

Nomenclature

Symboles	Nomination	Unités
$\bar{\sigma}_c$	le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy.	N/m ²
\vec{f}	le vecteur des répartitions volumiques de forces.	
$\vec{Y}(M) = \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}$	l'accélération du point M , dont le champ des déplacements.	m/S ²
I	Matrice unité.	
(λ, μ)	Coefficient de Lamé.	
ν	Coefficient de Poisson.	
E	Module de Young.	GPa
$\{\sigma\}$	vecteur des contraintes.	N/m ²
$[D]$	matrice d'élasticité.	
$\{\varepsilon\}$	vecteur des déformations	N/m ²
A	l'aire de la section droite.	m ²
G	le module d'élasticité transversal.	
k_y	le coefficient d'aire cisailée.	
T_y	l'effort tranchant.	N
M	masse de système.	Kg
ρ_f	masse volumique du fluide.	Kg/m ³
ρ	masse volumique du solide.	Kg/m ³
\vec{n}	lanormale extérieure unitaire.	
Γ_{SF}	le domaine interaction fluide-structure.	m ²
\vec{u}	la vitesse du fluide.	m/s
p	la pression	Pa
\bar{I}	la matrice identité.	
$\bar{\sigma}$	le tenseur des contraintes visqueuses.	N/m ²
Φ	potentiel du vitesse.	
Γ_L	surface libre	m ²
Ω_F	domaine du fluide.	m ²
Ω_S	domaine du solide.	m ²
\int	intégrale.	
$\{ \}$	matrice colonne : vecteur	
$[]$	matrice (utilisée aussi pour les références).	
$v(z, t)$	la flèche.	m
$\langle N_s \rangle$	fonction de forme.	
$\{a\}_e$	déplacement nodaux.	m
$[K]_e$	matrice de rigidité élémentaire.	K _g /S ²
$[M]_e$	matrice de masse élémentaire.	Kg
Γ_∞	frontière à l'infini.	

Nomenclature

Γ_R	frontière fini.	
$\{\Phi\}_n$	vecteur des potentiels nodaux élémentaires	
$\{p\}$	vecteur des pressions latérales des poutres	Pa
$[FS]$	matrice globale de couplage fluide-structure.	
$[FS]^T$	matrice globale transposée de couplage fluide-structure.	
$[M_a]$	matrice de masse ajoutée	Kg
$[H_r]$	matrice du système en tenant compte des conditions de pression nulles sur la surface libre	
(r_0, z_0)	les coordonnées du centre de l'élément quadratique Q_4	m

Liste des tableaux

<u>Tableau VI-1</u> : Convergence des fréquences (Hz) en fonction du nombre d'éléments.....	59
<u>Tableau VI-2</u> : Valeurs des fréquences naturelles (Hz).....	60
<u>Tableau VI-3a</u> : Variation des fréquences pour une même valeur d'inertie pour des sections différentes.....	61
<u>Tableau VI-3b</u> : Variation des fréquences pour une même valeur de surface pour des sections différentes.....	62
<u>Tableau VI-4</u> : Variation des fréquences en fonction du rapport L/r pour une poutre de section circulaire.....	64
<u>Tableau VI-5</u> : Variation des fréquences en fonction du nombre de masse $R_m = \rho_m / \rho_f$	66
<u>Tableau VI-6</u> : Variation des fréquences pour différents matériaux.....	67
<u>Tableau VI-7</u> : Variation des fréquences pour différents matériaux.....	68

Liste des figures

<u>Figure I-1</u> : couplage structure-fluide et couplage structure fluide-fluide.....	7
<u>Figure I-2</u> : Solide élastique immergé dans un fluide.....	7
<u>Figure I-3</u> : Couplage SPH/FEM.....	8
<u>Figure I-4</u> : Couplage SPH/FEM/FEM.....	8
<u>Figure I-5</u> : Couplage FEM/FEM.....	9
<u>Figure II.1</u> : Élément de poutre dans le plan XY.....	12
<u>Figure II.2</u> : Schématisation générale du problème structure.....	15
<u>Figure II.3</u> : Déplacement de la section droite d'abscisse x.....	16
<u>Figure II.4</u> : Hypothèse de Bernoulli.....	18
<u>Figure II.5</u> : Schématisation générale du problème structure.....	25
<u>Figure II.6</u> : Schématisation générale du problème structure-fluide.....	25
<u>Figure III.1</u> : Schématisation générale d'un problème de couplage mécanique fluide-structure.....	28
<u>Figure III.2</u> : Schématisation générale du problème fluide-structure.....	29
<u>Figure III.3</u> : Principe de maillage du problème couplé dans le plan (r, z)	36
<u>Figure IV.1</u> : Poutre vertical immergé dans un fluide.....	42
<u>Figure IV.2</u> : élément poutre à deux nœuds.....	44
<u>Figure IV.3</u> : maillage du domaine fluide.....	47
<u>Figure V.1</u> : Schéma de maillage et de numérotation de la structure.....	52
<u>Figure VI-1</u> : poutre console partiellement immergée.....	58
<u>Figure VI -2</u> : courbes de convergence.....	59
<u>Figure VI -3a</u> : Variation des fréquences en fonction du rapport des surfaces pour différentes sections pour la même valeur d'inertie, (a) mode 1, (b) mode 2.....	61
<u>Figure VI -3b</u> : Variation des fréquences en fonction du rapport d'inertie des différentes sections pour la même valeur de surface, (a) mode 1, (b) mode 2.....	63

Figure VI- 4 :Tracés des graphes des quatre modes pour les rapports $L/r= 2, 2.2, 4, 5, 10$ (a : mode1, b : mode2, c : mode3, d : mode4).....65

Figure VI-5: variation des fréquences en fonction du rapport de masse volumique de l'acier / masse volumique du cuivre et laiton.....67

Figure VI-6:Variation des fréquences en fonction du rapport de masse ($R_m=rhos/rhof$) et du rapport hauteur d'immersion sur la longueur de la poutre H/L (a) :mode1,(b) :mode.....69

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I: Revubibliographique.....	4
Chapitre II : Formulation mathématique	
II.1 Introduction.....	11
II.2 Equations de solide.....	11
II-2-1 Equations locales.....	12
II-2-2 Conditions aux limites.....	15
II-3 Théorie des poutres.....	16
II- 3-1 Généralités.....	16
II- 3-2 Equations d'équilibre.....	17
II.4 Mécanique des fluides	18
II.5 Couplage.....	24
Chapitre III :Modélisatuon par élément finis et couplage	
III.1 Introduction.....	28
III.2 Méthode des éléments finis pour l'analyse vibratoire d'une structure couplée en présence d'un fluide incompressible	28
III.3 Les éléments finis en mécanique du solide	30
III.4 Méthode des éléments finis en mécanique des fluides.(Forme faible de la méthode des résidus pondérés).....	33
III.5 Couplage éléments finis-éléments finis.....	35
Chapitre IV:Cas d'une poutre émergée dans un fluide	
IV.1 Etude des vibrations d'une poutre immergée dans un fluide.....	42
IV.1.1 Equation du problème couplé	43
IV.1.1.1 Equations du comportement de poutre.....	43

IV.1.1.2Equations du fluide.....	43
IV.2Modélisation numérique et couplage.....	44
IV.2.1 Discrétisation de la poutre.....	44
IV.2.2 Discrétisation du milieu fluide.....	45
Chapitre V:Organisation de la programmation	
V.1 Introduction.....	51
V-2Description du programme.....	51
V-3 Résolution.....	53
V-4 Organigramme.....	55
Chapitre VI :Résultat et interprétation	
VI.1 Introduction.....	57
VI-2 Description de la poutre.....	57
VI-3 Validation du programme.....	58
VI-4 Influence des paramètres géométriques et physiques sur les fréquences propres de vibration de la poutre.....	60
Conclusion.....	70
Références bibliographiques.....	71

Résumé

L'étude présentée dans ce mémoire concerne l'analyse du comportement dynamique d'une poutre immergée totalement ou partiellement dans le fluide.

Le mouvement de la poutre dans le fluide conduit à une interaction fluide-structure qui donne une augmentation de la masse du système dite masse ajoutée.

Les lois de comportement ont été établies par la relation déplacements-contraintes pour la poutre et les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour le fluide avec la condition de non glissement au niveau de l'interface.

Le couplage défini par l'interaction fluide-structure nécessite la caractérisation de conditions aux limites qui décrivent le dialogue entre le solide et le fluide au niveau de l'interface. La modélisation de la poutre et le fluide est faite par la méthode de l'élément fini.

Les équations différentielles du mouvement de la structure sans contact avec le fluide ont été établies. La détermination des équations de couplage nous a permis de calculer la masse ajoutée générée par le fluide, qui nous a permis d'aboutir à un système d'équations différentielles qui caractérise le comportement dynamique des deux milieux.

Les fréquences propres de la poutre immergée correspondant aux quatre premiers modes sont calculées à l'aide d'un programme élaboré sous Matlab.

Après avoir étudié la convergence et validé le programme avec plusieurs littératures, on a étudié plusieurs exemples, cette étude nous a permis de déterminer l'influence des paramètres physiques et géométriques de la poutre immergée.

Parmi ces cas d'étude, nous décrivons la variation de la longueur d'immersion de la poutre dans le fluide, des rapports de la longueur sur le diamètre de la poutre du rapport de la masse volumique du solide sur celle du fluide, longueur de la poutre sur la hauteur d'immersion et en même temps rapport masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide et en fin le rapport d'inertie des différentes sections pour une même surface, puis le rapport de surface de différentes sections pour une même inertie.

Mots clés : éléments finis, couplage, interaction, masse ajoutée, équation différentielle, poutre immergée.

Abstract

The study presented in this memory relates to the analysis of the dynamic behavior of a beam immersed completely or partially in the fluid.

The movement of the beam in the fluid leads has an interaction fluid-structure which gives an increase in the mass of the system known as added mass.

The laws of behavior were established by the relation displacement-constraints for the beam and the conservation equations of the mass and the quantity of the movement for the fluid with the condition of nonslip on the level of the interface.

The coupling defines by the interaction fluid-structure requires the characterization of boundary condition which describes the dialogue between the solid and the fluid on the level of the interface. The modeling of the beam and the fluid are made by the method the finite element.

The differential equations of the movement of the structure without contact with the fluid were established. The determination of the equations of coupling enabled us to calculate the added mass generated by the fluid, which enabled us to lead to a system of differential equations which characterizes the dynamic behavior of the two mediums.

The Eigen frequencies of the immersed beam corresponding to the fuor first modes are calculated using a program worked out under Matlab.

After having studied convergence and having validated the program with several literatures, one studied several examples, this study enabled us to determine the influence of the physical and geometrical parameters of the immersed beam.

Among these cases of study, we describe the variation in the length of immersion of the beam in the fluid, the reports/ratios length on the diameter of the beam of the ratio of the density of the solid on that of fluid, length of the beam on the height of immersion and at the same time density report/ratio of the solid on the density of the fluid and in end the ratio of inertia of the various sections for the same surface, then the report/ratio of surface of different section for the same inertia.

Key words:finite elements, coupling, interaction, added mass, differential equation, immersed beam.

ملخص

الدراسة التي قدمت في هذه المذكرة تتعلق بتحليل السلوك الديناميكي لعتبة مغمورة جزئيا او كليا في سائل. حركة العتبة في السائل تؤدي الى تفاعل عتبة- سائل الذي يعطينا تزايد في كتلة النظام و التي تسمى الكتلة المضافة قوانين السلوك الحركي معطاة بعلاقة الاجهاد المتعلقة بتنقل العتبة و معادلة حفظ الكتلة و كمية السائل مع عدم وجود حركة الانزلاق على مستوى الواجهة.

الاقتران المعرف بالتفاعل سائل-عتبة يتطلب توصيف الشروط الحدية التي تصف الحوار بين الصلب و السائل على مستوى الواجهة.

يتم وضع نماذج السائل و الصلب بواسطة طريقة العناصر المتناهية.

قد انشئت المعادلات التفاضلية لحركة الصلب دون اتصاله مع السائل.

الاقتران يسمح لنا بتحديد المعادلات لحساب الكتلة المضافة الناتجة عن السوائل الامر الذي يسمح لنا بتحقيق نظام من المعادلات التفاضلية التي تميز السلوك الديناميكي للوسطين.

الترددات الطبيعية للعتبة المغمورة توافق الانماط الاربعة الاولى المحسوبة بمساعدة برنامج *ماتلاب*

بعد دراسة التقارب و تطبيق البرنامج درسنا امثلة عديدة و هذا سمح لنا بالتعرف على تاثير المعاملات الفيزيائية و الهندسية لعتبة مغمورة.

من بين الحالات المدروسة نحدد طول اعمار العتبة في السائل. نسب الطول على قطر العتبة و نسب الكتلة الحجمية على نظيرتها للسائل. طول العتبة على ارتفاع الاغمار و في نفس الوقت نسب الكتل الحجمية للصلب على الكتلة الحجمية للسائل و في الاخير نسبة العطالة لاشكال مختلفة لنفس المساحة ثم نسبة المساحة لمختلف الاشكال لنفس العطالة.

المفاتيح

العناصر المتناهية. الاقتران. التفاعل. الكتلة المضافة. المعادلات التفاضلية. العتبة المغمورة.

Introduction générale

L'interaction fluide-structure est un domaine vaste il concerne un ensemble important de systèmes mécaniques ou de phénomènes naturels. Ces phénomènes apparaissent Lorsque on est en présence de deux milieux différents ; c'est dans le domaine naval ou le milieu fluide correspond à l'eau, que nous avons une large gamme de cas d'interaction allant du sous marin aux bateaux. Si le fluide considéré est de l'air, nous sommes dans le domaine de l'aérodynamique

Ces différents problèmes sont donc complexes à étudier. Certaines simplifications peuvent cependant être mises en œuvre. Dans notre cas il s'agit d'étudier les caractéristiques dynamiques d'une poutre partiellement ou totalement immergée soumise à des vibrations. Le fluide considéré est un fluide parfait incompressible et irrotationnel.

Dès l'aube de l'industrialisation du monde moderne, le problème de l'interaction fluide-structure est apparu dans de très nombreuses applications telle que l'aviation, les constructions navales et les off-shores etc. Cette branche hybride entre la mécanique des fluides et celle des structures permet de quantifier les interactions fluide-structure.

Les phénomènes sont d'autant plus significatifs aujourd'hui qu'il est nécessaire et important de pouvoir les modéliser correctement dès la phase avant projet.

Ces phénomènes d'interaction entre les fluides et la structure sont nombreux. Ils peuvent être classés par la nature des échanges entre les deux milieux :

- Couplage thermique : le fluide et le solide échangent de la chaleur.
- Couplage chimique : le solide et le fluide réagissent entre eux.
- Couplage mécanique : le solide et le fluide échangent des énergies mécaniques.

Notre étude fait partie de ce dernier type d'interaction, nous étudions le comportement élastique d'une structure « poutre » immergée. Il faut noter que la résolution de ce genre de problème de couplage dépend du milieu que l'on veut privilégier (le fluide ou bien la structure), le transfert d'informations se fera du milieu secondaire vers le milieu primaire en d'autres termes des échanges d'énergie mécanique se produisent dans les deux sens :

INTRODUCTION GENERALE

- Le fluide exerce des efforts sur la structure en mouvement, ce qui modifie la dynamique de la structure.
- La structure impose des déplacements sur le fluide et modifie ainsi les caractéristiques de l'écoulement du fluide.

Ce couplage s'opère au niveau de l'interface, il induit sur la structure une certaine force d'inertie et en utilisant le principe de la continuité des contraintes et des vitesses à l'interface fluide-structure, on montrera que l'effet du fluide sur le solide génère une masse supplémentaire que l'on appelle « masse ajoutée » qui est liée au système mécanique et se déplace solidairement avec lui. Autrement elle sera additionnée à la masse du solide. Il est nécessaire d'établir une formulation adaptée pour la résolution des équations différentielles régissant le système structure-fluide, en utilisant des méthodes numériques. Notre choix fut porté sur le couplage « *élément finis- éléments finis* », et finalement on est ramené à résoudre le système des équations différentielles aux valeurs propres.

Dans le présent travail la structure sera considérée comme milieu primaire, ainsi les variables relatives au fluide seront éliminées au profit des variables de la structure vibrante.

Notre travail se divise en quatre parties principales:

Dans le premier chapitre, seront exposées les équations physiques générales régissant la dynamique d'un corps solide, suivi d'un rappel sur la théorie des poutres, ainsi que les lois de la mécanique des fluides. Par la suite nous poserons les hypothèses de petits déplacements et petites déformations.

Dans le second chapitre, nous procédons à La formulation du problème vibratoire d'une poutre en établissant le système des équations différentielles. Les matrices de masse et de rigidité sont calculées par intégration exacte en se basant sur la théorie classique et en utilisant la méthode des éléments finis.

La méthode de couplage établie nous a permis de calculer la masse ajoutée due au fluide. En additionnant cette grandeur à la masse du solide dans le système d'équations différentielles relatives à la poutre non immergée, nous obtenons un nouveau système d'équations différentielles permettant la caractérisation dynamique de la poutre immergée dans le fluide, aboutissant finalement à un problème vibratoire aux valeurs propres.

INTRODUCTION GENERALE

Dans le chapitre quatre, nous avons présenté une description du programme élaboré sous **MATLAB**.

Et enfin dans le dernier chapitre nous avons validé notre programme en montrant que l'élément poutre utilisé converge. Puis nous avons étudié l'influence des paramètres géométriques et de masses à savoir le rapport rayon sur longueur, hauteur d'immersion sur la longueur, et rapport de la masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide, sur le comportement dynamique de la poutre.

Nous terminons par une conclusion générale et des perspectives futures à ce travail.

Chapitre

II



CHAPITRE I

Couplage fluide-structure, domaine de la mécanique aux multiples finalités, regroupe deux grandes types de problèmes : ceux où le fluide est en écoulement par rapport à la structure et ceux où fluide et structure évoluent autour d'une configuration statique initiale.

L'interaction structure-fluide apparaît systématiquement dès qu'une structure se trouve en contact avec un fluide.

Le mouvement des particules du fluide, au voisinage de la structure génère une variation de pression.

L'étude de couplage a enrichi considérablement la littérature scientifique et technique depuis plus d'un demi-siècle et ce parallèlement au développement et à l'élaboration des grandes défis technologiques qui ont marqué cette période (conquête de l'espace, développement des moyens de transport aériens...).

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Léonard avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard EULER et Jacques Bernoulli qui émettent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique.

Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

Une formulation exacte du problème de poutre était étudié en premier lieu en terme d'équations générales d'élasticité par Pochhammer(1876)et Chree(1889)[1].

