

## **TABLE DES MATIERES**

<i>Dédicace</i> .....	iii
<i>Remerciements</i> .....	iv
<i>Résumé</i> .....	v
<i>Liste des figures</i> .....	xi
<i>Liste des tableaux</i> .....	xiii
<i>Nomenclature</i> .....	xiv

### **CHAPITRE 1 INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.1 Généralités .....	1
1.2 Problème physique .....	1
1.2.1 Définition .....	1
1.2.2 Méthodes de solution .....	2
1.3 Contenu de mémoire .....	2
1.4 Revue bibliographique .....	2

### **CHAPITRE 2 MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE**

2.1 Description du problème .....	14
2.2 Hypothèses Simplificatrices .....	15
2.3 Formulation mathématique .....	17
2.3.1 Équation de continuité .....	17
2.3.2 Équation de la conservation de la quantité de mouvement .....	17
2.3.3 Équation de conservation d'énergie .....	17
2.3.4 Équation de conservation de la concentration .....	17
2.4 Formulation fonction du courant-vorticité .....	19
2.4.1 Équation de la vorticité $\omega$ .....	20

2.4.2	Équation de conservation d'énergie .....	21
2.4.3	Équation de fonction du courant.....	21
2.4.4	Equation de conservation de la concentration .....	21
2.5	Conditions initiales et aux limites.....	21
2.5.1	Conditions initiales .....	21
2.5.2	Conditions aux limites .....	22
2.6	Transferts thermique et massique .....	22
2.7	Conduction Pure .....	23
2.7.1	Conditions aux limites .....	24

### ***CHAPITRE 3 SOLUTION NUMÉRIQUE***

3.1	Introduction.....	25
3.2	Discretisation des équations gouvernantes .....	26
3.2.1	Équation d'énergie, la concentration et la vorticité.....	26
3.2.2	Équation de fonction du courant.....	30
3.2.3	Champs de vitesse .....	31
3.2.4	Conditions aux limites .....	31
3.3	Algorithme et organigramme.....	32
3.4	Critère de convergence .....	33

### ***CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS***

4.1	Introduction.....	34
4.2	Validation du code de calcul.....	35
4.3	Choix du maillage.....	37
4.4	Résultats.....	40
4.4.1	L'existence des solutions naturelle et antinaturelle .....	40
4.4.2	L'effet du nombre de Rayleigh thermique .....	43
4.4.3	Calcul des valeurs supercritique et sous-critique du nombre de Rayleigh thermique .....	47

4.4.4	L'effet du nombre de Lewis .....	51
4.4.5	Cas d'une cavité élancée $A=4$ .....	56
4.4.6	L'existence des solutions multiples $A=4$ .....	60
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b> .....		70
<i>Références</i> .....		71

**LISTE DES FIGURES**

Figure 2-1 Représentation schématique du modèle physique.....	14
Figure 2-2 Schéma de phénomène de thermo-diffusion l'effet solet.....	14
Figure 4-1 Lignes du courant pour $Ra_T = 10^5$ , a) Présent travail, et b) Résultat de De Vahl Davis [09] .....	36
Figure 4-2 Isothermes pour $Ra_T = 10^5$ , a) Présent travail, b) Résultat de De Vahl Davis [09].....	36
Figure 4-3 Le taux de transfert de chaleur $Nu_m$ en fonction du nombre de Grille.....	38
Figure 4-4 Le taux de transfert de masse, $Sh_m$ , en fonction du nombre de Grille .....	38
Figure 4-5 Evolution temporelle du taux de transfert de chaleur, $Nu_m$ , pour deux valeurs d'incrément du temps, $\Delta t$ , et $Ra_T=10^4$ .....	39
Figure 4-6 Evolution temporelle du taux de transfert de masse, $Sh_m$ , pour deux valeurs d'incrément du temps, $\Delta t$ , et $Ra_T=10^4$ .....	39
Figure 4-7 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $Ra_T=10^5$ et $Le=1$ : a) $\psi_0 = 15.767$ , $Nu_m= 4.197$ et $Sh_m = 3.574$ , b) $\psi_0 = -15.767$ , $Nu_m= 3.574$ et $Sh_m = 4.197$ .....	41
Figure 4-8 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $Ra_T=10^5$ et $Le=0.5$ : a) $\psi_0 = 20.264$ , $Nu_m= 4.212$ et $Sh_m = 2.879$ , b) $\psi_0 = -20.369$ , $Nu_m= 3.965$ et $Sh_m = 3.554$ .....	41
Figure 4-9 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $Ra_T=10^5$ et $Le=2$ : a) $\psi_0 = 12.935$ , $Nu_m= 4.164$ et $Sh_m = 4.472$ , b) $\psi_0 = -13.835$ , $Nu_m= 3.241$ et $Sh_m = 4.957$ .....	42
Figure 4-10 Ligne de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $Ra_T=10^5$ . (a) $Le=0.1$ , $\psi_0 = -46.652$ , $Nu_m = 5.087$ et $Sh_m = 2.326$ , (b) $Le=10$ , $\psi_0 = 11.276$ , $Nu_m = 4.056$ et $Sh_m=8.032$ .....	42
Figure 4-11 Diagrammes de bifurcation : l'intensité de l'écoulement, $\psi_0$ , en fonction du nombre de Rayleigh, $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.....	44
Figure 4-12 Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de chaleur, $Nu_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh, $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.....	45
Figure 4-13 Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de masse, $Sh_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh, $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.....	46
Figure 4-14 Evolution temporelle de l'intensité de l'écoulement sous et sup du seuil de la convection supercritique.....	48

Figure 4-15 Le nombre de Rayleigh supercritique en fonction du nombre de Lewis ..... 49

Figure 4-16 Diagramme de bifurcation (a) variation de  $\psi_0$ , et (b) variation de  $Nu_m$ , en fonction de  $Ra_T$  pour  $Le=2$ ..... 50

Figure 4-17 Diagrammes de bifurcation : l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle..... 53

Figure 4-18 Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle..... 54

Figure 4-19 Diagramme de bifurcation : le taux de transfert de masse,  $Sh_m$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle..... 55

Figure 4-20 Diagramme de bifurcation : l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , avec  $A=4$ ..... 57

Figure 4-21 Diagramme de bifurcation : le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , avec  $A=4$ ..... 57

Figure 4-22 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^4$ . (a)  $Le=0.1$ ,  $\psi_0 = -19.500$ ,  $Nu_m = 3.278$  et  $Sh_m = 0.488$ . (b)  $Le=1$ ,  $\psi_0 = 7.207$ ,  $Nu_m = 2.975$  et  $Sh_m = 1.550$ . (c)  $Le=5$ ,  $\psi_0 = 5.697$ ,  $Nu_m = 2.916$  et  $Sh_m = 3.196$ . (d)  $Le=10$ ,  $\psi_0 = 5.386$ ,  $Nu_m = 2.899$  et  $Sh_m = 4.161$  ..... 59

Figure 4-23 Lignes de courant (gauche), évolution temporelle de la fonction de courant au centre de la cavité (droite). (a)  $Ra_T=800$ . (b)  $Ra_T=900$ . (c)  $Ra_T=920$ . (d)  $Ra_T=925$ . (e)  $Ra_T=930$ . (f)  $Ra_T=935$ . (g)  $Ra_T=10^3$ . (h)  $Ra_T=1100$ . (i)  $Ra_T=1130$ . (j)  $Ra_T=1135$ . (k)  $Ra_T=1140$ . (l)  $Ra_T=1200$ . (m)  $Ra_T=1300$ . (n)  $Ra_T=1500$ . (o)  $Ra_T=2000$ . (p)  $Ra_T=3000$ . (q)  $Ra_T=4000$ . (r)  $Ra_T=5000$ . (s)  $Ra_T=10^4$ ..... 66

Figure 4-24 Evolution temporelle de la fonction de courant au centre de la cavité pour  $Ra_T=10^3$ , entre  $t=14.6$  et  $t=16$ . ..... 67

Figure 4-25 Lignes de courant pour  $Ra_T=10^3$  et entre  $t=14.6$  et  $t=16$  ;  $t=14.6$ ,  $\psi_0 = -0.914$ ,  $Nu_m = 1.295$  et  $Sh_m = 0.474$ .  $t=14.8$ ,  $\psi_0 = -0.319$ ,  $Nu_m = 1.156$  et  $Sh_m = 0.437$ .  $t=15$ ,  $\psi_0 = 0.198$ ,  $Nu_m = 1.082$  et  $Sh_m = 0.404$ .  $t=15.2$ ,  $\psi_0 = 0.749$ ,  $Nu_m = 1.054$  et  $Sh_m = 0.378$ .  $t=15.4$ ,  $\psi_0 = 1.145$ ,  $Nu_m = 1.096$  et  $Sh_m = 0.361$ .  $t=15.6$ ,  $\psi_0 = 0.743$ ,  $Nu_m = 1.243$  et  $Sh_m = 0.357$ .  $t=15.8$ ,  $\psi_0 = -0.381$ ,  $Nu_m = 1.305$  et  $Sh_m = 0.362$ .  $t=16$ ,  $\psi_0 = -1.485$ ,  $Nu_m = 1.246$  et  $Sh_m = 0.358$  ..... 69

## ***LISTE DES TABLEAUX***

Tableau 4-1 Comparaison des valeurs de la fonction de courant au centre de la cavité avec les résultats rapportés par De Vahl Davis [09].....	35
Tableau 4-2 Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen avec les résultats rapportés par De Vahl Davis [09] .....	35
Tableau 4-3 Rayleigh supercritique et subcritique pour différents valeurs du nombre de Lewis .....	49
Tableau 4-4 Rayleigh supercritique pour $A=4$ et différents valeurs du nombre de Lewis..	56

**NOMENCLATURE**

$A$	rapport de forme de la cavité, $H'/L'$
$D$	diffusivité solutale
$g$	Accélération de la pesanteur.
$H'$	hauteur du système
$j'$	flux de masse constant ( par unité de surface)
$k_f$	conductivité thermique du fluide
$l^*$	longueur caractéristique du système
$L'$	largeur du système
$Le$	nombre de lewis, $\alpha/D$
$N$	rapport de force de volume, $\beta_S \Delta S^* / \beta_T \Delta T^*$
$Nu$	nombre de Nusselt
$q'$	flux de chaleur constant (par unité de surface)
$P'$	pression hydrodynamique
$P$	pression hydrodynamique adimensionnelle, $P'/P^*$
$P^*$	pression caractéristique, $\rho_0 U^{*2}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/\alpha$
$Ra_T$	nombre de Rayleigh thermique, $g\beta_T \Delta T^* l^{*3} / \nu\alpha$
$Ra_S$	nombre de Rayleigh solutale, $g\beta_S \Delta S^* l^{*3} / \nu\alpha$
$S'$	concentration dimensionnelle
$S$	concentration adimensionnelle, $(S' - S'_0) / \Delta S^*$
$S'_0$	concentration de référence à $x' = y' = 0$
$\Delta S^*$	écart caractéristique de concentration
$Sh$	nombre de Sherwood
$T'$	température dimensionnelle
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_0) / \Delta T^*$
$T'_0$	température de référence à $x' = y' = 0$
$\Delta T^*$	écart caractéristique de température
$t'$	temps dimensionnel
$t$	temps adimensionnel, $t'/t^*$

---

$t^*$	temps caractéristique, $l^*/U^*$
$U^*$	vitesse caractéristique
$u'$	vitesse dimensionnelle dans la direction $x$
$u$	vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ , $u'/U^*$
$v'$	vitesse dimensionnelle dans la direction $y$
$v$	vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ , $v'/U^*$
$x', y'$	coordonnées cartésiennes dimensionnelle
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes adimensionnelle, $(x'/l^*, y'/l^*)$

### Symboles grecques

$\alpha$	Diffusivité thermique du fluide [ $m^2/s$ ].
$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique du fluide.
$\beta_S$	Coefficient d'expansion solutale du fluide.
$\Phi$	Angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal.
$\nu$	viscosité cinématique du fluide.
$\rho$	Masse volumique du fluide.
$\phi$	Variable dépendante générale.
$\omega$	La vorticité.
$\psi$	Fonction de courant.

### Exposants

<i>Sous</i>	valeur au seuil de la convection sous-critique.
<i>Sup</i>	valeur au seuil de la convection supercritique.

### Indices

$M$	valeur moyenne.
$C$	valeur critique.

### Opérateurs

$$\mathcal{F}(f) = \sin \Phi \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \Phi \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\mathcal{T}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$



# ***CHAPITRE 1***

## ***INTRODUCTION***

### ***ET REVUE***

#### ***BIBLIOGRAPHIQUE***

## **1.1 Généralités**

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par convection naturelle, dans des espaces confinés est produit généralement en présence de plus d'une source de forces de volume qui cohabitent et induisent l'écoulement. Dans le cas le plus fréquent les deux agents responsables de ces mouvements convectifs sont les gradients thermiques et de concentrations.

Ce phénomène peut jouer un rôle important dans certains processus naturels où configurations industrielles, tel que on peut le voir dans : les séparateurs dans le domaine de pétrole et pendant la création du brute souterrain, lors des mécanismes de changement de phases des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermo-physiques des alliages, l'environnement, dans des réacteurs chimiques, lors du stockage des déchets radioactifs, lors du stockage des gaz liquides, les opérations de dessalement de l'eau de mer, la croissance cristalline, etc .....

## **1.2 Problème physique**

### **1.2.1 Définition**

La présente étude porte de façon générale sur la modélisation de la convection naturelle d'origine thermosolutale dans une enceinte carrée, remplie d'un fluide binaire. La cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme est constante  $g$ , ses parois soumis à des gradients de température et concentration croisés. Ces derniers sont engendrés par des conditions aux limites thermique et solutale de type Neuman, les effets des paramètres de contrôle du problème sur la structure de l'écoulement, les transferts de chaleur et de masse sont pris dans cette recherche.

### 1.2.2 Méthodes de solution

Les écoulements engendrés sont régis par un système d'équations différentielles non linéaires fortement couplées. Dans la plupart des cas, la solution n'est possible que par des voies numériques.

Pour résoudre le problème posé dans cette étude, on a choisi la méthode des différences finies pour discrétiser le système d'équations qui dirige ce phénomène physique.

### 1.3 Contenu de mémoire

Nous avons jugé utile, dans le but d'améliorer la clarté de ce travail, de structurer ce mémoire en seulement trois chapitres en plus du présent.

Un deuxième chapitre présentera la configuration géométrique étudiée (modèle physique) ainsi que le modèle mathématique traduisant les équations régissant le phénomène de la convection thermosolutale.

Le troisième chapitre sera consacré à la présentation de la méthode des différences finies et sa mise en œuvre pour la discrétisation des équations du problème.

Nous rassemblerons dans le quatrième chapitre les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs paramétriques.

En fin nous avons terminé ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

### 1.4 Revue bibliographique

Cette partie est consacrée à la revue des principales investigations effectuées sur la convection double diffusive dans des enceintes et qui sont en relation avec notre étude. La synthèse des travaux disponibles sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluides et poreux est consignée dans les livres de Bejan 1984, Platten et Legros 1984 et Nield et Bejan 1992.

L'origine de notre sujet est le travail de Paliwal et Chen (1980a, 1980b) qui ont étudié l'effet de l'inclinaison d'une couche fluide sur le seuil de la convection

thermosolutale. Dans ce problème ils ont imposé une stratification solutale initiale dans la direction verticale. Un chauffage latéral a été ensuite appliqué sur les parois verticales de la couche. Dans une première partie, une étude expérimentale a été menée en faisant varier l'angle d'inclinaison  $\theta$  considéré par rapport au plan horizontal à travers une gamme d'angles d'inclinaison ( $\theta$  de  $-75^\circ$  à  $+75^\circ$  : un angle négatif indique un chauffage de la paroi supérieure et un angle positif désigne le chauffage de la paroi inférieure), les résultats ont démontrés la formation périodique de cellules convectives dont la structure et le régime dépendent fortement de l'angle d'inclinaison du système. Concernant le nombre de Rayleigh thermique critique, les résultats ont montrés qu'il est non-symétrique par rapport à l'état horizontal ( $\theta = 0^\circ$ ) ; le chauffage de la paroi inférieure est plus stable que le chauffage de la paroi supérieure. Ceci est montré comme étant le résultat du gradient de soluté vertical. Dans la deuxième partie de l'étude, une analyse linéaire a été établie, les équations gouvernantes sont résolues en utilisant la technique de Galerkin. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

La stabilité de la convection thermosolutale dans une enceinte soumise à un gradient de chauffage constante, avait été étudiée expérimentalement par Chen et al. 1971. Le fluide à l'intérieur de la cavité était stable et stratifié. L'enceinte était caractérisée par deux parois latérales en Aluminium maintenues à des températures différentes mais constantes tandis que les deux autres sont en Plexiglas pour permettre l'observation du mouvement. Le paramètre actif est le nombre de Rayleigh. A des nombres de Rayleigh sous-critiques, le fluide s'élève presque imperceptiblement, parallèlement à la plaque chauffée et le transport latéral de chaleur se fait entièrement par conduction. A des nombres de Rayleigh supercritiques l'écoulement devient instable et une convection cellulaire se forme, les cellules apparaissent simultanément tout le long de la paroi chauffée. Elles croissent dans la direction latérale et atteignent finalement la paroi opposée. La valeur expérimentale de Rayleigh critique dans laquelle la convection cellulaire se produit est  $15000 \pm 2500$ .

Bejan et Khair 1985 ont présenté une étude fondamentale de la convection thermosolutale près d'une surface verticale noyée dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire. L'effet de pesanteur est dû à la variation de température et de concentration à travers la couche limite. Dans la première partie de leur étude, l'analyse d'échelle montre que la convection naturelle se fait selon l'un des quatre régimes possibles, selon les valeurs

du rapport des forces de volume  $N$  et du nombre de Lewis  $Le$ . Les échelles des flux de chaleur et de masse transférés sont déterminées pour chaque régime. Dans la deuxième partie de l'étude, le problème de couche limite est résolu à travers une formation de similitude dans les domaines  $-5 \leq N \leq 4$  et  $1 \leq Le \leq 100$ . Les solutions de similitude confirment la validité de l'ordre de grandeur limitant les résultats révélés par l'analyse d'échelle.

Kamotani et al. 1985 ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans des enceintes rectangulaires à faible rapport de forme et avec des gradients combinés horizontaux de température et de concentration. Pour imposer les gradients de concentration un système électrochimique a été employé. Pour différentes conditions expérimentales, des configurations d'écoulement complexes et variées sont observées. Les distributions de température et les flux de transfert massiques sont étudiés, et les conditions d'instabilité sont rapportées.

Trevisan et Bejan 1986 ont étudié analytiquement et numériquement la convection thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse sur un côté. L'écoulement est conduit par l'effet combiné d'Archimède dû aux variations de température et de concentration à travers le milieu poreux. Une solution analytique linéarisée d'Oseen pour le régime de couche limite à  $Le = 1$ , et une solution de similitude pour des écoulements conduits par le transfert de chaleur ( $N = 0$ ) et avec  $Le < 1$ , a été fait dans la première partie de l'étude. La deuxième partie de l'étude contient la solution numérique qui valide les résultats analytiques et fournit des données dans le domaine non couvert par l'analyse. Les résultats numériques s'étendent dans le domaine de nombre de Rayleigh  $20 < Ra_T < 10^5$ , celui du rapport de gravité  $-11 < N < 9$ , celui du rapport de forme  $1 < A < 4$  et celui du nombre de Lewis  $0,03 < Le < 40$ .

Trevisan et Bejan 1987 ont étudié théoriquement et numériquement le transfert thermosolutale à grand nombre de Rayleigh dans une couche poreuse chauffée par le bas. L'étude s'intéresse particulièrement à l'écoulement de Darcy, aux échelles des transferts de chaleur et de masse de la cellule unique (rouleau) qui existe dans le régime de convection permanente bidimensionnelle. Les solutions numériques sont trouvées pour un nombre de Rayleigh varie dans le domaine de 50-2000. Les résultats numériques s'accordent avec les conclusions théoriques d'une analyse scalaire basée sur (i) deux échelles de température dans la cellule, (ii) un champ d'écoulement sans couches limites horizontales, et (iii) des

régions thermiques à la base et au sommet de la cavité qui ne sont pas suffisamment minces pour être des couches limites. Des corrélations sont obtenues entre le taux de transfert de masse et les nombres de Lewis et de Rayleigh. La transition entre l'écoulement de Darcy et l'écoulement de Forschheimer dominé par l'inertie est discutée par la suite avec les échelles du régime de Forschheimer.

Srinivasan et Angirasa 1988 ont étudié numériquement le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle à partir d'une surface verticale. Utilisant la méthode des différences finies avec un schéma explicite pour résoudre les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces. Les approximations de la couche limite et de Boussinesq ont été utilisées. Les profils de vitesse, de température et de concentration montrent une interaction complexe entre température et concentration. Les effets du nombre de Schmidt et du rapport des forces de volume sur le profil de température sont discutés.

Lee et al. 1988 ont présenté une étude expérimentale de la convection naturelle dans une cavité saturée par un fluide binaire (eau salée), due à des gradients horizontaux de température et de concentration, cette étude a été faite avec deux valeurs du rapport de forme 0,2 et 2,0. Il apparaît deux types de mouvement global de fluide : une configuration avec une seule cellule et une configuration multicouche, selon la valeur du rapport des forces de volume. La formation et la croissance d'une structure stratifiée a été observée. Le nombre de couches qui apparaissent dans le cas des forces opposées d'origine thermique et solutale est plus grand que dans le cas des forces coopérants. A cause de la nature diffusive de la chaleur et de la salinité, des profils intéressants de température et de concentration dans le régime multicouche, ont été obtenus.

Wang et Chen 1988 ont utilisé un système électrochimique pour étudier la convection thermosolutale avec des gradients horizontaux de température et de concentration dans une cavité rectangulaire avec un rapport d'aspect élevé. Les résultats obtenus montrent trois cellules dans le cas coopérant, avec les paramètres : rapport d'aspect  $A=3$ , nombre de Grashof thermique  $Gr_t=1,94 \times 10^8$ , nombre de Grashof massique  $Gr_s=3,89 \times 10^8$  et une cellule principale avec une cellule secondaire avec  $A=7$ ,  $Gr_t=1,34 \times 10^8$ ,  $Gr_s=1,28 \times 10^9$ . Dans le cas opposant, dans le cas où  $A=7$ ,  $Gr_s=3,89 \times 10^8$  et le nombre de Grashof thermique varié, les résultats montrent l'apparition de quatre cellules pour  $Gr_t=7,75 \times 10^7$  et six cellules ou plus pour  $Gr_t=4,84 \times 10^8$ .

Sévélédér et Petit 1989 se sont intéressés à l'influence des conditions aux limites de la température et de la concentration sur la structure d'écoulement de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée. L'étude a été faite avec les paramètres suivants :  $Pr = 2.2$ , le nombre de Schmidt  $Sc=130$ ,  $Ra_T=5.5 \times 10^5$ ,  $Ra_S = 1.3 \times 10^5$ , qui correspondent à un gaz liquéfié. Les résultats montrent l'apparition d'une seule cellule à cause de la condition de température et de concentration uniforme sur les parois verticales, mais la condition de la variation linéaire de température et de concentration fait apparaître quatre cellules.

Lee et Hyun 1990 ont présenté une étude numérique de la convection thermosolutale dans une enceinte rectangulaire avec des gradients combinés de température et de concentration horizontaux. Les conditions aux limites sont imposées sur les faces verticales opposées de façon que les effets de forces de volume thermique et solutale s'opposent. Des équations différentielles ont été résolues numériquement pour des grands nombres de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ) et solutale ( $Ra_S$ ) pour les champs de température et de concentration décrits à de grands nombres de Lewis. Des régimes distincts en régime permanent sont identifiés quand le rapport de forces de volume ( $Ra_T / Ra_S$ ) varie largement. Les structures des couches limites thermiques, solutales et dynamiques près des parois ont été examinées. Quand le rapport de forces de volume est modéré, la structure multicouche de l'écoulement a été obtenue : le champ thermique en forme S et la distribution de concentration en escalier sont examinés. Lorsque le rapport de forces de volume augmente depuis une faible valeur, le nombre de Nusselt moyen  $Nu_m$  décroît de façon monotone jusqu'à une valeur caractéristique de la conduction; néanmoins le nombre de Sherwood moyen  $Sh_m$  atteint une valeur minimale quand le rapport de forces de volume prend une valeur modérée.

