

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                                                   | Page |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| INTRODUCTION .....                                                                                                                | 1    |
| CHAPITRE 1 SYSTÈME DE PRODUCTION ET REVUE DE LA LITTÉRATURE.....                                                                  | 5    |
| 1.1 Introduction.....                                                                                                             | 5    |
| 1.2 Objectif de la recherche sur les systèmes de production .....                                                                 | 8    |
| 1.3 Revue de la littérature .....                                                                                                 | 11   |
| 1.3.1 Types de maintenance.....                                                                                                   | 11   |
| 1.3.1.1 Maintenance corrective.....                                                                                               | 11   |
| 1.3.1.2 Maintenance préventive.....                                                                                               | 12   |
| 1.3.1.3 Maintenance prédictive.....                                                                                               | 14   |
| 1.3.2 Intégration Maintenance-Production .....                                                                                    | 15   |
| 1.4 Particularités des modèles proposés.....                                                                                      | 19   |
| 1.5 Méthodologie .....                                                                                                            | 21   |
| CHAPITRE 2 SIMULTANEOUS CONTROL OF MAINTENANCE AND PRODUCTION<br>RATES OF A MANUFACTURING SYSTEM WITH DEFECTIVE<br>PRODUCTS ..... | 27   |
| 2.1 Introduction.....                                                                                                             | 29   |
| 2.2 Background and literature review .....                                                                                        | 30   |
| 2.3 Stochastic control model.....                                                                                                 | 31   |
| 2.4 Numerical approach.....                                                                                                       | 36   |
| 2.5 Optimal control results of numerical illustration .....                                                                       | 39   |
| 2.6 Sensitive analysis .....                                                                                                      | 47   |
| 2.7 Conclusion and future work.....                                                                                               | 50   |
| 2.8 References .....                                                                                                              | 51   |
| CHAPITRE 3 MAINTENANCE/PRODUCTION PLANNING WITH INTERACTIVE<br>FEEDBACK OF PRODUCT QUALITY .....                                  | 53   |
| 3.1 Introduction.....                                                                                                             | 57   |
| 3.2 Notations and assumptions .....                                                                                               | 59   |
| 3.3 Problem statement.....                                                                                                        | 60   |
| 3.4 Optimal control and numerical approach.....                                                                                   | 64   |
| 3.5 Optimal control results of numerical illustration .....                                                                       | 66   |
| 3.6 Sensitive analysis .....                                                                                                      | 75   |
| 3.7 Conclusion .....                                                                                                              | 77   |
| 3.8 References .....                                                                                                              | 78   |
| CHAPITRE 4 INTEGRATED MAINTENANCE AND PRODUCTION MODELING OF A<br>STOCHASTIC REMANUFACTURING SYSTEM WITH DEFECTIVE .....          | 81   |
| 4.1 Introduction.....                                                                                                             | 83   |
| 4.2 Stochastic control model.....                                                                                                 | 86   |

|                    |                                            |     |
|--------------------|--------------------------------------------|-----|
| 4.3                | Numerical illustration .....               | 92  |
| 4.3.1              | Production policy .....                    | 94  |
| 4.3.2              | Raw material demand policy .....           | 96  |
| 4.3.3              | Preventive maintenance policy result ..... | 97  |
| 4.3.4              | Corrective maintenance policy .....        | 99  |
| 4.4                | Sensitivity and results analysis .....     | 101 |
| 4.4.1              | Variation of the backlog cost .....        | 101 |
| 4.5                | Conclusion and future work.....            | 109 |
| 4.6                | References.....                            | 115 |
| CONCLUSION.....    |                                            | 119 |
| ANNEXE I           | PROGRAMME 1 MATLAB .....                   | 123 |
| ANNEXE II          | PROGRAMME 1.1 MATLAB .....                 | 131 |
| ANNEXE III         | PROGRAMME 2 MATLAB .....                   | 138 |
| ANNEXE IV          | PROGRAMME 2.1 MATLAB .....                 | 151 |
| ANNEXE V           | PROGRAMME 2.2 MATLAB .....                 | 163 |
| ANNEXE VI          | PROGRAMME 3 MATLAB .....                   | 166 |
| ANNEXE VII         | PROGRAMME 3.1 MATLAB .....                 | 175 |
| BIBLIOGRAPHIE..... |                                            | 182 |

## LISTE DES FIGURES

|                                                                                            | Page |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figure 1.1    Système physique.....                                                        | 5    |
| Figure 1.2    Système de production.....                                                   | 6    |
| Figure 1.3    Cycle de vie d'un actif.....                                                 | 6    |
| Figure 1.4    Modèle simplifié système intrants et extrants utiles.....                    | 8    |
| Figure 1.5    Intégration prédiction réaliste-production.....                              | 19   |
| Figure 1.6    Schéma des modèles.....                                                      | 20   |
| Figure 1.7    Différents états des actifs.....                                             | 20   |
| Figure 1.8    Seuil critique de dégradation.....                                           | 21   |
| Figure 1.9    Étapes de modélisation.....                                                  | 23   |
| Figure 1.10    Schéma fonctionnel des modèles proposés.....                                | 24   |
| Figure 2.1    States transition diagram of the proposed model.....                         | 33   |
| Figure 2.2    Feasibility conditions at maximal and minimal Pr. and Cr.Maint. rate.....    | 40   |
| Figure 3.1    States transition diagram of the proposed model.....                         | 61   |
| Figure 3.2    Failure rate and Mean Time To Repair versus defective products.....          | 67   |
| Figure 3.3    Limiting probabilities at modes 1, 2, r and p versus Defective products..... | 68   |
| Figure 3.4    Feasibility conditions at max. & min. maintenance rate.....                  | 69   |
| Figure 3.5    Production rate versus inventory defective products at mode 1.....           | 71   |
| Figure 3.6    Production rate versus inventory and defective products at mode 2.....       | 71   |
| Figure 3.7    Threshold level versus defective products.....                               | 72   |
| Figure 3.8    Preventive maintenance rate versus inventory and defective products.....     | 73   |
| Figure 3.9    Corrective maintenance rate versus inventory & defective products.....       | 74   |
| Figure 4.1    Functional diagram of the proposed model.....                                | 88   |

|             |                                                                                 |     |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 4.2  | States transition diagram of the proposed model .....                           | 88  |
| Figure 4.3  | Optimal production rate of the manufacturing system.....                        | 94  |
| Figure 4.4  | Boundary of production rate of the manufacturing system.....                    | 95  |
| Figure 4.5  | Optimal raw material demand rate.....                                           | 96  |
| Figure 4.6  | Optimal preventive maintenance policy .....                                     | 97  |
| Figure 4.7  | Boundary of preventive maintenance policy .....                                 | 98  |
| Figure 4.8  | Optimal corrective maintenance policy .....                                     | 99  |
| Figure 4.9  | Boundary of corrective maintenance policy .....                                 | 100 |
| Figure 4.10 | Variation of backlog cost-effect on production policy .....                     | 101 |
| Figure 4.11 | Variation of backlog cost-effect preventive policy .....                        | 102 |
| Figure 4.12 | Variation of backlog cost-effect on corrective maintenance policy .....         | 103 |
| Figure 4.13 | Variation of preventive maintenance cost-effect on production policy .....      | 104 |
| Figure 4.14 | Variation of preventive maintenance cost-effect on Cr maint. policy.....        | 105 |
| Figure 4.15 | Variation of raw material cost-effect on corrective maintenance policy .....    | 106 |
| Figure 4.16 | Variation of Variation of raw material cost – effect on Pr. Maint. policy ..... | 107 |
| Figure 4.17 | Variation of raw material cost - effect on corrective maintenance policy .....  | 108 |

## INTRODUCTION

De nos jours, l'industrie requiert une grande précision dans les décisions nécessaires pour une gestion optimale de la production, ceci, en prédisant de façon plus réaliste les événements futurs afin de réduire les coûts. Dans un contexte industriel où la demande en matière première se fait très rare et coûte chère ; où les actifs de production sont sujets à de multiples défaillances dues à leur mauvaise utilisation, lié en partie à leur âge et au manque d'expérience du personnel d'opération très instable. L'historique de pièces rejetées du système de production est généralement connu; par contre, la problématique de planification optimale de maintenance et de la production est liée à plusieurs paramètres, notamment: l'âge de l'actif, les différentes erreurs d'opération et également les coûts de matière première et de stockage très élevés. Ainsi, basé une politique de maintenance particulièrement sur l'âge de l'actif y trouve une limitation certaine, d'où l'idée de trouver des moyens permettant de combiner l'ensemble des facteurs occasionnant la défaillance de ces actifs. Ce regroupement de facteurs se fait par le biais des quantités de pièces rejetées qui dans les modèles développés constituent la principale rétroaction dans le système et permet d'avoir une planification optimale plus réaliste en intégrant l'ensemble des contraintes de production et de maintenance. Qui dit maintenance des actifs dit disponibilité des actifs.

L'on ne saurait assurer la disponibilité d'un système de production sans s'assurer de la fiabilité et de la maintenabilité de ses actifs.

Les quantités rejetées considérées comme rétroaction dans les modèles proposés n'induisent pas nécessairement la dégradation de l'actif, mais également l'efficacité de tous les intervenants ayant un impact sur le système de production.

C'est ainsi que ces rejets caractérisent la défaillance de l'ensemble du système de production.

L'approche utilisée est celle permettant d'intégrer la gestion de la production, la maintenance préventive/corrective des actifs, la demande en matière première et le stock des produits.

La méthodologie utilisée a été élaborée en plusieurs étapes :

- 1- L'identification du modèle expérimental.
- 2- La définition du problème.
- 3- L'établissement du plan de collecte de données, la validation du système de mesures et la collecte de données.
- 4- La modélisation semi-markovienne.
- 5- La résolution des équations de programmation dynamique par méthodes numériques de Kushner.
- 6- L'analyse de sensibilité et l'application des résultats sur un cas réel.

Comme résultats obtenus, nous citerons l'élaboration d'une planification optimale intégrée maintenance et production à moindre coût tenant compte de toutes les causes de défaillance. Une réduction des coûts de maintenance et de production comparée aux modèles basés sur l'âge. Une récupération des rejets, une diminution de la demande en matière première et par ricochet une réduction des coûts de production.

Les potentiels bénéficiaires sont les entreprises minières, les entreprises de transformation à taux de roulement de personnel élevé, les entreprises ayant un personnel peu expérimenté avec procédures opératoires standards peu ou non appliquées et les entreprises de production avec des actifs sujets à des défaillances aléatoires.

Les modèles développés dans cette thèse permettent sur le plan technologique de résoudre dans l'industrie manufacturière le problème du manque d'outils permettant d'intégrer le vécu des actifs en déterminant en temps réels le cycle de vie globale des actifs. Ils permettent également l'utilisation rationnelle des actifs, la précision d'information sur la disponibilité des actifs, l'adaptation de la capacité de la production en fonction de la demande afin d'augmenter la productivité de l'entreprise, la réduction des coûts et, par conséquent, l'augmentation des profits.

Cette thèse a contribué sur le plan scientifique à ressortir trois modèles de commande basés sur des processus aléatoires dans lesquels les états futurs dépendent des états présents qui dépendent à leurs tours des états passés. L'optimisation de la production basée sur la réduction de coût de mise en inventaire et de rupture de stock fait interagir plusieurs

variables de décisions telles que : les taux de rejet, de production, de maintenance et de demande en matière première. Bien que le processus sans mémoire puisse intervenir séparément pour chaque mode de fonctionnement, la décomposition du fonctionnement de l'ensemble des actifs en plusieurs modes opérationnels permet un suivi du vécu de celui-ci. Tout cela implique un processus à mémoire sur l'ensemble du système de production; d'où une meilleure prédiction des performances du système de production décrit dans le prochain chapitre avec une revue de la littérature sur les différents types de planification intégrée maintenance/production appliquée.



## CHAPITRE 1

### SYSTÈME DE PRODUCTION ET REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 1.1 Introduction

Un système de production est un ensemble d'éléments qui interagissent entre eux dans le but de transformer les valeurs ressources en biens et services utiles. Ce système est constitué de trois ensembles; physique, de décisions et d'informations. Toutes décisions nécessaires pour la planification des ressources de production sont prises en tenant compte de la variabilité des éléments du sous-système de transformation de la matière en produit fini ou semi-fini. La figure 1.1 illustre le sous-système représentant l'ensemble physique constitué principalement des hommes, des matières et des actifs qui doivent être maintenus afin d'accomplir de façon optimale les tâches assignées. Cet ensemble physique étant sujet aux phénomènes aléatoires, tels que les pannes, sa parfaite maîtrise constitue un élément indispensable pour le bon fonctionnement du système de production, d'où l'intégration des stratégies de maintenance de ce sous-système de transformation dans l'optimisation globale du système de production représenté à la figure 1.2.

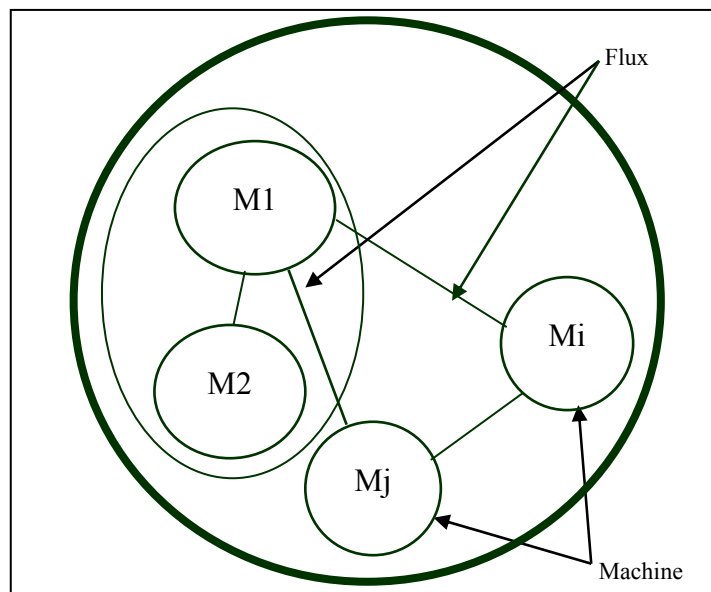
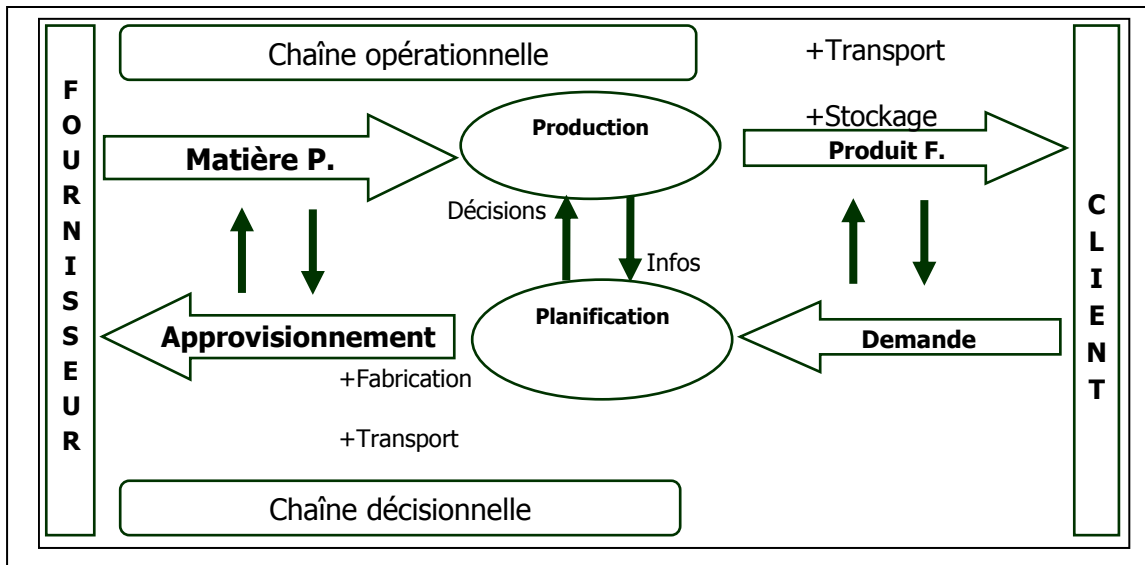
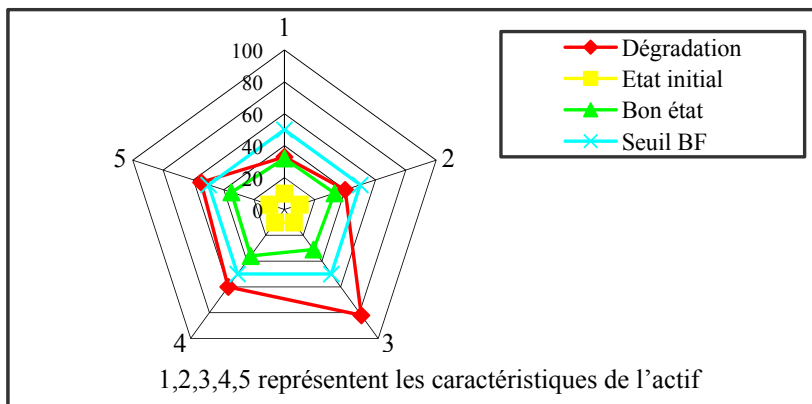


Figure 1.1 Système physique



**Figure 1.2 Système de production**

En prenant en considération l'un des éléments majeurs de notre sous-système de transformation notamment l'actif, celui-ci est sujet aux pannes qui surviennent de manière aléatoire. Pour pouvoir les éviter, des mesures de prévention devraient être prises en tenant compte des caractéristiques associées telles que la fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité. Bref, son impact dans le système global de production. Il serait absurde de chercher à optimiser un système sans toutefois tenir compte des éléments le constituant, autrement dit sans maîtriser le comportement de ceux-ci. Ce qui entraîne la nécessité majeure d'un outil de gestion et de contrôle de dégradation permettant d'avoir une connaissance du cycle de vie de l'actif décrit à la figure 1.3; afin d'intégrer les paramètres caractérisant le vécu des éléments de l'ensemble physique dans les modèles d'optimisation de système global de production.



**Figure 1.3 Cycle de vie d'un actif**

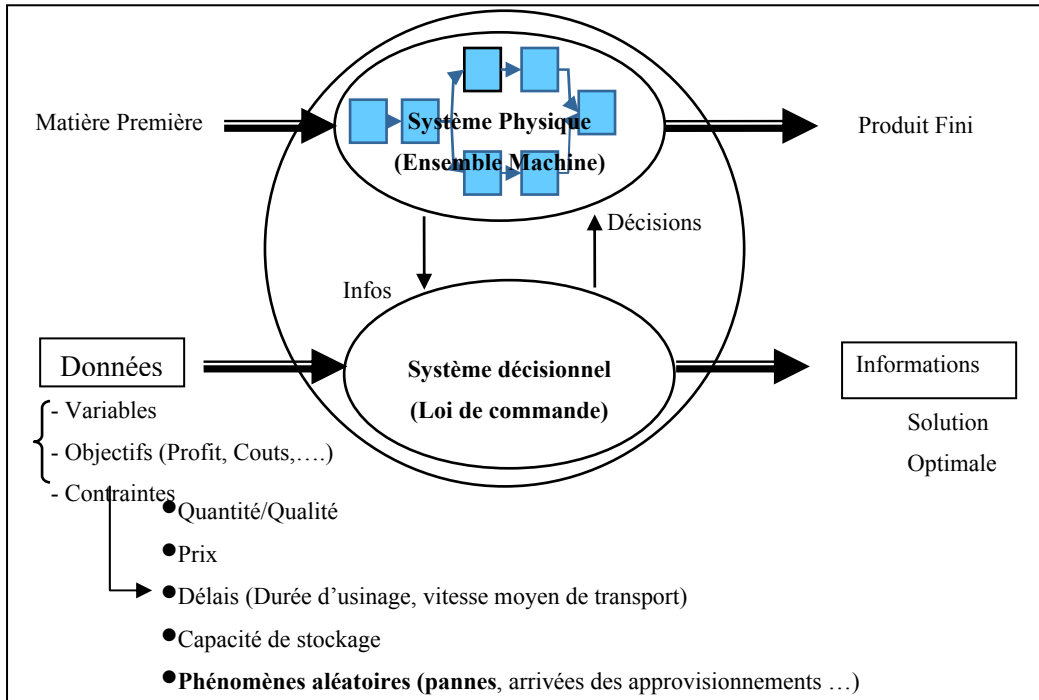
Les premiers travaux d'intégration de la maintenance dans l'optimisation des systèmes de production débutèrent dans les années 1980 avec des auteurs tels que Olsder et Suri (1980) qui ont proposé des modèles intégrés de maintenance et de production. Également, Kinemia (1982), Kinemia et Gershwin (1983) et L'Ecuyer (1983) ont traité le problème d'entretien préventif et prenant ainsi en considération des aspects de maintenance préventive systématique dans leurs modèles d'optimisation des systèmes de production. Ainsi, depuis plus d'une vingtaine d'années, plusieurs auteurs ont continué à explorer ce champ de recherche d'intégration de la maintenance et de la production dans lesquels la prédiction se fait à partir des états présents et utilisant pour la plupart des processus de Markov pour lesquels les états futurs ne sont pas liés aux états passés, mais seulement aux états présents. Par contre, pour être plus réaliste, le vécu d'un élément devrait influencer son comportement futur. C'est d'ailleurs ce constat qui nous amène à mettre sur pied un modèle d'optimisation tenant compte des états passés et en incluant également les états présents afin d'obtenir un modèle décisionnel plus réaliste. Une telle approche entraînerait l'intégration de la maintenance prédictive réaliste dans le modèle d'optimisation des systèmes de production. Sans se limiter aux aspects de prévision de pannes, le modèle proposé devra tenir compte de la réparation, du dépannage, de l'amélioration de l'actif, de l'exécution de la tâche assignée et la vitesse de réaction des intervenants, d'où les aspects correctifs et systématiques des stratégies de maintenance intégrés dans ce modèle.

Bien que la maintenance soit un aspect important dans l'optimisation des systèmes de production, la considération de plusieurs paramètres liés aux éléments suivant est importante, notamment : La fabrication, les transitions des pièces d'un poste de travail à un autre, le transport, le stockage des produits fabriqués, l'approvisionnement, la demande, la quantité/qualité des produits.

Ces éléments cités ci-dessus influenceraient le modèle d'optimisation qui devra être mis sur pied.

Pour ainsi effectuer une commande en temps réel, il suffirait de trouver une loi de commande telle que présenté à la figure 1.4, qui est fonction de l'état passé du système et de son état à

l'instant de l'observation afin de satisfaire l'objectif fixé qui serait de réduire les coûts de production, maximiser le profit, tout en faisant croître la productivité.



**Figure 1.4 Intrants et extrants utiles d'un modèle simplifié de gestion**

## 1.2 Objectif de la recherche sur les systèmes de production

Au vu des grands enjeux économiques et sociaux tels que la concurrence accrue, les nouvelles technologies, les nouvelles organisations, l'amélioration continue de la qualité, l'augmentation de la diversité des produits, l'efficacité des systèmes logistiques, une gestion optimale des systèmes de production nécessite une maîtrise des performances de ceux-ci. Ainsi, mettre sur pied une planification optimale de maintenance de ces systèmes de production implique la prise en compte des facteurs tels que l'augmentation de la réactivité et l'intensification des actions proactives. L'optimisation conjointe de la maintenance et de la production faciliterait l'atteinte du but industriel commun qui est la réduction des coûts et l'augmentation du profit. De nos jours, l'industrie requiert une grande précision dans les décisions nécessaires pour la gestion optimale de la production. Une prédiction plus réaliste des événements futurs incluant toutes les variables associées à la performance du système de

production exige une connaissance des concepts de modélisation permettant d'inclure dans les modèles de prédiction les états passés afin de se rapprocher de la réalité.

Le but principal de ce projet de recherche sera donc de développer les outils de commande intégrant dans la gestion optimale des systèmes de production toutes les stratégies de maintenance notamment corrective, systématique, prédictive, tout en incluant dans la maintenance prédictive le vécu de l'actif, ce qui permettrait d'avoir un modèle d'optimisation plus réaliste.

Plus spécifiquement, ce travail permettra de planifier de façon optimale la gestion du système de production afin de permettre une adéquation de la capacité de la production en fonction de la demande et, par conséquent la réduction des coûts liés à la rupture de stock et à l'inventaire des produits finis.

De plus, ce projet permettra de contrôler et de corriger l'état des défaillances des différents éléments de l'ensemble des actifs, afin de réduire le nombre de pannes et tendre vers les limites de zéro-panne et zéro-temps d'arrêt. Ceci contribuerait donc à la réduction des coûts des pertes dues aux actifs en défaillance et aux périodes de non-productivité. Enfin, ce travail permettra de gérer conjointement en temps réel les actifs et les produits, afin de permettre non seulement la réduction des coûts des pertes, mais aussi d'assurer la sécurité des employés au niveau des incendies dues au réchauffement des actifs. Le modèle optimal à développer sera implémenté sur un des cas réels de système de production.

Le problème de commande stochastique abordé dans cette thèse se ramène à celui d'un ensemble des actifs tel qu'illustré à la figure 1.4. Une inspection effectuée sur chaque pièce permet de quantifier les pièces rejetées parmi les pièces produites. Ainsi, une observation se fait sur les quantités rejetées. La performance du système est liée à la qualité et la quantité des pièces produites. La qualité est définie par les pièces rejetées et la quantité par les pièces produites.

La planification de la prochaine quantité produite est actuellement basée sur la présente quantité rejetée, la quantité demandée et la quantité en stock. Par contre, la quantité rejetée caractérise la performance de l'ensemble des actifs qui est sujet aux pannes aléatoires. Il serait peu réaliste et même prématuré de se figer sur la quantité de rejets durant une seule période de production pour se prévaloir la connaissance de l'état du système. La prise en compte de l'historique des quantités rejetées permet par ricochet l'introduction de l'historique des défaillances dans l'état de l'ensemble des actifs, car les quantités rejetées caractérisent la performance du système. La notion d'état sera caractérisée par la combinaison de l'observation présente et tous les différents états passés. Ainsi à partir de cet état regroupant le passé et le présent, il sera possible de prédire les performances futures du système de production. Ainsi, le système de production soumis à cette étude a été approximé par un ensemble d'actifs décomposés en plusieurs modes opérationnels, un mode panne et un mode prévention.

La seule observation effectuée sera la quantité de pièces rejetées et l'objectif sera de trouver une stratégie de commande optimale réaliste permettant de minimiser le coût global de production en tenant compte des contraintes de production, afin de déterminer une planification optimale de maintenance. Ainsi, les questions de départ sont les suivantes;

***Quand est-il nécessaire d'effectuer la maintenance sur les actifs du système de production en tenant compte de tous les facteurs de défaillance?***

***Quelle action de maintenance est prioritaire pour le fonctionnement optimal du système de production contrôlé en temps réel?***

***Comment intégrer avec efficacité les actions de maintenance dans la planification de la production avec rareté de matière première?***

### **1.3 Revue de la littérature**

La recherche perpétuelle de la réduction des coûts de production a entraîné la modernisation des systèmes de production. Ceci les a rendus de plus en plus vulnérables du fait de la grande variabilité des éléments les constituant. Ces éléments, sujets à plusieurs types de perturbation, entraînent l'accroissement des difficultés de gestion et de maîtrise des systèmes de production. D'où la présentation dans les paragraphes suivants de l'évolution des stratégies de maintenance, afin d'établir une planification des ressources de production à des coûts moindres.

#### **1.3.1 Types de maintenance**

Plusieurs définitions sont attribuées au terme maintenance, notamment Monchy (1991) qui définit la maintenance comme étant un ensemble de moyens de prévention, de correction ou de rénovation suivant l'usage du matériel et suivant sa criticité économique, afin d'optimiser le coût global de possession. 'Maintenir un bien c'est le maîtriser' dit-il dans son livre intitulé la fonction maintenance. La maintenance se décrit comme un ensemble des opérations d'entretien préventif et curatif destinées à accroître la fiabilité ou de pallier aux défaillances (d'un matériel, d'un logiciel). Soutenant principalement la production, la maintenance joue un rôle voilé de qualité, de sécurité et d'accroissement de la productivité dans toute entreprise moderne et compétitive. Les différentes pratiques de maintenance ont évolué au fil des années en fonction des différents besoins des sociétés industrielles.

##### **1.3.1.1 Maintenance corrective**

Avant la Deuxième Guerre mondiale, les industries n'étaient pas fortement mécanisées, les équipements étaient surdimensionnés, la main d'œuvre était abondante. Ceci facilitait les réparations et rendait peu considérable les arrêts d'usine, la prévention des équipements n'était donc pas une grande priorité. Les tâches de maintenance étaient restreintes aux tâches d'entretien. Les services de maintenance subissaient l'actif du fait de n'agir sur l'actif

qu'après une panne. La maintenance était donc basée sur *le dépannage et la réparation* après défaillance selon le principe *réparer et dépanner quand c'est cassé*. Ceci donna naissance à la première génération de la maintenance appelée ***maintenance corrective ou maintenance réactive***.

### 1.3.1.2 Maintenance préventive

Durant la Deuxième Guerre mondiale, les choses ont dramatiquement changé avec l'augmentation de la demande des produits de tout type dû à la pression de la guerre alors que la main d'œuvre baissait considérablement; ceci a entraîné une forte évolution au niveau du développement des mécanismes industriels avec l'avènement des actifs numériques pouvant pallier aux tâches multiples. Au vu de cette évolution industrielle, Ben-Daya (2000) caractérise cette période comme étant le commencement de la forte dépendance industrielle des actifs. Les arrêts des actifs devenant plus considérables, les industries commencèrent à accorder plus d'importance à l'aspect préventif, afin d'augmenter la disponibilité et la durée de vie des équipements; D'où la naissance de la deuxième génération de la maintenance appelée ***maintenance préventive ou maintenance proactive*** exécutée tout simplement de façon systématique. Ce type de maintenance regroupant la maintenance de type bloc et de type âge défini par Barlow et Proschan (1965). En considérant  $T$  comme le temps mis par une installation avant d'être défaillante, le remplacement de l'actif doit être effectué à ce temps  $T$ ; ceci est donc appelé ***maintenance de type âge***, qui se retrouve dans la classe de *maintenance systématique absolue* définie par Monchy (2003). Pour un  $T$  constant, le remplacement de toutes les pièces d'un même système s'effectue simultanément à un temps  $kT$ , caractérisé par le processus de renouvellement à la défaillance de l'une des pièces du système, indépendamment de l'historique des pannes; ceci est appelé ***maintenance de type bloc*** ou encore appelé par Monchy (1991) *maintenance systématique à gestion collective*.

En prenant en considération le fait qu'un composant peut tomber en panne pendant qu'il n'est pas sollicité, Flehinger (1962) ajoute à ces deux formes de maintenance systématiques, une maintenance liée à la *vérification des composantes en repos* n'influençant pas la

défaillance du système en fonctionnement. Il définit également une quatrième forme de maintenance liée aux *essais secondaires* au cours de laquelle les composantes proches de leur état de défaillance sont détectées et remplacées.

Weiss (1956) caractérise la politique de maintenance de type âge par le temps  $T$  auquel le remplacement est fait même si aucune défaillance ne survient. Il préconise l'utilisation de la politique de maintenance de type âge dans le cas où la durée prévue pour que la défaillance survienne lors du fonctionnement du système est une fonction décroissante de  $T$ . Ainsi, Barlow et Proschan (1965) définissent un processus de renouvellement comme étant une séquence indépendante, non négative et à variables aléatoires (non égales à zéro avec une probabilité de un) distribuées de façon identique. Ils proposent une étude des caractéristiques de fonctionnement de la maintenance basée sur la politique de remplacement (théorie de renouvellement). Ils définissent ces caractéristiques comme étant les fonctions de distribution du nombre de pannes, du nombre total des pièces enlevées et du temps prévu pour une défaillance de l'actif pendant son fonctionnement.

Campbell (1941) a fait une étude comparative du remplacement du nombre de réverbères, soit simultanément, soit une par une lorsque survient une défaillance. En considérant que la défaillance et la réparation de chaque réverbère pouvaient survenir de façon instantanée, il démontra quantitativement que le coût de remplacement simultané des réverbères était bon marché que le remplacement une par une à chaque défaillance. Weiss (1956) considère le même problème du point de vue du *temps auquel le système est défaillant pour la première fois*. Il démontra de façon qualitative l'effet de la politique de remplacement de type âge (changeant ou non) sur la fiabilité du système et sur le coût de la maintenance. Takacs (1959) alla plus loin en prenant en compte la durée de remplacement de la pièce comme autre variante du modèle de remplacement. Barlow et Hunter (1961) ont défini les différentes quantités pouvant permettre d'évaluer une politique de remplacement, notamment :

- la probabilité qu'un actif qui est réparé à la suite d'une défaillance soit en marche à un temps spécifique;

- la probabilité qu'un actif soit opérationnel pendant un certain temps  $t$  durant un intervalle de temps bien spécifique;
- la durée de temps prévue pour que l'actif soit en opération durant un intervalle de temps spécifique;
- la distribution du nombre de défaillances durant un intervalle de temps spécifique;
- la prévision du nombre de défaillances durant un intervalle de temps spécifique.

Adjohya et Damodar (2004) ont proposé deux politiques de remplacement des actifs dont la première est basée sur le remplacement de type âge précoce, ceci en prouvant que cette politique est faisable pour des actifs ayant un taux de défaillance croissant durant le temps de retard. La deuxième politique proposée est basée sur l'application opportuniste de la politique de remplacement de type âge durant toute éventuelle opération de maintenance corrective. En considérant que l'intervalle de temps entre les opportunités est une fonction de distribution exponentielle, ils ont montré que la deuxième politique citée contribuait à la réduction du nombre d'arrêts forcés, indispensable pour la première politique. Il ressort également de leur analyse que la deuxième politique est meilleure que la première à condition que le coût de remplacement avec arrêt forcé soit supérieur à un remplacement durant une opportunité. Les données nécessaires pour la mise sur pied de ces deux politiques sont *le retard dû à l'apparition d'une faute* et *l'estimation du temps moyen d'apparition d'une faute*. Pour ainsi appliquer une politique de maintenance basée sur l'âge, il est judicieux de savoir pour une période bien définie les caractéristiques de fonctionnement suivant :

- la distribution et la valeur du nombre de remplacements planifiés;
- le nombre de pannes déterminé par le processus de renouvellement;
- les délais causés par l'opération de remplacement.

### **1.3.1.3 Maintenance prédictive**

Après cette période de considération de la maintenance préventive tout simplement sur le plan systématique, un autre aspect de la prévention vire le jour. Après la crise pétrolière de 1973, la multiplication par quatre du prix du pétrole a mis une pression mondiale sur les

entreprises industrielles américaines, européennes et japonaises. Ceci a entraîné le monde industriel vers la pratique des méthodes intégrant non seulement la gestion des stocks, mais prenant également en considération les arrêts des actifs; ceci dans l'optique d'augmenter la capacité de la production, d'accroître la sécurité, d'assurer la meilleure qualité des produits, d'augmenter la durée de vie des équipements et de réduire les coûts des opérations. Cette nouvelle approche de la maintenance intègre le principe selon lequel le travail qui est planifié est celui qui devrait être planifié (Just the right job), en utilisant les techniques de surveillance conditionnelle (CBM), concept de maintenabilité et fiabilité et l'analyse des modes de défaillance de leurs effets et de leurs criticités (AMDEC). Cette troisième génération de la maintenance qui intègre la prévision des pannes suite aux diagnostics des défaillances est donc appelée ***maintenance préventive évoluée*** regroupant *la maintenance prévisionnelle (prédictive) et la maintenance conditionnelle*.

Dans le futur, une combinaison entre les outils de conception et de maintenance donnera naissance à la quatrième génération de la maintenance appelée ***self-maintenance***. Le but sera non d'éviter les pannes, mais d'éviter les conséquences des pannes. Ceci en mettant en place des systèmes d'auto-maintenance permettant d'être plus proche du zéro-temps d'arrêt de l'ensemble des actifs.

### 1.3.2 Intégration Maintenance-Production

Dekker (1996) évalue et compare les modèles d'optimisation de la maintenance à partir de plusieurs critères notamment : la réduction des coûts, les caractéristiques de disponibilité, les stratégies optimales de contrôle de seuil, les aspects temporels de maintien et d'inspection et la planification de la maintenance prenant en considération tout type de contraintes. Néanmoins, les travaux d'intégration de ces paramètres de maintenance dans l'optimisation de la production ne suivirent pas l'évolution des différentes stratégies de maintenance suscitées. Ce n'est qu'après l'arrivée de la troisième génération de maintenance (prédictive) que les aspects de la première génération (corrective) furent intégrés par Olsder et Suri (1980) dans leur modèle d'optimisation de la production dans lesquels les pannes des actifs

sont liées aux perturbations. Ils décrivent les processus de panne et de réparation par des chaînes de Markov homogènes basées sur le formalisme de Rishel (1975). Les travaux de Kimemia et Gershwin (1983) vont dans la même lancée. Trois années après Akella et Kumar (1986) prouvent que pour un système de production un actif-un produit, la politique du 'hedging point' est optimale; pour un taux de transition constant, les processus de réparation et de panne sont des chaînes de Markov homogènes. Boukas (1987) intègre dans son modèle d'optimisation la maintenance corrective en incluant les taux de pannes dépendant de l'usure des actifs dans le formalisme d'Olsder et Suri.

Boukas et Haurie (1990) et Boukas et al. (1996) proposent un modèle d'optimisation intégrant les maintenances corrective et préventive du système de production de deux actifs dans laquelle les taux de transition sont fonction de l'âge des actifs relevant la difficulté de résolution des équations dynamiques du fait de la non homogénéité du processus markoviens car les taux de transition étant non constants. Les auteurs proposent une résolution du problème en utilisant les méthodes d'approximations numériques proposées par Kushner (1977) et Chancelier et al. (1986). Lou et al. (1994) étendent le modèle d'Akella et Kumar (1986) en proposant l'intégration d'un stock tampon entre deux actifs en série afin d'éviter l'utilisation directe du concept de seuil critique. Boukas et Yang (1996) étendent également le même modèle d'Akella et Kumar (1986) en associant le stock, la demande, les maintenances corrective et de type âge dans le modèle de réduction de coût d'un système un actif-un produit. Ces auteurs traitent le problème d'intégration de la maintenance dans l'optimisation de la production en considérant le contrôle des taux de production et taux de maintenance au mode opérationnel.

L'aspect préventif de la maintenance ne se limite qu'aux tâches usuelles d'entretien. Néanmoins, leur modèle obtenu à partir des méthodes numériques est basé sur la politique du seuil critique, l'optimum est obtenu à partir de la résolution des équations différentielles partielles d'Hamilton-Jacobi Belleman (HJB). Kenne et al. (1997) traite le même problème en utilisant une combinaison d'approches analytiques et de la simulation pour un système de production « deux actifs-un produit ». Cheung et Hausman (1997) proposent un modèle dans

lequel les aspects de maintenance systématique et du stock de sécurité sont conjointement intégrés dans le processus d'optimisation. Kenne et Gharbi (1997) et Gharbi et Kenne (1999) étendent le modèle de Boukas et Yang (1996) pour un système de production à grande échelle, en développant une méthode heuristique permettant d'obtenir un modèle de surface de réponse du coût. Ce qui entraîne la réduction du problème à traiter afin de contourner la difficulté de résolution posée par la méthode numérique du fait du comportement dynamique spécifique de chaque type d'actif du système de production.

Berenguer et al. (1997) proposent un modèle utilisant un processus de décision semi-markovien dans lequel est intégré la maintenance corrective et la maintenance préventive systématique en proposant une politique combinant le remplacement de l'actif défaillant et la prédiction de la date d'une nouvelle inspection afin de minimiser les coûts liés à la maintenance. Sheu et Griffith (2001) développent un modèle d'optimisation du coût de maintenance par méthode numérique en considérant la maintenance, de type âge, généralisée avec un temps de réparation minimal et aléatoire.

Gharbi et Kenne (2000, 2003) proposent un modèle d'optimisation d'un système de production à multiple-produits multiple-actifs dans l'optique de minimiser le coût des pertes dues aux produits finis en stock et en attentes d'exécution. Pour s'y faire, afin d'éviter la difficulté de résolution des équations d'HJB, les auteurs combinent les approches analytique et expérimentale proposées par Kenne et Gharbi (1999, 2000) afin d'obtenir une approximation optimale du système de production. Kenne et al. (2003) traitent le problème des coûts des excédents et des activités de réparation d'un système de production plusieurs-actifs plusieurs-produits avec un modèle de saut de perturbation de Markov basé sur le formalisme de Rishel (1975). Ces auteurs intègrent dans leur modèle la maintenance corrective. En considérant *le ratio de production et le taux de réparation des actifs*, la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) leur permet de déterminer une structure de stratégie de contrôle consistant à déterminer une valeur approximative du couple d'inconnues (taux de production et taux de réparation), puis de construire asymptotiquement une structure de contrôle qui au fur et à mesure la différence entre la valeur réelle et la valeur

estimée tend vers zéro, le système s'approche de l'optimalité. Gharbi et al. (2006) proposent un modèle intégrant le temps et le coût de mise en marche permettant de définir une séquence de mise en marche qui minimise les coûts associés ainsi que ceux reliés aux stocks. Le modèle développé est basé sur ceux de Sethi et Zhang (1994), Yang et Zhang (1997) et Boukas et Kenne (1997) et utilise la méthodologie de surface de réponse, une approche expérimentale et une série de simulations. Ce modèle permet de réduire les coûts de mise en marche et d'excédents des systèmes de production peu fiable par le biais de la détermination d'un taux de production et d'une périodicité d'installation optimum. Une approche numérique a été utilisée pour résoudre les équations d'HJB, sa combinaison avec l'approche analytique a permis d'obtenir un ratio de production optimal et une séquence de mise en marche adéquate pour les systèmes de productions peu fiables de type plusieurs actifs plusieurs produits. Zhou et al. (2007) ressortent dans leur modèle l'influence du taux de risque sur le processus d'optimisation. Kenne et al. (2007) considèrent dans leur modèle les effets de la maintenance systématique de remplacement et de l'âge de l'actif par rapport au niveau de stock de sécurité. Ils utilisent un modèle d'optimisation dépendant de l'âge basé sur la réduction des coûts liés aux stocks, aux pertes dues à la non vente et à la maintenance. Tous ces travaux suscités ressortent la non existence des modèles d'optimisation intégrant globalement toutes les stratégies de maintenance et bien plus les stocks et demandes variables.