La théorie de poutre de Rayleigh (1877) [2] fournit une amélioration marginale sur la théorie d'Euler Bernoulli en incluant les effets de la rotation de la section transversale. En conséquence, elle corrige partiellement la surestimation des fréquences normales dans le modèle d'Euler Bernoulli. Cependant, les fréquences normales sont encore surestimées.

Les premiers investigateurs incluent Davies (1937) [3], qui a étudié les effets de l'inertie rotatoire sur une poutre encasté-libre.

Timoshenko (1921, 1922) [4, 5] a proposé une théorie de poutre qui ajoute l'effet du cisaillement comme l'effet de la rotation à la poutre d'Euler Bernoulli. Le modèle de Timoshenko est une amélioration importante pour les poutres non-minces et pour des réponses à haute fréquence où le cisaillement ou les effets rotatoires ne sont pas négligeables. Après Timoshenko, plusieurs auteurs ont obtenu les équations de fréquence. Pour le problème interaction fluide-structure il y'avait deux approches théoriques la théorie de Wagner qui dérive de celle de VonKarman et la théorie non linéaire des similitudes Dobrovolskaya, Pierson, Cumberbatch,.

Bien qu'il soit difficile d'étendre ces théories à des cas très complexes, elles donnent des résultats de références sur lesquels les résultats des méthodes numériques peuvent compter pour leurs validations.

Pour les méthodes numériques, les difficultés résident dans le suivi de la surface libre et dans la gestion de l'interaction entre la formulation fluide et la formulation structure. Pour cette dernière, une formulation Lagrangienne en élément finis est suffisante pour bien la modéliser [6]. Depuis la fin des années 50, le phénomène de ballotement dans les réservoirs des engins spatiaux et aériens préoccupe le National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) américain qui dès 1958 effectue des campagnes d'essais pour évaluer l'importance de ce phénomène sur la stabilité en vol des avions [7].

En 1962, Abranson qui fait figure de pionnier dans l'étude du ballotement, parallèlement les Russes : Rapoport, Moiseyev et Romyantsev effectuent des travaux traduits et publiés en 1968, concernant la stabilité des structures contenant un fluide [8].

Parmi les précurseurs de l'analyse des phénomènes hydro-élastique, citons par exemple Zienkiewicz et al en 1968, pour ses études concernant les barrages avec l'une des premières introductions au concept de matière de masse ajoutée [9]. Belytshko pour ses travaux relatifs au domaine nucléaire dès 1977. Citons également les méthodes

CHAPITRE I

numériques développées par Coppolino en 1976 dans le logiciel MSC/NASTRAN. Pour le calcul hydro-élastique par éléments finis des lancers axisymétriques.

En 1966, Tong propose une première formulation variationnelle symétrique adaptée aux méthodes éléments finis, comportait cependant certaines approximations.

Kruszewski a obtenu les trois modes antisymétriques d'une poutre à porte-faux et trois modes antisymétriques et symétriques d'une poutre libre. Traill-Nash et Collier ont donné un traitement théorique assez complet aussi bien que des résultats expérimentaux pour le cas d'une poutre uniforme.

Nous comptons utiliser la méthode des éléments finis (MEF) pour l'analyse de la structure et de déterminer la masse ajoutée de fluide pour nous permettre de réaliser le couplage. Cette méthode a été utilisée et développée par Peseux [10].

Jean-François Sigrist, Christian Lainé et Bernard Peseux [11],[12] utilise une analyse modale d'une structure industrielle couplée avec un fluide, avec les techniques numériques de calculs couples fluide/structure. La nature de la structure et axisymétrique en géométrie et, la modélisation du problème est réalisée par les éléments finis axisymétriques développés en série de Fourier par la discrétisation en éléments finis.

La modélisation est effectuée par un code de calcul implanté dans Matlab pour permettre l'analyse modale de la structure, la comparaison se fait par ANSYS à des résultats de calcul Matlab avec les résultats de calculs obtenus avec le code généraliste Ansys, pour l'étude de problèmes couples en pression/déplacement avec développement en série de Fourier, à partir de ça trouver les valeurs propre par Matlab et le code de calcul Ansys.

Myung Jo Jhung, Wal Taekim et Yong Ho Ryu [13] ont déterminé la fiabilité de cylindres ou de réservoirs avec anneaux remplis de liquide, sur les caractéristiques modales en considérant l'effet d'interaction fluide-structure. Ils utilisent la méthode des éléments finis pour la structure et la méthode de masse ajoutée à la masse de la structure pour simplifier la résolution du problème et obtenir sous forme de donnée le déplacement et la fréquence naturelle de remplissage du cylindre.

Le couplage entre un fluide et une structure est la base de beaucoup de phénomènes. Parmi ces phénomènes, nous pouvons citer la déformation de la structure, qui peut

trouver dans beaucoup de domaines, même dans le corps humain qui est une structure élastique complexe. On trouve plusieurs définitions sur le couplage fluide-structure, soit mathématique ou physique, c'est-à-dire la formulation algébrique ou physique sur les bases des données du problème à résoudre.

Le couplage est l'étude de l'interaction créée au niveau de l'interface entre deux propriétés physiques différentes ou de même propriété physique, comme solide-solide, fluide-structure, fluide-fluide.

Les figures suivantes montrent les différents cas de couplage fluide structure qu'on peut trouver.

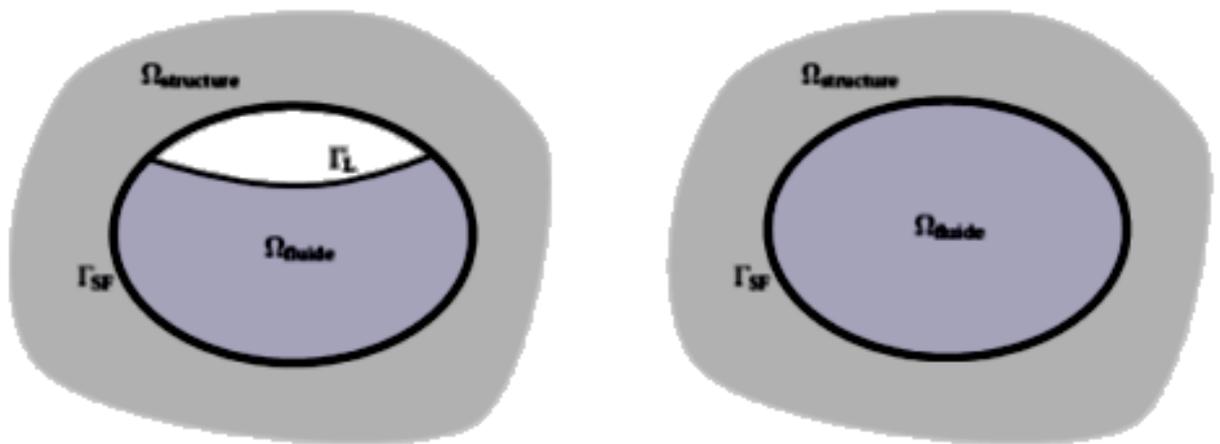


Figure I-1: couplage structure-fluide et couplage structure- fluide – fluide.

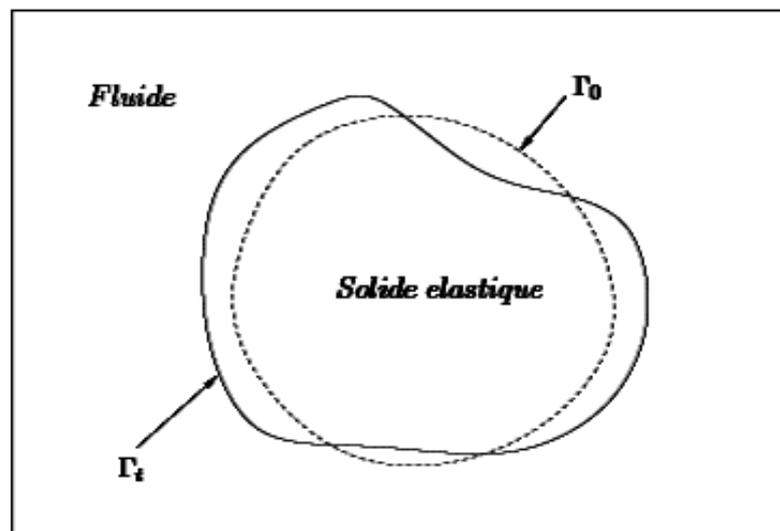


Figure I-2: Solide élastique immergé dans un fluide.

Parmi les méthodes utilisées pour la prise en compte du couplage, nous pouvons citer la méthode par pénalisation.

La méthode SPH (SmoothedParticleHydrodynamics), qui est une méthode par pénalisation se caractérise par la masse des particules et par deux grandeurs de discrétisation, la distance entre les particules, diamètre de la particule.

Le couplage SPH/FEM repose sur une méthode de contact par pénalisation. Les particules fluides sont les "nœuds" esclaves. La particule pénètre dans un élément structure d'une distance d (voir Figure 3), la force appliquée est proportionnelle à cette distance: $f = k \times d$ dans laquelle k est la raideur par pénalisation.

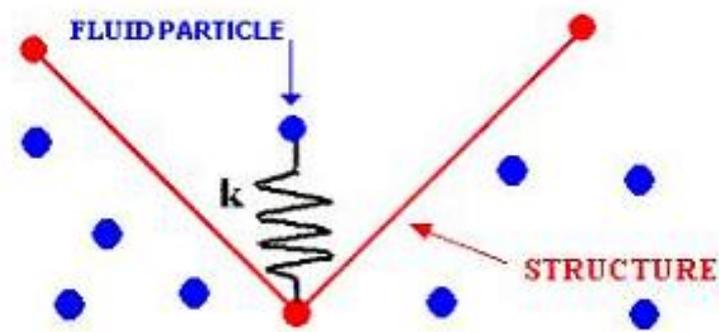


Figure I-3: Couplage SPH/FEM.

Ce couplage est utilisé pour gérer l'interaction fluide/structure entre un maillage Lagrangien, pour la structure, et un maillage Eulérien pour le fluide. Le maillage Lagrangien étant immergé dans la grille Eulérienne.

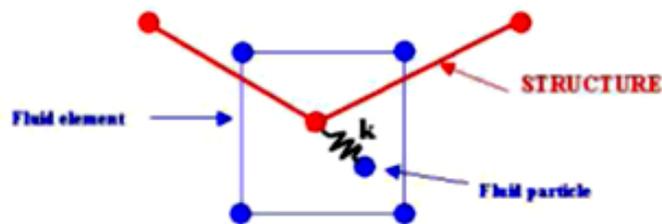
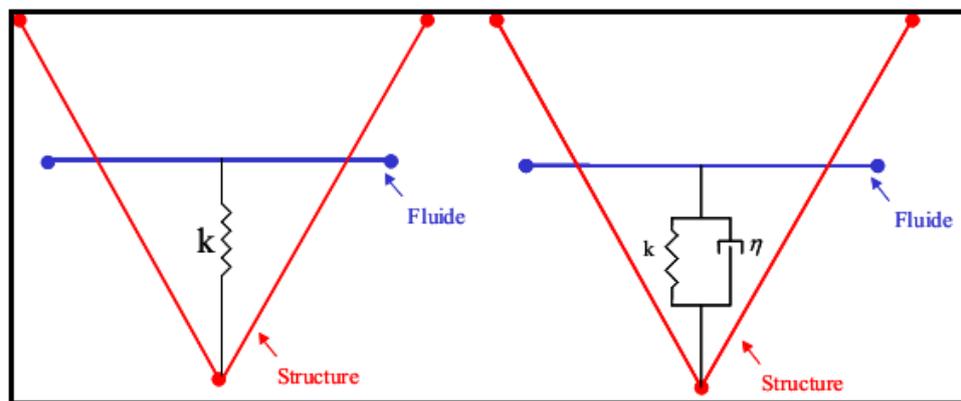


Figure I-4: Couplage SPH/FEM/FEM.

La distance relative entre les positions Lagrangiennes des nœuds mais la distance relative entre une particule fluide et un point interne de l'élément de la structure. Les quantités

aux points internes telles que les forces d'interaction, les masses ou les vitesses sont reliées aux quantités nodales par les fonctions de forme NI.

Parmi les travaux nous avons aussi la méthode de FEM/FEM par pénalisation qui se caractérise par une discrétisation par éléments finis de la structure et du fluide et l'interface qui est caractérisée par une raideur entre deux nœud sous forme de contact sans frottement ni glissement (voir Figure .5).



FigureI- 5: Couplage FEM/FEM.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est plus naturelle que la méthode des pénalités, mais nécessite un temps de calcul plus élevé.

L'idée générale est de trouver, en respectant la contrainte spatiale issue des positions des nœuds esclaves et maîtres, la force de contact vérifiant au mieux l'équation de conservation de quantité de mouvement.

Chapitre

III

II-1. Introduction

L'étude du mouvement d'un corps fait introduire divers paramètres qui le décrivent, d'où la nécessité d'examiner la conservation de certaines quantités pendant ce mouvement, comme la masse, la quantité de mouvement et le moment cinétique. Dans ce contexte, et face à un problème typique de la mécanique des solides, on s'intéresse au calcul des déplacements, des déformations et des contraintes. La contrainte est le paramètre qui caractérise l'interaction mécanique d'un corps avec son environnement. Cette contrainte est la cause du mouvement, d'où la nécessité d'une formulation mathématique. Plusieurs théories ont été développées et sont actuellement utilisées en ingénierie. Chacune de ces approches vise à modéliser certains aspects spécifiques du comportement des matériaux.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description mathématique des équations générales qui traduisent le comportement du solide, représenté par les deux modèles d'états de contraintes planes ou de déformations planes, ces équations sont appliquées dans les cas des poutres. La deuxième partie est consacrée aux équations régissant le milieu fluide, suivie d'une troisième consacrée au couplage des deux milieux.

II-2. Equations de solide

II.2.1 Equations locales :

On prend l'hypothèse des petites perturbations en élasticité linéaire [14], on se place dans un repère galiléen ou absolu. A chaque instant t , pour toute partie Ω_S d'un système matériel \mathcal{S} , le torseur dynamique de Ω_S est égal au torseur des forces extérieures s'exerçant sur Ω_S .

- les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma}_c + \vec{f} = \rho_S \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (2-1)$$

Où :

- $\bar{\sigma}_c$ est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy,

- \vec{f} est le vecteur des répartitions volumiques de forces,
- $\vec{Y}(M) = \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}$ est l'accélération du point M .

dont le champ des déplacements est:

$$\vec{U}(M) = u(M)\vec{e}_1 + v(M)\vec{e}_2 + w(M)\vec{e}_3 \quad (2-2)$$

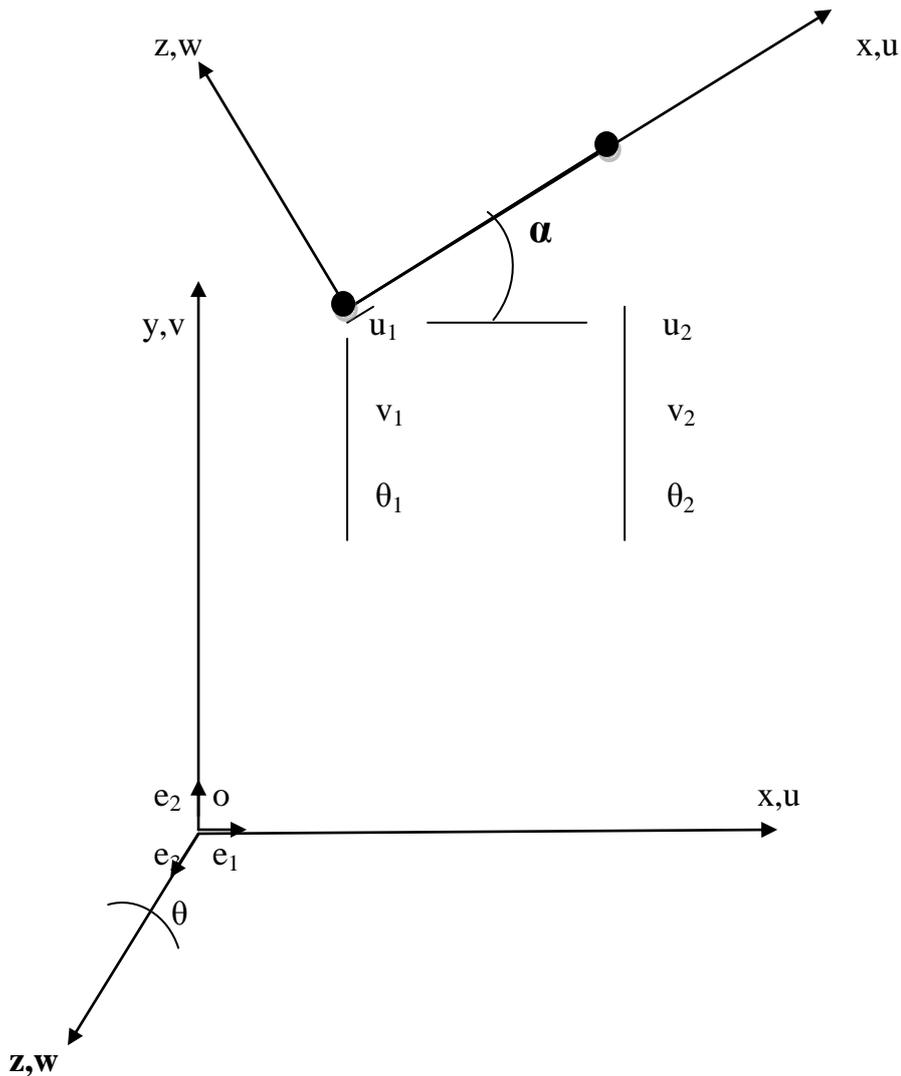


Figure II-1 :Élément de poutre dans le plan XY

- Lois de comportement

Le tenseur des déformations associé est donné par [14]

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad} \vec{U}}(M) + (\overline{\text{grad}})^t \vec{U}(M) \right) \quad (2-3)$$

Où le gradient du déplacement est un tenseur symétrique.

Les déformations de la structure induisent un champ de contraintes dans la structure, représentées par le tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(U)$, l'hypothèse du comportement élastique de la structure permet d'écrire la relation entre les déformations et les contraintes sous la forme suivante (Loi de Hooke) :

$$\sigma_{ij}(U) = \lambda \varepsilon_{kk}(U) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(U) \quad (2-4)$$

D'où les équations définissant la loi de comportement

$$\varepsilon = \frac{-\lambda}{2\mu(2\lambda + 2\mu)} \text{tr} \sigma I + \frac{\sigma}{2\mu} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma I + \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma \quad (2-5a)$$

Ou son inverse

$$\sigma = \lambda \text{tr} \varepsilon I + 2\mu \varepsilon = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)} \text{tr} \varepsilon I + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon \quad (2-5b)$$

I : Matrice unité

(λ, μ) : Coefficient de Lamé,

ν Coefficient de Poisson

E : Coefficient de Young

Le problème plan à deux dimensions est déduit à partir du problème à trois dimensions donné par [15].