Han et Kuehn I 1991 ont étudié les écoulements de convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle, en utilisant une technique électrochimique avec des électrodes verticales maintenues à des températures différentes. L'évolution au tour du temps de structures multicellulaires sont montrées par les photographies de l'écoulement. Les profils de température et de concentration et les caractéristiques du transfert global de chaleur et de masse sont présentés.

Han et Kuehn II 1991 ont étudié numériquement l'écoulement de convection naturelle doublement diffusive dans une cavité rectangulaire verticale à rapport de forme

égale à 4, et des gradients de température et de concentration sont imposés dans la direction horizontale. Les équations différentielles gouvernantes sont résolues par un algorithme aux différences finies. Les structures multicellulaires de l'écoulement observées expérimentalement par les auteurs sont simulées avec succès. Différents régimes de structure d'écoulement sont obtenus en fonction du rapport des nombres de Grashof pour des conditions de flottement aidées ou opposées.

Lee et Hyun.1991 la convection dans une cavité soumise à des gradients croisés de température et de concentration a été investiguée par ces auteurs. Ils ont démontré l'existence de trois régimes distincts : un régime convectif monocellulaire, un régime convectif multicellulaire et un régime de conduction pure.

Lee et Hyun 1991 ont étudié numériquement la convection thermosolutale dans une enceinte rectangulaire. Les analyses faites pour un large domaine du nombre de Rayleigh solutal  $Ra_S$  et un nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T = 10^7$ . Les résultats montrent deux régimes d'écoulement, le régime supercritique pour  $Ra > Ra_C = 1.5 \times 10^4$  et le régime subcritique pour  $Ra < Ra_C$ .

Shyy et Chen 1991 ont étudié la convection à double diffusion avec des gradients horizontaux de température et de concentration, les résultats montrent que l'effet des nombres de Rayleigh et de Lewis sur le transfert thermique est très important. L'augmentation du rapport de poussée  $N$  montre que la convection devient de plus en plus contrôlée par le transfert solutal.

Béghein et al. 1992 ont étudié numériquement la convection thermosolutale en régime stationnaire dans une cavité carrée remplie d'air, soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. L'influence de la force de poussée solutale sur les taux de transfert de chaleur ou de masse, est étudié dans la première partie de la simulation : les nombres de Lewis et de Rayleigh thermique sont constants ( $Le = 1$ ,  $Ra_T = 10^7$ ), le nombre de Rayleigh solutale varie ( $Ra_S = 10^5$  à  $5 \times 10^7$ ). La deuxième partie de la simulation se rapporte à l'analyse de l'influence du nombre de Lewis sur le mouvement du fluide, dans les cas d'écoulements à force de poussée thermique dominante ( $Ra_T = 10^7$ ,  $Ra_S = 0$ ) et à force de poussée solutale dominante ( $Ra_T = 0$ ,  $Ra_S = 10^7$ ). Le nombre de Lewis varie de 0.3 à 5. Des corrélations sont obtenues entre les taux de transfert de chaleur et de masse et les nombres adimensionnels caractérisant les deux phénomènes.

La convection instationnaire et stationnaire dans une cavité poreuse verticale saturée par un fluide homogène a été étudié numériquement par Alavyoon 1993 sur la base d'un modèle mathématique en deux dimensions. Les forces de flottabilité qui induisent le mouvement du fluide sont dues à des flux coopération et constants de chaleur et de masse sur les parois verticales. Pour l'état stationnaire, une solution analytique valable pour un écoulement stratifié dans des enceintes élancées, est présenté. Les comparaisons entre les solutions numériques et analytiques sont présentées pour  $0.1 \leq Ra_S \leq 500$ ,  $2 \leq Le \leq 10^2$ ,  $10^{-2} \leq N \leq 10^4$  et  $1 \leq A \leq 10$ , où  $Ra_S$ ,  $Le$ ,  $N$  et  $A$  sont le nombre de Rayleigh solutale, le nombre de Lewis, l'inverse du rapport de flottabilité et le rapport d'aspect géométrique, respectivement. Pour des rapports d'aspect géométriques suffisamment élevés, l'accord entre les solutions numériques et analytiques est bon. Les résultats numériques indiquent que pour  $Le > 1$  les couches thermiques au sommet et au fond de l'enceinte sont plus minces que leurs homologues solutale. Dans le régime de la couche limite, et pour  $A$  suffisamment élevé, les épaisseurs des couches limites verticales de la vitesse, la concentration et la température sont présentées comme étant égales, indépendamment de la valeur de  $Le$ .

Chang et al. 1993 ont étudié l'effet du rapport des forces de volume sur la structure de l'écoulement et les caractéristiques de fluctuations de la vitesse, la température et la concentration. L'étude montre trois différentes structures d'écoulement pour le cas où les forces de volumes sont opposées.

- Un écoulement multicouche pour un rapport de force  $N = -5$ .
- Une cellule secondaire dominante pour un rapport de force  $N = -2$  et  $-2,1$ .
- Et un régime d'écoulement mélangé entre les deux cas ( $N = -2,15$  ;  $-2,2$  et  $-2,5$ ).

Zahou et Zebib 1994 ont étudié numériquement la convection à double diffusion en régime oscillatoire pour  $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 1,5 \div 4,5$ . Le but fondamental de cette investigation est de prédire les paramètres critiques associé à ce phénomène et leurs influences sur le transfert de chaleur et de masse. Les résultats obtenus indiquent que le début du mouvement oscillatoire se produit pour un nombre de Grashof égal à  $10^4$ . Ces résultats ont permis d'étudier l'effet du nombre de Schmidt sur  $Gr_{cr}$ ; quand  $Sc$  augmente et  $Gr_{cr}$  diminue et l'effet de rapport d'aspect  $A$  sur  $Gr_{cr}$ ; quand  $A$  augmente  $Gr_{cr}$  diminue.



Bennacer et Gobin I 1996 ont présenté une étude analytique et numérique de la convection double diffusive à travers un fluide binaire contenu dans une enceinte à deux dimensions. Des valeurs constantes de la température et de la concentration sont imposées sur les parois verticales, les autres parois sont adiabatiques et imperméables. Un code numérique, basé sur la méthode des volumes finis, et une approche de la loi d'échelle sont utilisés pour analyser l'influence des différents paramètres qui caractérisent ces écoulements thermosolutaux, le problème de transfert de masse est étudié dans l'état stationnaire, une corrélation générale de transfert de masse est proposée, qui est valable sur une large gamme des paramètres de control.

Gobin et Bennacer II 1996 ont présenté des simulations numériques de la convection naturelle à double diffusion dans la même géométrie et mêmes conditions aux limites, de l'étude au-dessus. L'analyse concerne l'influence des différents paramètres régissant le problème sur les caractéristiques de transfert de chaleur et la structure d'écoulement. L'étude est axée sur les solutions stationnaires dans la situation de coopération. A des nombres élevés de Lewis, les simulations numériques montrent que le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation des rapports de flottabilité. Ce phénomène est analysé sur la base de la structure de l'écoulement, et une analyse d'échelle est prévue pour estimer la diminution du transfert de chaleur. Ensuite, l'influence des paramètres sur la formation d'une structure d'écoulement multicellulaire est discutée.

Comme rapporté par Mamou et al. 1996, les effets du nombre de Rayleigh thermique, du rapport de force de volume et du nombre de Lewis sur les nombres de Nusselt et de Sherwood, ont été étudiées analytiquement et numériquement dans une cavité rectangulaire. Les solutions ont été obtenues dans la gamme des paramètres suivants :  $1 \leq Ra_T \leq 10^7$ ,  $0 \leq N \leq 10^5$ ,  $10^{-3} \leq Le \leq 10^3$ ,  $1 \leq A \leq 20$ . Les résultats obtenus montrent un bon agrément entre la solution numérique et la prédiction analytique.

Le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle adjacente aux surfaces verticales situées dans un milieu poreux saturé par un fluide, est étudié numériquement par Angirasa et al. 1997. Les résultats numériques confirment la validité des analyses de la couche limite pour les valeurs élevées du nombre de Rayleigh. Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh et les forces de flottabilité sont opposées mais de même ordre de grandeur, des solutions complètes sont nécessaires. La structure d'écoulement, de température et de concentration sont régies par des interactions complexes entre les taux de

diffusion et du rapport de flottabilité. Les résultats numériques des profils de la vitesse, la température et la concentration sont présentés pour une vaste gamme des paramètres de control et les mécanismes physiques complexes d'écoulement et de transport sont clairement analysés. Les résultats numériques des nombres de Nusselt et Sherwood sont donnés.

Nishimura et al. 1998 ont étudié le transfert thermosolutale à travers un gaz binaire dans le cas où les forces de volume thermique et solutale sont horizontales et opposées. Le but de cette investigation est d'étudier l'effet du rapport des forces de volume sur la structure de l'écoulement, avec  $Ra_T = 10^5$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0,0 \div 2,0$  et  $A=2$ . Les auteurs ont trouvé que l'écoulement oscillatoire se produit dans la limite de rapport des forces de buoyancy  $N = 0,9-1,122$ .

Le seuil de la convection double diffusive dans une cavité poreuse horizontale a été étudié numériquement par Mahidjiba et al. 2000 en utilisant la stabilité linéaire. La formulation mathématique est basée sur le modèle de Darcy avec l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites mixtes de chaleur et de masse sont spécifiées sur les parois horizontales de l'enceinte tandis que les autres parois sont imperméables et adiabatiques. Les méthodes de Galerkin et des éléments finis sont utilisées pour résoudre les équations de perturbation. Le seuil de convection est trouvé être dépendant du rapport d'aspect géométrique, la porosité normalisée, le nombre de Lewis, le rapport de flottabilité et les conditions aux limites thermique et solutale. Pour une enceinte confinée, il est montré qu'il existe un certain nombre de Rayleigh supercritique pour l'apparition de la convection supercritique et un nombre de Rayleigh sur-stable à qui la sur-stabilité peut survenir. En outre, le régime sur-stable se déclenche à un certain nombre de Rayleigh critique au cours de laquelle la transition d'un régime de convection oscillatoire en mode direct se produit. Cependant, pour une cavité mince, les résultats indiquent l'absence d'un régime sur-stable. Les résultats numériques obtenus pour la convection à amplitude fini montrent que la convection sous-critique est possible.

Sezai et Mohamed 2000 ont étudié l'influence du nombre de Lewis sur la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte cubique, l'étude a été simulée dans le cas tridimensionnel où les gradients de température et de concentration sont horizontalement opposés, avec les paramètres de contrôles suivants :  $Pr=10$ ,  $10 < Ra_T < 2 \times 10^5$ ,  $-2,0 < N < 0$ ,  $0,1 < Le < 150$ . Le premier cas le nombre de Rayleigh thermique et le

rapport des forces de flottabilité sont des constants ( $Ra_T = 10^5$ ,  $N = -0,5$ ) et le nombre de Lewis varie de  $0,1 \div 150$ . Dans le deuxième cas  $N$  et  $Le$  sont des constants ( $N = -0,5$ ,  $Le = 10$ ) et le nombre de Rayleigh thermique varie :  $10 < Ra_T < 2 \times 10^5$ , les résultats montrent l'apparition d'un écoulement secondaire dans le plans transversal quand  $N$  augmente et une variété de l'écoulement bifurcation est observée entre  $(-8, 0 < N < 0)$ .

Mamou et al. 2001 ont étudié analytiquement et numériquement l'apparition de la convection thermosolutale et les écoulements à amplitude finie dans une enceinte horizontale. Les conditions aux limites de la température et de la concentration de type Dirichlet ou Neumann sont appliquées sur les deux parois horizontales de l'enceinte, tandis que les parois verticales sont supposés imperméables et adiabatiques. Les équations différentielles gouvernantes sont résolues numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. Pour étudier la stabilité linéaire de l'état de repos et les flux entièrement développées, une technique numérique fiable est mise en œuvre sur la base de Galerkin et la méthode des éléments finis. En utilisant la méthode de Galerkin, une analyse de stabilité non linéaire est également effectuée pour examiner la possibilité d'existence des flux convectifs en dessous du seuil des instabilités monotone. Lorsque le soluté se stabilise, l'analyse de stabilité linéaire indique que les écoulements sous-critiques sont possibles et les seuils stationnaires, oscillatoires et sous-critiques de la convection sont déterminés en fonction des paramètres gouvernants. Comme prévu par la solution non linéaire, différents phénomènes ont été observés, en particulier en dessous du seuil d'instabilité monotone, comme des flux oscillatoires périodiques ou aperiodiques avec des structures d'écoulement complexes. Loin du seuil, l'analyse de stabilité de la solution d'écoulement parallèle est effectuée et le seuil de bifurcation de Hopf (la transition de l'état stationnaire à l'état instationnaire) est obtenu. Dans la gamme des paramètres régissant considérées dans cette étude, les résultats analytiques obtenus avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle étaient en bon accord avec les résultats de la simulation numérique non linéaire.

La transition de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité rectangulaire a été étudiée numériquement et analytiquement par Bennacer et al 2001. Les parois verticales sont différentiellement chauffées et le gradient solutal imposée verticalement, l'étude a été simulée pour les paramètres suivants ;  $A = 2$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 100$  et le nombre de Rayleigh thermique varie entre  $7 \times 10^3$  et  $7 \times 10^5$ .

Les résultats montrent ont pu être distingués trois cas :

- Un régime thermique convectif pour des valeurs relativement petites de  $N$  ( $N < 1$ ).
- Un régime diffusif thermique et solutal pour des valeurs élevées de  $N$  ( $N > 8$ ).
- Une cellule convective thermosolutale pour  $N$  modéré ( $1 < N < 8$ ).

Bourich et al. 2004 ont étudié numériquement la double diffusion dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire dans une cavité carrée soumise à des gradients de température et de concentration croisés. Cette étude concentre sur l'effet des forces de flottabilité solutale induite par le gradient horizontal de concentration, sur la multiplicité des solutions obtenues dans le problème classique de Bénard. Les résultats obtenus montrent que, l'effet du rapport des forces de volume sur le comportement dynamique du fluide et le transfert de chaleur et de masse dépend de la nature de la solution, de nombre de Lewis et de Rayleigh Thermique. Il est démontré que la gamme du rapport des forces de volume pour laquelle une solution donnée est maintenue dépend à la fois du nombre de Lewis et de Rayleigh thermique. Deux types différents de transitions ont été observées ; l'une pour la valeur du nombre de Rayleigh thermique est inférieure à la valeur critique, la transition d'un écoulement convectif monocellulaire dans le sens horaire à un écoulement dans le sens trigonométrique est direct et se produit en cascade quand la valeur du nombre de Rayleigh thermique est supérieur à la valeur critique. Toutes les transitions sont accompagnées par une augmentation du transfert de chaleur, mais par fois, ils conduisent à une diminution du transfert de masse. Des corrélations sont proposées donnant les valeurs critiques pour la transition qui se produit en cascade.

Bahloul et al. 2004 ont présenté une étude analytique et numérique sur le phénomène de la convection double diffusif dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire dans un cylindre vertical soumis à un gradient de température verticale et un gradient de concentration horizontale. Ces auteurs ont représenté que la solution analytique est valide pour un écoulement stratifié en cavité avec des rapports d'aspect géométrique relativement élevés. Dans la deuxième partie ont résolu numériquement les équations gouvernantes le phénomène étudié et ils ont validé le modèle analytique avec la solution numérique. Les auteurs ont comparé entre les résultats numérique et analytique dans l'intervalle du nombre de Rayleigh thermique  $-6 \times 10^2 \ll Ra_T \ll 10^4$ , rapport de force de volume  $0 \ll N \ll 10^3$  et le nombre de Lewis dans l'intervalle  $10^{-2} \ll Le \ll 10^2$ . L'existence

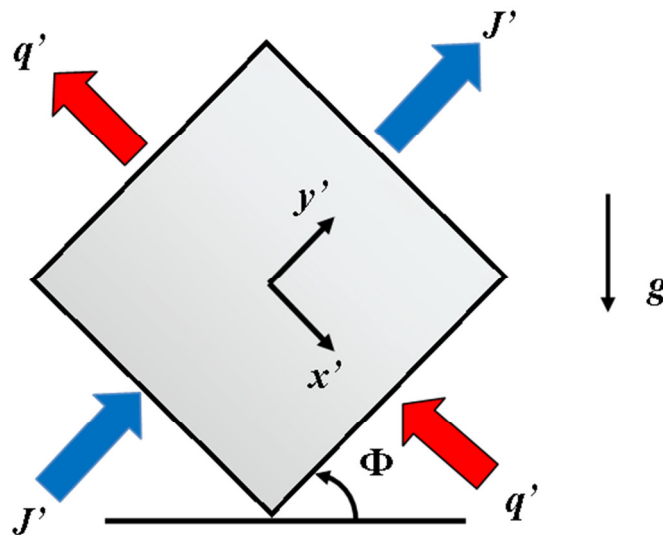
des solutions multiples est démontrée dans cette investigation, pour les intervalles donnés concernant les paramètres gouvernants.

# CHAPITRE 2 *MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE*

## 2.1 Description du problème

Dans ce mémoire, nous allons étudier le phénomène de la convection thermosolutale dans des espaces confinés contenant des fluides binaires.

Le modèle physique considéré est schématisé sur la figure 2-1. Il s'agit d'une cavité de dimension ( $L \times H'$ ), inclinée d'un angle  $\Phi$  par rapport au plan horizontal. Les parois parallèles à l'axe  $y'$  sont soumises à des flux de chaleur uniformes et sont imperméables. Les autres parois sont supposées adiabatiques et soumises à des flux de masse uniformes.



**Figure 2-1** Représentation schématique du modèle physique.

## 2.2 Hypothèses Simplificatrices

De façon à obtenir un modèle mathématique simple, on adopte les hypothèses suivantes :

1. Le phénomène est bidimensionnel.
2. La solution binaire est un fluide newtonien et incompressible.
3. L'écoulement engendré est laminaire et transitoire.
4. Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
5. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
6. Les interactions entre les transferts de chaleur et de masse, connues sous le nom d'effets de Soret et de Dufour respectivement, sont négligeables.
7. Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur ou de masse.
8. Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de références. Cependant, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température et la concentration. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)] \quad (2.1)$$

où  $T'$  et  $S'$  représentant la température du mélange fluide et la concentration du soluté en un point donné du système, respectivement. La concentration  $S'$  est définie par :

$$S' = \rho_0 C' \quad (2.2)$$

où  $\rho_0$  est la densité du mélange et  $C'$  représente la fraction massique du soluté.  $T'_0$  et  $S'_0$  sont des grandeurs de référence qui représente généralement les valeurs moyennes de la température et de la concentration dans le système.

$\beta_T$  et  $\beta_S$  sont les coefficients d'expansion volumique thermique et solutal du fluide, respectivement. Ils sont définis par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', S'}, \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial S'} \right)_{P', T'} \quad (2.3)$$

Le flux de chaleur induit par un gradient de concentration et le flux de matière induit par un gradient de température sont respectivement, connus sous les noms des effets, Dufour et Soret.

Présentés dans le tableau suivant :

Flux \ Force	$\nabla T$	$\nabla C$
Chaleur	Conduction (Loi de Fourier)	L'effet Dufour
Masse	L'effet Soret	Diffusion (Loi de Fick)

Les éléments diagonaux du tableau correspondent aux phénomènes de transports primaires. Car les effets Dufour et Soret sont d'un ordre de grandeur plus petite que les effets décrits par les lois de Fourier et de Fick, ils ont été négligés dans de nombreuses études.

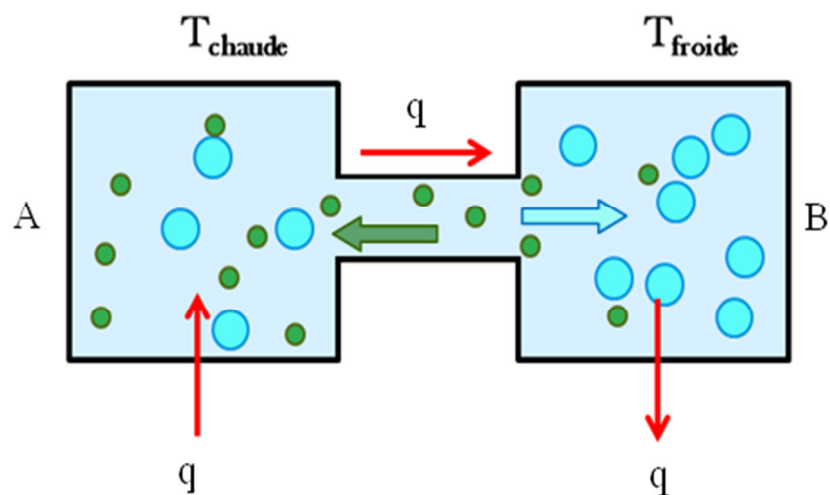


Figure 2-2 : schéma de phénomène de thermo-diffusion l'effet soret



## 2.3 Formulation mathématique

L'application des principes généraux de la physique nous permet d'établir les différentes équations nécessaires à la résolution du problème considéré dans cette étude. Ces principes basés sur la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie se traduisent mathématiquement par les équations citées ci-après.

### 2.3.1 Équation de continuité

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.4)$$

$u'$  et  $v'$  étant les composantes du champ de vitesse dans les directions  $x'$  et  $y'$  respectivement.

### 2.3.2 Équation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ -g[\beta_T(T' - T'_0) + \beta_S(S' - S'_0)] \cos \Phi \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial y'} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ +g[\beta_T(T' - T'_0) + \beta_S(S' - S'_0)] \sin \Phi \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Équation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.7)$$

### 2.3.4 Équation de conservation de la concentration

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D \left( \frac{\partial^2 S'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 S'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.8)$$

L'adimensionnalisation ou la normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier

les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, elles seront transformées par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{l^*}, \frac{y'}{l^*} \right), & (u, v) &= \left( \frac{u'}{U^*}, \frac{v'}{U^*} \right) \\ t &= \frac{t'}{t^*}, P = \frac{P'}{P^*} \\ T &= \frac{(T' - T'_0)}{\Delta T^*}, S = \frac{(S' - S'_0)}{\Delta S^*} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$T'_0$  et  $S'_0$  sont la température et la concentration de référence.

où  $l^*, P^*, t^*, U^*$  sont la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques, respectivement.

Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$\left. \begin{aligned} l^* &= L' \quad \text{si} \quad A \geq 1 \\ l^* &= H' \quad \text{si} \quad A < 1 \\ P^* &= \rho_0 U^{*2} \\ t^* &= \frac{l^*}{U^*} \\ U^* &= \frac{\alpha}{l^*} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

où  $A$  est le rapport de forme de la cavité. est défini par :

$$A = \frac{H'}{L'} \quad (2.11)$$

Par ailleurs,  $\Delta T^*$  et  $\Delta S^*$  sont des déferentes caractéristique de température et de concentration, respectivement. Les parois de l'enceinte sont exposées à des flux constants de chaleur et de masse, alors :

$$\left. \begin{aligned} T'_0 &= T'_{(0,0)}, & \Delta T^* &= \frac{q' L'}{k_f} \\ S'_0 &= S'_{(0,0)}, & \Delta S^* &= \frac{j' H'}{D} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations (2.4) - (2.8), on obtient respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - Pr Ra_T (T + N S) \cos \Phi \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Pr Ra_T (T + N S) \sin \Phi \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (2.17)$$

Les paramètres  $Ra_T$ ,  $N$ ,  $Pr$  et  $Le$  sont respectivement, le nombre de Rayleigh thermique, le rapport des forces de volume, le nombre de Prandtl et le nombre de Lewis. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$Ra_T = \frac{g \beta_T \Delta T^* l^3}{\nu \alpha}, \quad N = \frac{\beta_S \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad (2.18)$$

## 2.4 Formulation fonction du courant-vorticité

On introduit la formulation de la fonction du courant et celle de la vorticité à partir du modèle mathématique du problème considéré pour but d'éliminer la pression des équations primaires et ainsi réduire le nombre de variables et les équations à résoudre.