Néanmoins, cette stratégie de maintenance prédictive non intégrée dans les différents modèles d'optimisation se retrouve dans les travaux de Lee et al. (2006) qui proposent des outils de contrôle conjointe du cycle de vie des actifs et des produits afin de prendre des décisions plus judicieuses et plus réalistes de gestion optimale des systèmes de production. Ses paramètres de décision se basent sur les travaux de Djurdjanovic et al. (2004) qui proposent une méthode de prédiction à long terme permettant d'intégrer l'historique des pannes dans la prédiction du processus de dégradation en cours au moment du recueil d'information. Cette méthode consiste à comparer les signatures de deux processus de dégradation utilisant les mesures de similarités formant la matrice de correspondance afin de générer les états futurs des équipements. Cette méthode nous permettra de prendre en

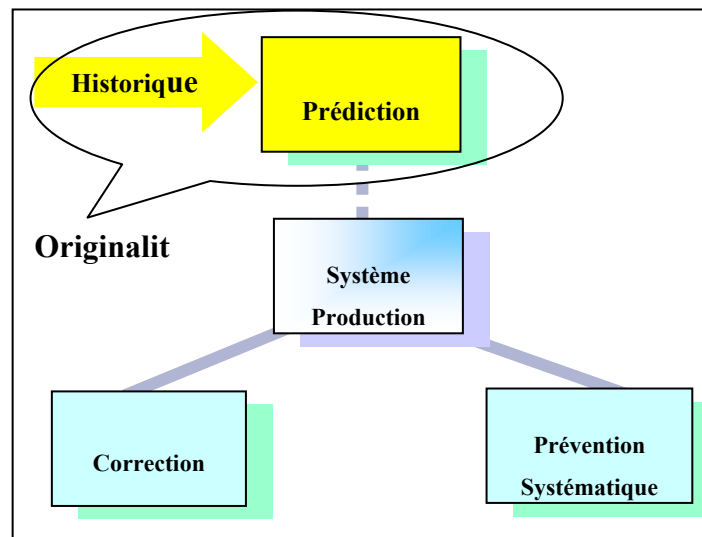
considération dans les nouveaux modèles d'optimisation proposés dans cette thèse l'aspect intégration de l'historique dans la prédiction. L'ensemble des paramètres doivent être intégrés dans le nouveau processus d'optimisation des systèmes de production.

#### 1.4 Particularités des modèles proposés

Ce projet de recherche trouvera son originalité dans le fait d'intégrer simultanément dans un même modèle d'optimisation tous les facteurs (âge et erreurs humaines) pouvant entraîner la défaillance des actifs tout en tenant compte :

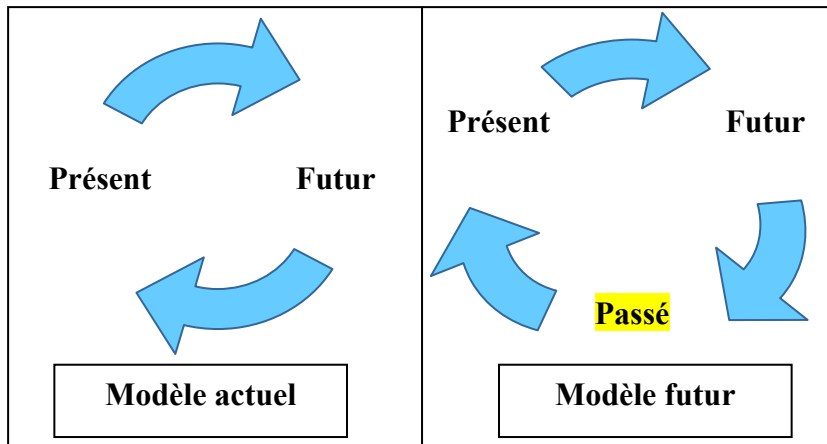
- des aspects correctifs et proactifs de la maintenance pour un système de production réaliste, des dimensions de récupération de rejets de production,
- les demandes en matière première et en produit fini,
- les stocks et coûts associés sont pris en considération dans un même modèle optimal intégrant la maintenance et la production.

L'ajout de la troisième génération de la maintenance tel qu'illustré à la figure 1.5, intégrera le vécu des actifs et permettra ainsi d'effectuer une prédiction qui affectera le modèle de planification intégrée maintenance/production afin d'obtenir une optimisation plus réaliste.



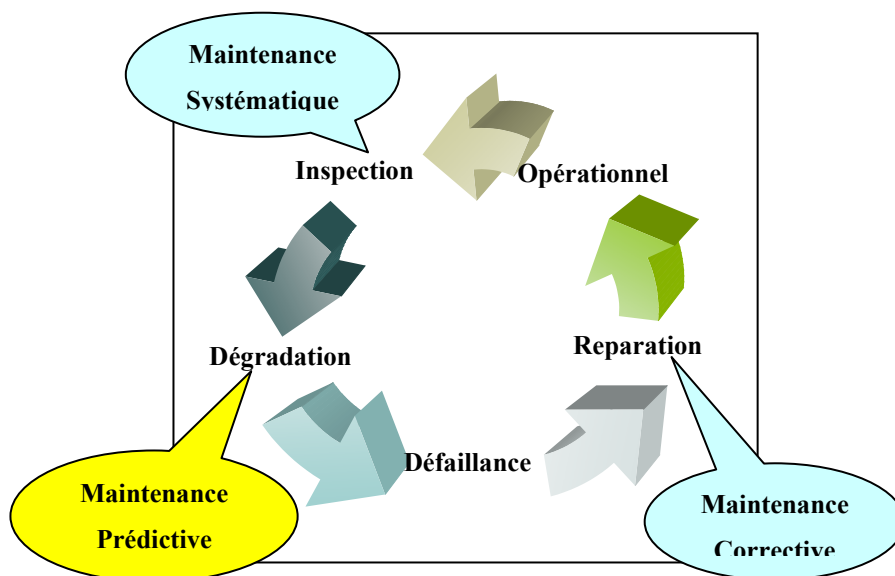
**Figure 1.5 Intégration de la prédiction réaliste de production**

La prise en compte de l'historique des actifs permettra de relier les états passés, présents et futurs tels qu'illustrés à la figure 1.6.



**Figure 1.6 Schéma des modèles**

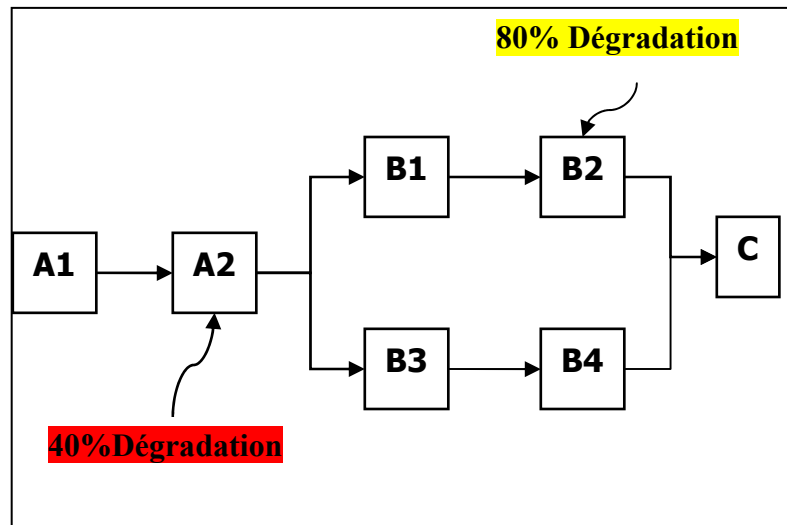
En effet, les actifs à maintenir sont définis sous cinq états, tels que présentés à la figure 1.7. D'où la prise en compte du vécu global de l'actif dans l'optimisation des systèmes de production.



**Figure 1.7 Différents états endogènes et exogènes des actifs**

De plus, ce modèle prendra en considération les seuils critiques d'intervention sur un exemple de système de production tel que présenté à la figure 1.8.

Bien que l'actif A2 soit moins dégradé que l'actif B2, la première intervention se fera sur l'actif A2 afin d'éviter l'arrêt du système.



**Figure 1.8 Seuil critique de dégradation**

Ainsi, pour illustrer la façon dont nos travaux devront être abordés, la section suivante présentera la méthodologie adoptée.

## 1.5 Méthodologie

La planification de la maintenance est généralement élaborée de façon systématique. Les périodes d'intervention sont liées aux périodes de non-fonctionnement (temps mort) du système de production et à la nature de l'intervention sur chaque actif. Plusieurs failles découlent de cette planification :

- les interventions préventives sur les actifs ne respectent aucun ordre de priorité;
- l'approvisionnement en matière première n'est généralement pas considérée dans la planification de la maintenance des actifs de la ligne de production;
- la réparation est faite tout simplement quand il y a un bris sur l'actif;
- la dynamique aléatoire de l'arrivée des urgences de réparation est contrôlée par les temps morts non liés au fonctionnement de l'actif, mais plutôt par des événements

comme les heures de réunion des employés n'ayant pas d'impact majeur sur le bon fonctionnement des équipements.

- la non-intégration des contraintes de production telles que :
  - l'inexpérience des opérateurs;
  - la mauvaise utilisation des actifs;
  - la rareté des matières premières;
  - les coûts de stockage et de rupture de stock.

La méthodologie adoptée pour résoudre ces problèmes de planification intégrée maintenance/production est présentée à la figure 1.9.

*Étape 1*

L'identification du modèle expérimental

*Étape 2*

Collecte de données, Variables de décisions, Variables d'états

Paramètres

**Modélisation**

*Étape 3*

*Étape 4*

**Résolution**

Analyse de robustesse

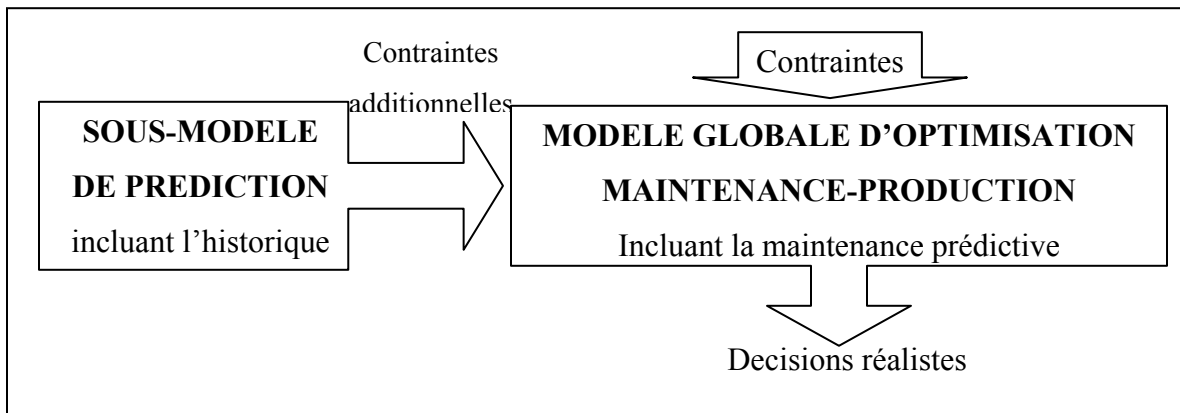
*Étape 5*

**Application**

Système réel

**Figure 1.9 Différentes étapes de modélisation**

Après avoir identifié le modèle expérimental à la première étape, un ensemble de variables a été défini à la deuxième étape, afin de développer un modèle mathématique permettant d'atteindre les objectifs de réduction de coût de production. La modélisation du problème posé s'est fait de façon graduelle et dans laquelle un sous-modèle de prédiction réaliste est établi sur la base de la méthode évoluée de Djurdjanovic (2004) incluant le vécu des actifs. Par la suite, ce sous-modèle sera intégré dans le modèle global d'optimisation ressortant toutes les autres variables liées aux coûts, à la correction, à la prévention systématique, au stock et à la demande. Cette approche a permis de considérer les données de dégradation des actifs dans la fonction-objectif caractérisant le problème posé notamment la réduction des coûts.



**Figure 1.10 Schéma méthodologique des modèles proposés**

Cette étape de modélisation sera suivie de la phase de résolution des systèmes d'équations liées aux objectifs, contraintes, aux différentes conditions d'optimum. Connaissant la difficulté à résoudre analytiquement et même numériquement les systèmes d'équations non linéaires et à multiples variables dynamiques, plusieurs approches de résolution seront abordées. Considérant les résultats du sous-modèle de prédiction réaliste (incluant l'historique des actifs) comme contraintes pour le modèle global, la première méthode de résolution sera basée sur une combinaison des travaux modifiés de Gharbi et Kenne (2003) et de Berengher (1997). Un essai de résolution s'est fait pour un système de production simple, soit un produit et plusieurs modes opérationnels avec connaissance des taux de rejets associés aux différents modes; puis une extension s'est faite sur un système de production à deux modes opérationnels avec contrôle des rejets caractérisant l'erreur humaine et l'âge de

l'actif. Un troisième modèle d'optimisation a été développé en tenant compte du fait que les quantités de rejet étaient réinjectées dans le système de production afin de résoudre le problème de rareté de matière première et de réduction des coûts. Les analyses de sensibilité se sont effectuées pour la quatrième étape liée à la résolution des équations aux conditions d'optimum. Ces analyses ont permis l'ajustement des modèles proposés afin de les rendre plus robustes. Les résultats obtenus ont été comparés aux travaux d'optimisation des systèmes similaires.

Après une preuve de robustesse significative des modèles réalistes mis sur pied, l'étape future de nos travaux consistera à appliquer les solutions obtenues sur des entreprises de production ciblées afin de valider leur applicabilité.

Les étapes de modélisation, de résolution et d'application sont présentées de façon détaillées dans les trois prochains chapitres qui illustrent les trois articles de revues scientifiques.

Les formulations de cette thèse se sont illustrées à la participation à une conférence scientifique, et à la rédaction de trois articles de revues scientifiques avec comité de lecture, parmi lesquels les deux premiers articles ont déjà été acceptés et publiés dans les revues scientifiques Journal of Intelligent Manufacturing (JIM) et Journal of Quality in Maintenance Engineering (JQME) et le troisième a été soumis à International Journal of Production Economics (IJPE).

Cette méthodologie de modélisation a fait partie des travaux ayant permis la publication du chapitre 2 de cette thèse dans la revue scientifique Journal of Intelligent Manufacturing (JIM). Bien que cette thèse ne soit pas limitée à cette seule approche, d'autres approches de modélisation ont été énoncées et ont permis de publier les chapitres 3 et 4 dans deux autres revues scientifiques, soient Journal of Quality in Maintenance Engineering (JQME) et International Journal of Production Economics (IJPE).



## CHAPITRE 2

### SIMULTANEOUS CONTROL OF MAINTENANCE AND PRODUCTION RATES OF A MANUFACTURING SYSTEM WITH DEFECTIVE PRODUCTS



Achille N. Njike <sup>ab</sup>, Robert Pellerin <sup>b</sup>,  
Jean Pierre Kenne <sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mechanical Engineering,  
École de Technologie Supérieure de Montréal, Canada*  
<sup>b</sup> *Department of Mathematics and Industrial Engineering,  
École Polytechnique de Montréal, Canada*

This chapter is published as an article in Journal of Intelligent Manufacturing. Online First, 30 October 2009, DOI: 10.1007/s10845-009-0354-y p. 195-212.

#### Résumé

Dans les trois dernières décennies, des études en planification simultanée de la maintenance et de la production ont mis l'accent sur la défaillance de la machine basée sur l'âge et l'inventaire. Cet article présente l'interaction entre les produits défectueux et un contrôle optimal du taux de production, des délais et des stocks. Notre objectif est de minimiser le coût global prévu due aux activités de maintenance, aux stocks et aux arriérés. Grâce à la maintenance basée sur la condition, nous surveillons en temps réel l'état de santé du système manufacturier, en le décomposant en  $N$  états opérationnels. Nous considérons deux états de maintenance d'une machine contrôlée par deux variables de décision: taux de production et taux de maintenance. La politique optimale mise sur pied est caractérisée par la solution à un problème de contrôle optimale déterministe par morceaux. Une illustration numérique et une analyse de sensibilité sont développées avec un ensemble de paramètres étalonnés sur un système manufacturier existant.

**Mots clés:** maintenance conditionnelle, Systèmes de fabrication, Programmation dynamique stochastique, méthodes numériques.

**Abstract**

In the past three decades, studies of simultaneous maintenance and production planning have been focusing on age-dependent machine failure and inventory. This paper presents the interaction between defective products and optimal control of production rate, lead time and inventory. Our aim is to minimize the expected discounted overall cost due to maintenance activities, inventory holding and backlogs. Through Condition-Based Maintenance, we monitor in a real time the manufacturing system's health, by describing  $N$  operational states. We consider two maintenance states of a machine controlled by two decision variables: production and maintenance rates. The optimal policy is characterized by the dynamic programming solution to a piecewise deterministic optimal control problem. A numerical illustration and a sensitive analysis are developed with a set of parameters calibrated on an existing manufacturing system.

**Key words:** Condition-Based Maintenance, Manufacturing systems, Stochastic dynamic programming, Numerical Methods

## 2.1 Introduction

In today's global competitive marketplace, manufacturing industries seek to reduce costs due to machine failures. In fact, production planning is extensively linked with machine maintenance in many organizations. A study made by Bloch, and Geiter (1994) reveals that about 99 per cent of the mechanical failures are preceded by some detectable indications of condition change. The knowledge of a manufacturing system's health, through Condition-Based Maintenance (CBM) methods and practices, can allow to reduce maintenance activity without risk of failure. As machines are more efficient today, in case of breakdown the loss could be huge. By monitoring in a real time the states of the entire manufacturing system, through the quantity of defective products, we can optimize maintenance resources. Using the defective products as feedback into our optimal model allows us to develop a realistic simultaneous maintenance and production planning. Several authors have developed optimal control models of manufacturing systems by integrating maintenance due to age-dependent machine failure (Boukas and Hauris, 1990; Ajodhya and Damodar, 2004; Kenne, Gharbi and Beit, 2007). However, manufacturing systems are reliant on both machines and human being. Failure is not only due to the age of the machine but it is also due to human factor. Taking into account every failure parameter is quite difficult to achieve. In this paper, we assume that the control action into our system can be linked to defective products. Thus, we propose an integrated maintenance and production planning focusing on defective product instead of age-dependent machine failure. Such interactions between defective and flawless products have been analysed in a manufacturing system (Gershwin and Kim, 2005; Gershwin and Schick, 2007) but the integration of maintenance and production strategies has been mainly focused on machine and human activity (Kenne, Boukas and Gharbi, 2003; Kenne, Gharbi and Beit, 2007; Kenne and Nkengoue, 2008). Instead of taking into account machine failure and human error separately, we consider a defect in product as being the consequence of a combined failure; this consideration allows us to be more realistic by merging all failure parameters into a single one. Thus, a new stochastic control model which focuses on defective product, inventory and backlogs, has been developed. We then consider for this new model,  $N$  operational states, one under repair and one preventive state. The transition between operational states is controlled by a defect rate.

The remainder of this paper is organized as follow. First, we present a brief literature review in section 2 on integrated maintenance and production planning. In section 3 we define our integrated model of maintenance and production, then, we introduce the dynamic programming Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations. We then present approximate techniques used for numerical solutions. In section 4 we illustrate the method on an existing manufacturing system. We conclude the paper in section 5.

## **2.2 Background and literature review**

Integrated production and maintenance planning has been formerly studied separately. With today's highly competitive environment, their integration has received a growing attention from researchers, especially at the operational level. Aghezzaf and Najid (2008) investigated issues of integrating production planning and preventive maintenance in failure-prone manufacturing systems. Panagiotidou and Tagaras (2007) developed an optimization model of preventive maintenance in a manufacturing system operating in different quality states. A set of works made by Kim and Gershwin (2005) and Gershwin and Kim (2005, 2008) introduced dynamic models of manufacturing systems with operational, failure and partially observable defective quality states. Yang et al. (2008) proposed a method for maintenance planning using the continuous assessment and prediction of performance degradation of machines and interaction between maintenance and production. Sortrakul, Nachtmann and Cassady (2005) developed a heuristic based on genetic algorithms to solve an integrated and optimization model for maintenance and production planning. Adzakpa, Adjallah and Yalaoui (2004) proposed a heuristic-based optimization algorithm for online scheduling and assignment of preventive maintenance activities. Older and Suri (1980) adapted Rishel's formalism (Rishel, 1975) to present a stochastic control model for flexible manufacturing systems with unreliable machines whose failure and repair rates are described as a homogeneous Markov process. To avoid difficulty in solving the dynamic programming equation which characterizes optimal control, Kimemia and Gershwin (1983) used the same Rishel's formalism (Rishel, 1975) and proposed a hierarchical and heuristic approach to solve a realistic production planning problem. In a similar manner, Akella and Kumar (1986)

proposed an analytical approach by presenting a hedging point policy as an optimal control structure for a one-machine, one-product manufacturing system. Boukas and Haurie (1990) also presented an integrated corrective and preventive maintenance and production planning based on age and expected delay. They used the method developed by Kushner (1977) to obtain a numerical solution to the dynamic programming HJB equations characterizing the optimal policy. Furthermore, Kenne, Boukas and Gharbi (2003), and Kenne, Gharbi and Beit (2007) also extended Boukas and Haurie's model (Boukas and Haurie, 1990) for a multiple-machine, multiple-product manufacturing system. Despite these recent developments, most of the proposed models link the failure rate to the machine-age. In this paper we assume that the failure rate and control policy are directly linked to defective products, which is monitored in a real time through condition-based maintenance methods and practices. The proposed control model is described in the following section.

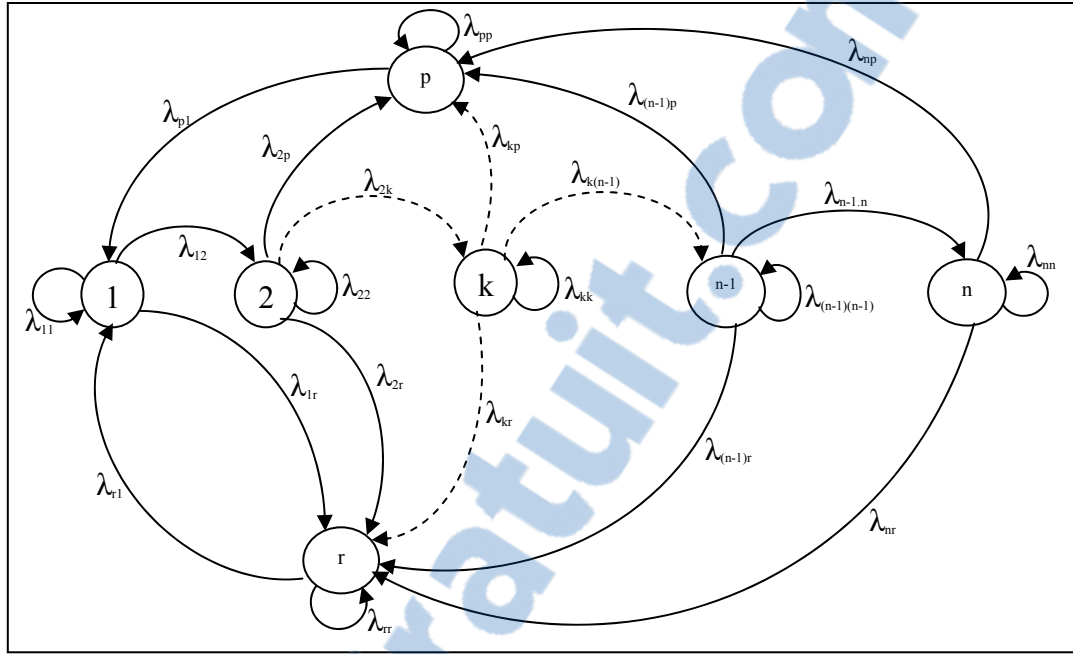
### 2.3 Stochastic control model

In this paper, we shall use the notation summarize below.

- $u(t)$  : Vector of production rates at time  $t$
- $x(t)$  : Vector of defective rates at time  $t$
- $y(t)$  : Vector of product inventory / backlog levels at time  $t$
- $X(t)$  : Vector of defective products a time  $t$
- $d$  : Vector of demand rates
- $u_{max}$  : Maximum production rate
- $\lambda_{kp}^{max}, \lambda_{kp}^{min}$  : Maximum and minimal preventive maintenance rates
- $\lambda_{r1}^{max}, \lambda_{r1}^{min}$  : Maximum and minimal corrective maintenance rates
- $\hat{\beta}$  : Estimated defect rate
- $M$  : Set of states of the machine
- $\zeta(t)$  : State of the machine at time  $t$
- $\lambda_{\alpha\alpha'}(\cdot)$  : Transition rate from states  $\alpha$  to  $\alpha'$
- $\pi(\cdot)$  : Complete control vector

- $\psi^\alpha(\cdot)$  : Cost rate function at state  $\alpha$   
 $V(\cdot)$  : expected and discount cost function  
 $v(\cdot)$  : control variable from operational state  $k$  to corrective state  $r$   
 $w(\cdot)$  : control variable from operational state  $k$  to prevention state  $p$   
 $c^+$  : cost incurred per unit of produced parts for positive inventory  
 $c^-$  : cost incurred per unit of produced parts for backlog  
 $c^\alpha$  : constant cost incurred for repair and preventive activities  
 $c_p$  : constant cost applying to preventive activity  
 $c_r$  : constant cost applying to repair activity  
 $\rho$  : positive discount rate

The system is considered to have multiple operational states. The dynamic of the machine is described by a continuous-time Markov process. For the considered manufacturing system the cumulative defective products is increasing and its value doesn't depend only on the actual production, it also represents the values obtained since the first start-up of the machine. We consider that at time  $t$ , the cumulative defective product is an increasing function of its production rate. Transitions between states are then controlled by defective products and inventory/backlog. There are  $N$  operational states, one repair state and one preventive state. The dynamics of the machine is described in the transition diagram presented in Fig.1. From states 1 to  $n$ , machine is producing both flawless and defective products. In state  $r$  machine is in repair state and in state  $p$  machine is in preventive state. The dynamics system is described by a hybrid state comprising discrete and continuous components.



**Figure 2.1 States transition diagram of the proposed model**

The discrete component represents different states of machine at time  $t$ . the random variable  $\zeta(t)$ , describe the operational mode of the machine at time  $t$ .

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & \text{operational state 1} \\ 2, & \text{operational state 2} \\ \dots & \dots \\ k, & \text{operational state } k \\ \dots & \dots \\ (n-1), & \text{operational state } (n-1) \\ n, & \text{operational state } n \\ r, & \text{repair state } r \\ p, & \text{preventive state } p \end{cases} \quad (2.1)$$

In order to monitor and improve the performance level of the system during its life cycle, we control the transition rate from state 1 to  $n$  (operational modes), by defining a relation between the quantity of defective products and the machine state at time  $t$ . Hence the transition matrix  $Q$  depends on defective rate( $x$ ), production rate ( $u$ ) and systems capability ( $v(\cdot) = (w_p(\cdot), w_r(\cdot))$ ).  $Q$  is given by:

$$Q = \lambda_{\alpha\alpha'}(x, u, v) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} & \dots & \lambda_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nk} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

For a jump process  $\zeta$ , Rishel (1975) proved that at time  $t + \delta t$ , there are two transition contingencies: machine can either stay in the same state or go to state  $\alpha'$ . The probabilities of those two contingencies are presented as follow.

Contingency 1

$$P[\zeta(t + dt) = \alpha | \zeta(t) = \alpha, x(t) = x, y(t) = y, u(t) = u] = 1 + \lambda_{\alpha\alpha}(x, y, u)\delta t + o(x, y, \delta t) \quad (2.3)$$

Contingency 2

$$P[\zeta(t + dt) = \alpha' | \zeta(t) = \alpha, x(t) = x, y(t) = y, u(t) = u] = \lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u)\delta t + o(x, y, \delta t) \quad (2.4)$$

$$\text{With } \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{0(x, y, \delta t)}{\delta t} = 0 ; \lambda_{\alpha\alpha}(x, y, u) = - \sum_{\alpha' \in E \setminus \{\alpha\}} \lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u) \quad (2.5)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u) \geq 0 \quad \forall \alpha, \alpha' \in E : \alpha \neq \alpha' \quad (2.6)$$

The set of the feasibility control policies  $\Gamma(\alpha)$  depends on the stochastic process and is given by:

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} (u(\cdot), \lambda_{kp}(\cdot), \lambda_{r1}(\cdot)) \in \mathcal{R}^3, \\ 0 \leq u(\cdot) \leq u_{max}, \lambda_{kp}^{min} \leq \lambda_{kp}(\cdot) \leq \lambda_{kp}^{max}, \lambda_{r1}^{min} \leq \lambda_{r1}(\cdot) \leq \lambda_{r1}^{max} \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

The control policy of the problem is characterized by the control variables  $u(\cdot), \lambda_{2p}(\cdot)$  and  $\lambda_{r1}(\cdot)$ .

The inverse of  $\lambda_{kp}(\cdot)$  represents the expected delay time to get started preventive maintenance activity.  $\lambda_{r1}(\cdot)$  represents the transition rate from repair to operational state 1. It implies the repair activity duration. Controlling this control variable allow us to act on

the mean time to repair and then on the improvement of the system availability.  $\lambda_{p1}(\cdot)$  represents the transition rate from preventive to operational state1. This implies the preventive activity duration.

The dependence of the stochastic process on control variables  $\lambda_{r1}(\cdot)$  and  $\lambda_{p1}(\cdot)$  is illustrated by Eq. (2.8) and (2.9).

$$\lambda_{r1} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} (P[\zeta(t + \delta t) = 1 | \zeta(t) = r]) \right]. \quad (2.8)$$

$$\lambda_{kp} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} (P[\zeta(t + \delta t) = p | \zeta(t) = k]) \right]. \quad (2.9)$$

The continuous component consists of continuous variables  $y(\cdot)$  and  $x(\cdot)$  corresponding to the inventory/backlog of products and the cumulative defective products of the machine. Gershwin (2004) presented the usual state equation of the surplus without taking into account the fact that we can have defectives products. As the principal state variable in this paper is a defective product, and considering the estimation of defective rate, the state equation of the inventory/backlog of products is given by:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = (1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d \\ y(0) = y^0 \end{cases} \quad (2.10)$$

With  $y^0$  the given initial surplus value.

By assuming that defectives products at time  $t$  is an increasing function of its production rate, the cumulative defective product is the solution of the following differential equation.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f^\alpha(u(t)) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (2.11)$$

With  $x^0$  the given initial condition of defective products

$f^\alpha : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ , is assumed to be continuously differentiable with bounded partial derivatives.

$$f^\alpha(u(t)) = \begin{cases} k_1 \cdot u, & \text{with } k_1 \rightarrow 0 \text{ for machine in operational state 1} \\ k_2 \cdot u, & \text{with } k_2 \in [0,1] \text{ for machine in operational state 2} \\ ..... \\ k_k \cdot u, & \text{with } k_k \in [0,1] \text{ for machine in operational state } k \\ ..... \\ k_n \cdot u, & \text{with } k_n \in [0,1] \text{ for machine in operational state } n \\ 0, & \text{ohtwerwise} \end{cases} \quad (2.12)$$

The cost function at state  $\alpha$  ( $\in M$ ) is defined as follow:

$$\psi^\alpha(x, y, u, w) = c^+ y^+ + c^- y^- + c^\alpha$$

with  $y^+ = \max(0, y)$ ,  $y^- = \max(-y, 0)$  and  $c^\alpha = c_p \text{Ind}\{\zeta(t) = p\} + c_r \cdot \lambda_{r_1} \cdot \text{Ind}\{\zeta(t) = r\}$

$$Ind\{\zeta(t) = \alpha\} = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta(t) = \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2.13)

Our objective is to minimize the expected discounted cost given by the following equation:

$$V(\alpha, x, y, u, v) = E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} \psi^{\zeta(t)}(x(t), y(t), u(t), v(t)) dt \mid x(0) = x, y(0) = y, \zeta(0) = \alpha \right] \quad (2.14)$$

This minimization of  $V(\cdot)$  for initial condition of states variables  $(x, y)$  will help to control the production and maintenance rates.

## 2.4 Numerical approach

Kenne and Boukas (2003) have proved that the value function of Eq.(2.14)  $\psi^{\zeta^{(i)}}(\cdot)$  is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives; and jointly convex in  $(x, y)$  for a given repair rate and a fixed preventive maintenance rate. By assuming that  $\psi^{\zeta^{(i)}}(\cdot)$  is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives and jointly convex for all  $\alpha$ , Davis (1993) has proved that using Rishel's approach (Rishel, 1975), for an optimal control we can write the Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equation as follows:

$$\rho V(\alpha, x, y) = \min_{u, v} \left\{ \psi^\alpha(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(\alpha, x, y) f^\alpha(u) + \frac{\partial}{\partial y} V(\alpha, x, y) ((1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d) + \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha'} (\cdot) [V(\alpha', x, y) - V(\alpha, x, y)] \right\} \quad (2.15)$$

An analytical solution of Eq. (2.19) is almost impossible (Boukas and Haurie, 1990), a numerical solution of Eq. (2.19) has been found with Kushner's technique (Kushner, 1977). This solution gave us an optimal control policy for production and maintenance planning based on defective products instead of age-dependent machine. Kushner's approach consists of approximating the gradient of the value function  $V(\alpha, x, y)$ . Using this approach, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} \rho V(k, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, u, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(k, x, y) \cdot k_k \cdot u + \frac{\partial}{\partial y} V(k, x, y) ((1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d) \right. \\ \text{Mode k:} & \quad \left. + \lambda_{k1} (\cdot) [V(1, x, y) - V(k, x, y)] + \lambda_{k1} (\cdot) [V(1, x, y) - V(k, x, y)] + \dots \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \dots + \lambda_{kr} (\cdot) [V(r, x, y) - V(k, x, y)] + \lambda_{kp} (\cdot) [V(p, x, y) - V(k, x, y)] \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{Mode r: } \rho \cdot V(r, x, y) = \min_{u, v} \left\{ c^+ y^+ + c^- y^- + c^r + \frac{\partial}{\partial y} V(r, x, y) (-d) + \lambda_{r1} (\cdot) [V(1, x, y) - V(r, x, y)] \right\} \quad (2.17)$$

$$\text{Mode p: } \rho \cdot V(p, x, y) = \min_{u, v} \left\{ c^+ y^+ + c^- y^- + c^p + \frac{\partial}{\partial y} V(p, x, y) (-d) + \lambda_{p1} (\cdot) [V(1, x, y) - V(p, x, y)] \right\} \quad (2.18)$$

By replacing first-order partial derivative of the value function and the length  $(h_x, h_y)$  of the finite difference interval of states variables  $x$  and  $y$ .  $V(\alpha, x, y)$  is approximated by  $V_x(\alpha, x, y)$  and  $V_y(\alpha, x, y)$ .

$$V_x(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x + h_x, y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dx}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x - h_x, y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$V_y(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y + h_y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dy}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x, y - h_y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.20)$$

We finally obtain the following approximated value functions:

$$\text{Mode k: } V_h(k, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^k}{q_k(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_k(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_k(\cdot)}} \left[ \begin{aligned} & p(k, 1) V_h(k, x + h_x, y) \\ & + p(k, k^+) V_h(k, x, y + h_y) \\ & + p(k, k^-) V_h(k, x, y - h_y) \\ & + p(k, r) V_h(r, x, y) + p(k, p) V_h(p, x, y) \end{aligned} \right] \quad (2.21)$$

$$\text{Mode r: } V_h(r, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^r}{q_r(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)}} [p(r, 1) V_h(r, x, y - h_y) + p(r, k) V_h(1, x, y)] \quad (2.22)$$

$$\text{Mode p: } V_h(p, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^p}{q_p(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)}} [p(p, 1) V_h(p, x, y - h_y) + p(p, k) V_h(1, x, y)] \quad (2.23)$$

$$q_k = \frac{k_k u}{h_x} + \frac{|u(t) - \hat{\beta}_k \cdot u(t) - d|}{h_y} + \lambda_{kr}(\cdot) + \lambda_{kp}(\cdot); \quad q_r = \frac{d}{h_y} + \lambda_{r1}(\cdot); \quad q_p = \frac{d}{h_y} + \lambda_{p1}(\cdot) \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} p(k, k^+) = \begin{cases} \frac{(u(t) - \hat{\beta}_k \cdot u(t) - d)}{h_y q_k} & \text{if } (u - \hat{\beta}_k \cdot u - d) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ p(k, k^-) = \begin{cases} \frac{(d - \hat{\beta}_k \cdot u(t) - u(t))}{h_y q_k} & \text{if } (u - \hat{\beta}_k \cdot u - d) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \quad (2.25)$$

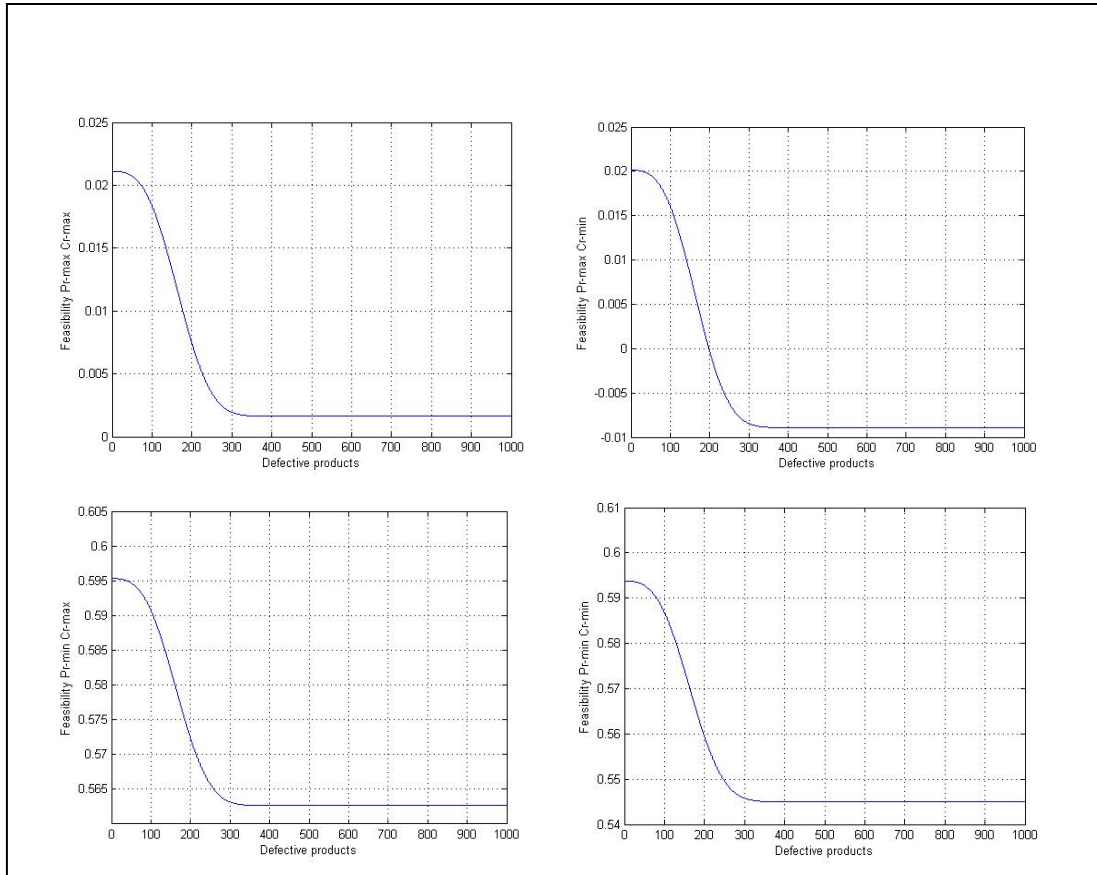
$$p(k, r) = \frac{\lambda_{kr}(\cdot)}{q_k}; \quad p(k, p) = \frac{\lambda_{kp}(\cdot)}{q_k}; \quad p(r, 1) = \frac{d}{h_y q_r}; \quad p(r, k) = \frac{\lambda_{r1}(\cdot)}{h_y q_r}; \quad p(p, 1) = \frac{d}{h_y q_p}; \quad p(p, k) = \frac{\lambda_{p1}(\cdot)}{h_y q_p} \quad (2.26)$$

## 2.5 Optimal control results of numerical illustration

We used the same computation algorithm and the policy improvement technique as in Kenne and Nkengoue (2008) and their results have been compared to the one obtained in this paper. In this section we considered  $k$  operational states of a manufacturing system with the same type of product and where the cumulative quantity of defective products is known. From historical data obtained from the manufacturing system submitted to our study. We assume that  $k = 3$  and  $\hat{\beta}_k \in \{0, 0.05, 0.1\}$ . There are 2 control constraints:  $u \in [0, 2.5]$ , demand rate:  $d = 1.9$ , discount rate:  $\rho = 0.0105$  and transition rates:  $\lambda_{lk} = 0.06 + 0.072(1 - e^{-5 \times 10^{-5} x^3})$ ;  $\lambda_{kr} = 3 \cdot 10^{-4} + 0.03(1 - e^{-15 \times 10^{-6} x^3})$ ;  $\lambda_{lr} = 10^{-5} + 0.005(1 - e^{-15 \times 10^{-6} x^3})$ ; We used the computational domains  $G_{xy}^h$  and  $G_u^h$  given by:

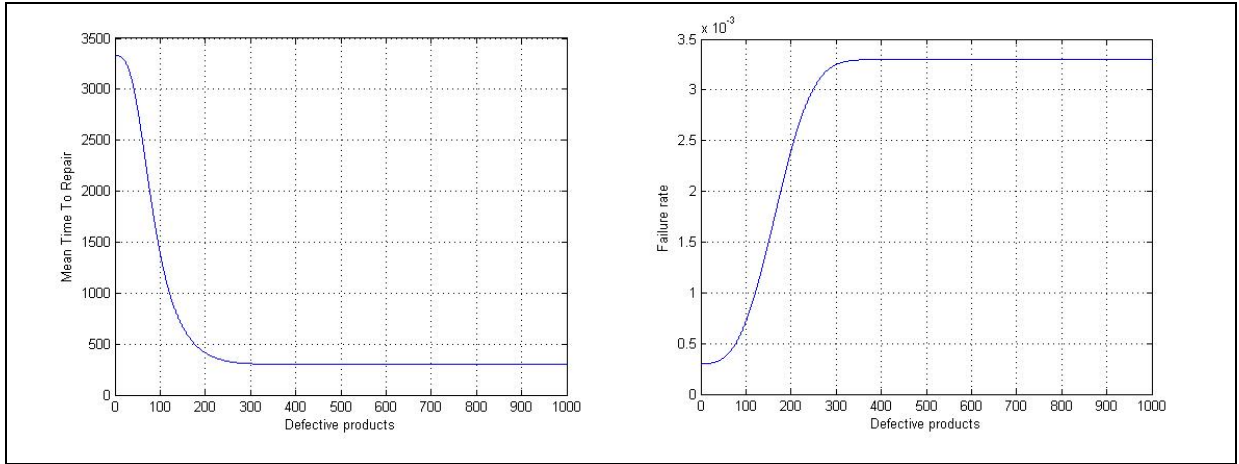
$$G_{xy}^h = \{(x, y); 0 \leq x \leq 200; -20 \leq y \leq 180\}, \quad G_u^h = \{(u, w, v_r, v_p); u \in [0, d, u_{max}]\}.$$

$w^{\min} = \lambda_{2p}^{\min} = 10^{-5}$ ;  $w^{\max} = \lambda_{2p}^{\max} = 0.03$ ;  $v_r = \lambda_{r1} = 0.075$ ;  $v_p = \lambda_{p1} = 0.2$ ; with  $h_x = 2$  and  $h_y = 2$ . The machine will be able to meet the demand rate  $d$  over a infinite horizon and reach a steady state if the feasibility is positive ( $\delta(x) = \pi_1 \cdot u_{max} + \pi_2 \cdot u_{max} - d > 0$ ). With  $\Pi \cdot Q = 0$  and  $\sum_{i=1}^p \pi_i = 1$ ). The system's feasibility is illustrated in Fig.2 for four different cases generated by combining maximal and minimal preventive and corrective maintenance rates.