Toutes les variables sont indépendantes du troisième axe et ne sont fonction que des deux autres coordonnées x, y ; on parle alors d'état de contraintes planes ou de déformations planes.

Dans les deux cas de figure, états de contraintes planes [15] et de déformations planes, nous pouvons tirer profit des situations les caractérisant pour rendre les calculs plus faciles.

Etat de déformations planes:

Le modèle s'applique à un corps de section constante quelconque, infiniment long, conventionnellement d'axe noté \mathbf{z} , encasté à ses deux extrémités. Le corps est soumis à un chargement orthogonal à \mathbf{z} , uniforme sur toute sa longueur. Dans ces conditions, aucune dilatation suivant l'axe \mathbf{z} n'est possible : chaque tranche ne se déforme que dans son plan. Dans ce cas, le déplacement dans la direction \mathbf{z} peut être considéré comme nul. Les dérivées des déplacements dans cette même direction sont nulles :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Par contre il existe des contraintes σ_{zz} qui contrebalancent l'effet de Poisson c'est-à-dire la tendance à la dilatation suivant l'axe \mathbf{z} . la contrainte qui retient chaque tranche dans le plan vaut:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

 **Etat de contraintes planes:**

Une structure plane mince est en état de contraintes planes si les charges sont appliquées dans son plan. L'épaisseur de la structure est toujours très petite par rapport aux deux autres dimensions et est symétrique de part et d'autre du plan (x, y) , appelée surface neutre.

Les composantes du vecteur contraintes $\{\sigma\}$ associé au tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}_c$ sont :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\} \tag{2-6}$$

Ainsi les contraintes $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy}$ deviennent nulles. La déformation ϵ_{zz} n'est pas nulle par effet de poisson. Elle peut être calculée en utilisant l'hypothèse $\sigma_{zz} = 0$

$$\epsilon_{zz} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \quad (2-7)$$

La loi de **Hooke** reliant le vecteur de contraintes au vecteur de déformations est:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (2-8)$$

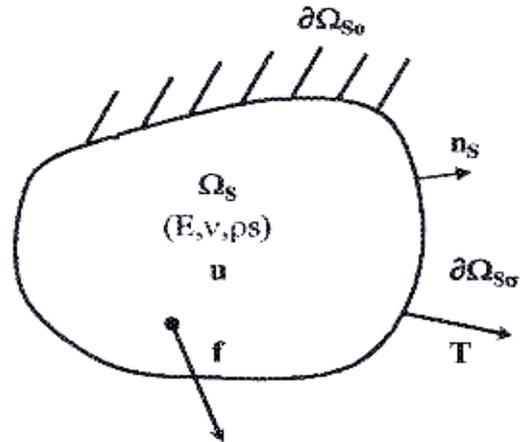
Ces deux approches sont basées sur des hypothèses fondamentalement différentes et ne s'appliquent donc pas aux mêmes structures. Elles sont déterminées à partir des équations (2-5a) et (2-5b).

II.2.2. Conditions aux limites:

La résolution des équations régissant le comportement d'une structure nécessite l'introduction de conditions aux limites de la structure [16].

Pour un solide occupant un domaine Ω_S dans \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega_S$, on peut diviser la surface $\partial\Omega_S$ en deux parties, tel que $\partial\Omega_S = \partial\Omega_{S0} \cup \partial\Omega_{S\sigma}$ (Figure (I-1)).

Figure (II-2) : Schématisation générale du problème structure



Le mouvement de la structure est décrit ainsi par un champ de déplacement $U = (U_i)$ défini en tout point x du domaine Ω_S . Les déformations sont représentées par le tenseur des déformations noté $\epsilon(U) = \{\epsilon_{ij}(U)\}$ et les contraintes par le tenseur σ_{ij} :

$$\sigma(U) = \{\sigma_{ij}(U)\}.$$

Avec les hypothèses précédentes, la relation fondamentale de la dynamique pour le milieu continu s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_S U_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(U)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad (2-9)$$

Avec la relation liant déplacement/déformation et la loi de comportement déformation/contraintes données respectivement par (2-3) et (2-4), l'équation locale précédente est assortie des conditions aux limites suivantes :

Rapport-gratuit.com
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

$$\vec{u}_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S_0} \quad (2-10)$$

$$\sigma_{ij}(U)n_j^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S_\sigma} \quad (2-11)$$

Qui traduisent le fait que la structure est bloquée sur $\partial\Omega_{S_0}$ et libre d'effort sur $\partial\Omega_{S_\sigma}$.

II-3. Théorie des poutres

II.3.1. Généralités :

Par définition une poutre est un solide engendré par une surface plane A qui peut être constante ou non la ligne moyenne est appelée axe neutre de la poutre [17].

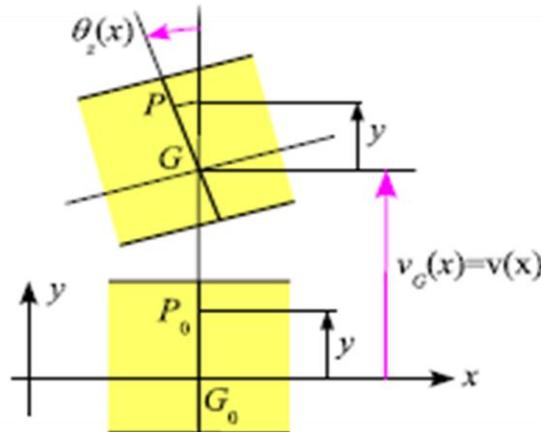


Figure (II-3) : Déplacement de la section droite d'abscisse

Compte tenu des hypothèses précédentes, le champ de déplacements s'écrit

$$\begin{cases} u(x, y) = -y\theta_z(x) \\ v(x, y) = v_G(x) = v(x) \end{cases} \quad (2-12)$$

Les déformations :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2-13}$$

Les contraintes

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ey \frac{\partial \theta_z}{\partial x}\tag{2-14}$$

$$\sigma_{xy} = Gk_y \gamma_{xy} = Gk_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right)\tag{2-15}$$

- A est l'aire de la section droite,
- $G = E/2(1 + \nu)$ est le module d'élasticité transversal,
- k_y est le coefficient d'aire cisailée. Ce coefficient traduit le fait que le cisaillement n'est pas uniforme dans la section, Il est défini par

$$\frac{T_y^2}{Ak_y} = \int_A \sigma_{xy}^2 dA\tag{2-16}$$

Avec T_y représente l'effort tranchant déduit de la théorie d'élasticité.

La contrainte normale dans la section droite est égale à

$$\sigma_{xx} = -\frac{y}{I_z} M f_z\tag{2-17}$$

II.3.2. Equations d'équilibre

La poutre porte une force et un couple répartis d'intensité linéique respectivement P_y et m_c .

L'équilibre d'un morceau de poutre compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ est régi par les équations d'équilibre données par les expressions (2-18) et (2-19)

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} + p_y = \rho A \ddot{v}\tag{2-18}$$

$$\frac{\partial M f_y}{\partial x} + T_y + m_z = \rho I_z \ddot{\theta}_z\tag{2-19}$$

Ces équations peuvent s'écrire en fonction des déplacements comme suit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G A k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) \right) + p_y = \rho A \ddot{v} \quad (2-20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E I_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) + G A k_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \right) + m_z = \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (2-21)$$

Ce modèle est dit modèle de Timoshenko. Si la poutre est longue, on admet l'hypothèse de **Bernoulli**: la section droite reste normale à la fibre moyenne après déformation (Figure (II-3)), d'où la relation cinématique

$$\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-22)$$

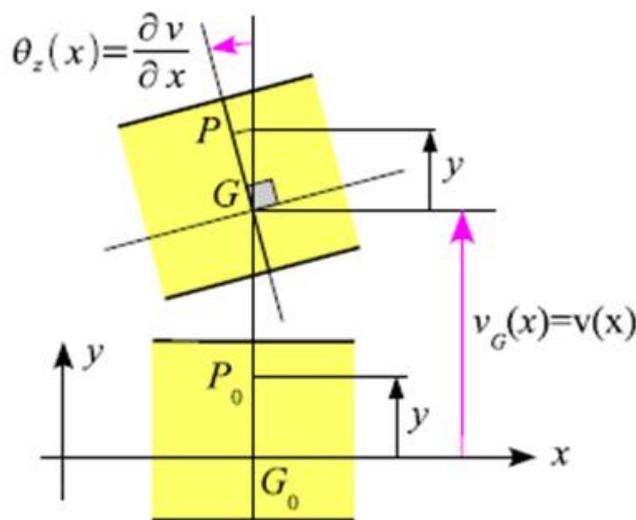


Figure (II-4) : Hypothèse de Bernoulli

II.4. Mécaniques des fluides

Les équations générales de la dynamique des fluides sont présentées dans ce chapitre. Ces équations résultent des lois de conservation de la physique qui sont : conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement (seconde loi de Newton) et conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique).

Conservation de la masse

Le principe de la conservation de la masse fait partie du fondement de la mécanique classique. Il exprime la constance de la masse d'un système matériel, suivi dans son mouvement.

La masse d'un système est donnée par

$$M = \int_{\Omega} \rho_f d\Omega \quad (2-23)$$

Selon le principe énoncé, on a

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (2-24)$$

En appliquant le théorème de transport, il résulte que

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_f d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_f (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (2-25)$$

Où \vec{n} est la normale extérieure unitaire à la frontière du domaine Γ et \vec{u} est la vitesse du fluide.

En appliquant le théorème de la divergence, on écrit

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_f \vec{U} \right] d\Omega = 0 \quad (2-26)$$

L'intégrant doit être nul puisque le volume Ω est arbitraire. On a donc

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_f \vec{U} = 0 \quad (2-27)$$

Conservation de la quantité de mouvement

Le principe de la quantité de mouvement traduit la seconde loi de Newton, appliqué à un système matériel : pour tout système matériel, le taux de variation par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement est égal au tenseur de forces extérieures appliquées sur ce système.

D'après la mécanique classique, le tenseur des quantités de mouvement relatif à un tel système, est exprimé par

$$I = \int_{\Omega} \rho_f \vec{U} d\Omega \quad (2-28)$$

Les forces extérieures agissant sur le volume Ω sont les forces de volumes et les forces de surface

$$\sum F = \int_{\Omega} \rho_f \vec{f} d\Omega + \int_{\Gamma} (-p \bar{I} + \bar{\sigma}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2-29)$$

Le principe énoncé exprime que

$$\frac{DI}{Dt} = \sum F \quad (2-30)$$

En appliquant le théorème de transport, il résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_f \vec{U} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_f \vec{u} (\vec{U} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Omega} \rho_f \vec{f} d\Omega + \int_{\Gamma} -p \bar{I} \cdot \vec{n} d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2-31)$$

p est la pression, \bar{I} est la matrice identité, $\bar{\sigma}$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho_f \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{U} \times \vec{U}) + \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma} - \rho_f \vec{f} \right] d\Omega = 0 \quad (2-32)$$

L'intégrand doit être nul puisque le volume Ω est arbitraire. On a donc

$$\frac{\partial \rho_f \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{U} \times \vec{U}) + \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma} - \rho_f \vec{f} \quad (2-33)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par

$$\bar{\sigma} = \mu \left(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^t \right) \quad (2-34)$$

En introduisant l'opérateur rotationnel l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \wedge \vec{U} \right) = \vec{f} + \overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma}_c \quad (2-35)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction de la pression p , de la viscosité μ et du tenseur gradient des taux de déformations.

$$\bar{\sigma}_c = -p \bar{I} + 2\mu \bar{T}_D \quad (2-36)$$

Dans le cadre de notre étude nous prenons les hypothèses simplificatrices suivantes :

L'écoulement considéré est un fluide parfait, irrotationnel et incompressible

❖ Fluide parfait

Dans un fluide parfait la viscosité est nulle, donc l'équation (2-36) devient (2-37)

$$\overline{\overline{\sigma}}_c = -\overline{\overline{p}} \mathbf{l} \quad (2-37)$$

❖ Mouvement irrotationnel

Le champ de vitesse de l'écoulement est irrotationnel quand

$$\overline{\overline{\text{rot}} \vec{U}} = \mathbf{0} \quad (2-38)$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel de vitesse Φ puisse exister : $\vec{U} = \overline{\overline{\text{grad}}} \Phi$, et par conséquent un écoulement irrotationnel est appelé écoulement potentiel.

Et dans ces conditions l'équation d'Euler devient

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{U}^2 \right) = \vec{f} + \overline{\overline{\text{div}}} \overline{\overline{\sigma}}_c = \vec{f} + \overline{\overline{\text{grad}}} p \quad (2-39)$$

❖ Les forces volumiques dérivent d'un potentiel

L'action du champ de pesanteur conduit à :

$$\vec{f} = -\rho_f g \vec{k} = -\overline{\overline{\text{grad}}}(\rho_f g z) \quad (2-40)$$

Et après intégration, l'équation d'Euler dans le domaine fluide donne l'équation de Bernoulli

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{U}^2 + g z + \frac{p}{\rho_f} = C(t) \quad (2-41)$$

Les hypothèses de petits mouvements du fluide

Donc en négligeant \vec{u}^2 devant les autres termes, l'équation de Bernoulli conduit à

L'équation de Lagrange linéaire qui en choisissant $C(t) = 0$ est

$$\mathbf{p} = \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2-41)$$

❖ **Hypothèse de compressibilité**

➤ Si le fluide est incompressible, implique une vitesse de propagation des perturbations de pression faibles dans l'écoulement (ondes acoustiques) d'où les équations de l'écoulement potentiel décrit par les variables \vec{U} , ϕ et \vec{p} et l'équation de continuité se transforme en équation de Laplace

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (2-42)$$

L'écoulement étudié dans ce travail est supposé évoluer de manière iso-volumique. Cela signifie que l'on peut négliger les effets de dilatation thermique dus aux variations de température, ainsi que les variations de volume liées à des compressions/détentes associées à des changements de pression.

Pour simplifier, les champs de températures seront supposés uniformes et constants.

L'échauffement résultant des frottements étant négligeable, cela impose à la température des frontières d'être uniforme et indépendante du temps.

Par suite, puisque ces écoulements ne sont le siège d'aucun frottement ni échange de chaleur, ils sont isentropiques.

Les effets de variations des pressions sur la masse volumique peuvent alors être négligés.

$$\text{L'incompressibilité impose } \mathbf{div} \vec{U} = 0 \quad (2-43)$$

Avec la conservation de masse cela conduit à

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (2-44)$$

Qui signifie que la masse volumique d'une particule fluide suivie pendant une période de temps dt reste constante.

Bien que cette contrainte n'interdise pas à ρ de varier d'une particule à une autre, on supposera que l'écoulement provient d'une région de l'espace constituant soit un réservoir, soit un domaine infini à l'amont, où la masse volumique est uniforme.

Ainsi ρ aura la même valeur pour toutes les particules fluides, et donc sera donnée, uniforme et indépendante du temps.

Le principe fondamental de la dynamique est alors traduit par l'équation (2-38) dans laquelle on néglige les termes de frottement, et qui simplifie en l'équation d'EULER :

$$\rho_f \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho_f \vec{g} - \overrightarrow{grad p} \quad (2-45)$$

Elle correspond à une loi de comportement réduite à

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = -p(\vec{x}, t) \delta_{ij} \quad (2-46)$$

Qui exprime la contrainte

$$Ti(\vec{x}, t, \vec{n}) = -p(\vec{x}, t) \delta_{ijn} j = -p(\vec{x}, t) ni \quad (2-47)$$

Qui est normale à cet élément, par conséquent les efforts tangentiels de contact (frottements) sont exclus

La masse volumique étant connue on dispose alors des équations suivantes

$$\rho_f \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho_f \vec{g} - \overrightarrow{grad p} \quad (2-48)$$

C'est-à-dire d'un système de quatre équations indépendantes, pour les quatre inconnues que sont les trois composantes $U(\vec{x}, t)$ du champ de vitesse et le champ de pression $p(\vec{x}, t)$.

Pour exploiter ce système, il est a priori nécessaire de lui associer les conditions aux limites suivantes

Condition de surface libre sur Γ_L

Compte tenu des hypothèses retenues pour l'étude du fluide donnera

- $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ sur le plan $z = 0$ (surface libre au repos), lorsque les mouvements de surface libre sont de faibles amplitudes, et que le fluide

incompressible est étudié dans la gamme des basses fréquences des ondes de gravité telles que les fréquences de houle)

- $\Phi = 0$ sur le plan $z = 0$ dans le cas d'un fluide incompressible en hautes fréquences ou bien dans le cas d'un fluide compressible.
- $\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ sur le plan $z = 0$ dans le cas d'un fluide incompressible en très basses fréquence. Dans ce cas, la surface libre est équivalente à une paroi rigide.

✚ Conditions à l'infini :

Dans le cas d'une étude en milieu non borné, la condition à l'infini affichée est la condition de **Sommerfeld** (non réflexion des ondes à l'infini)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r^\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad \alpha = 0.5 \text{ en } 2D \text{ et } \alpha = 1 \text{ en } 3D \quad (2-49)$$

Et :

$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = \Phi_1$ Φ_1 potentiel incident, dû à la houle par exemple ou nul dans le cas où il n'y a pas d'écoulement.

✚ Condition de glissement sur les parois du solide

La condition de Dirichlet imposée, implique que les particules fluide, ne pénètrent pas les parois de solides, c'est-à-dire qu'il y'a continuité des vitesses normales des particules fluides et solides

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad} \Phi} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (2-50)$$

Et $\vec{v}_s \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n}$

Où \vec{n} est la normale extérieure au domaine structure, donc intérieure au domaine fluide, cette condition peut également être écrite en termes de pression

$$-\rho_f \vec{y}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (2-51)$$

II.5. Couplage

L'interaction structure-fluide exprime le problème mécanique du contact d'un corps solide et d'un fluide. Cette étape essentielle de notre problème nécessite la

caractérisation de conditions aux limites qui décrivent le dialogue entre le solide et le fluide au niveau de l'interface.

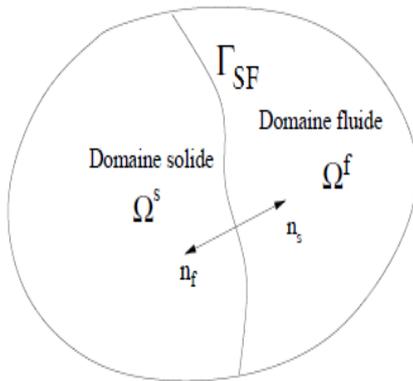


Figure (II-5) : Schématisation générale du problème structure-fluide

A l'interface, figure (2-5) le lien entre vecteurs normaux est défini de telle manière que

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}}_s = -\vec{\mathbf{n}}_f \quad (2-52)$$

On rappelle que le problème étudié est celui d'une structure élastique couplée avec un fluide incompressible, parfait et irrotationnel, la situation étant décrite par la figure (2-16).

