

# QED, QCD en pratique

P. Aurenche<sup>a</sup>, J.-Ph. Guillet<sup>b</sup>, E. Pilon<sup>c</sup>

*LAPTh, Univ. Grenoble Alpes, Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS,  
74940 Annecy Cedex, France*

## Résumé

Ces notes sont une introduction à l'application de l'électrodynamique quantique (QED) et de la chromodynamique quantique (QCD) aux réactions de diffusion aux hautes énergies. Le premier thème abordé est celui des divergences ultraviolettes et de la renormalisation à une boucle, avec comme conséquence pour QCD la liberté asymptotique. Le deuxième thème est celui des divergences infrarouges et colinéaires qui dans QCD sont traitées dans le cadre du modèle des partons avec l'introduction des fonctions de structure d'un hadron. On montre comment la violation d'invariance d'échelle est engendrée par les corrections radiatives et on discute le théorème de factorisation dans l'approximation à une boucle. Plusieurs applications phénoménologiques dans les collisions  $e^+e^-$ ,  $e p$  et  $p p$  sont présentées, avec notamment la production de bosons de jauge, de gerbes hadroniques ("jets") et de particules à grande impulsion transverse dans les collisionneurs hadroniques. Dans tous les cas les prédictions sont confrontées avec les résultats expérimentaux récents.

<sup>a</sup> aurenche@lapth.cnrs.fr

<sup>b</sup> guillet@lapth.cnrs.fr

<sup>c</sup> pilon@lapth.cnrs.fr

## Avertissement

Les notes qui suivent donnent suffisamment de détails pour qu'un étudiant qui ne bénéficie pas d'un environnement académique très fourni en théorie quantique des champs ni en physique des particules puisse y trouver un intérêt. Ces notes supposent la connaissance du spineur de Dirac ainsi que celle de la procédure de construction de l'approche perturbative pour le calcul d'une amplitude de diffusion en théorie quantique des champs.

Ce cours est aussi disponible à l'URL suivante : [https://lectures.lapth.cnrs.fr/qed\\_qcd](https://lectures.lapth.cnrs.fr/qed_qcd). Sur ce site, le cours est divisé en quatorze parties, chaque partie a sa table des matières et comporte un lien vers un fichier pdf téléchargeable ; à chaque fichier pdf est associée la date de la dernière modification pour permettre au lecteur de connaître les fichiers qui ont été modifiés ou ajoutés. Certaines parties ont été enrichies par des fichiers pdf supplémentaires (compléments de cours, exercices) non inclus dans le fichier pdf global.

Nous conseillons au lecteur d'utiliser le site web pour consulter ce cours car ce mode de publication nous donne plus de souplesse pour le faire évoluer soit en corrigeant les incontournables typos, soit en ajoutant des exercices, applications ou compléments de cours.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Lagrangien QED, Règles de Feynman</b>	<b>13</b>
2.1	Invariance de jauge et le Lagrangien QED . . . . .	13
2.2	Le spineur de Dirac libre . . . . .	17
2.3	Le propagateur du fermion . . . . .	23
2.4	Le champ du photon libre . . . . .	28
2.5	Le propagateur du photon . . . . .	34
2.5.1	Remarques sur le propagateur du photon . . . . .	36
2.5.2	Indépendance de jauge et conservation du courant . . . . .	37
2.6	Règles de Feynman de QED . . . . .	38
2.7	Appendice : propriétés des matrices $\gamma^\mu$ . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Divergences ultraviolettes, renormalisation</b>	<b>43</b>
3.1	Divergences ultraviolettes et renormalisation en $\lambda\phi^4$ . . . . .	45
3.1.1	Divergences des diagrammes en boucle . . . . .	45
3.1.2	Principes de la procédure de renormalisation . . . . .	48
3.1.3	Renormalisation de la masse et de la fonction d'onde . . . . .	51
3.1.4	Conséquence de la procédure de renormalisation : couplage mobile . . . . .	55
3.1.5	Discussion . . . . .	56
3.2	Techniques de calcul des diagrammes en boucle. . . . .	57
3.2.1	Paramétrage de Feynman. . . . .	58
3.2.2	Rotation de Wick. . . . .	60
3.2.3	Intégrales en régularisation dimensionnelle. . . . .	60
3.2.4	Analyse dimensionnelle . . . . .	64
3.2.5	Règles de Feynman pour QED . . . . .	64
3.2.6	Diracologie en $n$ -dimensions. . . . .	65
3.3	Renormalisation du modèle $\lambda\phi^4$ à une boucle . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Renormalisation de QED à une boucle</b>	<b>67</b>
4.1	Polarisation du vide : calcul de $Z_3$ . . . . .	68
4.1.1	Conséquence et application . . . . .	71
4.2	Self-énergie du fermion : calcul de $Z_0$ et $Z_2$ . . . . .	75
4.3	Correction au vertex : calcul de $Z_1$ . . . . .	83

4.3.1	Correction au vertex : calcul complet . . . . .	84
4.3.2	Moment magnétique anomal de l'électron, du muon et application . . . . .	87
4.4	Renormalisation : la fonction $\beta(\alpha)$ et le couplage mobile . . . . .	89
4.5	Identités de Ward-Takahashi . . . . .	92
4.6	Degré superficiel de divergence d'un diagramme . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Compensation des divergences infrarouges</b>	<b>99</b>
5.1	Terme de Born . . . . .	99
5.2	Corrections virtuelles . . . . .	100
5.3	Corrections réelles . . . . .	102
5.4	Définition de la section efficace . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Hadrons et quarks + ...</b>	<b>107</b>
6.1	Spectroscopie et modèle des quarks . . . . .	108
6.2	La diffusion profondément inélastique (DIS). . . . .	116
6.2.1	Cinématique de la diffusion lepton-nucléon . . . . .	117
6.2.2	Dynamique . . . . .	118
6.2.3	Résultats de l'expérience . . . . .	120
6.3	Le modèle des partons dans l'inélastique profond . . . . .	122
6.3.1	Section efficace électron-parton . . . . .	124
6.3.2	Section efficace électron-proton . . . . .	125
6.3.3	Identification partons $\equiv$ quarks + ... . . . . .	126
6.4	Diffusion neutrino-nucléon et modèle des partons . . . . .	128
6.4.1	Diffusion neutrino-nucléon : courant chargé . . . . .	128
6.4.2	Modèle des partons . . . . .	131
6.4.3	Discussion . . . . .	133
6.4.4	Règles de somme . . . . .	133
6.5	Application du modèle des partons . . . . .	134
6.6	Le modèle des partons : formulation générale . . . . .	135
6.7	Conclusions . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Chromodynamique Quantique : QCD</b>	<b>141</b>
7.1	Lagrangien QCD . . . . .	141
7.2	Quantification : théorie scalaire . . . . .	146
7.3	Quantification : chromodynamique quantique . . . . .	151
7.4	Règles de Feynman en QCD . . . . .	157
7.5	Invariance BRS-T : Becchi-Rouet-Stora et Tyutin . . . . .	163
7.6	Exemples de processus en arbre . . . . .	165
7.7	Hadrons et quarks colorés . . . . .	173
7.8	Appendice I : Résumé des règles de Feynman en QCD . . . . .	173
7.9	Appendice II : Facteurs de couleur pour SU(N) . . . . .	175

<b>8</b>	<b>Chromodynamique Quantique : Renormalisation à une boucle</b>	<b>177</b>
8.1	Introduction . . . . .	177
8.2	Calcul des $Z_i$ . . . . .	180
8.2.1	Calcul de $Z_2$ . . . . .	180
8.2.2	Calcul de $Z_3$ . . . . .	181
8.2.3	Calcul de $Z_{1F}$ . . . . .	185
8.2.4	Le couplage mobile $\alpha_s$ et application . . . . .	189
8.2.5	Définition de $\Lambda_{QCD}$ . . . . .	190
8.2.6	Au-delà des logarithmes dominants . . . . .	191
8.2.7	Résultats . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Violations de l'invariance d'échelle</b>	<b>195</b>
9.1	Violations d'invariance d'échelle : les logarithmes dominants . . . . .	198
9.1.1	Terme de Born . . . . .	198
9.1.2	Corrections radiatives d'ordre $\alpha_s$ : violation de l'invariance d'échelle . . . . .	200
9.1.3	Equations d'évolution de la distribution de quark : équation DGLAP . . . . .	203
9.1.4	Solution de l'équation d'évolution par la méthode des moments. . . . .	204
9.1.5	Approche intuitive . . . . .	206
9.1.6	Equations d'évolution couplées des quarks et des gluons . . . . .	207
9.1.7	Stabilité de l'interprétation partonique : règles de somme . . . . .	210
9.1.8	Phénoménologie . . . . .	211
9.1.9	Conclusions . . . . .	215
9.2	Violations d'invariance d'échelle : calcul exact . . . . .	216
9.2.1	Calcul du terme de Born . . . . .	216
9.2.2	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ <i>quark</i> $\rightarrow$ <i>gluon quark</i> . . . . .	218
9.2.3	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ <i>gluon</i> $\rightarrow$ <i>quark antiquark</i> . . . . .	221
9.2.4	Diffusion $\gamma^*$ <i>proton</i> : contribution des termes réels . . . . .	223
9.2.5	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution des termes virtuels . . . . .	225
9.2.6	Diffusion $\gamma^*$ <i>proton</i> au premier ordre de QCD . . . . .	227
9.2.7	Schémas de factorisation et équation DGLAP . . . . .	228
9.3	Diffusion Drell-Yan . . . . .	230
9.3.1	Calcul du terme de Born . . . . .	230
9.3.2	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de <i>quark antiquark</i> $\rightarrow$ $\gamma^*$ <i>gluon</i> . . . . .	231
9.3.3	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de <i>quark gluon</i> $\rightarrow$ $\gamma^*$ <i>quark</i> . . . . .	233
9.3.4	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contributions des termes virtuels . . . . .	234
9.3.5	Diffusion Drell-Yan au premier ordre de QCD . . . . .	235
<b>10</b>	<b>Annihilation <math>e^+ e^- \rightarrow hadrons</math></b>	<b>239</b>
10.1	Section efficace totale . . . . .	239
10.1.1	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels . . . . .	240
10.1.2	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels . . . . .	240
10.1.3	Taux de désintégration en hadrons . . . . .	244
10.1.4	Compensation des divergences et généralisation . . . . .	244
10.2	Production de gerbes hadroniques ou "jets" . . . . .	246
10.3	Production inclusive d'un hadron . . . . .	250

10.3.1	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels . . . . .	251
10.3.2	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels . . . . .	252
10.3.3	Corrections d'ordre $\alpha_s$ : production inclusive d'un hadron . . . . .	254
<b>11</b>	<b>Unitarité, règles de coupure</b>	<b>257</b>
11.1	Matrice S, unitarité, théorème optique . . . . .	257
11.2	Relations de dispersion . . . . .	263
11.3	Diagrammes et unitarité : règles de coupure de Cutkosky . . . . .	265
11.4	Règles de Cutkosky et compensation des divergences . . . . .	268
<b>12</b>	<b>Equations du groupe de renormalisation</b>	<b>271</b>
12.1	Equations du groupe de renormalisation . . . . .	272
12.2	Calcul de la fonction $\beta$ et des dimensions anomales . . . . .	273
12.3	Solution des équations du groupe de renormalisation . . . . .	275
12.4	Applications . . . . .	277
12.5	Comportement asymptotique des fonctions de Green . . . . .	279
12.6	Comportement asymptotique du couplage mobile . . . . .	280
12.7	Violation d'invariance d'échelle . . . . .	281
<b>13</b>	<b>Modèle des partons amélioré et applications.</b>	<b>283</b>
13.1	Processus de Drell-Yan . . . . .	283
13.2	Production de photons directs à grands transferts . . . . .	290
13.3	Production de jets dans les collisions hadroniques . . . . .	301
13.4	Production de hadrons dans les collisions hadroniques . . . . .	308
13.5	Conclusion . . . . .	311
<b>14</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>313</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Le cours qui va suivre est une introduction à la **chromodynamique quantique** qui est une des composante du **Modèle Standard** de la physique des particules. Le principe de base qui guide la construction de modèles en physique des particules est le **principe d'invariance de jauge locale** selon lequel la physique ne dépend pas de la phase que l'on peut associer aux champs de particules. Le Modèle Standard est un exemple particulier de théorie de jauge caractérisée par un certain **groupe de symétrie de jauge**. Le groupe de jauge qui sous-tend le Modèle Standard est

$$SU(3) \otimes SU(2)_L \otimes U_Y(1)$$

c'est-à-dire le produit direct de 3 groupes simples.

- Le groupe  $SU(3)$  ou **groupe de couleur** est le groupe de symétrie des interactions fortes. Le groupe  $SU(3)$  agit sur les quarks qui sont les constituants élémentaires de la matière et la force d'interaction entre les quarks est portée par les gluons qui sont les bosons de jauge du groupe de symétrie. On a donc **des quarks et gluons colorés**. Le paramètre qui caractérise la "force" de l'interaction entre quarks et gluons est dénoté  $\alpha_s$  et il peut être, dans certaines conditions,  $\sim 1$  (interactions fortes). Dans d'autres conditions que l'on spécifiera plus tard  $\alpha_s < 1$ . La symétrie  $SU(3)$  de couleur est exacte et donc, nécessairement, les gluons sont de masse nulle.

- Le groupe  $SU(2)_L \times U_Y(1)$  est le **groupe des interactions faibles et électromagnétiques** où  $SU(2)_L$  est le groupe d'isospin et  $U_Y(1)$  est le groupe d'hypercharge. A basse énergie ( $M < 250$  GeV) la **symétrie est spontanément brisée** et le groupe de symétrie résiduel est  $U_{EM}(1)$  dont le générateur est une combinaison du générateur de  $U_Y(1)$  et d'un générateur de  $SU(2)_L$ . Le boson de jauge correspondant est évidemment le photon. Le couplage caractéristique est  $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ . La brisure de symétrie implique que les autres bosons de jauge du groupe initial acquièrent une masse : ce sont les bosons  $W^\pm, Z$  découverts au CERN dans les années 1980. Le mécanisme de brisure est associé aux noms de **Brout, Englert, Guralnik, Hagen, Higgs, Kibble** mais il est dit "**mécanisme de Brout-Englert-Higgs** du nom des trois premiers auteurs par ordre chronologique. Il est responsable de l'existence de la "goddamned particle"<sup>1</sup> de Higgs, annoncée au CERN

---

1. Due à Leon Lederman cette expression a été déformée par des journalistes américains imbéciles en "God's particle" pour être "politiquement correcte". Cette dernière forme a ensuite été reprise par le suiviste troupeau de veaux de la presse internationale. Une traduction plus appropriée serait cette "p... de particule".

en décembre 2012 suite aux résultats expérimentaux des collaborations ATLAS et CMS.

Ce qui suit concerne le groupe de couleur et les interactions fortes, c'est-à-dire la **chromodynamique quantique (QCD)**. La problématique de **QCD** est assez différente de celle du modèle de **Glashow-Weinberg-Salam (GWS)** qui décrit les interactions électrofaibles : le couplage est relativement grand et quand on calcule une quantité physique en termes d'une série perturbative (dénotée symboliquement) :

$$\sigma = a_0 + a_1\alpha_s + a_2\alpha_s^2 + a_3\alpha_s^3 + \dots$$

les termes en  $\alpha_s^n, \dots$ , jouent un rôle important. Une bonne partie du cours concernera donc le calcul des termes d'ordre supérieur et leurs conséquences phénoménologiques. Dans le modèle de **GWS** le couplage est petit (donc le rôle des corrections est moins crucial, bien que les corrections d'ordre supérieur soient maintenant absolument nécessaires pour l'interprétation des résultats expérimentaux) et l'aspect le plus intéressant sera la brisure de symétrie et le mécanisme par lequel non seulement les bosons, mais aussi les quarks acquièrent une masse et le boson de Higgs apparaît.

### La Chromodynamique Quantique

QCD est la théorie qui est supposée décrire les hadrons ainsi que les interactions entre ces derniers c'est-à-dire les interactions fortes. Les problèmes qu'une théorie des interactions fortes doit résoudre sont de deux types :

1. — comprendre le spectre de masse des hadrons :  $m_\pi, m_\rho, \dots, m_p, m_\Delta, \dots$  ;  
— comprendre la durée de vie ("largeur" de désintégration) des hadrons :

$$\rho \rightarrow \pi\pi, \quad \omega \rightarrow \rho\pi, \quad \Delta \rightarrow p\pi, \dots$$

Ce sont des problèmes caractérisés par une échelle de masse  $M \sim M_h \sim 1 \text{ GeV}$  ( $m_\rho \sim .75 \text{ GeV}, m_p \sim .940 \text{ GeV}, m_\Delta \sim 1.23 \text{ GeV}, m_\pi \sim .14 \text{ GeV}$  est l'exception).

2. comprendre l'interaction entre les hadrons :

$$pp \rightarrow \text{hadrons}, \quad pp \rightarrow \gamma^*, W, Z + \text{hadrons}$$

et entre lepton et hadron :

$$ep \rightarrow e + \text{hadrons}, \quad ee \rightarrow \text{hadrons}$$

En plus de l'échelle  $M_h$ , ces processus sont caractérisés par l'échelle d'énergie de la collision :  $M \sim \sqrt{s} = E_{CM}$ .

La tendance a toujours été d'explorer des énergies de plus en plus grandes car, par la relation d'incertitude de Heisenberg  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ , cela revient à sonder la matière avec une résolution de plus en plus fine. En effet, on a<sup>2</sup>

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar c [\text{GeV fm}]}{c \Delta p [\text{GeV}]} \simeq \frac{.2 [\text{GeV fm}]}{c \Delta p [\text{GeV}]},$$

ce qui donne les ordres de grandeur suivants :

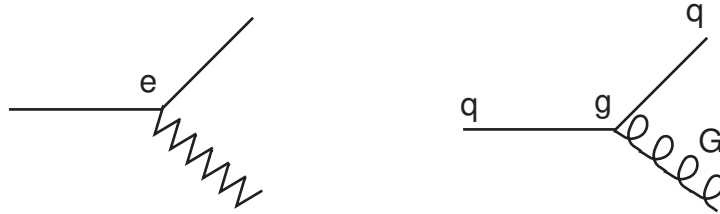
2.  $\hbar = 6,58\,211\,928\,10^{-22} \text{ MeV s}$ ,  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ . Pour une liste des constantes fondamentales et de leur valeur voir : <http://pdg.lbl.gov/2014/reviews/rpp2014-rev-phys-constants.pdf>, in K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).



- LEP :  $\Delta p \sim 200 \text{ GeV}/c \Rightarrow \Delta x \sim 10^{-3} \text{ fm} = 10^{-18} \text{ m}$
- LHC :  $\Delta p \sim 2 \text{ TeV}/c \Rightarrow \Delta x \sim 10^{-4} \text{ fm} = 10^{-19} \text{ m}$

(L'énergie des collisions entre protons au LHC est de 14 TeV, mais l'énergie effective des collisions entre constituants est de l'ordre de 2 TeV). La physique des particules actuelle peut donc être qualifiée d'attophysique = (nano)<sup>2</sup>-physique.

En fait, les expériences à haute énergie ont depuis longtemps montré que les hadrons sont des objets composites, et qu'ils sont formés de constituants ponctuels aux échelles explorées : les quarks et les gluons. La QCD est la théorie qui décrit les interactions entre quarks et gluons, de même que l'électrodynamique quantique (QED) décrit l'interaction entre électrons et photons. La force de l'interaction est décrite par le couplage  $e$  pour QED et le couplage  $g$  pour QCD



avec en général  $e \ll g$  ( $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \ll \alpha_s = g^2/(4\pi\hbar c)$ ). On verra par la suite (voir chapitres 3 et 8) que les corrections d'ordre supérieur et la renormalisation imposent  $\alpha \rightarrow \alpha(M)$ ,  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(M)$  où  $M$  est l'échelle caractéristique du processus étudié :  $\alpha(M)$ ,  $\alpha_s(M)$  sont appelés **couplage mobile** de QED et de QCD respectivement. Une différence fondamentale entre les deux est que, contrairement à QED, le couplage mobile en QCD décroît quand l'échelle de masse croît et il tend vers 0 aux énergies asymptotiques. On est donc amené à distinguer deux régimes en QCD :

1.  $M \gg 1 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_s(M) \ll 1$  : les quarks et gluons observés à l'intérieur des hadrons à cette échelle apparaissent quasi libres puisque  $\alpha_s$  est petit. On pourra donc utiliser la théorie des perturbations :

$$\sigma \sim a_0 + a_1\alpha_s + a_2\alpha_s^2 + \dots$$

Les méthodes de calcul seront donc similaires à QED. C'est ce régime de **liberté asymptotique** que nous allons étudier. Il concerne l'interaction entre hadrons, et entre leptons et hadrons à haute énergie.

2.  $M \leq 1 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_s(M) \geq 1$  : l'interaction est tellement forte que les quarks et gluons sont confinés dans les hadrons. C'est donc un régime non perturbatif pour lequel il n'existe pas de méthodes de calcul analytique. Actuellement, ces problèmes sont abordés numériquement par le biais des théories de jauge sur réseau.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est intéressant de remarquer que la notion de "constituants élémentaires" des hadrons est apparue "indépendamment" dans les deux régimes :

- En 1964, Gell-Mann et Zweig proposent le "modèle des quarks" comme méthode de classification des très nombreuses résonances hadroniques que l'on découvrait expérimentalement ;
- En 1968, Feynman et Bjorken propose le "modèle des partons" qui permet de comprendre la propriété d'"invariance d'échelle" de la réaction "profondément inélastique"

$$e + p \rightarrow e + \text{hadrons}$$

étudiée expérimentalement au SLAC à haute énergie (pour l'époque!).

A priori, les partons de Feynman ne sont pas reliés aux "quarks" de Gell-Mann ou aux "as" de Zweig. Ce n'est qu'après de nombreux travaux théoriques et expérimentaux que l'on peut, dans une certaine mesure, identifier les partons de Feynman aux quarks et aux gluons de QCD (voir chap. 6).

En prélude à QCD on considère l'électrodynamique quantique qui permet d'illustrer de façon relativement simple de nombreux aspects de la chromodynamique quantique. Les premiers chapitres sont donc consacrés à QED. Le chapitre 1 résume la construction du Lagrangien de QED où le principe d'invariance de jauge joue un rôle fondamental. On dérive aussi succinctement les règles de Feynman. Le chapitre suivant traite de façon qualitative des **divergences ultraviolettes** qui apparaissent dans les calculs d'ordre supérieur en théorie des perturbations, divergences qui seront éliminées par la procédure de **renormalisation** : le concept de **couplage mobile**, qui dépend de l'échelle d'énergie du processus considéré, apparaît naturellement. Les outils techniques sont ensuite introduits et appliqués, dans le chapitre 3, à la renormalisation de QED à une boucle. Cela est suivi par un chapitre montrant comment les **divergences infrarouges** apparaissant dans le calcul des boucles sont éliminées quand l'observable est correctement défini.

Le chapitre 5 est une brève introduction au **modèle des partons** et sert de justification au fait que la physique des interactions entre hadrons et entre hadrons et leptons est ramenée à la discussion d'une théorie des interactions entre quarks et gluons et entre ces derniers et les leptons. La notion de **fonction de structure** d'un hadron, et de son **invariance d'échelle**, est présentée. Le lagrangien de QCD est ensuite construit sur la base de l'invariance de jauge non abélienne SU(3) et la théorie est quantifiée suivant l'approche des intégrales fonctionnelles. Les règles de Feynman sont obtenues et appliquées au calcul des amplitudes de diffusion  $2 \text{ corps} \rightarrow 2 \text{ corps}$  (chapitre 6). Elles sont ensuite utilisées pour évaluer certains diagrammes en boucle qui permettent d'obtenir le couplage mobile de QCD et de prouver la **propriété de liberté asymptotique** de QCD (chapitre 7). Puis on considère le problème des **divergences colinéaires** qui sont liées au fait que les quarks et les gluons sont supposés être de masse nulle. La discussion est conduite dans le cadre du modèle des partons et, par une procédure reminiscente de la renormalisation, on peut éliminer ces divergences au prix de l'introduction de **violation de l'invariance d'échelle** : c'est le **théorème de factorisation** dans le modèle des partons. Les résultats du chapitre 8 justifient, en fait, l'usage du modèle des partons et de ses corrections QCD pour la description des interactions lepton-hadron et hadron-hadron : c'est l'**universalité des fonctions de structure** qui est "prouvée" par l'étude de la diffusion Drell-Yan. Le chapitre 9, sur le calcul de quelques observables de la diffusion  $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$  est l'occasion de montrer comment sont traitées les divergences infrarouges et colinéaires en QCD et d'introduire le concept de **gerbe hadronique** ou **jet** et de **fonctions de fragmentation** des quarks et des gluons. Il est suivi d'une discussion sur l'**unitarité** qui définit la structure analytique de l'amplitude de diffusion dans le plan d'énergie complexe et sur les règles de coupure. Une brève introduction aux **relations de dispersion** est également donnée. Le chapitre 11 contient une introduction aux **équations du groupe de renormalisation**. Le chapitre 12 est consacré à quelques applications de QCD à la phénoménologie des collisions *proton-proton*.

### Conventions

Dans la suite on utilisera les conventions habituelles  $\hbar = c = 1$  de telle sorte que les variables d'énergie  $E$ , d'impulsion  $p$  et de masse  $m$  sont toutes exprimées en unité de masse et sont de dimension 1,

$$[E] = [p] = [m] = 1.$$

Par conséquent, d'après les relations de Heisenberg,  $\Delta p \Delta x \sim 1$ ,  $\Delta E \Delta t \sim 1$ , les variables de longueur et de temps sont de dimension -1,

$$[x] = [t] = -1.$$

La métrique est définie par la matrice diagonale  $4 \times 4$  :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On note un quadrivecteur :

$$V^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v^0, v^i) = (v^0, \vec{v})$$

d'où :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, v_i) = (v_0, -\vec{v})$$

On définit les opérateurs différentiels  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$  et  $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$  et donc

$$\partial_\mu V^\mu = \partial_0 v^0 + \partial_i v^i = \partial_0 v^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \tag{1.0.1}$$



## Chapitre 2

# Lagrangien QED, Règles de Feynman

Avant d'entrer dans le détail de l'interaction entre quarks et gluons nous allons faire quelques rappels sur l'électrodynamique quantique. Le principe de construction de la théorie, l'invariance de jauge, est le même dans les deux cas mais le cas abélien de QED est beaucoup plus simple à écrire que le cas non abélien de QCD. Le comportement asymptotique (infra-rouge et ultra-violet) des deux théories est cependant complètement différent.

Toute la physique perturbative est contenue dans la densité lagrangienne,  $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ , une fonction des champs  $\phi(x)$  et de leurs premières dérivées, à partir de laquelle on construit l'action :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)).$$

L'action est une quantité sans dimension. Si on impose que l'action est stationnaire sous une variation du champ (principe de Maupertuis), on obtient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi(x)} = 0$$

qui décrivent l'évolution classique du champ  $\phi(x)$ . C'est à partir de ces équations, qu'en formalisme de la seconde quantification, on obtient les règles de Feynman qui permettent de calculer perturbativement n'importe quel processus en théorie des champs.

### 2.1 Invariance de jauge et le Lagrangien QED

Pour QED, on part d'un spineur de Dirac massif  $\psi(x)$  et du lagrangien libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi$$

avec les conventions  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ,  $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial / \partial x_\mu = \partial_\mu \gamma^\mu$ , et les matrices  $(4 \times 4)$   $\gamma_\mu$  définies par

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.1)$$

où les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli. On a les propriétés suivantes :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu,\nu} \mathbf{1}_4, \quad \gamma_0 = \gamma_0^\dagger \gamma_0, \quad \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu. \quad (2.1.2)$$

D'autres propriétés des matrices  $\gamma_\mu$  sont données en appendice. L'équation d'Euler-Lagrange obtenue en variant l'action  $S$  par rapport à  $\bar{\psi}$  est :

$$(i \not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (2.1.3)$$

et celle par rapport à  $\psi$  est :

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (2.1.4)$$

Ces deux équations sont équivalentes car la première peut être obtenue à partir de la seconde en prenant l'hermitienne conjuguée et en multipliant à droite par  $\gamma^0$ .

### • Invariance par changement de phase globale

On voit que la physique ne dépend pas de la phase du champ  $\psi$  puisque le lagrangien  $\mathcal{L}$  est invariant sous la transformation globale suivante :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x), \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est une constante réelle arbitraire, indépendante du point  $x$ . Ceci est une transformation de jauge rigide ou de première espèce. D'après le théorème de Noether, à toute invariance sous une famille continue de transformations de ce type correspond un courant conservé dont la forme est obtenue en partant des transformations infinitésimales de  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  ( $\alpha$  arbitraire,  $\alpha \ll 1$ ) :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= i\alpha\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -i\alpha\bar{\psi}. \end{aligned}$$

La variation correspondante du lagrangien est

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi}\partial_\mu\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\psi}} + \partial_\mu\delta\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\bar{\psi}},$$

où on a utilisé la définition  $\delta\partial_\mu\psi = \partial_\mu\delta\psi$  au numérateur. Le dernier terme est nul (pas de dépendance en  $\partial_\mu\bar{\psi}$  de  $\mathcal{L}$ ) ainsi que l'avant dernier (le coefficient de  $\delta\bar{\psi}$  est l'équation du mouvement). Utilisant Euler-Lagrange, les deux premiers se combinent en

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \right) \delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \partial_\mu\delta\psi = \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \delta\psi \right) = i\alpha\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi). \quad (2.1.5)$$

Puisque  $\mathcal{L}$  est invariant sous les transformations rigides,  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ , le courant  $J^\mu$  associé à cette invariance,

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.1.6)$$

est conservé : ( $\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ ). On définit la charge  $Q(t)$  associée à ce courant par :

$$\boxed{Q(t) = Q = \int d^3x J^0(t, \vec{x})}. \quad (2.1.7)$$

En effet, il est aisé de montrer qu'elle est constante dans le temps,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\Omega} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\partial\Omega} \vec{ds} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) = 0.$$

Pour obtenir la première égalité on utilise la conservation du courant,  $\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , et pour la dernière on suppose qu'il n'y a pas de charges à l'infini et que  $\vec{J}$  est à décroissance suffisamment rapide à l'infini.

### • Invariance par changement de phase locale

On va maintenant refaire le même travail pour un paramètre  $\alpha$  qui dépend de la coordonnée d'espace-temps,  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ , c'est-à-dire que l'on peut choisir arbitrairement la phase du champ  $\psi$  en chaque point de l'espace sans que cela affecte les prédictions physiques (transformation de jauge propre, ou de seconde espèce). Les transformations locales sont donc les suivantes

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

et, si le terme de masse reste invariant ( $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ ), le terme cinétique ne l'est plus ( $\bar{\psi}\partial_\mu\psi \neq \bar{\psi}'\partial_\mu\psi'$ ) à cause de l'action de la dérivée sur le paramètre  $\alpha(x)$  :

$$\partial_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{ie\alpha(x)}\psi) = e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie(\partial_\mu\alpha(x))\psi.$$

La variation du lagrangien prend donc la forme suivante :

$$\delta\mathcal{L} = -e\bar{\psi}(\partial_\mu\alpha(x))\gamma^\mu\psi,$$

qui n'est ni nulle ni une dérivée totale. On peut néanmoins rétablir cette invariance en introduisant un champ vecteur,  $A_\mu(x)$ , et en modifiant le lagrangien :

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi}(x) (i(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\gamma^\mu - m) \psi(x) \equiv \bar{\psi}(x) (iD_\mu\gamma^\mu - m) \psi(x),$$

où  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$  est la dérivée covariante, dont la variation est  $\delta(D_\mu\psi(x)) = ie\alpha(x)D_\mu\psi(x)$ , par définition. Sous l'action d'un élément du groupe de jauge le champ  $A_\mu(x)$  devient donc :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x).$$

Ainsi, sous une transformation infinitésimale, la variation du lagrangien est nulle, puisque la variation associée au champ de jauge compense celle due au fermion. Les équations du mouvement sont :

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = \underbrace{-e \not{A}(x)\psi(x)}_{\text{terme d'interaction}} \quad (2.1.9)$$

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0. \quad (2.1.10)$$

où la deuxième équation résulte de la variation du champ  $A_\mu$ . Physiquement, (2.1.10) impose soit  $e = 0$  (pas de charge électrique), soit  $\psi = 0$  (pas de champ fermionique)! On peut résoudre ce

problème si l'on ajoute à  $\mathcal{L}$  un terme dérivatif qui contient  $\partial_\mu A_\nu$  et qui spécifie comment le champ de jauge se propage (terme cinétique). Pour préciser la forme de ce terme, nous allons utiliser le fait que l'action que nous voulons construire est censée être un scalaire de Lorentz, sans dimension et invariante de jauge. Il faut donc trouver un terme quadratique en  $\partial_\mu A_\nu$ , de dimension 4 (pour compenser la dimension de la mesure d'intégration  $d^4x$  qui vaut -4 en unités de masse, sachant que  $[\partial_\mu A_\nu] = 2$ ), invariant de jauge et scalaire de Lorentz. On vérifie facilement que le terme  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  avec

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

invariant de jauge, satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus. Ce terme n'est pas le seul candidat, mais les autres possibilités sont en désaccord avec nos exigences. Par exemple,

- $(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2$  est un scalaire de Lorentz, mais il est de dimension 8 : dans la densité lagrangienne il entrerait donc avec un couplage de dimension -4 (par exemple  $(F \cdot F)^2/M^4$ ). Mais une théorie qui possède un couplage de dimension négative est non-renormalisable (voir sec. 4.6).
- $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  avec  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ <sup>1</sup> satisfait à toutes les conditions énoncées plus haut, mais c'est un pseudo-scalaire qui viole la parité alors que QED la préserve. On peut aussi noter que ce terme ne résoud pas le problème (2.1.10) puisqu'il ne contribue pas aux équations de mouvement (terme topologique) : en fait il se réduit à une dérivée totale<sup>2</sup>.

Finalement,  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  pour un champ  $\psi$  s'écrit

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi} \quad (2.1.11)$$

où le facteur  $-\frac{1}{4}$  est choisi de manière à obtenir la normalisation habituelle pour la charge  $e$ . A priori, on aurait pu considérer un champ  $A^\mu$  massif, mais il est facile de montrer qu'un terme de la forme  $m^2 A_\mu A^\mu$  n'est pas invariant sous une transformation de jauge. C'est donc l'invariance de jauge qui impose un champ de jauge (photon) de masse nulle. Les équations du mouvement pour le photon sont :

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\delta A_\nu(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\delta\partial_\mu A_\nu(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)A_\mu(x) = eJ^\nu(x),$$

qui peuvent aussi s'écrire  $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = eJ^\nu(x)$ , ce qui requiert, par cohérence, la conservation du courant puisque  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$  ( $F^{\mu\nu}$  est un tenseur antisymétrique). Finalement les équations d'Euler-Lagrange pour QED sont :

$$\boxed{\begin{aligned} (i\not{D} - m)\psi &= 0 & \Leftrightarrow & (i\not{\partial} - m)\psi = -e\not{A}(x)\psi(x) \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= eJ^\nu(x) & \Leftrightarrow & \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \end{aligned}} \quad (2.1.12)$$

Il faut rajouter aussi à ces équations

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.1.13)$$

qui est évidente d'après la définition de  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ .

---

1. Le tenseur  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  totalement antisymétrique en ses indices est défini par  $\epsilon^{0123} = 1$ . On a donc  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ .  
2.  $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(A_\nu\partial_\rho A_\sigma) - 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma$  où on a fait une intégration par partie. Le dernier terme est évidemment nul puisque il y a contraction d'un tenseur antisymétrique en  $\mu\rho$  avec un tenseur symétrique en ces mêmes indices.



Remarques :

Une forme utile pour le tenseur électromagnétique est

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu], \quad (2.1.14)$$

une définition qui s'avèrera pratique pour QCD.

Introduisant les champs électrique et magnétique  $\vec{E}, \vec{B}$ , on peut écrire :

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice : Démontrer que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0 &\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{éqs. de Maxwell homogènes} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = eJ^\nu(x) &\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varphi, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{éqs. de Maxwell inhomogènes.} \end{aligned}$$

où le courant covariant est  $J^\mu(x) = (\varphi, \vec{j})$ .

## 2.2 Le spineur de Dirac libre

On recherche les solutions de l'équation de Dirac libre ( $e = 0$ ) sous forme d'ondes planes et on introduit

$$\begin{aligned} \psi_k^+(x) &= e^{-ik \cdot x} u(k) \\ \psi_k^-(x) &= e^{+ik \cdot x} v(k) \end{aligned} \quad \text{avec } k \cdot x = \omega_k x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

$u(k), v(k)$  sont les spineurs de Dirac à 4 composantes que l'on va définir. L'action de l'opérateur  $i\partial_\mu \equiv i\partial/\partial x^\mu$ , agit seulement sur la phase

$$i \partial_\mu e^{\pm ik \cdot x} = \mp k_\mu e^{\pm ik \cdot x}$$

L'équation de Dirac libre devient alors

$$\begin{aligned} (\not{k} - m) u(k) &= 0 \\ (\not{k} + m) v(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

On considère le cas au repos :  $k_\mu = (m, \vec{0})$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)u(k) = 0 &\Rightarrow 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} u = 0 \\ (\not{k} + m)v(k) = 0 &\Rightarrow 2m \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0. \end{aligned}$$

Le spineur  $\psi_k^+(x)$  correspond aux solutions d'énergie positive (phase  $e^{-ik \cdot x}$ ) et les spineurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base des solutions de l'équation de Dirac correspondante.  $u_1, u_2$  représentent les deux états de spin possibles du spineur.  $\psi_k^-(x)$  correspond aux solutions d'énergie négative (phase  $e^{ik \cdot x}$ ) et les spineurs  $v$  correspondants sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, relâchant la condition  $\vec{k} = 0$ , les spineurs

$$u_\alpha(k) \propto (\not{k} + m)u_\alpha$$

sont, à un facteur de normalisation près, les deux solutions de Dirac d'énergie positive puisque

$$(\not{k} - m)u_\alpha(k) \equiv (k^2 - m^2)u_\alpha = 0$$

par condition de couche de masse

$$\not{k} \not{k} = \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = k^2 = m^2$$

et

$$v_\alpha(k) \propto (\not{k} - m)v_\alpha$$

sont les solutions d'énergie négative car

$$(\not{k} + m)v_\alpha(k) = (k^2 - m^2)v_\alpha = 0.$$

On peut définir les projecteurs d'énergie

$$\Lambda_+ = \frac{\not{k} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = -\frac{\not{k} - m}{2m} \quad (2.2.16)$$

qui satisfont

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0 \\ \Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbf{1}_4$$

---

Exercice : Démontrer les propriétés ci-dessus.

---

Le développement en ondes planes d'une solution générale de l'équation de Dirac s'écrit

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left( b_{\alpha}(k) \psi_k^{+\alpha}(x) + d_{\alpha}^{\dagger}(k) \psi_k^{-\alpha}(x) \right) \quad (2.2.17)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_k^{+\alpha}(x) &= e^{-ik \cdot x} u_{\alpha}(k) \\ \psi_k^{-\alpha}(x) &= e^{ik \cdot x} v_{\alpha}(k), \end{aligned} \quad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \quad (2.2.18)$$

où :

- $\int d^3k/2\omega_k = \int d^4k \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2)$  est l'élément d'intégration invariant
- $b_{\alpha}(k), d_{\alpha}^{\dagger}(k)$  sont en physique classique les coefficients de la superposition linéaire
- on utilise parfois la normalisation  $m/\omega_k$  au lieu de  $1/2\omega_k$  dans l'intégrant définissant  $\psi(x)$ .

Il est nécessaire de normaliser les spineurs solutions de l'équation de Dirac libre. une possibilité est<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} (\not{k} + m) u_{\alpha} \\ v_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} (-\not{k} + m) v_{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} \bar{u}_{\alpha}(\not{k} + m) \\ \bar{v}_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} \bar{v}_{\alpha}(-\not{k} + m). \end{aligned}$$

On obtient alors les conditions de normalisation :

$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) &= 2m \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{v}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) &= -2m \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$	$\bar{u}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) = \bar{v}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = 0$	(2.2.20)
---	---	----------

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) &= \frac{1}{m + \omega_k} \bar{u}_{\alpha}(\not{k} + m)^2 u_{\beta} \\ &= \frac{2m}{m + \omega_k} \bar{u}_{\alpha}(m + \omega_k \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma}) u_{\beta} \end{aligned}$$

Le terme en  $\vec{k} \cdot \vec{\gamma}$  ne contribue pas puisqu'il est anti-diagonal et que les deux derniers éléments du  $u_{\alpha, \beta}$  sont toujours nuls. De plus la forme de la matrice  $\gamma^0$  permet d'écrire

$$\bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = \frac{2m}{m + \omega_k} (m + \omega_k) u_{\alpha}^T u_{\beta} = 2m \delta_{\alpha\beta}$$

---

3. En association avec le facteur de normalisation  $m/\omega_k$  dans l'éq. (2.2.17) on utilise, dans certains livres, la définition  $u_{\alpha}(k) = (\not{k} + m) u_{\alpha} / \sqrt{2m(m + \omega_k)}$ . L'éq. (2.2.20) devient alors  $\bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{v}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) = -\delta_{\alpha\beta}$ .

On prouve de même

$$\bar{u}_\alpha(k)v_\beta(k) \approx \bar{u}_\alpha(\not{k} + m)(\not{k} - m)v_\beta = 0$$

Exercice : Montrer que

$$\begin{aligned} u_\alpha^\dagger(k) u_\beta(k) &= 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \\ v_\alpha^\dagger(k) v_\beta(k) &= 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

On remarque que  $\bar{u}_\alpha(k)u_\beta(k) = 2m\delta_{\alpha\beta}$  est un scalaire sous une transformation de Lorentz alors que  $u_\alpha^\dagger(k)u_\beta(k) = 2\omega_k \delta_{\alpha\beta}$  ne l'est pas puisqu'il se transforme comme une énergie. On prouve maintenant une relation concernant la matrice formée par  $\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k)\bar{u}_\alpha(k)$ . On remarque d'abord par inspection que :

$$\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha \bar{u}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^0), \quad \sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha \bar{v}_\alpha = -\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^0)$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k) \bar{u}_\alpha(k) &= \frac{1}{(m + \omega_k)}(\not{k} + m) \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^0)(\not{k} + m) \\ &= \frac{1}{(m + \omega_k)} \frac{1}{2}(2m(\not{k} + m) + (\not{k} + m)\gamma^0(\not{k} + m)). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

On utilise alors la relation  $\not{k}\gamma^0\not{k} = -m^2\gamma^0 + 2\omega_k\not{k}$  pour factoriser  $(m + \omega_k)$  au numérateur, d'où les relations très utiles et importantes,

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k)\bar{u}_\alpha(k) = \not{k} + m = 2m\Lambda_+,} \quad (2.2.23)$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha(k)\bar{v}_\alpha(k) = \not{k} - m = -2m\Lambda_-,} \quad (2.2.24)$$

valables avec la normalisation des spineurs choisie en éq. (2.2.19). La somme sur les états de polarisation des  $u_\alpha\bar{u}_\alpha$ ,  $v_\alpha\bar{v}_\alpha$  est proportionnelle aux projecteurs d'énergie positive et négative. Ces relations sont utilisées dans les calculs d'amplitude de diffusion avec fermions externes ainsi que dans la dérivation du propagateur du fermion.

### • Quantification du champ de Dirac (rappels)

Dans le formalisme de la seconde quantification les coefficients  $b_\alpha$ ,  $d_\alpha^\dagger$  deviennent des opérateurs agissant sur un espace de Fock à définir. La procédure de seconde quantification du champ de Dirac

consiste à imposer les relations d'anticommutation entre les coefficients  $b_\alpha(k)$ ,  $d_\alpha(k)$ ,  $b_\alpha^\dagger(k)$ ,  $d_\alpha^\dagger(k)$  du développement en ondes planes du champ de Dirac :

$$\boxed{\begin{aligned} \{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q) \\ \{d_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q) \\ \{b_\alpha, b_\beta\} &= \{d_\alpha, d_\beta\} = \{b_\alpha, d_\beta\} = \{b_\alpha, d_\beta^\dagger\} = 0 \end{aligned}} \quad (2.2.25)$$

Ceci permet d'écrire l'anticommutateur entre le champ  $\psi(x)$  et son moment conjugué  $\Pi(x) = \delta\mathcal{L}/\delta\partial_0\Psi(x) = i\psi^\dagger(x)$ . En terme des composantes  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  l'anticommutateur à temps égal est :

$$\boxed{\{\psi_i(t, \vec{x}), \psi_j^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y)} \quad (2.2.26)$$

On démontre d'abord la relation :

$$\boxed{\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \gamma^0 \delta^{(3)}(x - y).} \quad (2.2.27)$$

dont l'éq. (2.2.26) est la conséquence immédiate.

#### Démonstration

Partant de la représentation éq. (2.2.17) pour  $\psi(x)$  et pour  $\bar{\psi}(y)$  de :

$$\bar{\psi}(y) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\beta=1}^2 \left( b_\beta^\dagger(q) \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot y} + d_\beta(q) \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot y} \right)$$

l'anticommutateur à temps égal est :

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} &= \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left( \{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} u_\alpha(k) \bar{u}_\beta(q) e^{-ik \cdot x + iq \cdot y} \right. \\ &\quad \left. + \{d_\alpha^\dagger(k), d_\beta(q)\} v_\alpha(k) \bar{v}_\beta(q) e^{ik \cdot x - iq \cdot y} \right) \end{aligned}$$

On anticommute uniquement les opérateurs création et annihilation et non les fonctions d'onde car il faut garder la structure matricielle de l'expression. Les relations d'anticommutation éqs. (2.2.25) permettent de faire l'intégrale  $\int d^3q$ , d'utiliser les formules éqs. (2.2.23), (2.2.24) et de contraindre les énergies  $\omega_q = \omega_k$  de sorte que la composante en  $x_0$  disparaît dans les facteurs exponentiels. On a alors :

$$\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( (k + m) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + (k - m) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) \quad (2.2.28)$$

Faisant le changement de variable  $\vec{k} = -\vec{k}$  dans le deuxième terme permet de compenser les composantes spatiales de  $\vec{k}$ . Utilisant alors :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\pm i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta^{(3)}(x - y),$$

on obtient immédiatement le résultat recherché.

On peut également montrer les relations plus générales :

$$\boxed{\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = (i \not{\partial} - m) i \Delta(x - y) ; \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0.} \quad (2.2.29)$$

avec la définition

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right]. \quad (2.2.30)$$

On construit l'espace de Fock par application des  $b_\alpha^\dagger$ ,  $d_\alpha^\dagger$  sur le vide avec la définition que les opérateurs  $b_\alpha$  et  $d_\alpha$  annihilent le vide :

$$b_\alpha(k)|0\rangle = d_\alpha(k)|0\rangle = 0; \quad \langle 0|b_\alpha^\dagger(k) = \langle 0|d_\alpha^\dagger(k) = 0 \quad \forall k, \alpha.$$

On a, par exemple, deux états à un fermion d'impulsion  $k$  et deux états à un anti-fermion :

$$b_\alpha^\dagger(k)|0\rangle, \quad d_\alpha^\dagger(k)|0\rangle, \quad \alpha = 1, 2.$$

A noter qu'à cause des relations d'anticommutation, on ne peut pas avoir deux fermions dans le même état physique (même impulsion, même polarisation). On peut définir la charge et l'hamiltonien. Par exemple la charge est définie par (voir éq. (2.1.7)) :

$$Q = : \int d^3x J^0(t, \vec{x}) : = : \int d^3x \psi^\dagger \psi :$$

en utilisant la forme du courant fermionique introduite à l'éq. (2.1.6). Introduisant le développement en ondes planes de  $\psi$  on trouve

$$Q = : \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_\alpha \left( b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) \right) :$$

où on a utilisé les relations de normalisation  $u_\alpha^\dagger$  et de  $v_\beta$ . Le symbole  $:\dots:$  s'appelle produit normal et implique que tous les opérateurs annihilation  $b_\alpha$ ,  $d_\beta$  soient à droite et les opérateurs création  $b_\alpha^\dagger$ ,  $d_\beta^\dagger$  soient à gauche. On doit changer les signes en anticommutant les opérateurs. Il vient alors

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_\alpha \left[ b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right]$$

On vérifie  $Q|0\rangle = 0$  et le vide est bien de charge nulle. On prouve que :

$$\begin{aligned} [Q, b_\alpha(k)] &= -b_\alpha(k) & ; & \quad [Q, d_\alpha(k)] = +d_\alpha(k) \\ [Q, b_\alpha^\dagger(k)] &= +b_\alpha^\dagger(k) & ; & \quad [Q, d_\alpha^\dagger(k)] = -d_\alpha^\dagger(k) \end{aligned}$$

Utilisant ces relations d'anticommutation il est facile de voir et que

$$Q b_\alpha^\dagger|0\rangle = b_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad Q d_\alpha^\dagger|0\rangle = -d_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (2.2.31)$$

on dira alors que  $b_\alpha^\dagger|0\rangle$ , respectivement  $d_\alpha^\dagger|0\rangle$ , sont des états de charge +1, respectivement -1. De la même façon on voit que (pas de somme sur l'indice  $\alpha$ ) :

$$Q b_\alpha b_\alpha^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad Q d_\alpha d_\alpha^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad (2.2.32)$$

ce qui montre que  $b_\alpha$ , respect.  $d_\alpha$ , annihile un état de charge +1, respect. -1.

En conclusion :

- $b_\alpha^\dagger$  crée une particule d'impulsion  $k$ , de charge +1, dont la fonction d'onde est  $\bar{u}_\alpha(k)$
- $b_\alpha$  détruit une particule d'impulsion  $k$ , de charge +1, dont la fonction d'onde est  $u_\alpha(k)$
- $d_\alpha^\dagger$  crée une antiparticule d'impulsion  $k$ , de charge -1, dont la fonction d'onde est  $v_\alpha(k)$
- $d_\alpha$  détruit une antiparticule d'impulsion  $k$ , de charge -1, dont la fonction d'onde est  $\bar{v}_\alpha(k)$ .

On peut donc dire que  $\psi(x)$  porte une charge -1 puisqu'il détruit une particule de charge positive et crée une particule de charge négative.

On définit aussi l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= : \int d^3x i \psi^\dagger \partial_0 \psi : \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \omega_k \sum_\alpha \left[ b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right] \end{aligned}$$

On vérifie que  $H|0\rangle = 0$ , et que l'hamiltonien de tout état (non vide) est défini positif.

## 2.3 Le propagateur du fermion

D'après la discussion précédente on voit que  $\psi(x)$  détruit une particule à la coordonnée d'espace-temps  $x$  et crée une antiparticule en  $x$  et vice-versa pour  $\bar{\psi}(x)$ .  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  sont solutions de l'équation de Dirac libre et donc décrivent le mouvement d'une particule libre. On peut alors utiliser  $\psi\bar{\psi}$  pour décrire la propagation d'une particule libre. On définit

$$\theta(t - t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \sim \langle 0 | (b_\alpha + d_\alpha^\dagger)(b_\beta^\dagger + d_\beta) | 0 \rangle$$

qui crée à l'instant  $t'$ , à la coordonnée  $\vec{x}'$  une particule ( $b_\beta^\dagger | 0 \rangle$ ) et, à un instant ultérieur  $t$ , la détruit à la coordonnée  $\vec{x}$ . On décrit donc ainsi la propagation de la particule du point  $(t', \vec{x}')$  au point  $(t, \vec{x})$ . De même,

$$\theta(t' - t) \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (d_\beta + b_\beta^\dagger)(d_\alpha^\dagger + b_\alpha) | 0 \rangle$$

décrit la propagation de l'antiparticule ( $d_\beta^\dagger | 0 \rangle$ ) de la coordonnée  $(t, \vec{x})$  à la coordonnée  $(t', \vec{x}')$ . On définit alors le produit chronologique de deux opérateurs de type fermionique par :

$$\boxed{\mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(x') = \theta(t - t') \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(t' - t) \bar{\psi}(x') \psi(x)} \quad (2.3.33)$$

On remarque le signe  $(-)$ , réminiscence des relations d'anticommuation. Le propagateur de Feynman est, par définition, la valeur sur le vide du produit chronologique de deux opérateurs :

$$\boxed{\tilde{S}_F(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle} \quad (2.3.34)$$

On va maintenant trouver l'expression du propagateur de Feynman libre mais on montre, auparavant, que  $\tilde{S}_F(x - x')$  satisfait l'équation (la notation  $\partial_x$  indique que l'opérateur différentiel n'agit que sur la variable  $x$ ) :

$$\boxed{(i \not{\partial}_x - m) \tilde{S}_F(x - x') = i \delta^{(4)}(x - x')} \quad (2.3.35)$$

c'est à dire que le propagateur de Feynman est une fonction de Green de l'équation de Dirac.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
& (i \not{\partial}_x - m) [\theta(t-t') \psi_x \bar{\psi}_{x'} - \theta(t'-t) \bar{\psi}_{x'} \psi_x] \\
&= i\gamma_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t-t') \right) \psi_x \bar{\psi}_{x'} + \theta(t-t') (i \not{\partial}_x - m) \psi_x \bar{\psi}_{x'} \\
&\quad - i\gamma_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(t'-t) \right) \bar{\psi}_{x'} \psi_x - \theta(t'-t) \bar{\psi}_{x'} (i \not{\partial}_x - m) \psi_x \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{action de } \not{\partial} \text{ sur les fonctions } \theta} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{nul par \u00e9q. de Dirac sur } \psi} \\
&= i\gamma_0 \delta(t-t') \{\psi_x, \bar{\psi}_{x'}\} = i\delta^{(4)}(x-x')
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de l'expression de l'anticommutateur à temps égaux (2.2.27). (c.q.f.d.)

### • Propagateur dans l'espace des impulsions

Pour trouver la solution de l'éq. (2.3.35) on introduit la transformée de Fourier du propagateur :

$$\tilde{S}_F(x-x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} S_F(k) \quad (2.3.36)$$

et dans l'espace des impulsions l'équation de Green (2.3.35) devient :

$$\begin{aligned}
& (\not{k} - m) S_F(k) = i \\
& S_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m} = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}.
\end{aligned}$$

La transformation de Fourier inverse de  $S_F$  n'est pas définie à cause de la singularité  $k^2 - m^2$ . Il faut donc trouver une prescription pour contourner les pôles  $k_0 = \pm \sqrt{m^2 + k^2}$ . Celle-ci est imposée, en fait, par la causalité. Pour obtenir cette prescription, on retourne à la définition du propagateur de Feynman, éq. (2.3.34), dans laquelle on développera le champ  $\psi$  en ses composantes de Fourier. On rappelle les solutions de l'équation de Dirac libre :

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left( b_\alpha(k) u_\alpha(k) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(k) v_\alpha(k) e^{ik \cdot x} \right), \\
\bar{\psi}(x') &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\beta=1}^2 \left( b_\beta^\dagger(q) \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot x'} + d_\beta(q) \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot x'} \right),
\end{aligned}$$

et celle du propagateur :

$$\tilde{S}_F(x-x') = \langle 0 | \theta(t-t') \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(t'-t) \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle \quad (2.3.37)$$

On considère le premier terme soit,

$$\begin{aligned}
S_F^+(x-x') &= \theta(t-t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \\
&= \theta(t-t') \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \left( b_\alpha u_\alpha(k) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger v_\alpha(k) e^{ik \cdot x} \right) \\
&\quad \left( b_\beta^\dagger \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot x'} + d_\beta \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot x'} \right) | 0 \rangle
\end{aligned}$$



Les opérateurs  $d_\alpha$  annihilent le vide,  $\Rightarrow d_\beta|0\rangle = 0$ ,  $\langle 0|d_\alpha^\dagger = 0$ . On peut donc écrire

$$\dots \langle 0|b_\alpha(k)b_\beta^\dagger(q)|0\rangle = \dots + \langle 0|\{b_\beta(k), b_\beta^\dagger(q)\}|0\rangle - \langle 0|b_\beta^\dagger(q)b_\alpha(q)|0\rangle$$

Les relations d'anticommutation (2.2.25) donnent :

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} = (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q),$$

un scalaire que l'on peut sortir de  $\langle 0| \dots |0\rangle$ . On peut alors utiliser  $\langle 0|0\rangle = 1$ .

Remarque : en permutant  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x')$  pour construire  $\bar{\psi}(x')\psi(x)$  on a permuté uniquement les opérateurs  $b_\alpha, d_\alpha^\dagger, \dots$  mais non les spineurs. C'est-à-dire que l'on garde toujours les spineurs colonnes  $u_\alpha, v_\alpha$  à gauche et les spineurs lignes  $\bar{u}_\beta, \bar{v}_\beta$  à droite de telle sorte que  $S_F$  est bien une matrice  $4 \times 4$  (et non un scalaire que l'on aurait obtenu si on avait considéré  $\bar{u}_\alpha u_\alpha$ !).

On a donc

$$S_F^+(x - x') = \theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left( \sum_{\alpha, \beta} u_\alpha(k) \bar{u}_\beta(q) \delta_{\alpha\beta} \right) e^{iqx'} e^{-ikx} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(k - q) \quad (2.3.38)$$

- On fait l'intégration  $\int d^3k \delta^{(3)}(k - q) \Rightarrow k = q$
- On utilise l'équation (2.2.23) pour réduire  $\sum_\alpha u_\alpha(q) \bar{u}_\alpha(q) = (\not{q} + m)$ .

Il vient alors :

$$S_F^+(x - x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} (\not{q} + m) e^{-iq(x-x')} \theta(t - t').$$

Dans cette équation :

$$\begin{aligned} q(x - x') &= \omega_q(t - t') - \vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') \\ \not{q} &= \omega_q \gamma^0 - \vec{q} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

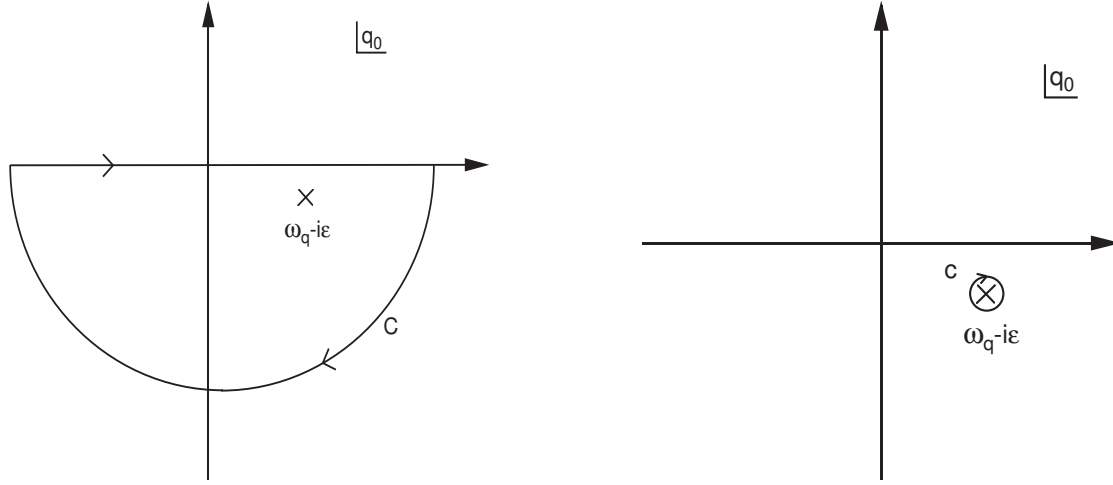
La variable énergie est  $\omega_q = \sqrt{(m^2 + \vec{q}^2)}$ , i.e. la particule est sur couche de masse quand elle se propage de  $(t', \vec{x}')$  à  $(t, \vec{x})$ . On peut alors écrire :

$$S_F^+(x - x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} (\not{q} + m) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left[ e^{-i\omega_q(t-t')} \theta(t - t') \right] \quad (2.3.39)$$

On va maintenant trouver une représentation intégrale de la fonction de Heavyside. Pour cela on considère dans le plan complexe  $q_0$  l'intégrale suivante (voir figure) :

$$F^+(t - t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} \quad (2.3.40)$$

qui a un pôle simple dans le demi-plan inférieur et pas d'autre singularité.

FIGURE 2.1 – Contour d'intégration dans le plan d'énergie  $q^0$  complexe.

- Si  $t - t' < 0$ , on peut évaluer l'intégrale en fermant le contour dans le demi plan supérieur par un demi grand cercle qui ne contribue pas, puisque  $\text{Im}q^0(t - t') \rightarrow -\infty$  :

$$e^{-iq^0(t-t')} \sim e^{(\text{Im}q_0)(t-t')} \rightarrow 0$$

Puisqu'il n'y a pas de singularité dans le demi-plan supérieur cette intégrale est nulle, par le théorème des résidus (de Cauchy) :

$$F^+(t - t') \equiv 0, \quad \text{si } t - t' < 0.$$

- On suppose maintenant  $t - t' > 0$ , et on ferme le contour dans le demi plan inférieur le long du demi grand cercle, dont la contribution tend exponentiellement vers 0 quand le contour tend vers l'infini. Par déformation du contour il suffit alors d'évaluer l'intégrale le long d'un petit cercle, autour du pôle, dont le rayon tend vers 0. Le théorème de Cauchy donne alors :

$$F^+(t - t') = -e^{-i\omega_q(t-t')} \quad \text{si } t - t' > 0$$

On a donc finalement :

$$F^+(t - t') = -\theta(t - t') e^{-i\omega_q(t-t')} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} \quad (2.3.41)$$

On peut remarquer le signe (-) dans cette équation, qui vient du fait que le contour  $\mathcal{C}$  est orienté dans le sens opposé au sens trigonométrique. On utilisera aussi plus tard le résultat :

$$F^-(t - t') = \theta(t' - t) e^{i\omega_q(t-t')} = \frac{1}{2\pi i} \int dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \quad (2.3.42)$$

qui se démontre de la même manière que la formule précédente. Revenant au propagateur on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_F^+(x-x') &= -\frac{1}{i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{e^{-iq_0(t-t') + i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} (\not{q} + m) \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_q} \frac{e^{-iq\cdot(x-x')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} (\not{q} + m) \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

où maintenant :

$$\begin{aligned} q\cdot(x-x') &= q^0(t-t') - \vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') \\ \not{q} &= q^0\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma} \end{aligned}$$

donc, dans le numérateur, on considère que la particule est "hors-couche" puisque  $q^0 \neq \omega_q$ .

On considère maintenant l'autre partie du propagateur :

$$S_F^-(x-x') = \theta(t'-t) \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle$$

On peut voir aisément que seul le terme proportionnel à :

$$\langle 0 | d_\beta(q) d_\alpha^\dagger(k) | 0 \rangle$$

ne s'annule pas et utilisant les relations d'anticommutation on a :

$$S_F^-(x-x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{iq\cdot(x-x')} \sum_\alpha v_\alpha(q) \bar{v}_\alpha(q) \theta(t'-t)$$

Après usage de l'équation (2.2.23) on a :

$$\begin{aligned} S_F^-(x-x') &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} (\not{q} - m) \left[ e^{i\omega_q(t-t')} \theta(t'-t) \right] \\ &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{-i\vec{q}\cdot(x-x')} \frac{dq_0}{2\pi} (-\not{q} + m) \frac{e^{-iq_0(t-t')}}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \end{aligned}$$

où la fonction  $\theta$  a été éliminée via l'éq. (2.3.42). Jusqu'à maintenant, dans l'expression  $-\not{q} + m$  on avait considéré la particule sur couche de masse c'est à dire que :

$$-\not{q} + m = -\omega_q \gamma^0 + \vec{q} \vec{\gamma} + m$$

que l'on peut maintenant écrire :

$$-\not{q} + m = q^0 \gamma^0 + \vec{q} \vec{\gamma} + m$$

à cause du pôle  $q^0 = -\omega_q$ . Pour reconstruire la bonne combinaison  $q^0 \gamma^0 - \vec{q} \vec{\gamma}$ , de même que le bon exposant dans l'exponentielle, on fait dans l'intégrale  $\int d^3q$  le changement de variable  $\vec{q} = -\vec{q}'$  et  $\int d^3q = \int d^3q'$ . Revenant à la notation  $\vec{q}' = \vec{q}$  on peut alors écrire

$$\begin{aligned} S_F^-(x-x') &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{dq^0}{2\pi} \frac{1}{2\omega_q} e^{-iq_0(t-t') + i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{(q^0 \gamma^0 - \vec{q} \vec{\gamma} + m)}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_q} e^{-iq\cdot(x-x')} \frac{\not{q} + m}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \end{aligned}$$

où le vecteur  $q = (q^0, \vec{q})$  est maintenant hors-couche. On peut remarquer alors que les numérateurs de  $S_F^+$  et  $S_F^-$  sont identiques. On peut donc les combiner pour obtenir

$$\begin{aligned}\tilde{S}_F(x-x') &= S_F^+(x-x') - S_F^-(x-x') \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-x')} (\not{q} + m) \frac{1}{2\omega_q} \left( \frac{1}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \right),\end{aligned}$$

soit,

$$\boxed{\tilde{S}_F(x-x') = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-x')} \frac{(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (2.3.44)$$

où on a écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\omega_q} \left( \frac{1}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \right) &= \frac{1}{q^{02} - \omega_q^2 + 2\omega_q i\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0_+ \\ &= \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0_+\end{aligned}$$

en notation covariante. Par comparaison avec l'éq. (2.3.36), on en tire la forme du propagateur dans l'espace des impulsions (transformation de Fourier)

$$\boxed{S_F(q) = i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon}} \quad (2.3.45)$$

On voit que sous la forme éq. (2.3.37), définie dans l'espace des coordonnées, le propagateur correspond,

- quand  $t' < t$ , à la propagation d'une particule sur couche de masse ( $q^0 = \omega_q$ ) des coordonnées  $(t', \vec{x}')$  à  $(t, \vec{x})$
- quand  $t' > t$  à la propagation d'une antiparticule sur couche de masse ( $q^0 = -\omega_q$ ), des coordonnées  $(t, \vec{x})$  à  $(t', \vec{x}')$ .

En revanche, sous la forme éq. (2.3.45), écrite dans l'espace des impulsions, le propagateur est interprété comme décrivant la propagation d'une particule virtuelle ( $q^0 \neq \pm\omega_q$ ). On passe d'une forme à l'autre, via l'éq. (2.3.36) et le théorème de Cauchy, qui permet par fermeture du contour d'intégration dans le plan de l'énergie complexe, d'isoler le pôle d'énergie positive ou le pôle d'énergie négative suivant le signe de  $t-t'$ . Ceci est encapsulé dans la prescription "iε" de Feynman où  $\epsilon \rightarrow 0_+$ .

## 2.4 Le champ du photon libre

On rappelle l'équation du mouvement du champ du photon en QED (éq.(2.1.12)) :

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &\equiv (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial^\mu) A_\mu(x) \\ &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = e J^\nu(x) \quad \text{théorie en interaction} \\ &= 0 \quad \text{théorie libre}\end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Le champ  $A_\mu(x)$  (potentiel vecteur en théorie classique) qui décrit la polarisation du photon, a quatre composantes indépendantes ( $A_0, A_1, A_2, A_3$ ) soit quatre degrés de liberté. Or, on sait que le

photon n'a que deux degrés de liberté correspondant à ses deux états de polarisation transverse : cf. la théorie des représentations du groupe de Poincaré pour une particule de masse nulle. La physique est indépendante du choix de la jauge c'est à dire du choix :

$$A'_\mu(x) \text{ ou } A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x).$$

En effet, si  $A'_\mu$  est solution de l'équation ci-dessus (libre ou en interaction)  $A_\mu(x)$  est aussi solution puisque :

$$(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\nu \alpha(x) \equiv 0 \quad \forall \alpha(x).$$

On peut donc utiliser cette invariance de jauge pour réduire le nombre de degrés de liberté de  $A_\mu$  en imposant la condition de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  par le choix  $\partial^2 \alpha = -\partial_\mu A'^\mu(x)$ . L'équation du photon libre devient alors ( $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ ) :

$$\square A_\mu(x) = 0.$$

On peut éliminer un autre degré de liberté en annulant une des coordonnées de  $A_\mu$  ( $A_0$  par exemple) à l'aide de la translation :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x), \quad \lambda(x) \text{ telle que } \square \lambda(x) = 0$$

(choisir  $\lambda(x) = iae^{-ik \cdot x}$  par exemple) de sorte que l'on reste avec deux coordonnées indépendantes.

#### • Quantification

Le lagrangien du photon libre, cependant, pose problème lorsque l'on veut quantifier la théorie. Introduisant la variable conjuguée de  $A_\nu(x)$ ,

$$\pi_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A^\nu} = -\partial_0 A_\nu + \partial_\nu A_0 = F_{\nu 0} \quad (2.4.47)$$

les relations de commutation à temps égal ( $x_0 = y_0$ ) sont :

$$\boxed{[A_\mu(x), \pi_\nu(y)] = i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y), \quad [A_\mu(x), A_\nu(y)] = [\pi_\nu(x), \pi_\nu(y)] = 0.} \quad (2.4.48)$$

On voit que la relation  $[A_0(x), \pi_0(y)] = i \delta^{(3)}(x - y)$  ne peut être satisfaite puisque  $\pi_0(y) = 0$ .

#### • Jauges covariantes

Une solution consistera à briser l'invariance de jauge au niveau des opérateurs et on la restaurera uniquement quand on considèrera la valeur des opérateurs sur des états physiques. C'est la méthode de Gupta-Bleuler. On considèrera donc le lagrangien modifié (photon libre) "cassant" l'invariance de jauge,

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu(x))^2, \quad (2.4.49)$$

où le terme  $(\partial_\mu A^\mu)^2$  est le terme de "fixation" de jauge pour une jauge covariante. L'impulsion conjuguée devient :

$$\pi_\nu(x) = F_{\nu 0}(x) - \lambda g_{\nu 0} \partial_\mu A^\mu(x), \quad \text{soit,}$$

$$\boxed{\pi_0 = -\lambda \partial_\rho A^\rho = -\lambda (\dot{A}_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad \text{et} \quad \pi_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i.} \quad (2.4.50)$$

$\pi_0$  est non nul en général et les  $\pi_i(x)$  ne sont pas affectés car ils ne dépendent pas de  $\lambda$ . L'équation du mouvement de la théorie modifiée devient :

$$\boxed{\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu A^\nu = 0} \quad (2.4.51)$$

Si on choisit  $\lambda = 1$  l'équation du mouvement se simplifie en :

$$\square A_\mu = 0. \quad (2.4.52)$$

qui sont les équations des composantes du champ du photon en jauge de Feynman. Cela correspond à quatre équations de Klein-Gordon indépendantes, une pour chaque composante de  $A_\mu(x)$ . On cherche évidemment la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes. Pour cela on introduit, dans le repère où le photon est longitudinal,  $k = (k_0, 0, 0, k)$ , une base de quatre vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} \epsilon^{(0)\mu} &= (1, 0, 0, 0), & \text{vecteur de polarisation "scalaire"} \\ \epsilon^{(1)\mu} &= (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^{(2)\mu} = (0, 0, 1, 0), & \text{vecteurs de polarisation "transverse"} \\ \epsilon^{(3)\mu} &= (0, 0, 0, 1), & \text{vecteur de polarisation "longitudinale"}. \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

Ces vecteurs satisfont à  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}\epsilon^{(\kappa')\mu} = 0$  si  $\kappa \neq \kappa'$ ,  $\epsilon_\mu^{(0)}\epsilon^{(0)\mu} = 1$  et  $\epsilon_\mu^{(i)}\epsilon^{(i)\mu} = -1$  pour chaque  $i = 1, 2, 3$ . On écrit la solution de l'éq. (2.4.52) :

$$\boxed{A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \sum_{\kappa=0}^3 \left( a^{(\kappa)} \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x} + a^{(\kappa)\dagger} \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{ik \cdot x} \right)} \quad (2.4.54)$$

avec  $\omega = |\vec{k}|$  (équation Klein-Gordon de masse nulle).

Normalisation :

$$\boxed{\epsilon_\mu^{(\kappa)}\epsilon^{(\kappa')\mu} \equiv \epsilon^{(\kappa)} \cdot \epsilon^{(\kappa')} = g_{\kappa\kappa'} ; \quad \text{soit } \epsilon^{(0)} \cdot \epsilon^{(0)} = 1, \quad \epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(i)} = -1} \quad (2.4.55)$$

Le tenseur somme sur les polarisations satisfait à :

$$\boxed{\sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 g_{\kappa\kappa'} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')} = g_{\mu\nu} \Leftrightarrow \sum_{\kappa=0}^3 \xi_\kappa \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} = -g_{\mu\nu}, \quad \xi_0 = -1, \quad \xi_i = +1} \quad (2.4.56)$$

Les deux formulations sont strictement équivalentes et nous utiliserons l'une ou l'autre suivant le contexte.

Exercice : Vérifier explicitement les relations (2.4.55) et (2.4.56).

Pour le choix de jauge  $\lambda = 1$  (*jauge de Feynman*) on peut obtenir, à partir des relations de commutation canoniques (2.4.48) et de la forme éq. (2.4.54) de  $A_\mu(x)$ , les relations de commutation entre les opérateurs  $a^{(\kappa)}$  et  $a^{(\kappa)\dagger}$  qui seront interprétés comme opérateurs d'annihilation et de création du

photon. Pour le cas d'une jauge covariante générale,  $\lambda \neq 1$ , la solution de l'équation du mouvement n'a pas une forme simple et l'obtention des relations de commutation des opérateurs est beaucoup plus compliquée.

• **Quantification du champ du photon en jauge de Feynman**

Partant de la solution, éq. (2.4.54), de l'équation du mouvement et utilisant les relations de quantification canonique (éqs. (2.4.48)) entre  $A_\mu$  et  $\pi_\nu$ , on montre que les opérateurs  $a^{(\kappa)}$ ,  $a^{(\kappa)\dagger}$  de la décomposition en ondes planes de  $A_\mu$  satisfont les relations de commutation :

$$\boxed{\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(k')] &= -2\omega_k (2\pi)^3 g^{\kappa\kappa'} \delta^{(3)}(k - k') \\ [a^{(\kappa)}, a^{(\kappa')}] &= [a^{(\kappa)\dagger}, a^{(\kappa')\dagger}] = 0. \end{aligned}} \quad (2.4.57)$$

Démonstration

On extrait d'abord  $a^{(\kappa)}(q)$  de  $A^\mu(x)$  par une transformation de Fourier inverse en considérant :

$$\int d^3x e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)} A^\mu(x).$$

avec  $f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) = f(x) \partial_0 g(x) - (\partial_0 f(x)) g(x)$ . Injectant la représentation éq. (2.4.54) de  $A^\mu(x)$ , on en tire facilement :

$$\begin{aligned} a^{(\kappa)}(q) &= -\xi_\kappa \int d^3x e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x) \\ a^{(\kappa)\dagger}(q) &= \xi_\kappa \int d^3x e^{-iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x) \end{aligned}$$

où  $\xi_\kappa$  est défini en éq. (2.4.56). Pour construire les commutateurs entre opérateurs création et annihilation il est nécessaire maintenant de trouver les commutateurs entre les  $A^\mu(x)$  et les  $\dot{A}^\nu(y) = \partial_0 A^\nu(y)$  à partir des éqs. (2.4.48) et de la définition éq. (2.4.50) des  $\Pi^\nu(y)$ . On trouve ainsi que :

$$[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = -ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y), \quad (2.4.58)$$

tous les autres commutateurs étant nuls. On peut alors évaluer :

$$\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(q), a^{(\kappa')\dagger}(q')] &= -\xi_\kappa \xi_{\kappa'} \int d^3x d^3y [e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x), e^{-iq' \cdot y} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\nu^{(\kappa')}(q') A^\nu(y)] \\ &= -\xi_\kappa \xi_{\kappa'} \int d^3x d^3y \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) \epsilon_\nu^{(\kappa')}(q') e^{i(q \cdot x - q' \cdot y)} g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y) (\omega_q + \omega_{q'}) \\ &= -2\omega_q (2\pi)^3 g^{\kappa\kappa'} \delta^{(3)}(q - q'). \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

On prouve la nullité des autres commutateurs suivant la même procédure.

Les  $a^{(\kappa)}$ ,  $a^{(\kappa)\dagger}$  deviennent les opérateurs de destruction et d'annihilation habituels d'un champ de Klein-Gordon : e.g.  $a^{(0)\dagger}$  crée un  $\gamma$  "scalaire",  $a^{(3)\dagger}$  un  $\gamma$  "longitudinal" et  $a^{(1)\dagger}$ ,  $a^{(2)\dagger}$  créent un  $\gamma$  en état de polarisation transverse. Il faut cependant remarquer le facteur  $-g^{\kappa\kappa'}$  dans la première relation ci-dessus qui est (-1) pour  $\kappa = \kappa' = 0$  alors qu'il est +1 pour les autres valeurs  $\kappa = \kappa' = 1, 2, 3$  en accord avec les relations de commutation d'un champ scalaire (ce facteur vient

des condition de normalisation des vecteurs  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$  données ci-dessus). Si on considère un état à une particule de polarisation  $\kappa$  :

$$|1 \rangle_\kappa = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(k) a^{(\kappa)\dagger}(k) |0 \rangle$$

on peut calculer sa normalisation :

$$\begin{aligned} \langle 1 | 1 \rangle_\kappa &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} f(k)^* f(q) \langle 0 | [a^{(\kappa)}, a^{(\kappa)\dagger}] | 0 \rangle \\ &= +\xi_\kappa \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} |f(k)|^2 \end{aligned}$$

L'état de polarisation scalaire a donc une norme négative  $\xi_0 = -1$  alors que les autres états de polarisation ont une norme positive comme il se doit. On peut construire l'hamiltonien de façon habituelle :

$$H =: \int d^3x (\pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}) :$$

et trouver :

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_\kappa \omega_k \xi_\kappa a^{(\kappa)\dagger}(k) a^{(\kappa)}(k) .$$

Appliqué à l'état à 1 photon d'impulsion  $k$ , de polarisation  $\kappa$  :

$$H |1_k^\kappa \rangle = \omega_k \xi_\kappa a_k^{(\kappa)\dagger} |0 \rangle$$

Le signe  $\xi_0 = -1$ , associé au mode scalaire, dans l'expression de  $H$  est nécessaire pour que l'énergie soit définie positive puisque l'énergie de tout état à une particule (y compris celui de polarisation scalaire) contribue une énergie  $\omega_k$ . De même l'opérateur de comptage est défini par :

$$N_k = \xi_\kappa a^{(\kappa)\dagger}(k) a^{(\kappa)}(k).$$

### • Etats physiques

Pour que la théorie fondée sur le lagrangien  $\mathcal{L}_\lambda$  qui brise l'invariance de jauge décrive bien QED dont le lagrangien est  $\mathcal{L} = -(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  on va imposer la condition de Lorentz uniquement lorsque les opérateurs agissent sur des états physiques (méthode de Gupta-Bleuler) c'est-à-dire :

$$\langle \phi | \partial_\mu A^\mu(x) | \phi \rangle = 0, \quad | \phi \rangle \text{ état physique}$$

Il est suffisant en fait de choisir :

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) | \phi \rangle = 0 \tag{2.4.60}$$

où

$$A_\mu^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 \epsilon_\mu^{(\kappa)} a^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x}.$$

En effet on a alors :

$$\langle \phi | \partial^\mu A_\mu^- = 0.$$



On voit aisément que :

$$\partial^\mu A_\mu^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 (k^\mu \cdot \epsilon_\mu^{(\kappa)}) a^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x}$$

où la somme ne concerne que les états scalaire et longitudinal puisque l'on a les relations de transversité :

$$k \cdot \epsilon^{(1)} = k \cdot \epsilon^{(2)} = 0.$$

Sur les états physiques on aura alors nécessairement (voir la définitions des  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$ ) :

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^{+\mu}(x)|\phi\rangle = 0 &\Rightarrow (\omega_k a^{(0)} - k a^{(3)})|\phi\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^{(0)} - a^{(3)})|\phi\rangle = 0 \quad \forall k. \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

Pour calculer l'énergie d'un état physique on peut remarquer :

$$\langle \phi | a^{(3)\dagger} a^{(3)} - a^{(0)\dagger} a^{(0)} | \phi \rangle = \langle \phi | a^{(3)\dagger} (a^{(3)} - a^{(0)}) | \phi \rangle = 0$$

et

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle \phi | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=1}^2 \omega_k a^{(\kappa)\dagger} a^{(\kappa)} | \phi \rangle \quad (2.4.62)$$

Seuls les photons transverses contribuent à l'énergie. Ceci est vrai pour n'importe quel observable. De façon qualitative on peut dire que les contributions de photons scalaires et longitudinaux se compensent dans tout observable physique.

#### • Jauges non covariantes<sup>4</sup>

Dans ce cas, le terme de fixation de jauge est, par exemple, de la forme  $n_\mu A^\mu$  où  $n_\mu$  est un quadrivecteur arbitraire constant et le lagrangien est :

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (n_\mu A^\mu(x))^2, \quad (2.4.63)$$

de sorte que l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\square A_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) - \lambda n_\mu n_\nu A^\nu(x) = 0.} \quad (2.4.64)$$

Avec ce choix le moment conjugué  $\pi^0(x)$  est toujours nul et on n'a pas résolu le problème qui motivait l'introduction dans le lagrangien d'un terme brisant la symétrie! On peut cependant éliminer les coordonnées temporelles si l'on choisit  $n_\nu A^\nu = 0$  avec  $n_\nu = (1, 0, 0, 0)$ . Si on impose de plus la condition de Lorentz  $\partial_\nu A^\nu(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  (*jauge de Coulomb*) on élimine les états de polarisation scalaire et longitudinale et l'équation du mouvement se simplifie ( $\square A_\mu(x) = 0$ ) et on peut écrire :

$$A_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\kappa=1}^2 \left( a^{(\kappa)} \epsilon_i^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x} + a^{(\kappa)\dagger} \epsilon_i^{(\kappa)} e^{ik \cdot x} \right) \quad (2.4.65)$$

4. Pour une revue, voir G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1067

avec seulement les polarisations transverses (physiques). Il faut alors quantifier le système sous les contraintes  $n \cdot A = \partial \cdot A = 0$  ce qui est une tâche ardue.

Un peu de terminologie : la condition  $n \cdot A = 0$  avec,

\*  $n^2 < 0$ , *jauge axiale pure*

\*  $n^2 = 0$ , *jauge du cône de lumière*

\*  $n^2 > 0$ , *jauge temporelle*.

## 2.5 Le propagateur du photon

Comme pour le cas du fermion on définit le produit chronologique de deux champs  $A_\mu(x)$  et  $A_\nu(y)$  et le propagateur du photon qui est la valeur sur le vide de ce produit :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(x)A_\nu(y)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \theta(x_0 - y_0) A_\mu(x)A_\nu(y) + \theta(y_0 - x_0) A_\nu(y)A_\mu(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.5.66)$$

### • Jauges covariantes

On montre que le propagateur, en jauge covariante, satisfait à l'équation de Green :

$$\boxed{(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = i g_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y)} \quad (2.5.67)$$

Exercice : Pour vérifier explicitement l'équation ci-dessus, c'est un peu plus compliqué que dans le cas du fermion à cause des opérateurs  $\partial_0^2$  et  $\partial_\mu\partial_\nu$  qui, on le rappelle, n'agissent que sur la variable  $x$ .

#### Démonstration

On considère dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \square g_{\mu\nu} \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) &= (\partial_0^2 - \partial_i^2) \tilde{G}_\mu^\rho(x-y) \\ &= \partial_0 \{ \delta(x_0 - y_0) [A_\mu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \partial_0 A_\mu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_0 A_\mu(x) \} \\ &\quad - \theta(x_0 - y_0) \partial_i^2 A_\mu(x) A^\rho(y) - \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_i^2 A_\mu(x) \end{aligned}$$

L'opérateur  $\partial_i$  n'agit pas sur les fonction  $\theta$  tandis que  $\partial_0\theta(\pm x_0 \mp y_0) = \pm\delta(x_0 - y_0)$ , d'où l'apparition du commutateur de deux champs qui est, en fait, nul par l'éq. (2.4.48). L'action de l'opérateur  $\partial_0$  de la deuxième ligne donne de nouveau la fonction  $\delta(x_0 - y_0)$  avec comme coefficient le commutateur du champ et de sa dérivée temporelle, d'où :

$$\square g_{\mu\nu} \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = \delta(x_0 - y_0) [\partial_0 A_\mu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \square g_{\mu\nu} A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \square g_{\mu\nu} A^\nu(x),$$

où on a reconstruit l'action de l'opérateur  $\square g_{\mu\nu}$  sur le champ  $A^\nu(x)$ . De façon similaire on montre facilement que :

$$\partial_\nu \tilde{G}^{\nu\rho} = \theta(x_0 - y_0) \partial_\nu A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_\nu A^\nu(x)$$

puisque même si  $\nu = 0$  et agit sur la fonction  $\theta$ , la fonction  $\delta(x_0 - y_0)$  produite aura comme coefficient un commutateur de champs qui est nul. Finalement on a :

$$\partial_\mu \partial_\nu \tilde{G}^{\nu\rho} = g_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) [\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x).$$

Recollant tous les morceaux pour construire le membre de gauche de l'éq. (2.5.67) on remarque que le coefficient des fonctions  $\theta(\pm x_0 \mp y_0)$  est nul par l'équation du mouvement en jauge covariante,

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) A^\nu(x) = 0,$$

de sorte qu'il reste un commutateur un peu compliqué :

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x - y) = \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_\mu(x) - (1 - \lambda)g_{\mu 0}\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)].$$

Pour  $\mu = 0$ , le membre de droite est

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_\mu(x) - (1 - \lambda)g_{\mu 0}\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)] &= \delta(x_0 - y_0)\{-[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x), A^\rho(y)] - [\pi_0(x), A^\rho(y)]\} \\ &= i g_0^\rho \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat on a utilisé la définition de  $\pi_0(x)$  (éq. (2.4.50)), la relation de commutation (2.4.48) et le fait que  $[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x), A^\rho(y)] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(x), A^\rho(y)] = 0$ . Pour le cas  $\mu = i$ , le membre de droite est :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_i(x), A^\rho(y)] &= \delta(x_0 - y_0)[\partial_i A_0(x) - \pi_i(x), A^\rho(y)] \\ &= \delta(x_0 - y_0)[A^\rho(y), \pi_i(x)] = i g_i^\rho \delta^{(4)}(x - y), \end{aligned}$$

en faisant référence aux mêmes équations que pour le cas  $\mu = 0$ .

On résout l'équation de Green en introduisant la transformée de Fourier :

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} G_{\mu\nu}(k)$$

qui satisfait à l'équation :

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu] G^{\nu\rho}(k) = i g_\mu^\rho.$$

La solution la plus générale a la forme :

$$G^{\nu\rho}(k) = A(k^2)g^{\nu\rho} + B(k^2)k^\nu k^\rho.$$

L'équation de Green contraint les coefficients scalaires  $A(k^2)$  et  $B(k^2)$  et on trouve finalement :

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} - i \left( \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}$$

Il faut choisir une prescription pour contourner le pôle (à masse nulle)  $k^2 = 0$ . Comme dans le cas du propagateur du fermion, la causalité impose le choix " $+i\epsilon$ " et donc  $k^2 \rightarrow k^2 + i\epsilon$ , soit :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)} \quad (2.5.68)$$

qui est la forme la plus générale du propagateur en *jauge covariante*. Dans la discussion précédente on avait choisi  $\lambda = 1$ , *jauge de Feynman* et donc,

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}.} \quad (2.5.69)$$

Si  $\lambda \rightarrow \infty$ , on a la *jauge de Landau* :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}}. \quad (2.5.70)$$

### • Jauges non covariantes

Dans ce cas, la densité lagrangienne éq. (2.4.63) conduit, à l'équation de Green suivante :

$$\boxed{(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - \lambda n_\mu n_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = i g_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y)}, \quad (2.5.71)$$

et après avoir effectué la transformée de Fourier, à :

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - \lambda n_\mu n_\nu] G^{\nu\rho}(k) = i g_\mu^\rho.$$

On cherche la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des tenseurs  $g^{\nu\rho}$ ,  $k^\nu n^\rho + k^\rho n^\nu$ ,  $k^\nu k^\rho$  et  $n^\nu n^\rho$ . On trouve finalement le propagateur :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2} \left( n^2 + \frac{k^2}{\lambda} \right) \right)}. \quad (2.5.72)$$

### Exercice

On peut remarquer que si on avait considéré, au lieu de  $\mathcal{L}_\lambda$  (qui ne respecte pas l'invariance de jauge), le lagrangien  $\mathcal{L}_{QED}$  initial, on n'aurait pas pu définir le propagateur car l'équation

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G^{\nu\rho} = i g_\mu^\rho$$

n'a pas de solution pour  $G^{\mu\rho}$ . Le prouver.

### 2.5.1 Remarques sur le propagateur du photon

Comme on l'a fait pour le fermion on peut construire explicitement le propagateur en jauge de Feynman dans l'espace des coordonnées et extraire ensuite sa forme dans l'espace des impulsions. Pour cela on utilise la représentation éq. (2.4.54) du champ du photon, avec le choix éqs. (2.4.53) des vecteurs polarisation. On trouve alors :

$$G_{\mu\nu}(k) = i \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (2.5.73)$$

avec

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = - \sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 g_{\kappa\kappa'} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')}. \quad (2.5.74)$$

Le tenseur  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  apparaît comme la somme sur les états de polarisation de  $\epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')}$  et le facteur  $g_{\kappa\kappa'}$  est la conséquence des relations de commutation (2.4.57). D'après l'éq. (2.4.56), on a :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}}, \quad (2.5.75)$$

et on retrouve bien la forme (2.5.69) du propagateur. On remarque que la trace de  $-\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu}$  compte simplement le nombre d'états de polarisation du champ  $A_{\mu}$ , à savoir 4.

En *jauge de Landau* on remarque que le propagateur satisfait à la relation  $k^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$  ce qui implique une contrainte sur le champ  $A_{\mu}$ . Corrélativement, la trace du numérateur :

$$\text{Tr}(g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}/k^2) = 3 \quad (2.5.76)$$

ce que l'on interprète par le fait le champ du photon contient 3 degrés de liberté dont un non physique.

En *jauge axiale* on fait d'habitude le choix  $\lambda \rightarrow \infty$  et le propagateur devient (éq. (2.5.72)) :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{\mu\nu} = \left( g_{\mu\nu} - \frac{(k_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}k_{\nu})}{k \cdot n} + \frac{n^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k \cdot n)^2} \right)}, \quad (2.5.77)$$

qui satisfait deux contraintes  $n^{\mu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = 0$  et, pour  $k^2$  de genre lumière,  $k^{\mu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = 0$ . On vérifie facilement que la trace du tenseur entre parenthèses est bien égale à 2 comme il se doit lorsque le photon est sur couche de masse. Avec ce choix de jauge seuls les degrés de polarisation physique sont inclus dans le calcul.

### 2.5.2 Indépendance de jauge et conservation du courant

Les différentes formes du propagateur diffèrent par des termes contenant  $k_{\mu}$  et on peut se demander si les prédictions physiques en QED vont dépendre du choix du propagateur. La réponse est négative puisque le photon est couplé à un courant conservé,  $k_{\mu}J^{\mu} = 0$ , où  $J^{\mu}(x) = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ . On peut le voir de la façon suivante en ce qui concerne les jauges covariantes. Du lagrangien  $\mathcal{L}_{\lambda}$ , voir éq. (2.4.49), du photon en interaction :

$$\mathcal{L}_{\lambda} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (\partial_{\mu}A^{\mu}(x))^2 + \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x) \cancel{A}(x)\psi(x), \quad (2.5.78)$$

on tire facilement l'équation du mouvement du photon :

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_{\mu}\partial_{\nu}) A^{\nu}(x) = e J_{\mu}(x),$$

dont la solution s'exprime à l'aide de la fonction de Green :

$$A_{\nu}(x) = \int d^4y \tilde{G}_{\nu\mu}(x - y) J^{\mu}(y)$$

Ceci est évident par simple substitution dans l'équation du mouvement. Introduisant la transformée de Fourier du courant :

$$J^{\mu}(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j^{\mu}(k) e^{-ik \cdot y}$$

ainsi que celle du propagateur avec la solution s'écrit alors :

$$A_{\nu}(x) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \left[ \frac{g_{\nu\mu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] j^{\mu}(k)$$

et il devient évident que les termes dépendant de jauge s'annulent par conservation du courant  $k_\mu j^\mu(k) = 0$ . En conclusion, les résultats des calculs ne doivent pas dépendre du choix particulier fait pour la forme du propagateur du photon. A cause de cette propriété il n'est pas nécessaire dans les calculs perturbatifs d'imposer la condition de Lorentz sur le champ  $A_\mu(x)$  puisque le photon étant soit émis soit absorbé par un courant conservé les états de polarisation scalaire et longitudinale sont automatiquement découplés du monde physique.

• **Remarque**

On considère le lagrangien  $\mathcal{L}_\lambda$  éq. (2.5.78) avec le terme d'interaction  $-J_\mu(x)A^\mu(x)$ . Ce terme est invariant si on change "la jauge du photon" c'est à dire si on fait  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$ . On a alors :

$$\delta \int d^4x J_\mu A^\mu = \int d^4x J_\mu(x) \partial^\mu \alpha(x) = \int d^4x [\partial^\mu (J_\mu(x) \alpha(x)) - (\partial^\mu J_\mu(x)) \alpha(x)] = 0.$$

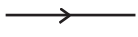

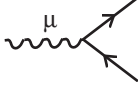







Dans la dernière forme de l'intégrale ci-dessus, la dérivée totale  $\partial^\mu (J_\mu(x) \alpha(x))$  ne contribue pas (pas de sources à l'infini) et le terme  $(\partial^\mu J_\mu(x))$  est nul par conservation du courant. Ceci illustre bien le rôle fondamental joué par la conservation du courant en QED.

## 2.6 Règles de Feynman de QED

Nous avons dérivé ci-dessus les éléments de base qui permettent de construire le développement perturbatif en QED. Ce développement s'exprime à l'aide de règles qui permettent d'écrire "l'élément de matrice invariant"  $\mathcal{M}_{fi}$ , relié à la matrice  $S$  par

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + i T_{fi} \\ T_{fi} &= (2\pi)^4 \delta(\Sigma p_{ext}) \mathcal{M}_{fi}, \end{aligned}$$

à tout ordre de la théorie des perturbations. Les règles de Feynman sont simplement énoncées ici. Pour une démonstration on peut consulter les livres de Bjorken et Drell ou Mandl et Shaw ou Ryder ou ... On remarque seulement qu'au point d'interaction les particules entrantes sont annihilées (on attachera donc la fonction d'onde  $u_\alpha(p)$  pour un fermion,  $\bar{v}_\alpha(p)$  pour un antifermion et  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$  pour un photon) et les particules sortantes sont créées (soit  $\bar{u}_\alpha(p)$  pour un fermion,  $v_\alpha(p)$  pour un antifermion et  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$  pour un photon). Deux points d'interaction sont reliés par un propagateur.

Prop. de l'électron		$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$
Prop. du $\gamma$ (covariant)		$= -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$
Vertex		$= -ie\gamma_\mu$
Electron initial		$= u_\alpha(p)$
Electron final		$= \bar{u}_\alpha(p)$
Positron initial		$= \bar{v}_\alpha(p)$
Positron final		$= v_\alpha(p)$
Photon initial		$= \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$
Photon final		$= \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$
Boucle d'électron		$\times (-1)$

*Les règles de Feynman en QED (jauge covariante).*

Un moyen mnémorique de se rappeler du couplage consiste à partir du lagrangien d'interaction :

$$i \int d^4x \mathcal{L}_I = i \int d^4x \bar{\psi}(x) e A_\mu(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (2.6.79)$$

et à prendre la dérivée fonctionnelle par rapport aux champs pour trouver :

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \psi(y)} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} = -i e \gamma^\mu \quad (2.6.80)$$

où le signe (-) vient de l'anticommutation  $\delta/\delta\psi(y)$  avec  $\bar{\psi}(x)$  lorsque l'on effectue la dérivée. Les règles générales pour obtenir vertex et propagateurs seront données en sec. 7.2 et 7.3.

**Exercice** : écrire l'élément  $\mathcal{M}_{fi}$  pour

- $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
- $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
- $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  et montrer l'invariance de l'amplitude quand on fait la translation  $\epsilon_\mu^{(\kappa)} \rightarrow \epsilon_\mu^{(\kappa)} + k_\mu$ , où  $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$  et  $k_\mu$  sont les vecteurs polarisation et impulsion d'un photon.

Calculer  $\sum_{polarisations} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  dans chacun des cas.

## 2.7 Appendice : propriétés des matrices $\gamma^\mu$

Dans la représentation de Dirac les matrices  $\gamma^\mu$  sont des matrices  $4 \times 4$  définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7.81)$$

où les  $\sigma^i$  sont les matrices de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7.82)$$

Les matrices de Pauli obéissent aux relations de commutation et d'anticommutation suivantes :

$$\left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, \quad \left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} = \delta^{ij} \frac{\mathbf{1}_2}{2} \quad (2.7.83)$$

Les matrices  $\gamma^\mu$  ont les propriétés suivantes,

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu, \quad \gamma^{02} = \mathbf{1}_4, \quad \gamma^{i2} = -\mathbf{1}_4, \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbf{1}_4, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.7.84)$$

et elles satisfont les relations d'anticommutation :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4. \quad (2.7.85)$$

Il est utile d'introduire les notations suivantes :

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.86)$$

On prouve aisément :

- $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = -2 \gamma_\alpha$
  - $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4 g_{\alpha\beta} \mathbf{1}_4$
  - $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu = -2 \gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha.$
- (2.7.87)



Pour l'évaluation des traces des produits de matrices  $\gamma_\alpha\gamma_\beta\dots$  on a les relations :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta) &= 4 g_{\alpha\beta} \\
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\lambda) &= 4 [g_{\alpha\beta} g_{\delta\lambda} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda} g_{\beta\delta}] \\
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\dots) &= 0 \quad \text{pour un nombre impair de matrices} \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots) &= 0 \quad \text{for an odd number of } \gamma^\alpha \text{ matrices} \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta) &= 0 \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\lambda) &= -4i\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda},
\end{aligned} \tag{2.7.88}$$

où  $\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda}$  est totalement antisymétrique sous la permutation de deux indices. Par convention on prend  $\epsilon^{0123} = +1$ . On a alors  $\epsilon_{\alpha\beta\delta\lambda} = -\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda}$  et, en particulier,  $\epsilon_{0123} = -1$ . Une relation utile est :

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho\delta_\mu^\sigma) \tag{2.7.89}$$

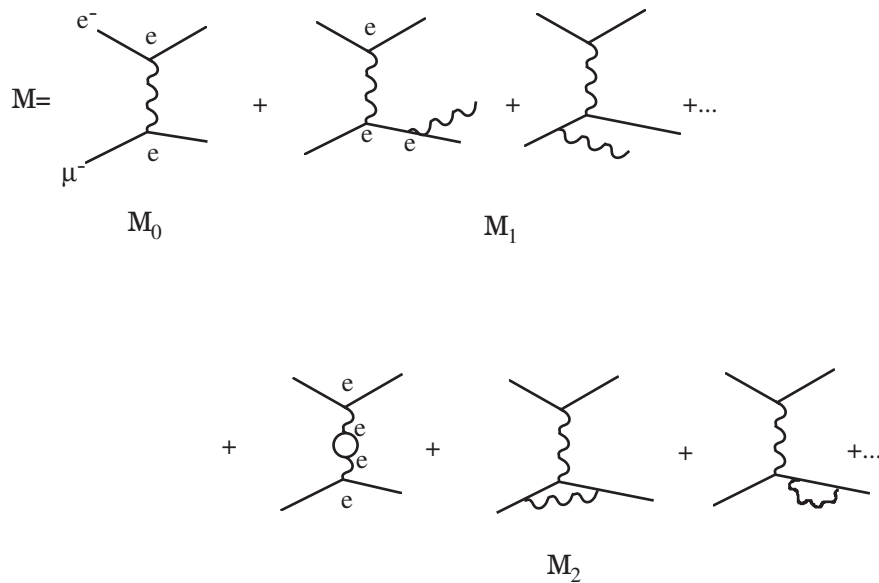
Il existe d'autres représentations dues à Weyl et à Majorana qui satisfont les relations éq. (2.7.85) à éq. (2.7.88). En règle générale, il n'est pas nécessaire dans les calculs d'utiliser la forme explicite des matrices  $\gamma^\mu$ .



## Chapitre 3

# Divergences ultraviolettes, renormalisation

Dans ce qui suit nous allons appliquer les règles de Feynman qui décrivent l'interaction entre électrons et photons (QED) et entre quarks et gluons (QCD) à l'étude des processus à haute énergie. Par exemple, si on étudie la diffusion  $e^+ \mu^-$  aux deux premiers ordre de la théorie perturbative on est amené au calcul des diagrammes



La section efficace est proportionnelle à l'amplitude de diffusion au carré  $|\mathcal{M}|^2$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2|^2 + |\mathcal{M}_1|^2 \\ &= |\mathcal{M}_0|^2 + |\mathcal{M}_1|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{O}(e^8). \end{aligned}$$

Le premier terme est d'ordre  $e^4$ , les deux suivants d'ordre  $e^6$ . On négligera  $|\mathcal{M}_2|^2$  qui est d'ordre  $e^8$ , donc d'un ordre plus élevé.

### • Nomenclature

Les termes d'ordre le plus bas sont habituellement appelés "termes de Born". Les diagrammes avec une ou plusieurs particules émises, en plus de celles présentes dans le terme de Born, sont dits "diagrammes réels", tandis que ceux avec un champ émis et ré-absorbé dans le même diagramme sont dits "diagrammes virtuels" ou en "boucles". Un calcul cohérent en théorie des perturbations nécessite la prise en compte de tous les diagrammes à un ordre donné, ainsi, évidemment, que de tous ceux d'ordre plus bas. Dans la suite, nous ne considérerons que les deux premiers ordres de la série perturbative, c'est-à-dire, dans l'exemple ci-dessus, les termes d'ordre  $e^4$  et  $e^6$  de l'élément de matrice au carré.

L'évaluation des diagrammes d'ordre supérieur présente de nombreuses difficultés à cause de l'apparition de divergences.

Dans les diagrammes en boucles ces divergences peuvent être de trois types :

- ultraviolettes (UV) qui reflètent le comportement aux courtes distances ou grandes impulsions de la théorie ; elles n'apparaissent que dans les termes virtuels où l'impulsion dans la boucle n'a pas de limite supérieure. Pour les diagrammes réels il n'y a pas de divergences ultraviolettes puisque l'énergie des particules finales est nécessairement finie (on calcule des processus à énergie finie) ;
- infrarouges (IR) qui sont engendrées lorsque l'impulsion d'un photon ou d'un gluon réel ou virtuel tend vers 0 ; elles reflètent le comportement de la théorie aux petites énergies ou grandes distances ;
- colinéaires lorsque l'on considère un fermion de masse nulle émettant un photon ou un gluon d'impulsion parallèle à celle du fermion.

Chaque type de divergence fait l'objet d'une procédure spécifique :

- La *renormalisation* permet d'évacuer les divergences ultraviolettes au prix d'une redéfinition des paramètres du lagrangien et permet de construire un développement perturbatif à coefficients finis (chapitres 3, 4, 8) ;
- les divergences infrarouges sont éliminées, ordre par ordre, en combinant termes réels et virtuels lorsqu'on construit un observable : c'est le *théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg* (chapitre 5) ;
- les divergences colinéaires sont une caractéristique de QCD où on suppose les quarks légers de masse nulle : elles sont absorbées dans les fonctions de structure (objets non-perturbatifs) qui donnent la distribution des quarks et gluons dans un hadron : c'est le *théorème de factorisation* (chapitres 6, 9, 10).

Dans le reste du chapitre nous nous intéresserons, de façon "qualitative", aux divergences ultraviolettes et à la procédure de renormalisation qui permet de donner un sens à la théorie et par conséquent d'obtenir des prédictions finies. Nous illustrerons d'abord la procédure de renormalisation sur un modèle scalaire (pas de complication due au spin) . Nous introduirons ensuite les outils qui permettent de calculer les diagrammes en boucles et de donner un sens mathématique aux divergences.

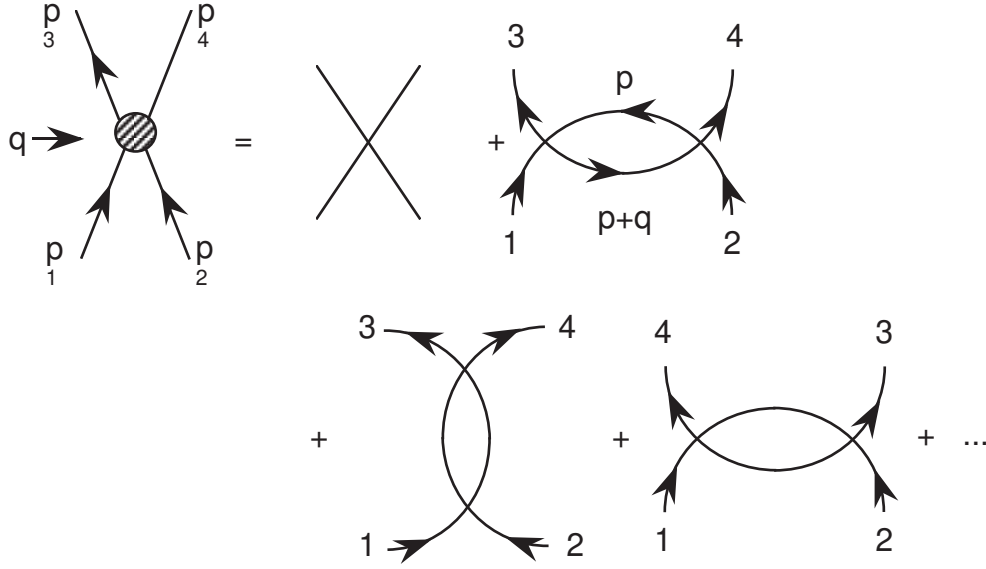


FIGURE 3.1 – Diffusion  $2 \rightarrow 2$  à une boucle dans le modèle  $\lambda\phi^4$ . Les invariants de Mandelstam sont  $(p_1 - p_3)^2 = q^2 = t$ ,  $(p_1 + p_2)^2 = s$ ,  $(p_1 - p_4)^2 = u$ .

### 3.1 Divergences ultraviolettes et renormalisation en $\lambda\phi^4$ .

#### 3.1.1 Divergences des diagrammes en boucle

La densité lagrangienne du modèle  $\lambda\phi^4$  est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (3.1.1)$$

où  $\phi(x)$  est un champ scalaire réel. Les règles de Feynman correspondantes sont :

$$\text{vertex : } \times = -i\lambda ; \quad \text{propagateur : } \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations la diffusion de deux particules est représentée par les diagrammes de la figure 3.1. À noter que pour les besoins de notre discussion qualitative il n'est pas nécessaire de considérer les diagrammes avec insertion d'une boucle sur les pattes externes du terme de Born. Si on dénote  $q = p_1 - p_3$  l'impulsion de transfert entre particules entrante et sortante on a  $q^2 = t < 0$ . L'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m^2 + i\epsilon)} + \dots \quad (3.1.2)$$

où  $p$  est l'impulsion dans la boucle et où "..." dénote la contribution des deux derniers diagrammes (le facteur  $1/2$  devant l'intégrale tient compte du fait des particules identiques dans la boucle). Il faut intégrer, dans le deuxième terme du membre de droite sur une région où toutes les composantes

de l'impulsion interne  $p$  tendent vers l'infini, que l'on dénote schématiquement par  $|p| \rightarrow \infty$ . Une analyse dimensionnelle élémentaire montre que, dans ce domaine, la contribution dominante sera :

$$\frac{\lambda^2}{2} \int_{|p| \rightarrow \infty} \frac{d^4 p}{p^4} \sim \frac{\lambda^2}{2} \int_{|p| \rightarrow \infty} \frac{p^3 dp}{p^4} \quad (3.1.3)$$

qui diverge logarithmiquement (on a ignoré la contributions angulaire dans l'intégrale). Pour régulariser la *divergence ultraviolette* de cette intégrale on introduit un cut-off  $\Lambda$  sur la norme de  $p$  de telle sorte que l'amplitude de diffusion peut s'écrire :

$$\mathcal{M} = -i\lambda + i \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{termes finis} \right). \quad (3.1.4)$$

où  $-q^2$  agit comme un cut-off de l'intégrand quand l'impulsion  $p$  est petite et où nous définissons comme termes finis les termes indépendants du cut-off  $\Lambda$ <sup>1</sup>. Chaque diagramme en boucle donnant une contribution  $\sim \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2}$ , on a donc introduit un facteur 3. On a aussi fait l'hypothèse dans la dernière équation ci-dessus que  $-q^2 \gg m^2$ . Le résultat du calcul dépend de l'invariant physique  $q^2$  et du cut-off ultraviolet arbitraire  $\Lambda$ . On le notera donc :

$$-ig(q^2, \Lambda^2) = -i\lambda + \frac{3i}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{termes finis} \right), \quad (3.1.5)$$

pour faire apparaître explicitement ces dépendances. Le module  $|\quad|^2$  du membre de gauche est relié à la section efficace qui est une observable. On a donc le résultat paradoxal que la prédiction théorique de la section efficace dépend d'un cut-off non physique, introduit pour régulariser les expressions mathématiques !

Si on considère maintenant le même processus à l'échelle  $q'^2$ , la prédiction régularisée est évidemment :

$$g(q'^2, \Lambda^2) = \lambda - \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q'^2} + \text{termes finis} \right). \quad (3.1.6)$$

Eliminant  $\lambda$  à l'aide de l'équation (3.1.5) on a :

$$\boxed{g(q'^2, \Lambda^2) = g(q^2, \Lambda^2) + \frac{3}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q'^2}{-q^2} + \text{termes finis d'ordre } g^2 + \mathcal{O}(g^3)} \quad (3.1.7)$$

Dans le terme en  $\lambda^2$  on a substitué  $\lambda = g + \mathcal{O}(g^2)$  ce qui est tout à fait justifié puisque le calcul est mené aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur en  $\lambda^3 \sim g^3$ .

### • Ré-interprétation de la série perturbative

Il est remarquable que dans l'expression (3.1.7) toute dépendance explicite en  $\Lambda$  a disparu. Ceci suggère d'interpréter cette équation de la façon suivante. On suppose que l'on fait une expérience de diffusion et que l'on mesure la section efficace à une impulsion de transfert  $\sqrt{-q^2}$  : reliant le résultat

1. L'origine du factor  $i$  devant le deuxième terme deviendra évidente dans la section suivante.

de cette mesure à  $g(q^2)$ , on obtient la valeur de  $g(q'^2)$ . La théorie prédit alors, par l'équation (3.1.7), quel sera le résultat d'une expérience à  $q'^2$ , la relation entre les deux fonctions  $g(q^2)$  et  $g(q'^2)$  étant finie, indépendante du cut-off  $\Lambda$ .

En général, la série perturbative pour une quantité physique, par exemple  $g(q'^2)$  où  $q'^2$  est une échelle qui caractérise l'énergie du processus étudié, construite à l'aide du paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  couplage dans le lagrangien) n'est pas bien définie car les coefficients du développement sont dépendants du cut-off non physique  $\Lambda$ , introduit pour régulariser les divergences ultraviolettes. En revanche, la série perturbative pour  $g(q'^2)$  construite à l'aide de  $g(q^2)$ , ( $q^2 \neq q'^2$ ) est parfaitement définie, les coefficients de la série étant finis. Ce que prédit la théorie n'est donc pas la valeur de l'amplitude de diffusion, en fonction de  $\lambda$  et des autres paramètres du lagrangien, mais seulement la variation de l'amplitude avec l'échelle d'énergie, connaissant cette amplitude à une énergie donnée.

#### • Définitions, nomenclature

Le paramètre de couplage  $\lambda$  dans le lagrangien est appelé le "couplage nu" : suivant la tradition on le notera  $\lambda_B$  (bare = nu en anglais). On introduit un "couplage renormalisé" dénoté  $\lambda_R$  fonction de l'échelle  $q^2$  du processus étudié : par exemple  $g(q^2)$  joue le rôle du couplage renormalisé dans la discussion ci-dessus. La relation entre les deux couplages est écrite (*renormalisation multiplicative*) :

$$\lambda_B = Z_\lambda \lambda_R \quad (3.1.8)$$

où le facteur  $Z_\lambda$  admet un développement perturbatif à "coefficients divergents"<sup>2</sup> :

$$Z_\lambda = 1 + c_\lambda \lambda_R. \quad (3.1.9)$$

Par exemple, inversant l'éq. (3.1.5) on obtient :

$$\lambda_B = g(q^2) \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{g(q^2)}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{termes finis} \right) \right], \quad (3.1.10)$$

qui définit la relation entre couplage nu et "couplage renormalisé"  $g(q^2)$  : dans ce cas  $c_\lambda = (3g(q^2))/2(4\pi)^2 (\ln(\Lambda^2/-q^2) + \text{termes finis})$ . Plus simplement on peut ne garder que les termes divergents dans la relation entre couplages nu et renormalisé et définir  $\lambda_R(q^2)$  par :

$$\lambda_B = \lambda_R(q^2) \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R(q^2)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} \right], \quad (3.1.11)$$

soit :

$$c_\lambda = \frac{3}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2}. \quad (3.1.12)$$

En résumé, si l'on construit la série à l'aide de  $\lambda_B$  on a :

$$g(q'^2) = \lambda_B + \frac{3}{2} \frac{\lambda_B^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q'^2}{\Lambda^2} + \text{termes finis d'ordre } \lambda_B^2 \quad (3.1.13)$$

---

2. Si la théorie est renormalisable  $Z_\lambda$  admet un développement à tous les ordres. Dans notre discussion (approximation à une boucle) il suffit de garder les deux premiers termes.

où  $\lambda_B$  est la contribution du diagramme en arbre tandis que le terme en  $\lambda_B^2$  vient des diagrammes à une boucle. Si on l'exprime en termes de  $\lambda_R$  on aura, utilisant les éqs. (3.1.11) et (3.1.13) :

$$g(q^2) = \left[ \lambda_R(q^2) + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} \right] + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q^2}{\Lambda^2} + \text{termes finis d'ordre } \lambda_R^2 + \mathcal{O}(\lambda_R^3). \quad (3.1.14)$$

Le facteur entre [ ] est la contribution du terme en arbre, exprimé en fonction du couplage renormalisé : le premier terme est le diagramme en arbre renormalisé tandis que le second est la contribution du *contre-terme* dont le rôle est de compenser la divergence venant des diagrammes en boucles. Le développement en fonction de  $\lambda_R$  de l'élément de matrice (ou d'une quantité physique) est à coefficients finis, à tous les ordres, si la théorie est renormalisable. Le prix à payer est que, dans notre exemple,  $\lambda_R(q^2)$  doit être obtenu à partir de l'expérience.

La forme (3.1.14) est la forme sous laquelle on va construire la série perturbative, c'est-à-dire directement en fonction du couplage renormalisé, défini par rapport au couplage nu par une relation de type éq. (3.1.8). Pour cela, on doit réorganiser le lagrangien pour faire apparaître  $\lambda_R$  au lieu de  $\lambda_B$ . La différence entre couplage nu et renormalisé est appelé *contre-terme* et ce dernier est choisi pour compenser les divergences ultraviolettes des diagrammes en boucles.

