

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Historique	13
1.2	Onde sonore	15
1.3	Niveaux sonores	17
1.4	Energie acoustique	19
1.5	Sources de bruit	20
1.6	Applications de l'acoustique	23
2	Perception du son	25
2.1	Effets du son	25
2.2	Indicateurs de bruit	26
2.3	La gêne et les limites de danger	28
2.4	Réglementation	30
3	Les équations de l'acoustique	35
3.1	L'équation des ondes	35
3.2	Impédance acoustique et couplage fluide-structure	37
3.3	Onde plane	38
3.4	Source ponctuelle	40
3.5	Dipôle	41
3.6	Bilan d'énergie	43
4	La propagation du son	47
4.1	Interférence	47
4.2	Interface entre deux milieux	49
4.3	Résonateur acoustique	55
4.4	Diffraction	56
5	Les signaux sonores	59
5.1	Types de signaux	59
5.2	Analyse temporelle	60
5.3	Discretisation du signal	61
5.4	Analyse spectrale	62
5.5	Analyse par octave	63
5.6	Fonctions de transfert	66

6	La mesure du son	71
6.1	Microphone	71
6.2	Haut-parleur	74
7	Vibrations à un degré de liberté	81
7.1	Système masse ressort	81
7.2	Equation du mouvement	82
7.3	Réponse libre	84
7.4	Réponse forcée	89
8	Vibrations à plusieurs degrés de liberté	97
8.1	Equations du mouvement	97
8.2	Réponse libre	99
8.3	Réponse forcée de l'oscillateur amorti	103
8.4	Système continu	105
9	Le rayonnement acoustique	113
9.1	Cas unidimensionnel	113
9.2	Cas d'une sphère	114
9.3	Rayonnement d'une structure	117
9.4	Résolution dans le fluide	118
9.5	Intégrale de Rayleigh	120
9.6	Couplage fluide-structure	121
10	Les méthodes numériques	127
10.1	Méthode des éléments finis	127
10.2	Méthode des équations intégrales.	132
10.3	Méthode des rayons	135
10.4	La SEA (Statistical Energy Analysis)	137
11	Propriétés acoustiques des matériaux	149
11.1	Paramètres décrivant les matériaux poreux	149
11.2	Modèles d'impédance	151
11.3	Impédance de surface	152
12	Propagation dans un conduit	155
12.1	Conduit rectangulaire	155
12.2	Conduit de section quelconque	157
12.3	Matrice de transfert	158
12.4	Silencieux	160
12.5	Terminaisons	163
13	Acoustique des salles	165
13.1	Modes dans une salle	166
13.2	Réponse impulsionnelle	167
13.3	Son dans une salle	169
13.4	Cavité de faible volume	173

14 Principe du contrôle actif du son	177
14.1 Introduction	177
14.2 Deux sources en champ libre	179
14.3 Contrôle dans une gaine	182
15 Algorithmes de contrôle	191
15.1 Principe du contrôle	191
15.2 Contrôle par anticipation	192
15.3 Contrôle par feedback	201
A Devoirs des années passées	231
A.1 Année 2006	231
A.2 Année 2007	233
B Formulaire	235
B.1 Formules utiles	235
B.2 Coordonnées polaires	235
B.3 Coordonnées sphériques	236

Table des figures

1.1	Joueurs de harpe égyptiens.	13
1.2	Amphitêatre grec d'épidaure.	14
1.3	Onde acoustique.	15
1.4	Pression acoustique.	16
1.5	Différentes amplitudes d'une onde acoustique.	17
1.6	Différentes fréquences d'une onde acoustique.	18
1.7	Longueur d'onde et période.	19
1.8	Signaux déterministes.	20
1.9	Signaux aléatoires.	21
1.10	Sources monopolaire, dipolaire et quadripolaire (de gauche à droite).	23
2.1	Schéma de l'oreille.	26
2.2	Perception du son.	27
2.3	Courbes isosoniques.	28
2.4	Courbe de pondération A.	29
2.5	Niveau sonore équivalent.	30
2.6	Niveau en pourcentage du temps.	31
2.7	Audiogramme.	32
2.8	Domages auditifs.	32
2.9	Perte auditive.	33
2.10	Temps de récupération.	33
2.11	Bouchon d'oreille.	34
2.12	Casque antibruit.	34
3.1	Propagation vers la droite.	38
3.2	Propagation vers la gauche.	39
3.3	Onde plane.	39
3.4	Front d'onde.	40
3.5	Dipôle.	42
3.6	Exemples de dipôles.	42
3.7	Diagramme de directivité d'un dipôle.	43
4.1	Interférence de deux ondes.	47
4.2	Interférence de deux ondes en champ libre.	48
4.3	Interférence d'ondes produites par deux sources ponctuelles.	48
4.4	Interface entre deux milieux.	49

4.5	Paroi mince séparant deux domaines fluides.	53
4.6	Cas d'une paroi épaisse.	54
4.7	Résonateur.	55
4.8	Contournement d'un obstacle par diffraction.	57
4.9	Petite ouverture dans un écran.	58
4.10	Ecran semi-infini.	58
5.1	Classification des signaux déterministes.	60
5.2	Classification des signaux aléatoires.	60
5.3	Analyse spectrale en bande fine.	63
5.4	Filtre passe-bande.	65
5.5	Analyse spectrale en tiers d'octave.	66
5.6	Système à une entrée et une sortie.	66
5.7	Signaux dans une gaine.	67
5.8	Signaux pour une poutre.	67
5.9	Systèmes en série.	68
5.10	Systèmes en parallèle.	68
6.1	Principe d'un microphone électrodynamique.	71
6.2	Microphone pour la prise de son.	72
6.3	Schéma d'un microphone à condensateur.	73
6.4	Courbe d'étalonnage d'un microphone.	74
6.5	Directivité de microphones : a) omnidirectionnel, b) cardioïde et c) bidirectionnel.	75
6.6	Directivité de microphones.	76
6.7	Sonomètre.	77
6.8	Schéma d'un haut-parleur.	78
6.9	Réponse en fréquence d'un haut-parleur.	78
6.10	Directivité d'un haut parleur : a) 250 Hz, b) 1000 Hz et c) 4000 Hz.	79
6.11	Haut-parleur et enceinte acoustique.	80
7.1	Système masse ressort.	81
8.1	Système avec deux masses.	98
8.2	Premières solutions de l'équation 8.112.	110
8.3	Figures de Chladni et formes modales d'une plaque.	112
9.1	Instruments de musique.	114
9.2	Rayonnement de moyens de transport.	115
9.3	Machines.	116
9.4	Piston.	117
9.5	Couplage fluide structure.	118
9.6	Méthode intégrale	120
9.7	Distance entre le point de calcul et la source image.	120
9.8	Distance entre le point de calcul et la source image.	121
9.9	Problème couplé	122
9.10	Diffraction par un objet.	124
9.11	Diffraction par un objet à des fréquences croissantes.	125

10.1	Domaine de calcul.	127
10.2	Types d'éléments.	128
10.3	Fonction d'interpolation en 1D	129
10.4	Interpolation de la fonction inconnue	129
10.5	Exemples de maillages.	130
10.6	Finesse du maillage	131
10.7	Exemple de résultat de calcul	133
10.8	Exemple de résultat de calcul par équation intégrale	136
10.9	Exemple de calcul du rayonnement d'un pneumatique	139
10.10	Source image par rapport à une paroi rigide.	139
10.11	Signal temporel au point M.	140
10.12	Source initiale et ses images.	140
10.13	Rayons sonores.	141
10.14	Lois de propagation géométriques a), b) et diffraction c).	142
10.15	Angle solide d'un rayon.	143
10.16	Calcul du bruit aérien par rayons	144
10.17	Cartographie 2D et 3D du bruit dans Paris	145
10.18	Décomposition en sous systèmes	145
10.19	Décomposition en sous systèmes pour une voiture	146
10.20	Energie vibratoire	147
11.1	Quelques exemples de matériaux poreux	150
11.2	Mesure de la résistance à l'écoulement de l'air.	151
11.3	Définition de la tortuosité.	151
11.4	Impédance de surface.	152
11.5	Impédance pour $\sigma = 20000Ns m^{-4}$	153
11.6	Coefficient d'absorption pour $\sigma = 20000Ns/m^{-4}$	154
12.1	Conduit rectangulaire.	155
12.2	Conduit de section quelconque	157
12.3	Domaines d'intégration Ω_1 et Ω_2	161
12.4	Embranchement.	162
12.5	Terminaisons amont et aval.	163
12.6	Silencieux.	164
13.1	Salle de spectacle	165
13.2	Exemple de réponse impulsionnelle.	167
13.3	Sons direct et réverbéré.	168
13.4	Décomposition de la réponse impulsionnelle.	168
13.5	Réflexions multiples.	169
13.6	Réflexions multiples.	170
13.7	Mesure du temps de réverbération.	172
13.8	Salle réverbérante.	175
13.9	Salle anéchoïque.	176
14.1	Principe du contrôle actif.	177
14.2	Cas haute fréquence.	178

14.3	Schéma type d'un système de contrôle actuel.	179
14.4	Efficacité d'un contrôle en champ libre.	181
14.5	Tracé polaire du facteur d'amplification pour $\theta_0 = 0$	182
14.6	Tracé polaire du facteur d'amplification pour $\theta_0 = \pi/3$	183
14.7	Positions de la source primaire et de la source secondaire.	184
14.8	Stratégie de contrôle.	185
14.9	Partie réelle de la pression pour une source secondaire d'amplitude moitié.	186
14.10	Partie imaginaire du champ de pression pour différentes distances entre les sources primaires et secondaires.	187
14.11	Tracé du module (14.35) pour $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$	188
14.12	Comparaison des solutions obtenues pour la stratégie présentée (formule (14.30), courbe en trait normal) et par une stratégie alternative (trait gras).	188
14.13	Casque antibruit.	189
14.14	Contrôle dans une gaine de ventilation.	189
14.15	Efficacité du contrôle dans une gaine.	190
14.16	Contrôle dans un avion.	190
14.17	Contrôle dans une automobile.	190
15.1	Schéma type d'un système de contrôle actif.	191
15.2	Contrôle dans une gaine de ventilation.	192
15.3	Signaux dans une gaine.	193
15.4	Signaux utiles pour l'algorithme LMS.	193
15.5	Signaux utiles pour l'algorithme X-LMS.	197
15.6	Système à modéliser	199
15.7	Dispositif pour les algorithmes par feedback.	202
15.8	Système masse-ressort.	203
15.9	Contrôle par feedback.	212
15.10	Contrôle par feedback.	213
15.11	Transformation du plan complexe.	214
15.12	Chemin de Nyquist.	215
15.13	Déplacement au point $L/3$ du système contrôlé.	227
15.14	Signal envoyé à l'actionneur.	228
15.15	Décroissance de l'énergie contenue dans les premiers modes.	229
A.1	Système couplé.	233
A.2	Pavillon acoustique.	234

Liste des tableaux

1.1	Vitesse du son dans différents matériaux.	16
1.2	Divers niveaux sonores	22
1.3	Puissance acoustique de quelques sources.	23
2.1	Perception des niveaux sonores.	26
2.2	Pondération A.	27
2.3	Exposition à des sons continus.	31
2.4	Exposition à des sons impulsionnels.	32
5.1	Fréquences centrales des octaves et tiers d'octave.	64
10.1	Nombre de nœuds pour le maillage.	129
13.1	Temps de réverbération de quelques locaux.	171
14.1	Efficacité du contrôle	178

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Que cela soit pour la parole, la perception d'un danger ou la musique (figure 1.1), les ondes sonores ont eu une importance considérable depuis l'origine de l'homme.