**Figure 2.2 Feasibility conditions at maximal and minimal preventive and corrective maintenance rate**

With the length of the finite difference interval of the variables  $x$  and  $y$  ( $h_x = 2$  and  $h_y = 2$ ), Fig. 2.3 describes the failure probabilities trajectory and mean time to repair versus the quantity of defective products similar to the one presented in Kenne and Gharbi (1999).



**Figure 2.3 Failure rate and Mean time to repair versus Defective products**

Table 2.1  
Numerical data of the considered system

| $c^-$ | $c^+$ | $c_p$ | $c_r$ | $\lambda_{kp}^{min}$ | $\lambda_{kp}^{max}$ | $\lambda_{r1}^{min}$ | $\lambda_{r1}^{max}$ | $\lambda_{p1}$ | $X^*(x)$ | $Y^*(x)$ | $Z^*(x)$ | Cost |
|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------|----------|----------|------|
| 50    | 1     | 50    | 5000  | 0.0003               | 0.18                 | 0.15                 | 0.225                | 0.6            | 180      | 90       | 80       | 5715 |

Figs. 2.4, 2.5 and 2.6 present the production rate of the machine at operational state 1, 2 and 3 respectively. The zone where the production rate is set to zero is restricted when the defectives products increases. The effect of large failure probabilities at large quantity of defective products is minimized by assigning large values of the stock threshold.

The computational domain is divided into three regions where the optimal production control policy consists of the following three rules:

1. Set the production rate to its maximal value when the current stock level is under a threshold value.
2. Set the production rate to the demand rate when the current stock level is equal to a threshold value.
3. Set the production rate to zero when the current stock level is larger than a threshold value.

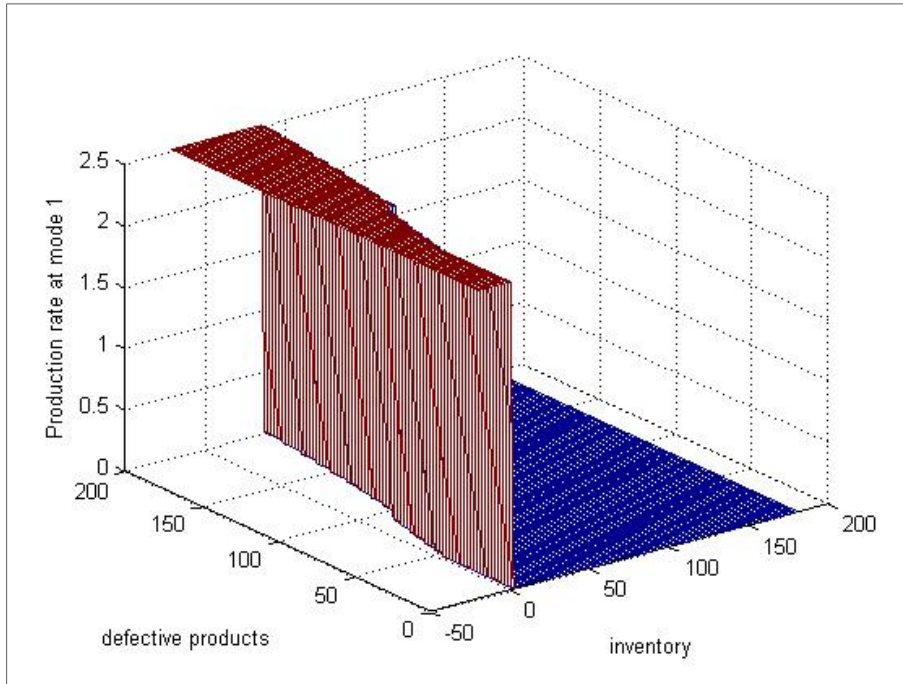
The threshold value is defined using the switching trend illustrated in Figs. 2.4, 2.5, 2.6 and 2.7. Thus, the production policy is given by the following equation.

$$u(x, y, 1) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ d & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.27)$$

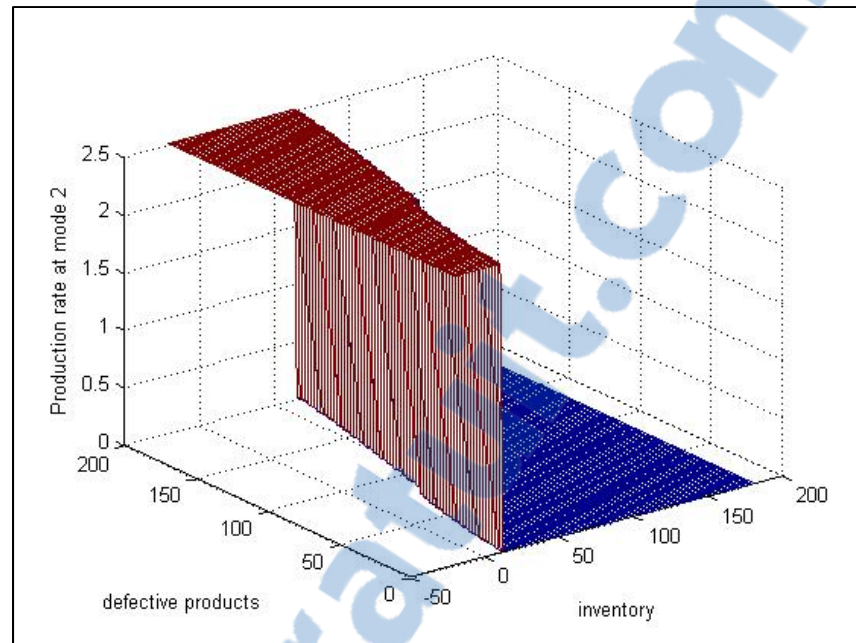
$$u(x, y, k) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ d & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.28)$$

$\psi(x)$ , is the function that gives the optional threshold value for each value of the defective products. The threshold level is illustrated in Fig. 2.7.

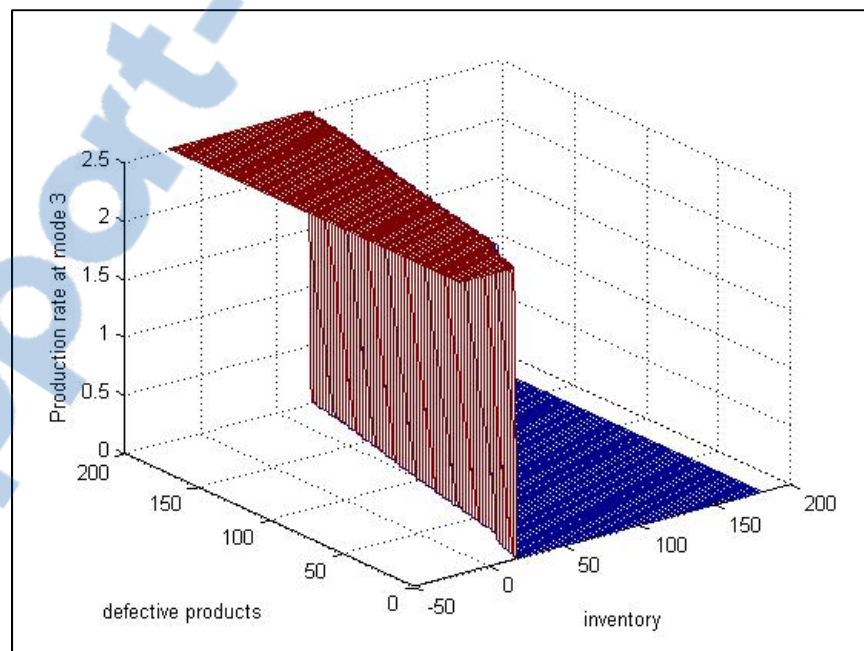
$$\text{From numerical results, } \psi(x) = \begin{cases} X^*(x) & \text{if } x(t) \geq D^*(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.29)$$



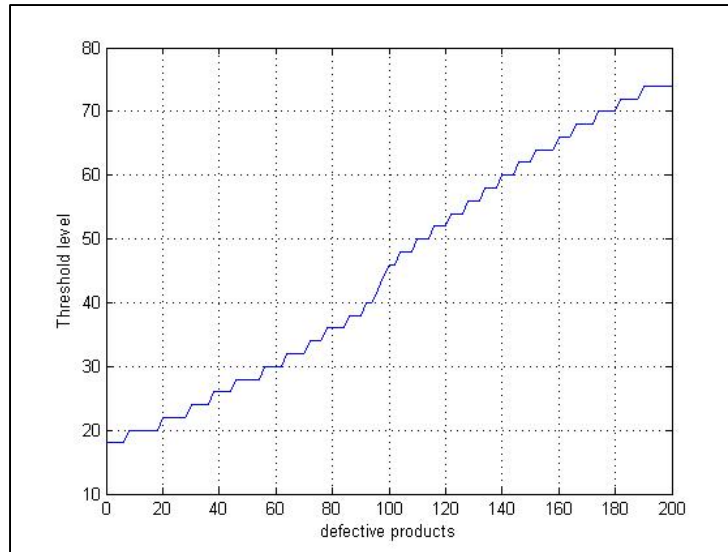
**Figure 2.4 Production rate of the machine versus inventory and defective products at state 1**



**Figure 2.5 Production rate of the machine versus inventory and defective products at state 2**

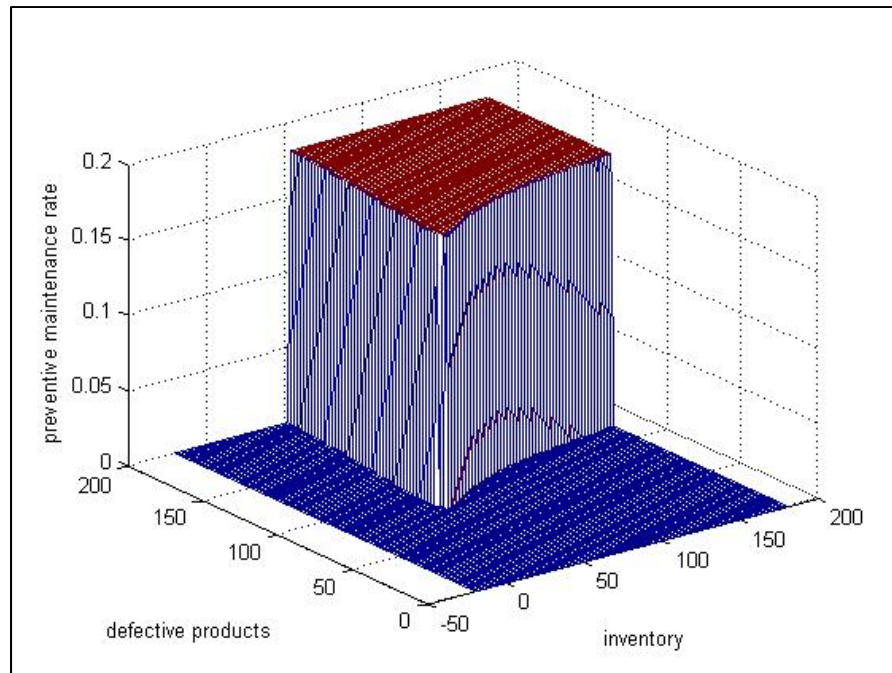


**Figure 2.6 Production rate of the machine versus inventory and defective products at state 3**



**Figure 2.7 Threshold level versus defective products**

Figs. 2.4, 2.5 and 2.6 illustrate the relation between inventory, defective products and production rate at operational states 1, 2 and 3, respectively. In mode 1, when the stock level is 25 and the quantity of defective products is 25, the production rate is set to zero. If the stock level is 0 and the quantity of defective products is set to 200 the production rate is set to its maximal value. In mode 2, when the stock level is 50 and the quantity of defective products is 25, the production rate is set to zero. If the stock level is 50 and the quantity of defective products is set to 150 the production rate is set to its maximal value. In mode 3, when the stock level is 50 and the quantity of defective products is 50, the production rate is set to zero. If the stock level is 50 and the quantity of defective products is set to 110 the production rate is set to its maximal value. This is due to the fact that the failure probability is an increasing failure rate as described by Kenne and Gharbi (1999). At the maximal production rate, the zone at state 3 is larger than the one at state 2 which is larger than the one at state 1. This illustrates the difference between operational states 1, 2 and 3. The gap between states 1, 2 and 3 represents the increasing value of defective products.



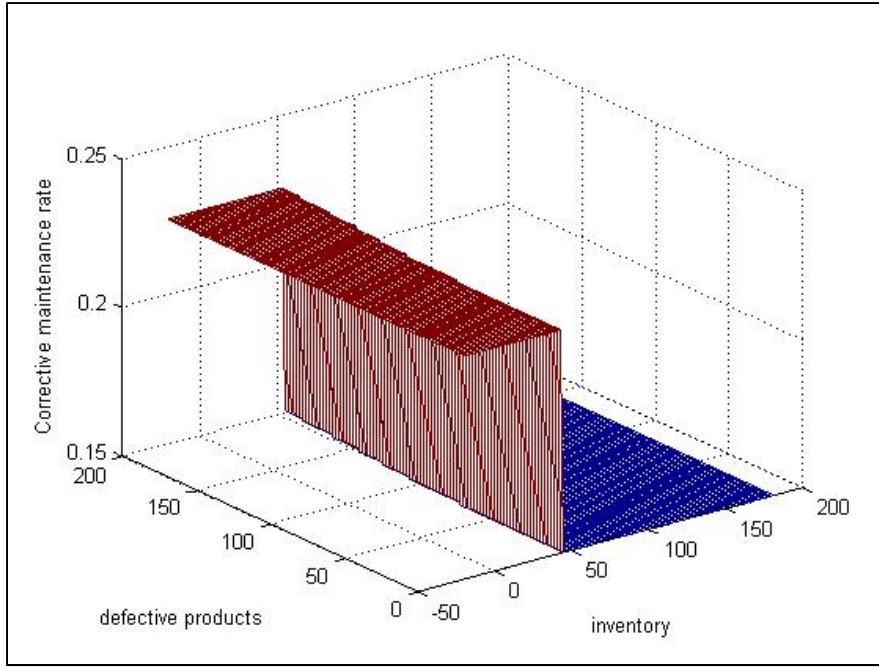
**Figure 2.8 Preventive maintenance rate versus inventory and defective products**

Fig. 2.8 illustrates the preventive maintenance policy. The computational domain  $(x,y)$  is divided into two regions where the preventive maintenance rate is set to its maximal value for backlog situation and to minimal value for large stock level. For significant stock levels, the preventive maintenance rate is set to its maximal value with the quantity of defective products. The corresponding optimal policy depends on a switching function based on the defective products for a given stock level and has a bang bang structure.

$$\lambda_{kp}(x,y,p) = \begin{cases} \lambda_{kp}^{max} & \text{if } y(\cdot) < Y^*(x), \\ \lambda_{kp}^{min} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.30)$$

where  $Y^*(x)$ , is the function that gives the optional stock level at which it is necessary to switch the preventive maintenance rate from its maximal value to its minimal value.





**Figure 2.9 Corrective maintenance rate versus inventory and defective products**

Fig. 2.9 illustrates the corrective maintenance policy. The computational domain  $(x,y)$  is divided into two regions where the corrective maintenance rate is set to its maximal value for backlog situation and to minimal value for large stock level. For significant stock level, the zone where the corrective maintenance rate is set to its maximal value is not affected the quantity of defective products. The corresponding optimal policy depends on a switching function based on the defective products for a given stock level and has a bang bang structure.

$$\lambda_{r1}(x,y,p) = \begin{cases} \lambda_{r1}^{max} & \text{if } y(\cdot) < Z^*(x), \\ \lambda_{r1}^{min} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.31)$$

where  $Z^*(x)$ , is the function that gives the optional stock level at which it is necessary to switch the preventive maintenance rate from its maximal value to its minimal value.

Comparing these results of production rate versus defective products and inventory; and production rate versus age and inventory as in Kenne and Nkengoue (2008), we can also control the manufacturing system by monitoring defective products and inventory, thus when

quantity of defective products is considerable, machine must produce at its high production rate to fulfil the demand. The maintenance activity will occur systematically at a certain value of finish parts produce. So the policy control could be governed by defective products and inventory instead of age and inventory which do not take into account machine operator errors.

The defective products optimal policy of joint maintenance and production optimization is given by Eqs. (2.27)-(2.31). With the same set of value compute in Kenne and Nkengoue (2008), the cost obtained for this model is 5715 compared to 11013 for a model with machine age-dependent. To validate and illustrate the usefulness of the model developed; let's confirm the observation through a sensitive analysis.

## **2.6 Sensitive analysis**

The table 2.1 illustrates different situations corresponding to different manufacturing contexts involving different cost changes of backlog, positive inventory, preventive and corrective maintenance. The analysis has been performed with a couple of experiments using the numerical example previously presented.

Table 2.2  
Sensitive analysis results

| $c^-$             | $c^+$    | $c_p$     | $c_r$       | $\lambda_{kp}^{min}$ | $\lambda_{kp}^{max}$ | $\lambda_{r1}^{min}$ | $\lambda_{r1}^{max}$ | $\lambda_{p1}$ | $X^*(x)$   | $Y^*(x)$  | $Z^*(x)$  | Cost        |
|-------------------|----------|-----------|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|------------|-----------|-----------|-------------|
| <b>Basic case</b> |          |           |             |                      |                      |                      |                      |                |            |           |           |             |
| <b>50</b>         | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b>        | <b>0.18</b>          | <b>0.15</b>          | <b>0.225</b>         | <b>0.6</b>     | <b>180</b> | <b>90</b> | <b>80</b> | <b>5715</b> |

**Sensitivity of backlog cost**

|           |          |           |             |               |             |             |              |            |            |           |           |             |
|-----------|----------|-----------|-------------|---------------|-------------|-------------|--------------|------------|------------|-----------|-----------|-------------|
| <b>10</b> | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>150</b> | <b>60</b> | <b>50</b> | <b>3186</b> |
| <b>30</b> | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>160</b> | <b>80</b> | <b>70</b> | <b>4475</b> |
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>180</b> | <b>90</b> | <b>80</b> | <b>5715</b> |

When the backlog cost increases the overall cost increases and the threshold value increases as well.

**Sensitivity of positive inventory cost**

|           |          |           |             |               |             |             |              |            |            |           |           |              |
|-----------|----------|-----------|-------------|---------------|-------------|-------------|--------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------|
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>180</b> | <b>90</b> | <b>80</b> | <b>5715</b>  |
| <b>50</b> | <b>2</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>130</b> | <b>75</b> | <b>70</b> | <b>7613</b>  |
| <b>50</b> | <b>5</b> | <b>50</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>110</b> | <b>75</b> | <b>50</b> | <b>11380</b> |

When the positive inventory cost increases, the threshold value decreases and the overall cost increases.

**Sensitivity of preventive maintenance cost**

|           |          |            |             |               |             |             |              |            |            |            |           |             |
|-----------|----------|------------|-------------|---------------|-------------|-------------|--------------|------------|------------|------------|-----------|-------------|
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>50</b>  | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>180</b> | <b>90</b>  | <b>80</b> | <b>5715</b> |
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>75</b>  | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>170</b> | <b>100</b> | <b>70</b> | <b>5870</b> |
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>100</b> | <b>5000</b> | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>170</b> | <b>100</b> | <b>70</b> | <b>5870</b> |

When the preventive maintenance cost increases the overall cost and the threshold remain constant, in such a situation there no need to do a preventive maintenance. The preventive maintenance rate is set to its minimal value.

#### Sensitivity of corrective maintenance cost

|           |          |           |              |               |             |             |              |            |            |           |           |             |
|-----------|----------|-----------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|------------|------------|-----------|-----------|-------------|
| <b>50</b> | <b>1</b> | <b>50</b> | <b>5000</b>  | <b>0.0003</b> | <b>0.18</b> | <b>0.15</b> | <b>0.225</b> | <b>0.6</b> | <b>180</b> | <b>90</b> | <b>80</b> | <b>5715</b> |
| 50        | 1        | 50        | <b>7000</b>  | 0.0003        | 0.18        | 0.15        | 0.225        | 0.6        | <b>190</b> | <b>85</b> | <b>70</b> | <b>8450</b> |
| 50        | 1        | 50        | <b>10000</b> | 0.0003        | 0.18        | 0.15        | 0.225        | 0.6        | <b>75</b>  | <b>90</b> | <b>65</b> | <b>9821</b> |

When the corrective maintenance cost increases the threshold level and the overall cost increase.

This sensitive analysis validates and shows the usefulness of the proposed model. Through the observations made from the sensitive analysis, it clearly appears that the proposed simultaneous maintenance and production planning, based on defective products provides better results in a context of manufacturing systems where failure is not only related to the age of the machine.

The numerical approach presented in this paper cannot be used in cases involving complex manufacturing system with multiple type of product. Nevertheless, it could be extended to a Production line with multiple machines and one-product. For any realistic production line with one type of product, the control policy described by Eqs. (27)-(31) is completely known for given parameters of threshold levels.

## 2.7 Conclusion and future works

A new optimization model of maintenance and production planning of a manufacturing system with defective products has been proposed. The health of manufacturing system is monitored in a real time due to the knowledge of the quantity of defective products which is the retroaction into the system. The life cycle of the manufacturing is obtained by subdividing the operational states into  $n$  elements. The production rates and preventive and corrective maintenance rates are considered to be decisions variables. The proposed model has been illustrated and validated with sensitive analysis and by using the numerical illustration based on existing production line considered as a single-machine, one-product. To be more realistic we summarized all deterioration parameters as quantity of defective products which is quite simple to obtain in a real-time, through condition-based maintenance methods and practices. The quantity of defective products is a consequence of overall manufacturing system's deterioration, instead of giving policy based on one type of system's deterioration such as machine-age. The results obtained show how a process can be control by defective products and inventory. This approach extended the concept of hedging point policy to defective products dependent production policy combined with preventive and corrective maintenance. The control policy obtained has a bang bang structure and completely known for given parameters. Nevertheless the value of defective rate has been taken from historic data of the production line and has not been estimated in this paper. The model proposed might be extended to a manufacturing system with unknown values of defective rates. This will be the purpose of the next work related to the improvement of the new model.

## 2.8 References

- Adzakpa, K. P., Adjallah, K. H. & Yalaoui, F. (2004). On-line maintenance job scheduling and assignment to resources in distributed systems by heuristic-based optimization, 15, 131-140.
- Aghezzaf, E.H. & Najid, N.M. (2008). Integrated production planning and preventive maintenance in deteriorating production systems, *Information Sciences*, 178(17), 3382-3392.
- Ajodhya, N.D. & Damodar, A. (2004). Age replacement of components during IFR delay time. *IEEE Transactions on Reliability*, 53(3), 306-312.
- Akella, R. & Kumar, P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic control*, AC-31(2), 116-126.
- Bloch, H.P. & Geiter, F.K. (1994). *Machinery Failure Analysis and Troubleshooting*. Gulf Publishing, Houston(TX).
- Boukas, E. K. & Haurie, A. (1990). Manufacturing flow control and preventive maintenance: A stochastic approach. *IEEE Transactions on Automatic control*, 33(9), 1024-1031.
- Davis, M. (1993). *Markov models and optimization*. Chapman and Hall.
- Gershwin, S.B. (2004). *Manufacturing systems engineering*. Prentice Hall.
- Gershwin, S. B. & Irvin, S. (2007). *Discrete-Event Models for the Analysis of Quality/Quantity Interactions in production Systems*. ASME International Mechanical Engineering Congress. Cambridge(USA), February 07-11-2007.
- Gershwin, S.B. & Kim, J. (2008). Analysis of long flow lines with quality and operational failures, *IIE Transactions*, (40), 284-296.
- Gershwin, S.B. & Kim, J. (2005). *Quality/Quantity modeling and analysis of production lines subject to uncertainty phase I*, Final report, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts.
- Kenne, J. P., Boukas, E. K. and Gharbi, A. (2003). Control of production and corrective maintenance rates in a multiple-machine, multiple-product manufacturing system, *Mathematical and computer modelling*. 38, 351-365.
- Kenne, J.P. & Gharbi, A. (1999). Experimental design in production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system. *International Journal of Production Research*, 37, 621-637.

Kenne, J.-P., Gharbi, A. and Beit, M. (2007). Age-dependent production planning and maintenance strategies in unreliable manufacturing systems with lost sale, *European Journal of Operational Research*, 178, 408-420.

Kenne, J.P. and Nkengoue, L. J. (2008). Simultaneous control of production, preventive and corrective maintenance rates of a failure-prone manufacturing system, *Applied Numerical Mathematics*, 58, 180-194.

Kenne, J.P. & Boukas, E.K, (2003). Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 9, 66-82.

Kim, J. & Gershwin, S.B. (2005). Integrated quality and quantity modeling of a production line, *OR Spectrum*, (27), 287-315

Kimemia, J. G. and Gershwin S. B. 1983. An algorithm for computer control of production in flexible manufacturing system. *IIE Transactions*, 15(4), 353-362.

Kushner, H. G. (1977). *Probability Methods for Approximation in stochastic control and for Elliptic Equations*. New York Academic.

Olsder, G.J. & Suri, R. (1980). Time optimal of parts-routing in a manufacturing system with failure prone machines. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IEEE Conference on decision and control*. (Albuquerque, Piscataway (NJ) , Dec. 10-12-1980), 722-727.

Panagiotidou, S. & Tagaras, G. (2007). Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distributions, *European Journal of Operational Research*, 180(1), p. 329-353.

Rishel, R.(1975). Control of systems with jump Markov disturbances. *IEEE Transactions on automatic Control*, 241-244.

Sortrakul, N., Nachtmann, H.L. & Cassady, C.R., (2005). Genetic algorithms for integrated preventive maintenance planning and production scheduling for a single machine, *Computers in Industry*, 56(2), 161-168.

Yang, Z., Djurdjanovic, D. & Ni, J. (2008). Maintenance scheduling in manufacturing systems based on predicted machine degradation. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 19, 87-98.

## CHAPITRE 3

### MAINTENANCE/PRODUCTION PLANNING WITH INTERACTIVE FEEDBACK OF PRODUCT QUALITY

Achille N. Njike

*Department of Mathematics and Industrial Engineering, École Polytechnique and  
Department of Mechanical Engineering, École de Technologie Supérieure, Montréal,  
Canada*

Robert Pellerin

*Department of Mathematics and Industrial Engineering, École Polytechnique de Montréal*

Jean Pierre Kenne

*Department of Mechanical Engineering, École de Technologie Supérieure de Montréal*

This chapter is an article published in Journal of Quality in Maintenance Engineering, vol. 17, no 3, p. 281-298.

#### Résumé

**Objectif:** Dans cet article, nous développons un modèle de contrôle optimal stochastique avec feedback interactif comprenant la quantité de produits impeccables et défectueux. L'objectif principal de cette étude est de minimiser le coût global prévu due aux activités d'entretien, aux stocks et aux arriérés.

**Conception / méthodologie / approche:** Le modèle diffère de projets de recherche similaires car, au lieu de la défaillance de la machine basée sur l'âge, cet article ne considère que les produits défectueux comme rétroaction dans le modèle optimal de planification de la maintenance et de la production. Nous avons obtenu une politique de contrôle quasi-optimale du système à l'aide des méthodes numériques de résolution d'équations dynamiques.

**Conclusions:** Dans cet article, nous avons présenté un nouveau modèle dans lequel la rétroaction du système est la quantité de produits défectueux, en considérant que les produits défectueux sont une conséquence de la détérioration du système de fabrication. Au lieu de

prendre séparément en compte la panne de la machine due à l'âge et les erreurs humaines, nous considérons un défaut du produit comme étant la conséquence d'une défaillance combinée; cette considération nous permet d'être plus réaliste par la fusion de tous les paramètres de défaillance du système de production en un seul. Un nouveau modèle stochastique de contrôle basé sur les produits défectueux et les stocks a été développé.

**Limites de la recherche / implications:** Cette approche élargie le concept de politique de seuil critique à la quantité de produits défectueux combinée à des stratégies de maintenance préventive et corrective. La politique de contrôle obtenue a une structure bang bang et est complètement connue pour des paramètres donnés. Ayant considéré le système de production étudié comme une machine, le but de notre prochain travail sera de considérer que ce système de production est constitué de plusieurs machines afin d'obtenir une politique de contrôle optimal basée sur de produits défectueux pour un système de production à plusieurs machines.

**Les implications pratiques:** Les responsables de maintenance et de production qui traitent une quantité importante de produits défectueux peuvent utiliser ce modèle afin de minimiser les coûts de maintenance et de production. Cela permettra d'accroître la rentabilité et de faciliter la gestion des actifs.

**Originalité / valeur:** L'intégration de la maintenance et de la production a été principalement basée sur la machine. Plusieurs projets de recherche se sont focalisés sur l'âge lorsqu'il s'agit de panne de la machine. Il est considéré comme la cible principale de la réduction des coûts dans les départements d'ingénierie et de maintenance. L'originalité de ce papier est la prise en compte de toutes les défaillances opérationnelles dans le modèle d'optimisation. Elle apporte une valeur ajoutée à haut niveau pour des gestionnaires qui ont besoin de considérer l'ensemble des paramètres de défaillance avant de prendre des décisions influençant les coûts.

**Mots clés:** Maintenance, Qualité, Systèmes de production, Programmation dynamique stochastique, Méthodes numériques.

### **Abstract**

**Purpose:** In this paper, we develop an optimal stochastic control model where interactive feedback consists of the quantity of flawless and defective products. The main objective of this study is to minimize the expected discounted overall cost due to maintenance activities, inventory holding and backlogs.

**Design/methodology/approach:** The model differs from similar research projects in that, instead of age-dependent machine failure, it considers only defective products as feedback into the optimal model for maintenance and production planning. We obtained a near optimal control policy of the system through numerical techniques.

**Findings:** In this paper we presented a new model in which the system's retroaction is the quantity of defective products, considering that defective products are a consequence of global manufacturing system's deterioration. Instead of taking into account machine failure and human error separately, we consider a defect in product as being the consequence of a combined failure; this consideration allows us to be more realistic by merging all failure parameters into a single one. A new stochastic control model which focuses on defective products, inventory and backlog has been developed.

**Research limitations/implications:** This approach extended the concept of hedging point policy to the quantity of defective products combined with preventive and corrective maintenance strategies. The control policy obtained has a bang bang structure and completely known for a given parameters. Due to the fact that we have considered the production line studied as one machine, the purpose of our next work will be to consider this production line as multiple machines in order to obtain an optimal control policy for a manufacturing system with multiple machines and one-product based on defective products.

**Practical implications:** The Maintenance and operation managers who deal an important number of defective products can use this model to minimize the maintenance and production cost. This will increase profitability and facilitate asset management.

**Originality/value:** The integration of maintenance and production strategies has been mainly focused on machine. Many research projects have been focusing on the age when dealing with machine failure. It is considered as the main target of the cost reduction in maintenance engineering departments. The originality of this paper is the taking into account of all operational failures into the same optimization model. It brings a value added to high level of maintenance and operation managers who need to consider every failure parameters before taking decisions related to cost.

**Key words:** Maintenance, Quality, Manufacturing systems, Stochastic dynamic programming, Numerical Methods.

### 3.1 Introduction

In today's highly competitive environments, costs reduction is one of the most important issues in the majority of manufacturing industries. Combined maintenance and production planning attract more attention. Machine failures are considered as the main target of the cost reduction in maintenance engineering departments. The integration of maintenance and production strategies has been mainly focused on machine (Kenne et al., 2003, Kenne et al., 2007, Kenne and Nkengoue, 2008). Nevertheless, many research projects have been focusing on the age when dealing with machine failure. Several authors have developed optimal control models of manufacturing systems by integrating maintenance due to age-dependent machine failure (Ajodhya and Damodar, 2004, Boukas and Haurie, 1990). However, manufacturing systems are reliant on both machines and human being. Failure is not only due to the age of the machine but it is also due to human factor. Taking into account every failure parameter is quite difficult to achieve. An interaction between defective and flawless products have been analysed in a manufacturing system (Gershwin and Schick, 2007, Davis, 1993). The fact that product quality can be characterized by the quantity of defective products, and considering this parameter as feedback of our optimal control model, we can consider all operational failures. Instead of taking into account machine failure and human error separately, we consider a defect in product as being the consequence of a combined failure; this consideration allows us to be more realistic by merging all failure parameters into a single one. We then assume that failure causes can be linked to defective products. Thus, we propose a combined maintenance and production planning focusing on defective products instead of age-dependent machine failure. A new stochastic control model which focuses on defective products, inventory and backlog has been developed. In this new model, we consider two operational states, one corrective and one preventive maintenance state. The transition between those states is controlled by products quality rate.

Traditionally, production and maintenance planning have been studied separately. Fortunately, their integration has recently received a growing attention from researchers, especially at the control level. For example, Older and Suri (1980) adapted Rishel's formalism (Rishel, 1975) to present a stochastic control model for flexible manufacturing

systems with unreliable machines whose failure and repair rates are described as a homogeneous Markov process. To avoid difficulty in solving the dynamic programming equation which characterizes optimal control, Kimemia and Gershwin (1983) used that same Rishel's formalism (Rishel, 1975) and proposed a hierarchical and heuristic approach to solve a realistic production planning problem. In a similar manner, Akella and Kumar (1986) proposed an analytical approach by presenting a hedging point policy as an optimal control structure for a one-machine, one-product manufacturing system. Boukas and Haurie (1990) also presented an integrated corrective and preventive maintenance and production planning based on age and expected delay. They used the method developed by Kushner (1977) to obtain a numerical solution to the dynamic programming Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations characterizing the optimal policy. Furthermore, Kenne et al. (2003, 2007) also extended Boukas and Haurie's model (1990) for a multiple-machine, multiple-product manufacturing system.

In this paper, we present the interaction between defective products and production, preventive and corrective maintenance planning. The main objective of this study is to minimize the expected discounted overall cost due to maintenance activities, inventory holding and backlogs, by using an efficient technique for the computation of the optimal control policy. The contribution of this approach of interactive feedback of product quality is to know if the overall cost is significantly reduced compared to the optimal policy based on the age-dependent machine failure. An approximate value function has been determined by a numerical approach and has also been used to construct the control policy. We finally show that a joint maintenance and production planning with quantity of defective products as feedback reduced significantly the overall cost compared the one with the age of machine as feedback. A sensitive analysis is used to validate and show the usefulness of the proposed model on an existing manufacturing system.

This paper is organized as follow. In section 2, we define notations and assumptions used in the model. In section 3, we provide the problem statement of the proposed model. In section 4 we introduce the optimal control and the numerical approach. In section 5, we present the

optimal control results of numerical illustration. we define our integrated model of maintenance and production. We then introduce the dynamic programming HJB equations. We present approximate techniques used for numerical solutions illustrate the method on an existing manufacturing system. In section 6, we present the sensitive analysis and finally, in section 7, conclusions are drawn from the work.

### 3.2 Notations and assumptions

In this paper, we shall use the notation summarize below.

|                                          |                                                                   |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $u(t)$                                   | : Vector of production rates at time t;                           |
| $x(t)$                                   | : Vector of defective rates at time t;                            |
| $y(t)$                                   | : Vector of product inventory / backlog levels at time t;         |
| $X(t)$                                   | : Vector of defective products a time t                           |
| $d$                                      | : Vector of demand rates;                                         |
| $u_{max}$                                | : Maximum production rate;                                        |
| $\lambda_{2p}^{max}, \lambda_{2p}^{min}$ | : Maximum and minimal preventive maintenance rates;               |
| $\lambda_{r1}^{max}, \lambda_{r1}^{min}$ | : Maximum and minimal corrective maintenance rates;               |
| $\hat{\beta}$                            | : Estimated defect rate (products quality rate);                  |
| $M$                                      | : Set of states of the machine                                    |
| $\zeta(t)$                               | : State of the machine at time t;                                 |
| $\lambda_{\alpha\alpha'}(\cdot)$         | : Transition rate from states $\alpha$ to $\alpha'$ ;             |
| $\pi(\cdot)$                             | : Complete control vector;                                        |
| $\psi^\alpha(\cdot)$                     | : Cost rate function at state $\alpha$ ;                          |
| $V(\cdot)$                               | : expected and discount cost function.                            |
| $v(\cdot)$                               | : control variable from operational state k to corrective state r |
| $w(\cdot)$                               | : control variable from operational state k to prevention state p |
| $c^+$                                    | : cost incurred per unit of produced parts for positive inventory |
| $c^-$                                    | : cost incurred per unit of produced parts for backlog            |

- $c^\alpha$  : constant cost incurred for repair and preventive activities  
 $c^p$  : constant cost applying to preventive activity  
 $c^r$  : constant cost applying to repair activity  
 $\rho$  : positive discount rate

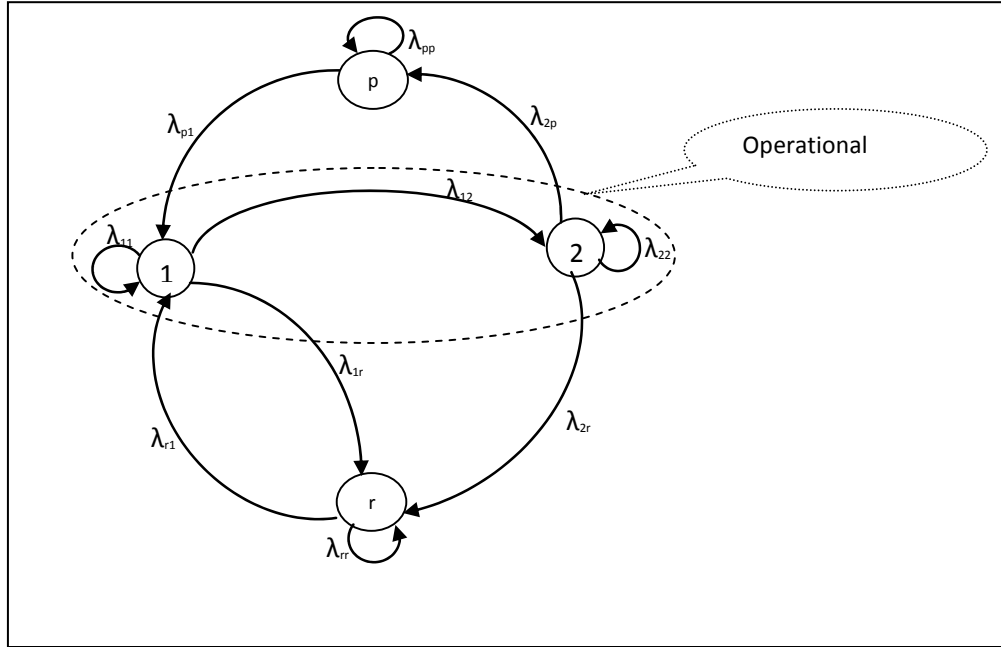
Despite these recent developments, most of the proposed models link failure rate to machine age. In this paper we assume that the failure rate and control policy are directly linked to defective products. The proposed control model is described in the following section.

### 3.3 Problem statement

The system is considered to have two operational states. The dynamic of the machine is described by a continuous-time Markov process. For the considered manufacturing system the cumulative defective products is increasing and its value doesn't depend only on the actual production, it also represents the values obtained since the first start-up of the machine. We consider that at time  $t$ , the cumulative defective product is an increasing function of its production rate. Transitions between states are then controlled by defective products and inventory/backlog. There are 2 operational states, one repair state and one preventive state. The dynamics of the machine is described in the transition diagram presented in Fig 3.1. From states 1 to 2, machine is producing both flawless and defective products. In state  $r$  machine is in repair state and in state  $p$  machine is in preventive state. The transition rates  $\lambda_{\alpha\alpha'}$  are obtained statistically from the history of the machine.

The dynamics system is described by an hybrid state comprising discrete and continuous components. The discrete component represents different states of the machine at time  $t$  with a random variable  $\zeta(t)$ . It is defined as a continuous time Markov process with value in  $M = \{1, 2, r, p\}$ . Availability of the machine is described as follow:

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & \text{operational state 1} \\ 2, & \text{operational state 2} \\ r, & \text{repair state} \\ p, & \text{preventive state} \end{cases} \quad (3.1)$$



**Figure 3.1 States transition diagram of the proposed model**

In order to improve the performance level of the system during its life cycle, we control the transition rate from state 1 to p, by defining a relation between the quantity of defective products and the machine state at time  $t$ . Hence the transition matrix  $Q$  depends on  $\lambda_{2p}$  and  $\lambda_{r1}$  defined as preventive and corrective maintenance rates.  $Q$  is given by:

$$Q = \lambda_{\alpha\alpha'}(x, u, v) = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12}(x) + \lambda_{1r}(x)) & \lambda_{12}(x) & \lambda_{1r}(x) & 0 \\ 0 & -(\lambda_{2r}(x) + \lambda_{2p}) & \lambda_{2r}(x) & \lambda_{2p} \\ \lambda_{r1} & 0 & -\lambda_{r1} & 0 \\ \lambda_{p1} & 0 & 0 & -\lambda_{p1} \end{bmatrix}$$

(3.2)

For a jump process  $\zeta$ , Rishel (1975) proved that at time  $t + \delta t$ , there are two transition contingencies: machine can either stay in the same state or go to state  $\alpha'$ . The transitions probabilities of those two contingencies are presented as follow.