### 3.1.2 Principes de la procédure de renormalisation

Une analyse systématique montre qu'il faut aussi introduire une masse renormalisée et un champ renormalisé. Par exemple, considérant le propagateur et la correction à une boucle associée, on trouve que le terme en boucle est divergent dans l'ultraviolet ce qui implique, comme on le verra dans la section suivante, qu'il faut renormaliser le paramètre de masse et éventuellement la fonction d'onde pour donner un sens à la théorie perturbative. En fait, pour chaque paramètre, dit paramètre nu, apparaissant dans le lagrangien il faut introduire son équivalent renormalisé. On écrit donc la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2} \phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!} \phi_B^4 \quad (3.1.15)$$

où l'indice  $B$  dénote les quantités nues. On exprime la relation entre paramètres nus et les paramètres renormalisés par une généralisation de l'équation (3.1.8) :

$$\begin{aligned} \phi_B &= Z_3^{1/2} \phi_R \\ m_B^2 &= Z_m m_R^2 \\ \lambda_B &= Z_\lambda \lambda_R. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Les  $\phi_R$ ,  $m_R$  et  $\lambda_R$  sont les quantités renormalisées. Pour des raisons qui vont devenir évidentes, on écrit habituellement :

$$Z_m = \frac{Z_0}{Z_3}, \quad Z_\lambda = \frac{Z_1}{Z_3^2} \quad (3.1.17)$$

Les  $Z_i$  sont de la forme éq. (3.1.9), c'est-à-dire qu'ils admettent un développement perturbatif en  $\lambda_R$ . Pour calculer les boucles on introduit une procédure de régularisation qui donne un sens mathématique aux divergences ultraviolettes. Ci-dessus on a introduit un cut-off  $\Lambda$ , méthode qui



n'est pas recommandée car elle brise l'invariance de Lorentz. Pour QED, QCD, l'approche moderne consiste à travailler en  $n \neq 4$  dimensions (voir section suivante). Puisque l'on veut travailler directement avec les quantités renormalisées on va ré-écrire le lagrangien en fonction des  $\phi_R$ ,  $m_R$ ,  $\lambda_R$ . On trouve immédiatement :

$$\mathcal{L} = \frac{Z_3}{2}(\partial_\mu\phi_R)^2 - \frac{Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 \quad (3.1.18)$$

Il est naturel d'écrire

$$Z_i = 1 + \delta Z_i, \quad \text{avec } i = 0, 1, 3 \quad (3.1.19)$$

où les *contre-termes*  $\delta Z_i$  sont exprimés sous la forme d'une série perturbative,  $\delta Z_i = \sum_n c_i^{(n)} \lambda_R^n$ . Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L} \quad (3.1.20)$$

avec :

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_R)^2 - \frac{m_R^2}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4 \quad (3.1.21)$$

et :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta Z_3}{2}(\partial_\mu\phi_R)^2 - \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4. \quad (3.1.22)$$

Par définition,  $\mathcal{L}_R$  est identique à  $\mathcal{L}$  sauf qu'il est exprimé en fonction des quantités renormalisées tandis que  $\delta\mathcal{L}$  contient les *contre-termes*. Pour un calcul à l'approximation d'une boucle on ne gardera que le premier terme du développement perturbatif des  $\delta Z_i$ . Au lieu maintenant de construire la série perturbative à partir de la forme éq. (3.1.15), comme on l'a fait dans l'exemple précédent, on va la construire à partir de la décomposition éq. (3.1.20) de la densité lagrangienne sans supposer a priori la valeur des contre-termes. Les règles de Feynman pour  $\mathcal{L}_R$  sont les mêmes que celles pour  $\mathcal{L}$  sous la forme éq. (3.1.15), sauf qu'elles concernent maintenant les quantités renormalisées. Il faudra alors ajouter la contribution des *contre-termes* qui sont traités comme de *nouveaux couplages* et correspondent à de *nouveaux diagrammes de Feynman*. Pour les obtenir<sup>3</sup>, une recette est de considérer, comme en éq. (2.6.79), l'expression<sup>4</sup> :

$$i \int d^4x \delta\mathcal{L} = i \int d^4x \left[ -\frac{\delta Z_3}{2} \phi_R \partial^2 \phi_R - \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 \right]. \quad (3.1.23)$$

Introduisant  $\phi_R(x) = \int dp \phi_R(p) \exp(-ipx)$  (on utilise la notation simplifiée  $dp = d^4p/(2\pi^4)$ ) l'expression ci-dessus devient (après intégration sur  $x$  qui fait sortir le facteur de conservation d'énergie-impulsion) :

$$\begin{aligned} & \int dp_1 dp_2 \delta(p_1 + p_2) \left[ i \frac{\delta Z_3}{2} p_1^2 - i \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \right] \phi_R(p_1) \phi_R(p_2) \\ & \int dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left[ -i \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \right] \phi_R(p_1) \phi_R(p_2) \phi_R(p_3) \phi_R(p_4). \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

3. Voir sec. (7.2) pour une dérivation scientifique.

4. On ré-écrit  $(\partial_\mu\phi_R)^2 = -\phi_R \partial^2 \phi_R$  à une dérivée totale près qui ne contribue pas à l'intégrale  $\int d^4x$ .

Prenant la dérivée  $(\delta/\delta\phi_R(p))$  autant de fois que nécessaire et factorisant les fonctions  $\delta$  de conservation d'impulsion on obtient les règles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bullet \text{---} &= i p^2 \delta Z_3, & \text{contre-terme de la fonction d'onde} \\
 \text{---} \times \text{---} &= -i m_R^2 \delta Z_0, & \text{contre-terme de masse} \\
 \bullet \times &= -i \lambda_R \delta Z_1, & \text{contre-terme du vertex}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.25}$$

Par exemple, pour la fonction à 4-points déjà considérée on aura à calculer la série de diagrammes de la fig. 3.2 où, dans ce cas, seul le contre-terme de vertex entre en jeu. L'application des règles

FIGURE 3.2 – La fonction à 4-points à une boucle en terme des quantités renormalisées.

de Feynman donne alors,

$$-ig(q^2) = -i\lambda_R + i\frac{3}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} \lambda_R^2 + \text{termes finis d'ordre } \lambda_R^2 - i\delta Z_1 \lambda_R \tag{3.1.26}$$

où les boucles contribuent les deuxième terme et troisième termes du membre de droite tandis que le contre-terme de vertex est le dernier. Puisque la séparation du lagrangien initial entre  $\mathcal{L}_R$  et  $\delta\mathcal{L}$  est arbitraire on est libre de choisir, par exemple,  $\delta Z_1 = (3/2(4\pi)^2) \ln(\Lambda^2/(-q^2))\lambda_R(q^2)$  qui compense la divergence ultraviolette et l'on trouve :

$$\begin{aligned}
 g(q^2) &= \lambda_R(q^2) + \frac{3}{2(4\pi)^2} \ln \frac{-q'^2}{-q^2} \lambda_R^2 + \text{termes finis d'ordre } \lambda_R^2 \\
 g(q^2) &= \lambda_R(q^2) + \text{termes finis d'ordre } \lambda_R^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.27}$$

Le couplage renormalisé  $\lambda_R$  peut être déterminé, à une valeur particulière  $q^2$ , par comparaison avec les données via la deuxième des équations ci-dessus. On dit alors qu'on a renormalisé la théorie à  $q^2$ . C'est un exercice intéressant de s'assurer que si on "renormalise" le couplage à une valeur différente,  $q_0^2$  au lieu de  $q^2$  par exemple, on aura une valeur du couplage renormalisé  $\lambda_{R_0}$  différente mais la prédiction pour  $g(q^2)$  sera (perturbativement) inchangée.

Une condition nécessaire pour que la théorie soit renormalisable est que les divergences des diagrammes d'ordre supérieur aient la même forme/structure que les termes du lagrangien de sorte qu'elles puissent être compensées par les contre-terme. Ainsi, les prédictions obtenues à partir de la forme éq. (3.1.20) de la densité lagrangienne seront finies par un choix approprié des  $\delta Z_i$ . Il est important de noter que le couplage renormalisé est fonction de l'échelle de masse  $q^2$  puisque  $\delta Z_\lambda$

est lui même fonction de  $q^2$  mais  $\lambda_B = (1 + \delta Z_\lambda)\lambda_R(q^2)$  en est indépendant.

Dans la procédure de renormalisation que nous suivrons pour QCD, les contre-termes seront choisis sans faire référence à un processus "physique", contrairement à ce qui est fait dans la discussion ci-dessus, mais ils seront choisis de façon la plus commode pour éliminer les divergences associées aux boucles. Comme on peut toujours arbitrairement ajouter des termes finis aux contre-termes, ou changer la valeur du point  $-q^2$  où on "soustrait" la divergence ultraviolette, on définit ainsi de nombreux *schémas de renormalisation*. A l'ordre auquel on conduit le calcul tous les schémas de renormalisation sont équivalents : ils conduisent au même résultat pour le calcul d'une quantité physique.

En résumé, renormaliser une théorie c'est choisir les contre-termes de telle sorte que la série perturbative exprimée en fonction des paramètres renormalisés soit à coefficients finis. Si la théorie est renormalisable tous les observables peuvent alors s'exprimer par une série dont les coefficients ne contiennent pas de divergences ultraviolettes.

### 3.1.3 Renormalisation de la masse et de la fonction d'onde

Avant de d'entrer dans les détails de la procédure il est utile de rappeler la relation entre le champ  $\phi(x)$  et le propagateur de Feynman défini comme le produit chronologique :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x-y) &= \langle 0|\mathcal{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ &= \theta(x_0-y_0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y_0-x_0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle.\end{aligned}\quad (3.1.28)$$

On considère le champ nu  $\phi_B$  que l'on développe en ondes planes,

$$\phi_B(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}) \quad (3.1.29)$$

où  $p = (\omega_p, \vec{p})$ ,  $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m_B^2}$ ,  $p\cdot x = \omega_p x_0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$ . Les opérateurs de création et annihilation satisfont les relations de commutation usuelles,

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p-p') 2\omega_p, \quad (3.1.30)$$

qui fixe aussi la normalisation du champ  $\phi_B(x)$ . Suivant la procédure mise en oeuvre pour le fermion au chapitre précédent on trouve :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (\theta(x_0-y_0) e^{-i\omega_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} + \theta(y_0-x_0) e^{i\omega_p(x_0-y_0)-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \frac{idp_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{p_0 - \omega_p + i\epsilon} - \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{p_0 + \omega_p - i\epsilon} \right],\end{aligned}\quad (3.1.31)$$

où pour obtenir la dernière équation on a utilisé la représentation intégrale suivante (éqs. (2.3.41) et (2.3.42)),

$$\theta(\pm(x_0-y_0)) e^{\mp i\omega_p(x_0-y_0)} = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0 \mp \omega_p \pm i\epsilon}. \quad (3.1.32)$$

Combinant les termes entre crochets dans l'expression du propagateur et simplifiant on arrive alors à :

$$\tilde{G}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}. \quad (3.1.33)$$

Sous cette forme, il faut noter que  $p \cdot (x-y) = p_0(x_0 - y_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$  avec  $p_0 \neq \omega_p$ , l'impulsion  $p$  est hors couche de masse :  $p^2 \neq m_B^2$ . On obtient alors trivialement la forme générale du propagateur de Feynman dans l'espace des impulsions, qui est donc le transformé de Fourier de l'éq. (3.1.28) :

$$\boxed{G(p) = \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}}. \quad (3.1.34)$$

• **Relation entre les propagateurs des champs nu et renormalisé : cas libre**

On introduit plusieurs propagateurs du champ libre dans l'espace des impulsions. Celui du champ nu, construit à partir des deux premiers termes du lagrangien éq. (3.1.15) est le transformé de Fourier de  $\langle 0 | \mathcal{T} \phi_B(x) \phi_B(y) | 0 \rangle$  :

$$G_B(p) = \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}. \quad (3.1.35)$$

Il y a également le propagateur du champ renormalisé qui, lui, est donné par :

$$G_R(p) = Z_3^{-1} G_B(p), \quad (3.1.36)$$

puisque  $\phi_R(x) = Z_3^{-1/2} \phi_B(x)$  d'après la première des éqs. (3.1.16). Ce propagateur s'écrit donc simplement :

$$\begin{aligned} G_R(p) &= \frac{i Z_3^{-1}}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{i Z_3^{-1}}{p^2 - (Z_0/Z_3)m_R^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

où on a introduit le paramètre  $m_R$  d'après les éqs. (3.1.16, 3.1.17). Finalement il vient :

$$\boxed{G_R(p) = \frac{i (1 - \delta Z_3)}{p^2 - m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + i\epsilon}}, \quad (3.1.38)$$

Le facteur  $(1 - \delta Z_3)$  au numérateur relie la normalisation du champ renormalisé à celle du champ nu. Comparant avec l'éq. (3.1.37) on voit que la combinaison  $m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3)$ , pôle du propagateur du champ renormalisé, est indépendant du schéma de renormalisation, en d'autres termes la procédure de renormalisation n'affecte pas la position du pôle du propagateur renormalisé. Finalement, on introduit le propagateur obtenu à partir des deux premiers termes de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_R$  de l'éq. (3.1.21) :

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon}. \quad (3.1.39)$$

C'est le propagateur libre du lagrangien  $\mathcal{L}_R$  : pour être cohérent avec le lagrangien initial  $\mathcal{L}$  il doit toujours être utilisé en association avec les contre-termes correspondants. C'est un intermédiaire

de calcul qui servira à construire le propagateur renormalisé de la théorie en interaction, comme on va maintenant le voir.

### • Propagateur du champ en interaction

On construit maintenant le propagateur du champ en interaction dans l'approximation à une boucle. Pour cela on part du lagrangien sous la forme éq. (3.1.20),  $\mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L}$ . A l'ordre le plus bas on a le terme (3.1.39) auquel il faudra ajouter la correction à une boucle et l'insertion des contre-termes de  $\delta\mathcal{L}$  associés à la fonction à 2-points. On doit donc inclure les diagrammes de la fig. 3.3, où

FIGURE 3.3 – Le propagateur à une boucle en terme des quantités renormalisées.

$\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2)$ , d'ordre  $\mathcal{O}(\lambda_R)$ , est la contribution de la boucle en général divergente. Le premier terme est le propagateur obtenu à partir de  $\mathcal{L}_R$ , éq. (3.1.21), soit,

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon}. \quad (3.1.40)$$

Incluant tous les termes de la figure, le résultat à une boucle s'écrit :

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} (-i \Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) + i p^2 \delta Z_3 - i m_R^2 \delta Z_0) \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \quad (3.1.41)$$

Dénotant la totalité des termes d'ordre supérieur par :

$$\Pi(p^2, m_R^2) = \Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) - p^2 \delta Z_3 + m_R^2 \delta Z_0 \quad (3.1.42)$$

le propagateur prend la forme :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \left[ 1 + \frac{\Pi(p^2, m_R^2)}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right] \\ &= \frac{i}{p^2 - m_R^2 - \Pi(p^2, m_R^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

où on n'a gardé que les termes d'ordre  $\lambda_R$  (la dernière ligne revient en fait à sommer l'insertion  $\Pi(p^2, m_R^2)$  à tous les ordres de la théorie des perturbations). Afin d'étudier le comportement du propagateur près du pôle il est traditionnel de faire le développement :

$$\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) = \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) + (p^2 - m_R^2) \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2} \Big|_{m_R^2} \quad (3.1.44)$$

de telle sorte que le propagateur devient :

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(p) &= \frac{i}{(p^2 - m_R^2)(1 - d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2} + \delta Z_3) - \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) - m_R^2(\delta Z_0 - \delta Z_3) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \\
&= \frac{i}{[p^2 - m_R^2 - \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) - m_R^2(\delta Z_0 - \delta Z_3)] [1 + \delta Z_3 - d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2}] + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)
\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

Les équations ci-dessus sont équivalentes au sens perturbatif car elles diffèrent par des termes d'ordre supérieur à celui auquel on a mené le calcul. Finalement, le propagateur renormalisé incluant les corrections à une boucle prend la forme :

$$\boxed{G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2}}{p^2 - m_R^2(1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) - \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)}. \tag{3.1.46}$$

On remarque qu'après ce raisonnement standard mais un peu lourd on retrouve la structure en contre-terme dérivée très simplement en (3.1.38). En général, les corrections à une boucle  $\Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2)$  et  $d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2}$  ont une divergence ultraviolette qui sera éliminée par un choix approprié des contre-terme<sup>5</sup>. Un choix de schéma de renormalisation possible est par exemple (schéma physique ou sur-couche ou on-shell),

$$\begin{aligned}
\delta Z_3 &= \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2}|_{m_R^2} \\
\delta Z_0 &: m_R^2(1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) = m_{\text{phys}}^2,
\end{aligned} \tag{3.1.47}$$

de telle sorte que le propagateur, incluant les corrections, est

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_{\text{phys}}^2 + i\epsilon}. \tag{3.1.48}$$

Plus généralement, on peut choisir comme conditions de renormalisation :

$$\begin{aligned}
-\delta Z_3 + \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2}|_{m_R^2} &\sim \text{fini} \\
m_R^2(1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) &\sim \text{fini}.
\end{aligned} \tag{3.1.49}$$

On montrera explicitement plus bas que la combinaison :

$$m_R^2(1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) \tag{3.1.50}$$

ne dépend pas du schéma de renormalisation : c'est donc un invariant. Le pôle du propagateur qui définit la masse physique de la particule est donc bien indépendant du schéma.

---

5. Dans le modèle  $\lambda\phi^4$  on verra que la fonction  $\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2)$ , à une boucle, est indépendante de  $p^2$ , donc la dérivée par rapport à  $p^2$  est nulle et la fonction d'onde n'est pas renormalisée puisque  $\delta Z_3$  est alors égal à 0.

### 3.1.4 Conséquence de la procédure de renormalisation : couplage mobile

Revenant à l'équation (3.1.11) on a le choix de définir la constante de couplage renormalisée à  $q^2$  ou à  $q'^2 = q^2 + \delta q^2$ . La relation entre les deux couplages est :

$$\lambda_R(q^2 + \delta q^2) = \lambda_R(q^2) + c \lambda_R^2(q^2) \ln\left(1 + \frac{\delta q^2}{q^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda_R^3),$$

avec

$$c = \frac{3}{2(4\pi)^2} \text{ en théorie } \lambda\phi^4,$$

soit

$$\delta\lambda_R(q^2) = c \lambda_R^2(q^2) \frac{\delta q^2}{q^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3) \iff \frac{\delta\lambda_R}{\lambda_R^2} = c \frac{\delta q^2}{q^2} + \mathcal{O}(\lambda_R).$$

En intégrant on obtient :

$$\boxed{\lambda_R(q^2) = \frac{\lambda_R(q_0^2)}{1 - c \lambda_R(q_0^2) \ln(q^2/q_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda_R^3)}. \quad (3.1.51)$$

Ceci est la forme générique de la dépendance en l'échelle de masse du couplage renormalisé dans une théorie renormalisable. C'est ce que l'on appelle le "couplage mobile" (running coupling). Si on considère deux schémas de renormalisation, l'un où on normalise la théorie au point  $q_0^2$  et l'autre au point  $q^2$ , alors les deux couplages  $\lambda_R(q_0^2)$  et  $\lambda_R(q^2)$  sont reliés par l'éq. (3.1.51) : cela garantit que les prédictions fondées sur ces deux schémas sont identiques. On revient sur ce point dans le chapitre suivant.

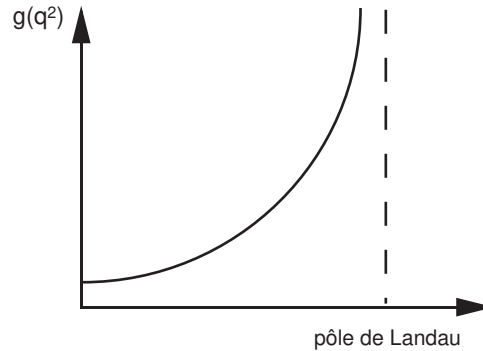
#### • Exemples

La figure ci-dessous illustre le cas des théories  $\lambda\phi^4$  et QED où le couplage croît avec l'énergie, c'est-à-dire que la constante  $c$  dans l'éq. (3.1.51) est positive. On peut noter l'existence d'un pôle dans le couplage mobile : le pôle de Landau. En QED la position du pôle est :

$$\sqrt{q_{\text{Landau}}^2} \sim m_e 10^{280}.$$

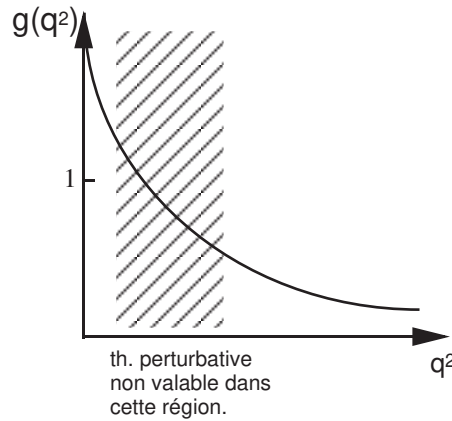
L'échelle d'énergie correspondante peut être comparée à la masse baryonique de l'univers observable qui est estimée à :

$$M_{\text{univers}} \sim m_e 10^{82}.$$



Le monde physique est heureusement loin du pôle de Landau ! En fait, dans le cadre de l'unification des interactions faible et électromagnétique, à une échelle d'énergie de l'ordre du TeV, le couplage de la théorie unifiée est caractéristique d'une théorie non abélienne et le couplage est asymptotiquement décroissant.

En revanche, le cas  $c < 0$  s'applique à la théorie  $\lambda\phi^3$  à six dimensions, à QCD et au modèle de Weinberg-Salam. Le couplage décroît quand l'énergie augmente et la théorie est dite "asymptotiquement libre" puisque le couplage s'annule quand  $|q^2| \rightarrow \infty$ .



Si maintenant l'énergie décroît, le couplage augmente et pour QCD, par exemple, il devient  $\simeq 1$  pour des masses de l'ordre du GeV : on entre dans la région du "confinement" où la théorie des perturbations n'est plus applicable.

### 3.1.5 Discussion

L'origine des divergences ultraviolettes est lié au fait que l'on suppose la théorie valable quelque soit l'échelle d'énergie considérée, en particulier quand  $|q^2| \rightarrow \infty$ . Par les relations d'incertitude de Heisenberg,

$$\Delta E \Delta l \sim 0.2 \text{ GeV fm}, \quad (3.1.52)$$

cela correspond à des distances infiniment petites. Ceci est à contraster avec la situation habituelle en physique où les lois ont un domaine de validité limité. Par exemple, pour

- la physique atomique :  $\Delta E \sim 2 \text{ eV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$
- la physique nucléaire :  $\Delta E \sim 200 \text{ MeV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
- physique des particules :  $\Delta E \geq 20 \text{ GeV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 10^{-17} \text{ m}$ .

Toute la connaissance de la physique nucléaire nécessaire à la physique atomique se résume à quelques constantes comme la masse et la charge du noyau. De même, la physique des particules utile à la physique nucléaire se réduit à la connaissance de la masse du proton, du neutron, du pion et du couplage  $\pi NN$ . Donc l'étude de la physique à une échelle donnée n'a pas besoin des détails de



la physique à une échelle de distance beaucoup plus petite : seule la valeur de quelques paramètres suffit. La procédure de renormalisation ramène le cas de la théorie des champs à une situation habituelle en physique puisque toutes les complications liées aux divergences ultraviolettes peuvent être éliminées par une re-définition de quelques paramètres tels que masse, couplage, normalisation de la fonction d'onde.

Avant de passer aux détails des calculs on peut faire la remarque suivante concernant le couplage mobile. Si dans le lagrangien, éq. (3.1.1) on avait choisi  $m = 0$ , il n'y aurait pas eu d'échelle de masse explicite dans la théorie puisque  $\lambda$  est sans dimension. On aurait pu définir le couplage mobile et on aurait alors trouvé l'éq. (3.1.51) qui dépend explicitement d'une échelle de masse. Ceci peut paraître paradoxal mais c'est une conséquence de la procédure de renormalisation car, pour donner un sens à la théorie perturbative il a fallu d'abord la régulariser par l'introduction d'un cut-off ce qui a implicitement introduit une échelle de masse.

En résumé, la procédure de renormalisation se fait en deux étapes :

1. *Régularisation* de la théorie pour donner un sens mathématique aux divergences ultraviolettes (ou autres); la méthode moderne de *régularisation dimensionnelle* est présentée dans la section suivante.
2. Redéfinition des paramètres du modèle qui est la *renormalisation* proprement dite, pour obtenir une série perturbative à coefficients finis. Il y a beaucoup de redéfinitions possibles, c'est à dire de *schémas de renormalisation*, suivant les quantités finies que l'on absorbe avec les quantités "infinies". Les expressions obtenues dépendent explicitement du schéma de renormalisation mais les prédictions pour un observable physique ne doivent pas en dépendre. Cette contrainte fondamentale est exprimée par les *équations du groupe de renormalisation* que nous n'aborderons que de façon très simple dans ces notes (voir le chapitre 12).

## 3.2 Techniques de calcul des diagrammes en boucle.

Dans cette section nous décrivons toutes les techniques mises en œuvre pour évaluer n'importe quel diagramme en boucle en *régularisation dimensionnelle*<sup>6</sup> qui consiste à travailler dans un espace à  $n$  dimensions,

$$n = 4 - 2\varepsilon$$

de telle sorte qu'à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  on se retrouve dans l'espace-temps à 4 dimensions qui est le cas qui nous intéresse. La métrique de l'espace à  $n$ -dimensions est définie par

$$g_{\mu\nu} = (1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1 \text{ fois}}) \quad (3.2.1)$$

de telle sorte de la norme

$$\boxed{g_{\mu}^{\mu} = n = 4 - 2\varepsilon,} \quad (3.2.2)$$

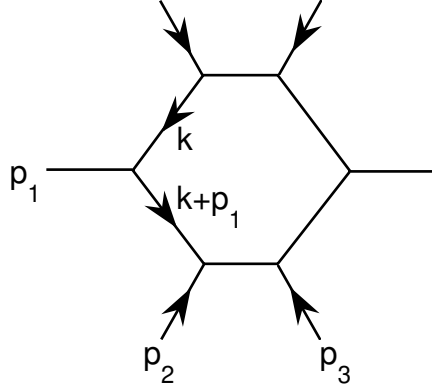
un résultat dont il faudra se rappeler lors du calcul des traces de diagrammes en QED et QCD. Il existe plusieurs autres méthodes de régularisation : cut-off, Pauli-Villars, ... Il est important de

---

6. C.G. Bollini, J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12** (1972) 20; G. 't Hooft, M.J.G. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

choisir une procédure qui respecte les invariances de la théorie. Le cut-off utilisé précédemment brise l'invariance sous les translations, puisqu'il donne une borne sur l'intégration de l'impulsion interne. Pour QED et QCD, théories covariantes de Lorentz, ce choix n'est pas approprié pour les calculs perturbatifs<sup>7</sup> et l'on préfère utiliser la régularisation dimensionnelle qui respecte l'invariance de la théorie sous les translations, ainsi que l'invariance de jauge.

On va être amené à considérer des diagrammes du type :



En  $n$ -dimensions l'intégrale correspondante est :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{F(k)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)((k + p_1 + p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon)\dots},$$

$n$  étant choisi de façon à ce que l'intégrale soit convergente. Le numérateur  $F(k)$  est un facteur qui prend en compte la structure des vertex et des propagateurs de la théorie considérée.

### 3.2.1 Paramétrage de Feynman.

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus on introduit le "paramètre" de Feynman,  $x$ , qui permet de linéariser le dénominateur dans l'intégrand à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{(ax + b(1-x))^2}. \quad (3.2.3)$$

Par dérivation successive par rapport à  $a$  ou  $b$  on prouve

$$\frac{1}{a^p b^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(ax + b(1-x))^{p+q}}, \quad \text{avec } \Gamma(p) = (p-1)!. \quad (3.2.4)$$

Par récurrence et usage de l'éq. (3.2.4) on prouve

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \frac{1}{(axy + b(1-x)y + c(1-y))^3}. \quad (3.2.5)$$

7. C'est cependant le choix fait pour les "calculs sur réseau" qui permettent d'étudier le régime non-perturbatif de QCD.

Exemples :

$$\begin{aligned}
& \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p_1 + k)^2 - m_1^2 + i\epsilon)} \\
&= \int d^n k \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + 2x p_1 \cdot k + x p_1^2 - m_1^2 x - m^2(1-x) + i\epsilon]^2} \\
&= \int d^n k \int_0^1 dx \frac{1}{[(k + x p_1)^2 + p_1^2 x(1-x) - m_1^2 x - m^2(1-x) + i\epsilon]^2} \\
&= \int dx \int d^n k \frac{1}{[k^2 - C + i\epsilon]^2} \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne on a ré-écrit le dénominateur de façon à faire disparaître les termes explicitement linéaires en  $k$  en introduisant l'expression  $(k + x p_1)^2$  et dans la dernière ligne on a fait le changement de variable  $k + x p_1 \rightarrow k$  qui est justifié si l'intégrale est convergente et, finalement, on a permuté l'ordre d'intégration. Le terme  $C$  est indépendant de  $k$ , mais dépend seulement de  $x$ , des masses et des invariants externes  $p_i^2$  :

$$C = m^2(1-x) + m_1^2 x - p_1^2 x(1-x) \tag{3.2.7}$$

Avec la même technique on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p_1 + k)^2 - m_1^2 + i\epsilon)((p_1 + p_2 + k)^2 - m_2^2 + i\epsilon)} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 2y dy \int d^n k \frac{1}{[k^2 - C' + i\epsilon]^3} \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable  $k + y(p_1 + x p_2) \rightarrow k$  et où  $C'$  est la pas très lumineuse expression :

$$C' = (m_1^2(1-x) + m_2^2 x)y + m^2(1-y) - p_2^2 x(1-x)y - (p_1 + x p_2)^2 y(1-y). \tag{3.2.9}$$

Remarques importantes :

Après translation sur le vecteur  $k$  le dénominateur se ramène toujours à la forme  $(k^2 - C + i\epsilon)^n$ , où  $C$  dépend des masses et des impulsions externes mais pas de  $k$ . On note :

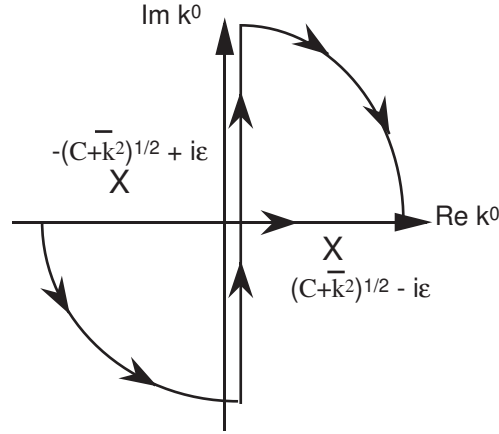
- l'absence de dépendance angulaire au dénominateur facilite grandement l'évaluation de l'intégrale  $\int d^n k$  ;
- la phase est toujours  $+i\epsilon$  quelque soit le nombre de propagateurs que l'on combine. Ceci est crucial pour l'évaluation de l'intégrale.

On considère maintenant les intégrales scalaires de type :

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m}, \tag{3.2.10}$$

et on supposera toujours  $n$  tel que l'intégrale soit convergente,  $n < 2(m-r)$ . On supposera de plus  $C > 0$ , le passage éventuel à  $C < 0$  se fera sur la forme intégrée.

### 3.2.2 Rotation de Wick.



On peut écrire

$$I_{r,m} = \int \frac{d^{m-1}k}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{k^{2r}}{[k_0^2 - C - \vec{k}^2 + i\epsilon]^m}$$

Dans le plan  $k^0$  complexe, l'intégrand a des pôles multiples :

$$k_0 = \pm((\vec{k}^2 + C)^{\frac{1}{2}} - i\epsilon)$$

Au lieu d'intégrer le long de l'axe réel on peut déformer le contour de façon à inclure les quarts de cercle à l'infini (qui ne contribuent pas puisque l'intégrand est suffisamment convergent à l'infini) et l'axe imaginaire. Comme la déformation du contour ne rencontre pas de singularités, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} dk_0$  se réduit à une intégrale le long de l'axe imaginaire (c.f. le théorème de Cauchy). On peut donc écrire

$$k^0 = i\omega \text{ avec } \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$$

et  $k^2 = -\omega^2 - \vec{k}^2 = -\bar{k}^2$  où  $\bar{k} = (\omega, \vec{k})$  est un vecteur euclidien (métrique euclidienne). On a alors

$$I_{r,m} = i(-)^{r-m} \int \frac{d^n \bar{k}}{(2\pi)^n} \frac{\bar{k}^{2r}}{[\bar{k}^2 + C - i\epsilon]^m}$$

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on omettra souvent le terme  $+i\epsilon$ , ce qui est justifié si  $C$  est supposé positif. Dans le cas contraire le facteur  $+i\epsilon$  pourra facilement être rétabli.

### 3.2.3 Intégrales en régularisation dimensionnelle.

On paramètre le vecteur  $\bar{k}$  à l'aide d'une généralisation des angles d'Euler,

$$\bar{k} = k(\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}) \quad (3.2.11)$$

$$\int d^n \bar{k} = \int k^{n-1} dk d\Omega_{n-1} \quad (3.2.12)$$

où  $k^{n-1} dk$  est l'intégrale sur la longueur du vecteur et où  $d\Omega_{n-1}$  est l'élément d'angle solide dans un espace à  $n$  dimensions. On peut faire l'intégrale angulaire aisément puisque l'intégrand ne dépend que de la longueur  $k$ .

$$\int d\Omega_{n-1} = \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \quad (3.2.13)$$

Usant de

$$\int_0^\pi \sin \theta^m d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}, \quad (3.2.14)$$

on trouve

$$\int d\Omega_{n-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (3.2.15)$$

L'intégrale  $\int dk$  se fait à l'aide de la formule suivante (voir une bonne table d'intégrales, russe de préférence)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + a^n)^q} = \pi(-1)^{q-1} a^{p+1-nq} \frac{\Gamma((p+1)/n)}{n \sin(\pi \frac{p+1}{n}) \Gamma(q) \Gamma(\frac{p+1}{n} - q + 1)}.$$

Rassemblant tout on trouve finalement

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = i (C - i\epsilon)^{r-m+\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(r + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(m - r - \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} \quad (3.2.16)$$

Remarque : La représentation intégrale de  $I_{r,m}$  n'est pas définie pour  $m - r - \frac{n}{2} < 0$  car l'intégrand ne s'annule pas assez vite quand  $k \rightarrow \infty$ . La forme intégrée de  $I_{r,m}$  est définie pour toute valeur de  $n$  telles que

$$m - r - \frac{n}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$

puisque la fonction  $\Gamma(z)$  (ici  $\Gamma(m - r - \frac{n}{2})$ ) est définie  $\forall z \neq 0, -1, -2, \dots$

• **La fonction  $\Gamma(z)$**

La fonction  $\Gamma(z)$  de Euler est une généralisation à une variable complexe de la factorielle  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Elle admet la représentation intégrale :

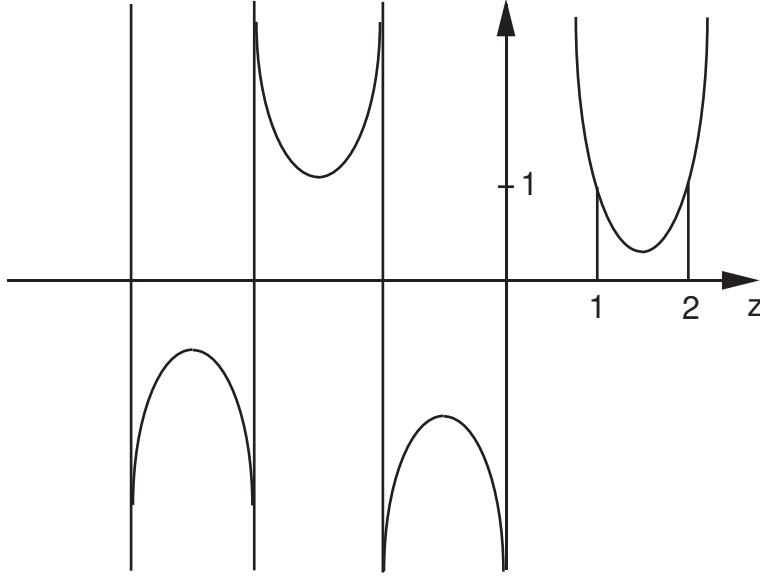
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \text{Re } z > 0. \quad (3.2.17)$$

On peut facilement démontrer la relation de récurrence :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (3.2.18)$$

qui permet la continuation analytique de  $\Gamma(z)$  définie par l'éq. (3.2.17) dans tout le plan complexe sauf aux valeurs  $z = 0, -1, -2, \dots$  qui sont des poles simples (voir la figure). On a les relations utiles :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (3.2.19)$$

FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction  $\Gamma(z)$  pour  $z$  réel.

$$\Gamma(1 + \varepsilon) = 1 - \gamma\varepsilon + (\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6})\frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.2.20)$$

où  $\gamma$  = constante d'Euler.

### • Intégrales tensorielles

On peut facilement prouver, en exercice, les intégrales suivantes qui seront très utiles dans le calcul des boucles :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{(k^2 - C + i\varepsilon)^m} &= 0, \\ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu k^\zeta}{(k^2 - C + i\varepsilon)^m} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

qui s'évaluent par intégration symétrique - faire  $k \rightarrow -k$  dans l'intégrand. En revanche les intégrales avec un nombre pair de  $k_\mu$  au numérateur ne sont pas nulles. Par exemple :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - C + i\varepsilon)^m} = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{(k^2 - C)^m} \quad (3.2.22)$$

est proportionnelle à  $g^{\mu\nu}$  qui est le seul tenseur à notre disposition et le coefficient de proportionnalité s'obtient facilement en considérant la trace.

On utilise d'habitude la notation :  $n = 4 - 2\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = 2 - \frac{n}{2}$ , qui permet d'écrire l'éq. (3.2.16) sous la forme très utile

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2r}}{[k^2 - C + i\varepsilon]^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{C - i\varepsilon} \right)^\varepsilon C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{\Gamma(m-r-2+\varepsilon)}{\Gamma(m)}. \quad (3.2.23)$$

La divergence ultraviolette est contenue dans le facteur  $\Gamma(m - r - 2 + \varepsilon)$  qui a un pôle en  $\varepsilon$  si  $m - r - 2 \leq 0$ . En pratique on développera de telles expressions en  $\varepsilon$  jusqu'aux termes d'ordre 0, par exemple

$$\left(\frac{4\pi}{C - i\varepsilon}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln(C - i\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.2.24)$$

et  $i\varepsilon$  dans le terme logarithmique indique la prescription pour définir ce terme quand  $C$  est négatif :

$$\ln(C - i\varepsilon) = \ln|C| - i\pi \theta(-C). \quad (3.2.25)$$

### • Applications

On aura souvent besoin de :

$$I_{0,2} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - C + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\varepsilon}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\varepsilon}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (3.2.26)$$

Le pôle en  $\varepsilon$  est la manifestation d'une divergence ultraviolette. En effet on remarque que cette intégrale n'est pas définie en 4 dimensions puisque :

$$\int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \int \frac{d\bar{k}}{\bar{k}}, \quad k \rightarrow \infty,$$

diverge logarithmiquement. Il faudra aussi calculer dans la suite :

$$I_{1,2} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{(k^2 - C)^2} \quad (3.2.27)$$

qui diverge quadratiquement en 4 dimensions. En régularisation dimensionnelle on trouve :

$$I_{1,2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\varepsilon}\right)^\varepsilon \frac{(2 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) C \quad (3.2.28)$$

qui converge avec un pôle simple à  $\varepsilon = 0$ , le pôle à  $\varepsilon = 1$  étant la marque de la divergence quadratique.

### • Intégrales sur la variable de Feynman

Une fois l'intégrale sur la boucle effectuée et les divergences ultraviolettes extraites il reste à évaluer les intégrales sur le(s) paramètre(s) de Feynman, ce qu'il n'est pas toujours possible de faire de façon simple. Cependant dans le cas d'une théorie sans masse, les expressions se simplifient et le facteur  $C^{-\varepsilon}$  dans l'éq. (3.2.23) conduit à évaluer des expressions de la forme, par exemple, :

$$\int_0^1 dx x^{a-\varepsilon} (1-x)^{b-\varepsilon} = \frac{\Gamma(a+1-\varepsilon) \Gamma(b+1-\varepsilon)}{\Gamma(a+b+2-2\varepsilon)}. \quad (3.2.29)$$

Il peut arriver que  $a$  ou  $b$  soient des entiers négatifs ce qui implique que l'intégrale est divergente dans la limite à 4 dimensions. Un tel comportement est associé à la présence de divergences infrarouges ou colinéaires. On en verra un exemple en QED dans la discussion de la self-énergie et de la correction au vertex.

### 3.2.4 Analyse dimensionnelle

Comme il est de coutume en physique des particules on travaille dans le système d'unités où  $\hbar = c = 1$  de telle sorte que énergie  $E$ , impulsion  $p$  et masse  $m$  ont toutes la même dimension exprimée en unité de masse,  $[E] = [p] = [m] = 1$ , où le symbole  $[ \ ]$  dénote la dimension de la quantité entre crochets. Par la relation de Heisenberg on voit qu'une longueur  $L$  a une dimension inverse de celle d'une impulsion, d'où  $[L] = -1$ .

On rappelle que l'action est une quantité sans dimension qui s'écrit en  $n$  dimensions :

$$S = \int d^n x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \lambda).$$

Les paramètres (champs, couplage) voient donc leur dimension, exprimée en unité de masse, affectée lorsque l'on passe de  $\int d^4 x$  à  $\int d^n x$ . Pour la théorie scalaire éq. (3.1.1) on a, utilisant  $[S] = 0$ ,  $[d^n x] = -n$ ,

$$\begin{aligned} 0 = -n + 2 + 2[\phi] &\Rightarrow [\phi] = \frac{n-2}{2} = 1 - \varepsilon \quad \text{pour le terme cinétique} \\ 0 = -n + [\lambda] + 4[\phi] &\Rightarrow [\lambda] = 4 - n = 2\varepsilon \quad \text{pour le terme d'interaction.} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Dans la théorie  $\lambda\phi^4$  regularisée on écrira alors le couplage  $\boxed{\lambda\mu^{2\varepsilon}}$  avec  $\mu$  un paramètre de masse arbitraire.

Dans le cas de QED on obtient de façon évidente (voir la densité lagrangienne éq. (4.0.6)),

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}\partial_\mu\psi] = n &\Rightarrow [\psi] = \frac{n-1}{2} \quad \text{au lieu de } \frac{3}{2} \text{ en un monde à 4 dimensions} \\ [\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu] = n &\Rightarrow [A_\mu] = \frac{n-2}{2} \quad \text{au lieu de 1 à 4 dimensions} \\ [e\bar{\psi}A\psi] = n &\Rightarrow [e] = \frac{4-n}{2} = \varepsilon \quad \text{au lieu de 0 à 4 dimensions} \\ [m\bar{\psi}\psi] = n &\Rightarrow [m] = 1 \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Le résultat important est que la charge électrique (couplage) acquiert une dimension  $\varepsilon$ . Dans la théorie régularisée à  $n$ -dimensions, la charge sera alors écrite

$$\boxed{e\mu^\varepsilon}.$$

Il en sera de même pour le couplage fort  $g \rightarrow \boxed{g\mu^\varepsilon}$  en QCD.

### 3.2.5 Règles de Feynman pour QED

Les propagateurs, dans l'espace des impulsions, sont les transformées de Fourier :

$$P(p) = \int d^n x e^{-ip \cdot x} \langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0 \rangle .$$

Donc

$$[P] = -n + 2[\phi] \quad , \quad \phi = A_\mu, \psi.$$

Se reportant aux relations (3.2.31) on remarque que la dimension des propagateurs n'est pas affectée quand on travaille en  $n$  dimensions et on vérifie que le propagateur du fermion a dimension



-1 et le propagateur du boson a dimension -2.

En  $n$ -dimensions les règles de Feynman sont donc :

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \text{p} \\ \longrightarrow \end{array} &= i \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{c} \text{q} \\ \text{~~~~~} \end{array} &= \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} \right) \\
 \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -ie\mu^\varepsilon \gamma_\alpha
 \end{aligned}$$

Le  $\mu^\varepsilon$  va jouer un rôle important dans la procédure de renormalisation : il va tenir, en quelque sorte le rôle du point de soustraction arbitraire  $-q^2$  dans la discussion de la section précédente utilisant la régularisation par un cut-off.

### 3.2.6 Diracologie en $n$ -dimensions.

On rappelle que la métrique est donnée par l'éq. (3.2.1) et que la trace de la métrique est alors

$$g_\mu^\mu = 4 - 2\varepsilon,$$

ce qui induit des changements notables lors de la manipulation des matrices  $\gamma_\mu$ . On garde toujours les relations d'anticommuation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$$

mais on a maintenant

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = n \mathbf{1} = (4 - 2\varepsilon) \mathbf{1}$$

au lieu de  $4 \mathbf{1}$ . Ceci entraîne une modification des règles de réduction du produit de matrices  $\gamma_\mu$ . On prouve aisément, utilisant les relations d'anticommuation :

$$\begin{aligned}
 &\bullet \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = -2(1 - \varepsilon) \gamma_\alpha \\
 &\bullet \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4g_{\alpha\beta} \mathbf{1} - 2\varepsilon \gamma_\alpha \gamma_\beta \\
 &\bullet \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu = -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha + 2\varepsilon \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta.
 \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Pour l'évaluation des traces  $\gamma \dots \gamma$  on choisit  $\text{Tr} \mathbf{1} = 4$  et on aura toujours comme, à 4 dimensions,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) &= 4g_{\alpha\beta} \\
 \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\lambda) &= 4[g_{\alpha\beta} g_{\delta\lambda} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda} g_{\beta\delta}] \\
 \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \dots) &= 0 \quad \text{pour un nombre impair de matrices}
 \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

## 3.3 Renormalisation du modèle $\lambda\phi^4$ à une boucle

Revenant au modèle  $\lambda\phi^4$ , on est en mesure maintenant d'extraire les divergences ultraviolettes des diagrammes en boucle. Concernant la fonction à 4-points (fig. 3.1), l'application de l'éq. (3.2.26) au premier diagramme en boucle du membre de droite donne :

$$\frac{(\lambda_R \mu^{2\varepsilon})^2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 - m_R^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m_R^2 + i\epsilon)} = i\lambda_R \mu^{2\varepsilon} \left[ \frac{\lambda_R}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_t} \right)^\varepsilon \right],$$

avec  $C_t = m_R^2 - tx(1-x) - i\epsilon$ ; le terme entre crochets représente la correction de la boucle par rapport au terme de Born. On voit l'importance du paramètre  $\mu$  pour établir la dimension correcte des expressions en  $n$  dimensions puisque la quantité  $\mu/C_t$  est sans dimension, comme il se doit. Les deux autres diagrammes donnent une contribution similaire où  $t$  dans le facteur  $C_t$  est remplacé respectivement par  $s = (p_1 + p_2)^2$  et  $u = (p_1 - p_4)^2$ . On a alors pour la contribution des boucles :

$$\begin{aligned} & i\lambda_R\mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left[ \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_t} \right)^\varepsilon + \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_s} \right)^\varepsilon + \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_u} \right)^\varepsilon \right] \right\} \\ & = i\lambda_R\mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left[ 3\ln(4\pi) - 3\gamma + \int_0^1 dx \left( \ln \frac{\mu^2}{C_t} + \ln \frac{\mu^2}{C_s} + \ln \frac{\mu^2}{C_u} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

où dans la dernière ligne on a fait un développement de Taylor en  $\varepsilon$  (voir l'éq. (3.2.24)) pour séparer le terme "divergent" (en  $1/\varepsilon$ ) des facteurs "finis". Rassemblant, comme indiqué à la fig. 3.2, tous les termes nécessaires au calcul de la fonction à 4-points on a :

$$-i\lambda_R\mu^{2\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left[ 3\ln(4\pi) - 3\gamma + \int_0^1 dx \left( \ln \frac{\mu^2}{C_t} + \ln \frac{\mu^2}{C_s} + \ln \frac{\mu^2}{C_u} \right) \right] + \delta Z_1 \right\}. \quad (3.3.35)$$

Le choix du contre-terme :

$$\delta Z_1 = \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.3.36)$$

éliminera la divergences ultra-violette et le résultat sera :

$$-i\lambda_R \left\{ 1 - \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left[ 3\ln(4\pi) - 3\gamma + \int_0^1 dx \left( \ln \frac{\mu^2}{C_t} + \ln \frac{\mu^2}{C_s} + \ln \frac{\mu^2}{C_u} \right) \right] \right\} \quad (3.3.37)$$

où l'on a fait  $\varepsilon = 0$  puisque l'expression n'a plus de divergence. L'expression sera finie quelque soit la valeurs de  $s, t, u$ . On prouvera plus bas que la dépendance en  $\mu$  des termes finis est compensée par celle, implicite, du couplage renormalisé  $\lambda_R = \lambda_R(\mu^2)$ .

Si l'on se tourne maintenant vers l'étude du propagateur à une boucle, éq. (3.1.46), on doit calculer :

$$\begin{aligned} -i \Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) &= -i \lambda_R \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\varepsilon} = i m_R^2 \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{1 - \varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \\ &= i m_R^2 \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right], \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

indépendante de l'impulsion externe  $p$ . On a donc  $d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2 = 0$  et se reportant à l'éq. (3.1.46) on voit qu'il n'y a pas, à cet ordre du calcul, de renormalisation de la fonction d'onde :  $\delta Z_3 = 0$ . Quant au contre-terme de masse le choix :

$$\delta Z_0 = \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.3.39)$$

compensera la divergence ultraviolette.

**Attention** : ne pas confondre  $\varepsilon$  de la régularisation dimensionnelle et  $\epsilon$  de la prescription de Feynman dans les propagateurs !!!

## Chapitre 4

# Renormalisation de QED à une boucle

En jauge covariante le lagrangien QED, exprimé en fonction des quantités nues, est (éq. (2.5.78)) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} + \bar{\psi}_B (i \not{\partial} + e_B \not{A}_B) \psi_B - m_B \bar{\psi}_B \psi_B - \frac{\lambda_B}{2} (\partial_\mu A_B^\mu)^2. \quad (4.0.1)$$

On introduit les champs, couplage et masse renormalisés et leur relation avec leur équivalent nu :

$$A_B^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu \quad m_B = \frac{Z_0}{Z_2} m \quad \lambda_B = \frac{1}{Z_3} \lambda \quad (4.0.2)$$

$$\psi_B = Z_2^{1/2} \psi \quad e_B = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} e \mu^\varepsilon. \quad (4.0.3)$$

On n'inclut pas de facteur de renormalisation spécifique pour le terme de fixation de jauge, car on peut montrer par des arguments généraux qu'il n'est pas renormalisé. Les notations et le choix des fonctions  $Z_i$  sont conventionnels. En fonction de ces nouvelles variables la densité lagrangienne s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + Z_1 e \mu^\varepsilon \bar{\psi} \not{A} \psi - Z_0 m \bar{\psi} \psi - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.0.4)$$

que l'on décompose alors en

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L} \quad (4.0.5)$$

avec

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} + e \mu^\varepsilon \not{A}) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (4.0.6)$$

qui a la même forme que la densité éq. (4.0.1) exprimé en fonction des quantités renormalisées, et

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (Z_2 - 1) \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + (Z_1 - 1) e \mu^\varepsilon \bar{\psi} \not{A} \psi - (Z_0 - 1) m \bar{\psi} \psi, \quad (4.0.7)$$

qui contient les "contre-termes". Le lagrangien renormalisé  $\mathcal{L}_R$  donnent les règles de Feynman usuelles tandis que  $\delta\mathcal{L}$  introduit de nouvelles règles associées aux contre-termes. Ceux-ci sont traités

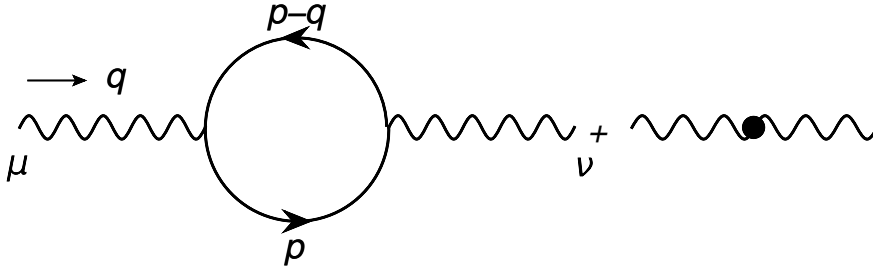
comme des termes d'interaction, c'est-à-dire de façon perturbative, et on obtient les diagrammes suivants :

$$\begin{aligned}
(Z_0 - 1)m\bar{\psi}\psi &\rightarrow \text{---} \times \text{---} = -im(Z_0 - 1) && \text{c.terme de masse} \\
(Z_2 - 1)\bar{\psi}i\partial\psi &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} = i \not{p}(Z_2 - 1) && \text{c.terme de fn. d'onde} \\
(Z_1 - 1)e\mu^\epsilon\bar{\psi}A\psi &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} && \text{c.terme de couplage} \\
-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} && \text{c.terme de fonction} \\
&&& \text{d'onde du photon}
\end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Dans la suite, nous allons extraire les divergences des diagrammes à une boucle et définir les contre-terme  $\delta Z_i$  dans différents *schémas de renormalisation*. Pour simplifier on ne prendra en compte qu'une espèce de leptons, l'électron par exemple.

## 4.1 Polarisation du vide : calcul de $Z_3$

On considère "la polarisation du vide" donnée par les diagrammes à 2 photons externes, à l'ordre d'une boucle. On suppose les photons externes hors-couche  $q^2 < 0$  :



On dénote  $i\Pi_{\mu\nu}(q)$  ces contributions et on a donc,

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = i\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) + i(Z_3 - 1)(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}). \tag{4.1.9}$$

L'application des règles de Feynman donne immédiatement :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = (-1)(-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}(\gamma_\mu i(\not{p} + m) \gamma_\nu i(\not{p} - \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{4.1.10}$$

Le facteur (-1) a son origine dans la règle de Feynman pour une boucle fermionique (voir sec. 2.6).

### • Invariance de jauge

On prouve d'abord la relation  $q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$ . C'est évident pour le contre-terme. Pour la boucle il suffit d'écrire :

$$iq^\nu \Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = -(-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)} \not{q} \frac{i}{(\not{p} - \not{q} - m + i\epsilon)} \right]. \tag{4.1.11}$$

En ajoutant et retranchant  $\not{p} - m$  à  $\not{q}$  au numérateur puis en simplifiant avec les dénominateurs on trouve :

$$iq^\nu \Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = -(-ie\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \left( \frac{i}{(\not{p} - \not{q} - m + i\epsilon)} - \frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)} \right) \right], \quad (4.1.12)$$

qui est nul comme on peut le voir en faisant le changement de variable  $p - q \rightarrow p$  dans le premier terme (en  $n$  dimensions les intégrales sont convergentes). En fait, la propriété  $q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$  est une conséquence de la conservation du courant (voir sec. 2.5). On en conclut que  $\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}$ , dont la forme la plus générale est du type  $a g^{\mu\nu} + b q^\mu q^\nu$ , est nécessairement de la forme :

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi^{\text{boucle}}(q^2) \quad (4.1.13)$$

où  $\Pi^{\text{boucle}}(q^2)$  est une fonction scalaire. Il suffira alors de calculer la trace,

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^\mu(q^2)|^{\text{boucle}} &= q^2(1 - n) \Pi^{\text{boucle}}(q^2) \\ &= (2\varepsilon - 3) q^2 \Pi^{\text{boucle}}(q^2). \end{aligned}$$

pour avoir la forme complète de  $\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(\Pi^{\text{boucle}}(q^2) + \delta Z_3)$ .

#### Remarque

On s'attend, d'après l'éq. (4.1.10) à une divergence quadratique dans la boucle,  $\int d^n p/p^2 \rightarrow \int p dp$  en 4-dimensions. Une simple analyse dimensionnelle montre que, à cause du terme  $q^\mu q^\nu$  en facteur de  $\Pi^{\text{boucle}}$ , la divergence sera du type  $q^2 \int d^n p/p^4 \rightarrow \int dp/p$  qui est logarithmique.

Prenant la trace de l'éq. (4.1.10), on a :

$$\Pi_\mu^\mu(q^2)|^{\text{boucle}} = i(e\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}(\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.1.14)$$

#### • Paramétrage de Feynman

Suivant l'éq. (3.2.3), on écrit immédiatement

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{(p'^2 + q^2 x(1 - x) - m^2 + i\epsilon)^2} \quad (4.1.15)$$

où on a fait la translation  $p' = p - qx$ .

#### • Calcul de la trace en $n$ -dimensions

$$\text{Tr}(\ ) = 8 \left( (2 - \varepsilon)m^2 - (1 - \varepsilon)(p'^2 - q^2 x(1 - x)) + p'q(2x - 1) \right)$$

On peut négliger le terme linéaire en  $p'$  qui s'annule sous  $\int d^n p'$  (voir éqs. (3.2.21)).

### • Intégration

Rassemblant tout, on a (après avoir fait le changement  $p' \rightarrow p$ ) :

$$\begin{aligned}
(2\varepsilon - 3)q^2\Pi^{\text{boucle}}(q^2) &= i(e\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \\
&\quad \frac{8[-(1-\varepsilon)p^2 + (2-\varepsilon)m^2 + (1-\varepsilon)q^2x(1-x)]}{[p^2 - (m^2 - q^2x(1-x)) + i\epsilon]^2} \\
&= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} 8 \int_0^1 dx \left( \frac{\mu^2}{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon (3-2\varepsilon)q^2x(1-x)
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

après application des équations (3.2.26), (3.2.28). Combinant la contribution de la boucle et du contre-terme on a, après simplification par  $(3-2\varepsilon)q^2$  (définissant  $\alpha = e^2/4\pi$ )<sup>1</sup> :

$$\boxed{\Pi(q^2) = \delta Z_3 + 2\frac{\alpha}{\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{\mu^2}{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon} \tag{4.1.17}$$

On peut, à ce point, développer l'intégrand en  $\varepsilon$  :

$$(X)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et :

$$\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

pour écrire :

$$\Pi(q^2) = \delta Z_3 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon}{\mu^2} \tag{4.1.18}$$

### • Schémas de renormalisation

Le choix du contre-terme pour compenser la divergence en  $1/\varepsilon$  définit le schéma de renormalisation :

— schéma  $MS$  : "minimal subtraction scheme" ('t Hooft, Veltman)

$$\boxed{\delta Z_3^{MS} = -\frac{\alpha_{MS}}{3\pi\varepsilon}} \Rightarrow \Pi^{MS}(q^2) = \frac{\alpha_{MS}}{3\pi} (\ln 4\pi - \gamma) - 2\frac{\alpha_{MS}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{MS}^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \tag{4.1.19}$$

— schéma  $\overline{MS}$  : "modified minimal subtraction scheme" (Buras, Bardeen, ...)

$$\boxed{\delta Z_3^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha_{\overline{MS}}}{3\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)} \tag{4.1.20}$$

$$\Rightarrow \Pi^{\overline{MS}}(q^2) = -\frac{2\alpha_{\overline{MS}}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{\overline{MS}}^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \tag{4.1.21}$$

Il permet de se débarrasser d'inutiles facteurs  $\ln 4\pi - \gamma$  dans les quantités renormalisées.

1. En écho à la remarque sur invariance de jauge et degré de divergence de la boucle, on voit comment elle est réalisée en pratique : dans l'éq. (4.1.16) le terme en  $p^2$  au numérateur mène à une divergence quadratique dans l'intégration sur  $p$  : cette divergence se manifeste comme un pôle en  $(1-\varepsilon)$  qui est en fait annulé par le coefficient  $(1-\varepsilon)$ .

- schéma ON (= on-shell, schéma physique ou sur couche de masse) : c'est le schéma adopté dans la discussion de  $\lambda\phi^4$ . On soustrait le contre-terme à  $q^2 = 0$  (condition "on shell") en imposant la contrainte

$$\Pi^{ON}(q^2 = 0) = 0, \quad (4.1.22)$$

d'où

$$\boxed{Z_3^{ON} - 1 = -\frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) + \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{m_{ON}^2}{\mu^2}} \quad (4.1.23)$$

et donc

$$\begin{aligned} \Pi^{ON}(q^2) &= -\frac{2\alpha_{ON}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{ON}^2 - q^2 x(1-x)}{m_{ON}^2} \\ &\simeq -\frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m_{ON}^2} \quad \text{quand } q^2 \rightarrow \infty, \quad (-q^2 \gg m_{ON}^2) \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Le schéma  $ON$  est dit physique car la fonction  $\Pi^{ON}(q^2)$  ne dépend pas de la masse arbitraire  $\mu$  introduite par le schéma de régularisation mais seulement des variables physiques du problème,  $m^2$  et  $q^2$ . Ce genre de conditions est souvent utilisé en QED.

On voit que les différents schémas de renormalisation diffèrent par des termes constants.

#### • Remarque

Pour alléger l'écriture nous n'avons pas gardé le facteur  $i\epsilon$  qui accompagne le terme  $\mathcal{C} = m^2 - q^2 x(1-x)$  dans les expressions ci-dessus. Ce terme peut être facilement rétabli si nécessaire en faisant  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$  et il devient important dans le cas où  $\mathcal{C}$  est négatif car il fixe la prescription pour définir les logarithmes d'argument négatif (voir éq. (3.2.25)) :

$$\ln(m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon) = \ln |m^2 - q^2 x(1-x)| - i\pi\theta(q^2 x(1-x) - m^2). \quad (4.1.25)$$

Dans ce cas, puisque  $0 \leq x \leq 1$ , l'expression  $(m^2 - q^2 x(1-x))$  ne devient négative que quand  $q^2 > 4m^2$ , c'est à dire au dessus du seuil de production d'une paire de fermions. On peut montrer que la partie imaginaire ainsi engendrée a une interprétation physique : ici elle est proportionnelle au taux de désintégration d'un photon virtuel en une paire de fermions<sup>2</sup>.

#### 4.1.1 Conséquence et application

Le propagateur du photon est modifié par l'insertion de boucles et contre-termes. On peut calculer la série complète :

$$\begin{aligned} & \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \\ & \text{prop. du } \gamma \quad \text{correc. à une boucle + c.t.} \\ & + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \dots \\ & \text{corrections à 2 boucles + c.t.} \end{aligned}$$

2. Voir la section 1 du chapitre 11 pour une discussion détaillée.

On travaille en jauge de Landau. Pour simplifier la notation on introduit le tenseur

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \quad (4.1.26)$$

qui satisfait

$$\mathcal{P}_{\mu\mu'}(q) \mathcal{P}^{\mu'\nu}(q) = \mathcal{P}_\mu^\nu(q) \quad (4.1.27)$$

de telle sorte que le propagateur prend la forme  $-i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)/(q^2 + i\epsilon)$ . Quant à l'insertion de la boucle et du contre-terme elle s'écrit

$$-i q^2 (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) \mathcal{P}_{\mu\nu}(q).$$

Le propagateur devient

$$\begin{aligned} & -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} + \left( -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\mu'}(q)}{q^2 + i\epsilon} \right) \left( -i q^2 (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) \mathcal{P}^{\mu'\nu'}(q) \right) \left( -\frac{i \mathcal{P}_{\nu'\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \right) + \dots \\ & = -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \left( 1 - (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

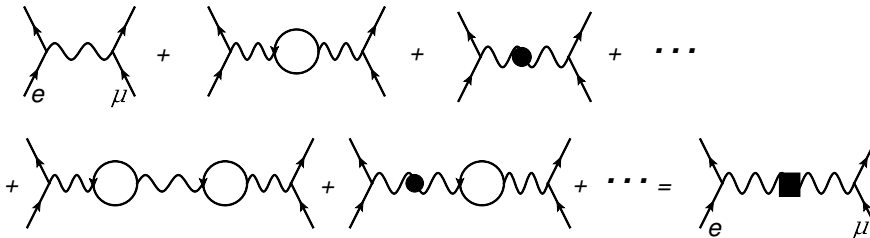
$$= -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)} \quad (4.1.29)$$

Dans la dernière expression on a "resommé" la série géométrique des insertions de boucles et contre-terme. Le propagateur du photon "complet" garde la même forme que le propagateur à l'ordre le plus bas (i.e. pôle en  $1/(q^2 + i\epsilon)$ ) mais il est "renormalisé" par un facteur multiplicatif. Après renormalisation dans le schéma R, le propagateur du photon s'écrit simplement

$$\boxed{-\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \Pi^R(q^2)}} \quad (4.1.30)$$

Le photon reste donc bien de masse nulle et l'invariance de jauge n'est pas brisée. Ceci est une conséquence de la forme éq. (4.1.13) de la polarisation du vide.

On considère maintenant un processus physique tel que la diffusion  $e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \mu^-(p_4)$  par exemple. Prenant en compte les corrections au propagateur du photon les diagrammes à calculer sont donnés ci-dessous :



L'amplitude de diffusion s'obtient immédiatement et on trouve

$$\mathcal{M} = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(q^2)} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \mathcal{P}^{\mu\nu} \bar{u}_4 \gamma_\nu u_2 = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(q^2)} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}_4 \gamma^\mu u_2. \quad (4.1.31)$$



La section efficace totale est, à haute énergie ( $s = (p_1 + p_2)^2$ ), :

$$\sigma = \frac{1}{2s} \int \frac{dp_3^3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{dp_4^3}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2, \quad (4.1.32)$$

d'où on tire la section efficace différentielle pour une diffusion à un angle  $\theta$  ( $q^2 = (p_1 - p_3)^2 = -(s/2)(1 - \cos \theta)$ ) (négligeant la masse des fermions) :

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \left( \frac{\alpha_R}{1 + \Pi^R(q^2)} \right)^2 \frac{\pi}{s} \frac{4 + (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad \text{où } \alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}. \quad (4.1.33)$$

On considère d'abord le schéma de renormalisation  $ON$  (physique). Ce schéma est défini par le choix  $\Pi^{ON}(q^2 = 0) = 0$  (voir éq. (4.1.22)). Prenant la limite de la section efficace à petit angle,  $\theta \rightarrow 0, q^2 \rightarrow 0$ , on trouve :

$$(1 - \cos \theta)^2 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \alpha_{ON}^2 \frac{8\pi}{s}.$$

Le membre de gauche peut être mesuré expérimentalement ce qui fixe la valeur de la constante de couplage renormalisée dans le schéma  $ON$ . On trouve (valeur en 2016 du *Particle Data Group*) :

$$\boxed{\alpha_{ON} = \frac{1}{137,035999139(31)}}, \quad (4.1.34)$$

valeur que l'on dénote habituellement par  $\alpha$ . Il faut noter qu'en réalité la valeur de  $\alpha$  n'est pas déterminée à l'aide de la diffusion  $e + \mu$  mais dans des expériences de physique atomique. Si on avait effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$  la relation entre la section efficace  $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$  et théorie aurait été :

$$(1 - \cos \theta)^2 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \left( \frac{\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)}{1 - (\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)/3\pi) \ln(m^2/\mu^2)} \right)^2 \frac{8\pi}{s}. \quad (4.1.35)$$

ce qui permet de déterminer  $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$  une fois la variable  $\mu$  choisie. Bien que l'on ne l'ait pas mentionné explicitement, on voit que la charge renormalisée dans un schéma de type  $\overline{MS}$  ou  $MS$  est fonction de  $\mu$  puisque le membre de gauche est indépendant de  $\mu$ . On va voir maintenant comment  $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$  varie et on reviendra sur cette question de façon plus formelle en sec. 4.4.

Remarque : On n'a considéré qu'une partie des diagrammes à une boucle ce qui est, comme on le verra plus bas, justifié en QED car les autres diagrammes, bien qu'ils donnent des corrections finies, n'affectent pas la définition de la charge.

#### • Invariance de la charge effective et variance de la charge renormalisée

Il est facile de prouver, en général, que la charge effective

$$\boxed{\overline{\alpha}_R(q^2, \alpha_R) = \alpha_R / (1 + \Pi^R(q^2)) \equiv \overline{\alpha}(q^2)} \quad (4.1.36)$$

est indépendante du choix du schéma de renormalisation où  $e_R$  dénote le paramètre de charge renormalisée et  $\alpha_R = e_R^2/4\pi$ . On prouvera plus bas (éq. (4.3.95)) l'égalité  $Z_1 = Z_2$  de telle sorte que la relation entre charge nue et charge renormalisée est pour QED (cf. l'éq.(4.0.3)) :

$$e_R \mu^\epsilon = (Z_3^R)^{1/2} e_B = \left(1 + \frac{1}{2} \delta Z_3^R\right) e_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_R \mu^{2\epsilon} = Z_3^R \alpha_B = (1 + \delta Z_3^R) \alpha_B. \quad (4.1.37)$$

Eliminant  $\alpha_B$ , deux schémas  $R_1$  et  $R_2$  ont donc leur charges renormalisées reliés par :

$$\alpha_{R_1} (1 + \delta Z_3^{R_2}) = \alpha_{R_2} (1 + \delta Z_3^{R_1}) \quad (4.1.38)$$

qui décrit la *renormalisation finie* entre les deux schémas. Substituant cette équation dans la charge effective calculée dans le schéma  $R_2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{R_2}}{1 + \Pi^{R_2}(q^2)} &= \frac{\alpha_{R_1} (1 + \delta Z_3^{R_2})}{(1 + \delta Z_3^{R_1})(1 + \Pi^{R_2}(q^2))} \\ &= \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \delta Z_3^{R_1} - \delta Z_3^{R_2} + \Pi^{R_2}(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3). \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Mais  $\Pi^R$  est le reste fini de la combinaison  $\delta Z_3^R + \Pi^{\text{boucle}}$ , éq. (4.1.17), quand on a choisi le schéma :

$$\Pi^{R_1} = \delta Z_3^{R_1} + \Pi^{\text{boucle}}, \quad \Pi^{R_2} = \delta Z_3^{R_2} + \Pi^{\text{boucle}},$$

d'où :

$$\delta Z_3^{R_1} - \Pi^{R_1} = \delta Z_3^{R_2} - \Pi^{R_2}, \quad (4.1.40)$$

ce qui, injecté dans l'éq. (4.1.39) prouve :

$$\boxed{\frac{\alpha_{R_2}}{1 + \Pi^{R_2}(q^2)} = \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \Pi^{R_1}(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3)} \quad (4.1.41)$$

On a donc bien démontré, dans l'approximation une boucle, que la charge effective est, au sens perturbatif, indépendante du schéma de renormalisation : en effet la différence entre deux prédictions est d'un ordre supérieur à celui auquel on mène le calcul. Revenant à l'éq. (4.1.38) que l'on peut écrire :

$$\alpha_{R_2} = \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \delta Z_3^{R_1} - \delta Z_3^{R_2}} + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (4.1.42)$$

et spécifiant  $R_2 = \overline{MS}$  et  $R_1 = ON$ , on trouve à l'aide des équations (4.1.20) et (4.1.23) :

$$\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) = \frac{\alpha_{ON}}{(1 + \delta Z_3^{ON} - \delta Z_3^{\overline{MS}})} + \mathcal{O}(\alpha^3) = \frac{\alpha_{ON}}{1 - \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2}} + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (4.1.43)$$

ce qui donne la valeur de la charge renormalisée dans le schéma  $\overline{MS}$  en fonction de celle dans le schéma  $ON$ . La charge renormalisée  $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$  dépend de la variable non physique  $\mu$ , que l'on peut choisir à sa guise, et cette dépendance garantit que les prédictions pour une quantité physique telle  $\overline{\alpha}_{\overline{MS}}(q^2)$ , sont indépendantes du choix de  $\mu$ .

### • Application

On considère la réaction  $e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \mu^+(p_3) + \mu^-(p_4)$  à très haute énergie,  $\sqrt{s} \sim 100$  à 200 GeV, au LEP. Dans l'approximation à une boucle et pour le schéma de renormalisation  $R$ , l'élément de matrice est

$$\mathcal{M} = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(s)} \bar{v}_1 \gamma_\mu u_2 \frac{i}{s} \bar{u}_4 \gamma^\mu v_3, \quad (4.1.44)$$

et la section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \left( \frac{\alpha_{ON}}{1 + \Pi^{ON}(s)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta), \quad (4.1.45)$$

si on spécifie le schéma  $ON$ . D'après l'éq. (4.1.24) on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \left( \frac{\alpha_{ON}}{1 - \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln(s/m^2)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta) = \left( \frac{1/137}{1 - \frac{1}{137} \frac{1}{3\pi} \ln(s/m^2)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta) \\ &\approx \left( \frac{1}{128} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta), \quad \text{for } \sqrt{s} \sim 100 \text{ GeV à } 200 \text{ GeV.} \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

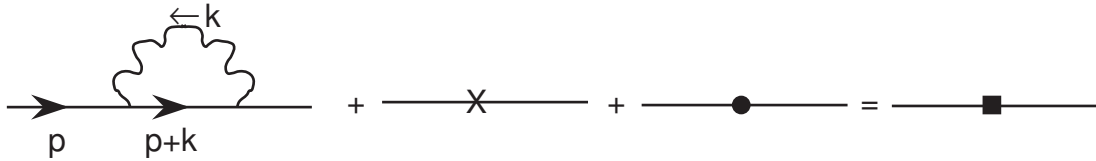
La prise en compte des termes d'ordre supérieur de la théorie des perturbations implique donc que la charge électrique effective dépend des conditions cinématiques de l'observation.

### • Conclusion

Il convient, dans le schéma de renormalisation  $R$ , de distinguer le paramètre de charge renormalisée  $\alpha_R$  de la charge effective dénotée  $\bar{\alpha}(q^2)$  qui apparaît dans le calcul des observables. La valeur du paramètre de charge dépend du schéma de renormalisation alors que la charge effective définie comme ci-dessus est un invariant. La constante de structure fine  $\alpha$  est une constante fondamentale de la physique mais sa valeur numérique  $\alpha = 1/137,035999139$  est définie dans le cadre d'un schéma de renormalisation spécifique  $ON$ , en un point particulier de l'espace des impulsions ( $q^2 = 0$ ).

## 4.2 Self-énergie du fermion : calcul de $Z_0$ et $Z_2$

On se tourne maintenant vers le diagramme à deux fermions externes supposant, pour le moment, le fermion légèrement hors couche ( $p^2 \neq m^2$ ). Il y a trois diagrammes à prendre en compte :



$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &+ \underbrace{(-im)(Z_0 - 1)}_{\text{contre-terme de masse}} + \underbrace{i\not{p}(Z_2 - 1)}_{\text{contre-terme de fn. d'onde}} = -i\Sigma(p) \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

On considère le propagateur du fermion après sommation des corrections en boucles + contre-terms (cf. discussion ci-dessus du propagateur du photon)

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \blacksquare \text{---} + \text{---} \blacksquare \blacksquare \text{---} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \left( -i\Sigma \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) \left( -i\Sigma \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \frac{1}{1 - \Sigma(p) / (\not{p} - m + i\epsilon)},$$

après sommation de la série géométrique. Rappelant que si  $a, b$  sont des matrices, alors  $\frac{1}{a} \frac{1}{b} = \frac{1}{ba}$ , et on a donc pour le propagateur complet

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon}. \quad (4.2.48)$$

### • Calcul de la boucle

On calcule  $-i\Sigma^{\text{boucle}}(p)$  en jauge covariante,

$$-i\Sigma^{\text{boucle}}(p) = (-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{-i(g^{\mu\nu} - (1-\xi)k^\mu k^\nu / k^2)}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.2.49)$$

où  $\xi = 1$  pour la jauge de Feynman et  $\xi = 0$  pour celle de Landau. L'application des méthodes habituelles (paramétrage de Feynman, contraction des indices  $\mu$  dans  $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$  par les éqs. (3.2.32)), translation  $k + px = l$ , donne

$$-i\Sigma^{\text{boucle}}(p) = -(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left[ \frac{(2(2-\epsilon) - (1-\xi)m - (2(1-\epsilon)(1-x) - (1-\xi)(1+x)) \not{p}}{[l^2 - \mathcal{C}]^2} - 4 \frac{(1-\xi)(1-x)}{[l^2 - \mathcal{C}]^3} \left( \frac{l^2}{2(2-\epsilon)} + x^2 p^2 \right) \not{p} \right], \quad (4.2.50)$$

avec  $\mathcal{C} = m^2 x - p^2 x(1-x) - i\epsilon$ . Etant donné la complexité des expressions nous allons traiter deux cas particuliers : cas massif en jauge de Feynman d'une part, et cas de masse nulle en jauge covariante d'autre part.

### • Renormalisation dans le cas massif en jauge de Feynman

Faisant le choix  $\xi = 1$  dans l'éq. (4.2.50), on a seulement besoin de l'intégrale  $I_{0,2}$  (éq.(3.2.26)) pour trouver la contribution de la boucle :

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} (4\pi)^\epsilon \int_0^1 dx \left[ \frac{m^2 x - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right]^{-\epsilon} ((2-\epsilon)m - (1-\epsilon)(1-x) \not{p}). \quad (4.2.51)$$

Pour étudier le comportement du propagateur (éq. (4.2.48)) près du pôle, qui doit correspondre à la masse physique du fermion, on développe la fonction  $\Sigma^{\text{boucle}}(p)$  au voisinage de  $p^2 = m^2$  ou de façon équivalente  $\not{p} = m$  où  $m$  est le paramètre de masse renormalisée. On définit donc les coefficients scalaires :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma^{\text{boucle}}(\not{p} = m) \\ \Sigma_1 &= \left. \frac{d\Sigma^{\text{boucle}}}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \Leftrightarrow \gamma_\alpha \Sigma_1 = \left. \frac{d\Sigma^{\text{boucle}}}{dp^\alpha} \right|_{\not{p}=m}, \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

de sorte que la boucle de self-énergie peut s'écrire :

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = \Sigma_0 + (\not{p} - m) \Sigma_1 + \dots$$

Le propagateur du fermion dans l'approximation à une boucle devient alors :

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{1}{(\not{p} - m)(1 + \delta Z_2 - \Sigma_1) - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) - \Sigma_0 + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{(\not{p} - m - \Sigma_0 - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + i\epsilon)(1 + \delta Z_2 - \Sigma_1)} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

A la suite de manipulations identiques à celles qui ont mené à l'éq. (3.1.46) on trouve :

$$\boxed{S_F(p) = \frac{1 - \delta Z_2 + \Sigma_1}{\not{p} - m - \Sigma_0 - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2).} \quad (4.2.54)$$

Les deux formes de l'équation sont identiques au sens perturbatif puisque les  $\delta Z_i$  et les  $\Sigma_i$  sont tous d'ordre  $\alpha$ . L'expression pour  $\Sigma_0$  est facile à calculer et on trouve :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= m \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left( \frac{3}{2} + 2\varepsilon \right) \\ &= m \frac{3\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right). \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Quant au calcul de  $\Sigma_1$ , utilisant la relation  $dF(p^2)/d\not{p} = 2 \not{p} dF(p^2)/dp^2$ , on obtient après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi\mu^2)^\varepsilon \int_0^1 dx \left[ -(1 - \varepsilon)(1 - x)(m^2 x^2)^{-\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 \varepsilon x(1 - x)(m^2 x^2)^{-\varepsilon - 1} (1 + (1 - \varepsilon)x) \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \int_0^1 dx (1 - x)x^{-2\varepsilon} \left[ -(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) + 2\varepsilon x^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

L'intégrale se fait trivialement à l'aide de l'éq. (3.2.29) et l'on voit que le deuxième terme présente un pôle en  $\varepsilon$  (associé au comportement "divergent" quand  $x \rightarrow 0$ ) qui sera indexé par le symbole "ir" pour le distinguer du pôle en  $\varepsilon$  d'origine ultraviolette qui vient de l'intégrale sur l'impulsion de la boucle. On note que ce terme divergent dans l'infrarouge est proportionnel au facteur  $\varepsilon$  qui "tue" la divergence ultraviolette de sorte qu'il n'y a pas de double pôle  $1/\varepsilon \varepsilon_{\text{ir}}$ , comme il se doit puisque ces deux divergences ont leur origine dans différentes régions de l'espace des impulsions. On trouve finalement :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left[ -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - 2 \right] \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 4 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Les conditions de renormalisation seront choisies telles qu'il ne reste plus de divergences ultraviolettes (mais il peut rester des divergences infrarouges) :

$$\delta Z_2 - \Sigma_1 \sim \text{fini dans l'ultraviolet} \quad (4.2.58)$$

$$m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + \Sigma_0 \sim \text{fini dans l'ultraviolet} \quad (4.2.59)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour définir différents schémas de renormalisation.

• **Renormalisation ON**

Pour le schéma  $ON$ , sur "couche de masse", on choisit les contre-terme de telle sorte que le propagateur garde, après les corrections à une boucle la même forme qu'à l'ordre le plus bas. Les contre-terme sont donc (voir éq. (4.2.54)) :

$$\boxed{\delta Z_2^{ON} = \Sigma_1} \quad (4.2.60)$$

$$\boxed{m_{ON} (\delta Z_0^{ON} - \delta Z_2^{ON}) = -\Sigma_0}, \quad (4.2.61)$$

et ils sont obtenus facilement à partir des éqs. (4.2.55, 4.2.57), c'est à dire que toute la dépendance en les quantités non physiques (divergences ultraviolette et infrarouge, dépendance en  $\mu$ ) est absorbée dans les contre-terme. Le propagateur de la théorie renormalisée est donc simplement :

$$\boxed{S_F^{ON} = \frac{i}{\not{p} - m_{ON} + i\epsilon}} \quad (4.2.62)$$

Comme le pôle du propagateur est par définition la masse physique de la particule, on a  $\boxed{m_{ON} = m_{\text{phys}}}$ .

• **Renormalisation  $\overline{MS}$**

Dans ce cas, seules les divergences ultraviolettes et leur cortège de  $\ln(4\pi) - \gamma$  sont absorbées sans les contre-terme ;

$$\boxed{\delta Z_0^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)}$$

$$\boxed{\delta Z_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)}, \quad (4.2.63)$$

et le propagateur de l'électron prend une forme compliquée :

$$S_F^{\overline{MS}} = i \frac{1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}}{\not{p} - m_{\overline{MS}} - \Sigma_0^{\overline{MS}} + i\epsilon}, \quad (4.2.64)$$

avec

$$\Sigma_0^{\overline{MS}} = m \frac{3\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right) \quad (4.2.65)$$

et

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ - \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_{\overline{MS}}^2} - 2 \right]. \quad (4.2.66)$$

• **Invariance du pôle du propagateur, relation entre  $m_{\overline{MS}}$  et  $m_e$**

Il est facile de montrer que le pôle du propagateur dans un schéma arbitraire est à la masse physique  $m_{\text{phys}}$ . On considère dans le dénominateur de l'éq. (4.2.54) l'expression  $\Sigma_0 + m(\delta Z_0 - \delta Z_2)$ . Après avoir choisi les contre-terme  $\delta Z_0$  et  $\delta Z_2$  dans le schéma  $R_1$  on aura :

$$\Sigma_0^{R_1} = \Sigma_0 + m_{R_1} (\delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}), \quad (4.2.67)$$

où  $\Sigma_0^{R_1}$  est la partie finie de  $\Sigma_0$  restant après soustraction des termes divergents. De même pour un schéma  $R_2$  on aura :

$$\Sigma_0^{R_2} = \Sigma_0 + m_{R_2}(\delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}), \quad (4.2.68)$$

d'où on tire, éliminant  $\Sigma_0$  :

$$m_{R_1}(\delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}) - \Sigma_0^{R_1} = m_{R_2}(\delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}) - \Sigma_0^{R_2}. \quad (4.2.69)$$

Mais la relation,

$$m_B = \frac{Z_0^{R_1}}{Z_2^{R_1}} m_{R_1} = \frac{Z_0^{R_2}}{Z_2^{R_2}} m_{R_2}, \quad (4.2.70)$$

s'écrit perturbativement

$$m_{R_1} (1 + \delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}) = m_{R_2} (1 + \delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}). \quad (4.2.71)$$

Combinant avec les équations précédentes il en ressort :

$$\boxed{m_{R_1} + \Sigma_0^{R_1} = m_{R_2} + \Sigma_0^{R_2}}, \quad (4.2.72)$$

ce qui démontre l'invariance du pôle du propagateur. Choissant  $R_1 = \overline{MS}$  et  $R_2 = ON$  on a bien

$$m_{ON} = m_{\text{phys}} = m_{\overline{MS}} + \Sigma_0^{\overline{MS}}. \quad (4.2.73)$$

Le propagateur du fermion, dans le schéma  $\overline{MS}$  s'écrit donc :

$$\boxed{S_F^{\overline{MS}} = i \frac{1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}}{\not{p} - m_{\text{phys}} + i\epsilon}} \quad (4.2.74)$$

La relation entre les paramètres de masse dans les différents schémas est d'après les éqs. (4.2.73) et (4.2.65),

$$m_{\text{phys}} = m_{\overline{MS}} \left( 1 + \frac{3\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right) \right). \quad (4.2.75)$$

Inversant cette équation on obtient :

$$\boxed{m_{\overline{MS}}(\mu) = m_{\text{phys}} \left( 1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{\mu^2}{m_{\text{phys}}^2} + \frac{4}{3} \right) \right)} \quad (4.2.76)$$

qui donne la dépendance explicite du paramètre de masse du schéma  $\overline{MS}$  en la variable arbitraire  $\mu$  de façon que la physique soit indépendante du choix de cette variable. Dans un schéma tel que  $\overline{MS}$ , il faut bien distinguer, le paramètre de masse renormalisée de la masse physique, observable.

#### • Renormalisation de la fonction d'onde de l'électron

Le facteur  $1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}$  qui apparaît au numérateur de l'éq. (4.2.74) renormalise la fonction d'onde de l'électron (le spineur de Dirac). En effet, on peut ré-écrire cette équation :

$$S_F^{\overline{MS}} = i \frac{(\not{p} + m_{\text{phys}})(1 + \Sigma_1^{\overline{MS}})}{p^2 - m_{\text{phys}}^2 + i\epsilon}, \quad (4.2.77)$$

mais comme on l'a montré en sec. 2.3, le numérateur n'est autre que la somme sur les états de polarisation  $\alpha$  de la combinaison  $u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} \bar{u}_\alpha(p)|_{\overline{MS}}$ , ce qui conduit à normaliser la fonction d'onde du fermion dans le schéma  $\overline{MS}$  par la condition :

$$\sum_{\alpha=1,2} u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} \bar{u}_\alpha(p)|_{\overline{MS}} = (\not{p} + m_{\text{phys}})(1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}), \quad (4.2.78)$$

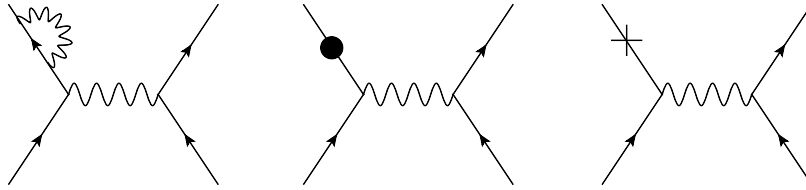
d'où,

$$\boxed{\begin{aligned} u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma_1^{\overline{MS}}\right) u_\alpha(p) \\ v_\alpha(p)|_{\overline{MS}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma_1^{\overline{MS}}\right) v_\alpha(p), \end{aligned}} \quad (4.2.79)$$

où les  $u_\alpha(p), v_\alpha(p)$  sont les spineurs ordinaires, définis en sec. 2.2, normalisés par  $u_\alpha(p)\bar{u}_\alpha(p) = (\not{p} + m_{\text{phys}})$  et  $v_\alpha(p)\bar{v}_\alpha(p) = (\not{p} - m_{\text{phys}})$ . Pour  $\Sigma_1^{\overline{MS}}$  il est justifié d'utiliser sa valeur au pôle du propagateur  $m_{\text{phys}}$  au lieu de  $m_{\overline{MS}}$  et on a donc :

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ -\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi)\right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_{\text{phys}}^2} - 2 \right]. \quad (4.2.80)$$

En résumé, lors du calcul à une boucle avec électrons externes il faudra inclure les corrections sur les pattes fermioniques externes comme indiqué sur le graphe ci-dessous :



Pour prendre en compte ce type de contributions il suffira de remplacer dans les diagrammes à l'ordre le plus bas le spineur du fermion par le spineur renormalisé défini par les éqs. (4.2.79). Le propagateur et le spineur ainsi définis ne peuvent être des quantités physique car ils dépendent de quantités non-physiques : pôle en  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$ , dépendance en  $\mu$ . On peut montrer, lors du calcul d'une quantité physique telle que section efficace ou taux de décroissance, que ces termes se compensent et le résultat est indépendant de la procédure de renormalisation.

En règle générale, pour un schéma de renormalisation arbitraire, on note que l'éq. (4.2.54) implique que les spineurs renormalisés soient modifiés de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} u_\alpha(p) &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}(-\delta Z_2 + \Sigma_1)\right) u_\alpha(p) \\ v_\alpha(p) &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}(-\delta Z_2 + \Sigma_1)\right) v_\alpha(p), \end{aligned}} \quad (4.2.81)$$

mais, dans le schéma de renormalisation ON, les spineurs ne sont, par définition, pas modifiés.



• **Divergence infrarouge**

Nous avons vu que  $\Sigma_1$  contient un pôle en  $\varepsilon$  dont l'origine est le comportement de l'intégrand de l'éq. (4.2.56) quand  $x \rightarrow 0$ . On peut relier le comportement singulier de l'intégrale sur  $x$  au comportement divergent de l'intégrale sur l'impulsion de la boucle de self-énergie quand le fermion externe est sur couche de masse  $p^2 = m^2$ . En effet si on calcule la fonction  $\Sigma_1$  par l'éq. (4.2.52), avant intégration sur l'impulsion dans la boucle, elle contient un terme de la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\sim \int d^n k \int_0^1 dx \frac{d}{d \not{p}} \left[ \frac{1}{((p+k)^2 - m^2)x + k^2(1-x)^2} \right]_{p^2=m^2} \\ &\sim \int d^n k \int_0^1 dx \left[ \frac{m x}{(2 p \cdot k x + k^2)^3} + \dots \right] \\ &\sim \int d^n k \left[ m \left( \frac{1}{2 p \cdot k} \right)^2 \frac{1}{k^2} + \text{termes } \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

où le terme explicité vient de la borne inférieure de l'intégrale  $x = 0$ , qui fait apparaître le facteur  $1/k^2$ . Il est clair que l'intégrale sur  $k$  divergerait logarithmiquement pour  $k \rightarrow 0$  dans un espace à 4 dimensions mais conduit à un pôle en  $\varepsilon$  en  $n$  dimensions. Si le photon était massif, la masse du photon jouerait le rôle de régulateur de cette divergence logarithmique dans un espace à 4 dimensions. De même, si l'on était resté hors couche de masse le régulateur aurait été  $(p^2 - m^2)$ , et on aurait obtenu un  $\ln(p^2 - m^2)$ .

• **Renormalisation dans le cas  $m = 0$  en jauge covariante**

Revenant à l'éq. (4.2.50), on a dans ce cas  $\mathcal{C} = -p^2 x(1-x) - i\varepsilon$  et les intégrales sur l'impulsion  $l$  de type  $I_{0,2}$ ,  $I_{0,3}$ ,  $I_{1,3}$ , de l'éq. (3.2.23), se font très facilement. On obtient :

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &= -i \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon 2 \not{p} \int_0^1 dx x^{-\varepsilon} (1-x)^{-\varepsilon} [\Gamma(\varepsilon)(-(1-\varepsilon)(1-x) + (1-\xi)x) \\ &\quad - \Gamma(1+\varepsilon)(1-\xi)x], \end{aligned} \quad (4.2.83)$$

qui exhibe une divergence ultraviolette dans le premier terme. Cette intégrale est facile à évaluer grâce à l'éq. (3.2.29) pour donner :

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &= i \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (1+\varepsilon) \not{p} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -i \Sigma^{(1)}(p) \not{p} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2.84)$$

où on a négligé un facteur  $\Gamma(1-\varepsilon)^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$  issu de l'intégrale sur  $x$  qui ne contribue pas puisqu'il est d'ordre  $1+\varepsilon^2$ . A une boucle, le propagateur du fermion de masse nulle s'écrira donc en général :

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \left( 1 + i(\delta Z_2 - \Sigma^{(1)}(p)) \not{p} \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \right) \\ &= \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} (1 - \delta Z_2 + \Sigma^{(1)}(p)) \end{aligned} \quad (4.2.85)$$

Comme il n'y a pas de modification du dénominateur il n'y a pas de renormalisation de masse. Si on travaille en jauge de Landau  $\xi = 0$ , alors il n'est pas nécessaire d'introduire un contre-terme puisque  $\Sigma^{\text{boucle}}(p) = 0$  et le propagateur du fermion à une boucle est  $i/(\not{p} + i\varepsilon)$  comme à l'ordre le plus bas. Dans le cas général, renormaliser sur couche de masse et obtenir la forme des spineurs est plus subtil car cela implique de prendre la limite  $p^2 = 0$ , ce qui est assez délicat. La procédure consiste à d'abord effectuer la renormalisation off-shell ( $p^2 \neq 0$ ) et, ensuite à prendre la limite  $p^2 \rightarrow 0$  de la théorie renormalisée. On écrira donc :

$$\begin{aligned} -\delta Z_2 + \Sigma^{(1)}(p) &= -\delta Z_2 - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \\ &\quad - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \left( \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon - 1 \right) - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2}, \end{aligned} \quad (4.2.86)$$

où on a explicité la divergence ultraviolette :

$$\Sigma_{\text{UV}} = -\xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon. \quad (4.2.87)$$

Le contre-terme dans le schéma  $\overline{MS}$  sera choisi pour compenser ce terme :

$$\delta Z_2^{\overline{MS}} = -\xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = -\xi \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right). \quad (4.2.88)$$

Une fois l'expression renormalisée on peut faire, dans l'éq. (4.2.86), la continuation  $\varepsilon < 0$  ce qui permet alors de prendre la limite  $p^2 \rightarrow 0$  de telle sorte que  $(\mu^2/(-p^2))^\varepsilon \rightarrow 0$ . Le propagateur d'un fermion de masse nulle dans le schéma  $\overline{MS}$  est donc :

$$S_F^{\overline{MS}} = \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \left[ 1 + \xi \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma - 1 \right) \right]. \quad (4.2.89)$$

La notation  $\varepsilon_{\text{ir}}$  au lieu de  $\varepsilon$  rappelle l'origine de cette divergence qui n'est pas associée au comportement ultraviolet du diagramme en boucle mais plutôt à son comportement lorsque la virtualité du fermion tend vers 0.

### • Remarque

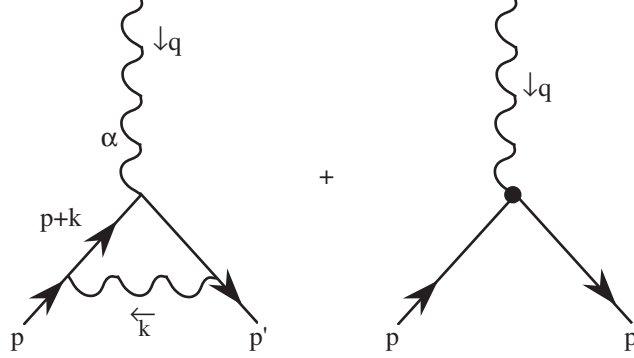
Nous allons conclure cette discussion par une remarque qui sera utile pour la section suivante. Si on considère les équations (4.1.18), (4.2.55) et (4.2.57) on remarque que la structure de la divergence ultraviolette, dans le schéma  $\overline{MS}$ , est la suivante :

$$\text{boucle} \left( \begin{array}{c} \text{dépendante} \\ \text{des impulsions} \\ \text{externes} \end{array} \right) = K (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} + \text{termes finis} \left( \begin{array}{c} \text{dépendants} \\ \text{des impulsions} \\ \text{externes} \end{array} \right) \quad (4.2.90)$$

et  $K$  est une constante qui ne dépend pas explicitement des impulsions externes. Cette structure est naturelle puisque la divergence étant liée au comportement de l'intégrand quand l'impulsion de la boucle tend vers l'infini, cette divergence est insensible à la valeur des impulsions externes finies. Si on s'intéresse uniquement au calcul des contre-terme (détermination de  $K$ ) on peut faire un choix des impulsions qui simplifient le calcul. On va utiliser cette remarque pour simplifier le calcul de  $Z_1$ .

### 4.3 Correction au vertex : calcul de $Z_1$

Les diagrammes à considérer sont :



L'application des règles de Feynman pour le diagramme en boucle donne en jauge de Feynman :

$$-ie\mu^\varepsilon \Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p') = (-ie\mu^\varepsilon)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho i \frac{(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\alpha i \frac{(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\sigma \frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.3.91)$$

#### • Extraction de la singularité ultraviolette

D'après le commentaire autour de l'éq. (4.2.90), il suffira, pour déterminer la partie divergente, de choisir une cinématique particulière simple, par exemple

$$q = 0 \Rightarrow p = p'$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(p; p) &= \Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p) + (Z_1 - 1)\gamma_\alpha \quad (4.3.92) \\ &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - i(e\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

On prouve facilement la relation :

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} = -\frac{d}{dp^\alpha} \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon}. \quad (4.3.93)$$

En effet :

- $\frac{d}{dp^\alpha}(\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon) = \gamma_\alpha$ ,
- Si  $a(p)$  est une matrice (ici  $a(p) = \not{p} + \not{k} - m + i\epsilon$ ) alors

$$\frac{d}{dp^\alpha} (a(p) a^{-1}(p)) = 0$$

donc la dérivée de l'inverse est :

$$\frac{d}{dp^\alpha} a^{-1}(p) = -a^{-1}(p) \left( \frac{da(p)}{dp^\alpha} \right) a^{-1}(p)$$

d'où l'équation (4.3.93).

Le vertex devient alors :

$$\Lambda_\alpha(p; p) = (Z_1 - 1)\gamma_\alpha + i(e\mu^\varepsilon)^2 \frac{d}{dp^\alpha} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

On reconnaît immédiatement dans l'intégrale l'expression de  $\Sigma^{\text{boucle}}(p)$  (voir équation (4.2.49)) en jauge de Feynman ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(p; p) &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - \frac{d}{dp^\alpha} \Sigma^{\text{boucle}}(p) \\ &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - \Sigma_1 \gamma_\alpha, \end{aligned} \quad (4.3.94)$$

d'après l'éq. (4.2.52). On voit que la condition sur  $Z_1$  qui rend cette quantité finie est identique à la condition (4.2.58) sur  $Z_2$ , d'où

$$Z_1 = Z_2 + \text{termes finis.}$$

Il est usuel de choisir alors simplement  $Z_1 = Z_2$  et on trouve, dans le schéma  $\overline{MS}$  par exemple,

$$\boxed{Z_1|_{\overline{MS}} = Z_2|_{\overline{MS}} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)} \quad (4.3.95)$$

#### Remarque

La relation  $Z_1 = Z_2$  est une relation générale, valable à tous les ordres de la théorie des perturbations. Elle exprime le fait que la théorie construite à partir des quantités renormalisées est invariante de jauge. En effet, cette condition garantit que sous une transformation de jauge des champs renormalisés la variation des termes suivants dans le lagrangien (4.0.4) se compensent :

$$Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - Z_1 e \bar{\psi} \not{A} \psi. \quad (4.3.96)$$

C'est un cas particulier des identités de Ward-Takahashi. Une démonstration de cette identité est proposée plus bas.

### 4.3.1 Correction au vertex : calcul complet

Pour simplifier le calcul, nous supposons les pattes fermioniques externes sur couche de masse,  $p^2 = p'^2 = m^2$ , et nous supposons implicitement que le diagramme est inséré entre les spineurs  $\bar{u}(p')$  à gauche et  $u(p)$  à droite, de telle sorte que par anticommutation des impulsions  $\not{p}$  vers la droite et  $\not{p}'$  vers la gauche on puisse utiliser les relations  $\not{p}u(p) = mu(p)$  et  $\bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p')$  dans la réduction du numérateur de l'éq. (4.3.91). Le photon est supposé de genre espace  $q^2 < 0$ .

#### • Paramétrage de Feynman

On revient à l'équation (4.3.91). La linéarisation du dénominateur fait intervenir deux paramètres de Feynman (utiliser l'équation (3.2.5)) : on regroupe d'abord les deux premiers facteurs du dénominateur avec la variable  $x$  puis on introduit  $y$ . On trouve

$$\frac{1}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \frac{1}{[l^2 - \mathcal{C} + i\epsilon]^3} \quad (4.3.97)$$

avec  $l = k + y(xp' + (1-x)p)$  et  $\mathcal{C} = y^2(m^2 - q^2x(1-x))$ . Le calcul est faisable mais devient compliqué à cause des deux paramètres de Feynman et de la complexité du numérateur (produit de cinq matrices  $\gamma$ ).

• **Calcul du numérateur**

Réduire le numérateur est un exercice pénible, la seule simplification étant que l'on peut ignorer les termes linéaires en  $l$  qui s'annulent dans l'intégration sur l'impulsion  $l$  de la boucle. Il restera un terme quadratique qui contient la divergence ultraviolette et des termes indépendants de  $l$  dont certains seront divergents dans l'infrarouge. On peut alors montrer que :

$$\Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p') = -i (e\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left[ \frac{\overbrace{2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon} l^2 \gamma_\alpha}^{\text{UV}} + \overbrace{2(2m^2 - q^2)\gamma_\alpha}^{\text{ir}} + \overbrace{y f_\alpha(p, p', x, y)}^{\text{rég}}}{(l^2 - y^2(m^2 - q^2x(1-x)) + i\varepsilon)^3} \right] \quad (4.3.98)$$

où  $f_\alpha$  a la forme peu transparente :

$$f_\alpha(p, p', x, y) = [2(y(m^2 - q^2x(1-x)) - (4m^2 - q^2))\gamma_\alpha + 4m(p_\alpha(x - y(1-x)) + p'_\alpha(1-x - yx))]. \quad (4.3.99)$$

On voit facilement que le premier terme de l'expression entre crochets dans l'éq. (4.3.98) contient toute les divergences ultraviolettes. On le calcule facilement à l'aide de l'éq. (3.2.23) et le résultat, après développement en  $\varepsilon$  est :

$$\Lambda_\alpha^{\text{UV}}(p; p') = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\alpha \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] - 1 - I_0 \right) \quad (4.3.100)$$

avec

$$I_0 = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \quad (4.3.101)$$

Quant au deuxième terme, proportionnel à  $2(2m^2 - q^2)\gamma_\alpha$ , il a un pôle en  $\varepsilon$  du fait de l'intégrale en  $y$  qui signale une divergence infrarouge :

$$\Lambda_\alpha^{\text{ir}}(p; p') = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \Gamma(1+\varepsilon) (4\pi)^\varepsilon \gamma_\alpha \int_0^1 dx \frac{2(2m^2 - q^2)\mu^{2\varepsilon}}{(m^2 - q^2x(1-x))^{1+\varepsilon}} \int_0^1 dy y^{-1-2\varepsilon}. \quad (4.3.102)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^{\text{ir}}(p; p') &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon (2m^2 - q^2)\gamma_\alpha \int_0^1 dx \frac{1 - \varepsilon \ln((m^2 - q^2x(1-x))/\mu^2)}{m^2 - q^2x(1-x)} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} (2m^2 - q^2)\gamma_\alpha \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.103)$$

avec :

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - q^2x(1-x)} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 dx \frac{\ln((m^2 - q^2x(1-x))/\mu^2)}{m^2 - q^2x(1-x)} \quad (4.3.104)$$

Le pôle en  $\varepsilon$ , dénoté  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  pour rappeler son origine. En effet, dans l'éq. (4.3.98), si l'on fait d'abord l'intégrale sur  $y$  il apparaît la combinaison :

$$\int d^n l \left( \frac{1}{(l^2)^2} - \frac{1}{(l^2 - m^2 + q^2 x(1-x))^2} \right), \quad (4.3.105)$$

le premier terme venant de borne inférieure  $y = 0$  de l'intégrale. Cette expression exhibe bien une singularité infrarouge associée au comportement divergent quand  $l \rightarrow 0$  du premier terme mais elle est régulière dans l'ultraviolet du fait de la compensation entre les deux termes. On note que le terme en  $f_\alpha$  de l'éq. (4.3.98), que l'on va évaluer maintenant, est protégé d'une telle divergence par le facteur  $y$  supplémentaire. Etant régulier on pourra prendre  $\varepsilon = 0$  et on trouve :

$$\Lambda_\alpha^{\text{régulier}}(p; p') = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \gamma_\alpha (1 - 2(3m^2 - q^2)I_1) - im\sigma_{\alpha\beta}q^\beta I_1 \right), \quad (4.3.106)$$

où  $\sigma_{\alpha\beta} = i [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]/2$ . Cette dernière expression requiert quelques explications : l'intégrale sur  $y$  du dernier terme fait apparaître des combinaisons du type  $p_\alpha(1-x) + p'_\alpha x$  et  $p'_\alpha(1-x) + p_\alpha x$ , le reste de l'intégrand étant symétrique dans l'échange  $x \leftrightarrow 1-x$  on peut facilement montrer que ce terme sera finalement proportionnel à  $p'_\alpha + p_\alpha$ . On peut alors utiliser l'identité de Gordon qui permet d'écrire

$$\boxed{p'_\alpha + p_\alpha = 2m\gamma_\alpha - i\sigma_{\alpha\beta}q^\beta} \quad (4.3.107)$$

lorsque l'expression est insérée entre les spineurs  $\bar{u}(p')$  à gauche et  $u(p)$  à droite. Le diagramme de vertex à une boucle,  $\gamma$  compris le contre-terme peut alors s'écrire en introduisant les facteurs de forme électrique  $F_1(q^2)$  et magnétique  $F_2(q^2)$  :

$$\boxed{\Lambda_\alpha(p; p') = \gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2m}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2)}, \quad (4.3.108)$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + (2m^2 - q^2) \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(3m^2 - q^2) I_1 - 2 - I_0 + (Z_1 - 1) \right\}, \\ F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} m^2 I_1. \end{aligned} \quad (4.3.109)$$

Les divergences sont contenues dans le terme proportionnel à  $\gamma_\alpha$  qui a la même forme que le vertex à l'ordre le plus bas tandis qu'un nouveau terme fini,  $F_2(q^2)$ , avec une forme différente apparaît.

#### • Renormalisation dans le schéma $\overline{MS}$

Le choix

$$\boxed{Z_1^{\overline{MS}} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right]} \quad (4.3.110)$$

compense le terme divergent dans l'ultraviolet et l'on retrouve bien par calcul direct  $Z_1 = Z_2$  (éq.(4.2.63) comme annoncé. Le vertex à une boucle a alors une forme compliquée et contient des

termes divergents dans l'infra-rouge mais qui n'est qu'un facteur multiplicatif du vertex de Born. On trouve :

$$F_1^{\overline{MS}}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (2m^2 - q^2) \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) + 2 (3m^2 - q^2) I_1 - 2 - I_0 \right\}. \quad (4.3.111)$$

#### • Renormalisation dans le schéma ON

Ce schéma est défini par la condition

$$F_1(q^2) = 1 \text{ à } q^2 = 0. \quad (4.3.112)$$

Dans ces conditions on a

$$I_0 = \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \quad I_1 = \frac{1}{m^2}, \quad I_2 = \frac{1}{m^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \quad (4.3.113)$$

et on trouve

$$Z_1^{ON} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + 2 \left[ \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + 4 + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right), \quad (4.3.114)$$

ce qui coincide avec les équations (4.2.60) et (4.2.57). Le vertex à une boucle ainsi défini ne contient alors plus de divergences infrarouges à  $q^2 = 0$  mais elles subsistent pour tout autre valeur de  $q^2$ .

#### 4.3.2 Moment magnétique anomal de l'électron, du muon et application

Contrairement au facteurs de forme électrique  $F_1(q^2)$  qui dépend du schéma de renormalisation, le terme  $F_2(q^2)$  en est indépendant<sup>3</sup> et sa valeur à  $q^2 = 0$  ( $I_1(q^2 = 0) = 1/m^2$ ) dénotée  $a_e$  ou  $(g-2)/2$  est le moment magnétique anomal de l'électron :

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \sim 1,16110^{-3} \quad (4.3.115)$$

dans l'approximation à une boucle. Le moment anomal de l'électron constitue actuellement un des tests les plus précis de QED. Sa valeur expérimentale (en 2016 d'après le *Particle Data Group*) est :

$$a_e|_{\text{exp}} = (1\,159\,652\,180\,91 \pm 0,000\,000\,26) 10^{-6}. \quad (4.3.116)$$

La précision actuelle est comparable à celle qui consiste à mesurer la distance de la terre à la lune avec une erreur de l'épaisseur d'un cheveu. Le moment anomal a été calculé jusqu'à l'ordre  $\alpha^5$  par Kinoshita *et al.*<sup>4</sup> et ce calcul peut être utilisé pour obtenir la valeur de la constante de structure fine à partir de l'éq. (4.3.116). On trouve alors pour  $\alpha$  (dans le schéma ON) :

$$\alpha^{-1} = 137,035\,999\,1727 \pm 0,000\,000\,0341. \quad (4.3.117)$$

3. En fait l'expression de  $a_e$  dépend du schéma de renormalisation car la valeur de  $\alpha$  en dépend mais la valeur de  $a_e$  ne dépend pas du schéma, ou plutôt sa dépendance est d'un ordre supérieur à celui calculé.

4. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, *Physical Review* **D85**, 03300 (2012)

Ce résultat représente à ce jour la détermination la plus précise de  $\alpha$ . D'autre part, on peut mesurer la constante de structure fine dans les expériences de physique atomique (mesure du rapport  $h/m_{Rb}$  du rapport de la constante de Planck sur la masse de l'atome de  $^{87}\text{Rb}$ <sup>5</sup>) et on trouve

$$\alpha^{-1} = 137,035\,999\,049 \pm 0,000\,000\,090. \quad (4.3.118)$$

Avec cette valeur on prédit le moment anomal de l'électron :

$$a_e|_{\text{th}} = (1\,159,652\,181\,78 \pm 0,000\,000\,77) 10^{-6}, \quad (4.3.119)$$

résultat compatible avec la mesure expérimentale ci-dessus.

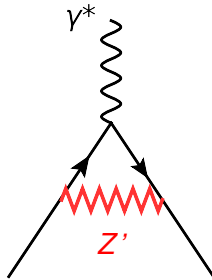
Le moment magnétique du muon est mesuré à une précision moindre que celle de  $a_e$  mais malgré cela il joue un rôle important dans les contraintes sur la "nouvelle physique" (c'est à dire la physique au-delà du Modèle Standard). Sa valeur expérimentale est (*Particle Data Group*) :

$$a_\mu = (1\,165,920\,09 \pm 0,000\,06) 10^{-6}. \quad (4.3.120)$$

Il existe actuellement un désaccord entre théorie et expérience qui est estimé à<sup>6</sup>

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = \delta a_\mu = (0,002\,87 \pm 0,000\,80) 10^{-6}, \quad (4.3.121)$$

soit un écart de 3,5 déviations standards<sup>7</sup>. Cette différence peut être due soit à une mauvaise estimation des erreurs expérimentales et/ou théoriques (soit à une erreur dans la mesure et/ou dans le calcul dans le cadre du Modèle Standard!), soit à une contribution de "nouvelle physique" à  $a_\mu$ . En effet on peut estimer, de façon qualitative, que la contribution à une boucle de diagrammes impliquant une nouvelle particule  $Z'$  de masse  $M'$ , avec un couplage  $g'$  aux muons ( $\alpha' = g'^2/4\pi$ )



induit, en général, une correction de l'ordre de  $(\alpha'/2\pi)m_\mu^2/M'^2$  en plus des contributions du Modèle Standard. Pour que ce nouveau terme "explique" la différence entre expérience et prédiction du Modèle Standard il faudrait que

$$\frac{\alpha'}{2\pi} \frac{m_\mu^2}{M'^2} \sim \delta a_\mu \sim 3 \cdot 10^{-9}, \quad (4.3.122)$$

5. R. Bouchendira, P. Clade, S. Guellalti-Khelifa, F. Nez and F. Biraben, Phys. Rev. Lett. **106**, 080801 (2011).

6. F. Jegerlehner et A. Nyffeler, Phys. Rep. **377**, 1, 2009 [arXiv :0902.3360].

7. Dans une revue récente, P. Masjuan [arXiv :1411.6397], cite la valeur théorique  $a_\mu = (1\,165,918\,52 \pm 0,000\,059) 10^{-6}$  ce qui réduit un peu le désaccord entre théorie et expérience,  $\delta a_\mu = 0,001\,57$ , soit un écart d'environ  $2,8 \sigma$ .



qui impose que la masse de la nouvelle particule soit

$$M'^2 \sim \alpha' 10^6 \text{ GeV}^2, \quad (4.3.123)$$

c'est à dire  $M' \sim 100 \text{ GeV}$  pour  $\alpha' \sim 10^{-2}$  ou  $M' \sim 300 \text{ GeV}$  pour  $\alpha' \sim 10^{-1}$  ou  $M' \sim 1 \text{ TeV}$  pour  $\alpha' \sim 1$ . Ce type de limite est presque du même ordre de grandeur que celui espéré des expériences au LHC ! La contribution d'une telle particule  $Z'$  au moment magnétique anomal de l'électron serait de l'ordre de  $(\alpha'/2\pi)(m_e^2/M'^2)$ , trop petite pour être mise en évidence.

En résumé, nous avons calculé dans les sections précédentes les contre-termes  $Z_i$  qui rendent l'électrodynamique quantique finie dans l'approximation à une boucle de la théorie des perturbations. C'est à dire que tout processus physique calculé dans cette approximation n'aura pas de divergences ultraviolettes et le résultat du calcul devra être fini. On rappelle ici la valeur des contre-termes dans le schéma  $\overline{MS}$ , en jauge de Feynman, éqs. (4.1.21), (4.2.63), (4.3.110) sont respectivement :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \rightarrow Z_3 = 1 + c_3 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_3 = -\frac{1}{3\pi} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rightarrow Z_2 = 1 + c_2 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rightarrow Z_0 = 1 + c_0 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_0 = -\frac{1}{\pi} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rightarrow Z_1 = 1 + c_1 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_1 = c_2 \end{array} \right\} \text{ en } \overline{MS}$$

L'expression des contre-termes dépend du choix du schéma de renormalisation et du choix de la jauge et il en est de même pour les expressions résiduelles des fonctions de Green. Cependant le calcul d'un processus physique doit en être indépendant. Pour cela il est nécessaire de calculer tous les diagrammes à un ordre donné et pas seulement les termes virtuels comme on l'a fait dans ce chapitre. Un exemple d'un tel calcul est discuté dans le chapitre suivant où l'on montrera comment les divergences infrarouges des fonctions à 2 et 3 points se compensent avec les diagrammes dits réels. On pourra alors obtenir les corrections finies d'ordre  $\alpha$  par rapport au terme de Born.