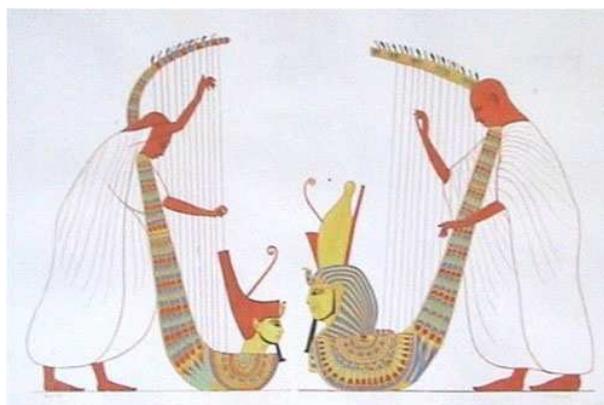


FIG. 1.1 – Joueurs de harpe égyptiens.

Les premières études sur les phénomènes acoustiques remontent au VI^e siècle avant J.C. En effet, les théoriciens et philosophes grecs dont le plus connu est Pythagore, élaborèrent tout un corps de doctrine étroitement lié à leurs considérations métaphysiques. L'école pythagoricienne, qui prenait pour base le principe de l'identité existant entre la structure du monde physique et celle des nombres débouchait ainsi sur les bases d'une vaste "Harmonie Universelle" : tout l'univers est musique. Les pythagoriciens parvinrent à dégager la relation existant entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son émis et à construire mathématiquement l'échelle musicale. Les anciens avaient également découvert que le son est dû aux chocs et aux mouvements vibratoires en résultant et savaient, comme l'atteste Heron (I à III av. J.C.) qu'il se produit dans l'air des vibrations longitudinales sous forme d'ondes sonores. Les principales lois de propagation et de réflexion étaient aussi comprises comme en témoigne la qualité acoustique de certains amphitheatres grecs comme celui d'épidaure de la figure 1.2.

Ce n'est qu'à partir du 17^{ème} siècle que l'acoustique, en raison du développement de la mécanique, se détacha de l'art musical pour devenir une science du phénomène sonore. En raison de



FIG. 1.2 – Amphit atre grec d'Épidaure.

la tradition antique, il était naturel que le problème des cordes vibrantes occup t une position de premier plan dans les recherches. Des résultats importants furent obtenus dans ce domaine par le français Mersenne qui détermina expérimentalement les rapports mathématiques unissant la fréquence, la longueur, la tension et la masse des cordes vibrantes. Hooke (1635 - 1703) parvient aux mêmes conclusions. Robert Boyle (1627 - 1691) en 1660 démontra par une expérience sous vide que l'air est un milieu nécessaire à la propagation du son. La question suivante étant alors de savoir à quelle vitesse celui ci se propage ? Mersenne et Kircher se penchèrent tous deux sur cette question ainsi que les italiens Borelli (1608 - 1679) et Viviana (1622 - 1703). Les résultats trouvés allaient de 450 m/s   332 m/s qui fut le plus précis (1738), la variation de la vitesse du son en fonction des principaux paramètres atmosphériques fut également dégagée. C' st à Newton (1642-1727) que l'on doit la première tentative d'une théorie de l'onde sonore. Dans le deuxième livre de ses "Principes", il compare la propagation du son aux pulsations que transmet un corps vibrant au milieu adjacent qui l'entoure, ce dernier au suivant et ainsi de suite.

Le 18 me siècle vit ainsi se multiplier les recherches théoriques, donnant lieu à un important chapitre de la mécanique rationnelle dont l'acoustique est une branche. Parmi les grands mathématiciens qui y apportèrent leur contribution, citons Taylor, d'Alembert ( quations aux dérivées partielles), Bernouilli, Euler, Young et Chladni (1756 - 1824) qui étudia de façon expérimentale la vibration des plaques et laissa son nom aux lignes nodales (figures de Chladni) matérialisées par du sable lorsque les plaques vibrent. Napoléon offrit par l'intermédiaire de l'Institut de France un prix de 3000 F or à celui qui élaborerait une théorie mathématique de la vibration des plaques. Sophie Germain gagna ce prix en 1815 ; elle donna l'équation différentielle du 4 me ordre avec toutefois quelques erreurs sur les conditions aux limites. Ce n'est qu'en 1850 que Kirchoff (1824 - 1887) donna une théorie plus élaborée. Poisson (1781- 1840)  tudia également la transmission du son d'un milieu à un autre. Ainsi, à partir du moment où l'on avait ramené la nature du son   un état vibratoire, on pouvait partir de cette donnée pour l'étude des phénomènes d'interférence et l'analyse des sons complexes. En établissant ainsi la liaison entre les recherches mathématiques portant, par exemple sur les corps vibrants et les recherches expérimentales portant sur l'étude physique de la nature du

son, le 19ème siècle vit la mise au point mathématique, grâce aux séries de Fourier, de l'analyse du son. Les grands développements que connu l'acoustique sur le plan théorique et expérimental sont couronnés par l'ouvrage de Lord Rayleigh (1842 - 1919) : "A theory of sound".

1.2 Onde sonore

Physiquement, le son est une onde de pression qui provient de la compression et de la décompression du milieu dans lequel le son se propage, voir figure 1.3. L'excitation dans ce cas est effectuée par un piston effectuant un mouvement de va et vient. Il se crée alors des zones de pression et de densité variable. On étudiera essentiellement la propagation du son dans l'air mais le son peut aussi se propager dans tous les fluides et dans les milieux solides. Le son nécessite un milieu matériel pour se propager et il ne se propage donc pas dans le vide. Dans une onde acoustique les molécules oscillent sur place et il n'y a pas de mouvement d'ensemble du milieu matériel. Le mouvement du fluide a lieu dans la même direction que la propagation de l'onde. Ainsi l'onde sonore est une onde longitudinale.

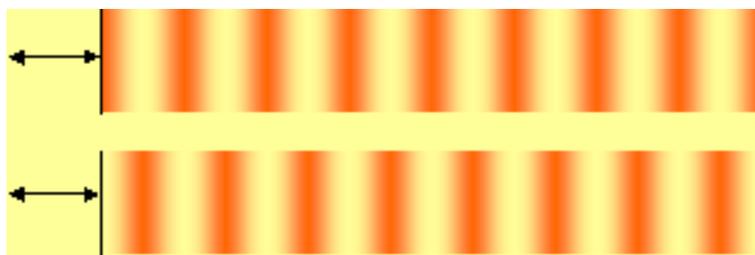


FIG. 1.3 – Onde acoustique.

Le niveau de pression acoustique s'étend typiquement entre $2 \cdot 10^{-5} Pa$ et $100 Pa$ ce qui est très faible par rapport à la pression atmosphérique, voir une illustration sur la figure 1.4. Dans la suite la pression acoustique sera considérée comme une petite perturbation de la pression atmosphérique normale.

Une onde acoustique sera caractérisée d'abord par son amplitude, voir figure 1.5, qui sera mesurée en Pascal (Pa). On distingue ainsi les sons de forte amplitude des sons de petite amplitude. Un niveau de $100 Pa$ est un son de très forte amplitude alors qu'un son de $2 \cdot 10^{-5} Pa$ correspond au seuil de perception d'un individu normal. La seconde caractéristique importante de l'onde est sa fréquence illustrée sur la figure 1.6. La fréquence est le nombre d'oscillations par seconde, elle est exprimée en Hertz (Hz). Les fréquences audibles se situent entre 20Hz et 20000Hz. La longueur d'onde notée λ est la distance entre deux maxima de l'onde sonore, elle s'exprime en mètre (m). La période est l'intervalle de temps entre deux maxima, elle s'exprime en seconde (s). La figure 1.7 illustre ces deux notions. Nous avons différentes relations entre les grandeurs précédentes. Ainsi la période T est reliée à la fréquence de l'onde f par $f = 1/T$. La longueur d'onde est donnée par $\lambda = \frac{c}{f}$ et le nombre d'onde est $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Physiquement, le nombre d'onde est le nombre d'oscillations de l'onde sur une distance de $1m$.

On distinguera la vitesse de l'onde de la vitesse du fluide mis en mouvement qui est généralement beaucoup plus faible. Dans l'air à $20^\circ C$ la vitesse du son est de 343m/s, dans l'eau à la même température, cette vitesse est de 1481m/s, d'autres valeurs pour différents matériaux sont indiquées dans le tableau 1.1. A titre de comparaison la vitesse des particules du fluide est plutôt de l'ordre

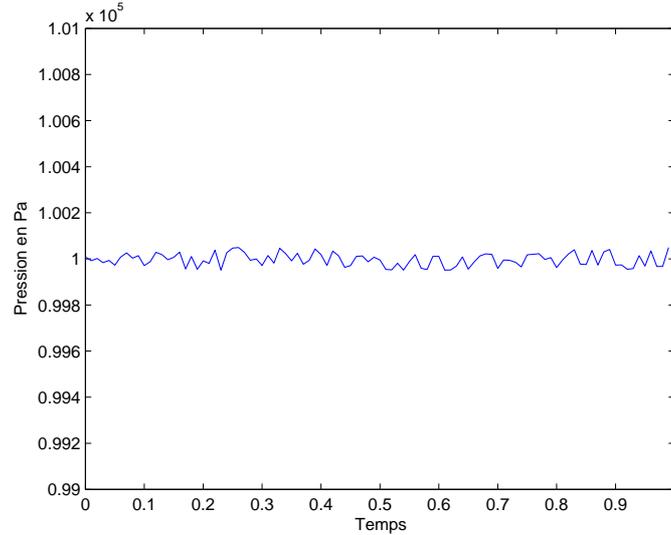


FIG. 1.4 – Pression acoustique.

de quelques $\mu m/s$ à quelques mm/s . La vitesse du son est une fonction de la température. Une approximation simple pour cette vitesse dans l'air est $c = 20\sqrt{T}$ où T est la température absolue en Kelvin. Par exemple à $0^\circ C$ on a $T = 331m/s$ alors qu'à $20^\circ C$, $T = 343m/s$. Dans l'air, le son se propage à la même vitesse quelque soit la fréquence. On dit que l'air est un milieu non dispersif. La vitesse ne dépend pas non plus du niveau sonore.