La fonction de courant et la vorticité sont définies par les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.19)$$

Dérivant (2.14) et (2.15) par rapport à  $y$  et  $x$  respectivement, et retranchant les deux équations résultantes membre à membre pour éliminer le gradient de la pression, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ + Pr Ra_T \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} + N \frac{\partial S}{\partial y} \right) \cos \Phi + \left( \frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \sin \Phi \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Rapport-gratuit.com  
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES 

Avec :  $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = Pr \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ + Pr Ra_T \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} + N \frac{\partial S}{\partial y} \right) \cos \Phi + \left( \frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \sin \Phi \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2.24)$$

Finalement nous obtenons le système d'équations suivant :

#### 2.4.1 Équation de la vorticité $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = Pr \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ + Pr Ra_T \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} + N \frac{\partial S}{\partial y} \right) \cos \Phi + \left( \frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \sin \Phi \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) = Pr \nabla^4 \psi - Pr Ra_T \mathcal{F}(T + N S) \quad (2.26)$$

### 2.4.2 Équation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

### 2.4.3 Équation de fonction du courant

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2.28)$$

Les vitesses de l'écoulement ainsi que la vorticité sont définies par les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.29)$$

### 2.4.4 Equation de conservation de la concentration

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (2.30)$$

## 2.5 Conditions initiales et aux limites

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante.

### 2.5.1 Conditions initiales

Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle et sa concentration sont nulles dans toute la cavité.

$$\left. \begin{array}{l} u = 0, \quad v = 0 \\ T = 0, \quad S = 0 \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

### 2.5.2 Conditions aux limites

Les conditions hydrodynamiques sur toutes les parois de la cavité sont les suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} y = \pm \frac{A}{2} \quad u = v = 0 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \quad u = v = 0 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

Les conditions aux frontières thermiques et massiques adimensionnalisées s'expriment par :

$$\left. \begin{array}{l} y = \pm \frac{A}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -1 \\ x = \pm \frac{1}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

La vorticité sur les parois solides est évaluée par un développement de Taylor de premier ordre de la fonction de courant  $\psi$ . L'expression mathématique de cette condition sera développée dans le chapitre suivant.

## 2.6 Transferts thermique et massique

L'étude du transfert de chaleur et de masse dans la cavité soumise à des flux constants, nécessite des taux de transferts de chaleur et de masse, donnés par le biais des nombres de Nusselt et Sherwood, respectivement. Ses valeurs moyennes sont définis par :

$$Nu_m = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{+\frac{A}{2}} Nu(y) dy \quad , \quad Sh_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Sh(x) dx \quad (2.34)$$

où  $Nu(y)$  et  $Sh(x)$  sont le nombre de Nusselt local et le nombre Sherwood local définis respectivement par :

$$\left. \begin{array}{l} Nu(y) = \frac{q'}{k_f \frac{\Delta T'}{L'}} = \frac{1}{T_{(+\frac{1}{2}, y)} - T_{(-\frac{1}{2}, y)}} \quad (a) \\ Sh(x) = \frac{j'}{D \frac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S_{(x, -\frac{A}{2})} - S_{(x, +\frac{A}{2})}} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

## 2.7 Conduction Pure

Dans cette partie on fait introduire la solution de la conduction pure, en supposant que la solution totale du problème s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_c + \psi \\ T &= T_c + \theta \\ S &= S_c + \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} \psi_c &= 0 \\ T_c &= x \\ S_c &= -y \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Alors on trouve finalement les valeurs des variables comment suite :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi \\ T &= x + \theta \\ S &= -y + \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Le système d'équation de base devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) &= Pr \nabla^4 \psi \\ &- Pr Ra_T [\mathcal{F}(\theta + N \varphi) + (\sin \Phi - N \cos \Phi)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \left( 1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \left( -1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2.42)$$

### 2.7.1 Conditions aux limites

Pour cette situation, les conditions aux frontières sont déduites à partir les équations (2.38), (2.31) et (2.32) :

$$\left. \begin{array}{lll} y = \pm \frac{A}{2} & u = v = 0 & \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} & u = v = 0 & \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.43)$$

Les conditions aux limites thermiques et massiques adimensionnalisées s'expriment par :

$$\left. \begin{array}{lll} y = \pm \frac{A}{2} & \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} & \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

Ayant établi les équations qui régissent le modèle mathématique de notre problème, ainsi que leurs conditions aux limites, la prochaine étape consiste à les résoudre par une méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies complètement implicite.



# *CHAPITRE 3*

## *SOLUTION*

## *NUMÉRIQUE*

### **3.1 Introduction**

Afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. La méthode des différences finies a été adoptée pour accomplir cette discrétisation.

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18ème siècle par Euler [Anderson 1984]. Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre les problèmes de convection en régime transitoire pour différentes configurations géométriques. La modélisation par différences finies procède avant tout à la décomposition du domaine physique en éléments de lignes reliés entre eux et mis en continuité en un nombre finis de points. Ces points de continuité, appelés nœuds, sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du domaine physique.

Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par le couple d'indices  $(i, j)$  désignant les lignes d'intersection du maillage.

### 3.2 Discrétisation des équations gouvernantes

A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma aux différences finies centrées à savoir :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i-1,j)}}{2\Delta x}, & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{f_{(i,j+1)} - f_{(i,j-1)}}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{f_{(i+1,j)} + f_{(i-1,j)} - 2f_{(i,j)}}{\Delta x^2}, & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{f_{(i,j+1)} + f_{(i,j-1)} - 2f_{(i,j)}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $f$  représente soit la température  $\theta$  ou la concentration  $\varphi$  ou la vorticité  $\omega$  ou la fonction du courant  $\psi$  et  $(\Delta x), (\Delta y)$  est l'espace entre deux nœuds voisins.

La méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) a été choisie pour résoudre les équations d'énergie, de la concentration et de la vorticité. Cette technique donne lieu à deux systèmes matriciels tridiagonaux dans les deux directions et pour chaque pas de temps. L'un est obtenu par la discrétisation implicite selon la direction  $x$  et explicite selon la direction  $y$ , l'autre par la discrétisation implicite selon la direction  $y$  et explicite selon  $x$ . Ensuite l'équation du mouvement est résolue par la méthode de surrelaxation successive (S.O.R) à partir des champs de température et de concentration déjà établis. Cette méthode donne directement la valeur de  $\psi$  à l'instant  $(n + 1)$  au nœud considéré.

#### 3.2.1 Équation d'énergie, la concentration et la vorticité

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial (u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial (v\theta)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (u\varphi)}{\partial x} - v + \frac{\partial (v\varphi)}{\partial y} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ + Pr Ra_T \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + N \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos \Phi + \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + N \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \sin \Phi + (\sin \Phi - N \cos \Phi) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

**a) Forme Implicite en  $x$  et explicite en  $y$**

On utilise une méthode implicite dans la direction  $x$ , en optant pour des différences centrées au temps  $n + \frac{1}{2}$  pour les dérivées en  $x$  et au temps  $n$  pour les dérivées en  $y$ ,

Chaque terme des équations (2.39), (2.40) et (2.41) est discrétisé comme suit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^n}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} \\ \left(\frac{\partial(uf)}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}^n f_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^n f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial(vf)}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1}^n f_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n f_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ (\nabla^2 f)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $f$  représente soit la température  $\theta$  ou la concentration  $\varphi$  ou la vorticité  $\omega$ .

$$A_i f_{i-1,j}^{n+1/2} + B_i f_{i,j}^{n+1/2} + C_i f_{i+1,j}^{n+1/2} = D_i \quad (3.6)$$

Avec les coefficients suivant pour l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} & B_i &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} & C_i &= \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \\ D_i &= \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right] \theta_{i,j-1}^n + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{\Delta y^2} \right] \theta_{i,j}^n + \left[ -\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right] \theta_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour l'équation de la concentration, les coefficients précédant prennent les valeurs suivantes :

$$A_i = -\frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Le\Delta x^2} \quad B_i = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{Le\Delta x^2} \quad C_i = \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Le\Delta x^2}$$

$$D_i = \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Le\Delta y^2} \right] \varphi_{i,j-1}^n + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{Le\Delta y^2} \right] \varphi_{i,j}^n + \left[ -\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Le\Delta y^2} \right] \varphi_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n \quad (3.8)$$

Et pour l'équation de vorticité ses coefficients sont :

$$A_i = -\frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{Pr}{\Delta x^2} \quad B_i = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2Pr}{\Delta x^2} \quad C_i = \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{Pr}{\Delta x^2}$$

$$D_i = \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{Pr}{\Delta y^2} \right] \omega_{i,j-1}^n + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2Pr}{\Delta y^2} \right] \omega_{i,j}^n + \left[ -\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{Pr}{\Delta y^2} \right] \omega_{i,j+1}^n + PrRa_T \left[ \left( \frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + N \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \sin \Phi + \left( \frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + N \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \cos \Phi + (\sin \Phi - N \cos \Phi) \right] \quad (3.9)$$

### b) Forme Implicite en y et explicite en x

C'est un schéma aux différences centrées au temps  $(n + \frac{1}{2})$  pour les dérivées en  $x$  et au temps  $(n + 1)$  pour les dérivées partielles par rapport à  $y$ . Les termes des équations (2.39), (2.40) et (2.41) seront discrétisés comme suit :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1/2}}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)}$$

$$\left( \frac{\partial (uf)}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} f_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n+1/2} f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial (vf)}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2} f_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1/2} f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 f)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \\
 &+ \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

où  $f$  représente soit la température  $\theta$  ou la concentration  $\varphi$  ou la vorticité  $\omega$ .

On obtient alors la forme implicite en  $y$  suivante :

$$A'_i f_{i-1,j}^{n+1/2} + B'_i f_{i,j}^{n+1/2} + C'_i f_{i+1,j}^{n+1/2} = D'_i \tag{3.11}$$

Pour l'équation d'énergie :

$$\begin{aligned}
 A'_i &= -\frac{v_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} & B'_i &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta y^2} & C'_i &= \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \\
 D'_i &= \left[ \frac{u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right] \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2} \right] \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \left[ -\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right] \theta_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^{n+1/2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour l'équation de concentration :

$$\begin{aligned}
 A'_i &= -\frac{v_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{1}{Le\Delta y^2} & B'_i &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{Le\Delta y^2} & C'_i &= \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{1}{Le\Delta y^2} \\
 D'_i &= \left[ \frac{u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + \frac{1}{Le\Delta x^2} \right] \varphi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{Le\Delta x^2} \right] \varphi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \left[ -\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{1}{Le\Delta x^2} \right] \varphi_{i+1,j}^{n+1/2} + v_{i,j}^{n+1/2}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour l'équation de vorticité :

$$\begin{aligned}
 A'_i &= -\frac{v_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{Pr}{\Delta y^2} & B'_i &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2Pr}{\Delta y^2} & C'_i &= \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta y} - \frac{Pr}{\Delta y^2} \\
 D'_i &= \left[ \frac{u_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{Pr}{\Delta x^2} \right] \omega_{i-1,j}^{n+1/2} + \left[ \frac{2}{\Delta t} - \frac{2Pr}{\Delta x^2} \right] \omega_{i,j}^{n+1/2} + \left[ -\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{Pr}{\Delta x^2} \right] \omega_{i+1,j}^{n+1/2} \\
 &+ PrRa_T \left[ \left( \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + N \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1/2} - \varphi_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right) \sin \Phi \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} + N \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1/2} - \varphi_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \right) \cos \Phi \right. \\
 &+ \left. (\sin \Phi - N \cos \Phi) \right] \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

On tient compte de l'ensemble des nœuds on obtient un système d'équations dont la solution se ramène à l'inversion d'une matrice tridiagonale.

### 3.2.2  quation de fonction du courant

Chaque terme de l'équation de mouvement (2.28) est discrétisé selon un schéma centré classique (3.1), on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \psi_{(i,j)}^{n+1} &= (1 - \omega_{opt}) \psi_{i,j}^n \\
 &+ \omega_{opt} \cdot \left[ a(\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + b(\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) + c\omega_{(i,j)}^n \right] \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad b = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad c = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \tag{3.16}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{opt} &= \frac{4}{2 + \sqrt{4 - C^2}} \\
 C &= \cos\left(\frac{\pi}{m_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m_y}\right)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.17}$$

Tell que  $m_x$ ,  $m_y$  sont les nombres de divisions dans l'espace, et  $\omega_{opt}$  qui nous donne le plus faible de nombre d'itération lorsque le système atteint la convergence.

### 3.2.3 Champs de vitesse

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues explicitement à partir de la définition de la fonction de courant c'est-à-dire :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.18)$$

Une fois les valeurs de la fonction de courant sont calculées, les vitesses seront déduites par les relations suivantes :

$$u_{(i,j)}^{n+1} = \frac{\psi_{(i,j+1)}^{n+1} - \psi_{(i,j-1)}^{n+1}}{2\Delta y}, \quad v_{(i,j)}^{n+1} = -\frac{\psi_{(i+1,j)}^{n+1} - \psi_{(i-1,j)}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux frontières (2.44) sont discrétise selon un schéma aux différences finies décentré avant ou arrière selon la paroi considérée.

Cas des parois horizontales on a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } x = -\frac{1}{2} \quad \theta_{1,j} = \frac{4\theta_{2,j} - \theta_{3,j}}{3}, \quad \varphi_{1,j} = \frac{4\varphi_{2,j} - \varphi_{3,j}}{3} \\ \text{à } x = +\frac{1}{2} \quad \theta_{NXT,j} = \frac{4\theta_{NXT-1,j} - \theta_{NXT-2,j}}{3}, \quad \varphi_{NXT,j} = \frac{4\varphi_{NXT-1,j} - \varphi_{NXT-2,j}}{3} \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Pour les parois verticales :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } y = -\frac{A}{2} \quad \theta_{i,1} = \frac{4\theta_{i,2} - \theta_{i,3}}{3}, \quad \varphi_{i,1} = \frac{4\varphi_{i,2} - \varphi_{i,3}}{3} \\ \text{à } y = +\frac{A}{2} \quad \theta_{i,NYT} = \frac{4\theta_{i,NYT-1} - \theta_{i,NYT-2}}{3}, \quad \varphi_{i,NYT} = \frac{4\varphi_{i,NYT-1} - \varphi_{i,NYT-2}}{3} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

La vorticité aux parois est donné en deuxième ordre selon la méthode de Jensen [26] comme la suite :

**Parois horizontales :**

$$\left. \begin{aligned} \text{à } x = -\frac{1}{2} \quad \omega_{1,j} &= -\frac{-7\psi_{1,j} + 8\psi_{2,j} - \psi_{3,j}}{2\Delta x^2} \\ \text{à } x = +\frac{1}{2} \quad \omega_{NXT,j} &= -\frac{-7\psi_{NXT,j} + 8\psi_{NXT-1,j} - \psi_{NXT-2,j}}{2\Delta x^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

**Parois verticales :**

$$\left. \begin{aligned} \text{à } y = -\frac{A}{2} \quad \omega_{i,1} &= -\frac{-7\psi_{I,1} + 8\psi_{I,2} - \psi_{I,3}}{2\Delta y^2} \\ \text{à } y = +\frac{A}{2} \quad \omega_{i,NYT} &= -\frac{-7\psi_{I,NYT} + 8\psi_{I,NYT-1} - \psi_{I,NYT-2}}{2\Delta y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

### 3.3 Algorithme et organigramme

La formulation  $\psi - \omega$  exige un traitement simultané de quatre équations (fonction du courant, vorticité, l'énergie et concentration). Les principales étapes sont résumées par l'algorithme suivant :

1. Définition du domaine et lecture des données.
2. Génération du maillage
3. Introduction des conditions initiales.
4. Début de la boucle sur le temps.
  - Introduction des conditions aux limites.
  - Calcule du champ de la température par la méthode A.D.I.
  - Calcule du champ de la concentration par la méthode A.D.I.
  - Calcule du champ de la vorticité par la méthode A.D.I.
  - Calcul du champ de la fonction de courant par la méthode S.O.R.
  - Détermination du champ de vitesse  $(u, v)$  à partir de la relation(3.19 ).
  - Répétition des calculs jusqu'à l'obtention du régime établi.
- Fin de la boucle sur le temps.
5. Impression des résultats.



### 3.4 Critère de convergence

A chaque pas du temps, la mise à jour des nouvelles variables physiques est faite jusqu'à ce que le critère de convergence ci dessous, soit satisfait.

$$\sum |(\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)| / \sum |(\phi_{i,j}^{n+1})| \leq 10^{-6} \quad (3.24)$$

# *CHAPITRE 4* *RÉSULTATS* *ET DISCUSSIONS*

## **4.1 Introduction**

Dans la présent étude, la situation où le rapport des forces de volume  $N = 1$  et l'angle d'inclinaison de l'enceinte  $\Phi = 45^\circ$  a été considérée. L'effet des nombres de Rayleigh et de Lewis sur le comportement de l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de masse a été étudié et les seuils d'apparition de la convection supercritique et sous-critique ont été déterminés.

La situation correspondante à  $N = 1$  et  $\Phi = 45^\circ$  pourrait entraîner à un état stable de fluide immobile, qui devient instable au-dessus d'une certaine valeur critique du nombre de Rayleigh. Dans l'état de repos, il y a une stratification verticale de densité à l'intérieur de l'enceinte, car les composantes horizontales des forces de volume thermique et solutale étaient égales mais opposées l'un à l'autre. Cette situation a été étudiée expérimentalement et théoriquement dans le passé par Paliwal et Chen [31,32] dans une couche de fluide mince inclinée. Dans l'ensemble, il existait un certain nombre de Rayleigh supercritique pour l'apparition de la convection, en dessous duquel la convection sous-critique existait lorsque les diffusivités thermique et solutale n'étaient pas égaux ( $Le \neq 1$ ). De toute évidence, les seuils de l'apparition de la convection supercritique ou sous-critique dépendaient du nombre de Lewis. Pour les valeurs modérées de  $Le$ , les solutions naturelle et antinaturelle de la convection coexistent.

## 4.2 Validation du code de calcul

Afin de valider la précision du programme numérique développé dans le cadre du présent mémoire, nous présentons quelques comparaisons en convection naturelle dans le cas d'une cavité verticale chauffée par les côtés.

Notre simulation numérique a été réalisée pour un rapport de forme  $A=1$  et pour différents nombres de Rayleigh thermique ( $Ra_T=10^3, 10^4$  et  $10^5$ ), un nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ , un nombre de Lewis  $Le=1$ , un rapport de force de volume  $N=0$  et un maillage uniforme de  $81 \times 81$ .

Notre comparaison est résumée dans le tableau 4.1 et 4.2 et les figure (4.1) et (4.2). Ces résultats montrent un bon accord entre les résultats de De Vahl Davis [09] et ceux obtenus avec le présent code. Des erreurs variant de 0% et  $6.63 \times 10^{-1}\%$  ont été observées.

Notre problème est double diffusive. Les résultats ont été validés par deux voies :

- validation de l'équation de l'énergie (température)
- validation de l'équation de concentration.

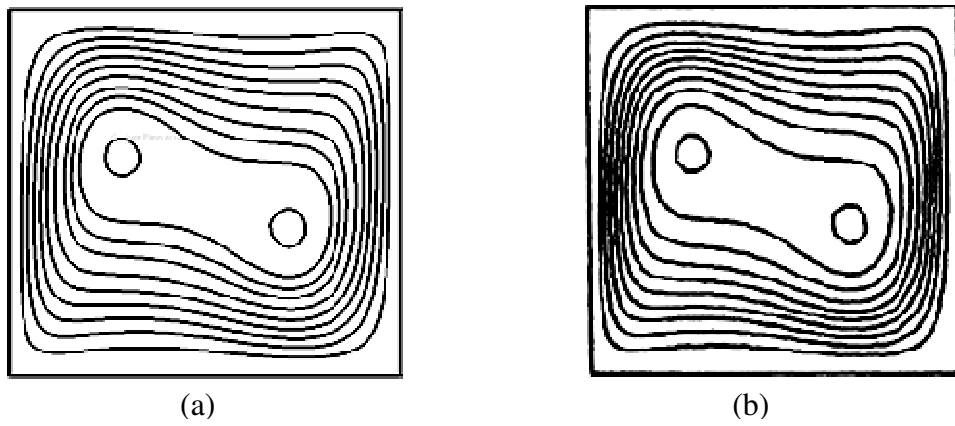
Au niveau du code de calcul, une seule équation sera activé et l'autre sera désactivé et l'inverse.

**Tableau 4-1** Comparaison des valeurs de la fonction de courant au centre de la cavité avec les résultats rapportés par De Vahl Davis [09]

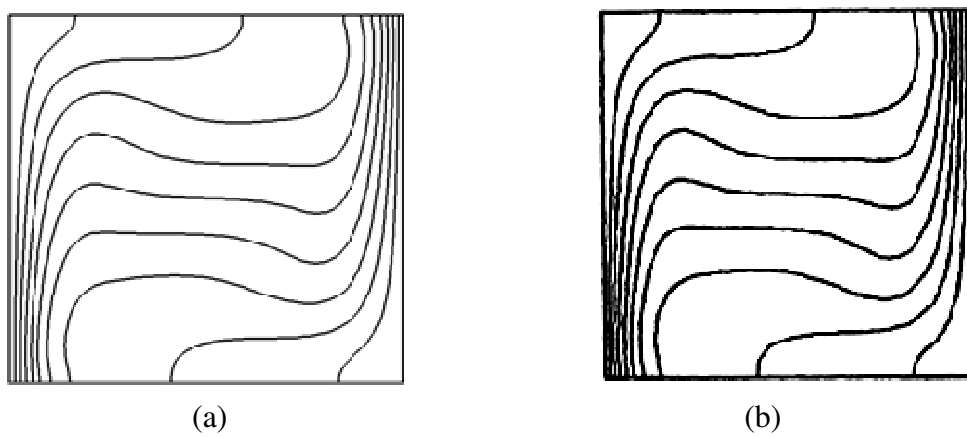
$Ra_T$	$ \psi_0 $		Erreur(%)
	De Val Davis[1983]	Présente étude	
$10^3$	1.174	1.174	0.000
$10^4$	5.071	5.069	$3.94 \times 10^{-2}$
$10^5$	9.111	9.104	$7.68 \times 10^{-2}$

**Tableau 4-2** Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen avec les résultats rapportés par De Vahl Davis [09]

$Ra_T$	$Nu_m$		Erreur(%)
	De Val Davis[1983]	Présente étude	
$10^3$	1.118	1.118	0.000
$10^4$	2.243	2.248	$2.22 \times 10^{-1}$
$10^5$	4.519	4.549	$6.63 \times 10^{-1}$



**Figure 4-1** Lignes du courant pour  $Ra_T = 10^5$ ,  
a) Présent travail, et b) Résultat de De Vahl Davis [09]



**Figure 4-2** Isothermes pour  $Ra_T = 10^5$ ,  
a) Présent travail, b) Résultat de De Vahl Davis [09].

a)  $|\psi_0| = 9.104$ ,  $|\psi_{max}| = 9.608$  et  $Nu_m = 4.549$ ,

b)  $|\psi_0| = 9.111$ ,  $|\psi_{max}| = 9.612$  et  $Nu_m = 4.519$ .

### 4.3 Choix du maillage

Le maillage utilisé est un maillage uniforme, six grilles de maillage sont créées pour étudier la dépendance de la solution du maillage. Les figures 4.3 et 4.4 montrent respectivement les profils du nombre de Nusselt moyen et du nombre de Sherwood moyen. Pour les deux graphes, nous avons constaté que les valeurs de Nusselt et Sherwood moyennes deviennent insensibles au nombre de nœuds à partir de la grille 101x101. L'écart des résultats entre les maillages à partir de cette grille est égal ou inférieur de (0.001). On a choisi la grille 101x101 pour obtenir d'une manière quantitative des résultats précis avec un minimum du temps de calcul.

Les figures 4.5 et 4.6 montrent respectivement l'évolution temporelle des taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , et de masse,  $Sh_m$ , pour deux valeurs d'incrément du temps,  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$  et  $\Delta t = 10^{-6}$ . On observe que pour les deux valeurs d'incrément du temps, l'évolution temporelle prend le même temps physique pour la convergence vers un état stationnaire, par contre le temps de calcul est nettement différent. La solution devient insensible à l'incrément du temps à partir de  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ .

Cette étude a été réalisée pour un rapport de forme  $A=1$ , Rayleigh thermique  $Ra_T=10^4$ , un nombre de Prandlt  $Pr = 10$ , un nombre de Lewis  $Le=1$  et un rapport de force de volume  $N=1$ .

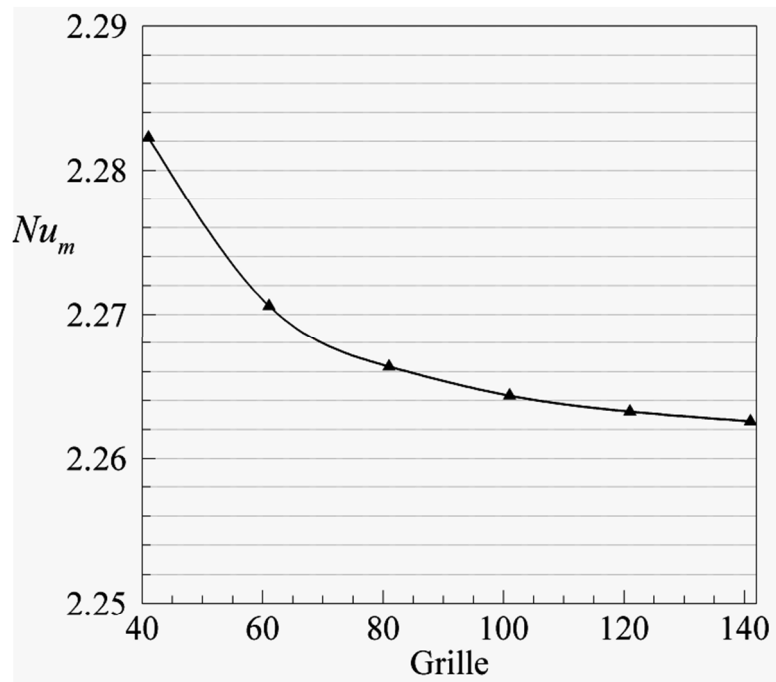


Figure 4-3 Le taux de transfert de chaleur  $Nu_m$  en fonction du nombre de Grille

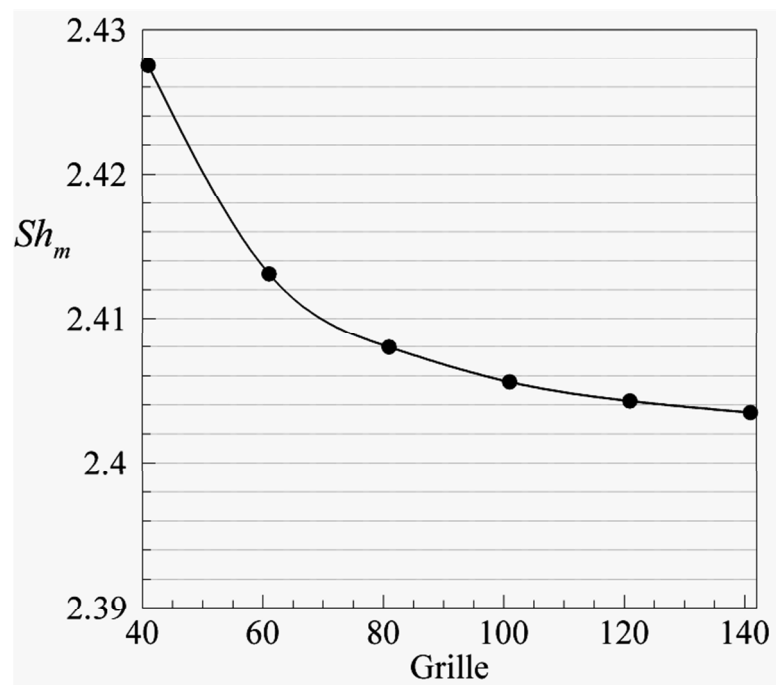
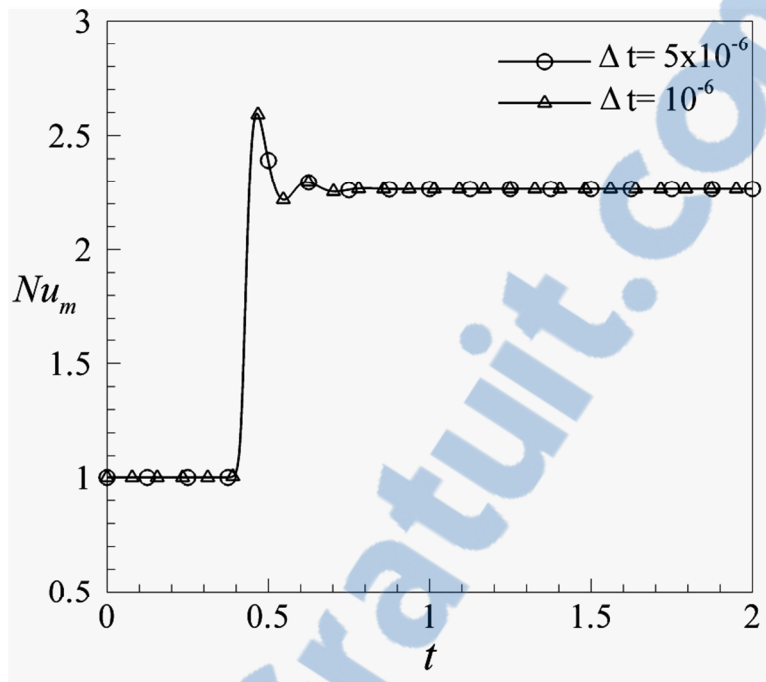
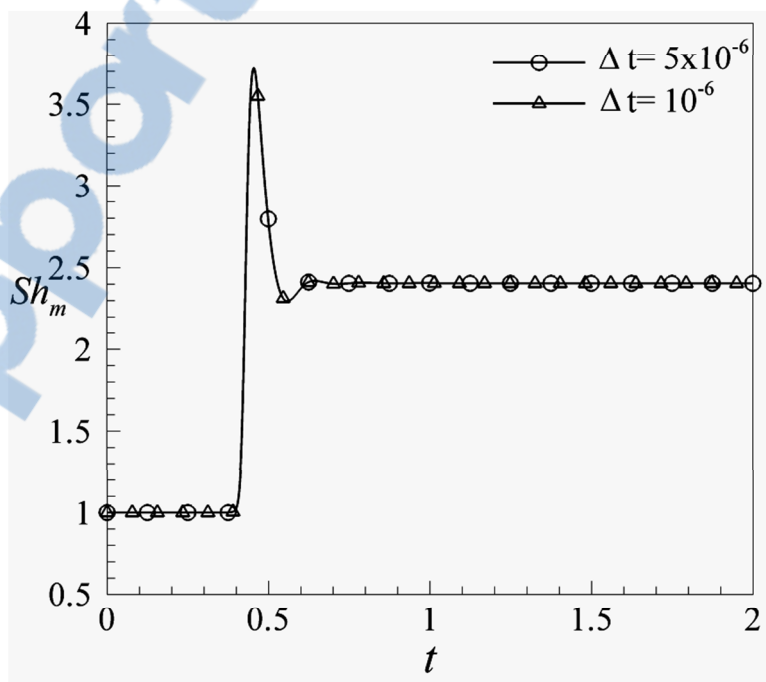


Figure 4-4 Le taux de transfert de masse,  $Sh_m$ , en fonction du nombre de Grille



**Figure 4-5** Evolution temporelle du taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , pour deux valeurs d'incrément du temps,  $\Delta t$ , et  $Ra_7=10^4$



**Figure 4-6** Evolution temporelle du taux de transfert de masse,  $Sh_m$ , pour deux valeurs d'incrément du temps,  $\Delta t$ , et  $Ra_7=10^4$

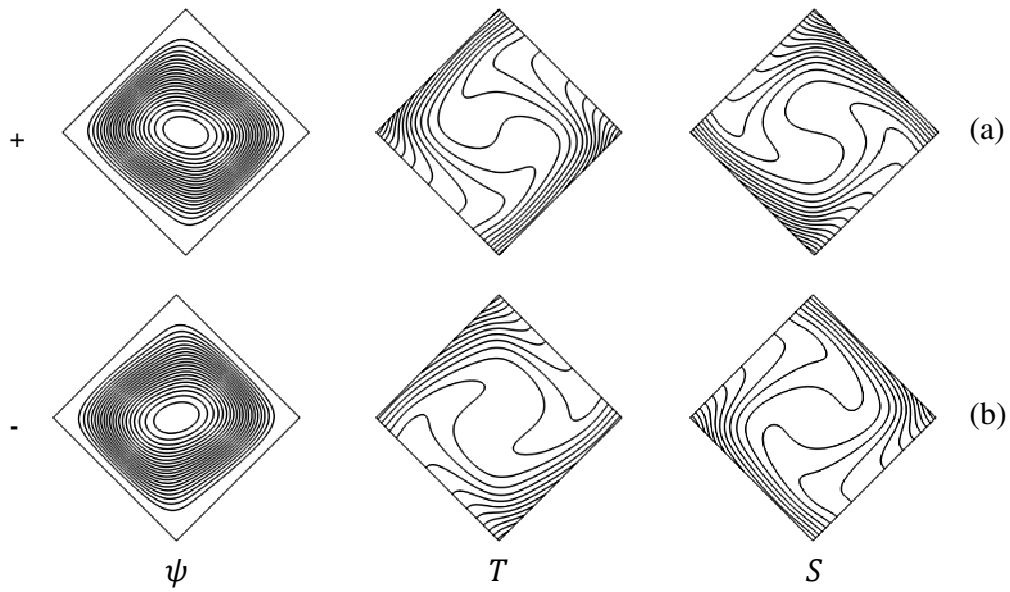
## 4.4 Résultats

### 4.4.1 L'existence des solutions naturelle et antinaturelle

La solution naturelle a été définie pour le fait qu'elle prévaut lors de l'initiation de la convection d'un état immobile. Lorsque le nombre de Lewis était supérieur à l'unité, la solution naturelle a été induite par l'effet thermique et la cellule convective circule dans le sens anti-horaire, comme l'effet de diffusion thermique a prévalu. Lorsque le nombre de Lewis était plus petit que l'unité, la solution naturelle a été induite par les effets solutaux et la circulation des cellules de convection a été dans le sens horaire. D'autre part, la solution antinaturelle a été obtenue en forçant l'écoulement dans la direction opposée.

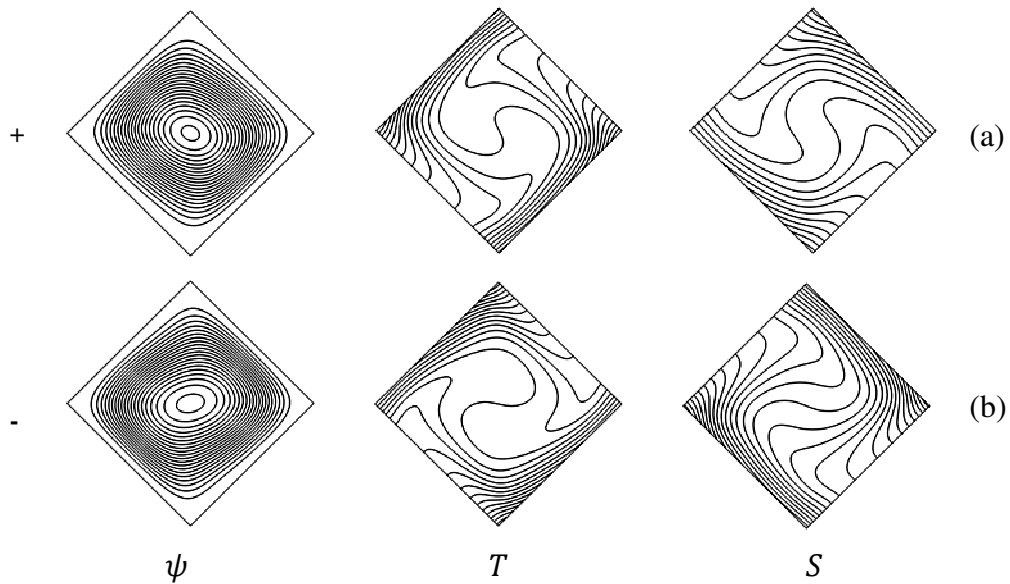
Au-dessus du seuil supercritique de la convection, les figures 4.7-4.10 présentent des lignes de courant, des isothermes et des iso-concentration obtenues pour  $Ra_T = 10^5$  et différents valeurs de  $Le$ . On remarque l'absence de la solution antinaturelle pour les deux valeurs de Lewis 0.1 et 10. Pour  $Le = 1$ , les cellules de la convection naturelle et antinaturelle sont identiques mais circulant en sens inverse. Comme les diffusivités thermiques et solutale étaient égaux, les deux solutions ont le même potentiel de convection. Pour la solution où la cellule est dans le sens anti-horaire, le flux convectif est induit par l'effet thermique, par contre il est induit par l'effet solutal lorsque la circulation est dans le sens horaire. Grâce à cet effet d'entraînement, la solution conduit des taux différents de transfert de chaleur et de masse.





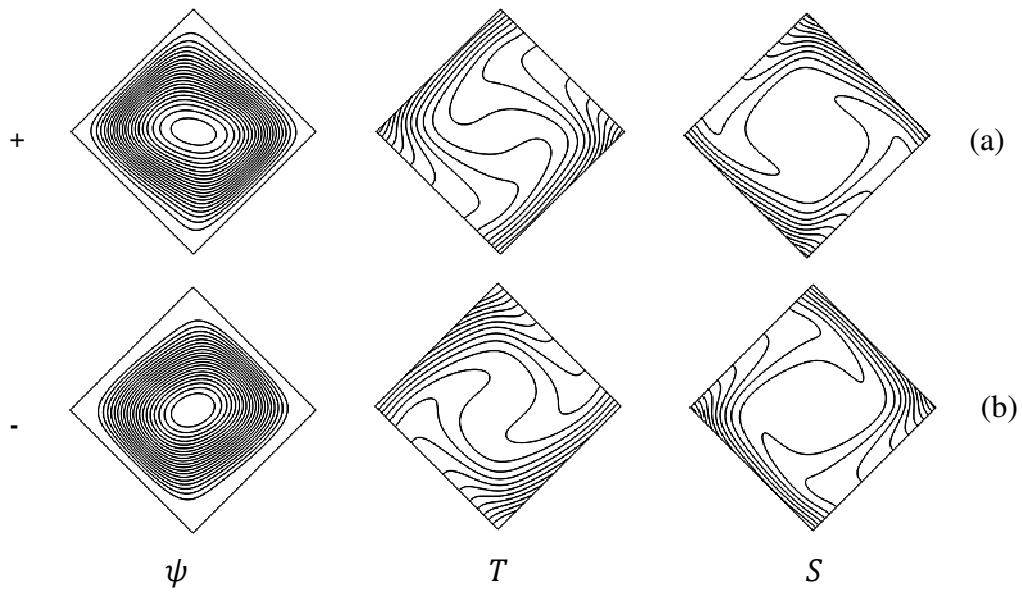
**Figure 4-7** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^5$  et  $Le=1$  :  
 a)  $\psi_0 = 15.767$ ,  $Nu_m = 4.197$  et  $Sh_m = 3.574$ , b)  $\psi_0 = -15.767$ ,  $Nu_m = 3.574$  et  $Sh_m = 4.197$

Rapport-gratuit.com   
 LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

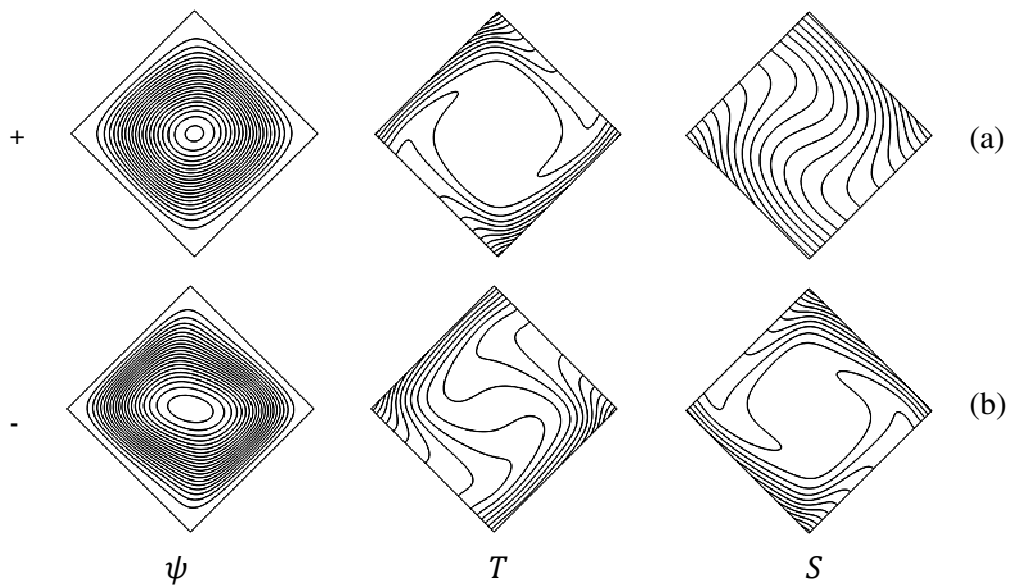


**Figure 4-8** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^5$  et  $Le=0.5$  :  
 a)  $\psi_0 = 20.264$ ,  $Nu_m = 4.212$  et  $Sh_m = 2.879$ , b)  $\psi_0 = -20.369$ ,  $Nu_m = 3.965$  et  $Sh_m = 3.554$

Rapport-gratuit.com   
 LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES



**Figure 4-9** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^5$  et  $Le=2$  :  
 a)  $\psi_0 = 12.935$ ,  $Nu_m = 4.164$  et  $Sh_m = 4.472$ , b)  $\psi_0 = -13.835$ ,  $Nu_m = 3.241$  et  $Sh_m = 4.957$ .

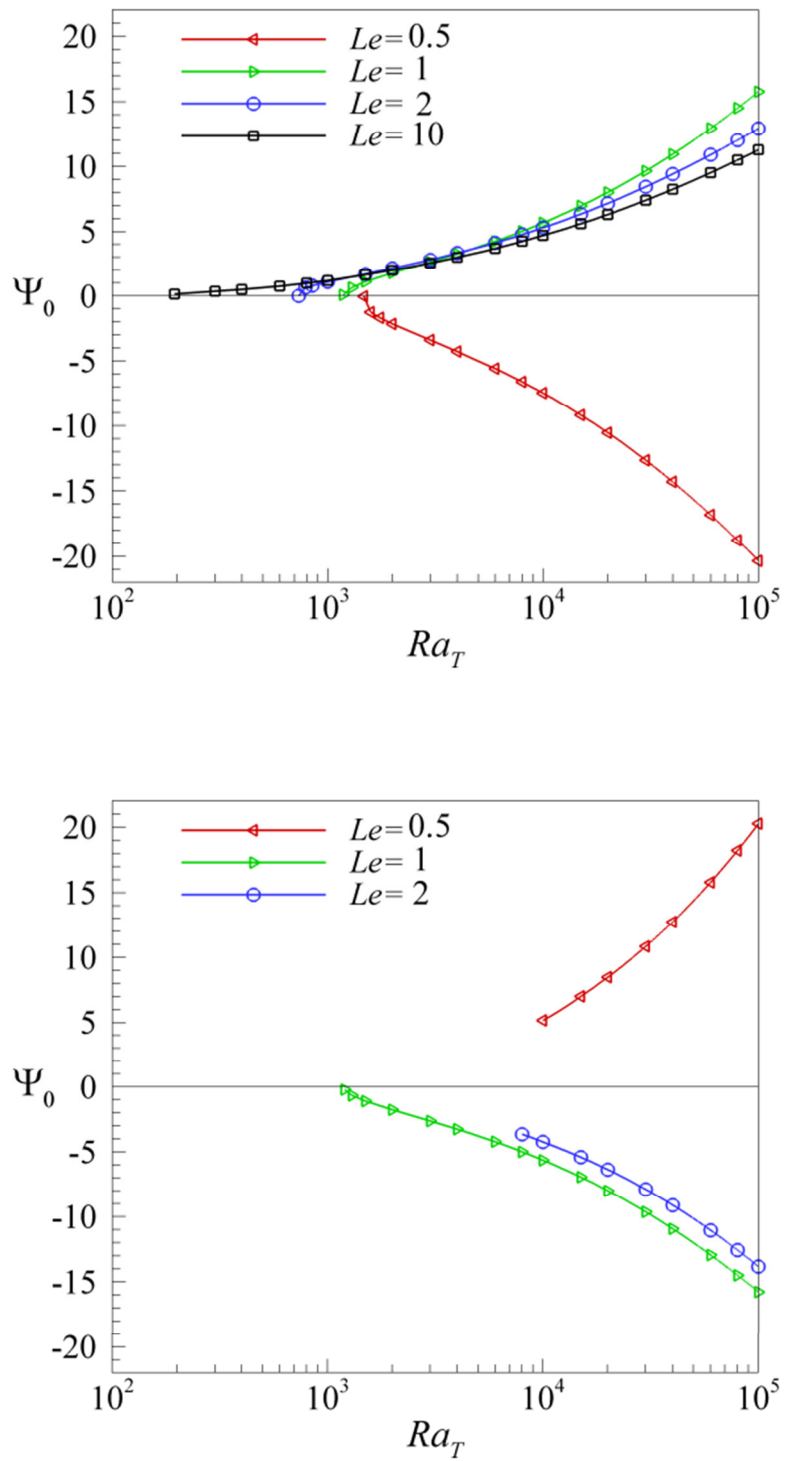


**Figure 4-10** Ligne de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^5$ . (a)  $Le=0.1$ ,  
 $\psi_0 = -46.652$ ,  $Nu_m = 5.087$  et  $Sh_m = 2.326$ , (b)  $Le=10$ ,  $\psi_0 = 11.276$ ,  $Nu_m = 4.056$  et  $Sh_m = 8.032$ .

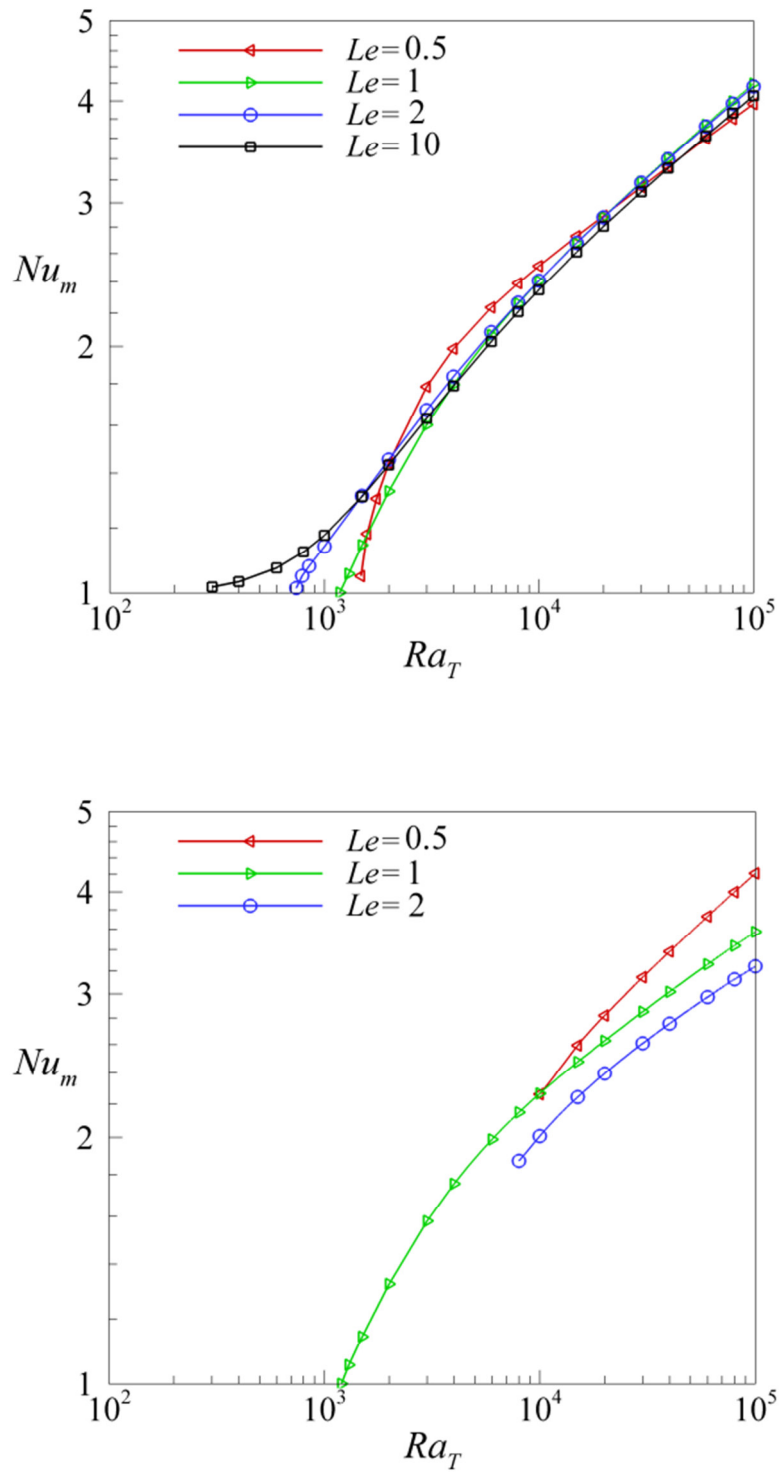
#### 4.4.2 L'effet du nombre de Rayleigh thermique

Pour étudier le comportement des solutions convectives naturelles et antinaturelle, l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , et les taux de transfert de chaleur et de masse,  $Nu_m$  et  $Sh_m$  sont présentés dans les figures ci-dessous en fonction de  $Ra_T$  pour différentes valeurs de  $Le$ . Les deux solutions naturelle et antinaturelle ont montré une augmentation de  $|\psi_0|$ ,  $Nu_m$  et  $Sh_m$  lorsque  $Ra_T$  augmente, pour les différentes valeur de  $Le$ . En ce qui concerne l'effet de Lewis, les figures montrent que  $|\psi_0|$  diminue et  $Sh_m$  augmente lorsque  $Le$  augmente pour les deux solutions naturelle et antinaturelle. Cependant,  $Nu_m$  de la solution antinaturelle a diminué avec l'augmentation de  $Le$ . Loin du seuil de la convection,  $Nu_m$  de la solution naturelle semble pas significativement affecté par la variation de  $Le$ , mais près du seuil, la convection augmente avec la diminution de  $Le$ .