La structure occupe le domaine Ω_S , de frontière $\partial\Omega_S$; le fluide occupe le domaine Ω_F , de frontière $\partial\Omega_F$. les deux domaines sont en contact sur $\Gamma_{SF} = \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F$. Les éléments de frontière $\partial\Omega_{S_0}$, $\partial\Omega_{S_\sigma}$, $\partial\Omega_{F_0}$, et $\partial\Omega_F$ désignent respectivement, les portions de frontière du domaine de la structure à déplacement imposé, à effort imposé, et les portions de frontière du domaine fluide à pression et gradient de pression imposé.

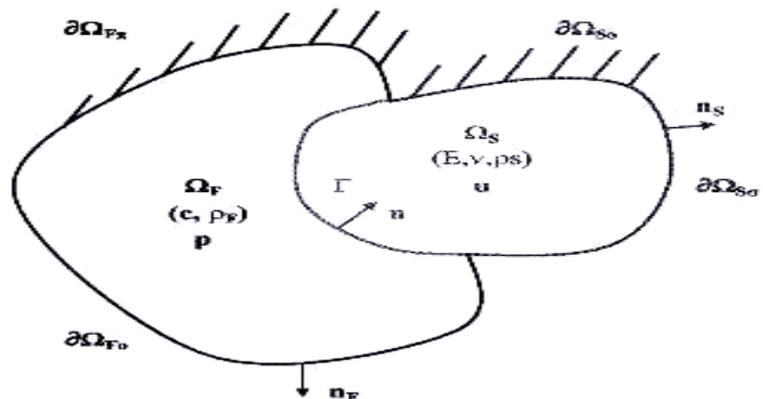


Figure (II-6) : Schématisation générale du problème structure-fluide

Le couplage des deux milieux est modélisé par les équations qui expriment la continuité des composantes normales du tenseur des contraintes et du champ d'accélération à l'interface structure-fluide.

La condition équation (2-47), peut également être écrite en termes de pression

$$\sigma_{ij}(U)n_j^s = pn_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_{SF} \quad (2-53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} n_j = \omega^2 \rho_F U_j n_j \quad \text{sur} \quad \Gamma_{SF} \quad (2-54)$$

La relation (2-53) traduit le fait que le fluide exerce des efforts de pression sur la structure au milieu de l'interface structure-fluide, dans la direction normale sur l'interface.

La relation (2-54) traduit le fait que la structure impose une accélération au fluide au niveau de l'interface structure-fluide dans la direction normale à l'interface.

Le problème consiste à la recherche de fonctions scalaires satisfaisant l'équation de Laplace pour les hypothèses citées ci-dessus lorsque le fluide incompressible est limité par une surface libre déformable (onde de gravité).

Chapitre

III

Rapport-gratuit.com 

LE NUMERO 1 MONDIAL DU MEMOIRE

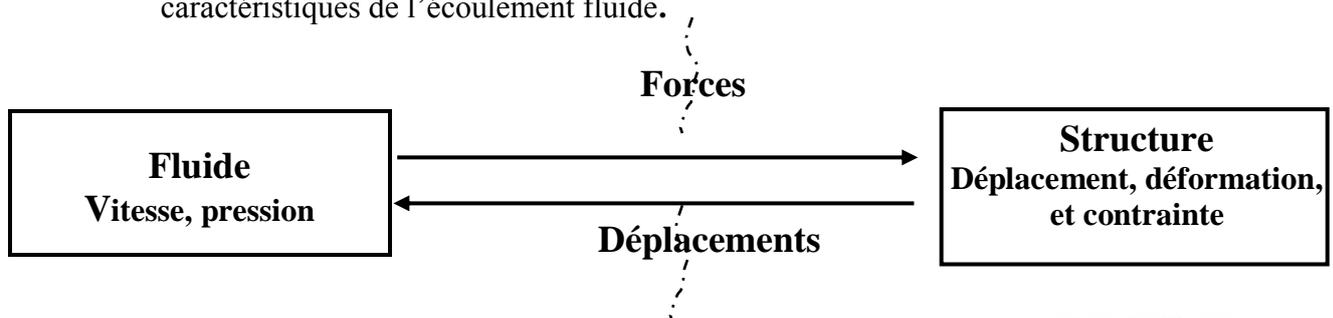
III.1. Introduction

Les phénomènes liés au couplage fluide-structure apparaissent à des degrés divers d'importance, pour toute structure en contact avec un fluide, on entend par problème de couplage fluide-structure mécanique tout problème dans lequel ;

- Les milieux solides et fluides échangent des énergies d'origine mécanique.
- Les phases solides et fluides sont distinctes.
- Les milieux solides et fluides n'échangent pas de masse.

Le solide et le fluide occupant des domaines de l'espace notés respectivement Ω_S et Ω_F sont couplés dans le sens suivant au niveau de la zone de contact entre le fluide et la structure (ou interface fluide-structure Γ), des échanges d'énergie mécanique se produisent dans les deux sens. [23 ; 43].

- Le fluide exerce des efforts sur la structure en mouvement ce qui modifie la dynamique de la structure.
- La structure impose des déplacements sur le fluide et modifie ainsi les caractéristiques de l'écoulement fluide.



Interface fluide-structure

Figure: (III-1) Schématisation générale d'un problème de couplage mécanique

fluide-structure

III.2. Méthode des éléments finis pour l'analyse vibratoire d'une structure couplée en présence d'un fluide incompressible

On s'intéresse à la description des vibrations linéaires d'une structure en présence d'un fluide incompressible.

On commence par rappeler les équations de l'élasticité linéaire décrivant les petits mouvements d'une structure autour d'une position de référence.

les notions de base dynamique des structures sont proposés dans les ouvrages de références [24,25, 26].

On présente ensuite la méthode des éléments finis utilisée pour résoudre le problème structure dans les ouvrages des références [30,28, 29].

On s'intéresse à la description des vibrations linéaires d'une structure couplée avec un fluide incompressible.

On commence par rappeler les équations décrivant le problème couplé, les termes de couplage traduisant l'action du fluide sur la structure (effort de pression imposé au niveau de l'interface fluide-structure) et l'action de la structure sur le fluide (accélération normale imposée au niveau de l'interface fluide-structure).

On expose ensuite la méthode de résolution éléments finis du problème, utilisant un couplage entre la discrétisation éléments finis de la structure.

La discrétisation de termes de couplage conduit à la définition d'un opérateur de couplage fluide-structure, pris d'un opérateur de masse ajoutée.

❖ Contexte d'étude et hypothèses générales

Le problème étudié est celui d'une structure élastique linéaire couplée avec un fluide incompressible, la situation étant décrite par la figure (III-2)

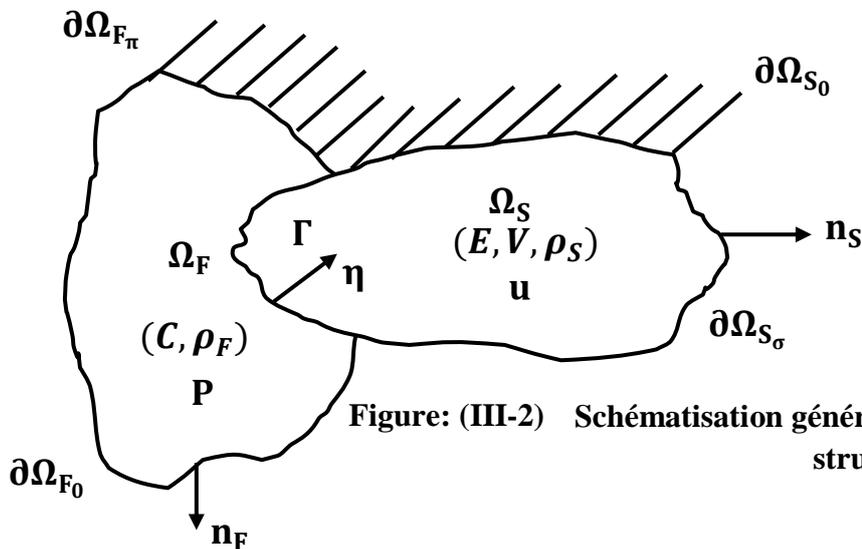


Figure: (III-2) Schématisation générale du problème fluide-structure.

La structure occupe le domaine Ω_S , de frontière $\partial\Omega_S$

Le fluide occupe le domaine Ω_F , de frontière $\partial\Omega_F$.

Les deux domaines sont en contact sur $\Gamma = \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F$.

Les éléments de frontière $\partial\Omega_{S_0}$, $\partial\Omega_{S_\sigma}$, $\partial\Omega_{F_0}$ et $\partial\Omega_{F_\pi}$ désignent respectivement comme dans les sections précédentes.

III-3 Les éléments Finis en mécanique du solide

La relation numérique des problèmes posés par la formulation utilisé de façon classique

Formulation général

Nous rappelons seulement dans ce paragraphe les étapes de la discrétisation par élément finis de la forme variationnelle « principe des travaux virtuels » en élasto-dynamique [27, 29, 32].

Le domaine Ω_S est divisé en sous-domaines élémentaires Ω_e de formes simples sur lesquels il est aisé de définir, à partir de l'approximation polynomiale généralisée, une approximation nodale (interpolation) de la forme :

$$\{\mathbf{u}\} = [N] \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-1)$$

Ou

- $\{\mathbf{u}\}$: Vecteur dont les composantes sont celles qui caractérisent le vecteur des déplacements $\vec{\mathbf{u}}$ en $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ de Ω_e
- $\{\dot{\mathbf{a}}\}_e$: Vecteur des déplacements nodaux du domaine élémentaire Ω_e
- $[N]$: matrice des fonctions d'interpolation

Le calcul du tenseur des petites déformations \mathbf{E} permet d'exprimer les composantes du vecteur des déformations $\{\xi\}$ en fonction des déplacements nodaux sous la forme :

$$\{\xi\} = [B] \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-2)$$

La loi de Hooke généralisée, en remplaçant $\{\xi\}$ par sa valeur s'écrit

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-3)$$

La forme quadratique associée à l'énergie de déformation sur l'élément fini est

$$2E_{de} = \int_{\Omega_e} \{\xi\}' \{\sigma\} dV \quad (3-4)$$

Soit donc en remplaçant $\{\xi\}$ et $\{\sigma\}$ par leurs valeurs précédentes :

$$2E_{de} = \langle \dot{\mathbf{a}} \rangle \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]' [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-5)$$

On en déduit la forme générale de la matrice raideur d'un élément fini Ω_e dans la base des déplacements nodaux $\{\mathbf{a}\}_e$

$$[\mathbf{K}]_e = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^t [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (3-5)$$

De même la forme quadratique associée à l'énergie cinétique de l'élément permet de définir la matrice masse de l'élément fini Ω_e dans la base des déplacements nodaux $\{\mathbf{a}\}_e$. telle que

$$2E_{ce} = \int_{\Omega_e} \dot{u}^2 \rho dV = \langle \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^t \rho [\mathbf{N}] dV \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-6)$$

$$[\mathbf{m}]_e = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^t \rho [\mathbf{N}] dV \quad (3-7)$$

Et enfin le calcul du travail virtuel des forces extérieures conduit à la définition de forces généralisées qui peuvent être de différentes natures

- ❖ Forces généralisées associées aux répartitions volumiques de forces $\{\mathbf{q}_v\}$

$$\delta T_{v_e} = \int_{\Omega_e} \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \{\mathbf{q}_v\} dV = \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \{\boldsymbol{\varphi}_v\}_e \quad (3-7)$$

Soit

$$\{\boldsymbol{\varphi}_v\}_e = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^t \{\mathbf{q}_v\} dV \quad (3-8)$$

- ❖ Forces généralisées associées aux répartitions surfaciques de forces $\{\mathbf{q}_s\}$

$$\int_{\partial\Omega_e} \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \mathbf{e} \{\mathbf{q}_s\} dV = \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \mathbf{e} \{\boldsymbol{\varphi}_s\}_e \quad (3-9)$$

Soit

$$\{\boldsymbol{\varphi}_s\}_e = \int_{\Omega_e} [N]^t \{\mathbf{q}_s\} dV \quad (3-10)$$

- ❖ Forces généralisées associées aux forces appliquées aux nœuds de l'élément (efforts de liaisons)

$$\delta T_{s_e} = \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \{\boldsymbol{\varphi}_l\}_e \quad (3-11)$$

- ❖ Forces généralisées associées à une dissipation d'énergie. Soit si $\{\mathbf{F}_d\}$ est la « force élémentaire dissipative », telle que

$$\{\mathbf{F}_d\} = -\mathbf{b}\{\mathbf{u}_p\} \quad (3-12)$$

Le travail virtuel de cette force s'écrit

$$\delta T_{d_e} = -\int_{\Omega_e} \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle \{\mathbf{F}_d\} dV = \langle \delta \dot{\mathbf{a}} \rangle_e \{\boldsymbol{\varphi}_d\}_e \quad (3-13)$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}_d\}_e = -\int_{\Omega_e} [N]^t \mathbf{b} [N] dV \{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-14)$$

Ce qui conduit à la définition d'une matrice amortissement $[\mathbf{b}]_e$ telle que

$$[\mathbf{b}]_e = \int_{\Omega_e} [N]^t \mathbf{b} [N] dV \quad (3-15)$$

En prenant les variations par rapport à chaque variable généralisée (écriture des équations de Lagrange) on obtient l'équation matricielle caractérisant le mouvement de l'élément fini

$$[\mathbf{m}]_e \{\ddot{\mathbf{a}}\}_e + [\mathbf{b}]_e \{\dot{\mathbf{a}}\}_e + [\mathbf{K}_s] \{\mathbf{a}\}_e = \{\boldsymbol{\varphi}_1\}_e + \{\boldsymbol{\varphi}_v\}_e + \{\boldsymbol{\varphi}_s\}_e \quad (3-16)$$

L'équation matricielle de la structure assemblée est obtenue en additionnant les formes intégrales élémentaires et en prenant les variations des quantités additionnées est

$$[\mathbf{M}_s] \{\ddot{\mathbf{a}}\} + [\mathbf{B}_s] \{\dot{\mathbf{a}}\} + [\mathbf{K}_s] \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{F}_{ext}\} + \{\boldsymbol{\varphi}_v\}_{ass} + \{\boldsymbol{\varphi}_s\}_{ass} \quad (3-17)$$

Avec $\{\mathbf{F}_{ext}\}$ vecteur des forces extérieures directement appliquées aux nœuds de la structure.

III.4. Méthode des éléments finis en mécanique des fluides.(Forme faible de la méthode des résidus pondérés)

Les équations des problèmes sont obtenues par linéarisation des équations générales d'écoulement du fluide [23,34, 43].

Les équations linéaires des fluides peuvent être décrites en utilisant une formulation en déplacement μ_F [36,37] Le potentiel des vitesses[38] en potentiel des déplacements φ [39,40] ou en pression p [41,42].

Nous considérons des fluides avec les hypothèses précédentes.

Ils sont caractérisés par les équations caractéristiques [43]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0, \quad \text{ou} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0 \end{array} \right\} \text{en incompressible} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \vec{V}_S \cdot \vec{n} \quad \text{sur les interfaces fluide - solide } \Gamma_{SF} \end{array} \right\}$$

Sur la surface libre Γ_L (plan $z = 0$)

Dans un premier temps, on considère que le domaine Ω_F est borné.

Il est divisé en sous-domaines élémentaires Ω_e sur lesquels le potentiel des vitesses φ est interpolé en fonction des potentiels nodaux $\{\Phi\}_e$

$$\Phi = \langle N \rangle \{\Phi\}_e$$

Pour simplifier la mise en œuvre de la formulation éléments finis, cette relation est écrite en considérant que l'approximation nodale est réalisée sur le domaine Ω_F complet sous la forme

- $\{\Phi\}$ vecteur des potentiels aux nœuds du domaine fluide complet Ω_F
- \vec{N}_i qui s'identifie à la fonction d'interpolation N_i calculée au nœud i d'un élément.

En remplaçant Φ par son approximation dans l'équation locale précédente, on obtient un résidu que l'on pondère par des fonctions de pondération Ψ . Considérons la forme intégrale $W(\Phi) = W_1(\Phi) + W_2(\Phi)$

Avec

$$W_1(\Phi) = \int_{\Omega_F} \Psi \Delta \Phi dV \quad \text{et} \quad W_2(\Phi) = - \int_{\Omega_F} \Psi \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dV$$

En appliquant la formule de Green (intégration par parties généralisée) à la forme intégrale $W_1(\varphi)$ on obtient

$$\int_{\Omega_F} \Psi \Delta \Phi dV + \int_{\Omega_F} \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi dV = \int_{\partial \Omega_F} \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n} dI$$

Donc la forme intégrale s'écrit

$$W(\Phi) = - \int_{\Omega_F} \Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dV - + \int_{\Omega_F} \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi dV + \int_{\partial \Omega_F} \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n} dI$$

La formulation faible du problème fluide se traduit par

La recherche du potentiel, donc le vecteur des potentiels nodaux $\{\Phi\}$, qui annulera forme intégrale $W(\Phi)$, quelque soit les fonctions de pondération Ψ cinématiquement admissible (nulles sur la partie de frontière $\partial \Omega_F$ ou le potentiel Φ est connu) et tel que sur la partie de frontière complémentaires $\partial \Omega_2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ soit donné.

Soit compte tenu de l'orientation de la normale choisie pour écrire la condition de glissement, il vient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\vec{V}_S \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} (\Gamma_{SF} \subset \partial \Omega_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} & (\text{onde de gravité en incompressible}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & (\text{très basses fréquences en incompressible}) \end{cases}$$

Donc la condition de surface libre sera prise en compte par des conditions sur $\partial \Omega_1$ ou bien par des conditions sur $\partial \Omega_2$.

La principale difficulté dans l'analyse du comportement d'un fluide par élément fini en domaine non borné est la prise en compte correcte des conditions à l'infini.

Il existe plusieurs manières de détourner cette difficulté

- Ramener la frontière à distance fini et afficher sur cette frontière des conditions similaires le comportement du fluide à l'infini.
- Développer des éléments finis particuliers : les éléments infinis.
- Développer une formulation mixte élément fini-équations intégrales et comme pour la condition de surface libre, suivant le type d'approximation, les conditions à l'infini, seront prises en compte comme des conditions sur $\partial\Omega_1$ ou sur $\partial\Omega_2$.