Matériau	Masse volumique en kg/m^3	Module d'Young en Pa	Vitesse du son en m/s
Aluminium	2700	$7.0 \cdot 10^{10}$	5100
Acier	7800	$2.0 \cdot 10^{11}$	5100
Bois dur	800	$1.0 \cdot 10^{10}$	3500
Bronze	8800	$1.0 \cdot 10^{11}$	3400
eau à $0^\circ C$	1000	$2.06 \cdot 10^9$	1447
eau à $20^\circ C$			1482
Air à $0^\circ C$	1.29	$1.4 \cdot 10^5$	331
Air à $20^\circ C$			343
Caoutchouc souple	1020	$5 \cdot 10^6$	70

TAB. 1.1 – Vitesse du son dans différents matériaux.

Les sons peuvent être de natures très différentes. Ainsi une onde sinusoïdale ou harmonique est composée d'une seule fréquence. Elle est caractérisée par son amplitude, sa fréquence et sa phase à l'origine. Pour une onde sinusoïdale la distance parcourue durant une période T à la vitesse c est cT qui est appelée une longueur d'onde λ .

Une onde périodique non sinusoïdale se reproduit à l'identique au bout d'une période T mais la forme du signal dans la période est arbitraire. C'est le cas d'une note de musique jouée par un instrument comme le violon ou d'une voyelle que l'on prononce continuellement.

Lorsque le son ne se reproduit pas à l'identique le son est non périodique. Dans le cas où le signal

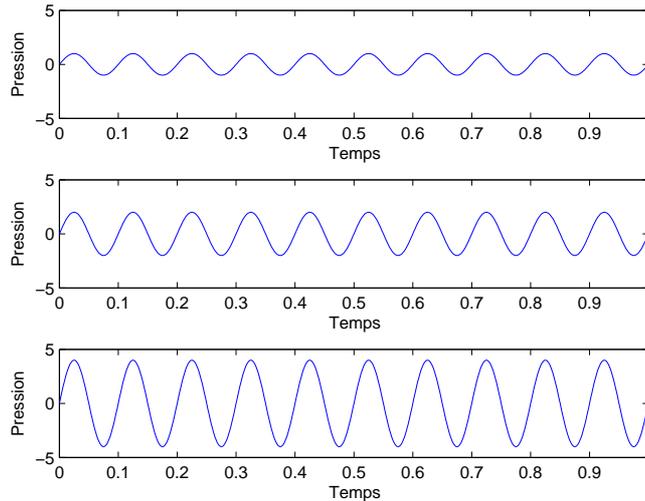


FIG. 1.5 – Différentes amplitudes d’une onde acoustique.

est en plus aléatoire, on parle de bruit. Les figures 1.8 et 1.9 montrent respectivement différents signaux déterministes et aléatoires.

1.3 Niveaux sonores

Les niveaux de pression rencontrés dans les phénomènes acoustiques varient sur une étendue très grande, typiquement de $10^{-5}Pa$ à $100Pa$. De plus, la perception du son par l’homme varie d’une façon sensiblement logarithmique. C’est pour cela que l’on préfère généralement donner le niveau de pression en décibel en utilisant une échelle logarithmique. Le niveau sonore en décibel se définit à partir de la pression p par

$$L = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} \quad (1.1)$$

avec

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} Pa \quad (1.2)$$

La valeur de p_0 correspond au seuil de sensibilité de l’oreille. Par conséquent, les sons qui ont un niveau sonore négatif ne sont pas entendus. Cette valeur est 10^{10} fois plus faible que la pression atmosphérique. Pour cette valeur de la pression le déplacement du tympan est d’environ $0,3 \cdot 10^{-10}m$, soit de l’ordre de grandeur du rayon de l’atome d’hydrogène. Un décibel correspond sensiblement à l’ordre de grandeur de l’écart perceptible entre deux sons. Ainsi deux sons dont les niveaux diffèrent de moins d’un décibel semblent de même intensité. Pour une pression de $1Pa$ le niveau sonore est de $94dB$ alors que pour $10Pa$ le niveau est de $114dB$, soit un niveau très élevé. Des exemples de niveaux sonores sont donnés dans le tableau 1.2. Les valeurs de niveaux sonores sont données en dBA qui tient compte de la réponse de l’oreille humaine, voir le chapitre suivant pour plus de détail sur les dBA.

Les définitions précédentes donnent une valeur instantanée du niveau sonore. Dans le cas d’un signal de pression qui varie irrégulièrement en fonction du temps, ces grandeurs fluctuent beaucoup.

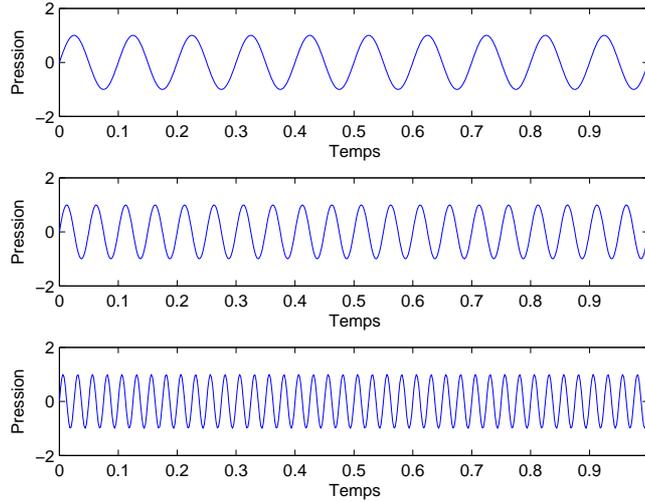


FIG. 1.6 – Différentes fréquences d'une onde acoustique.

Il est alors préférable de définir la moyenne du carré de la pression par

$$\overline{p^2(t)} = p_{rms}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt \quad (1.3)$$

et le niveau sonore par

$$L_p = 10 \log_{10} \frac{\overline{p^2(t)}}{p_0^2} = 20 \log_{10} \frac{p_{rms}}{p_0} \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une onde harmonique $p(t) = p_0 \cos \omega t$ et on retrouve bien $p_{rms} = p_0 / \sqrt{2}$.

On obtient ainsi le niveau énergétique moyen sur la durée d'observation du signal. Lorsque plusieurs sources sont présentes et rayonnent de manière incohérente, on ajoute les puissances pour trouver l'énergie totale émise. Par exemple, dans le cas de deux sources incohérentes

$$L_{tot} = 10 \log_{10} (10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}) \quad (1.5)$$

Si $L_1 = 88dB$ et $L_2 = 85dB$, le niveau sonore total si les deux sources sont incohérentes est $L_{tot} = 89.8dB$. Dans le cas où $L_2 = 78dB$ nous trouvons $L_{tot} = 88.4dB$ et la source de faible niveau contribue très peu un niveau global. Si l'on voulait diminuer le niveau sonore, il serait par conséquent inutile de vouloir réduire le niveau de la source la plus faible car cela serait imperceptible sur le niveau global. Dans ce type de problème il faut d'abord se concentrer sur les sources de niveaux les plus élevés pour espérer un résultat significatif.

Lorsque deux sources cohérentes émettent des ondes sonores de même fréquence et que l'on écoute le son produit en un point donné, le son entendu est la superposition des sons produits par chacune des sources et il y a interférence entre les deux sons. Dans ce cas nous avons la relation $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$. Si le point d'écoute est situé à une distance r_1 de la première source et à une distance r_2 de la seconde source, il y a interférence constructive si les deux ondes sont en phase ce qui se produit si les distances r_1 et r_2 diffèrent par un multiple entier de la longueur d'onde. Il y a interférence destructive si les distances r_1 et r_2 diffèrent par un multiple impair de la demi longueur d'onde.

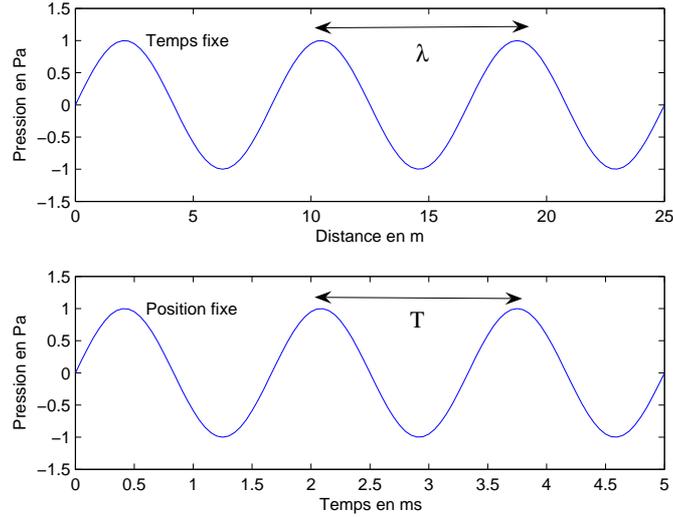


FIG. 1.7 – Longueur d’onde et période.

1.4 Energie acoustique

Parfois le niveau est aussi défini à partir de l’intensité acoustique donnée par la moyenne temporelle du produit de la pression par la vitesse du fluide suivant la formule

$$\mathbf{I} = \overline{p\mathbf{v}} = \frac{1}{T} \int_0^T p\mathbf{v}dt \quad (1.6)$$

Le niveau sonore est alors défini en décibel par

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (1.7)$$

avec $I_0 = 10^{-12}W/m^2$. Pour une onde plane dans l’air

$$I = \frac{p^2}{\rho c} \quad (1.8)$$

avec $\rho c \approx 400kgm^{-2}s^{-1}$. On peut vérifier dans ce cas que les deux définitions du niveau sonore sont équivalentes.