#### 4.4 Renormalisation : la fonction $\beta(\alpha)$ et le couplage mobile

Nous avons montré de façon intuitive que dans les schémas  $MS$  ou  $\overline{MS}$  la constante de couplage renormalisée dépendait du choix du paramètre arbitraire  $\mu$  : c'est ce qu'on appelle le couplage mobile. On avait également exprimé  $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$  en fonction de  $\alpha_{ON}$ . Le raisonnement fait alors n'est pas transposable à QCD et on va introduire maintenant de façon plus formelle ce couplage mobile. Nous travaillons dans un schéma (type  $MS$  ou  $\overline{MS}$ ) où les contre-termes n'ont pas de dépendance explicite en une masse. Le point de départ est la relation éq. (4.0.3) entre couplage nu, couplage renormalisé et les fonctions  $Z_i$

$$\alpha_B = \alpha \mu^{2\varepsilon} \frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \quad (4.4.124)$$

avec, dans le schéma  $\overline{MS}$ , des  $Z_i$  de la forme

$$\boxed{Z_i = 1 + c_i \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha} \quad (4.4.125)$$

Dans le cadre de l'approximation à une boucle (approximation d'ordre  $\alpha$ ) on peut toujours ré-écrire

$$\frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \equiv Z_\alpha = 1 + \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} \alpha \quad (4.4.126)$$

où la constante  $c_\alpha(\varepsilon)$  est connue dès que les  $Z_i$  le sont, puisque

$$c_\alpha(\varepsilon) = (2c_1 - 2c_2 - c_3) \Gamma(1 + \varepsilon)(4\pi)^\varepsilon. \quad (4.4.127)$$

Dans nos notations simplifiées on a donc

$$\alpha_B = \alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)$$

où  $\alpha(\mu)$ , le couplage renormalisé, est une fonction de  $\mu$ . On introduit de façon traditionnelle la fonction  $\beta(\alpha)$ , dite fonction  $\beta$  de Gell-Mann/Low,

$$\boxed{\beta(\alpha) \equiv \mu^2 \frac{d\alpha}{d\mu^2} = \frac{d\alpha}{d \ln \mu^2} .}$$

Le couplage  $\alpha_B$  est évidemment indépendant de  $\mu^2$  : en effet, la masse  $\mu$  et le couplage renormalisé ne sont introduits que lorsqu'on sépare la densité lagrangienne, exprimée en fonction des quantités nues, en une partie "renormalisée" et les contre-termes (voir l'éq. (4.0.5)) :

$$\mathcal{L}(\psi_B, \alpha_B, A_B^\mu) = \mathcal{L}(\psi, \alpha, A^\mu; \mu^2) + \delta \mathcal{L}(\psi, \alpha, A^\mu; \delta Z_i; \mu^2).$$

On a donc

$$\mu^2 \frac{d\alpha_B}{d\mu^2} \equiv 0 \quad (4.4.128)$$

ce qui implique

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (\alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)) \equiv \beta(\alpha) \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon \alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \alpha \mu^{2\varepsilon} \mu^2 \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\mu^2} = 0.$$

On simplifie par  $\mu^{2\varepsilon}$  et écrivant, puisque  $Z_\alpha$  ne dépend que de façon implicite de  $\mu^2$ ,

$$\mu^2 \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\mu^2} = \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} \frac{\mu^2 d\alpha}{d\mu^2} = \beta_\alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha},$$

on trouve

$$\beta(\alpha) Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon \alpha Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \alpha \beta(\alpha) \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} = 0, \quad (4.4.129)$$

soit

$$\beta(\alpha) = - \frac{\varepsilon \alpha}{1 + \alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} / Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)}. \quad (4.4.130)$$

Puisque l'on fait un calcul perturbatif en le couplage  $\alpha$ , ne gardant que les deux premiers ordres, il est justifié de faire l'approximation  $Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) \simeq 1$  dans l'équation ci-dessus et d'écrire de plus

$$\beta(\alpha) \simeq -\varepsilon\alpha \left( 1 - \alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} \right). \quad (4.4.131)$$

Substituant alors (voir l'éq. (4.4.126))

$$\frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} = \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

il vient :

$$\boxed{\beta(\alpha) \simeq -\varepsilon\alpha + c_\alpha(\varepsilon) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)}. \quad (4.4.132)$$

On peut alors prendre la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  partout puisqu'il n'y a plus de divergence dans l'expression et on voit que

$$\boxed{\beta(\alpha) \equiv \frac{d\alpha}{d \ln \mu^2} = c_\alpha(0) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)}. \quad (4.4.133)$$

$c_\alpha(0)$ , dénoté maintenant simplement par  $c_\alpha$ , est connu via l'équation (4.4.127). Ceci est la forme générique de la fonction de Gell-Mann/Low au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations. Le signe de la constante  $c_\alpha(0)$  détermine la variation du couplage renormalisé en fonction de l'échelle d'énergie : croissant avec  $\mu$  si  $c_\alpha$  est positif, décroissant dans le cas contraire. Si  $c_\alpha(0) = 0$  la théorie est dite invariante conforme. Intégrant l'éq. différentielle (4.4.133),

$$-\frac{1}{\alpha(\mu^2)} + \frac{1}{\alpha(\mu_0^2)} = c_\alpha(0) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\ln(\alpha(\mu^2)/\alpha(\mu_0^2)))$$

on obtient le couplage mobile sous sa forme usuelle,

$$\boxed{\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - c_\alpha(0) \alpha(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))} \quad (4.4.134)$$

où on a utilisé l'approximation  $\ln(\alpha(\mu^2)/\alpha(\mu_0^2)) \sim \alpha(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2) \sim \alpha(\mu^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)$ . Pour QED, on aura donc,

$$\boxed{\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))} \quad (4.4.135)$$

qui montre que le couplage  $\alpha$  croît avec  $\mu$ . On peut comparer cette équation qui relie, dans le schéma  $\overline{MS}$ , le couplage renormalisé évalué à deux échelles différentes, à l'équation (4.1.43) exprimant le couplage  $\overline{MS}$  en fonction du couplage  $ON$  : la dépendance en  $\mu^2$  est évidemment identique.

#### • Remarque

La dérivation du couplage mobile que l'on vient de donner s'applique uniquement au schéma de renormalisation de type  $MS$  ou  $\overline{MS}$  ou plus généralement aux schémas dont les contre-terms n'ont pas de dépendance explicite en une échelle de masse. Par exemple, dans le schéma  $ON$ , le contre-terme  $Z_3$  contient un terme fini en  $\ln(m^2/\mu^2)$  qui introduirait un facteur supplémentaire

dans la fonction  $\beta(\alpha)$ .

• **Remarque**

La relation du type  $\frac{d\epsilon_B}{d\mu} \equiv 0$  (éq. (4.0.3)) n'est qu'un cas particulier des équations du groupe de renormalisation qui jouent un rôle fondamental en théorie des champs. Elles expriment que les prédictions physiques (observables) ne doivent pas dépendre du choix de la procédure de régularisation ni du schéma de renormalisation. En particulier, l'éq. (4.4.134) exprime comment le couplage  $\alpha(\mu)$  doit varier en fonction de  $\mu$  pour que, quand le "point de renormalisation"  $\mu$  varie, les prédictions physiques soient indépendantes de  $\mu$ .

• **Remarque : invariance de la charge effective**

Suite à la discussion sur la correction de polarisation du vide, on avait introduit de façon très pédestre une charge effective (4.1.36) et on avait montré qu'elle était indépendante du schéma de renormalisation, du moins au premier ordre correctif de la théorie des perturbations. Un argument plus général, valable à tous les ordres, est le suivant. On considère la combinaison  $\alpha_B G_B^{\mu\nu}(q)$  où charge et propagateur sont les quantités nues. Introduisant maintenant les quantités renormalisées dans un schéma quelconque  $R$  on a (dans la limite  $\epsilon = 0$ ),

$$\begin{aligned} \alpha_R G_R^{\mu\nu}(q) &= \frac{Z_3 Z_2^2}{Z_1^2} \alpha_B \frac{1}{Z_3} G_B^{\mu\nu}(q) \\ &= \alpha_B G_B^{\mu\nu}(q), \end{aligned} \quad (4.4.136)$$

en vertu des éqs. (4.0.3), (3.1.36) et de l'identité de Ward  $Z_1 = Z_2$ . Le produit de la charge au carré et du propagateur est donc indépendant du schéma de renormalisation. Paramétrant le propagateur comme dans la discussion après l'équation (4.1.27), on voit que, après sommation à tous les ordres de l'insertion de polarisation du vide, l'expression prend la forme :

$$\alpha_R G_R^{\mu\nu}(q) = \frac{\alpha_R}{1 + \Pi_R(q^2)} (-i) \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{(q^2 + i\epsilon)}. \quad (4.4.137)$$

Comme la forme tensorielle et le pôle en  $q^2$  ne sont pas modifiés par les corrections (invariance de jauge oblige) on a bien prouvé l'invariance de la charge effective en QED définie par :

$$\bar{\alpha}_R(q^2, \alpha_R) = \frac{\alpha_R}{1 + \Pi^R(q^2)}. \quad (4.4.138)$$

## 4.5 Identités de Ward-Takahashi

Ce sont des relations entre fonctions de Green avec un nombre différent de pattes externes, par exemple, fonction à trois points (vertex) et fonction à deux points (self-énergie). On considère un diagramme quelconque avec  $m$  lignes d'électrons et  $n$  photons externes, la structure interne étant arbitraire (voir fig. 4.1). On se concentrera sur la ligne électronique d'impulsion  $p$  entrante et  $q = p_n$  sortante et on suppose les pattes externes hors couche c'est à dire couplées à un propagateur et non à une fonction d'onde. L'objet en question sera donc de la forme :

$$\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots) = \frac{1}{\not{q} - m_e} \cdots \frac{1}{\not{p} - m_e} \quad (4.5.139)$$

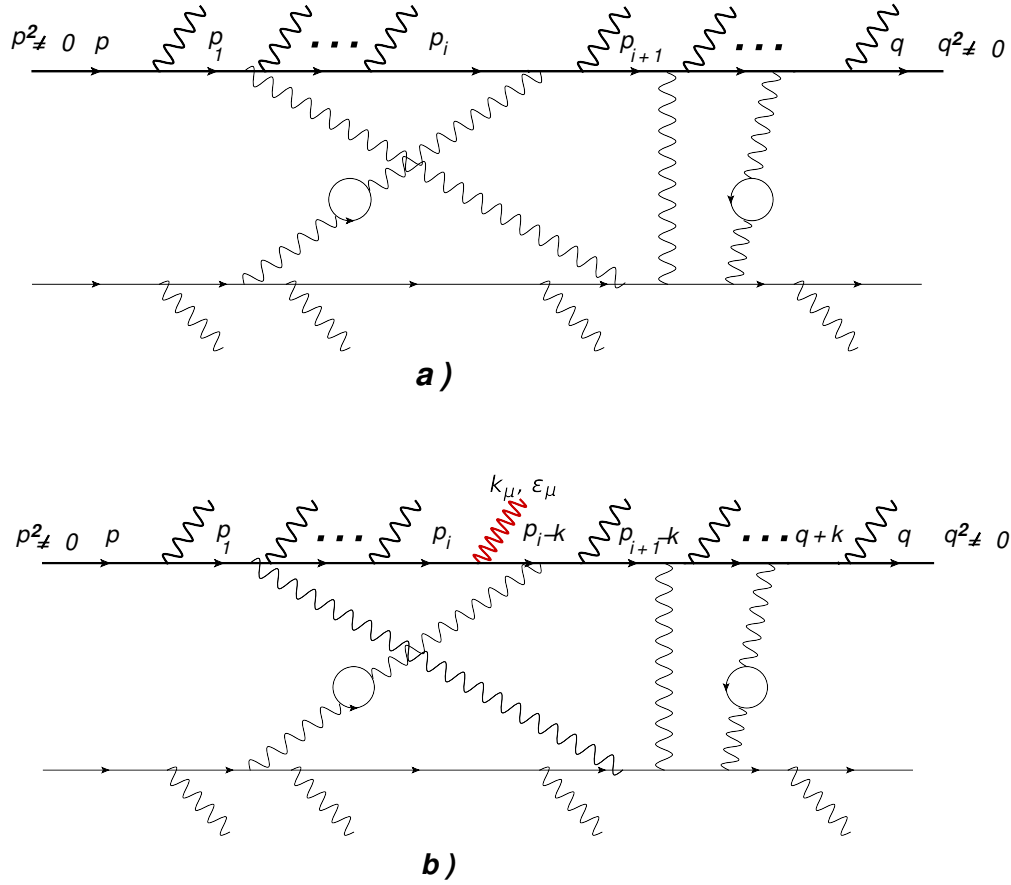


FIGURE 4.1 – a) L'amplitude  $\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots)$ ; b) une composante de la fonction  $k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$ . Le photon (en rouge) d'impulsion  $k_\mu$  et de polarisation  $\epsilon_\mu$  doit être inséré de toutes les façons possibles sur la ligne fermionique.

où les  $\dots$  dans  $\mathcal{F}_0$  dénotent tous les impulsions externes qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. On va considérer l'insertion d'un photon d'impulsion  $k$  et de vecteur polarisation  $\epsilon^\mu(k)$  de toutes les façons possibles de long de la ligne fermionique  $(p, q)$ . La quantité ainsi définie sera de la forme :

$$\epsilon^\mu(k) \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k). \quad (4.5.140)$$

En fait, on va plutôt étudier  $k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$  où on a remplacé le vecteur polarisation du photon par son impulsion. L'insertion du photon sur la ligne externe d'impulsion  $p$  contribuera :

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{p} - m_e} = \dots \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_1} e \left[ -\frac{i}{\not{p} - m_e} + \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_e} \right].$$

...

L'insertion du photon sur la ligne interne d'impulsion  $p_1$  contribuera :

$$\dots \gamma^{\lambda_2} \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{p}_1 - m_e} \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - m_e} = \dots \gamma^{\lambda_2} e \left[ -\frac{i}{\not{p}_1 - m_e} + \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \right] \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - m_e}.$$

...

L'insertion du photon sur l'impulsion  $q = p_n$  finale contribuera :

$$\frac{i}{\not{q} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{q} + \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_n} \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m_e} \dots = e \left[ -\frac{i}{\not{q} + \not{k} - m_e} + \frac{i}{\not{q} - m_e} \right] \gamma^{\lambda_n} \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m_e} \dots$$

Le résultat de l'insertion du photon sur la ligne fermionique sera la somme des termes ci-dessus, mais on voit que les termes se compensent 2 à 2 (le terme de gauche dans le crochet d'une ligne compense le terme de droite de la ligne inférieure) de sorte que l'expression recherchée sera de la forme :

$$k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = e [\mathcal{F}_0(p - k, \dots; q, \dots) - \mathcal{F}_0(p, \dots; q + k, \dots)]. \quad (4.5.141)$$

Le photon doit également être couplé aux boucles internes de fermions, mais on sait qu'une boucle fermionique ne peut être couplée à un nombre impair de photons, donc de telles insertions ne contribuent pas puisque l'insertion d'un photon sur une boucle du diagramme aura forcément un nombre impair de photons. Dans l'éq. (4.5.141) le membre de gauche a un pôle à  $\not{p} = m$  et un autre à  $\not{q} = m$  tandis que chacun des membres de droite n'a qu'un de ces pôles<sup>8</sup>.

• **Application : amplitude de diffusion avec photons externes**

Si on ampute la fonction la fonction de Green  $\mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$  des propagateurs externes on obtient la fonction de Green tronquée  $\mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$ , et si de plus on met les fermions sur couche de masse, c'est à dire

$$\mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = (\not{p} - m) (\not{q} - m) \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)|_{\not{p}, \not{q} \rightarrow m}, \quad (4.5.142)$$

on obtient

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = 0 \quad (4.5.143)$$

puisque qu'aucun des termes du membre de droite de l'éq. (4.5.141) n'a les deux pôles. En fait l'expression  $\epsilon^\mu(k) \mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$  est proportionnelle à une amplitude de diffusion et l'éq. ci-dessus montre que si l'on substitue à la polarisation du photon l'impulsion du photon (réel ou virtuel) alors la combinaison est nulle. C'est une contrainte que doit satisfaire toute amplitude avec photons externes.

• **Application : identité de Ward et relation  $Z_1 = Z_2$**

L'éq. (4.5.141) permet de trouver une relation entre la fonction vertex  $\Lambda^\mu(p; q)$  étudiée en sec. 4.3 et le propagateur du fermion  $S_F(q)$ . Cette discussion est valable à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations étant entendu que les diagrammes considérés sont régularisés mais ne contiennent pas les contre-termes. Dans ce cas, la fonction  $\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots)$  est simplement le propagateur du fermion et  $\mathcal{F}^\mu$  de l'éq. (4.5.141) est le vertex fermion-fermion-photon incluant les propagateurs des fermions externes. On peut alors écrire :

$$k^\mu S_F(q) [-ie \Lambda^\mu(p; q)] S_F(p) = e (S_F(p - k) - S_F(q + k)) \quad (4.5.144)$$

que l'on simplifie en

$$k^\mu [-ie \Lambda^\mu(p; q)] = e (S_F^{-1}(q + k) - S_F^{-1}(q)), \quad (4.5.145)$$

8. Le raisonnement ci-dessus peut être répété pour toutes les lignes fermioniques du diagramme.

où on a utilisé le fait que  $p - k = q$ . Cette égalité est évidente à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations où  $\Lambda^\mu(p; q) = \gamma^\mu$ . Aux ordres plus élevés elle implique que les termes divergents dans le vertex sont les mêmes que ceux de la combinaison de l'inverse des propagateurs du membre de droite. Après avoir substitué dans le membre de droite la forme éq. (4.2.54) du propagateur du fermion où l'on a omis les contre-termes,

$$S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m - \Sigma_0 + i\epsilon)(1 - \Sigma_1)},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} k^\mu \Lambda_\mu(q + k; q) &= k^\mu (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{\text{boucles}}(q + k; q)) \\ &= \not{k} - \not{k} \Sigma_1, \end{aligned} \quad (4.5.146)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\Lambda_\mu^{\text{boucles}}(q + k; q) = -\gamma_\mu \Sigma_1, \quad (4.5.147)$$

c'est à dire que les divergences ultraviolettes du vertex sont proportionnelles à  $\gamma_\mu$  et que, de plus, elles sont les mêmes que celles qui affectent  $\Sigma_1$ . Le contre-terme qui compensera les divergences du vertex sera donc de la forme  $\delta Z_1 \gamma_\mu$  et  $\delta Z_1$  contiendra les mêmes termes divergents que le contre-terme de la fonction d'onde du fermion qui satisfait  $\delta Z_2 - \Sigma_1 \sim \text{fini}$  dans l'ultraviolet, éq. (4.2.58), et ceci quelque soit l'ordre des perturbations. Il est conventionnel de choisir alors  $\delta Z_1 = \delta Z_2$ .

## 4.6 Degré superficiel de divergence d'un diagramme

Dans la section précédente on a identifié trois diagrammes divergents dans l'ultraviolet ? Sont ils les seuls ? D'autre part, il est intéressant de pouvoir identifier tous les diagrammes potentiellement divergents dans l'ultraviolet à tous les ordres. Pour cela on introduit le degré superficiel de divergence  $\omega(\mathbf{G})$  d'un graphe  $\mathbf{G}$  comme la dimension en terme d'impulsion ou de masse de l'intégrale correspondant à ce graphe. On prend  $\hbar = c = 1$  comme d'habitude et on étudie le comportement du diagramme supposant que toutes les composantes des impulsions internes tendent vers l'infini. En effet, on s'attend à ce que cette configuration produise la divergence maximale : si  $\omega(\mathbf{G}) \geq 0$  le diagramme est potentiellement divergent. On peut le calculer sur la base d'une analyse dimensionnelle des différents éléments de ce graphe. Le résultat s'applique aux diagrammes *irréductibles à une particule* c'est à dire à ceux qui ne peuvent pas être séparés en deux parties disjointes en coupant une ligne interne. On travaille dans un espace-temps à 4 dimensions.

On considère un diagramme arbitraire caractérisé par :

1.  $E_F$  fermions externes et  $E_B$  bosons externes ;
2.  $I_F$  propagateurs fermioniques et  $I_B$  propagateurs bosoniques : pour chaque propagateur de fermion on associe un facteur  $1/p$  et chaque propagateur de boson un facteur  $1/p^2$  ;
3.  $n_i$  vertex de type  $i$  avec  $N = \sum_i n_i$  le nombre total de vertex. Certains vertex peuvent dépendre des impulsions et donc avoir une dimension  $d_i$  comme en QCD, par exemple, où le vertex à 3 gluons est linéaire en les impulsions et apporte en conséquence un facteur  $p$  à chaque vertex ( $d_i = 1$  dans ce cas). En QED le vertex est sans dimension ;

4.  $L$  le nombre de variables d'impulsions indépendantes sur lesquelles il faut intégrer, chacune de ces impulsions contribuant un facteur  $d^4p$ .

Le degré superficiel de divergence du diagramme est donc :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4L - I_F - 2I_B + \sum_i n_i d_i. \quad (4.6.148)$$

Si  $\omega(\mathbf{G}) = 0$  la divergence est potentiellement logarithmique ( $\int dq/q$ ), pour  $\omega(\mathbf{G}) = 1$  elle serait linéaire et quadratique pour  $\omega(\mathbf{G}) = 2$ . En QED, le dernier terme est absent car l'unique type de couplage est sans dimension.

On a la relation :

$$L = I_B + I_F - (N - 1) \quad (4.6.149)$$

qui exprime le fait que le nombre d'impulsions indépendantes est égal au nombre d'impulsions internes moins le nombre de contraintes sur la conservation d'énergie-impulsion. Il y a une contrainte par vertex mais les  $N$  vertex n'apportent que  $N - 1$  contraintes du fait de la conservation d'énergie-impulsion globale. Il est utile de relier le nombre de propagateurs au nombre de pattes externes de même type. Pour cela on compte le nombre de fermions de deux façons différentes en se rappelant qu'un propagateur compte pour deux fermions. Ainsi on a :

$$E_F + 2I_F = \sum_i n_i f_i \quad (4.6.150)$$

où le vertex de type  $i$  a  $f_i$  fermions attachés. De même pour les bosons :

$$E_B + 2I_B = \sum_i n_i b_i \quad (4.6.151)$$

où le vertex de type  $i$  a  $b_i$  bosons attachés. Par exemple, pour QED il y a un seul type de vertex,  $i = 1$ , et  $f_i = 2$  et  $b_i = 1$ . La combinaison des équations ci-dessus permet d'écrire :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F + \sum_i n_i (b_i + d_i + \frac{3}{2}f_i - 4) \quad (4.6.152)$$

Il existe une contrainte sur le dernier terme que l'on obtient par une analyse dimensionnelle similaire à celle de la section 3.2.4 : en effet si le vertex de type  $i$  provient d'un terme du lagrangien de la forme :

$$g_i \underbrace{\psi \cdots \psi}_{f_i} \underbrace{A \cdots A}_{b_i} \underbrace{\partial_\mu \cdots \partial_\mu}_{d_i} \quad (4.6.153)$$

couplant  $f_i$  fermions et  $b_i$  bosons avec  $d_i$  dérivées et un couplage  $g_i$  qui peut être dimensionné de dimension  $[g_i]$ , alors on a la relation :

$$0 = -4 + [g_i] + b_i + d_i + \frac{3}{2}f_i, \quad (4.6.154)$$

d'où le résultat final :

$$\boxed{\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F - \sum_i n_i [g_i].} \quad (4.6.155)$$



qui montre que le degré superficiel de divergence ne dépend que du nombre de pattes externes et des constantes de couplage dimensionnés, et qu'il est d'autant plus petit que le nombre de pattes est grand. En QED le résultat est encore plus simple puisqu'aucun couplage n'est dimensionné et le dernier terme peut donc être ignoré. Le cas de QCD est un peu particulier et il est discuté au chapitre 8 (voir la discussion menant à l'éq. (8.1.9)).

D'après l'équation ci-dessus, en QED, les seuls diagrammes superficiellement divergents sont :

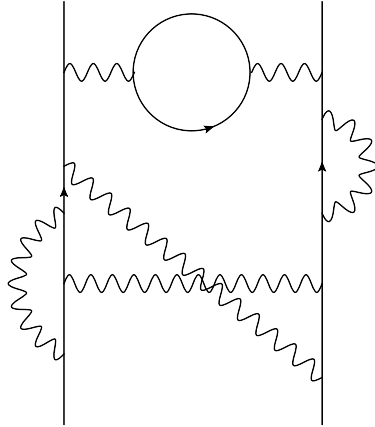
- pour  $E_B = 0, E_F = 2 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 1$ , la self-énergie du fermion ;
- pour  $E_B = 1, E_F = 2 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 0$ , le vertex ;
- pour  $E_B = 2, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 2$ , la polarisation du vide ;
- pour  $E_B = 3, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 1$ , diagramme à 3 photons ;
- pour  $E_B = 4, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 0$ , diagramme en boîte à quatre photons.

Les trois premiers diagrammes ont été calculés et on a vérifié qu'ils sont effectivement divergents. Pour les deux dernier cas, si les diagrammes à trois ou quatre photons sont individuellement divergents, l'amplitude ou la fonction de Green correspondante ne l'est pas. En effet, dans le cas à trois photons l'amplitude (à une boucle) est la somme de deux diagrammes dont on peut explicitement se convaincre qu'elle est nulle. Plus généralement, le photon ayant une parité  $C$  négative ( $A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x)$  par tranformation de parité  $C$ ) l'amplitude à un nombre impair de photons est nulle puisque l'interaction électromagnétique conserve la parité. Dans le cas à quatre photons, l'amplitude ou la fonction de Green correspondante est la somme de trois diagrammes qui est finie. Ceci est une conséquence de l'invariance de jauge. L'amplitude, tronquée des vecteurs polarisation,  $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  peut être écrite comme une somme de tenseurs (correctement symétrisés),  $g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$ ,  $p_{i\mu}p_{j\nu}g_{\rho\sigma}$ ,  $p_{i\mu}p_{j\nu}p_{k\rho}p_{l\sigma}$  à coefficients scalaires. Les contraintes :

$$p_i^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0,$$

par exemple, implique que le coefficient des termes en  $g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$  est proportionnel aux  $p_i \cdot p_j$  et le résultat final sera de la forme  $p_i \cdot p_j \int d^4p/p^6$  ou  $p_i \cdot p_j p_k \cdot p_l \int d^4p/p^8$  donc convergent. En fait comme pour la polarisation du vide, qui n'a qu'une divergence logarithmique au lieu de quadratique (voir la discussion sur la contrainte d'invariance de jauge en sec. 4.1), l'invariance de jauge réduit le degré de divergence de l'amplitude à quatre photons. Si cette amplitude avait été divergente, QED n'aurait pas été renormalisable puisqu'il n'y a pas dans le lagrangien de contre-terme (terme en  $(A_\mu)^4$ ) pour compenser une telle divergence !

On peut avoir un diagramme superficiellement convergent avec  $\omega(\mathbf{G}) < 0$  dont des sous-diagrammes sont divergents comme par exemple l'insertion d'une self-énergie sur une ligne fermionique interne ou bien d'une correction au vertex. De telles divergences sont compensées par les contre-terme calculés dans les sections précédentes. Par exemple, le diagramme de diffusion de deux fermions ci-dessous est fini après inclusion des contre-terme  $\delta Z_i$  de QED.



Dans un diagramme avec  $\omega(\mathbf{G}) < 0$ , une fois la renormalisation des sous-diagrammes divergents à deux et à trois points effectuée il n'apparaît pas de nouvelle divergence. Pour les trois diagrammes avec  $\omega(\mathbf{G}) \geq 0$  les divergences aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations sont compensées par le choix des contre-termes  $Z_i$  exprimés sous la forme d'un développement perturbatif à coefficients divergents.

Il existe des théories ou modèles avec un couplage dimensionné : par exemple, dans le modèle de Fermi de l'interaction faible, la constante de Fermi  $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$  ou, en relativité, la constante gravitationnelle (de Newton)  $G_N = 6,708 \cdot 10^{-39} \text{GeV}^{-2}$  dans le système d'unité  $\hbar = c = 1$  ( $[G_N] = [G_F] = -2$ ). Le degré de divergence  $\omega(\mathbf{G})$ , éq. (4.6.155), croît alors avec le nombre de vertex et la théorie est non renormalisable. Par exemple, dans le modèle de Fermi le terme d'interaction est de la forme  $G_F \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi$ , qui doit aussi être la forme du contre-terme. Il est cependant facile de se convaincre que l'amplitude à 6 fermions a un degré de divergence  $\omega(\mathbf{G}) = 1$  et que la divergence ultraviolette associée n'est pas compensée par un contre-terme du lagrangien.

## Chapitre 5

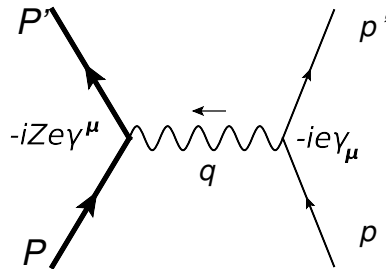
# Compensation des divergences infrarouges

Dans ce chapitre nous allons illustrer sur un exemple concret le théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg<sup>1</sup>, selon lequel les divergences infrarouges se compensent entre termes réels et virtuels lorsque l'on définit correctement l'observable. Nous considérons la diffusion d'un électron sur un noyau de charge  $Ze$  et de masse  $M$  beaucoup plus grande que toute autre échelle d'énergie du processus. Seule la radiation d'un photon par l'électron sera prise en compte. Le calcul est mené dans le cadre de la régularisation dimensionnelle et du schéma de renormalisation  $\overline{MS}$ .

### 5.1 Terme de Born

On travaille dans le repère du noyau au repos et on définit la cinématique comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{noyau initial} & : P = (M, \vec{0}), & \text{noyau final} & : P = (E', \vec{P}') \\
 \text{électron entrant} & : p = (\omega, \vec{p}), & \text{électron sortant} & : p' = (\omega', \vec{p}'), \\
 \text{impulsion de transfert} & : q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 - 2(\omega\omega' - pp' \cos \theta)
 \end{aligned}
 \tag{5.1.1}$$



Pour simplifier l'écriture et les calculs on se place dans la limite

$$M^2 \gg \omega\omega' \sim -q^2 \gg m_e^2 \tag{5.1.2}$$

1. T. Kinoshita, J.Math.Phys. **3** (1962), 650; T.D. Lee, M. Nauenberg Phys.Rev. **133** (1964), B1549.

de telle sorte qu'on puisse considérer le noyau comme statique et  $q^2 \sim -2\omega\omega'(1 - \cos\theta)$ . L'élément de matrice à l'ordre le plus bas s'écrit :

$$\mathcal{M}^{(0)} = Z(-ie)^2 \bar{u}(P')\gamma_\mu u(P) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \quad (5.1.3)$$

Du fait que le noyau est statique l'interaction photon-noyau se réduit à  $\bar{u}(P)\gamma_0 u(P)$  et le module de l'élément de matrice au carré moyenné sur les états de spins initiaux et sommé sur les spins finals de l'électron et le noyau devient alors :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}|\mathcal{M}^{(0)}|^2 &= \frac{1}{4}Z^2 e^4 \text{Tr} \mathbf{P}' \gamma_0 \mathbf{P} \gamma_0 \frac{1}{(q^2)^2} \text{Tr} \not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0 \\ &= Z^2 e^4 \frac{M^2}{\omega\omega'} \frac{1 + \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

La section efficace s'écrit :

$$\sigma^{(0)} = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p') \bar{\Sigma}|\mathcal{M}^{(0)}|^2, \quad (5.1.5)$$

où le facteur de flux est  $4\sqrt{(p \cdot P)^2 - m_e^2 M^2} \simeq 4M\omega$  dans le cadre des approximations (5.1.2). On peut faire l'intégrale sur l'impulsion finale  $P'$  du noyau à l'aide de la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion pour obtenir  $\delta(2M(\omega - \omega') + q^2)$  qui se simplifie en  $\delta(\omega - \omega')/2M$  toujours dans le cadre de nos approximations. La section efficace différentielle en l'angle solide  $\Omega = (\theta, \phi)$  de diffusion de l'électron devient finalement :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{8 \omega^2 \sin^4(\theta/2)} \int d\omega' \delta(\omega - \omega'), \quad (5.1.6)$$

que l'on écrira pour un usage ultérieur :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \delta(\omega - \omega'). \quad (5.1.7)$$

## 5.2 Corrections virtuelles

Ces corrections ont été calculées au chapitre précédent. Elles sont illustrées dans la figure ci-dessous à laquelle il faut ajouter les diagrammes avec les contre-termes. Ce sont :

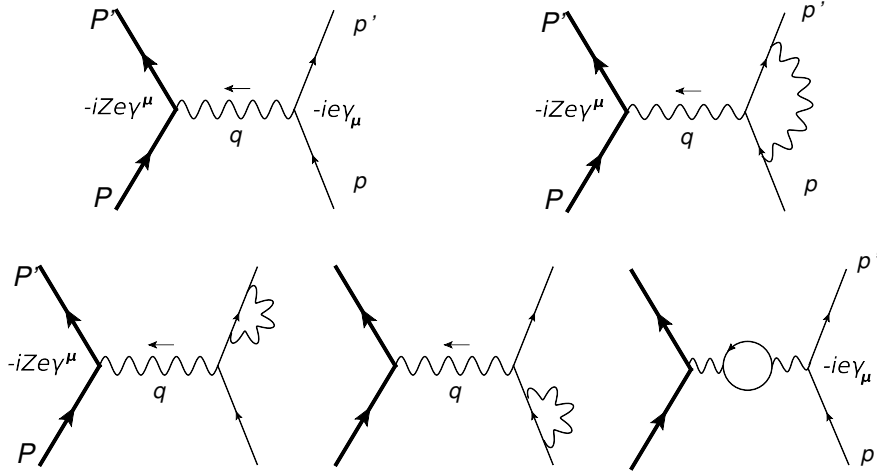
- correction au vertex : elle est donnée par l'éq. (4.3.108) et, ignorant le moment magnétique anomal de l'électron qui est fini et dont le calcul de la contribution à la section efficace ne présente pas de difficultés, ce sera le facteur multiplicatif  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$  au vertex  $\gamma_\mu$  de la ligne d'électron ;
- correction de self-énergie sur les pattes externes : il faudra utiliser  $u(p)|_{\overline{MS}}$  et  $\bar{u}(p')|_{\overline{MS}}$  (éq. (4.2.80)) comme spineurs pour les électrons, soit pour prendre en compte les deux diagrammes ainsi que le terme de Born :

$$\bar{u}(p')|_{\overline{MS}} \gamma_\mu u(p)|_{\overline{MS}} = \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) (1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}); \quad (5.2.1)$$

- correction au propagateur du photon : elle est prise en compte, comme discuté en sec. (4.1.1), en utilisant dans l'expression de  $\mathcal{M}^{(0)}$ , non pas la charge renormalisée  $\alpha_{\overline{MS}}$  mais la charge effective définie en éq. (4.1.36) :

$$\bar{\alpha}(q^2, \alpha_{\overline{MS}}) = \alpha_{\overline{MS}} / (1 + \Pi^{\overline{MS}}(q^2)) \sim \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) / (1 - \frac{\alpha_{\overline{MS}}}{3\pi} \ln \frac{q^2}{\mu^2})$$

qui comme on l'a vu est indépendante du schéma de renormalisation, donc du paramètre arbitraire  $\mu$ .



En résumé les corrections virtuelles sont donc un facteur multiplicatif au terme de Born et on a :

$$\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}_V^{(1)} = \mathcal{M}^{(0)} (1 + F_1^{\overline{MS}}(q^2) + \Sigma_1^{\overline{MS}}) \quad (5.2.2)$$

On rappelle l'expression du facteur  $\Sigma_1^{\overline{MS}}$  éq. (4.2.80) :

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ - \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_e^2} - 2 \right]. \quad (5.2.3)$$

On simplifiera  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$ , en accord avec nos hypothèses cinématiques, en prenant la limite  $-q^2 \gg m_e^2$  de sorte que les intégrales  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$  se réduisent à (voir éqs. (4.3.101), (4.3.104) respectivement) :

$$I_0 \sim \ln \frac{-q^2}{\mu^2}, \quad I_1 \sim -\frac{2}{q^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2}, \quad I_2 \sim -\frac{2}{q^2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - \frac{1}{q^2} \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2}, \quad -q^2 \gg m_e^2 \quad (5.2.4)$$

et :

$$F_1^{\overline{MS}}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left( 2 \left[ \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - 2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2} - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + 4 \ln \frac{-q^2}{m_e^2} \right). \quad (5.2.5)$$

On note la présence de deux types de logarithmes : ceux, non physiques, associés au schéma de renormalisation en  $\ln(-q^2/\mu^2)$  et ceux, cinématiques, associés à la masse de l'électron qui seraient

divergents dans le cas d'une masse nulle (singularité de masse ou colinéaire). Le résultat exact de  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$  contient évidemment d'autres termes "finis", non logarithmiques, indépendants de  $\mu$  et réguliers dans la limite  $m_e \rightarrow 0$ . La contribution des diagrammes virtuels à la section efficace est l'interférence entre l'amplitude de Born et  $\mathcal{M}_V^{(1)}$  et elle s'écrira donc :

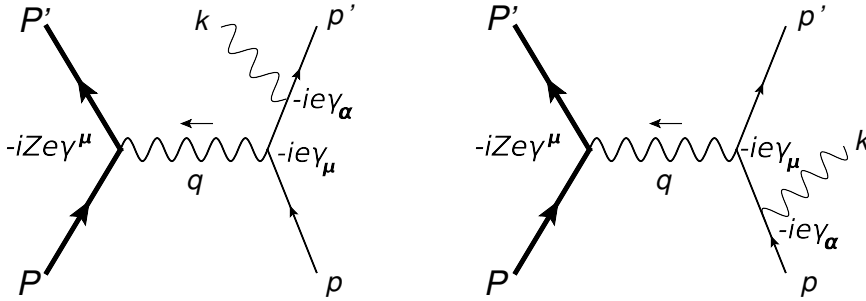
$$\frac{d\sigma_V^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \int d\omega' \delta(\omega - \omega') (2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}). \quad (5.2.6)$$

Regroupant avec le terme de Born on aura donc la contribution à la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma_V^{(0)+(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} (1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}) \delta(\omega - \omega'). \quad (5.2.7)$$

### 5.3 Corrections réelles

Elles sont obtenues en prenant en compte les deux diagrammes où un photon réel est émis par le lepton :



L'amplitude correspondante est :

$$\mathcal{M}_R^{(1)} = iZe^2 \bar{u}(P') \gamma_0 u(P) \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p') \left[ \gamma^0 \frac{\not{p}' - \not{k} + m_e}{(p' - k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{\not{p}' + \not{k} + m_e}{(p' + k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^0 \right] u(p) \varepsilon_\alpha(k) \quad (5.3.1)$$

où  $\varepsilon_\alpha(k)$  est le vecteur polarisation du photon. Pour étudier le comportement infrarouge de cette amplitude on néglige  $k$  devant  $p$  ou  $p'$  dans le numérateur ("approximation du photon mou") ce qui permet de simplifier considérablement la partie entre crochets par les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned} (\not{p} + m_e) \gamma^\alpha u(p) \varepsilon_\alpha(k) &= (-\gamma^\alpha \not{p} + m_e \gamma^\alpha + 2 p^\alpha) u(p) \varepsilon_\alpha(k) \\ &= 2 p \cdot \varepsilon(k) u(p) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

après usage de l'équation de Dirac. Ceci permet d'écrire la contribution des diagrammes réels comme un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born :

$$\mathcal{M}_R^{(1)} = e \left[ \frac{p' \cdot \varepsilon(k)}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon(k)}{p \cdot k} \right] \mathcal{M}^{(0)}, \quad (5.3.3)$$

expression valable dans l'approximation infrarouge (on a négligé un terme en  $k^2$  devant  $p \cdot k$  ou  $p' \cdot k$  dans les dénominateurs). L'amplitude au carré sera alors après sommation sur la polarisation du photon (on utilise l'éq. (2.4.56)) :

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}_R^{(1)}|^2 = \overline{\Sigma} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right]. \quad (5.3.4)$$

On obtient la section efficace par :

$$\begin{aligned} \sigma_R^{(1)} = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p' - k) \overline{\Sigma} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 \\ \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

L'intégration sur les impulsions finales  $P'$  et  $p'$  du noyau et de l'électron se fait de la même manière qu'en éqs. (5.1.5) et (5.1.6) ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\sigma_R^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \int d\omega' \delta(\omega - \omega' - k) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right], \quad (5.3.6)$$

où on a factorisé dans la section efficace une partie proportionnelle à la section efficace de Born (dans laquelle on a pris  $\omega' = \omega$ , négligeant ainsi la dépendance en  $k$  en accord avec l'approximation qui mène à l'éq. (5.3.3)). Il est évident que chacun des termes entre crochets est divergent quand l'impulsion  $k$  du photon tend vers 0 puisque chacun des termes se comporte comme  $\int dk/k$  : ces sont des termes singuliers dans l'infrarouge. Pour régulariser ces divergences on va évaluer l'intégrale dans un espace à  $n - 1$  dimensions avec, comme dans le chapitre précédent,  $n = 4 - 2\varepsilon$  ce qui amène à faire la substitution :

$$e^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} \rightarrow e^2 \mu^{2\varepsilon} \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \quad (5.3.7)$$

où l'introduction du facteur  $\mu^{2\varepsilon}$  est nécessaire pour que la section efficace garde la bonne dimension. Pour évaluer de telles intégrales on se reporte aux éqs. (3.2.12), (3.2.13) avec la différence que l'on a ici un vecteur euclidien en  $(n - 1)$  dimensions et que l'intégrale sur l'angle polaire  $\theta_1$  du photon avec l'électron ne peut être faite à l'aide de l'éq. (3.2.14) puisque l'intégrand en dépend. Considérons par exemple le terme :

$$e^2 \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} = \frac{e^2 \mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{k^{n-3} dk}{2} \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \int d\Omega_{n-3} \frac{m_e^2}{k^2 (\omega - p \cos \theta_1)^2}. \quad (5.3.8)$$

Faisant l'intégrale sur l'angle solide  $d\Omega_{n-3}$  à l'aide de l'éq. (3.2.14) et passant à la notation en  $\varepsilon$  il faudra alors calculer :

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \int \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(\omega - p \cos \theta_1)^2}. \quad (5.3.9)$$

On remarque que les intégrales sur l'impulsion et l'angle polaire se factorisent, la première donnant lieu à la divergence infrarouge régularisée  $-1/\varepsilon_{\text{ir}}$ . La section efficace différentielle de production avec émission d'un photon pourra alors s'écrire :

$$\frac{d\sigma_R^{(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \delta(\omega - \omega' - k) (2 J_1 + J_2) \quad (5.3.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(p \cdot \hat{k})^2} \\ J_2 &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot \hat{k} p' \cdot \hat{k}}, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où  $\hat{k} = (1, \vec{k}/|k|)$  définit l'angle  $\theta_1$  du photon avec l'impulsion de l'électron. Pour évaluer facilement  $J_2$  on peut choisir un repère tel que  $\vec{p} + \vec{p}' = 0$ .

## 5.4 Définition de la section efficace

Avant d'évaluer ces expressions il convient de définir l'observable que l'on veut calculer. On mesure le taux de diffusion d'un électron relativiste d'énergie  $\omega'$  à un angle solide  $\Omega = (\theta, \phi)$  après diffusion sur un noyau statique. On distingue deux possibilités. Si  $\omega' < \omega$ , seules les corrections réelles apportent une contribution et on a d'après l'éq. (5.3.10) :

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \frac{1}{\omega - \omega'} (2 J_1 + J_2), \quad \omega' < \omega, \quad (5.4.1)$$

où on a fait  $\varepsilon = 0$  puisque  $\omega - \omega'$  agit comme cut-off infra-rouge. On rappelle que cette expression est valable pour une énergie du photon  $\omega - \omega'$  pas trop grande devant  $\omega$  du fait de nos hypothèses cinématiques simplificatrices. En fait, le détecteur a une certaine résolution  $\delta\omega$  en énergie, c'est à dire que la section efficace observée sera définie comme la moyenne de la section efficace mesurée dans le petit intervalle  $[\omega' - \delta\omega, \omega']$  soit :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega'} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega' - \delta\omega}^{\omega'} d\omega'' \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega''} \approx \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega'}. \quad (5.4.2)$$

Si maintenant  $\omega' = \omega$ , alors Born, réels et virtuels contribuent de sorte que on a :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega}^{\omega} d\omega' \frac{d\sigma}{d\Omega d\omega'}. \quad (5.4.3)$$

où l'intégrand est la somme des contributions éqs. (5.2.7) et (5.3.10). Dans le calcul il faudra donc prendre en compte le cas où l'électron est produit avec une énergie exactement  $\omega$  par les diagrammes de Born et virtuels, ainsi que celui où l'électron est diffusé avec émission d'un photon de faible énergie. La prédiction théorique est donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} &= \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega}^{\omega} d\omega' \left[ (1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}) \delta(\omega - \omega') \right. \\ &\quad \left. + \mu^{2\varepsilon} \int_0^{\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \delta(\omega - \omega' - k) (2 J_1 + J_2) \right] \\ &= \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega \delta\omega} [1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}} + \mu^{2\varepsilon} \int_0^{\delta\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} (2 J_1 + J_2)]. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$



L'énergie du photon est contrainte par la résolution du détecteur,  $k < \delta\omega$ , résolution supposée très petite devant  $\omega$  ce qui justifie l'approximation  $\omega = \omega'$  que l'on fera dans l'évaluation des intégrales réelles. Ainsi on aura par exemple<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_1 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^{\delta\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(\omega - p \cos \theta_1)^2} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[ -\frac{1}{2\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln \frac{\delta\omega}{\mu} \right] \left[ 2 + 2\varepsilon \frac{\omega}{p} \ln \frac{(\omega + p)^2}{4m_e^2} \right] \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Le premier crochet est le résultat de  $\int dk$  et contient la "divergence" infrarouge (la notation  $\varepsilon_{\text{ir}}$  est un mnémonique pour rappeler l'origine de la singularité) accompagnée du terme "non-physique" en  $\ln \mu$ . On note que le terme en  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  est également à l'origine d'un  $\ln(\omega + p)^2/4m_e^2$  par compensation avec le terme en  $\varepsilon$  du deuxième crochet. On peut se rendre compte que les termes linéaires en  $k$  négligés dans les numérateurs de l'éq. (5.3.1) sont de la forme  $\int dk k^{-2\varepsilon}$  et ne donnent donc pas lieu à une divergence infrarouge ni à un terme logarithmique. Après simplification  $p \sim \omega$  et ne gardant que les "grands" termes logarithmiques on arrive à :

$$\int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_1 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[ -\left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln 4\pi \right) + \ln \frac{(\delta\omega)^2}{\mu^2} - \ln \frac{\omega^2}{m_e^2} \right] \quad (5.4.6)$$

et de façon similaire :

$$\int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_2 = \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln 4\pi \right) \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{(\delta\omega)^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2} \right]. \quad (5.4.7)$$

On peut alors injecter dans l'éq. (5.4.4) les résultats ci-dessus et on trouve finalement :

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega d\omega} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( -\ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \text{termes finis} \right) \right]}, \quad (5.4.8)$$

qui est le résultat recherché. On voit que les termes en  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  ainsi que les termes dépendant de  $\mu$  sont compensés entre contributions réelles et virtuelles. Le paramètre non physique  $\mu$  a été remplacé par la résolution en énergie  $\delta\omega$  de l'appareil de mesure. Les termes en  $\ln^2(-q^2/m_e^2)$  se compensent aussi mais il reste des facteurs en  $\ln -q^2/m_e^2$  qui seraient divergents dans la limite  $m_e$  nulle : leur origine est l'intégrale angulaire sur  $\cos \theta_1$  dans l'éq. (5.4.5). Si on supposait  $m_e = 0$ , alors  $\omega = p$  et l'intégrale angulaire divergerait en 4 dimensions (divergences en masse ou colinéaires). Si  $-q^2$  est trop grand, ou si le détecteur a une résolution trop fine ( $\delta\omega$  trop petit), la correction en  $\alpha$  de l'équation précédente peut devenir grande et la section efficace calculée au deuxième ordre de la théorie des perturbations est négative ce qui n'a aucun sens. On peut en fait montrer que ces termes, restes de divergences infrarouges, peuvent être "re-sommés" à tous les ordres de la théorie des perturbations et s'exponentient pour trouver le résultat :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \exp \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \right) \right] + \dots \quad (5.4.9)$$

2. Le terme en  $\varepsilon$  de l'intégrale angulaire peut facilement être obtenu à l'aide de

$$\int \frac{\ln x}{(a + bx)^2} = \frac{x \ln x}{a(a + bx)} - \frac{1}{ab} \ln(a + bx)$$

qui montre que la section efficace élastique tend vers 0, à petit  $\delta\omega$  ou à grands  $|q^2|$ , du fait de l'émission de photons mous.

• **Conclusions**

Les calculs perturbatifs engendrent deux types de "grands logarithmes" :

- d'origine infrarouge
- d'origine colinéaire

de sorte qu'après compensation entre termes réels et virtuels les termes résiduels dominants ont la structure suivante :

$$\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} (+) \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} (+) \ln \frac{-q^2}{m_e^2} \right), \quad (5.4.10)$$

où  $\delta\omega$  est la résolution en énergie. Les termes d'origine infrarouge s'exponentient. En QCD, on suppose les quarks légers de masse nulle ce qui conduit à des divergences colinéaires qui seront régularisées soit par l'introduction d'une résolution angulaire comme dans le cas de la section efficace de production de jets (voir secs. 10.2 et 13.3), soit par l'introduction de fonction de structure de partons dans les hadrons (secs. 9.1 et 9.2) ou de hadrons dans les partons (sec. 10.3).

## Chapitre 6

# Hadrons et quarks + ...

Jusque dans les années 1950 on pouvait croire que l'électron, le proton et le pion, découvert en 1947, étaient des constituants élémentaires de la matière. A partir des années 1960, de nombreuses résonances hadroniques ou hadrons furent découverts et on compte maintenant plus d'une centaine de mésons et plus d'une centaine de baryons (cf. Review of Particle Properties 2014). Un si grand nombre d'états hadroniques ne peuvent évidemment pas tous être élémentaires. Pour essayer d'établir un certain ordre dans l'accumulation des données expérimentales, deux approches complémentaires ont été suivies.

La première a consisté à classer les hadrons c'est à dire à en faire la spectroscopie. L'échelle d'énergie caractéristique associée est de l'ordre de la masse des hadrons, soit approximativement le GeV. En 1964, Gell-Mann<sup>1</sup> et Zweig<sup>2</sup> suggérèrent indépendamment que les hadrons étaient en fait composés de constituants plus fondamentaux : les quarks. Le modèle des quarks était alors plus une méthode de classification des hadrons qu'un modèle dynamique capable de décrire les interactions entre hadrons. Peu avant que le modèle des quarks ait été proposé, Gell-Mann<sup>3</sup> et Ne'eman<sup>4</sup> avaient indépendamment montré que les hadrons pouvaient être classés dans des représentations irréductibles du groupe de symétrie SU(3). Ainsi les mésons appartenaient à la représentation singulet **1** ou octet **8** tandis que les baryons appartenaient à la représentation **8** ou décuplet **10** de SU(3). Le modèle des quarks est une réalisation explicite de la symétrie SU(3) de saveur.

L'autre approche a consisté à faire des expériences de diffusion aux plus hautes énergies possibles pour casser le hadron et libérer ses constituants, s'ils existent. C'est ce qui a conduit au modèle des partons de J.D. Bjorken<sup>5</sup> et R.P. Feynman<sup>6</sup>, formulé en 1969-1972, faisant suite à la découverte, en 1968, de la structure granulaire du proton dans la diffusion *électron-proton* à l'accélérateur linéaire du SLAC par Friedman, Kendall, Taylor et al.<sup>7</sup>.

---

1. M. Gell-Mann Phys. Lett. **8** (1964) 214.

2. G. Zweig, pré tirage CERN-TH-412 (1964) ; cet article a été refusé à la publication.

3. M. Gell-Mann Phys. Rev. **125** (1962) 1067.

4. Y. Ne'eman Nuc. Phys. **26** (1961) 222.

5. J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547.

6. R.P. Feynman, Photon-hadron interactions, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.

7. E. D. Bloom et al., Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 930 ; M. Breidenbach et al., *ibid.* 935.

## 6.1 Spectroscopie et modèle des quarks

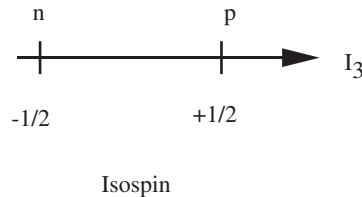
Considérons d'abord le système plus simple du proton et du neutron. On les distingue essentiellement par leurs propriétés électromagnétiques puisqu'ils subissent la même interaction forte et qu'ils ont presque la même masse.

### • L'isospin

Pour "comprendre" ceci Heisenberg a introduit la notion d'**isospin** et a considéré que le proton et le neutron étaient les deux membres d'un même doublet (**2**) d'isospin :

$$\begin{aligned} p &\equiv (I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2}) && \text{isospin "up",} && \text{proton} \\ n &\equiv (I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2}) && \text{isospin "down",} && \text{neutron} \end{aligned}$$

Du point de vue des interactions fortes le proton et le neutron apparaissent comme une seule et même particule, le nucléon d'isospin  $I = \frac{1}{2}$ , leur seule différence étant la charge électrique. Ceci est en analogie formelle avec la notion de spin où une particule de spin  $s = \frac{1}{2}$  a deux états de polarisation  $s_3 = \pm \frac{1}{2}$ . Ceci est illustré par le diagramme



Pour former le noyau des atomes on combine protons et neutrons et les règles pour obtenir l'isospin d'un système à plusieurs nucléons sont analogues à celles utilisées pour additionner le spin. En particulier,  $I_3$  est un nombre quantique additif. Ainsi pour un système de deux nucléons on a

$$\left. \begin{aligned} (pp) &\equiv (I = 1; I_3 = 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np) &\equiv (I = 1; I_3 = 0) \\ (nn) &\equiv (I = 1; I_3 = -1) \end{aligned} \right\} \text{ triplet (**3**) d'isospin}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np) \equiv (I = 0; I_3 = 0) \text{ singulet (**1**) d'isospin}$$

### • Le groupe SU(2)

En langage mathématique on dit que le proton et le neutron appartiennent à la représentation fondamentale du groupe de symétrie SU(2). Les deux éléments de cette représentation sont dénotés

$$\zeta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour le proton et } \zeta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour le neutron,}$$

et l'action d'un élément du groupe sur la représentation fondamentale est donnée par

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}}, \quad i = 1, 2, 3$$

où les générateurs  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui satisfont

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}.$$

Le tenseur  $\epsilon_{ijk}$  est totalement antisymétrique avec  $\epsilon_{123} = 1$ . Les  $\theta_i$ , introduits plus haut, sont des nombres réels. L'opérateur d'isospin  $I_3$  est donc représenté par  $I_3 = \frac{\sigma_3}{2}$  puisque

$$I_3 \zeta^1 = \frac{1}{2}\zeta_1, \quad I_3 \zeta^2 = -\frac{1}{2}\zeta^2$$

en accord avec les nombres quantiques  $I_3$  assignés au proton et au neutron. On peut remarquer que la matrice  $U(\theta_i)$  est unitaire ( $U^\dagger U = 1$ ) puisque les matrices  $\sigma_i$  sont hermitiennes ( $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$ ). Les transformations du groupe préservent donc la forme  $\zeta^\dagger \zeta$ . De plus, puisque  $\det U(\theta_i) = 1$  on a affaire au groupe  $SU(2)$  et non  $U(2)$ .

Les représentations d'ordre supérieur sont construites comme produits tensoriels de représentations fondamentales. Ainsi la collection des éléments  $\zeta^i \zeta^j$  peut être décomposée en

$$\zeta^i \zeta^j = \zeta^{\{ij\}} + \zeta^{[ij]}$$

où  $\{ij\}$  ( $[ij]$ ) dénote respectivement la symétrisation (l'antisymétrisation) sur les indices  $ij$ . On peut facilement montrer que les propriétés de symétrie et d'antisymétrie sont préservées par l'action d'un élément du groupe et qu'aucun sous-ensemble des  $\zeta^{\{ij\}}, \zeta^{[ij]}$  n'est invariant sous l'action du groupe : on dit que les  $\zeta^{\{ij\}}$  et  $\zeta^{[ij]}$  sont des représentations irréductibles du groupe  $SU(2)$ . L'équation ci-dessus signifie simplement que le produit de deux représentations fondamentales se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles que l'on écrit

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$$

où l'on caractérise chaque représentation  $\mathbf{n}$  par le nombre d'éléments  $n$  qu'elle contient. Ainsi, la représentation symétrique a 3 éléments et la représentation antisymétrique un seul élément qui est donc invariant sous l'action du groupe ( $I = 0$ ). On peut généraliser la construction ci-dessus et écrire, par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} &= (\mathbf{3} \oplus \mathbf{1}) \otimes \mathbf{2} \\ &= \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2} \end{aligned}$$

La représentation  $\mathbf{4}$  est composée des éléments totalement symétriques  $\zeta^{\{ijk\}}$  alors que chacune des représentations  $\mathbf{2}$  est de symétrie mixte, composée respectivement des éléments  $\zeta^{\{[ij]k\}}$  et  $\zeta^{\{ij\}k}$ .

### • L'étrangeté

Parmi tous les hadrons apparaissant dans la table des particules certains ont un temps de vie "extrêmement" long : par exemple le baryon  $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$  avec un temps de vie  $\tau \sim 10^{-10}$  sec est à contraster avec le baryon  $\Delta(1232)$ , de masse similaire, qui se désintègre aussi en  $n\pi$  avec une largeur de l'ordre de  $\Gamma = 100\text{MeV}$ , soit un  $\tau \sim 10^{-23}$  sec (on rappelle  $\tau = \hbar/\Gamma = 0,67 \cdot 10^{-23} [\text{MeVsec}]/\Gamma [\text{MeV}]$ ) qui est une valeur typique pour une résonance hadronique. De même le méson  $K$ , de masse 494 MeV, a un temps de vie  $\tau \sim 10^{-8}$  sec qui est à comparer avec celui du méson  $\rho(770)$ , par exemple, qui est  $\tau \sim 10^{-23}$  sec. Ces particules sont cependant produites en paires avec une section efficace typique des interactions fortes : ainsi la réaction  $\pi p \rightarrow K\Sigma$  a une

section efficace du même ordre de grandeur que  $\pi p \rightarrow \rho \Delta$ . Pour décrire ce phénomène, Gell-Mann et Nishijima introduisirent, indépendamment, un nouveau nombre quantique additif, l'**étrangeté**. Toutes les observations expérimentales pouvaient "se comprendre" si l'on supposait que l'étrangeté était une symétrie exacte des interactions fortes (ainsi que des interactions électromagnétiques) c'est-à-dire que le nombre quantique d'étrangeté était conservé lors d'un processus d'interactions fortes. On a assigné l'étrangeté

$$\begin{aligned} S = 0 & \quad \text{à } \pi, \rho, \dots, N, \Delta, \dots \quad (\text{particules ordinaires}) \\ S = 1 & \quad \text{à } K^+, K^0 \\ S = -1 & \quad \text{à } \Lambda, \Sigma^\pm, \Sigma^0 \end{aligned}$$

Les antiparticules ont l'étrangeté  $-S$  de la particule. Ainsi les réactions  $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$  et  $K^- p \rightarrow K^0 n$  qui ont une étrangeté  $S = 0$  ou  $-1$  respectivement sont des processus d'interactions fortes normaux. En revanche les désintégrations  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$  ou  $\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$  violent la conservation d'étrangeté et ne sont donc pas des processus d'interactions fortes : le taux de désintégration est alors très petit (caractéristiques des interactions faibles) correspondant à un temps de vie très long.

Avec ce nouveau nombre quantique additif à notre disposition, l'idée a alors été d'élargir le groupe de symétrie SU(2) d'isospin. Un candidat "naturel" était SU(3).

### • Le groupe SU(3)

La représentation fondamentale du groupe SU(3) est un triplet **3** d'éléments dénotés

$$\zeta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments du groupe agissant sur cette représentation fondamentale sont paramétrés par les matrices  $3 \times 3$

$$U(\theta_j) = e^{-i\theta_j \frac{\lambda_j}{2}} \quad j = 1, \dots, 8; \quad \theta_j \quad \text{paramètres réels.}$$

Les huit matrices  $3 \times 3$  de Gell-Mann,  $\lambda_j$ , sont pour le groupe SU(3) l'équivalent des matrices de Pauli du groupe SU(2). Elles satisfont les relations d'anticommutation

$$\left[ \frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$$

où les constantes de structure  $f_{ijk}$  du groupe sont totalement antisymétriques sur les indices. Il peut être intéressant d'avoir la forme explicite de certaines matrices  $\lambda_j$ . Ainsi

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On peut construire les représentations d'ordre plus élevé par produit tensoriel de la représentation fondamentale,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$$

où la représentation  $\mathbf{6}$  est totalement symétrique et la représentation  $\bar{\mathbf{3}}$  est la représentation conjuguée de la représentation fondamentale (l'action du groupe sur les éléments de la représentation conjuguée est paramétrée par les matrices  $U(\theta_i)^*$ ). On a de plus

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

et

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

où la représentation  $\mathbf{10}$  est totalement symétrique et la représentation singulet  $\mathbf{1}$  est totalement antisymétrique.

On a observé que tous les mésons pouvaient être classés dans les représentations octet et singulet, c'est-à-dire dans des représentations irréductibles construites à partir du produit  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$  tandis que tous les baryons appartenaient à des octets ou des décuplets qui peuvent être construits à partir du produit  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ . Aucun hadron n'apparaissait comme membre de la représentation fondamentale. Ces observations ont conduit Gell-Mann et Zweig à introduire les quarks comme éléments de la représentation fondamentale de  $SU(3)$  et à construire les hadrons à partir des quarks. C'est ce que l'on appelle la symétrie  $SU(3)$  de saveur où la saveur dénote ici l'isospin et l'étrangeté. Nous ne parlerons pas des saveurs lourdes telles que le charme, la beauté, le "top" pour lesquelles on peut introduire le groupe  $SU(4)$ , ....

• **Le modèle des quarks de Gell-Mann et Zweig.**

On introduit trois quarks<sup>8</sup> avec les nombres quantiques suivants :

quark	saveur	spin	I	$I_3$	S	B	Y	Q
u	up	1/2	1/2	1/2	0	1/3	1/3	2/3
d	down	1/2	1/2	-1/2	0	1/3	1/3	-1/3
s	étrange	1/2	0	0	-1	1/3	-2/3	-1/3

Le nombre quantique baryonique  $B$  est additif et a pour valeur

- $B = 0$  pour les mésons (résonances hadroniques de spin entier ou nul),
- $B = 1$  pour les baryons (résonances de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , ...)
- $B = -1$  pour les antibaryons.

Il est introduit pour "expliquer" pourquoi le nucléon et plus généralement les baryons ne se désintègrent pas en pions. On a également l'**étrangeté**  $S$  et l'**hypercharge**,  $Y$ , qui n'est pas un nombre quantique indépendant puisqu'elle satisfait :

$$Y = B + S$$

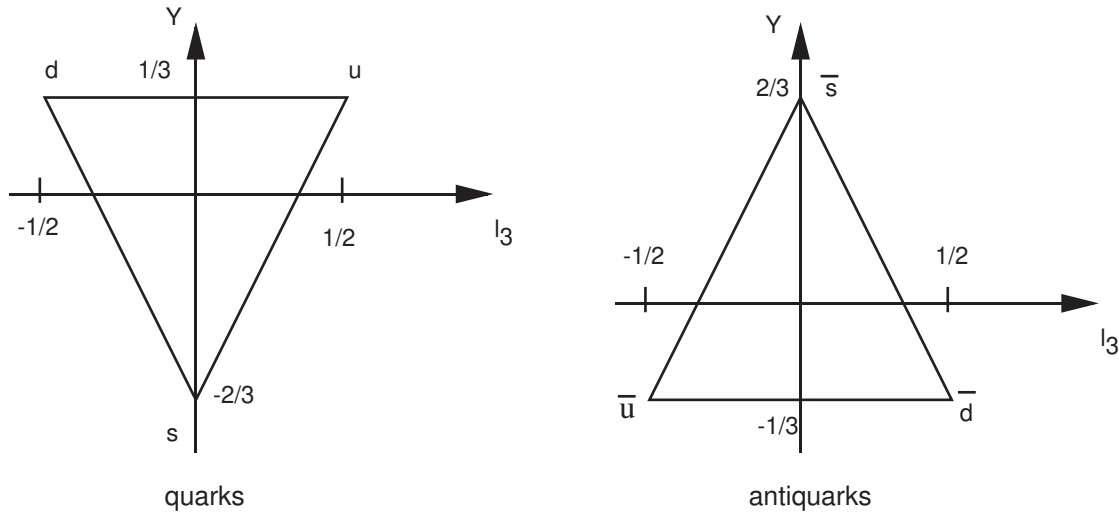
de sorte qu'avec le choix  $B = \frac{1}{3}$  pour les quarks la somme de l'hypercharge des membres du triplet de quarks est nulle. Finalement la charge est reliée aux autres nombres quantiques par

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}.$$

Dans le plan d'isospin et d'hypercharge, les triplets de quarks et d'antiquarks ont la représentation

---

8. Zweig les appelait les as.



En termes des éléments de la représentation fondamentale de SU(3) on fait l'identification suivante :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les générateurs d'isospin  $I_3$  et d'hypercharge sont les matrices diagonales,

$$I_3 = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} I_3 u &= \frac{1}{2}u & , & \quad Y u = \frac{1}{3} u \\ I_3 d &= -\frac{1}{2}d & , & \quad Y d = \frac{1}{3} d \\ I_3 s &= 0 & , & \quad Y s = -\frac{2}{3} s \end{aligned}$$

en accord avec les nombres quantiques assignés aux quarks dans le tableau ci-dessus. Les antiquarks, dénotés  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{s}$  appartiennent à la représentation conjuguée  $\bar{\mathbf{3}}$  et, écrits comme vecteurs lignes, se transforment sous l'action de  $U^\dagger$  à droite.

• **Les hadrons**

Ils sont composés de quarks et d'antiquarks de sorte que leur charge et leur nombre baryonique aient des valeurs entières.

Les mésons, qui ont un nombre baryonique nul ( $B = 0$ ) sont des états liés quark-antiquark, soit

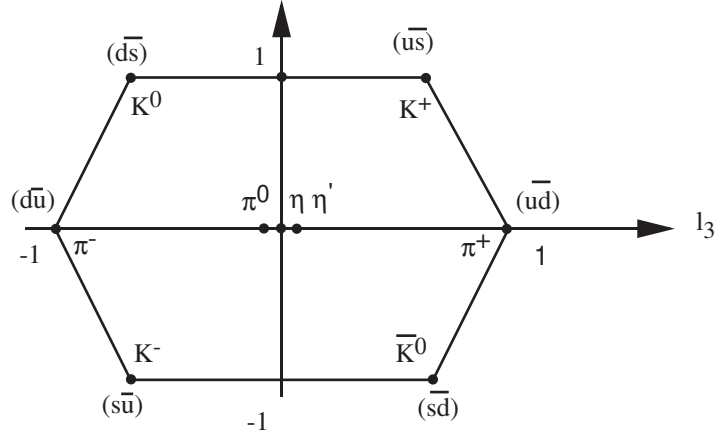
$$M = (q_i \bar{q}_j) \quad i, j = u, d, s...$$

Ils appartiennent donc aux représentations irréductibles  $\mathbf{8}$  et  $\mathbf{1}$  de  $SU(3)|_{\text{saveur}}$  puisque

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$



Le "nonet" ( $\mathbf{8} + \mathbf{1}$ ) de mésons a dans le plan  $(I_3, Y)$  la représentation suivante



Le nonet du  $\pi$  (pseudoscalaire de spin<sup>parité</sup>  $J^P = 0^-$ )

Il y a trois états neutres c'est-à-dire des états avec  $I_3 = Y = 0$  :

1. le singulet dont la fonction d'onde s'écrit

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Cet état est invariant sous l'action du groupe  $SU(3)$  et c'est donc aussi un singulet d'isospin,  $I = 0$ .

2. deux membres de l'octet, l'un d'isospin  $I = 1$ , de fonction d'onde  $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$  que l'on identifie au  $\pi^0$ , l'autre, d'isospin  $I = 0$ , avec la fonction d'onde  $\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$ .

La symétrie  $SU(3)|_{\text{saveur}}$  n'étant en fait pas une symétrie exacte (elle est brisée en particulier par les termes de masse des quarks  $m_d \sim m_u \neq m_s$ ) les deux états avec  $I = 0$  de l'octet et du singulet se mélangent pour former les mésons  $\eta$  et  $\eta'$ .

On peut classer de cette façon les mésons vecteurs ( $J = 1$ ) associés au méson  $\rho$  (nonet du  $\rho$ ) et, prenant en compte le moment angulaire orbital entre les quarks et antiquarks, classer en principe tous les mésons. Il est amusant de constater que le modèle des quarks exclut les états avec les nombres quantiques  $J^{PC} = 0^{+-}, 0^{--}$  et  $1^{-+}$  (parité  $P$ , conjugaison de charge  $C$ ) pour lesquels il n'existe toujours pas "d'évidence expérimentale" certaine (cf. table de classification des mésons).

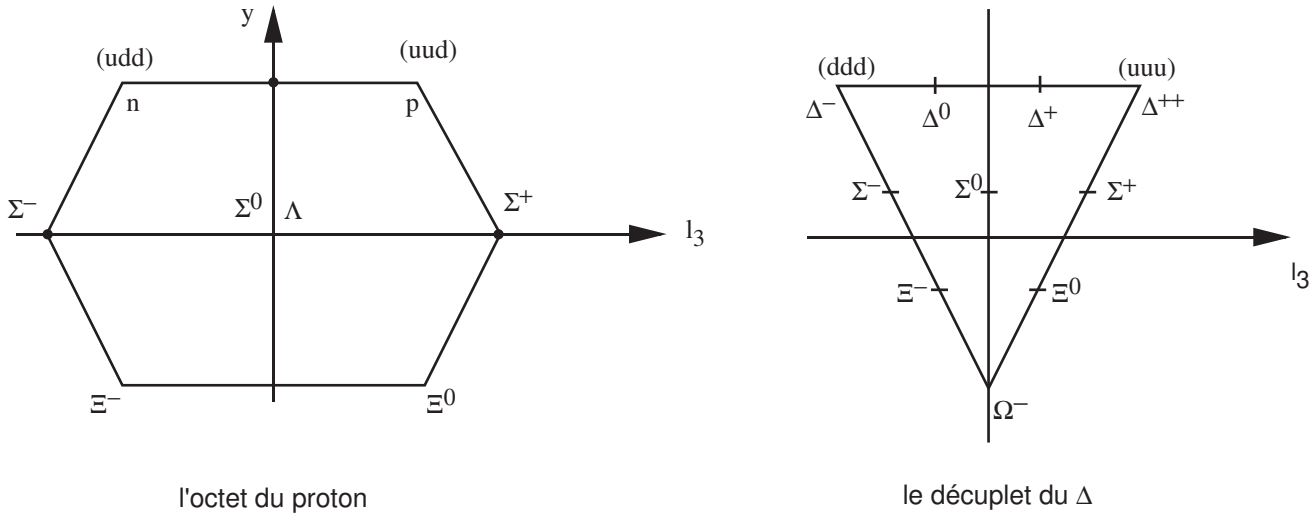
Les baryons, de nombre quantique baryonique 1, sont constitués de trois quarks

$$B = (q_i q_j q_k) \quad i, j, k = u, d, s \dots$$

et du point de vue des représentations on rappelle

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} + \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

Il n'existe pas de baryons correspondant à la représentation  $\mathbf{1}$  totalement antisymétrique. L'octet du proton ( $J = \frac{1}{2}$ ) et le décuplet du  $\Delta$  ( $J = \frac{3}{2}$ ) ont la composition suivante



Il est à noter que le baryon  $\Omega = (sss)$  a été prédit par le modèle des quarks avant sa découverte expérimentale.

• **La couleur**

L'exemple du décuplet permet d'illustrer de façon simple un problème fondamental du modèle des quarks tel que décrit ci-dessus. Considérons, par exemple, la particule  $\Delta^{++} = (uuu)$  et plus précisément le  $\Delta^{++}$  en un état de spin  $s_z = \frac{3}{2}$  (chaque quark a son spin orienté vers le haut, ce que l'on écrit dans le modèle

$$\Delta^{++}(s_z = \frac{3}{2}) = (u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow)$$

et la fonction d'onde du  $\Delta^{++}$  est symétrique par échange de deux quarks, en contradiction avec la statistique de Fermi-Dirac qui demande que la fonction d'onde soit antisymétrique. Pour résoudre ce problème, on introduit un nouveau nombre quantique, la couleur<sup>9</sup>. Chaque quark existe en trois variétés de couleurs  $i = R, G, B$  de sorte que l'on a

$$u = \begin{pmatrix} u_R \\ u_G \\ u_B \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_R \\ d_G \\ d_B \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s_R \\ s_G \\ s_B \end{pmatrix}$$

A ce nouveau nombre quantique est associé le groupe de symétrie de couleur  $SU(3)$ , quelquefois dénoté  $SU(3)_c$  pour le distinguer de la symétrie  $SU(3)$  de saveur opérant sur les  $u, d, s$ . Chaque quark est donc un triplet de couleur et on postule que les hadrons sont des **1** de couleur (les hadrons sont incolores) c'est à dire que leur fonction d'onde est invariante sous l'action d'un élément du groupe<sup>10</sup>.

9. H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Phys. Lett. **47B** (1973) 365.

10. Avant l'hypothèse de couleur à la Fritzsch/Gell-Mann/Leutwyler, O. W. Greenberg avait introduit les quarks comme parafermions d'ordre 3 (Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598); un peu plus tard, M.Y. Han et Y. Nambu ont proposé un modèle à trois triplets de quarks de charge entière fondé sur une double symétrie  $SU(3)$  (Phys. Rev. **139** (1965) B1006); en Union Soviétique le nombre quantique de couleur avait été proposé indépendamment par N. N. Bogoliubov, B. Struminsky et A. Tavkhelidze, in High Energy Physics and Elementary Particles, IAEA, Vienna (1965).

Ainsi la fonction d'onde du  $\Delta^{++}$  est :

$$\begin{aligned}\Delta^{++} &= \frac{1}{\sqrt{6}} u_i^\uparrow u_j^\uparrow u_k^\uparrow = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left( u_R^\uparrow u_G^\uparrow u_B^\uparrow - u_R^\uparrow u_B^\uparrow u_G^\uparrow + u_B^\uparrow u_R^\uparrow u_G^\uparrow - u_B^\uparrow u_G^\uparrow u_R^\uparrow + u_G^\uparrow u_B^\uparrow u_R^\uparrow - u_G^\uparrow u_R^\uparrow u_B^\uparrow \right)\end{aligned}$$

qui est antisymétrique sous la permutation de deux éléments. De manière générale, la fonction d'onde du baryon est construite de façon qu'elle soit totalement antisymétrique dans l'espace des couleurs mais totalement symétrique en ce qui concerne le moment orbital  $\otimes$  spin  $\otimes$  saveur. On "comprend" aussi qu'il n'existe pas de baryon dans la représentation  $\mathbf{1}$  de saveur, associé à l'octet du proton et au décuplet du  $\Delta$ , car sa fonction d'onde serait globalement symétrique, puisqu'antisymétrique à la fois dans l'espace des couleurs et des saveurs.

Les mésons sont aussi des singulets de  $SU(3)_c$ , et leur fonction d'onde s'écrit, du point de vue de la couleur

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i^3 \bar{q}_i q'_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{q}_R q'_R + \bar{q}_G q'_G + \bar{q}_B q'_B)$$

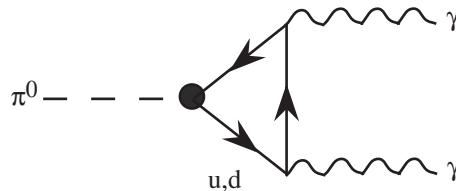
Les règles ci-dessus "expliquent" pourquoi il n'existe pas d'états hadroniques ( $qq$ ) ou ( $qq\bar{q}$ ) puisqu'ils ne sont pas des  $\mathbf{1}$  de couleur, mais n'exclut pas l'existence de mésons ( $qq\bar{q}\bar{q}$ ) (tetraquarks) ou de baryons ( $qqq\bar{q}\bar{q}$ ) (pentaquarks). Ces états "exotiques" auraient des signatures particulières : mésons doublement chargés, baryons triplement chargés ou avec des nombres quantiques interdits par le modèle :  $J^{PC} = 0^{+-}, 0^{-+}$  et  $1^{-+}$ . La recherche de ces états fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques mais la situation est en constante évolution, certaines résonances observées dans une expérience n'étant pas vues dans une autre<sup>11</sup>.

On reviendra dans le chapitre consacré à QCD sur le choix de  $SU(3)$  plutôt que  $U(3)$  ou  $O(3)$  comme groupe de couleur (sec. 7.7).

Si la couleur est nécessaire pour la cohérence interne du modèle des quarks elle est aussi nécessaire du point de vue expérimental comme on peut le voir sur l'exemple suivant et comme on le verra dans les expériences à haute énergie telles que l'annihilation  $e^+ + e^- \rightarrow hadrons$ .

- **La désintégration  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$**

Le diagramme correspondant à ce processus est



11. Cependant la collaboration LHCb au CERN a récemment annoncé la découverte non ambiguë de deux états pentaquarks,  $P_c(4380)$  et  $P_c(4450)$ , respectivement de spin  $3/2$  et  $5/2$ ; R. Aaij *et al.*, *Observation of  $J/\psi p$  resonances consistent with pentaquark states in  $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$  decays*, Phys. Rev. Lett. **115** (2015) 072001.

Comme la fonction d'onde du  $\pi^0 \sim u\bar{u} - d\bar{d}$ , l'élément de matrice est de la forme

$$\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \sim (e_u^2 - e_d^2)N$$

où  $e_u, e_d$  sont la charge des quarks et  $N = 3$  le nombre de couleurs. Le calcul complet donne

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{m_\pi^3}{8\pi f_\pi} (N(e_u^2 - e_d^2))^2$$

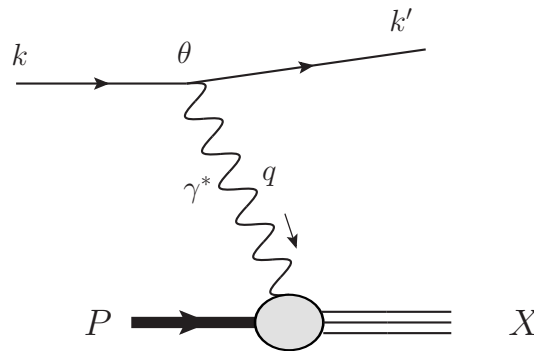
où  $f_\pi \approx 93$  MeV est la constante de désintégration du pion (mesurée dans la voie  $\pi \rightarrow \mu\nu$ ) qui est une mesure du facteur de forme de la transition  $\pi^0$  en  $q\bar{q}$ . La charge des quarks apparaît au carré dans l'élément de matrice car la boucle de quark se couple à deux photons et le facteur  $N$  est nécessaire pour prendre en compte la somme sur toutes les couleurs possibles des quarks dans la boucle. Pour  $N = 3$  on trouve un bon accord avec le résultat expérimental alors que l'absence de couleur ( $N = 1$ ) aurait conduit à un résultat 9 fois trop petit.

## 6.2 La diffusion profondément inélastique (DIS).

L'observation que les hadrons ne sont pas élémentaires mais composés de constituants "plus petits" vient aussi des processus de diffusion à haute énergie : comme on le sait, par les relations de Heisenberg, les hautes énergies sont équivalentes aux courtes distances et permettent d'explorer la matière aux petites échelles de longueur. Historiquement, l'expérience qui a joué un rôle fondamental est la diffusion profondément inélastique du nucléon (Deep Inelastic Scattering : DIS) années 1960. Le processus considéré est :

$$e^- N \rightarrow e^- X \text{ (ou } \mu^- N \rightarrow \mu^- X)$$

où  $N$  est un nucléon et  $X$  un système hadronique non détecté. En diagramme, nous avons :



Le photon virtuel émis par l'électron (ou le muon) est absorbé par le nucléon qui se casse en de nombreux hadrons. Cette expérience a été faite dans plusieurs laboratoires (SLAC, CERN, FERMILAB) sur des cibles fixes et plus récemment au collisionneur HERA électron-proton et positon-proton du laboratoire DESY à Hambourg dont les derniers résultats par les collaborations H1 et ZEUS ont été publiés en 2010. Les domaines d'énergie couverts sont typiquement :

SLAC	$E_{e^-} \simeq$ quelques GeV	, $N$ au repos	$\sqrt{s_{eN}} \sim 5$ GeV	1968
CERN	$E_\mu \simeq 100$ GeV	, $N$ au repos	$\sqrt{s_{eN}} \sim 15$ GeV	
FERMILAB	$E_\mu \simeq 300$ GeV	, $N$ au repos	$\sqrt{s_{eN}} \sim 25$ GeV	
HERA	$E_{e^-} \simeq 27$ GeV	, $E_p \simeq 820$ GeV	$\sqrt{s_{ep}} \sim 300$ GeV	2010

### 6.2.1 Cinématique de la diffusion lepton-nucléon

Du point de vue expérimental, on n'observe que le lepton sortant à haute énergie et on ne regarde pas les détails du système hadronique. Dans le référentiel du laboratoire on a les impulsions suivantes pour les différentes particules en jeu :

nucléon, N	$P = (M, \vec{0})$
$e^-$ entrant,	$k = (\omega, 0, 0, k) \simeq (\omega, 0, 0, \omega)$ , $\omega \gg m$ , masse du lepton
$e^-$ sortant,	$k' = (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta)$
photon virtuel,	$q = (\omega - \omega', -\omega' \sin \theta, 0, \omega - \omega' \cos \theta)$ , impulsion du transfert,

où  $\theta$  est l'angle de diffusion du lepton. On utilise habituellement les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
 Q^2 = -q^2 &= 4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}, & \text{carré de l'impulsion de transfert} \\
 \nu = \omega - \omega', & & \text{énergie du } \gamma^* \text{ dans le laboratoire} \\
 \boxed{y = \frac{2Pq}{2Pk} = \frac{\nu}{\omega}}, & & \text{fraction d'énergie de } e^- \text{ transférée au système hadronique} \quad (6.2.1) \\
 \boxed{x = \frac{Q^2}{2Pq} = \frac{Q^2}{2M\nu}}, & & \boxed{\text{variable de Bjorken, sans dimension}}
 \end{aligned}$$

La variable de Bjorken joue un rôle très important dans l'analyse des données de l'inélastique profond et elle aura une signification physique dans le cadre du modèle des partons. On peut alors écrire, pour la collision  $\gamma^* N \rightarrow X$ ,

$$M_X^2 = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \frac{(1-x)}{x}$$

On observe que puisque  $M_X^2 > M^2$  (le nucléon étant le plus léger des baryons), on a nécessairement

$$0 \leq x \leq 1,$$

le cas  $x = 1$  étant celui de la diffusion élastique. On a aussi la contrainte  $0 < y < 1$ .

On va considérer le cas où  $\nu$ , l'énergie du photon virtuel dans le laboratoire, et  $Q^2$ , la virtualité du photon, sont grandes, telles que  $x = Q^2/2M\nu$  fini soit  $\neq 0, 1$ . Cela correspond également à une grande énergie invariante  $M_X$  du système photon-hadron. Pourquoi cette limite est-elle intéressante? D'après les relations de Heisenberg on a

$$\Delta l \sim \frac{0,2 \text{ GeV fm}}{|\vec{q}| [\text{GeV}]}$$

Si  $|\vec{q}|$  varie de  $\sim 2$  à  $\sim 200$  GeV, alors  $\Delta l$  varie de  $\sim 10^{-1}$  à  $\sim 10^{-3}$  fermi, à comparer à la dimension du proton qui est d'environ 1 fermi =  $10^{-15}$  mètre. Dans cette limite, à haute énergie, le photon a un grand pouvoir de résolution et sert donc à explorer la structure du proton. On peut aussi estimer le temps d'interaction dans le laboratoire qui est de l'ordre de :

$$\Delta t \sim \frac{6,6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV sec}}{\nu [\text{GeV}]}, \quad \nu \text{ énergie du } \gamma^*,$$

soit  $\Delta t \sim 3,3 \cdot 10^{-27}$  seconde pour  $\nu \sim 200$  GeV. La limite "profondément inélastique" est définie par

$$Q^2 \rightarrow \infty$$

$$2M\nu = 2P \cdot q \rightarrow \infty \text{ de telle sorte que } x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \text{ fini, } \neq 0, 1,$$

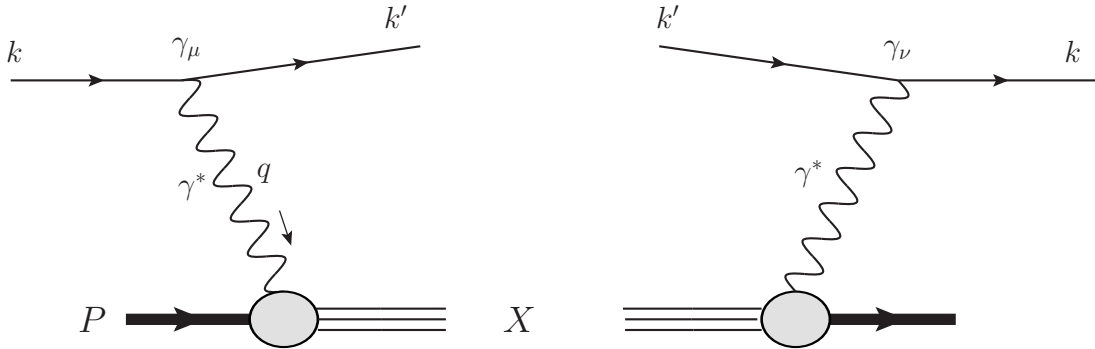
aussi appelée limite de Bjorken.

### 6.2.2 Dynamique

La section efficace totale de la diffusion  $e^- N \rightarrow e^- X$  est

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4P \cdot k} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{d^4 P_X}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - P_X) \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4P \cdot k} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2 2\omega'} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

où  $\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2$  est le carré de l'élément de matrice de la transition  $e^- N \rightarrow e^- X$ , sommé sur tous les états  $X$  et intégré sur l'impulsion du lepton final ainsi que sur la masse et l'impulsion du système  $X$ . La variable d'intégration est  $d^4 P_X$  plutôt que le traditionnel  $d^3 P_X / (2E_X)$  puisque la masse du système  $X$  n'est pas fixée (on rappelle  $d^3 P_X / (2E_X) = d^4 P_X \delta(P_X^2 - M_X^2) \theta(E_X)$ ). Enfin,  $1/4P \cdot k$  est le facteur de flux (on néglige la masse des particules initiales). Le carré de l'élément de matrice est représenté par



et on l'écrit sous forme factorisée,

$$\overline{\sum}_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(Q^2)^2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (6.2.3)$$

Le facteur  $e^4$  est conventionnel. L'interaction photon-lepton  $L^{\mu\nu}$  est connue et par application des règles de QED on a, supposant  $m_{lept} = 0$ ,

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) = 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - k \cdot k' g^{\mu\nu}) \quad (6.2.4)$$

qui est un tenseur symétrique en  $\mu$  et  $\nu$ . Le propagateur du photon contribue un facteur  $1/(Q^2)^2$  au carré de l'élément de matrice. L'interaction photon-hadron, en revanche, est inconnue et on va donc la paramétrer. Après sommation sur les spins et prise en compte de la contrainte  $P_X = P + q$ ,

$W^{\mu\nu}$  ne dépend plus que des impulsions  $P, q$ . Le tenseur le plus général que l'on peut construire est le suivant :

$$W^{\mu\nu}(P, q) = V_1 g^{\mu\nu} + V_2 P^\mu P^\nu + V_3 (q^\mu P^\nu + q^\nu P^\mu) + V_4 (q^\mu P^\nu - q^\nu P^\mu) + V_5 q^\mu q^\nu + V_6 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\rho q_\sigma \quad (6.2.5)$$

où les  $V_i$  sont des fonctions des invariants  $V_i(Q^2, P.q, P^2)$  ( $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur totalement antisymétrique défini par  $\epsilon^{0123} = 1$ ). La conservation du courant impose les contraintes  $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$ , ce qui implique que les coefficients des vecteurs  $q^\mu, P^\mu$  dans les équations ci-dessus soient nuls, d'où :

$$\begin{aligned} (V_1 + V_3 P.q + V_4 P.q + V_5 q^2) q^\mu + (V_2 P.q + V_3 q^2 - V_4 q^2) P^\mu &= 0, \\ (V_1 + V_3 P.q - V_4 P.q + V_5 q^2) q^\nu + (V_2 P.q + V_3 q^2 + V_4 q^2) P^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $P^\mu$  et  $q^\mu$  sont deux vecteurs indépendants, on aura :

$$V_4 = 0, \quad V_1 + V_3 P.q + V_5 q^2 = 0, \quad V_2 P.q + V_3 q^2 = 0, \quad (6.2.6)$$

ce qui implique deux fonctions indépendantes parmi les  $V_1, \dots, V_5$ . D'autre part  $V_6$  n'est pas contraint puisque  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\nu P_\rho q_\sigma = 0$ , mais il ne contribuera pas à la convolution  $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$  puisque  $L^{\mu\nu}$  est symétrique en  $\mu\nu$  et ce terme antisymétrique (terme de violation de la parité qui existe effectivement dans la diffusion  $\nu N \rightarrow eX$ , mais pas dans  $eN \rightarrow eX$ ). Il est traditionnel de paramétrer le tenseur hadronique par :

$$\boxed{W^{\mu\nu} = -2M W_1 \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{2W_2}{M} \left( P^\mu - \frac{P.q}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{P.q}{q^2} q^\nu \right)} \quad (6.2.7)$$

qui est la forme la plus générale pour l'amplitude  $W^{\mu\nu}$  qui (i) respecte la parité et (ii) l'invariance de jauge de QED. On a les relations suivantes entre les fonctions  $V_i$  et  $W_j$  :

$$W_1 = -\frac{V_1}{2M}, \quad W_2 = \frac{M}{2} V_2, \quad V_3 = -\frac{P.q}{q^2} V_2, \quad V_5 = \frac{(P.q)^2}{q^4} V_2 - \frac{V_1}{q^2}. \quad (6.2.8)$$

Les fonctions de structure  $W_1, W_2$  dépendent des scalaires  $Q^2, 2P.q, P^2 = M^2$  mais on choisit plutôt comme arguments  $x = Q^2/2P.q, Q^2, M^2$  et on écrit donc  $W_1(x, Q^2, M^2), W_2(x, Q^2, M^2)$ . On note que chacun des deux tenseurs composant  $W^{\mu\nu}$  satisfait à la condition  $q_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Contractant avec le tenseur leptonique on obtient :

$$\frac{e^4}{(Q^2)^2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{e^4}{(Q^2)^2} 2M \left[ 2W_1 Q^2 + W_2 \left( \frac{4(P.k)(P.k')}{M^2} - Q^2 \right) \right], \quad (6.2.9)$$

avec  $k.q = -k'.q = -k.k' = q^2/2 = -Q^2/2$ . Dans le repère du laboratoire, on a donc ( $2P.k = 2M\omega, 2P.k' = 2M\omega'$ ) :

$$\frac{e^4}{(Q^2)^2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 8M\omega\omega' \frac{e^4}{(Q^2)^2} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.2.10)$$

Reportant cette expression dans la section efficace lepton-proton éq. (6.2.2) on obtient :

$$\sigma = 2e^4 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2 2\omega'} \frac{\omega'}{(Q^2)^2} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (6.2.11)$$

d'où, avec  $|\vec{k}'| = \omega'$  et  $d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\cos\theta d\varphi \rightarrow 2\pi\omega'^2 d\omega' d\cos\theta$  ( $|\mathcal{M}|^2$  ne dépend pas de  $\varphi$ ), on obtient la section efficace différentielle dans le repère du laboratoire :

$$\frac{d\sigma}{d\omega' d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 2W_1(x, Q^2, M^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(x, Q^2, M^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

En utilisant  $dQ^2 d\nu = 2\omega\omega' d\omega' d\cos\theta$ , on peut écrire la section efficace différentielle comme

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \frac{\omega - \nu}{\omega} \left( 2W_1(x, Q^2, M^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(x, Q^2, M^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

**Remarques :**

- La dynamique de l'interaction  $\gamma^* N$  est entièrement contenue dans les fonctions  $W_1, W_2$ .
- La section efficace décroît quand  $\omega$  ou  $\theta$  augmente, ou de façon équivalente, quand  $Q, \nu$  augmente. Puisque la section efficace à mesurer est très petite il faudra des faisceaux de leptons à très haute luminosité pour obtenir des données à grands  $\omega, \theta \Leftrightarrow$  grands  $Q^2, \nu$ .
- à énergie initiale  $\omega$  fixée, en jouant sur  $\omega', \theta$  on fait varier  $x$  et  $Q^2$  et on peut extraire  $W_1(x, Q^2, M^2), W_2(x, Q^2, M^2)$  expérimentalement.
- les fonctions  $W_1, W_2$  ont la dimension de l'inverse d'une masse, en  $\text{GeV}^{-1}$  par exemple, puisque, si le symbole [...] dénote la dimension en unité de masse d'une quantité on a

$$\left[ \frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} \right] = \left[ \frac{1}{M^5} \right] = \left[ \frac{W_1}{M^4} \right] = \left[ \frac{W_2}{M^4} \right].$$

$MW_1, MW_2, \nu W_1, \nu W_2$  sont alors sans dimension. Ne considérant que les fonctions  $MW_1$  et  $\nu W_2$ , qui joueront un rôle plus bas, on peut les exprimer comme fonctions de variables sans dimension et on est en droit d'écrire

$$MW_1 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right) = \mathcal{F}_1 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right), \quad \nu W_2 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right) = \mathcal{F}_2 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right).$$

où  $MW_1$  et  $\nu W_2$  sont les notations historiques et  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  les notations modernes.

### 6.2.3 Résultats de l'expérience

L'expérience permet de mettre en évidence les deux faits importants suivants :

1.

$$\boxed{\nu W_2 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right) \equiv \nu W_2(x)} \quad (6.2.12)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dépendance explicite en  $Q^2$ , à l'intérieur des barres d'erreurs expérimentales (voir Fig. 6.1). C'est la propriété d'*invariance d'échelle*. On a même une invariance d'échelle précoce puisque cette propriété est vérifiée pour des valeurs de  $Q$  aussi petite que la masse du proton ( $\sim 1 \text{ GeV}$ ). Si on avait fait un modèle prenant en compte le rayon  $R$  du proton on aurait eu une dépendance du type  $\exp(-R^2 Q^2)$  qui n'est pas observée. Tout se passe donc comme si le photon virtuel était insensible à la taille du proton, en d'autres termes le photon virtuel qui a un pouvoir de résolution meilleur que  $10^{-1}$  fermi se couple à un constituant du proton, sans structure, sans dimension, plutôt qu'au proton.



2. La relation

$$\boxed{2MW_1(x) \equiv \frac{\nu W_2(x)}{x} = \frac{P.q W_2(x)}{Mx}} \quad (6.2.13)$$

est satisfaite expérimentalement (relation de Callan-Gross). Le dernière expression est simplement la forme invariante de  $\nu W_2(x)/x$ .

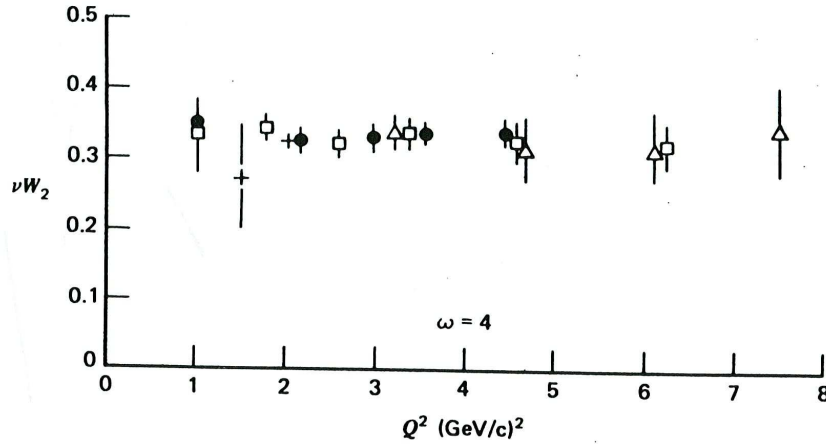


Figure 2.1: Résultats expérimentaux de SLAC montrant l'invariance d'échelle de la fonction  $\nu W_2$ .

FIGURE 6.1 – Résultats expérimentaux de SLAC en 1968, montrant l'invariance d'échelle de la fonction  $\nu W_2$  à la valeur de  $x = 1/\omega = 0,25$ .

Avant de montrer comment ces deux propriétés se comprennent dans le modèle des partons de spin  $\frac{1}{2}$ , il est utile d'étudier la section différentielle sous forme invariante de Lorentz ( $\Rightarrow$  dans un repère général). D'après (6.2.9) et (6.2.2), la section efficace s'écrit

$$\sigma = \frac{1}{4P.k} \frac{e^4}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} \frac{2M}{(Q^2)^2} \left( 2W_1 Q^2 + W_2 \left( \frac{4(k.P)(k'.P)}{M^2} - Q^2 \right) \right).$$

Introduisons les "variables de Mandelstam"  $s$ ,  $t$ ,  $u$  de la diffusion électron-proton,

$$\begin{aligned} (P+k)^2 &= s & 2k.P &= s - M^2 & 2k.q &= -Q^2 \\ (k-k')^2 &= t = -Q^2 & & & & \\ (P-k')^2 &= u & 2k'.P &= M^2 - u & 2k'.q &= Q^2, \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

où l'on a systématiquement négligé la masse des leptons. Le coefficient de  $W_2$  devient

$$- \left( \frac{(s - M^2)(u - M^2)}{M^2} + Q^2 \right)$$

et, en utilisant la relation  $s + t + u = M_X^2 + M^2$ ,  $\Rightarrow s + u = Q^2/x + M^2 \sim Q^2/x$  quand  $Q^2 \rightarrow \infty$ , on trouve :

$$\boxed{\frac{\omega' d\sigma}{d^3k'} = \frac{\alpha^2}{s} \frac{2}{(Q^2)^2} \left\{ Q^2 (2MW_1 - \frac{W_2 P.q}{M}) + \frac{W_2}{2M} (s^2 + u^2) \right\}.} \quad (6.2.15)$$

On remarque que le coefficient du terme en  $Q^2$  dans l'expression entre accolades n'est autre que la formulation sous forme invariante de  $2MW_1 - \nu W_2/x$  en terme des variables du laboratoire, qui est nul par l'expérience. On obtient donc

$$\boxed{\frac{\omega' d\sigma^{\text{exp}}}{d^3k'} = \frac{\alpha^2}{s} \frac{(s^2 + u^2)}{(Q^2)^2} \frac{W_2}{M}} \quad (6.2.16)$$

qui est l'expression sous forme invariante de la section efficace  $e^-N \rightarrow e^-X$  ou  $\mu^\pm N \rightarrow \mu^\pm X$  en tenant compte de la contrainte expérimentale (6.2.13).

**Note :** La forme invariante est nécessaire car le modèle des partons n'est pas formulé dans le repère du laboratoire mais dans le repère où  $P^0 = E_{\text{nucléon}} \rightarrow \infty$ .

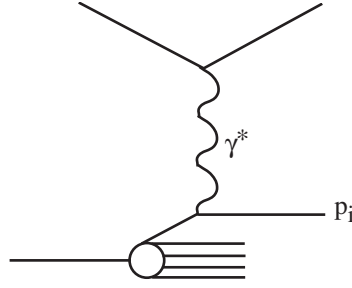
### 6.3 Le modèle des partons dans l'inélastique profond

Feynman a proposé de considérer le proton (ou le nucléon) comme composé de partons, qui sont des objets sans structure (ponctuels) dont les nombres quantiques sont a priori inconnus (spin, charge ...), mais qui doivent cependant former un objet de spin, charge, ... connus. On va donc supposer le proton composé de partons de type  $i$  portant chacun une impulsion  $p_i$  :

$$p_i = y_i P$$

avec  $\sum_i y_i = 1$  et  $P = (E, 0, 0, E) =$  impulsion du proton. Toute l'impulsion du proton est portée par les partons. On se place dans un repère où les composantes de  $P \rightarrow \infty$  et on négligera éventuellement les masses du proton et des partons.

Le postulat de base consiste à décrire l'interaction  $\gamma^*$ -hadron en termes d'interaction  $\gamma^*$ -parton puisque le photon très virtuel a un pouvoir de résolution très élevé et qu'il peut donc "voir" les constituants du proton. Ceci est symbolisé par le diagramme suivant où le photon virtuel est absorbé par le parton d'impulsion  $p_i$



On peut faire le raisonnement très, très, très intuitif (*à la russe*) suivant pour comparer la durée de l'interaction électromagnétique avec celle caractéristique de l'interaction qui lie les partons entre eux dans le proton :

- Le "temps de vie du photon virtuel" dans le repère d'énergie nulle est  $1/\sqrt{Q^2}$  et dans le repère du centre de masse photon-proton il peut être estimé à  $(q_0/\sqrt{Q^2})$  est le facteur de "boost" du repère du photon d'énergie nulle à celui du centre de masse) :

$$\Delta\tau_{\text{em}} \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \frac{q_0}{\sqrt{Q^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}},$$

où on a négligé un facteur multiplicatif fonction de  $x$  d'ordre 1.  $\Delta\tau_{\text{em}}$  peut être considéré comme le temps que dure l'interaction électromagnétique dans le repère du centre de masse  $\gamma^*$ -proton et  $\Delta\tau_{\text{em}} \rightarrow 0$ , quand  $\sqrt{Q^2} \rightarrow \infty$  ;

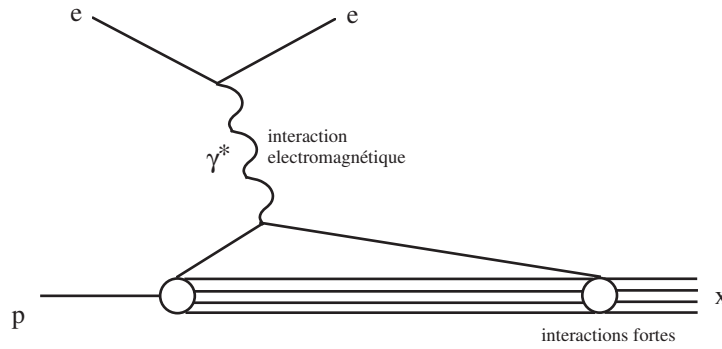
- Le temps caractéristique de l'interaction forte qui confine les partons dans le proton dans le repère au repos du proton est  $1/M$  ( $M$ , masse du proton est la seule échelle de masse-énergie !); dans le repère  $\gamma^*$ -proton, c'est donc :

$$\Delta\tau_{\text{int. forte}} \sim \frac{1}{M} \frac{E}{M} \sim \frac{\sqrt{Q^2}}{M^2}$$

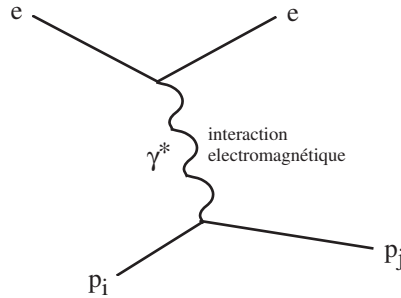
Si on compare les temps caractéristiques, on a :

$$\Delta\tau_{\text{em}} \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \ll \Delta\tau_{\text{int. forte}} \sim \frac{\sqrt{Q^2}}{M^2}.$$

On peut donc supposer que pendant le temps  $\Delta\tau_{\text{em}}$  que dure l'interaction  $\gamma^* p_i$ , on va pouvoir négliger l'interaction hadronique qui prend place sur une échelle de temps beaucoup plus grande : les partons apparaissent libres et indépendants. Bien après l'interaction électromagnétique, les partons se recombinent pour donner des hadrons avec une probabilité unité puisque l'on n'observe que des hadrons dans le système  $X$  comme indiqué par le diagramme suivant :



Les interactions fortes de confinement n'affectent pas l'interaction du  $\gamma^*$  avec le parton. Il suffira donc de calculer



et d'ajouter ensuite de façon incohérente les sections efficaces invariantes  $ep_i$  pour reconstituer la section efficace électron-proton.

### 6.3.1 Section efficace électron-parton

On va décomposer l'amplitude invariante de la manière suivante (cf. éq. 6.2.2) :

$$|\mathcal{M}|_{ep_i}^2 = \frac{e_i^2 e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} \underbrace{\widehat{W}_{\mu\nu}}_{\text{interact. } \gamma^* \text{-parton}} .$$

où  $e_i$  est la charge du parton mesurée par rapport à celle du proton  $e$ . La charge de l'électron est prise égale à  $-e$ . On suppose pour le moment que les partons ont un spin  $\frac{1}{2}$  (certains partons doivent avoir un spin  $\frac{1}{2}$ , puisque le proton a  $S = \frac{1}{2}$ ). On suppose que l'interaction photon-parton est de la forme  $e_i e \gamma_\mu$  ce qui conduit à poser par analogie avec QED (éq. 6.2.4),

$$\widehat{W}_{\mu\nu} = 2(p_{i\mu} p'_{i\nu} + p_{i\nu} p'_{i\mu} - p_i \cdot p'_i g_{\mu\nu}),$$

où l'impulsion du parton final est  $p'_i = p_i + q$ . Pour des partons de masse nulle on a alors,

$$|\mathcal{M}|_{ep_i}^2 = 8 \frac{e^4 e_i^2}{Q^4} ((p_i \cdot k)^2 + (p_i \cdot k')^2) = 2 \frac{e^4 e_i^2}{Q^4} (s^2 + u^2),$$

avec les invariants partoniques  $\hat{s} = (p_i + k)^2$  et  $\hat{u} = (p_i - k')^2$ . La section efficace sera donc :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} \frac{d^3p'_i}{2p'_i} \delta^{(4)}(k + p_i - k' - p'_i) | \mathcal{M} |_{ep_i}^2 \quad (6.3.17)$$

$$= 2 \frac{\alpha^2 e_i^2}{Q^4} \int \frac{d^3k'}{\omega'} \delta(2p_i \cdot q - Q^2) \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}}. \quad (6.3.18)$$

Au niveau partonique, la section efficace différentielle invariante aura donc la forme :

$$\frac{\omega' d\hat{\sigma}}{d^3k'} = 2 \frac{\alpha^2 e_i^2}{Q^4} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}} \delta(2p_i \cdot q - Q^2). \quad (6.3.19)$$

### 6.3.2 Section efficace électron-proton

Pour obtenir la section efficace hadronique, on va sommer de façon incohérente les diverses contributions partoniques et calculer :

$$\boxed{\frac{\omega' d\sigma}{d^3k'} = \sum_i \int_0^1 dy F_i(y) \left. \frac{\omega' d\hat{\sigma}}{d^3k'} \right|_{p_i=yP}}, \quad (6.3.20)$$

où on exprime les invariants hadroniques en fonction des invariants partoniques et la fraction  $y$  d'impulsion du quark dans le proton initial :  $\hat{s} = ys$  et  $\hat{u} = yu$ ,  $2p_i \cdot q = y2P \cdot q$ . Les  $F_i(y)$  sont les probabilités de trouver dans le proton un parton de type  $i$  portant la fraction d'impulsion  $y$  du proton. Dans notre modèle la section hadronique vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{\omega' d\sigma}{d^3k'} &= 2 \frac{\alpha^2}{Q^4} \sum_i e_i^2 \int_0^1 \frac{dy}{y} F_i(y) y^2 \frac{s^2 + u^2}{s} \delta(2yP \cdot q - Q^2) \\ &= 2 \underbrace{\frac{\alpha^2 s^2 + u^2}{s Q^4}}_{\text{indep. } y_i} \sum_i e_i^2 \int_0^1 dy F_i(y) y \delta(2yP \cdot q - Q^2) \\ &= \frac{\alpha^2 s^2 + u^2}{s Q^4} \sum_i e_i^2 \frac{x}{P \cdot q} F_i(x) \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

avec  $y = Q^2/2Pq = x$ . Si on compare avec la formule de la section efficace différentielle invariante électron-proton (6.2.16), on peut identifier :

$$\frac{W_2}{M}(x, \frac{M^2}{Q^2}) = \sum_i e_i^2 \frac{x}{P \cdot q} F_i(x) \quad (6.3.22)$$

qui est équivalent à (dans les variables du laboratoire  $P \cdot q = M\nu$  :

$$\boxed{\frac{1}{x} \nu W_2(x, \frac{M^2}{Q^2}) = \sum_i e_i^2 F_i(x)} \quad (6.3.23)$$

et, comme il n'y a pas de termes en  $Q^2$  dans  $\frac{\omega' d\sigma}{d^3k'}$  (voir éq. (6.2.15)), on retrouve aussi

$$\boxed{2MW_1(x, \frac{M^2}{Q^2}) = \frac{1}{x} \nu W_2(x).} \quad (6.3.24)$$

**Remarques :**

- On voit donc que le modèle des partons reproduit bien l'invariance d'échelle, c'est-à-dire  $W_2(x, M^2/Q^2) = W_2(x)$ ;
- La variable  $x = Q^2/2P \cdot q$  prend un sens physique : c'est l'impulsion normalisée du parton, dans le proton, qui a subi l'interaction électromagnétique ;
- $\nu W_2/x$  est la somme, pondérée par le carré de la charge  $e_i^2$ , des probabilités de trouver un parton de type  $i$ , ayant absorbé le photon, à un  $x$  donné.
- La relation  $2MW_1(x) = \nu W_2(x)/x$  est une conséquence directe du spin  $\frac{1}{2}$  des partons et elle montre que, dans le modèle des partons naïf, les seuls partons chargés dans le proton sont de spin  $\frac{1}{2}$ .

Exercice : Montrer que pour des partons de spin 0 (couplage au  $\gamma$  donné par  $e_i(p_i + p'_i)$ ) on a  $W_1 \equiv 0$ .

### 6.3.3 Identification partons $\equiv$ quarks + ...

Il est tentant d'identifier les partons de Feynman aux quarks de Gell-Mann et Zweig et de supposer que le proton et le neutron, dans les expériences d'inélastique profond s'expriment comme dans le modèle des quarks par :

$$\begin{aligned} \text{proton} &= (uud) \\ \text{neutron} &= (udd). \end{aligned}$$

Ce sont les quarks de valence et on dénote  $u_v(x)$  et  $d_v(x)$  la distribution de ces quarks  $u$  et  $d$  dans le proton. Avec le choix standard des charges,  $e_u = 2/3$  et  $e_d = -1/3$ , on voit que le proton et le neutron portent bien la charge 1 et 0 respectivement. Les nombres quantiques du nucléon (charge, spin) sont portés par les quarks de valence. Par la symétrie d'isospin on a les relations entre les densités partoniques du proton ( $p$ ) et du neutron ( $n$ ) :

$$\begin{aligned} F_u^p(x) &= F_d^n(x) = u_v(x) \\ F_d^p(x) &= F_u^n(x) = d_v(x) \end{aligned}$$

L'expérience montrent que proton et neutron sont plus complexes que le modèle à 3 quarks ci-dessus et qu'ils contiennent également des antiquarks. Ce sont les quarks de la mer, ou "quarks matelots", dont la distribution est  $u_m(x) = \bar{u}_m(x)$ ,  $d_m(x) = \bar{d}_m(x)$ . La somme des nombres quantiques portés par les quarks de la mer est nulle ce qui explique les égalités précédentes. On définit :

$$\begin{aligned} u(x) &= u_v(x) + u_m(x) \\ d(x) &= d_v(x) + d_m(x). \end{aligned}$$

En négligeant le rôle des quarks étranges, charmés, "bottom", on peut écrire suivant le modèle des partons (voir éq. (6.3.23)) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\nu W_2^{ep} &= \frac{4}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) \\ \frac{1}{x}\nu W_2^{en} &= \frac{1}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{4}{9}(d(x) + \bar{d}(x)).\end{aligned}\quad (6.3.25)$$

où on utilise la notation simplifiée :  $u_m = \bar{u}_m = \bar{u}$ ,  $d_m = \bar{d}_m = \bar{d}$ . D'autre part, il est possible de mesurer expérimentalement par la diffusion inélastique sur une cible (isoscalaire) de deutérium  $= p + n$  :

$$\frac{1}{x}\nu W_2^{ep+en} = \frac{5}{9}(u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x))$$

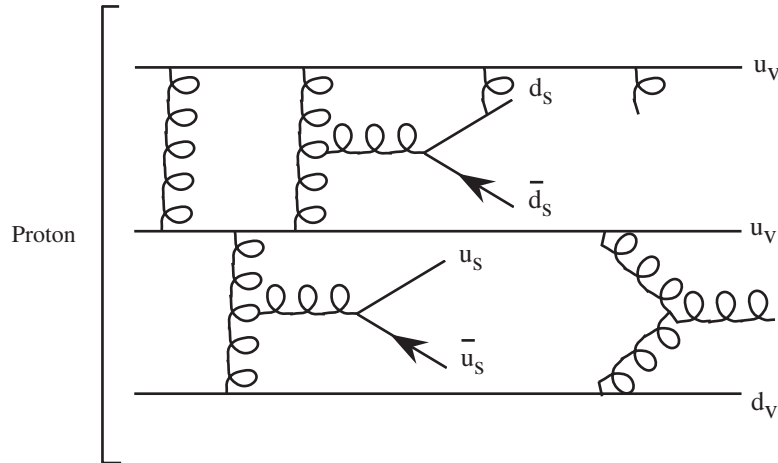
et ainsi calculer l'intégrale :

$$\frac{9}{5} \int_0^1 dx \nu W_2^{ep+en} = \int_0^1 dx x (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x))$$

qui mesure l'impulsion totale, normalisée à celle du proton, portée par les quarks  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  et  $\bar{d}$  dans le nucléon. Si le proton et le neutron étaient formés seulement de quarks et d'antiquarks alors le membre de droite devrait être égal à 1. Mais le résultat de cette expérience est :

$$\langle x \rangle_{q+\bar{q}} \simeq 0.45 \neq 1. \quad (6.3.26)$$

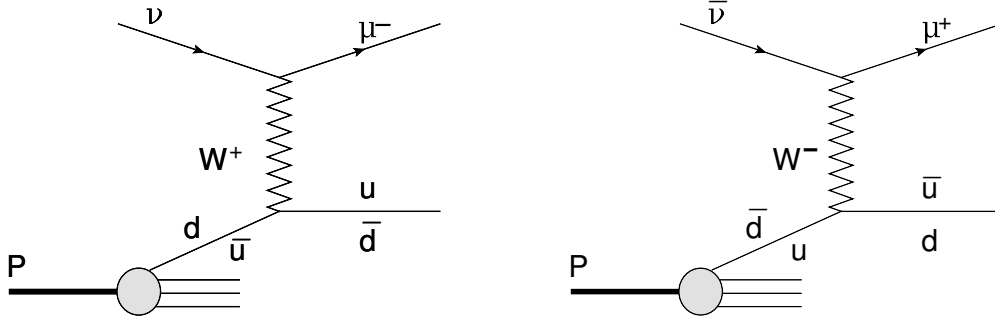
ce qui signifie que les quarks portent à peine la moitié de l'impulsion du nucléon, le reste étant porté par des partons neutres : il est tentant, alors, d'identifier ces partons neutres aux "gluons" qui lient les quarks entre eux dans le nucléon. On peut alors proposer l'image suivante pour le proton :



Les quarks sont liés entre eux par une force portée par les gluons en QCD qui mènent à la création de paires virtuelles  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$  ( $s\bar{s}$ ,  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ ) comme schématisé ci-dessus. On ne sait pas calculer perturbativement de telles interactions dans le proton.

## 6.4 Diffusion neutrino-nucléon et modèle des partons

En complément à cette succincte introduction au modèle des partons naïf, on peut noter que la diffusion  $\nu$ -nucléon est susceptible d'une description similaire à celle de  $e$ -nucléon à condition de remplacer l'échange d'un photon virtuel par l'échange d'un boson de jauge  $W^\pm$  ou  $Z$  virtuel suivant que l'on étudie les courants chargé ou neutre. Le cas des diffusions  $\nu_\mu$ -nucléon  $\rightarrow \mu^-$ -nucléon ou  $\bar{\nu}_\mu$ -nucléon  $\rightarrow \mu^+$ -nucléon peuvent s'écrire particulièrement simplement<sup>12</sup>. Dans le premier cas, au vertex leptonique, un  $W^+$  virtuel est émis qui, dans le cas du modèle des partons, ne peut interagir avec le proton que par  $W^+ + d \rightarrow u$  et  $W^+ + \bar{u} \rightarrow \bar{d}$ , tandis que dans le deuxième cas on a, au contraire  $W^- + u \rightarrow d$  et  $W^- + \bar{d} \rightarrow \bar{u}$  comme représenté sur la figure ci-dessous :



On s'attend alors, de manière similaire à la diffusion  $e^-$ -proton, à avoir les relations de type (cf. éq. (6.3.25)) :

$$\frac{\nu}{x} W_2^{\nu p}(x) \sim d(x) + \bar{u}(x) \quad \text{et} \quad \frac{\bar{\nu}}{x} W_2^{\bar{\nu} p}(x) \sim u(x) + \bar{d}(x). \quad (6.4.27)$$

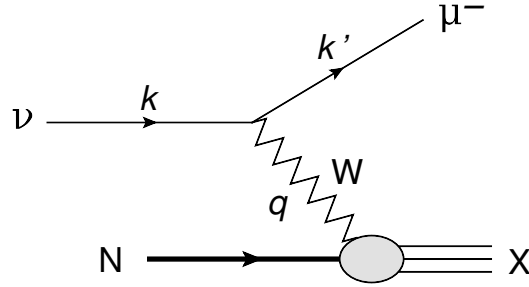
### 6.4.1 Diffusion neutrino-nucléon : courant chargé

Il existe plusieurs ensembles de données sur la diffusion  $\nu$  ou  $\bar{\nu}$  sur nucléon ou noyaux<sup>13</sup>. Ils couvrent cependant un domaine en  $Q^2$  relativement restreint, typiquement  $Q^2 < 200 \text{ GeV}^2$ , comparé à la diffusion  $e^\pm$ - $N$  où on atteint des valeurs de  $Q^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ GeV}^2$  à HERA. D'autre part, du fait de la non-conservation de la parité par l'interaction faible, la structure de la diffusion  $\nu$  ou  $\bar{\nu}$  avec production d'un lepton chargé, est différente de celle de  $e^-$ - $N$ . Suivant l'approche des sections précédentes on va d'abord dériver la forme générale de la section efficace  $\nu$ - $N$  et en ensuite celle dans le modèle des partons. La structure de l'amplitude de diffusion est donné par le diagramme

12. Les neutrinos sont produits par désintégration des pions chargés (aussi des kaons) et la désintégration du pion en muon ( $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ,  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ) est  $\sim 10^4$  plus importante qu'en électron ( $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ ,  $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ ).