Contingency 1

$$P[\zeta(t + dt) = \alpha | \zeta(t) = \alpha, x(t) = x, y(t) = y, u(t) = u] = 1 + \lambda_{\alpha\alpha}(x, y, u)\delta t + o(x, y, \delta t) \quad (3.3)$$

## Contingency 2

$$P[\zeta(t+dt) = \alpha' | \zeta(t) = \alpha, x(t) = x, y(t) = y, u(t) = u] = \lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u)\delta t + o(x, y, \delta t) \quad (3.4)$$

$$\text{With } \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(x, y, \delta t)}{\delta t} = 0; \quad \lambda_{\alpha\alpha}(x, y, u) = - \sum_{\alpha' \in E \setminus \{-\alpha\}} \lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u) \quad (3.5)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha'}(x, y, u) \geq 0 \quad \forall \alpha, \alpha' \in E : \alpha \neq \alpha' \quad (3.6)$$

The set of the feasibility control policies  $\Gamma(\alpha)$  depends on the stochastic process and is given by:

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} (u(\cdot), \lambda_{2p}(\cdot), \lambda_{r1}(\cdot)) \in \mathfrak{R}^3, \\ 0 \leq u(\cdot) \leq u_{max}, \lambda_{2p}^{min} \leq \lambda_{2p}(\cdot) \leq \lambda_{2p}^{max}, \lambda_{r1}^{min} \leq \lambda_{r1}(\cdot) \leq \lambda_{r1}^{max} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

The control policy of the problem is characterized by the control variables  $u(\cdot), \lambda_{2p}(\cdot)$  and  $\lambda_{r1}(\cdot)$ .

The inverse of  $\lambda_{2p}(\cdot)$  represents the expected delay time to get started preventive maintenance activity.  $\lambda_{r1}(\cdot)$  represents the transition rate from repair to operational state 1. It implies the repair activity duration. Controlling this control variable allow us to act on the mean time to repair and then on the improvement of the system availability.  $\lambda_{p1}(\cdot)$  represents the transition rate from preventive to operational state1. This implies the preventive activity duration. The dependence of the stochastic process on control variables  $\lambda_{r1}(\cdot)$  and  $\lambda_{p1}(\cdot)$  is illustrated by Eq. (8) and (9).

$$\lambda_{r1} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} (P[\zeta(t + \delta t) = 1 | \zeta(t) = r]) \right]. \quad (3.8)$$

$$\lambda_{2p} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} (P[\zeta(t + \delta t) = p | \zeta(t) = 2]) \right]. \quad (3.9)$$

The continuous component consists of continuous variables  $y(\cdot)$  and  $x(\cdot)$  corresponding to the inventory/backlog of products and the cumulative defective products of the machine. Gershwin (2004) presented the usual state equation of the surplus without taking into account the fact that we can have defectives products. As the principal state variable in this paper is

the defective product, and considering the estimation of defective rate, the state equation of the inventory/backlog of products is given by:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = (1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d \\ y(0) = y^0 \end{cases} \quad (3.10)$$

With  $y^0$  the given initial surplus value.

By assuming that defectives products at time  $t$  is an increasing function of its production rate, the cumulative defective product is the solution of the following differential equation.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f^\alpha(u(t)) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3.11)$$

With  $x^0$  the given initial condition of defective products.

$f^\alpha$  is assumed to be continuously differentiable with bounded partial derivatives.

$$f^\alpha(u(t)) = \begin{cases} k_1 \cdot u, & \text{with } k_1 \rightarrow 0 \text{ for machine in operational state 1} \\ k_2 \cdot u, & \text{with } k_2 \in [0,1] \text{ for machine in operational state 2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.12)$$

The cost function at state  $\alpha (\in M)$  is defined as follow:

$$\psi^\alpha(x, y, u, w) = c^+ y^+ + c^- y^- + c^\alpha \quad (3.13)$$

with  $y^+ = \max(0, y)$ ,  $y^- = \max(-y, 0)$  and  $c^\alpha = c^p \text{Ind}\{\zeta(t) = p\} + c^r \cdot \lambda_{r1} \cdot \text{Ind}\{\zeta(t) = r\}$

$$\text{Ind}\{\zeta(t) = \alpha\} = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta(t) = \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Our objective is to minimize the expected discounted cost given by the following equation:

$$V(\alpha, x, y, u, v) = E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} \psi^{\zeta(t)}(x(t), y(t), u(t), v(t)) dt \mid x(0) = x, y(0) = y, \zeta(0) = \alpha \right] \quad (3.14)$$

This minimization of  $V^{(i)}$  for initial condition of states variables  $(x, y)$  will help to control the production and maintenance rates.

### 3.4 Optimal control and numerical approach

Kenne and Boukas (2003) have proved that the value function of Eq.(14)  $\psi^{\zeta(i)}(\cdot)$  is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives; and jointly convex in  $(x, y)$  for a given repair rate and a fixed preventive maintenance rate. Davis (1993) has demonstrated that using Rishel's approach (1975), for an optimal control we can write the Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations as follows:

$$\rho V(\alpha, x, y) = \min_{u,v} \left\{ \psi^{\alpha}(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(\alpha, x, y) f^{\alpha}(u) + \frac{\partial}{\partial y} V(\alpha, x, y) ((1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d) + \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha'}(\cdot) [V(\alpha', x, y) - V(\alpha, x, y)] \right\} \quad (3.15)$$

An analytical solution of Eq. (3.15) is almost impossible (Boukas and Haurie, 1990), a numerical solution of Eq. (3.15) has been found with Kushner's technique (1977). This solution gave us an optimal control policy for production and maintenance planning based on defective products instead of age-dependent machine (Olsder and Suri, 1980).

Yang and Zhang (1997) have proved that the system of Eqs. (3.10) and (3.11) with any given initial condition has a unique solution.

Kushner's approach (1977) has been used for solving the optimality conditions. It consists of approximating the gradient of the value function  $V(\alpha, x, y)$ . We then obtain the following expression:

At state  $k \in \{1, 2\}$ :

$$\rho V(k, x, y) = \min_{u,v} \left\{ \psi^k(x, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(k, x, y) \cdot k_2 \cdot u + \frac{\partial}{\partial y} V(k, x, y) ((1 - \hat{\beta}) \cdot u(t) - d) + \lambda_{k1}(\cdot) [V(1, x, y) - V(k, x, y)] + \lambda_{k2}(\cdot) [V(2, x, y) - V(k, x, y)] + \lambda_{kr}(\cdot) [V(r, x, y) - V(k, x, y)] + \lambda_{kp}(\cdot) [V(p, x, y) - V(k, x, y)] \right\} \quad (3.16)$$

$$\text{At state r: } \rho \cdot V(r, x, y) = \min_{u, v} \left\{ c^+ y^+ + c^- y^- + c^r + \frac{\partial}{\partial y} V(r, x, y)(-d) + \lambda_{r1}(\cdot) [V(1, x, y) - V(r, x, y)] \right\} \quad (3.17)$$

$$\text{At state p: } \rho \cdot V(p, x, y) = \min_{u, v} \left\{ c^+ y^+ + c^- y^- + c^p + \frac{\partial}{\partial y} V(p, x, y)(-d) + \lambda_{p1}(\cdot) [V(1, x, y) - V(p, x, y)] \right\} \quad (3.18)$$

By replacing first-order partial derivative of the value function and the length  $(h_x, h_y)$  of the finite difference interval of states variables  $x$  and  $y$ .  $V(\alpha, x, y)$  is approximated by  $V_x(\alpha, x, y)$  and  $V_y(\alpha, x, y)$ .

$$V_x(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x + h_x, y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dx}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x - h_x, y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$V_y(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y + h_y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dy}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x, y - h_y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.20)$$

We finally obtain the following approximated value functions:

$$\text{Mode k: } V_h(k, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^k}{q_k(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_k(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_k(\cdot)}} \left[ \begin{aligned} & p(k, 1) V_h(k, x + h_x, y) \\ & + p(k, k^+) V_h(k, x, y + h_y) \\ & + p(k, k^-) V_h(k, x, y - h_y) \\ & + p(k, r) V_h(r, x, y) + p(k, p) V_h(p, x, y) \end{aligned} \right] \quad (3.21)$$

$$\text{Mode r: } V_h(r, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^r}{q_r(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)}} [p(r, 1) V_h(r, x, y - h_y) + p(r, k) V_h(1, x, y)] \quad (3.22)$$

$$\text{Mode p: } V_h(p, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^p}{q_p(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)}} [p(p, 1) V_h(p, x, y - h_y) + p(p, k) V_h(1, x, y)] \quad (3.23)$$

$$q_k = \frac{k_k u}{h_x} + \frac{|u(t) - \hat{\beta} \cdot u(t) - d|}{h_y} + \lambda_{kr}(\cdot) + \lambda_{kp}(\cdot); \quad q_r = \frac{d}{h_y} + \lambda_{r1}(\cdot); \quad q_p = \frac{d}{h_y} + \lambda_{p1}(\cdot) \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} p(k, k^+) = \begin{cases} \frac{(u(t) - \hat{\beta} \cdot u(t) - d)}{h_y q_k} & \text{if } (u - \hat{\beta} - d) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ p(k, k^-) = \begin{cases} \frac{(d - \hat{\beta} \cdot u(t) - u(t))}{h_y q_k} & \text{if } (u - \hat{\beta} - d) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$p(k, r) = \frac{\lambda_{kr}(\cdot)}{q_k}; \quad p(k, p) = \frac{\lambda_{kp}(\cdot)}{q_k}; \quad p(r, 1) = \frac{d}{h_y q_r}; \quad p(r, k) = \frac{\lambda_{r1}(\cdot)}{h_y q_r}; \quad p(p, 1) = \frac{d}{h_y q_p}; \quad p(p, k) = \frac{\lambda_{p1}(\cdot)}{h_y q_p}$$

(3.26) The computation algorithm and the policy improvement technique used in this paper are the same as in (Kushner and Dupuis, 1992).

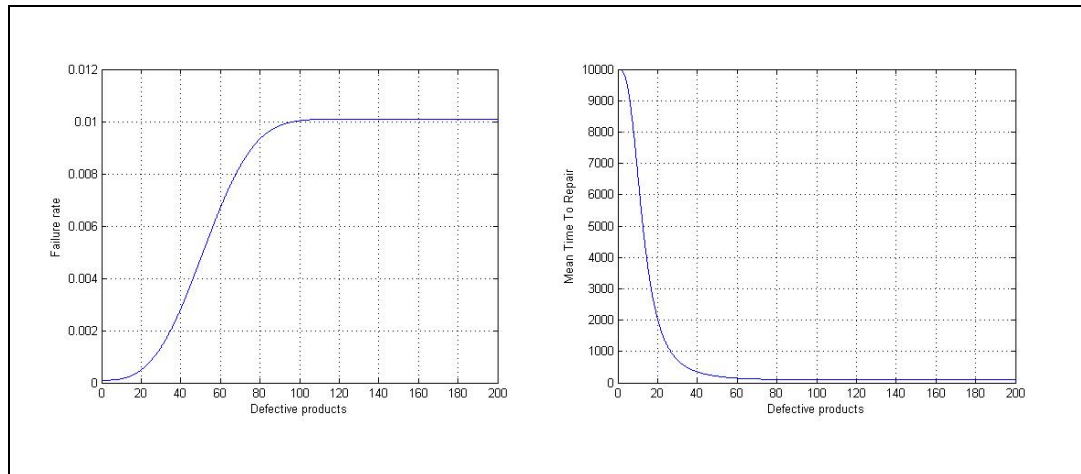
### 3.5 Optimal control results of numerical illustration

This numerical illustration is based on an existing manufacturing. We just consider 2 operational states of a production line with the same type of product, with 1 repair state and 1 preventive state. There are 2 control constraints:  $u \in [0, 1]$ , demand rate:  $d = 0.667$ , discount rate:  $\rho = 0.0105$ , and transition rates:

$$\lambda_{12} = 0.02 + 0.026(1 - e^{-5 \times 10^{-5} x^3}); \quad \lambda_{2r} = 10^{-4} + 0.01(1 - e^{-5 \times 10^{-5} x^3}); \quad w^{\min} = \lambda_{2p}^{\min} = 10^{-4}; \quad w^{\max} = \lambda_{2p}^{\max} = 0.06;$$

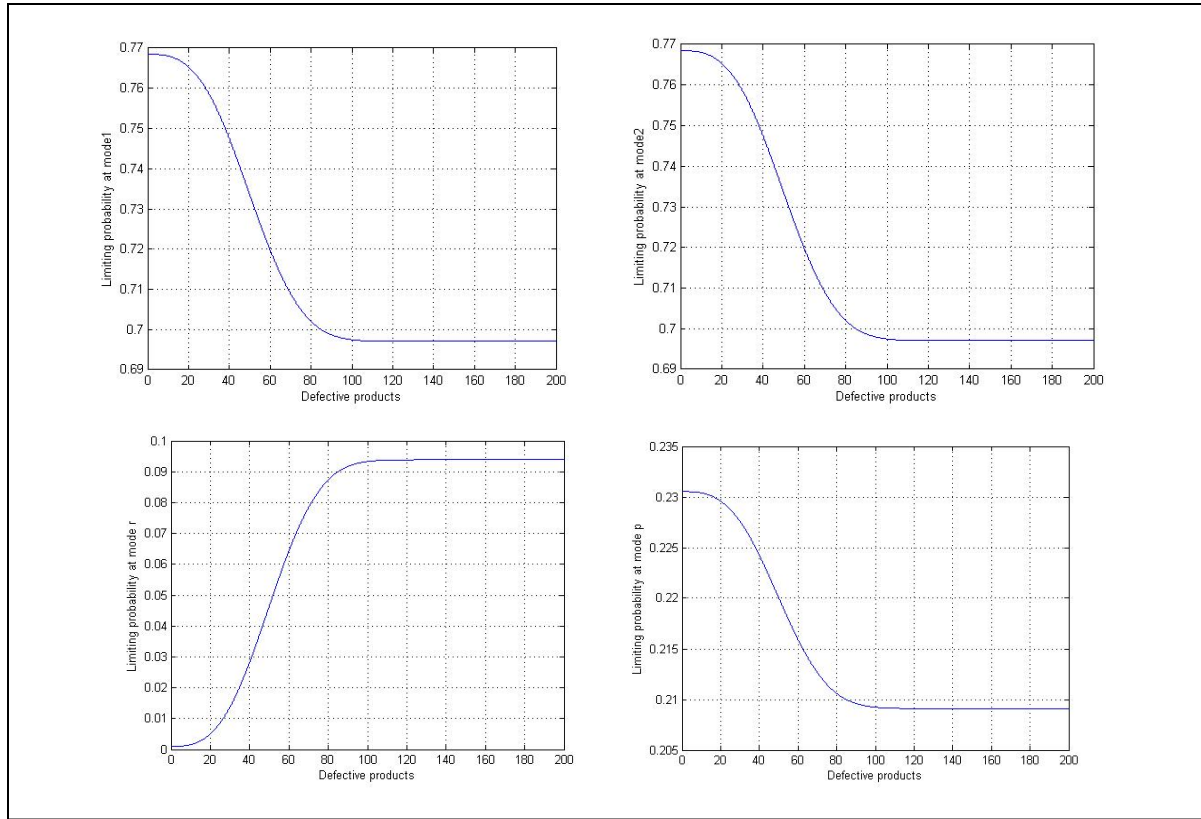
$$\lambda_{1r} = 10^{-5} + 0.005(1 - e^{-5 \times 10^{-5} x^3}); \quad \lambda_{r1}^{\max} = 0.075; \quad \lambda_{r1}^{\min} = 0.05; \quad \lambda_{p1} = 0.2; \quad x \in [0, 100]; \quad y \in [-10, 10].$$

We use the same consideration as in Kenne and Nkengoue (2008), to compare their results. Results of this optimal control are only valid in a manufacturing system with one type of product, an effective quality control system, and where the cumulative quantity of defective products is known. With length of the finite difference interval of the variables  $x$  and  $y$  ( $h_x = 2$  and  $h_y = 2$ ), Fig. 3.2 describes the failure probabilities trajectory and mean time to repair versus the quantity of defective products similar to the one presented in Kenne and Nkengoue (2008).



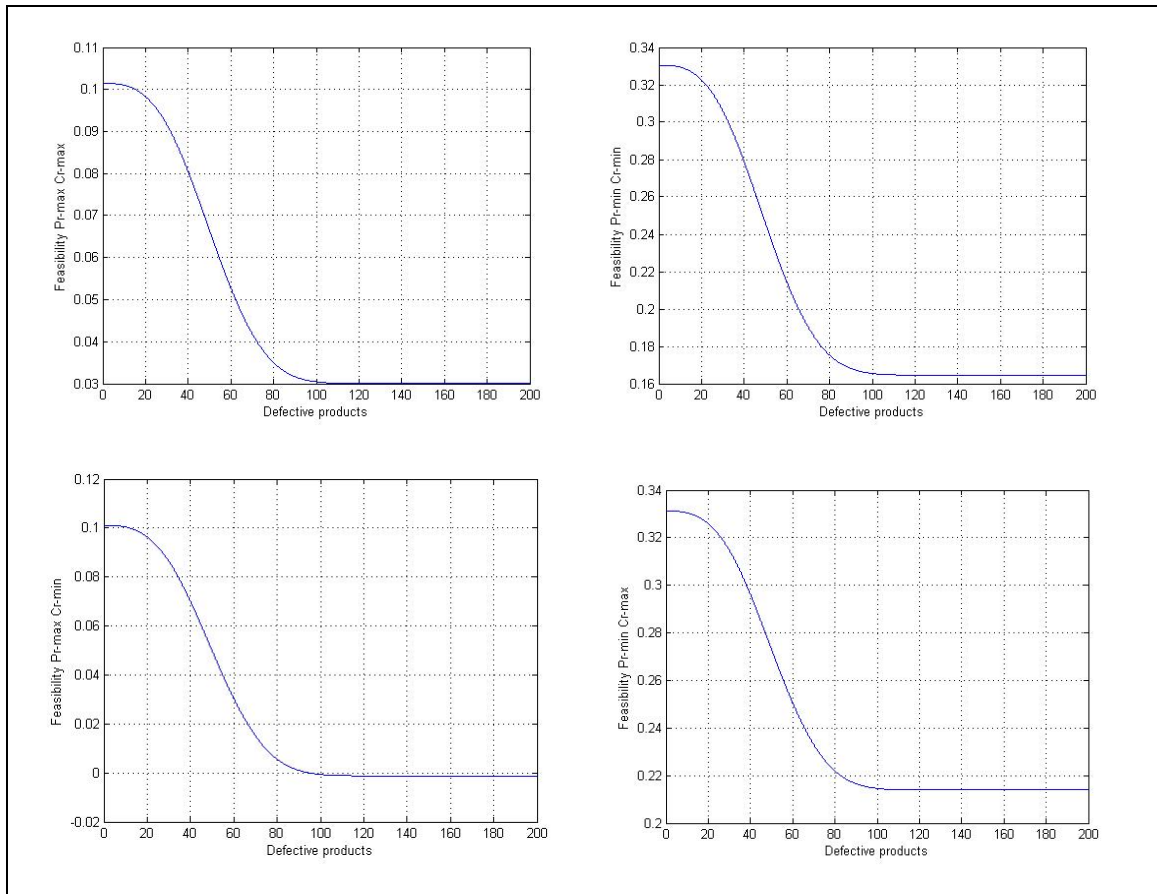
**Figure 3.2 Failure rate and Mean Time To Repair versus defective products**

The production line will be able to meet the demand rate ( $d$ ) over an infinite horizon and reach a steady state if the following condition of limiting probability or availability ( $\pi_1, \pi_2$ ) of the production line at operational states is fulfilled:  $\pi_1 \cdot u_{max} + \pi_2 \cdot u_{max} > d$ . With  $\Pi \cdot Q = 0$  and  $\sum_{i=1}^p \pi_i = 1$ , Fig.3.3 presents the defective products limiting probabilities associated with the failure rate.



**Figure 3.3 Limiting probabilities at modes 1, 2, r and p versus Defective products**

The production line will also be able to meet the demand rate over an infinite horizon and reach a steady state if the feasibility and demand gap is positive. i.e.,  $(\pi_1 \cdot u_{max} + \pi_2 \cdot u_{max}) - d > 0$ . With the data presented in table 1, Fig. 3.4 describes the feasibilities conditions at maximum and minimum preventive and corrective maintenance rates.



**Figure 3.4 Feasibility conditions at max. & min. preventive & corrective maintenance rate**

Table 3.1  
Numerical data of the considered system

| $c^-$ | $c^+$ | $c_p$ | $c_r$ | $\lambda_{2p}^{min}$ | $\lambda_{2p}^{max}$ | $\lambda_{r1}^{min}$ | $\lambda_{r1}^{max}$ | $\lambda_{p1}$ | $X^*(x)$ | $Y^*(x)$ | $Z^*(x)$ | Cost |
|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------|----------|----------|------|
| 500   | 1     | 500   | 15000 | 0.0001               | 0.06                 | 0.05                 | 0.075                | 0.2            | 100      | 65       | 50       | 7984 |

Figs. 3.5 and 3.6 present the production rate of the machine at operational state 1 and 2 respectively. The zone where the production rate is set to zero is restricted when the defectives products increases. The effect of large failure probabilities at large quantity of defective products is minimized by assigning large values of the stock threshold.

The computational domain is divided into three regions where the optimal production control policy consists of the following three rules:

4. Set the production rate to its maximal value when the current stock level is under a threshold value.
5. Set the production rate to the demand rate when the current stock level is equal to a threshold value.
6. Set the production rate to zero when the current stock level is larger than a threshold value.

The threshold value is defined using the switching trend illustrated in Figs. 3.5, 3.6 and 3.7.

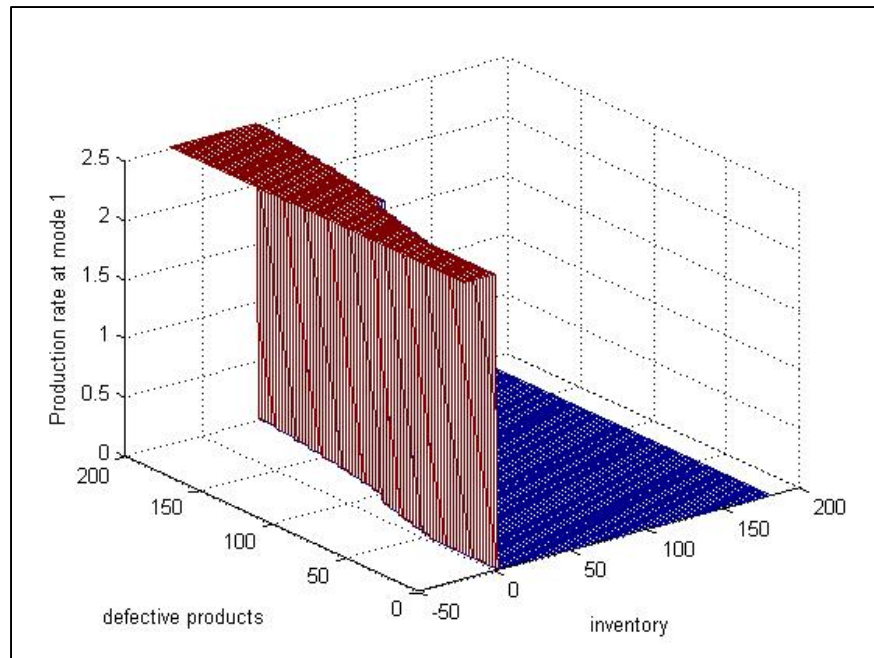
Thus, the production policy is given by the following equation.

$$u(x, y, 1) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ d & \text{if } y(\cdot) = \psi(x), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.27)$$

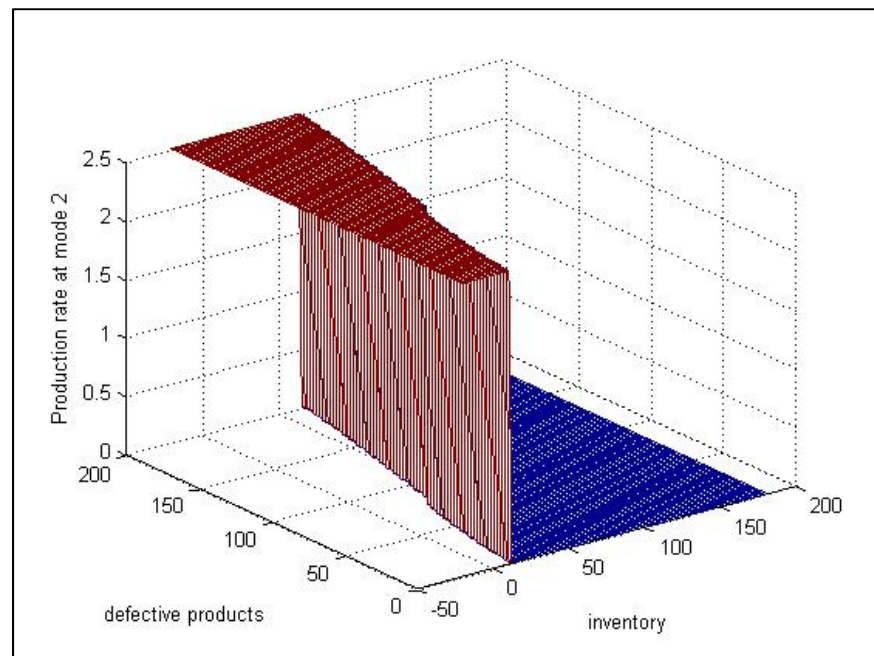
$$u(x, y, 2) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } y(\cdot) < \psi(x), \\ d & \text{if } y(\cdot) = \psi(x), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.28)$$

$\psi(x)$ , is the function that gives the optional threshold value for each value of the defective

$$\text{products. From numerical results, } \psi(x) = \begin{cases} X^*(x) & \text{if } x(t) \geq D^*(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.29)$$

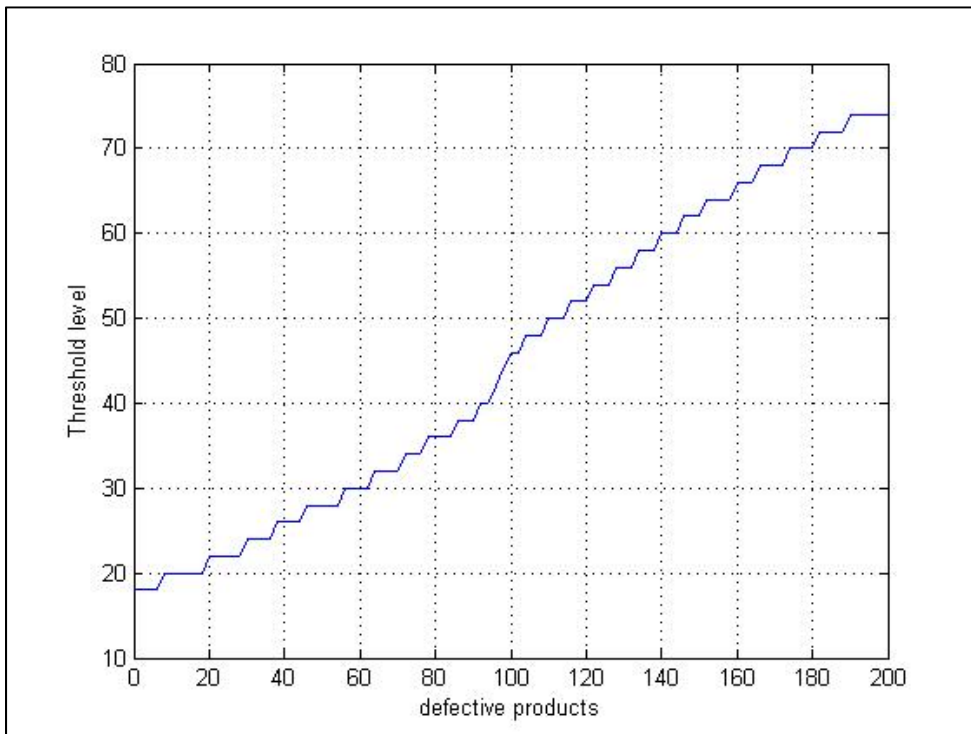


**Figure 3.5 Production rate of the machine versus inventory and defective products at mode 1**

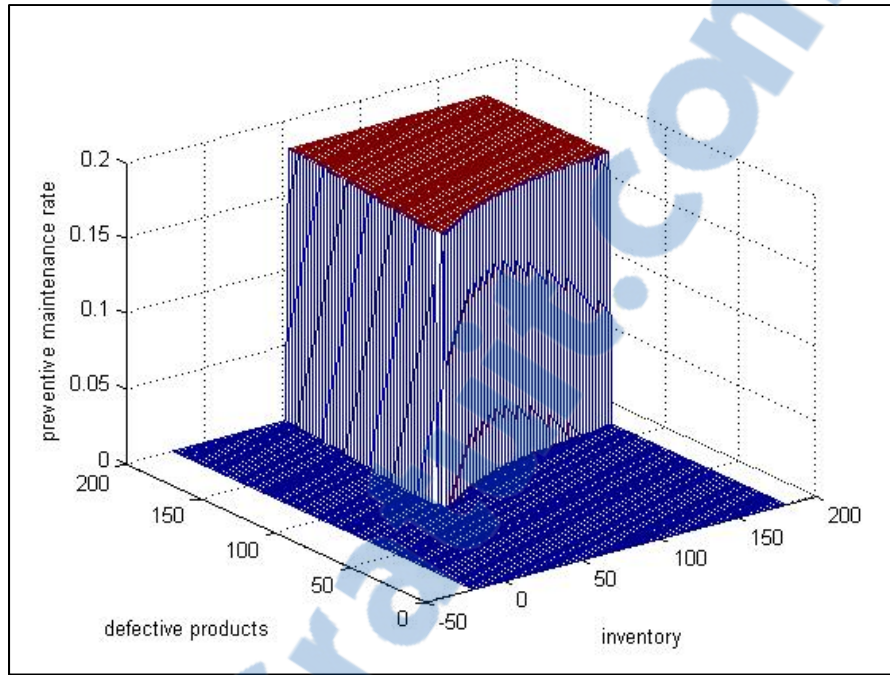


**Figure 3.6 Production rate of the machine versus inventory and defective products at mode 2**

Figures 3.5 and 3.6 illustrate the relation between inventory, defective products and production rate at operational states 1 and 2, respectively. In mode 1, when the stock level is 10 and the quantity of defective products is 10, the production rate is set to zero. If the stock level is 0 and the quantity of defective products is set to 100 the production rate is set to its maximal value. In mode 2, when the stock level is 50 and the quantity of defective products is 10, the production rate is set to zero. If the stock level is 50 and the quantity of defective products is set to 80 the production rate is set to its maximal value. This is due to the fact that the failure probability is an increasing failure rate as described by Kenne and Gharbi (1999). At the maximal production rate, the zone at state 2 is larger than the one at state 1. This illustrates the difference between operational states 1 and 2. The gap between the states 1 and 2 represents the increasing value of defective products.



**Figure 3.7 Threshold level versus defective products**

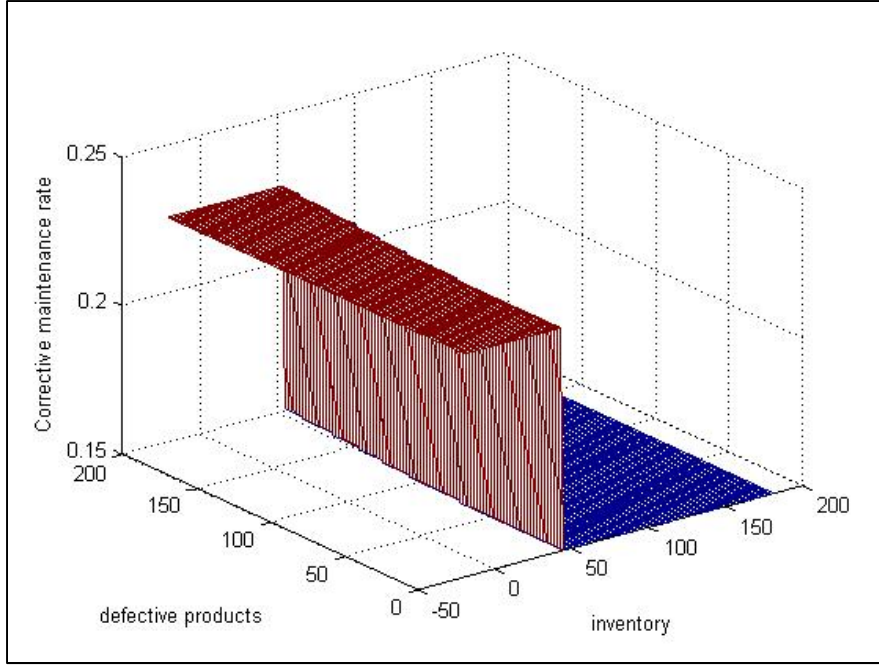


**Figure 3.8 Preventive maintenance rate versus inventory and defective products**

Fig. 3.8. illustrates the preventive maintenance policy. The computational domain  $(x,y)$  is divided into two regions where the preventive maintenance rate is set to its maximal value for backlog situation and to minimal value for large stock level. For significant stock levels, the preventive maintenance rate is set to its maximal value with the quantity of defective products. The corresponding optimal policy depends on a switching function based on the defective products for a given stock level and has a bang bang structure.

$$\lambda_{2p}(x, y, p) = \begin{cases} \lambda_{2p}^{\max} & \text{if } y(\cdot) < Y^*(x), \\ \lambda_{2p}^{\min} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Where  $Y^*(x)$ , is the function that gives the optional stock level at which it is necessary to switch the preventive maintenance rate from its maximal value to its minimal value.



**Figure 3.9 Corrective maintenance rate versus inventory and defective products**

Fig. 3.9 illustrates the corrective maintenance policy. The computational domain  $(x,y)$  is divided into two regions where the corrective maintenance rate is set to its maximal value for backlog situation and to minimal value for large stock level. For significant stock level, the zone where the corrective maintenance rate is set to its maximal value is not affected the quantity of defective products. The corresponding optimal policy depends on a switching function based on the defective products for a given stock level and has a bang bang structure.

$$\lambda_{r1}(x, y, p) = \begin{cases} \lambda_{r1}^{\max} & \text{if } y(\cdot) < Z^*(x), \\ \lambda_{r1}^{\min} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.31)$$

where  $Z^*(x)$ , is the function that gives the optional stock level at which it is necessary to switch the preventive maintenance rate from its maximal value to its minimal value.

Comparing these results of production rate versus defective products and inventory; and production rate versus age and inventory as in Kenne and Nkengoue (2008), we can also control the manufacturing system by monitoring defective products and inventory, thus when

quantity of defective products is considerable, machine must produce at its high production rate to fulfil the demand. The maintenance activity will occur systematically at a certain value of finish parts produce. So the policy control could be governed by defective products and inventory instead of age and inventory which do not take into account machine operator errors.

Table 3.2  
Comparative results between this new model and the one developed in Kenne and Nkengoue (2008)

| $c^-$                                                  | $c^+$ | $c_p$ | $c_r$ | $\lambda_{2p}^{min}$ | $\lambda_{2p}^{max}$ | $\lambda_{r1}^{min}$ | $\lambda_{r1}^{max}$ | $\lambda_{p1}$ | $X^*(x)$ | $Y^*(x)$ | $Z^*(x)$ | Cost |
|--------------------------------------------------------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------|----------|----------|------|
| <b>Optimal control results with defective products</b> |       |       |       |                      |                      |                      |                      |                |          |          |          |      |
| 50                                                     | 1     | 20    | 5000  | 0.0001               | 0.06                 | 0.05                 | 0.075                | 0.2            | 80       | 35       | 35       | 3448 |

**Optimal control results with machine age-dependent (Kenne and Nkengoue, 2008).**

|    |   |    |      |        |      |      |       |     |    |    |    |       |
|----|---|----|------|--------|------|------|-------|-----|----|----|----|-------|
| 50 | 1 | 20 | 5000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 65 | 55 | 50 | 11013 |
|----|---|----|------|--------|------|------|-------|-----|----|----|----|-------|

The defective products optimal policy of for joint maintenance and production optimization is given by Eqs.(3.27)-(3.31). With the same set of value compute in Kenne and Nkengoue (2008), the cost obtained for this model with interactive feedback of product quality is 3448 compared to 11013 for a model with machine age-dependent. To validate and illustrate the usefulness of the model developed; let's confirm the observation through a sensitive analysis.

### 3.6 Sensitive analysis

The table 3 illustrates different situations corresponding to different manufacturing context involving different cost changes of backlog, positive inventory, preventive and corrective maintenance. The analysis has been performed with a couple of experiments using the numerical example previously presented.

Table 3.3  
Sensitive analysis results

| $c^-$             | $c^+$ | $c_p$ | $c_r$ | $\lambda_{2p}^{min}$ | $\lambda_{2p}^{max}$ | $\lambda_{r1}^{min}$ | $\lambda_{r1}^{max}$ | $\lambda_{p1}$ | $X^*(x)$ | $Y^*(x)$ | $Z^*(x)$ | Cost |
|-------------------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------|----------|----------|------|
| <b>Basic case</b> |       |       |       |                      |                      |                      |                      |                |          |          |          |      |
| 500               | 1     | 500   | 15000 | 0.0001               | 0.06                 | 0.05                 | 0.075                | 0.2            | 100      | 65       | 50       | 7984 |

**Sensitivity of backlog cost**

|     |   |     |       |        |      |      |       |     |     |    |    |      |
|-----|---|-----|-------|--------|------|------|-------|-----|-----|----|----|------|
| 500 | 1 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7984 |
| 250 | 1 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 95  | 55 | 40 | 7221 |
| 50  | 1 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 89  | 35 | 25 | 5490 |

When the backlog cost increases the overall cost increases and the threshold value increases as well.

**Sensitivity of positive inventory cost**

|     |    |     |       |        |      |      |       |     |     |    |    |       |
|-----|----|-----|-------|--------|------|------|-------|-----|-----|----|----|-------|
| 500 | 50 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 15 | 40 | 48008 |
| 500 | 10 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 35 | 45 | 26226 |
| 500 | 1  | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7984  |

When the positive inventory cost increases, the threshold value decreases and the overall cost increases.

**Sensitivity of preventive maintenance cost**

|     |   |     |       |        |      |      |       |     |     |    |    |      |
|-----|---|-----|-------|--------|------|------|-------|-----|-----|----|----|------|
| 500 | 1 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7984 |
| 500 | 1 | 250 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7984 |
| 500 | 1 | 50  | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7934 |

When the preventive maintenance cost increases the overall cost and the threshold remain constant, in such a situation there no need to do a preventive maintenance. The preventive maintenance rate is set to its minimal value.

#### Sensitivity of corrective maintenance cost

|     |   |     |       |        |      |      |       |     |     |    |    |      |
|-----|---|-----|-------|--------|------|------|-------|-----|-----|----|----|------|
| 500 | 1 | 500 | 15000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 100 | 65 | 50 | 7984 |
| 500 | 1 | 500 | 10000 | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 90  | 60 | 55 | 7155 |
| 500 | 1 | 500 | 5000  | 0.0001 | 0.06 | 0.05 | 0.075 | 0.2 | 75  | 60 | 60 | 6664 |

When the corrective maintenance cost increases the threshold level and the overall cost increase.

This sensitive analysis validates and shows the usefulness of the proposed model. Through the observations made from the sensitive analysis, it clearly appears that the proposed joint maintenance and production planning, based on defective products provides better results in a context of manufacturing systems where failure is not only related to the age of the machine.

The proposed model is only based on a realistic manufacturing system with one type of product. The numerical approach presented in this paper cannot be used in cases involving multiple machine multiple products. Nevertheless, it could be extended to a more complex realistic manufacturing system with multiple machines and one-product. For any realistic production line with one type of product, the control policy described by Eqs. (27)-(31) is completely known for given parameters of threshold levels.

### 3.7 Conclusion

In this paper we presented a new model in which the system's retroaction is the quantity of defective products, considering that defective products are a consequence of global manufacturing system's deterioration. Instead of giving an optimal policy based on one type

of system's deterioration such as machine age. This research paper is based on an existing manufacturing system, so, to be more realistic; we summarized all deterioration parameters as the quantity of defective products, which is quite simple to obtain in a real-time. We obtained a near optimal control policy of the system through numerical techniques. The approximating control policy was shown to be asymptotically optimal. The proposed approach has been illustrated and validated using a numerical data from an existing manufacturing system and a sensitive analysis. The results have been compared to the work made by Kenne and Nkengoue (2008), and the overall cost obtained was less than half the overall cost obtained in Kenne and Nkengoue (2008). The results obtained show how a process can be better control by defective products and inventory. This approach extended the concept of hedging point policy to the quantity of defective products combined with preventive and corrective maintenance strategies. The control policy obtained has a bang bang structure and completely known for a given parameters. Due to the fact that we have considered the production line studied as one machine, the purpose of our next work will be to consider this production line as multiple machines in order to obtain an optimal control policy for a manufacturing system with multiple machines and one-product based on defective products.

### 3.8 References

- Ajodhya, N.D., Damodar, A., (2004). Age replacement of components during IFR delay time. IEEE Transactions on Reliability, vol. 53, p. 306-312.
- Akella, R., Kumar, P. R., (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. IEEE Transactions on Automatic control, vol. AC-31, p. 116-126.
- Boukas, E. K, Haurie, A., (1990). Manufacturing flow control and preventive maintenance: A stochastic approach. IEEE Transactions on Automatic control, vol. 33, p. 1024-1031.
- Davis, M., (1993). Markov models and optimization. London: Chapman and Hall.
- Gershwin, S.B., (2004). Manufacturing systems engineering, Prentice Hall.

Gershwin, S. B., Schick, I., (2007). Discrete-Event Models for the Analysis of Quality/Quantity Interactions in production Systems. ASME International Mechanical Engineering Congress. (Cambridge, February 07-11-2007).(USA): ASME.

Kenne, J.P., Boukas, E.K, (2003). Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* vol. 9, p. 66-82.