La puissance acoustique produite par des sources à l’intérieur d’une surface S est calculée par la formule suivante

$$W = \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.9)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à la surface S . Nous avons ainsi une définition du niveau sonore en terme de puissance acoustique par

$$L_W = 10 \log_{10} \frac{W}{W_0} \quad (1.10)$$

avec $W_0 = 10^{-12}W$. Ici encore la puissance de référence est choisie pour retrouver les définitions en pression dans le cas d’une onde plane. Une puissance de $1W$ donne ainsi un niveau élevé de $120dB$.

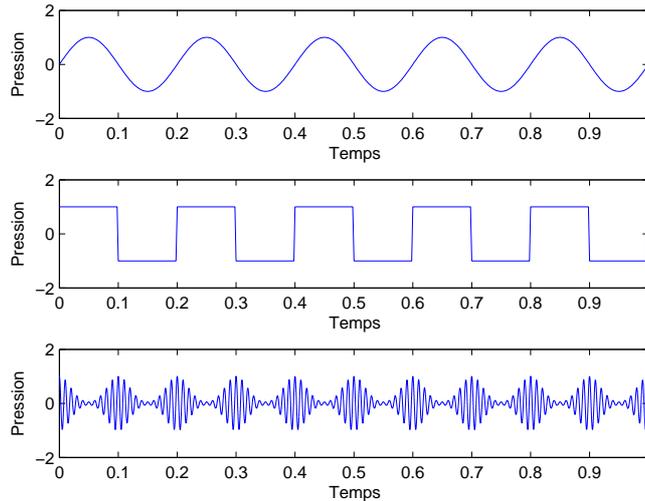


FIG. 1.8 – Signaux déterministes.

Il y a différentes grandeurs qui caractérisent l'énergie acoustique émises par des sources. Si pendant un temps T une source émet une énergie E sa puissance est donnée par

$$P = \frac{E}{T} \quad (1.11)$$

La puissance est mesurée en watts. Une source de puissance un watt émet un joule par seconde. Le tableau 1.1 donne la puissance acoustique de quelques sources. La puissance est une caractéristique intrinsèque de la source et ne dépend pas par exemple de la distance à laquelle on se trouve de la source. Lorsque plusieurs sources émettent de façon incohérente la puissance acoustique totale est la somme des puissances acoustiques de chaque source.

L'intensité acoustique à travers une surface S est égale à la puissance traversant cette surface divisée par la surface, soit

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{ST} \quad (1.12)$$

si la surface est traversée par une énergie E pendant le temps T . Elle est mesurée en W/m^2 .

1.5 Sources de bruit

Tous les dispositifs qui produisent des variations d'efforts ou de pression dans le domaine de fréquences perceptible par l'homme constituent des sources de bruit. Les sources de bruit peuvent être très variées dans leurs formes physiques, leurs caractéristiques et leurs mécanismes de génération du son. Un système mécanique comme une automobile peut être vu comme un ensemble de sources élémentaires et peut générer du bruit par un grand nombre de mécanismes. La liste ci-dessous donne quelques exemples de sources acoustiques.

1. Les sources aéroacoustiques : voix, instruments de musique à vent, écoulement d'air autour de voitures, de trains et d'avions. Le flux d'air crée un son et souvent la turbulence est une source supplémentaire.

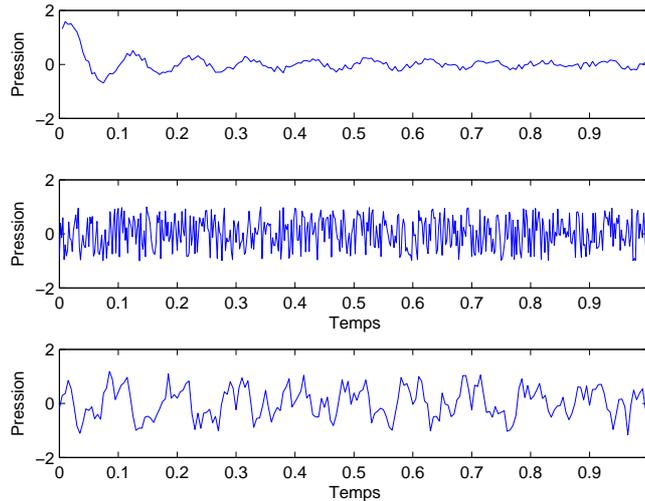


FIG. 1.9 – Signaux aléatoires.

2. Les machines sont des sources importantes. Elles comportent des parties en mouvement qui vont rayonner du son dans l'air.

Il y a ainsi deux mécanismes fondamentaux de production du son :

1. soit le mouvement du fluide seul produit un son
2. soit les vibrations d'une structure se propagent à l'air environnant et créent le rayonnement acoustique.

Du point de vue de leur forme spatiale, on peut classer les sources acoustiques comme étant monopolaires, dipolaires, quadrupolaires ou d'ordres plus élevés. La figure 1.10 donne une représentation du champ de pression émis par ces différentes sources. Les sources monopolaires produisent un déplacement net de volume fluide comme une sphère vibrant avec une vitesse uniforme sur sa surface. On peut classer dans cette catégorie les haut-parleurs avec un baffle, les sirènes, le bruit engendré par une combustion ou le bruit d'échappement. Les sources dipolaires sont obtenues par des variations locales de forces ou par des forces mobiles dans le fluide. Elles peuvent être vues comme constituées de deux monopoles en opposition de phase et placés très proches l'un de l'autre. Le bruit du aux pales d'un ventilateur, la sonnerie d'un téléphone, un moteur, se classent dans cette catégorie. Les sources quadrupolaires sont obtenues par des variations de contraintes dans un fluide, par exemple par turbulence. Le bruit engendré par un jet de fluide en est un exemple.

L'énergie acoustique produite est généralement une fraction infime de l'énergie mécanique mise en jeu. Cela peut expliquer qu'il est difficile de réduire cette énergie, déjà très faible sans une nouvelle conception de la source de bruit. Le meilleur moyen de contrôler le bruit est par un contrôle à la source obtenu dès la conception du système. Cette approche nécessite d'une part de connaître les mécanismes physiques qui engendrent le bruit et de pouvoir agir sur eux à un coût réaliste. Elle n'est donc pas toujours possible ou d'une efficacité limitée. Dans le cas de l'automobile par exemple, le bruit de contact pneumatique chaussée est mal compris et il est difficile de réduire significativement son impact sur le niveau de bruit global d'une automobile. Le bruit moteur peut être réduit par

Niveaux sonores		
Lieux extérieurs	dBA	Lieux intérieurs
Fusée au décollage	190	
Tir d'artillerie	140	Banc d'essai de turbo réacteur
Décollage d'un avion	130	Marteau pilon
Marteau pneumatique	120	Seuil de la douleur
	110	
Moto sans silencieux	100	Bruit d'essai de moteur
Camion	90	Bruit dangereux pour 8h d'exposition
3m d'une route	80	Atelier très bruyant, cris
Zone industrielle, forte circulation en ville	70	Atelier mécanique
Zone industrielle moyenne, trafic urbain	60	Salle bruyante, grand restaurant, conversation face à face
Zone résidentielle urbaine	50	Salle de réunion, restaurant calme
Zone résidentielle calme	40	Bureau, salle de classe
Zone rurale de jour	30	Bureau très calme, tic-tac d'une horloge
Zone rurale de nuit	20	Pièce très isolée, murmure
Bruissement de feuilles	10	
	0	Seuil de l'audition

TAB. 1.2 – Divers niveaux sonores

une meilleure conception et par une encapsulation du moteur. Cela nécessite des études poussées et peut influencer sur le coût de la voiture.

Une source omnidirectionnelle rayonne une énergie uniforme dans toutes les directions. Cela se produit principalement quand les dimensions de la source sont petites par rapport à la longueur d'onde. Pour une telle source de puissance P , l'intensité à une distance r est donnée par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (1.13)$$

Lorsque l'énergie n'est pas uniformément répartie la source est dite directive. Cela se produit d'autant plus que la fréquence est élevée. L'intensité est alors une fonction de l'angle $I(\theta, \phi)$ et l'intensité moyenne I_{moy} est donnée par la formule 1.13. Le facteur de directivité est alors défini par

$$Q(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_{moy}} \quad (1.14)$$

et l'indice de directivité par

$$ID(\theta, \phi) = 10 \log_{10} Q(\theta, \phi) \quad (1.15)$$

Pour une source omnidirectionnelle, on a $Q = 1$ et $ID = 0$.

Source	Puissance
Montre mécanique	$10^{-6}W$
Voix forte	$0.1mW$
Haut-parleur	$1W$
Avion	10^3W

TAB. 1.3 – Puissance acoustique de quelques sources.

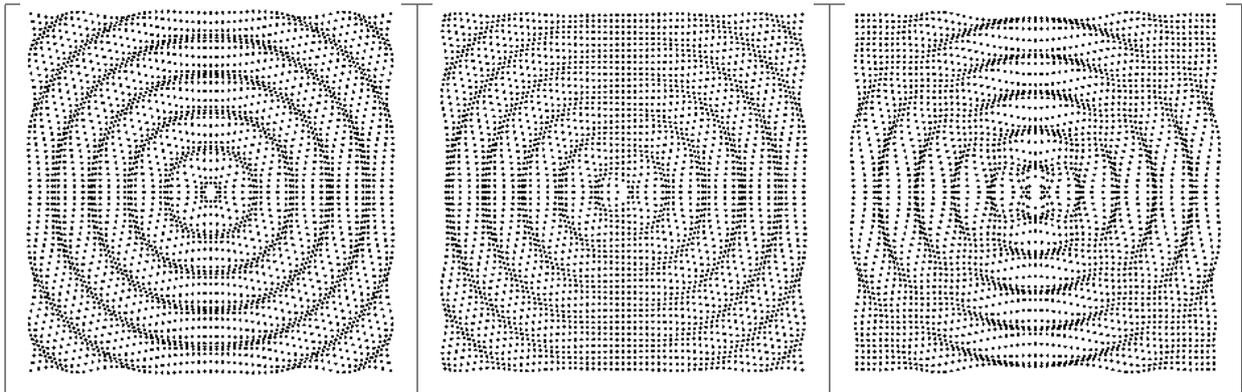


FIG. 1.10 – Sources monopolaire, dipolaire et quadripolaire (de gauche à droite).

