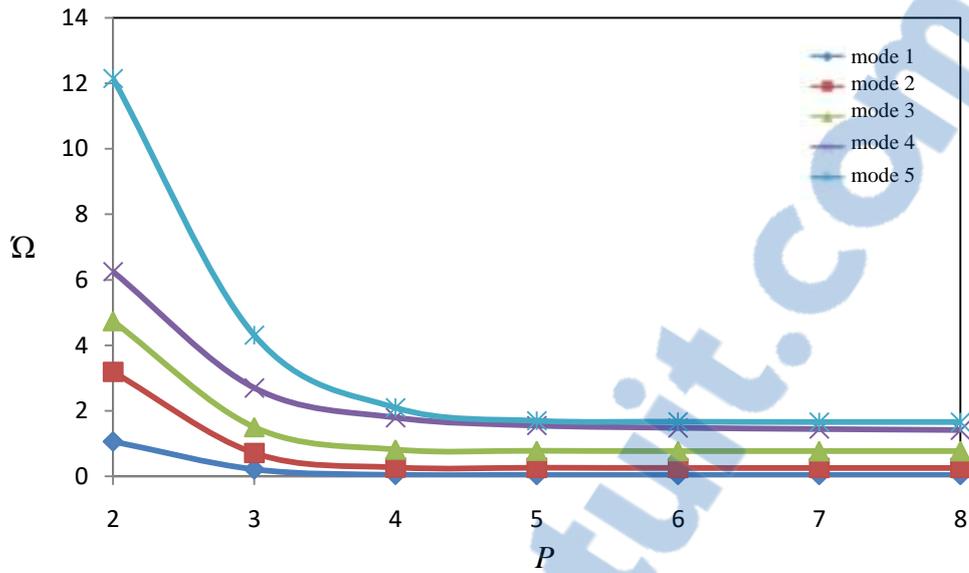
Le paramètre de fréquence calculé est :  $\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G_{xy} h^2}}$

La discrétisation est faite avec 40, 50, 80, 100, 120 et 160 éléments.

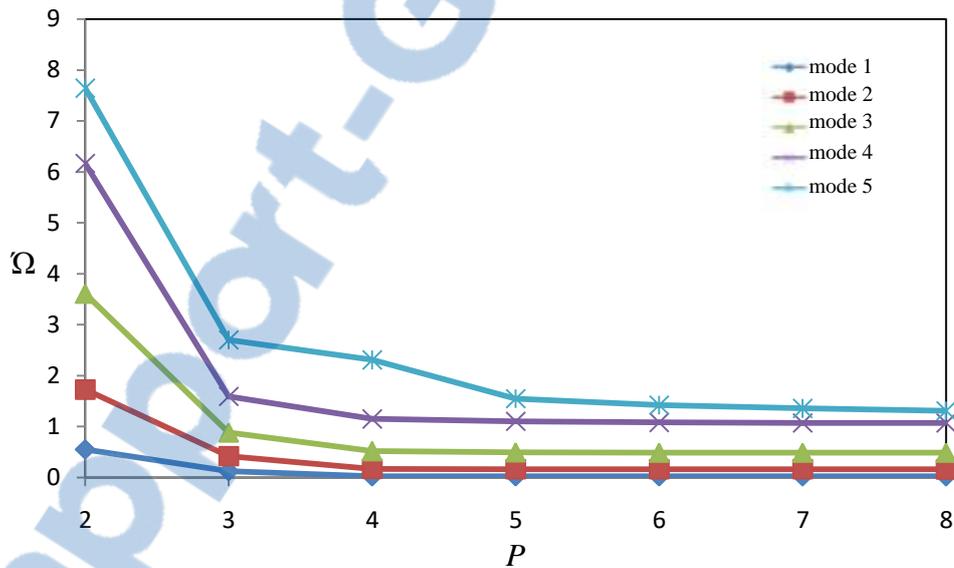
D'après les graphes de convergence (Fig. 7.39 à 7.44) nous remarquons que les résultats issus avec  $P=2$  sont beaucoup plus éloignés et par contres dès  $P=3$  les résultats seront plus proches aux solutions, cela revient à la génération des degrés de libertés à l'intérieur des éléments à partir de  $P=3$ .



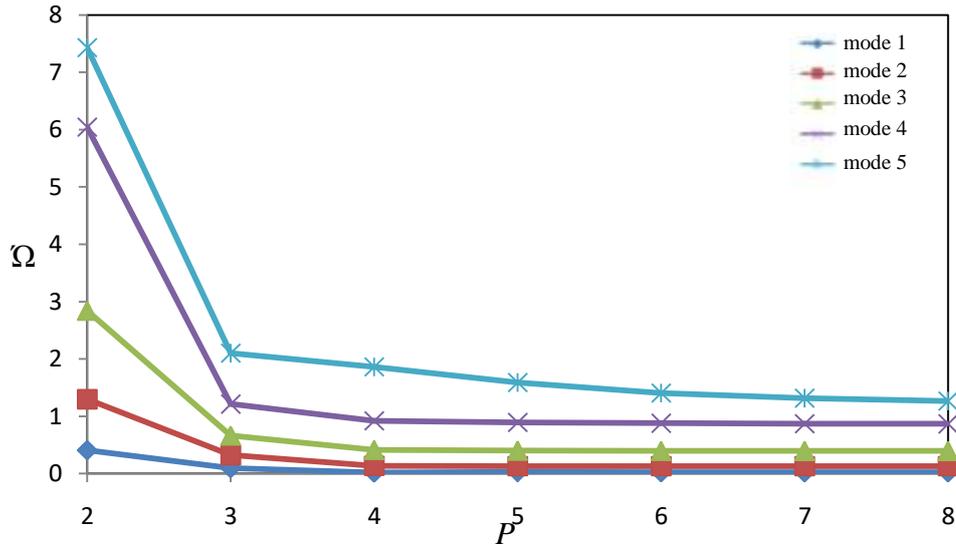
**Figure 7.39.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 40$  éléments



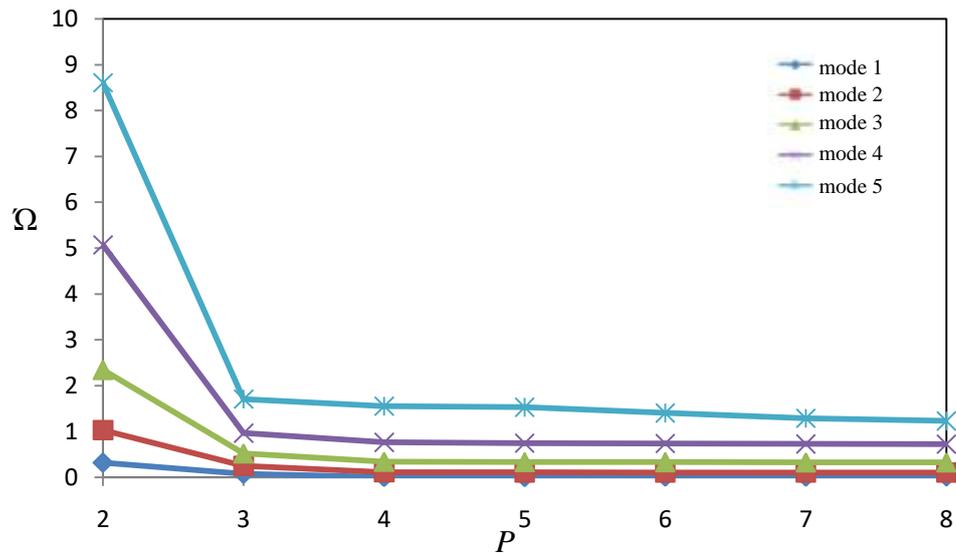
**Figure 7.40.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 50$  éléments



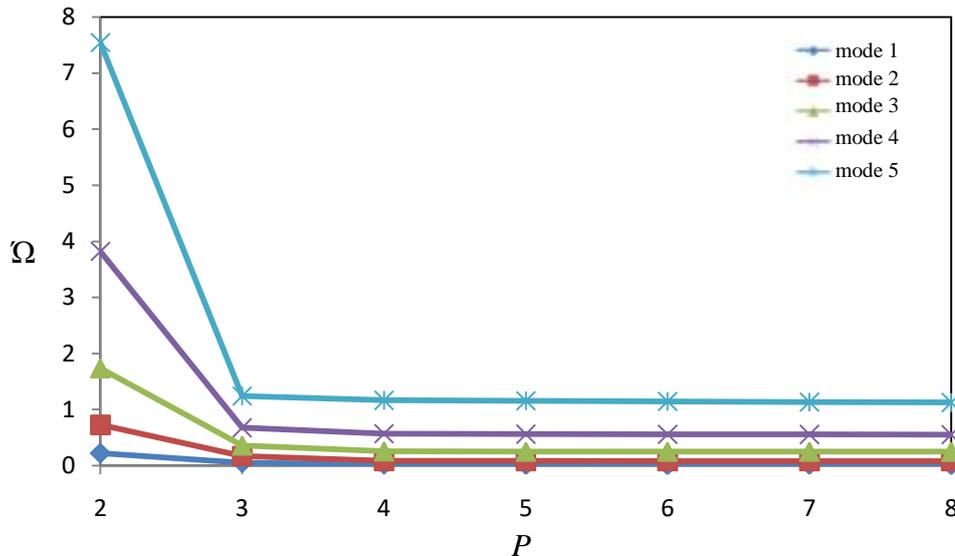
**Figure 7.41.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 80$  éléments



**Figure 7.42.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 100$  éléments



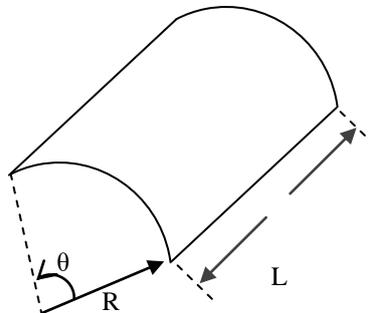
**Figure 7.43.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 120$  éléments



**Figure 7.44.** Variation de paramètre de fréquence en fonction de degré de polynôme pour  $H = 160$  éléments

### 7.2.2. Validation

L'exemple de validation (fig.7.45) consiste à déterminer les fréquences propres d'une coque cylindrique ouverte et de comparer les résultats obtenus avec ceux donnés par *Tang et all* [211].