Kenne, J. P., Boukas, E. K. and Gharbi, A., (2003). Control of production and corrective maintenance rates in a multiple-machine, multiple-product manufacturing system. *Mathematical and computer modelling*, vol.38, p. 351-365.

Kenne, J.P., Gharbi, A. and Beit, M., (2007). Age-dependent production planning and maintenance strategies in unreliable manufacturing systems with lost sale, *European Journal of Operational Research*, vol. 178, p. 408-420.

Kenne, J.P., Gharbi, A., (1999). Experimental design in production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system, *International Journal of Production Research*, vol. 37, p. 621-637.

Kenne, J.-P., Nkengoue, L. J., (2008). Simultaneous control of production, preventive and corrective maintenance rates of a failure-prone manufacturing system, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 58, p. 180-194.

Kimemia, J. G., Gershwin S. B., (1983). An algorithm for computer control of production in flexible manufacturing systems». *IIE Transactions*, vol. 15, p. 353-362.

Kushner, H. G., (1977). *Probability Methods for Approximation in stochastic control and for Elliptic Equations*. New York: Academic.

Kushner, H.J., J.,Dupuis, (1992). *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer, New York.

Olsder, G.J., Suri, R., (1980). Time optimal of parts-routing in a manufacturing system with failure prone machines. In *Proceedings of the 19th IEEE Conference on decision and control*. (Albuquerque, Dec. 10-12-1980), p. 722-727. Piscataway (NJ): IEEE.

Rishel, R., (1975). Control of systems with jump Markov disturbances. *IEEE Transactions on automatic Control*, vol. 20, no2, p. 241-244.

Yang, H., Zhang, Q. (1997). A numerical method in optimal production and setup scheduling to stochastic manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. 42, p. 1452-1455.



## CHAPITRE 4

### INTEGRATED MAINTENANCE AND PRODUCTION MODELING OF A STOCHASTIC REMANUFACTURING SYSTEM WITH DEFECTIVE

Achille N. Njike <sup>ab</sup>, Jean Pierre Kenne <sup>a</sup>,  
Robert Pellerin <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mechanical Engineering,*

*École de Technologie Supérieure, Montréal, Canada*

<sup>b</sup> *Department of Mathematics and Industrial Engineering,*

*École Polytechnique, Montréal, Canada*

This chapter is an article submitted to International Journal of Production Economics on  
October 16, 2011. Ms. Ref. No.: IJPE-S-11-01267.

#### Résumé

Dans des environnements très concurrentiels, les entreprises utilisent des systèmes de remise à neuf grâce à la logistique inverse pour se différencier, et accroître leur rentabilité. La planification intégrée « maintenance et production » permet une gestion efficace des services afin de répondre aux exigences prévues et parfois inopinées. Cet article traite le problème de contrôle optimal de la maintenance et de la production, et démontre l'importance du processus de remise à neuf dans la minimisation du coût global prévu afférant aux activités d'inventaire / pénurie, de demande en matière première et de maintenance sur horizon infini. Nous considérons le contrôle d'un système de remise à neuf stochastique exécuté sur un système de production de type un produit fini et deux types d'entrées; la première étant la matière première principale et la seconde, les produits non-conformes (défectueuse) en provenance de la boucle fermée du même système de production. Nous considérons ensuite deux états opérationnels, deux états de maintenance préventive et corrective d'un seul ensemble d'actifs contrôlé par quatre variables de décision: le taux de production, le taux de demande en matières premières, le taux de maintenance préventive et le taux de maintenance corrective. Les conditions d'optimalité sont dérivées de la théorie du contrôle optimal

stochastique ; et la politique optimale est caractérisée par la solution de programmation dynamique à un problème de contrôle optimale déterministe par morceaux. Une illustration numérique basée sur un cas réel est présentée pour illustrer l'utilité de l'approche proposée. Cette étude démontre que l'utilisation de l'approche de contrôle proposée conduit à une réduction significative du coût total global, par rapport à un système de production simple à boucle ouverte.

**Mots clés:** Maintenance, Production, Système de remise à neuf, Programmation dynamique stochastique, Méthodes numériques.

### **Abstract**

In highly competitive environments, companies use remanufacturing systems through reverse logistics to differentiate themselves, as well as increase profitability. Integrating maintenance and production planning for such manufacturing systems can provide effective service management in order to respond to both planned and unplanned demands. This paper discusses optimal maintenance and production control, as well as the importance of the remanufacturing process in minimizing the expected discounted overall cost due to inventory/shortage and maintenance activities over an infinite horizon. We consider the control of a stochastic remanufacturing system executing single-product manufacturing operations with two types of inputs, with the first being the principal raw material and the second, the non-conforming (defective) product coming from the closed loop of the same manufacturing system. We then consider one (re)manufacturing state, and two maintenance states of a single machine controlled by four decision variables: production rate, raw material demand rate, preventive rate and corrective maintenance rates. The optimality conditions are derived from the stochastic optimal control theory and the optimal policy is characterized by the dynamic programming solution to a piecewise deterministic optimal control problem. A numerical illustration based on a real case is presented to illustrate the usefulness of the proposed approach. This study demonstrates that the use of the proposed control approach leads to a significant reduction in the total discounted overall cost, as compared to a simple manufacturing process with an open-loop system.

**Key words:** Maintenance, Production, Remanufacturing systems, Stochastic dynamic programming, Numerical Methods

#### 4.1 Introduction

Over the last few years, the remanufacturing process has grown considerably, thanks to the growing awareness of the economic benefits of recovering products, and to the expansion of waste disposal regulations in industry. The recycling of non-conforming products to derive a new “class” of raw provides a useful means of reducing costs. Lund (1983) defines remanufacturing as the restoration of an item to a standard as close as possible to its original condition in appearance, performance and life expectancy. A number of companies have identified the remanufacturing process as a major source of cost savings, which thus provide a competitive advantage (Berko-boateng et al., 1993). Gharbi et al. (1999) outline the difference between remanufacturing and manufacturing operations, illustrating that remanufacturing systems face greater uncertainty due to the condition of items being repaired. Implementing a remanufacturing process can help increase profitability, reduce material requirements, acquisition costs, and improve market share thanks to an improved environmental image (Guide et al., 2000). Salameh & Jaber (2000) proposed an optimization model incorporating expected profit in an imperfect production process that considers a non-conforming item, while Hayek & Salameh (2001) for their part proposed an optimal operating policy for a production model under the effect of imperfect quality; Chiu (2003) also proposed an optimal production model with rework.

A series of works by Kim & Gershwin (2005) and Gershwin and Kim (2005, 2008) introduced dynamic models of manufacturing systems with operational, failure and partially observable defective quality states. The impact of quality and setup cost on a production system has been explored by Jaber (2006). Inderfurth et al. (2007) proposed a production policy for recovering both non-conforming and new items in a manufacturing system that performs work and rework at the same time. Many case studies and papers have been reported and many scientific planning or optimization models proposed in order to minimize

the overall discounted cost. These cases and models differ in several ways. An optimization model that maximizes the expected profit while integrating reworking and systematic maintenance was proposed by Wang (2004) and Chiu et al. (2007). For a manufacturing system operating in different quality states, Panagiotidou & Tagaras (2007) developed a preventive maintenance optimization model.

Considering a manufacturing system with restricted capacity, Gharbi et al. (2008) proposed a control policy for repair and remanufacturing systems. Aghezzaf & Najid (2008) investigated issues surrounding the integration of production planning and preventive maintenance into failure-prone manufacturing systems. Gharbi et al. (2008) used a simulation approach to solve such a problem by proposing a control policy for a remanufacturing system with limited capacity. Gharbi et al. (2008) and Pellerin et al. (2009) presented a stochastic model based on a remanufacturing problem without any consideration of manufacturing planning problems; further, their models did not respond to a combined optimal production policy, a preventive and corrective maintenance policy and to an optimal raw material demand policy within the same execution system.

In this paper, we characterize optimal policies for the production rates of final products as well as the remanufacturing of non-conforming products, depending on the values of the model parameters and raw materials used, and on the preventive and corrective maintenance and production costs. The stochastic optimal control theory used in the dynamic characterization of the production planning problems considered in the works by Dehayem et al. (2009), Hajji et al. (2009) and references therein, do not take into account all failure factors for manufacturing/remanufacturing systems within the same execution system and the fact that raw materials are in limited supply and expensive. Using the same optimal control theory, Njike et al. (2009) considered the overall failure factor and proposed an optimal model allowing the simultaneous control of the maintenance and production rates of a manufacturing system with given defect rates for multiple operational states of the manufacturing system.

Kenné et al. (2011) proposed a production planning of a hybrid manufacturing-remanufacturing system under uncertainty within a closed-loop supply chain, with the optimal policies proposed being limited to the stock levels of the manufacturing and remanufacturing system, and not considering the overall machine failure factors; The defectives products characterizing the overall machine failures has been considered in Njike et al. (2011), who proposed an integrated maintenance and production planning focusing on the real life quantity of a defective product combining both machine age and human errors, and which also helps control the life cycle of the manufacturing system. The impact of the reused product on the input is not been considered in their model. Using the same optimal control theory as Njike et al. (2011), we simultaneously add the remanufacturing dimension of non-conforming products and overall machine failure factors. We consider a non-conforming product which is monitored in real-time through its quantity, and this quantity is used as feedback in the manufacturing system for the maintenance planning. Furthermore, the model uses the same non-conforming product as a part of input raw material into the system for the production and maintenance planning. Thus, instead of just having a single input, we consider two types of inputs in this new model.

The proposed model integrates maintenance and production planning through a non-conforming product that is reused. It also makes it possible to have four optimal policies: production policy, preventive policy, corrective policy and raw material demand policy. The results obtained demonstrate that the use of the proposed control approach leads to a significant reduction in the total average cost, as compared to current practices.

In an industrial context where demand for raw materials is very rare and expensive, where production assets are subject to multiple failures due partly to misuse, partly to their age, and partly as a result of a lack of experience among operational resources; the history of rejected parts of the production system is generally known; however, the problem of optimal planning of maintenance and production activities is generally done without taking all failure factors into account. Thus, a maintenance policy based only on the particular age of assets has a certain limitation, which is why ways must be found to combine all the factors causing the

failures of these assets. This combination of factors is determined by the quantities of parts rejected.

The purpose of this paper is to minimize the expected discounted overall cost due to expensive and limited raw materials, a lack of experience among operational resources, maintenance activities, inventory holding and backlogs. The proposed optimal model helps reduce the consumption of these expensive and limited raw materials; it also allows manufacturers to minimize the overall cost and identify the right time to perform maintenance actions, taking into account the use of actual assets and resources in their possession. The model also fits into the actual operating environment of the company, and does not exist simply in the context of theoretical recommendations by asset suppliers. This study combines the raw material and the non-conforming product which is reused on the same manufacturing system. The study could be applied to a (re)manufacturing system subject to failures, where remanufacturing of defective products can be combined with original raw materials such as pellet plants, concentrator units, for mining companies, or any other manufacturing system allowing the reuse of defective products reused.

The rest of this paper is organized as follows. We present the stochastic control model in section 2, where we also introduce techniques used for numerical solutions. In section 3, we illustrate the model on an existing manufacturing system, and section 4 illustrates the cost sensitivity analysis. Finally, the paper is concluded in section 5.

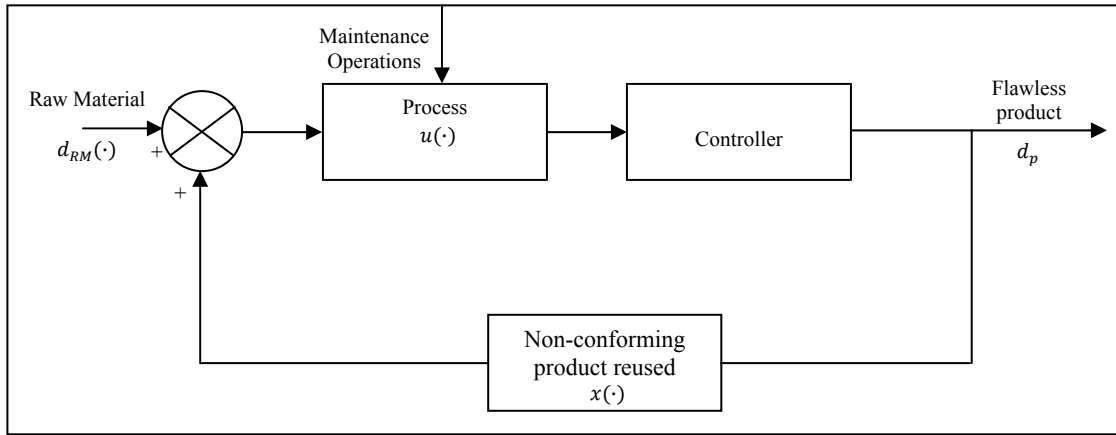
## **4.2 Stochastic control model**

We consider the control of a stochastic remanufacturing system which is subject to random breakdowns and repairs. The manufacturing system has a single product output and two different inputs, with the first being the principal raw material and the second, the non-conforming product reused, and derived from the closed loop of the same manufacturing system. The manufacturing system has one operational state, one preventive maintenance

state and one corrective maintenance state. The production and preventive maintenance rates are considered to be decisions variables. The following variables are used in the description of the stochastic model.

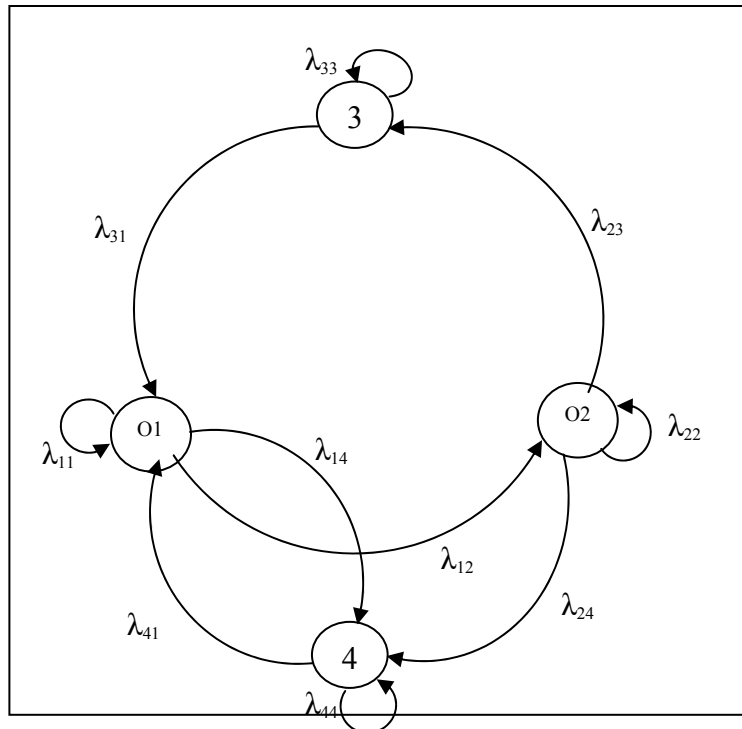
- $d_{RM}(\cdot)$  : Raw material demand rate
- $d_p$  : Final product demand rate
- $x(\cdot)$  : Vector of non-conforming (defective) product
- $u(\cdot)$  : Vector of production rate
- $y(\cdot)$  : Vector of flawless product surplus or backlog level
- $u_{\max}$  : Maximal production rate
- $\lambda_{2p}^{\max}, \lambda_{2p}^{\min}$  : Maximal and minimal preventive maintenance rates
- $\lambda_{r1}^{\max}, \lambda_{r1}^{\min}$  : Maximal and minimal corrective maintenance rates
- $\zeta(t)$  : State of the machine at time  $t$
- $\lambda_{\alpha\alpha'}(\cdot)$  : Transition rate from states  $\alpha$  to  $\alpha'$
- $\pi(\cdot)$  : Complete control vector
- $\psi^\alpha(\cdot)$  : Cost rate function at state  $\alpha$
- $V(\cdot)$  : expected and discount cost function
- $c^\alpha$  : constant cost incurred for repair and preventive activities
- $c_p$  : constant cost applying to preventive activity
- $c_r$  : constant cost applying to repair activity
- $\rho$  : positive discount rate

The total expected discounted cost includes the cost of the non-conforming product reused, the preventive maintenance cost, the setup cost, and the scrapped non-conforming product cost. We consider a remanufacturing system with a controller allowing the identification of defective products within a closed-loop system with non-conforming products reused. A combination of raw materials and non-conforming products are reused, and both are considered as inputs of the system subject to preventive and corrective maintenance. This is illustrated in Fig. 4.1.



**Figure 4.1 Functional diagram of the proposed model**

The demand for raw materials depends simultaneously on the demand rate, the non-conforming product rate and the flawless products inventory. Considering the same manufacturing system for work and rework, the transition diagram is described as follows in Figure 4.2.



**Figure 4.2 States transition diagram of the proposed model**

The dynamics of the system is described by a hybrid state comprising discrete and continuous components.

The discrete component represents different states of the machine at time  $t$ . The random variable  $\zeta(t)$  can take the values  $\{1; 2; 3; 4\}$  respectively, for operational modes 1 and 2, preventive rate 3 and corrective rate 4. The transition matrix  $Q$  depends on the non-conforming products ( $x$ ) and the production rate ( $u$ ).  $Q$  is given by:

$$Q = \lambda_{\alpha\alpha'}(x, u, v) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

The set of admissible control policies  $\Gamma(\cdot)$  of the problem is characterized by four control variables  $u(\cdot)$ ,  $u_d(\cdot)$ ,  $\lambda_{2p}(\cdot)$  and  $\lambda_{r1}(\cdot)$ .

$$\Gamma(\cdot) = \left\{ \begin{array}{l} (u(\cdot), u_d(\cdot), \lambda_{2p}(\cdot), \lambda_{r1}(\cdot)) \in \mathbb{R}^4, \\ 0 \leq u(\cdot) \leq u_{max}, d_{RM}^{min} \leq d_{RM}(\cdot) \leq d_{RM}^{max}, \\ \lambda_{2p}^{min} \leq \lambda_{2p}(\cdot) \leq \lambda_{2p}^{max}, \lambda_{r1}^{min} \leq \lambda_{r1}(\cdot) \leq \lambda_{r1}^{max} \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

$\lambda_{2p} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{dt} (P[(t + dt) = p | \zeta(t) = 0]) \right]$ ; Its inverse represents the expected time begin

preventive maintenance activities from operational mode 2.

The continuous component consists of continuous variables  $y(\cdot)$  and  $x(\cdot)$ , corresponding to the inventory/backlog of flawless products and the cumulative defective products of the machine. Gershwin (2004) presented the usual state equation of the surplus for a constant demand rate. However, in this article, we consider a feedback of non-conforming product reuse as the second input into the same manufacturing system; the quantity of the original raw material corresponding to the demand is then adjusted with the quantity of the non-conforming product reused. This means that the normal state equation (3) should be modified, as in equation 4.4.

Considering the functional diagram described in Figure 4.1, since;

$\int u(s)ds$ , the integral of the production rate is the total amount produced,

$\int d_{RM}(s)ds$ , the integral of the raw material demand rate is the total raw material demand,

$\int x(s)ds$ , the integral of the non-conforming product rate is the total amount rejected.

$$d_p \text{ The total product demand is equal to } \int (d_{RM}(s) + x(s))ds \quad (4.3)$$

Because the principal state variable in this paper is the quantity of the non-conforming product, and considering the non-conforming rate, the state equation of the inventory/backlog of the products is given by:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = u(\alpha, t) - d_{RM}(t) \\ y(0) = y^0 \end{cases} \quad (4.4)$$

where  $y^0$  is the given initial surplus value.

By assuming that a non-conforming product at time  $t$  is an increasing function of its production rate, the cumulative defective product is the solution of the following differential equation.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = u(\alpha, t) - d_p + d_{RM}(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (4.5)$$

where  $x^0$  is the given initial condition of non-conforming products.

$$\text{The cost function at state } \alpha \text{ is defined as follows: } \psi^\alpha(x, y, u, w) = c_{ps}y^+ + c_{ns}y^- + c^\alpha \quad (4.6)$$

where  $y^+ = \max(0, y)$ ,  $y^- = \max(-y, 0)$  and  $c^\alpha = c_p \text{Ind}\{\zeta(t) = p\} + c_r \cdot \lambda_{r1} \cdot \text{Ind}\{\zeta(t) = r\}$

$$\text{Ind}\{\zeta(t) = \alpha\} = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta(t) = \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Our objective is to minimize the expected discounted cost given by the following equation:

$$V(\alpha, x, y, u, w) = E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} \psi^{\zeta(t)}(x(t), y(t), u(t), w(t)) dt \mid x(0) = x, y(0) = y, \zeta(0) = \alpha \right] \quad (4.7)$$

This minimization of  $V(\cdot)$  for initial condition of states variables  $(x, y)$  will help control the production and preventive maintenance rates.

Based on the Kushner approach, as in Kenné and Boukas (2003), the numerical methods for solving the optimality conditions have been developed, and have proved that the value function of Eq. (7)  $\psi^{\zeta(t)}$  is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives, and that is jointly convex in  $(x, y)$ . By assuming that  $\psi^{\zeta(t)}$  is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives that is jointly convex for all  $\alpha$ , We can write the Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equation as follows:

$$\rho V(\alpha, x, y) = \min_{u, v} \left\{ \psi^\alpha(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(\alpha, x, y) \left( u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot) \right) + \frac{\partial}{\partial y} V(\alpha, x, y) \left( u(\cdot) - d_{RM}(\cdot) \right) + \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha'}(\cdot) [V(\alpha', x, y) - V(\alpha, x, y)] \right\} \quad (4.8)$$

The numerical solution of Eq. (4.8) used to be considered unsolvable, until Boukas and Haurie (1990) showed that implementing Kushner's method can solve such a problem in the context of production planning. We use the policy improvement technique to obtain a solution for the approximating optimization problem. The algorithm of this technique can be found in Kushner and Dupuis (1992). The numerical solution of Eq. (4.8) was found using Kushner's technique, and gave us an optimal control policy for production and maintenance planning based on non-conforming products instead of an age-dependent machine. Kushner's approach consists in approximating the gradient of the value function  $V(\alpha, x, y)$ :

Let  $h_x$  and  $h_y$  denote the length of the finite difference interval of the variables  $x$  and  $y$ , respectively.

Using this approach, we obtain the equations presented in appendix A.

### 4.3 Numerical illustration

In this section, we provide a numerical illustration for the hybrid manufacturing/remanufacturing system presented in section 2, to show the result obtained. The system capacity is described by four states, with the modes in  $\{1,2,3,4\}$ . The purpose is to illustrate the closed-loop of production system, preventive and corrective maintenance policies with the quantity of defective products as the feedback in the system. Eq. (6) presents the instantaneous cost. From historical data, we obtain the following parameters: the failure rate is a function of the quantities of defective products;

$q_{24} = 0.1 + 5 \cdot (1 - e^{-10^{-11} \cdot x^4})$ , The control policy of the problem is characterized by four control variables,  $u(\cdot)$ ,  $u_d(\cdot)$ ,  $w(\cdot) = \lambda_{2p}(\cdot)$  and  $\lambda_{r1}(\cdot)$ .

$$0 \leq u(\cdot) \leq 0.5, \quad 0.01 \leq d_{RM} \leq 0.4, \quad 0.000001 \leq w(\cdot) \leq 0.3, \quad 0.05 \leq \lambda_{r1}(\cdot) \leq 0.5.$$

Table 1 summarizes the other parameters used in this paper.

We used the computational domains  $D = G_{h_x} \times G_{h_y}$  such that:

$$G_{h_x} = \{x: 0 \leq x \leq 500\}, \quad G_{h_y} = \{y: -50 \leq y \leq +50\}. \quad \text{With } h_x = 5, h_y = 5. \quad (4.9)$$

The manufacturing/remanufacturing system will be able to meet the final product demands (represented by the demand rate  $d_p$ ) over an infinite horizon and reach a steady state if:

$$\pi_1 \cdot u_{max} + \pi_2 \cdot u_{max} - d_p > 0. \quad (4.10)$$

where  $\pi_1$  &  $\pi_2$  are the limiting probabilities at operational modes 1 and 2, and are computed as follows:  $\Pi \cdot Q = 0$  and  $\sum_{i=1}^p \pi_i = 1$ .

The feasibility conditions given by Eq. (4.10) are satisfied for the chosen parameters in Table 4.1.

Table 4.1  
Parameters of the numerical illustration

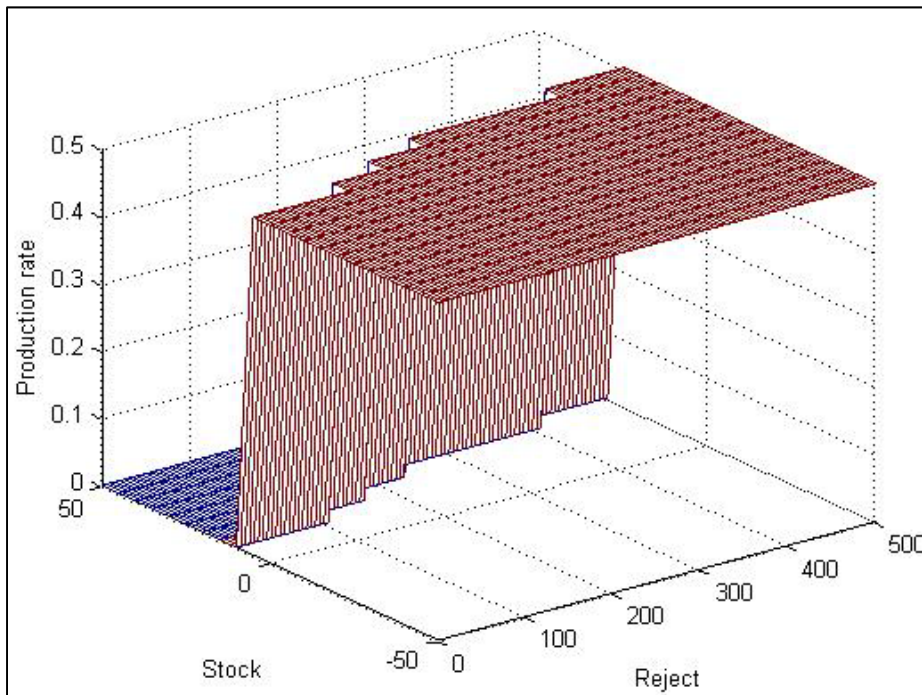
| $C_{ps}$ | $C_{ns}$ | $C_{rm}$ | $C_{pr}$ | $C_{cr}$ | $d_p$ | $\rho$ | $\lambda_{12}$ | $\lambda_{14}$ | $\lambda_{31}$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|-------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1        | 50       | 500      | 1000     | 4000     | 0.5   | 0.05   | 0.1            | 0.001          | 1              |

The holding cost( $C_{ps}$ ) depends on the main inventory level (average value \$/unit of time)

The shortage cost ( $C_{ns}$ ) depends on the shortage quantity and time (average value \$/unit of time). The policy improvement technique is used to solve the system of four equations obtained (A.4)-(A.7). The results obtained are presented in the following section to illustrate four policies for production, raw material demand, preventive maintenance and corrective maintenance.

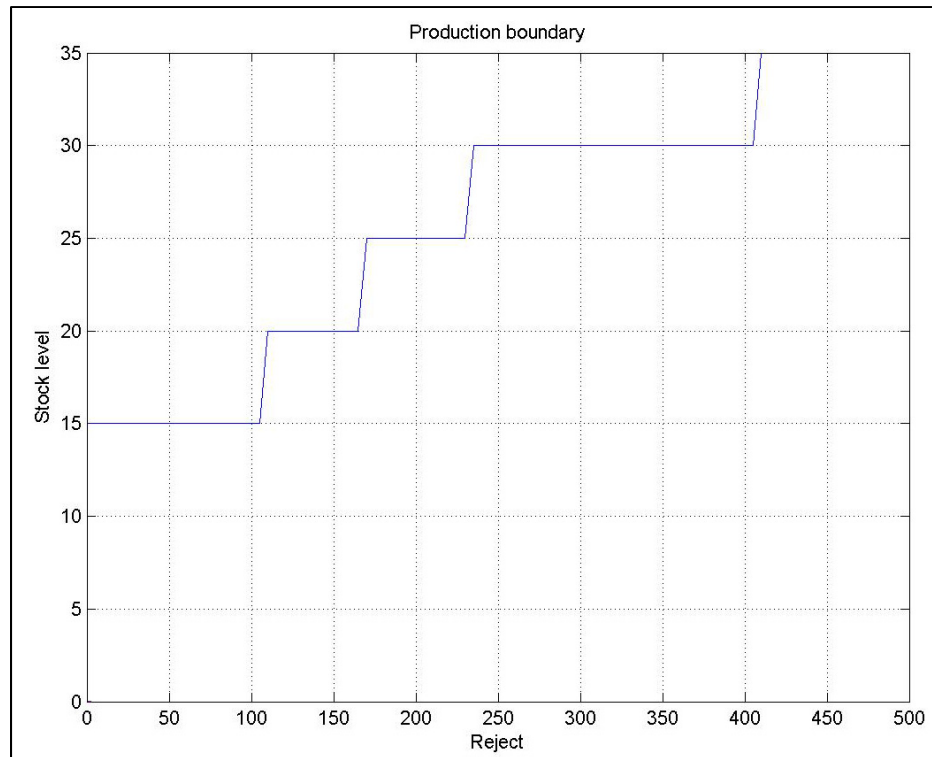
#### 4.4 Production policy

The optimal production policy  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot)$ , illustrated in Figs. 4.3 and 4.4 indicate the production rate of the manufacturing/remanufacturing system for a given number of defective products  $\mathbf{x}(t)$ , for each stock level  $\mathbf{y}(t)$ . There is no need to produce at a comfortable stock level capable of meeting demand; we do not need to produce if the stock level is greater than 15.



**Figure 4.3 Optimal production rate of the manufacturing system**

Fig. 4.4 illustrates the optimal production rate boundary, which is the optimal stock level  $\mathbf{Z}_n^*(\cdot)$ , such that even with zero defective products, with a stock level below 15, we need to produce at the maximum production rate. If the defective product increases, the optimal stock level also increases. When stock level is less than the optimal level, the remanufacturing of defective products helps avoid production at the maximum rate.



**Figure 4.4 Boundary of production rate of the manufacturing system**

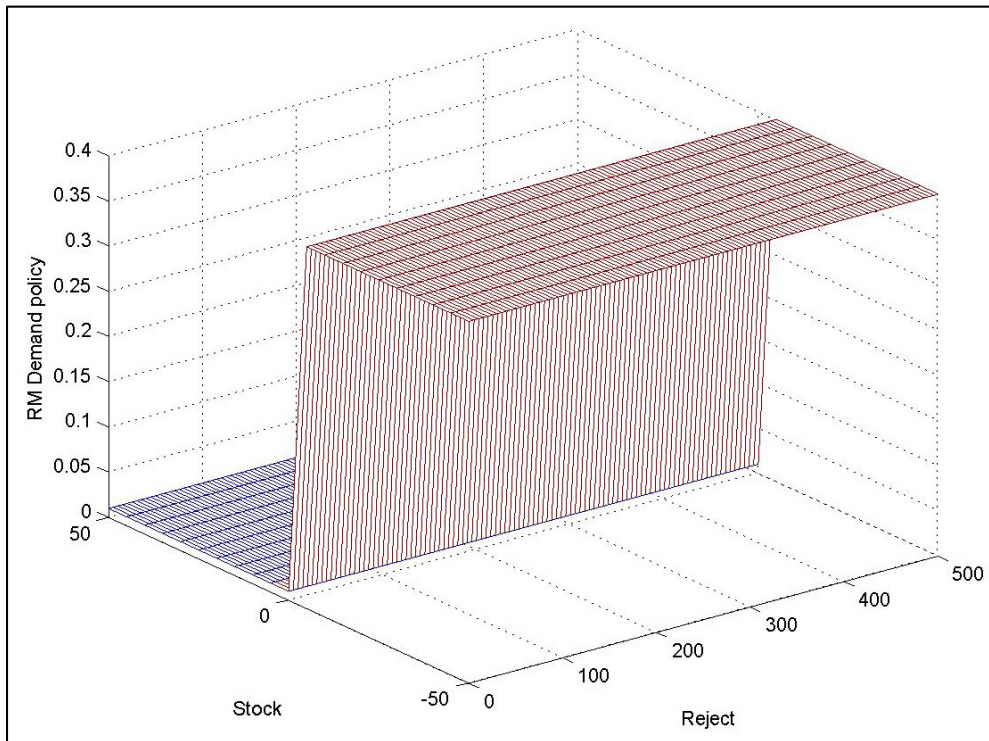
Based on the results from Figs. 4.3 & 4.4, the production rate is given by asset non-conforming defective product dependent hedging point:

$$u^*(1, x, y) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } y(t) < Z_n^*(\cdot) \\ d_p & \text{if } y(t) = Z_n^*(\cdot) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

#### 4.5 Raw material demand policy

Fig. 5 illustrates the fact that by remanufacturing defective products, we need a minimum raw material demand. A maximum raw material demand rate is only needed when there is a negative stock. This consideration helps reduce production cost by consuming fewer raw materials and increasing the productivity of the (Re) manufacturing system. The demand rate is given by asset non-conforming product dependent hedging point:

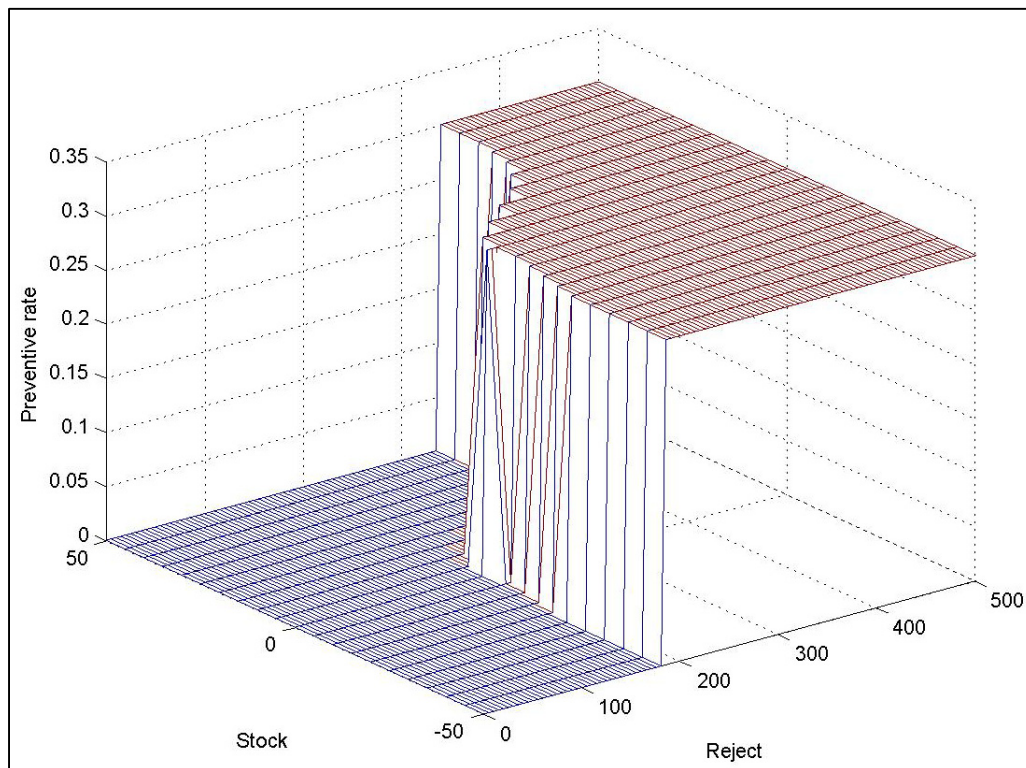
$$u_d^*(1, x, y) = \begin{cases} d_{RM}^{max} & \text{if } y(t) < D^* \\ d_{RM}^{min} & \text{otherwise} \end{cases}$$



**Figure 4.5 Optimal raw material demand rate**

#### 4.6 Preventive maintenance policy result

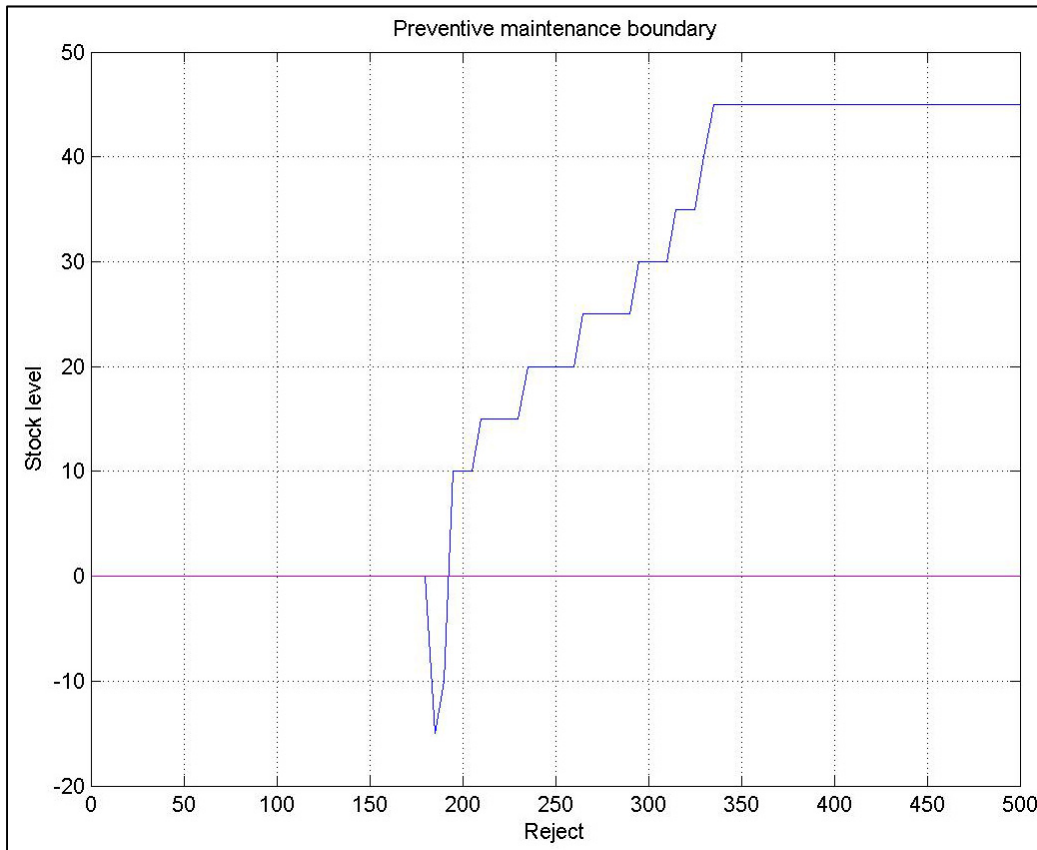
In Fig. 4.6, the optimal preventive maintenance policy obtained is presented. It shows that at negative stock, there is no need to produce; even though production is indeed taking place, it will give defective products; meaning that it is better to carry out preventive maintenance in a negative stock situation. Comparing this result with that from the work by Kenné et al. (2008), where machine failure depends on age, our work here systematically presented production at a negative stock level, thus removing the need for maintenance. In this paper, we illustrate the fact that at a certain level of defective stock, there is a need for preventive maintenance at negative stock levels.



**Figure 4.6 Optimal preventive maintenance policy**

The trace of the preventive maintenance policy is presented in Fig. 4.7. It illustrates the boundary of the preventive rate at the optimal stock level, where there is a need for preventive maintenance, even at negative stock. At between 180 and 190 defective products at negative stock, there is a need for preventive maintenance, due to the fact that all the products manufactured during that period are defective. From 190 to 335 defective products, preventive maintenance is needed at the optimal stock level, and from 335 to 500, preventive maintenance must be carried out systematically, regardless of the stock level. The preventive maintenance actions are triggered according to the asset defective product dependent policy given by the following equation at the rate:

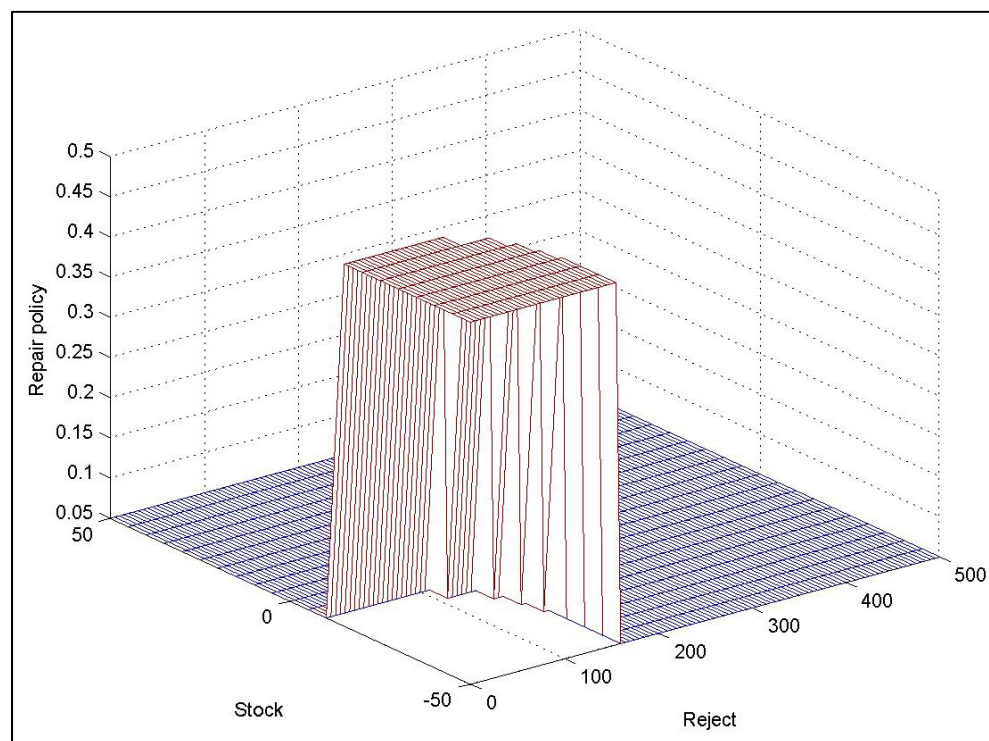
$w^*(x, y) = \begin{cases} \lambda_{23}^{min} & \text{if } x(t) < B_w(\cdot) \\ \lambda_{23}^{max} & \text{otherwise} \end{cases}$  where  $B_w(\cdot)$  is the defective product limit for preventive maintenance the asset failed.