Une méthode courante guidant le choix des fonctions de pondération est la méthode de **Galerkin** (qui s'identifie pour les problèmes de mécanique du solide au principe des travaux virtuels) ; elle consiste à développer les fonctions Ψ sur les mêmes fonctions de base que celle utilisées pour l'interpolation de Φ

Dans notre cas on n'a pas tenu compte de la compressibilité du fluide

Dans ce cas la matrice d'amortissement est nulle.

III.5. Couplage éléments finis-éléments finis

La résolution du problème couplé peut être conduite avec une méthode éléments finis, on utilise un couplage entre

- Des éléments finis poutre à deux nœuds, à deux degrés de liberté par nœud
- Des éléments finis fluide axisymétrique en série de **Fourier** à quatre nœuds, à un degré de liberté par nœud permettant par maillage du pavé

$[\mathbf{R}, \mathbf{R}'] \times [\mathbf{0}, \mathbf{H}]$ la résolution du problème fluide :

Le principe du maillage du problème dans le plan (\mathbf{r}, \mathbf{z}) peut être schématisé par la figure suivante

On utilise un maillage à N éléments finis de la poutre et un maillage à $M \times N_0$ éléments finis du fluide avec $N_0 | N = H/L$ **(3-17)**

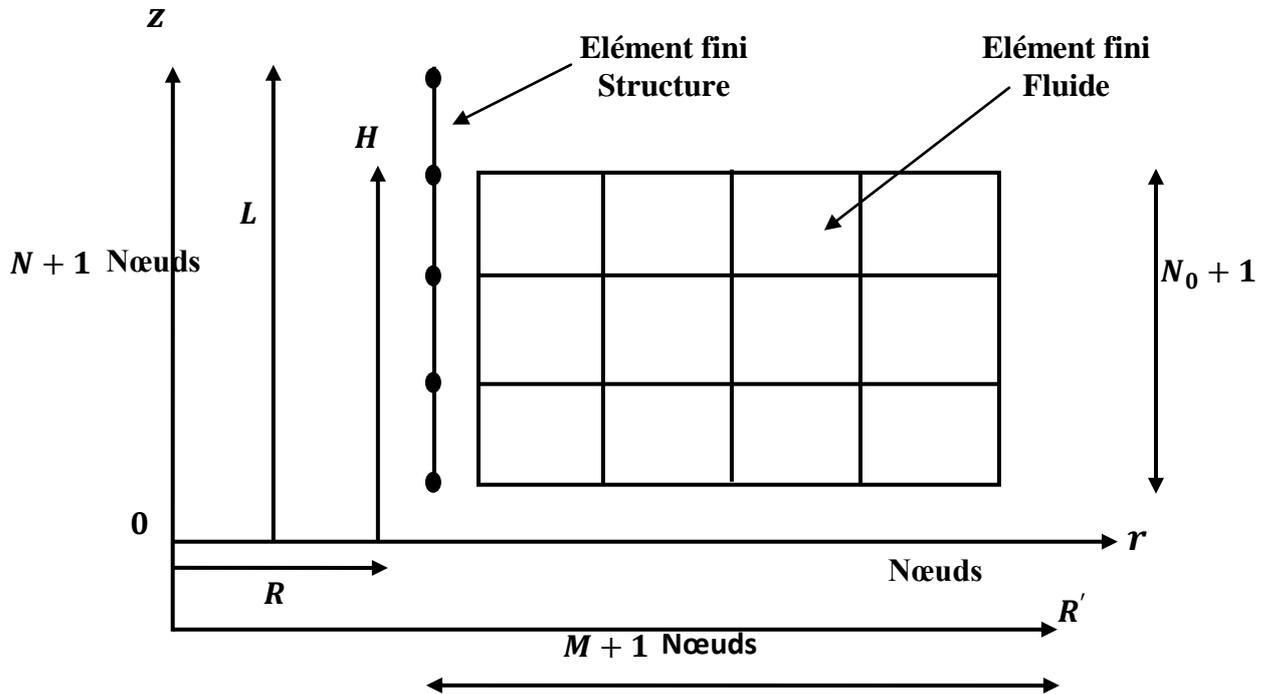


Figure (III-3)
Principe de maillage du problème couplé dans le plan (r, z)

Cette analyse du comportement de la structure et du fluide par la méthode des éléments fini est d'une mise en œuvre classique et aisée pour traiter les problèmes intérieurs et elle a fait l'objet de nombreux travaux et communications.

Nous prenons ici la formulation générale conduisant à la construction des deux systèmes d'équations linéaires couplés, obtenus par discrétisation en éléments finis des deux milieux. Afin de ne pas alourdir inutilement les écritures matricielles, nous supposons qu'à l'interface fluide-structure, les discrétisations en éléments finis des deux milieux sont identiques. Nous ne ferons donc pas de différences entre la frontière mouillée d'un élément fini structure $(\Gamma_{SF})_e$ et d'un élément fini fluide en contact avec la structure. Cette frontière élémentaire commune sera notée simplement Γ_{sf}^e . Le cas où les maillages structure et fluide à l'interface sont différents ne présente pas de difficultés théoriques particulières, seule la mise en œuvre pratique de la méthode est un peu plus délicate.

L'approximation nodale par éléments finis sur chaque élément solide s'écrit

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}_s]\{\dot{\mathbf{a}}\}_e \quad (3-18)$$

Elle conduit donc conformément au calcul classique des quantités élémentaires énergies cinétique, de déformation et travaux virtuels. Pour le calcul des forces généralisées associées à la répartition surfacique, il intervient deux types de répartitions :

- des répartitions connues d'origine mécanique
- des répartitions inconnues due au chargement du fluide : les pressions dynamiques sur Γ_{SF} la partie « mouillée » de $\partial\Omega_{S\sigma}$.

Donc pour les éléments finis ayant une frontière Γ_e appartenant à Γ_{SF} le travail virtuel des forces dues au fluide (forces de pression) s'écrit :

$$\delta T_{ph} = \int_{\Gamma_{sfe}} \delta \vec{u}(-p)\vec{n}dS \quad (3-19)$$

Et en tenant compte de l'interpolation nodale, la force généralisée associée a alors pour expression

$$\{\boldsymbol{\varphi}_h\}_e = \int_{\Gamma_{Fe}} [\mathbf{N}_s]\{\mathbf{n}\}(-p)dS \quad (3-20)$$

De même l'interpolation du potentiel des vitesses en fonction des variables nodales élémentaires s'écrit

$$\boldsymbol{\Phi} = \langle N_F \rangle \{\boldsymbol{\Phi}\}_e \quad (3-21)$$

Et l'équation de Lagrange permet d'exprimer la pression dynamique en tout point d'un élément fini fluide

$$\mathbf{P} = -\rho_f \langle N_F \rangle \{\boldsymbol{\Phi}\}_e \quad (3-22)$$

Et en particulier à l'interface fluide –structure, la force généralisée équivalente à la pression dynamique à pour expression

$$\{\varphi_h\}_e = \rho_f \int_{\Gamma_{sfe}} N_s^T n N_f dS \{\dot{\Phi}\}_e \quad (3-23)$$

Que l'on peut écrire

$$\{\varphi_h\}_e = \rho_f [sf]_e \{\dot{\Phi}\} = -[sf]_e \{p\}_e \quad (3-24)$$

$$\text{Avec } [sf]_e = \int_{\Gamma_{sfe}} N_s^T n N_f dS \quad (3-25)$$

Matrice de couplage structure-fluide élémentaire, et $\{p\}_e$ vecteur des pressions nodales élémentaires.

En procédant d'une manière analogue pour l'analyse du fluide, on peut exprimer la vitesse normale et un point quelconque de l'interface appartenant à un élément fini par

$$V_n = \vec{V}_s \cdot \vec{n} = \{n\}^t N_s|_{\Gamma_{sfe}} \{\dot{a}\}_e \quad (3-26)$$

Donc les termes $(gi)_e$ calculés sur $sfe \in \Gamma_{SF}$ écrivent

$$\{g\}_e = - \int_{\Gamma_{sfe}} N_f^T \{n\}^t N_s dS \{\dot{a}\}_e \quad (3-27)$$

Soit

$$\{g\}_e = - [Fs]_e \{\dot{a}\}_e = - [SF]_e^t \{\dot{a}\}_e \quad (3-28)$$

Donc après assemblage des formes intégrales élémentaire discrétisées, pour le fluide et pour la structure, nous obtenons les deux systèmes d'équations linéaires couplés suivant

$$\begin{cases} [M_s]\{\ddot{a}\} + [B_s]\{\dot{a}\} + [K_s]\{a\} = \{Fext\} + \rho_f [SF]\{\dot{\varphi}\} \\ [M_f]\{\ddot{\varphi}\} + [B_f]\{\dot{\varphi}\} + [H_f]\{\varphi\} = \{Gext\} - [FS]\{\dot{a}\} \end{cases} \quad (3-29)$$

Avec $\{\mathbf{F}_{ext}\}$ vecteur des forces généralisées associées à des forces d'excitation de la structure, volumique, surfacique ou ponctuelles connues et $\{\mathbf{G}_{ext}\}$ un second membre du système matriciel caractérisant le comportement du fluide associé à des conditions de glissement sur des parois ou la vitesse normale est connue.

La matrice de couplage fluide-structure assemblée $[FS]$ ou $[SF] = [FS]^t$ ne fait correspondre que les inconnues nodales du fluide et de la structure attachées à l'interface Γ_{SF} .

Dans le cas général la résolution de ce système se fera en groupant les inconnues nodales $\{\mathbf{a}\}$ et $\{\boldsymbol{\varphi}\}$ dans un même vecteur des inconnues nodales $\{\mathbf{y}\}$ tel que

$$[M]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [B]\{\dot{\mathbf{y}}\} + [H]\{\mathbf{y}\} = \{Q\} \quad (3-30)$$

Avec

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_s] \\ [M_f] \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_s] - \rho_f [SF] \\ [FS] \quad [B_f] \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} [K_s] \\ [H_f] \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_{ext}\} \\ \{\mathbf{G}_{ext}\} \end{Bmatrix} \quad (3-34)$$

La résolution de ce système est simplifiée si on considère que le fluide est incompressible et en se plaçant dans une gamme de fréquence telle que l'on puisse considérer que la condition de surface libre = $\mathbf{0}$. Dans ces conditions l'équation matricielle traduisant le comportement fluide s'écrit

$$[H_f]\{\boldsymbol{\varphi}\} = \{\mathbf{G}_{ext}\} - [F_s]\{\dot{\mathbf{a}}\} \quad (3-35)$$

Et il est alors possible d'éliminer les variables nodales fluides du système précédent et dans ces conditions le système devient

$$([\dot{M}_s] + [M_a]) \{\ddot{a}\} + [B_s]\{\dot{a}\} + [K_s]\{a\} = \{F_{gt}\} \quad (3-36)$$

Avec

$$[M_a] = \rho_f [F_s]^t [H_f]^{-1} [F_s] \text{Matrice « masse ajoutée »} \quad (3-37)$$

Et

$$\{F_{gt}\} = \{F_{ext}\} - \rho_f [H_f]^{-1} \{G_{ext}\} \quad (3-38)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, si le milieu fluide n'est pas borné, il est nécessaire de mettre en œuvre des procédures spéciales permettant de tenir compte de la frontière à l'infini. Ces procédures étant plus ou moins bien adaptées aux types de problèmes à résoudre. Par exemple pour un calcul de fréquence et modes propres d'une structure immergée en milieu infini, on peut tout en gardant une bonne précision étudier la structure en milieu borné.

Chapitre

IV

IV.1. Etude des vibrations d'une poutre immergée dans un fluide

Pour traiter ce problème, nous mettons en œuvre les différentes méthodes de résolution qui ont été décrites précédemment.

On considère une poutre verticale d'axe \vec{z} , de section circulaire de rayon $r = a$, encastrée à une extrémité, libre à l'autre, immergée dans les autres directions.

étudie les vibrations de flexion de poutre dans le plan (r, z) , on suppose que $h \leq l$.

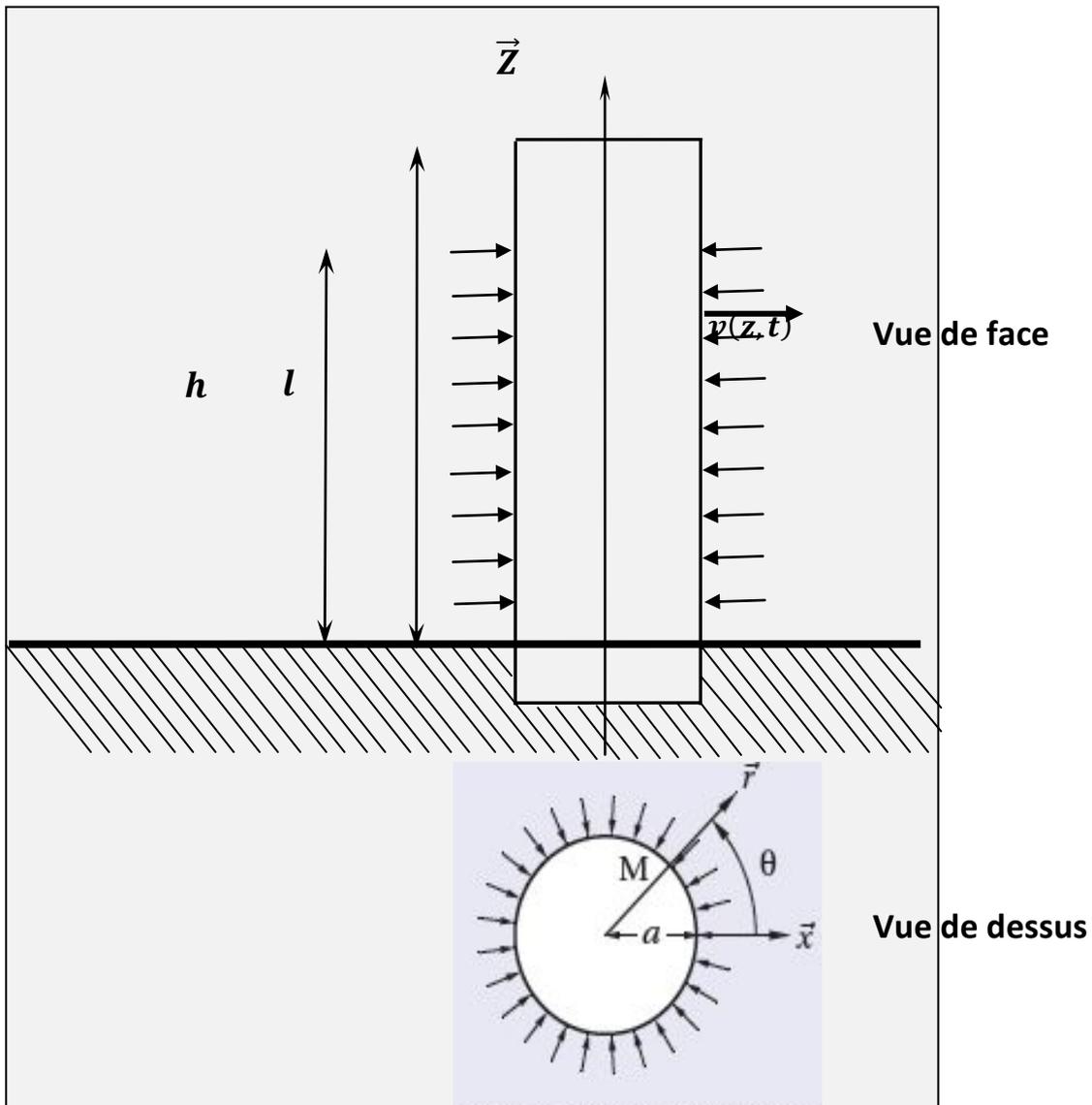


Figure IV.1 poutre vertical immergée dans un fluide

IV.1.1. Equation du problème couplé

IV.1.1.1. Equations du comportement de poutre

On se place dans le cadre classique de l'hypothèse de **Bernoulli**, ce qui conduit au système d'équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Elv_{,zzzz} + \rho_s S \ddot{v} = f_h(z, t) \quad \text{pour } z \in [0, l] \\ M_f = Elv_{,zz} \quad \text{et } T = -Elv_{,zzz} \\ \text{avec les conditions limites suivantes qui correspondent à une poutre encastrée – libre} \\ v(0, t) = 0 \\ v_{,z}(0, t) = 0 \\ v_{,zz}(l, t) = 0 \\ v_{,zzz}(l, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4-1)$$

$v(z, t)$ est la flèche suivant l'axe \vec{x} , E le module d'Young du matériau, ρ_s sa masse volumique, I le moment quadratique de la section droite et S l'aire de la section.

$f_h(z, t)$ est la résultante linéique suivant \vec{x} des pressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_h(z, t) = - \int_0^{2\pi} p(a, \theta, z, t) a \cos \theta d\theta \quad \text{pour } z \in [0, h] \\ f_h(z, t) = 0 \quad \text{pour } z \in [0, l] \end{array} \right. \quad (4-2)$$

IV.1.1.2. Equations du fluide

En supposant le fluide parfait et incompressible, et l'écoulement irrotationnel, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{v} \cos \theta \quad \text{pour } r = a, \forall \theta \text{ et } z \in [0, h] \text{ (condition sur la surface)} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } \forall r \text{ et } \theta \text{ (condition sur le fond)} \\ \Phi = 0 \quad \text{pour } z = h \text{ et } \forall r \text{ et } \theta \text{ (condition de surface libre)} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{(condition de Sommerfield)} \end{array} \right.$$

$\dot{v} \cos \theta$ est la vitesse normale du point M appartenant à la surface latérale de la poutre.

La pression en un point quelconque du fluide et en particulier sur la surface latérale mouillée de la poutre s'obtient par la relation de **Lagrange** linéarisée. Si on connaît le potentiel Φ , on peut calculer la résultante des efforts hydrodynamique $f_h(z, t)$

IV.2. Modélisation numérique et couplage

Dans cette partie de notre travail nous donnons une méthode numérique afin de résoudre ce genre de problème couplé en utilisant une méthode donnée par la réf[42] qui nous permet de déterminer la masse ajoutée.