**Figure 7.45.** coque cylindrique ouverte

Données géométriques de l'exemple :

$$L = 10m$$

$$R = 5m$$

$$h = 6 \cdot 10^{-3}m$$

$$\theta = \pi/6$$

Données du matériau :

$$E = 2,1 \cdot 10^{11}pa$$

$$\rho = 7800kg/m^3$$

$$\nu = 0,3$$

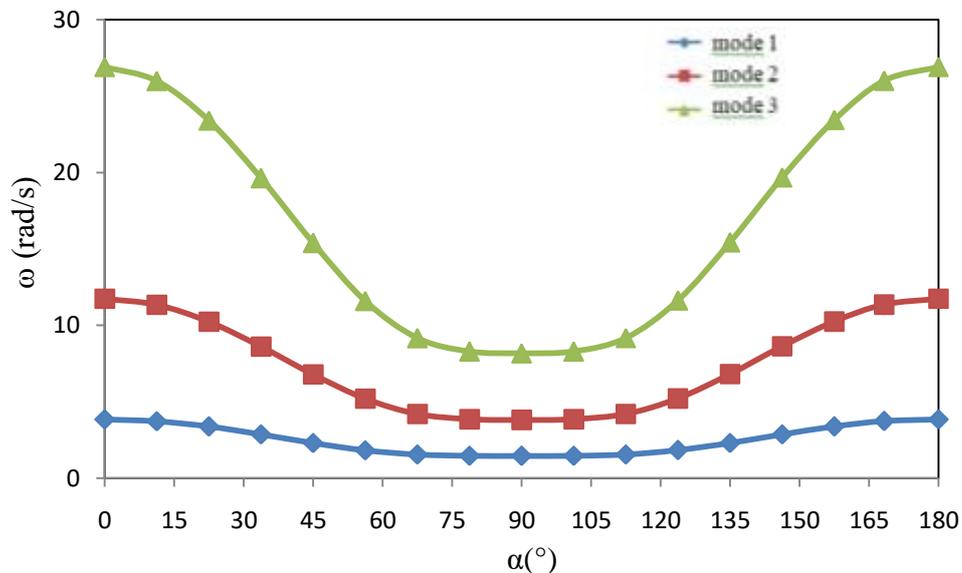
Conditions aux limites : appuis simple sur les quatre côtés

**Tableau 7.15.** Comparaison des fréquences [Hz] pour une coque cylindrique

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
présent	11.318	33.355	58.310	82.038	103.399	116.010	129.601	134.716
Tang et all [211]	10.704	34.971	62.339	85.755	103.823	117.321	127.288	134.768
$\varepsilon$ (%)	5.42%	4.62%	6.46%	4.33%	0.40%	1.11%	1.78%	0.03%

### 7.2.3. Variation des fréquences en fonction de l'orientation des fibres

Un cas des coques orthotropes cylindriques ouverte ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) et fermée ( $\theta = 2\pi$ ).



**Figure 7.46.** Variation de fréquence en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour coque cylindrique ouverte

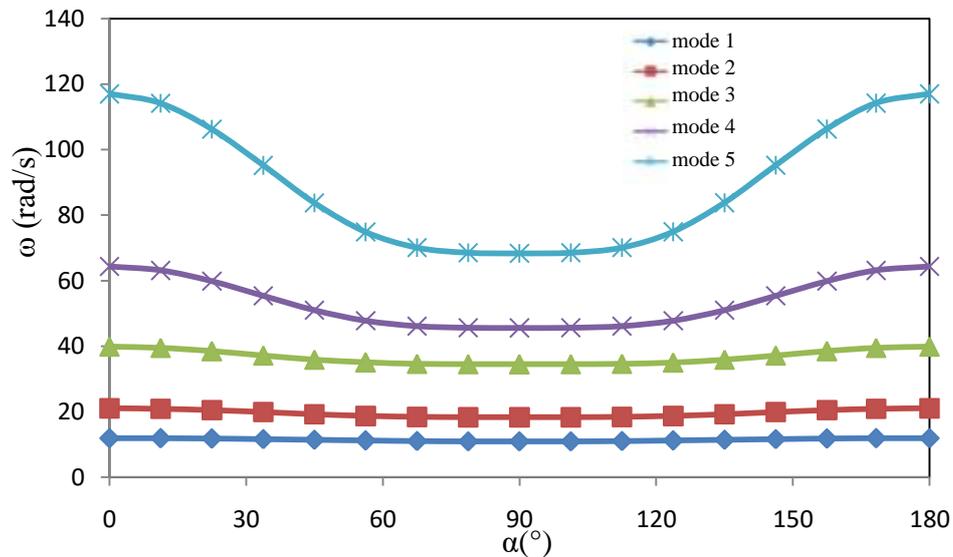
La figure 7.46 représente la variation des pulsations propres en fonction de l'orientation des fibres pour une coque orthotrope cylindrique ouverte  $EELL$  où les côtés encastrés sont les côtés courbés. La coque est de dimensions  $L=1m$ ,  $R=1m$ ,  $\theta = \pi/2$ .

Lorsque l'orientation des fibres est  $\alpha = 0^\circ$ , la direction des fibres est perpendiculaire aux côtés encastrés, les valeurs des pulsations sont élevées, et cela implique que la rigidité de la coque est élevée.

Au fur et à mesure que l'angle de l'orientation des fibres augmente les pulsations diminuent conduisant à la diminution de la rigidité de la coque jusqu'à atteindre une valeur minimale à

un angle d'orientation des fibres  $\alpha = 90^\circ$  où la direction des fibres est parallèle aux côtés encastrés, les pulsations auront une valeur minimale, cela implique une diminution considérable de la rigidité de la coque.

A partir de l'angle  $\alpha = 90^\circ$ , les pulsations augmentent de nouveau d'une façon symétrique cependant la rigidité de la coque augmente aussi jusqu'à atteindre de nouveau sa valeur maximale à  $\alpha = 180^\circ$ .



**Figure 7.47.** Variation de fréquence en fonction de l'angle de l'orientation des fibres pour coque cylindrique fermée

La figure 7.47 représente la variation des pulsations propres en fonction de l'orientation des fibres pour une coque cylindrique fermée EE/LL où les côtés encastrés sont les côtés courbés. Les pulsations diminuent avec la diminution de l'angle d'orientation des fibres jusqu'à atteindre une valeur minimale à  $\alpha = 90^\circ$  où la direction des fibres sera parallèle aux côtés encastrés. Cette diminution implique une diminution de la rigidité de la coque. Et à partir de l'angle  $\alpha = 90^\circ$ , les pulsations ont tendance à augmenter de nouveau cependant la rigidité augmente au fur et à mesure que la direction des fibres devient perpendiculaire aux côtés encastrés.

#### 7.2.4. Fissures au niveau de l'encastrement

La présence des fissures influe considérablement sur la rigidité des structures. Ici nous analysons l'influence d'une fissure au niveau de l'encastrement (fig. 7.49) sur les pulsations propre d'une coque orthotrope cylindrique ouverte avec une orientation des fibres  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\theta = \pi/2$

La dimension de la fissure est  $f s = c \frac{\theta}{16}$

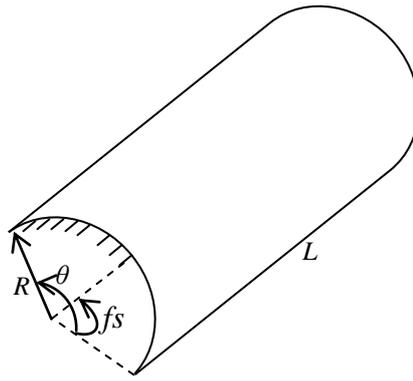


Figure 7.48. coque composite avec fissure au niveau de l'encastrement

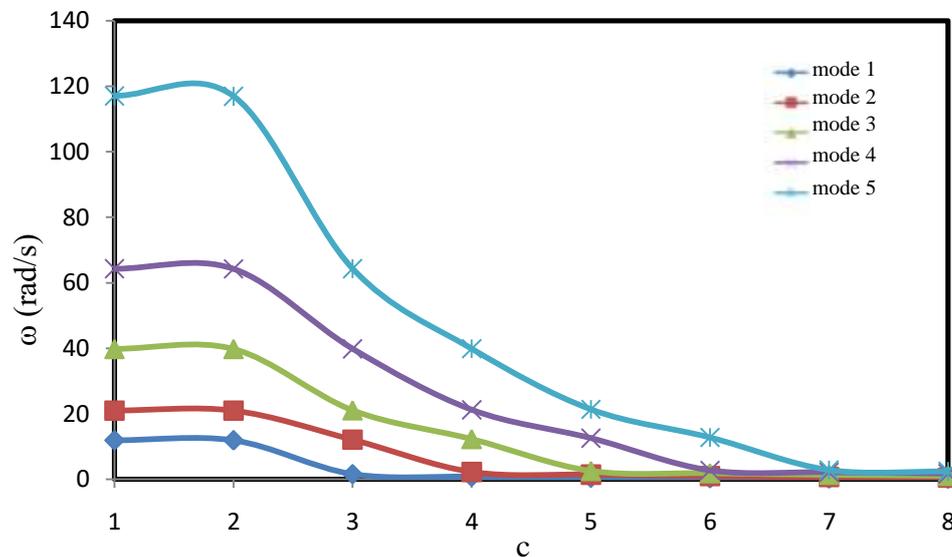


Figure 7.49. Variation de fréquence en fonction de la dimension de fissure

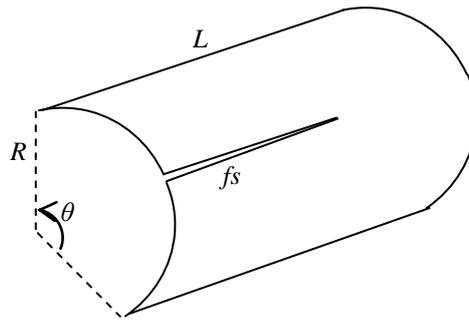
La propagation de la fissure provoque une diminution remarquable des pulsations propre de la coque, et cela implique une décroissance très considérable de la rigidité de la coque.