**Figure 4.7 Boundary of preventive maintenance policy**

#### 4.7 Corrective maintenance policy

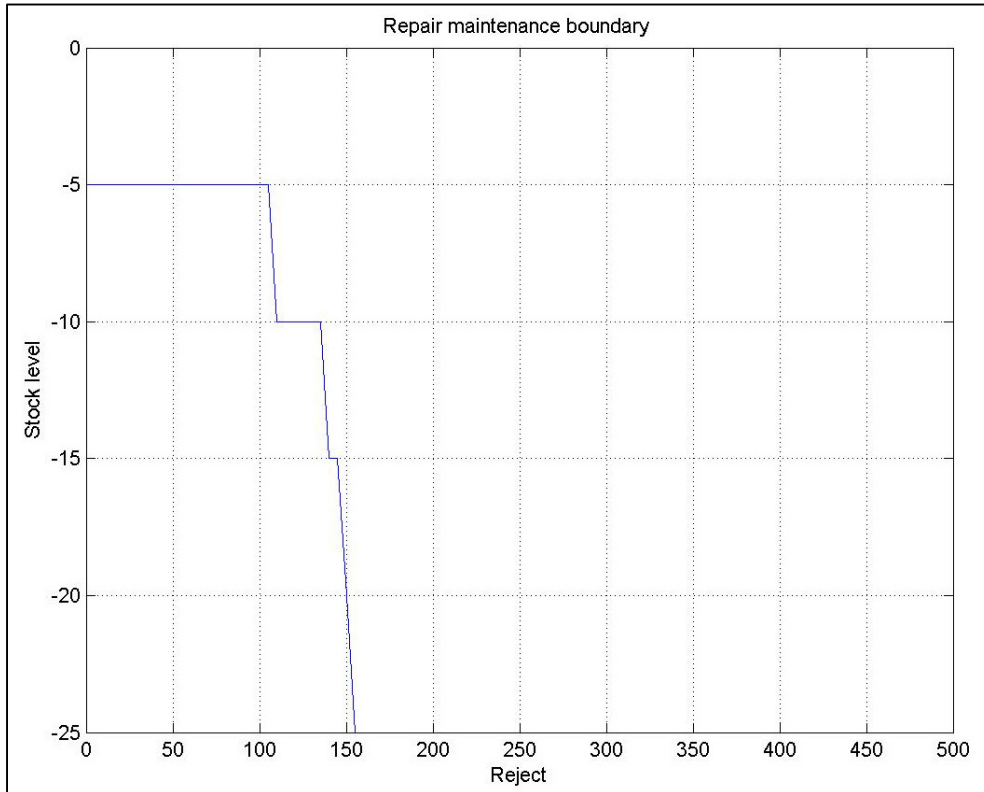
Fig. 4.8 & 4.9 illustrate the fact that at a negative stock, with a quantity of defective products less than 150, we really need to accelerate the repair time: corrective maintenance is done at the maximum repair rate. For a quantity of defective product greater than 150, regardless of the level of stock, there is no need to rush through a corrective maintenance because preventive maintenance is being done during the same period, and it explains the so-called *opportunistic maintenance*, which is described by Mohamed-Salah et al. (1999) as “a strategy which combines corrective and preventive maintenance activities, performed on different processors of the line, as soon as a certain technical and economical conditions are satisfied”.



**Figure 4.8 Optimal corrective maintenance policy**

The boundary of the corrective maintenance policy is presented in Fig. 4.9. Based on these results, the policy is given by the following expression:

$$v^*(x, y) = \begin{cases} \lambda_{41}^{min} & \text{if } x(\cdot) > B_v(\cdot) \text{ \& } y(\cdot) > 0 \\ \lambda_{41}^{max} & \text{otherwise} \end{cases}$$



**Figure 4.9 Boundary of corrective maintenance policy**

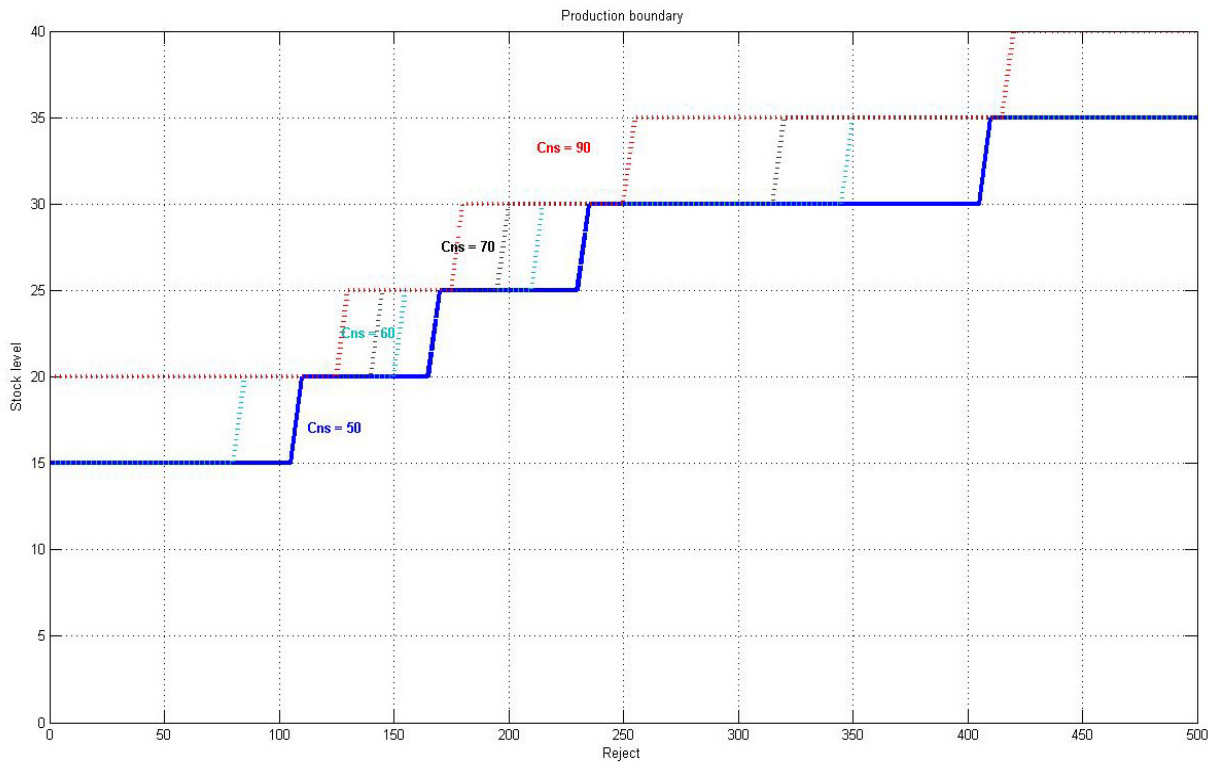
In the next section, we will confirm the structure of the control policies through a sensitive analysis and explain the usefulness of the model proposed in this paper.

## 4.8 Sensitivity and results analysis

The sensitivity analysis is also aimed at validating and illustrating the usefulness of the model developed in this paper. Sensitivity analyses are conducted on the backlog cost, demand cost and preventive maintenance cost parameters to gain insight into the proposed stochastic model.

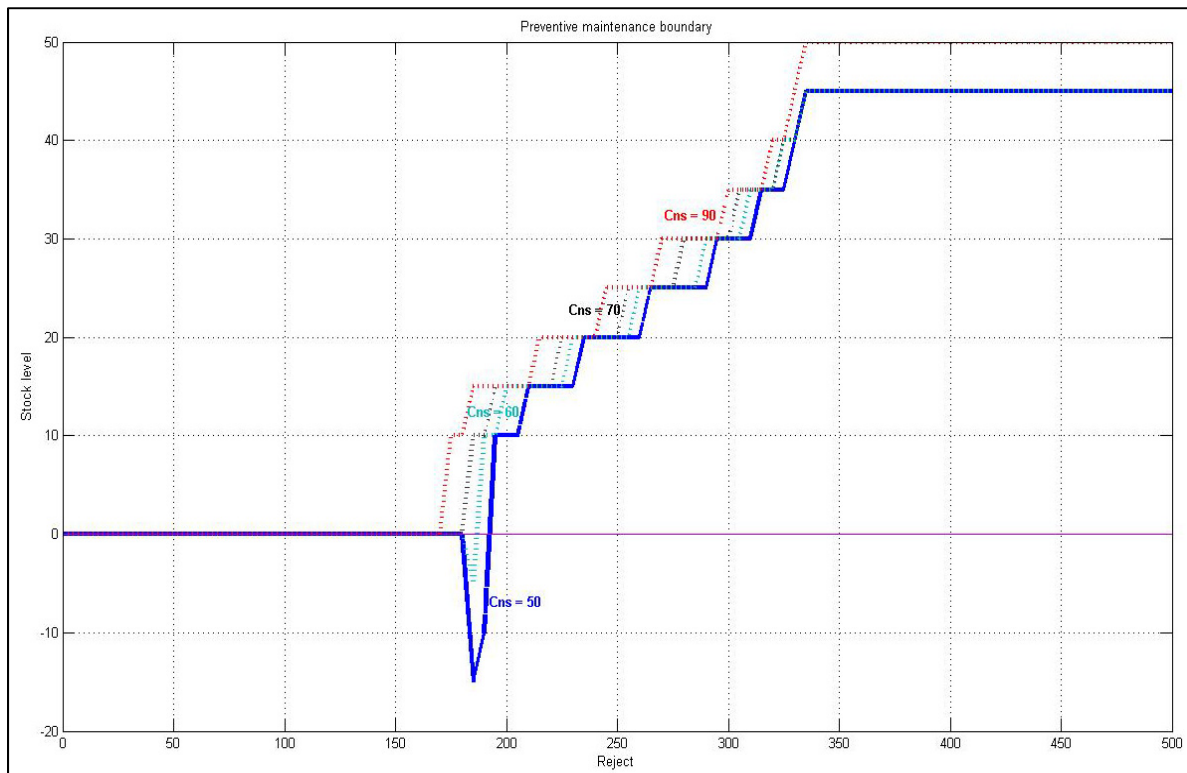
### 4.8.1 Variation of the backlog cost

Fig. 4.10 illustrates the maximum number of flawless products to hold for the four cost values  $c_{ns} = 50, 60, 70$  and  $90$ . The results show that variations of the backlog cost have no effect on the threshold value, but that they affect the production policy. By increasing the backlog cost, the quantity of defective products decreases at the optimal stock level.



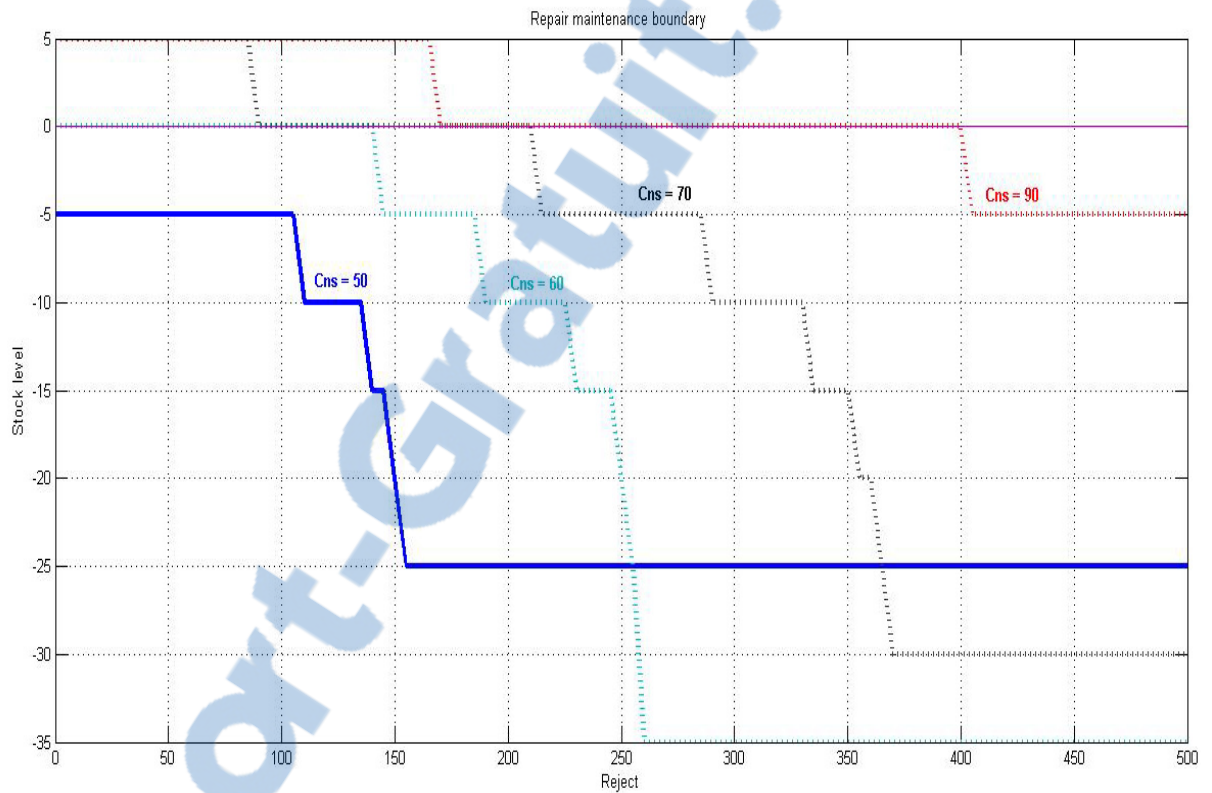
**Figure 4.10 Variation of backlog cost-effect on production policy**

Fig. 4.11 illustrates that variations of the backlog cost have no effect on the optimal stock threshold level. The results show that by increasing the backlog cost, we decrease the quantity of defective products between two preventive maintenance actions.



**Figure 4.11 Variation of backlog cost-effect preventive policy**

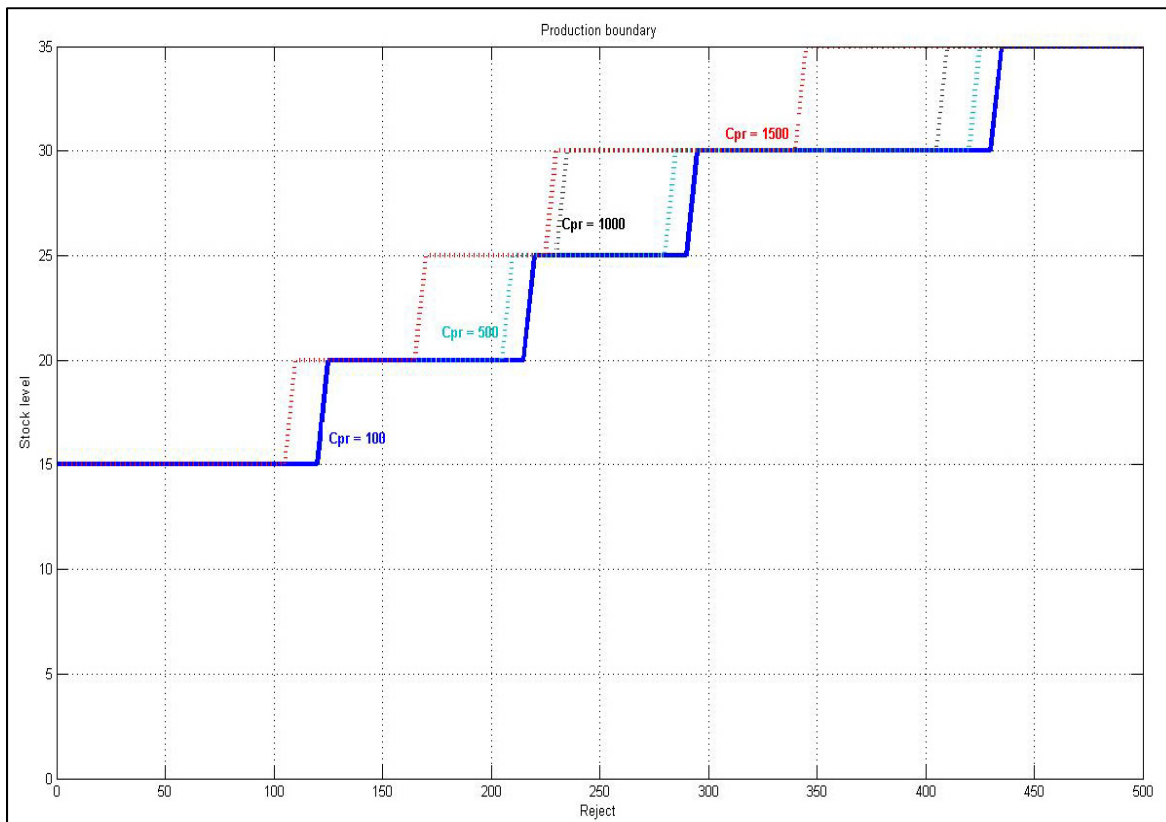
Fig. 4.12 illustrates the fact that by increasing the preventive maintenance cost, we increase the quantity of defective products between two corrective maintenance actions.



**Figure 4.12 Variation of backlog cost-effect on corrective maintenance policy**

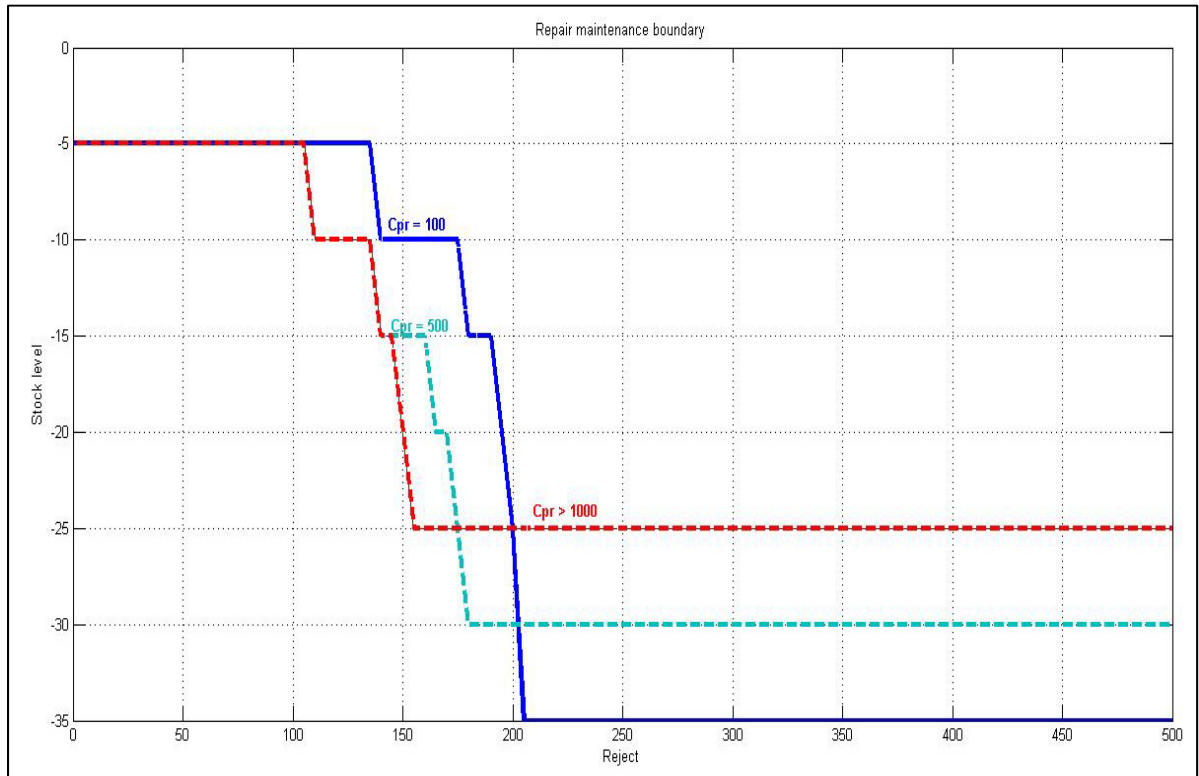
## 4.2 Variation of preventive maintenance cost

Fig. 4.13 illustrates the maximum number of flawless products to hold for the four cost values  $c_{pr} = 100, 500, 1000$  and  $1500$ . The results show that variations of the preventive maintenance costs affect the production policy but have no effect on the threshold value. By increasing the preventive maintenance cost, the quantities of defective products decrease at the optimal stock level.



**Figure 4.13 Variation of preventive maintenance cost-effect on production policy**

Fig. 4.14 illustrates the fact that by increasing the preventive maintenance cost, we increase the quantity of defective products between two corrective maintenance actions.

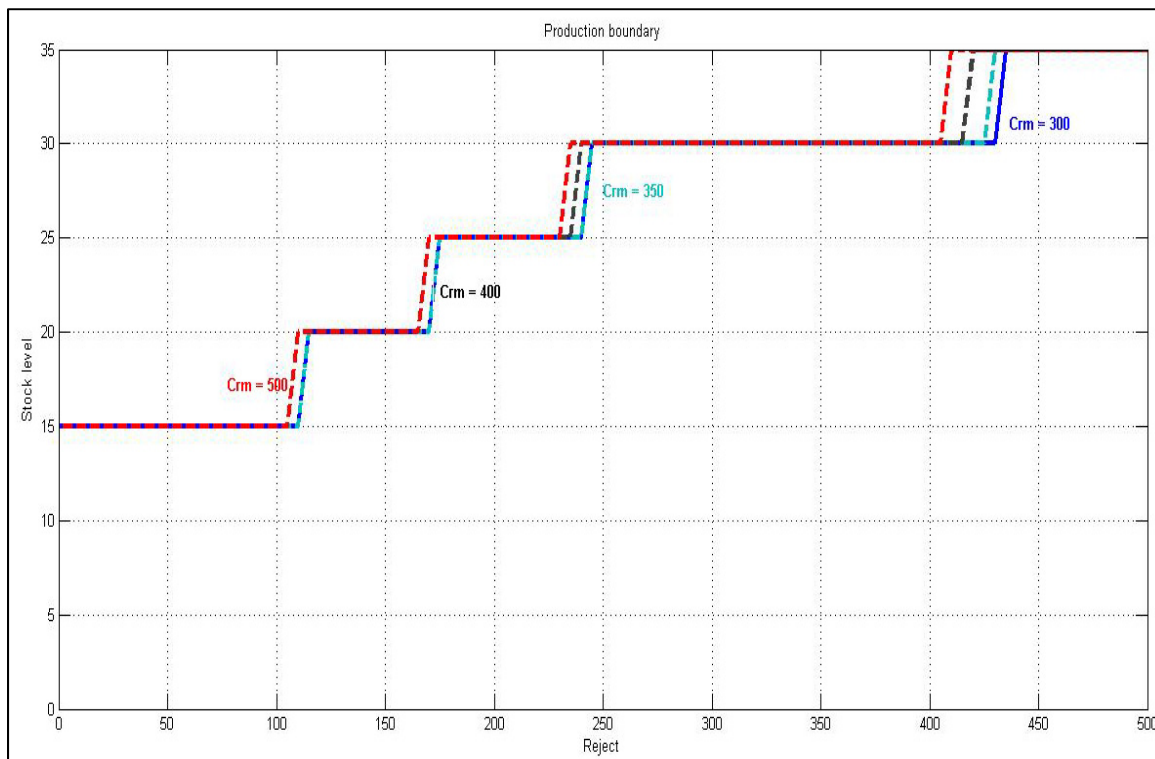


**Figure 4.14 Variation of preventive maintenance cost-effect on corrective maintenance policy**



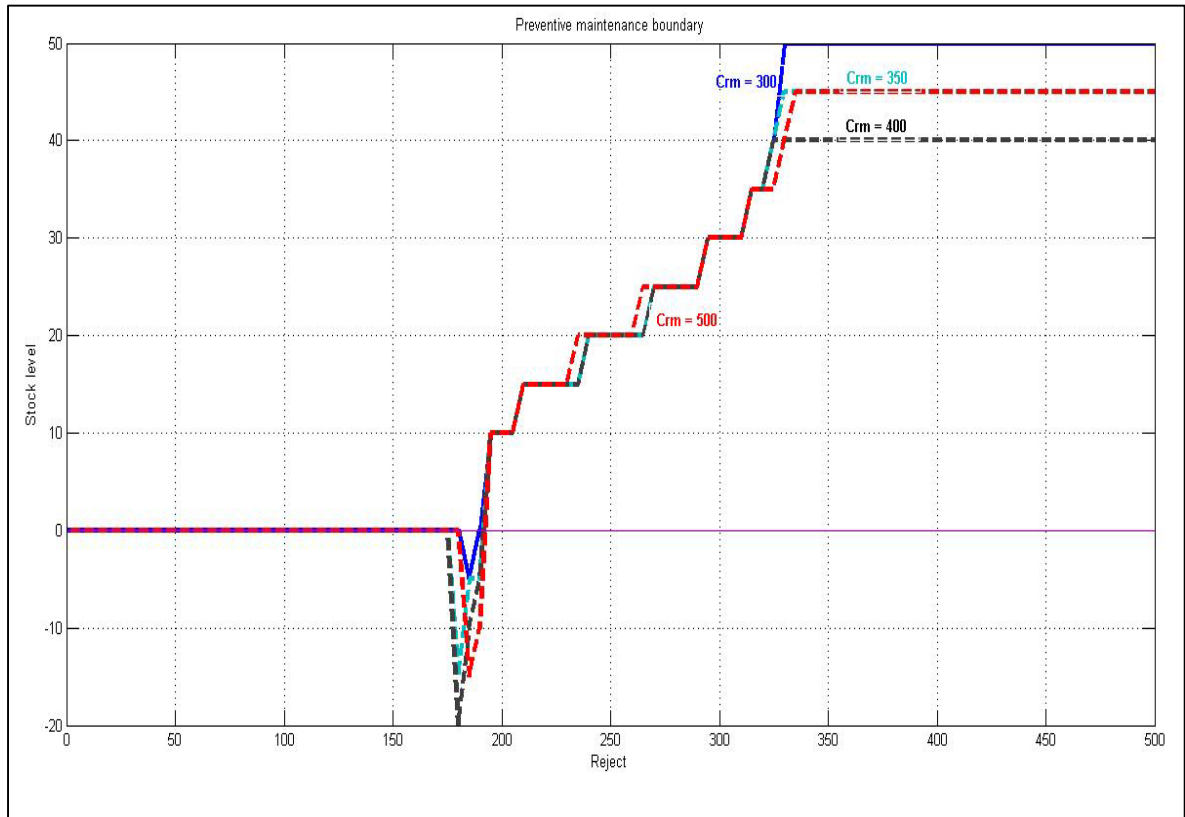
### 4.3 Variation of raw material cost

Fig. 4.15 illustrates the maximum number of flawless products to hold for the four cost values  $c_{pr} = 300, 350, 400$  and  $500$ . The results show that variations of the raw material costs affect the production policy but have no effect on the threshold value. By increasing the raw material cost, the quantity of defective products decreases at the optimal stock level without having any impact on the production rate.



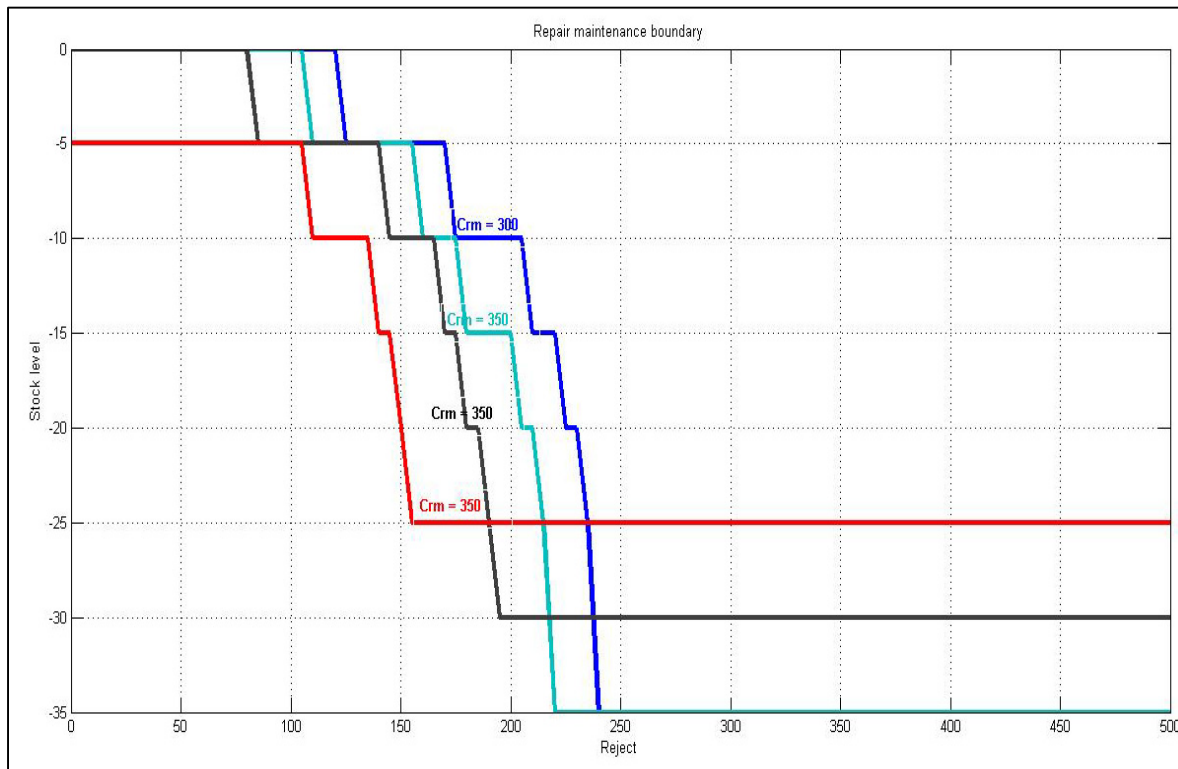
**Figure 4.15 Variation of raw material cost-effect on corrective maintenance policy**

By increasing the raw material as presented in Fig. 4.16, there is almost no change in the preventive maintenance policy.



**Figure 4.16 Variation of raw material cost - effect on preventive maintenance policy**

Fig. 4.17 illustrates the fact that by increasing the raw material cost, we decrease the quantity of the defective products.



**Figure 4.17 Variation of raw material cost - effect on corrective maintenance policy**

#### 4.9 Conclusion and future work

This paper covers the production planning and control of a single product involving combined manufacturing and remanufacturing operations subject to defective products used as system feedback. The model developed in this paper differs from similar research projects in that simultaneously, the defective products are reused in the same (re)manufacturing system, and are further considered as feedback into the optimal model for maintenance and production planning, rather than only considering an age-dependent machine failure. The quantity of defective products is considered. We obtain a near-optimal control policy for the system through numerical techniques. The results obtained allow us to consider that rather than just trying to produce at a negative stock, we could only perform maintenance actions due to the overall cost. In this paper, we illustrate the opportunistic maintenance actions performed during preventive maintenance, and also decrease the mean time to repair, knowing that the stock level could not satisfy the final product demand. We integrate in this new model the effect of limited and expensive raw material demand in production and maintenance planning in order to minimize the overall cost.

In Njike et al. (2011), we presented a new model in which the system's feedback is the quantity of defective products, considering that defective products are a consequence of the deterioration of global manufacturing system. Instead of taking into account machine failure and human error separately, we consider a product defect as being the consequence of a combined failure; this consideration allows us to be more realistic by merging all failure parameters into a single one. A new stochastic control model which focuses on defective products, inventory and backlog has been developed and extended in this paper, as we consider the same quantity of defective products as the second input of our (re)manufacturing system with two types of inputs and one type of output. This allows a reduction of the highest raw material costs and an increase in profitability. This consideration allows us to consider the applicability of the developed model only on a (re)manufacturing system with single-product such as pellet plants or concentrator units, for mining companies. Our future research will be focusing on the same (re)manufacturing system, but with multiple products, instead of a single product, as considered in this paper.

## Appendix A

Mode 1:

$$\begin{aligned} \rho V(1, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(1, x, y) \left( u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot) \right) + \frac{\partial}{\partial y} V(1, x, y) (u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \right. \\ & + \lambda_{11}(\cdot) [V(1, x, y) - V(1, x, y)] + \lambda_{12}(\cdot) [V(2, x, y) - V(1, x, y)] + \\ & \left. + \lambda_{1r}(\cdot) [V(r, x, y) - V(1, x, y)] + \lambda_{1p}(\cdot) [V(p, x, y) - V(1, x, y)] \right\} \\ \rho V(1, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(1, x, y) (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} V(1, x, y) (u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \right. \\ & \left. + \lambda_{12}(\cdot) [V(2, x, y) - V(1, x, y)] + \lambda_{1r}(\cdot) [V(r, x, y) - V(1, x, y)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Mode 2:

$$\begin{aligned} \rho V(2, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(2, x, y) (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} V(2, x, y) (u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \right. \\ & + \lambda_{21}(\cdot) [V(1, x, y) - V(2, x, y)] + \lambda_{22}(\cdot) [V(2, x, y) - V(2, x, y)] + \\ & \left. + \lambda_{2r}(\cdot) [V(r, x, y) - V(2, x, y)] + \lambda_{2p}(\cdot) [V(p, x, y) - V(2, x, y)] \right\} \\ \rho V(2, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(2, x, y) (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} V(2, x, y) (u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \right. \\ & \left. + \lambda_{2p}(\cdot) [V(p, x, y) - V(2, x, y)] + \lambda_{2r}(\cdot) [V(r, x, y) - V(2, x, y)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Mode r:

$$\begin{aligned} \rho V(r, x, y) = \min_{u, v} & \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(r, x, y) (-d_p + d_{RM}(\cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} V(r, x, y) (-d_{RM}(\cdot)) \right. \\ & \left. + \lambda_{r1}(\cdot) [V(1, x, y) - V(r, x, y)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Mode p:

$$\rho V(p, x, y) = \min_{u, v} \left\{ \psi^k(x, y, u, v) + \frac{\partial}{\partial x} V(p, x, y) (-d_p + d_{RM}(\cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} V(p, x, y) (-d_{RM}(\cdot)) + \lambda_{p1}(\cdot) [V(1, x, y) - V(p, x, y)] \right\} \quad (\text{A.4})$$

By replacing the first-order partial derivative of the value function and the length  $(h_x, h_y)$  of the finite difference interval of states variables  $x$  and  $y$ .  $V(\alpha, x, y)$  is approximated by  $V_x(\alpha, x, y)$  and  $V_y(\alpha, x, y)$ .

$$V_x(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x + h_x, y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dx}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_x} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x - h_x, y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$V_y(\alpha, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y + h_y) - V(\alpha, x, y)] & \text{if } \frac{dy}{dt} \geq 0. \\ \frac{1}{h_y} [V(\alpha, x, y) - V(\alpha, x, y - h_y)] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

We finally obtain the following approximated value functions:

Mode 1:

$$V_h(1, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^1}{q_1(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_1(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_1(\cdot)}} \begin{bmatrix} p(1^+, 1) V_h(1, x + h_x, y) \\ + p(1^-, 1) V_h(1, x - h_x, y) \\ + p(1, 1^+) V_h(1, x, y + h_y) \\ + p(1, 1^-) V_h(1, x, y - h_y) \\ + p(1, r) V_h(r, x, y) \\ + p(1, 2) V_h(2, x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Mode 2:

$$V_h(2, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^2}{q_2(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_2(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_2(\cdot)}} \begin{bmatrix} p(2^+, 2) V_h(2, x + h_x, y) \\ + p(2^-, 2) V_h(2, x - h_x, y) \\ + p(2, 2^+) V_h(2, x, y + h_y) \\ + p(2, 2^-) V_h(2, x, y - h_y) \\ + p(2, r) V_h(r, x, y) \\ + p(2, p) V_h(p, x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Mode r :

$$V_h(r, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^r}{q_r(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_r(\cdot)}} \begin{bmatrix} p(r^+, r) V_h(r, x + h_x, y) \\ + p(r^-, r) V_h(r, x - h_x, y) \\ + p(r, r^+) V_h(r, x, y + h_y) \\ + p(r, r^-) V_h(r, x, y - h_y) \\ + p(r, 1) V_h(1, x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Mode p :

$$V_h(p, x, y) = \frac{c^+ y^+ + c^- y^- + c^p}{q_p(\cdot) \left[ 1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)} \right]} + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{q_p(\cdot)}} \begin{bmatrix} p(p^+, p) V_h(p, x + h_x, y) \\ + p(p^-, p) V_h(p, x - h_x, y) \\ + p(p, p^+) V_h(p, x, y + h_y) \\ + p(p, p^-) V_h(p, x, y - h_y) \\ + p(p, 1) V_h(1, x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Where:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{|u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)|}{h_x} + \frac{|u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)|}{h_y} + \lambda_{12}(\cdot) + \lambda_{1r}(\cdot) \\ q_2 = \frac{|u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)|}{h_x} + \frac{|u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)|}{h_y} + \lambda_{2r}(\cdot) + \lambda_{2p}(\cdot) \\ q_r = \frac{|-d_p + d_{RM}(\cdot)|}{h_x} + \frac{|-d_{RM}(\cdot)|}{h_y} + \lambda_{r1}(\cdot) \\ q_p = \frac{|-d_p + d_{RM}(\cdot)|}{h_x} + \frac{|-d_{RM}(\cdot)|}{h_y} + \lambda_{p1}(\cdot) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{cases}
 p(1^+, 1) = \begin{cases} \frac{u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)}{h_x q_1} & \text{if } (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(1^-, 1) = \begin{cases} \frac{d_p - d_{RM}(\cdot) - u(\cdot)}{h_x q_1} & \text{if } (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(2^+, 2) = \begin{cases} \frac{u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)}{h_x q_2} & \text{if } (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(2^-, 2) = \begin{cases} \frac{d_p - d_{RM}(\cdot) - u(\cdot)}{h_x q_2} & \text{if } (u(\cdot) - d_p + d_{RM}(\cdot)) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{cases}
 p(1, 1^+) = \begin{cases} \frac{u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)}{h_y q_1} & \text{if } ((u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(2, 2^+) = \begin{cases} \frac{u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)}{h_y q_2} & \text{if } ((u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(1, 1^-) = \begin{cases} \frac{-u(\cdot) + d_{RM}(\cdot)}{h_y q_1} & \text{if } ((u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) < 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 p(2, 2^-) = \begin{cases} \frac{-u(\cdot) + d_{RM}(\cdot)}{h_y q_2} & \text{if } ((u(\cdot) - d_{RM}(\cdot)) < 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
p(r^+, r) = \begin{cases} \frac{-d_p + d_{RM}(\cdot)}{h_x q_r} & \text{if } (-d_p + d_{RM}(\cdot)) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(r^-, r) = \begin{cases} \frac{d_p - d_{RM}(\cdot)}{h_x q_r} & \text{if } (-d_p + d_{RM}(\cdot)) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(p^+, p) = \begin{cases} \frac{-d_p + d_{RM}(\cdot)}{h_x q_p} & \text{if } (-d_p + d_{RM}(\cdot)) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(p^-, p) = \begin{cases} \frac{d_p - d_{RM}(\cdot)}{h_x q_p} & \text{if } (-d_p + d_{RM}(\cdot)) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
p(r, r^+) = \begin{cases} \frac{-d_{RM}(\cdot)}{h_y q_r} & \text{if } ((-d_{RM}(\cdot)) \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(p, p^+) = \begin{cases} \frac{-d_{RM}(\cdot)}{h_y q_p} & \text{if } ((-d_{RM}(\cdot)) \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(r, r^-) = \begin{cases} \frac{+d_{RM}(\cdot)}{h_y q_r} & \text{if } ((-d_{RM}(\cdot)) < 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
p(p, p^-) = \begin{cases} \frac{+d_{RM}(\cdot)}{h_y q_p} & \text{if } ((-d_{RM}(\cdot)) < 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

#### 4.10 References

- Aghezzaf, E.H., Najid, N.M., 2008. Integrated production planning and preventive maintenance in deteriorating production systems. *Information Sciences*, 178(17), 3382-3392.
- Berko-Boateng, V., Azar, J., De Jong, E., Yander, G.A., 1993. Asset Recycle Management: A Total Approach to Product Design for the Environment. *Proc. Int'l Symp. On Electronics and the Environment*, Arlington, VA, 19-31.
- Chiu, S.W., Ting, C.K., and Chiu, P.Y.S., 2007. Optimal production lot sizing with rework, scrap rate, and service level constraint. *Mathematical and Computer Modeling*, 46, 535-549.
- Chiu, Y.P., 2003. Determining the optimal lot size for the finite production model with random non-conforming rate, the rework process, and backlogging. *Engineering Optimization*, 35, 427- 437.
- Dehayem, N.F.I., Kenné, J.-P., Gharbi, A., 2009. Hierarchical decision making in production and repair/replacement planning with imperfect repairs under uncertainties. *European Journal of Operational Research*, 198(1), 173-189.
- Gershwin, S.B., 2004. *Manufacturing systems engineering*. Prentice Hall.
- Gershwin, S.B., Kim, J., 2008. Analysis of long flow lines with quality and operational failures. *IIE Transactions*, 40, 284-296.
- Gershwin, S.B., Kim, J., 2005. Quality/Quantity modeling and analysis of production lines subject to uncertainty phase I, Final report, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts.
- Gharbi, A., Pellerin, R., Sadr, J., 2008. Production rate control for stochastic remanufacturing systems. *International Journal of Production Economics*, 112(1), 37- 47.
- Guide, V.D., Jayaraman, V., Srivastava, R., Benton, W.C., 2000. Supply-chain management for recoverable manufacturing systems. *Interfaces*, 30(3), 125-142.
- Hajji, A., Gharbi, A., Kenné, J.-P., 2009. Joint replenishment and manufacturing activities control in two-stage unreliable supply chain. *International Journal of Production Research*, 47(12), 3231-3251.
- Hayek, P.A., Salameh, M.K., 2001. Production lot sizing with the reworking of imperfect quality items produced. *Production Planning & Control*, 12, 584-590.

Inderfurth, K., Kovalyov, M.Y., Ng, C.T., Werner, F., 2007. Cost minimizing scheduling of work and rework processes on a single facility under deterioration of reworkables. *International Journal of Production Economics*, 105, 345-356.

Jaber, M.Y., 2006. Lot sizing for imperfect production process with quality corrective interruptions and improvements, and reduction in setups. *Computers and Industrial Engineering*, 51, 781-790.

Kenné, J.P., Boukas, E.K., 2003. Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 9, 66-82.