1.6 Applications de l'acoustique

1. Audition -> médical
2. Parole, intelligibilité, sonorisation
3. Prise de son dans les spectacles
4. Instruments de musique
5. Acoustique des salles
6. Conception acoustique des bâtiments
7. Acoustique des transports : voiture, train, avion
8. Problème de bruit dans l'environnement
9. Bruit des machines
10. environnement de travail, santé
11. Ultrasons : médical, soudure
12. Acoustique sous marine

Le cours vise à maîtriser les différents aspects de l'acoustique en débutant par la perception humaine du son. En effet l'acoustique n'a d'intérêt que dans la mesure où il y a des individus

pour entendre les sons. On abordera ensuite les équations physiques qui gouvernent les phénomènes sonores puis on les utilisera pour résoudre quelques problèmes de propagation sonore.

Ensuite on étudiera la mesure du son en débutant par une description plus fine des différents signaux sonores et par les moyens de les analyser. Ensuite les principes physiques à la base du fonctionnement des microphones et des haut-parleurs seront présentés.

Comme la plupart des sons sont produits par les vibrations de structures, nous rappellerons dans les chapitres 7 et 8 les bases de l'étude des vibrations de structures avant d'aborder dans le chapitre suivant le couplage fluide structure ainsi que le rayonnement et la diffraction du son par les structures.

Comme ce type de calcul et beaucoup d'autres problèmes en acoustique ne sont pas solubles analytiquement, nous présenterons dans le chapitre 10 les principales méthodes numériques utilisées pour le calcul des champs de pression sonores.

Nous aborderons ensuite l'étude des matériaux absorbants avant de présenter les bases de l'acoustique des salles.

Finalement nous terminerons le cours par la description du contrôle actif en acoustique qui permet la réduction du niveau sonore pour les basses fréquences.

Chapitre 2

Perception du son

2.1 Effets du son

Le son a très peu d'effet mécanique sur les structures. Le principal effet est sur l'homme à travers son système auditif. Pour pouvoir comprendre comment se fait la perception du son, il faut connaître les caractéristiques essentielles du système auditif.

L'oreille se compose de trois parties : l'oreille externe, formée du pavillon et du conduit auditif externe qui aboutit au tympan, l'oreille moyenne au delà du tympan qui contient les osselets et l'oreille interne formée par le labyrinthe rempli de liquide. Un schéma est donné sur la figure 2.1. La cochlée dans l'oreille interne transforme les pressions sonores en impulsions nerveuses qui sont conduites au cerveau par le nerf auditif. Cette transformation est effectuée dans l'organe de Corti par des cellules sensorielles, les cellules ciliées. Les vibrations sonores déforment les cils, qui excitent ensuite le nerf auditif. Des muscles permettent d'adapter la raideur du tympan et les points d'appui des leviers formés par les osselets en fonction de l'intensité sonore. Cependant cette action n'est pas instantanée et une exposition rapide à un bruit intense peut présenter des dangers. L'accroissement de raideur du tympan ou la détérioration des cils dans l'organe de Corti sont les causes les plus fréquentes de surdité.

L'oreille n'a pas une réponse linéaire et ses capacités sont limitées que ce soit en fréquence ou en intensité. L'oreille n'est sensible qu'aux sons entre 20Hz et 20kHz, voir figure 2.2. Les infrasons sont les sons inférieurs à 20Hz et les ultrasons ceux supérieurs à 20kHz. La parole se situe principalement entre 100 et 6000Hz, la musique entre 50 et 16000Hz. Différentes études ont permis de tracer des courbes isosoniques donnant la même sensation auditive à des fréquences et à des niveaux sonores différents, voir figure 2.3. Par exemple un son de 20Hz doit être 70dB plus fort qu'un son de 2000Hz pour produire la même sensation. La sensibilité de l'oreille varie beaucoup en fonction de la fréquence avec un maximum de sensibilité qui se situe vers 2000 Hz. La courbe la plus basse représente le seuil d'audition en fonction de la fréquence. Ce seuil est variable en fonction de la fréquence, néanmoins on retiendra la valeur de 0dB pour le seuil d'audition. Pour les intensités sonores élevées on atteint le seuil de la douleur qui se situe vers 120dB.

Dans le tableau 2.1 sont indiqués les effets d'une modification du niveau sonore sur la perception. Nous pouvons constater qu'il faut une différence d'environ 3dB sur le niveau sonore pour que l'on perçoive une différence significative entre les niveaux sonores. Une différence de 10dB sera perçue comme un doublement du niveau sonore.

Pour tenir compte de cette sensibilité de l'oreille, il est nécessaire de filtrer un bruit par la courbe

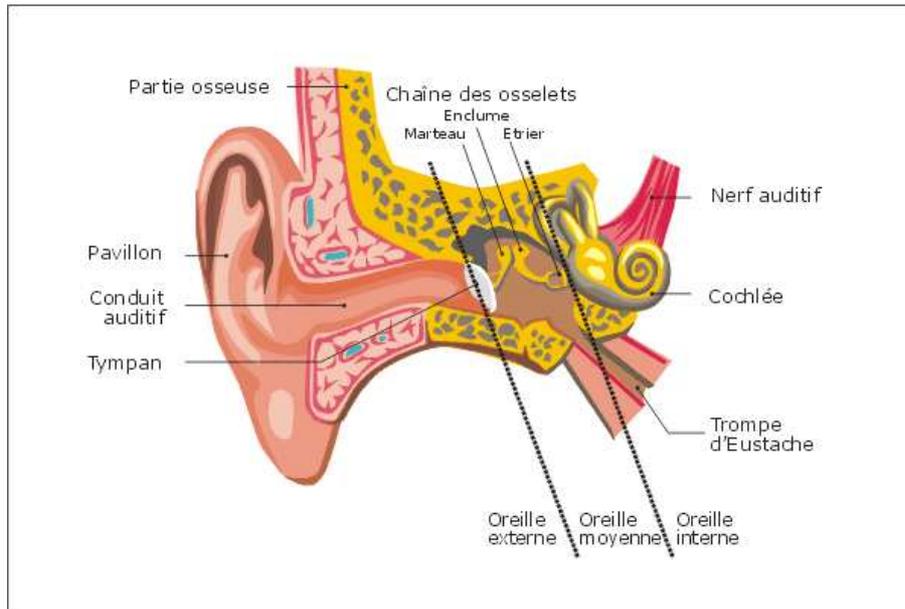


FIG. 2.1 – Schéma de l'oreille.

Changement du niveau sonore (dB)	Changement de la perception
3	Juste perceptible
5	Différence notable
10	Deux fois plus fort
15	Grand changement
20	Quatre fois plus fort

TAB. 2.1 – Perception des niveaux sonores.

de pondération A représentée sur la figure 2.4 et dans le tableau 2.2, ce qui donne une mesure en dBA. La courbe de pondération A est obtenue à partir de la courbe isosonique pour le niveau de 40dB. Elle permet d'accorder plus d'importance aux fréquences les mieux entendues et donne ainsi une estimation plus réaliste du niveau sonore entendu par l'oreille. Le même bruit mesuré sans ce filtrage est dit donné en dB Lin.

Pour qu'un son soit nettement perçu dans une ambiance bruyante, il faut que son niveau soit au moins 15dB supérieur au niveau du bruit ambiant.

2.2 Indicateurs de bruit

Le bruit se présente généralement sous la forme d'une pression variable en fonction du temps. Il s'agit souvent d'un signal aléatoire comme celui montré sur la figure 2.5. Ce signal varie beaucoup d'un instant à l'autre. Pour pouvoir définir un niveau sonore équivalent, on pose

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{p^2(t)}{p_0^2} dt \right) \quad (2.1)$$

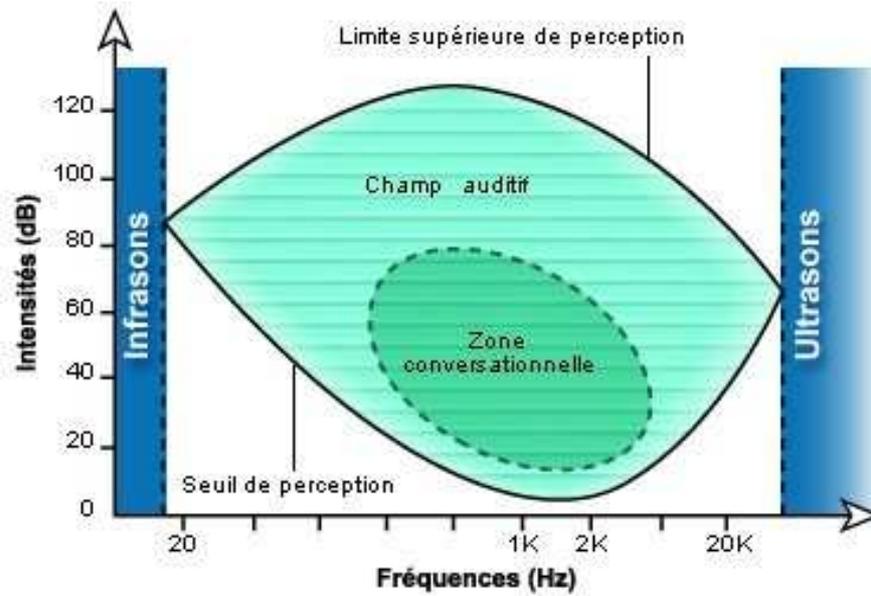


FIG. 2.2 – Perception du son.

Fréquence (Hz)	Pondération A (dB)
63	-26.2
125	-16.2
250	-8.7
500	-3.2
1000	0.0
2000	1.2
4000	1.0
8000	-1.1
16000	-6.7

TAB. 2.2 – Pondération A.

Le signal de pression peut être mesuré en dB linéaire ou en dBA. Le plus courant est d'utiliser des dBA. On définit ainsi un niveau équivalent sur la durée T. Cette durée T peut être de quelques secondes ou de plusieurs heures suivant les applications envisagées.

Un autre indicateur possible est de définir le niveau dépassé pendant N% du temps. Par exemple le L_{10} est le niveau dépassé pendant 10% du temps, voir la figure 2.6. Le L_{pmax} est le niveau maximum atteint durant la durée d'observation.