### 7.2.5. Fissures internes

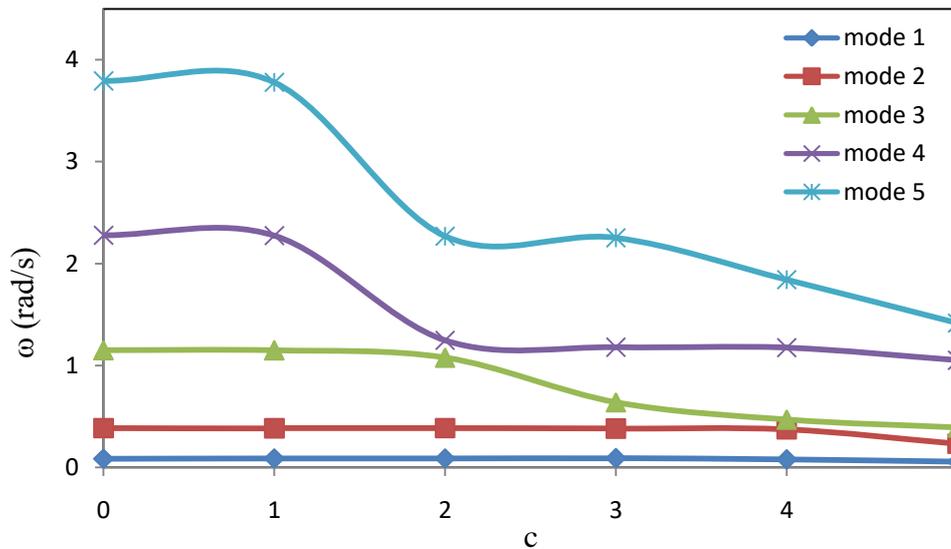
Supposons une coque orthotrope contenant une fissure interne (Fig. 7.50), avec  $L=2\text{m}$ ,  $R=0.5\text{m}$ ,  $\Theta=\pi/2$ , et l'angle de l'orientation des fibres est  $\alpha=0$ .

La coque est encastree en un coté droit, et la fissure est située au niveau de  $\Theta=\pi/4$ .

La dimension de la fissure est  $fs = c \frac{L}{5}$



**Figure 7.50.** coque composite avec fissure interne

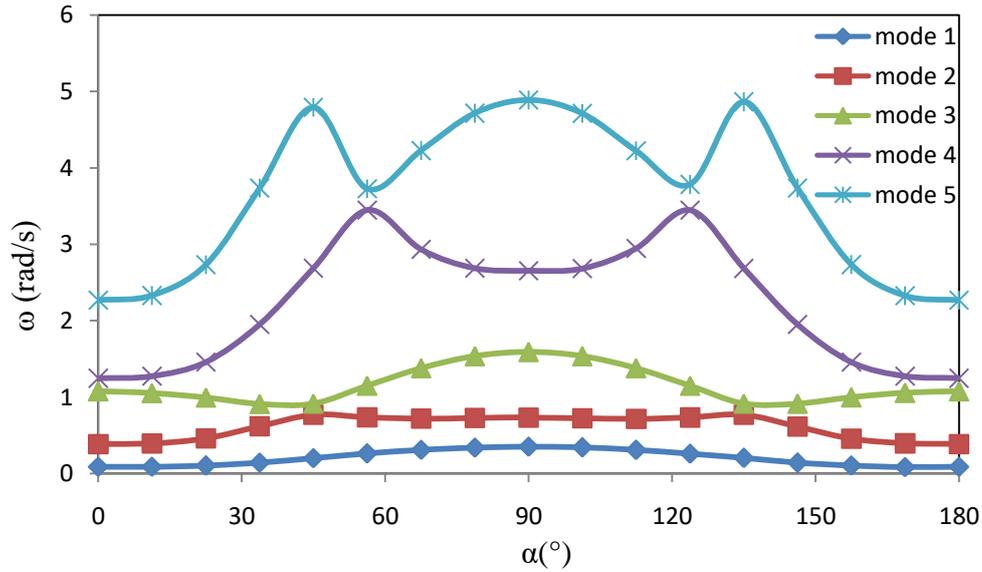


**Figure 7.51** Variation de fréquence en fonction de la dimension de fissure interne

La figure 7.51 montre que l'augmentation de la dimension d'une fissure interne provoque la diminution des fréquences propres d'une coque orthotrope cette diminution est d'autant plus considérable sur les hautes fréquences.

### 7.2.6. Effet de l'orientation des fibres sur une coque composite fissurée

Supposons une coque orthotrope (Fig. 7.50), avec une fissure interne de dimension  $fs = 2 \frac{L}{5}$

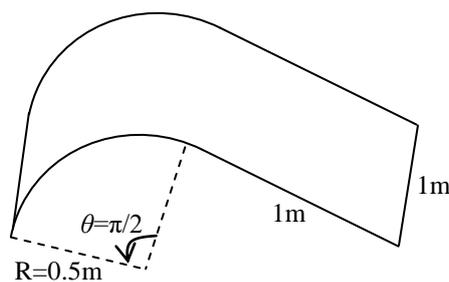


**Figure 7.52** Variation de fréquence en fonction l'angle de l'orientation des fibres pour une coque composite avec fissure interne

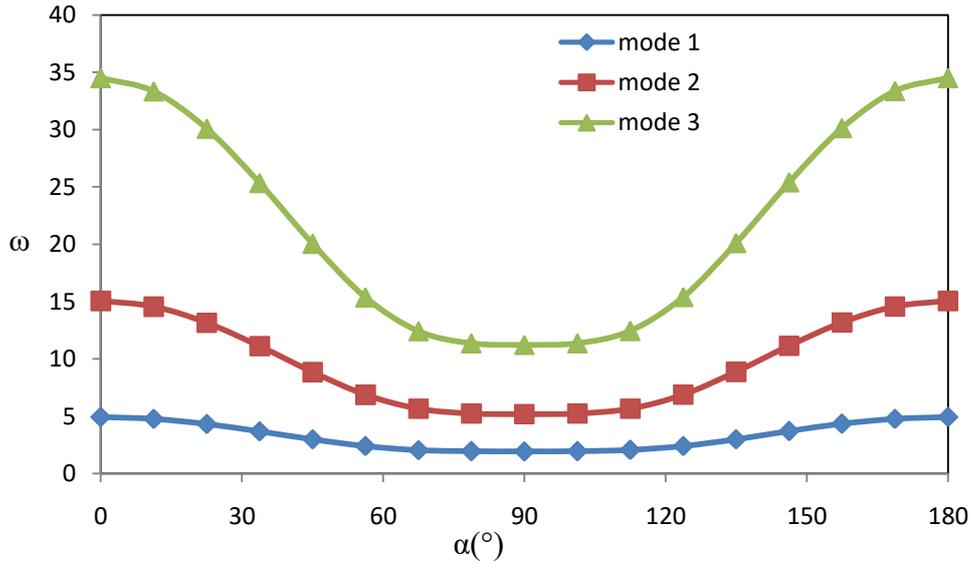
La figure 7.52 montre la variation des fréquences propres pour une coque composite avec une fissure interne en fonction de l'angle de l'orientation des fibres, nous remarquons une symétrie par rapport à l'angle  $\alpha=90^\circ$ , et au contraire des coques non fissurées, l'allure de la variation des fréquences n'est pas monotone.

### 7.2.7. Coque combiné

Une structure combinée (Fig. 7.53) contenant une partie plane et une autre courbée.



**Figure 7.53.** Coque composite combinée



**Figure 7.54.** Variation des fréquences en fonction l'angle de l'orientation des fibres pour une coque combinée ELEL

La figure 7.54 montre la variation des fréquences propres d'une structure combinée encadrée sur les deux cotés courbés et libre aux deux autres cotés, les fréquences ont tendances de diminuer avec l'augmentation de l'angle d'orientation des fibres de 0 à  $\pi/2$ , puis augmentent de nouveau d'une façon symétrique de  $\pi/2$  à  $\pi$ .

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, l'analyse des vibrations libres des plaques et coques composites a été étudiée. Des plaques et des coques conçus par matériaux composites à renfort fibreux tel que *carbon/époxy* et ont été utilisés pour cette étude.

Les matériaux composites sont préférés dans la conception et la fabrication structures aéronautiques comme dans beaucoup d'autres domaine d'industrie par raison de leurs rapports résistance / poids et rigidité.

Les équations de comportement pour l'analyse des vibrations libres des plaques et coques composites ont été dérivées. Une théorie des plaques et coques bidimensionnelle basée sur le déplacement a été utilisée avec des équations géométriquement linéaires de déplacement et de contrainte en combinaison avec la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre dans laquelle les effets de cisaillement transversal et d'inertie rotation sont pris en considération. Les équations de mouvement pour l'étude de problème de vibration libre ont été dérivées par le principe de Lagrange.

Une technique pour déterminer les relations contraintes-déformations a été présentée pour les matériaux anisotropes lorsque le repère des couches orthotropes ne coïncide pas avec le repère de la structure étudiée.

Cette analyse est faite par la version *hp* de la méthode des éléments finis, où on combine les deux versions *h* et *p* pour optimiser la taille du problème par une discrétisation de la structure moins dense, et un degré de polynôme d'interpolation modéré.

Un élément triangulaire hiérarchique a été utilisé, ce qui permet l'assemblage des différentes formes des structures.

Plusieurs cas ont été étudiés pour différentes formes des plaques et coques est différentes conditions aux limites, ainsi que l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques et coques composites. Des structures fissurées ont aussi été analysées.

La méthode de la solution peut en outre être étendue aux théories de déformation de cisaillement transversal d'ordre supérieur en modifiant la matrice rigidité. Il ne sera pas nécessaire d'introduire le facteur de correction de cisaillement transversal lorsque des théories de déformation de cisaillement transversal d'ordre supérieur sont utilisées.