Kenné, J.P., Nkengoue, L. J., 2008. Simultaneous control of production, preventive and corrective maintenance rates of a failure-prone manufacturing system". *Applied Numerical Mathematics*, 8, 180-194.

Kenné, J-P., Dejax, P., Gharbi, A. 2011. Production planning of a hybrid manufacturing–remanufacturing system under uncertainty within a closed-loop supply chain. *International Journal of Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2010.10.026.

Kim, J., Gershwin, S.B., 2005. Integrated quality and quantity modeling of a production line. *OR Spectrum*, 27, 287-315.

Kushner, H.J., Dupuis, J., 1992. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer-Verlag.

Ouali, M.-S., Daoud, A.-K., Gharbi, A., 1999. A simulation model for opportunistic maintenance strategies" In 7th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, 1, 703-8, 1999. *Proceedings ETFA '99* (Cat. No.99TH8467).

Njike, A., Pellerin, R., Kenné, J.-P., 2009. Simultaneous control of maintenance and production rates of manufacturing system with defective products. *Journal of Intelligent Manufacturing*, published Online First, 30 October 2009, DOI: 10.1007/s10845-009-0354-y.

Njike, A., Pellerin, R., Kenné, J.-P., 2011. Maintenance/production planning with interactive feedback of product quality. *Journal of Quality in maintenance engineering*, 17( 3), 281-298.

Panagiotidou, S., Tagaras, G., 2007. Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distributions. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 329-353.

Pellerin, R., Sadr, J., Gharbi, A., Malhamé, R.. 2009. A production rate control policy for stochastic repair and remanufacturing systems. *International Journal of Production Economics*. 121(1), 39-48.

Salameh, M.K., Jaber, M.Y. 2000. Economic production quantity model for items with imperfect quality". *International Journal of Production Economics*, 64, 59-64.

Wang, W.Y., 2004. Integrated inspection strategy model with inspection errors and positive inspection time lengths. *Journal of Statistics & Management Systems*, 7, 335-348.



## CONCLUSION

Cette thèse a proposé des modèles d'optimisation dans lesquels la planification intégrée de la maintenance et de la production tient compte, d'une part, de tous les facteurs de défaillance d'un système de production, et d'autre part, des contraintes d'opération en termes de mauvaise utilisation des actifs, rareté de la demande en matière première, coûts du cycle de vie des actifs de production. Elle a également permis de mettre sur pied des politiques de maintenance et de production facilement adaptables à plusieurs types de système de production dans lesquels les quantités de rejets sont enregistrées. Les modèles proposés sont ceux permettant de se rapprocher d'une majorité des intrants d'un système de production.

Dans la première partie de cette thèse, une présentation des systèmes de production a été abordée, ainsi que les différents travaux effectués sur les différents types de maintenance et l'intégration maintenance/ production facilitant les meilleures prises de décision.

La deuxième partie aborde le problème de choix de paramètres pouvant refléter l'état réel du système de production aux différents modes opérationnels. La considération des quantités rejetées comme étant un élément regroupant tous les facteurs de défaillance du système permet de mettre sur pied des politiques de maintenance/ production reflétant le vécu réel du système de production. Elle a donc permis de savoir « quand produire » et « quand maintenir l'actif » au moindre coût. Une étude comparative avec des modèles qui ne tiennent compte que de l'âge de l'actif a permis de constater une réduction des coûts totaux de production.

La troisième partie de cette thèse a permis de développer un modèle optimale permettant d'élaborer des politiques de maintenance et de production incluant l'ensemble des facteurs de défaillance des actifs tels que l'âge et les erreurs humaines, ceci en contrôlant en temps réel l'état du système de production à l'aide des quantités de produits non-conformes, en tenant compte des coûts liés aux inventaires, aux ruptures de stock et également les coûts associés aux maintenances préventive et corrective.

La dernière partie de cette thèse présente un modèle optimale de recyclage des produits non conformes afin de palier au problème de rareté de matière première; ce modèle tient compte de l'ensemble des facteurs de défaillance caractérisé par les quantités de produits non-conformes qui servent de rétroaction dans le système de commande. Il tient aussi compte des coûts de mise en inventaire, de rupture de stock, de maintenance corrective et préventive. Il permet également d'y pratiquer la maintenance opportuniste durant les travaux préventifs et oblige les actions de maintenance préventive même à des niveaux de stock négatif, ce qui renforce le fait que rien ne sert de produire lorsque les produits obtenus seront tous rejetés, indépendamment du niveau de stock. Ceci a permis une réduction significative des coûts de production comparée à ceux des précédents travaux de recherche en maintenance basée sur l'âge qui systématiquement ne recommandait pas de maintenir l'actif de production lorsque le niveau de stock est négatif.

Cette thèse a globalement permis d'élaborer des politiques de commande optimale basées sur des processus aléatoires dans lesquels les états futurs dépendent des états présents et passés. Elle permet d'avoir une optimisation des systèmes de production basée sur la réduction des coûts de mise en inventaire et de rupture de stock, en faisant interagir le taux de rejet et le taux de production. Ceci, dans l'optique de faire un suivi du système durant son cycle de vie et particulièrement dans sa phase critique de fonctionnement; phase durant laquelle une considération du taux de rejet est effectuée.

Bien que le processus sans mémoire puisse intervenir séparément pour chaque mode de fonctionnement, la décomposition du fonctionnement de l'ensemble des actifs de production en plusieurs modes opérationnels permet un suivi de leur vécu. La considération de l'état présent intégrant le passé de l'actif nous permet d'obtenir un processus à mémoire sur l'ensemble du système de production; ce qui permet de planifier conjointement de façon optimale quand produire et quand maintenir l'actif de production à moindre coût.

Sur le plan technologique, cette thèse a permis de développer des modèles de planification optimale qui intègrent conjointement plusieurs éléments tels que : la précision d'informations

sur la disponibilité des actifs, l'utilisation rationnelle des actifs, l'adaptation de la demande en matière première en fonction des quantités de produits non-conformes récupérés.

Elle a permis également de résoudre dans l'industrie le problème du manque d'outils permettant d'intégrer le vécu des machines en déterminant en temps réel leurs états de santé globale dans les prises de décisions sur l'ensemble des actifs.

Les travaux réalisés dans cette thèse s'appliquent à des industries possédant une main d'œuvre précaire et où le taux de roulement très élevé, occasionne une baisse de disponibilité des actifs. Les modèles optimaux développés permettent à ce type d'industrie de contrôler non seulement l'âge des actifs, mais aussi leur mauvaise utilisation due aux erreurs humaines à différents niveaux de gestion du système de production.

Comme extension des travaux effectués dans cette thèse, plusieurs axes de recherche peuvent constituer les travaux futurs :

- 1- Pour le premier modèle optimale dans lequel les actifs sont décomposés en plusieurs modes opérationnels, nous devons développer un modèle d'estimation des taux de rejets qui sera intégré au modèle optimale stochastique de planification intégrée maintenance/production. Ce taux de rejet estimé permettra de mesurer les compétences réelles de tous les facteurs ayant de l'influence sur la production tels que l'équipement, l'humain et l'environnement.
- 2- L'approche utilisée pour le chapitre 3 élargie le concept de politique de seuil critique à la quantité de produits défectueux combinée à des stratégies de maintenance préventive et corrective. La politique de contrôle obtenue a une structure bang bang et est complètement connue pour des paramètres donnés. Ayant considéré le système de production étudié comme un seul actif, le but de notre prochain travail sera de considérer que ce système de production est constituée de plusieurs actifs. Ceci nous permettrait

d'obtenir une politique de contrôle optimal basée de produits défectueux pour un système de production à multiple machines.

- 3- Un modèle de contrôle et d'estimation des quantités rejetés reste à développer pour le modèle présenté au chapitre 3; ce modèle permettra non seulement de contrôler la qualité et l'efficacité du système mais il permettra aux gestionnaires de ne pas subir les rejets, ce qui permettrait d'avoir un modèle optimal pour un système de production à multiples modes opérationnels caractérisant le système durant tout son cycle de vie et assurera une prédiction à moyen et long termes de la disponibilité des actifs de production.
- 4- D'autres axes de recherche comme l'élaboration d'un modèle de récupération totale des quantités rejetées sera développé dans le futur afin d'éviter toute perte de production et basé ce modèle sur plusieurs actifs en cascade permettant une production optimale de produits différents. Pour ainsi mieux adapter nos travaux sur d'autres systèmes de production, un modèle optimal basé sur des systèmes à multiples produits dans lequel nous tenons compte de toutes les défaillances possibles et les contraintes de production associées.

## ANNEXE I

### PROGRAMME 1 MATLAB

#### %Affectation des valeurs

```
clear;
Umax1=0.5;%Taux de production max au mode 1
Umax2=0.4;%Taux de production max au mode 2
Umin=0;%Taux de production min
Xmax=3;%Quantité de rejet max
Xmin=1;%Quantité de rejet min
K1=0.02;
K2=0.03;
k=0.05;
Ymax=15;%stock max
Ymin=-5;%stock min
d=0.3;%Taux de demande
q12=0.05;
q13=0.02;
q31=0.4;
q41=0.25;
Wmin=0;
Wmax=0.4;
c_pos=1; %Cout de penalisation de la deviation de la valeur 0 de l'etat du stock
c_neg=15; %Cout de penalisation de la deviation de l'etat du stock de la valeur 0
c1=0; %cout de penalisation de la machine a l'etat1
c2=3; %cout de penalisation de la machine a l'etat2
c3=10; %cout de penalisation de la machine a l'etat3
c4(1)=0; %cout de penalisation de la machine a l'etat4
c4(2)=5;
```

```

Ta=0.03; %0.03; %taux d'actualisation
hx=0.1; %Pas suivant le rejet
hy=0.5; %Pas suivant le stock
%Initialisation des vecteurs
Tp=[];
Tr=[];
Vv1=[];
Vv2=[];
Vv3=[];
Vv4=[];
Lx=(1+(Xmax-Xmin)/hx);%Largeur de la grille suivant le taux de rejet x
Ly=(1+(Ymax-Ymin)/hy);%Largeur de la grille suivant le stock y
for i=1:Ly
    for j=1:Lx
        Tp1(i,j)=0; %Taux de production au mode1
        Tr1(i,j)=0; %rejet au mode1
        Tp2(i,j)=0; %Taux de production au mode2
        Tr2(i,j)=0; %rejet au mode2
        Wmp(i,j)=0; %Commande de renvoi en maintenance preventive
        Vv1(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode1
        Vv2(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode2
        Vv3(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode3
        Vv4(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode4
        Vp1(i,j)=0;%Initialisation de la Fonction Valeur precedente au 1
        Vp2(i,j)=0;%Initialisation de la Fonction Valeur precedente au 2
        Vp3(i,j)=0;%Initialisation de la Fonction Valeur precedente au 3
        Vp4(i,j)=0;%Initialisation de la Fonction Valeur precedente au 4
        V1(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode1
        V2(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode2
        V3(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode3

```

```

    V4(i,j)=0; %Initialisation de la Fonction valeur actuelle au mode4
end
U1(1)=0; % Pas de production
U1(2)=d;%Production à la demande
U1(3)=Umax1;%Production au taux max
U2(1)=0; % Pas de production
U2(2)=d;%Production à la demande
U2(3)=Umax2;%Production au taux max
f(1)=K1*Umax1;
f(2)=K2*Umax2;
f(3)=0;
W(1)=Wmin;
W(2)=Wmax;
end
C1max=0; C1min=10e+5;
%boucle d'iteration
Epsi=0.01% Precision
Er=50000;% while Er>Epsi
while Er>Epsi
    C1max=0; C1min=10e+10;
    for i=1:Ly
        for j=1:Lx
            Vpp1(i,j)=Vp1(i,j);
            Vpp2(i,j)=Vp2(i,j);
            Vpp3(i,j)=Vp3(i,j);
            Vpp4(i,j)=Vp4(i,j);
        end
    end
end
% Er=0;
% politique d'evaluation

```



```

for i=1:Ly
    Y(i)=Ymin+(i-1)*hy;
    for j=1:Lx
        X(j)=Xmin+(j-1)*hx;
        U11=Tp1(i,j);
        U12=Tp2(i,j);
        U21=Tr1(i,j);
        U22=Tr2(i,j);
        %q12(j)=0.4*(1-exp(-0.02*X(j)));
        %q23(j)=0.4*(1-exp(-0.02*X(j)));
        q23(j)=0.3*X(j);
        %calcul des valeurs de C1max et C1min
        [Vv1(i,j) Vv2(i,j) Vv3(i,j) Vv4(i,j)]
=CFV(Y(i),X(j),K1,K2,k,q12,q13,q23(j),q31,q41,Tp1(i,j),Tp2(i,j),Tr1(i,j),Tr2(i,j),Wmp(i,j),
d,j,i,Epsi,hx,hy,Lx,Ly,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c_pos,c_neg,c1,c2,c3,c4(1),Ta);
        Vp1(i,j)=Vv1(i,j);
        Vp2(i,j)=Vv2(i,j);
        Vp3(i,j)=Vv3(i,j);
        Vp4(i,j)=Vv4(i,j);
        if abs(Vv1(i,j)-Vpp1(i,j))>C1max
            C1max=abs(Vv1(i,j)-Vpp1(i,j));
        end
        if abs(Vv1(i,j)-Vpp1(i,j))<C1min
            C1min=abs(Vv1(i,j)-Vpp1(i,j));
        end
        if abs(Vv2(i,j)-Vpp2(i,j))>C1max
            C1max=abs(Vv2(i,j)-Vpp2(i,j));
        end
        if abs(Vv2(i,j)-Vpp2(i,j))<C1min
            C1min=abs(Vv2(i,j)-Vpp2(i,j));

```

```

end
if abs(Vv3(i,j)-Vpp3(i,j))>C1max
    C1max=abs(Vv3(i,j)-Vpp3(i,j));
end
if abs(Vv3(i,j)-Vpp3(i,j))<C1min
    C1min=abs(Vv3(i,j)-Vpp3(i,j));
end
if abs(Vv4(i,j)-Vpp4(i,j))>C1max
    C1max=abs(Vv4(i,j)-Vpp4(i,j));
end
if abs(Vv4(i,j)-Vpp4(i,j))<C1min
    C1min=abs(Vv4(i,j)-Vpp4(i,j));
end

end % fin de la politique d'evaluation pour j=1:Ly
end % fin de la politique d'evaluation pour i=1:Lx
Cmax=(Ta/(1-Ta))*C1max;
Cmin=(Ta/(1-Ta))*C1min;
Er=abs(Cmax-Cmin)
%Politique d'amelioration
for i=1:Ly
    Y(i)=Ymin+(i-1)*hy;
    for j=1:Lx
        X(j)=Xmin+(j-1)*hx;
        q23(j)=0.04*X(j);
        Vp1max=100000;
        Vp2max=100000;
        Vp3max=100000;
        Vp4max=100000;
        for Kp=1:3
            Up1(i,j,Kp)=U1(Kp);

```

```

Up2(i,j,Kp)=U2(Kp);
for Kr=1:3
    Ur1(i,j,Kr)=f(Kr);
    Ur2(i,j,Kr)=f(Kr);
    for Kmp=1:2
        Wp(i,j)=W(Kmp);
        c4(i,j)=c4(Kmp);
        [V11(i,j) V22(i,j) V33(i,j) V44(i,j)]
=CFV(Y(i),X(j),K1,K2,k,q12,q13,q23(j),q31,q41,Up1(i,j),Up2(i,j),Ur1(i,j),Ur2(i,j),Wp(i,j),d,
j,i,Epsi,hx,hy,Lx,Ly,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c_pos,c_neg,c1,c2,c3,c4(i,j),Ta);
        if V11<Vp1max
            Vp1max=V11(i,j);
            V1(i,j)=V11(i,j);
            Tp1(i,j,Kp)=Up1(i,j);
            Tr1(i,j,Kr)=Ur1(i,j);
            Wmp(i,j,Kmp)=Wp(i,j);
        end
        if V22<Vp2max
            Vp2max=V22(i,j);
            V2(i,j)=V22(i,j);
            Tp2(i,j)=Up2(i,j);
            Tr2(i,j)=Ur2(i,j);
            Wmp(i,j)=Wp(i,j);
        end
        if V33<Vp3max
            Vp3max=V33(i,j);
            V3(i,j)=V33(i,j);
            Wmp(i,j)=Wp(i,j);
        end
        if V44<Vp4max

```

```

        Vp4max=V44(i,j);
        V4(i,j)=V44(i,j);
        Wmp(i,j)=Wp(i,j);
    end
    end %for Kmp
    end % for Kr
    end %for Kp
    end %for j
    end %for i
    end
    %end %for while

```

% Affichage des resultats

```

figure(1);
surf(X,Y,V1);
xlabel('Quantité de rejet (X)');
ylabel('Niveau de stock (Y)');
zlabel('V1')
title('Représentation de la fonction valeur au mode1');
grid;
figure(2);
surf(X,Y,V2);
xlabel('Quantité de rejet (X)');
ylabel('Niveau de stock (Y)');
zlabel('V2')
title('Représentation de la fonction valeur au mode2');
grid;
figure(3);
surf(X,Y,V3);
xlabel('Quantité de rejet (X)');

```

```
ylabel('Niveau de stock (Y)');  
zlabel('V3')  
title('Représentation de la fonction valeur au mode3');  
grid;  
figure(4);  
surf(X,Y,V4);  
xlabel('Quantité de rejet (X)');  
ylabel('Niveau de stock (Y)');  
zlabel('V4')  
title('Représentation de la fonction valeur au mode4');  
grid;
```

## ANNEXE II

### PROGRAMME 1.1 MATLAB

```
function[Vv1,Vv2,Vv3,Vv4]=CFV(y,x,K1,K2,k,q12,q13,q23,q31,q41,Tp1,Tp2,Tr1,Tr2,Wm
p,d,j,i,Epsi,hx,hy,Lx,Ly,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c_pos,c_neg,c1,c2,c3,c4,Ta);
VV=[];
VV(1)=Vp1(i,j);
VV(2)=Vp2(i,j);
VV(3)=Vp3(i,j);
VV(4)=Vp4(i,j);
for i=1:Ly
    if i==1
        for j=1:Lx
            if j==1
                VV(4)=2*Vp1(i+1,j)-Vp1(i,j);
                VV(5)=2*Vp2(i+1,j)-Vp2(i,j);
                VV(6)=2*Vp3(i+1,j)-Vp3(i,j);
                VV(7)=2*Vp4(i+1,j)-Vp4(i,j);
                VV(10)=2*Vp1(i,j+1)-Vp1(i,j);
                VV(11)=2*Vp2(i,j+1)-Vp2(i,j);
                VV(09)=2*Vp3(i,j+1)-Vp3(i,j);
                VV(08)=2*Vp4(i,j+1)-Vp4(i,j);
                VV(12)=Vp1(i,j+1);
                VV(13)=Vp2(i,j+1);
                VV(14)=Vp3(i,j+1);
                VV(15)=Vp4(i,j+1);
            else
                %end
            if j==Lx
                VV(4)=2*Vp1(i+1,j)-Vp1(i,j);
```

```

VV(5)=2*Vp2(i+1,j)-Vp2(i,j);
VV(6)=2*Vp3(i+1,j)-Vp3(i,j);
VV(7)=2*Vp4(i+1,j)-Vp4(i,j);
VV(10)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(09)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);
VV(08)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);
VV(12)=Vp1(i,j-1);
VV(13)=Vp2(i,j-1);
VV(14)=Vp3(i,j-1);
VV(15)=Vp4(i,j-1);
%end % if j==Ly
else
    VV(4)=Vp1(i+1,j);
    VV(5)=Vp2(i+1,j);
    VV(6)=Vp3(i+1,j);
    VV(7)=Vp4(i+1,j);
    VV(10)=Vp1(i,j+1);
    VV(11)=Vp2(i,j+1);
    VV(09)=Vp3(i,j+1);
    VV(08)=Vp4(i,j+1);
    VV(12)=Vp1(i,j-1);
    VV(13)=Vp2(i,j-1);
    VV(14)=Vp3(i,j-1);
    VV(15)=Vp4(i,j-1);
end
end % for j=1:Ly
end % for i==1
% end
else

```

```

if i==Ly
for j=1:Lx
    if j==1
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
        VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
        VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
        VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
        VV(10)=2*Vp1(i,j+1)-Vp1(i,j);
        VV(11)=2*Vp2(i,j+1)-Vp2(i,j);
        VV(09)=2*Vp3(i,j+1)-Vp3(i,j);
        VV(08)=2*Vp4(i,j+1)-Vp4(i,j);
        VV(12)=Vp1(i,j+1);
        VV(13)=Vp2(i,j+1);
        VV(14)=Vp3(i,j+1);
        VV(15)=Vp4(i,j+1);
    %end % j==1
    else
        if j==Lx
            VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
            VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
            VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
            VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
            VV(10)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
            VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
            VV(09)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);
            VV(08)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);
            VV(12)=Vp1(i,j-1);
            VV(13)=Vp2(i,j-1);
            VV(14)=Vp3(i,j-1);
            VV(15)=Vp4(i,j-1);

```

```

% end % j==Ly
else
    VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
    VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
    VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
    VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
    VV(10)=Vp1(i,j+1);
    VV(11)=Vp2(i,j+1);
    VV(09)=Vp3(i,j+1);
    VV(08)=Vp4(i,j+1);
    VV(12)=Vp1(i,j-1);
    VV(13)=Vp2(i,j-1);
    VV(14)=Vp3(i,j-1);
    VV(15)=Vp4(i,j-1);
end % if i==Lx
end
end
%end

else

for j=1:Lx
    if j==1
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
        VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
        VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
        VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
        VV(10)=2*Vp1(i,j+1)-Vp1(i,j);
        VV(11)=2*Vp2(i,j+1)-Vp2(i,j);
        VV(09)=2*Vp3(i,j+1)-Vp3(i,j);

```

```

VV(08)=2*Vp4(i,j+1)-Vp4(i,j);
VV(12)=Vp1(i,j+1);
VV(13)=Vp2(i,j+1);
VV(14)=Vp3(i,j+1);
VV(15)=Vp4(i,j+1);
%j==1
else
if j==Lx
VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
VV(10)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(09)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);
VV(08)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);
VV(12)=Vp1(i,j-1);
VV(13)=Vp2(i,j-1);
VV(14)=Vp3(i,j-1);
VV(15)=Vp4(i,j-1);
%end % j==Ly
else
VV(4)=Vp1(i+1,j);
VV(5)=Vp2(i+1,j);
VV(6)=Vp3(i+1,j);
VV(7)=Vp4(i+1,j);
VV(10)=Vp1(i,j+1);
VV(11)=Vp2(i,j+1);
VV(09)=Vp3(i,j+1);
VV(08)=Vp4(i,j+1);

```

```

        VV(12)=Vp1(i,j-1);
        VV(13)=Vp2(i,j-1);
        VV(14)=Vp3(i,j-1);
        VV(15)=Vp4(i,j-1);
    end % for 1:Ly
end % for i=1:Lx
end
end
end
if (y>0)
    g1=c_pos*y;
else
    g1=-c_neg*y;
end

Q1=(1-k)*(abs((Tp1-d))/hy) + q12 + q13;
if (Tp1-d > 0)
    Pp11=(1-k)*(Tp1-d)/(hy*Q1);
    Pn11=0;
else
    Pp11=0;
    Pn11=(1-k)*(d-Tp1)/(hy*Q1);
end
P12=q12/Q1;
P13=q13/Q1;
Vv1=
((g1+c1)/(Q1*(1+Ta/Q1)))
+ (1/(1+Ta/Q1))*(Pp11*VV(10)+Pn11*VV(12)+P12*VV(2)+P13*VV(3));

```

```

g2=c2*(1-k);
Q2=k*Tp2/hx + (1-k)*(abs(Tp2-d))/hy + q23+ Wmp;
P21=(K2*Tp2)/(hx*Q2);
if (Tp2-d > 0)
    Pp22=(1-k)*(Tp2-d)/(hy*Q2);
    Pn22=0;
else
    Pp22=0;
    Pn22=(1-k)*(d-Tp2)/(hy*Q2);
end
P23=q23/Q2;
P24=Wmp/Q2;
Vv2=(g1+g2/(Q2*(1+Ta/Q2)))
+ (1/(1+Ta/Q2))*(P21*VV(5)+Pp22*VV(11)+Pn22*VV(13)+P23*VV(3)+P24*VV(4));
g3=c3;
Q3=d/hy + q31;
P31=d/(hy*Q3);
P32=q31/Q3;
Vv3=(g1+g3/(Q3*(1+Ta/Q3))) + (1/(1+Ta/Q3))*(P31*VV(14)+ P32*VV(1));

g4=c4;
Q4=d/hy + q41;
P41=d/(hy*Q4);
P42=q41/Q4;
Vv4=(g1+g4/(Q4*(1+Ta/Q4))) + (1/(1+Ta/Q4))*(P41*VV(15)+ P42*VV(1));

```

### ANNEXE III

#### PROGRAMME 2 MATLAB

```
%Affectation des valeurs
clear;
Ku1=0.001;
Ku2=0.001;
Ko=0.0001;
Kt=0.00005;
K12=0.01;
K23=0.01;%pente de degradation de la machine
Umax1=1;%Taux de production max au mode 1
Umax2=1;%Taux de production max au mode 2
Umin1=0;%Taux de production min
Umin2=0;%Taux de production min
Xmax=40;%Quantité de rejet max
Xmin=0;%Quantité de rejet min
k1max=0.001;
k2max=0.4;
% r1=0.001;
% r2=0.8;
Wmin=0.00001;
Wmax=0.03;
Wcmin=0.05;
Wcmax=0.075;
X_op=0;
Y_op=0;
fu3=0;
fu4=0;
```

```

Ymax=35;%stock max
Ymin=-5;%stock min
d=0.7; %Taux de demande
q41=0.2;%taux de retour en maintenance preventive
q31=0.05;%taux de retour en maintenance corrective
c_pos=40; %Cout de penalisation de la deviation de la valeur 0 de l'etat du stock
c_neg=50; %Cout de penalisation de la deviation de l'etat du stock de la valeur 0
c1=0; %cout de penalisation de la machine a l'etat1
c2=0; %cout de penalisation de la machine a l'etat2
c3=1000; %cout de penalisation de la machine a l'etat3
c4=20; %cout de penalisation de la machine a l'etat4
Ta=0.0105; %0.03; %taux d'actualisation
hx=5; %Pas suivant le rejet
hy=5; %Pas suivant le stock
%Initialisation des vecteurs
Zx_op=[];
Zy_op=[];
YY=[];
XX=[];
Lx=(1+(Xmax-Xmin)/hx);%Largueur de la grille suivant le taux de rejet x
Ly=(1+(Ymax-Ymin)/hy);%Largeur de la grille suivant le stock y
Tp1=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de production au mode1
Tr1=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de rejet au mode1
Tp2=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de Taux de production au
mode2
Tr2=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de rejet au mode2
Tpp1=zeros(Ly,Lx);
Tpp2=zeros(Ly,Lx);
Wmp=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de Commande de renvoi en
maintenance preventive

```

Wmc=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de Commande de renvoi en maintenance corrective

Wp=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de Commande de renvoi en maintenance preventive

Wc=zeros(Ly,Lx); %initialisation de la matrice des Taux de Commande de renvoi en maintenance corrective

Vv1=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode1

Vv2=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode2

Vv3=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode3

Vv4=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode4

Vp1=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des Valeurs precedentes au 1

Vp2=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des Valeurs precedentes au 2

Vp3=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des Valeurs precedentes au 3

Vp4=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des Valeurs precedentes au 4

Va1=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode1

Va2=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode2

Va3=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode3

Va4=zeros(Ly,Lx); %Initialisation de la matrice des valeurs actuelles au mode4

U1(1)=0; % Non production

U1(2)=d; %Production à la demande

U1(3)=Umax1; %Production au taux max

U2(1)=0; % Non production

U2(2)=d; %Production à la demande

U2(3)=Umax2; %Production au taux max

R1(1)=0.0001;

R1(2)=k1max;

R2(1)=0.0001;

R2(2)=k2max;

W(1)=Wmin;

W(2)=Wmax;

```

Wc(1)=Wcmin;
Wc(2)=Wcmax;
% end
C1max=0; C1min=10e+5;

%boucle d'iteration
it=0;
it_max=50;
Epsi=0.5% Precision
Er=50000;% while Er>Epsi
while ((Er>Epsi)&(it<it_max))
    it=it+1
    C1max=0; C1min=5e+5;
    % politique d'evaluation
    for j=1:Lx
        X=Xmin+(j-1)*hx;
        XX(j)=X;
    for i=1:Ly
        Y=Ymin+(i-1)*hy;
        YY(i)=Y;
        fu1=Ku1*Tp1(i,j);
        fu2=Ku2*Tp2(i,j);
        q12=(0.02+0.026*(1-exp(-Kt*XX(j)^3)));
        q13=(0.00001+0.00499*(1-exp(-Kt*XX(j)^3)));
        q23=(Ko+K23*(1-exp(-Kt*XX(j)^3)));
    %calcul des valeurs de C1max et C1min
    [Vv1 Vv2 Vv3 Vv4]
    =CoV(Lx,Ly,i,j,Y,X,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c_pos,c_neg,c1,c2,c3,c4,q12,q13,q23,q31,q41,Tp1(i
    ,j),Tp2(i,j),Tr1(i,j),Tr2(i,j),Tpp1(i,j),Tpp2(i,j),Wmc(i,j),Wmp(i,j),d,hx,hy,Ta,fu1,fu2,fu3,fu4;
        Va1(i,j)=Vv1;

```

```

Va2(i,j)=Vv2;
Va3(i,j)=Vv3;
Va4(i,j)=Vv4;
    if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))>C1max
        C1max=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
    end
    if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))<C1min
        C1min=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
    end
    if abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j))>C1max
        C1max=abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j));
    end
    if abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j))<C1min
        C1min=abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j));
    end
    if abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j))>C1max
        C1max=abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j));
    end
    if abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j))<C1min
        C1min=abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j));
    end
    if abs(Va4(i,j)-Vp4(i,j))>C1max
        C1max=abs(Va4(i,j)-Vp4(i,j));
    end
    if abs(Va4(i,j)-Vp4(i,j))<C1min
        C1min=abs(Va4(i,j)-Vp4(i,j));
    end
end % fin de la politique d'evaluation pour j=1:Ly
end % fin de la politique d'evaluation pour i=1:Lx
Cmax=(Ta/(1-Ta))*C1max;

```

Cmin=(Ta/(1-Ta))\*C1min;

Er=abs(Cmin-Cmax)

Vp1=Va1;

Vp2=Va2;

Vp3=Va3;

Vp4=Va4;

%Politique d'amelioration

V1\_op=5e+10;

V2\_op=5e+10;

for j=1:Lx

X=Xmin+(j-1)\*hx;

XX(j)=X;

for i=1:Ly

Y=Ymin+(i-1)\*hy;

YY(i)=Y;

q12=(0.02+0.026\*(1-exp(-Kt\*XX(j)^3)));

q13=(0.00001+0.00499\*(1-exp(-Kt\*XX(j)^3)));

q23=(Ko+K23\*(1-exp(-Kt\*XX(j)^3)));

Vp1max=5e+10;

Vp2max=5e+10;

Vp3max=5e+10;

Vp4max=5e+10;

for Kp=1:3

Up1(i,j)=U1(Kp);

Up2(i,j)=U2(Kp);

fu1=Ku1\*Up1(i,j);

fu2=Ku2\*Up2(i,j);

for Kr=1:2

Ur1(i,j)=R1(Kr);

Ur2(i,j)=R2(Kr);

for Kmc=1:2

Wc(i,j)=Wc(Kmc);

for Kmp=1:2

Wp(i,j)=W(Kmp);

Upp1(i,j)=Up1(i,j)-Ur1(i,j);

Upp2(i,j)=Up2(i,j)-Ur2(i,j);

[V11 V22 V33 V44]

=CoV(Lx,Ly,i,j,Y,X,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c\_pos,c\_neg,c1,c2,c3,c4,q12,q13,q23,q31,q41,Up1(i,j),Up2(i,j),Ur1(i,j),Ur2(i,j),Upp1(i,j),Upp2(i,j),Wc(i,j),Wp(i,j),d,hx,hy,Ta,fu1,fu2,fu3,fu4);

Va1(i,j)=V11;

Va2(i,j)=V22;

Va3(i,j)=V33;

Va4(i,j)=V44;

if Va1(i,j)<Vp1max

Vp1max=V11;

Tp1(i,j)=Up1(i,j);

Tr1(i,j)=Ur1(i,j);

Tpp1(i,j)=Tp1(i,j)-Tr1(i,j);

Wmc(i,j)=Wc(i,j);

if i>1

if Tp1(i,j)==Tp1(i-1,j)

Tr1(i,j)==Tr1(i-1,j);

xx=i;

else

X\_op=Y;

end

end

```

end
if Va2(i,j)<Vp2max
    Vp2max=V22;
    Tp2(i,j)=Up2(i,j);
    Tr2(i,j)=Ur2(i,j);
    Wmp(i,j)=Wp(i,j);
    Tpp2(i,j)=Tp2(i,j)-Tr2(i,j);

    if i>1
        if Tp2(i,j)==Tp2(i-1,j)
            Tr2(i,j)==Tr2(i-1,j);
            xx=i;
        else
            Y_op=Y;
        end
    end
end
end
if Va3(i,j)<Vp3max
    Vp3max=V33;
end
if Va4(i,j)<Vp4max
    Vp4max=V44;
end
if V11<V1_op
    V1_op=V11;
    I_op=i;
    J_op=j;
    Y_op=Y;
    X_op=X;
end
end

```

```

        if V22<V2_op
            V2_op=V22;
            I_op=i;
            J_op=j;
            Y_op=Y;
            X_op=X;
        end
    end %for Kmc
    end %for Kmp
end % for Kr
end %for Kp
Va1(i,j)=Vp1max;
Va2(i,j)=Vp2max;
Va3(i,j)=Vp3max;
Va4(i,j)=Vp4max;
Zy_op(i)=Y_op;
end %for i
Zx_op(j)=X_op;
Zy_op(i)=Y_op;
end %for j
end %for while
%toc
Hedging_Point1=X_op
Hedging_Point2=Y_op
Va1_op=V1_op
Va2_op=V2_op
Va3_op=V33
Va4_op=V44
%  Zx_op(40)
%  Zy_op(40)

```

```

% Affichage des resultats
figure(1);
    surf(YX,XX,Vp1');
    ylabel('Rejected products (X)');
    xlabel('Inventory (Y)');
    zlabel('Vp1');
    title('Value function at mode 1');
    grid on;
    print c:\figure1 -djpeg;
figure(2);
    surf(YX,XX,Vp2');
    ylabel('Rejected products (X)');
    xlabel('Inventory (Y)');
    zlabel('Vp2');
    title('Value function at mode 2');
    grid on;
    print c:\figure2 -djpeg;
figure(3);
    surf(YX,XX,Vp3');
    ylabel('Rejected products (X)');
    xlabel('Inventory (Y)');
    zlabel('Vp3');
    title('Value function at mode 3');
    grid on;
    print c:\figure3 -djpeg;
figure(4);
    surf(YX,XX,Vp4');
    ylabel('Rejected products (X)');
    xlabel('Inventory (Y)');
    zlabel('Vp4');

```

```

    title('Value function at mode 4');
    grid on;
    print c:\figure4 -djpeg;
figure(5);
    mesh(YY,XX,Tp1');
    xlabel('Inventory (Y)');
    ylabel('Rejected products (X)');
    zlabel('Tp1');
    title('Production rate at mode 1');
    grid on;
    print c:\figure5 -djpeg;
figure(6);
    mesh(YY,XX,Tp2');
    xlabel('Inventory (Y)');
    ylabel('Rejected products (X)');
    zlabel('Tp2');
    title('production rate at mode 2');
    grid on;
    print c:\figure6 -djpeg;
figure(7);
    mesh(YY,XX,Wmp');
    xlabel('Inventory (Y)');
    ylabel('Rejected products (X)');
    zlabel('Wmp');
    title('preventive maintenance rate');
    grid on;
    print c:\figure7 -djpeg;
% figure(8);
%     mesh(YY,XX,Wmc');
%     xlabel('Inventory (Y)');

```

```

% ylabel('Rejected products (X)');
% zlabel('Wmc');
% title('Corrective maintenance rate');
% grid on;
% print c:\figure8 -djpeg;
figure(9);
    plot(XX,Zx_op');
    xlabel('Rejected products');
    ylabel('Treshold');
    grid on;
    print c:\figure9 -djpeg;
figure(10);
    plot(YY,Zy_op');
    xlabel('Inventory');
    ylabel('Treshold');
    grid on;
    print c:\figure10 -djpeg;
figure(11);
    plot(YY,Tp1');
    xlabel('Inventory');
    ylabel('production rate at mode 1');
    grid on;
    print c:\figure11 -djpeg;
figure(111);
    plot(XX,Tp1');
    xlabel('Rejected products');
    ylabel('production rate at mode 1');
    grid on;
    print c:\figure111 -djpeg;
figure(12);

```

```
plot(YY,Tp2');
xlabel('Inventory');
ylabel('production rate at mode 2');
grid on;
print c:\figure12 -djpeg;
figure(122);
plot(XX,Tp2');
xlabel('Rejected Products');
ylabel('production rate at mode 2');
grid on;
print c:\figure122 -djpeg;
figure(13);
plot(YY,Wmp');
xlabel('Inventory');
ylabel('preventive maintenance rate');
grid on;
print c:\figure13 -djpeg;
figure(133);
plot(XX,Wmp');
xlabel('Rejected products');
ylabel('preventive maintenance rate');
grid on;
print c:\figure133 -djpeg;
```

## ANNEXE IV

### PROGRAMME 2.1 MATLAB

```
function[Vv1,Vv2,Vv3,Vv4]=CoV(Lx,Ly,i,j,Y,X,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,c_pos,c_neg,c1,c2,c3,c4,q12,q13,q23,q31,q41,d,Tp1,Tp2,Tr1,Tr2,Tpp1,Tpp2,Wmc,Wmp,hx,hy,Ta,fu1,fu2,fu3,fu4);  
VV=[];
```

```
for i=1:Ly
```

```
    if i==1
```

```
        for j=1:Lx
```

```
            if (j==1)
```

```
                VV(1)=Vp1(i,j);
```

```
                VV(2)=Vp2(i,j);
```

```
                VV(3)=Vp3(i,j);
```

```
                VV(44)=Vp4(i,j);
```

```
                VV(12)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
```

```
                VV(13)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
```

```
                VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
```

```
                VV(15)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
```

```
                VV(10)=Vp1(i+1,j);
```

```
                VV(11)=Vp2(i+1,j);
```

```
                VV(09)=Vp3(i+1,j);
```

```
                VV(08)=Vp4(i+1,j);
```

```
                VV(4)=Vp1(i+1,j+1);
```

```
                VV(5)=Vp2(i+1,j+1);
```

```
                VV(6)=Vp3(i+1,j+1);
```

```
                VV(7)=Vp4(i+1,j+1);
```

```
                VV(16)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j+1);
```

```
                VV(17)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j+1);
```

```
                VV(18)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j+1);
```

```

        VV(19)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j+1);
        VV(21)=Vp1(i,j+1);
        VV(22)=Vp2(i,j+1);
        VV(23)=Vp3(i,j+1);
        VV(24)=Vp4(i,j+1);
        VV(25)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
        VV(26)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
        VV(27)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
        VV(28)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);
    else
        if (j==Lx)
            VV(1)=Vp1(i,j);
            VV(2)=Vp2(i,j);
            VV(3)=Vp3(i,j);
            VV(44)=Vp4(i,j);
            VV(12)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
            VV(13)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
            VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
            VV(15)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
            VV(10)=Vp1(i+1,j);
            VV(11)=Vp2(i+1,j);
            VV(09)=Vp3(i+1,j);
            VV(08)=Vp4(i+1,j);
            VV(4)=2*Vp1(i+1,j)-Vp1(i+1,j-1);
            VV(5)=2*Vp2(i+1,j)-Vp2(i+1,j-1);
            VV(6)=2*Vp3(i+1,j)-Vp3(i+1,j-1);
            VV(7)=2*Vp4(i+1,j)-Vp4(i+1,j-1);
            VV(16)=2*Vp1(i,j-1)-Vp1(i+1,j-1);
            VV(17)=2*Vp2(i,j-1)-Vp2(i+1,j-1);
            VV(18)=2*Vp3(i,j-1)-Vp3(i+1,j-1);

```

$$VV(19)=2*Vp4(i,j-1)-Vp4(i+1,j-1);$$

$$VV(21)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);$$

$$VV(22)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);$$

$$VV(23)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);$$

$$VV(24)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);$$

$$VV(25)=Vp1(i,j-1);$$

$$VV(26)=Vp2(i,j-1);$$

$$VV(27)=Vp3(i,j-1);$$

$$VV(28)=Vp4(i,j-1);$$

else

$$VV(1)=Vp1(i,j);$$

$$VV(2)=Vp2(i,j);$$

$$VV(3)=Vp3(i,j);$$

$$VV(44)=Vp4(i,j);$$

$$VV(12)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);$$

$$VV(13)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);$$

$$VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);$$

$$VV(15)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);$$

$$VV(10)=Vp1(i+1,j);$$

$$VV(11)=Vp2(i+1,j);$$

$$VV(09)=Vp3(i+1,j);$$

$$VV(08)=Vp4(i+1,j);$$

$$VV(4)=Vp1(i+1,j+1);$$

$$VV(5)=Vp2(i+1,j+1);$$

$$VV(6)=Vp3(i+1,j+1);$$

$$VV(7)=Vp4(i+1,j+1);$$

$$VV(16)=2*Vp1(i,j-1)-Vp1(i+1,j-1);$$

$$VV(17)=2*Vp2(i,j-1)-Vp2(i+1,j-1);$$

$$VV(18)=2*Vp3(i,j-1)-Vp3(i+1,j-1);$$

$$VV(19)=2*Vp4(i,j-1)-Vp4(i+1,j-1);$$

```

        VV(21)=Vp1(i,j+1);
        VV(22)=Vp2(i,j+1);
        VV(23)=Vp3(i,j+1);
        VV(24)=Vp4(i,j+1);
        VV(25)=Vp1(i,j-1);
        VV(26)=Vp2(i,j-1);
        VV(27)=Vp3(i,j-1);
        VV(28)=Vp4(i,j-1);

    end
end %if
end % for j

else
    if (i==Ly)
        for j=1:Lx
            if j==1
                VV(1)=Vp1(i,j);
                VV(2)=Vp2(i,j);
                VV(3)=Vp3(i,j);
                VV(44)=Vp4(i,j);
                VV(12)=Vp1(i-1,j);
                VV(13)=Vp2(i-1,j);
                VV(14)=Vp3(i-1,j);
                VV(15)=Vp4(i-1,j);
                VV(10)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
                VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
                VV(09)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
                VV(08)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
                VV(4)=2*Vp1(i,j+1)-Vp1(i-1,j+1);
                VV(5)=2*Vp2(i,j+1)-Vp2(i-1,j+1);