IV.2.1. Discrétisation de la poutre

La poutre est discrétisée en éléments poutre, c'est un élément à deux nœuds de numéros courants j et $j + 1$ de coordonnées z_j , z_{j+1} et de longueur L_j . Sur cet élément la flèche $v(z, t)$ est interpolée de façon classique en choisissant une approximation cubique (polynôme de l'Hermite cubique) soit

$$v(z, t) = \langle N_s \rangle \{a\}_e \quad (4-3)$$

Avec :

$$\{a\}_e^1 = \langle v_j, \theta_j, v_{j+1}, \theta_{j+1} \rangle \quad (4-4)$$

$\langle N_s \rangle$ sont les fonctions de forme, données par :

$$\langle N_s \rangle = \langle (1 - 3s^2 + 2s^3), l_j(s - 2s^2 + s^3), (3s^2 - 2s^3), l_j(-s^2 + s^3) \rangle \quad (4-5)$$

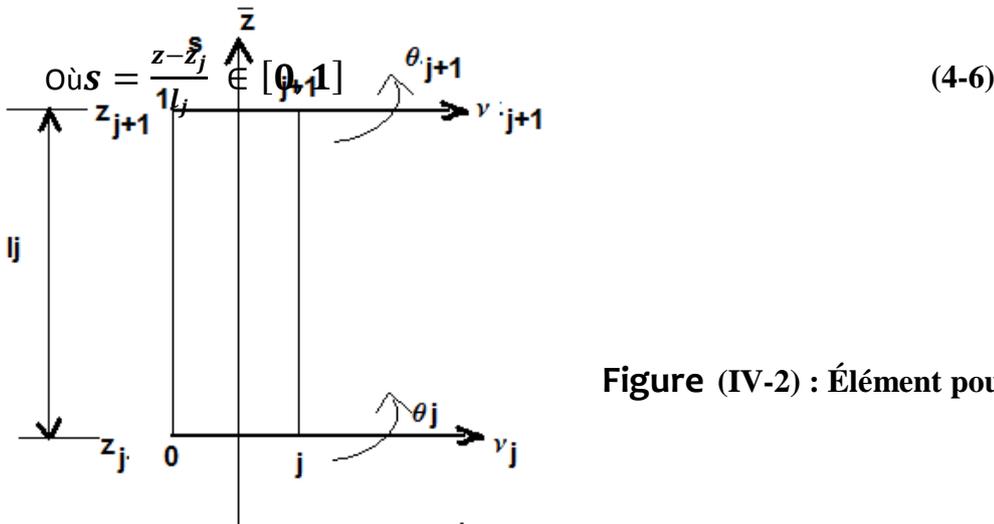


Figure (IV-2) : Élément poutre à 2 nœuds

A partir des équations (2-5) et (2-7), on calcul la matrice élémentaire de rigidité $[K]_e$ et la matrice masse $[M]_e$.

$$[K]_e = \frac{\rho_s \times A}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L4L^2 & 6L2L^2 & & \\ -126L & 126L & & \\ -6L2L^2 & 6L4L^2 & & \end{bmatrix}$$

$$[M]_e = \rho_s \times \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & -54 & -13L \\ -22L4L^2 & -13L & -3L^2 & \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

IV.2.2. Discrétisation du milieu fluide

Compte tenu de la géométrie de révolution d'axe z , le potentiel des vitesses est déterminé en utilisant un développement en série de Fourier donné par les références [42]

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi_n(r, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, z, t) \cos n\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_n(r, z, t) \sin m\theta \quad (4-7)$$

L'harmonique Φ correspond à un problème axisymétrique

Le domaine fluide est discrétisé par des éléments **Q4** (élément quadrilatère à 4 nœuds) avec un degré de liberté par nœud. La frontière à l'infini Γ_{∞} est remplacée par une frontière finie Γ_R , l'approximation nodale s'écrit :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \langle N_f(r, z) \rangle \{ \Phi \}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle N_f(r, z) \rangle \cos n\theta \{ \Phi \}_n + \quad (4-8)$$

$\sum_{m=1}^{\infty} \langle N_f(r, z) \rangle \sin n\theta \{ \Phi \}_m \{ \Phi \}_n$ Vecteur des potentiels nodaux élémentaires pour l'harmonique k du développement en série de Fourier (harmonique en cosinus ou sinus).

La formulation faible de type **Galerkin** conduit à une double infinité plus un système matriciel ; chaque système correspond à une harmonique n :

$$H_f^n \Phi^n = G^n$$

Avec Φ^n vecteurs des potentiels nodaux du domaine fluide complet, H_f^n et G^n matrices obtenues par assemblage des matrices h_f^n et g^n élémentaires telles que :

$$\begin{cases} (\mathbf{h}_i)_n = \pi \int_{\Omega_e} (N_{f_{i,r}} N_{f_{j,r}} + N_{f_{i,z}} N_{f_{j,z}}) r dr dz + \pi r^2 \int_{\Omega_e} N_{f_i} N_{f_j} \frac{1}{r} dr dz \sin > 0 \\ (\mathbf{h}_i)_n = 2\pi \int_{\Omega_e} (N_{f_{i,r}} N_{f_{j,r}} + N_{f_{i,z}} N_{f_{j,z}}) r dr dz & \mathbf{sin} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{g}_i)_n = \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{sf}} \cos n\theta (-\dot{\vec{v}} \cdot \vec{n}) d\Gamma \text{ ou } (\mathbf{g}_i)_n = \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{sf}} \sin n\theta (-\dot{\vec{v}} \cdot \vec{n}) d\Gamma \end{cases} \quad (4-10)$$

L'orthogonalité des fonctions trigonométriques conduit au découplage des différents systèmes. En effet

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos p\theta d\theta = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{sin} \neq \mathbf{p} \\ 2\pi \mathbf{sin} = \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \pi \mathbf{sin} = \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4-11)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos q\theta d\theta = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{sim} \neq \mathbf{q} \\ \pi \mathbf{sim} = \mathbf{q} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin q\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin p\theta d\theta = \mathbf{0}$$

Pour ce problème particulier de vibrations de poutre, comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, nous avons :

$$\dot{\vec{v}} \vec{n} = \dot{v} \cos \theta \quad (4-12)$$

Donc de tous les seconds membres $(\mathbf{g}_i)_n$, seul celui correspondant à l'harmonique $n = 1$ du développement en cosinus est non nul et le problème fluide se ramène à la résolution d'un seul système linéaire

$$H_f^1 \Phi^1 = G^1 \quad (4-13)$$

Avec le second membre qui s'obtient par assemblage de termes

$$(\mathbf{g}_i)_1 = \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{sf}} N_{fi} \Big|_{r=a} \cos \theta (-\dot{v} \cos \theta) d\Gamma \quad (4-14)$$

$$(\mathbf{g}_i)_1 = \pi a \int N_f|_{r=a} (-\dot{\mathbf{v}}) dz \quad (4-15)$$

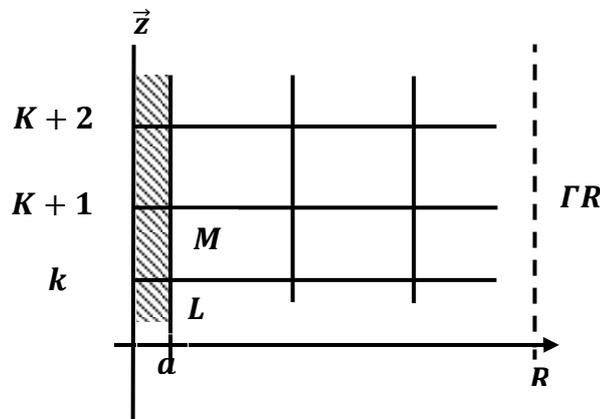


Figure (IV -3) maillage du domaine fluide

Les conditions affichées sur Γ_R sont ou bien les conditions $\varphi = 0$ ou bien les conditions

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4-16)$$

Compte tenu de la discrétisation en éléments finis poutre et en écrivant le système en fonction des pressions nodales, on obtient

$$[\mathbf{H}_F]_n \{\mathbf{p}\} = \pi \rho_F a [\mathbf{FS}] \{\ddot{\mathbf{a}}\} \quad (4-17)$$

Avec $[\mathbf{FS}]$ assemblage de matrices $[\mathbf{f}_s]_e$ telles que si les maillages des discrétisations poutre et fluide coïncident, elles s'expriment par

$$(\mathbf{F} s_{ij})_e = \int N_{f_i}|_{r=a} N_{s_j} dz \quad (4-18)$$

Le calcul de la pression sur la surface latérale de la poutre et le calcul de la force généralisée associée conduit au système matriciel qui traduit le comportement de la poutre immergée

$$[\mathbf{M}_S] \{\ddot{\mathbf{a}}\} + [\mathbf{K}_S] \{\mathbf{a}\} = -\pi a [\mathbf{FS}]^T \{\mathbf{p}\} \quad (4-19)$$

En éliminant les variables de pression (résolution du système avec une matrice du système $[H_r]$ tenant compte des conditions de pression nulle sur la surface libre), on en déduit la matrice « masse ajoutée »

$$[M_a] = \pi^2 \rho_f a^2 [FS][H_r]^{-1}[FS] \quad (4-20)$$

En choisissant une discrétisation fluide en éléments quadrilatérales à 4 nœuds (modèle linéaire), à cotés parallèles aux axes $\bar{r}e\bar{t}\bar{z}$, avec (r_0, z_0) les coordonnées du centre de l'élément et $4a, 2b$ les longueurs des cotés, l'interpolation du potentiel des vitesses est donnée par :

$$\Phi = \langle N_f \rangle \cos\theta \{\Phi\}_e \quad (4-21)$$

Où les fonctions N_f sont les fonctions linéaires.

Dans ces conditions, la matrice élémentaire $[h] = \pi([b] + [c])$ s'exprime par

$$b_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{a^2} N_{fr} N_{fr} + \frac{1}{b^2} N_{fz} N_{fz} \right) (r_0 + a\xi) ab d\xi d\eta \quad (4-22)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11} = \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{a^2}{6b} \\ b_{12} = \frac{r_0 ab}{3} \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \\ b_{13} = \frac{r_0 ab}{6} \left(-\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ b_{14} = \frac{r_0 ab}{3} \left(-\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{a^2}{6b} \\ b_{22} = \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{a^2}{6b} \\ b_{23} = \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{a^2}{6b} \\ b_{24} = b_{13}, b_{33} = b_{22}, b_{34} = b_{12}, b_{44} = b_{11} \end{array} \right. \quad (4-23)$$

Et

$$c_{ij} = \iint N_i N_j \frac{ab}{r_0 + a\xi} d\xi d\eta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = \frac{b}{6} \left[-4 - \frac{2r_0}{a} + \left(1 + \frac{r_0}{a}\right)^2 \text{Ln} \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \\ c_{12} = \frac{b}{6} \left[\frac{2r_0}{a} + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \text{Ln} \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \\ c_{22} = \frac{b}{6} \left[4 - \frac{2r_0}{a} + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \text{Ln} \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \\ c_{13} = c_{34} = \frac{c_{12}}{2} = \frac{c_{34}}{2} \\ 2c_{23} = c_{22} = c_{33} \\ 2c_{23} = c_{22} = c_{33} \end{array} \right. \quad (4-24)$$

Soit ;

Et dans ces conditions la matrice élémentaire $(Fs)_e$ couplage entre un élément poutre (e) est un élément fluide rectangulaire tel que $2b = I_e s$ écrit

$$(fs)_e = \begin{bmatrix} \frac{7b}{10} & \frac{b^2}{5} & \frac{3b}{10} & -\frac{2b^2}{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{3b}{10} & \frac{2b^2}{5} & \frac{7b}{10} & -\frac{b^2}{5} \end{bmatrix} = (sf)_e \quad (4-25)$$

Chapitre

V

V-1. Introduction :

Il existe une diversité de méthodes numériques, depuis ces dernières décennies, les sciences des matériaux ont connu une renaissance grâce aux développements des outils de simulation.

La simulation numérique est devenue une troisième voie de recherche entre la théorie et l'expérience. A l'heure actuelle, les simulations numériques permettent de traiter la majeure partie des problèmes physiques ouverts et les modèles utilisés ne cessent d'évoluer. La possibilité de simuler des phénomènes toujours plus complexes entraîne toutefois une augmentation du nombre de grandeurs physiques nécessaires à la caractérisation des matériaux en utilisant des modèles numériques. Les résultats numériques peuvent ainsi contribuer à l'acceptation ou bien au rejet des théories analytiques et peuvent également indiquer les directions dans lesquelles de nouvelles approches doivent être développées.

La résolution du problème de vibration d'un système couplé solide en interaction avec un fluide, est ramené à résoudre un système d'équations différentielles qui nécessite l'utilisation de ces méthodes numériques d'où la nécessité d'élaborer un programme de calcul.

La machine utilisée pour la réalisation du programme de calcul et l'exécution des exemples choisis est un **PC HP Pentium dual-core, 2 Giga de RAM** sous **Windows Vista**. Le temps d'exécution est très rapide (quelques secondes)

Le langage technique de programmation utilisé dans ce travail est **Matlab** version **7.0.6.324 (R2008a)**.

Rapport-gratuit.com 
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MEMOIRE

V-2. Description du programme

Le programme élaboré suivant l'organigramme ci-dessous, permet de calculer des matrices élémentaires de raideur $[K_s]$, de masse $[M_s]$ du solide pour chaque élément, la matrice masse ajoutée $[M_a]$ du fluide, et les matrices d'assemblage, suivant le maillage figure (V – 1) application des conditions aux limites, ainsi que la résolution du système des équations différentielles du problème couplé aux valeurs propres avec la commande **Matlab** « **eig** » c'est-à-dire eigenvalues et eigenvectors.

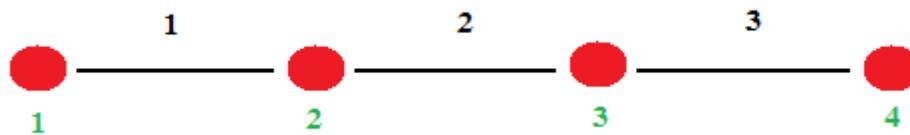


Figure (V-1) : Schéma de maillage et de numérotation de la structure

Nous avons écrit le programme comme un seul bloc (faisant appel à des fonctions) suivant la structure suivante

- ✓ Introduction des données paramètres physiques et géométriques,
- ✓ Lecture des coordonnées des nœuds de l'élément fini,
- ✓ Connectivité des éléments,
- ✓ Initialisation des matrices,
- ✓ Calcul des matrices élémentaires,
- ✓ Extraction des coordonnées,
- ✓ Assemblage et obtention du système global,
- ✓ introduction des conditions aux limites,
- ✓ résolution du système d'équations différentielles par la commande « **eig** » qui donne les valeurs et vecteurs propres et par la suite les fréquences propres du système (ou modes).

Data input et symboles utilisés :

- Numérotation de tous les nœuds et tous les éléments de maillage

nnel : nombre de nœuds par élément.

ndln : nombre de degrés de liberté par nœud.

ndle : nombre de degrés de libertés par élément.

nnt: nombre de nœuds total.

nelt : nombre d'éléments total.

ndlt : nombre de degrés de libertés total.

- **Coordonnées et connectivités :**

Coor (i) : les coordonnées de chaque nœud.

connec (i,j) : connectivité entre les éléments.

ie : numéros de l'élément.

V-3. Résolution

En suivant l'ordre de calcul des différents éléments qui composent l'expression des équations différentielles (2-36) données au chapitre IV :

$$([M_s] + [M_a])\{\ddot{d}\} + [K_s]\{d\} = 0 \quad (5-1)$$

On est ramené à résoudre le système d'équations différentielles (2-37) données au chapitre IV :

$$[K - \omega^2 M]d = 0 \quad (5-2)$$

Avec $M = M_s + M_a$ et ω^2 fréquences du système étudié

La résolution de l'éq. (4-1) se réalise sous *Matlab*, qui fait appel à des fonctions sous programmées.

Les matrices K et M sont deux matrices symétriques de taille $n \times n$ ($n =$ nombre de degrés de liberté total non nul), on procède à un changement de variable $\omega^2 = \lambda$, nous obtenons alors un système à valeurs et vecteurs propres sous la forme :

$$[K - \lambda M]d = 0 \quad (5-3)$$

On écrit cette équation sous la forme

$$Kd = \lambda Md \quad (5-4)$$

La méthode utilisée est « la méthode des itérations inverses ».

Le problème est transformé en forme standard avant d'être résolu par la méthode d'orthogonalisation de **Jacobi**.

M est défini positive et symétrique une décomposition de **Cholesky** peut être appliquée :

$$M = LL^T$$

Où L est une matrice triangulaire inférieure et L^T sa matrice transposée. (5-5)

On introduit la transformation suivante :

$$d = (L^{-1})^T z \quad (5-6)$$

En substituant dans l'équation (4-2) on a :

$$K(L^{-1})^T z = \lambda LL^T (L^{-1})^T z \quad (5-7)$$

En multipliant cette équation par la matrice inverse L^{-1} nous obtenons

$$L^{-1}K(L^{-1})^T Z = \lambda L^{-1}LL^T(L^{-1})^T Z \quad (5-8)$$

On note que $L^{-1}L = L^T(L^{-1})^T = I$

L'équation (4-8) est exprimée sous la forme standard :

$$Hz = \lambda d \quad (5-9)$$

Où :

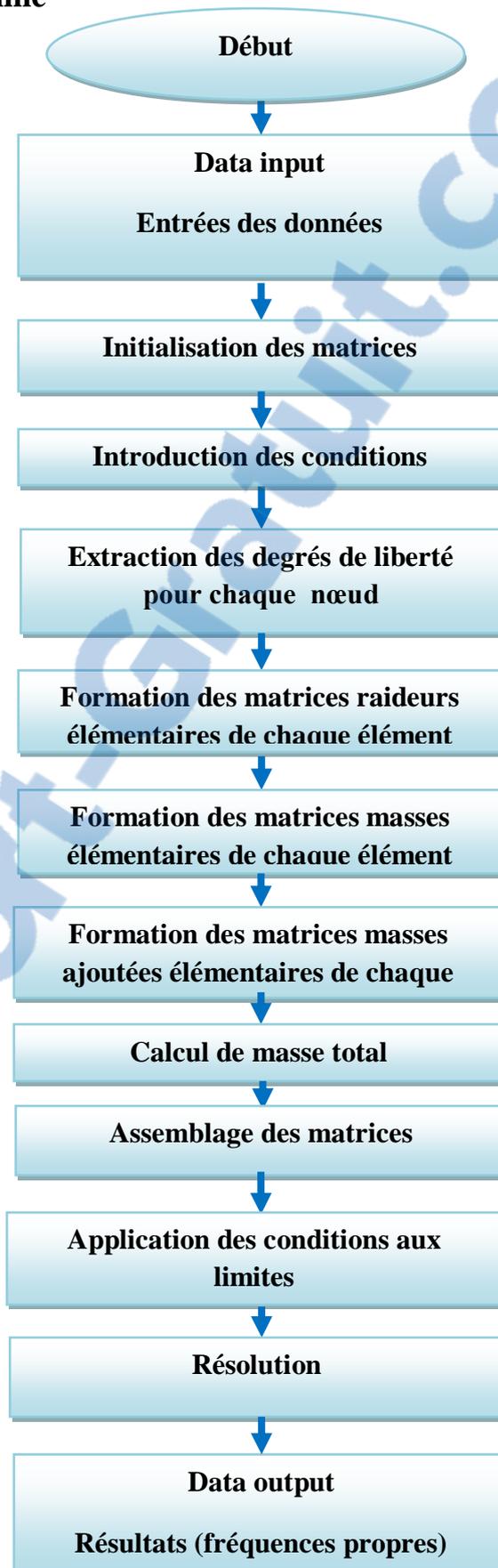
$$H = L^{-1}K(L^{-1})^T \quad (5-10)$$

L'algorithme de résolution est comme suit :

1. Décomposition de **cholesky** $M = LL^T$
2. Calcul de L^{-1} (matrice triangulaire inférieure inverse)
3. Calcul de H à partir de l'équation (5-10)
4. Résolution du problème de type valeurs-vecteurs propres $HZ = \lambda Z$ (en utilisant la méthode du **Jacobi**)
5. Retrouver les vecteurs propres du problème original par l'équation (5-6)

$$X = (L^{-1})^T Z \quad (5-11)$$

V.4. Organigramme



Chapitre

VI

VI-1 Introduction

Plusieurs paramètres peuvent influencer la vibration d'une poutre. Nous allons axer notre étude sur la variation des paramètres géométriques longueur sur rayon (L/r), et hauteur d'immersion sur la longueur (H/L) grandeurs illustrées sur la figure (VI-1), la variation des moments d'inerties pour quelques poutres de sections différentes ainsi que la variation du nombre de masse (rapport de la masse volumique sur la masse volumique du fluide), et observer leurs influences sur les caractéristiques dynamiques de la poutre, mais il faut en premier temps procéder à la validation du programme élaboré sous **Matlab**, par une étude de la convergence et une comparaison avec les résultats de la littérature.