## Annexe A

## Dérivées partielles de déformations en termes de déplacements

## Les premières dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\
\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\
\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\
\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\
\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} \\
\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \\
\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} \\
\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \\
\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \\
\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \\
\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\
\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z}
\end{aligned}$$

## Les secondes et mixtes dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial r^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}$$

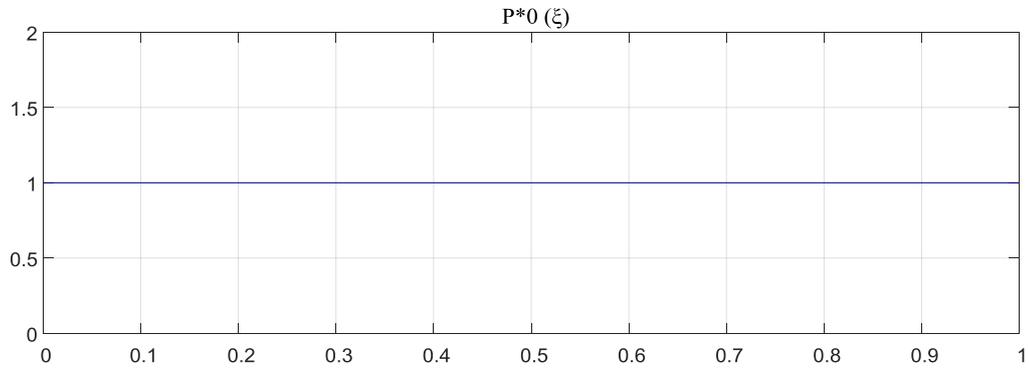
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial z} \\
 \frac{\partial \theta \partial z}{\partial^2 \varepsilon_{rr}} &= \frac{\partial r \partial \theta \partial z}{\partial^3 u} \\
 \frac{\partial \theta^2}{\partial^2 \varepsilon_{rr}} &= \frac{\partial r \partial \theta^2}{\partial^3 u} \\
 \frac{\partial z^2}{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}} &= \frac{\partial r \partial z^2}{1 \partial^2 u} - \frac{2 \partial u}{r^2 \partial r} + \frac{2u}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 v}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
 \frac{\partial r \partial \theta}{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}} &= \frac{1}{1 \partial^2 u} - \frac{1}{1 \partial u} + \frac{1}{1 \partial^3 v} - \frac{1}{1 \partial^2 v} \\
 \frac{\partial r \partial z}{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}} &= \frac{r \partial r \partial \theta}{1 \partial^2 u} - \frac{r^2 \partial \theta}{1 \partial u} + \frac{r \partial r \partial \theta^2}{1 \partial^3 v} - \frac{r^2 \partial \theta^2}{1 \partial^2 v} \\
 \frac{\partial \theta \partial z}{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}} &= \frac{r \partial r \partial z}{1 \partial^2 u} - \frac{r^2 \partial z}{1 \partial^3 v} + \frac{r \partial r \partial \theta \partial z}{r \partial r \partial \theta \partial z} - \frac{r^2 \partial \theta \partial z}{r^2 \partial \theta \partial z} \\
 \frac{\partial \theta^2}{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}} &= \frac{r \partial \theta^2}{1 \partial^2 u} + \frac{r \partial \theta^3}{1 \partial^3 v} \\
 \frac{\partial z^2}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{r \partial z^2}{r \partial z^2} + \frac{r \partial \theta \partial z^2}{r \partial \theta \partial z^2} \\
 \frac{\partial r^2}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial r^2 \partial z}{\partial^3 w} \\
 \frac{\partial r \partial \theta}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial r \partial \theta \partial z}{\partial^3 w} \\
 \frac{\partial r \partial z}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial r \partial z^2}{\partial^3 w} \\
 \frac{\partial z \partial \theta}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial \theta \partial z^2}{\partial^3 w} \\
 \frac{\partial \theta^2}{\partial^2 \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial \theta^2 \partial z}{\partial^3 w} \\
 \frac{\partial z^2}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{\partial z^3}{\partial z^3} \\
 \frac{\partial r^2}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2v}{r^3} \\
 \frac{\partial r \partial \theta}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{1}{1 \partial^3 u} - \frac{1}{1 \partial^2 u} + \frac{\partial^3 v}{\partial^3 v} - \frac{1}{1 \partial^2 v} + \frac{1}{1 \partial v} \\
 \frac{\partial r \partial z}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{r \partial r \partial \theta^2}{1 \partial^3 u} - \frac{r^2 \partial \theta^2}{1 \partial^2 u} + \frac{\partial r^2 \partial \theta}{\partial^3 v} - \frac{r \partial r \partial \theta}{1 \partial^2 v} + \frac{r^2 \partial \theta}{r^2 \partial z} \\
 \frac{\partial \theta \partial z}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{r \partial r \partial \theta \partial z}{1 \partial^3 u} - \frac{r^2 \partial \theta \partial z}{\partial^3 v} + \frac{\partial r^2 \partial z}{1 \partial^2 v} - \frac{r \partial r \partial z}{r \partial r \partial z} + \frac{r^2 \partial z}{r^2 \partial z} \\
 \frac{\partial \theta^2}{\partial^2 \gamma_{r\theta}} &= \frac{r \partial \theta^2 \partial z}{1 \partial^3 u} + \frac{\partial r \partial \theta \partial z}{\partial^3 v} - \frac{r \partial \theta \partial z}{1 \partial^2 v} \\
 \frac{\partial z^2}{\partial^2 \gamma_{rz}} &= \frac{r \partial \theta^3}{1 \partial^3 u} + \frac{\partial r \partial \theta^2}{\partial^3 v} - \frac{r \partial \theta^2}{1 \partial^2 v} \\
 \frac{\partial r^2}{\partial^2 \gamma_{rz}} &= \frac{r \partial \theta \partial z^2}{r \partial \theta \partial z^2} + \frac{\partial r \partial z^2}{\partial r \partial z^2} - \frac{r \partial z^2}{r \partial z^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial \theta \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial r^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^3 v}{\partial r \partial \theta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^3 v}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial \theta \partial z} &= \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial z^2} \end{aligned}$$

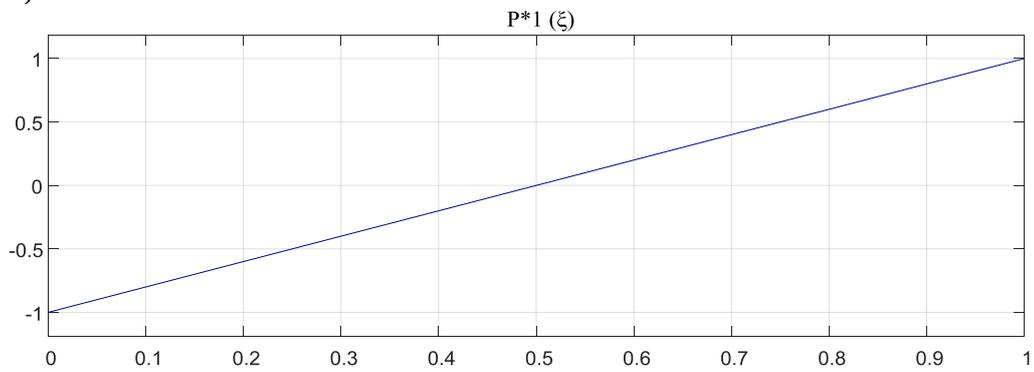
## Annexe B

### Les 13 premiers polynômes de Legendre déplacés

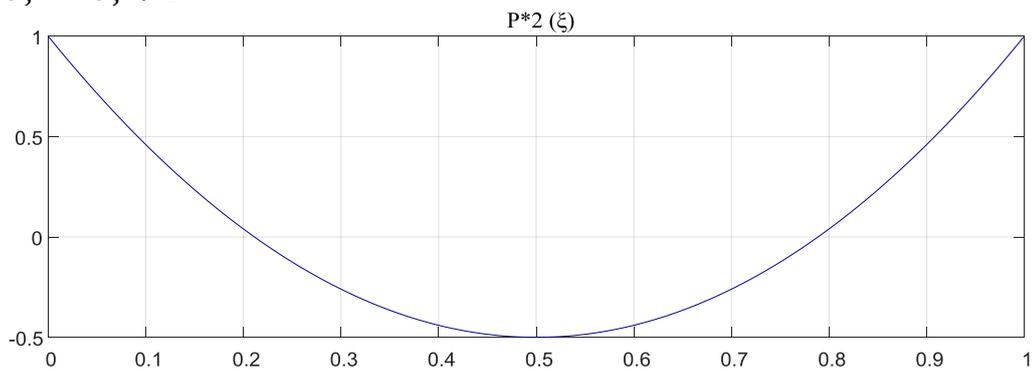
$$P_0^*(\xi) = 1$$



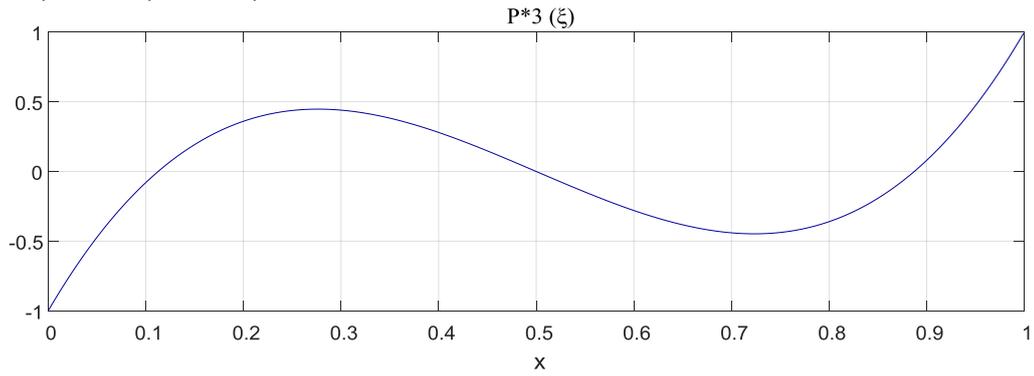
$$P_1^*(\xi) = 2\xi - 1$$



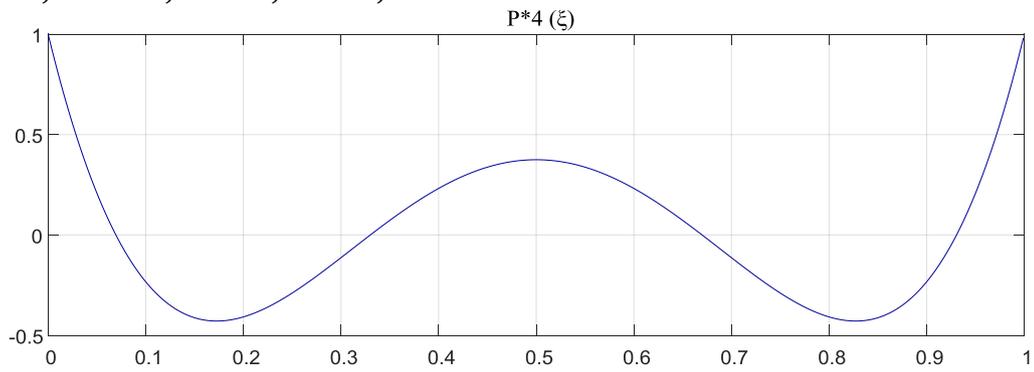
$$P_2^*(\xi) = 6\xi^2 - 6\xi + 1$$



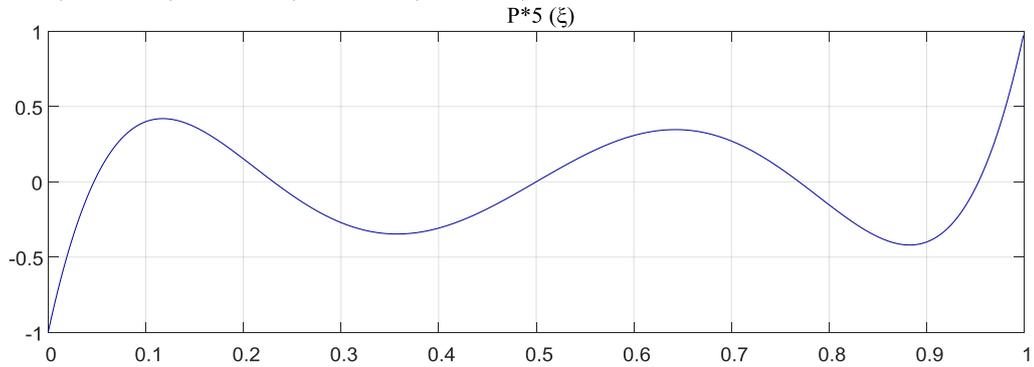
$$P_3^*(\xi) = 20\xi^3 - 30\xi^2 + 12\xi - 1$$