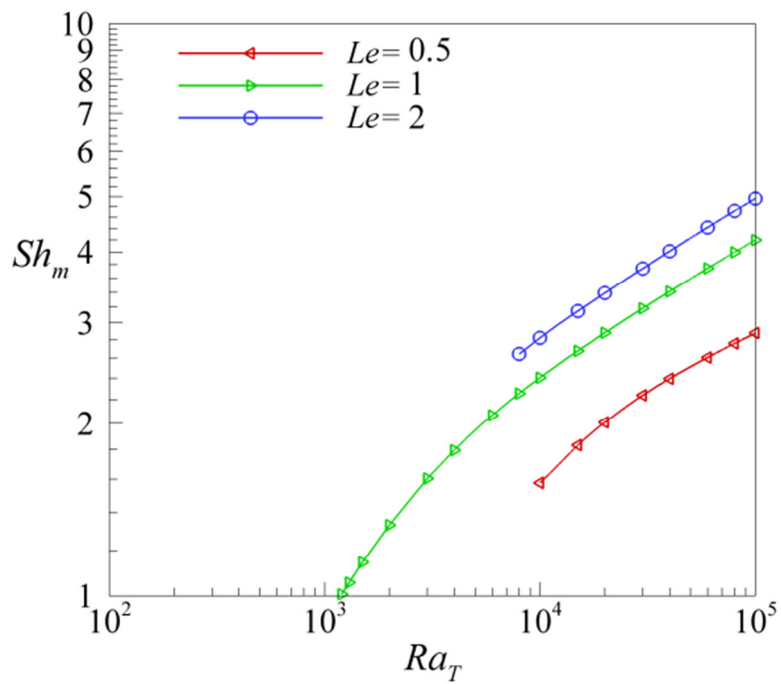
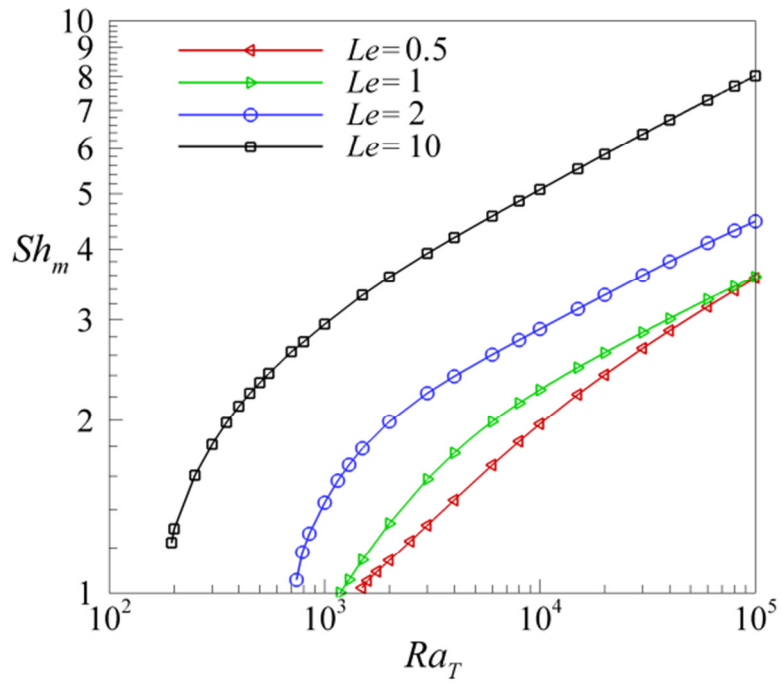
Comme le montre la figure 4.11, à des nombre de Lewis modérés, la solution antinaturelle peut être maintenue sur une large gamme de nombre de Rayleigh. Cependant, elle devient instable quand elle s'approche du seuil de convection supercritique et un saut vers la solution de convection naturelle se produit prématurément.



**Figure 4-11** Diagrammes de bifurcation : l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.



**Figure 4-12** Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.



**Figure 4-13** Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de masse,  $Sh_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle.

### 4.4.3 Calcul des valeurs supercritique et sous-critique du nombre de Rayleigh thermique

Comme expliqué précédemment, les deux solutions convectives naturelle et antinaturelle bifurquent de la solution de l'état de repos à un nombre de Rayleigh critique donné. Le seuil supercritique de convection a été obtenue avec précision en utilisant l'analyse linéaire en marchant la solution dans le temps pour des très faibles écoulements convectifs, en utilisant la solution numérique des équations complètes gouvernantes. Le seuil de la convection sous-critique et l'apparition de la convection antinaturelle a été déterminée approximativement à partir de la solution numérique à convection d'amplitude finie. Tout d'abord, la détermination du nombre de Rayleigh supercritique est expliquée.

Comme il est connu, pour un écoulement convectif à amplitude infinitésimale, l'évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement est exponentielle, selon l'analyse de stabilité linéaire. Ainsi, l'intensité de l'écoulement peut être exprimée comme  $\psi_0 = qe^{pt}$ , où  $q$  est l'amplitude à  $t = 0$  (*i.e.*  $\psi_0 = q$  à  $t = 0$ ). Le paramètre  $p$  représente le taux de croissance d'amplitude.

Typiquement, la valeur de  $\psi_0$  dans la gamme de  $10^{-6} < \psi_0 < 10^{-4}$  a été examinée et jugée suffisamment petite pour assumer une amplitude infinitésimale. Lorsque  $p < 0$ , l'écoulement est amorti et lorsque  $p > 0$ , l'écoulement est amplifié. Après une connaissance approximativement de la position du seuil, en utilisant une solution totalement non linéaire, la solution a été calculée pour deux valeurs du nombre de Rayleigh ; une au-dessus et une au-dessous du seuil. Au-dessus du seuil, la solution numérique, a été lancée dans le temps à partir de la solution de l'état de repos. Toutefois, au-dessous du seuil, la solution a été initiée avec un écoulement convectif faible. Comme le montre la figure 4.14, la solution a été amplifiée au-dessus du seuil et amortie au-dessous.

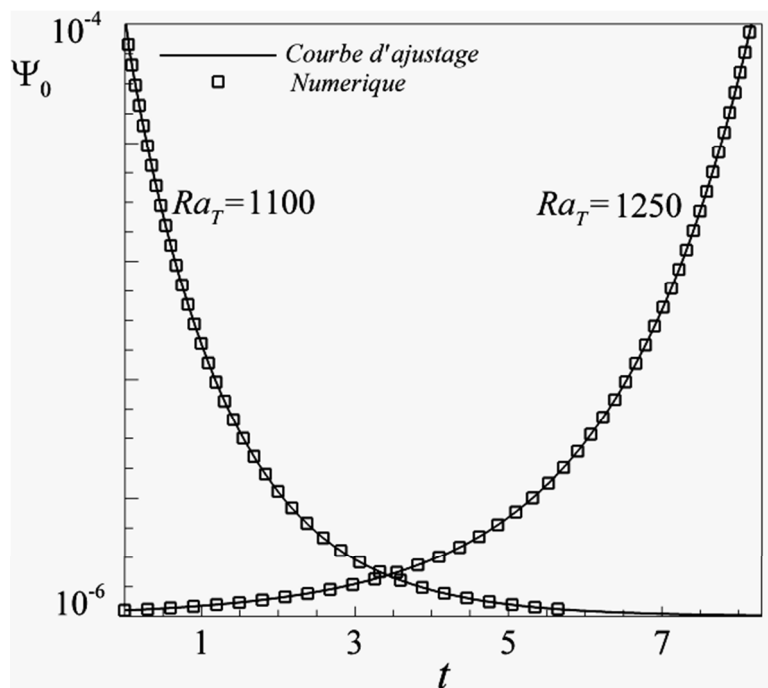
L'évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement est représentée dans la figure 4.14. Une construction de courbe en utilisant la fonction exponentielle a été effectuée et le taux de croissance a été calculé. Pour  $Le = 1$ , les deux valeurs du nombre de Rayleigh sont 1100 et 1250 et les taux de croissance correspondant sont obtenus -0.7798 et 0.5640, respectivement. Le seuil pour l'apparition de la convection a été obtenue lorsque  $p = 0$ , donc par interpolation, il a été constaté que  $Ra_{TC}^{sup} = 1187.04$ . Refaire les calculs pour

différentes valeurs du nombre de Lewis, voir le tableau 4.3, il a été constaté que  $Ra_{TC}^{sup}$  obéi à la relation suivante avec une grande précision :

$$Ra_{TC}^{sup} = \frac{2374.08}{Le + 1}$$

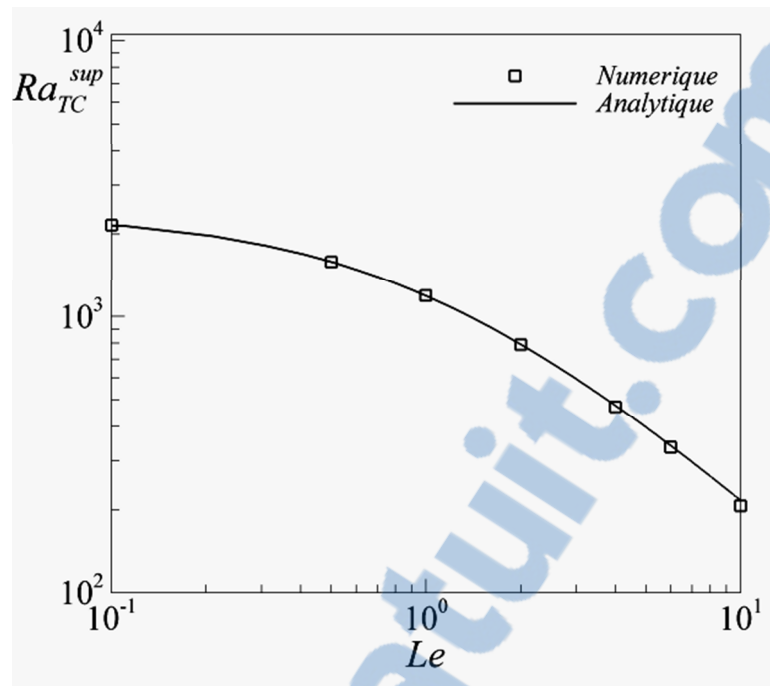
L'expression analytique de  $Ra_{TC}^{sup}$  et les résultats numériques sont présentés dans la figure 4.15 avec un très bon accord.

Le seuil de la convection sous-critique n'existe que pour la convection naturelle lorsque  $Le \neq 1$ , et les valeurs sont présentées dans le tableau 4.3. Les valeurs ont été obtenues en diminuant progressivement le nombre de Rayleigh en utilisant un petit incrément jusqu'à ce qu'un saut à l'état de conduction se produise. Les deux valeurs sous-critique et supercritique ont diminué avec l'augmentation du nombre de Lewis. À  $Le = 1$ , la convection sous-critique était absente.



**Figure 4-14** Evolution temporelle de l'intensité de l'écoulement sous et sup du seuil de la convection supercritique



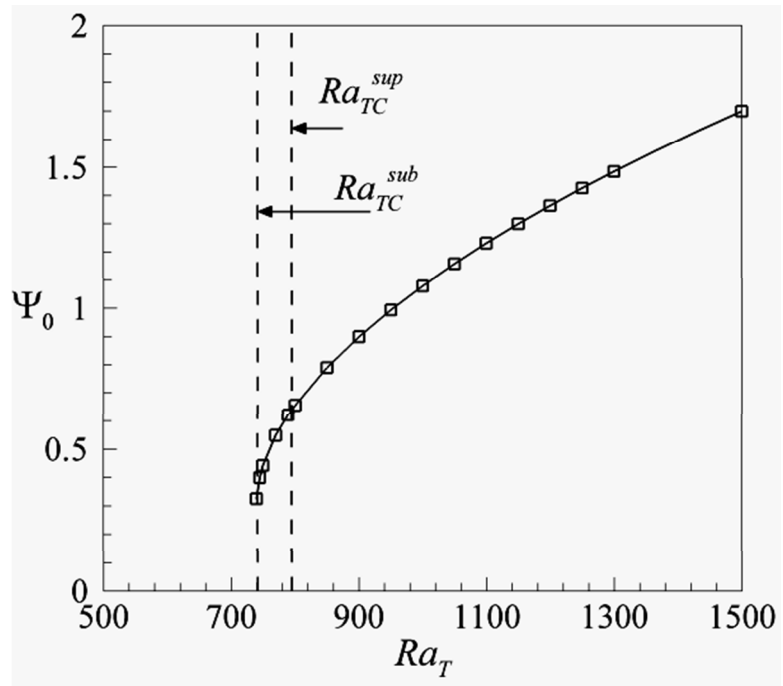


**Figure 4-15** Le nombre de Rayleigh supercritique en fonction du nombre de Lewis

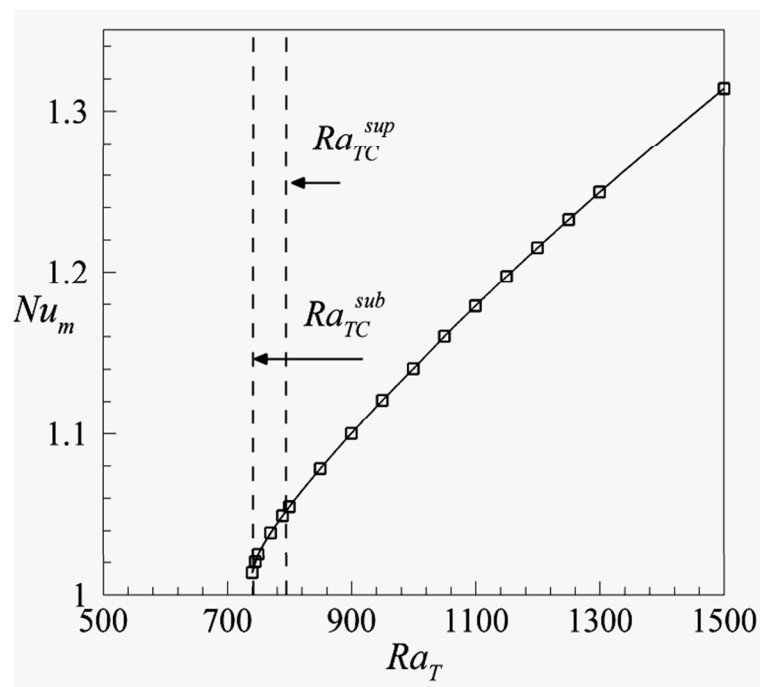
**Tableau 4-3** Rayleigh supercritique et subcritique pour différents valeurs du nombre de Lewis

$Le$	0.1	0.5	1	2	10
$Ra_{TC}^{sup}$	2152.5	1581.5	1187.04	789.2	206.5
$Ra_{TC}^{sub}$	1830	1480	-	740	185

La figure 4.16 montre le diagramme de bifurcation pour  $Le = 2$ . Au-dessous de  $Ra_{TC}^{sub}$ , le système est inconditionnellement stable et la solution a été caractérisée par un état de conduction pure. Entre les valeurs critiques,  $Ra_{TC}^{sub}$  and  $Ra_{TC}^{sup}$ , la convection pourrait être déclenchée que par une perturbation d'amplitude finie. L'état de conduction reste stable à une perturbation infinitésimale. Au-dessus  $Ra_{TC}^{sup}$ , l'état de conduction devient inconditionnellement instable. Toute perturbation, quel que soit son amplitude, pourrait déclencher un état convectif.



(a)



(b)

**Figure 4-16** Diagramme de bifurcation  
 (a) variation de  $\psi_0$ , et (b) variation de  $Nu_m$ , en fonction de  $Ra_T$  pour  $Le=2$

#### 4.4.4 L'effet du nombre de Lewis

Les variations des solutions convectives naturelle et antinaturelle sous forme de  $\psi_0$ ,  $Nu_m$  et de  $Sh_m$  en fonction de  $Le$  pour différentes valeurs de  $Ra_T$  sont présentées sur les figures (4.17, 4.18, 4.19). Les deux solutions naturelle et antinaturelle ont montré une augmentation de  $|\psi_0|$ ,  $Nu_m$  et  $Sh_m$  lorsque  $Ra_T$  augmente, pour les différentes valeurs de  $Le$ . En ce qui concerne l'effet de Lewis, les figures montrent que l'amplitude de l'écoulement pour les deux solutions naturelle et antinaturelle ainsi que le transfert de chaleur pour la solution naturelle diminuent avec l'augmentation de  $Le$  et tendent par la suite vers des valeurs constantes. Cependant, le transfert de masse pour la solution naturelle et antinaturelle augmente avec  $Le$ . Le transfert de chaleur pour la solution antinaturelle augmente avec  $Le$  pour les valeurs de Lewis  $Le < 1$  et l'inverse se produit pour  $Le > 1$ .

L'existence d'une solution antinaturelle correspondant aux valeurs  $Ra_T = 5.10^3, 10^4$  et  $10^5$  a été trouvée dans les intervalles suivantes de  $Le$  ;  $0.7 \leq Le \leq 1.73$ ,  $0.5 \leq Le \leq 2.25$  et  $0.23 \leq Le \leq 2.89$ , respectivement.

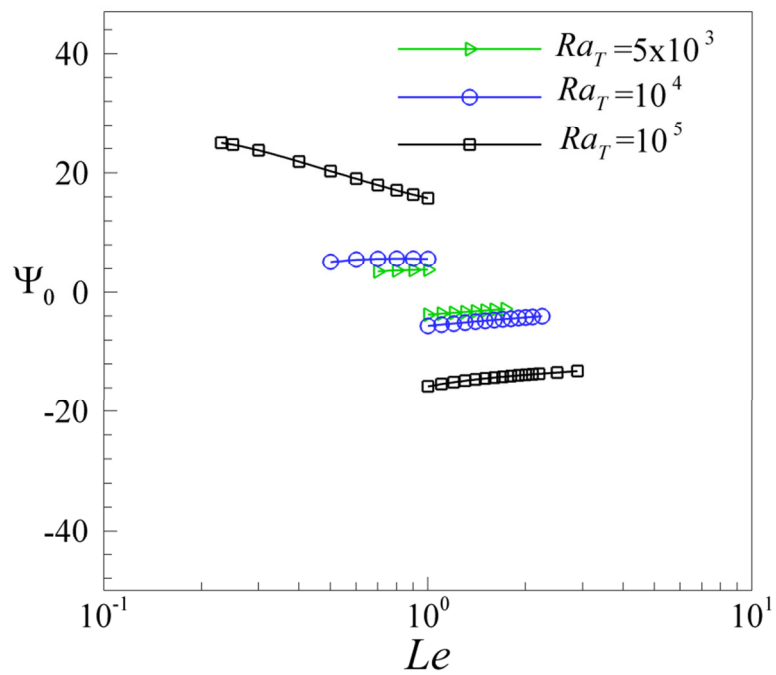
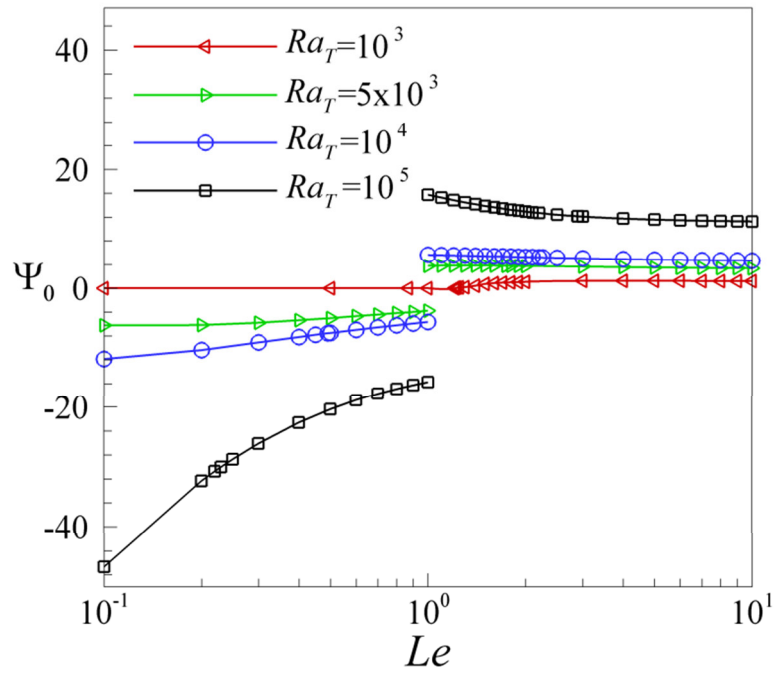
Le sens de rotation de l'écoulement est lié à la valeur de nombre de Lewis. Comme le montre la figure 4.17, le sens de rotation de l'écoulement dans la solution naturelle est horaire ( $\psi_0 < 0$ ) lorsque  $Le < 1.0$ , et trigonométrique ( $\psi_0 > 0$ ) lorsque  $Le \geq 1.0$

Pour expliquer le sens de rotation de l'écoulement, on prend le cas de la solution naturelle avec la valeur du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T = 10^4$ . Considérons le cas de  $Le > 1$ , dans cette situation, la diffusivité thermique,  $\alpha$ , est plus grande que la diffusivité massique,  $D$ , par conséquent, la solution naturelle a été induite par l'effet thermique et la cellule convective circule dans le sens anti-horaire. Dans cette situation, la quantité de la masse transportée par la convection le long des parois où le flux massique est imposé est plus importante que celle de la chaleur transportée le long des parois où le flux thermique est imposé. Cela est clarifié par les résultats numériques qui sont exprimés par les nombres de Sherwood et Nusselt moyens correspondants à la valeur de  $Le = 1.14$  ( $Sh_m = 2.61$  et  $Nu_m = 2.14$ ). Dans le cas de  $Le < 1$ , la solution naturelle est induite par l'effet massique et la cellule convective circule dans le sens horaire, et la quantité de la chaleur transportée par la convection le long des parois où le flux thermique est imposé est plus grande que celle de

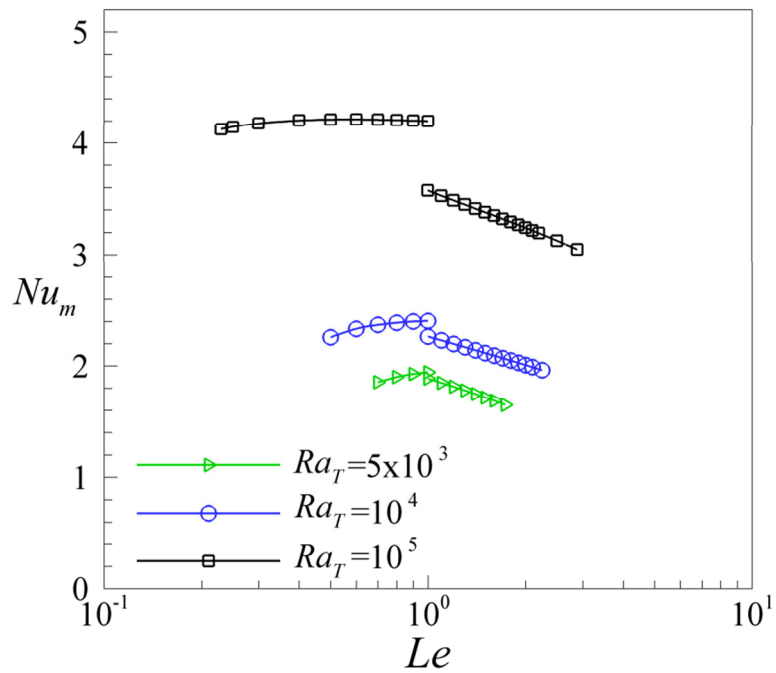
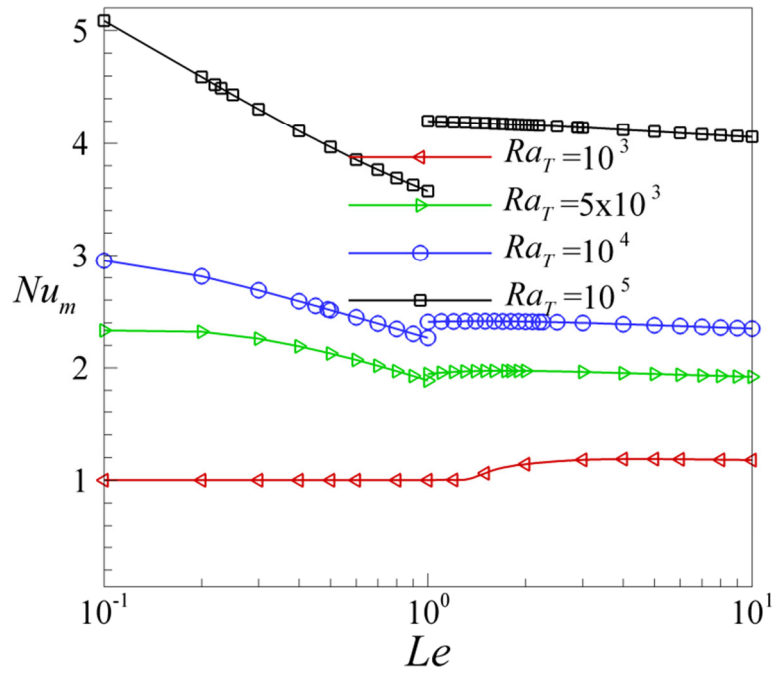
la masse transportée le long des parois où le flux massique est imposé. Comme exemple, les nombres de Nusselt et Sherwood moyens sont  $Nu_m=2.34$  et  $Sh_m=2.26$  pour  $Le=0.8$ . La cellule convective de la solution antinaturelle circule dans le sens horaire pour  $Le>1$ , et dans le sens antihoraire pour  $Le<1$ .