VI-2 Description de la poutre

Les caractéristiques géométriques et matérielles de la plaque étudiée sont définies comme suit :

- L : longueur de la poutre
- r : rayon de poutre
- H : hauteur immergée
- Coefficient de poisson $\nu = 0.3$
- Module de Young $E = 206 \text{ GPA}$
- $\rho = 7830 \text{ Kg/m}^3$: masse volumique du solide
- $\rho_f = 10^3 \text{ Kg/m}^3$: masse volumique du fluide
- Rapport de surfaces pour différentes sections (section circulaire/section circulaire, section triangulaire, rectangulaire) λ : **1, 1.08, et 1.42**
- Rapport des moments d'inertie (moment d'inertie de la section circulaire/le moment d'inertie des différentes sections) α : **0.2, 0.5, et 1**
- Rapport de la longueur sur le rayon L/r : **2, 2.5, 4, 5 et 10.**
- Rapport de masse volumique $R_m = \rho_s/\rho_f$: **7.57, 7.8, 9.28, 9.39**
- Rapport de la longueur sur la hauteur immergée H/L : **1/8, 1/5, 1/4, 1/2, et 1.**



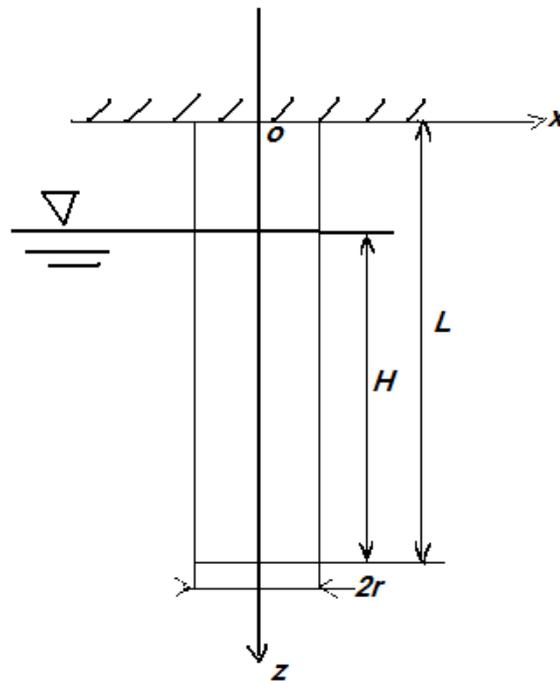


Figure VI-1 : poutreconsole partiellement immergée

VI-3 Validation du programme

Afin de s'assurer que le programme est valide, une étude de convergence est établie. Les résultats que nous avons obtenus par la programmation sont comparés avec les résultats donnés par les références.

Pour cela nous considérons une poutre console figure (VI-1) : nous calculons les paramètres de fréquences ainsi que les fréquences de vibration pour quatre modes.

On donne sur le tableau (VI-1) la variation des valeurs des fréquences des quatre premiers modes en fonction du nombre d'éléments pour une poutre de longueur $L=1$, $r=0,1$:

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

	Nombre d'éléments						
mode	10	15	20	30	40	50	100
1	186	186	186	186	186	186	186
2	1165.7	1165.7	1165.6	1165.6	1165.6	1165.6	1165.6
3	3265.1	3264	3263.9	3263.8	3263.8	3263.8	3263.8
4	6404.9	6397.4	6396.3	6395.9	6395.9	6395.9	6395.9

Tableau VI-1 :convergence des fréquences (Hz) en fonction du nombre d'éléments

Nous constatons sur le tableau (VI-1), plus le maillage est raffiné (nombre d'élément plus grand et la taille de l'élément est plus petite) plus les valeurs des fréquences convergent vers une valeur constante ; ces valeurs que nous pouvons comparer aux valeurs références données par le tableau (VI-2).

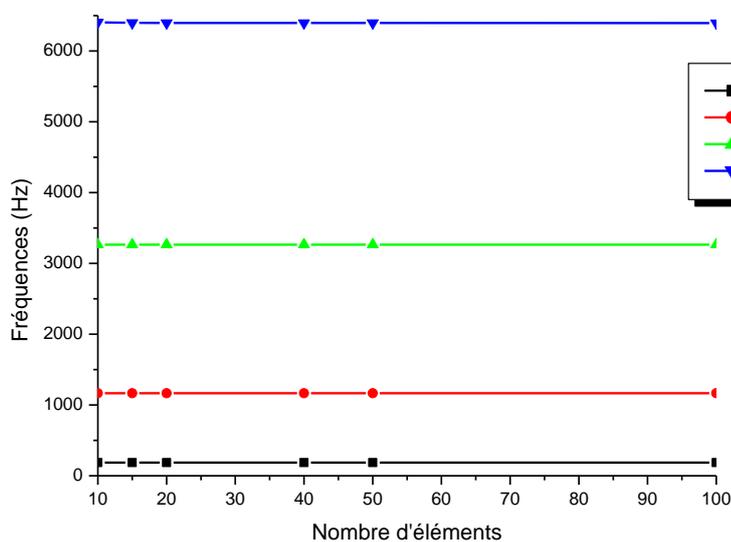


Figure VI-2 : courbes de convergence

Le tracé des courbes de convergence nous montre que les valeurs des fréquences convergent vers une valeur constante en augmentant le nombre d'éléments. Donc nous concluons que la convergence est vérifiée.

Nous donnons sur le tableau (VI-2) une comparaison de nos résultats avec les résultats analytiques et les résultats obtenus par calcul éléments finis donnés par la littérature ref[43] .

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

Fréquences naturelles (Hz) pour $r=0.1m$					
Mode	Résultats obtenus	Résultats analytiques Réf [43]	Résultats MEF Réf [44]	$\varepsilon\%$ par rapport aux résultats analytiques	$\varepsilon\%$ par rapport aux résultats MEF
1	186	185.91	185.91	0.004	0.004
2	1165.6	1165.1	1165.1	0.004	0.004
3	3263.8	3262.6	3262.5	0.003	0.003
4	6395.9	6394.3	6393.6	0.002	0.002

Tableau VI-2: valeurs des fréquences naturelles (Hz)

Où $\varepsilon\%$: est l'écart relative (précision) entre les résultats que nous avons obtenu à l'aide du programme réalisé et ceux des références.

Le tableau (VI-3) représente les fréquences naturelles, nous remarquons que les valeurs des fréquences se rapprochent des valeurs de référence [44], avec une précision variant de 0.002% à 0.004%, ce qui montre que ces résultats numériques sont en bonne concordance avec les valeurs analytiques et les valeurs obtenues par la MEF [44], nous concluons que notre programme est validé.

VI-4 Influence des paramètres géométriques et physiques sur les fréquences propres de vibration de la poutre

Etude de cas :

Etudions l'influence des différents paramètres géométriques sur les fréquences des quatre premiers modes.

Pour cela nous considérons une poutre encastree-libre de section circulaire, rectangulaire et triangulaire pour le premier cas, et circulaire pour les cas suivants, nous faisons varier les paramètres géométriques suivants :

Cas1 : variation des fréquences pour une même surface pour différentes inertie et pour une même inertie pour différentes valeurs de surfaces.

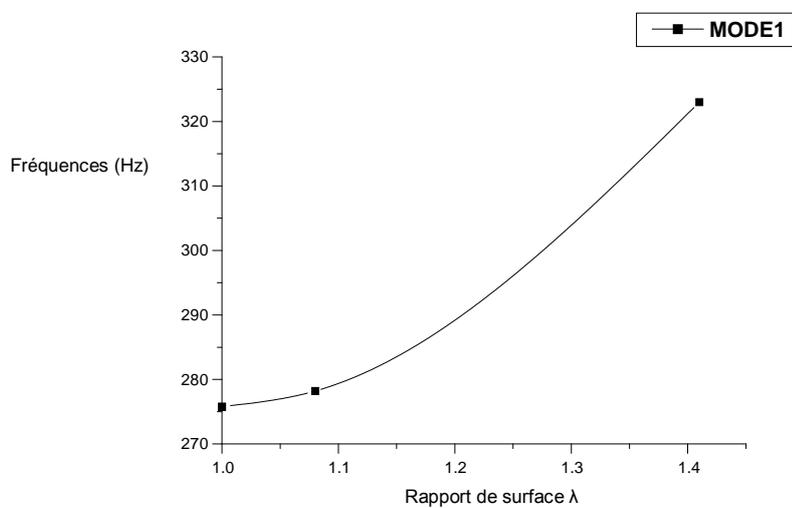
Le tableau (VI-3a) nous donne les variations des fréquences propres de vibration de la poutre pour différentes sections (circulaire, rectangulaire, et triangulaire), pour une même valeur d'inertie. Ces valeurs nous permettent de tracer le graphe représenté par la figure (VI-3a).

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

sections Modes	Rapports des surfaces λ		
	rectangulaire	triangulaire	Circulaire
	1.42	1.08	1
MODE1	323	278.2	275.8
Mode2	2032	1754.3	1735.4
Mode3	5751	4973.4	4896.9
Mode4	11432	9911.4	9697.8

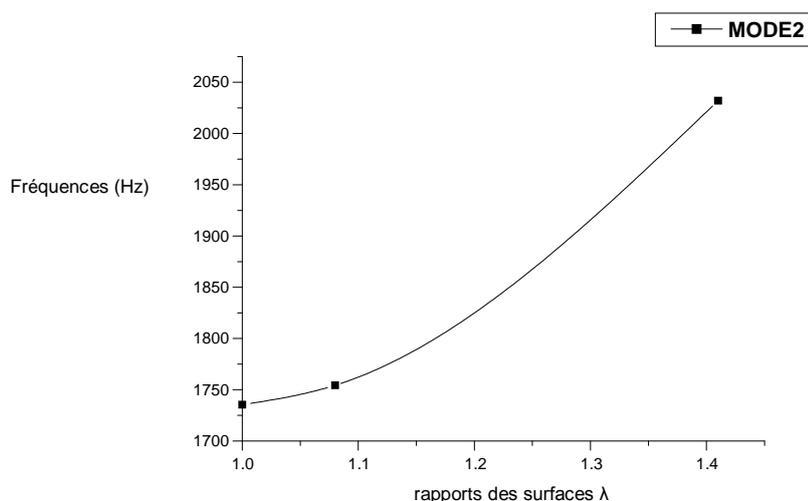
Tableau VI-3a : variation des fréquences pour une même valeur d'inertie pour des sections différentes



(a)

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI



(b)

Figure VI-3a : Variation des fréquences en fonction du rapport des surfaces λ pour différentes sections pour la même valeur d'inertie, (a) mode 1, (b) mode 2

Le tableau (VI-3b) nous donne les variations des fréquences propres de vibration de la poutre pour différentes sections (circulaire, rectangulaire, et triangulaire), pour une même valeur de surface. Ces valeurs nous permettent de tracer le graphe représenté par la figure (VI-3b).

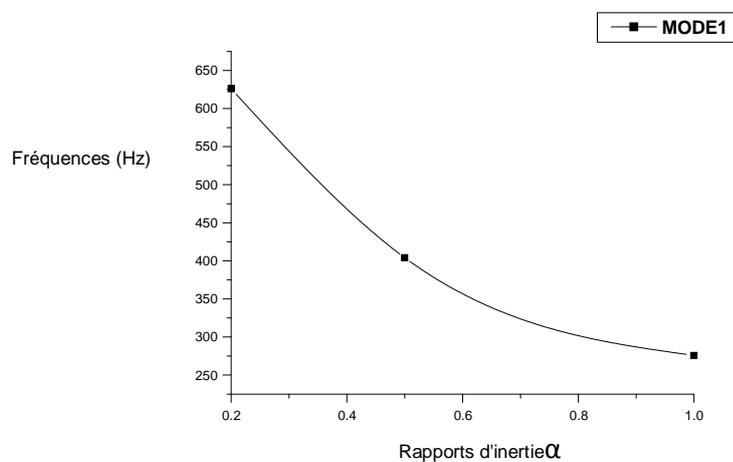
Sections	Rapport des inerties α		
	circulaire	rectangle	triangulaire
Modes	1	0.5	0.2
Mode1	275.8	404.12	626
Mode2	1735.4	4811.4	3951
Mode3	4896.9	6818.8	1120.1
Mode4	9697.8	12754.3	2232.2

Tableau VI-3b : variation des fréquences pour une même valeur de surface pour des sections différentes

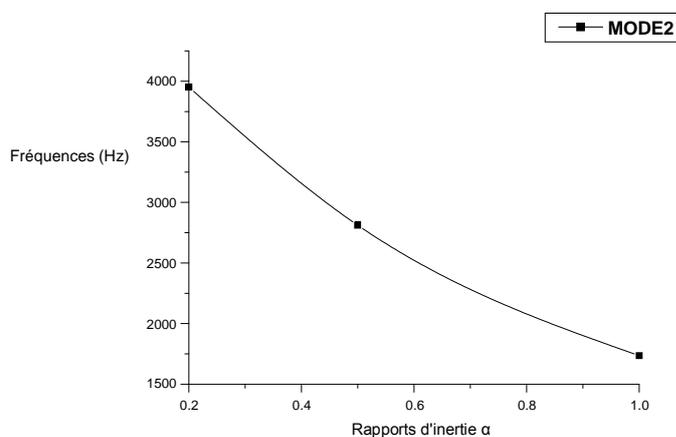
RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

Nous avons tracé les graphes pour le premier mode et le deuxième mode.



(a)



(b)

Figure VI-3b : Variation des fréquences en fonction du rapport d'inertie α des différentes sections pour la même valeur de surface, **(a)** mode 1, **(b)** mode 2

Dans les deux cas étudiés, nous remarquons que les fréquences des modes propres diminuent lorsque le rapport des inerties augmente, et elles augmentent lorsque le rapport des surfaces augmente cette augmentation des fréquences est due à des valeurs de raideur plus importantes.

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

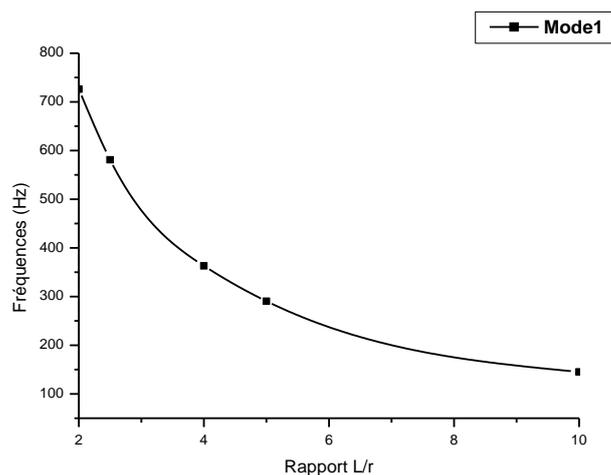
Pour tous les cas suivent nous prenons un rapport de longueur/ rayon ($L/r=5$) et nombre d'éléments égal à onze (11 éléments).

Cas 2 : variation des rapports L/r pour le cas d'une poutre de section circulaire

Le tableau (VI-4) nous donne les valeurs des fréquences pour les quatre premiers modes de vibration en fonction de la variation des rapports la longueur de la poutre/le rayon ($L/r= 2, 2.5, 4, 5$ et 10).

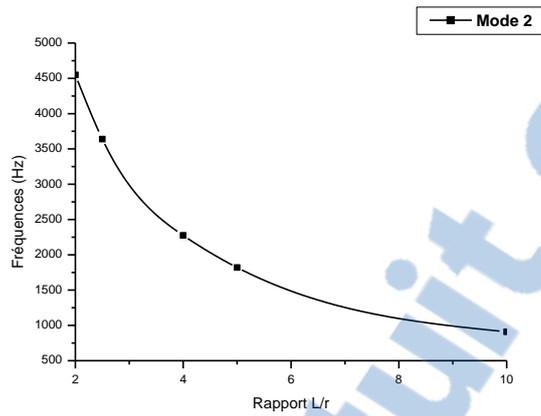
	Rapport de L/r				
	2	2.5	4	5	10
Mode1	726	581	363	275.8	145.2
Mode2	4549	3639	2275	1735.4	909.8
Mode3	12738	10190	6369	4896.9	2547.6
Mode4	24962	19970	12481	9697.8	4992.4

Tableau VI- 4: Variation des fréquences en fonction du rapport L/r pour une poutre de section circulaire

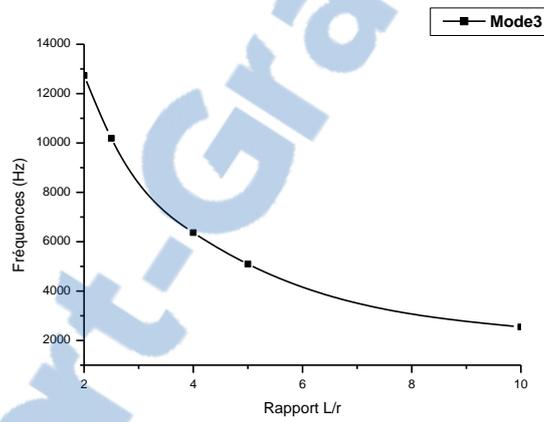


(a)

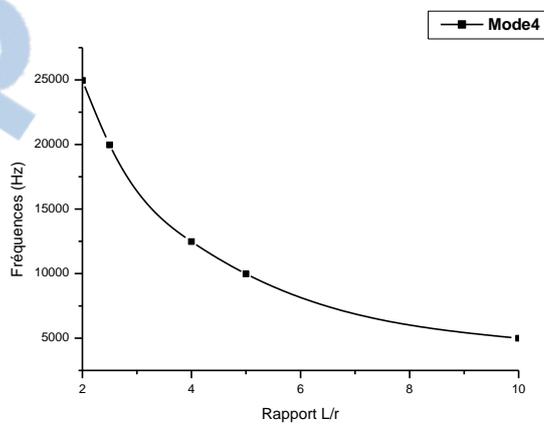
CHAPITRE VI



(b)



(c)



(d)

FigureVI- 4 : Tracés des graphes des quatre modes pour les rapports $L/r= 2, 2.2, 4,5, 10$ (a : mode1, b : mode2, c : mode3, d : mode4).