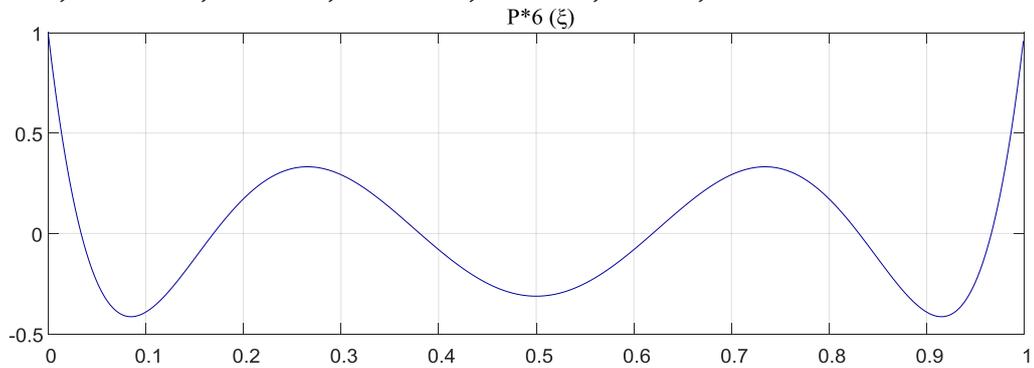
$$P_4^*(\xi) = 70\xi^4 - 140\xi^3 + 90\xi^2 - 20\xi + 1$$



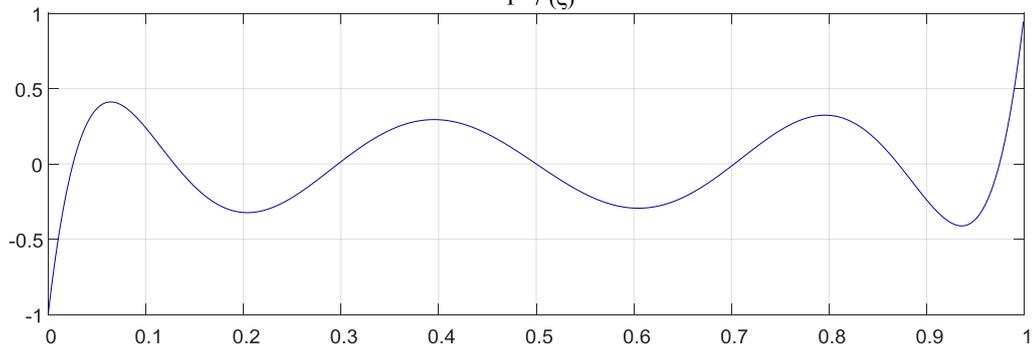
$$P_5^*(\xi) = 252\xi^5 - 630\xi^4 + 560\xi^3 - 210\xi^2 + 30\xi - 1$$



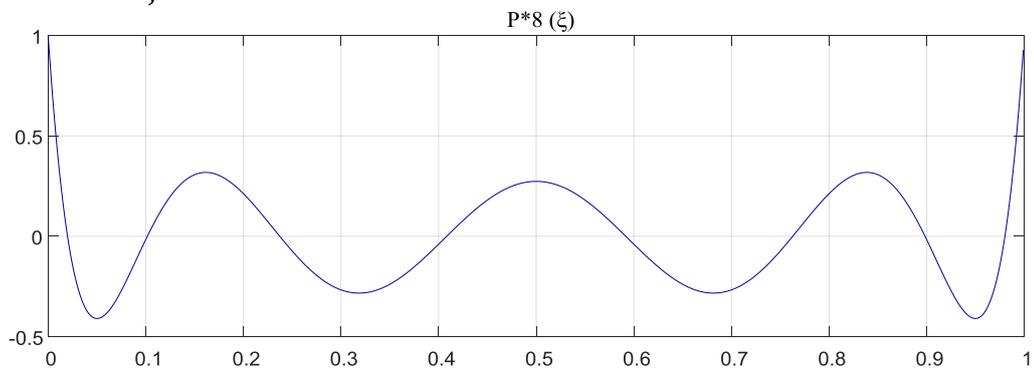
$$P_6^*(\xi) = 924\xi^6 - 2772\xi^5 + 3150\xi^4 - 1680\xi^3 + 420\xi^2 - 42\xi + 1$$



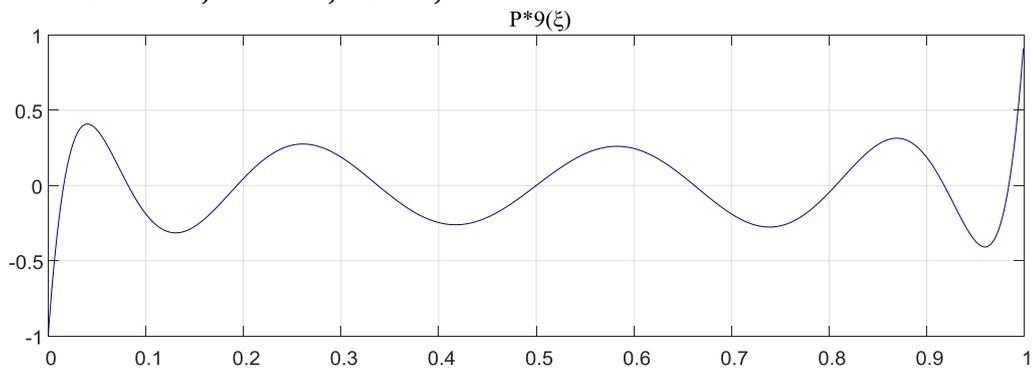
$$P_7^*(\xi) = 3432\xi^7 - 12012\xi^6 + 16632\xi^5 - 11550\xi^4 + 4200\xi^3 - 759\xi^2 + 56\xi - 1$$



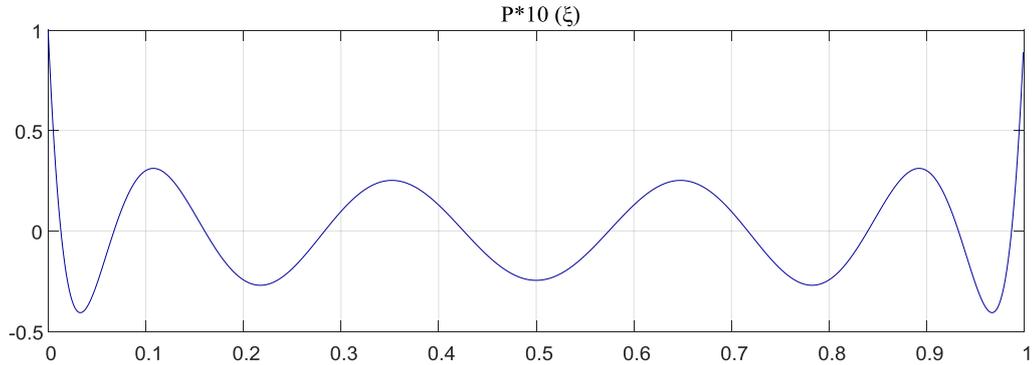
$$P_8^*(\xi) = 12870\xi^8 - 51480\xi^7 + 84084\xi^6 - 72072\xi^5 + 34650\xi^4 - 9240\xi^3 + 1260\xi^2 - 72\xi + 1$$



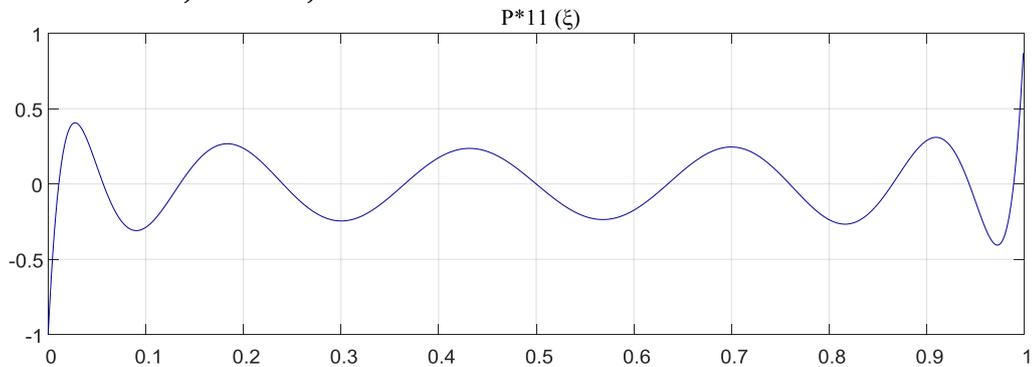
$$P_9^*(\xi) = 48620\xi^9 - 218790\xi^8 + 411840\xi^7 - 420420\xi^6 + 252252\xi^5 - 90090\xi^4 + 18480\xi^3 - 1980\xi^2 + 90\xi - 1$$