13. Collaboration CDHSW, P. Berge *et al.*, Zeit. Phys. **C49** (1991) 187;  
 Collaboration E665, M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**(1996) 3006;  
 Collaboration Chorus, G. Onengut *et al.*, Phys. Lett. **B632** (2006) 65;  
 Collaboration NuTeV, M. Tzanov *et al.*, Phys. Rev. **D74**(2006) 012008.





où on reconnaît le vertex leptonique, le propagateur du boson  $W$  et l'interaction inconnue  $W$ -nucléon. Le vertex leptonique est :

$$-ig_W \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) = \begin{array}{c} \mu^- \\ \swarrow \\ k' \\ \searrow \\ \nu \\ \swarrow \\ k \end{array} \begin{array}{c} W \\ \alpha \end{array}$$

où on a introduit le couplage  $g_W$  du boson  $W$  dont on spécifiera la forme plus bas. Le propagateur du boson de jauge est :

$$-i \frac{g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta / M_W^2}{q^2 - M_W^2 + i\Gamma_W M_W}. \quad (6.4.28)$$

Contracté avec le vertex leptonique on voit que les termes proportionnels à  $q^\alpha q^\beta / M_W^2$  ne contribuent pas si on néglige la masse des leptons. Comme pour la diffusion  $e^-N$  on écrit, sous forme factorisée, le carré de l'amplitude de diffusion intégré sur tout l'espace de phase du système hadronique  $X$ , voir éq. (6.2.2) :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 P_X}{(2\pi)^3} \overline{\sum}_{spin} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - P_X) &= \frac{2\pi g_W^4}{(Q^2 + M_W^2)^2 + \Gamma_W^2 M_W^2} L_\nu^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^\nu \\ &= \frac{2\pi g_W^4}{M_W^4} L_\nu^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^\nu \end{aligned} \quad (6.4.29)$$

où on a substitué le couplage et le propagateur du  $W$  à celui du photon. La deuxième ligne est la forme appropriée pour les expériences actuelles où  $Q^2 \ll M_W^2$  (on a aussi  $\Gamma_W^2 \ll M_W^2$ ). Le tenseur leptonique est construit à partir du vertex et on trouve :

$$\begin{aligned} L_\nu^{\alpha\beta} &= \text{Tr}[\bar{u}(k') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u(k) \bar{u}(k) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta u(k')] \\ &= 8(k'^\alpha k^\beta + k'^\beta k^\alpha - g^{\alpha\beta} k \cdot k' - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} k'_\mu k_\nu) \end{aligned} \quad (6.4.30)$$

où on a introduit le tenseur totalement antisymétrique  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  tel que  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ . On peut voir facilement que pour la diffusion initiée par un  $\bar{\nu}$  le signe du dernier terme est modifié (cela revient à permuter  $k$  et  $k'$ ) de sorte qu'on peut écrire en toute généralité :

$$L_{\nu/\bar{\nu}}^{\alpha\beta} = 8(k'^\alpha k^\beta + k'^\beta k^\alpha - g^{\alpha\beta} k \cdot k' - i\varepsilon_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} k'_\mu k_\nu) \quad (6.4.31)$$

avec  $\varepsilon_\nu = +1$  pour la transition  $\nu \rightarrow \mu^-$  et  $\varepsilon_\nu = -1$  pour la transition  $\bar{\nu} \rightarrow \mu^+$ . Quant au tenseur hadronique la forme la plus générale est donnée par l'éq. (6.2.5) mais, après contraction avec  $L_\nu^{\alpha\beta}$ ,

seuls survivent trois termes que l'on écrit ( $M$  la masse du nucléon) :

$$W_{\alpha\beta}^{\nu} = -2MW_1g_{\alpha\beta} + \frac{2W_2}{M}P_{\alpha}P_{\beta} + i\frac{W_3}{M}\epsilon_{\rho\alpha\sigma\beta}P^{\rho}q^{\sigma}. \quad (6.4.32)$$

On note la différence d'avec l'éq. (6.2.7) et on a ici une troisième fonction de structure associée au tenseur antisymétrique, conséquence de la violation de parité induite par le couplage  $\gamma_{\alpha}\gamma_5$ . Contractant les deux tenseurs on trouve :

$$\frac{g_w^4}{M_w^4}L_{\nu}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^{\nu} = 8M\frac{g_w^4}{M_w^4}\left[2W_1Q^2 + W_2\left(\frac{4(k.P)(k'.P)}{M^2} - Q^2\right) + W_3\frac{Q^2}{M^2}(k+k').P\right], \quad (6.4.33)$$

le dernier terme issu de la contraction  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\mu}^{\sigma})$ . Dans le Modèle Standard, le couplage faible est proportionnel à la charge électrique :

$$g_w = \frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_w} \quad (6.4.34)$$

avec  $\theta_w$ , l'angle de mélange faible (souvent appelé angle de Weinberg bien qu'introduit par Glashow). Puisque seul le rapport  $g_w/M_w$  intervient dans les expressions il est usuel d'introduire la constante de Fermi définie par :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8\sin^2\theta_w M_w^2} \quad (6.4.35)$$

de sorte que l'on a finalement :

$$\frac{g_w^4}{M_w^4} = \frac{G_F^2}{2}. \quad (6.4.36)$$

La section efficace  $\nu$ -nucléon est alors donnée par (voir éq. (6.2.2)) :

$$\sigma^{\nu} = \frac{1}{4Pk} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} 8\pi M G_F^2 L_{\nu}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^{\nu} \quad (6.4.37)$$

A partir de ces résultats on obtient facilement la section efficace différentielle exprimée en fonction des invariants éqs. (6.2.14), dans l'approximation  $M^2 \ll Q^2$  :

$$\boxed{\frac{\omega' d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{d^3k'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{G_F^2}{s} \left( Q^2(2MW_1 - \frac{W_2}{M} \frac{P.q}{x}) + \frac{W_2}{2M}(s^2 + u^2) + \epsilon_{\nu} x \frac{W_3}{2M}(s^2 - u^2) \right)}. \quad (6.4.38)$$

On remarque que les deux premiers termes sont identiques à ceux de l'éq. (6.2.15) de la section efficace de la diffusion  $e^-$ -nucléon, ce qui se comprend aisément du fait que ces termes ne dépendent que de la partie vectorielle du couplage du boson de jauge  $W$ . Il est traditionnel de présenter cette section efficace sous plusieurs formes selon le choix fait pour les variables cinématiques. Se reportant à la section 6.2.1 pour la définition de ces variables on trouve :

**Variables  $\omega', \theta$  :**

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{d\omega' d\theta} = \frac{G_F^2}{\pi} \omega'^2 \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \epsilon_{\nu} W_3 \frac{\omega + \omega'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.4.39)$$

**Variables**  $Q^2, \nu$  :

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dQ^2 d\nu} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{1}{4\omega^2} \left( 2W_1 Q^2 + W_2(4\omega(\omega - \nu) - Q^2) + \epsilon_\nu W_3 \frac{2\omega - \nu}{M} Q^2 \right) \quad (6.4.40)$$

**Variables**  $x, y$  :

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G_F^2}{\pi} M\omega \left( \mathcal{F}_1 xy^2 + \mathcal{F}_2(1 - y) + \epsilon_\nu \mathcal{F}_3 xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) \quad (6.4.41)$$

avec les définitions :

$$\mathcal{F}_1 = MW_1, \quad \mathcal{F}_2 = \nu W_2, \quad \mathcal{F}_3 = \nu W_3. \quad (6.4.42)$$

Dans cette dernière formulation on a négligé  $Q^2 = 2M\nu x$  devant l'expression  $4\omega(\omega - \nu)$ .

### 6.4.2 Modèle des partons

Dans le modèle des partons on suppose que le couplage du boson de jauge  $W$  aux quarks et antiquarks est universel, identique au couplage leptonique :

$$-ig_W \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) = \begin{array}{c} \rho'_i \text{---} d \\ \diagdown \\ \alpha \\ \diagup \\ \rho_i \text{---} u \end{array} \text{---} W^+ \quad \begin{array}{c} \rho'_i \text{---} u \\ \diagdown \\ \alpha \\ \diagup \\ \rho_i \text{---} d \end{array} \text{---} W^-$$

de sorte que le tenseur partonique par analogie avec l'éq. (6.4.31) s'écrit :

$$\widehat{W}_{\alpha\beta}^{q/\bar{q}} = 8(p'_{i\alpha} p_{i\beta} + p'_{i\beta} p_{i\alpha} - g_{\alpha\beta} p_i \cdot p'_i - i\varepsilon_i \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} p'_{i\mu} p_{i\nu}) \quad (6.4.43)$$

avec  $\varepsilon_i = \pm$  selon que l'on a une diffusion sur un quark ou un antiquark. L'élément de matrice de la diffusion  $\nu(k) + quark(p_i) \rightarrow \mu^-(k') + quark(p'_i)$  est :

$$\mathcal{M} = (-ig_W)^2 \bar{u}(k') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u(k) \frac{i}{M_W^2} \bar{u}(p'_i) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u(p_i), \quad (6.4.44)$$

où on a simplifié le propagateur du boson de jauge sous l'hypothèse réaliste  $Q^2 \ll M_W^2$ . Son carré s'écrit, après somme et moyenne sur les spins :

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \frac{g_W^4}{M_W^4} \text{Tr}[\gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \not{k}'] \text{Tr}[\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{p}_i (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \not{p}'_i].$$

L'évaluation des traces conduit à :

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_W^4}{M_W^4} \left\{ \text{Tr}[\not{k}' \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta] \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\alpha \not{p} \gamma^\beta] + \varepsilon_\nu \varepsilon_i \text{Tr}[\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta \not{k}' \gamma_5] \text{Tr}[\gamma^\alpha \not{p}_i \gamma^\beta \not{p}'_i \gamma_5] \right\} \\ &= 8 \frac{g_W^4}{M_W^4} \left\{ \hat{s}^2 + \hat{u}^2 + \varepsilon_\nu \varepsilon_i (\hat{s}^2 - \hat{u}^2) \right\}, \end{aligned} \quad (6.4.45)$$

avec les notations  $\hat{s} = 2p_i \cdot k = 2p'_i \cdot k'$ ,  $u = -2p'_i \cdot k = -2p_i \cdot k'$ . On a aussi écrit le cas général pour la diffusion  $\nu$  ( $\varepsilon_\nu = 1$ ) ou  $\bar{\nu}$  ( $\varepsilon_\nu = -1$ ) sur un quark ( $\varepsilon_i = 1$ ) ou un antiquark ( $\varepsilon_i = -1$ ). On calcule la section efficace partonique comme en éq. (6.3.17) ce qui permet de dériver la section efficace différentielle :

$$\frac{\omega' d\hat{\sigma}^{\nu/\bar{\nu},i}}{d^3k'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{G_F^2}{\hat{s}} \{ \hat{s}^2 + \hat{u}^2 + \varepsilon_\nu \varepsilon_i (\hat{s}^2 - \hat{u}^2) \} \delta(2p_i \cdot q - Q^2). \quad (6.4.46)$$

Quant à la section efficace hadronique elle est obtenue via l'éq. (6.3.20) qui permet d'écrire :

$$\frac{\omega' d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{d^3k'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{G_F^2}{s} \sum_{i=q,\bar{q}} \int dz F_i(z) z \{ s^2 + u^2 + \varepsilon_\nu \varepsilon_i (s^2 - u^2) \} \delta(2zP \cdot q - Q^2), \quad (6.4.47)$$

où on a utilisé  $\hat{s} = zs$ ,  $\hat{u} = zu$ ,  $2p_i \cdot q = z2P \cdot q$ . On trouve alors finalement :

$$\boxed{\frac{\omega' d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{d^3k'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{G_F^2}{s} \frac{x}{2P \cdot q} \sum_{i=q,\bar{q}} F_i(x) \{ s^2 + u^2 + \varepsilon_\nu \varepsilon_i (s^2 - u^2) \}}, \quad (6.4.48)$$

où  $z = x = Q^2/2P \cdot q$  est comme d'habitude la variable de Bjorken. La comparaison avec l'éq. (6.4.38) permet d'obtenir l'expression des fonctions de structure  $W_i$  en fonction des distributions partoniques  $F_i(x)$  :

- absence de terme en  $Q^2$ , voir (éq. (6.2.15))  $\Rightarrow \boxed{2MW_1 = \nu W_2/x}$  : cette relation est identique à celle de la diffusion  $e^-$ -nucléon car elle repose sur la composante  $\gamma_\alpha$  du couplage du boson  $W$  ;

- coefficient du terme en  $s^2 + u^2 \Rightarrow \boxed{\nu W_2/x = \sum_{i=q,\bar{q}} F_i(x)}$  ;

- coefficient du terme en  $s^2 - u^2 \Rightarrow \boxed{\nu W_3 = \sum_{i=q,\bar{q}} \varepsilon_i F_i(x)}$ ,

où on rappelle que les  $F_i(x)$  sont les probabilités de trouver dans le proton un parton de type  $i$  portant la fraction d'impulsion  $x$  du nucléon.

Comme application, on considère les diffusion  $\nu$ -proton  $\rightarrow \mu^- X$  et  $\bar{\nu}$ -proton  $\rightarrow \mu^+ X$ . Des relations précédentes on tire :

$$\begin{aligned} \nu W_2^{\nu p} &= x(d(x) + \bar{u}(x)), & \nu W_3^{\nu p} &= d(x) - \bar{u}(x) \\ \nu W_2^{\bar{\nu} p} &= x(u(x) + \bar{d}(x)), & \nu W_3^{\bar{\nu} p} &= u(x) - \bar{d}(x). \end{aligned} \quad (6.4.49)$$

et la section différentielle exprimée en termes des invariants est d'après l'éq. (6.4.48) :

$$\begin{aligned} \frac{\omega' d\sigma^{\nu p}}{d^3k'} &= \frac{G_F^2}{(2\pi)^2} \frac{s x}{P \cdot q} [d(x) + \bar{u}(x)(1-y)^2] \\ \frac{\omega' d\sigma^{\bar{\nu} p}}{d^3k'} &= \frac{G_F^2}{(2\pi)^2} \frac{s x}{P \cdot q} [u(x)(1-y)^2 + \bar{d}(x)], \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

où on rappelle que  $u = -s(1 - y)$  avec  $y = P.q/P.k$  ou  $\nu/\omega$  dans le laboratoire. En fonction de l'énergie  $\omega'$  et l'angle de diffusion du lepton final dans le laboratoire on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\nu p}}{d\omega' d \cos \theta} &= \frac{G_F^2}{\pi} \frac{\omega' x}{\omega - \omega'} \frac{1}{\omega^2} [d(x)\omega^2 + \bar{u}(x)\omega'^2] \\ \frac{d\sigma^{\bar{\nu} p}}{d\omega' d \cos \theta} &= \frac{G_F^2}{\pi} \frac{\omega' x}{\omega - \omega'} \frac{1}{\omega^2} [u(x)\omega'^2 + \bar{d}(x)\omega^2].\end{aligned}\quad (6.4.51)$$

Il n'y a pas de dépendance explicite en l'angle  $\theta$  qui apparaît seulement via la variable  $x$ . Finalement en fonction des invariants sans dimension  $x$ ,  $y$  on a :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\nu p}}{dx dy} &= \frac{G_F^2}{\pi} s x [d(x) + \bar{u}(x)(1 - y)^2] \\ \frac{d\sigma^{\bar{\nu} p}}{dx dy} &= \frac{G_F^2}{\pi} s x [u(x)(1 - y)^2 + \bar{d}(x)].\end{aligned}\quad (6.4.52)$$

### 6.4.3 Discussion

On remarque, d'après les équations ci-dessus, que la diffusion d'un neutrino sur un quark/antiquark est similaire à celle d'un antineutrino sur un antiquark/quark, car associée à la même dépendance en  $y$ . Si on suppose que les partons matelots ont la même distribution  $\bar{u}(x) = \bar{d}(x) = u_m(x) = d_m(x)$  alors on voit que la fonction de structure  $W_3$  ne dépend que des quarks de valence avec d'après l'éq. (6.4.49) :

$$W_3^{\nu p} = d_v(x), \quad \nu W_3^{\bar{\nu} p} = u_v(x). \quad (6.4.53)$$

Les expériences neutrinos sont donc très importantes pour déconvoluer la dépendance en  $x$  d'un quark de valence de celle d'un quark de la mer de même saveur.

#### Exercice

Prouver dans un modèle à deux saveurs de quarks,  $u$  et  $d$ , que

$$\nu W_2^{\nu p}(x) = \nu W_2^{\bar{\nu} n}(x). \quad (6.4.54)$$

Cette relation est-elle valable dans un modèle à quatre saveurs  $u$ ,  $d$ ,  $s$  et  $c$  ?

### 6.4.4 Règles de somme

A l'aide des relations (6.4.49) et de celles en éqs. (6.3.25) on peut alors reconstruire, en combinant les résultats de plusieurs expériences, les distributions des quarks et antiquarks dans le nucléon. L'interprétation des fonctions  $u(x)$ ,  $d(x)$  comme probabilités de trouver des quarks dans le nucléon permet d'écrire de nombreuses "règles de somme". Par exemple, la différence :

$$\frac{\nu}{x} W_2^{ep}(x) - \frac{\nu}{x} W_2^{en}(x) = \frac{\nu}{x} W_2^{ep-en}(x) = \frac{1}{3} (u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x)) = \frac{1}{3} (u_v(x) - d_v(x))$$

dont l'intégrale donne :

$$3 \int_0^1 \frac{dx}{x} \nu W_2^{ep-en}(x) = \int_0^1 dx (u_v(x) - d_v(x)) = 1$$

qui correspond bien à la différence du nombre de quarks de valence de type  $u$  et  $d$ .

Si l'on connaît  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  et  $\bar{d}$  indépendamment, on peut également vérifier les règles de somme de charge :

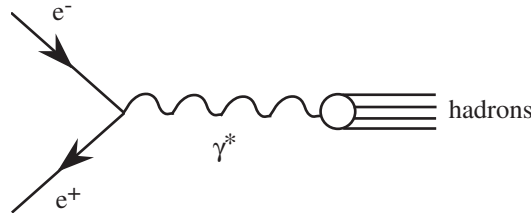
$$\int_0^1 dx \left[ \frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d}) \right] = 1 = \text{charge du proton}$$

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u}) \right] = 0 = \text{charge du neutron}$$

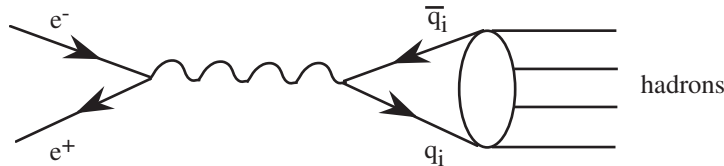
Ces règles de somme sont assez bien vérifiées expérimentalement.

## 6.5 Application du modèle des partons

On peut considérer le processus croisé de DIS, à savoir  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  :



Pour  $E_{e^+e^-} = \sqrt{Q^2} \rightarrow \infty$  on peut appliquer le modèle des partons : le photon virtuel de genre temps ( $Q^2 > 0$ ) se couplera à une paire quark-antiquark qui, "longtemps" après l'interaction électromagnétique, se désintègrera en hadrons :



La transition  $q_i \bar{q}_i \rightarrow \text{hadrons}$  se fait avec probabilité 1. On peut donc écrire :

$$\sigma^{e^+e^- \rightarrow had} = \sum_q \sigma^{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}}$$

Il est traditionnel de définir le rapport sans dimension :

$$R = \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow had.}}{\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = \sum_i e_i^2. \quad (6.5.1)$$

On voit que les seules différences entre le processus hadronique et le processus purement leptonique sont les facteurs de charge (les facteurs cinématiques,  $\gamma^\mu$ , espace de phase sont identiques pour les

quarks et les muons car ce sont des particules de spin 1/2, et on néglige les masses). On trouve alors en dessous du seuil de production des particules charmées,  $\sqrt{Q^2} < 3,5 \text{ GeV}$ ,

$$R = \underbrace{\frac{4}{9}}_u + \underbrace{\frac{1}{9}}_d + \underbrace{\frac{1}{9}}_s = \frac{2}{3}$$

et au dessus :

$$R = \underbrace{\frac{4}{9}}_u + \underbrace{\frac{1}{9}}_d + \underbrace{\frac{1}{9}}_s + \underbrace{\frac{4}{9}}_c + \underbrace{\frac{1}{9}}_b = \frac{11}{9}$$

où le quark bottom contribue pour  $\sqrt{Q^2} > 10 \text{ GeV}$  (le seuil de production du quark *top* est beaucoup plus élevé et correspond à  $\sqrt{Q^2} > 350 \text{ GeV}$ ). Ce résultat est en désaccord avec les résultats expérimentaux comme on peut le voir sur la fig. 6.2, plus bas, (les pics correspondent à la production de résonances près du seuil d'une saveur additionnelle). En fait, dans le calcul ci-dessus, on n'a pas tenu compte du fait que l'on a à faire à des quarks colorés. Prenant ceci en compte il faut donc sommer sur les  $N = 3$  types de couleur, ce qui donne :

$$\begin{aligned} R &= N \sum_q e_q^2 = 2, \quad \text{au-dessous du seuil de production d'une paire } c\bar{c} \\ R &= N \sum_q e_q^2 = \frac{11}{3}, \quad \text{au-dessus du seuil de production d'une paire } b\bar{b}, \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

ce qui est en relativement bon accord avec l'expérience. L'accroissement de  $R$  aux grandes valeurs de  $Q = E_{\text{cm}}$  est dû à l'interférence entre la production d'un photon virtuel et celle d'un  $Z_0$  dans la voie d'annihilation  $e^+e^-$ .

**Note :** si l'on prend en compte la couleur dans la discussion de la diffusion inélastique profonde le résultat reste inchangé car sommer sur la couleur du quark final et moyenner sur celle du quark initial revient à multiplier la sections efficace par  $3/3 = 1$ !

## 6.6 Le modèle des partons : formulation générale

1. Sous certaines conditions que l'on précisera ci-dessous, on considère qu'un hadron est constitué de partons. On travaille dans le repère d'impulsion infinie du hadron. On a donc

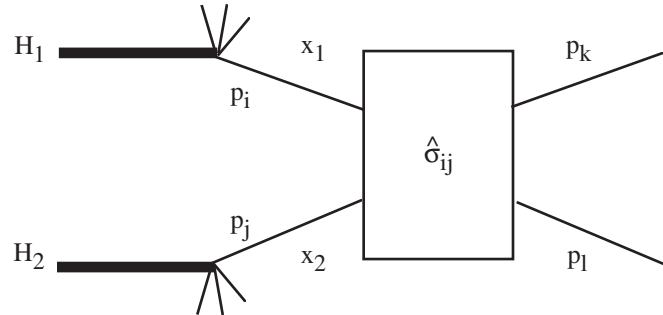
$$\begin{aligned} H &= \{p_i\} \quad i = 1, \infty \\ P &= \sum_i p_i \quad \text{où les } P, p_i \text{ sont les impulsions du hadron et des partons respectivement.} \end{aligned}$$

On néglige toutes les masses (du hadron et des partons) et on peut alors écrire

$$p_i = x_i P \quad \text{avec} \quad \sum_i x_i = 1.$$

Les partons sont sans structure et on ignore leurs interactions à l'intérieur du hadron.

2. L'interaction entre hadrons se réduit à une interaction entre partons selon le diagramme suivant



$\hat{\sigma}_{ij}$  est la section efficace de l'interaction "dure" entre partons. La section efficace hadronique est une superposition incohérente des sections efficaces partoniques c'est-à-dire que l'on ajoute les probabilités et non les amplitudes. On écrit alors :

$$\sigma^{H_1 H_2} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_i^{H_1}(x_1) F_j^{H_2}(x_2) \alpha_s^p \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, s).$$

La fonction  $F_i^H(x)$  est la densité partonique c'est-à-dire la probabilité de trouver dans le hadron  $H$  un parton de type  $i$  portant la fraction  $x$  de l'impulsion du hadron. On néglige les effets d'impulsion transverse. La fonction  $F_i^H(x)$  est invariante d'échelle, c'est-à-dire indépendante des variables (dimensionnées) de Mandelstam  $s, t, u$ . Elle contient les effets à "longue distance" (confinement) et la dépendance en  $x$  n'est pas prédite par la théorie perturbative. Les effets de "courte distance" sont contenus dans la section efficace partonique "dure"  $\hat{\sigma}_{ij}$  d'où on a extrait la constante de couplage forte : par exemple pour le processus partonique  $q \bar{q} \rightarrow \text{photon photon}$  l'exposant  $p = 0$ , tandis que  $q \bar{q} \rightarrow \text{gluon gluon}$  l'exposant  $p = 2$ . Cette séparation (factorisation) entre physique à longue distance et physique à courte distance est analogue à celle réalisée par l'approche beaucoup plus rigoureuse mais plus restrictive du développement en produit d'opérateurs sur le cône de lumière (K. Wilson).

3. Le modèle des partons est un postulat valable quand toutes les variables dimensionnées  $s, t, u$  sont grandes comparées à l'échelle de masse des hadrons ( $\sim 1 \text{ GeV}^2$ ).

La Chromodynamique Quantique perturbative entre en jeu lorsque l'on étudie l'interaction entre partons à haute énergie : dans ce cas on verra que la constante de couplage de QCD  $\alpha_s \rightarrow 0$  quand  $s, t, u \rightarrow \infty$ . Le résultat fondamental de l'application de QCD au modèle des partons est que l'interprétation probabilistique du modèle est préservée par les corrections QCD. Le résultat final est :

$$\sigma^{H_1 H_2} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_i^{H_1}(x_1, M) F_j^{H_2}(x_2, M) \alpha_s^p(\mu) \left[ \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, s) + \alpha_s(\mu) \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(x_1, x_2, s; \mu, M) + \alpha_s^2(\mu) \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} \dots \right] \quad (6.6.1)$$



où  $M$  est l'échelle de masse de factorisation,  $M^2 \simeq s, t, u$ , et  $\mu$  l'échelle de masse de renormalisation,  $\mu^2 \simeq s, t, u$ . Plus précisément,

- les densités partoniques acquièrent une dépendance logarithmique en  $M$  : c'est la fameuse "violation de l'invariance d'échelle" qui est prédite et calculable en QCD ;
- la section efficace partonique admet un développement en puissance de  $\alpha_s$  à coefficients finis et calculables ;
- la propriété de factorisation entre physique à courte distance et physique à longue distance est préservée par les corrections QCD.

Un des buts du cours sera de dériver la formule ci-dessus.

## 6.7 Conclusions

Nous avons essayé dans ce chapitre de décrire quelques résultats qui indiquent que les hadrons sont constitués d'entités plus fondamentales. En effet, on peut comprendre un grand nombre de phénomènes physiques aux échelles de masse de  $M \sim 1$  GeV aussi bien que  $M \gg 1$  GeV si l'on suppose que les hadrons sont constitués de quarks qui ont été définis comme des objets ponctuels de spin  $\frac{1}{2}$ , et de charge fractionnaire. Ces quarks sont groupés en trois familles :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

(le quark  $t$  ayant été officiellement découvert à Fermilab au printemps 1995). On peut décomposer ces spineurs de Dirac  $q$  en deux spineurs de Weyl  $q_L, q_R$ . Alors, les composantes  $q_L$  de chaque famille forment des doublets sous le groupe SU(2) des interactions faibles tandis que les  $q_R$  sont des singulets.

D'autre part, dans le Modèle Standard, un quark de saveur donnée vient en 3 couleurs

$$q = (q_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$q$  appartenant à la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  du groupe  $SU(3)_{\text{couleur}}$ . Les autres candidats possibles pour le groupe de couleur comme O(3), SO(3) et U(3) sont éliminés car ils sont en désaccord avec les résultats expérimentaux :

- O(3) et SO(3) permettent l'existence d'états  $[qq]$  singulets de couleur de charge fractionnaire, car il ne distingue pas la couleur de l'anti-couleur. De tels états ne sont pas observés expérimentalement.
- U(3) sera exclu ultérieurement lorsqu'on étudiera les gluons et le problème du confinement.

A priori, le Modèle Standard n'était pas la seule possibilité. En particulier, Han et Nambu ont proposé une alternative où les quarks ont une charge entière (*cf.* table 6.1). La version jaugée du modèle de Han-Nambu (due à Pati et Salam) a eu une certaine vogue : toutes les prédictions  $\sim \sum_q e_q^2$  coïncident avec celle du Modèle Standard. Elle a néanmoins été éliminée lorsque des mesures précises de quantités expérimentales dépendant de  $\sum_q e_q^4$  sont apparues (p. ex. dans les processus  $\gamma + p \rightarrow \gamma + X$ ,  $pp \rightarrow \gamma + \gamma + X$ ).

Jusqu'à présent, on ne s'est pas du tout intéressé à l'interaction entre quarks : à  $M \sim 1$  GeV les quarks apparaissent essentiellement comme des entités algébriques et à  $M \gg 1$  GeV, ils apparaissent

	R	G	B
u	0	1	1
d	-1	0	0
s	-1	0	0

TABLE 6.1 – Charge des différents quarks colorés dans le modèle de Han-Nambu

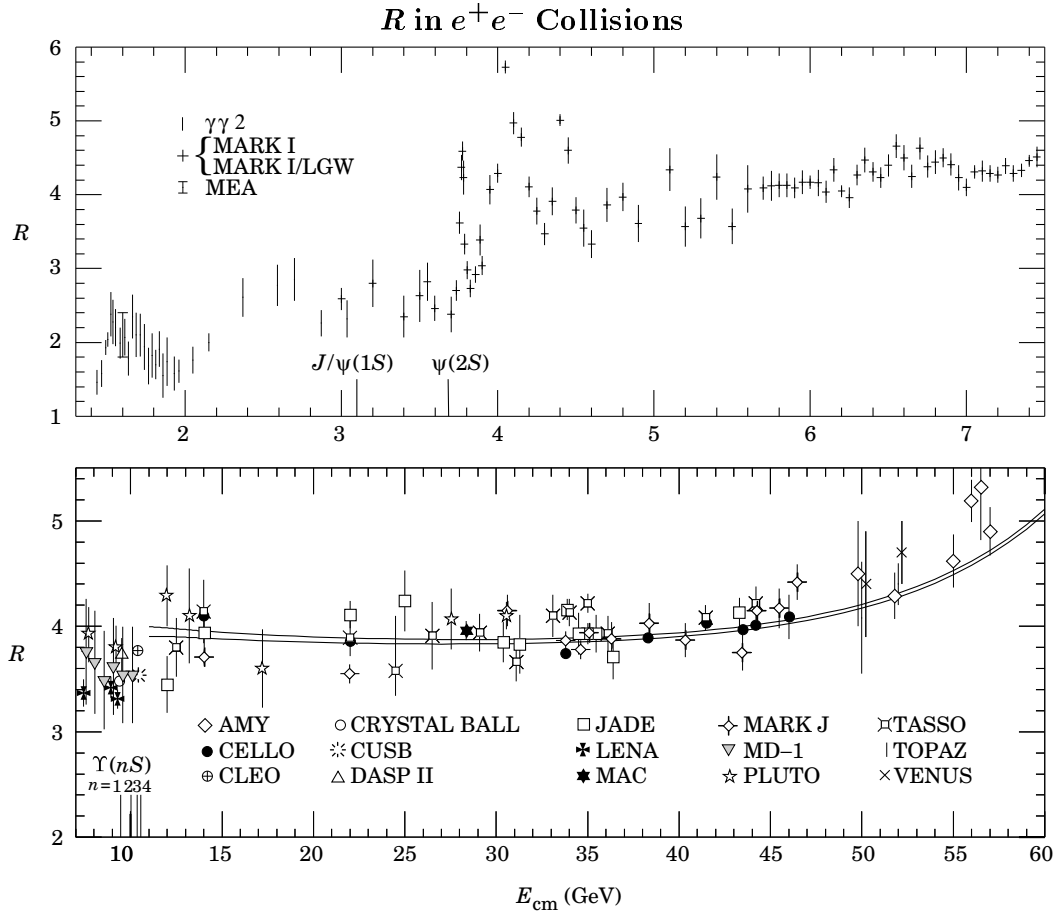
libres. Si l'on s'intéresse à ces interactions, on verra que l'on doit inclure des particules neutres qui, de façon similaire au photon de QED, sont les vecteurs de la force hadronique. Ces particules neutres peuvent être identifiées aux constituants neutres du proton qui portent la moitié de son impulsion comme nous l'avons déjà discuté dans la section concernant le modèle des partons. Nous savons que la QED est basée sur la notion d'invariance de jauge. En effet, l'existence d'un photon de masse nulle est intimement liée à l'invariance de  $\mathcal{L}_{QED}$  sous la transformation

$$\psi_e(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi_e(x).$$

De même pour QCD, si on impose l'invariance de  $\mathcal{L}_{QCD}$  sous la transformation

$$\psi_q(x) \rightarrow U\psi_q(x), \quad \psi_q = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \text{triplet de couleur}$$

pour  $U$  une transformation locale, on obtient des bosons vecteurs de masse nulle dans la représentation adjointe du groupe de jauge : les gluons (**8** pour SU(3), **9** pour U(3)).



**Figure 36.16:** Selected measurements of  $R \equiv \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ , where the annihilation in the numerator proceeds via one photon or via the  $Z$ . Measurements in the vicinity of the  $Z$  mass are shown in the following figure. The denominator is the calculated QED single-photon process; see the section on Cross-Section Formulae for Specific Processes. Radiative corrections and, where important, corrections for two-photon processes and  $\tau$  production have been made. Note that the ADONE data ( $\gamma\gamma 2$  and MEA) is for  $\geq 3$  hadrons. The points in the  $\psi(3770)$  region are from the MARK I—Lead Glass Wall experiment. To preserve clarity only a representative subset of the available measurements is shown—references to additional data are included below. Also for clarity, some points have been combined or shifted slightly ( $< 4\%$ ) in  $E_{\text{cm}}$ , and some points with low statistical significance have been omitted. Systematic normalization errors are not included; they range from  $\sim 5$ – $20\%$ , depending on experiment. We caution that especially the older experiments tend to have large normalization uncertainties. Note the suppressed zero. The horizontal extent of the plot symbols has no significance. The positions of the  $J/\psi(1S)$ ,  $\psi(2S)$ , and the four lowest  $\Upsilon$  vector-meson resonances are indicated. Two curves are overlaid for  $E_{\text{cm}} > 11$  GeV, showing the theoretical prediction for  $R$ , including higher order QCD [M. Dine and J. Sapirstein, Phys. Rev. Lett. **43**, 668 (1979)] and electroweak corrections. The  $\Lambda$  values are for 5 flavors in the  $\overline{\text{MS}}$  scheme and are  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 60$  MeV (lower curve) and  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 250$  MeV (upper curve). (Courtesy of F. Porter, 1992.) References (including several references to data not appearing in the figure and some references to preliminary data):

**AMY:** T. Mori *et al.*, Phys. Lett. **B218**, 499 (1989);  
**CELLO:** H.-J. Behrend *et al.*, Phys. Lett. **144B**, 297 (1984);  
 and H.-J. Behrend *et al.*, Phys. Lett. **183B**, 400 (1987);  
**CLEO:** R. Giles *et al.*, Phys. Rev. **D29**, 1285 (1984);  
 and D. Besson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 381 (1985);  
**CUSB:** E. Rice *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48**, 906 (1982);  
**CRYSTAL BALL:** A. Osterheld *et al.*, SLAC-PUB-4160;  
 and Z. Jakubowski *et al.*, Z. Phys. **C40**, 49 (1988);  
**DASP:** R. Brandelik *et al.*, Phys. Lett. **76B**, 361 (1978);  
**DASP II:** Phys. Lett. **116B**, 383 (1982);  
**DCI:** G. Cosme *et al.*, Nucl. Phys. **B152**, 215 (1979);  
**DHHM:** P. Bock *et al.* (DESY-Hamburg-Heidelberg-  
 MPI München Collab.), Z. Phys. **C6**, 125 (1980);  
 $\gamma\gamma 2$ : C. Bacci *et al.*, Phys. Lett. **86B**, 234 (1979);  
**HRS:** D. Bender *et al.*, Phys. Rev. **D31**, 1 (1985);  
**JADE:** W. Bartel *et al.*, Phys. Lett. **129B**, 145 (1983);  
 and W. Bartel *et al.*, Phys. Lett. **160B**, 337 (1985);  
**LENA:** B. Niczyporuk *et al.*, Z. Phys. **C15**, 299 (1982).

**MAC:** E. Fernandez *et al.*, Phys. Rev. **D31**, 1537 (1985);  
**MARK J:** B. Adeva *et al.*, Phys. Rev. Lett. **50**, 799 (1983);  
 and B. Adeva *et al.*, Phys. Rev. **D34**, 681 (1986);  
**MARK I:** J.L. Siegrist *et al.*, Phys. Rev. **D26**, 969 (1982);  
**MARK I + Lead Glass Wall:** P.A. Rapidis *et al.*,  
 Phys. Rev. Lett. **39**, 526 (1977); and P.A. Rapidis, thesis,  
 SLAC-Report-220 (1979);  
**MARK II:** J. Patrick, Ph.D. thesis, LBL-14585 (1982);  
**MD-1:** A.E. Blinov *et al.*, Z. Phys. **C70**, 31 (1996);  
**MEA:** B. Esposito *et al.*, Lett. Nuovo Cimento **19**, 21 (1977);  
**PLUTO:** A. Bäcker, thesis Gesamthochschule Siegen,  
 DESY F33-77/03 (1977); C. Gerke, thesis, Hamburg Univ. (1979);  
 Ch. Berger *et al.*, Phys. Lett. **81B**, 410 (1979);  
 and W. Lackas, thesis, RWTH Aachen, DESY Pluto-81/11 (1981);  
**TASSO:** R. Brandelik *et al.*, Phys. Lett. **113B**, 499 (1982);  
 and M. Althoff *et al.*, Phys. Lett. **138B**, 441 (1984);  
**TOPAZ:** I. Adachi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 97 (1988); and  
**VENUS:** H. Yoshida *et al.*, Phys. Lett. **198B**, 570 (1987).



## Chapitre 7

# Chromodynamique Quantique : QCD

### 7.1 Lagrangien QCD

Comme pour QED, nous partons du Lagrangien pour un fermion libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi \quad (7.1.1)$$

mais  $\psi$  dénote maintenant un triplet de spineurs de Dirac,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

On a donc ;

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i \not{\partial} - m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i \not{\partial} - m)\psi_2 + \bar{\psi}_3(i \not{\partial} - m)\psi_3. \quad (7.1.2)$$

On suppose que  $\psi$  appartient à la représentation fondamentale du groupe (spécial unitaire)  $SU(3)$ , c'est un triplet de  $SU(3)$  :  $\psi \in \mathbf{3}^1$ . L'action sur  $\psi$  d'un élément  $U$  du groupe est donnée par

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^\dagger \quad (7.1.3)$$

et l'invariance de  $\mathcal{L}$  sous la transformation globale (rigide) découle directement de la propriété d'unitarité de  $U$  :

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

D'après un résultat fondamental sur les groupes de Lie, tout élément  $U$  du groupe peut s'écrire,

$$U = e^{ig \sum_a \alpha^a T^a}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (7.1.4)$$

avec  $g$  le couplage,  $\alpha^a$  des constantes réelles arbitraires et  $T^a$ , les générateurs de l'algèbre. La condition d'unitarité impose

$$T^a = T^{a\dagger}.$$

---

1. On aurait pu choisir  $O(3)$  ou  $U(3)$  comme groupe de symétrie mais ils sont exclus par les données expérimentales (voir sec. 7.7)

Appliquée à un élément de la représentation fondamentale de  $SU(3)$ , les générateurs  $T^a$  sont donc des matrices hermitiennes  $3 \times 3$ . Puisque que l'on considère le groupe spécial  $SU(3)$ , on a de plus la condition,  $\det U = 1$  ce qui impose

$$\text{Tr } T^a = 0.$$

On a donc bien 8 matrices  $T^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$  pour  $SU(3)$ , qui satisfont aux relations de commutation d'une algèbre de Lie,

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (7.1.5)$$

avec  $f^{abc}$  totalement antisymétrique et réel. De plus, les générateurs  $T^a$  sont orthogonaux dans le sens où

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (7.1.6)$$

Si on travaillait avec le groupe  $U(3)$  on aurait une neuvième générateur qui serait la matrice unité,  $\mathbf{1}$ ,  $3 \times 3$  qui commute avec tous les  $T^a$ .

$$[\mathbf{1}, T^a] = 0,$$

et qui est donc un singulet de couleur (invariant) sous une transformation de  $SU(3)$ .

#### • Invariance par changement de phase locale

On suppose maintenant que les paramètres  $\alpha^a$  deviennent des fonctions de la coordonnée d'espace-temps,  $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$  et on note :

$$U(x) = e^{ig\alpha^a(x)T^a}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (7.1.7)$$

où la sommation sur les indices de couleur  $a$  est implicite. L'action d'un élément du groupe sur les fermions est :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x) \quad (7.1.8)$$

Il est pratique de considérer une transformation de jauge infinitésimale :

$$U(x) = 1 + ig\alpha^a(x)T^a \quad (7.1.9)$$

de sorte que la variation des différents termes du lagrangien éq. (7.1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= ig\alpha^a(x)T^a\psi(x), & \delta\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(x)(-ig\alpha^a(x)T^a) \\ \delta\{\partial_\mu\psi(x)\} &= \partial_\mu\delta\psi(x) = ig\alpha^a(x)T^a\partial_\mu\psi(x) + ig(\partial_\mu\alpha^a(x))T^a\psi(x) \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

et celle du lagrangien est donc :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}(x) i \not{\partial}\psi(x) + \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu\delta\{\partial_\mu\psi(x)\} - \delta\bar{\psi}(x)m\psi - \bar{\psi}m\delta\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \{-g(\partial_\mu\alpha^a(x))T^a\gamma^\mu\} \psi(x). \end{aligned}$$

Le lagrangien n'est donc plus invariant à cause du terme dérivatif proportionnel à  $\partial_\mu\alpha^a(x)$ . Par analogie avec QED, on introduit des champs vecteurs,  $A_\mu^b(x)$ , et on ajoute dans le lagrangien un terme qui a la même structure de groupe  $SU(3)$  et de Lorentz que le terme en  $\partial_\mu\alpha^a(x)T^a$ , soit :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left( i(\partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b)\gamma^\mu - m \right) \psi(x), \quad b = 1, \dots, 8,$$

et on choisit la loi de transformation de ces champs de façon à rétablir l'invariance du lagrangien. Pour cela on introduit la notation :

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b) \psi(x), \quad (7.1.11)$$

et on impose que  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b$  soit une dérivée covariante, c'est à dire que l'on impose la loi de transformation :

$$(\mathcal{D}_\mu \psi(x))' := \mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = \mathcal{D}'_\mu U(x)\psi = U(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x), \quad \forall \psi(x). \quad (7.1.12)$$

Sous une transformation de jauge  $\mathcal{D}_\mu \psi(x)$  se transforme comme  $\psi(x)$ . Comme cela est vrai pour tout  $\psi(x)$  on en déduit au niveau des opérateurs :

$$\mathcal{D}'_\mu = U(x)\mathcal{D}_\mu U^{-1}(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu U^\dagger(x) \quad (7.1.13)$$

Pour éviter la manipulation d'indices de couleur on introduit les matrices  $3 \times 3$ , locales hermitiennes de trace nulle :

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a, \quad \tilde{\alpha}(x) = \alpha^a(x)T^a, \quad (7.1.14)$$

avec sommation implicite sur les indices de couleur. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu &= U(x) (\partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu) U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu + U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) - igU(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x). \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

$\mathcal{D}'_\mu$  est donc de la forme  $\partial_\mu - ig\mathcal{A}'_\mu(x)$  avec :

$$\boxed{\mathcal{A}'_\mu(x) = \frac{i}{g}U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) + U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x),} \quad (7.1.16)$$

qui pour une transformation infinitésimale s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{A}'_\mu(x) - \mathcal{A}_\mu(x) = \delta\mathcal{A}_\mu(x) = \partial_\mu \tilde{\alpha}(x) - ig[\mathcal{A}_\mu(x), \tilde{\alpha}(x)].} \quad (7.1.17)$$

Pour obtenir cette relation en terme des composantes colorées on considère  $\text{Tr}(T^a \delta\mathcal{A}_\mu(x))$  qui, après usage des relations de commutation éq. (7.1.5) et de (7.1.6), mène à :

$$\boxed{\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \alpha^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)\alpha^c(x).} \quad (7.1.18)$$

Sous la transformation de jauge définie par les éqs. (7.1.10) et (7.1.18) on a donc bien rétabli la propriété d'invariance du lagrangien :  $\delta\mathcal{L} = 0$ . La dernière équation montre que  $A_\mu^a(x)$  appartient à la représentation adjointe (octet **8**) de SU(3). Le deuxième terme (non abélien) de l'équation illustre la différence fondamentale entre QED et QCD car il permet, comme on le verra plus bas, le couplage des bosons de jauge entre eux ce qui conduira à la propriété de *liberté asymptotique*. Mais comme pour QED, on vérifie facilement qu'un terme de masse de type  $m^2 \Sigma_a A_\mu^a A^{a\mu}$  associé aux champs  $A_\mu^a(x)$  n'est pas invariant de jauge. Les gluons sont donc des champs de masse nulle, autocouplés, qui induisent des interactions à longue portée entre les quarks. Ce dernier argument est déterminant pour le choix du groupe de jauge. En effet, si U(3) était le groupe d'invariance,

on aurait une interaction hadronique à longue portée qui serait singulet  $\mathbf{1}$  de couleur. Ceci est contraire aux observations expérimentales : la force nucléaire forte entre les hadrons est à courte portée :  $\sim 1/m_\pi$ . Cet argument exclut donc le groupe  $U(3)$  comme groupe de couleur et on reste avec  $SU(3)$  et 8 gluons colorés de masse nulle couplant à des champs de matière colorés, les quarks.

Il est utile d'introduire les générateurs du groupe opérant sur la représentation adjointe. Ce sont des matrices  $8 \times 8$  dont les éléments sont donnés par :

$$(\mathcal{T}^c)^{ab} = -if^{cab}. \quad (7.1.19)$$

Il est facile de vérifier qu'elles satisfont les relations de commutation de  $SU(3)$ , éq. (7.1.5) :

$$[\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = if^{abd}\mathcal{T}^d \quad (7.1.20)$$

qui sont équivalentes à

$$f^{abd}f^{cde} + f^{bcd}f^{ade} + f^{cad}f^{bde} = 0. \quad (7.1.21)$$

Cette dernière équation découle directement de l'identité de Jacobi :

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0. \quad (7.1.22)$$

On introduit maintenant la dérivée covariante opérant sur la représentation adjointe dont les éléments de matrice sont

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu)^{ab} &= \partial_\mu \delta^{ab} - ig(\mathcal{T}^c)^{ab} A_\mu^c(x) \\ &= \partial_\mu \delta^{ab} - gf^{abc} A_\mu^c(x). \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Il est alors facile de voir que l'éq. (7.1.18) prend la forme :

$$\delta A_\mu^a(x) = (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \alpha^b(x), \quad (7.1.24)$$

qui met en évidence la nature non abélienne de la transformation de jauge  $SU(3)$  sur un élément de la représentation adjointe. Cette formule sera utile pour la discussion sur la quantification de QCD.

### • Terme cinétique pour les gluons

Mais nous n'avons pas encore fini car, comme pour QED, le terme cinétique du champ de jauge est absent et le modèle n'admet que des solutions triviales. On va donc définir le tenseur antisymétrique qui généralise le  $F_{\mu\nu}$  de QED dans le cas non abélien par :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \quad (7.1.25)$$

avec  $\mathcal{D}_\mu$  donné par l'éq. (7.1.11). Ce terme a la bonne dimension en terme de masse. On montre facilement, utilisant la formule de Leibniz  $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + \mathcal{A}_\nu \partial_\mu$ , que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (7.1.26)$$



ou, en termes de composantes,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \underbrace{gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c}_{\text{terme non abélien}}. \quad (7.1.27)$$

Pour obtenir la variation du tenseur  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  sous une transformation de jauge  $U$  il est utile de se souvenir que, par l'éq. (7.1.13),  $\mathcal{D}'_\mu = U\mathcal{D}_\mu U^\dagger$ , ce qui est aussi le cas pour  $\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu$  et par conséquent pour le tenseur d'énergie-impulsion

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (7.1.28)$$

Pour une transformation infinitésimale  $U = 1 + ig\tilde{\alpha}(x)$ , cela mène à,

$$\delta\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \tilde{\alpha}(x)]. \quad (7.1.29)$$

Du point de vue des transformations du groupe  $SU(3)$ ,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  se transforme comme  $\mathcal{A}_\mu$ , c'est-à-dire un élément de la représentation adjointe (eq. (7.1.17)). On définit le terme cinétique des champs de jauge comme :

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \underbrace{\text{Tr}T^a T^b}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu},$$

qui est évidemment un scalaire invariant de jauge, comme on le prouve aisément en utilisant l'éq. (7.1.28) et la propriété de cyclicité de la trace. Finalement, le lagrangien, au niveau classique, pour un fermion coloré s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi.} \quad (7.1.30)$$

The premier terme contient les couplages à trois et quatre gluons tandis que le deuxième terme contient le couplage des gluons aux fermions.

### • Résumé des transformations de jauge

On rappelle les notations :

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_i), \quad i = 1, 2, 3, \text{ champs de quark} \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= A_\mu^a(x)T^a, \quad a = 1, \dots, 8, \text{ champs de jauge (connexion)} \\ \mathcal{D}_\mu &= \partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu(x), \text{ dérivée covariante, représentation fondamentale} \\ (\mathcal{D}_\mu)^{ab} &= \partial_\mu\delta^{ab} - gf^{abc}A_\mu^c(x), \text{ dérivée covariante, représentation adjointe} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &= F_{\mu\nu}^a(x)T^a = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x) - ig[\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)], \text{ courbure.} \\ \Leftrightarrow \quad F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

La densité lagrangienne éq. (7.1.30), et par conséquent l'action, est invariante de jauge, c'est-à-dire invariante sous la transformation de jauge paramétrée par la variable  $\tilde{\alpha} = \alpha^a(x)T^a$  :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\tilde{\alpha}\psi, & \delta\bar{\psi} &= -ig\bar{\psi}\tilde{\alpha}, & \delta\mathcal{D}_\mu\psi &= ig\tilde{\alpha}(x)\mathcal{D}_\mu\psi \\ \delta\mathcal{A}_\mu &= \partial_\mu\tilde{\alpha} - ig[\mathcal{A}_\mu, \tilde{\alpha}] \iff \delta A_\mu^a(x) = (\mathcal{D}_\mu)^{ab}\alpha^b(x) \\ \delta\mathcal{F}_{\mu\nu} &= -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \tilde{\alpha}] \iff \delta F_{\mu\nu}^a = gf^{abc}F_{\mu\nu}^b \alpha^c(x). \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

La forme explicite des matrices  $T^a$  n'intervient quasiment jamais. Cependant, quand c'est nécessaire, nous utiliserons les matrices de Gell-Mann :  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ . On donne en appendice un certain nombre de relations utiles entre les facteurs de couleur.

## 7.2 Quantification : théorie scalaire

On rappelle les difficultés rencontrées lors de la quantification de QED. D'une part, le fait de représenter le photon par un champ vecteur  $A_\mu(x)$  qui a quatre états de polarisation alors qu'une particule de masse nulle n'en a que deux, nécessitait de s'assurer que les polarisations non physiques n'affectaient pas les prédictions. D'autre part, pour respecter les relations de commutation du photon il avait fallu briser l'invariance de jauge ce qui avait introduit dans le lagrangien, et par conséquent dans le propagateur du photon, un paramètre arbitraire qui ne devait pas affecter la prédiction des observables. On avait vu aussi le rôle primordial joué par le fait que le photon se couplait aux fermions via un courant conservé ce qui conduisait au découplage des paramètres non physiques dans la prédiction des observables. Le même phénomène est à l'oeuvre en QCD mais, dans ce cas, l'autocouplage des gluons entre eux ne filtre pas les états de polarisation non physique comme le faisait le couplage aux fermions et une procédure spéciale doit être introduite pour l'éliminer. La façon moderne de procéder est d'utiliser le formalisme d'intégrale fonctionnelle de Feynman et de suivre la procédure de Fadeev-Popov. Etant donné la subtilité de la logique et du formalisme nous allons illustrer dans un premier temps la méthode et la dérivation des règles de Feynman dans le cas d'un modèle scalaire où on ne s'embarasse pas de contraintes d'invariance de jauge. Puis nous nous tournerons, dans la section suivante, vers QCD et introduirons les fantômes de Fadeev-Popov qui permettent de d'écrire une fonctionnelle génératrice de QCD en respectant l'invariance de jauge et ensuite nous assénerons les règles de Feynman correspondantes.

### • Fonctionnelle génératrice et règles de Feynman

On considère le modèle  $\lambda\phi^4$  (déjà mentionné plus haut) dont la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x). \quad (7.2.33)$$

Toute quantité physique peut se calculer à partir des fonctions de Green

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|\mathcal{T}(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}. \quad (7.2.34)$$

On peut montrer qu'elles peuvent être obtenues à partir de la fonctionnelle génératrice

$$W[J] = \int [D\phi] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L} + \hbar J(x)\phi(x)] \right] \quad (7.2.35)$$

où  $[D\phi]$  signifie que l'on intègre sur toutes les fonction  $\phi(x)$  pour tous les  $x$ , et  $J(x)$  est le terme de source du champ  $\phi(x)$ . Dans ce formalisme une fonction de Green s'écrit (sans démonstration!) :

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int [D\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}\right]}{\int [D\phi] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}\right]} \quad (7.2.36)$$

qui peut être obtenue par dérivation fonctionnelle par rapport au terme de source (on prend  $\hbar = 1$ ) :

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{W[0]} \frac{\delta^n W[J]}{i\delta J(x_1) \cdots i\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (7.2.37)$$

où la dérivée fonctionnelle d'une expression telle que  $\int d^4y \phi(y) J(y)$  est  $\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \phi(y) J(y) = \phi(x)$ . Développant dans l'éq. (7.2.35) le terme exponentiel par rapport au terme de source on trouve

$$W[J] = \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \quad (7.2.38)$$

ce qui montre que la fonctionnelle peut s'écrire

$$W[J] = W[0] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (7.2.39)$$

et donc que la connaissance de toutes les fonctions de Green est équivalente à celle de la fonctionnelle génératrice.

### • Développement perturbatif

Dans le cadre d'une approche perturbative on sépare la densité lagrangienne entre une partie libre  $\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x))/2$  et une partie contenant l'interaction (polynomiale)  $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$ . On introduit d'abord la fonctionnelle génératrice de la théorie libre qui est construite à partir de  $\mathcal{L}_0$

$$W_0[J] = \int [D\phi] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right], \quad (7.2.40)$$

et qui permet, en particulier, d'obtenir le propagateur du champ libre par dérivation fonctionnelle de  $W_0[J]$  (éq. (7.2.37)). On fait ensuite un développement de  $W[J]$  en fonction du couplage  $\lambda$ , donc en fonction de  $\mathcal{L}_I$ ,

$$\begin{aligned} W[J] &= \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \int d^4y i\mathcal{L}_I(\phi(y)) \right)^n \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right) \right)^n \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \int [D\phi] \exp\left[\int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \exp\left[\int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right] W_0[J]. \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

Le passage de la première à la deuxième ligne s'explique par le fait qu'un facteur  $\phi$  dans l'intégrand s'obtient par dérivation par rapport au terme de source. La dernière équation permet de construire la série perturbative, à n'importe quel ordre, à partir de la fonctionnelle génératrice de la théorie libre en développant l'exponentielle en fonction du couplage. Ainsi :

$$\begin{aligned} W[J] &= \exp\left(i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right) W_0[J] \\ &= \left[1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \left(\int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4\right)^2 + \dots\right] W_0[J] \end{aligned} \quad (7.2.42)$$

Cette expression donne la base d'une représentation graphique, que l'on introduira plus bas, de la fonctionnelle génératrice et le premier terme non trivial contient la fonction de Green à 4-points à l'ordre le plus bas (couplage).

### • Le propagateur

Pour obtenir le propagateur de la théorie libre on va d'abord effectuer l'intégrale fonctionnelle de  $W_0[J]$ , éq. (7.2.40). Pour cela on ré-écrit l'action

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_0 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\right) (\phi(x) \partial^2 \phi(x) + m^2 \phi^2(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \end{aligned} \quad (7.2.43)$$

où on a effectué une intégration par partie, en ignorant le terme dérivée totale comme il est de coutume, et l'opérateur cinétique  $K(x, y)$  est défini par

$$K(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) (\square_y + m^2), \quad (7.2.44)$$

avec  $\square_y = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu}$  n'opérant que sur la variable  $y$ . La fonctionnelle  $W_0[J]$  prend alors la forme

$$W_0[J] = \int [D\phi] \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) K(x, y) \phi(y) + iJ(x) \phi(y) \delta^4(x - y)]\right], \quad (7.2.45)$$

qui se prête à une intégration gaussienne comme on va le voir. Dans un premier temps on discrétise cette expression

$$W_0[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_1 \cdots d\phi_N \exp\left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j + i \sum_i J_i \phi_i\right]. \quad (7.2.46)$$

S'inspirant du cas à une dimension,  $N = 1$ , où on effectue une translation sur  $\phi \rightarrow \phi - J/K_{11}$  pour reconstruire un carré parfait, ici on introduit la combinaison  $\phi'_i = \phi_i - \Delta_{ik} J_k$ ,  $\Delta_{ij}$  est un élément d'une matrice  $\Delta$  à déterminer, et on ré-écrit la fonctionnelle

$$W_0[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_1 \cdots d\phi_N \exp\left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j,k,l} (\phi_i - \Delta_{ki} J_k) K_{ij} (\phi_j - \Delta_{jl} J_l) + \frac{i}{2} \sum_{i,j,k,l} J_k \Delta_{ki} K_{ij} \Delta_{jl} J_l\right], \quad (7.2.47)$$

la matrice  $\Delta_{ik}$  étant contrainte par la condition que l'on retrouve bien le terme linéaire en les sources, c'est à dire que l'on doit avoir

$$\Delta_{ki}K_{ij} = \delta_{kj}, \quad K_{ij}\Delta_{jl} = \delta_{il}. \quad (7.2.48)$$

La matrice  $\Delta$  est donc simplement, l'inverse de la matrice  $K$ . La fonctionnelle génératrice peut donc s'écrire, après changement de variables

$$\begin{aligned} W_0[J] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi'_1 \cdots d\phi'_N \exp \left[ \frac{-i}{2} \sum_{i,j} \phi'_i K_{ij} \phi'_j + \frac{i}{2} \sum_{i,j} J_i \Delta_{ij} J_j \right] \\ &= \frac{c}{\det(K)} \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[ \frac{i}{2} \sum_{i,j} J_i \Delta_{ij} J_j \right], \end{aligned} \quad (7.2.49)$$

où on a effectué l'intégrale gaussienne sur les variables  $\phi'$  (pour obtenir ce résultat facilement on peut diagonaliser la matrice symétrique  $K_{ij}$ ). Le facteur de normalisation devant cette intégrale peut être, comme d'habitude ignoré, et revenant à la limite du continu on trouve

$$\boxed{W_0[J] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right]}, \quad (7.2.50)$$

où l'opérateur  $\Delta(x, y)$ , satisfait la version continue de l'éq. (7.2.48), c'est à dire :

$$\boxed{\int d^4z K(x, z) \Delta(z, y) = \int d^4z \Delta(x, z) K(z, y) = \delta^{(4)}(x - y)}. \quad (7.2.51)$$

On cherche la solution de cette équation en introduisant la transformée de Fourier

$$\Delta(z, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(z-y)} \Delta(k) \quad (7.2.52)$$

et on trouve facilement

$$\Delta(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.2.53)$$

Pour donner un sens à ces expressions on a attribué une petite partie imaginaire négative à la masse  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$  pour respecter la causalité induite par l'opérateur  $\mathcal{T}$  (voir sec. 2.3). Le propagateur libre sera donc (voir éq. (7.2.37)) :

$$\begin{aligned} G^2(x_1, x_2) &= \frac{1}{W_0[0]} \frac{\delta^2}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)} \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\ &= -i \Delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.2.54)$$

Dans l'espace des impulsions on trouve alors que la propagateur d'une particule scalaire libre est finalement :

$$\boxed{G(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}}. \quad (7.2.55)$$

En règle générale, la propagateur de Feynman dans l'espace des impulsions est  $-i$  fois la transformée de Fourier de l'inverse de l'opérateur cinétique du Lagrangien de la théorie libre.

• **Le vertex**

On va s'attacher maintenant à expliciter le premier terme non trivial de l'éq. (7.2.42) :

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^4 \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right], \quad (7.2.56)$$

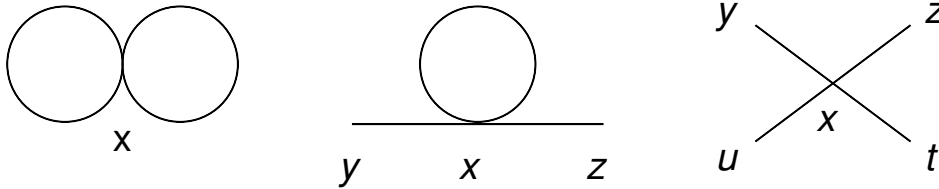
où on a utilisé la forme explicite éq. (7.2.50) de  $W_0[J]$ . L'application d'un opérateur  $\delta/i\delta J(x)$  sur l'exponentielle engendre le terme

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^3 \frac{1}{2} \left[ \int d^4z \Delta(x, z) J(z) + \int d^4y J(y) \Delta(y, x) \right] \\ & \quad \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right] \\ & = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^3 \left[ \int d^4z \Delta(x, z) J(z) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right], \end{aligned} \quad (7.2.57)$$

puisque la fonction  $\Delta(x, y)$  est symétrique en  $x$  et  $y$  (voir éqs. (7.2.52, 7.2.55)), de sorte que l'on trouve finalement

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \left[ -3 \int d^4x \Delta(x, x) \Delta(x, x) - 6 i \int d^4x \Delta(x, x) \int d^4y \Delta(x, y) J(y) \int d^4z \Delta(x, z) J(z) \right. \\ & \left. + \int d^4y \Delta(x, y) J(y) \int d^4z \Delta(x, z) J(z) \int d^4t \Delta(x, t) J(t) \int d^4u \Delta(x, u) J(u) \right] W_0[J]. \end{aligned} \quad (7.2.58)$$

On peut donner une représentation graphique de cette expression :



Le premier terme correspond à deux propagateurs qui se referment sur eux-mêmes au point  $x$ , le deuxième à la création de champs  $\phi$  aux points  $y$  et  $z$  par les sources et à leur propagation jusqu'au point  $x$  où ils interagissent, enfin le dernier terme décrit la création de 4 champs aux points  $y, z, t$  et  $u$  et leur propagation jusqu'au point  $x$  où ils se couplent entre eux. Le terme qui nous intéresse est ce dernier terme qui est le seul qui va contribuer à la fonction de Green à 4 points. En effet, cette fonction est obtenue par application de la formule éq. (7.2.37) pour  $n = 4$  : il suffit pour cela d'appliquer les opérateurs  $\delta/\delta J(x_i)$  sur le terme quadratique en  $J$  de l'expression ci-dessus, leur action sur  $W_0[J]$  donnant 0 lorsqu'on imposera  $J = 0$  à la fin du calcul. On trouvera donc

$$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -i\lambda \int d^4x \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_4) \quad (7.2.59)$$

où le facteur  $1/4!$  d'origine est compensé du fait que chaque opérateur de dérivation  $\delta/\delta J(x_i)$  agit sur chacun des facteurs de type  $\int d^4y \Delta(x, y) J(y)$  soit, en tout,  $4!$  possibilités. Introduisant les propagateurs dans l'espace des impulsions par l'éq. (7.2.52) et effectuant l'intégrale sur  $x$ , on trouve

$$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -i\lambda \int \prod_1^4 \left( \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} i \frac{e^{ip_j x_j}}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (7.2.60)$$

ce qui permet d'écrire la fonction à 4 points dans l'espace des impulsions (transformée de Fourier de  $G^4(x_i)$ ) :

$$\tilde{G}^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \prod_1^4 \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.2.61)$$

où l'on a bien prouvé la conservation d'impulsion au point d'interaction des champs. Le vertex au sens de diagramme de Feynman est, par définition, obtenu par amputation des propagateurs des particules externes et suppression de la contrainte de conservation de l'impulsion ce qui donne vertex =  $-i\lambda$ .

#### • Les règles Feynman en $\lambda\phi^4$

Normalement on devrait montrer ici comment retrouver le théorème de Wick, engendrer les diagrammes de Feynman à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations ainsi qu'inclure une discussion sur les génératrices fonctionnelles des fonctions de Green connexes et irréductibles à une particule mais nous ne le ferons pas pour rester dans l'esprit utilitaire et appliqué de ces notes. Nous nous bornerons à rappeler les règles de Feynman qui permettent de calculer un élément de matrice dans l'espace des impulsions :

- pour chaque vertex :  $-i\lambda$
- pour chaque propagateur d'impulsion  $p$  :  $i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$
- pour chaque boucle interne d'impulsion  $p$  :  $\int d^4 p / (2\pi)^4$ .

### 7.3 Quantification : chromodynamique quantique

Nous revenons maintenant à QCD et nous nous tournons vers les difficultés causées par la contrainte d'invariance de jauge.

#### • Fixage de la jauge

On ne considère dans un premier temps que le terme de jauge dans la densité lagrangienne,  $\mathcal{L}_G = -F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x)/4$ , et la fonctionnelle génératrice sans le terme de source (et on prend de plus  $\hbar = 1$ ) :

$$W_G[0] = \int [DA] \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.62)$$

La mesure d'intégration invariante est de la forme  $[DA] = \Pi_{a,x,\mu} dA_\mu^a(x)$  où l'on doit sommer sur toutes les fonctions  $A_\mu^a(x)$  y compris leurs transformées sous l'action des éléments  $g = g(\alpha^a(x))$  du groupe de jauge. Le terme  $\mathcal{L}_G$  étant invariant sous une transformation de jauge, on voit aisément

que  $W[0]$  n'est pas définie puisque l'intégrale  $\int [Dg] = \int \Pi_a d\alpha^a(x)$  est infinie (groupe non-compact). Pour donner un sens à l'expression on va fixer la jauge par une contrainte de type

$$G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a(x) = 0, \quad \forall a = 1, \dots, 8 \quad (7.3.63)$$

supposée définir une configuration de jauge unique. Différents choix sont possibles pour  $G^\mu$  correspondants à différents choix de jauge. Par exemple,

$$\begin{aligned} G_\mu &= \partial_\mu, \text{ jauge covariante (Lorentz)} \\ G^\mu &= n^\mu, \text{ vecteur constant de genre espace, jauge axiale} \\ G^\mu &= (0, \vec{\nabla}), \text{ jauge de Coulomb.} \end{aligned} \quad (7.3.64)$$

On introduit la fonctionnelle  $\Delta_G[A_\mu]$  par

$$\Delta_G[A_\mu] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) = 1 \quad (7.3.65)$$

avec  $[Dg] = \Pi_a d\alpha^a(x)$  la mesure d'intégration invariante du groupe de jauge et  $A_\mu^{a,g}$  le champ pour le choix de l'élément du groupe de jauge  $g$ .  $\Delta_G[A_\mu]$  est invariant sous transformation de jauge. En effet :

$$\begin{aligned} \Delta_G^{-1}[A_\mu^{g'}] &= \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,gg'} - B^a) \\ &= \int [Dgg'] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,gg'} - B^a) \\ &= \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \\ &= \Delta_G^{-1}[A_\mu] \end{aligned} \quad (7.3.66)$$

On ré-écrit la fonctionnelle génératrice éq. (7.3.62) en injectant l'éq. (7.3.65) :

$$W_G[0] = \int [DA] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \Delta_G[A_\mu] \exp i \left[ \int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.67)$$

L'idée est de n'intégrer que sur une seule copie des champs de jauge et non sur toutes les configurations obtenues à partir de cette copie par application des éléments  $g(\alpha^a(x))$  du groupe. Profitant de ce que tous les termes dans l'éq. ci-dessus sont invariants, sauf les champs  $A_\mu^{a,g}$  dans les fonctions  $\delta$ , sous une transformation de jauge, on peut écrire :

$$W_G[0] = \int [DA] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \Delta_G[A_\mu^g] \exp i \left[ \int d^4x \mathcal{L}_G \right], \quad (7.3.68)$$

faire le changement de notation  $A_\mu^{a,g} \rightarrow A_\mu^a$  et factoriser l'intégrale sur les configurations de jauge  $\int [Dg]$  puisque les autres facteurs n'en dépendent plus,

$$W_G[0] = \left( \int [Dg] \right) \int [DA] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \Delta_G[A_\mu] \exp i \left[ \int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.69)$$



Le facteur  $\int [Dg]$  apparaît comme une constante multiplicative infinie qui s'élimine quand on considère les rapports comme en éq. (7.2.36). On peut donc l'ignorer. On cherche maintenant une expression pour  $\Delta_G^{-1}[A_\mu]$ , le déterminant de Fadeev-Popov. L'éq. (7.3.65) s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta_G^{-1}[A_\mu] &= \int \Pi_b d\alpha^b(y) \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a) \\ &= 1/\det \left( \frac{\delta(G^\mu A_\mu^a(x))}{\delta\alpha^b(y)} \right) \\ &\equiv \frac{1}{\det(M_G^{ab}(x, y))}.\end{aligned}\tag{7.3.70}$$

où le symbole  $g$  dans  $A_\mu^{a,g}(x)$  est un élément du groupe de jauge paramétré par les  $\alpha^b(y)$ . Le déterminant apparaît car, comme pour l'intégration ordinaire, quand on effectue l'intégrale sur une variable,  $\alpha^b$  par exemple, à l'aide de la fonction  $\delta(G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a)$  on introduit une dépendance implicite de cette variable sur les autres dont il faut tenir compte dans les intégrations successives. La fonctionnelle génératrice avec source va pouvoir s'écrire maintenant

$$W_G[J] = \int [DA] \det(M_G^{ab}) \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_G + J^{\alpha\mu} A_\mu^a].\tag{7.3.71}$$

Puisque la fonction  $B^a(x)$  est arbitraire, on va intégrer sur les  $B^a(x)$  avec un poids gaussien<sup>2</sup>

$$\int [DB] \Pi_b \exp\left[\frac{-i}{2\xi} \int d^4x (B^b(x))^2\right] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) = \Pi_a \exp\left[\frac{-i}{2\xi} \int d^4x (G^\mu A_\mu^a)^2\right]\tag{7.3.72}$$

de sorte que l'on peut écrire

$$W_G[J] = \int [DA] \det(M_G^{ab}) \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_G - (G^\mu A_\mu^a)^2/2\xi + J^{\alpha\mu} A_\mu^a].\tag{7.3.73}$$

$W_G[J]$  serait une fonctionnelle génératrice au sens habituel s'il n'y avait pas le déterminant de Fadeev-Popov  $M_G^{ab}$  dans l'intégrand. On va voir qu'on peut ré-écrire ce terme sous la forme d'une intégrale fonctionnelle de façon à exprimer  $W_G[J]$  sous une forme standard mais au prix de l'introduction de champs scalaires  $\chi^a$  et  $\chi^{*a}$  anti-commutants (variables de Grassmann), les fantômes de Fadeev-Popov. On a la relation :

$$\det(M_G^{ab}(x, y)) = \int \Pi_{a,b} d\chi^{*a}(x) d\chi^b(y) \exp[-i \int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) M_G^{ab}(x, y) \chi^b(y)],\tag{7.3.74}$$

que l'on va discuter maintenant. Ce terme a bien la structure d'une fonctionnelle génératrice des champs  $\chi^a$  et  $\chi^{*a}$ .

#### • Digression sur les variables de Grassmann

On introduit des c-nombres  $\chi_j$ , qui anti-commutent

$$\{\chi_i, \chi_j\} = 0,\tag{7.3.75}$$

---

2. Le terme qui "fixe" la jauge par la contrainte  $(G^\mu A_\mu^a - B^a) = 0$ ,  $B^a(x)$  arbitraire, est l'équivalent du terme qui "casse" l'invariance de jauge du lagrangien (éq. 2.4.49) dans la quantification canonique de QED avec  $1/\xi = \lambda$ .

ainsi toute expression de la forme  $E = \chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_k}$  est nulle si elle contient deux  $\chi_{i_l}$  identiques, et toute fonction d'une seule variable de Grassmann est nécessairement de la forme

$$E(\chi) = e_o + e_1 \chi, \quad (7.3.76)$$

puisque  $\chi^2 = 0$ . On définit la dérivée à gauche de  $E$  par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi_i} (\chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_l} \cdots \chi_{i_k}) &= (-1)^{l-1} (\chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_k}), \text{ si } i = i_l \\ &= 0, \text{ si } i \neq i_l, \forall l. \end{aligned} \quad (7.3.77)$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \chi_j} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \chi_j \partial \chi_i}, \quad (7.3.78)$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial^2 E}{(\partial \chi_i)^2} = 0. \quad (7.3.79)$$

On introduit l'intégration sur les variables de Grassmann par les règles

$$\int d\chi_i = 0 \text{ et } \int d\chi_i \chi_j = -\int \chi_j d\chi_i = \delta_{ij}, \quad (7.3.80)$$

où les éléments d'intégration  $d\chi_i$  sont également des variables de Grassmann satisfaisant les relations éq. (7.3.75). La première définition permet de préserver la propriété d'invariance de l'intégrale sous un changement de variable  $\chi \rightarrow \chi + a$ . On peut citer quelques propriétés amusantes et utiles, comme par exemple l'identité suivante

$$\int d\chi f(\chi) = \frac{\partial}{\partial \chi} f(\chi). \quad (7.3.81)$$

On note  $\chi^*$  la variable complexe conjuguée de  $\chi$  et on considère  $\chi^*$  et  $\chi$  sont comme deux variables indépendantes.

Pour "prouver" la relation éq. (7.3.74), c'est à dire l'exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov, on discrétise le problème et on définit l'intégrale :

$$I = \int d\chi_1^* \cdots d\chi_N^* d\chi_1 \cdots d\chi_N \exp\left(\sum_{i,j} \chi_i^* A^{ij} \chi_j\right), \quad (7.3.82)$$

où  $(A^{ij})$  est une matrice  $N \times N$  de nombres complexes. On somme sur les indices  $i, j$  dans l'équation. Développant l'exponentielle on voit que seul le terme d'ordre  $N$ ,  $(\chi_i^* A^{ij} \chi_j)^N / N!$ , survit car d'après les définitions éq. (7.3.80) il faut une et seulement une variable de chaque type pour que l'intégrale ne soit pas nulle. Collectant tous les  $\chi_i^*$  à gauche et les  $\chi_j$  à droite, on trouve

$$\begin{aligned} (\chi_i^* A^{ij} \chi_j)^N &= (-1)^{N(N-1)/2} \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_{i_1}^* \cdots \chi_{i_N}^* \chi_{j_1} \cdots \chi_{j_N} \\ &= (-1)^{N(N-1)/2} \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} \varepsilon_{i_1 \cdots i_N} \varepsilon_{j_1 \cdots j_N} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_1^* \cdots \chi_N^* \chi_1 \cdots \chi_N \\ &= (-1)^{N(N-1)/2} N! \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} \varepsilon_{j_1 \cdots j_N} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_1^* \cdots \chi_N^* \chi_1 \cdots \chi_N. \end{aligned} \quad (7.3.83)$$

Les tenseurs totalement antisymétriques de type  $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$  apparaissent quand on anticommute les  $\chi_i^*$  et  $\chi_j$  pour les ordonner de 1 à  $N$ . Pour comprendre le dernière ligne, il faut se rappeler que l'on  $N!$  permutations de  $i_i$  avec la combinaison par exemple de termes tels que  $\varepsilon_{12 \dots i_N} [A^{1j_1} A^{2j_2} \dots A^{i_N j_N} - A^{2j_1} A^{1j_2} \dots A^{i_N j_N}] \varepsilon_{j_1 \dots j_N} = 2\varepsilon_{12 \dots i_N} A^{1j_1} A^{2j_2} \dots A^{i_N j_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N}$  après permutation des indices  $j_1$  et  $j_2$  et changement de signe dans le deuxième terme. Dans la dernière ligne on reconnaît bien, à un signe près, le déterminant de la matrice  $(A_{ij})$  puisque :

$$\det(A_{ij}) = \varepsilon_{j_1 \dots j_N} A^{1j_1} \dots A^{Nj_N}. \quad (7.3.84)$$

D'autre part, comme le facteur  $N!$  dans l'équation compense un terme identique dans le développement de l'exponentielle  $\exp(\chi_i^* A^{ij} \chi_j)$  on a finalement "démontré" l'éq. (7.3.74).

On peut remarquer, en passant, que l'introduction des variables de Grassmann est nécessaire pour pouvoir "exponentier" le déterminant de Fadeev-Popov. En effet, si on avait utilisé des variables commutantes  $\phi_a$  dans l'équation (7.3.74) le résultat aurait été

$$\int \Pi_{a,b} d\phi^{*a} d\phi^b \exp[-i\phi^{*a} M_G^{ab} \phi^b] \sim \frac{1}{\det(M_G^{ab})}, \quad (7.3.85)$$

résultat que l'on a déjà rencontré en éq. (7.2.49).

#### • Fonctionnelle génératrice des fantômes et forme de $(M_G^{ab})$

L'exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov, éq. (7.3.74), conduit donc une nouvelle contribution à la fonctionnelle génératrice de la théorie :

$$W[\zeta, \zeta^*] = \int [D\chi][D\chi^*] \exp[-i \int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) M_G^{ab}(x, y) \chi^b(y) + i \int d^4x (\chi^{*a}(x) \zeta^a(x) + \zeta^{*a}(x) \chi^a(x))], \quad (7.3.86)$$

avec  $\zeta^a$  et  $\zeta^{*a}$  les sources respectivement des champs  $\chi^{*a}$  et  $\chi^a$ . On rappelle que la matrice  $(M_G^{ab})$  introduite en éq. (7.3.70) décrit la variation de la quantité  $G^\mu A_\mu^a(x)$  sous un changement des paramètres du groupe de jauge.

Pour une *jauge covariante* :

$$\begin{aligned} M_G^{ab}(x, y) &= \frac{\delta \partial^\mu A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \frac{\partial^\mu \delta A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} \\ &= \frac{\partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ac} \alpha^c(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \delta^{(4)}(x - y) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab}, \end{aligned} \quad (7.3.87)$$

où on a utilisé une des équations (7.1.32) avec  $(\mathcal{D}_\mu)^{ac}$  la dérivée covariante dans la représentation adjointe.

Pour une *jauge axiale* :

$$\begin{aligned} M_G^{ab}(x, y) &= \frac{\delta n^\mu A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \delta^{(4)}(x - y) n^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \\ &= \delta^{(4)}(x - y) (\delta^{ab} n \cdot \partial - g f^{abc} n \cdot A^c(x)). \end{aligned} \quad (7.3.88)$$

L'éq. (7.3.86) devient donc en jauge covariante :

$$W[\zeta, \zeta^*] = \int [D\chi][D\chi^*] \exp[i \int d^4x (-\chi^{*a}(x) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \chi^b(x) + \chi^{*a}(x) \zeta^a(x) + \zeta^{*a}(x) \chi^a(x))], \quad (7.3.89)$$

avec une modification évidente pour le choix d'une jauge axiale.

### • Le lagrangien et la fonctionnelle génératrice de QCD

Revenant à l'éq. (7.2.35) et rassemblant toutes les pièces du puzzle (contribution des gluons et des fermions, fixage de la jauge, exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov) on arrive à la génératrice fonctionnelle de QCD pour une saveur de quark  $\psi$  :

$$W[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*] = \int [DA][D\psi][D\bar{\psi}][D\chi][D\chi^*] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_{QCD} + \hbar(J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} + \chi^*\zeta + \zeta^*\chi)] \right] \quad (7.3.90)$$

où  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  sont les sources des anti-fermions et des fermions respectivement,  $\zeta$  et  $\zeta^*$  sont celles des fantômes.  $\mathcal{L}_{QCD}$  est le lagrangien complet de QCD que l'on décompose en

$$\boxed{\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F} \quad (7.3.91)$$

avec respectivement le terme cinétique des gluons,

$$\boxed{\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c] [\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}]} \quad (7.3.92)$$

le terme de fixage de jauge (covariante),

$$\boxed{\mathcal{L}_{GF} = \frac{-1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}, \quad (7.3.93)$$

le terme cinétique des fantômes de Fadeev-Popov (*jauge covariante*),

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= -\chi^{*a} \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) = (\partial^\mu \chi^{*a}) \mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b \\ &= (\partial^\mu \chi^{*a}) (\delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} A_\mu^c) \chi^b, \end{aligned}} \quad (7.3.94)$$

le terme cinétique du quark (fermion),

$$\boxed{\mathcal{L}_F = \bar{\psi} (i \mathcal{D} - m) \psi = \bar{\psi} \left( i(\partial_\mu - ig A_\mu^b T^b) \gamma^\mu - m \right) \psi.} \quad (7.3.95)$$

On note que les première et deuxième égalités de l'éq. (7.3.94) diffèrent par une dérivée totale que l'on néglige, comme d'habitude, car elle donne une contribution nulle à l'intégrale  $\int d^4x \mathcal{L}_{FP}$  en supposant les champs suffisamment convergents à l'infini.

Une rapide inspection des différents termes du lagrangien montre qu'il existe un couplage dérivatif à 3 gluons et un couplage à 4 gluons dans  $\mathcal{L}_G$ , un couplage fantôme-fantôme-gluon dans  $\mathcal{L}_{FP}$ . Ces

termes d'interaction entre bosons de jauge sont nouveaux par rapport à QED et sont la conséquence de la structure non abélienne du groupe de jauge. En revanche, les couplages des gluons aux fermions sont similaires (à une matrice de couleur près) à ceux du photon aux fermions chargés en QED. Mais comme prévu les fantômes ne sont pas couplés aux fermions.

Si on travaille en *jauge axiale* les termes  $\mathcal{L}_{GF}$  et  $\mathcal{L}_{FP}$  sont différents et on a : le terme de fixage de jauge (axiale),

$$\boxed{\mathcal{L}_{GF} = \frac{-1}{2\xi} (n^\mu A_\mu^a)^2}, \quad (7.3.96)$$

le terme cinétique des fantômes de Fadeev-Popov (*jauge axiale*),

$$\boxed{\mathcal{L}_{FP} = -\chi^{*a} (n^\mu \mathcal{D}_\mu)^{ab} \chi^b = -\chi^{*a} (n \cdot \partial - g f^{abc} n \cdot A^c) \chi^b}. \quad (7.3.97)$$

Le choix  $n \cdot A^c = 0$  permet d'annuler l'interaction entre les gluons et les fantômes ce qui conduit alors, pour ce choix de jauge, à ignorer les fantômes puisqu'ils ne couplent à aucun degré de liberté physique<sup>3</sup>.

## 7.4 Règles de Feynman en QCD

Pour dériver les règles de Feynman à partir de la fonctionnelle génératrice  $W[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$ , éqs. (7.3.90) et (7.3.91) on procède en deux temps, comme pour le modèle  $\lambda\phi^4$  : on considère d'abord  $W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$  obtenu en prenant le couplage nul dans la densité lagrangienne et on construit les fonctions à deux points, éq. (7.2.37), en dérivant par rapport aux sources : cela permet d'obtenir le propagateur libre des gluons, fantômes et fermions. Puis on dérivera les couplages de QCD via une équation de type (7.2.42). Dans toute la discussion, la génératrice fonctionnelle libre joue un rôle crucial : on utilisera la forme où l'intégration sur les champs a été effectuée selon la dérivation menant à l'éq. (7.2.50) et il est facile de voir que cette génératrice peut s'écrire sous une forme factorisée :

$$W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*] = W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] W_0[\eta, \bar{\eta}]. \quad (7.4.98)$$

### • Les propagateurs

#### Gluons

Considérant maintenant chacune des composantes de  $W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$  de la génératrice fonctionnelle libre de QCD, on a pour les termes gluoniques et celui de fixage de jauge (il est nécessaire de considérer seulement la partie de la génératrice qui dépend des sources de gluons) :

$$W_0[J] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{a\mu}(x) \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) J^{b\nu}(y) \right]. \quad (7.4.99)$$

3. On remarque, qu'en jauge covariante, la condition  $\partial^\mu A_\mu^c = 0$  n'implique pas le découplage des gluons. En effet, quelque soit la forme de l'éq. (7.3.94), il y a bien un couplage dérivatif du gluon aux fantômes : pour la première forme on a  $\chi^{*a} (\delta^{ab} \square \chi^b - g f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu \chi^b)$ , tandis que pour la deuxième on trouve  $(\partial^\mu \chi^{*a}) (\delta^{ab} \partial_\mu \chi^b - g f^{abc} A_\mu^c \chi^b)$ .

Pour obtenir cette expression on a effectué l'intégrale fonctionnelle sur les champs suivant la discussion précédent l'éq. (7.2.50) et la fonction  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$  satisfait (voir éq. (7.2.51)) :

$$\int d^4z \mathcal{D}^{ac\mu\nu}(x, z) \mathcal{P}_{\mu\nu}^{cb}(z, y) = \delta^{ab} \delta^4(x - y), \quad (7.4.100)$$

avec l'opérateur  $\mathcal{D}^{cb\mu\nu}(z, y)$ , jouant le rôle de l'opérateur  $K(z, y)$  dans le terme cinétique des gluons. Il est extrait des éqs. (7.3.92) et (7.3.93) pour trouver :

$$\mathcal{D}^{cb\mu\nu}(z, y) = \delta^{cb} \delta^4(z - y) (-g^{\mu\nu} \square_y + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_y^\mu \partial_y^\nu). \quad (7.4.101)$$

Cette forme est obtenue en faisant une intégration par partie dans  $\mathcal{L}_G$  et  $\mathcal{L}_{GF}$  et négligeant le terme dérivée totale. Pour résoudre l'éq. (7.4.100), on introduit la transformée de Fourier :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ac}(x, z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-z)} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ac}(k) \quad (7.4.102)$$

dans l'équation éq. (7.4.100) et on trouve après quelques manipulations simples :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi) k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.4.103)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour obtenir le propagateur du gluon dans l'espace des coordonnées (voir éq. (7.2.37)) :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) &= \frac{\delta^2}{i\delta J^{a\mu}(x_1) i\delta J^{b\nu}(x_2)} \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{\rho\sigma}(x) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{cd}(x, y) J^{d\sigma}(y) \right] \\ &= -i \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.4.104)$$

Dans l'espace des impulsions le propagateur du gluon est finalement, en *jauge covariante* :

$$\boxed{G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = \delta^{ab} G_{\mu\nu}(k)}. \quad (7.4.105)$$

On mentionne également la forme du propagateur du gluon en *jauge axiale* dans la limite  $\xi \rightarrow 0$  (voir éq. (2.5.72)) :

$$\boxed{G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2})}. \quad (7.4.106)$$

On vérifie bien les contraintes suivantes :

$$n^\mu G_{\mu\nu}^{ab}(k) = n^\nu G_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0. \quad (7.4.107)$$

### Fantômes

Pour dériver le propagateur des fantômes en *jauge covariante*, on part de

$$\int d^4x \mathcal{L}_{0_{FP}} = - \int d^4x d^4y \delta^4(x - y) \chi^{*a}(x) \delta^{ab} \delta_y^2 \chi^b(y), \quad (7.4.108)$$

d'après l'éq. (7.3.94) ce qui permet d'écrire la génératrice libre (seule la partie de la génératrice fonctionnelle dépendant des sources  $\zeta^{*a}, \zeta^b$  est à prendre en compte)

$$W_0[\zeta, \zeta^*] = \exp\left[i \int d^4x d^4y \zeta^{*a}(x) \mathcal{P}^{ab}(x, y) \zeta^b(y)\right] \quad (7.4.109)$$

où les  $\zeta^{*a}, \zeta^b$  sont les termes de source et  $\mathcal{P}^{ab}(x, y)$  est l'inverse de l'opérateur  $\delta^4(x - y) \delta^{ab} \delta_y^2$  au sens de l'équation (7.2.51). On trouve facilement sa transformée de Fourier

$$\mathcal{P}^{ab}(k) = -\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.4.110)$$

Le propagateur du fantôme dans l'espace des coordonnées est

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab}(x_1, x_2) &= \left[ \frac{\delta}{i\delta\zeta^{*a}(x_1)} \left( \frac{\delta}{-i\delta\zeta^b(x_2)} \right) W_{0_{FP}}[\zeta, \zeta^*] \right]_{\zeta, \zeta^*=0} \\ &= i\mathcal{P}^{ab}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.4.111)$$

On rappelle le signe négatif associé à l'opérateur  $\delta/\delta\zeta_b(y)$  dans l'équation ci-dessus du fait qu'il faut anti-commuter cet opérateur avec le champ  $\chi^*$  dans la génératrice fonctionnelle (eq. (7.3.90)) pour construire le propagateur  $\langle \mathcal{T}\chi(x)\chi^*(y) \rangle$ . Dans l'espace des impulsions le propagateur est donc :

$$\boxed{\mathcal{G}^{ab}(k) = -\delta^{ab} \frac{i}{k^2 + i\epsilon}.} \quad (7.4.112)$$

On remarque que le signe du propagateur du fantôme est l'opposé de celui d'un champ scalaire usuel (comparer l'équation avec (7.2.55)) : ceci est la conséquence du fait que les fantômes de Fadeev-Popov sont des scalaires, de masse nulle qui, comme les fermions obéissent à des relations d'anti-commutation.

En *jauge axiale* avec la condition  $n \cdot A^c = 0$  la forme du propagateur est différente mais on verra plus bas qu'il n'y a, dans ce cas pas lieu d'introduire les champs de fantômes.

#### Fermions

Un raisonnement similaire permet d'obtenir, à partir de  $W_0[\eta, \bar{\eta}]$  et de l'éq. (7.3.95) le propagateur du fermion

$$\boxed{S^{ij}(p) = \delta^{ij} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon},} \quad (7.4.113)$$

avec la définition

$$-iS^{ij}(x_1, x_2) = \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}^i(x_1)} \left( \frac{\delta}{-i\delta\eta^j(x_2)} \right) \exp\left[i \int d^4x d^4y \bar{\eta}^k(x) \mathcal{P}^{kl}(x, y) \eta^l(y)\right]_{\eta, \bar{\eta}=0}, \quad (7.4.114)$$

où  $i, j$  sont les indices de couleur du fermion.

• **Les vertex**

Gluons

Les termes d'interaction dans le lagrangien  $\mathcal{L}_G$  éq. (7.3.92) s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{G_I} = -\frac{g}{2} f^{a'b'c'} [\partial^{\mu'} A^{a'\nu'} - \partial^{\nu'} A^{a'\mu'}] A_{\mu'}^{b'} A_{\nu'}^{c'} - \frac{g^2}{4} f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} A_{\mu'}^{b'} A_{\nu'}^{c'} A^{d'\mu'} A^{e'\nu'} \quad (7.4.115)$$

D'après l'éq. (7.2.42), la partie de la génératrice fonctionnelle qui nous intéresse pour dériver les auto-couplages du gluon est celle proportionnelle à  $\mathcal{L}_{G_I}$  dans laquelle les champs sont remplacés par les opérateurs  $\frac{\delta}{i\delta J}$ . Ces opérateurs agissent sur la génératrice fonctionnelle libre calculée en éq. (7.4.99). On devra donc calculer :

$$W[J]_{G+GF} = \left[ -i\frac{g}{2} \int dx f^{a'b'c'} [\partial^{\mu'} \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}} - \partial^{\nu'} \frac{\delta}{i\delta J_{\mu'}^{a'}}] \frac{\delta}{i\delta J^{b'\mu'}} \frac{\delta}{i\delta J^{c'\nu'}} \right. \\ \left. -i\frac{g^2}{4} \int dx f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} \frac{\delta}{i\delta J_{\mu'}^{b'}} \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{c'}} \frac{\delta}{i\delta J^{d'\mu'}} \frac{\delta}{i\delta J^{e'\nu'}} \right] \exp \frac{i}{2} \int dy dz J^{g\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{gh}(y, z) J^{h\sigma}(z), \quad (7.4.116)$$

où toutes les sources dans les opérateurs  $\frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}}(x), \dots$ , sont évaluées au point  $x, \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}}(x)$  et on écrit  $dx$  au lieu de  $d^4x$ . On veut construire la fonction à 3-points qui est donnée par

$$G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J^{b\nu}(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J^{c\rho}(x_3)} W[J]_{G+GF} \right]_{\forall J=0}, \quad (7.4.117)$$

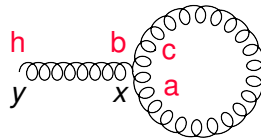
ainsi que celle à 4-points  $G_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  qui est donnée par une expression similaire. Seuls contribueront les termes cubiques en les sources  $J$  dans l'équation (7.4.116) pour la fonction à 3-points et les termes quartiques en les sources pour la fonction à 4-points. Evaluant l'éq. (7.4.116) ces termes sont :

$$\left[ -i\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int dx dz_1 dz_2 dz_3 [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a'h_1\nu'\sigma_1}(x, z_1) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a'h_1\mu'\sigma_1}(x, z_1)] \mathcal{P}_{\mu'\sigma_2}^{b'h_2}(x, z_2) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_3}^{c'h_3}(x, z_3) \right. \\ \left. J_{\sigma_1}^{h_1}(z_1) J^{h_2\sigma_2}(z_2) J^{h_3\sigma_3}(z_3) \right. \\ \left. -i\frac{g^2}{4} f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} \int dx dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \mathcal{P}_{\mu'\sigma_1}^{b'h_1}(x, z_1) \mathcal{P}_{\mu'\sigma_2}^{c'h_2}(x, z_2) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_3}^{d'h_3}(x, z_3) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_4}^{e'h_4}(x, z_4) \right. \\ \left. J^{h_1\sigma_1}(z_1) J^{h_2\sigma_2}(z_2) J^{h_3\sigma_3}(z_3) J^{h_4\sigma_4}(z_4) \right] \exp \frac{i}{2} \int dy dz J^{g\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{gh}(y, z) J^{h\sigma}(z) \quad (7.4.118)$$

Il existe d'autres termes dans  $W[J]_{G+GF}$ , par exemple,

$$-i\frac{g}{2} f^{abc} \int dx dy \partial^\mu \mathcal{P}_\nu^{ca\nu}(x, x) \mathcal{P}_{\mu\sigma}^{bh}(x, y) J^{h\sigma}(y) \quad (7.4.119)$$

que l'on peut représenter graphiquement par un diagramme de "tadpole" (tétard) comme indiqué sur la figure.





Ce diagramme est nul puisque l'on contracte le tenseur  $f^{abc}$  avec un propagateur symétrique en les indices de couleur  $\mathcal{P}^{ca}$  : un gluon coloré ne peut s'annihiler en un état qui a les nombres quantiques du vide puisque la symétrie de couleur est exacte. Quant au terme en  $g^2$  il contient deux autres facteurs, un sans source et l'autre proportionnel au produit de deux sources : ils ne sont pas nuls et ont la même interprétation que des termes similaires dans le modèle  $\lambda\phi^4$  (voir la discussion de l'éq. (7.2.58)).

Appliquant l'éq. (7.4.117) à l'éq. (7.4.118), seul contribuera le terme en  $-ig/2$  à la fonction à trois pattes. L'action de la dérivée par rapport aux trois sources donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int dx \left\{ [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' a \nu' \mu}(x, x_1) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' a \mu' \nu}(x, x_1)] [\mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\mu' \rho}^{b' c}(x, x_3) + \mathcal{P}_{\nu' \nu}^{b' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' c}(x, x_3)] \right. \\ + [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' b \nu' \nu}(x, x_2) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' b \mu' \nu}(x, x_2)] [\mathcal{P}_{\mu' \rho}^{b' c}(x, x_3) \mathcal{P}_{\nu' \mu}^{c' a}(x, x_1) + \mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' c}(x, x_3) \mathcal{P}_{\mu' \mu}^{b' a}(x, x_1)] \\ \left. + [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' c \nu' \rho}(x, x_3) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' c \mu' \rho}(x, x_3)] [\mathcal{P}_{\mu' \nu}^{b' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\nu' \mu}^{c' a}(x, x_1) + \mathcal{P}_{\nu' \nu}^{c' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\mu' \mu}^{b' a}(x, x_1)] \right\} \end{aligned} \quad (7.4.120)$$

où chaque ligne correspond à l'action de  $\delta/i\delta J^{c\rho}(x_3)$  sur chacun des  $J^{h_i\sigma_3}(z_i)$  de l'éq. (7.4.118). Rappelant que les tenseurs  $\mathcal{P}$  sont proportionnels aux propagateurs,  $\mathcal{P}_{\mu' \mu}^{a' a}(x, y) = i G_{\mu' \mu}^{a' a}(x, y)$  et introduisant la transformée de Fourier de ces derniers (voir les éqs. ((7.4.104), 7.4.105)),

$$G_{\mu' \mu}^{a' a}(x, x_i) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp^{-ik(x-x_i)} \delta^{a' a} G_{\mu' \mu}(k), \quad (7.4.121)$$

dans l'éq. (7.4.120), puis effectuant l'intégrale sur  $x$  on trouve

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = & -\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int \prod_{i=1}^3 \left( \frac{dk_i}{(2\pi)^4} e^{ik_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \\ & \left\{ \delta^{a' a} [k_1^{\mu'} G^{\nu' \mu}(k_1) - k_1^{\nu'} G^{\mu' \mu}(k_1)] [\delta^{b' b} G_{\mu' \nu}(k_2) \delta^{c' c} G_{\nu' \rho}(k_3) + \delta^{c' b} G_{\nu' \nu}(k_2) \delta^{b' c} G_{\mu' \rho}(k_3)] \right. \\ & \delta^{a' b} [k_2^{\mu'} G^{\nu' \nu}(k_2) - k_2^{\nu'} G^{\mu' \nu}(k_2)] [\delta^{b' c} G_{\nu' \rho}(k_3) \delta^{c' a} G_{\nu' \mu}(k_1) + \delta^{c' c} G_{\nu' \rho}(k_3) \delta^{b' a} G_{\mu' \mu}(k_1)] \\ & \left. \delta^{a' c} [k_3^{\mu'} G^{\nu' \rho}(k_3) - k_3^{\nu'} G^{\mu' \rho}(k_3)] [\delta^{b' b} G_{\mu' \nu}(k_2) \delta^{c' a} G_{\nu' \mu}(k_1) + \delta^{c' b} G_{\nu' \nu}(k_2) \delta^{b' a} G_{\mu' \mu}(k_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Contractant les indices de couleurs on fait facilement sortir un facteur global  $f^{abc}$ , et regroupant les termes de façon à faire apparaître la combinaison d'impulsions  $k_1 - k_2$  portant l'indice de Lorentz de l'impulsion  $k_3$ , soit  $(k_1 - k_2)^{\mu'} G_{\mu' \rho}(k_3)$  (et de même pour les autres permutations), on trouve finalement

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = & \int \prod_{i=1}^3 \left( \frac{dk_i}{(2\pi)^4} e^{ik_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) G_{\mu' \mu}(k_1) G_{\nu' \nu}(k_2) G_{\rho' \rho}(k_3) \\ & g f^{abc} [(k_1 - k_2)^{\rho'} g^{\mu' \nu'} + (k_2 - k_3)^{\mu'} g^{\nu' \rho'} + (k_3 - k_1)^{\nu'} g^{\rho' \mu'}]. \end{aligned} \quad (7.4.122)$$

Le vertex, au sens de diagramme de Feynman, est obtenu en tronquant la fonction à trois points des propagateurs externes et en omettant la conservation d'énergie-impulsion au vertex et le résultat est donc donné par la deuxième ligne de l'équation ci-dessus. La dérivation du couplage à trois gluons

a été donnée avec suffisamment de détails pour obtenir "facilement" le couplage à quatre gluons et on trouvera qu'il est proportionnel à  $-ig^2$  fois une structure tensorielle en indices de couleur et de Lorentz relativement compliquée qui sera donnée plus bas. On remarque la différence de phase entre les couplages à trois et quatre gluons : l'absence de facteur  $i$  dans le cas de trois gluons est liée au fait que les dérivées  $\partial^{\mu'}$ ,  $\partial^{\nu'}$  dans l'éq. (7.4.120) font "descendre" les facteurs  $-ik_i^{\mu'}$  dans le résultat final.

### Fantômes

Pour le couplage, en *jauge covariante*, des fantômes aux gluons, on part de la densité lagrangienne d'interaction que l'on lit facilement de l'éq. (7.3.94) :

$$\mathcal{L}_{FP_I} = -gf^{a'b'c'}(\partial^{\mu'}\chi^{*a'})\chi^{b'}A_{\mu'}^{c'}. \quad (7.4.123)$$

La partie de la génératrice fonctionnelle à considérer pour extraire le couplage sera donc d'après l'éq. (7.2.42)

$$W[J, \zeta, \zeta^*] = -igf^{a'b'c'} \int dx \left( \partial^{\mu'} \frac{\delta}{i\delta\zeta^{*a'}(x)} \right) \left( \frac{\delta}{-i\delta\zeta^{b'}(x)} \right) \frac{\delta}{i\delta J^{c'\mu'}(x)} W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] \quad (7.4.124)$$

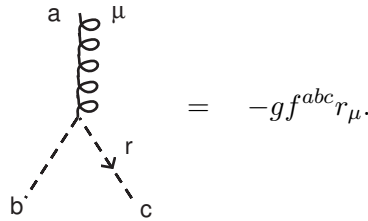
avec la génératrice des champs libres des gluons et des fantômes :

$$W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] = \exp i \int dy dz [\zeta^{*d}(y) \mathcal{P}^{de}(y, z) \zeta^e(z) + \frac{1}{2} J^{d\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{de}(y, z) J^{e\sigma}(z)], \quad (7.4.125)$$

donnée par les éqs. (7.4.99), (7.4.109). La fonction à 3-points fantôme-fantôme-gluon est obtenue suivant l'éq. (7.2.37) par :

$$G_{FP,FP,\mu}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{\delta}{i\delta\zeta^{*c}(x_3)} \left( \frac{\delta}{-i\delta\zeta^b(x_2)} \right) \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x_1)} W[J, \zeta, \zeta^*] \right]_{J, \zeta, \zeta^*=0}, \quad (7.4.126)$$

ce qui permet de dériver le couplage après troncation des propagateurs et de la fonction de conservation d'énergie implusion :



$$= -gf^{abc}r_\mu.$$

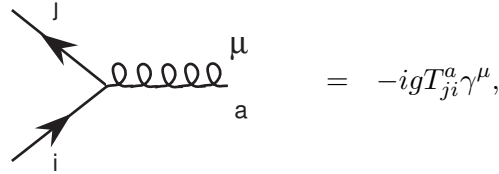
On remarque que ce couplage ne dépend que de l'impulsion  $r$  du champ de fantôme sortant en accord avec l'éq. (7.4.123) où l'opérateur de dérivation n'agit que sur le champ  $\chi^*$ . On remarque également qu'il est valable dans la jauge de Landau aussi bien que dans la jauge de Feynman puisqu'indépendant du paramètre  $\xi$  de l'éq. (7.4.105).

Dans le cas de la *jauge axiale*, avec le choix  $n \cdot A^c = 0$ , les fantômes ne se couplent pas aux gluons comme on le voit en éq. (7.3.97). N'ayant pas d'interaction non plus avec les fermions, ils

ne se couplent donc à aucun champ "physique" et on peut les ignorer dans les calculs.

### Fermions

On peut utiliser les techniques ci-dessus pour dériver le couplage du gluon aux fermions. On peut beaucoup plus simplement comparer le terme d'interaction d'un photon avec un fermion  $\psi$  de charge  $e$  dans  $\mathcal{L}_{QED}$  et celui d'un gluon avec un fermion  $\psi = \{\psi_i\}$  de charge  $gT^a$  ( $gT_{ji}^a$  en composantes de couleur) dans  $\mathcal{L}_{QCD}$ , pour facilement en déduire par analogie le couplage recherché :



$$= -igT_{ji}^a \gamma^\mu,$$

où un gluon de couleur  $a$  est absorbé par un fermion de couleur  $i$  pour donner un fermion de couleur  $j$  comme indiqué sur le schéma.

#### • Remarques sur le propagateur du gluon

On peut se reporter à la section 2.5.1 pour discuter la relation entre la forme du propagateur du gluon et le nombre de degrés de liberté des vecteurs polarisation. On a vu que les formes covariantes du propagateur :

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{et} \quad G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}, \quad (7.4.127)$$

respectivement en jauge de Feynman et de Landau contenaient des composantes de polarisation (scalaire, longitudinale) non physiques. En QED, le photon est couplé à un courant fermionique conservé et on a vu que ces composantes non physiques ne contribuent pas aux observables. Il en est de même pour un gluon couplé à un fermion. Mais un gluon interagit également avec les gluons par un couplage qui ne filtre pas les états non physiques. Il est donc nécessaire d'éliminer ces contributions par les champs de fantômes couplés aux gluons. En revanche, en jauge axiale dans la limite  $\xi \rightarrow 0$ ,

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\frac{i \delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right), \quad (7.4.128)$$

les degrés de polarisation non physiques sont éliminés (comme en QED, voir la discussion suivant l'éq. (2.5.77)) et les fantômes ne sont pas nécessaires.

## 7.5 Invariance BRS-T : Becchi-Rouet-Stora et Tyutin

L'interaction entre quarks et gluons a été construite au niveau classique en imposant l'invariance de jauge sous une transformation locale du groupe de couleur  $SU(3)$  : la densité lagrangienne éq. (7.1.30) de la section (7.1) est bien invariante sous la transformation de jauge définie par les équations (7.1.32). Mais on a vu que la procédure de quantification, respectant l'invariance de jauge, nécessite l'extension de ce lagrangien à la forme éq. (7.3.91) contenant la combinaison  $\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$  qui n'est pas invariante. On peut cependant montrer que ce lagrangien est invariant sous la transformation

BRS (Becchi-Rouet-Stora et plus tard Tyutin) qui est une extension de la transformation de jauge usuelle. Pour définir ces transformations on écrit, en toute généralité, le paramètre de jauge

$$\alpha^a(x) = \epsilon \chi^a(x) \quad (7.5.129)$$

où  $\epsilon$  est une variable de Grassman et  $\chi^a(x)$  le champ de fantôme. On peut vérifier que les transformations BRS :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\epsilon\chi^a T^a \psi \\ \delta A_\mu^a &= \epsilon \mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b \\ \delta\chi^a &= -\frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \chi^b \chi^c \\ \delta\chi^{*a} &= -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu A_\mu^a) \epsilon \end{aligned} \quad (7.5.130)$$

laissent  $\mathcal{L}_{QCD}$  invariant. Ceci est évident pour la partie  $\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F$  (les deux premières équations sont identiques aux deux premières lignes des éqs. (7.1.32), mais cela nécessite un peu de travail pour les autres termes. On ré-écrit d'abord  $\mathcal{L}_{FP} = -\chi^{*a} \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b)$  qui est équivalent à l'éq. (7.3.94) à une dérivée totale près que l'on néglige. On doit donc prouver que :

$$\delta(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\nu \delta A_\nu^a) - (\delta\chi^{*a}) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) - \chi^{*a} \partial^\mu \delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) \quad (7.5.131)$$

est nulle. On voit facilement que, substituant  $\delta A_\mu^a$  et  $\delta\chi^{*a}$  des éqs. (7.5.130) respectivement dans le premier et deuxième terme du membre de droite, ces deux termes s'annulent de sorte qu'il s'agit de montrer maintenant que  $\delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) &= \partial_\mu (\delta\chi^a) - g f^{abc} [(\delta A_\mu^c) \chi^b + A_\mu^c \delta\chi^b] \\ &= -\frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \partial_\mu (\chi^b \chi^c) - g f^{abc} [(\epsilon \mathcal{D}_\mu^{cd} \chi^d) \chi^b - \frac{1}{2} g f^{bde} A_\mu^c \epsilon \chi^d \chi^e] \\ &= -g f^{abc} \epsilon \left[ \frac{1}{2} ((\partial_\mu \chi^b) \chi^c + \chi^b \partial_\mu \chi^c) + (\partial_\mu \chi^c) \chi^b - g f^{cde} A_\mu^e \epsilon \chi^d \chi^b - \frac{1}{2} g f^{bde} A_\mu^c \epsilon \chi^d \chi^e \right]. \end{aligned}$$

Le terme linéaire en  $g$  de la dernière ligne s'annule du fait de l'antisymétrie de  $f^{abc}$  et de l'anticommution des  $\chi^i$ . Quant au terme en  $g^2$ , il faut pour le réduire utiliser l'identité de Jacobi (cf éq. (7.1.22)) :

$$f^{abc} f^{bde} = f^{dcb} f^{abe} + f^{adb} f^{cbe} \quad (7.5.132)$$

qui permet de d'écrire

$$g^2 \epsilon [f^{abc} f^{cde} A_\mu^e \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} f^{d'c'b'} f^{ab'e'} A_\mu^{c'} \chi^{d'} \chi^{e'} - \frac{1}{2} f^{ad'b'} f^{c'b'e'} A_\mu^{c'} \chi^{d'} \chi^{e'}], \quad (7.5.133)$$

où on a "primé" certains indices pour changement de notation ultérieur. Si l'on fait maintenant  $(b', c', d', e') = (c, e, d, b)$  dans le deuxième facteur et  $(b', c', d', e') = ((c, e, b, d)$  dans le troisième, alors on reconstruit

$$g^2 f^{abc} \epsilon [f^{cde} A_\mu^e \chi^d \chi^b - \frac{1}{2} f^{dec} A_\mu^e \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} f^{ecd} A_\mu^e \chi^b \chi^d] = g^2 f^{abc} f^{cde} \epsilon [\chi^d \chi^b - \frac{1}{2} \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} \chi^b \chi^d],$$

qui est bien nul.

On remarque que si on applique deux fois les transformations BRS c'est à dire si on calcule  $\delta^2\psi, \dots$  alors le résultat est nul puisqu'il apparaît la combinaison  $\epsilon\epsilon$  qui s'annule. Les transformations BRS sont dites nilpotentes. Il est possible de déduire des transformations BRS les identités de Slavnov-Taylor, l'équivalent des identités de Ward-Takahashi pour les théories de jauge non abéliennes, à l'aide desquelles on prouve la renormalisabilité de ces dernières à tous les ordres de perturbation.

## 7.6 Exemples de processus en arbre

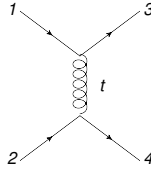
A l'aide des règles ci-dessus on peut "facilement" calculer les éléments de matrice de diffusion  $2 \rightarrow 2$  qui seront utiles pour le calcul des sections efficaces de processus hadroniques au niveau de Born. On donnera suffisamment de détails pour les premiers cas étudiés de façon à familiariser le lecteur avec les règles de Feynman en QCD et on sera plus expéditif à la fin. Les particules entrantes sont labelées 1 et 2 et les sortantes 3 et 4. Les variables cinématiques sont :

$$s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4, \quad t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4, \quad u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3. \quad (7.6.134)$$

On suppose les quarks de masse nulle.

- $q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4$

Les quarks  $q$  et  $q'$  ne sont pas identiques. Il existe un seul diagramme de Feynman avec échange d'un gluon dans la voie  $t$  :



L'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\mathcal{M} = (-ig)^2 (\bar{u}_3 T^a \gamma_\mu u_1) \left(-\frac{i}{t}\right) (\bar{u}_4 T^a \gamma^\mu u_2), \quad (7.6.135)$$

où  $T^a$  est le facteur de couleur du vertex quark-quark-gluon. Cette expression est valable quelque soit la forme du propagateur du gluon (éq. (2.5.73) à 2.5.77)) puisque les termes dépendants de son impulsion s'annulent aux vertex. L'élément de matrice au carré sommé sur les états de polarisation et couleurs initiales et finales est :

$$\Sigma |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{t^2} \sum_{spin, couleur} \langle T_{ji}^a T_{i'j'}^b \rangle (\bar{u}_{3j} \gamma_\mu u_{1i} \bar{u}_{1i'} \gamma_\nu u_{3j'}) \langle T_{lk}^a T_{k'l'}^b \rangle (\bar{u}_{4k} \gamma^\mu u_{2l} \bar{u}_{2l'} \gamma^\nu u_{4k'})$$

où on a spécifié l'indice de couleur des fermions. Usant de  $u_{1i} \bar{u}_{1i'} = \delta_{ii'} \not{p}_1$  et autres relations

similaires on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\Sigma|\mathcal{M}|^2 &= g^4 \langle \text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^a T^b) \rangle > \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu) \frac{1}{t^2} \text{Tr}(\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu) \\
&= g^4 \langle \frac{\delta^{ab} \delta^{ab}}{2 \cdot 2} \rangle > 8 \frac{4 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + 4 p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{t^2} \\
&= g^4 \langle \frac{N^2 - 1}{4} \rangle > 8 \frac{s^2 + u^2}{t^2}
\end{aligned} \tag{7.6.136}$$

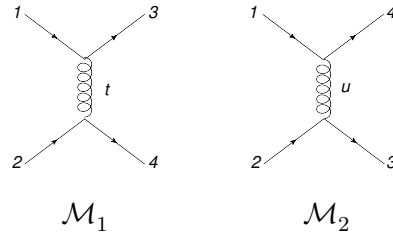
où on a systématiquement écrit le facteur de couleur entre  $\langle \rangle$  ( $N$  est le nombre de couleurs). Pour obtenir le résultat recherché il faut diviser par le nombre d'états de polarisation et de couleur du système initial soit  $1/4N^2$  et on trouve,

$$\boxed{\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2 = g^4 \langle \frac{C_F}{2N} \rangle > 2 \frac{s^2 + u^2}{t^2} = g^4 \frac{4}{9} \frac{s^2 + u^2}{t^2}}, \tag{7.6.137}$$

où le symbole  $\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2$  dénote le carré d'une amplitude sommé sur les états de polarisation et couleur finals et moyenné sur états initiaux. Ce résultat est valable pour la diffusion  $q_1 q_2' \rightarrow q_3 q_4'$  et  $q_1 \bar{q}_2' \rightarrow q_3 \bar{q}_4'$ .