```

$$\begin{aligned} VV(6) &= 2 * Vp3(i,j+1) - Vp3(i-1,j+1); \\ VV(7) &= 2 * Vp4(i,j+1) - Vp4(i-1,j+1); \\ VV(16) &= 2 * Vp1(i-1,j) - Vp1(i-1,j+1); \\ VV(17) &= 2 * Vp2(i-1,j) - Vp2(i-1,j+1); \\ VV(18) &= 2 * Vp3(i-1,j) - Vp3(i-1,j+1); \\ VV(19) &= 2 * Vp4(i-1,j) - Vp4(i-1,j+1); \\ VV(21) &= Vp1(i,j+1); \\ VV(22) &= Vp2(i,j+1); \\ VV(23) &= Vp3(i,j+1); \\ VV(24) &= Vp4(i,j+1); \\ VV(25) &= 2 * Vp1(i,j) - Vp1(i,j+1); \\ VV(26) &= 2 * Vp2(i,j) - Vp2(i,j+1); \\ VV(27) &= 2 * Vp3(i,j) - Vp3(i,j+1); \\ VV(28) &= 2 * Vp4(i,j) - Vp4(i,j+1); \end{aligned}$$

else

if (j==Lx)

$$\begin{aligned} VV(1) &= Vp1(i,j); \\ VV(2) &= Vp2(i,j); \\ VV(3) &= Vp3(i,j); \\ VV(44) &= Vp4(i,j); \\ VV(12) &= Vp1(i-1,j); \\ VV(13) &= Vp2(i-1,j); \\ VV(14) &= Vp3(i-1,j); \\ VV(15) &= Vp4(i-1,j); \\ VV(10) &= 2 * Vp1(i,j) - Vp1(i-1,j); \\ VV(11) &= 2 * Vp2(i,j) - Vp2(i-1,j); \\ VV(09) &= 2 * Vp3(i,j) - Vp3(i-1,j); \\ VV(08) &= 2 * Vp4(i,j) - Vp4(i-1,j); \\ VV(4) &= 2 * Vp1(i,j) - Vp1(i-1,j-1); \end{aligned}$$

```

VV(5)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j-1);
VV(6)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j-1);
VV(7)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j-1);
    VV(16)=Vp1(i-1,j-1);
    VV(17)=Vp2(i-1,j-1);
    VV(18)=Vp3(i-1,j-1);
    VV(19)=Vp4(i-1,j-1);
VV(21)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(22)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(23)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);
VV(24)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);
    VV(25)=Vp1(i,j-1);
    VV(26)=Vp2(i,j-1);
    VV(27)=Vp3(i,j-1);
    VV(28)=Vp4(i,j-1);

```

else

```

    VV(1)=Vp1(i,j);
    VV(2)=Vp2(i,j);
    VV(3)=Vp3(i,j);
    VV(44)=Vp4(i,j);
VV(12)=Vp1(i-1,j);
VV(13)=Vp2(i-1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp4(i-1,j);
    VV(10)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
    VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
    VV(09)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
    VV(08)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
VV(4)=2*Vp1(i,j+1)-Vp1(i-1,j+1);

```

```

VV(5)=2*Vp2(i,j+1)-Vp2(i-1,j+1);
VV(6)=2*Vp3(i,j+1)-Vp3(i-1,j+1);
VV(7)=2*Vp4(i,j+1)-Vp4(i-1,j+1);
    VV(16)=Vp1(i-1,j-1);
    VV(17)=Vp2(i-1,j-1);
    VV(18)=Vp3(i-1,j-1);
    VV(19)=Vp4(i-1,j-1);
VV(21)=Vp1(i,j+1);
VV(22)=Vp2(i,j+1);
VV(23)=Vp3(i,j+1);
VV(24)=Vp4(i,j+1);
    VV(25)=Vp1(i,j-1);
    VV(26)=Vp2(i,j-1);
    VV(27)=Vp3(i,j-1);
    VV(28)=Vp4(i,j-1);
end
end % if
end % for

else

for j=1:Lx
    if j==1
        VV(1)=Vp1(i,j);
        VV(2)=Vp2(i,j);
        VV(3)=Vp3(i,j);
        VV(4)=Vp4(i,j);
        VV(12)=Vp1(i-1,j);
        VV(13)=Vp2(i-1,j);
        VV(14)=Vp3(i-1,j);

```

```

VV(15)=Vp4(i-1,j);
    VV(10)=Vp1(i+1,j);
    VV(11)=Vp2(i+1,j);
    VV(09)=Vp3(i+1,j);
    VV(08)=Vp4(i+1,j);
VV(4)=Vp1(i+1,j+1);
VV(5)=Vp2(i+1,j+1);
VV(6)=Vp3(i+1,j+1);
VV(7)=Vp4(i+1,j+1);
    VV(16)=2*Vp1(i-1,j)-Vp1(i-1,j+1);
    VV(17)=2*Vp2(i-1,j)-Vp2(i-1,j+1);
    VV(18)=2*Vp3(i-1,j)-Vp3(i-1,j+1);
    VV(19)=2*Vp4(i-1,j)-Vp4(i-1,j+1);
VV(21)=Vp1(i,j+1);
VV(22)=Vp2(i,j+1);
VV(23)=Vp3(i,j+1);
VV(24)=Vp4(i,j+1);
    VV(25)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
    VV(26)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
    VV(27)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
    VV(28)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);

else
    if (j==Lx)
        VV(1)=Vp1(i,j);
        VV(2)=Vp2(i,j);
        VV(3)=Vp3(i,j);
        VV(4)=Vp4(i,j);
        VV(12)=Vp1(i-1,j);
        VV(13)=Vp2(i-1,j);

```

```

VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp4(i-1,j);
    VV(10)=Vp1(i+1,j);
    VV(11)=Vp2(i+1,j);
    VV(09)=Vp3(i+1,j);
    VV(08)=Vp4(i+1,j);
VV(4)=2*Vp1(i+1,j)-Vp1(i+1,j-1);
VV(5)=2*Vp2(i+1,j)-Vp2(i+1,j-1);
VV(6)=2*Vp3(i+1,j)-Vp3(i+1,j-1);
VV(7)=2*Vp4(i+1,j)-Vp4(i+1,j-1);
    VV(16)=Vp1(i-1,j-1);
    VV(17)=Vp2(i-1,j-1);
    VV(18)=Vp3(i-1,j-1);
    VV(19)=Vp4(i-1,j-1);
VV(21)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(22)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(23)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);
VV(24)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);
    VV(25)=Vp1(i,j-1);
    VV(26)=Vp2(i,j-1);
    VV(27)=Vp3(i,j-1);
    VV(28)=Vp4(i,j-1);

```

else

```

    VV(1)=Vp1(i,j);
    VV(2)=Vp2(i,j);
    VV(3)=Vp3(i,j);
    VV(44)=Vp4(i,j);
VV(12)=Vp1(i-1,j);
VV(13)=Vp2(i-1,j);

```

```

VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp4(i-1,j);
    VV(10)=Vp1(i+1,j);
    VV(11)=Vp2(i+1,j);
    VV(09)=Vp3(i+1,j);
    VV(08)=Vp4(i+1,j);
VV(4)=Vp1(i+1,j+1);
VV(5)=Vp2(i+1,j+1);
VV(6)=Vp3(i+1,j+1);
VV(7)=Vp4(i+1,j+1);
    VV(16)=Vp1(i-1,j-1);
    VV(17)=Vp2(i-1,j-1);
    VV(18)=Vp3(i-1,j-1);
    VV(19)=Vp4(i-1,j-1);
VV(21)=Vp1(i,j+1);
VV(22)=Vp2(i,j+1);
VV(23)=Vp3(i,j+1);
VV(24)=Vp4(i,j+1);
    VV(25)=Vp1(i,j-1);
    VV(26)=Vp2(i,j-1);
    VV(27)=Vp3(i,j-1);
    VV(28)=Vp4(i,j-1);
    end
    end
    end % if
    end % for
end%if
end %for

if (Y>=0)

```

g1=c\_pos\*Y;

else

g1=-c\_neg\*Y;

end

Q1=(abs((Tpp1-d))/hy) + q12 + q13;

if (Tpp1-d >= 0)

Pp11=(Tpp1-d)/(hy\*Q1);

Pn11=0;

else

Pn11=(d-Tpp1)/(hy\*Q1);

Pp11=0;

end

P12=q12/Q1;

P13=q13/Q1;

Px1=fu1/(hx\*Q1);

Vv1=((g1)/(Q1\*(1+Ta/Q1)))

+

(1/(1+Ta/Q1))\*(Pp11\*VV(10)+Pn11\*VV(12)+Px1\*VV(25)+P12\*VV(2)+P13\*VV(3));

if (Y>=0)

g2=c\_pos\*Y +c2;

else

g2=-c\_neg\*Y +c2;

end

Q2=((abs(Tpp2-d))/hy) + q23+ Wmp;

if (Tpp2-d >= 0)

Pp22=(Tpp2-d)/(hy\*Q2);

Pn22=0;

else

```

Pn22=(d-Tpp2)/(hy*Q2);
Pp22=0;
end
P23=q23/Q2;
P24=Wmp/Q2;
Px2=fu2/(hx*Q2);
Vv2=(g2/(Q2*(1+Ta/Q2))) +
(1/(1+Ta/Q2))*(Pp22*VV(11)+Pn22*VV(13)+Px2*VV(26)+P23*VV(3)+P24*VV(44));
g3=c3;
Q3=d/hy + q31;
P31=d/(hy*Q3);
P32=q31/Q3;
Px3=fu3/(hx*Q3);
Vv3=((g1+g3)/(Q3*(1+Ta/Q3))) + (1/(1+Ta/Q3))*(P31*VV(14)+Px3*VV(09)
+ P32*VV(1));
g4=c4;
Q4=d/hy + q41;
P41=d/(hy*Q4);
P42=q41/Q4;
Px4=fu4/(hx*Q4);
Vv4=((g1+g4)/(Q4*(1+Ta/Q4))) + (1/(1+Ta/Q4))*(P41*VV(15)+Px4*VV(08)
+ P42*VV(1));

```

## ANNEXE V

### PROGRAMME 2.2 MATLAB

```
x=0:0.1:1000;
X=x.^4;
kk=0.000000000001;
q24=0.1+0.01*(1-exp(-kk*X));
p24=1./q24;
q31 = 0.02;
q12 = 0.8;
q14 = 0.001;
q23_min= 0.1;
q23_max=0.5;
q23=q23_min;
q41_min=0.00001;
q41_max=0.5;
q41=q41_min;
umax=0.4;
drmin=0.001;
drmax=0.01;
dp=0.5;
drm=drmax;
p1=1./(1+(q12./(q23+q24)).*(1+(q31./q23)+(q14./q12).*(q23+q24)+q24));
p2=1./(1+(((q23+q24)./q12).*(1+q31*q12./(q23.*(q23+q24))+q14./q41+(q24./q41).*(q12./(q23+q24)))));
p3=1./(1+q23./q31-
q31./q41+q23*(q23+q24)./(q31*q12)+q23*(q23+q24)*(q12+q14)./(q31*q12*q41));
p4=1./(1-
q41./q31+q41./(q14+(q12*q24)./(q23+q24))+(q41./q31).*(q12+q14)./(q14+q12*q24./(q23+q24))+q12.*q41./(q14.*(q23+q24)+(q12*q24)));
```

```
delta = p1*umax + p2*umax - drm;
```

```
figure(1)
```

```
plot(x,delta)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Feasibility Pr-min Cr-min')
```

```
grid on;
```

```
figure(2)
```

```
plot(x,p1)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Limiting probability at mode 1')
```

```
grid on;
```

```
figure(3)
```

```
plot(x,p2)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Limiting probability at mode 2')
```

```
grid on;
```

```
figure(4)
```

```
plot(x,p3)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Limiting probability at mode p')
```

```
grid on;
```

```
figure(5)
```

```
plot(x,p4)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Limiting probability at mode r')
```

```
grid on;
```

```
figure(6)
```

```
plot(x,p24)
```

```
xlabel('Defective products')
```

```
ylabel('Mean Time To Repair')  
grid on;  
figure(7)  
plot(x,q24)  
xlabel('Defective products')  
ylabel('Failure rate')  
grid on;
```

## ANNEXE VI

### PROGRAMME 3 MATLAB

```
clear
hx=5;           % pas sur rejet
hy=1;           % pas sur le stock
Um=0.4;         % taux de production maximale
dRM_min=0.01;   % taux min de demande en matière première
dRM_max=0.2;    % taux max de demande en matière(5 unités de temps)
rho=0.05;       % taux d'actualisation
Ymax=10;        % valeur du stock max
Ymin=-5;        % valeur du stock min
Xmax=300;       % valeur de la quantité de rejet max
Xmin=0;         % rejet min
Epsi=0.00001;   % precision
KK=10^(-5);     % facteur quantité de rejet
k0=1;
dp=0.25;        % taux de demande produit fini(4 unités de temps)

Ly=1+(Ymax-Ymin)/hy;
Lx=1+(Xmax-Xmin)/hx;

Cs=1;           % penalite stock positif
Cp=50;          % penalite stock negatif(rejet)
C4=2000;        % penalite reparation
C3=5000;        % penalite prévention
C2=5000;        % penalite rupture demande matière première

q12 = 0.01      %taux d'envoie au mode op 2 qd atteinte taux de rejet minimal
```

q14 = 0.02                      % taux de panne qui est une fonction des rejets (reparation avec rupture en matiere premiere)

%q31\_min=0.1;                      % taux d'envoi en prevention min  
%q31\_max=0.5;                      % taux d'envoier en prevention max  
q31 = 0.5;                      % taux de retour de la prevention

q23\_min= 0.0001;                      % taux d'envoi en maintenance preventive min  
q23\_max=0.5;                      % taux d'envoi en maintenance preventive max

q41\_min=0.05;                      % taux de retour de la correction min  
q41\_max=0.5;                      % taux de retour de la correction max.  
%q41=0.02;                      % taux de reparation

U1(1)= 0;              U1(2)= dp;              U1(3) = Um;  
Ud(1) = dRM\_min;                      Ud(2) = dRM\_max;  
Up3(1)= q23\_min;                      Up3(2)= q23\_max;  
Up4(1)= q41\_min;                      Up4(2)= q41\_max;

contpro=zeros(Ly,Lx);  
contdRM=zeros(Ly,Lx);  
contprev=zeros(Ly,Lx);  
contRep=zeros(Ly,Lx);  
Vx1=zeros(Ly,Lx);  
Vx2=zeros(Ly,Lx);  
Vx3=zeros(Ly,Lx);  
Vx4=zeros(Ly,Lx);  
Vp1=zeros(Ly,Lx);  
Vp2=zeros(Ly,Lx);

```

Vp3=zeros(Ly,Lx);
Vp4=zeros(Ly,Lx);
Yrejet2=0;

for i=1:Ly
    for j=1:Lx
        contpro(i,j)= 0;          % taux de production
        contdRM(i,j)=dRM_min;    % taux de demande en RM
        contprev(i,j)=q23_min;   % taux d'envoi en prevention
        contRep(i,j)=q41_min;    % taux de retour de reparation

        Vx1(i,j)=0;
        Vx2(i,j)=0;
        Vx3(i,j)=0;
        Vx4(i,j)=0;

        Vp1(i,j)=0;
        Vp2(i,j)=0;
        Vp3(i,j)=0;
        Vp4(i,j)=0;

    end
end

n=0;
Err=100000000;

while (Err > Epsi)
    n=n+1;
    C1MIN=5e+5;
    C1MAX=0;

```

```

for i=1:Ly
    y=Ymin+(i-1)*hy;
    yy(i)=y;
    for j=1:Lx
        x=Xmin+(j-1)*hx;
        xx(j)=x;
        dx=k0*contpro(i,j);
        q24= 0.01*(1-exp(-KK*(xx(j))^2));
        uu1=contpro(i,j);
        uu2=contdRM(i,j);
        uu3=contprev(i,j);
        uu4=contRep(i,j);

        [V11, V22, V33, V44]
        =FONCTIONVALEUR3(i,j,x,y,Ly,Lx,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,uu1,uu2,uu3,uu4,Cs,Cp,C3,C2,C4
        ,dx,dp,q12,q14,q24,q31,hy,hx,rho);
        Vx1(i,j)=V11;
        Vx2(i,j)=V22;
        Vx3(i,j)=V33;
        Vx4(i,j)=V44;
    end
end

C1MIN1(1)=min(min(abs(Vp1-Vx1)));
C1MAX1(1)=max(max(abs(Vp1-Vx1)));
C1MIN1(2)=min(min(abs(Vp2-Vx2)));
C1MAX1(2)=max(max(abs(Vp2-Vx2)));
C1MIN1(3)=min(min(abs(Vp3-Vx3)));
C1MAX1(3)=max(max(abs(Vp3-Vx3)));
C1MIN1(4)=min(min(abs(Vp4-Vx4)));
C1MAX1(4)=max(max(abs(Vp4-Vx4)));

```

```

C1MIN=min(C1MIN1);
C1MAX=max(C1MAX1);
Vmin=(rho/(1-rho))*C1MIN;
Vmax=(rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs(Vmin-Vmax)
Vp1=Vx1;
Vp2=Vx2;
Vp3=Vx3;
Vp4=Vx4;

iter =n

V1_op = 5e+10;
for i=1:Ly
    y=Ymin+(i-1)*hy;
    yy(i)=y;
    for j=1:Lx
        x=Xmin+(j-1)*hx;
        xx(j)=x;
        q24= 0.01*(1-exp(-KK*(xx(j))^2));
        VPM1=5e+10;
        VPM2=5e+10;
        VPM3=5e+10;
        VPM4=5e+10;
    for k=1:3
        uu1=U1(k);
        dx=k0*uu1;
    for t=1:2
        uu2=Ud(t);

```

```

for z=1:2
    uu3=Up3(z);
    for r=1:2
        uu4=Up4(r);
        [V1, V2, V3, V4]
        =FONCTIONVALEUR3(i,j,x,y,Ly,Lx,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,uu1,uu2,uu3,uu4,Cs,Cp,C3,C2,C4
        ,dx,dp,q12,q14,q24,q31,hy,hx,rho);

```

```

    Vx1(i,j)=V1;
    Vx2(i,j)=V2;
    Vx3(i,j)=V3;
    Vx4(i,j)=V4;
    if Vx1(i,j) < VPM1
        VPM1=Vx1(i,j);
        contpro(i,j)=uu1;
        contdRM(i,j)=uu2;
    end
    if Vx2(i,j) < VPM2
        VPM2=Vx2(i,j);

    end
    if Vx3(i,j) < VPM3
        VPM3=Vx3(i,j);
        contprev(i,j)=uu3;

    end

    if Vx4(i,j) < VPM4
        VPM4=Vx4(i,j);
        contRep(i,j)=uu4;

```

```

        end

        if V1 < V1_op
            V1_op = V1;
            I_op = i;
            J_op = j;
            y_op = y;
            x_op = x;
        end
    end    % for r
end    % for z
end    % for t
end    % for k
end    % for i
    end    % for j
end    % while

for j=1:Lx
    for i=1:Ly-1
        if contpro(i,j)==Um & contpro(i+1,j)<Um
            Yrejet2=Ymin+(i+1)*hy
        end
    end
    Yrejet4(j)=Yrejet2;
    xx3(j)=Xmin+(j-1)*hx;
end
Seuil_critique = y_op
Rejet_critique=x_op
Vx1_op = V1_op

```

```
figure(1)
mesh(xx,yy,contpro')
xlabel('Rejet')
ylabel('Stock')
zlabel('Production rate')
grid
```

```
figure(2)
mesh(xx,yy,contdRM')
xlabel('Rejet')
ylabel('Stock')
zlabel('RM Demand policy')
grid
```

```
figure(3)
mesh(xx,yy,contprev')
xlabel('Rejet')
ylabel('Stock')
zlabel('Preventive rate')
grid
```

```
figure(4)
mesh(xx,yy,contRep')
xlabel('Rejet')
ylabel('Stock')
zlabel('Repair policy')
grid
```

```
figure(5)
```

```
mesh(xx,yy,Vx1')  
xlabel('Rejet')  
ylabel('Stock')  
zlabel('Value function at mode 1')  
grid
```

```
figure(6)  
plot(xx3,Yrejet4')  
xlabel('Rejet')  
ylabel('Stock')  
title('Seuil fonction rejet')  
grid
```

## ANNEXE VII

### PROGRAMME 3.1 MATLAB

```
function [V1h, V2h, V3h, V4h]  
=FONCTIONVALEUR3(i,j,y,Ly,Lx,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,u1,u2,u3,u4,Cs,Cp,C3,C2,C4,dp,q1  
2,q14,q24,q31,hy,hx,rho)
```

```
Vm1=Vp1(i,j);
```

```
Vm2=Vp2(i,j);
```

```
Vm3=Vp3(i,j);
```

```
Vm4=Vp4(i,j);
```

```
if i==1
```

```
V1sup=Vp1(i+1,j);
```

```
V2sup=Vp2(i+1,j);
```

```
V3sup=Vp3(i+1,j);
```

```
V4sup=Vp4(i+1,j);
```

```
V1inf=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
```

```
V2inf=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
```

```
V3inf=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
```

```
V4inf=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
```

```
if j==1
```

```
Vxsup1=Vp1(i,j+1);
```

```
Vxsup2=Vp2(i,j+1);
```

```
Vxsup3=Vp3(i,j+1);
```

```
Vxsup4=Vp4(i,j+1);
```

```
Vxinf1=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
```

```
Vxinf2=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
```

```
Vxinf3=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
```

$$V_{xinf4}=2*V_{p4}(i,j)-V_{p4}(i,j+1);$$

elseif j==Lx

$$V_{xsup1}=2*V_{p1}(i,j)-V_{p1}(i,j-1);$$

$$V_{xsup2}=2*V_{p2}(i,j)-V_{p2}(i,j-1);$$

$$V_{xsup3}=2*V_{p3}(i,j)-V_{p3}(i,j-1);$$

$$V_{xsup4}=2*V_{p4}(i,j)-V_{p4}(i,j-1);$$

$$V_{xinf1}=V_{p1}(i,j-1);$$

$$V_{xinf2}=V_{p2}(i,j-1);$$

$$V_{xinf3}=V_{p3}(i,j-1);$$

$$V_{xinf4}=V_{p4}(i,j-1);$$

else

$$V_{xsup1}=V_{p1}(i,j+1);$$

$$V_{xsup2}=V_{p2}(i,j+1);$$

$$V_{xsup3}=V_{p3}(i,j+1);$$

$$V_{xsup4}=V_{p4}(i,j+1);$$

$$V_{xinf1}=V_{p1}(i,j-1);$$

$$V_{xinf2}=V_{p2}(i,j-1);$$

$$V_{xinf3}=V_{p3}(i,j-1);$$

$$V_{xinf4}=V_{p4}(i,j-1);$$

end

elseif i==Ly

$$V_{1sup}=2*V_{p1}(i,j)-V_{p1}(i-1,j);$$

$$V_{2sup}=2*V_{p2}(i,j)-V_{p2}(i-1,j);$$

$$V_{3sup}=2*V_{p3}(i,j)-V_{p3}(i-1,j);$$

$$V_{4sup}=2*V_{p4}(i,j)-V_{p4}(i-1,j);$$

$$V_{1inf}=V_{p1}(i-1,j);$$

$$V_{2inf}=V_{p2}(i-1,j);$$

$$V_{3inf}=V_{p3}(i-1,j);$$

$V_{4inf}=V_{p4}(i-1,j);$

if  $j==1$

$V_{xsup1}=V_{p1}(i,j+1);$

$V_{xsup2}=V_{p2}(i,j+1);$

$V_{xsup3}=V_{p3}(i,j+1);$

$V_{xsup4}=V_{p4}(i,j+1);$

$V_{xinf1}=2*V_{p1}(i,j)-V_{p1}(i,j+1);$

$V_{xinf2}=2*V_{p2}(i,j)-V_{p2}(i,j+1);$

$V_{xinf3}=2*V_{p3}(i,j)-V_{p3}(i,j+1);$

$V_{xinf4}=2*V_{p4}(i,j)-V_{p4}(i,j+1);$

elseif  $j==L_x$

$V_{xsup1}=2*V_{p1}(i,j)-V_{p1}(i,j-1);$

$V_{xsup2}=2*V_{p2}(i,j)-V_{p2}(i,j-1);$

$V_{xsup3}=2*V_{p3}(i,j)-V_{p3}(i,j-1);$

$V_{xsup4}=2*V_{p4}(i,j)-V_{p4}(i,j-1);$

$V_{xinf1}=V_{p1}(i,j-1);$

$V_{xinf2}=V_{p2}(i,j-1);$

$V_{xinf3}=V_{p3}(i,j-1);$

$V_{xinf4}=V_{p4}(i,j-1);$

else

$V_{xsup1}=V_{p1}(i,j+1);$

$V_{xsup2}=V_{p2}(i,j+1);$

$V_{xsup3}=V_{p3}(i,j+1);$

$V_{xsup4}=V_{p4}(i,j+1);$

$V_{xinf1}=V_{p1}(i,j-1);$

$V_{xinf2}=V_{p2}(i,j-1);$

$V_{xinf3}=V_{p3}(i,j-1);$

$V_{xinf4}=V_{p4}(i,j-1);$

end

else

$V1_{sup}=Vp1(i+1,j);$

$V2_{sup}=Vp2(i+1,j);$

$V3_{sup}=Vp3(i+1,j);$

$V4_{sup}=Vp4(i+1,j);$

$V1_{inf}=Vp1(i-1,j);$

$V2_{inf}=Vp2(i-1,j);$

$V3_{inf}=Vp3(i-1,j);$

$V4_{inf}=Vp4(i-1,j);$

if  $j==1$

$Vx_{sup1}=Vp1(i,j+1);$

$Vx_{sup2}=Vp2(i,j+1);$

$Vx_{sup3}=Vp3(i,j+1);$

$Vx_{sup4}=Vp4(i,j+1);$

$Vx_{inf1}=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);$

$Vx_{inf2}=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);$

$Vx_{inf3}=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);$

$Vx_{inf4}=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);$

elseif  $j==Lx$

$Vx_{sup1}=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);$

$Vx_{sup2}=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);$

$Vx_{sup3}=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j-1);$

$Vx_{sup4}=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j-1);$

$Vx_{inf1}=Vp1(i,j-1);$

$Vx_{inf2}=Vp2(i,j-1);$

$Vx_{inf3}=Vp3(i,j-1);$

$Vx_{inf4}=Vp4(i,j-1);$

```

else
    Vxsup1=Vp1(i,j+1);
    Vxsup2=Vp2(i,j+1);
    Vxsup3=Vp3(i,j+1);
    Vxsup4=Vp4(i,j+1);
    Vxinf1=Vp1(i,j-1);
    Vxinf2=Vp2(i,j-1);
    Vxinf3=Vp3(i,j-1);
    Vxinf4=Vp4(i,j-1);
end

end

if y > 0
    G=Cs*y;
else
    G=-Cp*y;
end

Q1h=(abs(u1-u2)/hy)+(abs(u1 - dp + u2)/hx)+ q12 + q14;
Q2h=(abs(u1-u2)/hy)+(abs(u1 - dp + u2)/hx)+ q24 + u3;
Q3h=(abs(-u2)/hy)+(abs(- dp + u2)/hx) + q31;
Q4h=(abs(-u2)/hy)+(abs(- dp + u2)/hx)+ u4;

if u1 - dp + u2 > 0
    P1h1=(u1 - dp + u2)/(hx*Q1h);
    P2h1=(u1- dp + u2)/ (hx*Q2h);
    P1h2=0;
    P2h2=0;
else

```

```

    P1h2=(dp - u2 - u1)/(hx*Q1h);
    P2h2=(dp - u2 - u1)/(hx*Q2h);
    P1h1=0;
    P2h1=0;
end

```

```

if u1-u2>0
    P11h=(u1-u2)/(hy*Q1h);
    P22h=(u1-u2)/(hy*Q2h);
    P1h11=0;
    P2h22=0;
else
    P1h11=(-u1+u2)/(hy*Q1h);
    P2h22=(-u1+u2)/(hy*Q2h);
    P11h=0;
    P22h=0;

```

```

end

```

```

if - dp + u2 > 0
    P3h1=(- dp + u2)/(hx*Q3h);
    P4h1=(- dp + u2)/ (hx*Q4h);
    P3h2=0;
    P4h2=0;
else
    P3h2=(dp - u2 )/(hx*Q3h);
    P4h2=(dp - u2 )/(hx*Q4h);
    P3h1=0;
    P4h1=0;
end

```

if u2<0

$$P33h=(-u2)/(hy*Q3h);$$

$$P44h=(-u2)/(hy*Q4h);$$

$$P3h11=0;$$

$$P4h22=0;$$

else

$$P3h11=(+u2)/(hy*Q3h);$$

$$P4h22=(+u2)/(hy*Q4h);$$

$$P33h=0;$$

$$P44h=0;$$

end

$$V1h=((G+C2*u2)/(Q1h*(1+rho/Q1h)))+(1/(1+rho/Q1h))*(P1h1*V1sup + P1h2*V1inf + P11h*Vxsup1+P1h11*Vxinf1+(q14/Q1h)*Vm4 + (q12/Q1h)*Vm2);$$

$$V2h=((G+C2*u2)/(Q2h*(1+rho/Q2h))) + (1/(1+rho/Q2h))*(P2h1*V2sup + P2h2*V2inf + P22h*Vxsup2 + P2h22*Vxinf2+ (q24/Q2h)*Vm4 + (u3/Q2h)*Vm3);$$

$$V3h=((G+C3)/(Q3h*(1+rho/Q3h)))+(1/(1+rho/Q3h))*(P3h1*V3sup + P3h2*V3inf + P33h* Vxsup3+P3h11*Vxinf3+(q31/Q3h)*Vm1);$$

$$V4h=((G+C4*u4)/(Q4h*(1+rho/Q4h)))+(1/(1+rho/Q4h))*(P4h1*V4sup + P4h2*V4inf + P44h* Vxsup4 + P4h22*Vxinf4 +(u4/Q4h)*Vm1);$$

## BIBLIOGRAPHIE

Adzakpa, Kossi, Kondo Adjallah et Farouk Yalaoui. 2004. « On-line maintenance job scheduling and assignment to resources in distributed systems by heuristic-based optimization ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 15, n° 2, p. 131-140.

Aghezzaf, El-Houssaine et Najib Najid. 2008. « Integrated production planning and preventive maintenance in deteriorating production systems ». *Information Sciences*, vol. 178, n° 17, p. 3382-3392.

Ajodhya, Nath Das et Acharya Damodar. 2004. « Age replacement of components during IFR delay time ». *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 53, n° 3, p. 306-312.

Akella, Ramachrishna. et Kumar. 1986. « Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system ». *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. AC-31, n° 2, p. 116-126.

Barlow, Richard et Larry Hunter. 1961. « Reliability analysis of a one-unit system ». *Operations Research*, vol. 9, n° 2, p. 200-208.

Barlow, Richard, Frank Proschan. et Larry Hunter. 1996. *Mathematical theory of Reliability*. « SIAM ». New York, Society of applied mathematics. 258 p.

Ben-Daya, Mohamed, Salih Duffuaa et Abdul Raouf. 2000. *Maintenance, Modeling and optimization*. «Norwell». Massachusetts : Kluwer Academic Publisher, 474 p.

Berenguer, Christophe, Chengbin Chu et Grall Antoine. 1997. « Inspection and maintenance planning: an application of semi-Markov decision processes ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 8, p. 467- 476.

Berko-Boateng, V., Azar, J., E de Jong,. et G.A.Yander. 1993. « Asset Recycle Management: A Total Approach to Product Design for the Environment ». *Proc. Int'l Symp. On Electronics and the Environment*, Arlington, VA, p. 9-31.

Bloch, H.P. et F.K. Geiter. 1994. *Machinery Failure Analysis and Troubleshooting*. Gulf Publishing, Houston(TX).

Boukas, El Kebir et Alain Haurie. 1990. « Manufacturing flow control and preventive maintenance: A stochastic approach ». *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 33, n°. 9, p. 1024-1031.

Boukas, El Kebir. 1987. « Commande optimale stochastique appliqué aux systèmes de production ». Thèse de doctorat en génie, Montréal, École Polytechnique de Montréal, 233 p.

- Campbell, N. R. 1941. « The replacement of perishable members of a continually operating system ». *J. Roy. Statist. Soc.*, vol. 7, p.110-130.
- Chiu, S.W., C.K. Ting and P.Y.S. Chiu. 2007. « Optimal production lot sizing with rework, scrap rate, and service level constraint ». *Mathematical and Computer Modeling*, vol. 46, p. 535–549.
- Chiu, Y.P.. 2003. « Determining the optimal lot size for the finite production model with random non-conforming rate, the rework process, and backlogging », *Engineering Optimization*, vol. 35, p. 427 - 437.
- Davis, M.. 1993. *Markov models and optimization*. London: Chapman and Hall.
- Dehayem, N.F.I., Jean-Pierre Kenne' et Ali Gharbi. 2009. « Hierarchical decision making in production and repair/replacement planning with imperfect repairs under uncertainties ». *European Journal of Operational Research* vol. 198 n° 1, p. 173–189.
- Djurdjanovic, Dargan, Liu Jianbo, Ni Jun et Lee Jay. 2004. « Performance similarity based method for enhanced prediction manufacturing process performance ». In *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. (Anaheim, November 13-20-2004). California,(USA): ASME.
- Fleahinger, B. J. 1962. « A general model for the reliability analysis of systems under various preventive maintenance policies ». *The Annals of Mathematical Statistics*, vol.33 , n° 1, p. 137-156.
- Gershwin, S.B. et J. Kim. 2008. « Analysis of long flow lines with quality and operational failures ». *IIE Transactions*, vol. 40, p. 284-296.
- Gershwin, S.B. 2004. *Manufacturing systems engineering*. Prentice Hall.
- Gershwin, S.B. et J. Kim. 2005. Quality/Quantity modeling and analysis of production lines subject to uncertainty phase I, *Final report, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachussets*.
- Gershwin, S.B. et J. Kim. 2008. « Analysis of long flow lines with quality and operational failures». *IIE Transactions*, vol. 40, p. 284-296.
- Gershwin, Stanley et Schick Irvin. 2007. « Discrete-Event Models for the Analysis of Quality/Quantity Interactions in production Systems » In *International Mechanical Engineering Congress* . (Cambridge, February 07-11-2007).,(USA): ASME.
- Gharbi, Ali, Robert Pellerin et J. Sadr. 2008. « Production rate control for stochastic remanufacturing systems ». *International Journal of Production Economics*, vol. 112, n° 1, p. 37–47.

Guide, V.D., V. Jayarman, R. Srivastava et W.C. Benton. 2000. Supply-chain management for recoverable manufacturing systems. *Interfaces*, vol. 30 n°3, p. 125–142.

Hajji, Adnen, Ali Gharbi et Jean-Pierre Kenne'. 2009. « Joint replenishment and manufacturing activities control in two stages unreliable supply chain ». *International Journal of Production Research*, vol. 47, n° 12, p. 3231–3251.

Hayek, P.A. et M.K. Salameh, 2001. « Production lot sizing with the reworking of imperfect quality items produced ». *Production Planning & Control*, vol. 12, p. 584–590.

Inderfurth, K., Kovalyov, M.Y., Ng, C.T. et F. Werner. 2007. « Cost minimizing scheduling of work and rework processes on a single facility under deterioration of reworkables ». *International Journal of Production Economics*, vol. 105, p. 345–356.

Jaber, M.Y. 2006. « Lot sizing for imperfect production process with quality corrective interruptions and improvements, and reduction in setups ». *Computers and Industrial Engineering*, vol. 51, p. 781–790.

Jay lee, Jun Ni, Djurdjanovic, Hai Qiu et Liao Haitao. 2006. « Intelligent prognostics tools and e-maintenance ». *Computers in industry*, vol. 57, p. 476-489.

Kenné, Jean-Pierre, El Kebir Boukas et Ali Gharbi. 2003. « Control of production and corrective maintenance rates in a multiple-machine, multiple-product manufacturing system ». *Mathematical and computer modelling*, vol. 38, p. 351-365.

Kenné, Jean-Pierre et El Kebir Boukas. 2003. « Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems ». *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 9, p. 66-82.

Kenné, Jean-Pierre et Ali Gharbi. 1999. « Experimental design in production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system ». *International Journal of Production Research*, vol. 37, p. 621-637.

Kenné, Jean-Pierre et Luther Nkengoue. 2008. « Simultaneous control of production, preventive and corrective maintenance rates of a failure-prone manufacturing system ». *Applied Numerical Mathematics*, vol. 58, p. 180-194.

Kenné, Jean-Pierre, Ali Gharbi, et Mounir Beit. 2007. « Age-dependent production planning and maintenance strategies in unreliable manufacturing systems with lost sale ». *European Journal of Operational Research*, vol. 178, p. 408-420.

Kenné, Jean-Pierre, El Kebir Boukas et Ali Gharbi. 2003. « Control of production and corrective maintenance rates in a multiple-machine, multiple-product manufacturing system ». *Mathematical and computer modelling*, vol. 38, p. 351-365.

Kenné, Jean-Pierre, Pierre Dejax et Ali Gharbi 2011. « Production planning of a hybrid manufacturing–remanufacturing system under uncertainty within a closed-loop supply chain ». *International Journal of Production Economics*, doi:10.1016/j.ijpe.2010.10.026.

Kim, J. et S.B. Gershwin. 2005. « Integrated quality and quantity modeling of a production line ». *OR Spectrum*, vol. 27, p. 287-315.

Kimemia, Joseph et Stanley Gershwin. 1983. «An algorithm for computer control of production in flexible manufacturing systems». *IIE Transactions*, vol. 15, no. 4, p. 353-362.

Kimemia, Joseph. 1982. « Hierarchical control of production in flexible manufacturing systems ». Thèse de doctorat en génie, Massachusetts Institute of Technology.

Kushner, H. G. 1977. *Probability Methods for Approximation in stochastic control and for Elliptic Equations*. New York Academic. 340 p.

Kushner, H.J. et J Dupuis. 1992. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer-Verlag.

L'Ecuyer, P. 1983. « Processus de décision markoviens à étapes discrètes : application à des problèmes de remplacement d'équipements ». Thèse de doctorat au département information & recherche opérationnelle, Université de Montréal.

Lou, S., S. Sethi et Q. Zhang. 1994. « Optimal feedback production in a stochastic two-machine flowshop ». *European Journal of Operational Research*, vol. 73, p. 331-345.

Mariton, M. 1991. « Control of Nonlinear Systems with Markovian Parameter Changes ». *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 36, no. 2, p. 233-238.

Mohamed-Salah Ouali, Ait-Kadi Daoud et Gharbi Ali. 1999. « A simulation model for opportunistic maintenance strategies » In *7th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. vol.1, p 703-8, 1999. *Proceedings ETFA '99 (Cat. No.99TH8467)*.

Monchy, François. 1991. *La fonction maintenance*. « Masson ». Paris, 452 p.

Monchy, François. 2003. *Maintenance et organisations*. « Dunod ». Paris, 503 p.

Nakagawa, T. 1988. « Sequential imperfect preventive maintenance policies ». *IEEE Trans. Reliability*. vol.37, n°.3, p. 295-303.

Njike, Achille, Robert Pellerin et Jean Pierre Kenne. 2009. « Simultaneous control of maintenance and production rates of manufacturing system with defective products ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, published Online First, 30 October 2009, DOI: 10.1007/s10845-009-0354-y.

Njike, Achille, Robert Pellerin et Jean Pierre Kenne. 2011. « Maintenance/production planning with interactive feedback of product quality ». *Journal of Quality in maintenance engineering*, vol. 17, n° 3, p. 281-298.

Olsder, G.J. et R. Suri. 1980. « Time optimal of parts-routing in a manufacturing system with failure prone machines ». In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IEEE Conference on decision and control*. (Albuquerque, Dec. 10-12-1980), p. 722-727. Piscataway (NJ) : IEEE.

Panagiotidou, S. et G. Tagaras. 2007. Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distributions, *European Journal of Operational Research*, vol. 180, n° 1, p. 329-353.

Pellerin, Robert, J. Sadr, Ali Gharbi et Roland Malhame'. 2009. « A production rate control policy for stochastic repair and remanufacturing systems ». *International Journal of Production Economics*. Vol. 121, n° 1, p. 39-48.

Rishel, R. 1975. « Control of systems with jump Markov disturbances ». *IEEE Transactions on automatic Control*, p. 241-244.

Salameh, M.K. et Jaber, M.Y. 2000. « Economic production quantity model for items with imperfect quality ». *International Journal of Production Economics*, vol. 64, p. 59-64.

Sortrakul, N., H.L. Nachtmann et C.R. Cassady. 2005. « Genetic algorithms for integrated preventive maintenance planning and production scheduling for a single machine ». *Computers in Industry*, vol. 56, n° 2, p. 161-168.

Tackas. 1959. « On a sojourn time problem in the theory of stochastic processes, Trans. Amer. ». *Math. Soc.*, vol. 93, p. 531-540.

Wang, W.Y. 2004. « Integrated inspection strategy model with inspection errors and positive inspection time lengths ». *Journal of Statistics & Management Systems*, vol. 7, p. 335-348.

Weiss, G. H., 1956. « On the theory of replacement of machinery with a random failure time ». *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3, no 4, p. 279-293.

Yang, H. et Q. Zhang. 1997. « A numerical method in optimal production and setup scheduling to stochastic manufacturing systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, p. 1452-1455.

Yang, Z., D. Djurdjanovic, et J. Ni. 2008. « Maintenance scheduling in manufacturing systems based on predicted machine degradation ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 19, p. 87-98.

Zhou, Xiaojun, Lifeng Xi et Jay Lee. 2007. « Reliability-centered predictive maintenance scheduling for a continuously monitored system subject to degradation ». *Reliability engineering and System Safety*, vol. 92, n° 4, p. 530-534.