On observe que pour la valeur de  $Le=1$ , la cellule convective de la solution naturelle circule dans le sens anti-horaire, et celle de la solution antinaturelle circule dans le sens inverse. La quantité de chaleur transportée par la convection naturelle exprimée par le nombre de Nusselt moyen ( $Nu_m=2.26$ ), est égale à la quantité de masse transportée par la convection antinaturelle exprimée par le nombre de Sherwood moyen ( $Sh_m=2.26$ ). La quantité de masse transportée par la convection naturelle exprimé par le nombre de Sherwood moyen ( $Sh_m=2.40$ ), est égale à la quantité de chaleur transportée par la convection antinaturelle exprimée par le nombre de Nusselt moyen ( $Nu_m=2.40$ ).

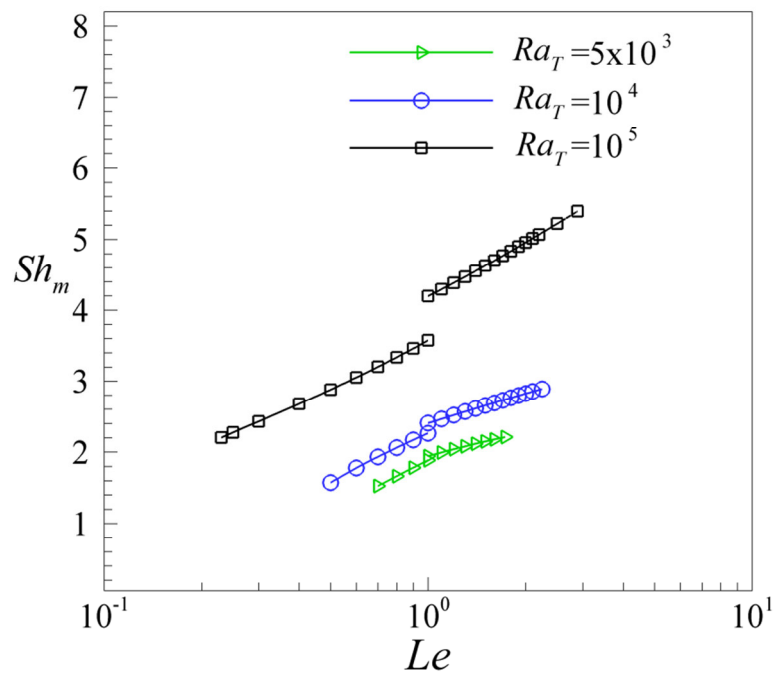
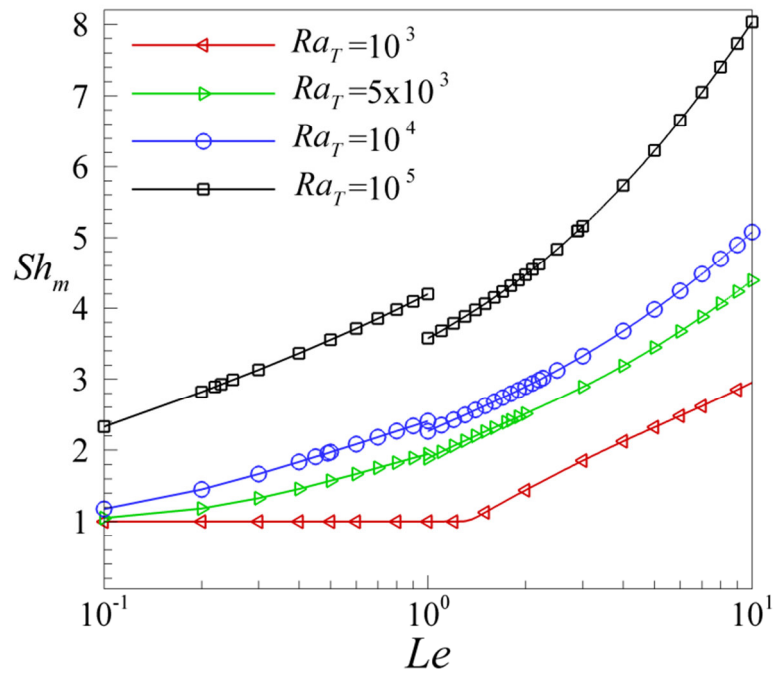
Comme il est présenté dans les figures ci dessous pour  $Ra_T=10^3$  on remarque l'existence d'une seule solution et le transfert de chaleur et de masse sont purement diffusifs ( $Nu_m=Sh_m=1$ ) pour les faibles valeurs de  $Le$  ( $Le<2$ ), par la suite le transfert de masse augmente avec l'augmentation de  $Le$ , et le transfert de chaleur tend vers une valeur constante à partir de  $Le=3$ . L'intensité de l'écoulement est faible pour cette valeur de  $Ra_T$ .



**Figure 4-17** Diagrammes de bifurcation : l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle



**Figure 4-18** Diagrammes de bifurcation : le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle



**Figure 4-19** Diagramme de bifurcation : le taux de transfert de masse,  $Sh_m$ , en fonction du nombre de Lewis,  $Le$ , pour différentes valeurs du nombre de  $Ra_T$ , (haut) solution naturelle, (bas) solution antinaturelle

#### 4.4.5 Cas d'une cavité élancée $A=4$

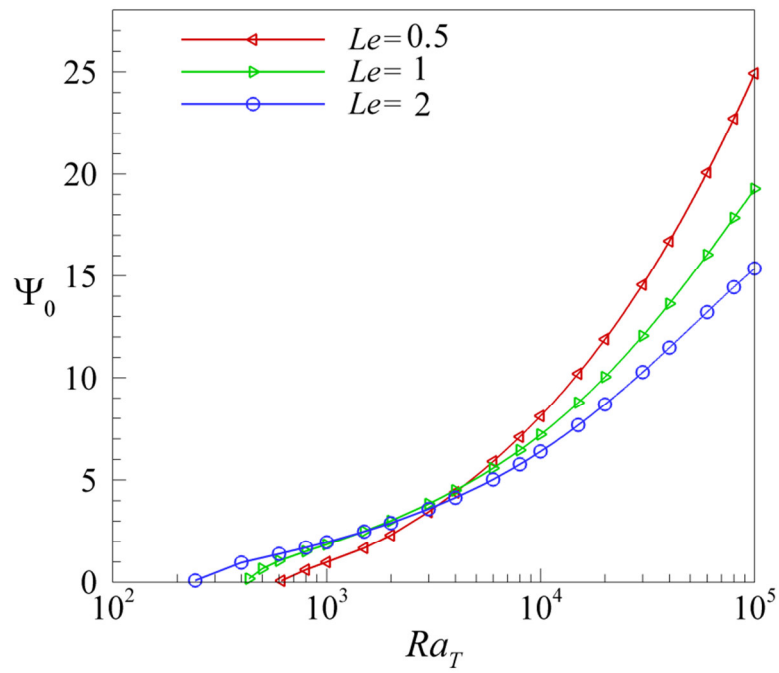
L'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , et le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , sont présentées dans les figures (4.20, 4.21) en fonction de  $Ra_T$  pour différentes valeurs de  $Le$ . Les résultats ont montré une augmentation de  $|\psi_0|$  et  $Nu_m$  lorsque  $Ra_T$  augmente, pour les différentes valeurs de  $Le$ . En ce qui concerne l'effet de Lewis, la figure montre que près du seuil  $|\psi_0|$  augmente lorsque  $Le$  augmente et l'inverse se produit loin du seuil de la convection. Cependant, loin du seuil de la convection,  $Nu_m$  semble pas significativement affectée par la variation de  $Le$ , mais près du seuil, la convection augmente avec l'augmentation de  $Le$ .

Le Tableau ci-dessous présente les valeurs supercritiques de Rayleigh thermique pour différentes valeurs de Lewis et rapport de forme  $A=4$ . Ces résultats montrent que la convection dans ce cas se déclenche pour des valeurs de Rayleigh thermique plus petites que pour le cas d'une cavité carrée.

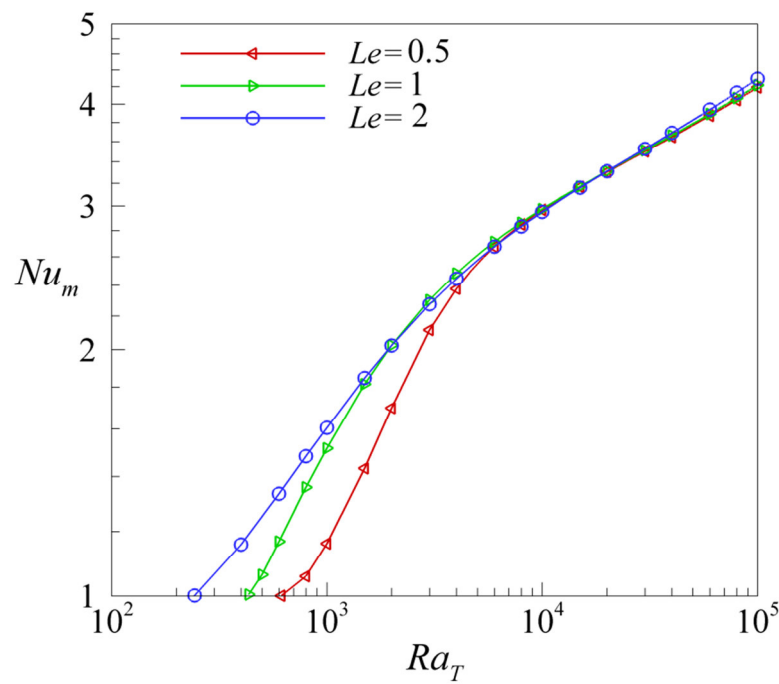
**Tableau 4-4** Rayleigh supercritique pour  $A=4$  et différents valeurs du nombre de Lewis

$Le$	0.5	1	2
$Ra_{TC}^{sup}$	614.4183	433.8472	242.9157



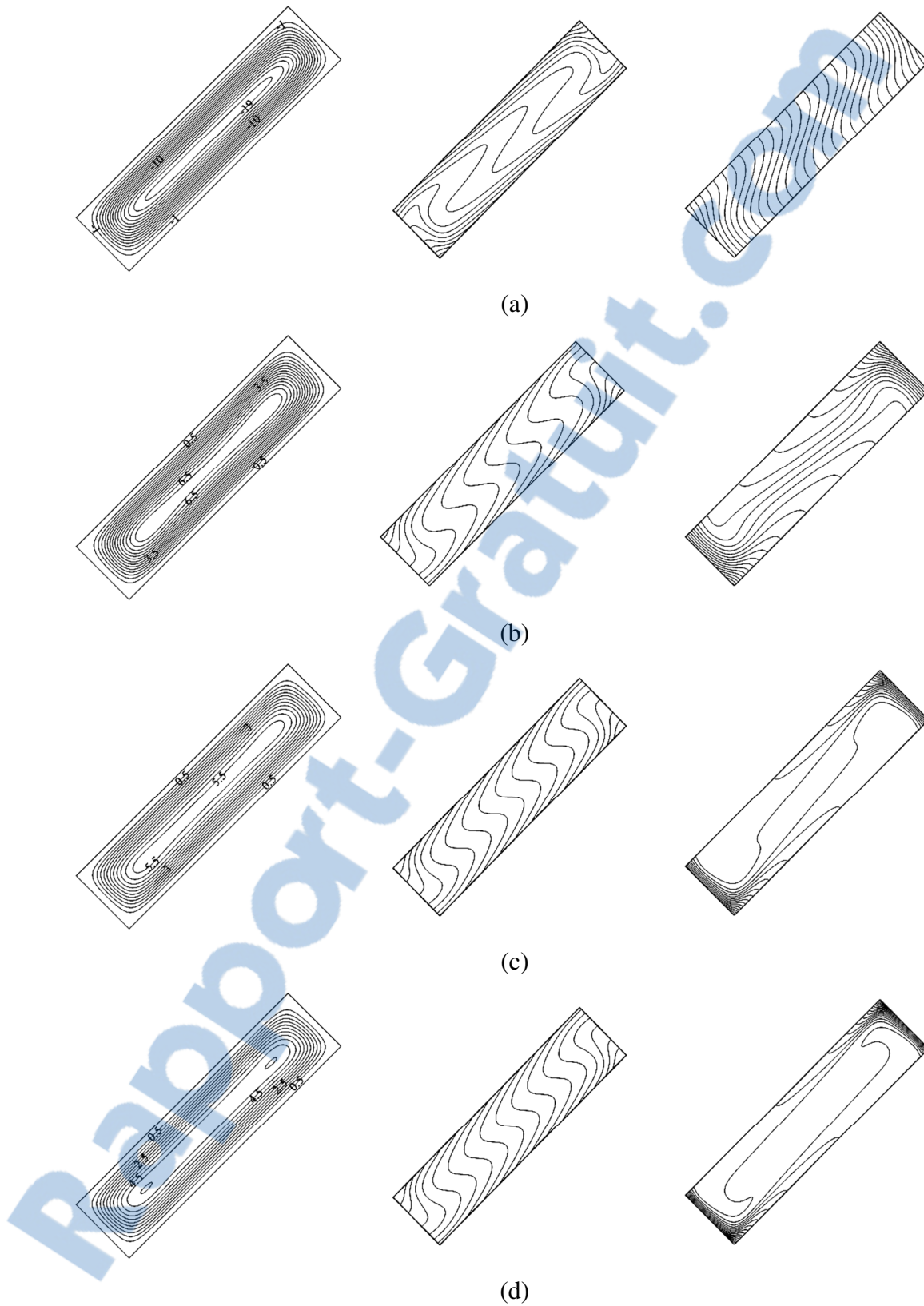


**Figure 4-20** Diagramme de bifurcation : l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , avec  $A=4$



**Figure 4-21** Diagramme de bifurcation : le taux de transfert de chaleur,  $Nu_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , pour différents valeurs du nombre de  $Le$ , avec  $A=4$

La figure 4.22 présente les lignes de courant, isothermes et iso-concentrations obtenues pour  $Ra_T = 10^4$  et différents valeurs de  $Le$ . Pour  $Le = 0.1$ , la cellule de la convection circule dans le sens horaire. Lorsque le nombre de Lewis est supérieur à l'unité, la circulation de la cellule convective est dans le sens anti-horaire. Cela est visible juste quand on compare les isothermes et les iso-concentrations de la figure 4.22a, et ceux de la figure 4.22b. L'amplitude de l'écoulement ainsi que le transfert de chaleur diminuent avec l'augmentation de  $Le$ . Cependant, le transfert de masse augmente avec  $Le$ .



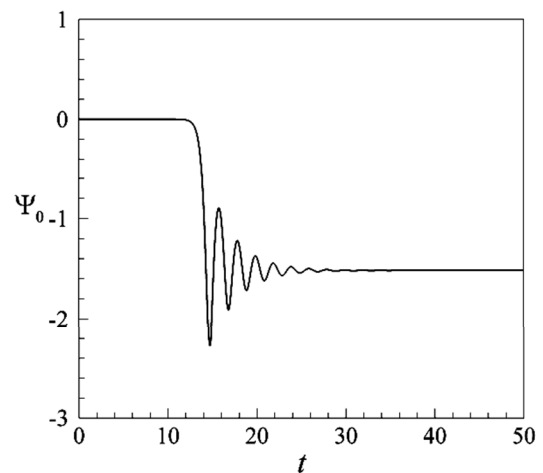
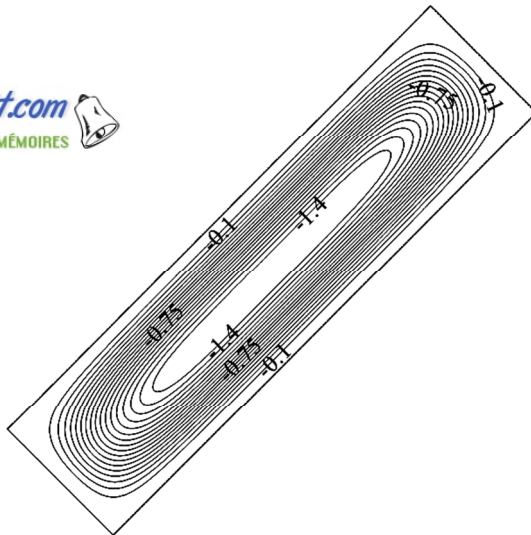
**Figure 4-22** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $Ra_T=10^4$ . (a)  $Le=0.1$ ,  $\psi_0 = -19.500$ ,  $Nu_m = 3.278$  et  $Sh_m = 0.488$ . (b)  $Le=1$ ,  $\psi_0 = 7.207$ ,  $Nu_m = 2.975$  et  $Sh_m = 1.550$ . (c)  $Le=5$ ,  $\psi_0 = 5.697$ ,  $Nu_m = 2.916$  et  $Sh_m = 3.196$ . (d)  $Le=10$ ,  $\psi_0 = 5.386$ ,  $Nu_m = 2.899$  et  $Sh_m = 4.161$

#### 4.4.6 L'existence des solutions multiples $A=4$

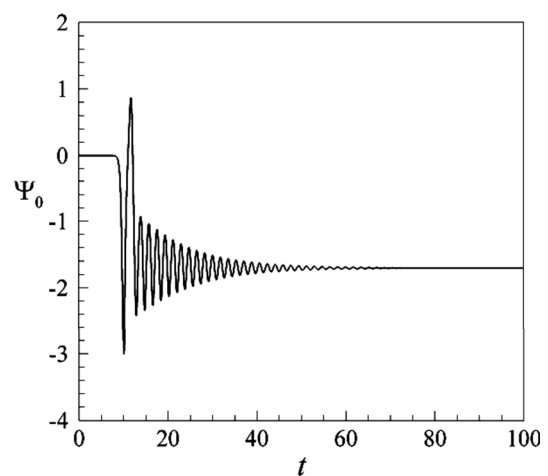
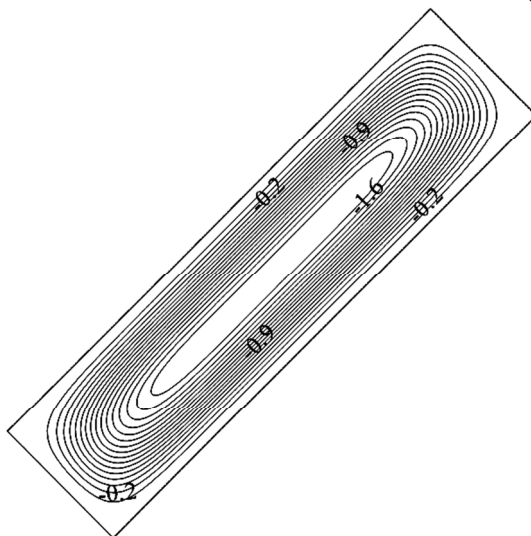
En prenant la solution de la conduction pure comme conditions initiales, l'évolution au cours du temps de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, et les lignes de courant sont présentés sur la figure 4.23 pour un rapport de forme  $A=4$ , différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique entre  $Ra_T=800$  et  $Ra_T=10^4$ , un nombre de Prandtl  $Pr = 10.0$ , un nombre de Lewis  $Le=1$ , un rapport de force de volume  $N=1$  et un maillage de  $81 \times 201$ .

On trouve que l'écoulement oscillatoire se produit dans la limite du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T=925-1135$ . En dehors de cet intervalle la solution convective converge vers une solution stable et la structure de l'écoulement est unicellulaire.