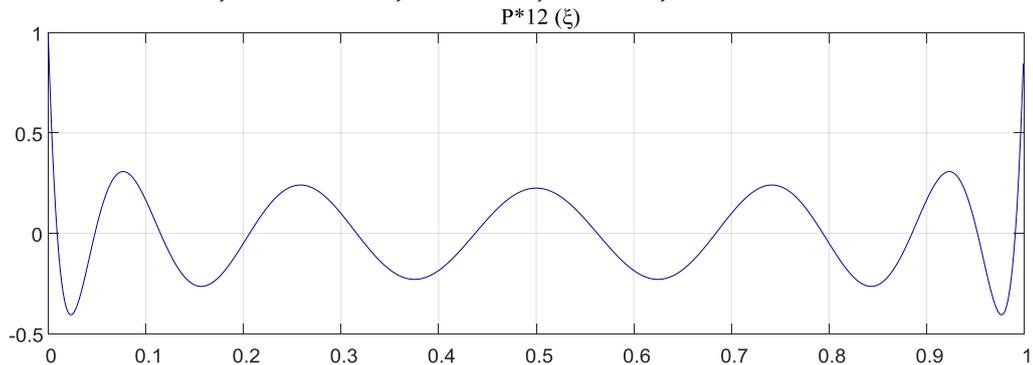
$$P_{10}^*(\xi) = 184756\xi^{10} - 923780\xi^9 + 1969110\xi^8 - 2333760\xi^7 + 1681680\xi^6 - 756756\xi^5 + 210210\xi^4 - 34320\xi^3 + 2970\xi^2 - 110\xi + 1$$



$$P_{11}^*(\xi) = 705432\xi^{11} - 3879876\xi^{10} + 9237800\xi^9 - 12471030\xi^8 + 10501920\xi^7 - 5717712\xi^6 + 2018016\xi^5 - 450450\xi^4 + 60060\xi^3 - 4290\xi^2 + 132\xi - 1$$



$$P_{12}^*(\xi) = 2704156\xi^{12} - 16224936\xi^{11} + 42678636\xi^{10} - 64664600\xi^9 + 6235515\xi^8 - 39907296\xi^7 + 17153136\xi^6 - 4900896\xi^5 + 900900\xi^4 - 100100\xi^3 + 6006\xi^2 - 156\xi + 1$$



## Références

1. *Berthelot J.M.* Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures, Masson, Paris, 1992.
2. *Hull D. and Clyne T.W.*, An introduction to composite materials, Cambridge solid state science series, 13 Aug 1996.
3. *Laroze S. et Barrau J.J.*, Mécanique des structures, Tome 4. Calcule des structures en matériaux composites, Eyrolles, Masson, 1987.
4. *Harris B.* Fatigue in composites, Science and technology of the fatigue response of fiber-reinforced plastics. Edition B. Harris, University of Bath, UK, 1983.
5. *Webster A.G.*, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Dover, New York, 1955.
6. *Sommerfeld A.*, Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, New York, 1948.
7. *Bernoulli J.Jr.*, Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers, Nova Acta Acad Petropolit, 1789, vol. 5, pp. 197–219.
8. *Germain S.*, Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces elastiques et equation general de ces surfaces, Paris, 1826.
9. *Lagrange J.L.*, Ann Chim, 1828, vol. 39, pp. 149–207.
10. *Cauchy A.L.*, Sur l'équilibre de mouvement d'une plaque solide, Exercises Math, 1828, vol. 3, p. 328.
11. *Poisson S.D.*, Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, Mem Acad Sci, 1829, vol. 8, p. 357.
12. *Navier C.L.M.H.*, Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris, 1823.
13. *Kirchhoff G.R.*, Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik, 1850, vol. 40, pp. 51–88.
14. *Lord Kelvin and Tait P.G.*, Treatise on Natural Philosophy, vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1883.
15. *Krylov A.N.*, On stresses experienced by a ship in a sea way, Trans Inst Naval Architects, 1898, vol. 40, London, pp. 197–209.
16. *Bubnov I.G.*, Theory of Structures of Ships, vol. 2, St . Petersburg, 1914.
17. *Galerkin B.G.*, Thin Elastic Plates, Gostrojisdad, Leningrad, 1933.
18. *Timoshenko S.P.*, On large deflections of circular plates, Mem Inst Ways Commun, 89, 1915.
19. *Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S.*, Theory of Plates and Shells, 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1959.
20. *Hencky H.*, Der spanngszustand in rechteckigen platten (Diss.), Z Andew Math und Mech, vol. 1, 1921.
21. *Nadai A.* Die formanderungen und die spannungen von rechteckigen elastischen platten, Forsch a.d. Gebiete d Ingeineurwesens, Berlin, Nos. 170 and 171, 1915.
22. *Foppl A.*, Vorlesungen uber technische Mechanik, vols 1 and 2, 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich, 1944, 1951.
23. *Von Karman T.*, Ef Sechler and Donnel, L.H. The strength of thin plates in compression, Trans ASME, 1932, vol. 54, pp. 53–57.
24. *Huber M.T.*, Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten, Warsawa, 1929
25. *Gehring F.*, Vorlesungen uber Mathematieche Physik, Mechanik, 2nd edn, Berlin, 1877.
26. *Boussinesq J.*, Complements étude sur la theorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, J de Math Pures et Appl , 1879, vol. 3, ses. t.5.
27. *Leknitskii S.G.*, Anisotropic Plates (English translation of the original Russian work), Gordon and Breach, New York, 1968.

28. *Reissner E.*, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J Appl Mech Trans ASME*, 1945, vol. 12, pp. A69–A77.
29. *Volmir A.S.*, Flexible Plates and Shells, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow, 1956.
30. *Panov D.Yu.*, On large deflections of circular plates, *Prikl Matem Mech*, 1941, vol. 5, No. 2, pp. 45–56.
31. *Bryan G.N.*, On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, *Proc London Math Soc*, 1981, 22, 54–67.
32. *Cox H.L.*, Buckling of Thin Plates in Compression, Rep. and Memor., 1933, No. 1553, 1554.
33. *Hartmann F.*, Knickung, Kippung, Beulung, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
34. *Dinnik A.N.*, A stability of compressed circular plate, *Izv Kiev Polyt In-ta*, 1911.
35. *Nadai A.*, Uber das ausbeulen von kreisfoormigen platten, *Zeitschr VDJ*, 1915, No. 9, 10.
36. *Meissner E.*, Uber das knicken kreisfoormigen schein, *Schweiz Bauzeitung*, 1933, 101, pp. 87–89.
37. *Southwell R.V. and Scan S.*, On the stability under shearing forces of a flat elastic strip, *Proc Roy Soc*, 1924, A105, 582.
38. *Timoshenko S.P. and Gere J.M.*, Theory of Elastic Stability, 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1961.
39. *Karman Th., Sechler, E.E. and Donnel, L.H.*, The strength of thin plates in compression, *Trans ASME*, 1952, 54, 53–57.
40. *Levy S.*, Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, NACA, Rep. No.737, 1942.
41. *Marguerre K.*, Die mittragende brieite des gedrückten plattenstreifens, *Luftfahrtforschung*, 14, No. 3, 1937.
42. *Gerard G. and Becker H.*, Handbook of Structural Stability, Part1 – Buckling of Flat Plates, NACA TN 3781, 1957.
43. *Volmir A.S.*, Stability of Elastic Systems, Gos Izd-vo Fiz-Mat. Lit-ry, Moscow, 1963.
44. *Cox H.L.*, The Buckling of Plates and Shells. Macmillan, New York, 1963.
45. *Voight W.*, Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten, *Nachr. Ges (Gottingen)*, 1893, No. 6, pp. 225–230.
46. *Ritz W.*, Theorie der transversalschwingungen, einer quadratischen platte mit frein rändern, *Ann Physic, Bd.*, 1909, 28, pp. 737–786.
47. *Timoshenko S.P. and Young D.H.*, Vibration Problems in Engineering, John Wiley and Sons., New York, 1963.
48. *Den Hartog J.P.*, Mechanical Vibrations, 4th edn, McGraw-Hill, New York, 1958.
49. *Thompson W.T.*, Theory of Vibrations and Applications, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
50. *Leissa A.W.*, Vibration of Plates, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1969.
51. *Kim C.S. and Dickinson, S.M.*, The free flexural vibration of right isotropic and orthotropic plates. *Journal of sound and vibration*, 1990, 141, 291–311,
52. *Mindlin R.D.*, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, 31–38.
53. *Levinson M.*, Free vibrations of a simply supported rectangular plate, an exact elasticity solution, *Journal of Sound and Vibration*, 1985, vol. 98, 289–298.
54. *Srinivas S. and Rao A.K.*, Bending and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids Structures*, 1970, vol. 6, 1463–1481.
55. *Chen L.W. and Doong J.L.*, Large amplitude vibration of initially stressed moderately thick plate, *Journal of Sound and Vibration*, 78 (1983) 388–497.

56. Dawe D.J. and Roufaeil O.L., Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, 69(3) (1980) 345–359.
57. Greimann L.F. and Lynn P.P., Finite element analysis of plate bending with transverse shear deformation, *Nucl. Engng Des*, 14 (1970) 223–230.
58. Rock T.A. and Hinton H., Free vibration and transient response of thick and thin plates using the finite element method,” *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 3 (1974) 57–63.
59. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S. and Wang C.M., Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory, *Journal of Sound and Vibration* 168(1) (1993) 39–69.
60. Chung J.H., Chung T.Y. and Kim K.C., Vibration analysis of orthotropic Mindlin plates with edges elastically restrained against rotation, *Journal of Sound and Vibration*, 163 (1993) 151–163.
61. Saha K.N., Kar R.C. and Datta P.K., Free vibration analysis of rectangular plates with elastic restraints uniformly distributed along the edges, *Journal of Sound and Vibration*, 192(4) (1996) 885–904.
62. Rao S.S. and Prasad A.S., Vibrations of annular plates including the effects of rotatory inertia and transverse shear deformation, *Journal of Sound and Vibration*, 42(3) (1975) 305–324.
63. Irie T., Yamada G. and Aomura S., Free vibration of a mindlin annular plate of varying thickness, *Journal of Sound and Vibration*, 66(2) (1979) 187–197.
64. Irie T., Yamada G. and Takagi K., Natural frequencies of thick annular plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 49(3) (1982) 633–638.
65. Sinha S.K., Determination of natural frequencies of a thick spinning annular disk using a numerical Rayleigh-Ritz’s trial function, *Journal of Acoustics Society of America*, 81(2) (1987) 357–369.
66. Nayar S.L., Raju K.K. and Rao G.V., Axisymmetric free vibrations of internally compressed moderately thick annular plates, *Computers and Structures*, 53(3) (1994) 759–765.
67. Han J.B. and Liew K.M., Axisymmetric free vibration of thick annular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 (1999) 1089–1109.
68. Civalek O. and Gürses M., Free vibration of annular Mindlin plates with free inner edge via discrete singular convolution method, *The Arabian Journal of Science and Engineering*, 34(1B) (2008) 81–90.
69. Pardoën G.C., Static vibration and buckling analysis of axisymmetric circular plates using finite element, *Computers and Structures*, 3 (1973) 355–375.
70. Liew K.M., Han J.B. and Xiao Z.M., Vibration analysis of circular Mindlin plates using the differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, 205(5) (1997) 617–630.
71. Lee J. and Schultz W.W., Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method, *Journal of Sound and Vibration*, 269 (2004) 609–621.
72. Srinivasan R.S. and Thiruvengkatachari V., Free vibration of transverse isotropic annular sector Mindlin plates,” *Journal of Sound and Vibration*, 101 (1985) 193–210.
73. Mizusawa T., Vibration of thick annular sector plates using semi- analytical methods, *Journal of Sound and Vibration*, 150 (1991) 245–259.
74. Xiang Y., Liew K.M. and Kitipornchai S., Transverse vibration of thick annular sector plates, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics*, 119 (1993) 1579–1599.
75. Looker J.R. and Sader J.E., Flexural resonant frequencies of thin rectangular cantilever plates. *J. Applied Mechan.*, 75 (2008) 011007-1-8.