On définit aussi la dose de bruit admissible comme 85dB pendant 8h. La dose de bruit réelle doit être pondérée par la durée effective à laquelle on est soumis au bruit et par son niveau suivant la formule

$$L = L_{eq,T} + 10 \log_{10} \frac{T}{8} \quad (2.2)$$

ainsi un niveau de bruit de 89.2dB pendant 4h engendre une dose de bruit journalière de

$$L = 89.2 + 10 \log_{10} \frac{4}{8} = 89.2 - 3 = 86.2dB \quad (2.3)$$

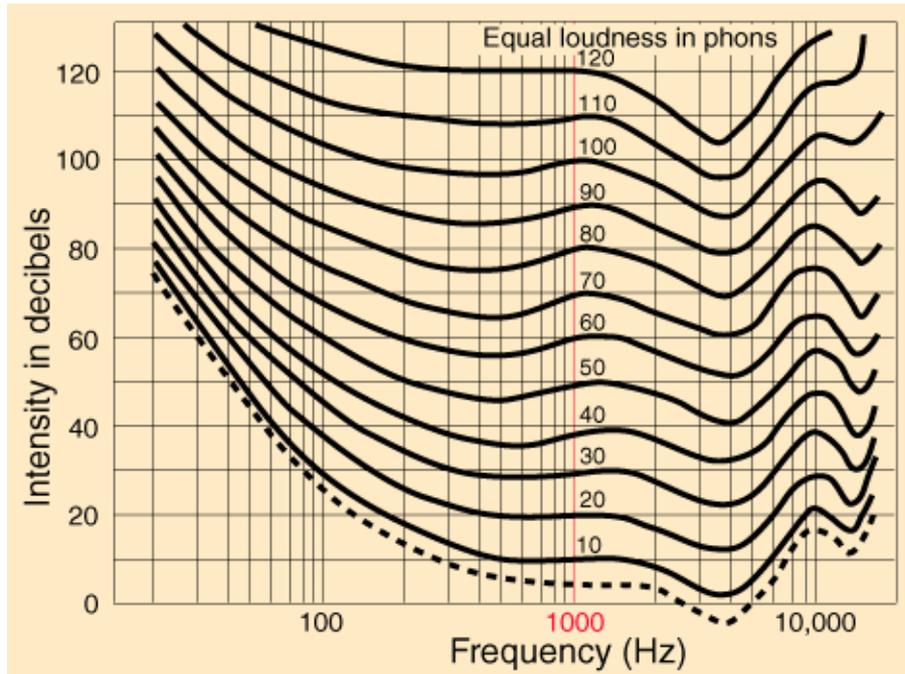


FIG. 2.3 – Courbes isosoniques.

Dans le cas de bruits impulsionnels on veillera à ne pas dépasser le niveau de 140 dB. Un bruit impulsionnel est défini comme une augmentation de 40dB en moins de 0.5s. La limite de sécurité pour l'oreille est fixée à 140dB. A titre d'exemple l'oreille peut supporter 130dB pendant plus de 2mn.

2.3 La gêne et les limites de danger

La perception d'un bruit se caractérise par une notion plus ou moins subjective appelée la gêne qui dépend de multiples facteurs comme l'intensité sonore, le spectre du bruit, sa durée mais aussi éventuellement de facteurs plus personnels comme l'état de santé ou l'acceptation plus ou moins grande du bruit en fonction de sa provenance. On admet généralement que, pour un bruit qui ne varie pas trop rapidement, la gêne ressentie varie comme l'énergie moyenne reçue, soit comme le L_{eq} . On peut aussi utiliser la notation $L_{eq,T}$ si l'on veut insister sur la durée utilisée pour la mesure du niveau sonore. La durée T peut être de plusieurs heures quand il s'agit d'estimer la gêne due à un bruit de circulation automobile. Cette durée peut être réduite à une minute ou une seconde dans d'autres cas.

La qualité de l'audition d'un individu peut être mesurée par un audiogramme comme représenté sur la figure 2.7. Ces courbes mesurent l'écart entre une audition parfaite et la perception réelle des oreilles. Généralement, il y a des pertes auditives plus ou moins prononcées et principalement situées dans les hautes fréquences. La figure 2.8 montre trois niveaux possibles de pertes de faible à sévère. Des pertes de -10 à -25 dB sont normales. Les pertes réelles commencent de 30 à 45 dB. Des pertes sévères sont de 70 à 85dB tandis qu'au delà de 90dB les pertes sont profondes et la capacité d'audition très gravement compromise. L'âge influe aussi directement sur les capacités

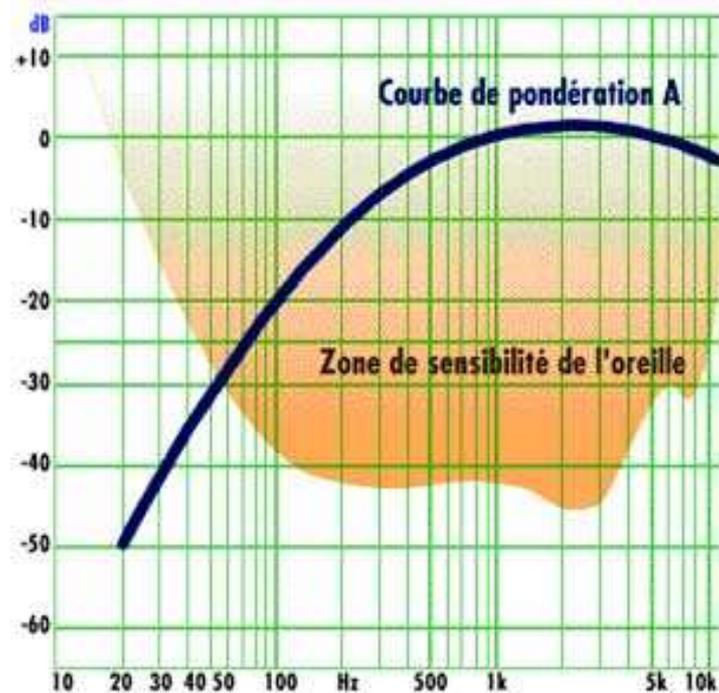


FIG. 2.4 – Courbe de pondération A.

auditives. La figure 2.9 montre les capacités auditives moyennes d'une personne en fonction de son âge. On constate que la détérioration a lieu principalement dans les hautes fréquences. Les pertes d'audition ont pour conséquences des pertes de compréhension de la parole et des signaux. Les effets sont irréversibles et par conséquent seule la prévention est efficace. Les effets constatés sont une élévation du seuil d'audition, les sons de faible intensité ne sont plus perçus, et un abaissement du seuil de la douleur, des sons d'intensité normale pour la plupart des gens deviennent insupportables.

Des expositions de longues durées à des bruits peuvent être nuisibles. Cela provoque un assourdissement par suite du réflexe de diminution de sensibilité et si le bruit est trop intense ou s'il dure trop longtemps, une fatigue auditive plus ou moins réparable s'installe. Elle se manifeste par une élévation du seuil d'audition, variable avec la fréquence. Cette fatigue disparaît progressivement au cours du repos. La figure 2.10 donne la perte auditive à différents instants suivant une exposition à un bruit fort. On a fait écouter à un panel représentatif un bruit blanc pendant 10 mn avec un niveau acoustique de 110 dB. Une minute après la suppression du bruit, on fait subir un premier audiogramme à l'ensemble du panel. Leurs moyennes ont donné la courbe notée 1mn. On réalise un second audiogramme après 15 mn de repos, puis un troisième après une heure et ainsi de suite. Cependant au-delà d'une certaine dose d'énergie reçue le temps de récupération demande un repos de plus en plus long et il reste finalement une perte auditive permanente. Pour 8h heures d'exposition quotidienne, on peut estimer qu'en dessous de 70dBA, il n'y a pas de danger alors qu'au-dessus de 85 dBA le danger de surdité professionnelle est très grand si la durée d'exposition est importante (plusieurs années). La limite de danger pour des bruits continus est indiquée sur le tableau 2.3 en fonction de la durée d'exposition. 5% des individus exposés à des niveaux de 80dBA développent des pertes auditives significatives alors que le taux devient de 15 à 25% pour une exposition de 90dBA. La limite pour des bruits impulsionnels est indiquée sur le tableau 2.4

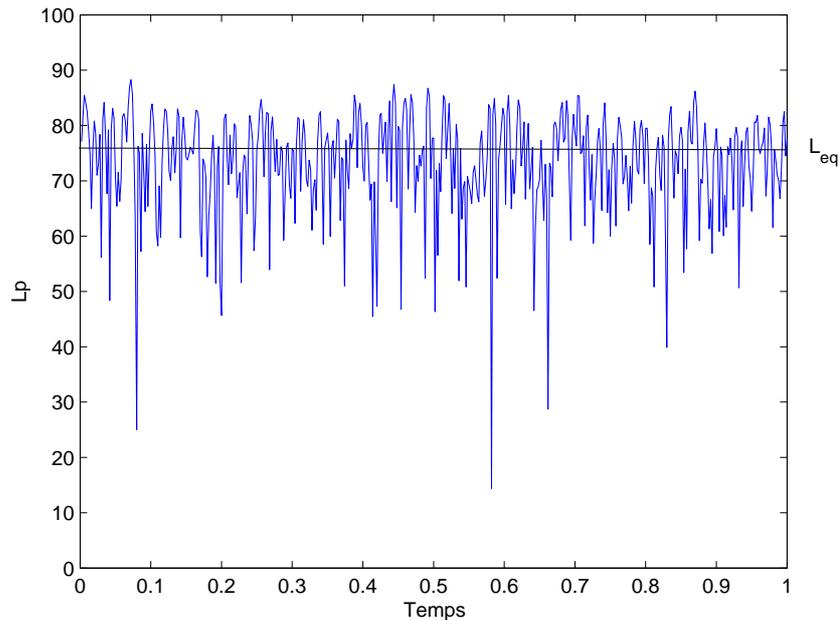


FIG. 2.5 – Niveau sonore équivalent.

en fonction du nombre d'impulsions.

Lorsque l'on est exposé à des bruits dépassant les normes de sécurité et qu'il est impossible de réduire le bruit à la source, il est impératif d'utiliser des moyens de protection individuels qui sont soit des bouchons d'oreille, soit des serre-têtes, voir les figures 2.11 et 2.12.

2.4 Réglementation

Les problèmes de bruit ont engendré une réglementation abondante et en constante évolution. Elle vise à fixer des seuils réglementaires à ne pas dépasser pour chaque type d'activité ou de matériel.