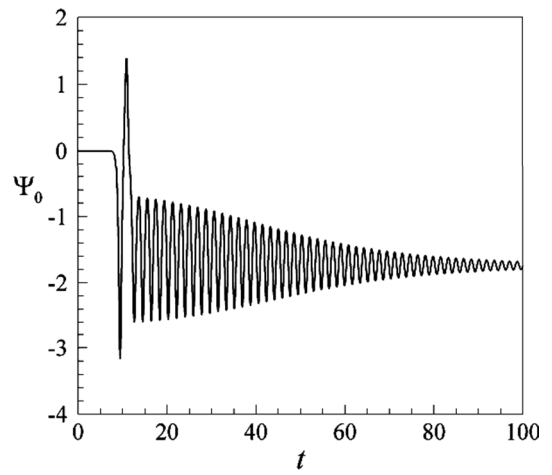
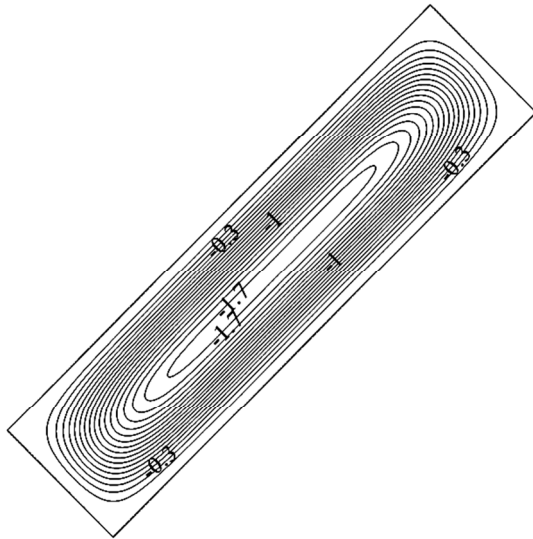
Rapport-gratuit.com  
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES



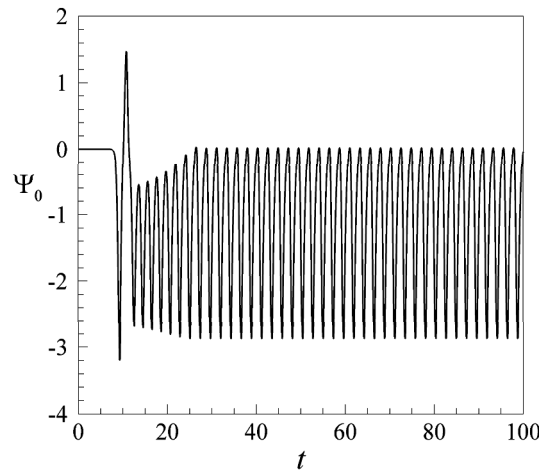
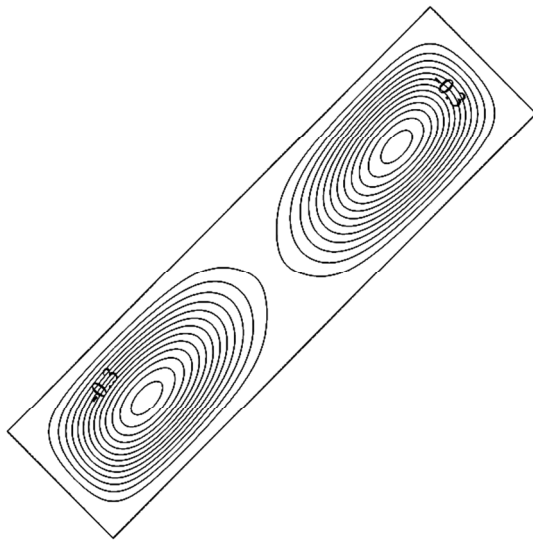
(a)



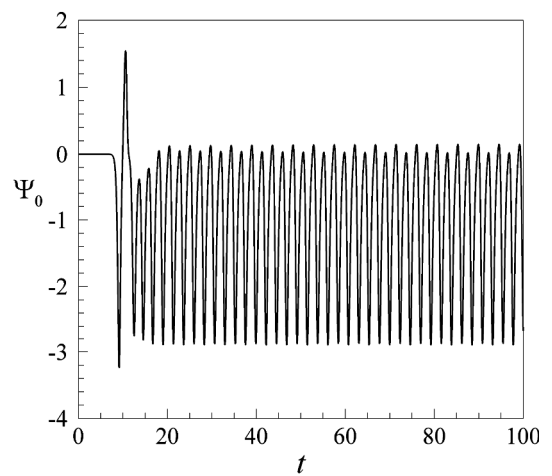
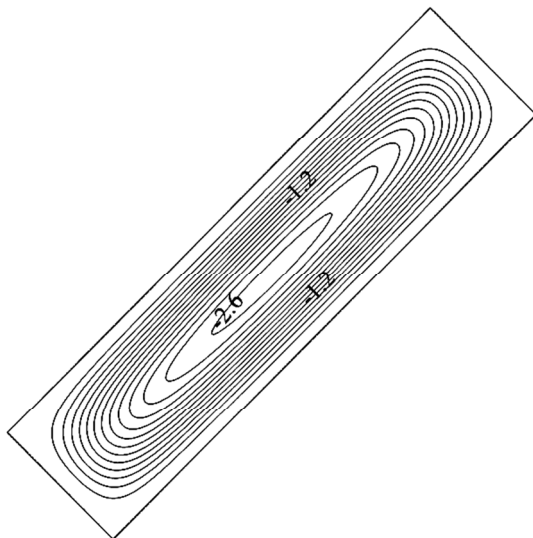
(b)



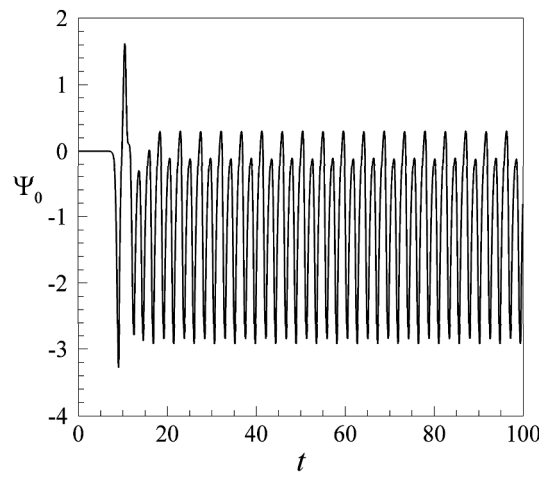
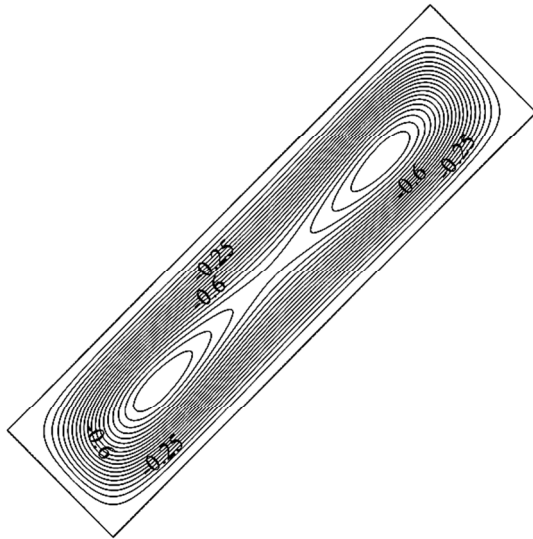
(c)



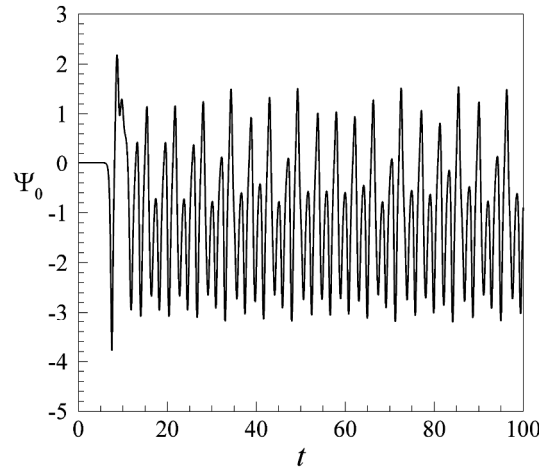
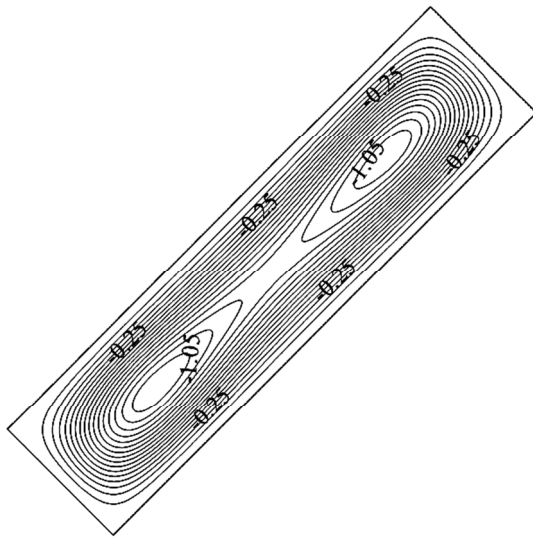
(d)



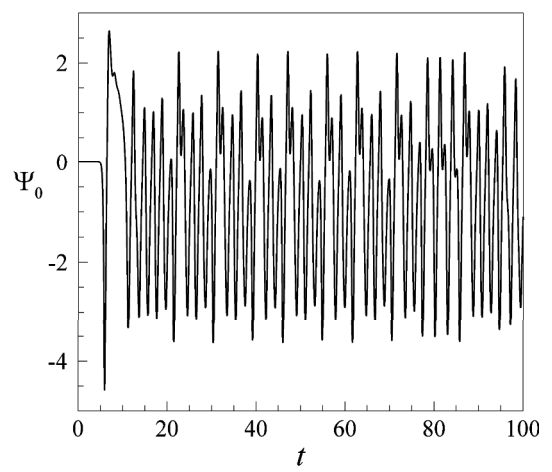
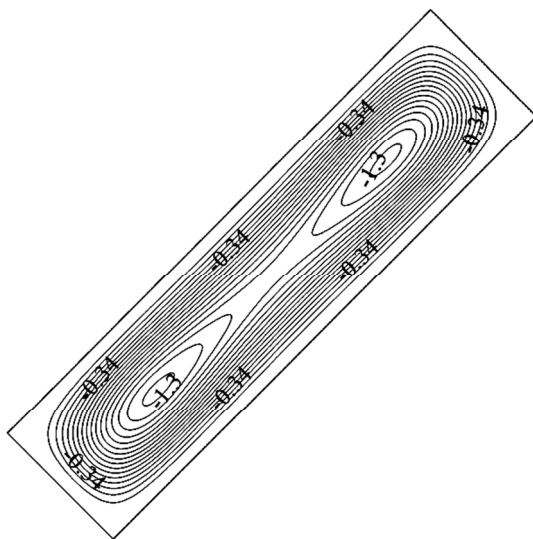
(e)



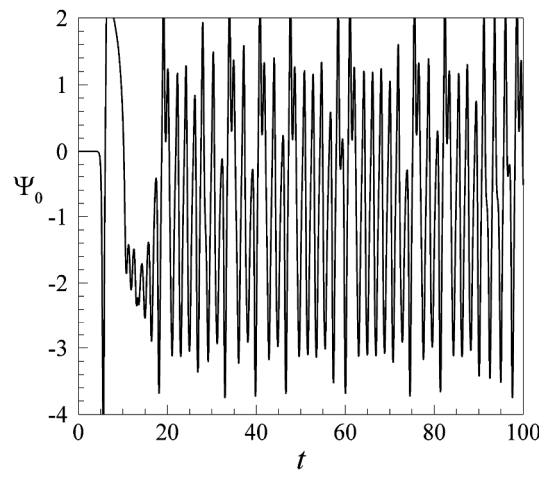
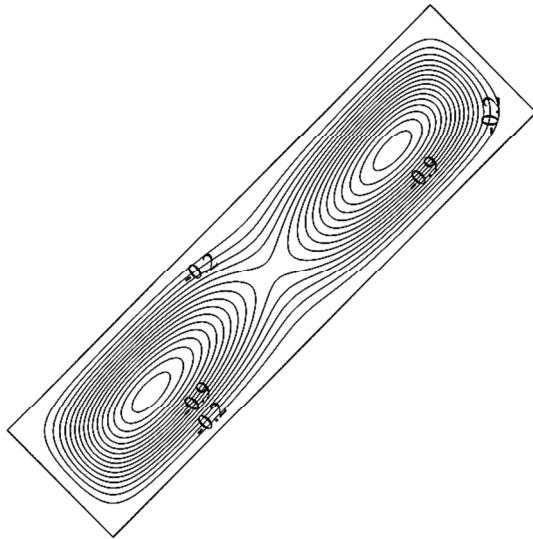
(f)



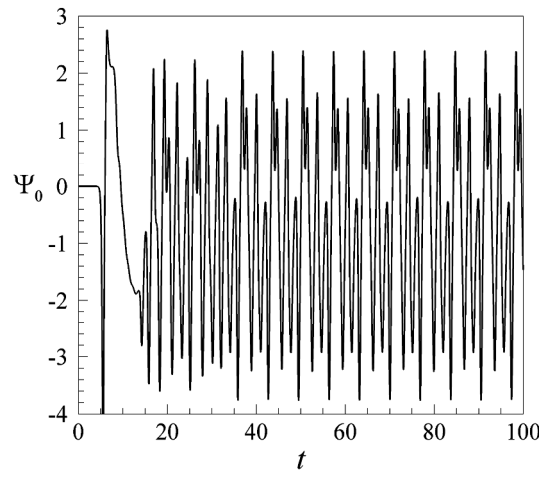
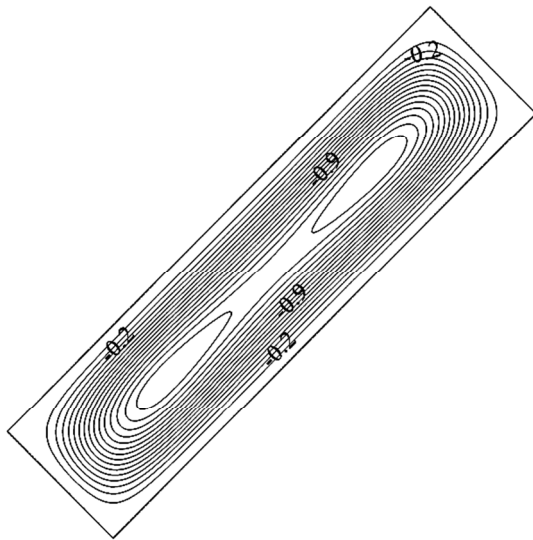
(g)



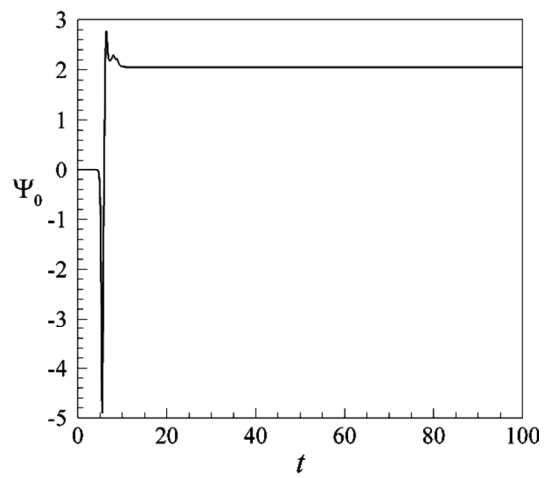
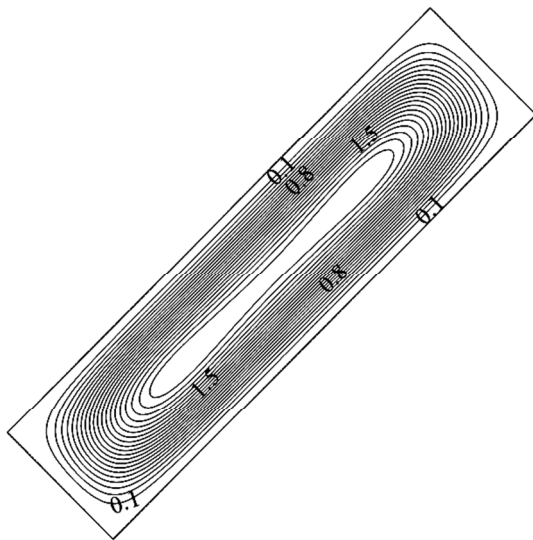
(h)



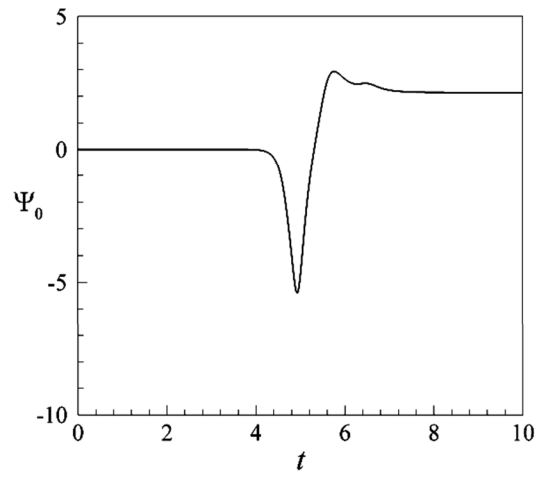
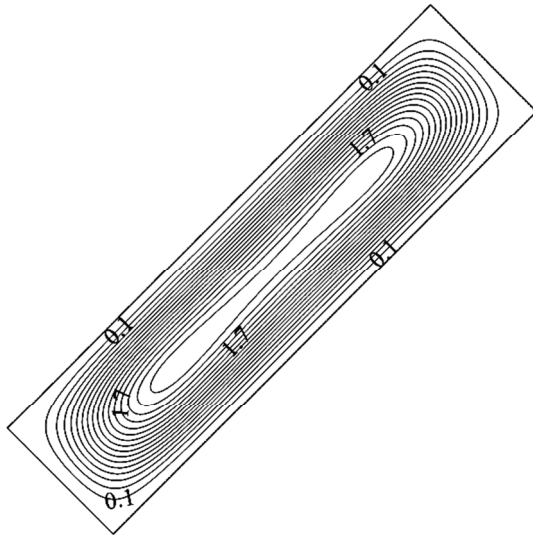
(i)



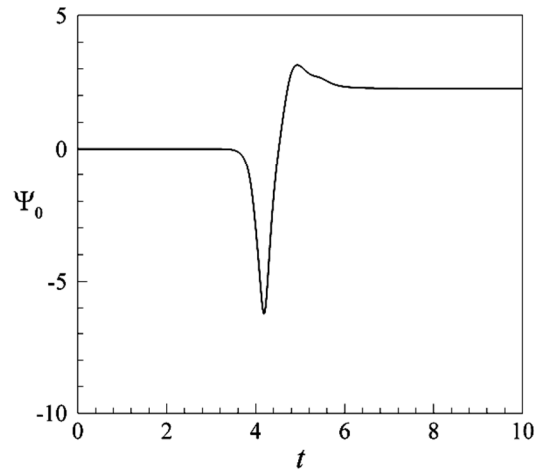
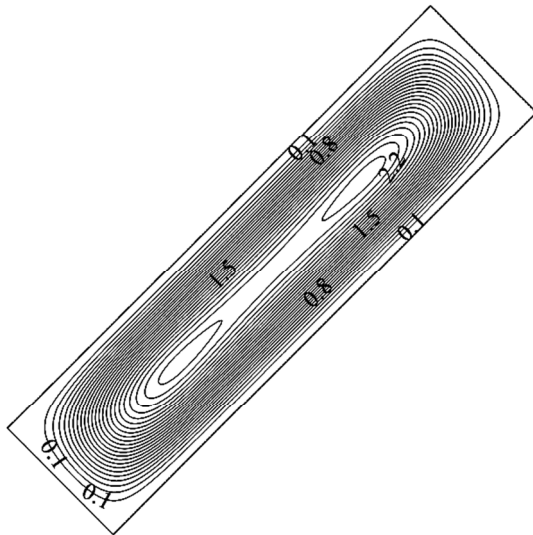
(j)



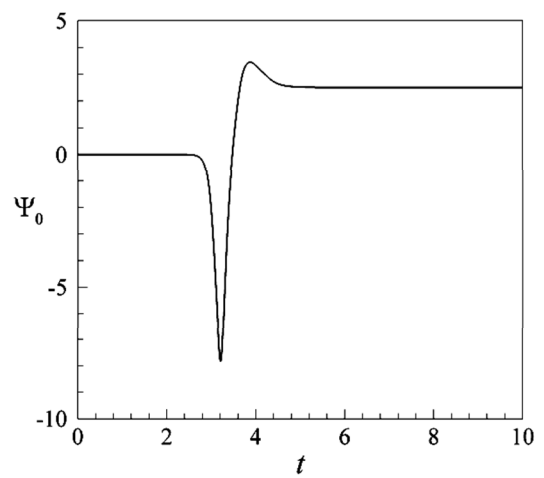
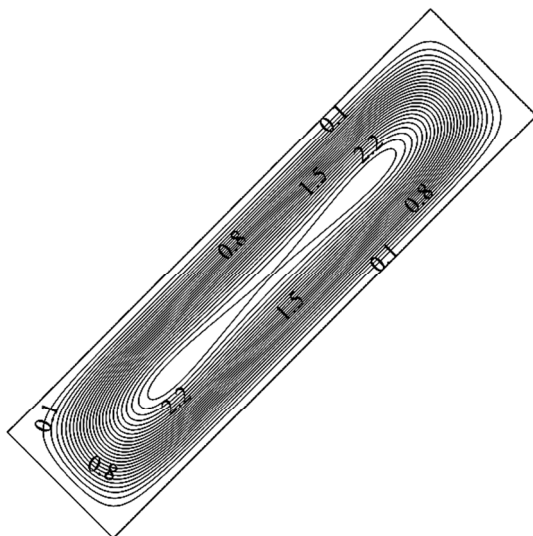
(k)



(l)

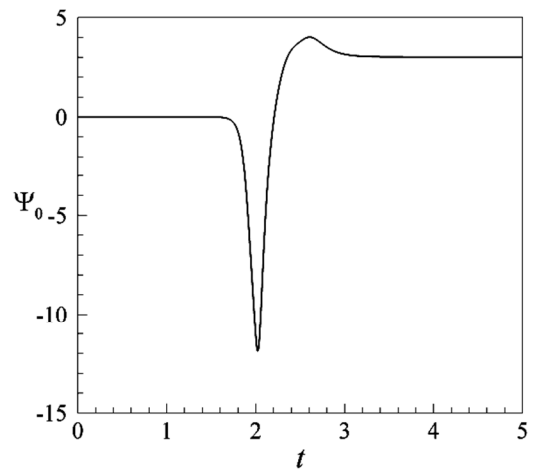
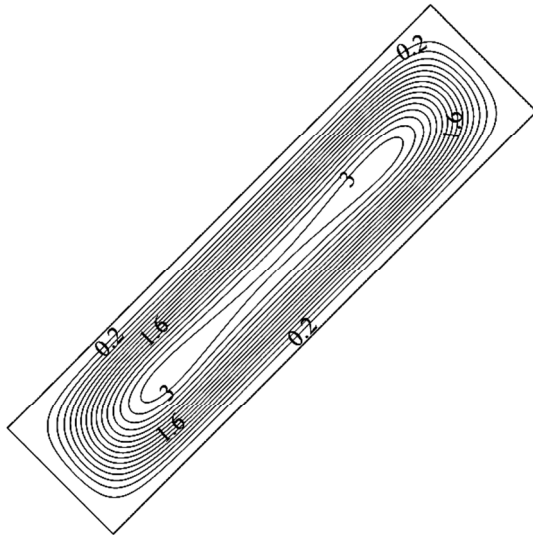


(m)

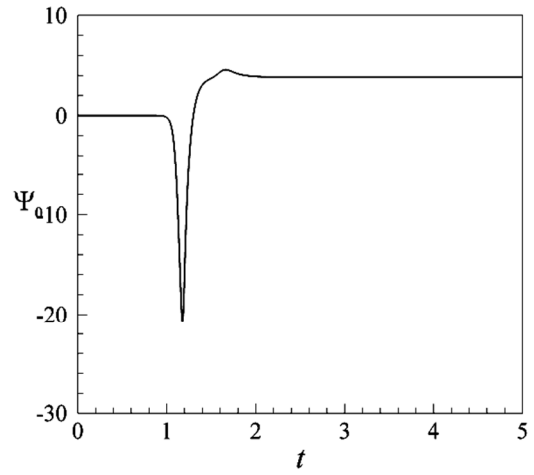
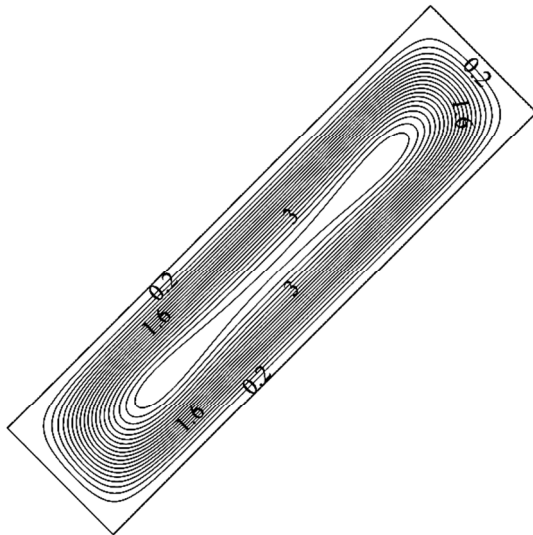