•  $\boxed{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4}$  : quarks identiques

Dans ce cas il y a deux diagrammes avec l'échange d'un gluon dans la voie  $t$  ou dans la voie  $u$  : l'élément de matrice est la différence de deux termes  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$ ,



et s'écrit :

$$\mathcal{M} = (-ig)^2 [(\bar{u}_3 T^a \gamma_\mu u_1) (-\frac{i}{t}) (\bar{u}_4 T^a \gamma^\mu u_2) - (\bar{u}_4 T^a \gamma_\mu u_1) (-\frac{i}{u}) (\bar{u}_3 T^a \gamma^\mu u_2)], \tag{7.6.138}$$

où le signe  $-$  relatif entre les deux termes vient de l'interchange des quarks 3 et 4 qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Le calcul du carré de chacun de ces termes est similaire au cas précédent. Le terme d'interférence a une forme différente puisqu'il implique une seule trace et il s'écrit :

$$-2g^2 \langle \text{Tr} T^a T^b T^a T^b \rangle > \frac{1}{ut} \text{Tr} \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu. \tag{7.6.139}$$

Le réduction du facteur de couleur donne (voir l'appendice sec. 7.9) :

$$\begin{aligned}
\text{Tr} T^a T^b T^a T^b &= \text{Tr} T^b T^a T^a T^b + i f^{abc} \text{Tr} T^c T^a T^b \\
&= c_F \text{Tr} T^b T^b + \frac{i}{2} f^{abc} \text{Tr} T^c [T^a, T^b] \\
&= c_F^2 N - \frac{1}{2} f^{abd} f^{abc} \text{Tr} T^c T^d \\
&= -\frac{c_F}{2},
\end{aligned} \tag{7.6.140}$$

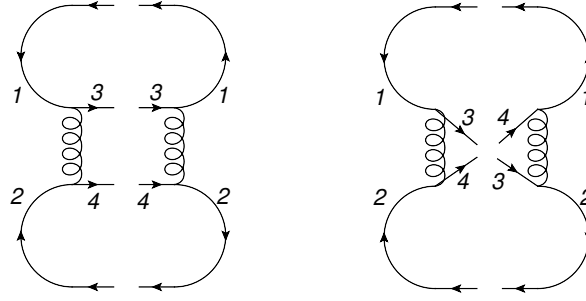


FIGURE 7.1 – Diffusion de deux quarks identiques : à gauche représentation de  $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^*$ , à droite celle de  $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*$ .

tandis que la trace sur les matrices de Dirac ne présente pas de difficultés et ce terme d'interférence est simplement

$$-\frac{c_F}{2}g^2 16 \frac{s^2}{ut}. \quad (7.6.141)$$

Prenant la moyenne sur les états initiaux (il faut diviser par  $4N^2$ ) on trouve pour la diffusion de deux quarks identiques

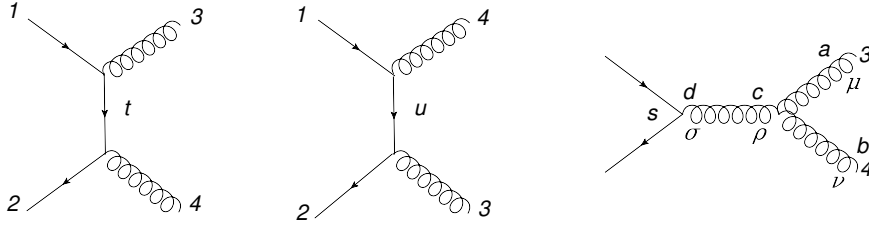
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= g^4 \left\langle \frac{C_F}{2N} \right\rangle 2 \left[ \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - \left\langle \frac{1}{N} \right\rangle 2 \frac{s^2}{ut} \right] \\ &= g^4 \left[ \frac{4}{9} \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{s^2}{ut} \right]. \end{aligned}} \quad (7.6.142)$$

qui est également valable pour la diffusion  $q_1 \bar{q}_2 \rightarrow q_3 \bar{q}_4$ .

On peut donner une représentation graphique du carré de l'élément de matrice. Le complexe conjugué de l'amplitude  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  est celle de  $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$  que l'on peut représenter par des diagrammes similaires à ceux de l'amplitude originale. Rapprochant un diagramme de son complexe conjugué et refermant les lignes qui portent le même label on obtient le diagramme de gauche de la figure 7.1 avec deux boucles de fermions (correspondant à deux traces), à chacune desquelles on associe un facteur  $N$  de couleur. Le terme d'interférence, représenté par le diagramme de droite, comprend au contraire une seule boucle (une seule trace) et un seul facteur  $N$ , d'où le  $1/N$  relatif dans l'éq. (7.6.142).

- $\boxed{q_1 \bar{q}_2 \rightarrow G_3 G_4; q_1 G_2 \rightarrow q_3 G_4; G_1 G_2 \rightarrow q_3 q_4}$  : diffusion quark-gluon

Ce processus est intéressant puisqu'il permet d'illustrer les subtilités des calculs QCD en faisant intervenir explicitement la structure non-abélienne de la théorie. Les trois diagrammes à considérer sont indiqués dans la figure :



et l'amplitude de diffusion pour des gluons de polarisation  $\kappa_3, \kappa_4$  s'écrit

$$\mathcal{M}^{(\kappa_3, \kappa_4)} = \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} \epsilon_\mu^{a, (\kappa_3)}(p_3) \epsilon_\nu^{b, (\kappa_4)}(p_4) \quad (7.6.143)$$

où on suppose que les vecteurs polarisation des gluons d'impulsion  $p_3$  et  $p_4$  satisfont la condition de Lorentz :

$$p_3 \cdot \epsilon^{a, (\kappa_3)}(p_3) = 0 \quad \text{et} \quad p_4 \cdot \epsilon^{b, (\kappa_4)}(p_4) = 0. \quad (7.6.144)$$

L'amplitude pour  $q_1 \bar{q}_2 \rightarrow G_3 G_4$  (le résultat pour les autres processus se déduit par croisement) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} = & (-ig) \bar{v}_2 [(-ig) T^b T^a \gamma^\nu \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \gamma^\mu + (-ig) T^a T^b \gamma^\mu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma^\nu \\ & + g T^d \gamma^\sigma \frac{G_{\sigma\rho}^{dc}(p_3 + p_4)}{s} f^{abc} V^{\mu\nu\rho}(p_3, p_4, -p_3 - p_4)] u_1, \end{aligned} \quad (7.6.145)$$

avec  $G_{\sigma\rho}^{dc}(p_3 + p_4)$  l'une des trois formes du propagateur du gluon (éqs. (7.4.127) et (7.4.128)) et la fonction  $V^{\mu\nu\rho}(p, q, r) = (p-q)^\rho g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g^{\nu\rho} + (r-p)^\mu g^{\nu\rho}$  est la partie dépendant des impulsions du couplage à 3 gluons, les impulsions  $p, q, r$  étant supposées sortantes du vertex.

• 1<sup>ère</sup> **remarque** : Seul le terme  $g_{\sigma\rho}$  dans le propagateur du gluon contribue : en effet, les termes contenant  $(p_1 + p_2)_\sigma$  contractés avec  $\bar{v}_2 \gamma^\sigma u_1$  s'annulent par l'équation de Dirac (conservation du courant fermionique) et les termes en  $(p_1 + p_2)_\rho$  contractés avec  $F^{\mu\nu\rho}(p_3, p_4, -p_1 - p_2)$  se réduisent à  $(p_4^\mu p_4^\nu - p_3^\mu p_3^\nu)$  qui s'annule quand contracté avec les vecteurs polarisation des gluons. Dans la suite on utilisera la forme éq. (7.4.127) pour le propagateur du gluon.

• 2<sup>ème</sup> **remarque** : On vérifie, comme pour QED, que si on substitue l'impulsion à l'un des vecteurs polarisation les quantités  $\mathcal{M}^{ab, \mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_\nu^{b, (\kappa_4)} = \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} \epsilon_\mu^{a, (\kappa_3)} p_{4\nu} = 0$ , mais, contrairement à QED, le terme impliquant le couplage à 3 gluons est nécessaire pour compenser la contribution des 2 premiers termes d'apparence abélienne dans la figure ci-dessus. En détail,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_\nu^{b, (\kappa_4)} = & -ig^2 \bar{v}_2 [T^b T^a \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \not{p}_3 + T^a T^b \not{p}_3 \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} \\ & - if^{abc} T^c \frac{1}{s} ((\not{p}_3 - \not{p}_4) p_3 \cdot \epsilon_4 + (p_3 + 2p_4) \cdot p_3 \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} - (p_4 + 2p_3) \cdot \epsilon^{b, (\kappa_4)} \not{p}_3)] u_1. \end{aligned} \quad (7.6.146)$$

On effectue facilement la "diracologie" en prouvant que

$$\frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \not{p}_3 = -1 \quad \text{et} \quad \not{p}_3 \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \not{p}_3 = 1 \quad (7.6.147)$$



quand évalué dans  $\bar{v}_2 [\dots] u_1$ , et que le coefficient de  $-if^{abc}T^c/s$  se réduit à  $s \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)}$  ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab,\mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_{4\nu}^{b,(\kappa_4)} &= -ig^2 \bar{v}_2 [(-T^b T^a + T^a T^b) \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)} - i f^{abc} T^c \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)}] u_1 \\ &= -ig^2 \bar{v}_2 [i f^{abc} T^c - i f^{abc} T^c] \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)} u_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.6.148)$$

Cette vérification ne prouve pas l'invariance de jauge QCD, comme c'était le cas en QED, mais seulement l'invariance par la translation  $\epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p) \rightarrow \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p) + p_\mu$ . En fait, les vecteurs  $\epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p)$  contraints par l'éq. (7.6.144) contiennent un état de polarisation non physique, somme des polarisations scalaire et longitudinale,  $(\epsilon_\mu^{a,(0)}(p) + \epsilon_\mu^{a,(3)}(p)) \propto p$  (voir éqs. (2.4.53) et la relation telle que :

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_{4\nu}^{b,(\kappa_4)} = 0$$

signifie que cet état de polarisation ne contribue pas aux processus physiques.

• **Calcul de  $\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2$**  : On calcule maintenant explicitement le carré de l'élément de matrice sommé sur polarisation et couleur. On travaille en jauge de Feynman éq. (7.4.127). Pour la somme sur la polarisation des gluons externes on choisit également  $g_{\mu\nu}$  (voir éq. 2.4.56) ce qui implique<sup>4</sup> que l'on somme sur les états de polarisation non physiques et il faudra donc les compenser en incluant dans le calcul la production de fantômes (voir plus bas). On décompose l'amplitude en trois termes :

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu} = \mathcal{M}_1^{ab,\mu\nu} + \mathcal{M}_2^{ab,\mu\nu} + \mathcal{M}_3^{ab,\mu\nu} \quad (7.6.149)$$

les deux premiers d'apparence abélienne et le troisième contenant le couplage à trois gluons. En notation simplifiée on a

$$\begin{aligned} \Sigma|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 &= g^4 \left[ \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma_\nu) \text{Tr}(T^b T^a T^a T^b) \right. \\ &+ \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma_\mu) \text{Tr}(T^a T^b T^b T^a) \\ &\left. + 2 \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma_\mu) \text{Tr}(T^b T^a T^b T^a) \right] \end{aligned} \quad (7.6.150)$$

Les traces sur les matrices  $\gamma$  s'effectuent facilement et on trouve pour les deux premières qu'elles sont simplement égales à  $8tu$  quant à la troisième elle est tout simplement nulle. Les traces sur les matrices de couleur sont triviales  $\text{Tr}(T^b T^a T^a T^b) = \text{Tr}(T^a T^b T^b T^a) = c_F^2 N$ . de sorte que :

$$\Sigma|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 = g^4 < c_F^2 N > 8 \left( \frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right). \quad (7.6.151)$$

Le carré du terme contenant le couplage à 3 gluons est

$$\begin{aligned} |\Sigma\mathcal{M}_3|^2 &= g^4 f^{abc} f^{abd} \text{Tr}(T^c T^d) \frac{1}{s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma^\sigma) [(p_3 - p_4)^\rho g^{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)^\mu g^{\nu\rho} - (p_4 + 2p_3)^\nu g^{\rho\mu}] \\ &\quad [(p_3 - p_4)_\sigma g_{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)_\mu g_{\nu\sigma} - (p_4 + 2p_3)_\nu g_{\sigma\mu}] \\ &= g^4 < c_F N^2 > \frac{1}{s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma^\sigma) [12p_4^\rho p_4^\sigma + 4s g^{\rho\sigma} + p_3^\rho p_4^\sigma + p_4^\rho p_3^\sigma] \\ &= -g^4 < c_F N^2 > \frac{4}{s^2} (4(t^2 + u^2) + 3tu). \end{aligned} \quad (7.6.152)$$

4. Avec ce choix on n'impose pas la contrainte  $p_i \cdot \epsilon^{a,(\kappa_i)}(p_i) = 0$  aux vecteurs polarisation.

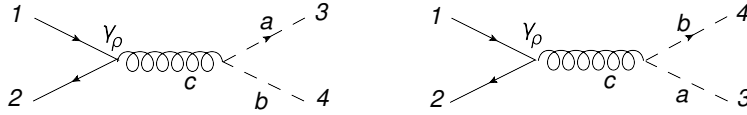
Il faut encore évaluer le terme d'interférence

$$2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^* = g^4 \frac{2}{ts} (i f^{abc} \operatorname{Tr}(T^b T^a T^c) \operatorname{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu (\not{p}_1 - \not{p}_3) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\rho) [(p_3 - p_4)_\rho g_{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)_\mu g_{\nu\rho} - (p_4 + 2p_3)_\nu g_{\rho\mu}]). \quad (7.6.153)$$

La réduction des traces de matrices de Dirac est un peu longue mais on trouve finalement

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^* &= g^4 \left\langle \frac{c_F N^2}{2} \right\rangle \left(-16 \frac{t}{s}\right) \\ 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3^* &= g^4 \left\langle \frac{c_F N^2}{2} \right\rangle \left(-16 \frac{u}{s}\right). \end{aligned} \quad (7.6.154)$$

Le calcul n'est malheureusement pas encore terminé car on a sommé sur des états de polarisation non physiques en utilisant éq. 2.4.56. Pour compenser leur contribution dans le calcul précédent il faut inclure la contribution des fantômes en évaluant la contribution des diagrammes suivants :



Ces diagrammes correspondent respectivement à la production des couples  $\chi^a \chi^{b*}$  et  $\chi^b \chi^{a*}$ . Il n'interfèrent donc pas ni d'ailleurs avec les diagrammes de production de gluons et il suffira donc d'évaluer le carré de chacun pour s'approcher de la fin du calcul. Les amplitudes correspondant à ces diagrammes sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{gh1} &= (-ig) \bar{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right) (-g f^{cba} p_3^\rho) \\ \mathcal{M}_{gh2} &= (-ig) \bar{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right) (-g f^{cab} p_4^\rho). \end{aligned} \quad (7.6.155)$$

Le carré de ces termes est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{gh1}^2 + \mathcal{M}_{gh2}^2 &= g^4 \left\langle f^{cba} f^{dba} \operatorname{Tr}(T^c T^d) \right\rangle \frac{\operatorname{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_1 \not{p}_3)}{s^2} + 3 \leftrightarrow 4 \\ &= g^4 \left\langle N \operatorname{Tr}(T^c T^c) \right\rangle \frac{2p_1 \cdot p_3 \operatorname{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_3)}{s^2} + 3 \leftrightarrow 4 \\ &= g^4 \left\langle c_F N^2 \right\rangle 4 \frac{tu}{s^2} \end{aligned} \quad (7.6.156)$$

Cette contribution doit être soustraite de celle des diagrammes de production de gluons de sorte que l'amplitude carré de  $q\bar{q} \rightarrow G G$  sommée sur polarisation et couleur est

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{M}^2 &= \Sigma |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 + \Sigma |\mathcal{M}_3|^2 + 2 \operatorname{Re} \Sigma (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \mathcal{M}_3^* - \Sigma |\mathcal{M}_{gh1}|^2 - \Sigma |\mathcal{M}_{gh2}|^2 \\ &= g^4 \left\langle c_F N \right\rangle 8 \left[ \left\langle c_F \right\rangle \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t}\right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.6.157)$$

On reconnaît dans cette expression une partie de type QED proportionnelle à  $c_F$  et l'autre de type non-abélien proportionnelle à  $N$ . On peut facilement obtenir alors le carré des éléments de matrice

moyennés sur les états initiaux pour les différents cas, après croisement approprié des particules initiales et finales.

-  $q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow G(p_3) G(p_4)$  : il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par  $\frac{1}{4N^2}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = 2g^4 \left\langle \frac{c_F}{N} \right\rangle \left[ \left\langle c_F \right\rangle \left( \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right] = g^4 \left[ \frac{32}{27} \left( \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \frac{8}{3} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]} \quad (7.6.158)$$

-  $G(p_1) q(p_2) \rightarrow G(p_3) q(p_4)$  : il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par  $\frac{1}{4N(N^2-1)}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = -g^4 \left\langle \frac{1}{N} \right\rangle \left[ \left\langle c_F \right\rangle \left( \frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right] = g^4 \left[ -\frac{4}{9} \left( \frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right]} \quad (7.6.159)$$

-  $G(p_1) G(p_2) \rightarrow q(p_3) \bar{q}(p_4)$  : il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par  $\frac{1}{4(N^2-1)^2}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = g^4 \left\langle \frac{1}{N^2-1} \right\rangle \left[ \left\langle c_F \right\rangle \left( \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right] = g^4 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \frac{3}{8} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]} \quad (7.6.160)$$

Pour dériver ces résultats une alternative aurait été de travailler avec seulement des états de polarisation physiques, c'est à dire d'utiliser l'expression

$$\left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right)$$

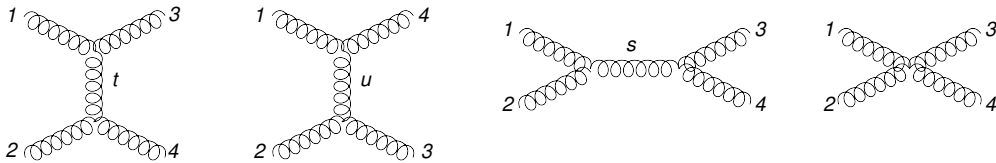
pour la somme sur les états de polarisation (voir éq. (7.4.128)). Dans ce cas il n'y a pas lieu d'introduire de fantômes, puisqu'il n'y a pas de contributions non physiques à soustraire, en accord avec la discussion sur les règles de Feynman en jauge "physique" (sec. 7.4). Le vecteur  $n_\mu$  peut être choisi de façon à simplifier le calcul, ainsi pour la réaction  $G_1 q_2 \rightarrow G_3 q_4$  on peut imposer  $p_2 \cdot \epsilon^{a,(\kappa_1)}(p_1)$ ,  $p_4 \cdot \epsilon^{b,(\kappa_3)}(p_3) = 0$  de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p_1) \epsilon_\nu^{a',(\kappa')}(p_1) &= -\delta^{aa'} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}}{p_1 \cdot p_2} \right), \\ \sum_{\kappa=1}^2 \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p_3) \epsilon_\nu^{a',(\kappa')}(p_3) &= -\delta^{aa'} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{3\nu}}{p_3 \cdot p_4} \right). \end{aligned} \quad (7.6.161)$$

On laisse le lecteur retrouver les formules éqs. (7.6.158) à (7.6.160) avec ce choix de vecteurs polarisation (voir l'exercice).

•  $\boxed{G G \rightarrow G G}$  : diffusion gluon-gluon

Les diagrammes à évaluer sont :



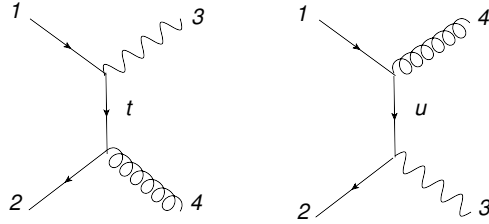
avec éventuellement les diagrammes impliquant les fantômes si on travaille en jauge covariante. On trouve :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = g^4 \left\langle \frac{16N^2}{N^2 - 1} \right\rangle \frac{1}{4} \left[ 3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right] = g^4 \frac{9}{2} \left[ 3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right]} \quad (7.6.162)$$

Par complétude nous citons ici les résultats pour la diffusion de partons impliquant l'émission ou l'absorption d'un photon.

•  $\boxed{q \bar{q} G \gamma \rightarrow 0}$  : diffusion photon-parton

Ces processus sont de type QED,



Il n'y a pas de couplage à 3 bosons de jauge et donc pas de terme non abélien dans l'élément de matrice : on ignore donc le terme proportionnel à  $N$  dans la partie entre [...] de l'éq. (7.6.157) et la sommation sur la couleur de tous les partons contribue le facteur :

$$Tr(T^a T^a) = \delta^{aa}/2 = \frac{N^2 - 1}{2} = c_F N, \quad (7.6.163)$$

au lieu de  $\langle c_F^2 N \rangle$ . Pour les différents processus on a donc, après moyenne sur polarisation et couleur initiales,

-  $q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) G(p_4)$  (il faut multiplier par  $\frac{1}{4N^2}$ ) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = e_q^2 g^2 \left\langle \frac{c_F}{N} \right\rangle 2 \left[ \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right] = e_q^2 g^2 \frac{8}{9} \left[ \frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right]} \quad (7.6.164)$$

-  $G(p_1) q(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) q(p_4)$  (il faut multiplier par  $\frac{1}{4N(N^2-1)}$ ) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = -e_q^2 g^2 \left\langle \frac{1}{2N} \right\rangle 2 \left[ \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right] = -e_q^2 g^2 \frac{1}{3} \left[ \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right]} \quad (7.6.165)$$

-  $\gamma(p_1) q(p_2) \rightarrow G(p_3) q(p_4)$  (il faut multiplier par  $\frac{1}{4N}$ ) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = e_q^2 g^2 \left\langle c_F \right\rangle 2 \left[ \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right] = e_q^2 g^2 \frac{8}{3} \left[ \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right]} \quad (7.6.166)$$

## 7.7 Hadrons et quarks colorés

On a vu dans la section 6.1 qu'un méson est composé d'une paire quark-antiquark et un baryon d'un triplet de quarks avec la contrainte que leur fonction d'onde est invariante sous l'action d'un élément du groupe de couleur, c'est à dire que méson et baryon sont respectivement de la forme :

$$M = \sum (\bar{q}_i q'_i), \quad B = \epsilon_{ijk} q_i q'_j q''_k \quad (7.7.167)$$

avec l'indice de couleur  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Sous une transformation de type éq. (7.1.3)  $M$  est bien invariant puisque  $U$  est unitaire. Pour le cas du baryon si on paramètre la matrice  $U = (u_{ij})$ , alors sous l'action d'un élément du groupe B devient

$$B' = \epsilon_{ijk} u_{il} u_{jm} u_{kn} q_l q'_m q''_n. \quad (7.7.168)$$

On vérifie facilement que si deux parmi les indices  $l, m, n$  sont égaux alors la combinaison est nulle et si on fait  $q_l q'_m \rightarrow q_m q'_l$  alors  $B' \rightarrow -B'$ . Finalement pour  $l = 1, m = 2, n = 3$  on a  $\epsilon_{ijk} u_{i1} u_{j2} u_{k3} q_1 q'_2 q''_3 = \det U q_1 q'_2 q''_3$ . Combinant toutes ces observations on prouve que, sous une transformation de type éq. (7.1.3),  $B' = \det U (\epsilon_{lmn} q_l q'_m q''_n) = \det U B$  qui est bien invariant si le groupe est spécial unitaire puisque alors  $\det U = 1$ . Si on avait choisi  $U(3)$  plutôt que  $SU(3)$  comme groupe d'invariance locale on aurait eu un problème de normalisation de la fonction d'onde du baryon mais, plus important encore, on aurait un "gluon incolore" de masse nulle qui aurait engendré une interaction à longue portée entre hadrons singulets de couleur ce qui est physiquement exclu car on sait que l'interaction forte entre hadrons est de portée finie de l'ordre de  $1/m_{\text{pion}}$ . On rappelle finalement que le groupe d'invariance n'aurait pas pu être  $O(3)$  ou  $SO(3)$  puisque, dans ce cas, les quarks et les antiquarks appartiennent à la même représentation et on pourrait alors construire des systèmes à deux quarks,  $\sum (q_i q'_i)$ , singulets de couleur, qui ne sont pas observés.

## 7.8 Appendice I : Résumé des règles de Feynman en QCD

— Propagateur du fermion

$$\begin{array}{c} i \quad \quad \quad j \\ \hline \longrightarrow \end{array} = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

— Propagateur du gluon, *jauge covariante*

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = \delta^{ab} G_{\mu\nu}(k). \quad (7.8.169)$$

où  $\xi = 0$  *jauge de Landau*,  $\xi = 1$  *jauge de Feynman*

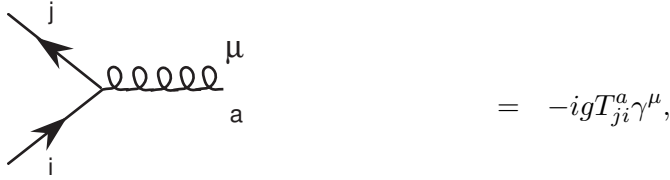
— Propagateur du gluon, *jauge axiale*,  $n \cdot A_\mu^a(x) = 0$

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2}). \quad (7.8.170)$$

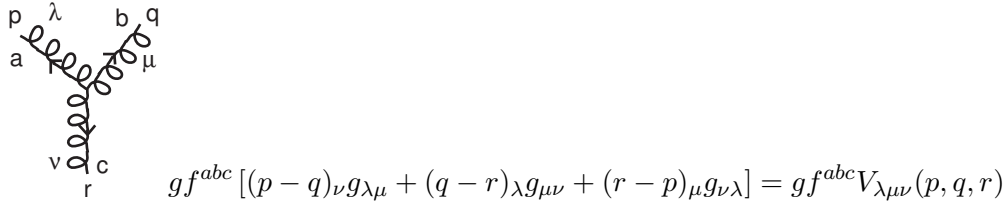
— Propagateur du fantôme

$$\begin{array}{c} a \quad \quad \quad b \\ \hline \text{---} \\ \text{p} \end{array} = -\delta_{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}.$$

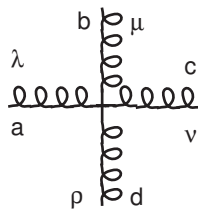
— Vertex gluon-fermion-fermion



— Vertex à 3 gluons



— Vertex à 4 gluons



$$-ig^2 [ f^{abe} f^{cde} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) + f^{ace} f^{bde} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}) ]$$

$$= -ig^2 V_{\lambda\mu\nu\rho}^{abcd}$$

— Vertex gluon-fantôme-fantôme, *jauge covariante*



— Boucle de fantômes, *jauge covariante*

Les fantômes obéissant à la statistique de Fermi-Dirac il faut associer un facteur  $-1$  à chaque boucle de fantômes (comme pour les fermions).

## 7.9 Appendice II : Facteurs de couleur pour SU(N)

Les relations suivantes sont utiles pour le calcul des facteurs de couleur des diagrammes en QCD :

$$\begin{aligned}
 [T^a, T^b] &= if^{abc}T^c, & f^{abc} \text{ totalement antisymétrique} \\
 \{T^a, T^b\} &= \frac{\delta^{ab}}{N} + d^{abc}T^c, & d^{abc} \text{ totalement symétrique} \\
 \text{Tr } T^a &= 0 \\
 \text{Tr } T^a T^b &= \frac{\delta^{ab}}{2} \\
 \sum_a (T^a T^a)_{ij} &= c_F \delta_{ij}, & c_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \text{ Casimir de la représentation fondamentale} \\
 \sum_{cd} f^{acd} f^{bcd} &= c_A \delta^{ab}, & c_A = N, \text{ Casimir de l' adjointe} \\
 \sum_{cd} d^{acd} d^{bcd} &= \left(N - \frac{4}{N}\right) \delta^{ab}
 \end{aligned}$$

Une représentation utile des générateurs de SU(3) est  $T^a = \lambda^a/2$  avec  $\lambda^a$ , les matrices de Gell-Mann.





## Chapitre 8

# Chromodynamique Quantique : Renormalisation à une boucle

### 8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'identifier les divergences ultraviolettes des diagrammes à une boucle de QCD et après avoir défini un schéma de renormalisation d'introduire le couplage mobile et démontrer la propriété de liberté asymptotique. Comme pour QED, on suppose que le lagrangien éq. (7.3.91) de la section 7.3,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F, \quad (8.1.1)$$

est exprimé en termes des quantités nues et on introduit à priori des quantités renormalisées en relation avec ces dernières. On construira le développement perturbatif à l'aide des quantités renormalisées. Ceci est un peu fastidieux mais nécessaire ! On définit donc :

$$\psi_B = Z_2^{1/2} \psi ; \quad A_{B\mu}^a = Z_3^{1/2} A_\mu^a ; \quad \chi_B^a = \tilde{Z}_3^{1/2} \chi^a ; \quad m_B = \frac{Z_0}{Z_2} m \quad (8.1.2)$$

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 Z_3^{1/2}} g \mu^\epsilon = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}} \tilde{g} \mu^\epsilon = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} \tilde{\tilde{g}} \mu^\epsilon ; \quad \xi_B = Z_3 \xi. \quad (8.1.3)$$

On a introduit trois constantes renormalisées :  $g$  couplage gluon-fermion,  $\tilde{g}$  autocouplage des gluons et  $\tilde{\tilde{g}}$  couplage gluon-fantômes. On peut montrer qu'il n'est pas nécessaire d'introduire une constante de renormalisation spécifique pour le paramètre de jauge. En fonction des ces nouvelles variables la densité lagrangienne s'écrit :

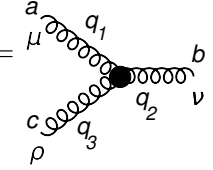
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} Z_3 \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \left( \frac{Z_1}{Z_3} \tilde{g} \right) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right)^2 \\ & + \tilde{Z}_3 (\partial^\mu \chi^{*a}) \left( \delta^{ab} \partial_\mu - \left( \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{\tilde{g}}}{\tilde{Z}_3} \right) f^{abc} A_\mu^c \right) \chi^b - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ & + Z_2 \bar{\psi} i \left( \partial_\mu - i \left( \frac{Z_{1F}}{Z_2} g \right) A_\mu^b T^b \gamma^\mu \right) \psi - Z_0 \bar{\psi} m \psi. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$



— Contre-terme de masse de fermion :

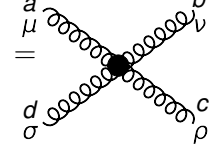
$$-i \delta Z_0 \delta^{ji} m = i \longrightarrow \times \longrightarrow j$$

— Contre-terme du couplage à 3 gluons :

$$g\mu^\varepsilon \delta Z_1 f^{abc} V_{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) =$$


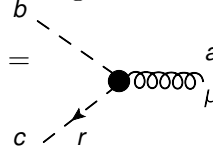
$$V_{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) \text{ défini en sec. 7.8}$$

— Contre-terme du couplage à 4 gluons :

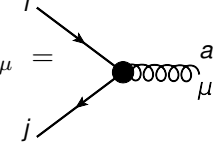
$$-i g^2 \mu^{2\varepsilon} (2\delta Z_1 - \delta Z_3) V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} =$$


$$V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \text{ défini en sec. 7.8}$$

— Contre-terme du couplage du fantôme au gluon :

$$-g\mu^\varepsilon \delta \tilde{Z}_1 f^{abc} r_\mu =$$


— Contre-terme du couplage du fermion au gluon :

$$-i g\mu^\varepsilon \delta Z_{1F} T_{ji}^a \gamma_\mu =$$


### • Identification des diagrammes divergents

Pour identifier les diagrammes potentiellement divergents, en 4 dimensions, de la théorie on applique la technique de calcul du degré superficiel de divergence de la sec. 4.6 et on trouve, *cf.* l'éq. (4.6.155) :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_G - E_{gh} - \frac{3}{2} E_F. \quad (8.1.8)$$

où  $E_G$ ,  $E_{gh}$ , et  $E_F$  sont respectivement le nombre de pattes externes de gluons, fantômes et fermions. On note que dans cette relation les fantômes sont considérés comme des bosons puisque du point de vue dimensionnel ils ont la même dimension que les gluons. Cependant cette formule n'est pas correcte à cause de la spécificité du couplage des fantômes au gluon : seul le fantôme "sortant" du vertex contribue un facteur d'impulsion à l'amplitude si bien que pour un fantôme "sortant" d'un diagramme le vertex correspondant ne contribuera pas un facteur d'impulsion interne et donc le degré de divergence du diagramme doit être réduit d'une unité par fantôme sortant dont le nombre est égal à  $E_{gh}/2$ . En revanche, pour un vertex impliquant des fantômes internes l'impulsion "sortante" est également interne et du point de vue dimensionnel le vertex avec fantômes se comporte comme le vertex à 3 gluons. La formule correcte sera donc pour QCD :

$$\boxed{\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_G - \frac{3}{2}(E_F + E_{gh})}, \quad (8.1.9)$$

si bien que, finalement, les fantômes contribuent comme les quarks au degré de divergence d'un diagramme bien qu'ils aient la même dimension que les gluons ! On dénombre ainsi sept classes de

diagrammes en boucles potentiellement divergents :

- polarisation du gluon, polarisation du fantôme, self-énergie du quark ;
- vertex à 3 gluons, vertex gluon-fantôme-fantôme, vertex gluon-quark-quark ;
- vertex à 4 gluons.

Toutes ces topologies correspondent à des contre-terme dans le lagrangien ce qui suggère que la théorie peut être renormalisable.

On ne calculera que quelques contre-terme et s'assurera qu'ils peuvent être choisis pour annuler les divergences. On supposera, pour simplifier, que les quarks sont de masse nulle ( $m_B = m = 0$ , voir éq. (8.1.3), et il n'y aura pas lieu d'introduire  $Z_0$ ). On commence par les termes les plus faciles à savoir le couplage gluon-fermion et qui permettra de définir le couplage renormalisé par

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g \mu^\epsilon. \tag{8.1.10}$$

## 8.2 Calcul des $Z_i$

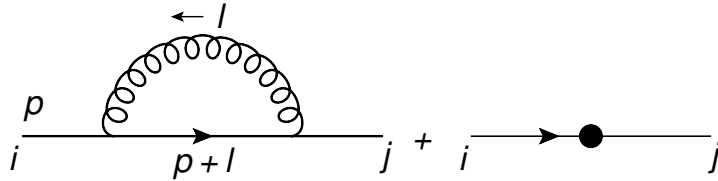
Le calcul est effectué en jauge covariante, le propagateur du gluon étant choisi de la forme

$$\delta^{ab} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} \right)$$

où  $\xi$  dénote, dans la suite, le paramètre de jauge avec  $\xi = 0$  en jauge de Landau et  $\xi = 1$  en jauge de Feynman. Avec ce choix de jauge il faudra donc inclure les boucles de "fantômes". Les contre-terme seront définis dans le schéma  $\overline{MS}$  ou éventuellement  $MS$ . Cela n'a pas de sens de définir le schéma  $ON$ , sur couche de masse, puisque les partons sont confinés dans des hadrons et sont donc hors couche.

### 8.2.1 Calcul de $Z_2$

Dans cette section nous évaluons le contre-terme de la fonction d'onde du quark. On rappelle que le contre-terme  $\delta Z_0 = 0$  puisque la masse est supposée nulle. Les diagrammes à considérer sont similaires à ceux de QED avec essentiellement le facteur de couleur en plus :



$$-i \Sigma_{ji}(p) = -i \Sigma_{ji}^{\text{boucle}}(p) + i (Z_2 - 1) \delta_{ji} \not{p}$$

Le diagramme en boucle s'écrit :

$$-i \Sigma_{ji}^{\text{boucle}} = (-ig\mu^\epsilon)^2 \langle T_{jk}^a T_{ki}^a \rangle \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + \not{l})}{(p+l)^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{l^2 + i\epsilon} (-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{l^\mu l^\nu}{l^2})$$

où nous indiquons le facteur de couleur entre  $\langle \dots \rangle$ . D'après les formules de la section 7.9 ce facteur se réduit à

$$\sum_a (T^a T^a)_{ji} = c_F \delta_{ji} = \frac{4}{3} \delta_{ji}$$

après avoir sommé sur l'indice de couleur  $a$  du gluon interne et  $k$  du quark interne. L'intégrale sur l'impulsion de la boucle a été faite lors du calcul de la self-énergie en QED et on trouve :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ji}^{\text{boucle}}(p) &= -\xi \langle c_F \delta_{ji} \rangle \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} (1+\epsilon) \not{p} \\ &= \Sigma^{(1)}(p) \not{p} \delta_{ji}, \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

qui est identique, au facteur de couleur près, à l'éq. (4.2.84). Tenant compte du contre-terme on a alors

$$\Sigma_{ji}(p) = (\Sigma^{(1)}(p) - (Z_2 - 1)) \not{p} \delta_{ji}. \quad (8.2.12)$$

Si on choisit de travailler en jauge de Landau on a alors trivialement  $\Sigma^{(1)}(p) = 0$  et donc nécessairement

$$Z_2^{\overline{MS}} = 1, \quad \text{jauge de Landau}, \quad (8.2.13)$$

puisque'il n'y a pas de divergence à compenser ! Pour la renormalisation dans le cas général, on peut se reporter au calcul similaire dans le cas de QED, extraire la divergence ultraviolette de  $\Sigma^{(1)}(p)$  et choisir le contre-terme comme dans l'éq. (4.2.88) :

$$\boxed{Z_2^{\overline{MS}} = 1 + c_2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} (4\pi)^\epsilon.} \quad (8.2.14)$$

avec

$$\boxed{c_2 = -\xi \langle c_F \rangle.} \quad (8.2.15)$$

Le propagateur du fermion aura alors la forme, comme en éq. (4.2.89) :

$$\boxed{S_F^{\overline{MS}} = i \delta_{ij} \frac{1 + \Sigma^{\overline{MS}}}{\not{p} + i\epsilon} = \frac{i \delta_{ij}}{\not{p} + i\epsilon} \left[ 1 + \xi \frac{\alpha_s}{4\pi} \langle c_F \rangle \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma - 1 \right) \right].} \quad (8.2.16)$$

Ce résultat illustre bien le fait qu'un propagateur ou une fonction de Green n'est pas individuellement indépendant du choix de jauge alors que les observables physiques doivent nécessairement l'être. On rappelle que pour un calcul aux ordres supérieurs la correction de self-énergie sur un spineur externe  $u(p)$  consistera à ajouter un facteur  $u(p)\Sigma^{\overline{MS}}/2$  comme discuté en sec. 4.2.

### 8.2.2 Calcul de $Z_3$

Le calcul de ce contre-terme est bien plus compliqué et il met en jeu des diagrammes typiques d'une théorie non abélienne puisqu'ils contiennent des fantômes et des couplages à trois ou quatre bosons de jauge. Il faut évaluer :

$$i \Pi^{\alpha\beta,ab}(q) = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \text{diagramme 4} + \text{diagramme 5}$$

Dans une notation évidente on décompose le diagramme de polarisation du gluon en une série de termes

$$\Pi^{\alpha\beta,ab}(q) = \Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) + (Z_3 - 1)\delta^{ab}(q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}). \quad (8.2.17)$$

•  $\Pi_F^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

Ce diagramme contient une boucle fermionique et du point de vue structure de Lorentz il est similaire au diagramme de polarisation du vide en QED. Aucun nouveau calcul n'est, en principe, nécessaire pour évaluer l'intégrale sur l'impulsion interne : il suffit de se reporter à l'éq. (4.1.17) et de choisir  $m = 0$  avant le développement en  $\varepsilon$  ce qui permet de faire très facilement l'intégrale sur le paramètre de Feynman. Quant à la partie de couleur, elle est simplement

$$T_{ji}^a T_{ij}^b = \text{Tr } T^a T^b = \frac{\delta^{ab}}{2}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{2\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx x^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon} (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \\ &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{2\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \\ &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{12\pi^2} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left(1 + \frac{5}{3}\varepsilon\right) (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

Chaque espèce de quark léger contribue à part égale (quarks de masse nulle) à la boucle fermionique et il faudra multiplier le résultat précédent par  $N_f$ , le nombre de saveurs considérées. Ainsi, on trouve finalement

$$\Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) = \left\langle N_f \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \frac{4}{3} \left(1 + \frac{5}{3}\varepsilon\right) (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \quad (8.2.19)$$

•  $\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

C'est le diagramme de type "tadpole", le seul qui fasse intervenir le couplage à quatre gluons. Il se trouve être égal à 0 en régularisation dimensionnelle. En effet, si on ignore le détail des facteurs de couleur, la partie de Lorentz est de la forme :

$$\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) \sim \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{a g^{\alpha\beta} + b k^\alpha k^\beta / k^2}{k^2 + i\epsilon} = \left(a + \frac{b}{4-2\varepsilon}\right) g^{\alpha\beta} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + i\epsilon},$$

d'après les éqs. (3.2.16), (3.2.21). On introduit maintenant une faible masse  $m$  pour évaluer l'intégrale

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = m^{2-2\varepsilon} \Gamma(-1 + \varepsilon)$$

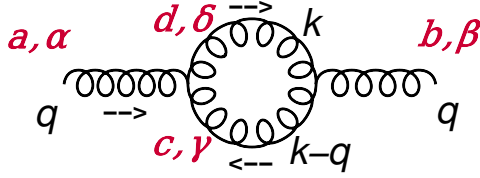
et on prend  $m \rightarrow 0$  après l'intégration. On trouve donc bien

$$\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) = 0.$$

Remarque : Attention à l'ordre des limites ! Il faut d'abord prendre le régulateur infrarouge vers 0 ( $m \rightarrow 0$ ) avant de prendre (le régulateur ultraviolet)  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

•  $\Pi_g^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

Le calcul de l'intégrale sur l'impulsion est très long mais ne présente aucune difficulté majeure. Nous nous bornons à citer le départ et l'arrivée. Les notations sont définies dans la figure ci-dessous :



En lettres cela devient :

$$\begin{aligned}
i\Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) &= (g\mu^\varepsilon)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\
&\times \left( f^{adc} \left[ g^{\alpha\delta} (q+k)^\gamma + g^{\delta\gamma} (q-2k)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k-2q)^\delta \right] \right. \\
&\quad \times \frac{-i\delta^{cc'}}{k^2 + i\varepsilon} \left[ g^{\delta\delta'} - (1-\xi) \frac{k^\delta k^{\delta'}}{k^2 + i\varepsilon} \right] \\
&\quad \times \frac{-i\delta^{dd'}}{(k-q)^2 + i\varepsilon} \left[ g^{\gamma\gamma'} - (1-\xi) \frac{((k-q)^\gamma (k-q)^{\gamma'})}{(k-q)^2 + i\varepsilon} \right] \\
&\quad \left. \times f^{c'd'b} \left[ g^{\gamma'\delta'} (q-2k)^\beta + g^{\delta'\beta} (q+k)^{\gamma'} + g^{\beta\gamma'} (k-2q)^{\delta'} \right] \right)
\end{aligned} \tag{8.2.20}$$

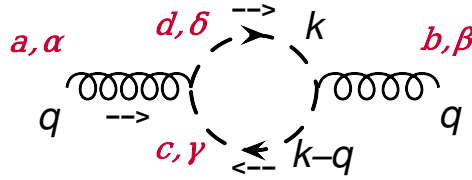
On note le facteur 1/2 global pour la symétrisation de particules identiques dans la boucle. L'intégrale sur l'impulsion interne et la variable de Feynman se font suivant les règles habituelles et on trouve, après un pénible calcul :

$$\begin{aligned}
\Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) &= \langle N \delta^{ab} \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \\
&\quad \frac{1}{1-2\varepsilon} \left[ q^2 g^{\alpha\beta} \left( \frac{19}{12} + \frac{1}{18}\varepsilon \right) - q^\alpha q^\beta \left( \frac{11}{6} + \frac{1}{18}\varepsilon \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + (1-\xi) \left( q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \left( \frac{1}{2} - 2\varepsilon \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{4} (1-\xi)^2 \left( q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \varepsilon \right]
\end{aligned} \tag{8.2.21}$$

La contribution provenant de la boucle de gluons n'est pas transverse.

•  $\Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

L'application des règles de Feynman permet d'écrire facilement avec les conventions de la figure (attention aux signes et au facteur (-) associé à la boucle de fantômes!) :



En lettres on a :

$$i\Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) = (-)(g\mu)^{2\varepsilon} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left( f^{acd} k^\alpha \frac{-i\delta^{cc'}}{k^2 + i\varepsilon} f^{bd'c'} (k-q)^\beta \frac{-i\delta^{dd'}}{(k-q)^2 + i\varepsilon} \right) \quad (8.2.22)$$

Le calcul est beaucoup plus simple que le cas précédent. Après intégration sur  $x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) &= \langle N \delta^{ab} \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \\ &\quad \frac{1}{1-2\varepsilon} \left[ q^2 g^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{18} \varepsilon \right) - q^\alpha q^\beta \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \varepsilon \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

### • Résultat

Dans tous les résultats précédents apparaît le facteur  $(\Gamma(1-\varepsilon))^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$ , typique de l'intégrale sur la variable de Feynman dans le cas d'une masse nulle. Il admet le développement en  $\varepsilon$  (voir éq. (3.2.20)),

$$\frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (8.2.24)$$

et ce terme peut donc être remplacé par 1 car la divergence de toutes les contributions à la polarisation du gluon est d'ordre  $1/\varepsilon$  puisque  $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)/\varepsilon$ . Regroupant toutes les contributions en boucle à l'éq. (8.2.17) on peut les écrire :

$$\Pi_{\text{boucle}}^{\alpha\beta,ab}(q) = (\Pi_{\text{UV}} + \Pi_{\text{rest}}) \langle \delta^{ab} \rangle (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \quad (8.2.25)$$

avec

$$\Pi_{\text{UV}} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \left( \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \langle N \rangle - \frac{4}{3} \left\langle \frac{N_f}{2} \right\rangle \right) \quad (8.2.26)$$

$$\Pi_{\text{rest}} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \left( \frac{22}{9} + \xi + \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \right) \langle N \rangle - \frac{20}{9} \left\langle \frac{N_f}{2} \right\rangle \right) \quad (8.2.27)$$

Elles ont bien la forme transverse canonique. La constante de renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$  compense la divergence UV :

$$\boxed{Z_3^{\overline{MS}} = 1 + c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon,} \quad (8.2.28)$$

avec

$$\boxed{c_3 = \left( \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \langle N \rangle - \frac{4}{3} \left\langle \frac{N_f}{2} \right\rangle \right)} \quad (8.2.29)$$



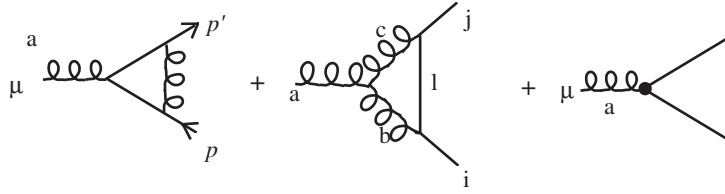
et

$$\boxed{\Pi^{\overline{MS}} = c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \Pi_{\text{rest}}.} \quad (8.2.30)$$

Comme pour QED (voir sec. 4.1.1) la correction des termes de polarisation du gluon apportera un facteur multiplicatif au couplage  $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \rightarrow -\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \Pi^{\overline{MS}}$ , mais contrairement à QED ce couplage recevra aussi des contributions du vertex et de la self-énergie du fermion.

### 8.2.3 Calcul de $Z_{1F}$

Il y a trois diagrammes :



$$-ig\mu^\varepsilon \Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p,p')|_{\text{boucle}} + (-ig\mu^\varepsilon) (Z_{1F} - 1) T_{ji}^a \gamma^\alpha$$

Nous supposons les fermions externes sur couche de masse,  $p^2 = p'^2 = 0$ , mais le gluon virtuel  $(p - p')^2 = q^2 \neq 0$ .

- La première boucle (avec 2 fermions internes) est identique au vertex QED à part un facteur multiplicatif de couleur que l'on spécifiera plus bas. La partie divergente dans l'ultraviolet est donc en relation avec celle de la self-énergie du fermion (8.2.11)) et on pourrait avoir immédiatement sa contribution au facteur  $Z_{1F}$ . Cependant, il est intéressant d'évaluer ce diagramme plus précisément pour illustrer les complications associées aux divergences infrarouge et colinéaire. Cela peut être fait facilement, en jauge de Feynman, à partir de l'éq. (4.3.98) en posant  $m = 0$  dans cette équation. Ignorant pour le moment les facteurs de couleur, il faut donc évaluer,

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p;p')|_{\text{boucle, "QED"}} \approx -i (g\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\alpha \frac{[2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon} l^2 - 2q^2(1-y) - 2q^2 y^2 x(1-x)]}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3}. \quad (8.2.31)$$

Comme en QED, le premier terme du numérateur contient toutes les divergences ultraviolettes et on trouve

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}}^{\text{UV}} \approx \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (1+\varepsilon), \quad (8.2.32)$$

qui est bien similaire à l'éq. (8.2.11) pour  $\xi = 1$ .

Le deuxième terme du numérateur de (8.2.31),  $-2q^2(1-y)$ , est régulier dans l'ultraviolet mais contient toutes les divergences infrarouge et colinéaire (voir éq. (4.3.103)). On trouve après intégration

sur l'impulsion de la boucle

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}, \text{ir}} &\approx \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon 2 \Gamma(1 + \varepsilon) \int_0^1 dy y^{-1-2\varepsilon} (1-y) \int_0^1 dx x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon} \\
 &\approx -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{(\Gamma(1 - \varepsilon))^2}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left( \frac{2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{4}{\varepsilon_{\text{ir}}} + 8 \right). \quad (8.2.33)
 \end{aligned}$$

On voit que les intégrales sur les paramètres de Feynman sont toutes deux divergentes quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La divergence en  $y = 0$  reflète la divergence infrarouge,  $l \rightarrow 0$  du diagramme (voir la discussion autour de l'expression éq. (4.3.105)) tandis que celles en  $x = 0$  et  $x = 1$  sont associées à la divergence de masse  $m = 0$ . Il suffit de se reporter à l'éq. (4.3.103) pour voir que l'intégrale  $I_1$ , coefficient de  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  n'est pas définie quand  $m = 0$ . Pour lui donner un sens il faut évaluer les expressions avant de faire le développement en  $\varepsilon$ , comme nous l'avons fait dans l'équation ci-dessus, ce qui mène à un pôle en  $\varepsilon$  (voir aussi éq. (4.3.102)). On utilise le même symbole  $\text{ir}$  pour noter l'origine des divergences infrarouge et colinéaire mais on rappelle que ce n'est qu'un mnémonique et l'on a bien  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ir}}$ .

Le troisième terme du numérateur de (8.2.31),  $-2q^2 y^2 x(1-x)$  est régulier et s'évalue facilement :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}, \text{régulier}} \approx -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon.$$

Il reste maintenant à introduire le facteur de couleur qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (T_{jl}^b T_{lk}^a T_{ki}^b) &= (T_b T_a T_b)_{ji} = \left( T^b T^b T^a + i f^{abc} T^b T^c \right)_{ji} \\
 &= c_F T_{ji}^a + \frac{i}{2} f^{abc} \left( [T^b, T^c] + \{T^b, T^c\} \right)_{ji} \\
 &= c_F T_{ji}^a - \frac{1}{2} f^{abc} f^{bce} T_{ji}^c \\
 &= \left\langle \left( c_F - \frac{N}{2} \right) T_{ji}^a \right\rangle. \quad (8.2.34)
 \end{aligned}$$

Finalement, rassemblant tout on trouve que, en jauge de Feynman, la contribution au vertex de la boucle de type QED est :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p, p')|_{\text{boucle, "QED"}} &= \left\langle \left( c_F - \frac{N}{2} \right) T_{ji}^a \right\rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1 - \varepsilon))^2}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \Gamma(1 + \varepsilon) \\
 &\quad \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) - \left( \frac{2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{4}{\varepsilon_{\text{ir}}} + 9 \right) \right]. \quad (8.2.35)
 \end{aligned}$$

On remarque qu'en QCD, même si les divergences ultraviolettes du vertex et de la self-énergie sont identiques, elles ne se compensent pas à cause du facteur de couleur différent pour les deux diagrammes :  $\langle c_F \rangle$  pour la self comparé à  $\langle c_F - \frac{N}{2} \rangle$  pour le vertex de type QED.

- La seconde boucle (avec 2 gluons internes) a le facteur de couleur

$$\begin{aligned}
f^{abc} T_{jl}^b T_{li}^c &= f^{abc} (T^b T^c)_{ji} = f^{abc} \frac{1}{2} [T^b, T^c]_{ji} \\
&= \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} T_{ji}^d \\
&= \frac{i}{2} c_A T_{ji}^a = \frac{i}{2} N T_{ji}^a
\end{aligned} \tag{8.2.36}$$

Nous ne détaillerons pas le calcul fastidieux de ce diagramme mais citerons seulement le résultat du vertex complet (c'est à dire comprenant les deux diagrammes en boucle), en jauge covariante. On peut l'exprimer sous la forme :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p;p')|_{\text{boucle}} = (\Lambda_{\text{UV}} + \Lambda_{\text{rest}}) T_{ji}^a \gamma_\alpha \tag{8.2.37}$$

avec

$$\Lambda_{\text{UV}} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left( (c_F - \frac{N}{2}) \xi + \frac{3}{4} N(1+\xi) \right) \tag{8.2.38}$$

$$\Lambda_{\text{rest}} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(1+\varepsilon) \left( \frac{a_2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{a_1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + a_0 \right) \tag{8.2.39}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -2 \left( c_F - \frac{N}{2} \right) \\
a_1 &= -(3+\xi) \left( c_F - \frac{N}{2} \right) - 2N \\
a_0 &= -8 \left( c_F - \frac{N}{2} \right) - N \left( 1 - \frac{1}{2}(1-\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \right)
\end{aligned} \tag{8.2.40}$$

Concernant les pôles en  $\varepsilon_{\text{ir}}$  seul le diagramme de type QED contribue au double pôle (singularité infrarouge et singularité de masse) puisqu'il est associé au facteur de couleur  $(c_F - N/2)$ . Le vertex à trois gluons est, en effet, moins divergent dans l'infrarouge puisque le couplage correspondant contient un facteur d'impulsion interne supplémentaire suffisant pour compenser la singularité infrarouge, de sorte qu'il ne survit qu'une singularité de masse. D'autre part on note que le facteur  $(\Gamma(1-\varepsilon))^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$  peut être ignoré dans  $\Lambda_{\text{UV}}$ , du fait de l'éq. (8.2.24), et de même dans  $\Lambda_{\text{rest}}$  pourvu que l'on fasse  $a_0 \rightarrow a_0 - a_2\pi^2/6$ .

### • Résultat

La correction à une boucle au vertex étant :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p,p') = (\Lambda_{\text{UV}} + \Lambda_{\text{rest}} + Z_{1F} - 1) T_{ji}^a \gamma_\alpha, \tag{8.2.41}$$

le choix

$$\boxed{Z_{1F}^{\overline{MS}} = 1 + c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon} \tag{8.2.42}$$

avec

$$\boxed{c_1 = -(\langle c_F \rangle \xi + \langle N \rangle \frac{3 + \xi}{4}),} \quad (8.2.43)$$

annulera la divergence et il restera

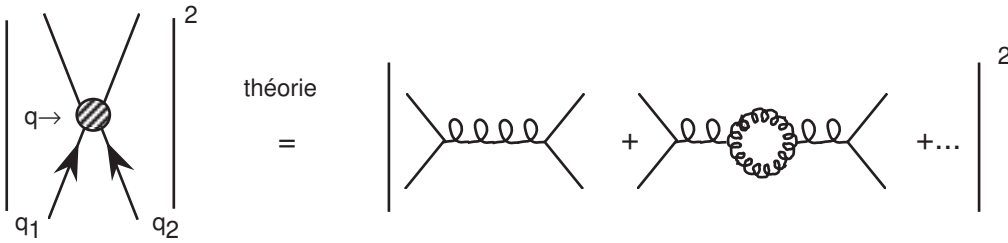
$$\Lambda^{\overline{MS}} = c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \Lambda_{\text{rest}} \quad (8.2.44)$$

qui est seulement un facteur multiplicatif au vertex  $T_{ji}^a \gamma^\alpha$  à l'ordre de Born. Les termes divergents d'origine infrarouge restant dans l'expression du vertex se compenseront dans le calcul d'une observable physique comme on l'a vu dans le chapitre 5 et ceux d'origine colinéaire seront traités dans le chapitre suivant.

De fastidieux calculs similaires à ceux que l'on vient de discuter permettront de déterminer  $Z_1$ ,  $\tilde{Z}_1$ ,  $\tilde{Z}_3$  et on peut vérifier les égalités (8.1.6), d'où il s'ensuit, d'après les eqs. (8.1.3), que l'on peut identifier les couplages  $g$ ,  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{\tilde{g}}$ .

### • Application

On considère la diffusion *quark* – *quark'* à grands transferts d'énergie  $t = -q^2$ . Les diagrammes virtuels à considérer aux deux premiers ordres des perturbations sont <sup>1</sup>



Comme on l'a vu, ces corrections ne sont que des facteurs multiplicatifs :  $\Sigma^{\overline{MS}}/2$  pour chaque spineur externe,  $\Lambda^{\overline{MS}}$  pour chaque vertex,  $-\Pi^{\overline{MS}}$  pour le couplage  $\alpha_s(\mu^2)$ . L'amplitude de diffusion, corrigée des termes virtuels, est donc aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations :

$$\begin{aligned} 4\pi \alpha_s(\mu^2) \mathcal{M}^{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4} &= 4\pi \alpha_s(\mu^2) \left\{ 1 + 2\Sigma^{\overline{MS}} + 2\Lambda^{\overline{MS}} - \Pi^{\overline{MS}} \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4} \\ &= 4\pi \alpha_s(\mu^2) \left\{ 1 + 2\Sigma^{\overline{MS}} + 2c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + 2\Lambda_{\text{rest}} \right. \\ &\quad \left. - c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) - \Pi_{\text{rest}} \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4}. \end{aligned} \quad (8.2.45)$$

Dans cette équation,  $\mathcal{M}_0^{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4}$  dénote l'amplitude à l'approximation de Born. Si on garde  $\mu^2$  fixe et que l'on s'intéresse aux hautes énergies ( $-q^2$  grand) on peut avoir de grandes corrections logarithmiques. Un choix astucieux consiste à prendre  $\mu^2 = -q^2$  de sorte que tous les grands logarithmes disparaissent et on aura pour l'élément de matrice

$$4\pi \alpha_s(-q^2) \left\{ 1 + \mathcal{O}(\alpha_s(-q^2)) \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4} \quad (8.2.46)$$

1. On ignore les diagrammes avec échange de deux gluons entre  $q_1$  et  $q_2$  qui n'ont pas de divergences ultraviolettes.

Dans l'*approximation des logarithmes dominants* (*leading logarithm approximation*), notée LO, on ne garde que le premier terme de l'équation, c'est à dire le terme de Born mais avec le couplage fort évalué à l'échelle caractéristique du processus. La section efficace calculée, en incluant l'effet des corrections à une boucle, a alors exactement la même expression que celle calculée en ne considérant que les diagrammes d'ordre le plus bas : la seule différence entre les deux expressions est que, dans le premier cas, le couplage dépend de l'échelle caractéristique du processus dur étudié qui est ici l'impulsion de transfert de la réaction. Si on travaille à l'approximation suivante (*next-to-leading logarithmic approximation*), dite NLO, le terme correctif, d'ordre  $\alpha_s^2$ , contient en fait des divergences infrarouges et colinéaires : les pôles d'origine infrarouge seront compensées par des termes similaires venant des diagrammes réels lorsque l'on construira la section efficace, comme on l'a vu au chapitre 5 ou comme on le verra sur des exemples dans les chapitres suivants. Les divergence colinéaires doivent, suivant les observables, se compenser ou bien être "factorisées" dans des fonctions de structure.

### 8.2.4 Le couplage mobile $\alpha_s$ et application

Revenant à la première des éqs. (8.1.3) reliant le couplage nu au couplage renormalisé, on a la relation :

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 Z_3^{1/2}} g(\mu^2) \mu^\varepsilon. \quad (8.2.47)$$

Reprenant les notations de la section 4.4 et définissant  $\alpha_B = g_B^2/4\pi$  et  $\alpha_s = g^2/4\pi$ ,

$$\alpha_B = \frac{Z_{1F}^2}{Z_2^2 Z_3} \alpha_s(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} = Z_\alpha \alpha_s(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \quad (8.2.48)$$

avec

$$Z_\alpha = \left(1 + \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} \alpha_s(\mu^2)\right) \quad (8.2.49)$$

où  $c_\alpha(\varepsilon)$  est calculé à partir des éqs. (8.2.15), (8.2.29), (8.2.43) :

$$c_\alpha(\varepsilon) = \frac{2c_1 - 2c_2 - c_3}{4\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) (4\pi)^\varepsilon = -\frac{11N - 2N_f}{12\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) (4\pi)^\varepsilon. \quad (8.2.50)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'évolution du couplage de QCD et de prouver la propriété de liberté asymptotique invoquant l'éq. (4.4.133). On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta(\alpha_s) &= c_\alpha(0) \alpha_s^2(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \\ &= -\frac{11N - 2N_f}{12\pi} \alpha_s^2(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \end{aligned}} \quad (8.2.51)$$

et d'après l'éq. (4.4.134) :

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{(11N - 2N_f)}{12\pi} \alpha_s(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))}. \quad (8.2.52)$$

Le couplage décroît quand  $\mu$  croît si  $11N - 2N_f > 0$ , c'est à dire si le nombre  $N_f$  de saveurs de quarks est inférieur à 17 : dans ces conditions la théorie est dite asymptotiquement libre.

• **Remarques**

On retrouve le résultat pour QED si  $N = 0$  (pas de couleur, théorie abélienne, pas de couplage entre bosons de jauge) et  $N_f < \frac{1}{2} \Rightarrow 1$  (voir le calcul de facteur de couleur de la boucle fermionique de  $\Pi_F^{\alpha\beta,ab}$ ).

Le terme proportionnel à  $N$  dans l'équation ci-dessus, qui vient des termes "non-abéliens" avec couplage à trois gluons, est responsable de la propriété de liberté asymptotique (il est positif) tandis que le terme dépendant de  $N_f$ , qui vient uniquement de la boucle fermionique, est négatif comme en QED. On peut se rappeler le signe relatif entre ces deux types de contributions en se souvenant que les boucles de fermions ont un facteur  $(-1)$  supplémentaire dû à la statistique de Fermi-Dirac.

On remarque que  $\beta(\alpha_s)$  et par conséquent  $\alpha_s$  ne dépendent pas du paramètre de jauge  $\xi$ . Ce résultat est vrai à tous les ordres de la théorie des perturbations comme on le montre en section 12.4.

La signification physique de l'équation (8.2.52) est la suivante : pour faire les calculs à une boucle en QCD nous avons dû choisir un schéma de régularisation (régularisation dimensionnelle) ce qui a introduit une échelle de masse arbitraire  $\mu$ ; pour faire des prédictions que l'on veut comparer à l'expérience il faudra choisir une valeur particulière de  $\mu$ , soit  $\mu_0$ , ainsi que la valeur des impulsions du processus que l'on considère, et choisir la valeur numérique  $\alpha_s(\mu_0)$  de façon que les expressions mathématiques reproduisent le résultat expérimental. La relation éq. (8.2.52) exprime la valeur que doit avoir le couplage  $\alpha_s(\mu)$  de la théorie renormalisée à l'échelle  $\mu$ , pour que les prédictions de cette théorie soient identiques aux prédictions de la théorie renormalisée à  $\mu_0$ . En d'autres termes, la théorie renormalisée à  $\mu_0$  et celle renormalisée à  $\mu_1$  seront équivalentes au sens perturbatif, si les couplages renormalisés  $\alpha_s(\mu_0^2)$  et  $\alpha_s(\mu_1^2)$  sont reliés par l'éq. (8.2.52).

**8.2.5 Définition de  $\Lambda_{QCD}$**

Le couple de valeurs  $(\mu, \alpha_s(\mu))$  ne correspond pas à deux variables indépendantes mais à une seule puisqu'elles sont contraintes par une relation pour pouvoir décrire la même physique quelque soit  $\mu$ . Mathématiquement cela s'exprime par le fait que l'on peut introduire une échelle de masse unique qui déterminera complètement le couplage mobile. En effet, on peut écrire l'équation (8.2.52) :

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu^2) &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} + \frac{11N-2N_f}{12\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \\ &= \frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \end{aligned} \tag{8.2.53}$$

avec

$$\Lambda^2 = \mu_0^2 \exp \left( - \frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \alpha_s(\mu_0^2)} \right). \tag{8.2.54}$$

$\Lambda$  est la constante fondamentale de QCD que l'on détermine expérimentalement. Dans l'approximation des logarithmes dominants on écrit

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad \text{avec} \quad b = -c_\alpha(0) = \frac{11N - 2N_f}{12\pi}} \quad (8.2.55)$$

L'échelle de masse  $\Lambda$  contrôle l'ordre de grandeur des interactions fortes mais sa valeur numérique, exprimée en MeV ou GeV, dépend du schéma de renormalisation dans lequel on travaille. On va prouver ceci en comparant la valeur de  $\Lambda$  dans les schémas  $MS$  et  $\overline{MS}$ . Revenant à la relation entre couplages nu et renormalisé on a,

$$\begin{aligned} \alpha_B &= Z_\alpha^{\overline{MS}} \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \\ &= Z_\alpha^{MS} \alpha_{MS}(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \end{aligned} \quad (8.2.56)$$

avec pour  $Z_\alpha^{\overline{MS}}$  (voir les éqs. (8.2.50) et (8.2.52)),

$$Z_\alpha^{\overline{MS}} = 1 + \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) c_\alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right), \quad (8.2.57)$$

tandis que pour le schéma  $MS$  on aura :

$$Z_\alpha^{MS} = 1 + \alpha_{MS}(\mu^2) c_\alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (8.2.58)$$

la valeur de  $c_\alpha$  étant, par définition, commune aux deux cas. On en tire immédiatement :

$$\begin{aligned} \alpha_{MS}(\mu^2) &= \frac{Z_\alpha^{\overline{MS}}}{Z_\alpha^{MS}} \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \\ \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{MS}(\mu^2)} &= \frac{1}{\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)} (1 + \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) b (\ln 4\pi - \gamma)) + \mathcal{O}(\alpha_{\overline{MS}}(\mu^3)). \end{aligned} \quad (8.2.59)$$

Utilisant la forme  $\alpha(\mu^2) = 1/b \ln(\mu^2/\Lambda^2)$  pour chacun des schémas on obtient facilement la relation

$$\Lambda_{\overline{MS}}^2 \approx 4\pi e^{-\gamma} \Lambda_{MS}^2. \quad (8.2.60)$$

Cette relation est nécessaire pour que les prédictions physiques dans le schéma  $MS$  soient identiques à celles dans le schéma  $\overline{MS}$ .

### 8.2.6 Au-delà des logarithmes dominants

Techniquement parlant, on note que la distinction entre schéma  $MS$  et schéma  $\overline{MS}$  ne peut se faire que si on travaille dans l'approximation "au-delà des logarithmes dominants" : en effet à l'approximation des logarithmes dominants, par convention, on ne distingue pas  $\ln(\mu^2/\Lambda_{\overline{MS}}^2)$  de  $\ln(\mu^2/\Lambda_{MS}^2)$  et les deux schémas sont équivalents.

La fonction  $\beta(\alpha_s)$  de Gell-Mann-Low admet un développement perturbatif de la forme :

$$\beta(\alpha_s) = \frac{\mu^2 d\alpha_s(\mu^2)}{d\mu^2} = -b\alpha_s^2 (1 + b'\alpha_s + b''\alpha_s^2 + b'''\alpha_s^3 + \dots). \quad (8.2.61)$$

En QCD ce développement est connu jusqu'à 5 boucles<sup>2</sup>, c'est à dire jusqu'au coefficient  $b''''$ . On cite la valeur des deux premiers :

$$b = \frac{11N - 2N_f}{12\pi} ; \quad b' = \frac{17N^2 - N_f(5N + 3c_F)}{2\pi(11N - 2N_f)}. \quad (8.2.62)$$

Le paramètre  $b$  étant défini comme  $b = -c_\alpha(0)$  de l'éq. (8.2.50) et intégrant l'équation ci-dessus on obtient :

$$b \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} + b' \ln \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)} - b' \ln \frac{1 + b' \alpha_s(\mu^2)}{1 + b' \alpha_s(\mu_0^2)}. \quad (8.2.63)$$

Regroupant tous les termes du membre de droite en  $\alpha_s(\mu_0^2)$ , qui dépendent des conditions initiales, avec le terme  $b(\ln \mu^2 / \ln \mu_0^2)$  du membre de gauche, on introduit  $\Lambda_{\overline{MS}}^2$  tel que

$$b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{\overline{MS}}^2} \sim \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + b' \ln \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + b' \alpha_s(\mu^2)}, \quad (8.2.64)$$

définition valable à l'approximation "au-delà des logarithmes dominants" (NLO). On peut alors obtenir  $\alpha_s(\mu^2)$  en fonction de  $t = \ln(\mu^2 / \Lambda_{\overline{MS}}^2)$  en inversant numériquement cette équation. Une expression analytique approchée est obtenue en résolvant l'équation perturbativement et itérativement :

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{bt} \left( 1 - \frac{b'}{bt} \ln t + \frac{b'^2}{b^2 t^2} (\ln^2 t - \ln t - 1) + \frac{b''}{b^2 t^2} \right), \quad (8.2.65)$$

où on s'est payé le luxe d'inclure la contribution du calcul à trois boucles proportionnelle à  $b''$ . Cette expression donne la dépendance du couplage en fonction de la masse  $\mu$  à l'approximation NNLO (*next-to-next-to-leading logarithm*). A l'approximation NLO seuls les deux premiers termes sont gardés.

## 8.2.7 Résultats

De très nombreuses expériences ont été réalisées qui permettent de mesurer  $\Lambda_{\overline{MS}}$ . Une compilation<sup>3</sup> des données expérimentales donne, pour cinq saveurs actives ( $N_f = 5$ ) à l'approximation NNLO :

$$\boxed{\Lambda_{\overline{MS}} = 210 \pm 11 \text{ MeV}}, \quad (8.2.66)$$

ou, de façon équivalente, il est devenu usuel de donner la valeur de  $\alpha_s$  à la masse du  $Z$  :

$$\boxed{\alpha_s(M_Z^2) = 0,1181 \pm 0,0011}. \quad (8.2.67)$$

Comme le montre la figure 8.1, ce résultat est fondé des expériences couvrant un très grand domaine d'énergie, du GeV à l'énergie du LHC, et une variété d'observables : inélastique profond, diffusion  $e^+ e^-$ , collisions hadroniques, désintégrations de particules lourdes, désintégration du lepton  $\tau$ .

2. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, Phys. Rev.Lett. **118** (2017) 082002, arXiv : 1606.08659 [hep-ph]; F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, JHEP **1702** (2017) 090, arXiv : 1701.01404 [hep-ph]; T. Luthe, A. Maier, P. Marquard, Y. Schroder, JHEP **1703** (2017) 020, arXiv : 1701.07068 [hep-ph] .

3. C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. **C40** 100001 (2016).



On peut comparer la situation en QCD avec celle en QED. La constante de structure fine de QED  $\alpha = 1/137,035999074$  pourrait paraître plus fondamentale que celle de QCD  $\alpha_s(M_z^2)|_{\overline{MS}} = 1/8,467$  pour laquelle il faut spécifier le schéma de renormalisation ainsi qu'une valeur de masse. En fait il n'en n'est rien et la situation est identique dans les deux cas (hormis la précision des mesures expérimentales !). En effet, la valeur de  $\alpha$  ci-dessus est donnée, de façon traditionnelle dans le schéma de renormalisation sur couche de masse (schéma ON de la section 4) dans la limite où l'échelle de masse  $\rightarrow 0$ . Comme c'était, pendant longtemps, le seul schéma de renormalisation utilisé en QED on "oubliait" de le préciser. Dans le schéma  $\overline{MS}$  la valeur de  $\alpha$  serait différente et elle peut être calculée avec les formules de la section 4. La différence avec QCD réside dans le fait qu'il n'est pas possible de définir un schéma ON en chromodynamique car les quarks et les gluons étant confinés dans les hadrons ils ne sont pas sur leur couche de masse. D'autre part il n'est pas possible de prendre la limite de masse nulle pour l'échelle de renormalisation car la théorie perturbative ne serait plus définie puisqu'alors le couplage  $\rightarrow \infty$ .

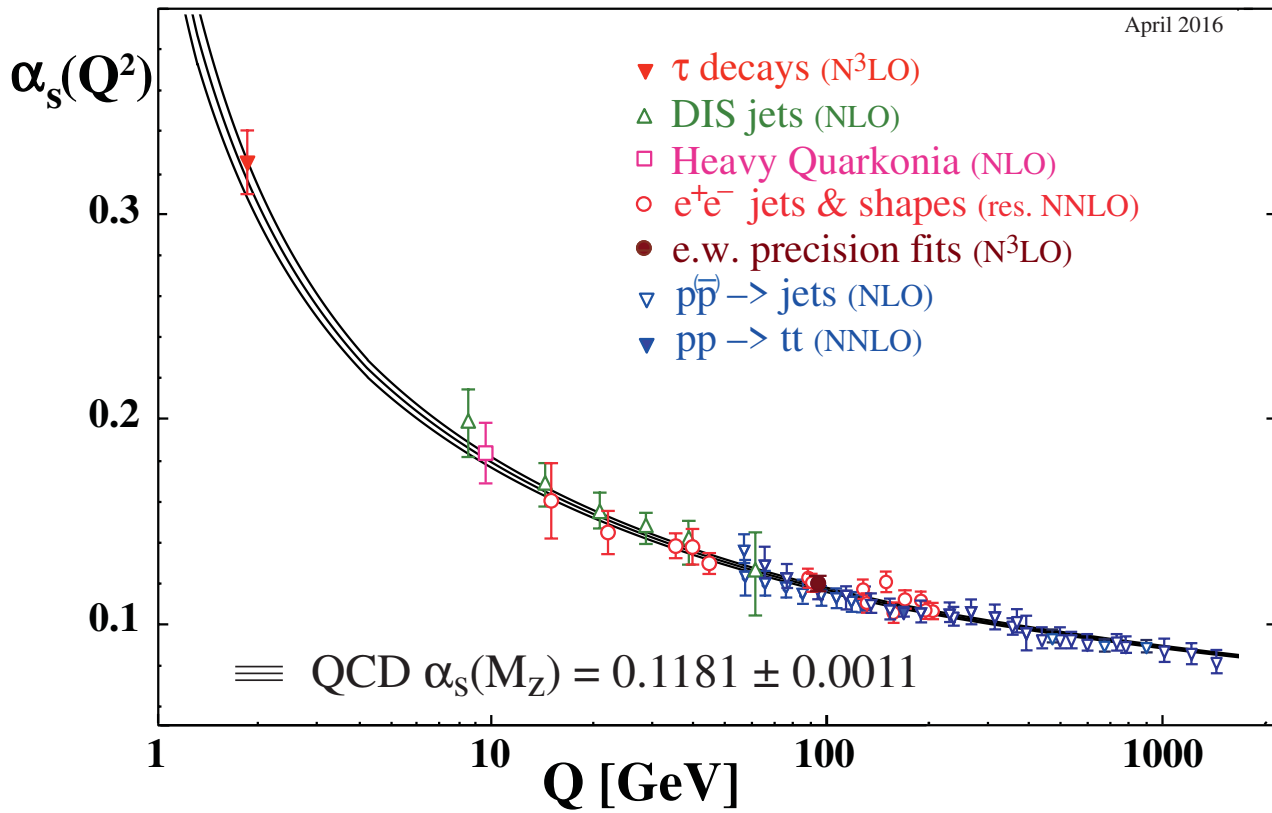
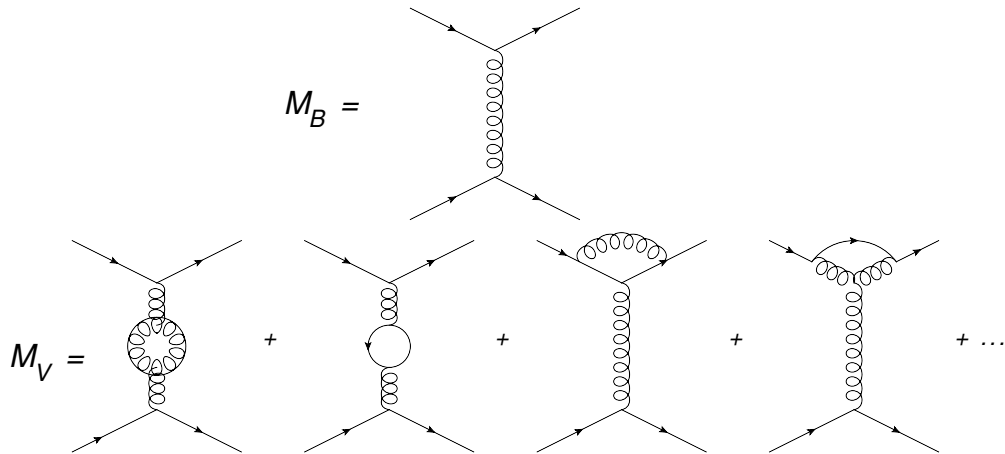


FIGURE 8.1 – *Compilation des données expérimentales de  $\alpha_s$ , C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C40 100001 (2016).*

## Chapitre 9

# Violations de l'invariance d'échelle

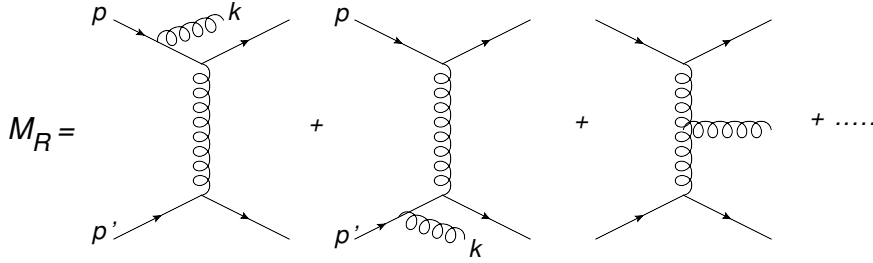
Dans la discussion précédente nous n'avons étudié que les diagrammes en boucles : polarisation du vide, self-énergie du fermion et correction au vertex. Nous avons extrait de ces diagrammes la partie divergente dans l'ultraviolet ( $\sim 1/\varepsilon + \ln 4\pi - \gamma$ ) et nous avons vu que, par la renormalisation, on pouvait absorber ces singularités et définir un couplage renormalisé dépendant de l'échelle d'énergie du processus étudié. On a vu que si on considère les diagrammes suivants de la diffusion  $qq \rightarrow qq$  à grande impulsion de transfert [ $Q = -\sqrt{-q^2}$ ] :



leur contribution à la section efficace est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_V &\approx |\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_V|^2 = |\mathcal{M}_B|^2 + 2\text{Re} \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V^* + |\mathcal{M}_V|^2 \\ &= \alpha_{\overline{MS}}^2(Q^2) (|A_B|^2 + 2 \alpha_{\overline{MS}}(Q^2) \text{Re} A_B B_V) + \mathcal{O}(\alpha^4) \end{aligned}$$

si l'on a effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$ , et la contribution  $B_V$  des diagrammes en boucle n'a plus de singularité ultraviolette. A ce point, cependant, le calcul de la section efficace n'est pas complet, car au même ordre contribuent aussi les diagrammes "réels" correspondant à la production de quanta sur couche de masse ("réels"). Ce sont les processus du type 2 corps  $\rightarrow$  3 corps tels que :



dont la contribution à  $\sigma$  est de la forme  $\sigma_R \sim |\mathcal{M}_R|^2$  qui est d'ordre  $\alpha_{MS}^3$ . Ces termes ne peuvent avoir de divergences ultraviolettes puisque l'énergie des partons finals est limitée par l'énergie initiale finie, en particulier l'énergie du gluon émis est  $k < \sqrt{s}$ . En revanche, ils possèdent des "divergences colinéaires" ou "singularités de masse" ainsi que des "divergences infrarouges". De façon similaire à la diffusion discutée en sec. 5.3, pour chaque gluon de vecteur polarisation  $\epsilon(k)$  émis par un quark d'impulsion  $p$  on a un facteur  $gp \cdot \epsilon(k) / p \cdot k$  (éq. (5.3.3)) ce qui contribue au carré de l'amplitude (interférence des deux premiers diagrammes ci-dessus) un facteur (voir l'éq. (5.3.6)) :

$$g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}. \quad (9.0.1)$$

On suppose une petite masse aux quarks et on se place dans le centre de masse quark-quark. La cinématique est :

$$p = (\omega, 0, 0, p), \quad p' = (\omega, 0, 0, -p), \quad \omega = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad p \approx \omega - \frac{m^2}{\sqrt{s}}; \quad k = (k, k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$$

L'expression ci-dessus devient :

$$\frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\sqrt{s}} \frac{k^2 dk}{k} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{s}{k^2 (\omega - p \cos \theta) (\omega + p \cos \theta)} \quad (9.0.2)$$

où on a introduit un cut-off  $\lambda$  pour régulariser l'intégrale sur l'impulsion  $k$  dans l'infrarouge. Toutes les intégrales se font trivialement pour trouver :

$$\frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s}}{\lambda} \frac{s}{\omega p} \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \approx \frac{g^2}{(2\pi)^2} \ln \frac{s}{\lambda^2} \ln \frac{s}{m^2} \quad (9.0.3)$$

Il apparaît que :

- Le facteur  $\ln \frac{s}{m^2}$ , résulte de l'intégrale sur  $\cos \theta$  : il diverge quand  $m \rightarrow 0$ , comme on le suppose en QCD, et la divergence vient de la configuration où le gluon est colinéaire au quark qui émet ce gluon ( $\cos \theta = \pm 1$ ). On parle alors de "singularité de masse" ou de "singularité colinéaire".
- Le facteur  $\ln \frac{s}{\lambda^2}$  reflète la divergence infrarouge, c'est-à-dire la singularité de  $|\mathcal{M}_R|^2$  quand le gluon émis devient "mou". Cette singularité est caractéristique de l'émission de boson de jauge et il n'y a pas de singularité infrarouge associée à l'émission de quark d'impulsion nulle.

On rappelle que les divergences colinéaires et infrarouges apparaissent aussi dans le calcul des boucles, en particulier self-énergie d'un fermion et correction au vertex, car les intégrales correspondantes impliquent de prendre en compte la région où le photon ou le gluon virtuel devient mou.

En général la structure d'un calcul perturbatif aux deux premiers ordres, avant renormalisation, est la suivante, dans le cas où on introduit  $\Lambda_{UV}$  régulateur ultraviolet,  $\lambda$  régulateur I.R.,  $m = m_{\text{quark}}$  régulateur colinéaire ( $F$  symbolise les fonctions de structure et  $\otimes$  la convolution avec les sections partoniques),

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \alpha^p F \otimes \hat{\sigma} \\ \sigma_V &= \alpha^{p+1} F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( a \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q} + \text{contre-termes} + b_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b_3 \ln \frac{Q}{m} \right) + c \right] \\ \sigma_R &= \alpha^{p+1} F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( b'_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b'_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b'_3 \ln \frac{Q}{m} \right) + c' \right]\end{aligned}$$

où la première ligne est la section efficace dans l'approximation de Born, c'est à dire à l'ordre le plus bas en  $\alpha$  (ici d'ordre  $p$ ), tandis que les deux lignes suivantes symbolisent respectivement la contribution des diagrammes virtuels et réels d'ordre supérieur. On peut noter qu'il n'y a pas de terme tel que  $\ln \Lambda_{UV} \ln \lambda$  ou  $\ln \Lambda_{UV} \ln m$  car les divergences viennent de régions disjointes de l'espace de phase. Par exemple,

$$\int_{\lambda}^{\Lambda_{UV}} \frac{dk}{k} = \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q} + \ln \frac{Q}{\lambda}.$$

On peut prouver que

$$b_1 + b'_1 = b_2 + b'_2 = 0.$$

C'est le théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg déjà introduit au chapitre 5 : dans le calcul d'un observable les divergences infrarouges se compensent entre diagrammes réels et virtuels. Donc, après renormalisation, et après compensation des singularités I.R. on a

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q^2) F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( 1 + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(b_3 + b'_3) \ln \frac{Q}{m} \right) + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(c + c') \right]$$

où on a effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$  et on a choisi  $Q$  comme échelle de renormalisation. De façon similaire à la renormalisation, on verra que l'on peut éliminer de cette expression les divergences colinéaires par une redéfinition des fonctions de structure qui acquièrent alors une dépendance en une variable de masse, ici  $Q$ . Ainsi définissant la fonction :

$$F_{\overline{MS}}(Q^2) = F \otimes \left[ 1 + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(b_3 + b'_3) \ln \frac{Q}{m} \right]$$

la section efficace hadronique s'écrit alors simplement :

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q^2) F_{\overline{MS}}(Q^2) \otimes [\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(c + c')] \quad (9.0.4)$$

On dit que les fonctions de structure ainsi définies violent l'invariance d'échelle. Comme dans le cas du couplage mobile, on pourra définir  $F(Q^2)$  de plusieurs façons (par exemple,  $F_{\overline{MS}}(Q^2)$ ,  $F_{MS}(Q^2)$ ,

$F_{DIS}(Q^2)$ , ...) suivant les termes finis que l'on inclut dans la relation entre  $F$  et  $F_i(Q^2)$ . Cette propriété, qui consiste à définir  $F_i(Q^2)$  à partir de  $F$  est une illustration du théorème de factorisation : les divergences de masse peuvent être factorisées du sous-processus partonique dur (c'est-à-dire de la série  $\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(c + c') + \dots$ ) et associées aux pattes externes modifiant ainsi les distributions des partons dans les hadrons. Ce théorème a d'abord été prouvé aux deux premiers ordres de la théorie par H.D. Politzer<sup>1</sup> puis, à tous les ordres, par plusieurs<sup>2</sup> groupes<sup>3</sup>.

Dans les calculs effectifs on utilisera évidemment la régularisation dimensionnelle pour extraire les divergences infrarouges et colinéaires. La formule éq. (9.0.1) devient alors :

$$g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} \rightarrow (g\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Cette dernière intégrale s'évalue facilement en usant des formules de la sec. 3.2.3 :

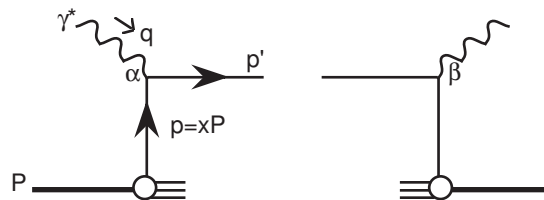
$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{(4\pi\mu)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} 2 \int_0^1 d\cos\theta (1 - \cos^2\theta)^{-1-\varepsilon} \\ &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[ \frac{1}{-2\varepsilon_{\text{ir}}} \left( \frac{s}{\mu^2} \right)^\varepsilon \right] \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{-\varepsilon_{\text{col}}} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma[1/2-\varepsilon]} \right] \end{aligned}$$

où le premier crochet est la "singularité" infrarouge avec  $\varepsilon$  noté  $\varepsilon_{\text{ir}}$  et le deuxième est la "singularité" colinéaire avec  $\varepsilon$  noté  $\varepsilon_{\text{col}}$  (pour faire l'intégrale angulaire il suffit de choisir comme variable  $y = \cos^2\theta$  et d'appliquer la formule (3.2.29)). On retrouve bien une divergence en  $1/\varepsilon^2$  comme dans la correction au vertex éq. (8.2.39) en QCD et ces deux termes se compenseront dans le calcul de la section efficace.

On va illustrer cette discussion par l'étude qualitative de la diffusion inélastique profonde à l'ordre  $\alpha_s$  : on rappelle les résultats à l'ordre le plus bas puis on se tourne vers la discussion des résultats à l'ordre  $\alpha_s$ . Dans un deuxième temps on fera un calcul exact à l'ordre  $\alpha_s$  en régularisation dimensionnelle qui est le prototype des calculs perturbatifs actuels.

## 9.1 Violations d'invariance d'échelle : les logarithmes dominants

### 9.1.1 Terme de Born



1. H.David Politzer, Nucl.Phys. **B129** (1977), 301.

2. D. Amati, R. Petronzio, G. Veneziano, Nucl.Phys. **B140** (1978), 54; *ibid* **B146** (1978), 29.

3. R.K. Ellis, H. Georgi, Marie Machacek, H.D. Politzer, G. G. Ross, Nucl.Phys. **B152** (1979), 285.

Cet exemple a été traité en détail, à l'approximation de Born, au chapitre 6 dans la section 6.3. On simplifie par rapport à cette étude en ne gardant que le vertex hadronique, c'est-à-dire en ne considérant que le tenseur  $W_{\mu\nu}(P, q)$  qui décrit  $\gamma^* + p \rightarrow \text{hadrons}$  et, dans le cadre du modèle des partons, le tenseur  $\widehat{W}_{\mu\nu}(p, q)$  qui décrit  $\gamma^*(q) + \text{quark}(p) \rightarrow \text{quark}(p')$  (pour alléger l'écriture, on ne prend en compte qu'une seule saveur de quarks de charge  $ee_q$ , où  $e_q$  est la charge du quark normalisée à celle  $e$  du proton :  $e_u = e_c = 2/3$ ,  $e_d = e_s = -1/3$ ). On rappelle les limites de validité du modèle des partons :

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 \rightarrow \infty \\ 2Pq &= s \rightarrow \infty \quad \text{tels que } x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \text{ fixé,} \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

et l'on suppose le hadron incident de masse nulle  $P^2 = 0$ . De plus on sommera sur la polarisation du photon virtuel, ce qui nous amène à construire la section efficace partonique (fictive !) :

$$\widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(p, q) = \frac{1}{\text{flux}} (-g^{\mu\nu}) \widehat{W}_{\mu\nu} = \frac{-1}{4p \cdot q} \widehat{W}_\mu^\mu(p, q), \quad (9.1.6)$$

avec  $p$  l'impulsion du quark entrant et  $q$  celle du photon virtuel. La section hadronique est une superposition de sections efficaces au niveau partonique :

$$\sigma_0^{\gamma^* p}(P, q) = \int dy q_0(y) \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(yP, q) \quad (9.1.7)$$

où  $q_0(y)$  est la densité de quarks dans le hadron [on dit aussi fonction de structure du hadron] et  $y$  est la fraction d'impulsion du proton portée par le quark interagissant,  $p = yP$ . Au niveau partonique la section efficace s'écrit (voir section 6.3) :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q} &= (ee_q)^2 \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle} \frac{1}{4p \cdot q} \int \frac{d^3 p'}{2E'} (2\pi) \delta^{(4)}(p' - q - p) \frac{-g^{\mu\nu}}{2} \text{Tr}(\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu) \\ &= (ee_q)^2 \frac{1}{4p \cdot q} 2\pi \delta(-Q^2 + 2p \cdot q) 4p \cdot q \\ &= (ee_q)^2 \frac{2\pi z}{Q^2} \delta(1 - z), \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

avec  $z = Q^2/2p \cdot q$ , la variable de Bjorken au niveau partonique. Insérant dans l'éq. (9.1.7), avec  $z = Q^2/2yP \cdot q = x/y$ , la section hadronique est le produit de la section partonique "dure" fois la distribution du quark évaluée à  $y = x$  :

$$\boxed{\sigma_0^{\gamma^* p}(P, q) = \widehat{\sigma}_0 (ee_q)^2 q_0(x), \text{ avec } \widehat{\sigma}_0 = \frac{2\pi x}{Q^2}} \quad (9.1.9)$$

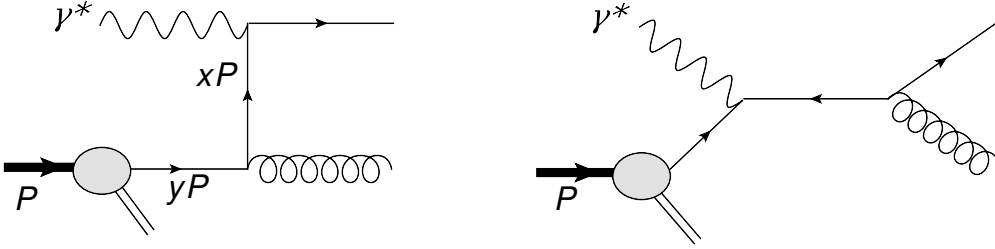
où nous avons introduit l'indice 0 pour rappeler que le calcul a été fait à l'ordre le plus bas.

La section suivante est consacrée à une présentation et interprétation des résultats sans détailler les calculs. On supposera une petite masse  $m$  au quark ( $m^2 \ll Q^2$ ), ce qui permet de régulariser la divergence colinéaire qui survit dans l'expression de la section efficace lorsqu'on inclut les corrections

QCD. Cette divergence sera absorbée dans une redéfinition de la distribution du quark dans le proton par une procédure similaire à celle qui permet d'absorber la divergence ultraviolette par une redéfinition de la constante de couplage. Le calcul détaillé fait l'objet d'un chapitre ultérieur dans le cadre de la régularisation dimensionnelle en cohérence avec la méthode utilisée pour le calcul des diagrammes virtuels au chapitre précédent.

### 9.1.2 Corrections radiatives d'ordre $\alpha_s$ : violation de l'invariance d'échelle

Au premier ordre des interactions fortes, c'est-à-dire à l'ordre  $\alpha_s$ , il faut considérer les diagrammes réels suivants :



ainsi que les diagrammes virtuels contribuant au même ordre. Les calculs sont compliqués, comme on le verra plus bas mais le résultat est relativement simple et, surtout, il admet une interprétation physique simple. En effet on trouve que la section efficace hadronique est proportionnelle à la section partonique "dure"  $\hat{\sigma}_0 (ee_q)^2$  fois une fonction compliquée dépendant logarithmiquement de  $Q^2$  :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left\{ \delta(1 - \frac{x}{y}) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(\frac{x}{y}) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q(\frac{x}{y}) \right\}. \quad (9.1.10)$$

Par analogie avec l'éq. (9.1.9) il est naturel d'introduire une distribution de quark violant l'invariance d'échelle :

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left[ \delta(1 - \frac{x}{y}) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(\frac{x}{y}) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right], \quad (9.1.11)$$

de sorte que la section efficace  $\gamma^*$  *proton*, incluant les corrections QCD, a la même forme que la section efficace de Born  $\sigma_0^{\gamma^* p}$  modulo une correction d'ordre  $\alpha_s^4$  :

$$\boxed{\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) f_q(\frac{x}{y}) \right)}. \quad (9.1.12)$$

Dans les équations ci-dessus les fonctions  $P_{qq}(x/y)$  et  $f_q(x/y)$  sont le résultat du calcul. Elles seront spécifiées plus tard. On a explicité le terme proportionnel au "grand" logarithme  $\ln(Q^2/m^2)$  dont l'origine est la divergence colinéaire (singularité de masse) lorsque le gluon émis est parallèle au quark initial : en effet le calcul du carré de l'élément de matrice fait apparaître une expression qui

4. Dans le deuxième terme du membre de droite de l'équation on a substitué  $q(y, Q^2)$  à  $q(y)$  ce qui est perturbativement justifié puisque les termes négligés sont d'ordre  $\alpha_s^2$ .



contient :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{k} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} &\approx \int dk d\cos\theta d\phi \frac{1}{\omega - p\cos\theta} \\ &\approx 2\pi \int dk \ln \frac{\omega+p}{\omega-p} \sim \int dk \ln \frac{Q^2}{m^2 z(1-z)}. \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Pour voir cela on se place dans de repère du centre de masse du système  $\gamma^* - quark$  où  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ ,  $\omega - |\vec{p}| \approx m^2/2|\vec{q}|$ ,  $\omega + |\vec{p}| \approx 2|\vec{q}|$ , et on peut prouver que  $4|\vec{q}|^2 = Q^2/z(1-z)$  où  $z$  est la variable de Bjorken au niveau partonique (voir l'éq. (9.1.8) pour la cinématique).

### Interprétation

La fonction  $q(x, Q^2)$  est la distribution des quarks dans le proton et elle dépend maintenant logarithmiquement de l'échelle d'énergie du processus considéré : on parle alors de "violation logarithmique de l'invariance d'échelle". Ceci est à contraster avec l'invariance d'échelle de la distribution de quarks  $q(x)$  introduit dans le modèle des partons naïf. L'interprétation de l'éq. (9.1.11) est la suivante : le quark qui interagit avec le photon virtuel avec une fraction  $x$  de l'impulsion du proton résulte soit d'un quark qui interagit directement, soit d'un quark portant la fraction  $y > x$  de l'impulsion du proton et qui a perdu une fraction  $x/y$  de son impulsion après avoir émis un gluon "quasi-colinéaire". On peut estimer la "probabilité" de rayonnement d'un gluon à  $(\alpha_s/2\pi)P_{qq}(x/y) \ln(Q^2/m^2)$ . La divergence en  $\ln(Q^2/m^2)$  apparue dans le calcul du processus partonique dur,  $\gamma^* + quark \rightarrow quark + gluon$ , peut en fait être associée à la distribution du quark dans le proton, éq. (9.1.11), plutôt qu'au processus dur : on dit alors que cette "divergence" est factorisée dans la fonction de structure. On peut deviner que le calcul au premier ordre n'est pas suffisant puisque la "probabilité" d'émission du gluon est d' $\mathcal{O}(\alpha_s \ln(Q^2/m^2)) \sim 1$  si on suppose, comme cela paraît raisonnable, que  $\alpha_s \sim 1/\ln Q^2$ . Il faut alors sommer de tels termes à tous les ordres. On peut montrer que la propriété de factorisation est vraie à tous les ordres de perturbation et elle est connue sous le nom de "théorème de factorisation".

En fait, de même que l'on a plusieurs schémas de renormalisation (relations entre couplage nu et renormalisé) on peut définir différents "schémas de factorisation" c'est à dire différentes relations entre distributions partoniques invariante et violant l'invariance d'échelle. Par exemple, si on choisit :

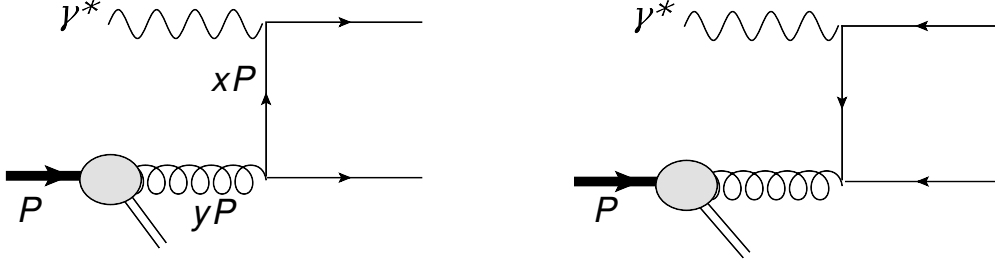
$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] \quad (9.1.14)$$

la section efficace  $\gamma^*$  *proton* devient alors dans ce schéma simplement :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 q(x, Q^2). \quad (9.1.15)$$

Un dernier commentaire concernant les éqs. de type (9.1.11) et (9.1.14) : techniquement elles ne sont pas définies dans la limite  $m = 0$  qui nous intéresse mais si on compare  $q(x, Q^2)$  à la même distribution définie à une échelle de référence  $Q_0^2$  et que l'on exprime  $q(x, Q^2)$  en fonction de  $q(x, Q_0^2)$ , alors toute dépendance en  $m^2$  a disparu et on peut, en principe, prédire la distribution partonique à tout  $Q^2$  une fois la distribution connue expérimentalement à un  $Q_0^2$  donné.

Le calcul de la section efficace  $\gamma^*$  *proton* n'est, en fait, pas encore complet car, à l'ordre auquel on travaille, il faut prendre en compte la composante gluon du proton qui contribue à la fonction de structure par le processus  $\gamma^* + \text{gluon} \rightarrow \text{quark} + \text{antiquark}$  :



Deux diagrammes de Feynman sont à prendre en compte. Il n'existe pas, à l'ordre auquel on mène la discussion, de termes virtuels associés. Sans faire de calcul on peut deviner la forme que prendra cette contribution à la section efficace  $\gamma^*$  *proton*. Le gluon se fragmente en une paire *quark-antiquark* qui peut être en configuration colinéaire suivie de l'interaction dure du photon virtuel avec le quark ou l'antiquark. Comme dans le cas précédent, cette fragmentation colinéaire a une singularité de masse régularisée par le paramètre  $m$  et engendre un terme de la forme  $\alpha_s P_{qG}(x/y) \ln Q^2/m^2$ . Si on note  $G_0(y)$  la fonction de distribution du gluon ce processus apporte donc une nouvelle contribution puisque il engendre un quark d'impulsion  $x$  avec une "probabilité" d'ordre  $G_0(y) \alpha_s P_{qG}(x/y) \ln \frac{Q^2}{m^2}$ . Sa contribution s'ajoutera à la section hadronique éq. (9.1.10) qui devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = & \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right. \\ & \left. + G_0(y) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

On peut alors définir, en prenant en compte les réactions  $\gamma^* + \text{quark} \rightarrow \text{gluon} + \text{quark}$  et  $\gamma^* + \text{gluon} \rightarrow \text{quark} + \text{antiquark}$ , la distribution de quark dépendante de  $Q^2$  :

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right\}. \quad (9.1.17)$$

au lieu de l'éq. (9.1.11) : le gluon d'impulsion  $y$  apparaît donc comme une source de quarks d'impulsion  $x < y$ . La section efficace hadronique s'écrira donc :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2) f_q\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, Q^2) f_G\left(\frac{x}{y}\right)] \right). \quad (9.1.18)$$

Dans cette expression, on a supposé que la distribution du gluon, comme celle du quark, était également dépendante de l'échelle caractéristique du processus dur. On note, en passant, que ce processus de création d'une paire  $q\bar{q}$  est aussi une source d'antiquarks d'impulsion  $x$  avec avec une "probabilité"  $\int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2}$  qui s'ajoutera à la distribution  $\bar{q}(x)$  du proton.

Note technique

Les équations ci-dessus s'écrivent également, après le changement de variable  $x/y \rightarrow y$ ,

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0\left(\frac{x}{y}\right) \left[ \delta(1-y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(y) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0\left(\frac{x}{y}\right) P_{qG}(y) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right\}. \quad (9.1.19)$$

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) f_q(y) + G\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) f_G(y)] \right). \quad (9.1.20)$$

### 9.1.3 Equations d'évolution de la distribution de quark : équation DGLAP

La divergence colinéaire a été factorisée, dans l'éq. (9.1.17), à l'échelle  $Q^2$ . On aurait pu aussi bien choisir  $.5 Q^2$  ou  $4 Q^2$ . Plus généralement, on introduit une "échelle de factorisation"  $M$  arbitraire, mais d'ordre  $\sqrt{Q^2}$  et, après avoir décomposé  $\ln(Q^2/m^2) = \ln(M^2/m^2) + \ln(Q^2/M^2)$  et défini :

$$q(x, M^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right\}, \quad (9.1.21)$$

on peut ré-écrire la section efficace  $\gamma^*$  *proton* :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q(y, M^2) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] + G(y, M^2) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\} \quad (9.1.22)$$

A l'ordre auquel est fait le calcul, la section efficace  $\sigma_1^{\gamma^* p}$  est strictement indépendante du choix de l'échelle de factorisation. L'introduction de l'échelle  $M$  peut paraître artificielle à ce point mais on discutera son rôle plus bas. On considère maintenant la dérivée par rapport à  $M^2$  de l'éq. (9.1.21). On trouve :

$$M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q_0(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (9.1.23)$$

L'expression obtenue est parfaitement finie même quand le cut-off infrarouge  $m$  est pris égal à 0, car ce dernier n'apparaît pas dans l'équation intégral-différentielle. A l'ordre auquel on a fait le calcul cette équation est équivalente à :

$$M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, M^2) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (9.1.24)$$

puisque  $q_0(y)$  et  $q(y, M^2)$  (idem pour  $G_0(y)$  et  $G(y, M^2)$ ) diffèrent par des termes d' $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , et donc les termes négligés dans la substitution sont d'ordre  $\alpha_s^2$ . On a d'autre part choisi de renormaliser la théorie à  $M^2$ , d'où le choix  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(M^2)$ . Cette équation est une des équations DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi)<sup>5</sup> qui donne l'évolution en fonction de l'échelle de la

5. Yu.L. Dokshitzer, Sov.Phys. JETP **46** (1977), 641, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **73** (1977), 1216; G. Altarelli, G. Parisi, Nucl.Phys. **B126** (1977), 298.

distribution du quark dans le proton mais ne dit rien sur la dépendance en  $x$ . On peut obtenir la distribution elle-même en résolvant l'équation intégral-différentielle avec comme condition aux limites la valeur de la fonction à une échelle  $M_0$ ,  $q(x, M_0^2)$ , qui sera prise par comparaison aux données expérimentales (voir sec. 9.1.8). L'approximation à laquelle on a dérivé cette équation est dite "ordre des logarithmes dominants (LO leading logarithm order)" puisqu'on n'a gardé que les termes d'ordre  $\alpha_s$ .

Finalement, si on revient à la fonction de structure  $\nu W_2$  avec  $N_f$  saveurs de quarks, introduite lors de la discussion de la diffusion profondément inélastique, elle prend dans le schéma de factorisation défini par l'éq. (9.1.17) la forme suivante (comparer l'éq. (6.3.23) à (9.1.18)) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \nu W_2(x, Q^2) &\equiv F_2(x, Q^2) \\ &= \sum_{i, \bar{i}}^{N_f} (e e_i)^2 \left\{ q_i(x, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q_i(y, Q^2) f_q\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, Q^2) f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.1.25)$$

où on a remplacé la distribution partonique dénotée  $F_i$  en éq. (6.3.23) par celle  $q_i(x, Q^2)$  violant l'invariance d'échelle et pris en compte les corrections d'ordre  $\alpha_s$ . Pour les quarks de masse nulle les fonctions  $P_{qq}$ ,  $P_{qG}$ ,  $f_q$  et  $f_G$  sont indépendantes de la saveur  $i$  du quark. Dans l'équation ci-dessus on a choisi pour l'échelle de factorisation  $M = Q$ . On laisse au lecteur le soin de d'écrire la formule générale pour une échelle arbitraire  $M$  (voir l'éq. (9.1.22)).

Utilisant pour  $q_i(x, M^2)$  la solution de l'équation intégral-différentielle plutôt que l'éq. (9.1.21) permet de troquer l'arbitraire du choix du cut-off  $m$  pour l'arbitraire d'une échelle de masse plus physique  $M$  qui sera choisie lorsqu'on fera l'ajustement des distributions partoniques aux données. Ceci est remniscent de la relation entre un couplage renormalisé et un couplage nu, où on a ajusté la constante de couplage renormalisée aux données pour pouvoir faire des prédictions : alors on ajustait un point, ici on ajuste une fonction ! L'arbitraire du choix de l'échelle de factorisation est similaire à celui du choix de l'échelle de renormalisation et les observables ne doivent pas dépendre, à des termes d'ordre supérieur près, du choix de  $M$ .

#### 9.1.4 Solution de l'équation d'évolution par la méthode des moments.

On peut ramener l'équation intégral-différentielle (9.1.24) à une équation différentielle ordinaire en considérant les moments :

$$M_n(\tau) = \int_0^1 dx x^{n-1} q(x, M^2) \quad (9.1.26)$$

où on a introduit la variable naturelle  $\tau = \ln(M^2/\Lambda^2)$  avec  $\Lambda$  tel que défini dans l'éq. (8.2.55) par exemple. Pour simplifier la discussion on étudie l'évolution de la distribution d'un quark de valence  $q_v(x, M^2) = q(x, M^2) - \bar{q}(x, M^2)$  où  $q(x, M^2)$  et  $\bar{q}(x, M^2)$  sont les distributions d'une saveur de quark et d'antiquark dans le proton : la contribution du gluon se compense dans cette combinaison et l'équation DGLAP est simplement :

$$M^2 \frac{dq_v(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_v(z, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right), \quad (9.1.27)$$

En terme des moments on obtient :

$$\frac{dM_n(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} M_n(\tau) d_{qq}^{(n)} \quad (9.1.28)$$

avec  $d_{qq}^{(n)}$ , appelé  $n$ -ième moment de la dimension anormale, donnée par :

$$d_{qq}^{(n)} = \int_0^1 dy y^{n-1} P_{qq}(y). \quad (9.1.29)$$

La solution est obtenue par :

$$\frac{1}{M_n(\tau)} \frac{dM_n(\tau)}{d\tau} = \frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi} \frac{1}{b\tau}$$

où on a substitué à  $\alpha_s(M^2)$  sa dépendance explicite en fonction de l'échelle, éq. (8.2.53),

$$\alpha_s(M^2) = \frac{1}{b \ln(M^2/\Lambda^2)} = \frac{1}{b\tau} \quad \text{avec } b = \frac{11N - 2N_f}{12\pi}, \quad (9.1.30)$$

d'où on tire :

$$\ln \frac{M_n(\tau)}{M_n(\tau_0)} = \frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b} \ln \frac{\tau}{\tau_0}$$

soit :

$$\boxed{\frac{M_n(\tau)}{M_n(\tau_0)} = \left( \frac{\alpha_s(M^2)}{\alpha_s(M_0^2)} \right)^{-\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}}}. \quad (9.1.31)$$

On peut montrer que :

$$d_{qq}^{(1)} = 0, \quad d_{qq}^{(n)} < 0 \quad \text{pour } n \geq 2. \quad (9.1.32)$$

Plus  $n$  est grand, plus le poids de la région à grand  $x$  est important dans l'intégrale (9.1.26). Donc l'évolution en  $M$  de  $M_n(\tau)$  à grand  $n$  reflète l'évolution en  $M$  de  $q(x, M^2)$  à grand  $x$ . L'éq. (9.1.31) donne

$$M_n(\tau) \sim \left( \frac{1}{\ln M^2/\Lambda^2} \right)^{-\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}} \quad (9.1.33)$$

qui décroît quand  $M$  croît pour  $n \geq 2$ . D'où  $q(x, M^2)$  décroît à grand  $x$  quand  $M$  croît. La dépendance en  $M$  est lente puisque logarithmique. On peut comprendre cette variation car, en QCD, le quark perd de son énergie par émission de gluon et se retrouve à plus bas  $x$ .

Le comportement en  $M$  du moment de l'éq. (9.1.31) correspond à la sommation à tous les ordres des termes en  $\alpha_s \ln \frac{M^2}{M_0^2}$ . On peut voir ceci en utilisant la forme éq. (8.2.52) du couplage  $\alpha_s(M^2)$ , ce qui mène à :

$$\begin{aligned} M_n(\tau) &= M_n(\tau_0) \left( 1 + b \alpha_s(M_0^2) \ln \frac{M^2}{M_0^2} \right)^{\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}} \\ &= M_n(\tau_0) \left( 1 + \frac{\alpha_s(M_0^2)}{2\pi} d_{qq}^{(n)} \ln \frac{M^2}{M_0^2} + \dots \left( \frac{\alpha_s(M_0^2)}{2\pi} \ln \frac{M^2}{M_0^2} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

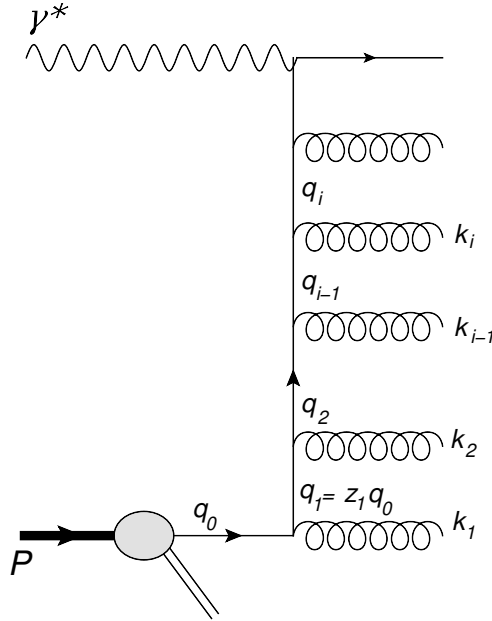
La forme éq. (9.1.31) de la distribution partonique correspond bien à un développement en série à tous les ordres en  $\alpha_s$  mais à chaque ordre on n'a gardé que les termes  $\alpha_s \ln(M^2)$  : on dit alors que l'on a fait "l'approximation des logarithmes dominants" ou que l'on a resommé les logarithmes dominants. Si on ne garde que les deux premiers termes on retrouve bien sous forme de moments la relation entre  $q(z, M^2)$  et  $q(z, M_0^2)$  obtenue à partir de l'équation (9.1.21) (où on a évidemment ignoré la contribution du gluon puisqu'on a discuté seulement l'évolution du quark de valence).

### 9.1.5 Approche intuitive

L'équation (9.1.31) peut également être obtenue en sommant explicitement les diagrammes en échelle du type ci-dessous : Soit  $q_0$  l'impulsion du quark dans le proton avant émission de gluon et  $q_1$  celle après émission du premier gluon, ...,  $q_i$  l'impulsion du quark après émission du gluon d'impulsion  $k_i$ . On peut montrer que :

$$q_i^2 \sim q_{i-1}^2 - k_{iT}^2/x_i \tag{9.1.35}$$

où on a supposé  $q_i \rightarrow \infty$ ,  $x_i \sim k_i/q_i \ll 1$  et on mesure l'impulsion transverse du gluon par rapport à la direction du quark.



A chaque émission de gluon la virtualité du quark est négative et croît en module, de sorte que l'on a la hiérarchie  $-q_{i+1}^2 = Q_{i+1}^2 > Q_i^2 = -q_i^2$ . Comme pour l'émission d'un gluon en éq. (9.1.11), à chaque émission on a un facteur :

$$\frac{\alpha_s(Q_i^2)}{2\pi} \frac{dQ_i^2}{Q_i^2} P_{qq}(z_i) dz_i \tag{9.1.36}$$

où  $z_i$  est la fraction d'impulsion du quark  $q_{i-1}$  cédée au quark  $q_i$  ( $z_i = 1 - x_i$ ). On a "amélioré" la théorie des perturbations en choisissant  $Q_i^2$  comme échelle dans la constante de couplage (voir sec.

8.2.4). Si on somme sur toutes les émissions de gluon on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_1^2)}{2\pi} \frac{dQ_1^2}{Q_1^2} P_{qq}(z_1) dz_1 \cdots \int_{Q_{i-1}^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_i^2)}{2\pi} \frac{dQ_i^2}{Q_i^2} P_{qq}(z_i) dz_i \cdots \int_{Q_{p-1}^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_n^2)}{2\pi} \frac{dQ_n^2}{Q_n^2} P_{qq}(z_p) dz_p$$

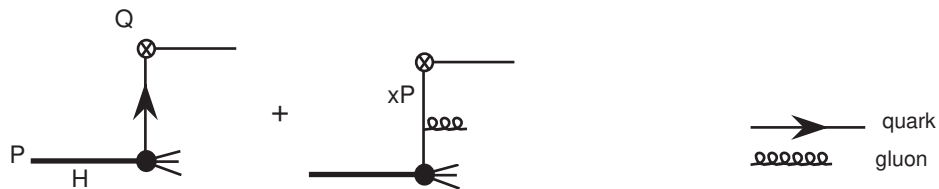
Utilisant la forme  $\alpha_s(Q_i^2) = 1/b \ln(Q_i^2/Q_0^2)$  on montre que le résultat s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{\tilde{P}}{2\pi b} \ln \frac{\ln Q^2}{\ln Q_0^2} \right)^p &= \left( \frac{\ln Q^2}{\ln Q_0^2} \right)^{\frac{\tilde{P}}{2\pi b}} \\ &= \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right)^{-\frac{\tilde{P}}{2\pi b}} \end{aligned} \tag{9.1.37}$$

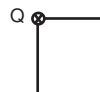
où la notation  $\tilde{P} = \int P_{qq}(z_i) dz_i$ . Cette expression est un cas particulier, avec  $p = 1$ , de l'éq. (9.1.31) obtenue dans l'espace des moments mais elle donne une image de la cinématique à l'œuvre dans l'approximation des logarithmes dominants : le parton issu du proton porte une fraction d'impulsion  $z$  et une petite virtualité d'ordre  $Q_0^2$ . A chaque émission d'un gluon le quark gagne en virtualité négative et perd une petite partie (négligée dans notre approche semi-quantitative) de son impulsion. Lors de l'interaction avec le photon il aura une virtualité d'ordre  $Q^2$  et une impulsion  $x < z$ . De façon équivalente une discussion plus fine montre l'émission des gluons est ordonnée en angle par rapport à la direction du quark : une grande virtualité étant associée à un grand angle.