Au travail

Le code du travail et plusieurs autres textes prévoient une réglementation au niveau professionnel. Ainsi le décret du 19 juillet 2006 qui traduit en droit français la directive européenne 2003/10/CE fixe les limites suivantes. Lorsque l'exposition sonore quotidienne (pour 8 heures) subie par un travailleur dépasse le niveau de 80 dB(A) ou lorsque la pression acoustique de crête dépasse le niveau de 135 dB, une action de prévention est nécessaire. L'employeur est tenu de mettre à la disposition du salarié des protecteurs individuels contre le bruit. Lorsque l'exposition sonore quotidienne dépasse le niveau de 85 dB(A) ou lorsque la pression acoustique de crête dépasse le niveau de 137 dB, une action corrective doit être appliquée. Il est alors demandé de mettre en œuvre un programme d'actions de réduction d'exposition au bruit. Les limites de 87 dB(A) pour 8 heures ou de 140 dB en pression de crête ne doivent jamais être dépassées.

Bâtiments

La réglementation est la aussi abondante. Par exemple pour les nouveaux logements, l'isolation vis

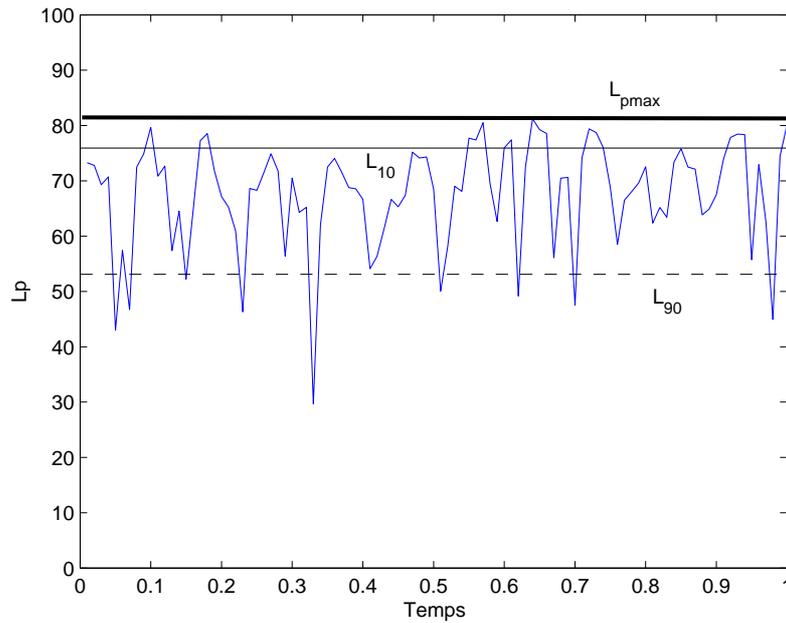


FIG. 2.6 – Niveau en pourcentage du temps.

Niveau de pression acoustique continu équivalent en dB(A)	85 dB(A)	91 dB(A)	100 dB(A)	112 dB(A)
Durée journalière d'exposition équivalente à une exposition de 85 dB	8 heures	2 heures	15 minutes	1 minute

TAB. 2.3 – Exposition à des sons continus.

à vis du bruit de l'extérieur doit être d'au moins 30 dBA. L'isolation entre un logement voisin et la pièce principale d'un logement doit être d'au moins 53 dBA.

Musique

Dans les locaux recevant du public et diffusant à titre habituel de la musique amplifiée, le niveau sonore ne doit pas dépasser 105 dBA au niveau moyen et 120 dBA au niveau de crête. La puissance maximum de sortie des baladeurs doit être limitée à 100 dBA.

Transport

Les niveaux sonores diurne (6h - 22h) et nocturne (22h - 6h) des routes nouvelles en façade des logements initialement situés en zone de bruit modéré sont plafonnés à 60 dBA et 55 dBA. Cela s'applique aussi aux établissements sensibles (santé, soins, enseignement, action sociale). L'intensité sonore émise par une voiture doit être limitée à 74dB.

Niveau de pression acoustique de crête (en dB)	135 dB	115 dB	95 dB	90 dB
Nombre limite d'impulsions ou de chocs pour 8 heures	1	100	10 000	30 000

TAB. 2.4 – Exposition à des sons impulsionnels.

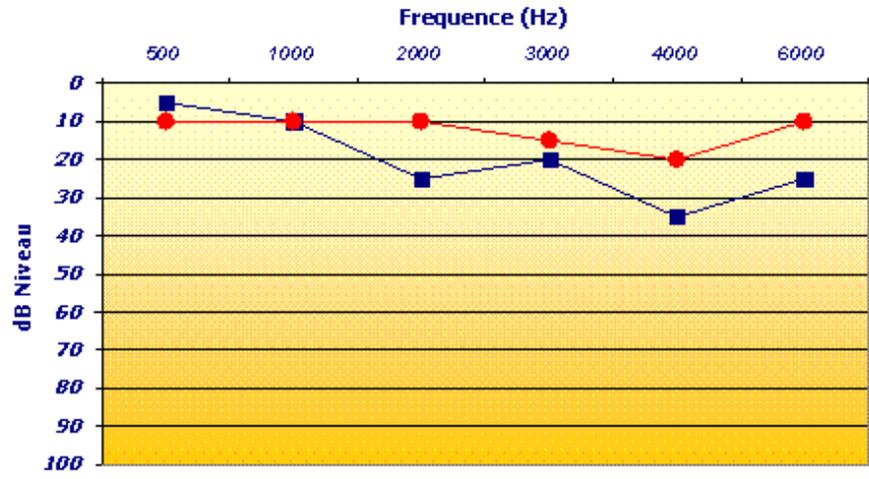


FIG. 2.7 – Audiogramme.

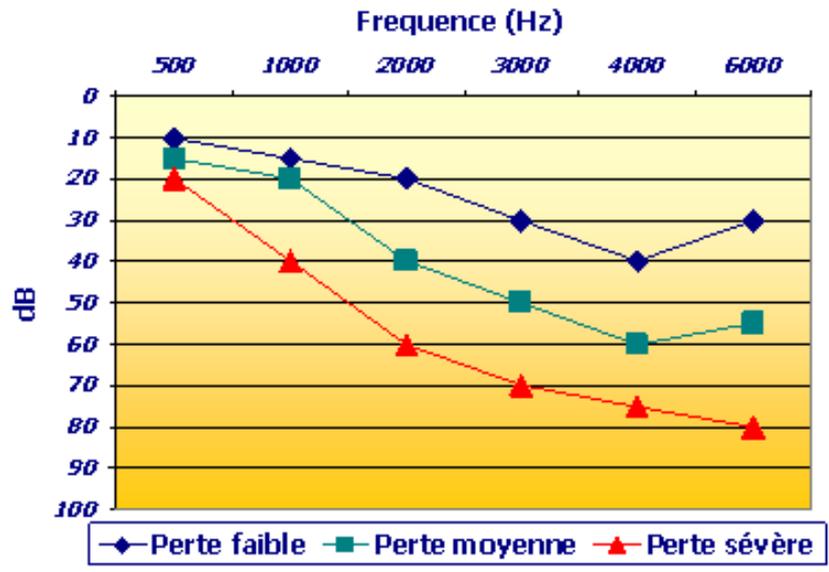


FIG. 2.8 – Dommages auditifs.

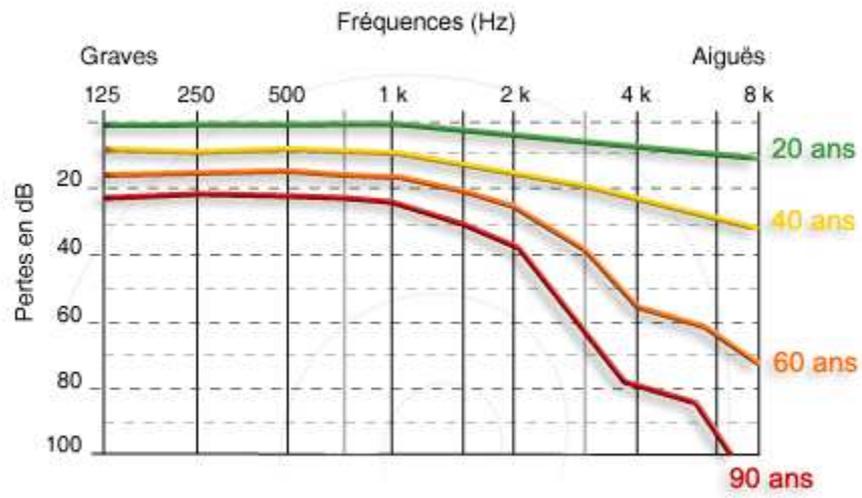


FIG. 2.9 – Perte auditive.



FIG. 2.10 – Temps de récupération.



FIG. 2.11 – Bouchon d'oreille.



FIG. 2.12 – Casque antibruit.

Chapitre 3

Les équations de l'acoustique

3.1 L'équation des ondes

Le mouvement général d'un fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes (voir le cours de mécanique des milieux continus). Les équations de base sont la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et l'équation d'état du fluide.

Nous commençons par rappeler la loi de conservation de la masse. En notant Γ la masse volumique, \mathbf{V} la vitesse du fluide et R la densité volumique du taux de matière reçue par le fluide venant de l'extérieur, la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) = R \quad (3.1)$$

La conservation de la quantité de mouvement est maintenant introduite. Notant \mathbf{F} le vecteur des efforts extérieurs par unité de volume, et $\boldsymbol{\Sigma}$ les contraintes dans le fluide, la conservation de la quantité de mouvement est

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.2)$$

Comme $\operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{V} \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$, l'équation (3.2) devient :

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) \right\} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.3)$$

Combinant les équations (3.1) et (3.3), on obtient finalement :

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} - R \mathbf{V} \quad (3.4)$$

Le champ de contrainte total est $\boldsymbol{\Sigma} = -P \mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}^v$. P est le champ de pression dans le fluide et $\boldsymbol{\Sigma}^v$ est le champ de contrainte provenant de la viscosité du fluide qui est négligée par la suite.