76. Lanhe W., Hua L. and Daobin W., Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method, *Composite Structures* 68 (2005) 319–330.
77. Song Xiang, Shao-xi Jiang, Ze-yang Bi, Yao-xing Jin, Ming-sui Yang, A nth-order mesh less generalization of Reddys third-order shear deformation theory for the free vibration on laminated composite plates, *Composite Structures* 93 (2011) 299–307.
78. Liew K.M. and Liu F.L., Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates, *Journal of Sound and vibration* 230(2) (2000) 335–356.
79. Ma Y.Q. and Ang K.K. Free vibration of Mindlin plates based on the relative displacement plate element. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, 2006, p. 1021-1028.
80. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim, Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (2010) 626–633.
81. Gurses M., Civalek O., Ersoy H. and Okay Kiracioglu, Analysis of shear deformable laminated composite trapezoidal plates, *Materials and Design* 30 (2009) 3030–3035.
82. Karami G., Malekzadeh P., Mohebpour S.R., DQM free vibration analysis of moderately thick symmetric laminated plates with elastically restrained edges, *Journal of composite structures* 74 (2006) 115–125.
83. Wang S., Free vibration analysis of skew fiber-reinforced composite laminated based on first-order shear deformation plate theory, *Journal of composite and structures*, 63(3), 525–538.
84. Daia K.Y., Liua G.R., Lima K.M. and Chen X.L., A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 633–652.
85. Civalek O., Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method, *Finite Elements in Analysis and Design* 44 (2008) 725–731.
86. Kant T. and Mallikarjuna, Higher-order theory for free vibration of unsymmetrically composite laminated and sandwich plate finite element evaluations, *Journal of composite and structures*, 32(5) (1989) 1125–1132.
87. Nguyen-Van H., Mai-Duy N. and Tran-Cong T., Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element, *Journal of Sound & Vibration*, 313(12) (2008) 205–223.
88. Liew K.M., Huang Y.Q. and Reddy J.N., Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 2203–2222.
89. Asadi E., Qatu M.S., Static analysis of thick laminated shells with different boundary conditions using GDQ. *Thin-walled Structures* 51 (2012) 76–81.
90. Liew K.M., Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-RITZ method, *Journal of Sound and Vibration*, 198(3), 1996, 343–360.
91. Liew K.M., Hung K.C. and Lim M.K., Vibration of Mindlin plates using boundary characteristic orthogonal polynomials, *Journal of Sound and Vibration*, 182(1) (1995) 77–90.
92. Sari M. and Butcher E.A., Free vibration analysis of rectangular and annular Mindlin plates with undamaged and damaged boundaries by the spectral collocation method, *Journal of Vibration and Control*, 18 (11) (2012) 1722-1736
93. Khdeira A.A. and Reddy J.N., Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory, *Computers and Structures* 71 (1999) 617– 626.
94. Dimarogonas A.D, vibration of craced strustures, *Engineering facture mechanics*, 55(5) : 831-857, 1996

95. *Nikapour K.*, Diagonasis of axisymmetric ctacks in orthotropic cylindrical shell by vibration measurement, *Composites science and technologi*y, 39(1), 45-61, 1990.
96. *Ghoneam S.M.* , Dynamic analysis of open cracked laminated composite beam. *Compsites stuctures*, 32 : 3-11, 1995.
97. *Leissa A.W., McGee O.G. and Hwang C.S.*, vibration of circular plates having v-notches or sharp radial cracks, *Journal of sound and vibration*, 162,227-239, 1993.
98. *Lee H., Lim S.*, Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inestia, *Comput. Struct.*, 49 :15-18, 1993.
99. *Love A.E.H.*, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1st edn, Cambridge University Press, 1892; 4th. edn, Dover, New York, 1944.
100. *Reissner E.*, A new derivation of the equations of the deformation of elastic shells, *Am J Math*, vol. 63, No.1, pp. 177–184 (1941).
101. *Sanders J.L.*, An Improved First Approximation Theory for Thin Shells, NASA TR-R24, 1959.
102. *Koiter W.T.*, A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, *Proc. Symp. on Theory of Thin Elastic Shells* (Delft, August 1959), North-Holland, Amsterdam, pp. 12–33 (1960).
103. *Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.*, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
104. *Naghdi P.M.*, A survey on resent progress in the theory of thin elastic shells, *Appl Mech Revs*, vol, 9, pp. 365–368 (1956).
105. *Lurye, A.I.*, General theory of elastic shells, *Prikl Mat Mekh*, vol. 4, No. 4, pp. 7–34 (1940).
106. *Flügge W.*, *Stresses in Shells*, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
107. *Byrne R.*, Theory of small deformations of a thin elastic shell, *Seminar Reports in Math*, University of California, Publ in Math, N.S., vol. 2, No. 1, pp. 103–152 (1944).
108. *Novozhilov V.V. and Finkelshtein R.O.*, On the error in Kirchhoff's hypothesis in the theory of shells, *Prikl Mat Mekh*, vol. 7, No. 5, pp. 35–46 (1943)
109. *Goldenveizer A.L.*, *Theory of Thin Shells*, Pergamon Press, New York, 1961.
110. *Vlasov V.Z.*, *General Theory of Shells and its Applications in Engineering*, NASA TT F99, 1964.
111. *Reissner E.*, Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, *J Math Phys*, vol. 31, pp. 109–119 (1952).
112. *Naghdi P.M.*, On the theory of thin elastic shells, *Q Appl Math*, vol. 14, pp. 369–380 (1957).
113. *Kraus H.*, *Thin Elastic Shells*, John Wiley and Sons, New York, 1967.
114. *Leissa A.W.*, *Vibrations of Shells*, NASA SP-288, Washington, DC, 1973.
115. *Reissner E.*, On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution, *Proc Symp Appl Math*, 1950, vol. 3, pp. 27–52.
116. *Naghdi P.M. and Nordgren R.P.*, On the nonlinear theory of shells under the Kirchhoff hypothesis, *Q Appl Math*, 1963, vol. 21, pp. 49–60.
117. *Sanders J.L.*, Nonlinear theories for thin shells, *Q Appl Math*, 1963, vol. 21, pp. 21–36.
118. *Koiter W.T.*, The stability of elastic equilibrium (Chapter 5: Shell theory for finite deflections), *Diss, Tech Rept, AFFDL-TR-70-25*, Air Force System Command, WrightPatterson AFB, 1970.
119. *Mushtari Kh.M. and Galimov K.Z.*, *Nonlinear Theory of Thin Shells*, The Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
120. *Simmonds J.G. and Danielson D.A.*, Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors, *J Appl Mech*, 1972, vol. 39, pp. 1085–1090.

121. *Beltrami E.*, Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, Mem R, Acad Sci di Bologna, 1881.
122. *Lecorn, L.*, Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, J. de L'Ecole Polytechnique, c. XLVIII.
123. *Reissner H.*, Spannungen in Kugelschalen, Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig, 1912.
124. *Sokolovskii V.V.*, Momentless shells of revolution, Prikl Mat Mekh, 1938, vol. 1, No. 3, pp. 81–88.
125. *Pucher A.*, Über den Spannungszustand in gekrümmten flächen, Beton u Eisen, 1934, vol. 33, pp. 298–304.
126. *Donnel L.H.*, Beams, Plates, and Shells, McGraw-Hill, New York, 1976.
127. *Mushtari Kh.M.*, Certain generalizations of the theory of thin shells, Izv Fiz Mat O-va pri Kazan Un-te, 1938, vol. 11, No. 8.
128. *Marguerre K.*, Zur theorie der gekrümmten platten grosser formänderung, Proc 5th Int Congr Appl Mech, Cambridge, Mass., 1939, pp. 93–101.
129. *Meissner E.*, Das elastizitätsproblem für dünne schalen von ringflächen, Kugel- und Kegelvj-Schr Naturf Ges, Zurich, 1915, vol. 60, pp. 23–47.
130. *Hoff N.J.*, Thin circular conical shells under arbitrary loads, J Appl Mech, 1955, vol. 22, pp. 557–562.
131. *Flügge W.*, Die Stabilität der Kreiszyinderschale, Ing-Arch, 1932, vol. 3, pp. 463–506.
132. *Wissler H.*, Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen, Diss, Zurich, 1916.
133. *Parkus H.*, Die Grundgleichungen der allgemeinen zylinderschale, Osterr Ing-Arch, 1951, vol. 6, pp. 30–35.
134. *Dishinger F.*, Die strenge berechnung der kreiszyinderschale in ihrer anwendung auf die Zeiss-Dywidag-Schalen, Beton u. Eisen, vol. 34, pp. 257–264, 283–294.
135. *Hoff N.J.*, Boundary value problems of thin-walled circular cylinders, J Appl Mech, 1954, vol. 21, pp. 343–350.
136. *Novozhilov V.V.*, Theory of Thin Elastic Shells, 2nd edn, P. Noordhoff, Groningen, 1964.
137. *Geckeler J.*, Die festigkeit achsensymmetrischer schalen, Ing Arch, Bd. 1, 1930.
138. *Lorentz R.*, Die nichtachsensymmetrische knickung dünnwandiger hohlzylinder, Phys Z, 1911, vol. 12, pp. 241–260.
139. *Timoshenko S.P.* and *Gere J.*, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
140. *Mises R.*, Der kritische aubendruck für alldeits belastete zylindrischer rohre, Festschr Zum 70 Geburtstag von prof A Stodola, Zürich, 1929, pp. 418–432.
141. *Mushtari Kh.M.* and *Sachenkov A.V.*, A stability of cylindrical and conical shells of circular cross sections under axial compression and external normal pressure, Prikl Mat Mekh, 1954, vol. 18, No. 6, pp. 667–674.
142. *Donnel L.H.* and *Wan C.C.*, Effect of imperfection on the buckling of thin cylinders and columns under axial compression, J Appl Mech, 1950, vol. 17, No. 1, pp. 73–83.
143. *Zoelly R.*, Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale, Diss, Zurich, 1915.
144. *Von Karman T.* and *Tsien H.S.*, The buckling of thin cylindrical shells under elastic compression, J Aeronaut Sci, 1941, vol. 8, pp. 303–312.
145. *Koiter W.T.*, Buckling and Postbuckling Behavior of a Cylindrical Panel under Axial Compression, Nat Luchtvaart Laboratory, Report No. 476, Amsterdam, 1956.
146. *Budansky B.*, Buckling of clamped shallow spherical shells, Proc IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Amsterdam, 1960, pp. 64–94.
147. *Kaplan A.* and *Fung Y.C.*, A Nonlinear Theory of Bending and Buckling of Thin Elastic Shallow Spherical Shells, NASA TN 3212, 1954.
148. *Flügge W.*, Static und Dynamik der Schalen, Julius Springer, Berlin, 1934.