### 9.1.6 Equations d'évolution couplées des quarks et des gluons

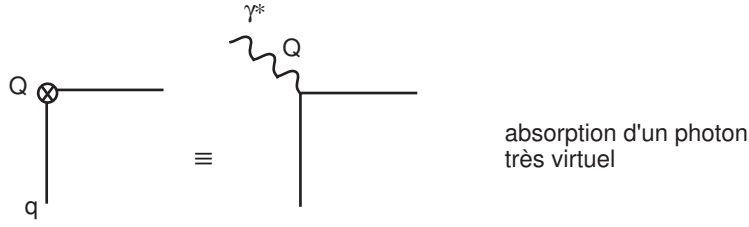
S'affranchissant des détails de la collision dure on peut résumer l'étude précédente par les diagrammes



Le symbole



indique la collision "dure" du parton : dans le cas précédent ce processus est simplement



L'éq. (9.1.17) exprime le fait que toutes les singularités de masse sont absorbées dans la distribution du quark indépendamment du processus dur auquel le quark participe. La même propriété est vraie pour la distribution de gluon mais auparavant il est utile de définir la distribution "singulet" pour  $N_f$  saveurs :

$$\Sigma(x, M^2) = \sum_i^{N_f} (q_i(x, M^2) + \bar{q}_i(x, M^2)) \quad (9.1.38)$$

qui est la probabilité de trouver un quark ou un antiquark dans le hadron, quelque soit sa saveur, et de façon évidente, à l'ordre  $\alpha_s$ , il vient par analogie avec l'éq. (9.1.17) :

$$\begin{aligned} \Sigma(x, M^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ \Sigma(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right] \right. \\ \left. + G(y) \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \times \underbrace{2}_{q_i + \bar{q}_i} \times \underbrace{N_f}_{\text{nb. de saveurs}} \right\} \quad (9.1.39) \end{aligned}$$

Sous forme différentielle on trouve

$$\frac{d\Sigma(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ \Sigma(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, M^2) 2N_f P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right\} \quad (9.1.40)$$

et de même pour la quantité "non-singulet" ou de valence

$$V_i(x, M^2) = q_i(x, M^2) - \bar{q}_i(x, M^2) \quad (9.1.41)$$

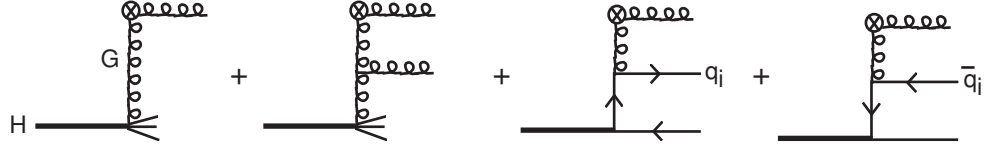
dont l'évolution est gouvernée par

$$\frac{dV_i(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} V_i(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9.1.42)$$

Dans cette dernière équation le terme proportionnel à  $G(y, M^2)$  disparaît puisqu'il contribue autant à  $q_i(x, M^2)$  qu'à  $\bar{q}_i(x, M^2)$ .

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que le cas où le quark participe directement à la sous-collision dure (absorption du photon virtuel) mais on peut imaginer des processus, purement hadroniques, où le gluon peut lui aussi participer à la diffusion dure et on a alors à prendre en compte les diagrammes suivants :





qui mènent aux équations d'évolution pour le gluon :

$$\frac{dG(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ G(y, M^2) P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) + \Sigma(y, M^2) P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) \right\}. \quad (9.1.43)$$

Le premier terme du membre de droite est la contribution du gluon dans le hadron qui participe à la collision dure après émission d'un gluon quasi-colinéaire tandis que le deuxième terme vient du cas où le gluon est émis par un quark ou un antiquark du hadron initial.

Regroupant tout, on obtient les équations DGLAP :

$$\boxed{\frac{dV_i(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) V_i(y, M^2)} \quad (9.1.44)$$

pour chaque saveur, et les équations intégral-différentielles couplées pour les distributions du singulet et du gluon

$$\boxed{\frac{d}{d \ln M^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, M^2) \\ G(x, M^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) & 2N_f P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \\ P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) & P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(y, M^2) \\ G(y, M^2) \end{pmatrix}} \quad (9.1.45)$$

Les  $P_{ij}(z)$ , appelés noyaux d'Altarelli-Parisi, sont prédits par la théorie et dans l'approximation des logarithmes dominants on trouve :

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \\ P_{qG}(z) &= \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1-z)^2) \\ P_{Gq}(z) &= \langle c_F \rangle \frac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{GG}(z) &= \langle 2N \rangle \left( \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right) + \left\langle \frac{11N - 2N_f}{6} \right\rangle \delta(1-z) \end{aligned} \quad (9.1.46)$$

où la prescription "+" est la notation habituelle pour la régularisation des divergences infrarouges et elle est définie au sens des distributions par :

$$\int_0^1 dz \frac{h(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{h(z) - h(1)}{1-z}, \quad (9.1.47)$$

$h(z)$  étant une fonction test régulière en  $z = 1$ .

### 9.1.7 Stabilité de l'interprétation partonique : règles de somme

Dans le modèle des partons naïf on était conduit aux règles de somme suivantes :

$$\int_0^1 dx V_i(x) = n_i \equiv \text{nombre de quarks de valence de type } i$$

$$\int_0^1 dx x (\Sigma(x) + G(x)) = 1 \equiv \text{conservation de l'impulsion.}$$

Ces lois de conservation sont indépendantes de l'échelle  $Q$  de la collision dure. Est-ce vrai après corrections QCD, c'est-à-dire est-ce que les relations :

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx V_i(x, Q^2) = 0 ; \quad \frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx x (\Sigma(x, Q^2) + G(x, Q^2)) = 0$$

sont vérifiées ? On peut facilement voir que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx V_i(x, Q^2) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{dz}{z} V_i\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) P_{qq}(z) \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dz P_{qq}(z) \int_0^1 dy V_i(y, Q^2), \quad \text{avec } z = x/y, \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.1.48}$$

puisque l'on peut montrer que :

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0. \tag{9.1.49}$$

— De même, la deuxième loi de conservation est satisfaite car :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z [P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)] &= 0 \\ \int_0^1 dz z [P_{GG}(z) + 2N_f P_{qG}(z)] &= 0. \end{aligned} \tag{9.1.50}$$

L'interprétation physique du modèle naïf est bien préservée par les corrections QCD au premier ordre, et même à tous les ordres.

Les fonctions  $P_{Gq}(z)$  et  $P_{qG}(z)$  ne sont pas définies pour  $z = 0$ . On peut introduire une forme régularisée :

$$\begin{aligned} P_{Gq}(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{1 + (1-z)^2}{z_+} + \frac{3}{2} \delta(z) \right) \\ P_{qG}(z) &= \langle 2N \rangle \left( \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z_+} + z(1-z) \right) + \left\langle \frac{11N - 2N_f}{6} \right\rangle (\delta(1-z) + \delta(z)), \end{aligned} \tag{9.1.51}$$

Ces fonctions satisfont les relations de symétrie :

$$\begin{aligned} P_{Gq}(z) &= P_{qG}(1-z), \quad 0 \leq z \leq 1 \\ P_{GG}(z) &= P_{GG}(1-z), \quad 0 \leq z \leq 1. \end{aligned} \tag{9.1.52}$$

qui sont évidentes dans l'interprétation partonique des noyaux d'Altarelli-Parisi. Utilisant également la relation  $P_{qG}(z) = P_{qG}(1-z)$ , on prouve facilement à partir des éqs. (9.1.46) et (9.1.51) les règles de somme suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz [P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)] &= 0 \\ \int_0^1 dz [P_{GG}(z) + 2N_f P_{qG}(z)] &= 0. \end{aligned} \quad (9.1.53)$$

qui seront utiles plus bas dans la discussion sur la compensation des divergences infrarouge et colinéaire.

### 9.1.8 Phénoménologie

La figure 9.1 montre une compilation des données récentes sur la fonction de structure du proton obtenues dans les collisions  $e^+p$ ,  $e^-p$  et  $\mu^-p$ . On peut remarquer l'étendue du domaine en  $x$  couvert par les expériences,  $5,0 \cdot 10^{-5} < x < 0,85$ , ainsi que la remarquable précision expérimentale qui est de quelques % dans un grand domaine en  $x$  et  $Q^2$ ,  $2 < Q^2[\text{GeV}^2] < 2 \cdot 10^4$ . Pour mesurer les progrès accomplis depuis les premières mesures de SLAC on peut se reporter à la figure 6.1. La violation de l'invariance d'échelle a tendance à faire décroître  $F_2(x, Q^2)$  à  $x > 0,25$  quand  $Q^2$  augmente, en accord avec la discussion suivant l'éq. (9.1.33), tandis qu'aux petites valeurs de  $x$  la fonction de structure  $F_2(x, Q^2)$  croît rapidement avec  $Q^2$  (augmentation de la densité de quarks matelots, produits de désintégration des gluons rayonnés). L'apparente invariance d'échelle pour  $0,05 < x < 0,25$  n'est en fait que la limite entre les deux régimes. La détermination du comportement de  $F_2(x, Q^2)$  aux petites valeurs de  $x$  fait actuellement l'objet de nombreuses études théoriques : à petits  $x$ , dans le calcul perturbatif, des termes de la forme  $\alpha_s(Q^2) \ln(1/x)$  deviennent importants et il faut, en principe, les sommer à tous les ordres : c'est le régime BFKL<sup>6</sup> pertinent dans le domaine "petits  $x$ , petits  $Q^2$ ", en contraste avec le régime DGLAP qui concerne la sommation des "grands"  $\alpha_s(Q^2) \ln Q^2$ .

A partir de ces données, et en utilisant aussi d'autres réactions comme on le discutera dans le chapitre sur les applications du modèle des partons, il est possible d'extraire la distribution des quarks  $u$ ,  $d$ , ... et du gluon dans le proton. Une façon de procéder est la suivante : on fait une hypothèse sur la forme en  $x$  des distributions partoniques, par exemple<sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} xu_v(x) &= a_u x^{b_u} (1-x)^{c_u} (1+d_u x^2), \quad \text{quark } u \text{ de valence,} \\ xd_v(x) &= a_d x^{b_d} (1-x)^{c_d}, \quad \text{quark } d \text{ de valence,} \\ xq_s(x) &= a_s x^{b_s} (1-x)^{c_s}, \quad \text{quark matelot, on approxime souvent } u_s = \bar{u}_s = d_s = \dots = q_s, \\ xG(x) &= a_{g1} x^{b_{g1}} (1-x)^{c_{g1}} - a_{g2} x^{b_{g2}} (1-x)^{c_{g2}}, \end{aligned} \quad (9.1.54)$$

6. I.I. Balitsky, L.N. Lipatov, Sov.J.Nucl.Phys. **28** (1978), 822, Yad.Fiz. **28** (1978) 1597; E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, Victor S. Fadin, Sov.Phys. JETP **44** (1976) 443, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **71** (1976), 840, Erratum-ibid. **45** (1977), 199.

7. Si on ne s'intéresse qu'aux données  $F_2$  de la diffusion inélastique sur cible iso-scalaire d'un électron ou d'un muon il suffit de paramétrer  $\Sigma(x, Q_0^2)$  et  $G(x, Q_0^2)$  mais on ne peut alors pas accéder au résultat individuellement pour chaque saveur. Pour cela il faut inclure d'autres données, en particulier la DIS neutrino-proton ou neutrino-neutron qui distingue la diffusion sur un quark de celle sur un antiquark

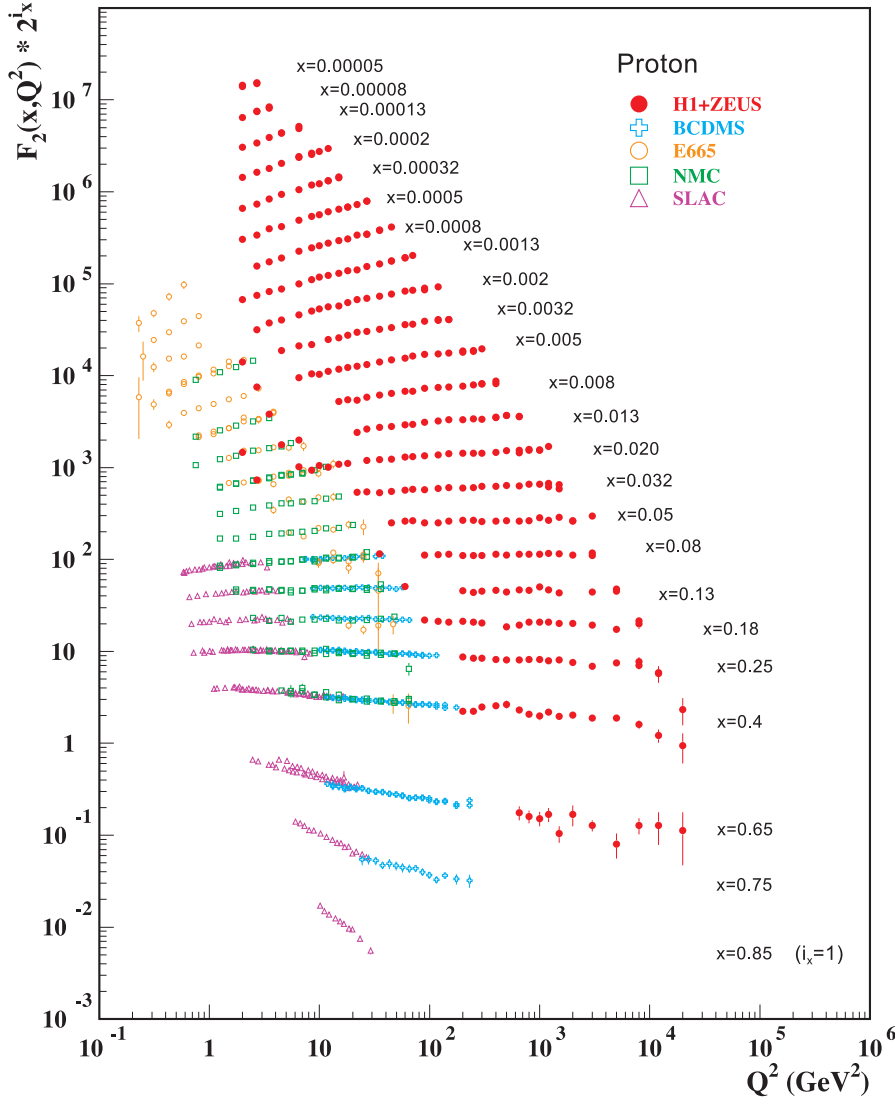


FIGURE 9.1 – Fonction de structure du proton mesurée dans les collisions  $e p$  par les collaborations SLAC, NMC, E665, BCDMS, H1 et ZEUS, compilation des données expérimentales par le Particle Data Group, J. Beringer et al. *Phys. Rev.* **D86**, 01001 (2012).

à une valeur de  $Q^2 = Q_0^2$  (typiquement  $Q_0^2 = 2 \text{ GeV}^2$ ). Utilisant les équations DGLAP et comparant aux données  $F_2(x, Q^2)$  telles que celles de la figure 9.2, on peut déterminer les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... ainsi que la valeur de  $\Lambda_{\overline{MS}}$ . Un excellent accord est obtenu, ce qui est une bonne vérification expérimentale des équations DGLAP et donc de QCD. Actuellement les ajustements sont faits à l'ordre NLO et même NNLO (*next-to-next leading order*) avec des techniques de régression et d'estimations d'erreurs sur les paramétrages très élaborées. On trouvera sur la base de données "HEPDAT - PARTON DISTRIBUTIONS" : <http://durpdg.dur.ac.uk/hepdata/cteq.html> ou LHAPDF : <http://lhapdf.hepforge.org/pdfsets.html> différents ensembles de distributions partoniques avec évolution au LO ou au NLO ou au NNLO,

les plus couramment utilisés étant ceux de CTEQ<sup>8</sup>, MRSTW<sup>9</sup>, ALEKHIN<sup>10</sup>, HERAPDF<sup>11</sup> ou les nouvelles distributions NNPDF<sup>12</sup> qui attachent une importance particulière à la réduction des biais de la méthode.

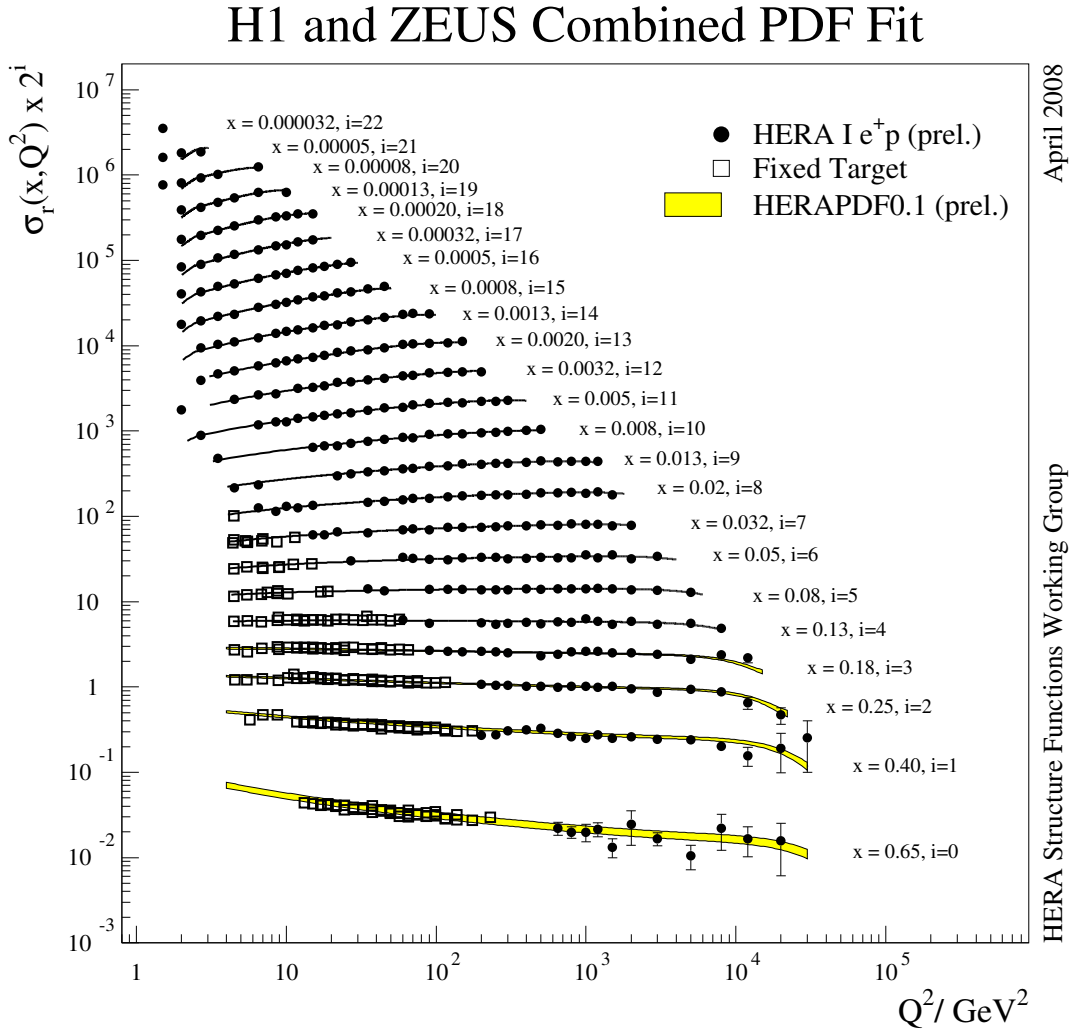


FIGURE 9.2 – Ajustement des distributions partoniques aux données  $e^+p$  de la collaboration H1 et à des données sur cible fixe.

8. CTEQ : J. Pumplin, D.R. Stump, J. Huston, H.L. Lai, P. Nadolsky, W.K. Tung, JHEP **0207** (2002), 012, [hep-ph/0201195]

9. MRSTW : A. D. Martin, W. J. Stirling, R.S. Thorne, G. Watt, Eur.Phys.J. **C70** (2010), 51, [arXiv :1007.2624]

10. ALEKHIN : S. Alekhin, J. Blümlein, S. Klein, S. Moch, Phys. Rev. **D81**, (2010), 014032, [arXiv :0908.3128]

11. HERAPDF : H1 and ZEUS collaborations, Eur. Phys. J. **C73** (2013), 2311, [arXiv :1211.1182]; [arXiv :1506.06042]

12. NNPDF : R. Ball *et al.*, [arXiv :1410.8849].

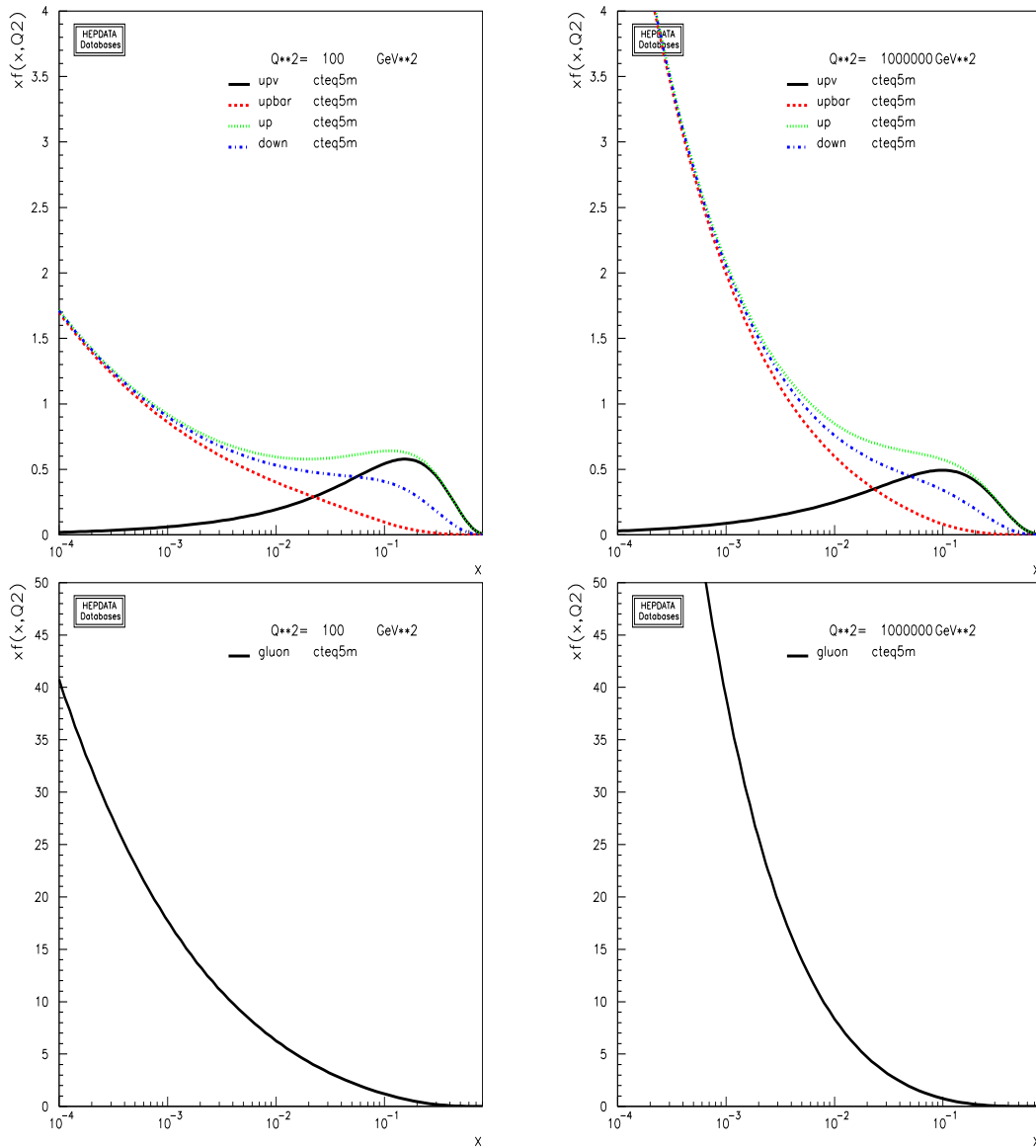


FIGURE 9.3 – Fonctions de distributions des quarks  $u$ ,  $d$  et gluon dans le proton (collaboration CTEQ)

La figure 9.3 montre la dépendance en  $x$  des distributions des quarks  $xu(x, Q^2)$ ,  $xd(x, Q^2)$  et du gluon  $xG(x, Q^2)$  dans le proton, contraintes par l'ajustement aux données DIS. On a choisi deux valeurs de  $Q^2$  :  $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ , valeur typique pour les expériences sur cible fixe et  $Q^2 = 10^6 \text{ GeV}^2$  d'intérêt pour la physique au LHC. Pour le quark  $u$  la distinction est faite entre la composante de valence  $u_v$  qui domine au delà de  $x = 0,05$  mais tend vers 0 à  $x = 0$ , et celle de la mer (quarks matelots)  $u_s = \bar{u}_s$ . Les quarks matelots dominent largement aux petites valeurs de  $x$  : ils sont engendrés essentiellement par le processus  $gluon \rightarrow q \bar{q}$  ce qui explique la quasi égalité

$u(x, Q^2) \sim d(x, Q^2)$  à petits  $x$ . Comparant la distribution des quarks et du gluon, on voit la dominance des quarks  $u$  et  $d$  sur le gluon aux grandes valeurs de  $x$ , alors que le gluon devient important pour  $x < 0,2$  et domine déjà d'un ordre de grandeur les distributions de quarks pour  $x < 0,001$ . A grands  $Q^2$  toutes les distributions tendent à devenir "piquées" aux petites valeurs de  $x$  : en première approximation les distributions décroissent quand  $Q^2$  augmente pour  $x > 0,05$  et croissent aux valeurs de  $x$  inférieures. Techniquement, cela vient du fait que les termes diagonaux  $P_{qq}$  et  $P_{GG}$ , qui jouent un rôle prédominant dans l'équation d'évolution (9.1.45), sont négatifs à grand  $x$ . Physiquement, cela s'interprète en disant que plus  $Q^2$  est élevé, plus les partons "rayonnent" en se cassant en deux partons d'impulsion plus basse. Ceci explique la présence du pic qui apparaît dans la distribution des quarks à  $x = 0$ , pic dû aux quarks de la mer produits de désintégration du gluon comme déjà observé plus haut. Il faut se rappeler que ces distributions partoniques, surtout celle du gluon, sont entachées d'erreurs expérimentales (statistiques et systématiques) et théoriques (arbitraire du choix des échelles de renormalisation et factorisation). En fait tous les paramétrages modernes utilisent des méthodes très élaborées pour quantifier les erreurs, un problème hautement non trivial.

### 9.1.9 Conclusions

Dans cette section nous avons donné une présentation qualitative et phénoménologique de la violation d'invariance d'échelle de la fonction de structure du proton  $\nu W_2 = F_2$  et par conséquent de la distribution des quarks et du gluon dans un hadron. On a mentionné que l'hypothèse du modèle des partons naïf, à savoir la factorisation de la section hadronique entre distributions partoniques et processus durs, est préservée par les corrections QCD du premier ordre, mais ces distributions acquièrent une dépendance en une échelle de factorisation qui est donnée par les équations DGLAP. La discussion a été menée à l'approximation des logarithmes dominants c'est à dire que les fonctions  $P_{ij}(z)$ , éqs. (9.1.46), sont les coefficients des divergences colinéaires logarithmiques d'un calcul des corrections QCD au premier ordre de la théorie des perturbations. Poursuivre les calculs aux ordres supérieurs conduirait à un développement en  $\alpha_s$  des  $P_{ij}(z)$ . Cette dépendance des fonctions de structure en l'échelle de masse est universelle c'est-à-dire qu'elle est la même quelque soit le processus dur où apparaissent ces fonctions de structure. Résoudre les éqs. DGLAP (9.1.44) et (9.1.45) revient à sommer tous les termes de la série perturbative en  $(\alpha_s \ln M^2)^p$ . Cela introduit une dépendance résiduelle des prédictions théoriques pour la section hadronique d'un ordre supérieur à celui auquel on travaille. Cela peut se voir en se reportant à l'éq. (9.1.25) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} \nu W_2(x, Q^2) &= \sum_{i, \bar{i}}^{N_f} e_i^2 \left\{ q_i(x, M^2) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \right. \\
 &\quad \left. \left[ q_i(z, M^2) \left( P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_q\left(\frac{x}{z}\right) \right) + G(z, M^2) \left( P_{qG}\left(\frac{x}{z}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_G\left(\frac{x}{z}\right) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Prenant la dérivée de cette équation par rapport à  $\ln M^2$  et usant de l'éq. (9.1.24), on voit que le membre de droite est d'ordre  $\alpha_s^2$  pour un calcul mené à l'ordre  $\alpha_s$ . Ceci est une conséquence inéluctable la théorie des perturbations : tout série perturbative tronquée à l'ordre  $\alpha_s^p$  souffre d'une ambiguïté, due au choix de l'échelle de factorisation, d'ordre  $\alpha_s^{p+1}$ . En d'autres termes, les résultats pour deux échelles de factorisation différentes diffèrent par des termes d'ordre  $\alpha_s^{p+1}$ . Cette ambiguïté est souvent l'une des incertitudes dominantes des calculs perturbatifs qu'il est essentiel de

prendre en compte quand on compare théorie et expérience.

La section suivante est consacrée à la dérivation de certains résultats présentés ci-dessus, notamment l'équation d'évolution DGLAP de la distribution du quark. Les calculs seront conduits dans le cadre de la régularisation dimensionnelle.

## 9.2 Violations d'invariance d'échelle : calcul exact

On rappelle le paramétrage, introduit dans la section 6.2, éq. (6.2.7), de l'interaction entre un photon virtuel et un hadron avec les fonctions de structure  $W_1$  et  $W_2$ . Par analogie, pour l'interaction  $\gamma^* \text{quark}(p_1) \rightarrow \text{quark}(p_2)$  on écrit<sup>1</sup> :

$$\widehat{W}^{\mu\nu} = -\widehat{W}_1 \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \widehat{W}_2 \left( p_1^\mu - \frac{p_1 q}{q^2} q^\mu \right) \left( p_1^\nu - \frac{p_1 q}{q^2} q^\nu \right). \quad (9.2.55)$$

Pour notre étude il suffira de considérer la trace en  $n$  dimensions :

$$-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} = (3 - 2\varepsilon) \widehat{W}_1 + \frac{(p_1 q)^2}{q^2} \widehat{W}_2, \quad (9.2.56)$$

qui revient à sommer sur les états de polarisation du photon en jauge de Feynman. Introduisant, pour notre convenance, les fonctions de structure :

$$\widehat{\mathcal{F}}_1 = 2\widehat{W}_1, \quad \widehat{\mathcal{F}}_2 = \frac{p_1 q}{z} \widehat{W}_2, \quad (9.2.57)$$

on trouve

$$-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} = (1 - \varepsilon) \widehat{\mathcal{F}}_2 + \left( \frac{3}{2} - \varepsilon \right) (\widehat{\mathcal{F}}_1 - \widehat{\mathcal{F}}_2). \quad (9.2.58)$$

### 9.2.1 Calcul du terme de Born

Dans le cadre du modèle des partons naïf l'amplitude de diffusion  $\gamma^* \text{quark} \rightarrow \text{quark}$  est

$$\mathcal{V}_{(0)}^\mu = -ie e_q \mu^\varepsilon \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_i \delta_{ij}, \quad (9.2.59)$$

où on a explicité les indices de couleur  $i$  et  $j$  des fermions. On ne considère dans la suite qu'un seul type de quark de charge  $ee_q$ . Pour construire la section efficace partonique on doit évaluer, comme en éq. (9.1.6) :

$$\begin{aligned} -g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2p_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p + q - p_2) \mathcal{V}_{(0)}^\mu (\mathcal{V}_{(0)}^\nu)^* \\ &= -(ee_q \mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2p_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p + q - p_2) < \frac{\delta_{jj}}{3} > \left[ \frac{1}{2} \text{Tr}((\not{p}_1 + \not{q}) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu) \right] \\ &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 2\pi \delta^{(+)}(q^2 + 2p_1 q) [4(1 - \varepsilon) p_1 q], \end{aligned} \quad (9.2.60)$$

1. Notez la normalisation différente des fonctions  $W_1$  et  $W_2$  introduite ici comparée à la notation "historique" utilisée dans la section 6.2



où la trace est évaluée en  $n$  dimensions et la moyenne sur le spin et la couleur du fermion a été faite. On définit la section efficace  $\gamma^*$  *quark* en normalisant par le facteur de flux :

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_0^{\gamma^*q} &= \frac{1}{4p_1q} (-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu}) \\ &= \frac{2\pi}{2p_1q} (1 - \varepsilon) (ee_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z) \\ &= \frac{2\pi z}{Q^2} (1 - \varepsilon) (ee_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z),\end{aligned}\tag{9.2.61}$$

avec la variable de Bjorken définie au niveau partonique,

$$z = \frac{Q^2}{2p_1q}.\tag{9.2.62}$$

On donne un nom spécifique au coefficient de la fonction  $\delta(1 - z)$ , qui dépend de "l'échelle dure", car il apparaîtra systématiquement dans tous les calculs d'ordre supérieur :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{2\pi z}{Q^2} (1 - \varepsilon) \mu^{2\varepsilon}.}\tag{9.2.63}$$

La section efficace partonique, dans l'approximation d'ordre 0 en QCD, est donc simplement :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_0^{\gamma^*q} = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z),}\tag{9.2.64}$$

qui se réduit bien à l'éq. (9.1.8) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Le modèle des partons permet d'écrire la section efficace hadronique en convoluant la section efficace partonique avec la distribution du quark  $q_0(z')$ ,  $z'$  fraction d'impulsion du proton portée par le parton. L'impulsion du quark est alors  $p_1 = z'P$  d'où  $z = Q^2/2z'Pq = x/z'$  avec  $x = Q^2/2Pq$  la variable de Bjorken. La section efficace hadronique, calculée à l'ordre le plus bas, est donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{Born}^{\gamma^*p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \int_0^1 dz' q_0(z') \widehat{\sigma}_0(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \delta\left(1 - \frac{x}{z'}\right) \\ &= \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) (ee_q)^2 q_0(x),\end{aligned}\tag{9.2.65}$$

qui est factorisée en un terme "courte distance",  $\widehat{\sigma}_0$  (section efficace "dure" dépendant de  $Q^2$  et de  $x$ ), et un terme "longue distance" indépendant de  $Q^2$ ,  $q_0(x)$  la distribution de quark<sup>13</sup>. Ceci est la version en  $n$  dimensions de l'éq. (9.1.9). On note en passant, par comparaison avec l'éq. (9.2.58), l'absence de terme en  $3/2 - \varepsilon$  dans l'équation d'où on obtient la relation :

$$\widehat{\mathcal{F}}_1(x) = \widehat{\mathcal{F}}_2(x),\tag{9.2.66}$$

conséquence du fait que le parton est de spin 1/2.

Il s'agit maintenant de calculer les corrections au premier ordre en QCD au terme de Born. Les calculs sont compliqués et peu de détails seront épargnés au lecteur éventuel. On calculera d'abord

13. Par rapport à la section 9.1 on a changé la notation des arguments des sections efficaces.

la contribution des diagrammes réels : processus Compton  $\gamma^*$  *quark*  $\rightarrow$  *gluon quark*, d'une part et processus de création de paires  $\gamma^*$  *gluon*  $\rightarrow$  *quark antiquark*, d'autre part. Le premier cas fera apparaître des divergences infrarouges et colinéaires d'où la présence de termes en  $1/\varepsilon^2$ . Les divergences infrarouges seront compensées par la contribution des diagrammes virtuels pour ne laisser que des termes en  $1/\varepsilon$ , les divergences colinéaires, dont on montrera qu'ils peuvent tous être absorbés dans une redéfinition de la distribution du quark dans le proton.

### 9.2.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ *quark* $\rightarrow$ *gluon quark*

On doit calculer les deux diagrammes de type Compton :



L'élément de matrice est

$$\mathcal{M}^{a,\mu} = (-iee_q\mu^\varepsilon) (-ig\mu^\varepsilon)\bar{u}_2(p_2)_j \left[ \gamma_\mu \frac{i(\not{p}_1 - k)}{(p_1 - k)^2 + i\epsilon} \gamma_\rho \epsilon^\rho + \gamma_\rho \epsilon^\rho \frac{i(\not{p}_2 + k)}{(p_2 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \right] T_{ji}^a u_1(p_1)_i, \quad (9.2.67)$$

où on note  $k^\rho$  et  $\epsilon^\rho$  respectivement l'impulsion et le vecteur polarisation du gluon.  $T^a$  est la matrice de couleur associée au couplage du gluon de couleur  $a$  aux quarks de couleur  $i, j$ . On vérifie d'abord l'invariance de cette amplitude sous la translation  $\epsilon^\rho \rightarrow \epsilon^\rho + k^\rho$  ce qui signifie que son carré sera indépendant du choix fait pour la somme sur les états de polarisation du gluon. Pour simplifier on choisira la jauge de Feynman avec la relation  $\sum_{polar} \epsilon^\rho \epsilon^{\rho'} = -g^{\rho\rho'}$ . Il faut maintenant trouver l'expression pour  $-g_{\mu\nu} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}^{a,\nu})^*$  où on a moyenné/sommé sur les états de polarisation et de couleur des quarks et du gluon. Le terme de couleur (on moyenne sur la couleur du quark initial) se factorise et il s'évalue très facilement : c'est simplement

$$\text{facteur de couleur} = \frac{1}{3} \text{Tr} T^a T^a = \frac{1}{3} c_F \delta_{ii} = c_F \quad (9.2.68)$$

Pour simplifier l'écriture de la partie Lorentz du résultat il est utile d'introduire les variables de Mandelstam :

$$\begin{aligned} (p_1 + q)^2 &= q^2 + 2p_1q = (p_2 + k)^2 = 2p_2k = \hat{s} \\ (p_2 - q)^2 &= q^2 - 2p_2q = (p_1 - k)^2 = -2p_1k = \hat{t} \\ (q - k)^2 &= q^2 - 2qk = (p_2 - p_1)^2 = -2p_1p_2 = \hat{u}. \end{aligned} \quad (9.2.69)$$

En jauge de Feynman pour le gluon et se rappelant les règles de diracologie en  $n$ -dimensions pour l'évaluation des traces on trouve,

1. carré du premier terme :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 4(1 - \varepsilon)^2 \frac{\hat{s}}{-\hat{t}}$$

2. carré du premier terme :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2(g\mu^\varepsilon)^2 4(1-\varepsilon)^2 \frac{-\hat{t}}{\hat{s}}$$

3. terme d'interférence :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2(g\mu^\varepsilon)^2(-8)(1-\varepsilon) \left[ \frac{\hat{u} q^2}{\hat{s} \hat{t}} - \varepsilon \right]$$

où on a pris la moyenne sur le spin du quark initial. Regroupant tous les termes, couleur et Lorentz, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2 &= -\overline{\Sigma}_{couleur,polar} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}_\mu^a)^* \\ &= (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 c_F 4(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} + \frac{\hat{s}}{-\hat{t}} \right) - 2 \frac{\hat{u} q^2}{\hat{s} \hat{t}} + 2\varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (9.2.70)$$

Cette expression est indépendante du choix de la jauge pour le gluon.

### • Choix du repère

Pour calculer la section efficace  $\gamma^*$  *quark* on peut se placer dans le repère du centre de masse de la collision photon-parton. Les coordonnées des vecteurs sont définies, en  $n$ -dimensions, par :

$$p_1 = (e_1, 0, \dots, e_1) ; \quad q = (q^0, 0, \dots, -e_1) ; \quad k = (k, \dots, k \cos \theta_1), \quad (9.2.71)$$

de sorte que les invariants prennent la forme :

$$e_1 = \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} ; \quad \hat{t} = -\frac{(\hat{s} + Q^2)}{2} (1 - \cos \theta_1) ; \quad \hat{u} = -\frac{(\hat{s} + Q^2)}{2} (1 + \cos \theta_1). \quad (9.2.72)$$

L'élément de matrice au carré dépend uniquement de l'angle polaire  $\theta_1$ , et non de l'angle azimutal ou des angles non-physiques.

### • Intégrale sur l'espace de phase

On doit intégrer sur l'espace de phase en  $n$  dimensions pour le quark et le gluon finals :

$$\begin{aligned} PS &= \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2e_2} \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + q - p_2 - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{d^{n-1} k}{2k} d^n p_2 \delta^+((p_1 + q - k)^2) \delta^{(n)}(p_1 + q - p_2 - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{k^{n-3}}{2} dk d\Omega_{n-2} \delta(\hat{s} - 2\sqrt{\hat{s}} k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \frac{(\sqrt{\hat{s}})^{n-4}}{2^{n-1}} \int d\Omega_{n-2} \end{aligned} \quad (9.2.73)$$

où  $d\Omega_{n-2}$  est l'élément d'angle solide dans un espace à  $n-1$  dimensions (*cf* éq. (3.2.12)). L'impulsion du gluon est contrainte par la relation  $k = \sqrt{\hat{s}}/2$ . Contrairement au calcul, en régulation dimensionnelle, des intégrales des diagrammes en boucles on ne peut pas faire ici l'intégrale sur tous les angles puisque l'angle polaire apparaît explicitement dans l'élément de matrice. On peut

néanmoins adapter les expressions éqs. (3.2.13), (3.2.14) pour faire les intégrales sur les angles non physiques et azimutal et ne garder comme variable que l'angle polaire  $\theta_1$  de sorte que :

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{n-2} &= \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \int d\Omega_{n-3}, \\ &= 2 \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma((n-2)/2)} \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \end{aligned} \quad (9.2.74)$$

d'après (3.2.14). Faisant le changement de variable  $\cos \theta_1 = 2y - 1$  et usant de  $n = 4 - 2\varepsilon$  on trouve :

$$\int d\Omega_{n-2} = \frac{(4\pi)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \quad (9.2.75)$$

de sorte que l'intégrale sur l'espace de phase devient :

$$\boxed{PS = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{\hat{s}} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon},} \quad (9.2.76)$$

valable pour la production de deux partons de masse nulle dans un processus  $2 \rightarrow 2$ . La contribution du processus Compton à la section efficace photon-quark est la convolution du facteur d'espace de phase et de l'amplitude au carré :

$$\hat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{1}{4p_{1q}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2, \quad (9.2.77)$$

que l'on va maintenant évaluer.

### • Cinématique

Se rappelant la définition de la variable de Bjorken au niveau partonique,  $z = Q^2/2p_{1q}$ , on peut exprimer tous les invariants du problème à l'aide de  $Q^2$  et des variables sans dimensions  $y$  et  $z$  :

$$\boxed{\hat{s} = Q^2 \frac{1-z}{z}; \quad \hat{t} = -Q^2 \frac{1-y}{z}; \quad \hat{u} = -Q^2 \frac{y}{z}.} \quad (9.2.78)$$

La positivité de  $\hat{s}$  impose  $z \leq 1$ . D'autre part, se rappelant que le parton porte une fraction  $z' \leq 1$  de l'impulsion du proton et que reliant les variables de Bjorken partonique et hadronique on a  $z' = z/x$  la condition  $z' \leq 1$  impose la restriction

$$\boxed{x \leq z \leq 1.} \quad (9.2.79)$$

Le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\boxed{\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2 = (e e_q \mu^\varepsilon)^2 (g \mu^\varepsilon)^2 < c_F > 4(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-y}{1-z} + \frac{1-z}{1-y} \right) + 2 \frac{yz}{(1-y)(1-z)} + 2\varepsilon \right].} \quad (9.2.80)$$

• **Divergences colinéaire et infrarouge**

Se concentrant sur l'intégrale angulaire il faut donc évaluer, à l'aide de l'éq. (3.2.29),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-y}{1-z} + \frac{1-z}{1-y} \right) + 2 \frac{yz}{(1-y)(1-z)} + 2\varepsilon \right] \\ &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + 3 - z - \frac{7}{2} \frac{\varepsilon}{1-z} + 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.2.81)$$

où on n'a gardé que les termes jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$ . On voit que les termes en  $1/(1-y)$  seraient divergents en  $y=1$  ( $\Leftrightarrow \hat{t}=0 \Leftrightarrow \cos\theta=1$ ) si  $\varepsilon$  était nul : on a donc bien une divergence colinéaire, quand le gluon est émis parallèlement au quark initial. Rassemblant tous les termes on trouve :

$$\boxed{\hat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_q(z, \varepsilon) \right]}, \quad (9.2.82)$$

où on a mis en évidence le facteur  $\hat{\sigma}_0$ , éq. (9.2.63) caractéristique de la section efficace à l'ordre de Born. Le terme entre crochets contient la contribution QCD, proportionnelle à  $\alpha_s$  et a une expression compliquée :

$$H_q(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + 3 - z - \frac{7}{2} \frac{\varepsilon}{1-z} + 2\varepsilon \right] \quad (9.2.83)$$

L'origine du terme  $z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon}$  dans l'équation ci-dessus est la substitution

$$\left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^\varepsilon = \left( \frac{1}{Q^2} \right)^\varepsilon z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \quad (9.2.84)$$

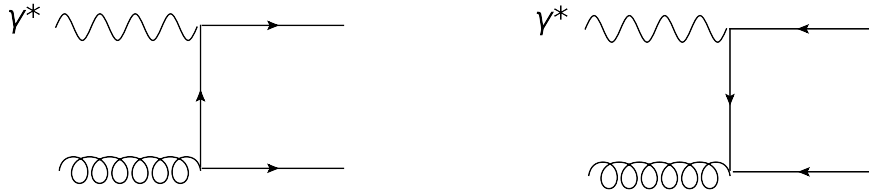
dans le facteur d'espace de phase éq. (9.2.76). Ce terme est important car il permettra la régularisation des divergences infrarouges lors du calcul de la diffusion  $\gamma^*$  *proton* qui nécessitera l'intégration sur la variable  $z'$ , donc sur  $z = x/z'$ . En effet, l'impulsion  $k$  du gluon est, d'après la contrainte de la fonction  $\delta$  dans l'équation (9.2.73),

$$k = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \quad (9.2.85)$$

qui s'annule en  $z=1 \Rightarrow k=0$ . Les termes en  $1/(1-z)$  dans la fonction  $H_q(z, \varepsilon)$  conduisent à une divergence quand on intègre sur l'impulsion du quark initial pour construire la section efficace au niveau hadronique.

### 9.2.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ *gluon* $\rightarrow$ *quark antiquark*

Les deux diagrammes à évaluer sont :



Le carré de l'élément de matrice de ce processus peut être obtenu par croisement à partir de l'éq. (9.2.70) : le gluon sortant d'impulsion  $k$  du processus Compton devient entrant d'impulsion  $p_1$ , d'où  $k \rightarrow -p_1$ , tandis que le quark entrant d'impulsion  $p_1$  devient un antiquark sortant d'impulsion  $k$ , d'où  $p_1 \rightarrow -k$ , les autres impulsions restant inchangées, de sorte que les variables de Mandelstam deviennent :

$$\begin{array}{ll} \text{Compton} & \text{création de paire} \\ (q + p_1)^2 = \hat{s} & \rightarrow (q - k)^2 = \hat{u} \\ (q - p_2)^2 = \hat{t} & \rightarrow (q - p_2)^2 = \hat{t} \\ (q - k)^2 = \hat{u} & \rightarrow (q + p_1)^2 = \hat{s} \end{array} \quad (9.2.86)$$

Avant de substituer ces nouvelles variables dans l'éq. (9.2.70) il faut se rappeler de modifier la normalisation du fait de la moyenne sur les états de couleur et polarisation des particules entrantes :

- pour la couleur : Compton =  $\frac{1}{3}\Sigma_{couleur}$   $\rightarrow$  création de paire =  $\frac{1}{8}\Sigma_{couleur}$

- pour le spin : pas de changement car quark et gluon ont chacun deux états de polarisation,

Donc au lieu du facteur  $c_F$  on aura  $3 c_F/8 = 1/2$  et ainsi le carré de l'élément de matrice pour la création d'une paire  $q \bar{q}$  est :

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* G}^2 &= -\overline{\Sigma}_{couleur,polar} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}_\mu^a)^* \\ &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{2} > 4(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) + 2 \frac{\hat{s} q^2}{\hat{u} \hat{t}} - 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.2.87)$$

où on n'a pas oublié un facteur  $-1$  global du fait que l'on a croisé un fermion (le carré de l'élément de matrice doit être positif). On utilise ensuite les relations éqs. (9.2.78) pour écrire notre expression en fonction des variables invariantes d'échelle  $y$  et  $z$  :

$$\boxed{\overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* G}^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{2} > 4(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} - 2 \right) - 2z(1-z) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) - 2\varepsilon \right].} \quad (9.2.88)$$

### • Intégrale sur l'espace de phase

L'intégrale sur l'impulsion des partons finals se fait de la même façon que pour la diffusion Compton, à l'aide de l'éq. (9.2.76). Négligeant pour le moment la normalisation, on a pour l'intégrale sur la variable angulaire  $y$  :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} - 2 \right) - 2z(1-z) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) - 2\varepsilon \right] \\ &= \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)^2}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left[ -\frac{2}{\varepsilon} (z^2 + (1-z)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.89)$$

Le facteur  $-2/\varepsilon$  est issu des divergences colinéaires à  $y = 0$  ( $\hat{t} = 0 \Rightarrow \bar{q} //$  gluon, diffusion dure  $\gamma^*$  *quark*) et  $y = 1$  ( $\hat{u} = 0 \Rightarrow q //$  gluon, diffusion dure  $\gamma^*$  *antiquark*). D'autre part, il n'y a dans ce processus pas de divergences infrarouges car les conditions cinématiques empêchent le gluon d'avoir une énergie nulle : en effet, cette dernière est d'après les éqs. (9.2.72) et (9.2.78) :

$$e_1 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \quad (9.2.90)$$

avec  $x < z < 1$ . On reconstruit alors la section efficace au niveau partonique avec tous les facteurs de normalisation (de l'élément de matrice, de l'espace des phases et du flux) pour trouver :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_1^{\gamma^* G}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_G(z, \varepsilon) \right]} \quad (9.2.91)$$

avec

$$H_G(z, \varepsilon) = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \left[ -\frac{1}{\varepsilon} (z^2 + (1-z)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]. \quad (9.2.92)$$

Il n'y a pas de singularité en  $z$  dans l'intervalle  $x \leq z \leq 1$  donc pas de divergence infrarouge dans le processus de création de paire  $q \bar{q}$ .

#### 9.2.4 Diffusion $\gamma^*$ proton : contribution des termes réels

Regroupant toutes les contributions déjà calculées, Born éq. (9.2.61), Compton éq. (9.2.82) et création de paire éq. (9.2.91), et appliquant l'hypothèse du modèle des partons naïf pour construire la section  $\gamma^*$  proton, on peut écrire, en rappelant que  $z = x/z'$  :

$$\sigma_{réel}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) = \int_x^1 dz' \left\{ q_0(z') \left[ \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) + \widehat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \right] + G_0(z') \widehat{\sigma}_1^{\gamma^* G}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \right\}. \quad (9.2.93)$$

Les bornes d'intégration sont données par l'éq. (9.2.79). Faisant le changement de variable d'intégration  $z' \rightarrow z$  et substituant les expressions pour les différentes composantes de la section efficace on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{réel}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1-z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) H_q(z, \varepsilon) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) H_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.94)$$

On reconnaît facilement que cette expression est factorisée en une section efficace dure, la même que celle du terme de Born, et une intégrale qui contient, à l'ordre  $\alpha_s$ , des divergences colinéaires et, dans le terme  $H_q(z, \varepsilon)$ , des divergences à  $z = 1$  qu'il s'agit maintenant d'extraire.

#### • Extraction des divergences infrarouges de la diffusion Compton

Pour cela il est nécessaire d'évaluer des expressions potentiellement divergentes telles que :

$$\int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z}, \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z}, \quad (9.2.95)$$

qui apparaissent dans la fonction  $H_q(z, \varepsilon)$  de l'éq. (9.2.83). Il s'agit de les exprimer sous la forme de pôles en  $\varepsilon$  et de termes finis. Dans les expressions ci-dessus la fonction  $F(z)$  est une fonction

arbitraire supposée régulière à  $z = 1$ . Pour cela on développe l'intégrand de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z} &= \int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)^{1+\varepsilon}} (1 + \varepsilon \ln z) \\ &= \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)^{1+\varepsilon}} + F(1) \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)^{1+\varepsilon}} + \varepsilon \int_0^1 dz F(z) \frac{\ln z}{(1-z)^{1+\varepsilon}} \\ &= \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)} (1 - \varepsilon \ln(1-z)) - \frac{1}{\varepsilon} F(1) + \varepsilon \int_0^1 dz F(z) \frac{\ln z}{(1-z)}. \end{aligned} \quad (9.2.96)$$

Puisque le terme  $(F(z) - F(1))/(1-z)$  est régulier en  $z = 1$ , le développement en  $\varepsilon$  de l'intégrand du premier terme est justifié. Le deuxième terme est évalué grâce à l'éq. (3.2.29), quant au dernier, le facteur  $\ln z/(1-z)$  est régulier en  $z = 1$  et on peut donc prendre  $\varepsilon = 0$  dans l'exposant du dénominateur. On introduit les notations standards suivantes :

$$\boxed{\int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)}}$$

$$\boxed{\int_0^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ = \int_0^1 dz (F(z) - F(1)) \frac{\ln(1-z)}{(1-z)}}. \quad (9.2.97)$$

On peut donc écrire l'intégrale ci-dessus de la façon suivante :

$$\int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-1-\varepsilon} F(z) = \int_0^1 dz F(z) \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} + \varepsilon \frac{\ln z}{1-z} - \varepsilon \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ \right\}. \quad (9.2.98)$$

En fait, l'expression des sections efficaces, telles que (9.2.93), implique une intégrale sur la variable  $z$  de  $x \neq 0$  à 1. On définira donc :

$$\boxed{\int_x^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} - \int_0^x dz \frac{F(z)}{(1-z)}}$$

$$\boxed{\int_x^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ = \int_0^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \int_0^x dz F(z) \frac{\ln(1-z)}{(1-z)}}. \quad (9.2.99)$$

L'application de cette technique à l'évaluation de la contribution du terme Compton éq. (9.2.83) à la section efficace hadronique permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\int_0^1 \frac{dz}{z} q_0\left(\frac{x}{z}\right) z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_q(z, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{dz}{z} q_0\left(\frac{x}{z}\right) F_q(z, \varepsilon) \quad (9.2.100)$$

où on a défini :

$$\begin{aligned} F_q(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle &\left[ \frac{2}{\varepsilon^2} \delta(1-z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{7}{2} \delta(1-z) \right. \\ &\left. + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + 3 - z \right]. \end{aligned} \quad (9.2.101)$$



La présence de termes en  $\delta(1-z)$  et des distributions " + " sont caractéristiques des divergences infrarouges. Si de plus on a une divergence colinéaire, cela engendre des facteurs tels que  $\delta(1-z)/\varepsilon^2$  ainsi que  $(\ln(1-z)/(1-z))_+$ .

L'intégrale sur  $z$  de  $H_G(z, \varepsilon)$ , éq. (9.2.92), ne présente pas de difficultés (pas de divergence infrarouge) et on trouve :

$$\int_0^1 \frac{dz}{z} G_0\left(\frac{x}{z}\right) z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_G(z, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{dz}{z} G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \quad (9.2.102)$$

avec

$$F_G(z, \varepsilon) = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle (z^2 + (1-z)^2) \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{1-z}{z} \right]. \quad (9.2.103)$$

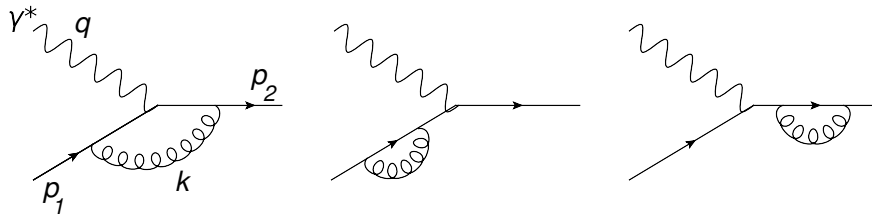
Regroupant toutes les contributions réelles, après avoir extrait les divergences infrarouges, l'équation (9.2.94) devient :

$$\boxed{\sigma_{r\acute{e}el}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) = (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) F_q(z, \varepsilon) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \quad (9.2.104)}$$

Les fonctions  $F_q$  et  $F_G$ , ne sont autres que, respectivement,  $z^\varepsilon(1-z)^\varepsilon H_q$  et  $z^\varepsilon(1-z)^\varepsilon H_G$  de l'éq. (9.2.94) où on a explicité le comportement infrarouge.

### 9.2.5 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution des termes virtuels

Les diagrammes à calculer sont :



On travaille en jauge de Landau : on a vu qu'alors la correction de self-énergie est strictement nulle (éq. 8.2.11) pour des fermions de masse nulle. En revanche le calcul de la correction au vertex est long et pénible. Avec le choix des impulsions de la figure le terme à calculer est (voir la section (4.3.1) pour le calcul QED en jauge de Feynman) :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = -iee_q\mu^\varepsilon (-ig\mu^\varepsilon)^2 \bar{u}(p_2)_j \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{\gamma_\rho(\not{p}_2 + \not{k})\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{k})\gamma^\rho}{(p_2 + k)^2(p_1 + k)^2 k^2} - \frac{\not{k}(\not{p}_2 + \not{k})\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{k})\not{k}}{(p_2 + k)^2(p_1 + k)^2 (k^2)^2} \right\} T_{jk}^a T_{ki}^a u(p_1)_i, \quad (9.2.105)$$

où on somme les couleurs  $i$  et  $j$  des quarks et  $a$  du gluon. Le facteur de couleur se réduit à  $c_F \delta_{ji}$ . Introduisant deux paramètres de Feynman, on peut linéariser les dénominateurs :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_2 + k)^2 (p_1 + k)^2 k^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3}$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_2 + k)^2 (p_1 + k)^2 (k^2)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^4},$$

où l'impulsion dans la boucle  $l$  est définie par  $l = k + y(xp_1 + (1-x)p_2)$ . Après réduction de la trace on peut réécrire le vertex à une boucle, en supposant les quarks  $p_1$  et  $p_2$  sur couche de masse (i.e.  $\not{p}_1 u(p_1)_i = \bar{u}(p_2)_j \not{p}_2 = 0$ ),

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = -iee_q \mu^\varepsilon (g\mu^\varepsilon)^2 \langle c_F \rangle \bar{u}(p_2)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{(1-2\varepsilon)l^2 \gamma^\mu - 4(1-\varepsilon) l l^\mu}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3} \right. \quad (9.2.106)$$

$$\left. + \frac{(-2+y-(1-2\varepsilon)y^2 x(1-x))q^2}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3} \gamma^\mu - 3(1-y) \frac{4p_1 l p_2 l + y^2 x(1-x)(q^2)^2}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^4} \gamma^\mu \right\} u(p_1)_j.$$

Seul le premier terme est potentiellement divergent dans l'ultraviolet,  $\int dl^n/l^4 \sim \int dl/l^{1+2\varepsilon}$  : il est facilement évalué à l'aide de l'éq. (3.2.22) qui permet de réduire le terme  $\not{l} l^\mu$  à  $l^2 \gamma^\mu / 2(2-\varepsilon)$  et de l'éq. (3.2.23) qui permet d'effectuer l'intégrale sur l'impulsion de la boucle. Sa contribution au vertex est alors :

$$-iee_q \mu^\varepsilon (g\mu^\varepsilon)^2 \langle c_F \rangle \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{-q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon (-3\varepsilon + 2\varepsilon^2) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= -iee_q \mu^\varepsilon \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{1-2\varepsilon} x^{-\varepsilon} (1-x)^{-\varepsilon} (-3+2\varepsilon) \Gamma(1+\varepsilon)$$

$$= -iee_q \mu^\varepsilon \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j, \quad (9.2.107)$$

où on a négligé des termes d'ordre  $\varepsilon$ . On observe que la divergence ultraviolette de l'intégrale sur l'impulsion (voir la première ligne) est compensée par le coefficient d'ordre  $\varepsilon$ . Ceci est en accord avec le résultat obtenu en QED où on a montré que vertex et self-énergie avaient les mêmes divergences ultraviolettes (voir sec. 4.3) : en l'occurrence, en jauge de Landau, ni le vertex ni la self-énergie n'ont de divergences UV. Si les deux derniers termes de l'équation (9.2.106) ne présentent pas de divergences lors de l'intégration sur l'impulsion  $l$ , cette dernière engendre cependant des termes de type  $y^{-1-2\varepsilon} x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon}$  et  $y^{-2\varepsilon} x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon}$  qui conduisent finalement à des termes  $1/\varepsilon^2$  et  $1/\varepsilon$ , signes de singularités colinéaires et infrarouges. L'éq. (3.2.29) permet de faire les intégrales  $\int dx dy$  et un usage immodéré de la formule de récursion sur les fonctions  $\Gamma$ , éq. (3.2.18), conduit finalement au résultat relativement simple où on a inclus tous les termes de l'éq. (9.2.105) :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = \mathcal{V}_{(0)}^\mu \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}. \quad (9.2.108)$$

On remarque que la contribution des termes en boucle à la diffusion  $\gamma^* \text{quark} \rightarrow \text{quark}$  est simplement un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born et on peut écrire :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = \mathcal{V}_{(0)}^\mu \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} V_1(\varepsilon) \quad (9.2.109)$$

avec (en jauge de Landau)

$$V_1(\varepsilon) = \langle c_F \rangle \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 - \frac{\pi^2}{3} \right\} \quad (9.2.110)$$

où on a utilisé la relation

$$\Gamma(1 + \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6}, \quad (9.2.111)$$

et le fait que  $-q^2 = Q^2 > 0$  permet d'ignorer le facteur  $i\varepsilon$  associé à  $-q^2$ . Finalement la contribution des termes virtuels à la section efficace qui est deux fois la partie réelle de l'interférence du terme de Born avec la correction au vertex est donc simplement :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_{virtuel}^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} 2V_1(\varepsilon)} \quad (9.2.112)$$

On remarque que la structure de cette équation est très similaire à celle des contributions partoniques réelles.

### 9.2.6 Diffusion $\gamma^*$ proton au premier ordre de QCD

Regroupant tous les termes, Born, contributions réelles éq. (9.2.104) et contributions virtuelles éq. (9.2.112) on a :

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1 - z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \left( F_q(z, \varepsilon) + 2V_1(\varepsilon) \delta(1 - z) \right) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.113)$$

Se reportant aux éqs. (9.2.101) et (9.2.110) on voit facilement que le terme en  $1/\varepsilon^2$  de la correction virtuelle  $V_1(\varepsilon)$  compense un terme équivalent mais de signe opposé inclus dans la contribution Compton  $F_q(z, \varepsilon)$ . D'autre part, les morceaux en  $1/\varepsilon$  de ces deux contributions se combinent pour former l'expression :

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{qq}(z) = -\frac{1}{\varepsilon} \langle c_F \rangle \left( \frac{1 + z^2}{(1 - z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1 - z) \right). \quad (9.2.114)$$

L'autre terme divergent subsistant dans l'éq. (9.2.113) est contenu dans  $F_G(z, \varepsilon)$  et on le note :

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{qG}(z) = -\frac{1}{\varepsilon} \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1 - z)^2). \quad (9.2.115)$$

Rétablissant tous les impedimenta associés à ces termes divergents on peut ré-écrire la diffusion  $\gamma^*$  proton en séparant termes divergents et finis quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1 - z) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) f_q(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) f_G(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.116)$$

Les termes finis,

$$\begin{aligned} f_q(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{7}{2} \delta(1-z) + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + 3 - z \right) \\ f_G(z) &= \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{1-z}{z}, \end{aligned} \quad (9.2.117)$$

sont obtenus à partir des équations (9.2.101), (9.2.110) et (9.2.103). Dans l'esprit du modèle des partons on donne un nom à l'intégrale contenant le terme de Born et tous les morceaux divergents : c'est une fonction de  $x$  et de  $Q^2$  que l'on suppose finie (comme on le justifiera plus bas) et qui est notée, sans surprise (c'est la version en régularisation dimensionnelle de l'éq. (9.1.17)) :

$$\boxed{q(x, Q^2) = q_0(x) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right)}, \quad (9.2.118)$$

de telle sorte que la section efficace s'écrit relativement simplement :

$$\boxed{\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x) = \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] (ee_q)^2 \left[ q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) f_q(z) + G\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) f_G(z) \right) \right]}. \quad (9.2.119)$$

Pour obtenir cette expression on a fait un certain nombre d'approximations toutes parfaitement justifiées dans le cadre d'un développement perturbatif. Il y a également un brin d'anticipation. Le premier terme est évident : il résulte trivialement de la substitution de l'éq. (9.2.118) dans l'éq. (9.2.116) et l'on a pris  $\varepsilon = 0$  puisque les pôles en  $\varepsilon$  ont disparu. Ce terme est identique à l'expression du modèle des partons naïf sauf que la distribution partonique dépend de l'échelle  $Q^2$ . Le deuxième terme d'ordre  $\alpha_s$  est la première correction QCD à la diffusion profondément inélastique et les fonctions  $f_q(z)$  et  $f_G(z)$  sont calculables et données en (9.2.117). A l'ordre auquel le calcul est conduit il est justifié d'avoir fait, dans ce terme, la substitution  $q_0(\frac{x}{z}) \rightarrow q(\frac{x}{z}, Q^2)$  qui engendre des corrections d'ordre  $\alpha_s^2$  qui sont donc hors du cadre de l'approximation d'ordre  $\alpha_s$  que l'on considère ici. De même pour la substitution  $G_0(\frac{x}{z}) \rightarrow G(\frac{x}{z}, Q^2)$ , anticipant le fait que l'on a une relation similaire à l'éq. (9.2.118) pour la distribution du gluon. Finalement le choix  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(Q^2)$  est (relativement) arbitraire et montre seulement que l'on a choisi de travailler dans le cadre d'une théorie renormalisée à  $\mu^2 = Q^2$ . Il est inutile de préciser que l'on a pris  $\varepsilon = 0$  partout puisque tous les termes dans (9.2.119) sont finis. L'équation dérivée ci-dessus est bien l'éq. (9.1.18), assénée au lecteur en sec. 9.1.

### 9.2.7 Schémas de factorisation et équation DGLAP

La relation (9.2.118) définit le schéma de factorisation  $\overline{MS}$  (par analogie avec le schéma de renormalisation). En effet, développant en  $\varepsilon$  les termes singuliers on a :

$$q(x, Q^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right), \quad (9.2.120)$$

et l'on voit que tous les termes  $1/\varepsilon + \ln 4\pi - \gamma$  sont absorbés dans la redéfinition de la distribution de quarks avec le choix  $\mu^2 = Q^2$ . On aurait pu définir la distribution partonique à une échelle

$M^2 \neq Q^2$  et/ou inclure des termes finis  $c_q(z)$ ,  $c_G(z)$  arbitraires, par exemple :

$$q(x, M^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right), \\ + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) c_q(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) c_G(z) \right) \quad (9.2.121)$$

auquel cas l'expression de la section efficace hadronique aurait été (avec un couplage renormalisé à  $M^2$ ) :

$$\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x) = (ee_q)^2 \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] \left\{ q(x, M^2) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, M^2\right) (P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_q(z) - c_q(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + G\left(\frac{x}{z}, M^2\right) (P_{qG}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_G(z) - c_G(z)) \right) \right\} \quad (9.2.122)$$

qui est l'expression la plus générale de la section efficace, pour un choix arbitraire de l'échelle de factorisation  $M$  et du schéma de factorisation défini par  $c_q(z)$  et  $c_G(z)$ . Le choix  $f_q(z) = c_q(z)$ ,  $f_G(z) = c_G(z)$  et  $M^2 = Q^2$ , autrefois populaire, définit le schéma de renormalisation *DIS* dans lequel la section efficace garde la même forme, à l'ordre  $\alpha_s$ , qu'à l'ordre de Born

$$\boxed{\sigma^{\gamma^*p} = (ee_q)^2 \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] q(x, Q^2)} \quad (9.2.123)$$

toutes les corrections d'ordre supérieur ayant été absorbées dans la définition de la distribution partonique avec violation de l'invariance d'échelle. Il est évident qu'un changement d'échelle  $M^2$  n'affecte pas les prédictions puisque la variation du premier terme  $q(x, M^2)$ , est compensée exactement par une variation opposée des termes en  $\ln Q^2/M^2$ .

### • Equation DGLAP

Prenant la dérivée par rapport à  $M^2$  de l'éq. (9.2.121) on trouve

$$\boxed{M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, M^2\right) P_{qq}(z) + G\left(\frac{x}{z}, M^2\right) P_{qG}(z) \right)}, \quad (9.2.124)$$

où toutes les divergences de l'éq. (9.2.121) ont disparu. La solution de cette équation intégral-différentielle permettra de "prédire"  $q(x, M^2)$ ,  $\forall x, M^2$ , connaissant  $q(x, M_0^2)$  à une valeur de référence de l'échelle de masse : on a vu que cela revenait à faire une sommation à tous les ordres des corrections dominantes. On peut noter qu'à ce niveau d'approximation (LO) l'équation d'évolution est indépendante du schéma de factorisation,  $\overline{MS}$  ou *DIS* ou autre. Revenant à l'éq. (9.2.122), on observe que la prédiction théorique pour  $\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x)$ , connaissant  $q(x, M^2)$  solution de l'éq. (9.2.124), exhibera une dépendance en l'échelle de factorisation  $M$  puisque maintenant la variation de  $q(x, M^2)$  est sommée à tous les ordres tandis que le terme compensatoire n'est évalué qu'au premier ordre en  $\alpha_s$ , mais l'ambiguïté est en principe petite puisque d'ordre  $\alpha_s^2$ . Il est courant lors de l'étude d'un processus caractérisé par une échelle  $Q^2$  de faire varier l'échelle de factorisation entre  $Q^2/4$  et  $4Q^2$  (le facteur 4 est totalement arbitraire!) et d'appeler la variation correspondante

”erreur théorique”.

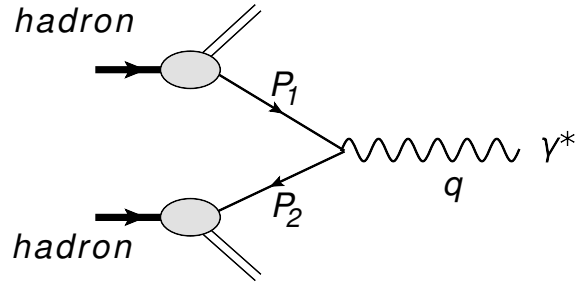
On rappelle que l'éq. (9.2.124) fait référence à une seule saveur de quark. Les équations DGLAP complètes sont données en éqs. (9.1.45) et (9.1.44). Espérons que le lecteur n'est pas trop déprimé par la lourdeur des calculs présentés dans cette section et qu'il ne renoncera pas à approfondir ses connaissances en QCD perturbatif.

### 9.3 Diffusion Drell-Yan

Ce processus du type  $hadron\ hadron \rightarrow \gamma^* X$  fait donc intervenir la convolution de deux distributions partoniques dans l'état initial et on montrera que les divergences colinéaires subsistant dans un calcul d'ordre supérieur se factorisent comme dans l'éq. (9.2.121) ce qui permet d'affirmer l'universalité de la définition des distributions violant l'invariance d'échelle puisque la relation entre les distribution partoniques ”nues” et celles renormalisés ne dépendent pas du processus auquel elles participent.

#### 9.3.1 Calcul du terme de Born

Le diagramme à l'ordre le plus bas est :



L'élément de matrice de la réaction  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q)$  est :

$$\mathcal{M}_0 = -iee_q\mu^\varepsilon \bar{v}(p_2)_j \gamma_\nu u(p_1)_j \epsilon^\nu. \quad (9.3.125)$$

Son carré, sommé/moyenné sur les polarisations et les couleurs est donc :

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}_0|^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) \hat{s}. \quad (9.3.126)$$

L'intégrale sur l'espace de phase de la particule finale de masse carrée  $Q^2$  est en  $n$ -dimensions :

$$\begin{aligned} PS_0 &= \int \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}2q^0} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q) \\ &= \frac{2\pi}{\hat{s}} \delta(1 - z) \end{aligned} \quad (9.3.127)$$

où on a défini la variable sans dimension :

$$\boxed{z = \frac{Q^2}{\hat{s}}, \text{ avec } q^2 = Q^2 > 0.} \quad (9.3.128)$$

La section efficace partonique à l'approximation de Born est donc :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^{q\bar{q}} &= \frac{1}{2\hat{s}} PS_0 \bar{\Sigma} |\mathcal{M}_0|^2 \\ &= \frac{\pi z}{Q^2} < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) (ee_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z).\end{aligned}\quad (9.3.129)$$

On note la similarité de cette expression avec celle, éq. (9.2.61), de la diffusion inélastique profonde ce qui est naturel puisque ces processus sont reliés par croisement. Pour les mêmes raisons que dans l'inélastique on donne un nom au terme contenant l'échelle dure :

$$\boxed{\hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{\pi z}{Q^2} < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) \mu^{2\varepsilon}.}$$
 (9.3.130)

Au niveau hadronique, introduisant seulement un type de quark de distribution  $q_0(x)$ , on doit convoluer la section partonique avec le produit des distributions  $q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)$  :

$$\sigma_{Born}^{pp} = (ee_q)^2 \int dx_1 dx_2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z) \{q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) + [1 \leftrightarrow 2]\} \quad (9.3.131)$$

La variable d'énergie partonique  $\hat{s}$  est donnée par  $\hat{s} = x_1 x_2 s$  de sorte que définissant :

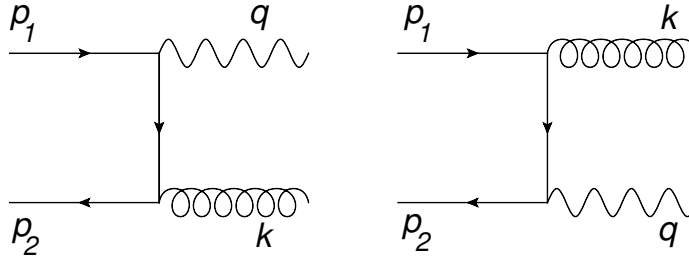
$$x = \frac{Q^2}{s} \quad \text{on a} \quad \frac{Q^2}{\hat{s}} = z = \frac{x}{x_1 x_2}, \quad (9.3.132)$$

et la section hadronique s'écrit alors :

$$\boxed{\sigma_{Born}^{pp}(Q^2, x, \varepsilon) = \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) (ee_q)^2 \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{x}{x_1 x_2}\right) \{q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) + [1 \leftrightarrow 2]\}} \quad (9.3.133)$$

### 9.3.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de *quark antiquark* $\rightarrow \gamma^*$ *gluon*

Les diagrammes d'annihilation de la paire  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q) + G(k)$  sont :



L'élément de matrice s'obtient très facilement à partir de celui du processus de création de paire traité dans une section précédente : il suffit de renverser le signe de toutes les impulsions et donc les invariants  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$  gardent la même signification. Quant à la somme/moyenne sur spin et couleur il faut multiplier l'éq. (9.2.87) par 8 (nombre de couleurs du gluon) et 2 (nombre de degrés de

polarisation du gluon) et diviser par 9 (couleur des quarks initiaux) et 4 (polarisation). On trouve finalement (cf éq. pour le cas  $Q^2 = 0$ ) :

$$\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} c_F > 2(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) + 2 \frac{\hat{s} q^2}{\hat{u} \hat{t}} - 2\varepsilon \right], \quad (9.3.134)$$

avec  $c_F = 4/3$ .

### • Intégrale sur l'espace de phase

On se place dans le repère du centre de masse des partons initiaux où les cordonnées sont :

$$p_1 = (\sqrt{\hat{s}/2}, 0, \dots, \sqrt{\hat{s}/2}) ; \quad p_2 = (\sqrt{\hat{s}/2}, 0, \dots, -\sqrt{\hat{s}/2}) ; \quad k = (k, \dots, k \cos \theta_1). \quad (9.3.135)$$

Pour évaluer l'intégrale sur les impulsions finales on suit la même procédure que celle des éqs. (9.2.73) la seule différence étant que maintenant l'une des particules finales, le photon, est massive :

$$\begin{aligned} PS &= \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}2k} \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}2q^0} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{d^{n-1}k}{2k} \delta^+((p_1 + p_2 - k)^2 - Q^2) \\ &= \frac{(2\pi)^{2-n}}{4\sqrt{\hat{s}}} \left( \frac{\hat{s} - Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} \right)^{n-3} \int d\Omega_{n-2}. \end{aligned} \quad (9.3.136)$$

L'intégrale angulaire se fait comme en éq. (9.2.75) pour trouver, définissant comme auparavant  $\cos \theta_1 = 2y - 1$ ,

$$PS = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon}, \quad (9.3.137)$$

En terme des variables sans dimension les invariants sont :

$$\hat{s} = \frac{Q^2}{z} ; \quad (p_1 - k)^2 = \hat{t} = -\frac{Q^2}{z} (1-y)(1-z) ; \quad (p_2 - k)^2 = \hat{u} = -\frac{Q^2}{z} (1-z)y \quad (9.3.138)$$

de sorte que le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} c_F > 2(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} - 2 \right) + \frac{z}{(1-z)^2} \frac{2}{y(1-y)} - 2\varepsilon \right]. \quad (9.3.139)$$

### • Divergences colinéaire et infrarouge

Combinant alors élément de matrice et espace de phase on construit la section efficace au niveau partonique pour trouver après intégration angulaire :

$$\begin{aligned} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 \\ &= \left[ (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > \right] < c_F > \frac{g^2}{8\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left( -\frac{4}{\varepsilon} \right) \\ &\quad \left\{ 2 \frac{z^{1+\varepsilon}}{(1-z)^{1+2\varepsilon}} + z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$



Le pôle en  $\varepsilon$  résulte de la divergence colinéaire  $y = 1 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = 1$  quand le gluon est émis parallèlement au quark initial ou  $y = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = -1$  quand le gluon est parallèle à l'antiquark. On remarque, d'autre part, que le premier terme entre accolades a une singularité qui serait non intégrable à  $z = 1$  en 4 dimensions. Cela correspond à  $\hat{s} = Q^2$  : dans ce cas l'énergie du gluon final est nécessairement nulle (seuil de production du photon virtuel par la paire  $q\bar{q}$ ) et cela engendre une singularité infrarouge lors de l'intégration sur l'impulsion des quark et antiquark de l'état initial dans la construction de la section efficace hadronique. De façon similaire à l'éq. (9.2.98) on écrit pour un terme singulier en  $z = 1$  :

$$z^\varepsilon(1-z)^{-1-2\varepsilon}F(z) = F(z) \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} + \varepsilon \frac{\ln z}{1-z} - 2\varepsilon \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)_+} \right) \right\}, \quad (9.3.140)$$

où ici  $F(z) = 2z$ . La différence entre ce résultat et celui de l'éq. (9.2.98) provient du facteur d'espace de phase qui reflète une cinématique différente : pour le voir il suffit de comparer les facteurs  $PS$  des éqs. (9.2.76) et (9.3.137). Pour le deuxième terme entre accolades qui est régulier, il suffit pour le calculer de faire le développement en  $\varepsilon$

$$z^\varepsilon(1-z)^{1-2\varepsilon} = (1-z)(1 + \varepsilon \ln z - 2\varepsilon \ln(1-z)). \quad (9.3.141)$$

Finalement la contribution du processus d'annihilation à la section efficace partonique est donc

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^{q\bar{q}}(Q^2, z, \varepsilon) &= \frac{1}{2\hat{s}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 \\ &= (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) \end{aligned}} \quad (9.3.142)$$

avec

$$F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle 2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \delta(1-z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2(1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - (1+z^2) \frac{\ln z}{1-z} \right] \quad (9.3.143)$$

### 9.3.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de *quark gluon* $\rightarrow \gamma^*$ *quark*

L'élément de matrice pour le processus  $q(p_1) + g(k) \rightarrow q(p_2) + \gamma^*(q)$  s'obtient de la réaction précédente par croisement :

$$\hat{s} \rightarrow \hat{t}; \quad \hat{t} \rightarrow \hat{s}; \quad \hat{u} \rightarrow \hat{u} \quad (9.3.144)$$

et on trouve (ne pas oublier le facteur -1 pour le croisement de la ligne fermionique) :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{qG}^2 &= (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 \langle \frac{1}{6} \rangle 2 \left[ (1-\varepsilon) \left( -\frac{\hat{s}}{\hat{u}} - \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right) - 2 \frac{\hat{t}q^2}{\hat{u}\hat{s}} + 2\varepsilon \right] \\ &= (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 \langle \frac{1}{6} \rangle 2 \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{y(1-z)} + y(1-z) \right) - 2 \frac{1-y}{y} z + 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.3.145)$$

après prise en compte de la moyenne sur les couleurs et polarisations et utilisation la définition des invariants éq. (9.3.138). Comme d'habitude on construit la section efficace partonique et après

intégration sur la variable angulaire on trouve :

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_1^{qG}(Q^2, z, \varepsilon) &= \frac{1}{2\hat{s}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{qG}^2 \\ &= \left[ (1-\varepsilon)(ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > \frac{\pi}{\hat{s}} \right] < \frac{1}{2} > \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-2\varepsilon} \\ &\quad \left( -\frac{1}{\varepsilon}(z^2 + (1-z)^2) + z + \frac{3}{2}(1-z^2) \right)\end{aligned}\tag{9.3.146}$$

que l'on peut ré-écrire :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_1^{qG}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} F_{qG}(z, \varepsilon)}\tag{9.3.147}$$

avec

$$F_{qG}(z, \varepsilon) = < \frac{1}{2} > \left[ -\frac{1}{\varepsilon}(z^2 + (1-z)^2) + (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{(1-z)^2}{z} + z + \frac{3}{2}(1-z^2) \right]\tag{9.3.148}$$

Ces deux dernières équations sont aussi valables pour  $\widehat{\sigma}_1^{\bar{q}G}(Q^2, z, \varepsilon)$ .

### 9.3.4 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contributions des termes virtuels

Elles sont très faciles à obtenir à partir des termes équivalents de la diffusion profondément inélastique. C'est simplement un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born (9.3.125). Sans refaire le calcul, la correction de la boucle au vertex s'écrit de façon similaire à (9.2.108), avec comme résultat :

$$\mathcal{M}_{(1)} = \mathcal{M}_{(0)} < c_F > \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}.\tag{9.3.149}$$

Mais  $-q^2 = -Q^2$  est maintenant négatif et il faut faire une petite manipulation pour simplifier le facteur  $(\dots)^\varepsilon$ . On a :

$$\begin{aligned}\left( \frac{4\pi\mu^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right)^\varepsilon &= (4\pi)^\varepsilon e^{\varepsilon \ln(-Q^2/\mu^2 - i\epsilon)} \\ &= (4\pi)^\varepsilon e^{\varepsilon(\ln(Q^2/\mu^2) - i\pi)} = \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon e^{-i\pi\varepsilon} \\ &= \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \left( 1 - i\pi\varepsilon - \frac{\pi^2}{2}\varepsilon^2 \right),\end{aligned}\tag{9.3.150}$$

où on a utilisé le fait que la prescription  $-i\epsilon$  impose une partie imaginaire  $-i\pi$  au logarithme d'argument négatif. D'où (en jauge de Landau) :

$$\mathcal{M}_{(1)} = \mathcal{M}_{(0)} \frac{\alpha_s}{4\pi} < c_F > \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\},\tag{9.3.151}$$

expression dans laquelle on a utilisé la relation (9.2.111). On a omis dans cette équation une partie imaginaire car ce qui est recherché est deux fois la partie réelle de l'interférence de la boucle avec le terme de Born ce qui apportera à la section efficace partonique la contribution :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1-z) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} 2 V_1(\varepsilon)} \quad (9.3.152)$$

avec, par analogie avec l'inélastique profond, on a défini :

$$V_1(\varepsilon) = \langle c_F \rangle \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2 \frac{\pi^2}{3} \right\}. \quad (9.3.153)$$

On remarque que les sections partoniques  $\widehat{\sigma}_1^{q\bar{q}}$ ,  $\widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}$  and  $\widehat{\sigma}_1^{qG}$  ne dépendent que de  $z = Q^2/(sx_1x_2)$  et donc sont invariantes sous l'échange  $x_1 \rightarrow x_2$ . On a donc  $\widehat{\sigma}_{1,virtuel}^{q\bar{q}} = \widehat{\sigma}_{1,virtuel}^{\bar{q}q}$  et  $\widehat{\sigma}_1^{qG} = \widehat{\sigma}_1^{\bar{q}G}$ .

### 9.3.5 Diffusion Drell-Yan au premier ordre de QCD

La section efficace hadronique sera la somme des sections partoniques, "Born + virtuelle + annihilation + QCD Compton" convoluées avec le produit des distributions partoniques initiales :

$$\sigma^{pp} = \int dx_1 dx_2 \left\{ [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) (\widehat{\sigma}_0^{q\bar{q}} + \widehat{\sigma}_1^{q\bar{q}} + \widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}) + (q_0(x_1) + \bar{q}_0(x_1)) G_0(x_2) \widehat{\sigma}_1^{qG}] + [1 \leftrightarrow 2] \right\}.$$

En détail on aura donc avec  $\sigma_0(Q^2, z, \varepsilon) = \sigma_0(Q^2, x, \varepsilon)/(x_1x_2)$  :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp} = & (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right. \\ & \cdot [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) (F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) + 2 V_1(\varepsilon) \delta(1-z)) + (q_0(x_1) + \bar{q}_0(x_1)) G_0(x_2) F_{qG}(z, \varepsilon)] + [1 \leftrightarrow 2] \left. \right\} \end{aligned}$$

On voit que les termes en  $1/\varepsilon^2$  se compensent entre la contribution virtuelle et  $F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon)$  de l'éq. (9.3.143) et que les termes divergents restant sont proportionnels aux fonctions  $P_{qq}(z)$  et  $P_{qg}(z)$  donnés en éqs. (9.2.114) et (9.2.115). Quant aux termes finis on les note :

$$\boxed{f_{q\bar{q}}(z) = \langle c_F \rangle \left[ \left( \frac{2\pi^2}{3} - 8 \right) \delta(1-z) + 4(1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - 2(1+z^2) \frac{\ln z}{1-z} \right]} \quad (9.3.154)$$

$$\boxed{f_{qG}(z) = \langle \frac{1}{2} \rangle \left[ (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{(1-z)^2}{z} + z + \frac{3}{2}(1-z^2) \right]} \quad (9.3.155)$$

de sorte que la section efficace hadronique devient :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp} = & (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right. \right. \\ & \cdot \left( q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \left( -\frac{2}{\varepsilon} \right) P_{qq}(z) + (q_0(x_1) G_0(x_2) + G_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)) \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) P_{qG}(z) \right) \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} (q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) f_{q\bar{q}}(z) + (q_0(x_1) G_0(x_2) + G_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)) f_{qG}(z)) \right] + [1 \leftrightarrow 2] \right\} \end{aligned}$$

où on a regroupé les termes divergents et pris la limite  $\varepsilon = 0$  dans les termes finis de la dernière ligne. On a également réarrangé les termes reliés par symétrie en faisant apparaître explicitement la combinaison  $(G_0(x_1)\bar{q}_0(x_2) + q_0(x_1)G_0(x_2))$ . Se concentrant maintenant sur le terme de Born et les facteurs qui ont un pôle en  $\varepsilon$  on les écrit, utilisant comme variables d'intégration, plutôt que  $x_1$  et  $x_2$ , soit  $x_1$  et  $z = x/x_1x_2$ , soit  $x_2$  et  $z$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{div}^{pp} = & (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \left\{ \left[ \int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \bar{q}_0\left(\frac{x}{x_1}\right) \right. \right. \\ & + \int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int \frac{dz}{z} \left(\bar{q}_0\left(\frac{x/x_1}{z}\right) P_{q\bar{q}}(z) + G_0\left(\frac{x/x_1}{z}\right) P_{qG}(z)\right) \\ & + \left. \int \frac{dx_2}{x_2} \bar{q}_0(x_2) \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int \frac{dz}{z} \left(q_0\left(\frac{x/x_2}{z}\right) P_{q\bar{q}}(z) + G_0\left(\frac{x/x_2}{z}\right) P_{qG}(z)\right) \right] \\ & + \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (9.3.156)$$

Les intégrales des deux premières lignes se combinent simplement en :

$$\int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \bar{q}\left(\frac{x}{x_1}, Q^2\right) = \int \frac{dx_2}{x_2} \bar{q}(x_2, Q^2) q_0\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad (9.3.157)$$

où on a introduit la distribution d'antiquark avec violation d'invariance d'échelle grâce à l'éq. (9.2.118). Substituant alors dans la troisième ligne  $\bar{q}(x_2, Q^2)$  à  $\bar{q}_0(x_2)$ , négligeant les termes d' $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  ainsi introduits, et combinant avec la deuxième forme de l'éq. (9.3.157) on voit que l'expression  $\sigma_{div}^{pp}$  se réduit à :

$$(ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) \delta(1-z) \right] + \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}, \quad (9.3.158)$$

où toutes les singularités ont disparu. Le résultat de cette longue discussion est que la section efficace de production d'une paire de leptons dans les collisions proton-proton s'écrit relativement simplement comme :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp}(Q^2, x) = & \frac{\pi x}{Q^2} \left\langle \frac{1}{3} \right\rangle (ee_q)^2 \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) \delta(1-z) \right. \right. \\ & + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) f_{q\bar{q}}(z) + (G(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) + q(x_1, Q^2) G(x_2, Q^2)) f_{qG}(z) \right] \\ & + \left. \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.3.159)$$

où la deuxième ligne est la correction, au premier ordre, à l'approximation des logarithmes dominants (LO) de la première. Le choix de l'échelle dans le couplage fort est arbitraire mais il est naturel de choisir  $Q^2$ . Dans les manipulations ci-dessus on a systématiquement ignoré tous les termes d'ordre  $\alpha_s^2$  et on a supposé que la distribution de gluon avait aussi une dépendance en

l'échelle caractéristique du processus considéré. On voit qu'on a donc bien absorbé les termes divergents du processus Drell-Yan dans la même redéfinition de la distribution de quarks que celle utilisée dans la diffusion inélastique profonde via l'éq. (9.2.118) : ceci est une démonstration, au premier ordre, du "théorème" général de factorisation qui affirme que, à tous les ordres de la théorie des perturbations, les singularités de masse sont absorbées par l'introduction des distributions partoniques violant l'invariance d'échelle et que la relation entre distributions nues et distributions violant l'invariance d'échelle sont indépendantes du processus dur considéré. La conséquence fondamentale en est que les distributions partoniques sont universelles : ce sont les mêmes quelque soit le processus de diffusion dur dans lesquelles elles apparaissent. Elles sont universelles mais leur forme explicite dépend cependant du choix de schéma de factorisation. En effet, pour un choix de schéma de factorisation défini comme en eq. (9.2.121) et d'échelle de factorisation arbitraire  $M^2 \neq Q^2$ , on montre facilement que la section efficace est obtenue à partir de la formule ci-dessus où on substitue  $M^2$  à  $Q^2$  et :

$$\begin{aligned} f_{q\bar{q}}(z) &\rightarrow f_{q\bar{q}}(z) + 2P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} - 2c_q(z) \\ f_{qG}(z) &\rightarrow f_{qG}(z) + P_{qG}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} - c_G(z). \end{aligned} \quad (9.3.160)$$

Les fonctions de structure ainsi définies satisferont aux mêmes équations d'évolution mais les conditions initiales à  $Q_0^2$  seront différentes.

A l'approximation des logarithmes dominants où on néglige les termes d'ordre  $\alpha_s$  on a l'expression très simple :

$$\sigma^{pp}(Q^2, x) = (e e_q)^2 < \frac{1}{3} > \frac{\pi}{s} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ q(x_1, M^2) \bar{q}(x_2, M^2) \delta\left(1 - \frac{x}{x_1 x_2}\right) + [1 \leftrightarrow 2] \right\} \quad (9.3.161)$$

mais on perd en pouvoir prédictif car si on varie l'échelle de factorisation arbitraire  $M$  la section efficace calculée varie de façon monotone car on n'a plus le mécanisme de compensation entre les termes d'ordre  $\alpha_s \ln(Q^2/M^2)$  et la variation des distributions partoniques induite par les équations DGLAP.



# Chapitre 10

## Annihilation $e^+ e^- \rightarrow hadrons$

On a déjà brièvement mentionné dans la section 6.5 la réaction  $e^+ e^- \rightarrow hadrons$  comme test du modèle des partons naïf. Dans ce chapitre on va étudier, au premier ordre en QCD, différents observables tels que la section efficace totale, la section efficace de production de "jet" et celle inclusive de production d'un hadron, ce qui nécessitera, dans les deux derniers cas, l'introduction d'une part de la notion d'algorithme de définition de "jet" ou gerbe hadronique et d'autre part de la fonction de fragmentation d'un parton en hadron. Dans tous les cas il s'agit de traiter les divergences infrarouges et colinéaires qui surgissent dans les étapes intermédiaires des calculs, soit par compensation complète entre diagrammes réels et virtuels (section totale, production de jet), soit par absorption des divergences colinéaires restantes dans une fonction de structure non perturbative (production inclusive d'un hadron). Pour simplifier les expressions, de façon similaire à DIS, on va discuter la désintégration d'un photon virtuel  $\gamma^* \rightarrow hadrons$  plutôt que  $e^+ e^- \rightarrow hadrons$  puisque la partie QCD est complètement découplée de la partie électromagnétique dans la mesure où on somme sur l'état de polarisation des particules initiales et finales.

Comme pour calculs précédents on trouve d'abord l'expression de la contribution à l'ordre le plus bas en  $n$ -dimensions puis celle au premier ordre en QCD. Les différents observables partagent tous la même dynamique (amplitude de diffusion) mais diffèrent par l'espace de phase final considéré.

### 10.1 Section efficace totale

L'élément de matrice à l'approximation de Born de la désintégration d'un photon virtuel en une paire quark-antiquark,  $\gamma^*(q) \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2)$ , est :

$$\mathcal{M}_{(0)} = -iee_q\mu^\varepsilon \bar{u}(p_1)_j \gamma_\nu v(p_2)_j \epsilon^\nu. \quad (10.1.1)$$

C'est évidemment le processus croisé de Drell-Yan éq. (9.3.125) où on a renversé le signe de toutes les impulsions. Le carré sommé sur les polarisations et les couleurs est donc (voir éq. (9.3.126))

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(0)}|^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 4 \langle N \rangle (1 - \varepsilon) Q^2, \quad (10.1.2)$$

où  $q^2 = Q^2$  est la masse carrée du photon virtuel. Le facteur 4 concerne la polarisation des quarks. Par convention, en accord avec notre pratique dans le DIS, on a sommé sur la polarisation du

photon initial ( $\epsilon^\nu \epsilon^{\nu'} = -g^{\nu\nu'}$ ). L'espace de phase est (voir éqs. (9.2.73)) :

$$\begin{aligned}
 PS2 &= \int \frac{d^{n-1}p_1}{(2\pi)^{n-1}2\omega_1} \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2\omega_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q) \\
 &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{\omega_1^{n-3}}{2} d\omega_1 d\Omega_{1,n-2} \delta(Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_1) \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon, \tag{10.1.3}
 \end{aligned}$$

où on a fait l'intégration angulaire grâce à l'éq. (3.2.15) et utilisé la notation habituelle  $n = 4 - 2\varepsilon$ . Combinant espace de phase et élément de matrice on trouve pour le taux de désintégration du photon en une saveur de quark :

$$\begin{aligned}
 e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{Q^2}} PS2 \Sigma |\mathcal{M}_{(0)}|^2 \\
 &= \langle N \rangle \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 \sqrt{Q^2} (1-\varepsilon) \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2 \mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon. \tag{10.1.4}
 \end{aligned}$$

On remarque que pour  $\varepsilon = 0$  l'expression devient très simple,  $\langle N \rangle \alpha e_q^2 \sqrt{Q^2}$  puisque  $\pi^{3/2}/\Gamma(3/2) = 2\pi^{3/2}/\Gamma(1/2) = 2\pi$  d'après l'éq. (3.2.19). On aurait presque pu l'écrire directement : le facteur  $\alpha e_q^2$  est évident de même que  $N$  qui compte le nombre d'états de couleur final et  $\sqrt{Q^2}$  qui est la seule variable dimensionnée qui donne la bonne dimension à la largeur de désintégration. Finalement, seule la normalisation (un facteur 1!) n'aurait pu être devinée.

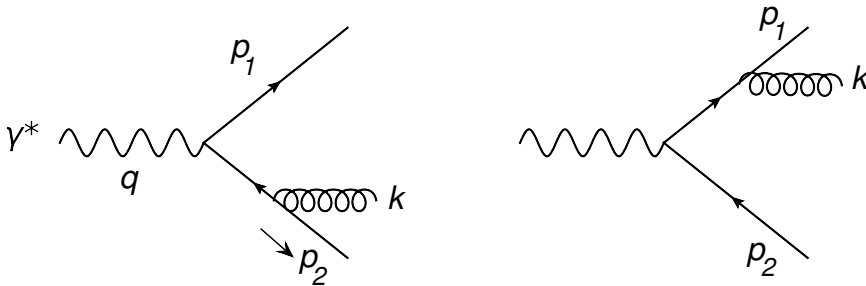
### 10.1.1 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels

Il est trivial d'obtenir la contribution des termes virtuels : ça sera le même terme multiplicatif à l'amplitude de Born que pour la production Drell-Yan ( $Q^2 > 0$ ), comme en éq. (9.3.151), où  $\mathcal{M}_{(0)}$  est maintenant donné par le terme d'ordre 0 de  $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q}$ , éq. (10.1.2). Le double de l'interférence avec le terme de Born sera donc :

$$e_q^2 \Gamma_1^{\text{virtuel}}(Q^2, \varepsilon) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\}. \tag{10.1.5}$$

### 10.1.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels

Les diagrammes à considérer sont :





Pour obtenir directement le carré de l'amplitude des termes réels,  $\gamma^* \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2) + G(k)$  on peut partir de la diffusion  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q) + G(k)$ , éq. (9.3.134), et renverser le signe de toutes les impulsions sauf celle du gluon qui reste une particule finale :

$$\begin{aligned} p_1 \rightarrow -p_2 & ; \quad \hat{t} = (p_1 - k)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_2 = (p_2 + k)^2 = (q - p_1)^2 \\ p_2 \rightarrow -p_1 & ; \quad \hat{u} = (p_2 - k)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_1 = (p_1 + k)^2 = (q - p_2)^2 \\ q \rightarrow -q & ; \quad \hat{s} = (p_1 + p_2)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_3 = (p_1 + p_2)^2 = (q - k)^2, \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

pour obtenir :

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N_{CF} > 8(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{\hat{s}_1}{\hat{s}_2} + \frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_1} \right) + 2 \frac{\hat{s}_3 q^2}{\hat{s}_1 \hat{s}_2} - 2\varepsilon \right], \quad (10.1.7)$$

où on a modifié de façon appropriée les facteurs de polarisation et de couleur.

### • Intégrale sur l'espace de phase

Dans tous les cas précédents l'espace de phase final comptait deux particules et les calculs étaient relativement faciles. Ici, pour obtenir la contribution des termes réels au taux de production hadronique il faut intégrer l'espace de phase à 3 corps en  $n$ -dimensions, soit évaluer :

$$PS3 \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = \int \frac{d^{n-1}p_1}{(2\pi)^{n-1}2\omega_1} \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2\omega_2} \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}2k} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 + k - q) \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 \quad (10.1.8)$$

Pour cela on se place dans le repère au repos du photon virtuel,  $\vec{q} = 0$ , et on est libre de choisir l'axe  $Oz$  le long de l'impulsion finale  $p_1$  puisqu'il n'y a pas d'impulsion initiale privilégiée (car on a sommé sur les états de polarisation du photon). Tous les vecteurs du problème seront dans un plan, soit  $xOz$ , et on pourra ainsi faire trivialement l'intégrale sur tous les angles sauf sur l'angle (polaire)  $\theta_1$  entre  $\vec{p}_1$  et  $\vec{k}$ . C'est la seule variable angulaire dont dépend  $|\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2$ . On a :

$$\hat{s}_1 = 2\omega_1 k (1 - \cos \theta_1) = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_2 ; \quad \hat{s}_2 = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_1 ; \quad \hat{s}_3 = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} k. \quad (10.1.9)$$

Dans l'éq. (10.1.8) on peut se débarrasser de  $p_2$  en écrivant comme d'habitude :

$$\int \frac{d^{n-1}p_2}{2\omega_2} = \int d^n p_2 \delta^+(p_2^2), \quad (10.1.10)$$

et en effectuant cette intégrale avec la conservation d'énergie-impulsion  $\delta^{(n)}(p_1 + p_2 + k - q)$ . Tous les angles de  $p_1$  se font trivialement à l'aide de la relation (3.2.14) :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{n-1}p_1}{2\omega_1} &= \frac{1}{2} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} d\Omega_{1n-2} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} \end{aligned}$$

et de même pour les angles de  $k$ , sauf l'angle polaire  $\theta_1$  que l'on doit garder :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{n-1}k}{2k} &= \frac{1}{2} \int dk k^{n-3} d\theta_1 (\sin \theta_1)^{n-3} d\Omega_{n-3} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int dk k^{n-3} d\cos \theta_1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{\frac{n-4}{2}}. \end{aligned}$$

L'espace des phases devient alors

$$\begin{aligned}
PS3 &= \frac{1}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} d\cos\theta_1 (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \delta^+((q - p_1 - k)^2) \\
&= \frac{\pi^{n-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} d\cos\theta_1 (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \\
&\quad \delta^+(Q^2 - 2(\omega_1 + k)\sqrt{Q^2} + 2\omega_1 k(1 - \cos\theta_1)), \tag{10.1.11}
\end{aligned}$$

ce qui contraint l'angle polaire :

$$1 - \cos\theta_1 = -\frac{Q^2 - 2(\omega_1 + k)\sqrt{Q^2}}{2\omega_1 k}, \tag{10.1.12}$$

laissant finalement comme variable d'intégration les énergies  $\omega_1$  et  $k$ .

### • Cinématique

Les éqs. (10.1.9) impliquent les contraintes  $0 < \omega_1, \omega_2, k < \sqrt{Q^2}/2$ . Si on substitue par conservation d'énergie  $\omega_2 = \sqrt{Q^2} - \omega_1 - k$  on a alors les conditions  $\sqrt{Q^2} > \omega_1 + k > \sqrt{Q^2}/2$ . Il est pratique d'introduire les variables sans dimension  $z_i$  via :

$$k = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z_1, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z_2 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} (2 - z - z_1), \tag{10.1.13}$$

le domaine de variation des  $z_i$  étant  $0 < z, z_1, z_2 < 1$  et  $2 > z + z_1 > 1$ . Les invariants et angles du problème s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\hat{s}_1 &= (p_1 + k)^2 = (q - p_2)^2 = Q^2(z + z_1 - 1), \\
\hat{s}_2 &= (p_2 + k)^2 = (q - p_1)^2 = Q^2(1 - z_1), \\
\hat{s}_3 &= (p_1 + p_2)^2 = (q - k)^2 = Q^2(1 - z), \\
1 - \cos\theta_1 &= 2 \frac{z + z_1 - 1}{z z_1}, \quad 1 + \cos\theta_1 = 2 \frac{(1 - z)(1 - z_1)}{z z_1}. \tag{10.1.14}
\end{aligned}$$

L'intégrale d'espace de phase (10.1.11) devient alors après intégration sur l'angle :

$$\begin{aligned}
PS3 &= \frac{\pi^{n-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{2\omega_1 k} \\
&= \left[ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \right] \frac{Q^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz (1-z)^{-\varepsilon} \\
&\quad \int_{1-z}^1 dz_1 (1-z_1)^{-\varepsilon} (z+z_1-1)^{-\varepsilon}, \tag{10.1.15}
\end{aligned}$$

où on a organisé le coefficient devant l'intégrale de façon à faire apparaître des termes déjà présents dans PS2. Pour faciliter la suite du calcul on choisit des variables telles que les deux intégrales se découpent et que leurs bornes d'intégration soient 0 et 1. Pour cela on fait l'ultime changement de variable :

$$z_1 = 1 - z u, \tag{10.1.16}$$

de sorte l'espace de phase s'écrit :

$$PS3 = \left[ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \right] \frac{Q^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz z^{1-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \int_0^1 du u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon}. \quad (10.1.17)$$

Les variables cinématiques ont alors l'expression :

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= Q^2 z(1-u), & \hat{s}_2 &= Q^2 zu, & \hat{s}_3 &= Q^2(1-z), \\ 1 + \cos \theta_1 &= 2 \frac{(1-z)u}{1-zu}, & 1 - \cos \theta_1 &= 2 \frac{1-u}{1-zu}. \end{aligned} \quad (10.1.18)$$

Avec ces nouvelles variables le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-u}{u} + \frac{u}{1-u} \right) + 2 \frac{1-z}{z^2 u(1-u)} - 2\varepsilon \right] \\ &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ \left( \frac{(z-1)^2 + 1}{z^2} - \varepsilon \right) \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

#### • Divergences infrarouge et colinéaire

Il est facile d'identifier les régions d'intégration qui engendreront des singularités. La limite  $u \rightarrow 1 \Leftrightarrow \cos \theta_1 \rightarrow 1$  implique la colinéarité des vecteurs  $k$  et  $p_1$  ( $\hat{s}_1 = 0$ ) et celle  $u \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \theta_1 \rightarrow -1$  implique la colinéarité des vecteurs  $k$  et  $p_2$  ( $\hat{s}_2 = 0$ ) d'où l'apparition de divergences lors de l'intégration de l'élément de matrice ci-dessus. La condition  $z \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$  est la limite infrarouge qui produit également une divergence à cause du pôle en  $z$ . En revanche, la limite  $z \rightarrow 1 \Leftrightarrow \hat{s}_3 \rightarrow 0$ , qui est celle de la collinéarité du quark et de l'antiquark est parfaitement régulière. La contribution des termes réels au taux de désintégration sera donc :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{Q^2}} PS_3 \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz \int_0^1 du \\ & \quad z^{1-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon} \left[ \left( \frac{(z-1)^2 + 1}{z^2} - \varepsilon \right) \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

On voit que les deux intégrales se factorisent et sont de la forme éq. (3.2.29) : elles peuvent être effectuées à l'aide de fonctions  $\Gamma$ , puisqu'elles ne font intervenir que des monômes  $u$ ,  $1-u$ ,  $z$ ,  $1-z$ . La structure du résultat sera claire : les pôles en  $u$  et  $1-u$  engendrent les divergences colinéaires en  $1/\varepsilon$ , quant au terme en  $1/z^2$  il présente une divergence infrarouge et le produit des deux sera un terme en  $1/\varepsilon^2$ . On trouve finalement :

$$e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{19}{2} - \frac{2\pi^2}{3} \right]. \quad (10.1.21)$$

Quelques explications sont nécessaires : on a factorisé l'expression  $\Gamma(1-\varepsilon)/\Gamma(1-2\varepsilon)$  qui apparaît déjà dans la contribution virtuelle (10.1.5) ce qui amènera à évaluer l'expression :

$$\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-3\varepsilon)} = 1 - \frac{\pi^2}{3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (10.1.22)$$

d'après la relation (3.2.20). Dans la dernière ligne de (10.1.21) on a évidemment ignoré les termes d'ordre  $\varepsilon$ .

### 10.1.3 Taux de désintégration en hadrons

Au premier ordre en QCD perturbatif, pour une saveur de quark de masse nulle, la largeur de désintégration sera finalement :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma_1(Q^2) &= e_q^2 \left[ \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) + \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon) + \Gamma_1^{virtuels}(Q^2, \varepsilon) \right] \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, 0) \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \langle c_F \rangle \frac{3}{2} \right] \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, 0) \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right], \end{aligned} \quad (10.1.23)$$

où tous les termes divergents ont été compensés entre contributions réelle et virtuelle et la correction à la prédiction à l'ordre 0 est un simple facteur multiplicatif. Au premier ordre en QCD, on identifiera  $\sum_q e_q^2 \Gamma_1(Q^2)$  à la largeur de désintégration du photon virtuel en hadrons puisque les quarks et les gluons se matérialisent en hadrons avec une probabilité unité. Le rapport de la production hadronique sur celle d'une paire de muons, défini en éq. (6.5.1) sera donc :

$$R = \langle 3 \rangle \sum_q e_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (10.1.24)$$

où on a sorti le facteur  $N = 3$  de couleur contenu dans  $\Gamma_0$ . On peut citer le résultat à l'ordre  $\alpha_s^3$  qui est <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} R = 3 \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 (1.9857 - 0.1153 N_f) - \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 (6.6368 + 1.2001 N_f + 0.0052 N_f^2) \right] \\ - \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 1.2395 \left( \sum_q e_q \right)^2 \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

where  $N_f$  is the number of active quark flavors. Ce résultat est valable pour des quarks de masse nulle, dans le schéma  $\overline{MS}$  avec le choix d'échelle de normalisation  $\mu^2 = Q^2$ .

### 10.1.4 Compensation des divergences et généralisation

Il est intéressant de voir plus en détail le mécanisme de compensation des divergences. Pour cela on revient à  $e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon)$ , éq. (10.1.20), ne gardant que les termes menant à des pôles en  $\varepsilon$  :

$$e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon)|_{div} \approx \frac{\langle c_F \rangle}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \frac{(z-1)^2 + 1}{z} \int_0^1 du u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right).$$

L'intégrale angulaire se fait trivialement pour obtenir :

$$e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon)|_{div} \approx \langle c_F \rangle \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz' (1-z')^{-2\varepsilon} z'^{-\varepsilon} \frac{z'^2 + 1}{1-z'},$$

1. voir par exemple, K.G. Chetyrkin, J.H. Kuhn and A.Kwiatkowski, Phys. Rept. **277** (1996) 189.

où on fait le changement de variable  $z' = 1 - z$  qui, dans une configuration colinéaire  $u = 1$  ou  $u = 0$ , est la fraction d'impulsion emportée par le quark ou l'antiquark produit de la fragmentation  $q \rightarrow q + G$  ou  $\bar{q} \rightarrow \bar{q} + G^2$ . Combinant maintenant cette expression avec la partie divergente de la contribution virtuelle, comme en éq. (10.1.23), on a :

$$e_q^2 \left( \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} + \Gamma_1^{\text{virtuels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \right) \approx \langle c_F \rangle \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \int_0^1 dz' \left\{ \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) (1 - z')^{-2\varepsilon} z'^{-\varepsilon} \frac{z'^2 + 1}{1 - z'} - \left( \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} \right) \delta(1 - z') \right\},$$

qui se réduit, après extraction de la divergence infrarouge suivant la méthode usuelle de l'éq. (9.2.96), à :

$$e_q^2 \left( \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} + \Gamma_1^{\text{virtuels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \right) \approx \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) \langle c_F \rangle \int_0^1 dz' \left\{ \frac{z'^2 + 1}{(1 - z')_+} + \frac{3}{2} \delta(1 - z') \right\}, \quad (10.1.26)$$

où on a ignoré les termes non divergents en  $\varepsilon$ . Le coefficient du pôle (divergence colinéaire) est simplement l'intégrale  $\int_0^1 dz P_{qq}(z)$  du noyau d'Altarelli-Parisi, éq. (9.1.46), qui décrit la fragmentation colinéaire d'un quark. Mais on a déjà mentionné que cette intégrale est nulle. C'est la règle de somme, éq. (9.1.49), qui garantit la conservation du nombre de quarks de valence lorsqu'on prend en compte les corrections QCD au modèle des partons et qui garantit également ici la compensation des divergences infrarouges.

La discussion ci-dessus concerne la correction à la production d'un quark dur par émission d'un gluon. La configuration (quasi-)colinéaire de la fragmentation  $q \rightarrow q + G$  induit un terme divergent de la forme :

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{-1}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz P_{qq}(z). \quad (10.1.27)$$

S'inspirant de ce résultat on peut "deviner" qu'elle doit être la forme de la correction à la production d'un gluon dans un processus dur. Dans ce cas, les corrections d'ordre supérieur qui contribuent à une divergence colinéaire sont les fragmentations  $G \rightarrow G + G$  et  $G \rightarrow q + \bar{q}$  où il faut sommer sur les  $N_f$  saveurs de quarks produits : les deux engendrent une divergence colinéaire, la première ayant aussi une divergence infrarouge. La cinématique étant identique au cas  $q \rightarrow q + G$  on aura alors un terme :

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{-1}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz \left( P_{GG}(z) + 2 N_f P_{qG}(z) \right), \quad (10.1.28)$$

où  $P_{GG}(z)$  et  $P_{qG}(z)$  sont les noyaux d'Altarelli-Parisi associés à la fragmentation du gluon. D'après la règle de somme éq. (9.1.50) on voit que le résidu au pôle en  $\varepsilon$  s'annule et la divergence colinéaire disparaît.

### • Exercice

Calculer la section efficace  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  au premier ordre en QCD supposant les quarks de masse nulle. Calculer le rapport  $R = e^+e^- \rightarrow \text{hadrons} / e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  en fonction de  $Q^2$ . Est-ce que

---

2. Si  $u = 1$ ,  $\cos \theta_1 = 1$  et  $z' = z_1 = 1 - z$ ; si  $u = 0$ ,  $\cos \theta_1 = -1$  et  $z' = z_2 = 1 - z$ .

la correction en  $\alpha_s$  améliore l'accord avec les données expérimentales de la figure 6.2? On prendra en compte l'évolution du couplage  $\alpha_s(Q^2)$  en fonction de  $Q^2$  ainsi que de façon naïve le seuil de production du quark  $c$  de masse  $m_c = 1,275$  GeV et du quark  $b$  de masse  $m_b = 4,65$  GeV. A quel diagramme est dû le terme en  $(\sum_q e_q)^2$  dans l'éq. 10.1.25.

## 10.2 Production de gerbes hadroniques ou "jets"

On a vu en QED (chap. 5) que la définition de la section efficace de diffusion d'un électron d'énergie  $E$ , faisait intervenir la précision de l'appareil de mesure : la section efficace observable est définie théoriquement comme la section de production d'un électron d'énergie exactement égale  $E$  et d'un électron d'énergie plus faible accompagné d'un photon mou (non détecté) dont l'énergie maximale est définie par la résolution de l'appareil de mesure. La section efficace ainsi construite est finie dans l'infrarouge, mais il reste dans l'expression théorique des termes du type  $\log(E/m_e)$  associés à la colinéarité du photon avec l'électron. En QCD de tels termes ne sont pas définis, en quatre dimensions, puisque la masse du fermion est supposée nulle. Dans ce cas l'observable sera construit de façon à ce que l'état à un quark et celui à un quark accompagné d'un gluon quasi-colinéaire et/ou mou soient indistinguables et donc considérés comme un seul état physique (observable).

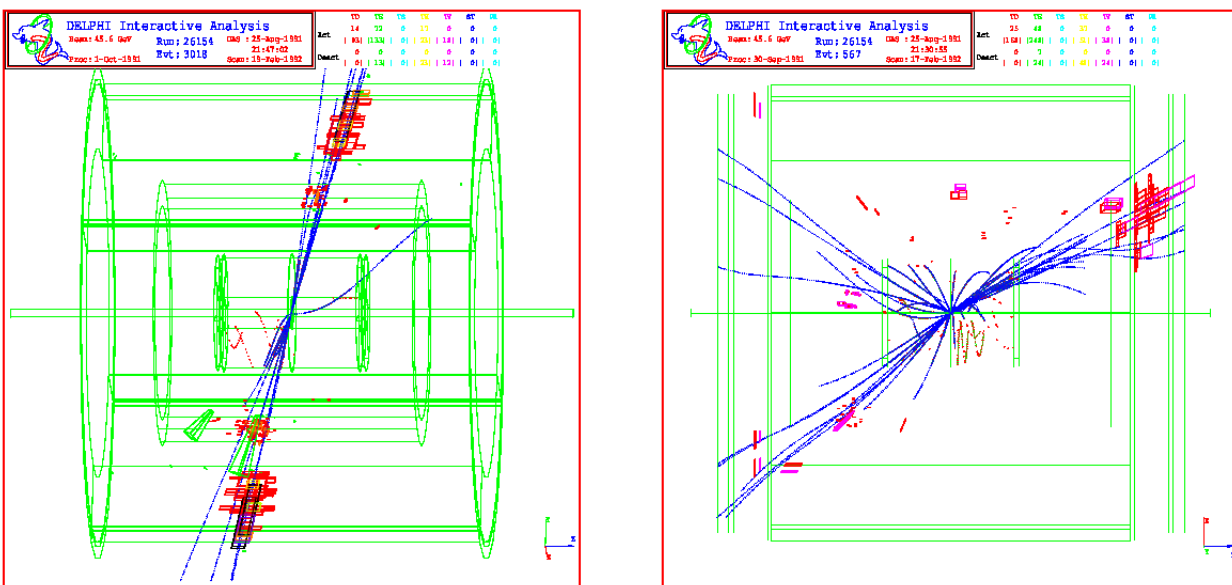


FIGURE 10.1 – Evènements à deux jets (à gauche) et à trois jets (à droite) dans la désintégration du boson  $Z$  au LEP (Collaboration DELPHI).