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

On constate sur la figure (VI-4) que les fréquences diminuent au fur et à mesure que le rapport L/r augmente. Ceci s'explique par le fait que la surface exposée au fluide devient plus grande, d'où un effet d'inertie plus grand qui induit une masse ajoutée plus grande.

Cas 3 : variation du rapport de masse R_m c.à.d. masse volumique du solide / la masse volumique du fluide (ρ_s/ρ_f).

Le tableau (VI-5) nous donne la variation des fréquences pour quatre rapports de masse R_m différents : 7.57, 7.8, 9.28 et 9.39.

Modes	rapport de masse $R_m = \rho_s / \rho_f$			
	7.57	7.8	9.28	9.39
	Fréquences (Hz)			
mode1	275.4	275.8	278	278.2
mode2	1733.1	1735.4	1748.1	1748.9
mode3	4891.3	4896.9	4927.3	4929.2
mode4	9689.3	9697.8	9743.4	9746.2

Tableau VI-5 : variation des fréquences en fonction du rapport de masse $R_m = \rho_s / \rho_f$

Sur le tableau (VI-5), Nous remarquons que les fréquences de vibration augmentent légèrement au fur et à mesure que le rapport R_m croît, cette augmentation des fréquences est due à la diminution de l'inertie c.à.d. une diminution de la masse du fluide.

cas 4 : variations des fréquences de vibration en fonction de la masse volumique du matériau.

Pour ce cas nous utilisons trois matériaux différents : l'acier, cuivre et laiton.

La variation des fréquences est donnée par le tableau (VI-6).

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

Modes	Matériaux		
	laiton	cuivre	acier
	8918	8390	7800
Mode1	164.2	184.2	275.8
Mode2	1032.4	1158.4	1735.4
Mode3	2910.5	3267.1	4896.9
Mode4	5757.2	6465.8	9697.8

Tableau VI-6 : Variation des fréquences pour différents matériaux

Ces valeurs nous ont permis de tracer les graphes donnés par la figure (V-5), pour les quatre modes, les fréquences sont données pour trois rapports masse volumique de l'acier sur la masse volumique de l'acier, du cuivre et du laiton (1, 0.9, et 0.8).

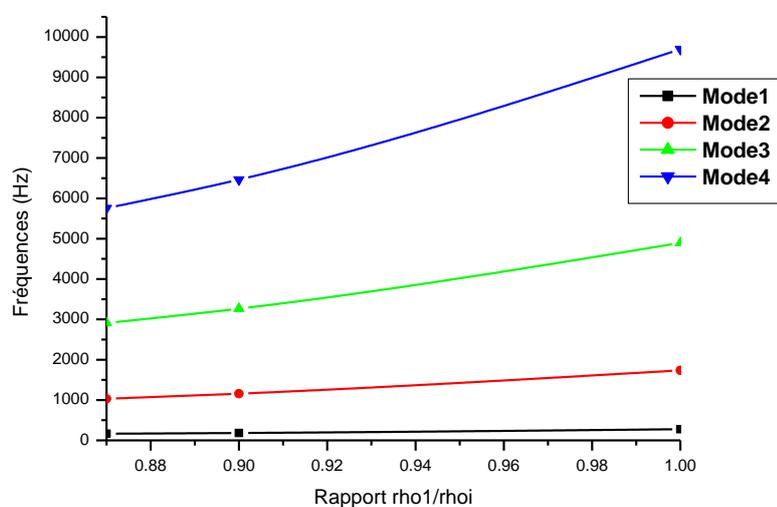


Figure VI-5: variation des fréquences en fonction du rapport de masse volumique de l'acier / masse volumique du cuivre et laiton

Nous remarquons que la valeur des fréquences augmente quand le rapport des masses volumiques croît. Cette augmentation est due à une diminution de l'inertie qui implique une masse moins grande.

Cas 5 : variation des fréquences en fonction de la variation du rapport de masse c.à.d. rapport de la masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide



RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

$R_m = \rho_s / \rho_f$ et de la variation du rapport longueur de la poutre sur la hauteur d'immersion H/L .

Pour trois rapports du nombre de masse (masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide) : $R_m = \rho_s / \rho_f = 7.5728, 7.8, 9.2857$ nous faisons varier le rapport longueur d'immersion sur la longueur de la poutre $H/L = 1, 1/2, 1/4, 1/5, \text{ et } 1/8$. Nous obtenons les valeurs des fréquences données par les tableaux (5-7).

Rapport $\rho_s / \rho_f = 7.5728$					
Modes	Rapport H/L				
	1	1/2	1/4	1/5	1/8
Mode1	282.8	289.1	289.9	290	290.1
Mode2	773.3	1814.5	1817.4	1817.9	1818.6
Mode3	4969.8	5084.2	5090.2	5091.3	5092.8
Mode4	9752.7	9967.5	9977.3	9978.9	9981.2

Rapport $\rho_s / \rho_f = 7.8$					
Modes	Rapport H/L				
	1	1/2	1/4	1/5	1/8
Mode1	282.8	289.1	289.9	290	290.2
Mode2	1773.3	1814.6	1817.5	1818	1818.6
Mode3	4969.8	5084.6	5090.4	5091.4	5092.8
Mode4	9752.7	9968	9977.5	9979.1	9981.3

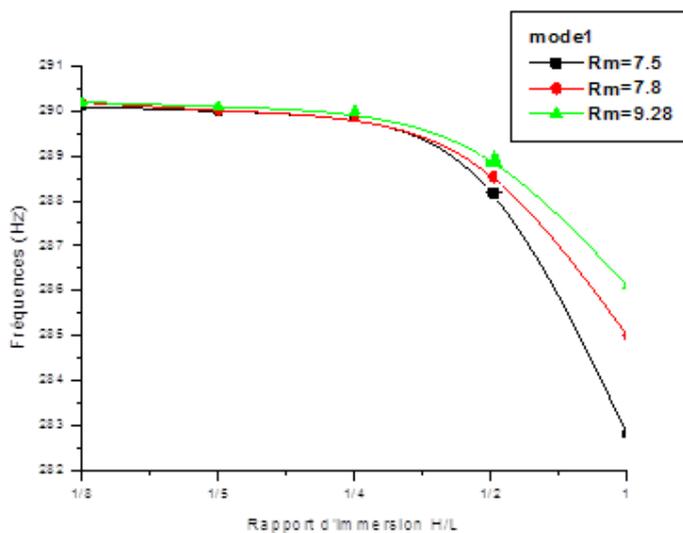
Rapport $\rho_s / \rho_f = 9.28$					
Modes	Rapport H/L				
	1	1/2	1/4	1/5	1/8
Mode1	284	289.3	290	290.1	290.2
Mode2	1780.5	1815.4	1817.8	1818.2	1818.8
Mode3	4989.3	5086.2	5091.1	5092	5093.2
Mode4	9788.8	9970.7	9978.7	9980	9981.9

Tableau (VI-7) : variation des fréquences en fonction des rapports d'immersion pour trois valeurs du nombre de masse $R_m = \rho_s / \rho_f$

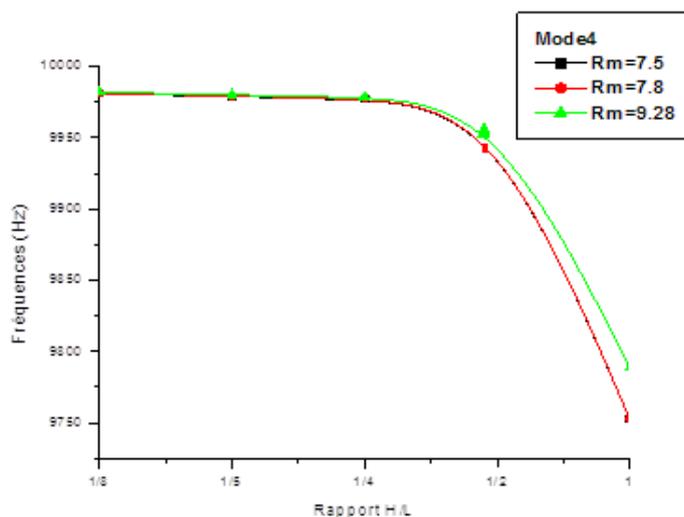
RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

Les tableaux (VI-7) nous permettent de tracer les graphes de la variation des fréquences représentés par la figure (VI-7). Nous avons tracé les graphes pour le premier mode et le quatrième mode.



(a)



(b)

Figure VI-6: Variation des fréquences en fonction du rapport de masse ($R_m = \rho_{hos} / \rho_{hof}$) et du rapport hauteur d'immersion sur la longueur de la poutre H/L
(a) :mode1,(b) :mode4

RESULTATS ET INTERPRETATION

CHAPITRE VI

Nous remarquons sur le graphe (VI-8) que les fréquences diminuent lorsque le rapport de la hauteur d'immersion H/L augmente, ces mêmes fréquences diminuent lorsque le rapport R_m diminue. Cette augmentation est due à une augmentation de l'inertie, générée par une masse ajoutée plus importante.

Pour un fluide léger, c.à.d. un rapport R_m grand nous avons des fréquences plus importantes.

L'effet de la masse ajoutée est d'autant plus marqué que la structure est plus immergée et que le fluide est plus dense.

Au cours de cette investigation, et selon les cas étudiés, nous avons relevé la caractérisation de l'effet inertiel. L'effet de couplage avec le fluide est caractérisé par le seul effet de masse ajoutée : la baisse ou l'augmentation des fréquences de vibration est due à l'effet de la masse ajoutée qui dépend des rapports selon les cas à savoir le rapport longueur sur rayon de la poutre (L/r : 2, 2,5, 4, 5 et 10, rapport de masse volumique du solide/masse volumique du fluide ($R_m = \rho_{\text{sol}}/\rho_{\text{fl}} : 7.57, 7.8, 9.28, 9.39$) et longueur sur la hauteur d'immergée ($H/L : 1/8, 1/5, 1/4, 1/2, \text{ et } 1$).

Conclusion

Ce travail a permis d'étudier les vibrations libres d'une poutre immergée partiellement et totalement dans un fluide. Nous déterminons les fréquences naturelles associés aux modes propres.

Le mouvement des particules du fluide, au voisinage de la structure, donne une variation de pression, on définit alors le couplage entre la structure et le fluide .Il a été nécessaire d'établir une formation adaptée pour la résolution des équations structure-fluide, en utilisant des méthodes numériques .Dans notre cas, on a utilisé le couplage « élément finis- éléments finis ».La modélisation du solide et le fluide sont réalisés par la méthode des éléments finis.

On sait que les méthodes qui définissent l'interaction des deux milieux prennent en compte la force d'inertie du fluide agissant sur la structure, dans ce cas nous utilisons l'hypothèse de la masse ajoutée. Elle est déterminée et conditionnée a celle du solide. Le système d'équations différentielles définit régit le comportement vibratoire de l'ensemble solide-fluide.Après avoir validé le programme élaboré sur Matlab,nous avons étudié plusieurs cas qui nous ont permis de déterminer l'influence des paramètres géométriques de la poutre sur les caractéristiques dynamiques que nous pouvons résumer comme suit :

- L'augmentation du rapport longueur sur le diamètre engendre une diminution de la fréquence c, a, d : une diminution de la rigidité de la structure.
- L'augmentation du rapport masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide engendre une augmentation de la fréquence c, a, d : une diminution de la masse ajoutée.
- L'augmentation du rapport longueur de la poutre sur la hauteur d'immersion et la diminution du rapport masse volumique du solide sur la masse volumique du fluide engendre une diminution des fréquences c, a, d une augmentation de l'inertie générée par une masse ajoutée plus importante
- L'augmentation du rapport d'inertie de différentes sections pour une même surface, donne une diminution des fréquences c'est-à-dire : une diminution d'inertie

Dans un travail futur nous proposons d'étudier un fluide compressible, et donner une comparaison de l'endommagement de structure sous l'influence de l'interaction solide-structure pour un fluide compressible et incompressible.

Liste des références

- [1]A. E. H. LOVE 1927 *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications, Inc.
- [2]J. W. STRUTT 1877 *Theory of Sound*. London: Macmillan Publications Co., Inc.
- [3] R. M. DAVIES 1937 *Philosophical Magazine*, 563. The frequency of transverse vibration of a loaded Fixed-free bar III. *The effect of rotatory inertia of the bar*.
- [4]S. P. TIMOSHENKO 1921 *Philosophical Magazine*, 744. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section*.
- [5]S. P. TIMOSHENKO 1922 *Philosophical Magazine*, 125. *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*.
- [6]Aquelet Nicolas Modélisation de l'impact hydrodynamique par un couplage fluide-structure
- [7]JEAN-NOEL GENCE. Professeur des Université, Lyon 1.MECANIQUE DES FLUIDES.*Les écoulements des fluides newtoniens. Principaux mécanisme associés aux mouvements des fluides*.Edition ellipse.
- [8]A.A.LAKIS et M.P.PAIDOUSSIS ,1971.Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid *Journal of Sound and Vibration* ,V19,N1,P175-205.
- [9]MEYERHOFF, W.K., 1970.Added mass of thin rectangular plates calculated from potential theory. *Journal of Ship research* 14,100-111.
- [10]B.PESEUX AND V. MARTIN. *Numerical procedure for fluid structure interaction: interface element*.JM Crolet and R Ohayon editors
- [11] Jean-François SIGRIST et Daniel BROU [Investigation of numerical method for modal analysis of a tube bundle with fluid-structure interaction] ; Service Technique et Scientifique DCN Propulsion 44620 la montagne, France
- [12] Jean-François Sigrist, Christian Lainé et Bernard Peseux Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide / structure] ; Mécanique & Industries 6, 553–563 (2005) AFM, EDP Sciences 2005 DOI: 10.1051 / meca:2005067.
- [13]MyungjoJhung, WalTaekim et Yong Horyu[Dynamic characteristics of cylindrical shells considering fluid-structure interaction]; Safety Research Division, Korea Institute of Nuclear Safety 19 Guseong-dong, Yuseong-gu,Daejeon,305-338,Korea*Corresponding author. E-mail: mjj@kins.re.kr Received August 3, 2009, Accepted for Publication September 16, 2009

LISTE DES REFERENCES

- [14] Bratu C., *Vibration des grandes structures marines*, Paris, 1978, bulletin atma édition.
- [15] Zienkiewicz O. et Taylor R., *The Finite Element Method-Solid and Fluid Mechanics: Dynamics and Non-Linearity*, London, McGraw-Hill, 1991, 4^e édition vol. II
- [16] Peseux B. et Quevat J.P., Linear fluid-structure interaction in unbounded domains, *ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. 185-188, Nouvelle Orléans, 1985.
- [17] Zienkiewicz O. et Taylor R., *The Finite Element Method-Basic Formulation and Linear Problems*, London, McGraw-Hill, 1989, 4^e édition vol. I.
- [18] Brid, Stewart et Lightfoot 1960, Cebeci et Brid.
- [19] Shaw 1977, Shapiro 1953, Kuethe et Chow 1986.
- [20] LAWDAN, Land LIFCHITZ, E(1971)-Mécanique des Fluides, Editions de Moscou.
- [21] Oudin H., Peseux B. et Quevat J.P., Dynamic response of coupled problems, pp. 340-347, Venise, Italie, 1984.
- [22] Peseux B. et Martin V., *Numerical Procedure for Fluid-Structure interaction : Interface elements. Computationan Methods for fluid-structure interaction*, 1994, Crolet/Ohayon-Longman Higher education edition, 78-103p.
- [23] Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques. Interactions fluide structure*, Hermès, 2001.
- [24] CIARLET P., *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, 1986.
- [25] DUVAUT G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [26] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, les éditions de l'Ecole polytechnique, 2002.
- [27] BATHE K., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [28] CIARLET P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.

LISTE DES REFERENCES

- [29] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [30] Susbielle G. et Bratu C.H., *Vagues et ouvrage pétroliers en mer*, Paris, 1981, technipédition, 78-103p.
- [31] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [32] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R., *The Finite Element Method Basic Formulation and Linear Problems (4^{ème} edition)*, Mac-Graw Hill, 1989.
- [33] Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques. Interactions fluide structure*, Hermès, 2001.
- [34] GIBERT R., *Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*, Eyrolles, 1986.
- [35] MORAND H.J., OHAYON R., *Fluid-Structure Interaction*, John Wiley & Sons, 1995.
- [36] BERMUDEZ A., DURAN R., RODRIGUEZ R., « Finite Element Analysis of Compressible and Incompressible Fluid-Solid System. », *Mathematics of Computation*, Vol.67, n°21, p.111-136, 1998.
- [37] HAMDI M., OUSSET Y., VERCHERY G., « A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.13, p. 139-150, 1978.
- [38] Peseux B. et Delhommeau G., Fluid/structure interaction : Influ
- [39] BOUJOUT J., « Mathematical Formulation of Fluid-Structure Interaction Problems », *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, vol.21, p. 239-260, 1987.
- [40] SANDBERF G., GORANSSON P., « A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis », *Journal of Sound and Vibration*, vol, 123, n°3, p. 507-515, 1988.
- [41] MARCUS M., « A Finite Element Method Applied to the Vibration of Submersed Plates », *Journal of Ship Research*, vol.22, p. 94-99, 1978.

LISTE DES REFERENCES

- [42] SIGRIST J.-F., GARREAU S., « Dynamic Analysis of Fluid-Structure Interaction Problems with Spectral Method Using Pressure-Based Finite Elements », *Finite Element Analysis in Design*, vol. 43, n°4, p. 287-300, 2007.
- [43] Sahi M., Ouset Y. et G. Verchery, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 54, 1981, pp. 473-500.
- [44] DE LANGERE E., *Fluides et Solides*, les éditions de l'Ecole polytechnique, 2001.
- [45] Martin V. et Peseux B., Flowchart and software for numerical coupling of dynamic problems in elastic media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37 n°22, 1994, pp. 4285-4308.
- [46] MOKHTARI M., MESBAH A., *Apprendre et maîtriser Matlab*, Springer Verlag, 1997.