(n)

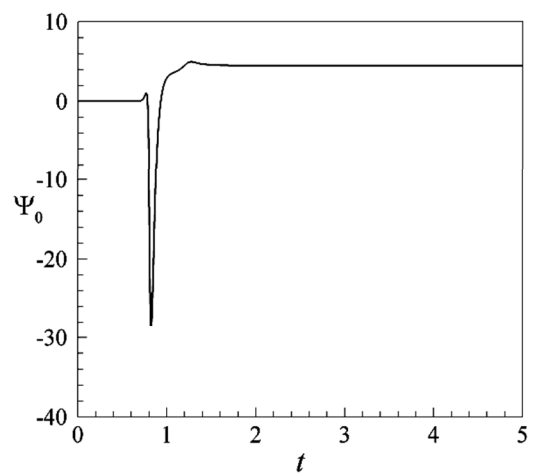
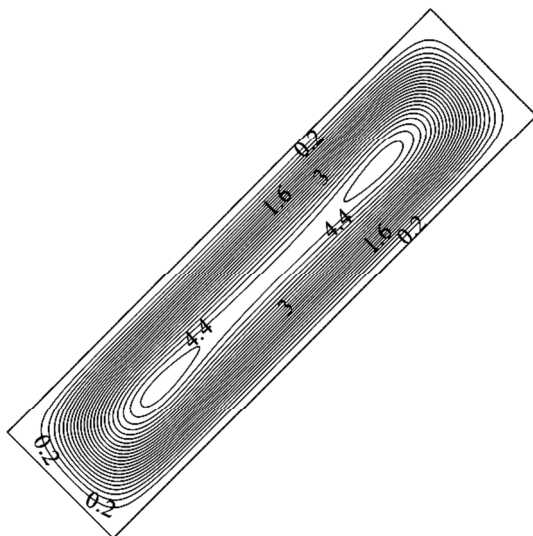




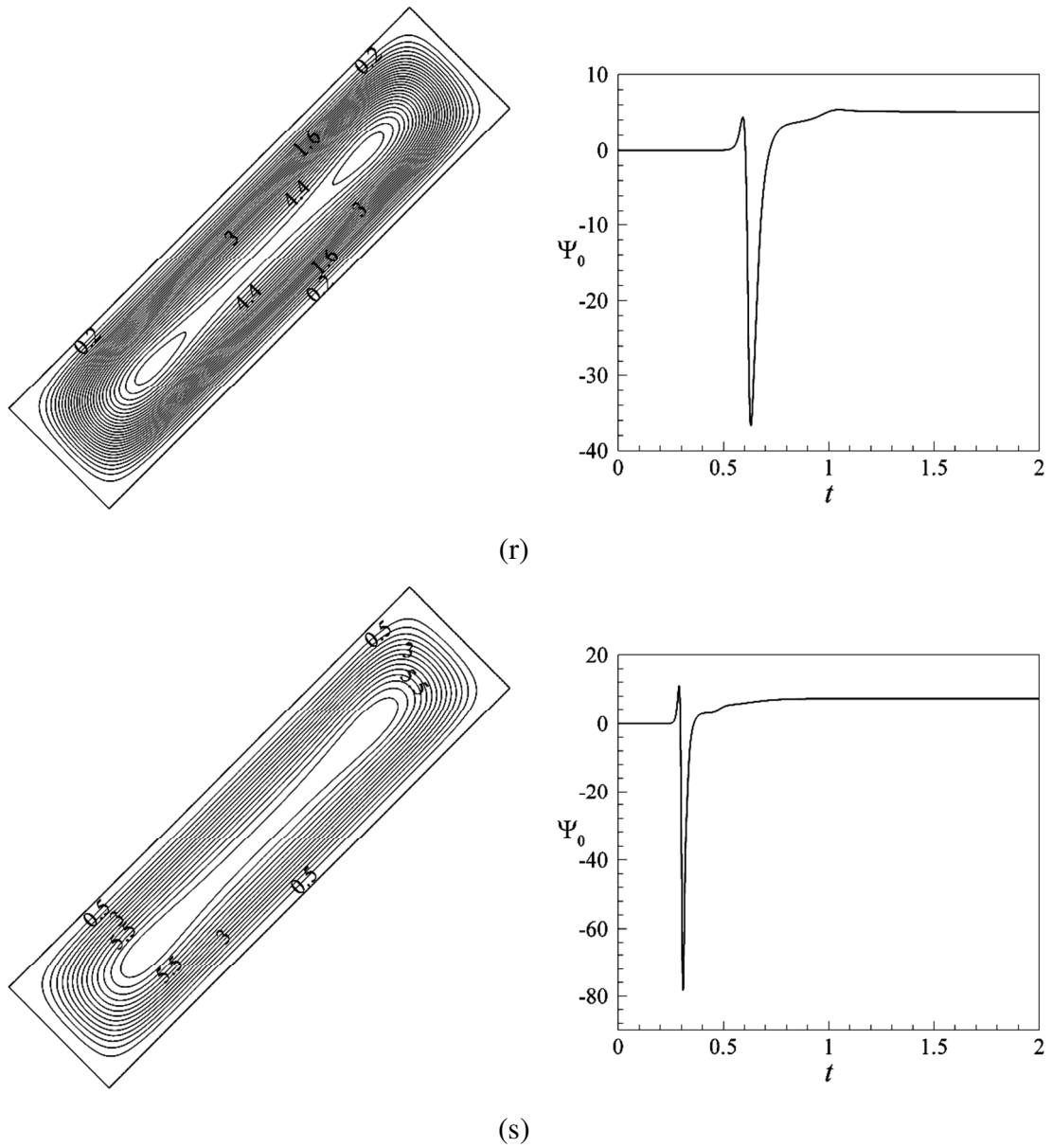
(o)



(p)



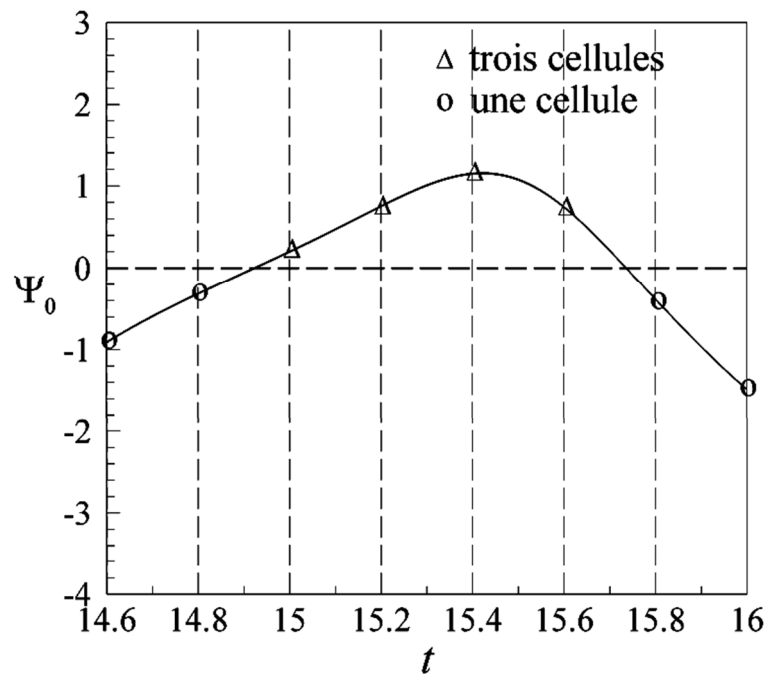
(q)



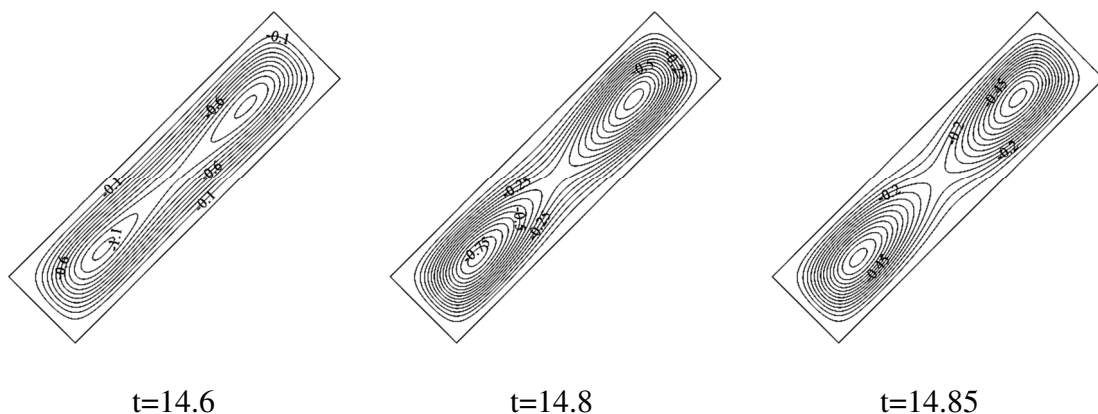
**Figure 4-23** Lignes de courant (gauche), évolution temporelle de la fonction de courant au centre de la cavité (droite). (a)  $Ra_T=800$ . (b)  $Ra_T=900$ . (c)  $Ra_T=920$ . (d)  $Ra_T=925$ . (e)  $Ra_T=930$ . (f)  $Ra_T=935$ . (g)  $Ra_T=10^3$ . (h)  $Ra_T=1100$ . (i)  $Ra_T=1130$ . (j)  $Ra_T=1135$ . (k)  $Ra_T=1140$ . (l)  $Ra_T=1200$ . (m)  $Ra_T=1300$ . (n)  $Ra_T=1500$ . (o)  $Ra_T=2000$ . (p)  $Ra_T=3000$ . (q)  $Ra_T=4000$ . (r)  $Ra_T=5000$ . (s)  $Ra_T=10^4$ .

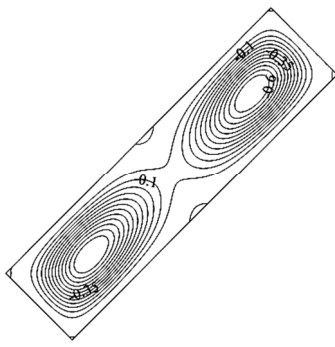
La figure 4.24 présente la solution convective oscillatoire de la fonction de courant au cours du temps entre  $t=14.6$  et  $t=16$ , pour une valeur constante du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T=10^3$ .

Deux types principales de structure d'écoulement sont observés dans la figure 4.25 ; un écoulement composée de trois cellules de convection contra-rotative, où la valeur de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité est positif  $\psi_0 > 0$ , et un écoulement monocellulaire où  $\psi_0 < 0$ , figure 4.24. L'autre structure composée de deux cellules est une structure intermédiaire pendant le passage de la structure multicellulaire à une structure monocellulaire comme le montre la figure 4.25, entre  $t=14.8$  et  $t=15$ . Une évolution inverse de la structure multicellulaire à la structure monocellulaire se produit entre  $t=15.6$  et  $t=15.8$ , selon la figure 4.25.

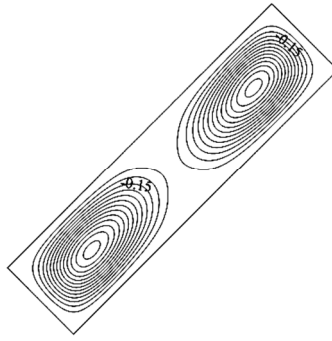


**Figure 4-24** Evolution temporelle de la fonction de courant au centre de la cavité pour  $Ra_T=10^3$ , entre  $t=14.6$  et  $t=16$ .

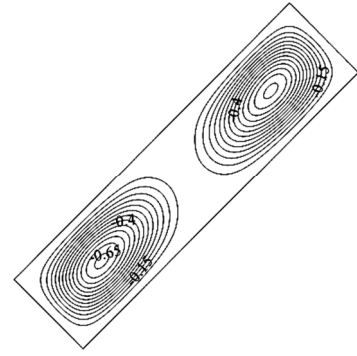




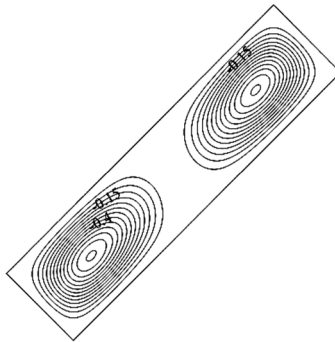
t=14.90



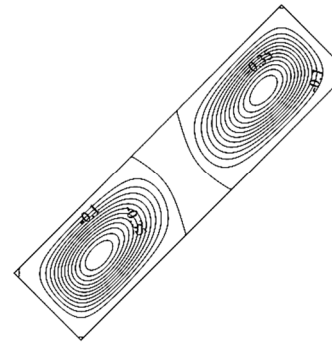
t=14.91



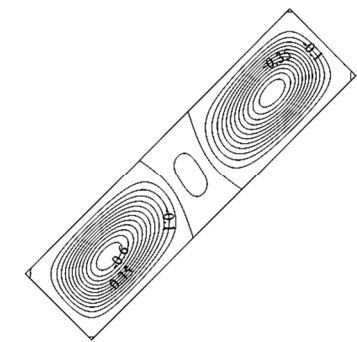
t=14.92



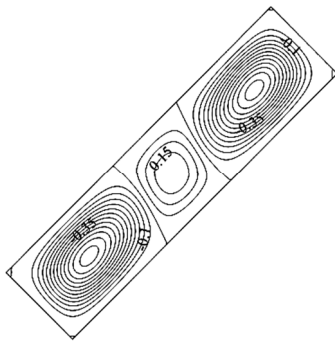
t=14.93



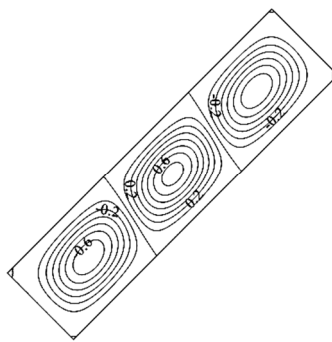
t=14.94



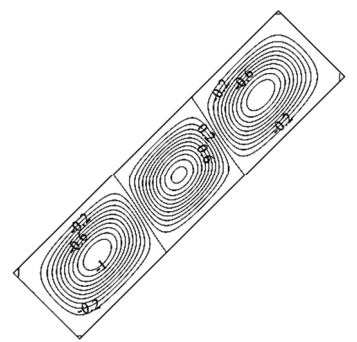
t=14.95



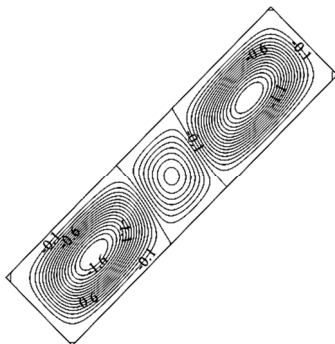
t=15



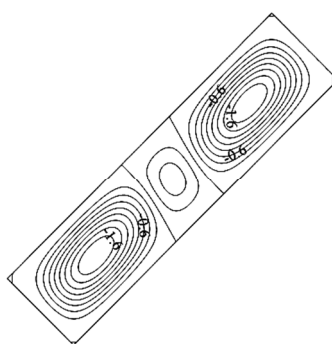
t=15.2



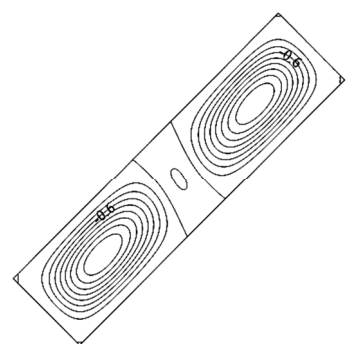
t=15.4



t=15.6



t=15.65



t=15.70



**Figure 4-25** Lignes de courant pour  $Ra_T=10^3$  et entre  $t=14.6$  et  $t=16$  ;  $t=14.6$ ,  $\psi_0 = -0.914$ ,  $Nu_m = 1.295$  et  $Sh_m = 0.474$ .  $t=14.8$ ,  $\psi_0 = -0.319$ ,  $Nu_m = 1.156$  et  $Sh_m = 0.437$ .  $t=15$ ,  $\psi_0 = 0.198$ ,  $Nu_m = 1.082$  et  $Sh_m = 0.404$ .  $t=15.2$ ,  $\psi_0 = 0.749$ ,  $Nu_m = 1.054$  et  $Sh_m = 0.378$ .  $t=15.4$ ,  $\psi_0 = 1.145$ ,  $Nu_m = 1.096$  et  $Sh_m = 0.361$ .  $t=15.6$ ,  $\psi_0 = 0.743$ ,  $Nu_m = 1.243$  et  $Sh_m = 0.357$ .  $t=15.8$ ,  $\psi_0 = -0.381$ ,  $Nu_m = 1.305$  et  $Sh_m = 0.362$ .  $t=16$ ,  $\psi_0 = -1.485$ ,  $Nu_m = 1.246$  et  $Sh_m = 0.358$

# *CONCLUSION GÉNÉRALE*

Dans ce mémoire, les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluides ont été étudiés numériquement. La géométrie considérée est une cavité carrée inclinée soumise à des gradients croisés de température et de concentration. Le phénomène de la convection thermosolutale est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, nous avons développé le modèle mathématique décrivant le phénomène de la convection thermosolutale. La méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) et la méthode de surrelaxation successive (S.O.R) basées sur la méthode de différence finies sont employées pour résoudre les équations gouvernantes générales. Les résultats obtenus sont présentés en termes des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens et l'intensité de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Lewis.

La coexistence des solutions convectives naturelle et antinaturelle a été démontrée dans cette étude. Les seuils pour l'apparition de la convection supercritique et sous-critique ont été obtenus et dépendaient du nombre de Lewis. Dans l'ensemble, l'intensité de l'écoulement et les taux de transfert de chaleur et de masse ont augmenté avec le nombre de Rayleigh. L'effet de l'augmentation du nombre de Lewis est de réduire l'intensité de l'écoulement et d'augmenter le taux de transfert de masse. Pour une cavité élancée, la convection se déclenche pour des valeurs de Rayleigh thermique plus petites que pour le cas d'une cavité carrée. Pour un rapport de forme égale 4, différentes configurations d'écoulement ont été observées et l'intervalle d'existence d'une solution oscillatoire a été déterminé.

## REFERENCES

- [1]. A. Bahloul, L. Kalla, R. Bennacer “Natural convection in a vertical porous slot heated from below and with horizontal concentration gradients,”, *J. Thermal Sciences*, Vol. 43, pp. 653-663, (2004).
- [2]. A. Bejan, K. R. Khair “heat and Mass transfer by natural convection in a porous medium,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 909-918, (1985).
- [3]. A. Mahidjiba, M. Mamou, P. Vasseur “ Onset of double-diffusive convection in a rectangular porous cavity subject to mixed boundary,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1505-1522, (2000).
- [4]. C. Béghein, F. Haghghat, F. Allard “ Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 833-846, (1992).
- [5]. C. F. Chen, D. G. Briggs, R. A. Wirtz “ Stability of thermal convection in a salinity gradient due to lateral heating ,” , *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 57-65, (1971).
- [6]. D. Angirasa, G. P. Peterson “ Combined heat and mass transfer by natural convection with opposing buoyancy effects in a fluid saturated porous,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 2755-2773, (1997).
- [7]. D. Gobin , R. Bennacer “ Cooperating thermosolutal convection in enclosures II. Heat transfer and flow structure,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 2683-2697, (1996).
- [8]. F. Alavyoon “ On natural convection in vertical porous enclosure due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2479-2498, (1993).
- [9]. G. De Vahl Davis “Natural convection of air a square cavity a bench mark numerical solution ,” , *international journal for numerical methods in fluids*, Vol. 3, pp. 249-264, (1983).
- [10]. H. Han, T. H. Kuehn “ Double diffusive natural convection in vertical rectangular enclosure I. Experimental study,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 449-459, (1991).
- [11]. H. Han, T. H. Kuehn “Double diffusive natural convection in vertical rectangular enclosure II. Numerical study,”, *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 461-471, (1991).
- [12]. H. Zahou, A. Zebib “Oscillatory double diffusive convection in crystal growth,”, *Journal of Crystal Growth*, Vol. 135, pp. 587-593, (1994).
- [13]. I. Sezai, A. A. Mohamed “Double diffusion convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients ,” , *Physics of Fluids*, Vol. 12, pp. 1070-6631, (2000).
- [14]. J. Chang, T. F. Lin “Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquid-water mixture in a square cavity – I Flow formation and heat and mass transfer characteristics,”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 1315-1331, (1993).

- 
- [15]. J. Chang, T. F. Lin “Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquid-water mixture in a square cavity – II Flow structure and fluctuation analysis,” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 1333-1345, (1993).
- [16]. J. Lee, M. T. Hyan, K. W. Kim “ Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1969-1977, (1988).
- [17]. J. Srinivasan, D. Angirasa “ Numerical study of Double-diffusive free convection from a vertical surface ,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 2033-2038, (1988).
- [18]. J.S. Turner “Buoyancy Effect in Fluids,” Cambridge University Press London(1973).
- [19]. J. W. Lee, J. M. Hyan “Double-diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 1619-1632, (1990).
- [20]. J. W. Lee, J. M. Hyun “Double diffusive convection in a cavity under a vertical solutal gradient and a horizontal temperature gradient,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 2423-2427, (1991).
- [21]. J. W. Lee, J. M. Hyun “Time dependent double diffusion in a stably stratified fluid under lateral heating ,” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 2409-2421, (1991).
- [22]. L.W. Wang, C.T. Chen “ Thermosolutal Convection in High Aspect Ratio Enclosures ,” 25th National Heat Transfer Conference.
- [23]. M. Bourich, A. Amahmid, M. Hasnaoui “Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration,” *Energy Conversion and Management*, Vol. 45, pp. 1655-1670, (2004).
- [24]. M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen “analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure ,” *Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 115-125, (1996).
- [25]. M. Mamou, P. Vasseur, M. Hasnaoui “On numerical stability analysis of double-diffusive convection in confined enclosures,” *J. Fluid Mech*, Vol. 433, pp. 209-250, (2001).
- [26]. M. Napolitano, G. Pascazio, L. Quantapelle “A review of vorticity condition in the numerical solution of the  $\zeta - \psi$  equation ,” *Computer and fluids*, Vol. 28, pp. 139-185, (1999).
- [27]. O. V. Trevisan, A. Bejan “ Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 403-415, (1986).
- [28]. O. V. Trevisan, A. Bejan “ Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium from below,” *J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 2341-2356, (1987).
- [29]. R. Bennacer, A. A. Mohamad, D. Akrouf “Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients ,” *Int. J. Thermal Science*, Vol. 40, pp. 899–910, (2001).
-



- 
- [30]. R. Bennacer, D. Gobin “Cooperating thermosolutal convection in enclosures I. Scale analysis and mass transfer,”, J. Heat and Mass Transfer, Vol. 39, pp. 2671-2681, (1996).
- [31]. R. C. Paliwal, C.F. Chen “Double-diffusive instability in an inclined fluid layer. Part 1. Experimental investigation,”, J. Fluid Mech, Vol. 98, part 4, pp. 755-768,(1980).
- [32]. R. C. Paliwal, C.F. Chen “Double-diffusive instability in an inclined fluid layer. Part 2. Stability analysis,”,J. Fluid Mech, Vol. 98, part 4, pp. 769-785, (1980).
- [33]. T. Nishimura, M. Wakamatsu, A. M. Morega “Oscillatory double diffusive convection in a rectangular enclosure with combined horizontal temperature and concentration gradients ,”, Int. J. Heat and Mass Transfert, Vol. 41, pp. 1061-1611, (1998).
- [34]. V. Sévéléder, J. P. Petit “ Flow structures induced by opposing forces in double diffusion natural convection in a cavity,”, Numerical Heat and mass Transfer Part A, Vol. 15, pp. 431-444, (1989).
- [35]. W. Shyy, M-H. Chen “Double diffusive flow in enclosures,”, Phys. Fluids, Vol. 3, pp. 2592-2607, (1991).
- [36]. Y. Kamotani, L. W. Wang, S. Ostrach, H. D. Jiang “ Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients ,”, J. Heat and Mass Transfer, Vol. 28, pp. 165-173, (1985).