En QCD, les quarks et les gluons ne sont pas observables directement mais seulement par leurs produits de désintégration hadronique. Ainsi dans une collision  $e^+e^-$  à grand  $Q^2$ , on observera

la production de deux ou plusieurs gerbes hadroniques (voir Fig. 10.1), une gerbe ou "jet" étant défini comme un ensemble de particules quasi colinéaires c'est à dire dont l'impulsion transverse par rapport à l'axe de la gerbe est petite, chaque gerbe ou "jet" étant associé à l'hadronisation d'un parton. Ainsi la production de deux jets correspond théoriquement à la production d'une paire quark-antiquark, trois jets à une paire quark-antiquark et un gluon, quatre jets à deux paires quark-antiquark ou une paire quark-antiquark et deux gluons, etc. Mais un évènement à deux jets peut aussi correspondre à la production d'une paire quark-antiquark associée à un gluon où ce dernier est quasi colinéaire au quark ou à l'antiquark : expérimentalement on ne peut pas distinguer une gerbe hadronique produite par un quark à haute énergie de celle produite par l'association d'un quark et d'un gluon quasi colinéaires. Dans le calcul perturbatif il est donc naturel d'introduire deux classes d'événements :

- ceux à deux jets qui recevront une contribution des :

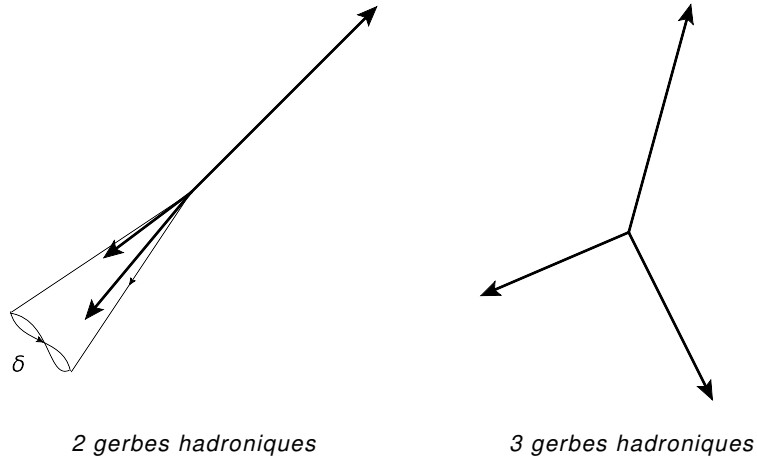
*terme de Born + contributions virtuelles*

*+ réels avec gluon mou ou quasi colinéaire au quark ou quasi colinéaire à l'antiquark*

- ceux à trois jets :

*termes réels à 3 partons, tous d'énergie supérieure à une valeur minimale et non colinéaires*

Ceci est illustré sur le schéma suivant où les vecteurs représentent l'impulsion des partons finals :



On va montrer par calcul explicite que les singularités infrarouge et colinéaire se compensent dans la classe des événements à deux jets. De façon simple, on évalue d'abord la largeur de désintégration en trois jets, qui est régulière et donc calculable en 4-dimensions, et par soustraction de celle ci de la largeur totale, éq. (10.1.23), on obtient la largeur de désintégration en deux jets.

#### • Taux de production de 3 jets

Un parton est "observable" en tant que "jet" s'il a une énergie suffisante et s'il est géométriquement séparé des autres, ce qui conduit à introduire la notion de "distance" entre deux partons. Cette "distance" peut être définie de plusieurs façons. On peut par exemple choisir les invariants comme mesure et on imposera alors que les invariants satisfassent à  $\hat{s}_i > s_0$  : si pour une paire de partons

$\hat{s}_i < s_0$  alors cette paire formera un seul jet et l'évènement aura une topologie à deux gerbes. Il est plus physique d'utiliser la méthode de Sterman et Weinberg<sup>3</sup> qui introduisent deux paramètres,  $\epsilon$  et  $\delta$ , que l'on suppose petits :  $\epsilon$  est la fraction d'énergie minimale portée par un parton et  $\delta$  définit l'angle minimal de séparation entre deux jets. Cela va introduire des restrictions sur l'espace de phase *PS3*. Ces conditions impliquent en particulier :

$$\begin{aligned} z &> \epsilon, \quad \text{cut-off infrarouge} \\ 1 - \cos \theta_1 &= \frac{2(1-u)}{1-zu} > 1 - \cos \delta \approx \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{cut-off angulaire } \vec{k} \parallel \vec{p}_1 \\ 1 - \cos \theta_2 &= \frac{2u}{1-z(1-u)} > 1 - \cos \delta \approx \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{cut-off angulaire } \vec{k} \parallel \vec{p}_2. \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

Ces conditions angulaires se traduisent par :

$$\frac{(1-z)\delta^2/4}{1-z\delta^2/4} < u < \frac{1-\delta^2/4}{1-z\delta^2/4} \Rightarrow u_0 = (1-z)\delta^2/4 < u < 1 - (1-z)\delta^2/4 = u_1,$$

où dans les dernières inégalités on a négligé des termes d'ordre  $\delta^4$ . Avec la contrainte  $z > \epsilon$  ces conditions sont suffisantes pour éviter les singularités en  $z$  et  $u$  dans l'intégrale sur l'espace de phase *PS3*. On peut alors prendre  $\epsilon = 0$  ( $n = 0$ ) dans l'expression éq. (10.1.20) de  $e_q^2 \Gamma_1^{r\acute{e}els}(Q^2, \epsilon)$  et évaluer simplement :

$$e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{2\alpha_s}{3\pi} \int_{\epsilon}^1 dz \int_{u_0}^{u_1} du \left[ \frac{1+(1-z)^2}{z} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right]. \quad (10.2.30)$$

Les intégrales sont faciles à calculer et on trouve :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{4\alpha_s}{3\pi} \left\{ 2 \ln \frac{4}{\delta^2} \left( \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{4} + \epsilon - \frac{\epsilon^2}{4} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta^2}{4} \left( 2 \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{23}{3} + 6\epsilon - \frac{5}{2}\epsilon^2 \right) - 2\epsilon + \epsilon^2 \right\} \\ &\sim e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{4\alpha_s}{3\pi} \left\{ 2 \ln \frac{4}{\delta^2} \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2} \ln \frac{4}{\delta^2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (10.2.31)$$

Dans cette expression on a imposé les contraintes cinématiques uniquement sur l'énergie du gluon et sur l'angle entre impulsions du gluon et des quark/antiquark mais non sur l'énergie des quark/antiquark et leur angle relatif. Prendre ces dernières contraintes en compte induirait des corrections à l'éq. (10.2.31) d'ordre  $\epsilon$  et  $\delta^2$ , sans "grands" facteurs logarithmiques puisque les régions d'espace de phase concerné ne présentent pas de comportement divergent. Ces corrections sont négligeables.

### • Taux de production de 2 jets

A l'ordre auquel le calcul a été mené la largeur de désintégration d'un photon virtuel en deux jets s'obtient facilement par soustraction :

$$e_q^2 \Gamma^{2jets}(Q^2, \epsilon, \delta) = e_q^2 \Gamma_1(Q^2) - e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) \quad (10.2.32)$$

3. G.F. Sterman et S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. **39** (1977), 1436



de celle à trois jets de la largeur totale,  $\Gamma_1(Q^2)$ , donnée par l'éq. (10.1.23). Le résultat est régulier et dépend bien sûr des paramètres caractérisant le jet. La comparaison du résultat perturbatif avec les données expérimentales est non trivial. Une possibilité est de coupler un programme de génération de deux et trois jets au sens ci-dessus avec un code d'hadronisation de jets tel que PYTHIA<sup>4</sup> et en imposant ensuite le même algorithme de reconstruction de jets sur les données simulées et les données expérimentales.

Le résultat éq. (10.2.32) sera valable seulement si  $\Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta)$ , d'ordre  $\alpha_s$ , est inférieure à  $\Gamma_1(Q^2)$  ou plutôt à  $\Gamma^{2jets}(Q^2, \epsilon, \delta)$  qui est d'ordre 1. Cela suppose que  $\epsilon$  et  $\delta$  ne soient pas trop petits. Ce type de problème a déjà été rencontré en QED. Pour améliorer la situation il faudrait faire le calcul aux ordres supérieurs et introduire les topologies à quatre jets, ...,  $n$  jets. Un calcul à tous les ordres mènerait à l'"exponentiation" des "grands logarithmes" comme en QED. Cela résulte du fait que pour qu'un événement à  $n$  partons produise une topologie à trois jets par exemple, il faut contraindre  $n - 3$  partons à rester invisibles ce qui introduit un facteur de suppression qui sommé  $\forall n$  s'exponentie (facteur de Sudakov)<sup>5</sup>.

### • Discussion

Le taux de production de deux gerbes hadroniques a été construite comme le complément de

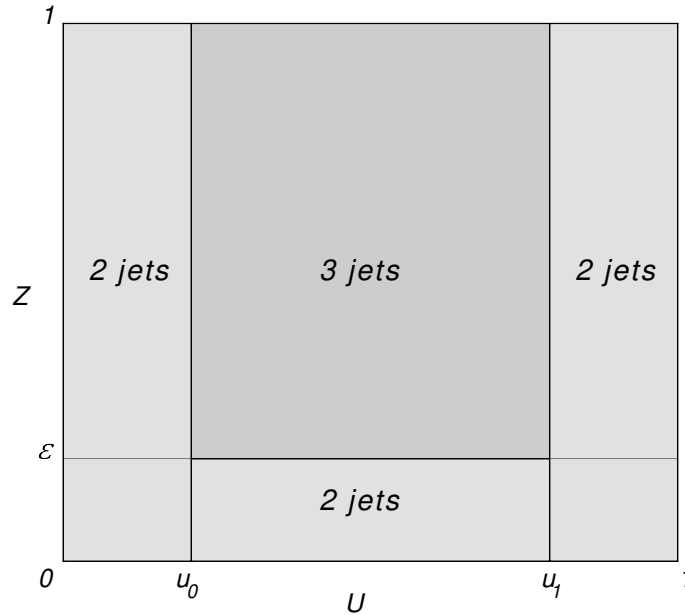


FIGURE 10.2 – Espace de phase des topologies à 2 gerbes et 3 gerbes.

la largeur à 3 gerbes. Ceci est illustré par la figure où on a représenté l'espace de phase total avec  $0 < u < 1$ , la variable angulaire en abscisse et  $0 < z < 1$ , l'énergie du gluon en ordonnée. Les configurations où le gluon est quasi colinéaire au quark ou à l'antiquark sont les deux bandes

4. T. Sjöstrand *et al.*, An introduction to PYTHIA 8.2, arxiv :1410.3012 [hep-ph].

5. G. Parisi et R. Petronzio, Nucl.Phys. **B154** (1979), 427.

verticales  $0 < u < u_0$  et  $u_1 < u < 1$  et celle à 3 jets est le domaine en gris foncé. On voit clairement que la configuration à 2 jets comprend en plus des deux bandes verticales (gluon colinéaire) aussi la portion d'espace de phase où le gluon est mou  $z < \epsilon$  mais n'est colinéaire à aucun des quarks. Ceci est nécessaire pour que la contribution des termes réels compense la divergence infrarouge du terme virtuel. On peut le vérifier explicitement en intégrant les termes réels sur l'espace de phase :

$$\int_0^1 dz \int_0^{u_0} du + \int_0^1 dz \int_{u_1}^1 du + \int_0^\epsilon dz \int_{u_0}^{u_1} du \tag{10.2.33}$$

Du point de vue observationnel, un parton mou engendre des hadrons de petite énergie qui contribuent au bruit de fond hadronique et non à la constitution de jets de sorte que les définitions théorique et expérimentale d'un évènement à 2 jets sont compatibles.

Nous reviendrons sur la définition d'un "jet" lors de la discussion sur la production de gerbes hadroniques dans les collisions proton-proton.

### 10.3 Production inclusive d'un hadron

On s'intéresse à l'observable  $e^+e^- \rightarrow hX$ . Comme précédemment on ne considèrera en fait que la partie  $\gamma^* \rightarrow hX$ . Dans l'esprit du modèle des partons naïf on supposera que le photon virtuel se casse en une paire quark-antiquark et que quark et antiquark se fragmentent, indépendamment, colinéairement en un hadron plus d'autres particules que l'on n'observe pas : ceci est paramétré par une "fonction de fragmentation"  $D_0^{h/q}(z)$  où  $z$  est la fraction d'impulsion du quark (ou antiquark)

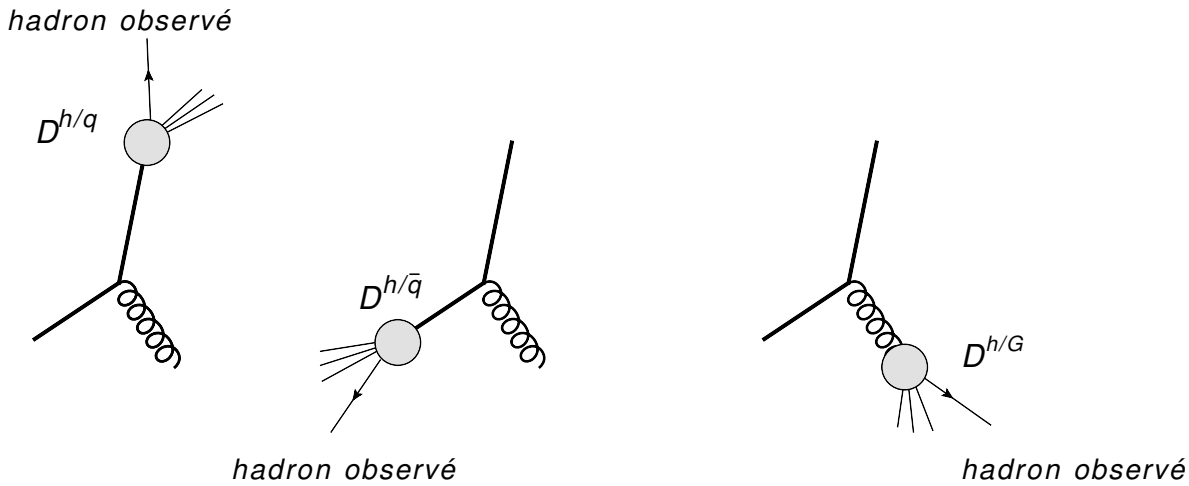


FIGURE 10.3 – Production inclusive d'un hadron dans une collision  $e^+ e^-$ . Le hadron observé est contenu dans les fragments de la désintégration de n'importe lequel des partons, quark, antiquark ou gluon produits dans l'annihilation  $e^+ e^-$ .

emportée par le hadron  $h$  détecté. La fonction de fragmentation paramètre en quelque sorte le processus croisé de celui décrit par la densité partonique  $q_0(z)$  introduite dans la discussion sur

DIS. Toujours dans l'esprit du modèle des partons où on convolue des probabilités et non des amplitudes, la production d'un hadron  $h$  d'énergie  $E = y\sqrt{Q^2}/2$ , fragment de désintégration d'un quark  $q$  ou d'un anti-quark  $\bar{q}$ , est donnée par la convolution suivante :

$$\frac{d\Gamma_0^h}{dy}(Q^2, y) = \sum_q \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} D_0^{h/q}\left(\frac{y}{z}\right) + \sum_{\bar{q}} \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^{\bar{q}}}{dz} D_0^{h/\bar{q}}\left(\frac{y}{z}\right) \quad (10.3.34)$$

où  $d\hat{\Gamma}_0^q/dz$  est le taux de production d'un quark (ou antiquark) d'impulsion  $\omega = z\sqrt{Q^2}/2$ . L'argument  $y/z$  dans les fonctions de fragmentation est bien la fraction d'énergie du parton transférée au hadron avec, évidemment, la condition  $y/z < 1$ . Intuitivement la création de la paire quark-antiquark est un processus dur, à courte distance ( $\sqrt{Q^2}$  grand), tandis que l'hadronisation est un phénomène à longue distance d'échelle caractéristique de l'ordre du GeV, ce qui justifie la factorisation éq. (10.3.34). Tous les ingrédients pour calculer ce taux de production sont donnés en section 10.1 : l'élément de matrice au carré est donné en (10.1.2) et l'intégrale sur l'espace de phase en (10.1.3) où on a omis d'effectuer l'intégration sur l'énergie du quark ou de l'antiquark  $\omega = z\sqrt{Q^2}/2$ . L'intégrale sur l'espace de phase peut s'écrire :

$$\frac{dPS2}{dz} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left(\frac{16\pi^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \delta(1-z). \quad (10.3.35)$$

Combinant espace de phase et élément de matrice on obtient le taux de production d'un quark (antiquark) :

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} = \langle N \rangle \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 \sqrt{Q^2} (1-\varepsilon) \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left(\frac{16\pi^2\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \delta(1-z),$$

soit

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \delta(1-z). \quad (10.3.36)$$

où  $\Gamma_0(Q^2, \varepsilon)$  a été définie à l'éq. (10.1.4). Finalement le taux de production d'un hadron se réduit donc simplement à :

$$\frac{d\Gamma_0^h}{dy}(Q^2, y, \varepsilon) = \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \left[ \sum_q e_q^2 D_0^{h/q}(y) + \sum_{\bar{q}} e_q^2 D_0^{h/\bar{q}}(y) \right]. \quad (10.3.37)$$

### 10.3.1 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels

Les corrections virtuelles ne changent pas la topologie du processus et on a vu que leur contribution est simplement un facteur multiplicatif au terme de Born de la production quark-antiquark : leur expression est donnée en éq. (10.1.5) de sorte qu'au premier ordre en QCD on a :

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ virtuels}}}{dz} = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \delta(1-z) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (10.3.38)$$

qu'il faudra convoluer avec les fonctions de fragmentation comme en éq. (10.3.34) pour obtenir la contribution à la production de hadrons.

### 10.3.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels

Au premier ordre en QCD,  $\gamma^* \rightarrow q \bar{q} G$ , le hadron pourra être émis par le quark, l'antiquark ou le gluon. On construira donc cette contribution au taux de production sous la forme :

$$\frac{d\Gamma_1^{h \text{ réels}}}{dy} = \sum_q \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz} D_0^{h/q}\left(\frac{y}{z}\right) + \sum_{\bar{q}} \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{\bar{q} \text{ réels}}}{dz} D_0^{h/\bar{q}}\left(\frac{y}{z}\right) + \int_y^1 dz \frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}\right), \quad (10.3.39)$$

où dans ces intégrales la variable  $z$  n'est autre que l'énergie du parton normalisée par  $\sqrt{Q^2}/2$  comme en éqs. (10.1.13). On a introduit la fonction  $D_0^{h/G}$  qui paramètre la fragmentation du gluon en hadron. On évalue maintenant successivement les sections efficaces partoniques à l'ordre  $\alpha_s$ .

#### • Calcul de $d\hat{\Gamma}_1^G/dz$

Cette contribution peut facilement être obtenue à partir de l'éq. (10.1.20) : il suffit de ne pas évaluer l'intégrale sur la variable  $z$  d'énergie du gluon. L'intégration sur  $u$  engendre des termes en  $1/\varepsilon$  d'origine colinéaire tandis que la condition  $z > y$  élimine toute divergence infrarouge : on trouve alors facilement :

$$\frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} = \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \left( -\frac{2}{\varepsilon} \right) \frac{1+(1-z)^2}{z}.$$

Développant en  $\varepsilon$ , le résultat recherché s'écrit :

$$\frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} = \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} 2 \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} P_{Gq}(z) + d_G(z) \right\} \quad (10.3.40)$$

où on a introduit le noyau d'Altarelli-Parisi  $P_{Gq}(z)$ , déjà rencontré dans la discussion sur l'inélastique profond, éq. (9.1.46) :

$$P_{Gq}(z) = \langle c_F \rangle \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (10.3.41)$$

et le terme régulier

$$d_G(z) = \langle c_F \rangle P_{Gq}(z) \ln(z^2(1-z)). \quad (10.3.42)$$

La présence de la fonction  $P_{Gq}(z)$  qui décrit l'émission colinéaire d'un gluon par un quark dans l'éq. (10.3.40) est claire : lors de l'intégration sur la variable  $u$ , pour un gluon d'impulsion  $z$  fixée, on inclut la configuration où le quark est colinéaire au gluon ( $u = 1$ ) ou à l'antiquark colinéaire au gluon ( $u = 0$ ), chacune de ces configurations engendrant un facteur  $-P_{Gq}(z)/\varepsilon$  comme dans le cas des corrections QCD à la fonction de structure d'un hadron.

#### • Calcul de $d\hat{\Gamma}_1^q/dz$

Le calcul est similaire au cas précédent et on s'attend à l'apparition de singularités lorsque le gluon sera colinéaire au quark émettant le hadron. Mais il y a deux complications : d'une part la variable d'énergie  $z$  est maintenant celle du quark qui n'est pas une des variables d'intégration de l'éq. (10.1.20) (dans laquelle  $z$  est l'énergie du gluon), d'autre part à énergie du quark fixée l'énergie du gluon s'annule lors de l'intégration sur la variable restante ce qui engendre une divergence infrarouge qu'il faut extraire et on a vu en subsection 9.2.4 que cette opération est loin d'être triviale ! En

fait, on avait estimé en section (10.1.4) qu'après intégration sur la variable angulaire il restait une partie divergente  $-P_{qq}(z)/\varepsilon$ . On va l'extraire explicitement ici en s'attachant à garder également les termes constants.

Pour le choix de la bonne variable on revient à l'intégrale d'espace de phase éq. (10.1.15) où les variables d'énergie du gluon et du quark jouent un rôle symétrique et, au lieu d'éliminer  $z_1$  comme en éq. (10.1.16), on élimine  $z$  par le changement de variable

$$z = 1 - z_1 u, \quad (10.3.43)$$

de sorte que l'espace de phase  $PS3$  sera comme en (10.1.17) dans lequel  $z_1$  joue le rôle de la variable  $z$ . Les invariants s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= Q^2 z_1 (1 - u), & \hat{s}_2 &= Q^2 (1 - z_1), & \hat{s}_3 &= Q^2 z_1 u \\ 1 + \cos \theta_1 &= 2 \frac{(1 - z_1)u}{1 - z_1 u}, & 1 - \cos \theta_1 &= 2 \frac{1 - u}{1 - z_1 u}, \end{aligned} \quad (10.3.44)$$

et l'élément de matrice devient, ignorant les termes d'ordre  $\varepsilon$  :

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < 3c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{z_1(1-u)}{1-z_1} + \frac{1-z_1}{z_1(1-u)} \right) + 2 \frac{u}{(1-z_1)(1-u)} \right]. \quad (10.3.45)$$

La relation entre variables et singularités est moins directe qu'auparavant : les divergences colinéaires seront engendrées quand  $u = 1 \Leftrightarrow \cos \theta_1 = 1$  c'est à dire  $\vec{k} \parallel \vec{p}_1$  et  $z_1 = 1 \Rightarrow \cos \theta_1 = -1$  c'est à dire  $\vec{k} \parallel \vec{p}_2$ . Quant à la singularité infrarouge  $z = 0$  elle sera atteinte pour  $z_1 = u = 1$  ( $\vec{k}$  colinéaire à la fois à  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , donc nul!). On remarque que  $u = 0$  implique  $\hat{s}_3 = 0$  et  $z = 1$ , soit  $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$  tous deux opposés à  $\vec{k}$ , configuration qui ne conduit pas à une singularité de l'élément de matrice. Convoluant l'expression (10.3.45) avec  $PS3$  et après intégration sur la variable  $u$  on obtient :

$$\begin{aligned} e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz_1} &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \\ &\quad \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{1-z_1} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\varepsilon \right) \frac{1}{1-z_1} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} z_1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.46)$$

Lors de la convolution de cette section efficace partonique avec la fonction de fragmentation du quark, comme en éq. (10.3.39), le point singulier  $z_1 = 1$  sera atteint et il faut donc recourir à un développement en  $\varepsilon$  similaire à celui de l'éq. (9.3.140) pour extraire le comportement divergent et les termes finis. Par exemple, pour le premier terme entre accolades on écrira :

$$\begin{aligned} \int_y^1 dz_1 z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{1-z_1} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right) = \\ \int_y^1 dz_1 \left\{ \frac{2}{\varepsilon^2} \delta(1-z_1) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{(1-z_1)_+} + (1+z_1^2) \left[ \left( \frac{\ln(1-z_1)}{1-z_1} \right)_+ + 2 \frac{\ln z_1}{1-z_1} \right] \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right), \end{aligned}$$

et pour le deuxième terme,

$$\begin{aligned} \int_y^1 dz_1 z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \left\{ -\left( \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\varepsilon \right) \frac{1}{1-z_1} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right) = \\ \int_y^1 dz_1 \left\{ \frac{3}{2\varepsilon} \delta(1-z_1) + \frac{7}{2} \delta(1-z_1) - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z_1)_+} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right), \end{aligned}$$

tandis que le troisième terme est régulier et on peut donc prendre  $\varepsilon = 0$ . La contribution, au premier ordre en  $\alpha_s$  d'une saveur de quark à la production d'un hadron comprendra le terme de Born (10.3.36), les virtuels (10.3.38) et les réels, qui après compensation des doubles pôles en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\begin{aligned} e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^q}{dz_1} &= e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz_1} + e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ virtuels}}}{dz_1} + e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz_1} \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \left\{ \delta(1 - z_1) + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) P_{qq}(z_1) + \frac{\alpha_s}{2\pi} d_q(z) \right\}, \end{aligned} \quad (10.3.47)$$

où la fonction  $P_{qq}(z)$  est le noyau d'Altarelli-Parisi, éq. (9.1.46), déjà rencontré plus haut en (10.1.26) et

$$d_q(z) = \langle c_F \rangle \left\{ \left( \frac{2\pi^2}{3} - \frac{9}{2} \right) \delta(1 - z) + (1 + z^2) \left[ \left( \frac{\ln(1 - z)}{1 - z} \right)_+ + 2 \frac{\ln z}{1 - z} \right] - \frac{3}{2} \frac{1}{(1 - z)_+} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} z \right\}. \quad (10.3.48)$$

Ces expressions sont aussi valables pour la section efficace de production d'un antiquark.

### 10.3.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : production inclusive d'un hadron

Pour obtenir le taux de production d'un hadron on doit convoluer les éqs. (10.3.47) et (10.3.40) avec les fonctions de fragmentation appropriées comme en (10.3.39). Ne gardant pour le moment que le terme de Born et ceux d'ordre  $\alpha_s$  avec un pôle en  $\varepsilon$  on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_1^h}{dy} \Big|_{div} &= \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \int_y^1 dz \left\{ \delta(1 - z) \left( D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + D_0^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \left[ P_{qq}(z) \left( D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + D_0^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z} \right) \right) + 2P_{Gq}(z) D_0^{h/G} \left( \frac{y}{z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.49)$$

S'inspirant du cas de l'inélastique profond en sec. 9.2.6 on définit la fonction de fragmentation d'un quark  $q$ , violant l'invariance d'échelle par (voir l'éq. (9.2.118)) :

$$D^{h/q}(y, Q^2) = D_0^{h/q}(y) + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_y^1 dz \left[ P_{qq}(z) D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + P_{Gq}(z) D_0^{h/G} \left( \frac{y}{z} \right) \right], \quad (10.3.50)$$

et *idem* pour l'antiquark. A l'aide de ces fonctions on obtient le spectre inclusif d'un hadron dans la désintégration du  $\gamma^*$  incluant les termes "constants" issus des éqs. (10.3.40) et (10.3.47) :

$$\boxed{\frac{d\Gamma_1^h}{dy} = \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \sum_q e_q^2 \left\{ D^{h/q}(y, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ d_q(z) D^{h/q} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) + d_G(z) D^{h/G} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) \right] \right.} \\ \left. + D^{h/\bar{q}}(y, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ d_q(z) D^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) + d_G(z) D^{h/G} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) \right] \right\}.}$$

(10.3.51)

Plusieurs points méritent discussion, points que l'on mentionnera cependant sans explications puisqu'ils ont déjà été commentés dans le cas de la diffusion inélastique profonde. On a introduit partout en éq. (10.3.51) les fonctions de fragmentation avec violations d'invariance d'échelle ce qui est perturbativement justifié. On pourrait choisir une échelle de factorisation  $M^2 \neq Q^2$  où un schéma de factorisation différent du schéma  $\overline{MS}$  utilisé ici : il faudrait alors modifier convenablement le second membre de l'éq. (10.3.51) (voir sec. 9.2.7).

Revenant à l'éq. (10.3.50) et poursuivant l'analogie avec DIS on calcule la dérivée logarithmique de  $D^{h/q}(y, Q^2)$  par rapport à  $Q^2$  pour obtenir l'équation dévolution DGLAP, indépendante de  $\varepsilon$ , donc finie :

$$\boxed{Q^2 \frac{D^{h/q}(y, Q^2)}{dQ^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ P_{qq}(z) D^{h/q}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) + P_{Gq}(z) D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) \right]}. \quad (10.3.52)$$

La violation d'invariance d'échelle de la fonction de fragmentation est engendrée lorsque le hadron est émis par le quark ou par le gluon, produits de désintégration du quark initial. Intégrant cette équation, on obtiendra la fonction de fragmentation  $D^{h/q}(y, Q^2)$  finie que l'on utilisera pour calculer la production inclusive d'un hadron. La fonction de fragmentation du gluon obéit aussi à une équation de type DGLAP :

$$\boxed{Q^2 \frac{D^{h/G}(y, Q^2)}{dQ^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ P_{qG}(z) D^{h/q}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) + P_{GG}(z) D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) \right]}. \quad (10.3.53)$$

avec, dans l'approximations des logarithmes dominants, les noyaux  $P_{ij}$  donnés en éqs. (9.1.46)).

Il existe plusieurs paramétrages des fonctions de fragmentation avec évolution au NLO : Kretzer<sup>6</sup>, BFGW<sup>7</sup>, HKNS<sup>8</sup>, DSS<sup>9</sup>, AKK<sup>10</sup>. Ils sont obtenus à partir de spectres inclusifs de hadrons mesurés dans les collisions  $e^+e^-$ ,  $e^{+/-}p$  et/ou  $pp$ . Ils peuvent différer dans leurs prédictions pour certains observables puisqu'ils ne sont pas obtenus à partir des mêmes données initiales<sup>11</sup> (voir la section 13.4).

---

6. S. Kretzer, Phys. Rev **D62** (2000), 054001, [hep-ph/0003177v2]  
7. BFGW : L. Bourhis, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, M. Werlen, Eur. Phys. J **C19** (2001), 89, [hep-ph/0009101]  
8. HKNS : M. Hirai, S. Kumano, T.-H. Nagai, K. Sudoh, Phys. Rev. **D75** (2007), 094009, [hep-ph/0702250v2]  
9. DSS : D. De Florian, R. Sassot, M. Stratmann, Phys. Rev. **D76** (2007), 114010, [arXiv :0707.1506v1]  
10. AKK : S. Albino, B. Kniehl, G. Kramer, Nucl. Phys. **B803** (2008), 42, [arXiv :0803.2768v2]  
11. F. Arleo, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, Chi Linh Nguyen, JHEP **1404** (2014), 147, [arXiv :1311.7356]





# Chapitre 11

## Unitarité, règles de coupure

On a vu dans l'étude des boucles en QED et QCD qu'il apparaissait des logarithmes des invariants de la réaction dont l'argument pouvaient être négatif. La prescription  $i\epsilon$  de Feynman, fondée sur la causalité, permettait de donner un sens mathématique au logarithme d'argument négatif. Ainsi un terme tel que  $\ln(m^2 - q^2 - i\epsilon)$  comme en éq. (4.1.25) est défini par :

$$\ln(m^2 - (q^2 + i\epsilon)) = \ln|m^2 - q^2| - i\pi\Theta(q^2 - m^2).$$

Le point  $q^2 = m^2$  est un point de branchement et, dans le plan  $q^2$  complexe, on définit une coupure le long de l'axe réel de  $q^2 = m^2$  à  $l'\infty$ , de sorte que la partie imaginaire est la moitié de la discontinuité de la fonction à travers la coupure :

$$2i\text{Im}f(q^2) = f(q^2 + i\epsilon) - f(q^2 - i\epsilon)$$

Le logarithme ainsi défini est monovalué dans le plan complexe. En fait, la partie imaginaire qui apparaît dans le calcul des boucles a une interprétation physique qui est une conséquence des contraintes d'unitarité que doivent satisfaire les amplitudes de diffusion. Pour voir cela, il est utile de revenir à la théorie de la matrice  $S$  dont les composants fondamentaux sont les amplitudes de diffusion et non les champs.

Avant la formulation de la chromodynamique quantique et la découverte de la liberté asymptotique il n'était possible d'utiliser la théorie des perturbations pour étudier les interactions fortes. L'approche suivie était alors fondée sur la matrice  $S$  qui dans un processus de diffusion connecte les états asymptotiques entrant et sortant. Du fait de la conservation des probabilités la matrice  $S$  est unitaire. L'unitarité  $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$  implique des relations non-linéaires entre les amplitudes de diffusion et, comme on le verra, cela joue un rôle fondamental pour déterminer la structure analytique de ces amplitudes. Le postulat de base de l'approche de la matrice  $S$  est que les amplitudes de diffusion sont des fonctions analytiques des invariants de la réaction, fonctions analytiques dont les singularités sur l'axe réel sont données par les contraintes d'unitarité. Ce postulat est satisfait en théorie quantique des champs dans l'approche perturbative.

### 11.1 Matrice $S$ , unitarité, théorème optique

On considère un processus de diffusion de deux particules  $1+2 \rightarrow 3+4$ . On suppose l'interaction entre particules à suffisamment courte portée pour que les états entrant ( $t \rightarrow -\infty$ ) et sortant

( $t \rightarrow \infty$ ) soient considérés comme formés de particules libres entièrement caractérisées par leur impulsion (on traite le cas de particules scalaires, à spin et isospin nuls)<sup>1</sup>. Pour simplifier l'écriture on note les états par un symbole discret  $|m\rangle$  et on suppose que l'ensemble de ces états forme une base complète orthonormée :

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_m |m\rangle\langle m| = 1. \quad (11.1.1)$$

D'après le principe de supersposition de mécanique quantique l'état final peut être écrit  $S|m\rangle$  où  $S$  est un opérateur linéaire. La probabilité de trouver le système dans un état final  $|n\rangle$  est donnée par le carré de l'élément de matrice :

$$\langle n|S|m\rangle. \quad (11.1.2)$$

Pour un état initial quelconque qui peut être écrit  $|i\rangle = \sum_m a_m|m\rangle$ , avec  $\sum_m |a_m|^2 = 1$ , la probabilité que le système soit mesuré dans n'importe quel état  $|n\rangle$  est unité (conservation des probabilités) :

$$\sum_n \langle i|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = \sum_{m,m'} a_m^* a_{m'} \langle m|S^\dagger S|m'\rangle = 1. \quad (11.1.3)$$

Ceci doit être vrai  $\forall$  état initial (ou pour tout état final si on somme sur les états initiaux), d'où on tire  $S^\dagger S = SS^\dagger = 1$  : la matrice  $S$  est unitaire. Si on considère une transformation de Lorentz  $L$ ,  $L|m\rangle = |m'\rangle$ , on demande que les observables soient indépendantes du choix du repère :

$$\langle n'|S|m'\rangle^2 = \langle n|S|m\rangle^2. \quad (11.1.4)$$

Puisque le choix de la phase est arbitraire on impose plutôt la condition :

$$\langle n'|S|m'\rangle = \langle n|S|m\rangle, \quad (11.1.5)$$

ce qui implique que l'élément de matrice ne dépend, si on exclut la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion, que des invariants du problème, soit :

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad \text{avec} \quad s + t + u = \sum_i m_i^2. \quad (11.1.6)$$

Ceci est aussi vrai pour des particules avec spin si on somme sur tous les états de polarisation des particules. Comme on a choisi de caractériser les états par leur impulsion les particules sont très probablement séparées dans l'espace et elles ont peu de chance d'interagir. On introduit la matrice d'interaction  $T$  à l'aide de laquelle on définira la section efficace de collision entre particules interagissantes :

$$S = 1 + iT, \quad (11.1.7)$$

de sorte que :

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T = T T^\dagger. \quad (11.1.8)$$

1. Cette section suit le chapitre 1 de *The Analytic S-Matrix* par R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne, Cambridge University Press 1966.

Si on considère la transition d'un état initial  $|i\rangle$  à un état final  $|f\rangle$  on a :

$$\begin{aligned} i(\langle f|T^\dagger|i\rangle - \langle f|T|i\rangle) &= \sum_n \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle \\ \Leftrightarrow i(\langle i|T|f\rangle^* - \langle f|T|i\rangle) &= \sum_n \langle n|T|f\rangle^* \langle n|T|i\rangle, \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

avec  $\sum_n |n\rangle \langle n|$  un ensemble complet d'états compatibles avec les différentes lois de conservation. Comme cas particulier on choisit  $|f\rangle = |i\rangle$  et on a donc :

$$\boxed{2 \operatorname{Im} \langle i|T|i\rangle = \sum_n |\langle n|T|i\rangle|^2}, \quad (11.1.10)$$

ce qui implique que la partie imaginaire de l'amplitude de transition élastique vers l'avant est proportionnelle à la somme des carrés des transitions de l'état initial en tous les états physiques permis par les lois de conservation, c'est à dire la section efficace totale.

On introduit l'élément de matrice invariant  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}$  obtenu à partir de l'élément de matrice de transition par troncation de la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion :

$$\langle 34|T|12\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \mathcal{M}_{12 \rightarrow 34} \quad (11.1.11)$$

avec la normalisation des états à une particule libre :

$$\begin{aligned} \langle q|p\rangle &= (2\pi)^3 2\omega_p \delta^{(3)}(q - p) \\ |p\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} |q\rangle \langle q|p\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \Theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) |q\rangle \langle q|p\rangle. \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

Pour simplifier, on ne considère dans la suite qu'un seul type de particule scalaire de masse  $m$ . Injectant ces relations dans l'éq. (11.1.10) et ne gardant, pour le moment, que deux particules dans l'état intermédiaire on trouve après simplification du facteur de conservation d'énergie-impulsion globale<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t=0) &= \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2\omega_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2\omega_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p_3}{2\omega_3} \delta^{(+)}((p_1 + p_2 - p_3)^2 - m^2) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p}{4\sqrt{s}} \int d\Omega |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2, \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

où on a fait l'intégrale sur l'énergie dans le centre de masse où l'impulsion des particules est dénotée  $p$ . Une fois divisé par le flux de particules entrantes  $4\sqrt{((p_1 \cdot p_2)^2 - m^4)} = 4p\sqrt{s}$  dans le centre de masse, le membre de droite n'est autre que  $\sigma_{2 \rightarrow 2}$  la section efficace de diffusion du processus 2 particules  $\rightarrow$  2 particules intégrée sur tout l'espace de phase. On obtient donc :

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t=0) = 2p\sqrt{s} \sigma_{2 \rightarrow 2}, \quad \text{pour } 4m^2 < s < 9m^2 \quad (11.1.14)$$

2. On définit  $\delta^{(+)}(p^2 - m^2) = \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$ .

qui exprime la partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant en fonction de la section efficace totale du processus  $2 \rightarrow 2$ . Ceci est valable à basse énergie pour  $4m^2 < s < 9m^2$ . En effet, au dessus du seuil de production de 3 particules la section efficace  $\sigma_{2 \rightarrow 3}$  contribuera et plus généralement, au dessus de chaque seuil de production d'une particule supplémentaire on aura une nouvelle contribution de sorte que :

$$\boxed{\text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t = 0) = 2p\sqrt{s} \sum_n \sigma_{2 \rightarrow n} = 2p\sqrt{s} \sigma_{tot},} \quad (11.1.15)$$

La partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant,  $t = 0$ , est à un facteur près à la section efficace totale. Ce résultat est connu sous le nom de théorème optique. Il est très important car il indique la structure de l'amplitude de diffusion considérée comme fonction de la variable d'énergie complexe  $s$ . En résumé, choisissant la variable de transfert dans la région physique,  $t < 0$ , (on peut facilement généraliser l'éq. (11.1.15) à  $t < 0$ ) on voit que pour  $0 < s < 4m^2$  l'amplitude est réelle puisque la diffusion  $2 \rightarrow 2$  n'est pas possible. Pour  $s > 4m^2$  l'amplitude acquiert une partie imaginaire : on introduit une coupure de  $s = 4m^2$  à l' $\infty$  le long de l'axe réel et on définit la partie imaginaire comme :

$$2i \text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t) = \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s + i\epsilon, t) - \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s - i\epsilon, t), \quad (11.1.16)$$

c'est à dire comme la discontinuité de la fonction à travers la coupure. Cette prescription est dictée par la causalité et elle est reliée, en théorie quantique des champs, à la prescription de Feynman dans les propagateurs<sup>3</sup> (voir l'exemple du logarithme en début de chapitre).

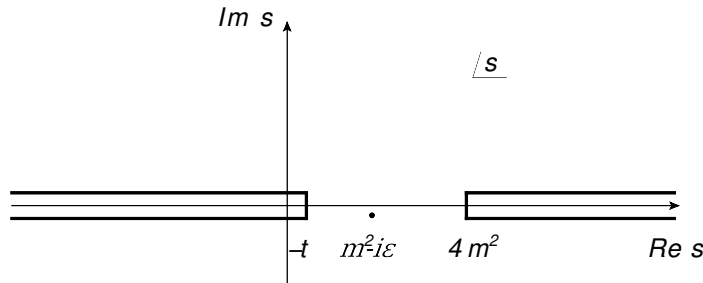


FIGURE 11.1 – Structure analytique dans le plan d'énergie  $s$  complexe de l'amplitude invariante à  $t$  fixé. La coupure de droite est la conséquence de l'unitarité dans la voie  $s$  et celle de gauche dans la voie  $u$ .

On a défini plus haut les invariants,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  dont le domaine de variation pour le processus  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  est  $s > 4m^2$ ,  $4m^2 - s < t < 0$ ,  $4m^2 - s < u < 0$ . Si on renverse le signe des impulsions  $p_1$  et  $p_3$ , les variables  $u > 4m^2$ ,  $4m^2 - u < s < 0$  et  $4m^2 - u < t < 0$  correspondront à la région physique de la réaction  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$ . Sous cette opération  $t$  reste inchangé et, à  $t$  fixé,  $s$  et  $u$  ne sont pas indépendants puisque  $s = 4m^2 - t - u$  par la relation (11.1.6). L'amplitude de diffusion  $\mathcal{M}_{\bar{3}2 \rightarrow \bar{1}4}(u, t)$  n'est autre que  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}(s, t)$  où les invariants sont évalués dans la

3. On rappelle la discussion sur les propagateurs du fermion et du photon au chapitre 2.

région physique de la réaction  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$ . Cette amplitude a donc une partie imaginaire quand  $u > 4m^2$ , soit  $s < -t$  et on a alors une deuxième coupure d'unitarité dans le plan  $s$  complexe de  $s < -t$  à  $-1\infty$ . On dit que les réactions  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$  et  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  sont reliées par croisement et leur amplitude de diffusion est la même fonction analytique prise à des valeurs de  $s$  différentes. Les points de branchement ne sont pas les seules singularités dans le plan des invariants complexes : si les nombres quantiques permettent la transition  $\phi + \phi \rightarrow \phi$  on aura alors un pôle dans la voie  $s$  à  $s = m^2 - i\epsilon$  et éventuellement dans la voie  $u$  si  $\bar{\phi} + \phi \rightarrow \phi$  est permis : ce pôle à  $u = m^2 - i\epsilon$  sera donc à  $s = 3m^2 - t + i\epsilon$ . On définira l'amplitude physique pour la voie  $s$  comme la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0+$  de  $\mathcal{M}(s+i\epsilon, t)$  pour  $s > 4m^2$  et celle de la voie  $u$  comme  $\mathcal{M}(s-i\epsilon, t)$  pour  $s < 0$ .

### • Exemple

Le diagramme de polarisation du vide en sec. 4.1 permet d'illustrer cette discussion très simplement. On avait alors introduit le tenseur  $\Pi_{\mu\nu}(q)$ . Sommer sur la polarisation du photon revient à considérer :

$$-g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}(q) = 3q^2\Pi(q^2),$$

d'après l'éq. (4.1.13). Cette fonction n'est autre que 2 fois la transition  $\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*}$  puisque sommé sur la polarisation du photon. Ignorant le contre-terme on avait trouvé en (4.1.18) pour la fonction scalaire :

$$\Pi(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon}{m^2}. \quad (11.1.17)$$

D'après l'éq. (4.1.25) la partie imaginaire est :

$$i \operatorname{Im}\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} (-i\pi) \int_0^1 dx x(1-x) \Theta(q^2 x(1-x) - m^2), \quad (11.1.18)$$

qui est finie. Le maximum de  $x(1-x)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  est  $1/4$  de sorte la partie imaginaire sera non nulle dès que  $q^2 > 4m^2$ . Les racines de l'argument de la fonction  $\Theta$  sont :

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad x_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad (11.1.19)$$

et on peut alors exprimer la partie imaginaire du diagramme de polarisation comme :

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im}\Pi_{\mu}{}^{\mu}(q) &= 6\alpha q^2 \int_0^1 dx x(1-x) \Theta((x_+ - x)(x - x_-)) \\ &= \alpha \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} (q^2 + 2m^2), \quad q^2 \geq 4m^2. \end{aligned} \quad (11.1.20)$$

D'après la discussion ci-dessus,  $-\operatorname{Im}\Pi_{\mu}{}^{\mu}(q) = 2 \operatorname{Im}\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*}$  doit être égal, à un facteur de normalisation près, au taux de désintégration d'un photon virtuel en une paire de leptons,  $\gamma^* \rightarrow l + \bar{l}$ . On peut aisément le vérifier en calculant directement le carré de l'élément de matrice  $\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow l\bar{l}} = (-ie) \epsilon^{\mu}(q) \bar{u}(l) \gamma_{\mu} v(\bar{l})$  intégré sur tout l'espace de phase des impulsions  $l, \bar{l}$  finales. On trouve bien finalement, en accord avec (11.1.13), que :

$$2 \operatorname{Im}\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*} = \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3 2l_0} \frac{d^3 \bar{l}}{(2\pi)^3 2\bar{l}_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - l - \bar{l}) \overline{\Sigma} |\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow l\bar{l}}|^2 \quad (11.1.21)$$

Le résultat éq. (11.1.20) est instructif. Il a deux parties : un facteur "dynamique",  $(q^2 + 2m^2)$ , qui est simplement le carré de l'élément de matrice et un facteur cinématique,  $\sqrt{1 - 4m^2/q^2}$ , dont l'origine est l'intégrale sur l'espace de phase qui s'annule, comme l'impulsion des particules produites, au seuil de production des particules  $q^2 = 4m^2$ .

• **Application : propagateur d'une particule instable**

On considère une particule scalaire  $\Phi$  de masse  $M$  qui peut se désintégrer en deux particules plus légères  $\phi$  de masse  $m$ ,  $\Phi \rightarrow \phi + \phi$  avec un couplage  $-ig$ . Après renormalisation le propagateur aura la forme éq. (3.1.46) :

$$G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2|_{M^2}}{p^2 - M^2 - i \text{Im} \Pi^{\text{boucle}}(M^2)} \quad (11.1.22)$$

Dans cette expression on a fait la renormalisation de masse et utilisé le fait que dans tout schéma de renormalisation la singularité du propagateur est à la masse physique  $M$  (voir la discussion sur l'invariance du pôle du propagateur autour de l'éq. (4.2.72)). On a aussi explicité l'éventuelle partie imaginaire de  $\Pi(p^2)$  évaluée sur couche de masse. Au premier ordre de la théorie des perturbations  $\Pi(p^2)$  est simplement donné par la boucle de champs  $\phi$  et on trouve en utilisant les techniques du chapitre 3 :

$$\Pi(q^2) = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) + \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon}{\mu^2}. \quad (11.1.23)$$

La partie imaginaire est donc (voir l'évaluation de (11.1.20)) :

$$\text{Im} \Pi(p^2) = -\frac{g^2}{32\pi} \sqrt{1 - 4m^2/p^2}, \quad p^2 > 4m^2, \quad (11.1.24)$$

qui est bien non nulle quand  $p^2 = M^2 > 4m^2$ . D'après la discussion précédente cette quantité est bien reliée au taux de désintégration de la particule  $\Phi$ . On le vérifie facilement en calculant explicitement la largeur de désintégration de la particule  $\Phi$  définie par<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p'}{2p'_0} \Theta(p'_0) \delta^{(+)}((p-p')^2 - m^2) |\mathcal{M}_{\Phi \rightarrow \phi\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2M} \frac{g^2}{16\pi} \sqrt{1 - 4m^2/M^2}. \end{aligned} \quad (11.1.25)$$

On a alors en accord<sup>5</sup> avec l'éq. (11.1.13) :

$$- \text{Im} \Pi(M^2) = M \Gamma$$

et le propagateur de la particule instable s'écrit finalement :

$$G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2|_{M^2}}{p^2 - M^2 + iM\Gamma}. \quad (11.1.26)$$

Ceci est la forme qu'on utilise, par exemple, pour les bosons de jauge  $W^\pm$  et  $Z$ . Le pôle dans le plan complexe est déplacé par rapport à l'axe réel d'une distance proportionnelle à  $-iM\Gamma$  : il est à  $p^2 = M^2 - iM\Gamma$  au lieu de  $p^2 = M^2 - i\epsilon$  pour une particule stable.

4. On utilise le facteur de normalisation habituel  $1/2M$  qui relie la largeur au carré de l'élément de matrice.

5. Le signe  $-$  vient du choix  $-i\Pi(p^2)$  pour dénoter la boucle.

### 11.2 Relations de dispersion

Si, comme c'est le cas en théorie des champs, on suppose que les seules singularités de l'amplitude de diffusion sont les pôles et les coupures et si on connaît par unitarité les discontinuités à travers les coupures, alors par le théorème de Cauchy on peut calculer la fonction complète. En effet, on peut représenter la fonction  $\mathcal{M}(s, t)$  par l'intégrale le long du petit contour orienté  $C_0$  comme indiqué sur la figure :

$$\mathcal{M}(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} ds' \frac{\mathcal{M}(s', t)}{s' - s}. \tag{11.2.27}$$

Si  $\mathcal{M}(s, t) \rightarrow 0$  au moins comme  $1/s$  quand  $|s| \rightarrow \infty$  on peut déformer le contour à l'infini. Prenant l'exemple de la structure analytique de la figure 11.1 avec deux coupures et un pôle, le contour  $C_1$  comprend les grands demi-cercles "à l'infini", les demi-droites le long de l'axe réel et le petit cercle autour du pôle : la contribution des demi-cercles à l'infini est nulle et l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s, t) &= \text{Rés} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\epsilon, t) - \mathcal{M}(s' - i\epsilon, t)}{s' - s} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-t} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\epsilon, t) - \mathcal{M}(s' - i\epsilon, t)}{s' - s} \\ &= \text{Rés} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Disc } \mathcal{M}(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} du' \frac{\text{Disc } \mathcal{M}_u(u', t)}{u' - u}, \end{aligned} \tag{11.2.28}$$

où Rés est la valeur du résidu au pôle. La fonction  $\mathcal{M}_u(u, t)$  est définie comme  $\mathcal{M}(4m^2 - t - u, t)$

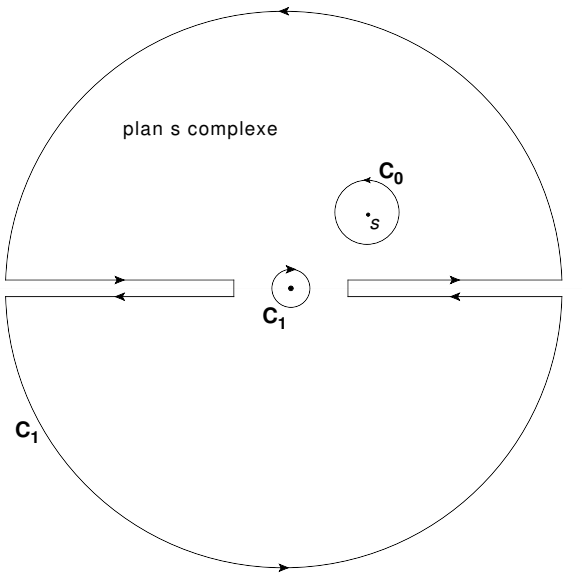


FIGURE 11.2 – Contour dans le plan  $s$  complexe, à  $t$  fixé, pour l'évaluation de la relation de dispersion. Après déformation de  $C_0$  à  $C_1$  le petit contour  $C_1$  autour du pôle est orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique.

et la discontinuité d'une fonction comme  $\text{Disc}f(x) = f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon) = 2i\text{Im}f(x)$ . Ce type

de représentation est appelé relation de dispersion. Si l'amplitude  $\mathcal{M}(s, t)$  n'est pas suffisamment convergente mais si  $\mathcal{M}(s, t)/(s - s_1)$  ( $s_1$  arbitraire) l'est, on peut alors écrire la relation de dispersion pour cette dernière fonction. Cela introduit dans la relation de dispersion, lors de la déformation du contour  $C_0$  en  $C_1$  un nouveau pôle à  $s_1$  dont le résidu n'est pas connu mais qui contribuera un terme constant à  $\mathcal{M}(s, t)$ . Ce coefficient est appelé constante de soustraction et la fonction  $\mathcal{M}(s, t)$  sera connue à une constante près : cet arbitraire est l'équivalent de l'arbitraire du choix du contre-terme en théorie de la renormalisation, comme on va le voir sur l'exemple suivant.

• **Application : reconstruction de la boucle en théorie scalaire**

On revient à la désintégration  $\Phi \rightarrow \phi + \phi$  dont on a calculé la partie imaginaire  $\text{Im}\Pi(s)$  en éq. (11.1.24). Dans le plan complexe  $\Pi(s)$  a une structure simple, seulement une coupure pour  $s > 4m^2$ . La convergence à l'infini de  $\text{Im}\Pi(s)$  n'étant pas suffisante il faut écrire la relation de dispersion avec une soustraction au point  $s_1$  :

$$\frac{\Pi(s)}{s - s_1} = \frac{\text{Rés}}{s - s_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{2i(g^2/32\pi)\sqrt{1 - 4m^2/s'}}{(s' - s)(s' - s_1)} \quad (11.2.29)$$

où Rés est le résidu arbitraire au pôle  $s_1$ . On fait l'intégration par partie pour faire apparaître des logarithmes de type  $\ln(s' - s)$ , d'où :

$$\frac{\Pi(s)}{s - s_1} = \frac{\text{Rés}}{s - s_1} + \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{s - s_1} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{1 - 4m^2/s'}} \frac{2m^2}{s'^2} \ln \frac{s' - s}{s' - s_1}, \quad (11.2.30)$$

puisque le terme intégré s'annule aux bornes de l'intégration. Faisant le changement de variable  $s' = 4m^2/z$  on arrive à :

$$\Pi(s) = \text{Rés} + \frac{g^2}{64\pi^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z}} \ln \frac{4m^2 - zs}{4m^2 - zs_1}. \quad (11.2.31)$$

On peut choisir le paramètre arbitraire Rés de sorte que  $\text{Re}\Pi(M^2) = 0$  (condition de renormalisation dans le schéma  $ON$ ), et on aura alors :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{64\pi^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z}} \ln \frac{4m^2 - zs}{4m^2 - zM^2}. \quad (11.2.32)$$

On peut comparer ce résultat avec celui obtenu par calcul direct de  $\Pi(s)$ , éq. (11.1.23), qui est :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - sx(1 - x) - i\epsilon}{m^2 - M^2x(1 - x) - i\epsilon}. \quad (11.2.33)$$

Pour montrer l'équivalence des deux résultats on divise l'intervalle d'intégration en deux parties  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$  et on prend comme variable d'intégration :

$$z = 4x(1 - x), \quad \text{qui a deux solutions, } x^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - z}). \quad (11.2.34)$$

On écrit :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx^- \dots + \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{\frac{1}{2}}^1 dx^+ \dots, \quad (11.2.35)$$



et passant à la variable d'intégration  $z$  on voit facilement que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx^- = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 dx^+ = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad (11.2.36)$$

ce qui mène bien au résultat recherché.

• **Exercice**

Reconstruire la polarisation du vide en QED dans le schéma  $ON$  à l'aide de la relation de dispersion utilisant (voir éq. (11.1.20)) :

$$-\text{Im}\Pi_\mu^\mu(s) = \alpha \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} (s + 2m^2), \quad s \geq 4m^2. \quad (11.2.37)$$

### 11.3 Diagrammes et unitarité : règles de coupure de Cutkosky

On peut donner une représentation diagrammatique simple des différents termes qui constituent le carré de l'amplitude du processus. Pour cela, on observe d'abord que le complexe conjugué de l'amplitude  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 3 \dots n}$  construite à l'aide des règles de Feynman est simplement  $\mathcal{M}_{3 \dots n \rightarrow 12}^*$  qui dénote l'amplitude où les particules  $3 \dots n$  sont entrantes et  $12$  sortantes et où tous les  $i$  des vertex et propagateurs sont changés en  $-i$  : par exemple en QED/QCD pour une amplitude de la forme  $(\bar{u}(p_3)\mathcal{F}_1 u(p_1) \bar{v}(p_2)\mathcal{F}_2 v(p_4))^* = \bar{u}(p_1)\mathcal{F}_1^* u(p_3) \bar{v}(p_2)\mathcal{F}_2^* v(p_4)$  avec  $\mathcal{F}_i^*$  le complexe conjugué de  $\mathcal{F}_i$ . Dans l'opération de conjugaison complexe une (anti-)particule entrante devient une (anti-)particule sortante et vice-versa. Du point de vue de la représentation graphique on aura donc :

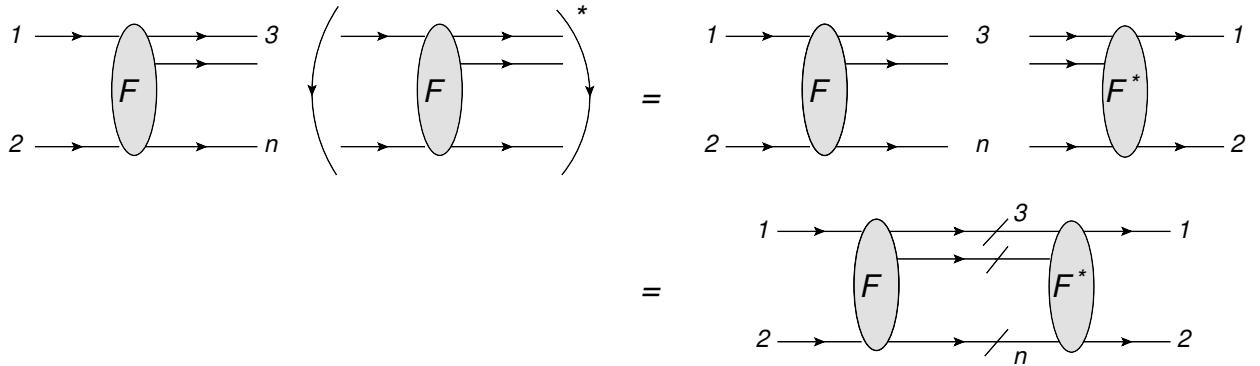


FIGURE 11.3 – Représentation de la convolution d'une amplitude avec sa complexe conjuguée.

Comme indiqué sur la figure, on représente la convolution du membre de droite par un diagramme où toutes les lignes internes sont connectées mais "coupées" pour indiquer qu'elles sont mises sur couche de masse : par exemple, pour une ligne fermionique d'impulsion  $p_j$  dans l'état final on associe à la ligne coupée le facteur :

$$(\not{p}_j + m) \frac{dp_j^4}{(2\pi)^3} \Theta(p_{j0}) \delta(p_j^2 - m^2) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{i(\not{p}_j + m)}{p_j^2 - m^2 - i\epsilon} \frac{dp_j^4}{(2\pi)^4} \quad \text{pour une ligne non coupée.}$$

Le facteur  $(\not{p}_j + m)$  est la somme sur les états de polarisation du fermion  $j$  et

$$\frac{dp_j^4}{(2\pi)^3} \Theta(p_{j0}) \delta(p_j^2 - m^2) \quad \text{qui n'est autre que} \quad \frac{dp_j^3}{(2\pi)^3 2|p_{j0}|}, \quad (11.3.38)$$

est le facteur d'espace de phase associé à particule sur couche de masse d'énergie positive. Ceci est la conséquence de la relation :

$$\text{Disc} \frac{i}{p_j^2 - m^2 - i\epsilon} = 2\pi \delta(p_j^2 - m^2). \quad (11.3.39)$$

En théorie des perturbations  $F$  sera une somme de diagrammes écrits avec les règles de Feynman tandis que  $F^*$  le sera en faisant la substitution  $i \rightarrow -i$  dans les règles de Feynman. Il faut finalement intégrer avec la condition  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n)$  pour obtenir la contribution à la partie imaginaire de l'amplitude  $2 \rightarrow 2$ . On a ainsi une représentation graphique de la relation d'unitarité :

$$2\text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12} = \sum_n \int \left( \prod_{3 \leq j \leq n} \frac{dp_j^3}{(2\pi)^3 2|p_{j0}|} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 3 \dots n}|^2. \quad (11.3.40)$$

• Exemple

On peut préciser la relation entre diagrammes et le calcul d'une section efficace sur un exemple simple que l'on a déjà discuté en détail au chapitre 10 :  $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$  ou plus simplement encore  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$ . Prenant en compte terme de Born, contributions virtuelles et réelles,

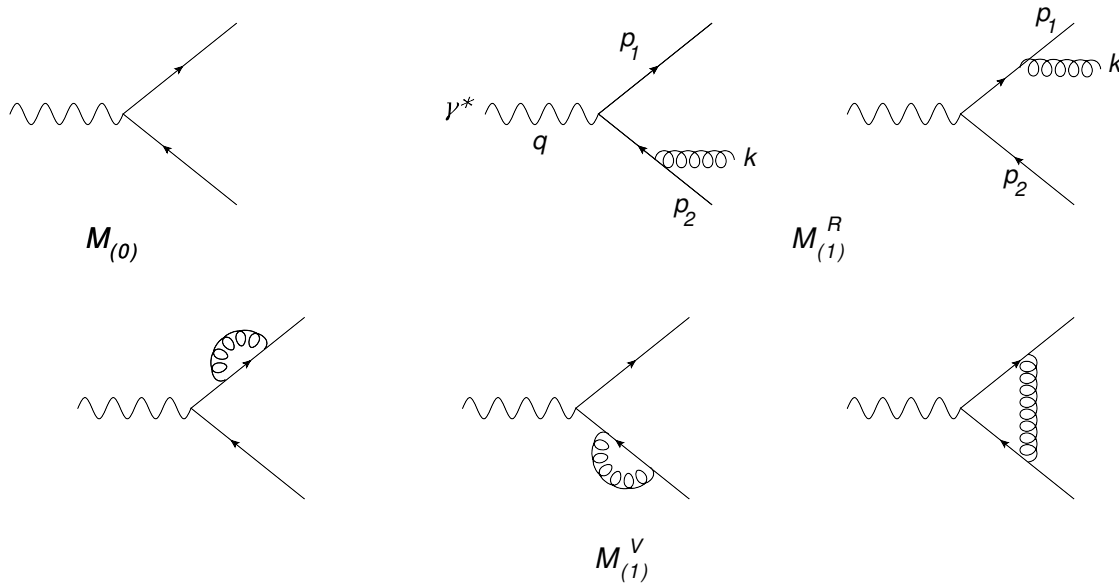


FIGURE 11.4 – Amplitudes de diffusion partonique au premier ordre en QCD pour le processus  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$

l'amplitude au niveau partonique est représentée en fig. 11.4 et elle s'écrit :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(0)} + \mathcal{M}_{(1)}^V + \mathcal{M}_{(1)}^R, \tag{11.3.41}$$

et son carré :

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_{(0)}^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{(1)}^V \mathcal{M}_{(0)}^*) + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{(1)}^R \mathcal{M}_{(1)}^{R*}) + \dots, \tag{11.3.42}$$

où on a, comme d'habitude, négligé les termes  $\mathcal{M}_{(1)}^V \mathcal{M}_{(1)}^{V*}$  qui sont d'ordre supérieur. La convolu-

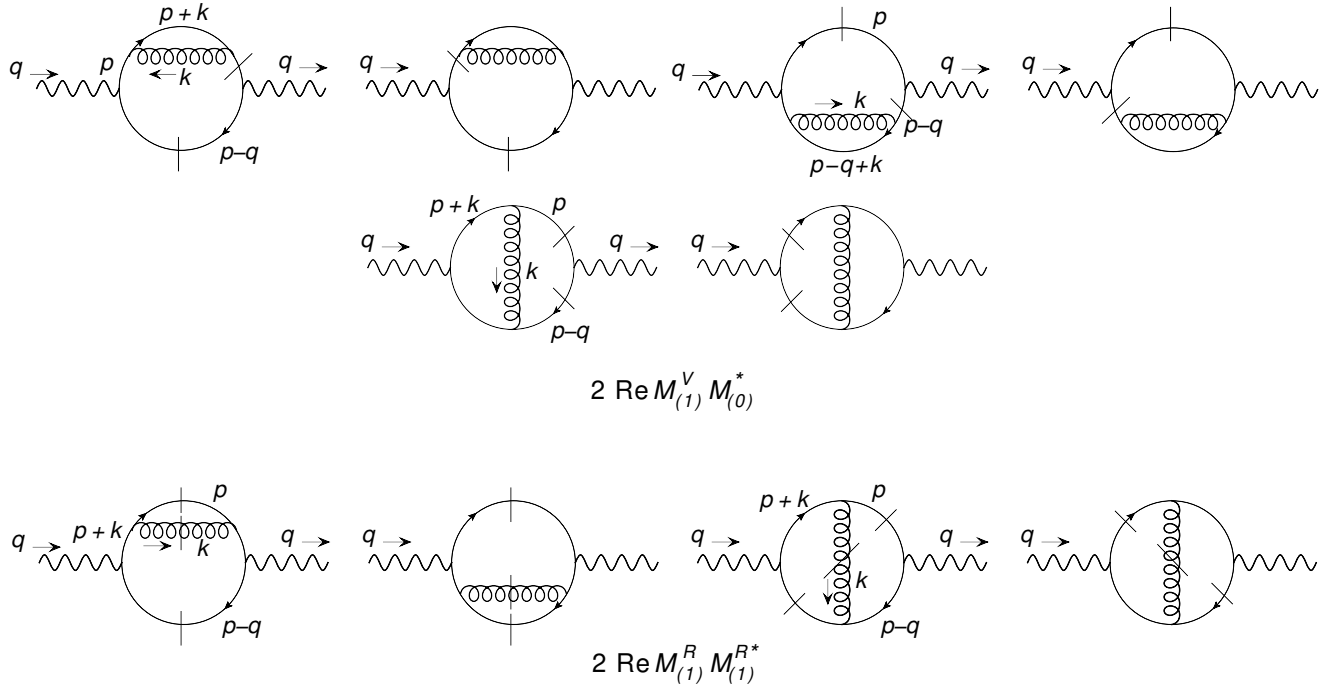


FIGURE 11.5 – Carré de la somme des amplitudes de diffusion partonique au premier ordre en QCD pour le processus  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$

tion de l'amplitude virtuelle avec le terme de Born est représentée sur les deux premières lignes de la fig. 11.5 (convolution avec les diagrammes de self-énergie en première ligne et avec le vertex en deuxième) tandis que le carré des termes réels est en dernière ligne. Par construction, on voit que les deux premiers diagrammes sont complexes conjugués et leur somme est donc réelle et de même pour les troisième et quatrième et ceux de la deuxième ligne. A cet ordre de la théorie des perturbations on est conduit à considérer les diagrammes à deux boucles de deux types de topologie, correction au propagateur et correction au vertex. Pour chaque topologie, deux fois la partie imaginaire du diagramme est la somme de toutes les discontinuités c'est à dire la somme des contributions obtenues en coupant le diagramme de toutes les façons possibles en deux parties disjointes. Par définition, les contributions réelles sont obtenues en mettant toutes les lignes internes sur couche de masse et les virtuelles en gardant au moins une ligne interne non coupée. Ceci est une illustration des règles de coupure de Cutkosky<sup>6</sup> selon lesquelles deux fois la partie imaginaire d'un diagramme est la somme

6. R.E. Cutkosky, J.Math.Phys. **1** (1960) 429; Annales Institut Poincaré Phys.Théor. **A29** 211.

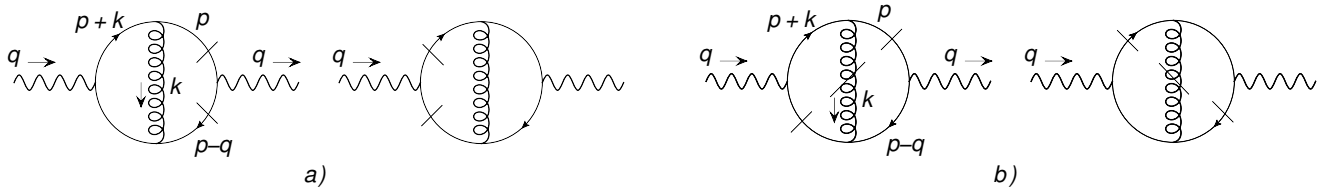


FIGURE 11.6 – a) : Coupure correspondant à la contribution des termes virtuels ; b) coupure correspondant au terme réel : terme d'interférence.

de toutes ses discontinuités.

Une présentation générale des règles de coupure a été donnée par 't Hooft et Veltman<sup>7</sup> et on en trouve une version simple dans le livre de Le Bellac<sup>8</sup>. On va voir maintenant comment la compensation des divergences infrarouges et colinéaires peut se comprendre à l'aide des diagrammes coupés.

## 11.4 Règles de Cutkosky et compensation des divergences

On a vu au chapitre 10 par un calcul explicite la compensation des divergences infrarouges et colinéaires pour une section efficace suffisamment intégrée. Pour cela on avait effectué les intégrales sur l'espace des phases séparément pour chaque type de termes (réels et virtuels) ce qui avait nécessité de travailler en  $n \neq 4$  dimensions pour donner un sens aux divergences induites par l'intégration. Dans l'approche que nous allons suivre maintenant nous regroupons la contribution des termes réels et virtuels dans un même intégrand que l'on montrera être fini dans les configurations singulières, infrarouge et/ou colinéaire. On se place dans le repère où l'impulsion du photon virtuel est  $q = (Q, 0, 0, 0)$  et où l'impulsion  $p$  du quark produit définit l'axe  $Oz$  de sorte que l'intégrale angulaire de  $p$  donne simplement  $4\pi$ . On suppose les quarks de masse nulle. On considère toutes les coupures d'un diagramme d'une topologie donnée et nous appliquons cela au diagramme de type vertex. La contribution de la coupure "réelle" vient de l'interférence des deux diagrammes en  $M_{(1)}^R$  de la figure 11.4, comme indiqué sur la figure 11.6-b). La cinématique pour le terme réel est définie par  $\gamma^*(q) \rightarrow q(p) + \bar{q}(p') + G(k)$  et la contribution de ces termes s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= 2\text{Re} \left\{ (-ie)(ie)(-ig)(ig) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \Theta(p'_0) \delta(p'^2) (2\pi)^4 \delta(q - p - p' - k) \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{(p+k)^2 + i\epsilon} \frac{-i}{(p-q)^2 + i\epsilon} \text{TR} \right\} \\ &= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \int p dp \frac{d^3k}{k} \Theta(Q - p - k) \frac{\delta((p+k-q)^2)}{(p+k)^2 (p-q)^2} \text{TR} \end{aligned} \quad (11.4.43)$$

où on fait l'intégrale sur  $p'$  ainsi que celle sur les angles de  $p$ . Le symbole TR est simplement la trace :

$$\text{TR} = (-g^{\mu\nu})(-g^{\alpha\beta}) \text{Tr} [\gamma_\beta \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{k} - \not{q}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q})]. \quad (11.4.44)$$

7. G. 't Hooft, M.J.G.Veltman, *Diagrammar*, CERN Yellow report, <https://cds.cern.ch/record/186259>.

8. Michel Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, EDP Science, 1998.

L'expression (11.4.43) est à comparer à la contribution des termes virtuels en *a*) sur la figure :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= 2\text{Re} \left\{ (-ie)(ie)(-ig)(-ig) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \Theta(p'_0) \delta(p'^2) (2\pi)^4 \delta(q-p-p') \right. \\
&\quad \left. \frac{i}{(p+k)^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k-q)^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \text{TR} \right\} \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \int p dp d^4k \Theta(Q-p) \delta((p-q)^2) \\
&\quad \left[ \frac{\delta(k^2)}{(p+k)^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k-q)^2)}{k^2(p+k)^2} \right] \text{TR} \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \int d^4k \left[ \frac{\delta(k^2)}{(p+k)^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k-q)^2)}{k^2(p+k)^2} \right] \text{TR} \quad (11.4.45)
\end{aligned}$$

où pour obtenir les dernières lignes on utilise la relation de type :

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{p^2 - m^2} - i\pi \delta(p^2 - m^2), \quad (11.4.46)$$

le premier terme du membre de droite étant compris au sens de partie principale. Pour simplifier on ignore le facteur TR, ce qui revient à considérer une théorie scalaire par exemple. On calcule d'abord  $\mathbf{R}$  en évaluant l'intégrale sur  $p$  grâce à la fonction  $\delta((p+k-q)^2)$  qui contraint :

$$2p = \frac{Q(Q-2k)}{Q-k(1-\cos\theta)}, \quad (11.4.47)$$

et on trouve :

$$\mathbf{R} = \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4Q^2} \int \frac{dk}{k} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \Theta(Q-p-k) \quad (11.4.48)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{k}$ . On évalue également facilement le premier terme de  $\mathbf{V}$ , proportionnel à  $\delta(k^2)$  en tenant compte des deux solutions  $k_0 = \pm k$  :

$$\mathbf{V}_{k^2=0} = -\frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4Q^2} \int \frac{dk}{k} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \quad (11.4.49)$$

Combinée avec  $\mathbf{R}$ , les divergences à  $k=0$  et  $\cos\theta = \pm 1$  se compensent. En effet ces valeurs singulières des variables d'intégration sont toujours compatibles avec la contrainte de positivité de la combinaison  $Q-p-k$  dans  $\mathbf{R}$ . Il est important de noter que si dans  $\mathbf{R}$  le gluon a une énergie positive,  $k_0 = k$ , dans le cas de  $\mathbf{V}$  il est nécessaire de prendre en compte les deux cas  $k_0 = \pm k$ . On peut montrer maintenant que les deux autres contributions de  $\mathbf{V}$ , en  $\delta((p+k)^2)$  et  $\delta((q-p+k)^2)$  sont égales et chacune est finie. Par exemple, ne gardant que le terme d'espace de phase et les dénominateurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{(p+k)^2=0} &= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \int d^4k \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2}, \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{8Q^2} \int k^2 dk \frac{d\cos\theta}{\sqrt{Q^2 + 4k(Q\cos\theta + k)}} \left[ \frac{1}{k_0^+ (k_0^+ - k\cos\theta)} + \frac{1}{k_0^- (k_0^- - k\cos\theta)} \right],
\end{aligned}$$

où  $k_0^\pm$  sont les solutions de la contrainte  $(p+k)^2=0$ , soit :

$$k_0^\pm = \frac{1}{2} \left( -Q \pm \sqrt{Q^2 + 4k(Q \cos \theta + k)} \right). \quad (11.4.50)$$

Combinant les termes en  $k_0^\pm$  on fait apparaître au dénominateur le facteur  $(1 - \cos^2 \theta)$ . Ramenant l'intégrale angulaire à l'intervalle  $[0, 1]$  et faisant le changement de variable  $\cos \theta = 1 - z$  l'expression ci-dessus prend la forme :

$$\mathbf{V}_{(p+k)^2=0} = \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{8Q^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 \frac{dz}{z(2-z)} \frac{-2Qkz}{Q^2 - k^2} + \dots, \quad (11.4.51)$$

où on a gardé uniquement les termes potentiellement divergents en configuration infrarouge et colinéaire. Les intégrales sont bien finies comme annoncé. Cet exemple simple est une illustration du théorème prouvé à tous les ordres par Kinoshita<sup>9</sup> selon lequel les divergences infrarouges et colinéaires se compensent entre les coupures d'un même diagramme à condition d'intégrer sur un espace de phase suffisant.

#### • Amusement

On considère la réaction  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q(p_3) + q(p_4) + \bar{q}(p_5) + \bar{q}(p_6)$  de quarks identiques. Quelques diagrammes de l'amplitude de diffusion sont représentés en figure 11.7 Utilisant la représentation

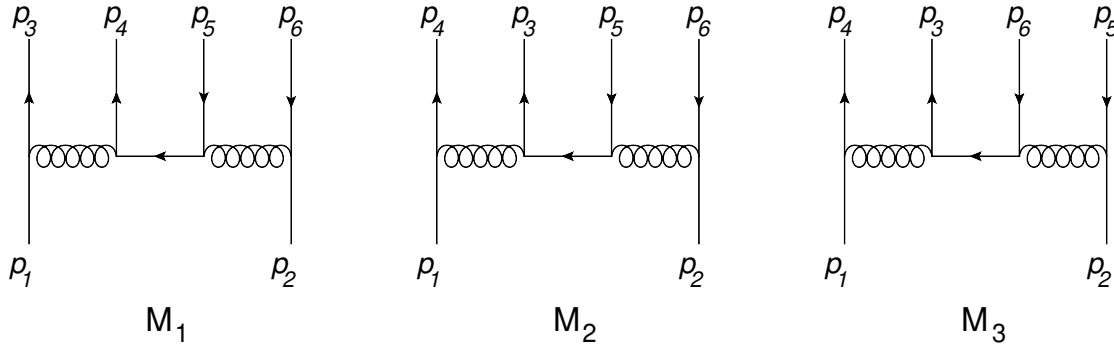


FIGURE 11.7 –

de la figure 11.3 pour le carré de l'amplitude, il est facile montrer que  $|\mathcal{M}_i|^2$  est le produit de trois traces,  $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$  de deux traces et  $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^*$  est constitué d'une seule trace. En effet, une fois tracés le diagramme et son complexe conjugué il suffit de connecter les lignes de même impulsion y compris celle des particules initiales ; dès qu'une ligne fermionique se ferme en boucle on obtient une trace. On suit une procédure identique pour les diagrammes d'interférence.

#### • Note

Des outils ont été développés pour calculer les amplitudes à N-points dans l'approximation à une boucle, outils fondés sur l'unitarité et la connaissance des différentes coupures des diagrammes (voir, par exemple C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon *et al.*, Phys. Rev. **D78** (2008) 036003 [arXiv:08034180].)

9. T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.

## Chapitre 12

# Equations du groupe de renormalisation

Les équations du groupe de renormalisation sont obtenues de la façon suivante : on écrit la relation entre la fonction de Green exprimée en fonction des quantités "nues" et celle exprimée en fonction des quantités renormalisées. Imposant que la fonction de Green "nue" ne dépend pas du paramètre de masse introduit lors de la renormalisation permet d'obtenir une équation d'évolution de la fonction de Green renormalisée. C'est en fait une généralisation de l'éq. (4.4). On verra que l'équation obtenue permet de prédire le comportement asymptotique des fonction de Green et par conséquent des amplitudes (après un certain nombre de manipulations!).

Pour une théorie avec un champ  $\phi$ , la relation entre champ nu et renormalisé dans un schéma  $R$  est :

$$\phi_B = Z^{\frac{1}{2}}(R)\phi_R. \quad (12.0.1)$$

Les champs renormalisés dans deux schémas  $R_1$  et  $R_2$  satisfont :

$$\phi_{R_2} = Z^{\frac{1}{2}}(R_2, R_1)\phi_{R_1}, \quad (12.0.2)$$

avec :

$$Z(R_2, R_1) = Z(R_2)/Z(R_1) \quad (12.0.3)$$

et on a la loi de composition évidente :

$$Z(R_3, R_1) = Z(R_3, R_2) * Z(R_2, R_1). \quad (12.0.4)$$

Il arrive cependant, que pour certains schémas de renormalisation, notamment les schémas MOM ("momentum subtraction scheme") ou ON ("on-shell subtraction scheme") pour une théorie massive où les facteurs  $Z$  dépendent de la masse, que le produit  $Z(R_4, R_3) * Z(R_2, R_1)$  ne soit pas un élément du groupe c'est à dire qu'il n'existe pas de schéma  $R$  et  $R'$  tel que :

$$Z(R_4, R_3) * Z(R_2, R_1) = Z(R', R). \quad (12.0.5)$$

Le terme de "groupe" est donc abusif dans certains cas.

## 12.1 Equations du groupe de renormalisation

Nous dériverons les équations du "groupe de renormalisation" dans le cas où les contre-termes  $Z_i$  ne dépendent pas des masses mais uniquement du couplage et implicitement d'une l'échelle arbitraire introduite dans la procédure de renormalisation, ce qui est le cas dans les schémas  $MS$  ou  $\overline{MS}$  appliqués à QED ou QCD que nous allons considérer maintenant. Une fonction de Green avec  $n_F$  fermions massifs et  $n_B$  champs de jauge externes satisfait à :

$$G_B^{(n_F, n_B)}(p_i, g_B, m_B, \varepsilon) = Z_2^{n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{n_B/2}(g, \varepsilon) G^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu), \quad (12.1.6)$$

où les  $p_i$  sont les impulsions externes.  $G_B^{(n_F, n_B)}$  est la fonction de Green "nue" régularisée d'où sa dépendance en  $\varepsilon$ , et  $G^{(n_F, n_B)}$  est la fonction de Green renormalisée qui dépend du couplage  $g$  et de la masse  $m$  renormalisées ainsi que du paramètre  $\mu$ . Toutes les divergences sont contenues dans les contre-termes. Comme on a exclu toute dépendance en masse des facteurs  $Z$  ils ne peuvent dépendre explicitement de  $\mu$  puisqu'ils sont sans dimension. Leur dépendance en  $\mu$  est implicite, via la constante de couplage renormalisée  $g$ . Au lieu de travailler avec les fonctions  $G$  on travaille plutôt avec les fonctions de Green irréductibles à une particule que l'on dénote  $\Gamma$ . On peut montrer que dans ce cas la relations entre fonctions nues et renormalisées est :

$$\boxed{\Gamma_B^{(n_F, n_B)}(p_i, g_B, m_B, \varepsilon) = Z_2^{-n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{-n_B/2}(g, \varepsilon) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu).} \quad (12.1.7)$$

$\Gamma_B$  est indépendante de l'échelle  $\mu$  introduite en régularisation dimensionnelle, d'où :

$$0 = Z_2^{-n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{-n_B/2}(g, \varepsilon) \left[ \mu \frac{d}{d\mu} - \frac{n_B}{2} \frac{\mu}{Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu} - \frac{n_F}{2} \frac{\mu}{Z_2} \frac{dZ_2}{d\mu} \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.1.8)$$

Mais la dérivée totale par rapport à  $\mu$  de  $\Gamma^{(n_F, n_B)}$  s'écrit explicitement :

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \varepsilon) = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.1.9)$$

Introduisant la fonction de Gell-Mann/Low déjà rencontrée :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \frac{dg}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(g, \varepsilon) = \beta(g) \quad (12.1.10)$$

et les dimensions anomales du fermion et du boson :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_i} \frac{dZ_i}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_i(g, \varepsilon) = \gamma_i(g) \quad (12.1.11)$$

et finalement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_m(g, \varepsilon) = \gamma_m(g). \quad (12.1.12)$$

L'équation du groupe de renormalisation devient :

$$\boxed{\left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} - n_B \gamma_3(g) - n_F \gamma_2(g) \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0,} \quad (12.1.13)$$



où on a introduit la variable  $t = -\ln(\mu/\mu_0)$  avec  $\mu_0$  une échelle fixée. Pour les fonctions de Green  $G^{(n_F, n_B)}$  définies comme produits chronologiques des champs qui satisfont l'éq. (12.1.6) on aura évidemment :

$$\boxed{\left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} + n_B \gamma_3(g) + n_F \gamma_2(g) \right] G^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0.} \quad (12.1.14)$$

On rappelle que cette forme des équations n'est valable que si les contre-terms ne dépendent pas explicitement des masses du modèle. Par exemple, elles ne seraient pas valables pour QED dans le schéma ON.

## 12.2 Calcul de la fonction $\beta$ et des dimensions anomales

Les différentes fonctions  $\beta$ ,  $\gamma_m$  et  $\gamma_i$  sont facilement calculables, dans l'approximation à une boucle, à partir des résultats des chapitres précédents. On donne ici une dérivation valable à tous les ordres de la théorie des perturbations. On calcule d'abord la fonction  $\beta(g)$ . Pour cela on rappelle la relation déjà introduite entre couplage nu et renormalisé :

$$g_B = Z_g(g, \varepsilon) \mu^\varepsilon g, \quad (12.2.15)$$

où le contre-terme est de la forme :

$$Z_g(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_g^{(n)}(g)}{\varepsilon^n} \quad (12.2.16)$$

avec  $c_g^{(n)}(g)$  un polynome en  $g$ . Le couplage  $g_B$  étant indépendant de la variable  $\mu$  on obtient la relation (cf éq. (4.4.129)) :

$$\beta(g, \varepsilon) \frac{d(gZ_g(g, \varepsilon))}{dg} + \varepsilon g Z_g(g, \varepsilon) = 0. \quad (12.2.17)$$

On recherche  $\beta(g, \varepsilon)$  sous la forme  $\beta(g, \varepsilon) = \beta(g) + \beta_1(g)\varepsilon + \dots$  que l'on injecte dans l'équation ci-dessus et on annule les coefficients des termes en puissance (positive, nulle ou négative) de  $\varepsilon$ . On trouve que seuls les deux premiers termes du développement de  $\beta(g, \varepsilon)$  sont non nuls et que :

$$\beta_1(g) = -g; \quad \boxed{\beta(g) = g^2 \frac{dc_g^{(1)}(g)}{dg}}; \quad \frac{dc_g^{(n+1)}(g)}{dg} = \frac{dc_g^{(1)}(g)}{dg} \frac{d(gc_g^{(n)})}{dg}. \quad (12.2.18)$$

Une remarque importante est que la fonction  $\beta$  est entièrement donnée par le résidu au pôle simple du développement en  $1/\varepsilon$  de  $Z_g(g, \varepsilon)$  et, d'autre part, les résidus des pôles multiples sont calculables à partir du résidu au pôle simple.

On procède de la même façon pour les dimensions anomales. Si on écrit

$$Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i^{(n)}(g)}{\varepsilon^n}, \quad (12.2.19)$$

et on injecte ce développement dans la définition de la dimension anormale il vient

$$\boxed{\gamma_i(g) = -\frac{1}{2}g \frac{dc_i^{(1)}(g)}{dg};} \quad \frac{1}{2}g \frac{dc_i^{(n+1)}}{dg} = \frac{1}{2}\beta(g) \frac{dc_i^{(n)}}{dg} - \gamma_i(g) c_i^{(n)}. \quad (12.2.20)$$

Comme la fonction  $\beta$ , la dimension anormale est entièrement donnée par le résidu au pôle simple du développement en  $1/\varepsilon$  du contre terme  $Z_i(g, \varepsilon)$  correspondant. Finalement pour  $\gamma_m$  on trouve (les notations sont évidentes) :

$$\boxed{\gamma_m(g) = g \frac{dc_m^{(1)}(g)}{dg}.} \quad (12.2.21)$$

• **Note**

En QED/QCD le développement perturbatif fait intervenir la carré de la constante de couplage  $g^2$  ou, plutôt,  $\alpha = g^2/4\pi$ . Les contre-terms sont de la forme :

$$\boxed{Z_i = 1 + \sum_{n=1} \frac{c_i^{(n)}(\alpha)}{\varepsilon^n},} \quad (12.2.22)$$

et la relation entre couplage nu et renormalisée est notée :

$$\alpha_B = Z_\alpha \mu^{2\varepsilon} \alpha. \quad (12.2.23)$$

L'opérateur de dérivation est  $\mu^2/d\mu^2$  au lieu de  $\mu/d\mu$ . Ainsi on définit les fonctions :

$$\beta(\alpha) = \mu^2 \frac{d\alpha}{d\mu^2}; \quad \gamma_i(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{Z_i} \frac{dZ_i}{d\mu^2}; \quad \gamma_m(\alpha) = \frac{\mu^2}{m^2} \frac{dm^2}{d\mu^2}, \quad (12.2.24)$$

et, par analogie avec le raisonnement précédent ( $g \rightarrow \alpha, \mu \rightarrow \mu^2$ ), on en déduit facilement :

$$\boxed{\beta(\alpha) = \alpha^2 \frac{dc_\alpha^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}; \quad \gamma_i(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha \frac{dc_i^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}; \quad \gamma_m(\alpha) = \alpha \frac{dc_m^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}.} \quad (12.2.25)$$

Explicitement, en QED au premier ordre, d'après les résultats du chapitre 3, on trouve (jauge de Feynman,  $N_L$  saveurs de leptons) :

$$\boxed{\beta(\alpha) = \frac{N_L}{3\pi} \alpha^2; \quad \gamma_3(\alpha) = -\frac{N_L}{3\pi} \alpha, \text{ photon}; \quad \gamma_2(\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \alpha, \text{ fermion}; \quad \gamma_m(\alpha) = -\frac{3}{2\pi} \alpha,} \quad (12.2.26)$$

Pour QCD, des expressions similaires peuvent facilement être obtenues à partir des résultats du chapitre 8, par exemple pour  $N_F$  saveurs de quarks, on a :

$$\boxed{\beta(\alpha_s) = -\frac{33 - 2N_F}{12\pi} \alpha_s^2.} \quad (12.2.27)$$

• **Remarque**

En sec. 4.4, on avait donné une dérivation de la fonction  $\beta$  au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations, qui reposait sur un développement tel que  $1/(1+c\alpha) \sim 1 - c\alpha$ . Dans la démonstration ci-dessus, valable à tous les ordres, on voit qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours à cette approximation.

### 12.3 Solution des équations du groupe de renormalisation

On cherche d'abord la solution générale de l'équation homogène<sup>1</sup> :

$$\left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0 \quad (12.3.28)$$

Pour simplifier l'écriture on note l'opérateur de dérivation entre crochets dans l'équation ci-dessus par :

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m}. \quad (12.3.29)$$

On rappelle que  $g$  et  $m$  sont les paramètres renormalisés à une échelle  $t = 0$  particulière. On va voir que la dépendance en  $\mu$ , ou de façon équivalente en  $t$ , de la fonction de Green renormalisée  $\Gamma^{(n_F, n_B)}$  apparaît seulement implicitement par l'intermédiaire de deux fonctions  $\bar{g}(t, g)$  et  $\bar{m}(t, g, m)$  appelées respectivement couplage (ou charge) mobile ("running coupling") et masse mobile ("running mass"). La première est définie implicitement par :

$$t = \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (12.3.30)$$

et la deuxième est donnée par :

$$\bar{m}(t, g, m) = m \exp \left( \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_m(x) \right) \quad (12.3.31)$$

Dérivant ces deux équations par rapport à  $t$  on obtient :

$$\frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} = \beta(\bar{g}) \quad (12.3.32)$$

$$\frac{\partial \bar{m}(t, g, m)}{\partial t} = m \exp \left( \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_m(x) \right) \frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} \frac{\gamma_m(\bar{g})}{\beta(\bar{g})}$$

soit :

$$\frac{\partial \bar{m}(t, g, m)}{\partial t} = \bar{m}(t, g, m) \gamma_m(\bar{g}), \quad (12.3.33)$$

avec comme conditions initiales ( $t = 0, \mu_0 = \mu$ ) :

$$\bar{g}(0, g) = g ; \quad \bar{m}(0, g, m) = m. \quad (12.3.34)$$

La charge mobile  $\bar{g}$  et la masse mobile  $\bar{m}$  satisfont à une équation différentielle en  $t$  avec la condition initiale d'être respectivement égales à la charge  $g$  et la masse  $m$  renormalisées au point  $t = 0$ . Si on dérive maintenant l'éq. (12.3.30) par rapport à  $g$  il vient :

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \frac{1}{\beta(\bar{g})} - \frac{1}{\beta(g)} = 0, \Rightarrow \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \beta(g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \quad (12.3.35)$$

1. L.V. Ovsyannikov, Doklady Akademii Nauk SSSR 01/1956

qui exprime que  $\bar{g}$  ne dépend pas explicitement de  $t$ . On peut ré-écrire cette équation :

$$\boxed{\mathcal{D} \bar{g}(t, g) = 0}, \quad (12.3.36)$$

puisque  $\bar{g}$  ne dépend pas de  $m$ . De même pour la masse mobile :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{m}}{\partial g} &= \bar{m} \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \frac{\gamma_m(\bar{g})}{\beta(\bar{g})} - \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} \right) \\ &= \frac{\bar{m}}{\beta(g)} (\gamma_m(\bar{g}) - \gamma_m(g)), \end{aligned} \quad (12.3.37)$$

où on a utilisé l'éq. (12.3.36). Cette équation est équivalente à :

$$\boxed{\mathcal{D} \bar{m}(t, g, m) = 0}, \quad (12.3.38)$$

que l'on établit facilement à l'aide de (12.3.33) et de l'identité  $\gamma_m \bar{m} = \gamma_m m (\partial \bar{m} / \partial m)$ . La présence du terme en  $\gamma_m$  dans l'équation d'évolution de  $\bar{m}$  est due au fait que la masse a une dimension, alors qu'un tel terme est absent de l'évolution de  $\bar{g}$ . On note maintenant que toute fonction  $\Gamma(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu_0)$  (attention aux arguments!) de la charge et de la masse mobiles satisfait à l'équation (12.3.28). En effet :

$$\mathcal{D} \Gamma(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu_0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{g}} \mathcal{D} \bar{g} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{m}} \mathcal{D} \bar{m} = 0, \quad (12.3.39)$$

par les deux équations ci-dessus. De plus cette fonction est égale à  $\Gamma(p_i, g, m, \mu_0)$  à  $t = 0$ .

### • Solution de l'équation inhomogène

On la recherche sous la forme ;

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu_0) \exp \left( -n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.3.40)$$

On peut vérifier que cette fonction satisfait à :

$$(\mathcal{D} - n_2 \gamma_2(g) - n_3 \gamma_3(g)) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0 \quad (12.3.41)$$

qui est équivalente à l'éq. (12.1.13).

#### Preuve

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - n_i \gamma_i(g)) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu_0) \exp \left( -n_i \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x) \right) = \\ \left\{ [\mathcal{D} \Gamma^{(n_F, n_B)}] - n_i \left\{ [\mathcal{D} \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x)] + \gamma_i(g) \right\} \Gamma^{(n_F, n_B)} \right\} \exp \left( -n_i \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est nul du fait de l'équation (12.3.39). Le deuxième terme entre  $\{\dots\}$  est également nul puisque

$$\begin{aligned} [\mathcal{D} \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x)] + \gamma_i(g) &= [\mathcal{D} \bar{g}] \frac{\gamma_i(\bar{g})}{\beta(\bar{g})} - [\mathcal{D} g] \frac{\gamma_i(g)}{\beta(g)} + \gamma_i(g) \\ &= -\gamma_i(g) + \gamma_i(g) \end{aligned} \quad (12.3.42)$$

car  $\mathcal{D}\bar{g} = 0$  et  $\mathcal{D}g = \beta(g)$ . La relation (12.3.40) relie la fonction de Green renormalisée exprimée en fonction des paramètres renormalisés  $g, m$  à l'échelle  $t = 0$  à la fonction de Green renormalisée (la même fonction) exprimée en fonction des paramètres  $\bar{g}(t, g)$  et  $\bar{m}(t, g, m)$  correspondant à l'échelle  $\mu e^t$ . On peut ainsi l'écrire :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu e^t) \exp \left( -n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.3.43)$$

L'évolution des masse et couplage mobiles assure que les prédictions physiques ne dépendent pas du choix de  $t$ , c'est à dire du point de renormalisation.

## 12.4 Applications

Les équations RGE peuvent être utilisées pour prouver l'invariance des quantités physiques. Dans le cadre de notre discussion, nous travaillons dans les schémas  $MS$  ou  $\overline{MS}$  et l'arbitraire du schéma de renormalisation est paramétré par l'échelle  $\mu$ . On retrouvera ainsi, de façon générale, divers résultats déjà obtenus de façon artisanale.

### • Invariance de la masse physique, pôle du propagateur

On a vu que le propagateur renormalisé avait la forme, pour un fermion par exemple,

$$S_F^R(p, g, m, \mu) = \frac{i \mathcal{Z}^R}{\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon}, \quad (12.4.44)$$

où (voir éq. (4.2.64) à (4.2.66) pour QED)  $m_{\text{pôle}} = m_R(1 + \Sigma_0^R)$  est ce qui reste, dépendant de  $\mu$ , après le choix des contre-termes de fonction d'onde et de masse, et  $\mathcal{Z}^R = 1 + \Sigma_1^R$  est le résidu au pôle. On a :

$$\mathcal{D} S_F^R = \frac{i \mathcal{D} \mathcal{Z}^R}{\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon} + \frac{i \mathcal{Z}^R \mathcal{D} m_{\text{pôle}}}{(\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon)^2} \quad (12.4.45)$$

Mais le propagateur satisfait à une équation de type (12.1.14) :

$$[\mathcal{D} + 2\gamma_2(g)] S_F^R = 0. \quad (12.4.46)$$

Substituant à  $\mathcal{D} S_F^R$  dans l'éq. (12.4.45) son expression donnée par (12.4.46) on voit que le membre de gauche de (12.4.45) est un pôle simple. Égalant les résidus des pôles du même ordre, on obtient pour le pôle simple :

$$[\mathcal{D} + 2\gamma_2(g)] \mathcal{Z}^R = 0. \quad (12.4.47)$$

et pour le pôle double :

$$\boxed{\mathcal{D} m_{\text{pôle}} = 0}, \quad (12.4.48)$$

qui est le résultat recherché. On note dans la suite cette masse " $m_{\text{phys}}$ ", puisque, par définition, le pôle du propagateur est la masse physique de la particule. Cela est justifié parcequ'elle est indépendante du schéma de renormalisation.

• **Invariance des amplitudes de diffusion**

On considère pour simplifier la fonction de Green à n-points d'une théorie scalaire renormalisée dans le schéma  $R$ , soit  $G^{(n)}(p_i, g, m, \mu)$  qui satisfait donc à l'équation de type :

$$[\mathcal{D} + n \gamma_2(g)] G^{(n)} = 0 \quad (12.4.49)$$

L'élément de matrice de diffusion s'obtient en tronquant la fonction de Green des propagateurs externes :

$$\mathcal{M}(p_i, g, m, \mu) = \lim_{p_i^2 \rightarrow m_{\text{phys}}^2} \prod_i^n \left( \frac{p_i^2 - m_{\text{phys}}^2}{i \mathcal{Z} \mathcal{R}} \right) \mathcal{Z}^{\mathcal{R}^{n/2}} G^{(n)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.4.50)$$

On montre facilement par application des équations (12.4.47), (12.4.49) et prenant note de l'invariance de la masse physique sous l'opérateur  $\mathcal{D}$  que :

$$\mathcal{D} \mathcal{M}(p_i, g, m, \mu) = \mu \frac{d \mathcal{M}(p_i, g, m, \mu)}{d \mu} = 0, \quad (12.4.51)$$

et donc que l'élément de matrice est indépendant de l'échelle arbitraire  $\mu$ . D'autre part, il satisfait l'équation homogène de type (12.3.28). Si le calcul de cet élément dans un schéma de renormalisation avec couplage et masse définis à l'échelle  $\mu$ , s'écrit  $\mathcal{M}(p_i, g, m, \mu)$ , alors son expression dans un schéma à l'échelle  $\mu e^t$  sera la même fonction mais avec couplage et masse mobiles (voir la discussion après l'éq. (12.3.42)),  $\mathcal{M}(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu e^t)$ .

• **Où il est question de jauge**

Dans toute la discussion précédente on a omis le fait que les fonctions de Green pouvaient dépendre du paramètre de jauge  $\xi$  normalisant le terme de cassure de jauge  $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$  dans la densité lagrangienne. On peut prouver, dans les schémas de type  $MS$  ou  $\overline{MS}$ , l'indépendance de jauge de la fonction  $\beta$ . On exprime que le couplage nu,  $g_B = \mu^\varepsilon Z_g g$ , est indépendant de  $\xi$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{d Z_g}{d \xi} g + Z_g \frac{d g}{d \xi} = 0. \quad (12.4.52)$$

Injectant dans cette relation le développement en  $1/\varepsilon$  de  $Z_g$  dans un schéma de type  $MS$  :

$$Z_g = 1 + \frac{a_1(g, \xi)}{\varepsilon} + \frac{a_2(g, \xi)}{\varepsilon^2} + \dots, \quad (12.4.53)$$

et égalant les termes constant d'une part, et les résidus aux différents pôles d'autre part, on trouve :

$$\boxed{\frac{d g}{d \xi} = 0} \quad \frac{d a_1(g, \xi)}{d \xi} = 0. \quad (12.4.54)$$

Le couplage  $g$  est donc indépendant du paramètre  $\xi$  et, par conséquent  $\beta(g) = \mu dg/d\mu$  l'est aussi. On prouve de la même façon l'indépendance des  $\gamma_i(g)$  et  $\gamma_m(g)$ .

## 12.5 Comportement asymptotique des fonctions de Green

La discussion précédente permet d'obtenir l'évolution des fonctions de Green lorsque l'on modifie l'échelle de renormalisation  $\mu$ . On va voir que ce résultat peut être utilisé pour obtenir le comportement d'une fonction de Green, dans un schéma de renormalisation fixé, quand on dilate toutes les impulsions du processus considéré par un même facteur  $p_i \rightarrow \lambda p_i$ . C'est à dire que l'on va relier  $\Gamma^{(n)}(\lambda p_i, \dots, \mu)$  à  $\Gamma^{(n)}(p_i, \dots, \mu)$ . Pratiquement, ce résultat est très intéressant puisque cela permet de faire des prédictions pour de nombreux processus. Par exemple, le processus  $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$  où plutôt  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$  est donné par la partie imaginaire de  $\Gamma^{(n_F=0, n_B=2)}(q, g, \mu)$  et on pourra obtenir son comportement quand  $q^2 \rightarrow \infty$ . La diffusion inélastique profonde implique la fonction  $\Gamma^{(n_F=2, n_B=2)}(p, q, g, \mu)$  où  $p$  est l'impulsion du parton et  $q$  celle du photon virtuel entrants : on pourra alors étudier son comportement quand  $p \rightarrow \lambda p$ ,  $q \rightarrow \lambda q$ , c'est à dire quand  $pq \rightarrow \lambda^2 pq$ ,  $q^2 \rightarrow \lambda^2 q^2$  tels que la variable de Bjorken  $x = -q^2/2pq$  est fixée, ce qui est le cas dans les expériences.

Les fonctions de Green sont des fonctions homogènes de degré, exprimé en masse,  $D$ . C'est à dire, si on mesure toutes les quantités dimensionnées (impulsions, masses) par rapport à l'échelle  $\mu$  on a

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, m, g, \mu) = \mu^D \gamma^{(n_F, n_B)}\left(\lambda \frac{p_i}{\mu}, \frac{m}{\mu}, g\right), \quad (12.5.55)$$

qui explicite la dimension en masse de  $\Gamma^{(n_F, n_B)}$ , la fonction  $\gamma^{(n_F, n_B)}$  étant sans dimension puisque toutes ses variables le sont. En dérivant par rapport à  $\lambda$  on a :

$$\lambda \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial \lambda} = \lambda \frac{p_i}{\mu} \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial (\lambda p_i / \mu)}, \quad (12.5.56)$$

et par rapport à  $\mu$  :

$$\mu \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial \mu} = - \left( \lambda \frac{p_i}{\mu} \frac{\partial}{\partial (\lambda p_i / \mu)} + \frac{m}{\mu} \frac{\partial}{\partial (m / \mu)} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} \quad (12.5.57)$$

Combinant les deux équations on obtient :

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \frac{\partial}{\partial m} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} = 0, \quad (12.5.58)$$

qui relie la variation en  $\lambda$ , facteur de changement d'échelle, à celle en  $\mu$ . Revenant à la fonction de Green  $\Gamma^{(n_F, n_B)}$  on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, m, g, \mu) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(n_F, n_B)} = \mu^D \left( D + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} \\ &= \left( D - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - m \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma^{(n_F, n_B)} \end{aligned} \quad (12.5.59)$$

Combinant cette dernière équation avec l'équation du groupe de renormalisation (12.1.13) pour éliminer le terme en  $\mu \partial / \partial \mu$  on a finalement :

$$\boxed{\left[ -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (\gamma_m(g) - 1) m \frac{\partial}{\partial m} - n_B \gamma_3(g) - n_F \gamma_2(g) + D \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, g, m, \mu) = 0,} \quad (12.5.60)$$

qui est l'équation recherchée. On peut la résoudre comme on l'a fait précédemment pour l'éq. (12.1.13) ou bien se rappeler la solution éq. (12.3.43) :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu e^t) \exp \left( -n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.5.61)$$

et utilisant la propriété de  $\Gamma^{(n_F, n_B)}$  sous la dilatation des impulsions et des masses :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu) \exp \left( t D - n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right), \quad (12.5.62)$$

où  $\bar{m} = e^{-t} m$ , qui relie la fonction de Green définie dans le même schéma de renormalisation mais évaluée à des valeurs des impulsions différentes. On note que pour une théorie de masse nulle est sans interaction on a simplement :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, \mu) = e^{tD} \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \mu), \quad (12.5.63)$$

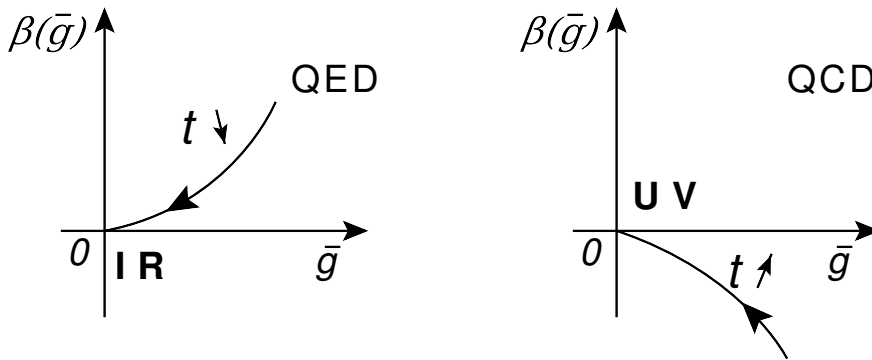
mais pour une théorie renormalisable avec interaction la dimension de la fonction est affectée et on a :

$$t D \rightarrow t D - n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x), \quad (12.5.64)$$

d'où le nom de *dimension anormale* donnée aux fonction  $\gamma_i(g)$ . Cette modification du comportement vient de la nécessité d'introduire une échelle de masse dans la procédure de renormalisation. Le comportement asymptotique des fonctions de Green est contrôlé par la fonction  $\beta(g)$ , donc le couplage mobile, et les fonctions  $\gamma_i(g)$ .

## 12.6 Comportement asymptotique du couplage mobile

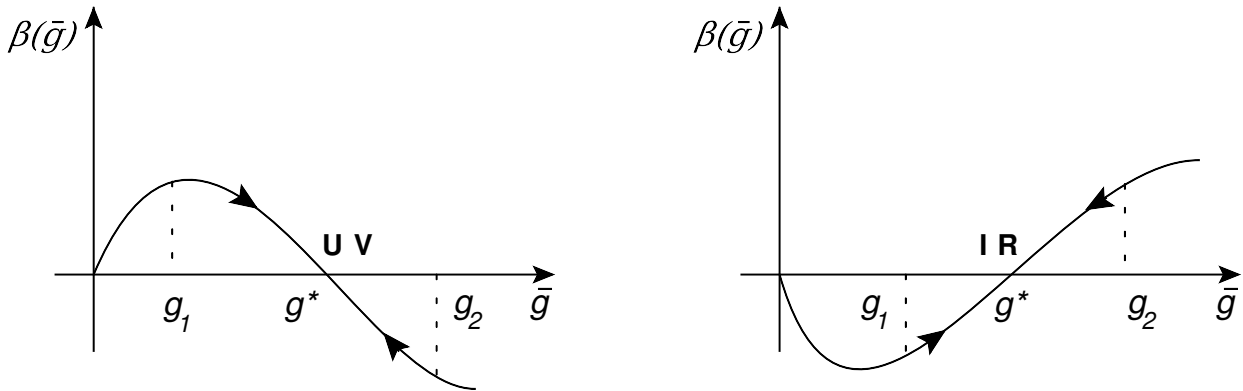
Se reportant à l'éq. (12.3.32) qui donne l'évolution du couplage mobile en fonction de l'échelle on voit que, si  $\beta(\bar{g})$  (qui est proportionnel à une puissance du couplage) est positif comme c'est le cas en QED, le couplage croît avec  $t$  tandis qu'il décroît dans le cas contraire, comme en QCD par exemple. Au premier ordre de la théorie des perturbations, valable quand le couplage est petit, on peut donc tracer les graphes suivants,  $\beta(\bar{g})$  en fonction de  $\bar{g}$  qui indique également le sens de variation du couplage quand l'échelle varie.





On voit qu'en QED,  $\bar{g}$  décroît quand  $t$  décroît et tend asymptotiquement vers 0 :  $g = 0$  est un point fixe dans l'infrarouge car la dérivée du couplage tend vers 0 quand  $t \rightarrow -\infty$  et donc le couplage devient constant (nul). En revanche en QCD,  $g = 0$  est un point fixe ultraviolet puisque le couplage et sa dérivée tendent vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$

Pour étudier le comportement de la fonction  $\beta(\bar{g})$  lorsque le couplage devient grand, il faut aller aux ordres plus élevés de la théorie des perturbations. Si la fonction croît ou décroît de façon monotone le couplage devient éventuellement trop grand (cas de QCD dans l'infrarouge et QED aux énergies plus que cosmologiques) et la théorie des perturbations cesse d'être valable. Dans certains modèles les cas dans les figures ci-dessous peuvent se produire où la fonction  $\beta(\bar{g})$  s'annule pour une valeur  $g^*$  :



Dans la figure de gauche  $g^*$  est un point fixe ultraviolet puisque, quelque soit le point de départ de l'évolution,  $g_1$  ou  $g_2$ , un accroissement de l'échelle  $t$  conduit le couplage effectif au point  $g^*$ , tandis que l'origine est un point fixe infrarouge. Pour la figure de droite, le même raisonnement montre que  $g^*$  est un point fixe infrarouge et l'origine un point fixe ultraviolet.

## 12.7 Violation d'invariance d'échelle

Se tournant maintenant vers l'étude d'une fonction de Green, on considère pour simplifier une fonction d'un seul champ de masse nulle (voir éq. (12.5.62)) :

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) = \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) \exp \left( t D - n \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma(x) \right), \quad (12.7.65)$$

Après intégration de l'éq. (12.3.32) on peut écrire :

$$\begin{aligned} t D - n \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma(x) &= t D - n \int_0^t dt' \gamma(\bar{g}(t')) \\ &= t (D - n \gamma(g^*)) - n \int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(g^*)], \end{aligned} \quad (12.7.66)$$

où on a introduit la valeur de la dimension anormale au point fixe  $g^*$ . Plusieurs cas sont possibles.

- $\gamma(g^*) = 0$  et  $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$  est fini quand  $t \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &\sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD} \\ &\sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) \lambda^D, \end{aligned} \quad (12.7.67)$$

et on retrouve la loi de dilatation naïve qui n'est donc pas modifiée par l'interaction, le facteur  $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$  ne contribuant pas à la dépendance en  $t$  ;

- $\gamma(g^*) = 0$  et  $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$  est non borné quand  $t \rightarrow \infty$ . Un cas typique est QED dans l'infrarouge ou QCD dans l'ultraviolet. Par exemple on a :

$$\gamma(\bar{g}) = \gamma_0 \bar{g}^2, \quad \beta(\bar{g}) = \beta_0 \bar{g}^3 \quad (12.7.68)$$

d'où

$$\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)] = \frac{\gamma_0}{\beta_0} \int_g^{\bar{g}} \frac{dg'}{g'} = \frac{\gamma_0}{\beta_0} \ln \frac{\bar{g}}{g}, \quad (12.7.69)$$

et l'on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &= \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD - n \frac{\gamma_0}{\beta_0} \ln \frac{\bar{g}}{g}} \\ &= \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD} \left( \frac{\bar{g}}{g} \right)^{-n \frac{\gamma_0}{\beta_0}} \end{aligned} \quad (12.7.70)$$

et on a une violation logarithmique de la loi d'échelle naïve puisque  $\bar{g}^2/g^2 = (1 - 2\beta_0 g^2 t)^{-1}$ . C'est le comportement que l'on avait obtenu pour la fonction de structure de l'inélastique profond (voir éqs. (9.1.17) et/ou (9.1.32)) dans le cadre du modèle des partons ;

- $\gamma(g^*) \neq 0$  : on a alors :

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) \sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD + n\gamma(g^*)}, \quad (12.7.71)$$

et dans ce cas, on a une violation en puissance de la loi naïve de dilation accompagnée ou non d'une violation logarithmique selon la valeur de l'intégrale  $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$ .

L'approche ci-dessus est utilisée pour étudier la violation d'invariance d'échelle des fonctions de structure dans la diffusion inélastique profonde : c'est une alternative à l'approche fondée sur le modèle des partons naïf présentée dans le chapitre précédent mais elle est beaucoup plus rigoureuse mais également plus lourde à mettre en œuvre. On part de la transformée de Fourier de la fonction  $W_{\mu\nu}(P, q)$  (produit de courants hadroniques) définie en sec. (6.2.2) que l'on développe en produits d'opérateurs sur le cône de lumière : les coefficients de ce développement sont les "coefficients de Wilson" susceptibles d'un traitement perturbatif via les équations du groupe de renormalisation tandis que les opérateurs contiennent la partie non-perturbative (équivalent des distributions partoniques à  $Q_0^2$ ). Il est intéressant de remarquer que si dans l'approche "modèle des partons naïf" la violation d'invariance d'échelle reflète la structure infra-rouge de la théorie, dans l'approche "groupe de renormalisation" cette même violation en est la conséquence du comportement ultraviolet. Comme ils disent à l'IN2P3, "les deux infinis" se rejoignent !

## Chapitre 13

# Modèle des partons amélioré et applications.

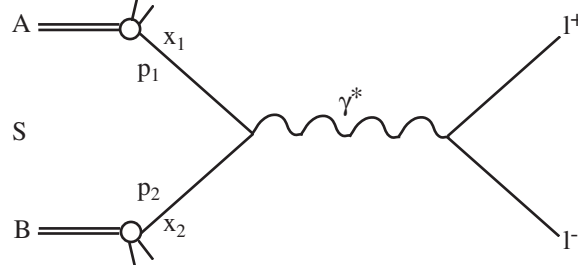
Le modèle des partons amélioré par les corrections QCD s'applique à d'autres processus que le DIS et le mécanisme de Drell-Yan, pourvu que ces processus mettent en jeu des échelles de masse ou des impulsions de transfert importantes. On revient d'abord sur le cas de la production de paires de leptons dans les collisions hadroniques par le mécanisme de Drell-Yan, qui a joué un rôle fondamental dans la découverte des bosons de jauge  $W$  et  $Z$  au CERN dans les années 80 et dans la découverte d'un boson qui a toutes les caractéristiques du boson de Higgs en 2012, toujours au CERN. On passera ensuite en revue la production de photons directs à grande impulsion transverse et la production de gerbes hadroniques ("jets") dans les collisions hadroniques. Ces différents processus sont utiles pour déterminer avec précision la distribution des quarks et des gluons dans les hadrons ainsi que la valeur de  $\Lambda$ , la constante fondamentale des interactions fortes. Nous ne considérerons pas ici la production de saveurs lourdes pour laquelle le modèle des partons s'applique aussi, ni les réactions de photoproduction qui jouent un rôle très important à HERA. Le fait que les innombrables observables mesurées dans toutes les réactions ci-dessus, et d'autres, sont en accord avec QCD perturbatif au NLO est une formidable preuve de la validité expérimentale de la théorie. Les physiciens espèrent cependant trouver, un jour, une déviation entre théorie et expérience ce qui serait une preuve de nouvelle physique!

On présentera les différents processus dans le cadre de l'approximation des logarithmes dominants ("leading order" LO) et au delà des logarithmes dominants ("next-to-leading order" NLO) et on discutera quelques applications phénoménologiques. Comme on le verra l'approximation des logarithmes dominants est, au mieux qualitative, et la discussion phénoménologique n'est en fait justifiée que si les expressions sont calculées au delà des logarithmes dominants.