149. *Epstein P.S.*, On the theory of elastic vibrations in plates and shells, *J Math Phys*, 1942, vol. 21, pp. 198–209.
149. *Ruotolo R.A.*, comparison of some thin shell theories used for the dynamic analysis of stiffened cylinders. *J Sound Vibration* (2001) 243:847.
150. *Civalek O.*, Free vibration analysis of composite conical shells using the discrete singular convolution algorithm. *Steel Comp Struct* (2006) 6:353.
151. *Civalek O.*, Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: discrete singular convolution (DSC) approach. *J Comp Appl Math* (2007) 205:251.
152. *Lim C.W., Liew K.M. and Kitipornchai S.*, Free vibration of pretwisted, cantilevered composite shallow conical shells, *AIAA Journal*, 1997, 35(2).
153. *Kabir H.R.H.*, Free vibration response of shear deformable antisymmetric cross-ply cylindrical panel, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 217(4), 601–618.
154. *Kabir H.R.H. and Chaudhuri R.A.*, Free vibration of shear flexible anti-symmetric angle-ply doubly curved panels, *International Journal of Solids and Structures*, 1991, 28(1), 17–32.
155. *Kabir H.R.H. and Chaudhuri R.A.*, Gibbs-phenomenon-free Fourier solution for finite shear-flexible laminated clamped curved panels, *International Journal of Engineering Science*, 1994, 32(3), 501–520.
156. *Noseir A. and Reddy J.N.*, Vibration and stability analysis of cross-ply laminated circular shells, *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 157(1), 139–159.
157. *Soldatos K.P.*, Refined laminated plate and shell theory with applications, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(1), 109–129.
158. *Shu C.*, An efficient approach for free vibration analysis of conical shell, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1996, 38, 935–949.
159. *Shu C.*, Free vibration analysis of composite laminated conical shells by generalized differential quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 194(4), 587–604.
160. *Shu C. and Du H.*, Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM, *Journal of composite part B: Engineering*, 1997, 28B, 267–274.
161. *Ganapathi M. and Haboussi M.*, Free vibrations of thick laminated anisotropic noncircular cylindrical shells. *Comp Struct*, 2003, 60:125–33.
162. *Ganapathi M., Patel B.P. and Pawargi D.S.*, Dynamic analysis of laminated crossply composite non-circular thick cylindrical shells using higher-order theory. *Int J Solids Struct*, 2002, 39, 5945–5962.
163. *Leissa A.W., Lee J.K. and Wang A.J.*, Vibration of cantilevered shallow cylindrical shells of rectangular platform, *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 78(3), 311–328.
164. *Leissa A.W. and Kadi A.S.*, Curvature effects on shallow shell vibrations, *Journal of sound and vibration*, 1971, 16(2), 173–187.
165. *Soldatos K.P. and Hadjigeorgiou V.P.*, Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels, *Journal of sound and vibration*, 1990, 137(3), 369–384.
166. *Asadi E., Wanga W. and Qatu M.S.*, Static and vibration analyses of thick deep laminated cylindrical shells using 3D and various shear deformation theories, *Composite Structures*, 2012, 94, 494–500.
167. *Asadi E. and Qatu M. S.*, Free vibration of thick laminated cylindrical shells with different boundary conditions using general differential quadrature, *Journal of vibration and control*, 2012, 19(3), 356–366.
168. *Hosseini-Hashemi Sh. and Fadaee M.*, On the free vibration of moderately thick spherical shell panel-A new exact closed-form procedure, *Journal of Sound and vibration*, 2011, 330, 4352–4367.

169. *Chern Yeong-Chyuan and Chao C.C.*, Comparison of natural frequencies of laminates by 3-D theory, part II: Curved panels, *Journal of Sound and vibration*, 2000, 230(5), 1009–1030.
170. *Yu S.D., Cleghorn W.L. and Fenton R.G.*, On the accurate analysis of free vibration of open circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 188(3), 315–336.
171. *Buchanan G.R. and Rich B.S.*, Effect of boundary conditions on free vibration of thick isotropic spherical shells, *Journal of vibration and control*, 2002, 8(3), 389-403.
172. *Viola E., Tornabene F. and Fantuzzi N.*, Static analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories, *Composite Structures*, 2013, 101, 59–93.
173. *Viola E., Tornabene F. and Fantuzzi N.*, General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels, *Composite Structures*, 2013, 95, 639–666.
174. *Tornabene F.*, Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2011, 200, 931–952.
175. *Bardell N.S., Dunsdon J. M. and Langley R.S.*, Free vibration of thin, isotropic, open, conical panels, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 217(2), 297–320.
176. *Zhao X., Li Q., Liew K.M. and Ng T.Y.*, The element-free hp-Ritz method for free vibration analysis of conical shell panels, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295, 906–922.
177. *Zienkiewicz O.C.*, *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London, 1977, pp. 3-4.
178. *Arpaci V.S.*, *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley. Reading. Mass., 1966. pp. 59-83.
179. *Courant R.* Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1943, vol. 49, pp. 1-23.
180. *Gauss C.F.*, *Carl Friedrich Gauss Werks*, vol. VII, Gottingen. Germany. 1871.
181. *Lord Rayleigh*, *On the Theory of Resonance*. *Trans. Roy. Soc. London*, 1870, vol. A161, pp. 77-118.
182. *Ritz W.*, *Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik*. *J. Reine Angew. Math.*, 1909, vol. 135. pp. 1-61.
183. *Galerkin B.G.*, *Series Solution of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates*, *Vestn. Inzh, Tekh.* 1915, vol. 19, pp. 897-908.
184. *Richardson L.F.*, *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems*, *Trans. Roy. Soc.*, London, 1910, vol. A210, pp. 307-357.
185. *Liebman H.*, *Die angenäherte Ermittlung: harmonischen, functionen und konformer Abbildung*. *Sitzungsber. Math. Physik Kl. Bayer Akad. Wiss. Munchen*, 1918, vol. 3, pp. 65-75.
186. *Southwell R.V.*, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, Oxford, England, 1946.
187. *Varga R.S.*, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
188. *Zienkiewicz O.C.*, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill (UK), London, 1977, p. 569,.
189. *Levy S.*, *Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*, *J. Aeronaut. Sci*, 1953, vol. 20, no. 7, pp. 449-454.
190. *Schuerch H.U.*, *Delta Wing Design Analysis*, *Nat. Aeron. Meeting. Soc. Automot. Eng.* Los Angeles, 1953, Paper No. 141.
191. *Argyris J.H.*, and *Kelsey S.*, *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth, 1960.
192. *Turner M.J.*, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, *J. Aeronaut. Sci.* 1956, vol. 23., no. 9, pp. 805-823.

- 193.** *Clough R.W.*, The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electron. Computation, Pittsburgh, Pa.. September 1960.
- 194.** *Wittrick W.H.* Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory, International Journal of solids and structures, 1987, 23, 441-464.
- 195.** *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates, Journal of Mathematical Physics, 1944, 23, 184-191.
- 196.** *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1945, 12, A69-A77.
- 197.** *Mindlin R.D.* Influence of the rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, Trans. ASME Journal of applied Mechanics, 1951, 18, 31-38.
- 198.** *Love A.*, On the small vibrations and deformations of thin elastic shells. Philosophical Transactions of the Royal Society, 1888, 179:491.
- 199.** *Reissner E.*, Note on the expressions for the strains in a bent, thin shell. American Journal of Mathematics, 1942, 64:768-772.
- 200.** *Green A. and Zerna W.*, Theoretical elasticity. Courier Dover Publications, New York, 1954.
- 201.** *Wunderlich W.*, Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Heft 4, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau, Technische Hochschule Hannover, 1966.
- 202.** *Koiter W.*, A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Proceedings of the IUTAM Symposium, North-Holland Publication Company, Amsterdam, 1960, pages 12-33.
- 203.** *Koiter W.*, A systematic simplification of the equations in the linear theory of thin shells. Kon. Ned. Academie der Wetenschappen, Holland, 1961, 64:612.
- 204.** *Greene B.E., Strome D.R. and Weikel R.C.*, Application of the stiffness method to the analysis of shell structures. In Proc. Aviation Conf. Of American Society of Mechanical Engineers, ASME, Los Angeles, CA, March 1961.
- 205.** *Guo Y.* Global-local model coupling for composite shell structures in the framework of isogeometric analysis. Compos Struct 2017, 176: 617-629.
- 206.** *Kiendl J., Hsu M.C., Wu M.C.H., and Reali A.*, Isogeometric Kirchhoff-Love shell formulations for general hyperelastic materials. Comput Method Appl M. 2015, 291: 280-303
- 207.** *Lei Z., Gillot F. and Jezequel L.*, Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. Eur. J. Mech. A/Solids, 2015, 54: 105-119.
- 208.** *Echter R., Oesterle B. and Bischoff M.*, A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. Comput. Method. Appl. M., 2013, 254: 170-180.
- 209.** *Dornisch W., Klinkel S. and Simeon B.*, Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. Comput. Method. Appl. M., 2013, 253: 491-504.
- 210.** *Zhen Lei, Frederic Gillot and Louis Jezequel*, An isogeometric Reissner-Mindlin shell element based on mixed grid, Advances in Mechanical Engineering, 2018, Vol. 10(4) 1-12.
- 211.** *Dong Tang, Longquan Sun, Xiongliang Yao and Xuefeng Yue*, Free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix, Advances in Mechanical Engineering, 2016, Vol. 8(3) 1-21.