### 13.1 Processus de Drell-Yan

Dans notre étude précédente du processus Drell-Yan nous avons construit la section efficace à l'ordre dominant et au delà de l'ordre dominant pour le processus  $hadron + hadron \rightarrow \gamma^* + X$  ce

qui n'est pas vraiment une observable physique puisque le photon virtuel ne peut être observé que par ses produits de désintégration. On considère ici la réaction  $hadron + hadron \rightarrow l^+ + l^- + X$  où la paire de leptons chargés est le produit de désintégration du photon virtuel et où on intègre sur la masse du système leptonique  $l^+ l^-$  dans un certain intervalle. Le modèle des partons s'applique quand la masse invariante  $Q$  de la paire de leptons produite est grande car, alors, le photon virtuel de genre temps a un haut pouvoir de résolution et il peut "voir" les constituants des hadrons  $A, B$ . D'après l'hypothèse du modèle des partons on écrit la section efficace de production sous la forme



$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \sum_q \int dx_1 dx_2 (F_{q/A}(x_1)F_{\bar{q}/B}(x_2) + F_{\bar{q}/A}(x_1)F_{q/B}(x_2)) \frac{d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}}{dQ^2} \quad (13.1.1)$$

où les  $F_{i/H}$  sont les fonctions de structure et où on doit sommer sur toutes les saveurs de quarks dans les hadrons  $A$  et  $B$ .

#### • Calcul de la section efficace partonique

Il faut calculer l'amplitude de diffusion  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow l(l_1) + \bar{l}(l_2)$  :

$$\mathcal{M}_0^{\gamma^*} = -ie^2 e_q \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{\hat{s}} \bar{u}(l_1) \gamma^\mu v(l_2) \quad (13.1.2)$$

où la charge du quark  $q$  est mesurée par rapport à celle du proton. Son carré sommé et moyenné sur hélicités et couleurs est,

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}_0^{\gamma^*}|^2 = \frac{2}{N} e^4 e_q^2 \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}, \quad (13.1.3)$$

avec  $\hat{s} = 2p_1 \cdot p_2$ ,  $\hat{t} = -2p_1 \cdot l_1$ ,  $\hat{u} = -2p_1 \cdot l_2$ . Puisque la section efficace  $d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}/dQ^2$  est un invariant de Lorentz on peut la calculer dans n'importe quel repère. On choisit celui du centre de masse du système  $q \bar{q}$  où :

$$p_1 = (\sqrt{\hat{s}}/2, 0_\perp, \sqrt{\hat{s}}/2), \quad p_2 = (\sqrt{\hat{s}}/2, 0_\perp, -\sqrt{\hat{s}}/2), \quad l_1 = (\sqrt{\hat{s}}/2, \sin \theta \sqrt{\hat{s}}/2, 0, -\cos \theta \sqrt{\hat{s}}/2). \quad (13.1.4)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}}{dQ^2} &= \frac{1}{2\hat{s}} \int \frac{d^3 l_1}{2l_1} \frac{d^3 l_2}{2l_2} (2\pi)^{-2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - l_1 - l_2) \overline{\Sigma} |\mathcal{M}_0|^2 \delta(\hat{s} - Q^2) \\ &= \frac{\pi \alpha^2 e_q^2}{N} \frac{1}{2\hat{s}} \int d \cos \theta (1 + \cos^2 \theta) \delta(\hat{s} - Q^2) \\ &= \frac{4\pi \alpha^2}{3Q^2 \hat{s}} \frac{e_q^2}{N} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{\hat{s}}\right). \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

(On rappelle que  $\alpha = e^2/4\pi$ .)

• **Section efficace hadronique dans l'approximation des logarithme dominants**

Dans le repère du centre de masse  $AB$  les impulsions des partons incidents sont

$$\begin{aligned} p_1 &= (x_1\sqrt{s}/2, 0_\perp, x_1\sqrt{s}/2) \\ p_2 &= (x_2\sqrt{s}/2, 0_\perp, -x_2\sqrt{s}/2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{s} = x_1x_2 s. \quad (13.1.6)$$

La section efficace hadronique éq. (13.1.1) s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2s} \frac{1}{N} \sum_q \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1x_2}\right) e_q^2 [F_{q/A}(x_1)F_{\bar{q}/B}(x_2) + F_{\bar{q}/A}(x_1)F_{q/B}(x_2)] \quad (13.1.7)$$

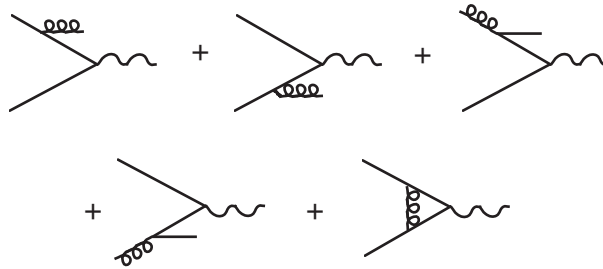
où on a introduit la variable sans dimension  $\tau$  (dénotée  $x$  dans le chapitre sur la violation d'invariance d'échelle) :

$$\tau = \frac{Q^2}{s}.$$

On note la similarité de forme entre cette équation et celle ultra simplifiée de l'éq. (9.3.133) : la seule différence est le préfacteur devant l'intégrale qui tient maintenant compte de la désintégration du photon virtuel en leptons chargés. Il est instructif d'étudier la variation en  $\tau$  de la section efficace qui est simplement donnée par :

$$s \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{4\pi\alpha^2}{3\tau} \frac{1}{N} \sum_q \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1x_2}\right) e_q^2 [F_{q/A}(x_1)F_{\bar{q}/B}(x_2) + F_{\bar{q}/A}(x_1)F_{q/B}(x_2)] \quad (13.1.8)$$

Cette expression, à  $\tau$  fixé est indépendante de l'énergie  $\sqrt{s}$ . Elle présente donc la propriété d'invariance d'échelle, ce qui expérimentalement n'est pas vérifié. Si on prend en compte les corrections QCD, c'est-à-dire si on inclut les diagrammes de type



dans l'approximation des logarithmes dominants, les seuls changements sont, on l'a vu,  $F_{i/H}(x) \rightarrow F_{i/H}(x, Q^2)$ , fonctions que l'on peut en principe mesurer dans les réactions de l'inélastique profond, et on a

$$s \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{4\pi\alpha^2}{3\tau} \frac{1}{N} \sum_q \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1x_2}\right) e_q^2 [F_{q/A}(x_1, Q^2)F_{\bar{q}/B}(x_2, Q^2) + F_{\bar{q}/A}(x_1, Q^2)F_{q/B}(x_2, Q^2)] \quad (13.1.9)$$

On peut alors prédire  $s d\sigma/d\tau$  dont la dépendance en  $Q^2$  est la conséquence de la violation d'invariance d'échelle des fonctions de structure. Si on étudie la variation de  $s d\sigma/d\tau$  à  $\tau$  fixé quand  $s$  augmente, la seule chose qui change dans l'équation ci-dessus est la valeur de  $Q$  car  $Q^2 = x_1 x_2 s$  augmente : on prédit alors que, pour  $\tau$  suffisamment grand (ou de façon équivalente des  $x_i$  suffisamment grands comme dans le cas des expériences sur cibles fixes),  $s d\sigma/d\tau$  décroît à cause de la décroissance des  $F_{q/H}(x, Q^2)$  et ceci est en accord avec l'expérience.

On peut également étudier une section efficace "moins intégrée" et fixer, par exemple, la rapidité de la paire de leptons définie par ( $q = p_1 + p_2$ ),

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{q^0 + q^z}{q^0 - q^z} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \quad (13.1.10)$$

Revenant à l'équation (13.1.7) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2 dy} &= \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2 s} \frac{1}{N} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1 x_2}\right) \delta\left(\frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} - y\right) \sum_q e_q^2 [\dots] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2 s} \frac{1}{N} \int \frac{dx_1}{x_1} \delta\left(\frac{1}{2} \ln \frac{x_1^2}{\tau} - y\right) \sum_q e_q^2 [\dots]_{x_2 = \frac{\tau}{x_1}}, \end{aligned}$$

d'où (puisque  $x_1 = \sqrt{\tau}e^y$ ,  $x_2 = \sqrt{\tau}e^{-y}$ )

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2 s} \frac{1}{N} \sum_q e_q^2 [F_{q/A}(\sqrt{\tau}e^y, Q^2)F_{\bar{q}/B}(\sqrt{\tau}e^{-y}, Q^2) + F_{\bar{q}/A}(\sqrt{\tau}e^y, Q^2)F_{q/B}(\sqrt{\tau}e^{-y}, Q^2)] \quad (13.1.11)$$

qui n'implique aucune intégrale dans le membre de droite. En principe  $F_{q/p}$ ,  $F_{\bar{q}/p}$  sont mesurables en DIS. En pratique  $F_{\bar{q}/p}$  n'est pas obtenu avec précision dans DIS puisque l'on mesure  $F_{q/p} + F_{\bar{q}/p}$  avec  $F_{q/p}$  grand et  $F_{\bar{q}/p}$  petit (pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes). Dans les collisions *proton-proton* la section efficace Drell-Yan peut être et est utilisée pour contraindre la distribution des antiquarks et en étudiant un domaine  $\tau, y$  suffisamment grand on peut en principe mesurer  $F_{\bar{q}/p}(x, Q^2)$  point par point. Au contraire dans  $p\bar{p} \rightarrow \gamma^* \rightarrow l^+l^-$ , comme au Tevatron, la section efficace peut être prédite avec précision car elle ne dépend essentiellement que de la distribution des quarks dans le proton puisque

$$F_{\bar{q}/\bar{p}} \sim F_{q/p} \gg F_{\bar{q}/p} \sim F_{q/\bar{p}}.$$

Aux énergies de Fermilab et du LHC on produit par ce mécanisme les bosons de jauge chargés  $W^+$  (resp.  $W^-$ ) par annihilation d'une paire quark-antiquark  $u\bar{d}$ ,  $c\bar{s}$  (resp.  $d\bar{u}$ ,  $s\bar{c}$ ) ou le boson neutre  $Z^0$  par annihilation  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$  ou  $c\bar{c}$ . Pour la production d'une paire de leptons chargés de grande masse, la production peut se faire par l'intermédiaire d'un photon virtuel ou d'un  $Z$  et dans ce cas l'amplitude partonique doit inclure la somme cohérente des deux amplitudes. L'amplitude de diffusion pour la production du boson  $Z$  s'écrit<sup>1</sup> :

$$\mathcal{M}_0^Z = ie^2 \bar{v}(p_2)\gamma_\mu(v_q - a_q\gamma_5)u(p_1) \frac{1}{\hat{s} - m_Z^2 + im_Z\Gamma_Z} \bar{u}(l_1)\gamma^\mu(v_l - a_l\gamma_5)v(l_2), \quad (13.1.12)$$

1. Voir la section (11.1) pour une discussion sur la forme du propagateur.

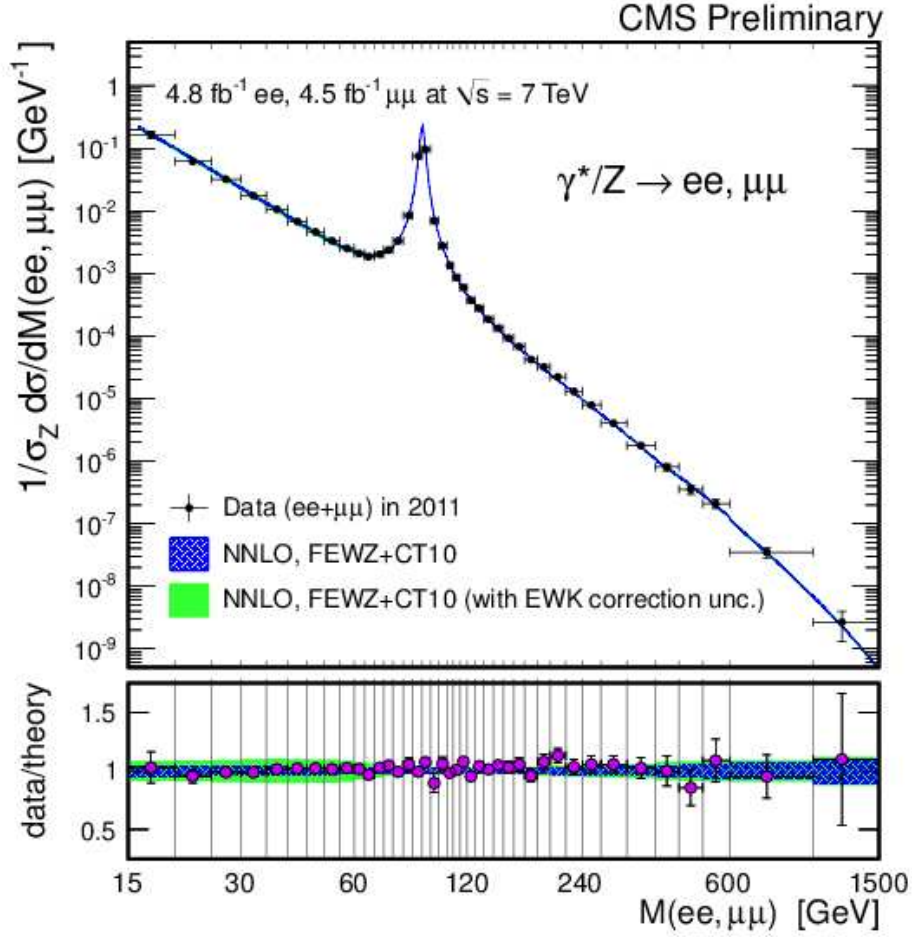


FIGURE 13.1 – Section efficace Drell-Yan dans les collisions  $pp$  à 7 TeV, au LHC, normalisée à la section efficace de production du  $Z$ , en fonction de la masse de la paire de leptons (Collaboration CMS, *JHEP* **10** (2011), 007, [arXiv:1108.0566]). La prédiction théorique est calculée au NNLO.

et calculant le module au carré de  $\mathcal{M}_0^{\gamma^*} + \mathcal{M}_0^Z$ , on trouve pour la section partonique (on suppose les quarks de masse nulle) :

$$\frac{d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2\hat{s}} \frac{1}{N} \left[ e_q^2 + (a_l^2 + a_l'^2)(v_q^2 + a_q^2) \frac{Q^4}{(Q^2 - m_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 m_Z^2} - 2e_q v_l v_q \frac{Q^2(Q^2 - m_Z^2)}{(Q^2 - m_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 m_Z^2} \right] \delta\left(1 - \frac{Q^2}{\hat{s}}\right), \quad (13.1.13)$$

où la deuxième ligne représente le terme d'interférence  $Z$ -photon virtuel qui s'annule, comme il se doit au pôle du  $Z$ . Les paramètres  $a_q, v_q, a_l, v_l$  sont les couplages axiaux et vecteurs du boson  $Z$  au quark et au lepton, de l'ordre de grandeur de la charge  $e$ . On obtiendra la section efficace hadronique en substituant à  $e_q^2$ , dans l'éq. (13.1.7), l'expression entre crochets ci-dessus. Le spectre en  $Q^2$  du dilepton a une forme caractéristique : à petites valeurs,  $Q^2 \ll m_Z^2$  ( $m_Z \approx 91$  GeV), la production est dominée par le photon virtuel, le premier terme de l'équation (13.1.13) ; au contraire pour  $Q^2 \sim m_Z^2$ , c'est le deuxième terme qui domine à cause du facteur d'accroissement  $m_Z^2/\Gamma_Z^2 \approx (91/2, 5)^2 \approx 1300$ ,

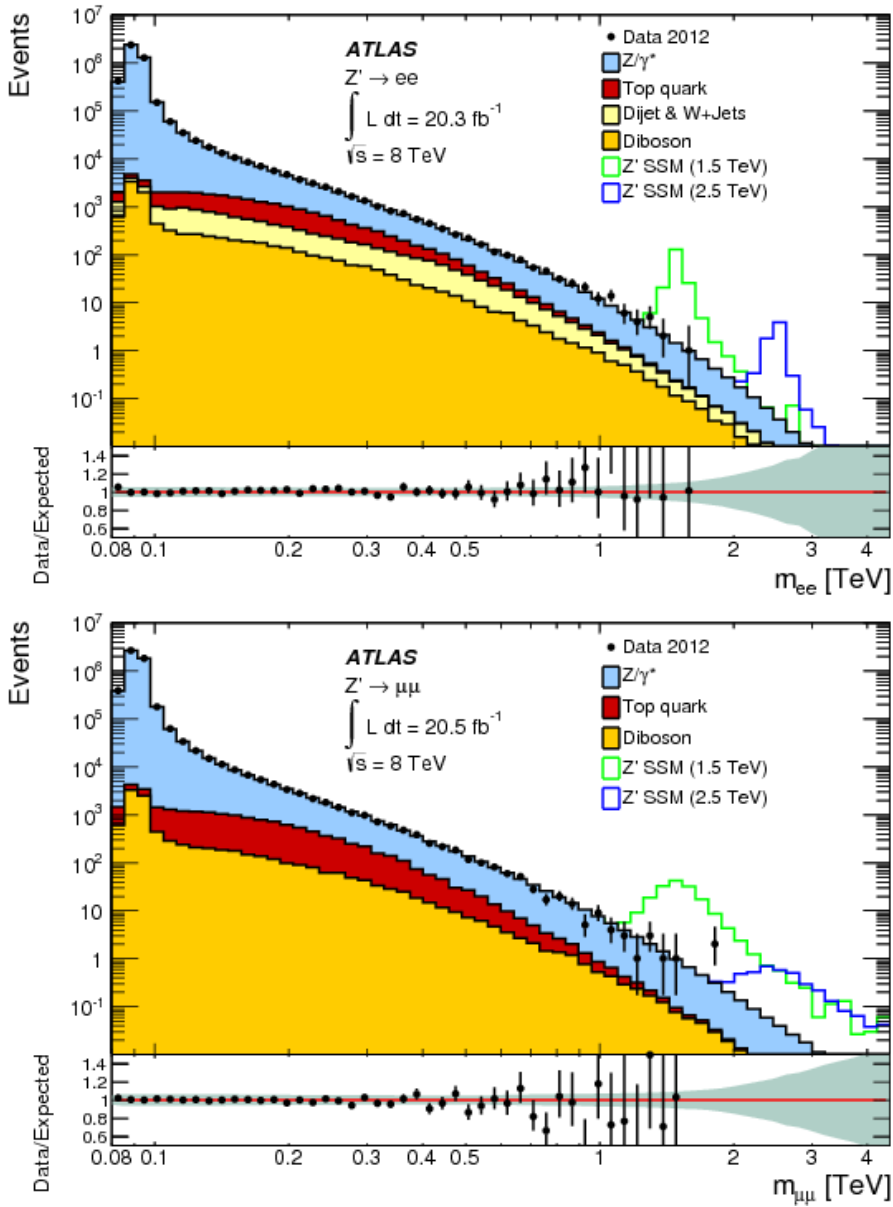


FIGURE 13.2 – Spectre en masse invariante dielectron (haut) et dimuon (bas) dans les collisions proton-proton à 8 TeV (collaboration ATLAS, arXiv :1405.4123) comparé à la somme de tous les fonds standards ; on montre également l’empreinte d’un hypothétique boson  $Z'$  de 1,5 TeV et 2,5 TeV ; pour chaque figure le diagramme du bas montre le rapport données sur fond attendu.

d’où le pic observé dans la figure 13.1 ; à grande valeur de  $Q^2$  on retrouve la décroissance en  $Q^2$  de la section efficace partonique.

- **Au delà des logarithme dominants**

Pour obtenir la distribution  $s d\sigma/dQ^2$  à ce niveau d’approximation il faudra, dans l’éq. (13.1.7),



faire la substitution

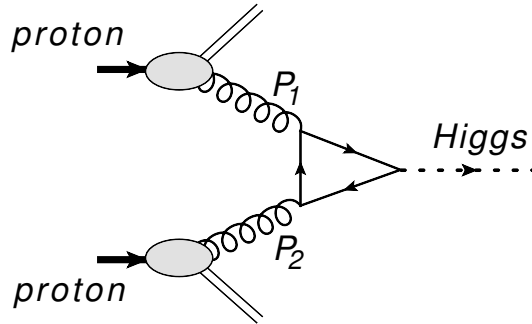
$$\delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1 x_2}\right) \rightarrow \delta\left(1 - \frac{\tau}{x_1 x_2}\right) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} f_{q\bar{q}}\left(\frac{\tau}{x_1 x_2}\right) \quad (13.1.14)$$

et ajouter les termes proportionnels à la distribution du gluon comme indiqué dans l'éq. (9.3.159). Les coefficients sont donnés en (9.3.154) et (9.3.155) si les distributions partoniques sont définies dans le schéma  $\overline{MS}$  avec l'échelle de factorisation  $Q^2$ . On voit que la section de production d'une paire de Drell-Yan acquiert une faible sensibilité à la distribution du gluon dans le hadron puisqu'elle est d'ordre  $\alpha_s$ . La section efficace Drell-Yan mesurée par la collaboration CMS est montrée en fig. 13.1 : elle couvre un domaine cinématique considérable,  $15 < \sqrt{Q^2} [GeV] < 1500$ , pour une variation de la section efficace de huit ordres de grandeur : l'accord avec la théorie au "next-to-next-to-leading logarithm" (c'est à dire incluant les corrections d'ordre  $\alpha_s^2$ ) est remarquable. Le pic du  $Z$  à  $m_Z = 91,1876$  GeV,  $\Gamma_Z = 2,4952$  GeV, reflète la structure du terme de Born en  $1/((Q^2 - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2)^2$  associé à la production du boson de jauge dans la voie  $s$ .

### • Applications

Une fois la validité du Modèle Standard établie pour cette distribution, le spectre de dileptons chargés peut être utilisé pour la recherche d'un nouveau boson de jauge comme illustré sur la fig. 13.2. La partie en bleu est la contribution du processus Drell-Yan proprement dit, qui domine nettement les autres mécanismes produisant des paires de leptons comme par exemple la production d'une paire de bosons  $W^+W^-$ ,  $W^\pm Z$ ,  $ZZ$  ou la production et désintégration leptonique ou semi leptonique d'une paire de quarks top. Les extensions du Modèle Standard sont fondées sur des groupe de jauge plus étendus auxquels sont associés de nouveaux bosons de jauge : ainsi une extension simple dite "supersymétrique minimale" (MSSM) contient un boson neutre  $Z'$  de masse très élevée qui, dans le spectre dilepton, donnerait les pics de distributions apparents à droite sur les figures. Visiblement un boson  $Z'$  de masse de 1,5 TeV est exclu par les données actuelles (2014). Une analyse statistique détaillée montre que, dans le cadre du modèle MSSM, on peut exclure avec un degré de confiance de 95% un boson neutre de masse inférieures à 2,7 TeV.

D'autre part, c'est par un mécanisme de type Drell-Yan mais impliquant l'annihilation de deux gluons,  $gluon + gluon \rightarrow Higgs \rightarrow \gamma + \gamma$ , que l'on a mis en évidence en 2012 au LHC le fameux boson de Higgs, dont il ne fallait pas alors dire qu'il était LE boson de Higgs tant qu'on aurait pas montré expérimentalement que ses divers rapports d'embranchement sont ceux du Modèle Standard. Le mécanisme de production, au niveau de Born, est schématisé par le diagramme suivant



où les gluons sont couplés au boson de Higgs via une boucle de quarks top virtuels. Le boson est détecté par ses produits de désintégration : bien que la voie  $Higgs \rightarrow b + b$  soit dominante le boson

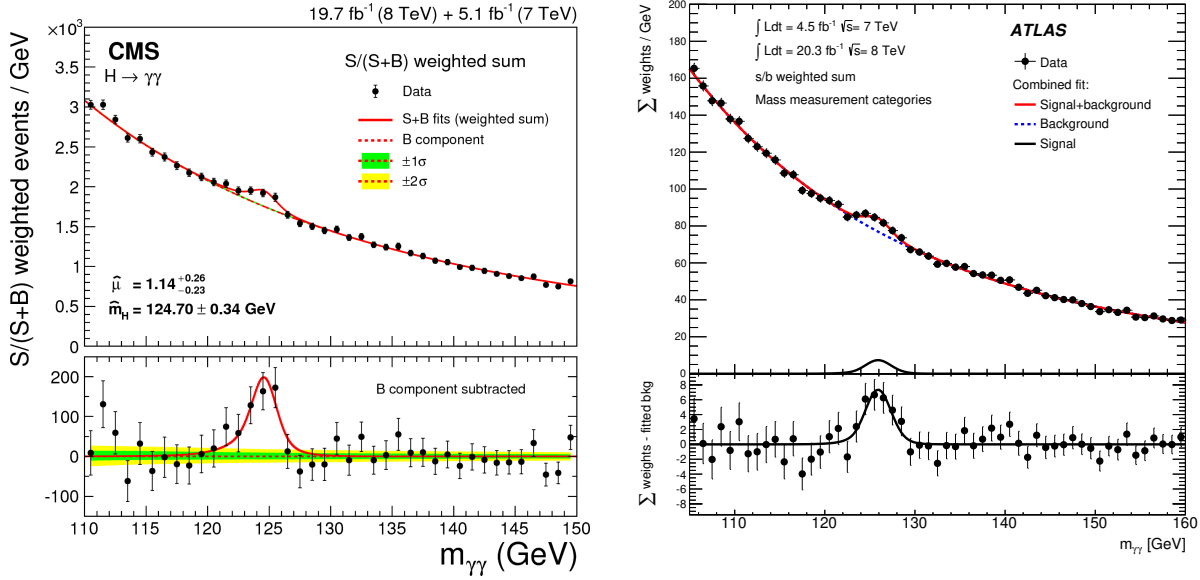


FIGURE 13.3 – Section efficace de production du boson de Higgs dans les collisions au LHC, sur un fond de paires photon – photon (Collaboration CMS arXiv :1407.0558, Collaboration ATLAS, arXiv :1406.3827).

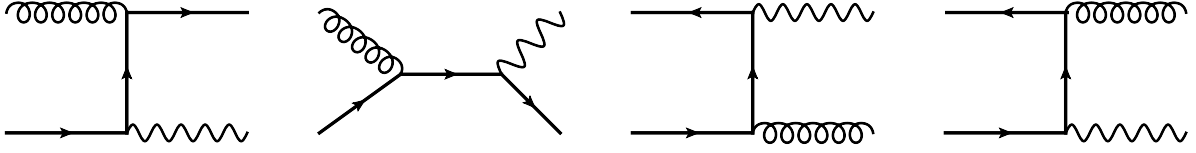
a été mis en évidence dans la voie  $H \rightarrow \gamma + \gamma$  pour laquelle le fonds est bien moindre tout en restant considérable comme on le voit sur les figures 13.3, produites par les collaborations CMS et ATLAS : on mesure la difficulté de l'analyse pour extraire le signal (courbe rouge) du fond. La grande largeur du "pic" du Higgs ne reflète pas la largeur de la résonance mais l'incertitude expérimentale sur l'énergie et la position des photons. D'autres observables, moins inclusives, peuvent être mesurées, par exemple Higgs + jets qui permettent de tester le mécanisme de production plus finement. Le boson de Higgs a également été observé dans d'autres voies de désintégration comme Higgs  $\rightarrow Z + Z^* \rightarrow 4 leptons$  et de production. Une analyse combinée ATLAS + CMS<sup>2</sup> des voies  $H \rightarrow \gamma\gamma$  et  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4 leptons$  permet d'estimer la masse du Higgs avec précision :

$$m_H = 125,09 \pm 0,24(\text{stat.}) \pm 0,11(\text{syst.}). \quad (13.1.15)$$

## 13.2 Production de photons directs à grands transferts

Le processus considéré ici est la réaction  $AB \rightarrow \gamma X$ , où  $X$  représente les hadrons produits non observés. Au niveau partonique, il faut calculer les diffusions  $qg \rightarrow \gamma q$ ,  $\bar{q}g \rightarrow \gamma \bar{q}$  (diffusion de type Compton) et  $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$  (annihilation) qui ont la représentation diagrammatique suivante,

2. ATLAS et CMS collaborations, arXiv :1503.07589.



On considère le cas où le photon est produit à grande impulsion transverse.

### • Cinématique

Si on dénote  $P_1$  et  $P_2$  l'impulsion des hadrons incidents tels que  $2P_1.P_2 = s$ ,  $p_1$  et  $p_2$  celle des partons correspondants et  $k$  celle du photon dans l'état final on a dans le repère du collisionneur :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(x_1, 0, 0, x_1) \\ p_2 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(x_2, 0, 0, -x_2) \\ k &= (k_T \cosh y, \vec{k}_T, k_T \sinh y) \end{aligned}$$

avec  $y_\gamma = y = \frac{1}{2} \ln \frac{k^0 + k^z}{k^0 - k^z}$ , la rapidité du photon et  $k_T$  son impulsion transverse. Le choix impulsion transverse et rapidité pour contrôler la cinématique du photon est naturel, la variable  $k_T$  jouant le rôle de l'échelle dure de la réaction. Les variables de Mandelstam au niveau partonique sont :

$$\begin{aligned} \hat{s} &= x_1 x_2 s \geq 4k_T^2 \\ \hat{u} &= (p_1 - p)^2 = (p_2 - k)^2 = -2p_2.k = -x_2 \sqrt{s} k_T e^y \\ \hat{t} &= (p_2 - p)^2 = (p_1 - k)^2 = -2p_1.k = -x_1 \sqrt{s} k_T e^{-y} \end{aligned}$$

tandis que les variables de Mandelstam hadroniques sont :

$$\begin{aligned} s &= 2P_1.P_2 \\ u &= -2P_2.k = -\sqrt{s} k_T e^y \\ t &= -2P_1.k = -\sqrt{s} k_T e^{-y} \end{aligned}$$

Pour  $\sqrt{s}$ ,  $k_T$  grands,  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$  et  $\hat{u}$  sont grands et le quark échangé a une grande virtualité  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$  ou  $\hat{u}$  : il joue le rôle du photon virtuel à grand  $Q^2$  dans l'inélastique profond. Le quark a un haut pouvoir de résolution et on se trouve donc dans le domaine de validité du modèle des partons.

Digression : Pour une particule de quadri-impulsion  $k$  on distingue la rapidité :

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{k^0 + k^z}{k^0 - k^z} \quad (13.2.16)$$

de la pseudo-rapidité :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{|\vec{k}| + k^z}{|\vec{k}| - k^z} = -\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right). \quad (13.2.17)$$

Pour une particule de masse nulle les deux se confondent. Du point expérimental l'avantage de la pseudorapidité pour une particule massive tient au fait qu'elle ne fait intervenir qu'une mesure de

l'angle polaire  $\theta$  et non la mesure des coordonnées de l'impulsion moins précises.

• **Le modèle des partons amélioré**

L'élément d'intégration invariant s'écrit :

$$\frac{dk^3}{k^0} = dk_T^2 dy = 2\pi k_T dk_T dy, \quad (13.2.18)$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que la réaction a une symétrie azimutale par rapport à l'axe de la collision. La section hadronique inclusive est donnée par

$$\frac{k^0 d\sigma}{dk^3} = \frac{d\sigma}{dk_T^2 dy} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_{i/A}(x_1, k_T^2) F_{j/B}(x_2, k_T^2) \frac{d\hat{\sigma}^{ij}}{dk_T^2 dy}, \quad (13.2.19)$$

où l'on a inclus les corrections QCD à l'approximation des logarithmes dominants et on a choisi  $k_T$  comme échelle de factorisation dans les fonctions de structure. Pour construire la section partonique différentielle, on part de

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}^{ij}}{dk_T^2 dy} &= \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{2p^0} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p - k) \overline{\Sigma} | \mathcal{M} |_{ij}^2 \\ &= \frac{1}{\hat{s}} \delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) \frac{1}{(4\pi)^2} \overline{\Sigma} | \mathcal{M} |_{ij}^2 \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

où

$$\delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) = \frac{1}{s} \delta(x_1 x_2 - x_1 x_T e^{-y} - x_2 x_T e^y)$$

avec  $x_T = k_T/\sqrt{s}$ . Si on substitue l'éq. (13.2.20) dans la section hadronique éq. (13.2.19), on trouve :

$$\frac{d\sigma}{dk_T^2 dy} = \frac{1}{s(-t)} \sum_{i,j} \int_{x_1^{\min}}^1 \frac{dx_1}{x_1^2} F_{i/A}(x_1, k_T^2) F_{j/B}(x_2, k_T^2) \frac{1}{(4\pi)^2} \overline{\Sigma} | \mathcal{M} |_{ij}^2$$

avec la contrainte :

$$x_2 = \frac{x_1 x_T e^{-y}}{x_1 - x_T e^y}.$$

Les conditions aux limites sont :

1.  $x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1^{\min} = x_T e^y / (1 - x_T e^{-y})$  qui ne dépend que des variables externes ;
2.  $x_1^{\min} \leq 1 \Rightarrow y_{\text{ext}} = \ln \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_T} \pm \sqrt{\frac{1}{x_T^2} - 4} \right)$ , les valeurs extrêmes de la rapidité.

• **Dynamique**

Les éléments de matrice invariants correspondant aux diagrammes ci-dessus sont donnés par (voir

éqs. (7.6.164) et (7.6.165) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^2} \bar{\Sigma} | \mathcal{M} |_{q\bar{q}}^2 &= e_q^2 \alpha_s(k_T^2) 2 \frac{c_F}{N} \left( \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) \\ &= e_q^2 \alpha_s(k_T^2) \frac{8}{9} \left( \frac{x_1 e^{-y} - x_T}{x_T} + \frac{x_T}{x_1 e^{-y} - x_T} \right) \end{aligned} \quad (13.2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^2} \bar{\Sigma} | \mathcal{M} |_{G(x_1)q(x_2)}^2 &= e_q^2 \alpha_s(k_T^2) \frac{1}{N} \left( \frac{\hat{s}}{-\hat{u}} + \frac{-\hat{u}}{\hat{s}} \right) \\ &= e_q^2 \alpha_s(k_T^2) \frac{1}{3} \left( \frac{x_1 e^y}{x_T} + \frac{x_T}{x_1 e^y} \right). \end{aligned} \quad (13.2.22)$$

On a choisi pour l'échelle de renormalisation la même que celle de factorisation, soit  $k_T$ .

### • Phénoménologie

La section efficace différentielle s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dk_T^2 dy} &= \alpha_s(k_T^2) \frac{1}{s^2} \frac{e^{-y}}{x_T} \sum_q e_q^2 \int \frac{dx_1}{x_1^2} \left\{ F_{q/A}(x_1, k_T^2) F_{\bar{q}/B}(x_2, k_T^2) \frac{8}{9} \left( \frac{x_1 e^{-y} - x_T}{x_T} + \frac{x_T}{x_1 e^{-y} - x_T} \right) \right. \\ &\quad \left. + F_{G/A}(x_1, k_T^2) (F_{q/B}(x_2, k_T^2) + F_{\bar{q}/B}(x_2, k_T^2)) \frac{1}{3} \left( \frac{x_1 e^y}{x_T} + \frac{x_T}{x_1 e^y} \right) \right. \\ &\quad \left. + [A, x_1] \leftrightarrow [B, x_2] \right\}. \end{aligned} \quad (13.2.23)$$

Elle est proportionnelle à  $\alpha_s$  et la comparaison avec les données expérimentales permet de contraindre fortement le couplage QCD. Ceci est à contraster avec l'inélastique profond où, dans l'expression de  $F_2(x, Q^2)$ , le couplage  $\alpha_s$  n'entre qu'au niveau des corrections NLO, ou dans l'évolution de la violation d'invariance d'échelle :

$$\frac{dF_2}{d \ln Q^2}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} F_2(z, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right), \quad (13.2.24)$$

Pour faciliter la discussion phénoménologique on introduit une notation simplifiée et on écrit symboliquement la section efficace hadronique de production de photons :

$$d\sigma \sim \alpha \alpha_s (q \otimes \bar{q} d\sigma^{q\bar{q}} + G \otimes (q + \bar{q}) d\sigma^{Gq}),$$

où  $q$ ,  $\bar{q}$  et  $G$  dénotent respectivement la distribution des quarks, antiquarks et gluons dans le proton. On a vu dans le chapitre sur les violations d'invariance d'échelle dans le proton que la distribution de quarks se décompose en quarks de valence et quarks matelots (quarks de la mer),  $q = q_v + q_s$ , et que  $\bar{q} = q_s = \bar{q}_s \ll q_v$  (voir fig. 9.3) au moins pour des valeurs de  $x > 0,05$  : ce domaine couvre toutes les données des expériences sur la production de photon jusqu'à l'énergie du Tevatron puisque, typiquement  $x_i \geq x_T \geq 0,1$ . Dans les collisions proton-proton, le processus de type Compton  $G + q \rightarrow \gamma + q$  représente environ 90% de la contribution à la section différentielle. En effet le processus d'annihilation  $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + G$  est considérablement affaibli du fait de la suppression de la distribution d'antiquarks matelots dans le proton. On a alors avec une bonne approximation

$$d\sigma^{pp} \sim \alpha \alpha_s G \otimes q d\sigma^{Gq},$$

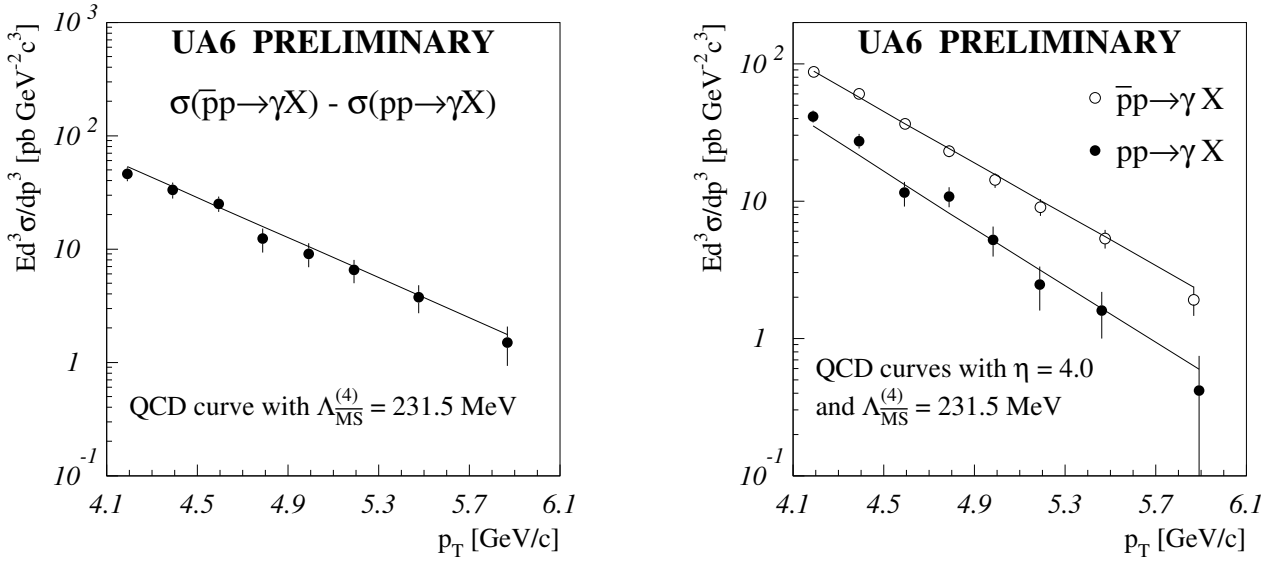


FIGURE 13.4 – A gauche : différence des spectres inclusifs de photon dans les collisions  $\bar{p}p$  et  $pp$  à 24 GeV et détermination de  $\alpha_s$  ; à droite : spectres inclusifs de photon dans les collisions  $\bar{p}p$  et  $pp$  à 24 GeV et détermination de la distribution du gluon (Collaboration UA6). La valeur de  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)}$  citée dans ces figures préliminaires est compatible avec celle de l'analyse finale mentionnée dans le texte où  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} = 210 \pm 22$  (stat.)  $\pm 44$  (syst.) MeV.

qui permet de conclure que les collisions proton-proton sont très sensibles à la distribution du gluon contrairement au DIS où le gluon apparaît au NLO. Dans le cas de la diffusion  $\bar{p}p$ , au contraire, les deux mécanismes ont un poids similaire. Il est alors intéressant, comme l'a fait la collaboration UA6 au CERN de mesurer le spectre de photon inclusif dans les collisions antiproton-proton et proton-proton et de considérer la différence

$$d\sigma^{\bar{p}p-pp} \sim \alpha\alpha_s q_v \otimes q_v d\sigma^{q\bar{q}}$$

qui fait intervenir seulement la convolution des quarks de valence dans le proton et antiquarks de valence dans l'antiproton<sup>3</sup>. Dans le domaine couvert par l'expérience,  $\sqrt{s} = 24 \text{ GeV}$ ,  $x_i > 0,35$ , la distribution des quarks de valence est bien mesurée dans la diffusion DIS et  $d\sigma^{\bar{p}p-pp}$  permet alors une mesure indépendante de  $\alpha_s$  comme l'a montré UA6 en 1999, pour trouver une valeur de  $\alpha_s(m_Z) = 0,112 \pm 0,0016$  (stat.)  $\pm 0,0033$  (syst.) tout à fait en accord avec la détermination actuelle citée en éq. (8.2.67). Cela est illustré par la fig. 13.4 (à gauche). Le couplage  $\alpha_s$  ainsi déterminé, la réaction  $pp \rightarrow \gamma X$  paraît donc idéale pour ajuster la distribution du gluon comme cela est illustré par la figure de droite.

En fait, il est intéressant de discuter un peu plus précisément la corrélation entre la détermination de  $\alpha_s(Q^2)$  et celle de la distribution du gluon  $xG(x, Q^2)$  dans le proton. Dans DIS la fonction  $F_2(x, Q^2)$  est mesurée très précisément mais le gluon y apparaît comme un terme correctif (voir éq. (9.1.25)) et il n'est donc pas très contraint surtout aux grandes valeurs de  $x$ . Quant à  $\alpha_s$  il est

3. UA6 Collaboration, M. Werlen *et al.*, Phys.Lett. **B452** (1999), 201 ; voir aussi Phys.Lett. **B436** (1998), 222.

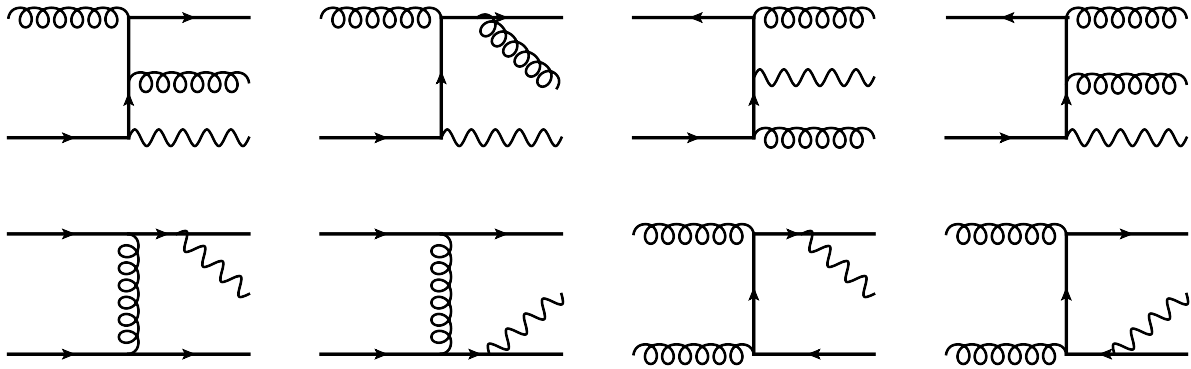


FIGURE 13.5 – Exemples de diagrammes réels à inclure pour le calcul de la section efficace de production d'un photon.

proportionnel aux violations d'invariance d'échelle et grâce au grand domaine en  $Q^2$  disponible il est relativement bien déterminé. Pour la production de photons directs dans les collisions  $pp$ , la section efficace est proportionnelle à  $\alpha_s(Q^2) \otimes G(Q^2)$ . Si on choisit comme paramétrage initial<sup>4</sup>  $xG(x, Q_0^2) \approx (1-x)^{c_g}$  on a évidemment une corrélation forte entre le paramètre  $c_g$  et  $\Lambda_{\overline{MS}}$  : si  $c_g$  augmente (gluon plus "mou") alors la section efficace décroît et pour compenser  $\alpha_s$  doit augmenter donc  $\Lambda_{\overline{MS}}$  aussi. On voit donc qu'une détermination précise de  $\Lambda_{\overline{MS}}$  sera très utile pour contraindre le gluon dans d'autres observables telle que la production de photon direct ou de jets. De plus, combinant des expériences à plusieurs énergies permettra de sonder le gluon pour différents domaines de  $x$ . Cette discussion illustre comment, en combinant différentes données on peut déconvoluer le rôle des paramètres de la théorie et obtenir avec une relativement bonne précision un ensemble de distributions partoniques au NLO<sup>5</sup>.

#### • Production de photons dans l'approximation au delà des logarithmes dominants

Bien que présentée dans le formalisme LO, l'étude phénoménologique ci-dessus a été menée au NLO où apparaît une complication supplémentaire peu importante aux expériences sur cibles fixes mais qu'il faut traiter correctement aux énergies des collisionneurs Fermilab et LHC. La figure 13.5 montrent quelques diagrammes "réels" d'ordre supérieur : ceux de la première ligne sont obtenus en greffant un gluon supplémentaire sur les diagrammes de Born tandis que ceux de la deuxième ligne correspondent à des états initiaux nouveaux tels que  $qq$  et  $GG$ . Pour certains de ces diagrammes le photon est rayonné par un quark produit à grande impulsion transverse. Ces derniers conduisent, dans la section efficace, à une singularité logarithmique, quand le quark devient colinéaire au photon, lors de l'intégration sur l'espace de phase des partons finals à une impulsion du photon fixée. Ceci a été discuté en détail en sec. 10.3.2 où on a calculé le taux  $d\hat{\Gamma}_1^G/dz$  de production d'un gluon colinéaire à un quark. Ici cette singularité est d'origine purement électromagnétique et perturbative, mais elle joue le rôle de la composante non-perturbative de l'émission d'un hadron par un parton. Elle est absorbée dans la définition d'une fonction de fragmentation d'un quark en

4. La normalisation de la distribution du gluon est fixée par une règle de somme : la somme des impulsions des partons doit être égale à celle du proton.

5. P. Aurenche, R. Baier, M. Fontannaz, J.F. Owens, M. Werlen Phys.Rev. **D39** (1989), 3275.

un photon d'une façon reminiscente du mécanisme de définition de la fonction de fragmentation d'un parton en un hadron (voir sec. 10.3). On définit donc la fonction :

$$D^{\gamma/q}(z, k_T^2) = \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 d_{\gamma/q}(z) \ln \frac{k_T^2}{m_0^2}, \quad (13.2.25)$$

où  $m_0$  est le régulateur de la divergence de masse qui est choisi de l'ordre d'une masse hadronique typique et qui sera déterminé par comparaison avec l'expérience. La fonction  $d_{\gamma/q}(z)$  est identique, à un facteur de couleur près, à  $d_{G/q}(z)$  définie en éq. (9.1.46) :

$$d_{\gamma/q}(z) = \frac{1 + (1 - z)^2}{z}, \quad \text{avec } z = \frac{k_T}{k_{Tq}} \quad (13.2.26)$$

On représente la production de photon par fragmentation d'un quark par les diagrammes tels que ceux de la fig. 13.6 où la boule grisée symbolise la fragmentation colinéaire  $q \rightarrow q + \gamma$ . Le photon n'est pas couplé directement aux processus durs qui n'impliquent donc que des quarks et des gluons. Techniquement, bien qu'ayant son origine dans les corrections NLO, les diagrammes de cette figure

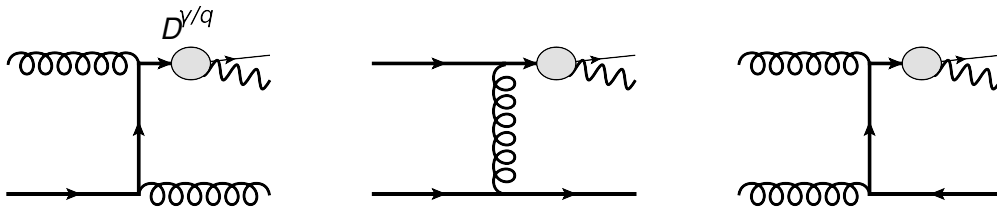


FIGURE 13.6 – Exemples de diagrammes de Born pour la production d'un photon par fragmentation d'un parton.

apportent à la section efficace une contribution du même ordre de grandeur que les termes LO de l'éq. (13.2.23)). En effet elle est proportionnelle à :

$$\alpha_s(k_T^2)^2 \alpha \ln(k_T^2) + \text{termes non-logarithmiques} \sim \alpha_s(k_T^2) \alpha,$$

puisque le facteur  $\ln(k_T^2)$  de la fonction de fragmentation compense un des facteurs  $\alpha_s(k_T^2)$  de la diffusion *parton + parton*. Pour un calcul cohérent au NLO il faudra donc inclure les corrections au processus de type *parton + parton*  $\rightarrow$  *parton + parton* dont un tout petit nombre de diagrammes est représenté en figure 13.7 : ce sont les mêmes que les diagrammes NLO pour la production inclusive d'un hadron à grande impulsion transverse (voir la section suivante). Il faudra également définir les équations d'évolution de la fonction de fragmentation du photon au delà des logarithmes dominants ce qui amènera à introduire la fragmentation d'un gluon en photon qui est même ordre que celle du quark en photon.

En résumé, au NLO et au delà, on peut distinguer deux mécanismes de production d'un photon : soit le photon observé est couplé directement au processus dur, soit il est produit par rayonnement (bremsstrahlung) d'un parton couplé au processus dur : dans les deux cas on parle de photon direct ou photon prompt. Du fait de sa cinématique plus compliquée ce dernier processus est relativement



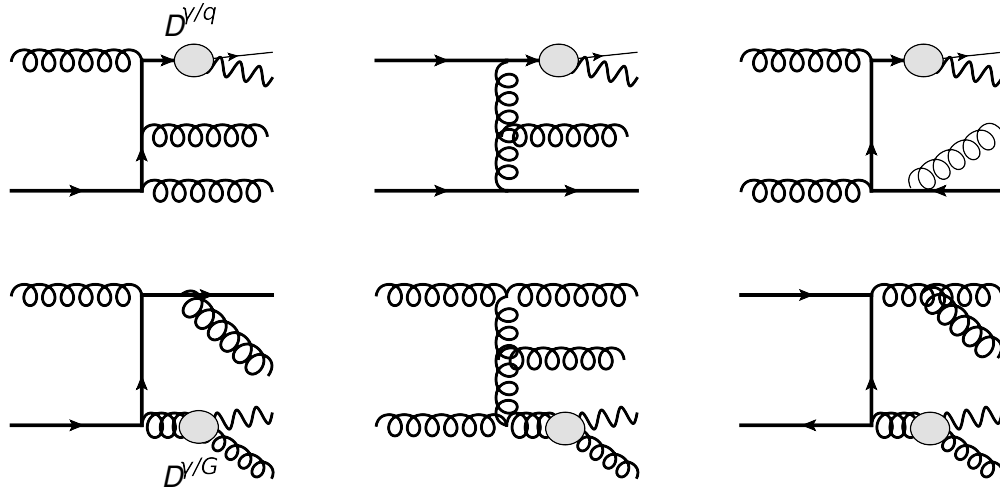


FIGURE 13.7 – Exemple de diagrammes d'ordre supérieur pour la production de photons par le mécanisme de fragmentation.

supprimé aux énergies des cibles fixes mais il joue un rôle important aux collisionneurs quand la valeur de la variable  $k_T/\sqrt{s}$  est petite. Au niveau de l'observation, ce photon de bremsstrahlung sera vu comme produit dans un jet de hadrons, puisqu'éventuellement le parton émetteur du photon se fragmentera en hadrons, par opposition au photon issu directement du processus dur qui est, en général, isolé .

#### • Photon isolé

La composante bremsstrahlung de production d'un photon direct complique la mesure du signal expérimental. En effet le parton émetteur du photon quasi-colinéaire produit une gerbe de hadrons, dont des  $\pi^0$  et des  $\eta$  qui se désintègrent en paires de photons contribuant au spectre inclusif. Pour réduire ce bruit de fond d'origine hadronique au signal de photon direct on introduit le concept d'isolement qui consiste à exclure l'activité hadronique autour du photon. Un photon est dit isolé si aucun hadron satisfait les conditions :

$$\begin{aligned} r_{i\gamma} &= \sqrt{(y_i - y_\gamma)^2 + (\phi_i - \phi_\gamma)^2} < R, \\ k_{Ti} &> \epsilon k_T, \end{aligned} \quad (13.2.27)$$

où la rapidité  $y_i$ , l'angle azimutal  $\phi_i$  et l'impulsion transverse  $k_{Ti}$  sont les coordonnées de la particule  $i$ . Dans les calculs théoriques de production de photon direct on applique les mêmes critères mais sur les partons : la première des équations ci-dessus est un critère de colinéarité (fondé sur les angles polaire et azimutal) qui éliminera les configurations où le parton est quasi-colinéaire au photon : le facteur  $\ln k_T^2/m_0^2$  de l'éq. (13.2.25) sera alors remplacé par  $\ln(1/R)$  ; la deuxième permet d'accepter dans le cône d'isolement des gluons de petite impulsion, ce qui est nécessaire pour la compensation des divergences infrarouges entre diagrammes réels et virtuels. Ainsi un gluon émis quasi-colinéairement au photon sera accepté dans le cône d'isolement et l'intégrale sur son énergie entre 0 et  $\epsilon k_T$  sera suffisante pour compenser la divergence infrarouge laissant un facteur

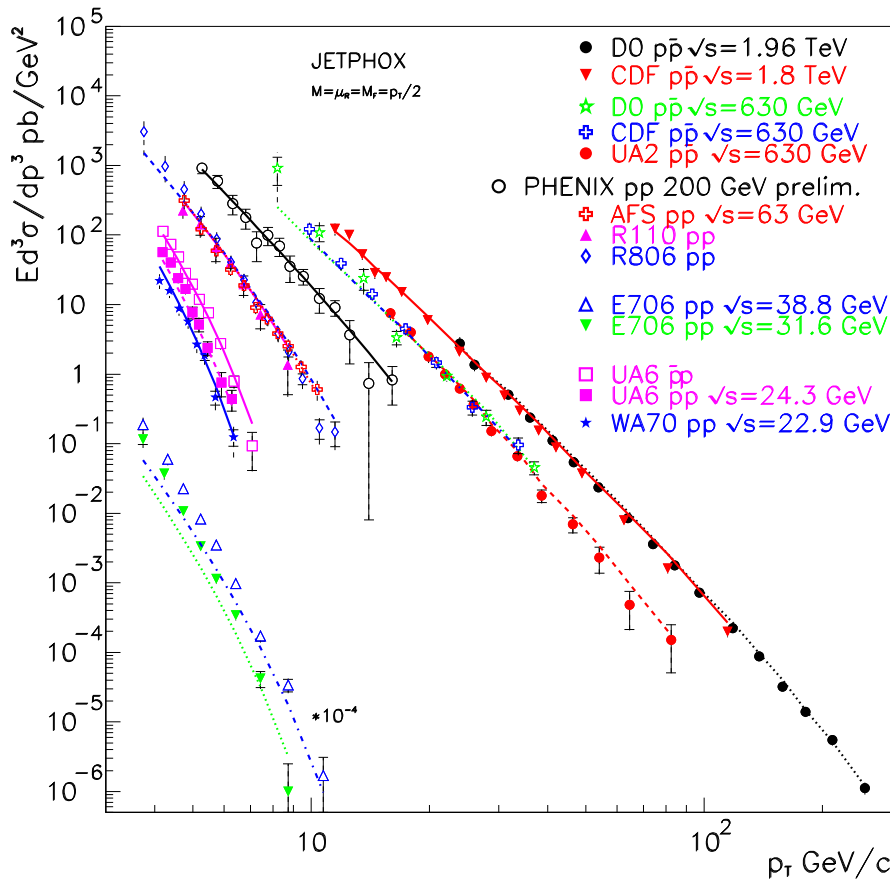


FIGURE 13.8 – Spectre inclusif de photon direct ou isolé dans les collisions  $\bar{p}p$  et  $pp$  pour les énergies  $21 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 1800 \text{ GeV}$  (données pré-2006).

$\alpha_s \ln(1/\epsilon)$ , ce qui implique de choisir  $\epsilon$  pas trop petit. Typiquement, suivant les expériences on choisit  $0,4 < R < 1$ ,  $\epsilon \sim 0,1$ . Le critère d'isolement introduit pour éliminer le fond de photons provenant de la décroissance des hadrons va donc également modifier le signal de photon prompt et on parle dans ce cas de spectre de photon isolé. Toutes les expériences aux collisionneurs de Fermilab et LHC utilisent un critère d'isolement comme ci-dessus ou une de ses variantes. La figure 13.8 montre le spectre en  $x_T$ , défini comme  $x_T = 2k_T/\sqrt{s}$ , des données pré-2006 : l'observable est le spectre inclusif de photon prompt sauf pour CDF et D0 pour lesquelles le photon est isolé, tandis que la figure 13.9 montre les mêmes spectres normalisés par les prédictions théoriques au delà de l'ordre dominant. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie sauf ceux de la collaboration E706 de Fermilab à  $\sqrt{s} = 31,5$  et  $38,9 \text{ GeV}$  qui sont 2 à 3 fois plus élevés que les prédictions, surtout aux petites valeurs de  $x_T$  alors que les expériences aux énergies plus faibles (WA70 et UA6) et plus élevées (R110, R806, AFS aux ISR ( $\sqrt{s} = 63 \text{ GeV}$ ), PHENIX à Brookhaven ( $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ ) et CDF et D0 ( $\sqrt{s} = 1800 \text{ GeV}$ )) sont toutes en accord avec la théorie. Il n'est pas convaincant d'attribuer l'anomalie de E706 à un effet physique qui ne serait visible qu'entre 30 and 40 GeV : cela est plutôt dû à des problèmes dans la difficile analyse des données. Il est intéressant de remarquer que même, les expérimentateurs peuvent quelquefois faire des erreurs ! Les données plus récentes de la collaboration ATLAS au LHC apparaissent en parfait accord avec

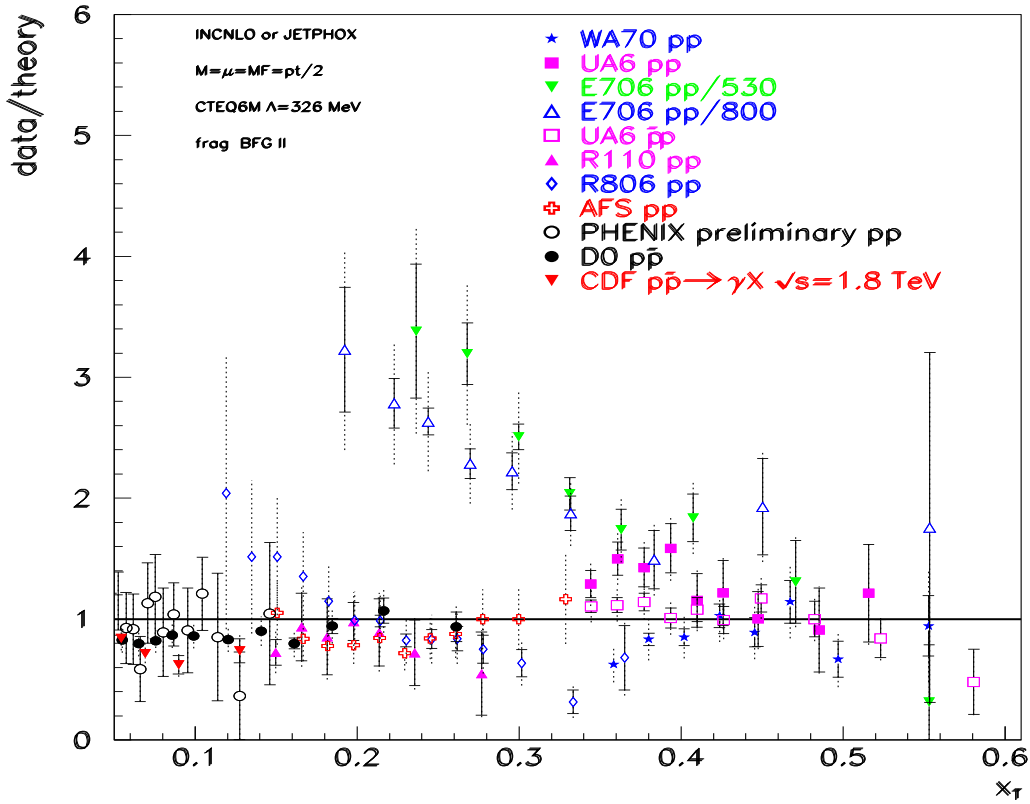


FIGURE 13.9 – Rapport données sur théorie au NLO pour le spectre inclusif de photon dans les collisions  $\bar{p}p$  et  $pp$  pour les énergies  $21 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 1800 \text{ GeV}$  (données pré-2006).

les calculs théoriques au NLO (fig. 13.10, haut) sur 14 ordres de grandeur. Cependant si regarde le rapport théorie/données l'accord est moins spectaculaire puisque les calculs au NLO (JetPhox<sup>6</sup>) sous-estiment les données de 10 à 20% mais les calculs quasi-NNLO (Peter<sup>7</sup>) rétablissent l'accord surtout aux rapidité centrales.

La collaboration Alice, dû à l'extrême finesse de son calorimètre, peut extraire le spectre jusqu'à des  $k_T$  aussi bas que 10 GeV, soit  $x_T > 2 \cdot 10^{-3}$  tandis que ATLAS et CMS observent des photons jusqu'à 1 TeV,  $x_T < 0,2$ . La figure 13.11 résume le domaine cinématique considérable couvert par les expériences de production de photon direct, qui permettent ainsi de tester QCD sur un grand domaine de  $(x, Q^2)$  : on voit que les hautes énergies permettent d'accéder aux petites valeurs de  $x$ . L'accord observé de la théorie avec les résultats de l'inélastique profond, la production de paires de leptons et la production de photons directs sont un test extrêmement convaincant de la validité de

6. Z. Belghobsi, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, G. Heinrich, E.Pilon, M. Werlen, Phys. Rev. **D 79** 114024, [arXiv:0903.48341]; [https://lapth.cnrs.fr/PHOX\\_FAMILY/main.html](https://lapth.cnrs.fr/PHOX_FAMILY/main.html).

7. T. Becher, C. Lorentzen and M. D. Schwartz, Phys. Rev. **D 86** (2012) 054026; M. D. Schwartz, [arXiv:1606.02313].

QCD sur plus d'une dizaine d'ordres de grandeur. La production de gerbes hadroniques que l'on va brièvement discuter confirme cet accord remarquable entre théorie et données.

Utilisant la même approche on peut étudier la production d'une paire de photons dans les collisions  $pp \rightarrow \gamma\gamma + X$  qui, comme on l'a déjà mentionné est le fond dominant à la recherche du boson de Higgs. La section efficace s'obtient à partir des diagrammes ci-dessus où on substitue un photon à un gluon final : par exemple à l'approximation LO seuls les diagrammes d'annihilation  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$  contribuent. On peut ainsi calculer le spectre en fonction de la masse de la paire, comme pour le processus Drell-Yan ou, pour une masse fixée la distribution en impulsion transverse de cette dernière.

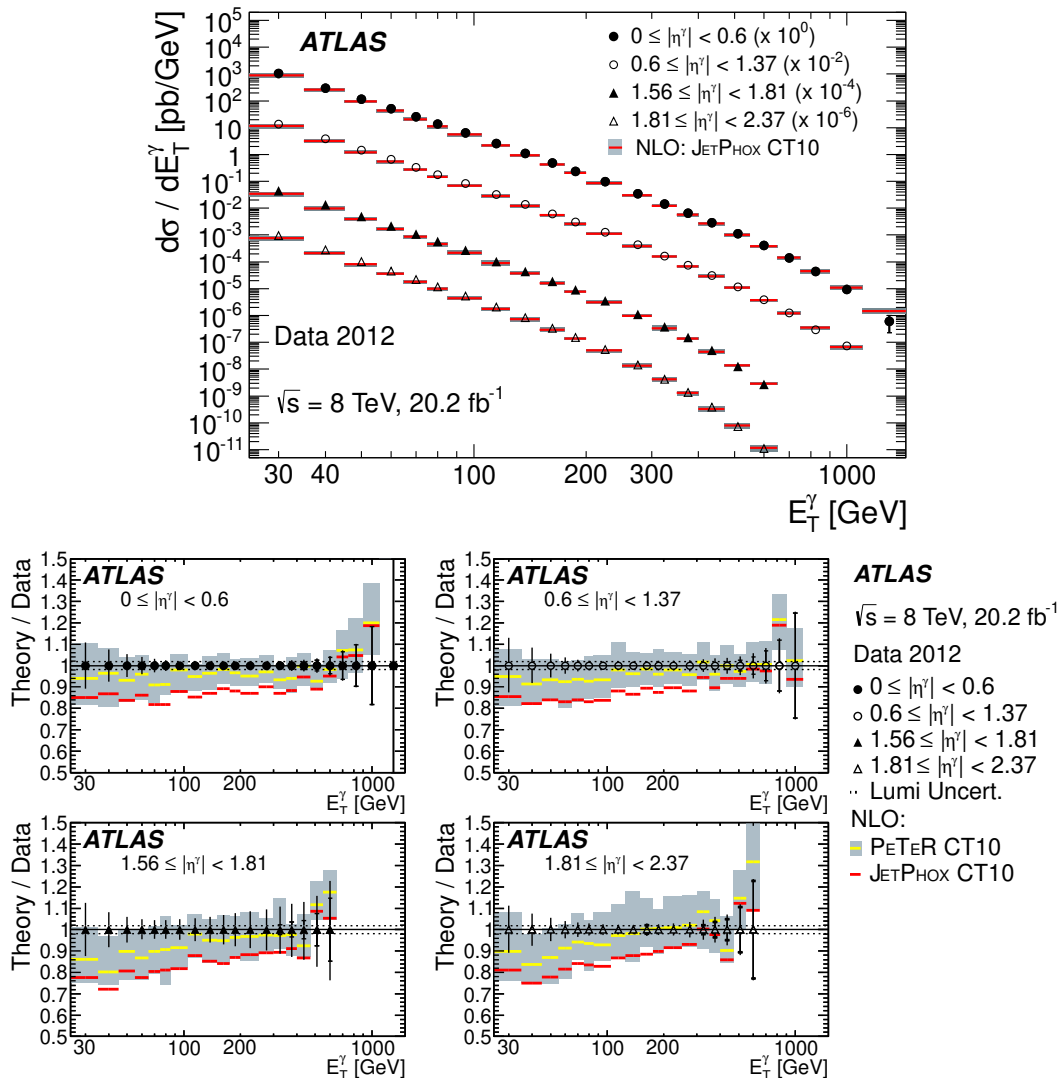


FIGURE 13.10 – Section efficace inclusive de production d'un photon isolé en fonction de l'énergie transverse du photon dans les collisions  $pp$  à 8 TeV, au LHC (Collaboration ATLAS, JHEP 06 (2016) 005; [arXiv:1605.03495]).

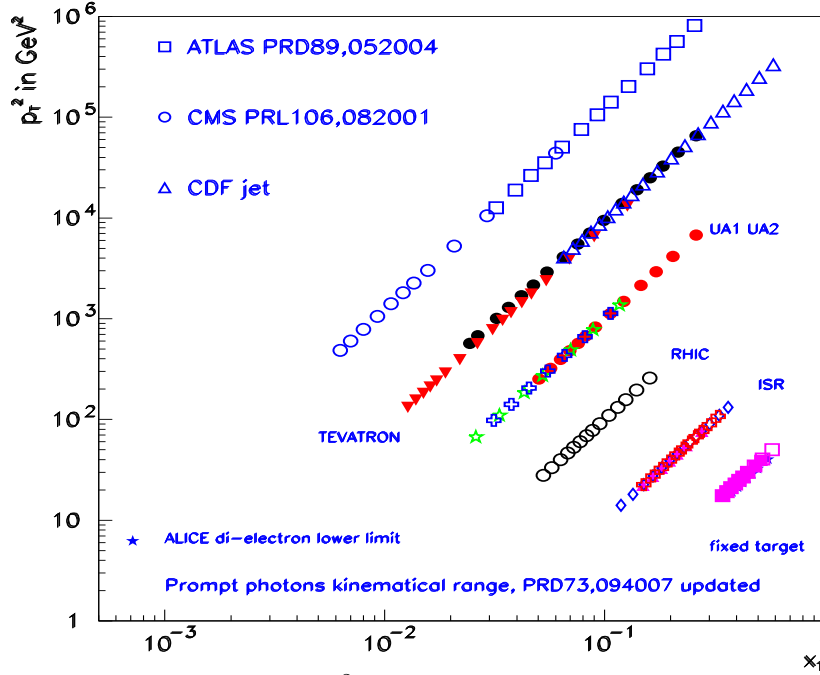


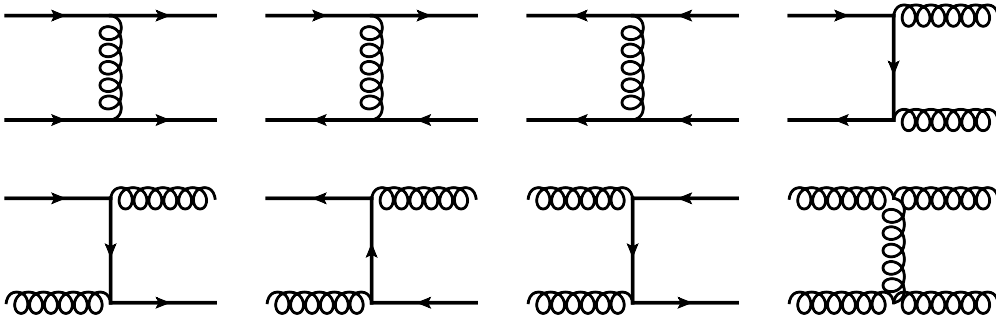
FIGURE 13.11 – Domaine en “ $(x, Q^2)$ ” couvert par les données de production de photons prompts dans les collisions hadroniques. Les données LHC (ALICE, ATLAS, CMS) sont à 7 TeV. Avec l’aimable autorisation de Monique Werlen.

### 13.3 Production de jets dans les collisions hadroniques

Dans l’approximation au logarithme dominant la gerbe hadronique est identifiée à un parton final (quark ou gluon) produit à grande impulsion transverse  $k_T$ . Aucun effet de fragmentation du parton en hadrons n’est pris en compte. La cinématique est donc la même que pour la production d’un photon mais on doit sommer sur tous les types de partons de l’état final :

$$k^0 \frac{d\sigma^3}{dk} = \frac{1}{s(-t)} \sum_{i,j,k,l} \int_{x_i^{\min}}^1 \frac{dx_1}{x_1^2} F_{i/A}(x, k_T^2) F_{j/B}(x_2, k_T^2) \frac{1}{(4\pi)^2} \overline{\Sigma} | \mathcal{M} |_{ij \rightarrow kl}^2$$

où  $k$  est l’impulsion du parton (jet) observé. La dynamique au niveau partonique est assez complexe car il y a un grand nombre de processus en jeu,  $qq \rightarrow qq$ ,  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ ,  $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$ ,  $q\bar{q} \rightarrow gg$ ,  $gq \rightarrow gq$ ,  $gg \rightarrow q\bar{q}$ ,  $gg \rightarrow gg$  :



La dominance relative d'un processus partonique dépend de l'énergie transverse du jet : ainsi, au LHC, pour un jet de  $k_T \approx 100$  GeV la diffusion gluon-gluon représente 60% de la section efficace comparée aux processus gluon-quark (35%) et quark-quark (5%), tandis que pour  $k_T \approx 2$  TeV la diffusion quark-quark domine (50%) devant la diffusion gluon-quark (40%) et gluon-gluon (10%). Pour exemple on montre dans la figure 13.12 une compilation des sections efficaces de production de jet pour les collisionneurs  $p\bar{p}$  et  $pp$  : on remarque l'accroissement considérable, d'un facteur environ 3500, de la section efficace entre  $\sqrt{s} = 546$  GeV et  $\sqrt{s} = 7$  TeV pour  $k_T = 100$  GeV (et de 5000 entre  $\sqrt{s} = 546$  GeV et  $\sqrt{s} = 8$  TeV (voir fig. 13.13)). Qualitativement on estime que la valeur moyenne de l'impulsion des partons initiaux dans la collision est  $\langle x \rangle \approx 2k_T/\sqrt{s}$ <sup>8</sup> et donc quand l'énergie augmente  $\langle x \rangle$  décroît et corrélativement les densités partoniques augmentent notamment celle du gluon (voir figs. 9.1 et 9.2) : c'est ce qui explique l'accroissement spectaculaire de la production d'un jet de  $k_T = 100$  GeV à  $\sqrt{s} = 8$  TeV, dominée par la diffusion gluon-gluon, comparée à celle à  $\sqrt{s} = 546$  GeV dominée par le processus quark-antiquark de valence. C'est pour cela que l'on dit quelquefois que le LHC est une machine à produire des gluons. En général les processus initiés par les gluons dominent aux "basses" valeurs de  $k_T$  tandis que ceux initiés par les quarks (de valence) dominent à "grands"  $k_T$ . Il faut aussi signaler que la section efficace de production de jets est proportionnelle à  $\alpha_s^2$  et elle est donc très sensible à la valeur de  $\Lambda$ , ou de façon équivalente à la valeur de  $\alpha_s(m_Z^2)$ .

Si on calcule la section efficace de jet inclusif au NLO on rencontre les mêmes problèmes de divergences infrarouges et colinéaires que dans la diffusion  $e^+e^-$ . Comme dans ce dernier cas, on va donc définir un jet comme un parton ou une association de deux partons quasi-colinéaires. La contrainte supplémentaire est que cette définition doit être invariante sous une transformation de Lorentz longitudinale puisque les jets sont produits par une collision parton-parton mais sont reconstruits expérimentalement dans le centre de masse proton-proton. Pour définir la distance entre deux partons et savoir quand les recombinaison en un seul jet on va définir leur cinématique à l'aide de l'impulsion transverse, la rapidité et l'angle azimutal. Soient deux partons, de masse nulle, de coordonnées :

$$k_i = (k_{iT} \cosh y_i, k_{iT} \cos \phi_i, k_{iT} \sin \phi_i, k_{iT} \sinh y_i)$$

$$k_j = (k_{jT} \cosh y_j, k_{jT} \cos \phi_j, k_{jT} \sin \phi_j, k_{jT} \sinh y_j).$$

8. On estime que  $\hat{s} \approx \langle x \rangle^2 s \approx 4k_T^2$ , d'où le résultat.

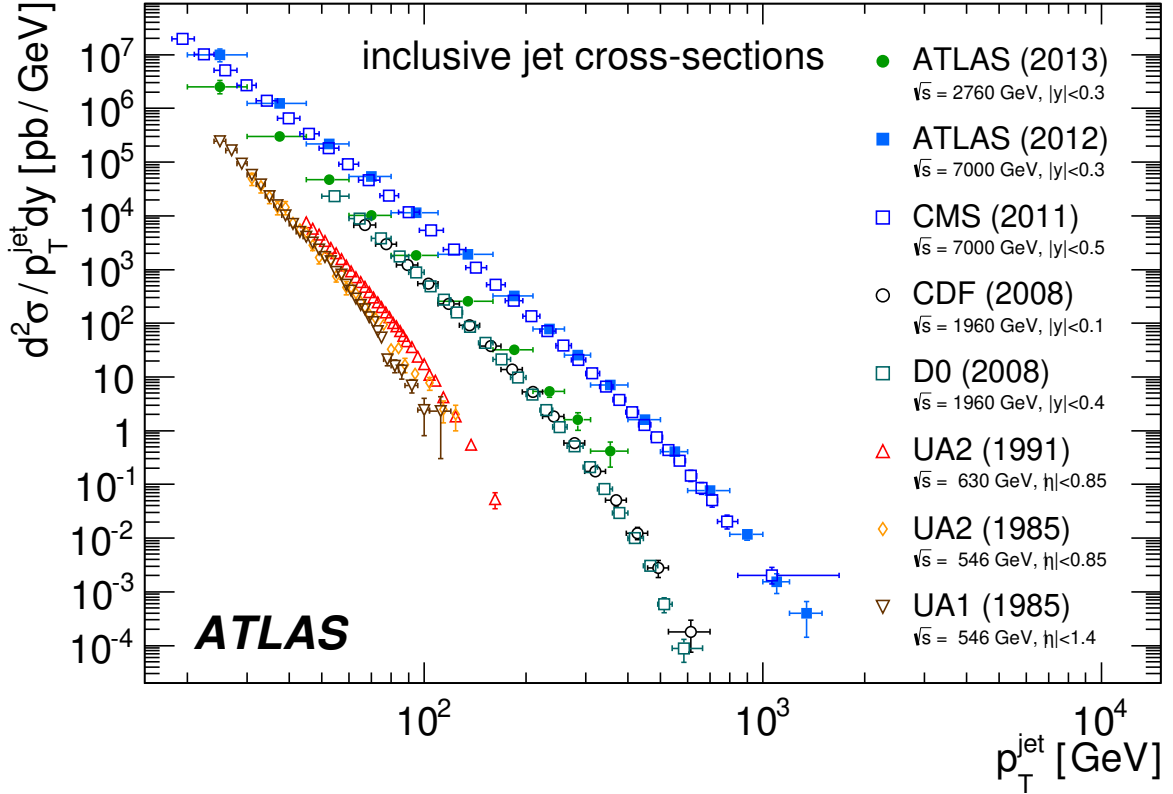


FIGURE 13.12 – *Compilation par la collaboration ATLAS des données sur la production inclusive de gerbes hadroniques aux collisionneurs du CERN et Fermilab pour des énergies de  $\sqrt{s} = 546$  GeV à 7 TeV.*

Le carré de la masse invariante des deux partons est :

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2k_i \cdot k_j = 2k_{iT}k_{jT} [\cosh(y_j - y_i) - \sin(\phi_j - \phi_i)] \\ &\sim k_{iT}k_{jT} [\delta y_{ij}^2 + \delta \phi_{ij}^2] \end{aligned}$$

avec  $\delta y_{ij} = (y_j - y_i)$ ,  $\delta \phi_{ij} = (\phi_j - \phi_i)$  supposés "petits". A partir de cette expression il est usuel de définir la distance entre les partons comme :

$$d_{ij} = \min(k_{iT}, k_{jT}) \sqrt{\delta y_{ij}^2 + \delta \phi_{ij}^2} / R. \quad (13.3.28)$$

On a introduit dans cette mesure un paramètre numérique  $R$  dont on précisera la valeur plus bas. Cette mesure est bien invariante sous une transformation de Lorentz longitudinale puisque chacune des variables,  $\delta y_{ij}$ ,  $\delta \phi_{ij}$ ,  $k_{iT}$  et  $k_{jT}$  l'est. Choisir de normaliser la distance par l'impulsion minimale plutôt que par la racine carré du produit est plus physique car cela rend le cut-off infrarouge indépendant de la valeur de l'impulsion maximale. C'est une "bonne" mesure puisqu'elle s'annule si l'un des partons est d'impulsion nulle ou si les partons sont colinéaires, c'est à dire s'ils ne forment qu'un seul parton. Intuitivement, on voit que deux partons formeront deux jets observables si  $d_{ij}$  est suffisamment grand et coalesceront en un seul jet dans le cas contraire. Cette condition sur  $d_{ij}$

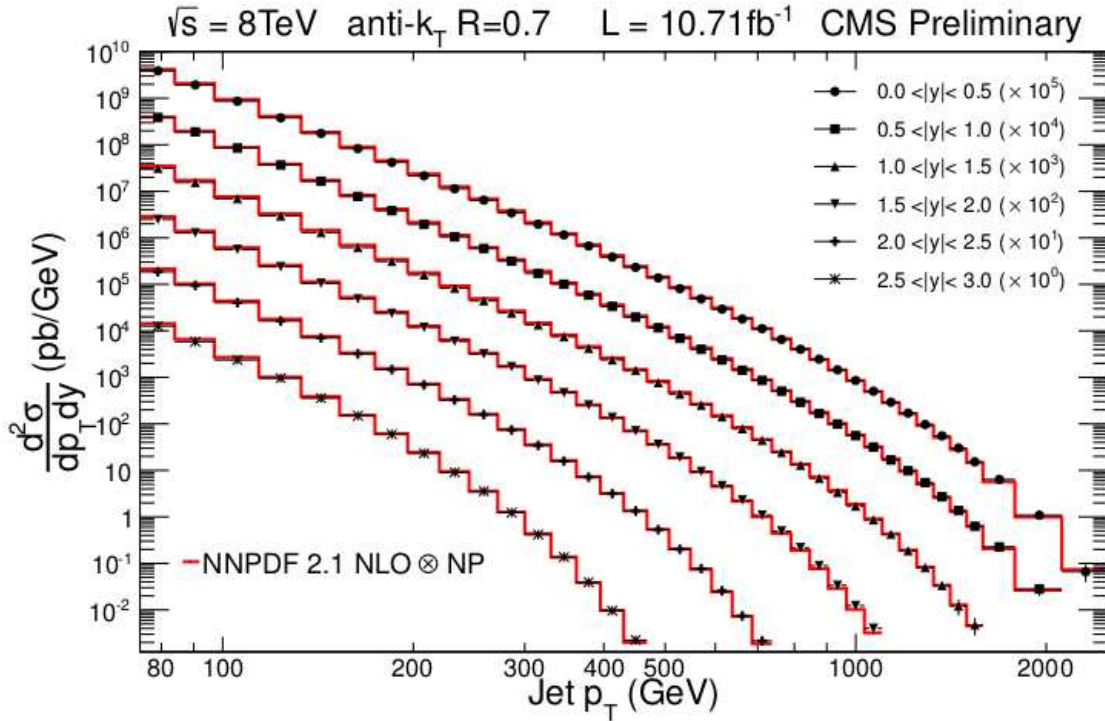


FIGURE 13.13 – Section efficace inclusive de production d’un jet en fonction de l’énergie transverse du jet dans les collisions  $pp$  à 8 TeV, au LHC (Collaboration CMS, voir <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/genpdf/CMSPublic/PhysicsResultsSMP12012>).

combine en fait celles sur les deux cut-offs (infrarouge  $\epsilon$  et colinéaire  $\delta$ ) de la définition à la Sterman-Weinberg.

Plus précisément, pour classer les événements selon le nombre de jets on procède la façon suivante. On définit la distance d’un parton  $i$  au faisceau par :

$$d_i = k_{iT}, \quad (13.3.29)$$

et on ordonne les distances  $d_i$  et  $d_{ij}$  par ordre croissant. Si c’est un  $d_{ij}$  qui est la plus petite valeur on combine les deux partons en un jet  $l$  dont on calcule en général les coordonnées de la façon suivante<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} k_{lT} &= k_{iT} + k_{jT} \\ y_l &= (k_{iT}y_i + k_{jT}y_j)/k_{lT} \\ \phi_l &= (k_{iT}\phi_i + k_{jT}\phi_j)/k_{lT}, \end{aligned} \quad (13.3.30)$$

et la configuration à 3 partons est considérée comme un événement à 2 jets. Si c’est un  $d_i$  qui a la valeur minimale on compare alors la distance entre les deux autres partons à leur distance par rapport au faisceau et si elle est la plus petite on combine les partons en un jet à l’aide de (13.3.30), sinon chacun des partons est interprété comme un jet. La valeur du paramètre  $R$  introduit en (13.3.28)

9. On peut aussi définir l’impulsion du jet en ajoutant les vecteurs impulsion de chaque parton



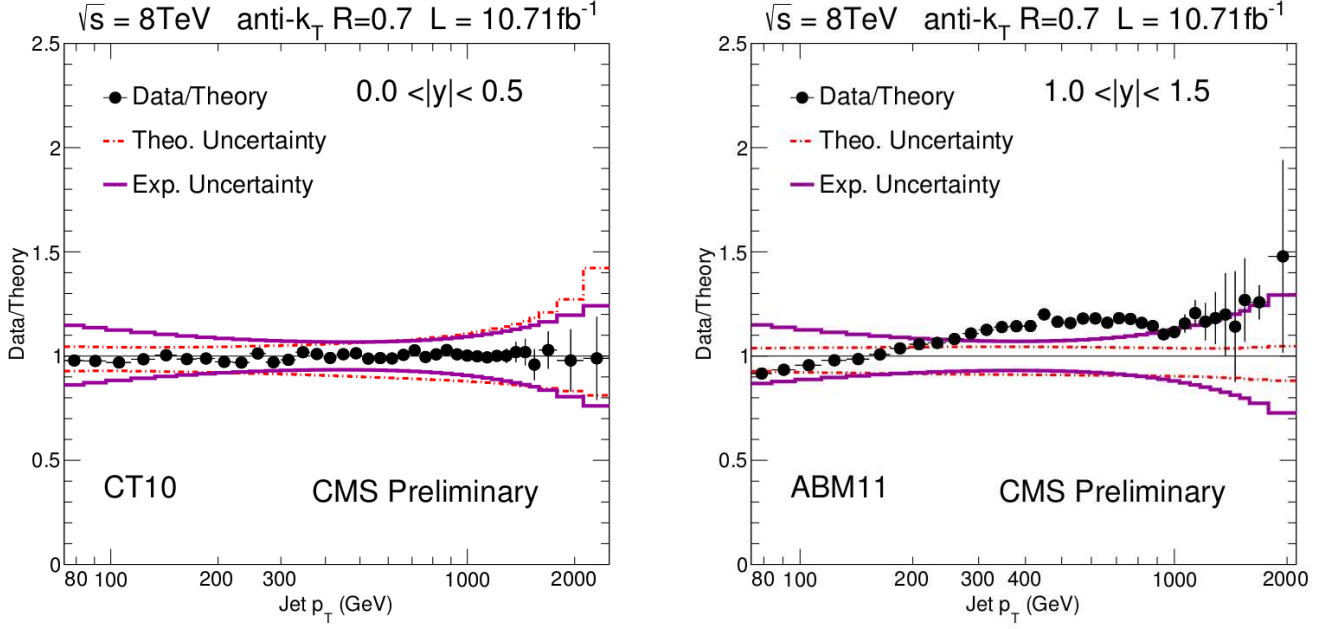


FIGURE 13.14 – Section efficace inclusive de production d’un jet en fonction de l’énergie transverse du jet normalisée à la prédiction de QCD perturbatif au NLO, dans les collisions  $pp$  à 8 TeV, au LHC (Collaboration CMS, <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/genpdf/CMSPublic/PhysicsResultsSMP12012>).

est choisie de l’ordre de 0.3 à 0.7 au LHC et jusqu’à 1 aux énergies de Fermilab. La procédure de combinaison de partons ci-dessus suit ”l’algorithme  $k_T$ ”<sup>10</sup> qu’utilisent les expérimentateurs pour construire de façon récursive les jets à partir des impulsions des particules ou ”protojets”. Il existe d’autres algorithmes comme celui dit de ”cône” dérivé de la définition de jets à la Sterman-Weinberg (voir la section 10.2) mais ils souffrent d’ambiguïtés et ils sont moins utilisés aujourd’hui.

En fait, avec les progrès expérimentaux qui permettent d’assigner une saveur aux jets de désintégration de quarks lourds (charme, bottom) grâce aux détecteurs ”micro-strip” et à la mesure des ”vertex déplacés”, une nouvelle mesure de la distance et de la construction des jets ont été proposées, connues sous le nom d’algorithme ”anti- $k_T$ ”<sup>11</sup>. Elle permet d’associer un parton mou et/ou colinéaire au jet de saveur lourde tout en préservant la saveur du jet et la stabilité infrarouge et colinéaire. A l’éq. (13.3.28) on substitue :

$$\begin{aligned}
 d_{ij}^S &= \max(k_{iT}, k_{jT}) \sqrt{\delta y_{ij}^2 + \delta \phi_{ij}^2} / R, \quad \text{si le plus mou de } i \text{ ou } j \text{ porte une saveur,} \\
 &= \min(k_{iT}, k_{jT}) \sqrt{\delta y_{ij}^2 + \delta \phi_{ij}^2} / R, \quad \text{si le plus mou de } i \text{ ou } j \text{ ne porte pas de saveur.}
 \end{aligned}
 \tag{13.3.31}$$

Un parton ne portant pas de saveur peut être un gluon ou un quark léger ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ). Pour la reconstruction expérimentale du jet il faut également modifier la définition du jet par rapport au faisceau

10. S.D. Ellis, D.E. Soper, Phys. Rev. **D48** (1996), 3160

11. A. Banfi, G.P. Salam, G. Zanderighi, Eur. Phys. J. **C47** (2006), 116, [hep-ph/0601139]

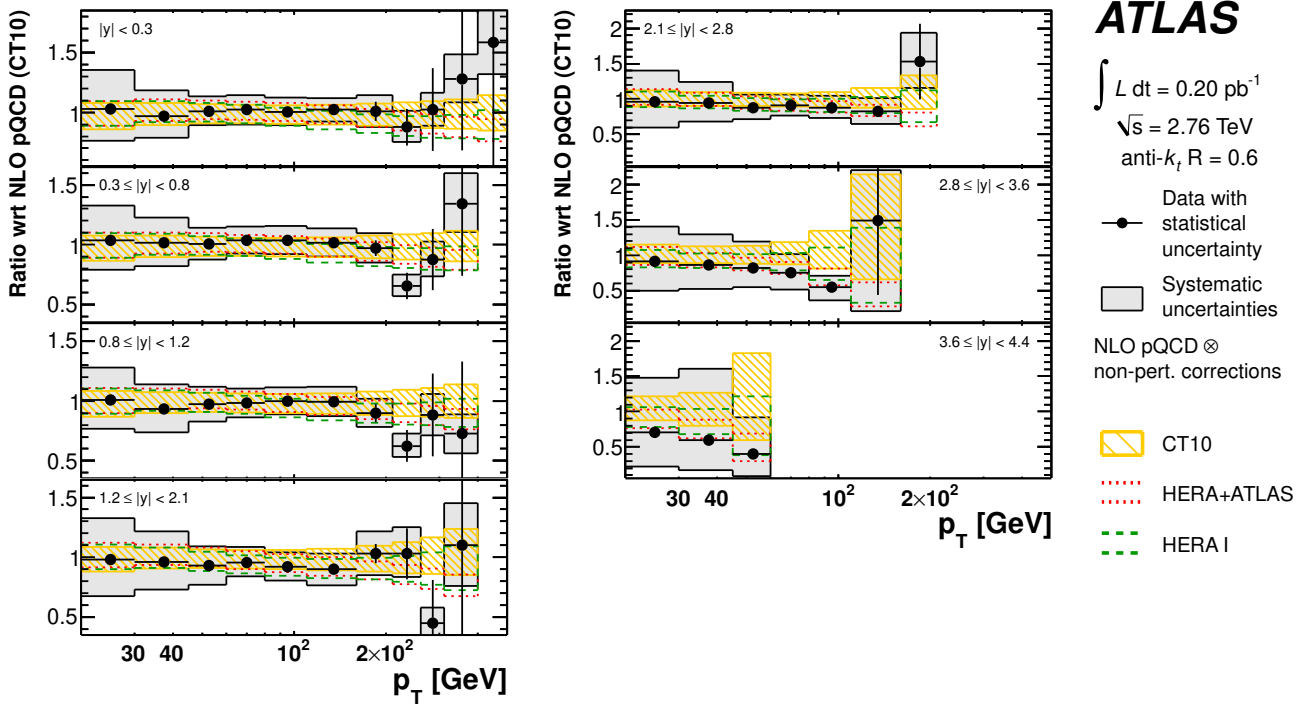


FIGURE 13.15 – *Spectre inclusif, en  $k_T$  et en  $y$ , d'un jet à  $\sqrt{s} = 2,76$  TeV normalisé par les prédictions théoriques au NLO avec les fonctions de structure CT10. Les bandes hachurées et en pointillés colorés sont les pré/post-dictions obtenues avec les distributions partoniques CT10, HERA et HERA ajustées au spectre du jet (ATLAS Collaboration, EPJC **73** (2013) 2509 [arXiv :1304.4739]).*

(voir Banfi *et al.* cité plus haut, pour plus de détails).

Pour les nouveaux résultats du LHC on utilise maintenant l'algorithme "anti- $k_T$ " comme on peut le voir sur les figures 13.13 à 13.16 avec des valeurs de  $R = 0,6$  ou  $R = 0,7$  suivant les collaborations (les valeurs  $R = 0,3$  ou  $R = 0,4$  sont aussi utilisées). Dans ces figures on montre les incertitudes théoriques obtenues en faisant varier les échelles de renormalisation et factorisation entre  $.5 k_T$  et  $2 k_T$ . On compare dans la figure 13.13 le spectre inclusif en  $k_T$  d'un jet, dans plusieurs domaines de rapidité, mesuré par la collaboration CMS au LHC ( $\sqrt{s} = 8$  TeV), avec les prédictions théoriques à l'approximation au delà des logarithmes dominants : l'accord entre théorie et expérience sur presque 11 ordres de grandeur est remarquable (comparaison entre la section efficace à grand et petit  $k_T$ , pour  $y \sim 0$ ). Cependant, la représentation des résultats sur un graphe dont l'échelle verticale couvre 13 ordres de grandeur n'est pas très sélective. Aussi utilise-t-on souvent le rapport données/théorie comme en figure 13.14, en fonction de  $k_T$  pour un intervalle de rapidité donné. Cela permet une comparaison beaucoup plus fine entre expérience et pré/postdictions théoriques : on voit ainsi que le résultat obtenu en utilisant les distributions partoniques CT10 (une variante de CTEQ ajustée aux données du LHC) montrent un accord remarquable avec l'expérience alors que celles fondées sur

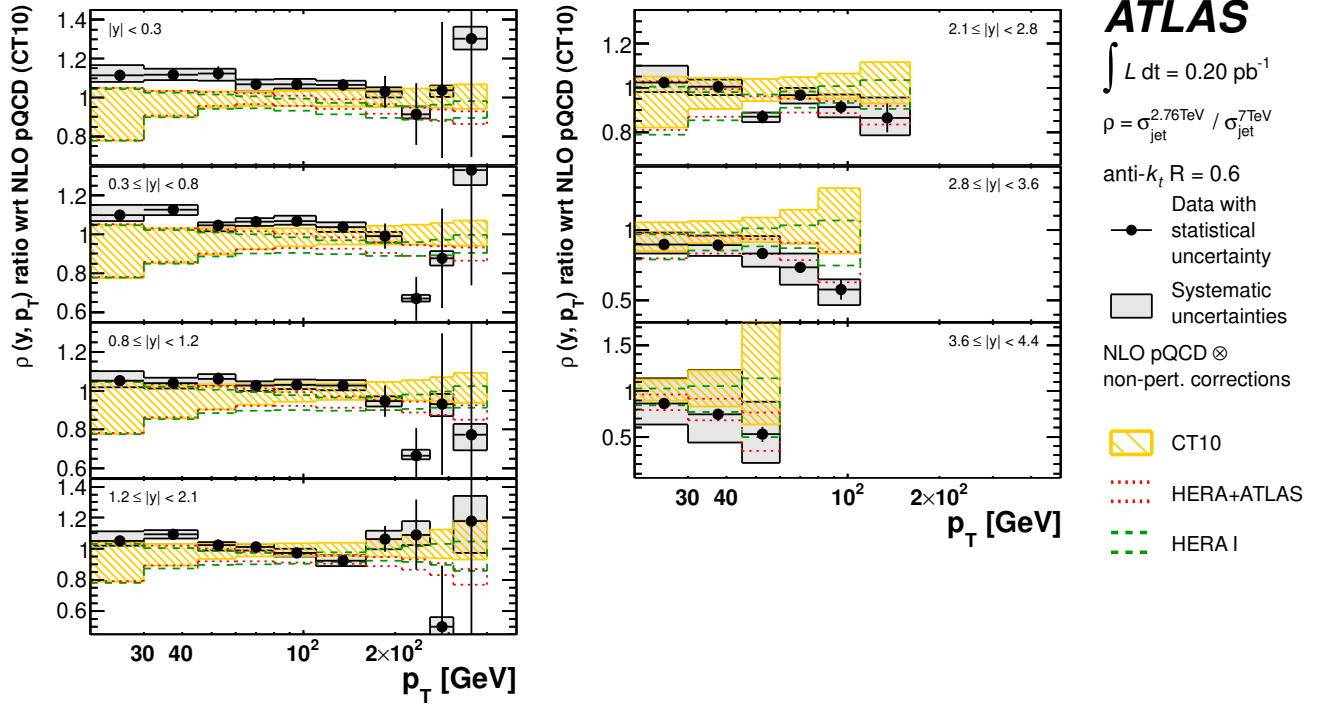


FIGURE 13.16 – Données et prédictions de QCD perturbatif au NLO pour le rapport des spectres inclusifs d’un jet à  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV et  $\sqrt{s} = 7$  TeV. Les points expérimentaux ( $\bullet$ ) sont  $\rho^{\text{ATLAS}}(y, k_T)$  normalisés par  $\rho^{\text{CT10}}(y, k_T)$  et la bande grise les erreurs expérimentales systématiques associées. Les rapports théoriques pour les distributions partoniques CT10, HERA et HERA contraintes par le spectre de jet de ATLAS sont indiqués par la bande colorée et les pointillés (ATLAS Collaboration, EPJC **73** (2013) 2509 [arXiv :1304.4739]).

une variante des distributions ALEKHIN (ABM11 non ajustées aux données) diffèrent jusqu’à 20% aux grandes valeurs de  $k_T$ . Une étude similaire pour ATLAS à  $\sqrt{s} = 2, 76$  TeV est montrée en figure 13.15 : l’accord est de nouveau excellent, sauf peut-être aux grandes valeurs de rapidité ( $y > 2, 8$ ) mais toujours à l’intérieur des erreurs. On remarque par ailleurs que les incertitudes expérimentales sont supérieures à celles théoriques. Ce bon accord est valable pour toutes distributions partoniques considérées (voir la légende de la figure pour les détails). La collaboration remarque qu’ajuster les distributions partoniques HERA au spectre inclusif d’un jet permet de réduire les incertitudes sur la distribution du gluon, notamment aux petites valeurs de  $x < 10^{-3}$ . Poursuivant cette étude ATLAS compare ces données à celles à  $\sqrt{s} = 7$  TeV ainsi qu’aux prédictions théoriques. Pour cela ils définissent le rapport :

$$\rho^{\text{exp}}(y, k_T) = \frac{d^2\sigma/dydk_T(2, 76 \text{ TeV})}{d^2\sigma/dydk_T(7 \text{ TeV})},$$

et un rapport similaire  $\rho^{\text{théo}}(y, k_T)$  pour la théorie au NLO utilisant différents ensembles de fonctions de structure du proton. Ils construisent alors le rapport des deux rapports  $\rho^{\text{exp}}/\rho^{\text{théo}}$  où  $\text{théo} = \text{CT10}$

dont le résultat est montré en figure 13.16. La première chose que l'on remarque est que, pour  $\rho^{\text{exp}}(y, k_T)$ , les incertitudes systématiques (bandes grises) sont beaucoup plus petites que celles sur le spectre inclusif du jet, car beaucoup d'erreurs systématiques se compensent dans le rapport, ce qui permet une étude plus fine. La deuxième remarque est que cette quantité n'est pas égale à 1 aux petites valeurs de la rapidité ( $y < 0,8$ ). Si l'on admet l'accord parfait entre expérience et théorie à  $\sqrt{s} = 2,76$  TeV (figure 13.15) alors on est obligé de conclure que les distributions partoniques utilisées surestiment très légèrement, mais systématiquement, les données à 7 TeV pour les rapidités centrales. Cependant, si on prend en compte les incertitudes associées aux paramétrages et à la théorie (bandes colorées sur la figure), alors le désaccord observé reste à l'intérieur des barres d'erreur. Il ne fait pas de doute que, après ajustement adoptant si nécessaire un paramétrage plus souple que celui des eqs. (9.1.54), on construira un accord parfait aux deux énergies et cela sans détruire les analyses faites à plus basse énergie dans d'autres expériences. Cette discussion, un peu technique, illustre comment affiner les prédictions de QCD perturbatif en considérant le plus grand nombre de résultats dans le plus grand domaine cinématique possible. On peut dire sérieusement que ce type d'analyse tient de la science autant que de l'art, notamment en ce qui concerne l'estimation relative des erreurs d'une expérience à l'autre et d'une prédiction théorique à l'autre.

### 13.4 Production de hadrons dans les collisions hadroniques

Comme dans le cas de la diffusion  $e^+e^-$  on peut étudier dans les collisions  $pp$ , en QCD au NLO, la distribution d'une particule à grand  $k_T$ <sup>12</sup>. Cela permet de mieux contraindre les fonctions de fragmentation de partons en hadrons déjà introduites en sec. 10.3. Les collisions hadroniques sont complémentaires des collisions  $e^+e^-$  pour ce genre d'étude. En effet les collisions leptoniques permettent de déterminer avec précision la fragmentation du quark en hadrons à petit  $z$  mais non à grand  $z$  dû à la faible statistique. Quant à la fragmentation du gluon, elle est très peu contrainte puisque la transition *gluon*  $\rightarrow$  *hadron* +  $X$  est associée à un processus correctif au terme de Born comme on l'a vu en sec. 10.3. Dans les collisions  $pp$  les sections efficaces partoniques sont très fortement décroissantes avec l'impulsion transverse et pour compenser ceci le parton doit céder une grande partie de son énergie au hadron, c'est à dire que la réaction est sensible aux grandes valeurs de  $z$  de la fonction de fragmentation<sup>13</sup>. D'autre part on a vu que les sections partoniques avec gluons initial et final jouent un rôle tout à fait dominant dans les collisions hadroniques dès le terme de Born et il est donc évident que la fragmentation du gluon sera fortement contrainte. On montre en figure 13.17 un exemple de spectre hadronique chargé à différentes énergies du LHC. Les prédictions théoriques au NLO utilisent les fonctions de fragmentation de DSS<sup>14</sup>. On remarque un très bon accord sauf peut-être à  $\sqrt{s} = 7$  TeV où les prédictions tendent à surestimer les données aux plus grandes valeurs de  $k_T$ . Cependant l'incertitude théorique, estimée par une variation des différentes échelles arbitraires reste grande. Ce qui est remarquable (et sans doute accidentel!) est l'excellent accord théorie/expérience aux petites valeurs de  $k_T$  où l'on s'attendrait plutôt à l'effondrement de l'approche strictement perturbative : en effet une valeur de  $k_t \sim 1,5$  GeV, équivaut

12. F. Aversa, P. Chiappetta, Mario Greco, J.Ph. Guillet, Nucl.Phys. **B327** (1989), 105

13. Pour une impulsion transverse hadronique  $k_T^{\text{had}}$  donnée, l'impulsion partonique  $k_T^{\text{parton}} = k_T^{\text{had}}/z$  doit être aussi petite que possible, donc  $z$  aussi grand que possible, pour maximiser la section efficace.

14. D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann, Phys.Rev. **D76** (2007), 074033.

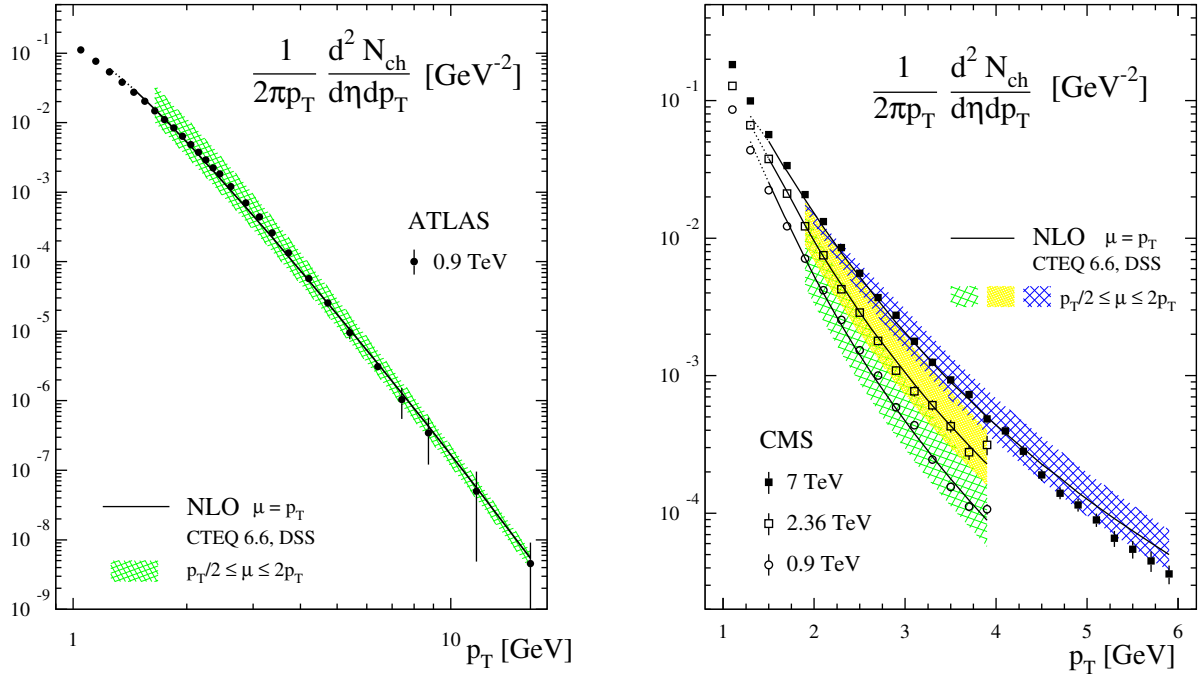


FIGURE 13.17 – Données et prédictions de QCD perturbatif au NLO pour le spectre inclusif de hadrons chargés au LHC. Les incertitudes théoriques sont quantifiées par la variation  $0,5 k_T < \mu < 2k_T$  où  $\mu$  est l'échelle commune de renormalisation, factorisation et fragmentation. Les fonctions de fragmentation sont celles de DSS. Les figures sont extraites de R. Sassot, P. Zurita, M. Stratmann, *Phys.Rev.* **D82** (2010), 074011, [arXiv :1008.0540], et les données des collaborations ATLAS, *Phys.Lett.* **B688** (2010), 21 et CMS, *JHEP* **1002** (2010), 041, [arXiv :1005.3299].

à  $x \sim 5 \cdot 10^{-4}$  ce qui implique de "grands" termes correctifs de l'ordre de  $\alpha_s \ln(1/x)$  qu'il faudrait sommer à tous les ordres pour un résultat crédible. Il est en principe possible de mesurer au LHC le spectre inclusif d'une grande variété de hadrons :  $\pi$ ,  $K$ ,  $D^\pm$ ,  $D^0$ ,  $\Psi$ ,  $B^\pm$ ,  $B^0$ ,  $\Upsilon$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ ,  $\dots$  et donc de faire une étude fine de la fragmentation des différents partons.

Si un bon accord données/théorie est observé sur le spectre inclusif de hadron chargé au LHC, on a montré cependant qu'il existe une grande dispersion des prédictions, suivant le choix des fonctions de fragmentation, pour des observables de corrélations que l'on peut construire lorsque l'on étudie, par exemple, la réaction  $pp \rightarrow h jet X$ <sup>15</sup>. Ainsi la figure 13.18 a), montre la distribution  $d\sigma/dz_h$  en fonction de :

$$z_h = \frac{\vec{k}_T^h \cdot \vec{k}_T^{jet}}{|\vec{k}_T^{jet}|^2}, \quad (13.4.32)$$

où le hadron chargé est pris dans le jet : cette dispersion des prédictions est encore magnifiée quand on normalise point à point les distributions par celle de DSS (figure de droite). Un autre aspect

15. F. Arleo, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, Chi Linh Nguyen, *JHEP* **1404** (2014), 147, [arXiv :1311.7].

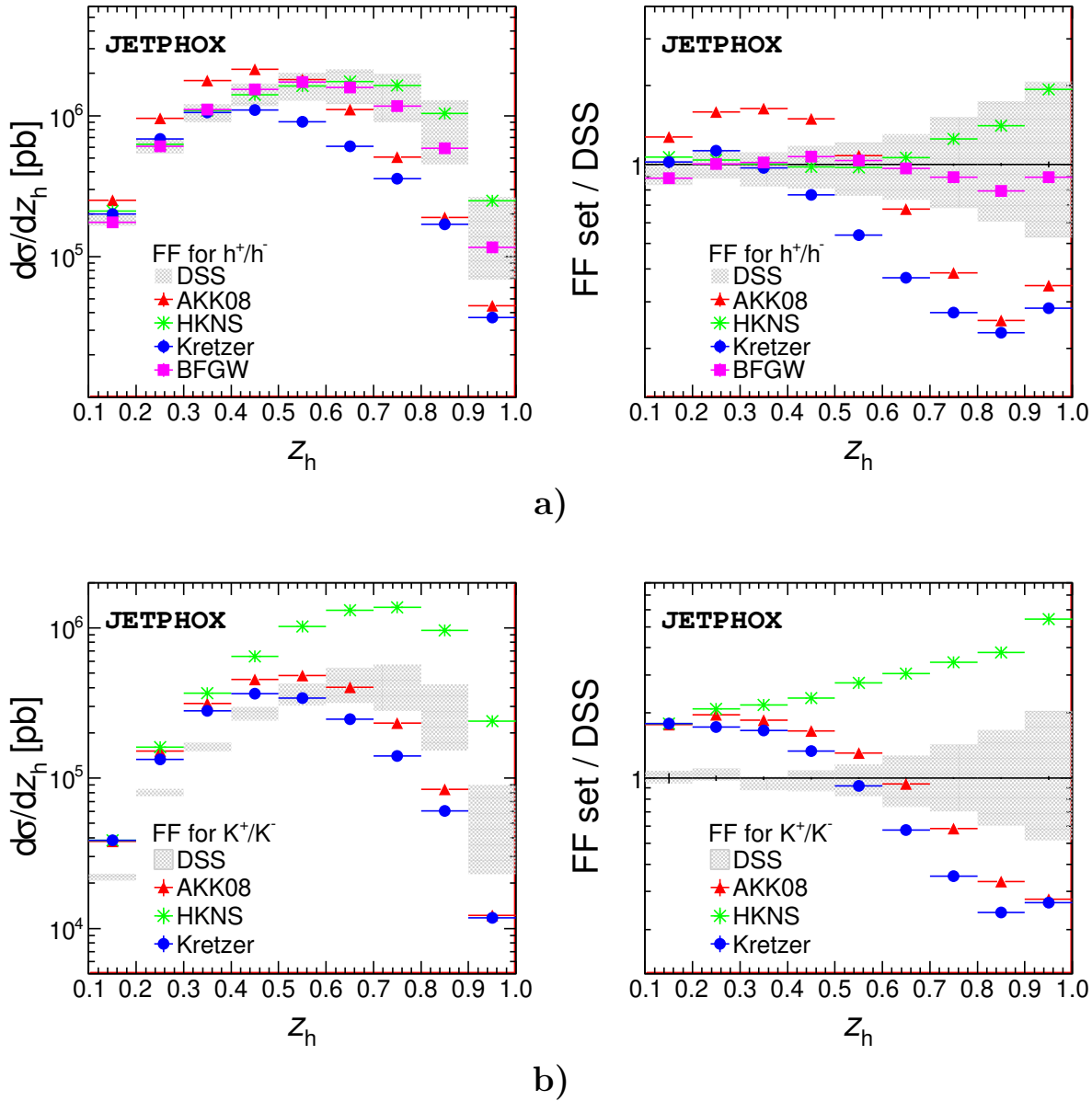


FIGURE 13.18 – a) Distribution de hadrons chargés à l’intérieur d’un jet à  $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ . La référence au paramétrage des fonctions de fragmentation est donnée à la fin de la sec. 10.3. La bande grisée indique la variation des prédictions de QCD au NLO avec les fonctions de fragmentation DDS quand les échelles arbitraires varient dans l’intervalle  $[0, 5 k_T^{jet}, 2 k_T^{jet}]$ ; b) distribution de kaons chargés avec les mêmes conventions.

saillant est la grande variabilité des prédictions quand on modifie les échelles, variabilité qui reste cependant moindre que celle associée au choix des fonctions de fragmentation : DSS, BFGW et

HKNS sont compatibles mais AKK08 et Kretzer sont assez différentes. Si on s'intéresse maintenant à la production de  $K^\pm$  chargés on observe une situation assez différente avec HKNS largement au dessus des autres distributions<sup>16</sup>.

Les fonctions de fragmentation sont obtenues par comparaison avec un grand nombre de données. Cependant combiner les données de plusieurs expériences leptoniques et hadroniques, prises avec des détecteurs très différents, couvrant un domaine d'énergie très grand, est un art subtil et dangereux : toutes les expériences ne sont pas compatibles entre elles et le phénoménologue n'ayant pas le droit de décider quelles sont les "bonnes" et les "mauvaises" expériences sera forcé de choisir selon des critères personnels (donc non scientifiques) les données à analyser. Cela conduit à une assez grande dispersion des paramétrages.

## 13.5 Conclusion

En conclusion, dans les collisions de type hadron-hadron, un grand nombre d'observables dépendent des fonctions de structure des partons dans les hadrons (et éventuellement des fonctions de fragmentation) et de la valeur de  $\Lambda$ . Pour que QCD soit validée en tant que théorie des interactions fortes il faut que les prédictions soient en accord avec toutes les observables. Les données devenant de plus en plus précises et couvrant un domaine cinématique de plus en plus étendu, les tests de QCD deviennent de plus en plus contraignants. Lors d'une analyse phénoménologique il ne faut oublier de prendre en compte les incertitudes théoriques qui sont dûes au fait que la série perturbative est tronquée au deuxième ou troisième ordre (exceptionnellement à des ordres plus élevés) et associé à cette troncature prendre en compte l'effet de l'arbitraire des échelles de renormalisation, de factorisation et éventuellement de fragmentation. La variation des échelles est traditionnellement comprise entre 0,5 à 2 fois "l'échelle dure" du processus considéré. On laisse au lecteur le soin de réfléchir à ce qu'on appelle "échelle dure" dans un processus donné et de trouver une explication pourquoi l'incertitude théorique estimée ne prend en compte qu'une variation d'un facteur 4 de cette échelle !

---

16. Chi Linh Nguyen, thèse de doctorat, LAPTh, Université de Grenoble, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00986981>.





# Chapitre 14

## Bibliographie ..... très incomplète !

### **Théorie quantique des champs : introductif**

- F. Mandl, G. Shaw, Quantum field theory,  
*John Wiley and sons*
- L.H. Ryder, Quantum field theory,  
*Cambridge University Press*
- L.S Brown, Quantum field theory,  
*Cambridge University Press*

### **Théorie quantique des champs : plus avancé**

- M. Le Bellac, Des phénomènes critiques aux champs de jauge,  
*Savoirs Actuels, Interdictions/Editions du CNRS*
- S. Pokorski, Gauge field theories,  
*Cambridge monographs on mathematical physics*
- T. Muta, Foundations of QCD, an introduction to perturbative methods in gauge theories,  
*World Scientific, Singapore*
- M. E. Peskin, D.V. Schroeder, An introduction to quantum field theory,  
*Addison-Wesley Publishing Company*
- M. D. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model,  
*Cambridge University Press*

### **Théorie quantique des champs : classique**

- J.D. Bjorken, S.D. Drell, vol 1 : Relativistic quantum mechanics, vol. 2 : Relativistic quantum fields, *Mac-Graw & Hill*
- C. Itzykson, J.B. Zuber, Quantum field theory,  
*Dover publications*

**Physique des particules**

- I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, Gauge theories in particle physics,  
*Institute of Physics publishers, Bristol*
- T.P. Cheng, L.F. Li, Gauge theory of elementary particle physics,  
*Oxford Science Press Publications, Clarendon press, Oxford*
- T.P. Cheng, L.F. Li, Gauge theory of elementary particle physics, Problems and Solutions,  
*Oxford Science Press Publications, Clarendon press, Oxford*
- E. Leader, E. Predazzi, An introduction to gauge theories and modern particle physics, 2  
volumes, *Cambridge monographs in particle physics, nuclear physics, cosmology*
- C. Quigg, Gauge theory of the strong, weak and electromagnetic interactions,  
*Addison-Wesley Publishing Company (Advanced book classics)*
- G. Kane, Modern elementary particle physics,  
*Addison-Wesley Publishing Company*
- R. K. Ellis, J. Stirling, B. Webber,  
*Cambridge monographs in particle physics, nuclear physics, cosmology*