Les équations précédentes sont valables pour un fluide quelconque. Dans le cas de l'acoustique nous pouvons apporter de grandes simplifications à ces relations. Nous avons vu dans les chapitres précédents que les fluctuations du mouvement du fluide sont supposées petites de sorte que l'écoulement du fluide peut être considéré peu perturbé par rapport au repos. L'écoulement sera décrit comme la somme d'un écoulement au repos non perturbé indicé 0 et d'une petite perturbation. Les coordonnées d'espace et de temps sont notées \mathbf{x} et t . Nous avons donc

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}, t) \\ P(\mathbf{x}, t) = P_0(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ R(\mathbf{x}, t) = 0 + r(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Les équations de conservation linéarisées deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = r \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (3.6)$$

Les compressions et décompressions d'air dans le fluide s'effectuent dans un intervalle de temps petit par rapport au temps de propagation de la chaleur. Par conséquent les pertes d'énergie par transformation de l'énergie mécanique en chaleur sont petites et le fluide peut être supposé adiabatique. Le fluide peut donc être supposé un gaz parfait (en pratique l'air). Le comportement du gaz donne une relation entre les pressions et masses volumiques totales

$$p_{tot} = p_0 \left(\frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3.7)$$

avec $p_0 = 10^5 Pa$, $\rho_0 = 1.293 kg/m^3$ et $T_0 = 273K$ les pression, masse volumique et température à l'état de référence dans le fluide au repos. On en déduit une relation entre les variables linéarisées p et ρ :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\gamma \rho}{\rho_0} \quad (3.8)$$

En introduisant la constante des gaz parfaits R_g et la masse molaire du gaz M , on obtient

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2 = \frac{\gamma R_g T_0}{M} \quad (3.9)$$

c est appelé célérité du son isentropique du fluide au repos et est uniforme pour un mouvement isotherme. Dans l'air $\gamma = 1.41$, $R_g/M = 287 J/kg \cdot ^\circ C$, $c = 331 m/s$ à $0^\circ C$, $343 m/s$ à $20^\circ C$, et plus généralement $c = 20.12 \sqrt{T}$ où T est la température en degré Kelvin.

En remplaçant (3.9) dans la première équation de (3.6), nous obtenons les équations générales de l'acoustique :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = r \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (3.10)$$

En prenant la dérivée en temps de la première relation moins la divergence de la seconde, on en déduit l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{f} \quad (3.11)$$

On pourra aussi poser $r = \rho_0 q$ où q est identifié comme un débit par unité de volume.

Lorsque l'onde est harmonique avec une dépendance en temps de la forme $e^{-i\omega t}$, l'équation des ondes se transforme en l'équation de Helmholtz.

$$\boxed{\Delta p + k^2 p = i\omega r + \operatorname{div} \mathbf{f}} \quad (3.12)$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde (c'est la rotation de phase par unité de longueur).

Remarque :

1. Lorsque des échanges de chaleur importants peuvent avoir lieu comme à proximité d'une paroi ou dans les milieux poreux ou fibreux la propagation n'est plus adiabatique et l'étude précédente doit être modifiée.
2. Il est possible de modifier le développement précédent dans le cas où le fluide n'est plus au repos mais animé d'une vitesse uniforme. C'est le cas lorsqu'il y a un écoulement de fluide par exemple en présence de vent.
3. Les équations entourées sont les équations fondamentales de l'acoustique et sont à la base de tous les développements ultérieurs. Elles doivent donc être parfaitement maîtrisées.

3.2 Impédance acoustique et couplage fluide-structure

Pour des ondes harmoniques, l'impédance est définie par le rapport entre la pression et la vitesse. C'est généralement une fonction de la position.

$$z(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} \quad (3.13)$$

Dans le cas d'une onde plane, on vérifiera que l'impédance est constante et vaut

$$z = \rho_0 c \quad (3.14)$$

L'inverse de l'impédance est l'admittance qui est définie par $\beta = 1/z = v/p$. Ces deux grandeurs seront souvent utilisées par la suite. Le nombre sans dimension $z/(\rho_0 c)$ est appelé l'impédance réduite. Dans l'air $\rho_0 c = 412 \text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$ à 20°C . Cette valeur est souvent approximée par $\rho_0 c \approx 400 \text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$.

Lors du couplage d'un fluide avec une structure, il faut écrire la continuité des grandeurs mécaniques entre le fluide et la structure. Rigoureusement, il faudrait écrire la continuité du vecteur vitesse qui exprime qu'il n'y a pas de perte de fluide entre les deux domaines. Cependant comme l'air ou l'eau sont des fluides peu visqueux, les composantes de la vitesse parallèles à la surface du fluide varient considérablement dans une couche limite de très faible dimension. C'est pour cela que la condition aux limites à appliquer dans ce cas est la continuité de la seule composante normale de la vitesse. Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} &= \sigma_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'approche précédente est la plus complète mais elle nécessite la connaissance des vibrations de la structure. Cette condition aux limites peut souvent être remplacée par une condition simplifiée ne faisant intervenir que l'impédance. C'est notamment le cas quand la frontière est constituée d'une

couche de matériau poreux. On écrit alors la condition d'impédance en faisant intervenir la vitesse normale à la frontière.

$$p(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

L'impédance $z(\mathbf{x})$ est une donnée qui dépend des propriétés physiques du matériau et de son épaisseur. Le vecteur normal \mathbf{n} est dirigé vers la structure.

3.3 Onde plane

Dans le cas unidimensionnel, l'équation des ondes s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (3.17)$$

La solution générale est la somme d'une onde se propageant vers la droite et d'une onde se propageant vers la gauche, voir les figures 3.1 et 3.2.

$$p(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c) \quad (3.18)$$

Les valeurs des fonctions f et g peuvent s'obtenir à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

Dans le cas d'une onde harmonique de pulsation ω , l'équation devient

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0 \quad (3.19)$$

et la solution est

$$p(x, t) = p_1 e^{i(kx - \omega t)} + p_2 e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.20)$$

ce qui est encore la somme de deux ondes se propageant dans des sens opposés. La vitesse est donnée par

$$v(x, t) = \frac{p_1}{\rho c} e^{i(kx - \omega t)} - \frac{p_2}{\rho c} e^{i(kx + \omega t)} = v_1 e^{i(kx - \omega t)} - v_2 e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.21)$$

Nous avons donc les relations

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho c v_1 \\ p_2 &= -\rho c v_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dans ce cas l'impédance vaut $+\rho c$ ou $-\rho c$ suivant le sens de propagation.

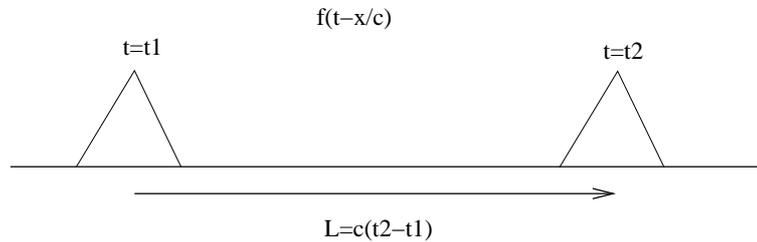


FIG. 3.1 – Propagation vers la droite.

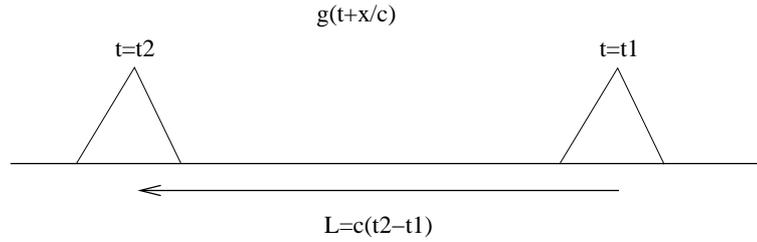


FIG. 3.2 – Propagation vers la gauche.

De manière générale, une onde plane a un champ de pression uniforme sur un ensemble de plans parallèles entre eux. Le champ de pression est donné par

$$p(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \quad (3.23)$$

Le vecteur \mathbf{n} est orthogonal aux plans, voir la figure 3.3. La vitesse particulière du fluide est donnée

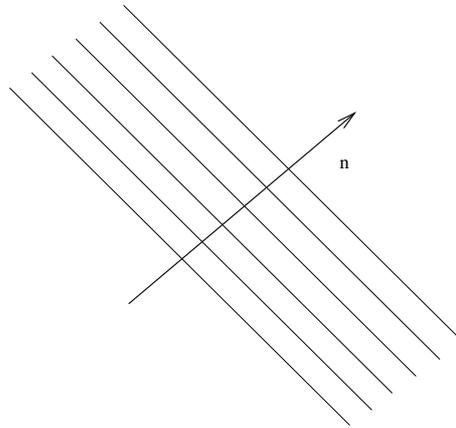


FIG. 3.3 – Onde plane.

par

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\mathbf{n}}{c} f' \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{n}}{\rho c} p \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dans le cas d'une onde harmonique de pulsation ω , le champ de pression est

$$p(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \quad (3.25)$$

avec le vecteur d'onde

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = k \mathbf{n} \quad (3.26)$$

Dans la pratique on trouve des ondes planes dans les guides d'onde (voir la suite du cours) et loin des sources.

Le front d'onde est la surface où tous les points vibrent en phase. Pour les ondes planes les fronts d'onde sont des plans alors que pour les ondes sphériques les fronts d'onde sont des sphères. Sur la figure 3.4 le front d'onde sphérique au voisinage de la source se transforme en front d'onde plan très loin de la source.

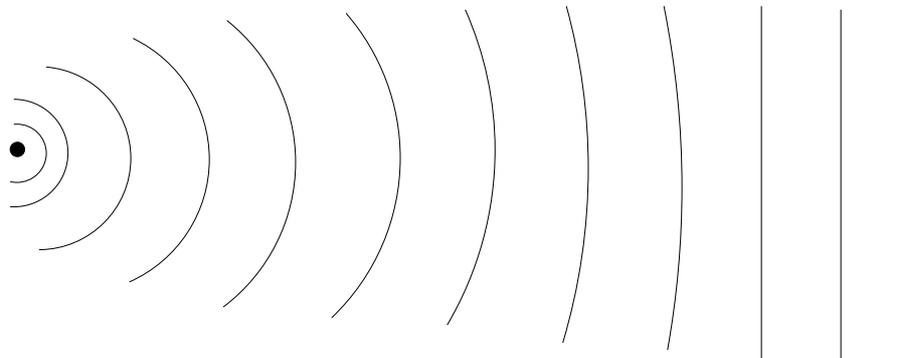


FIG. 3.4 – Front d'onde.

3.4 Source ponctuelle

On peut aussi chercher les solutions à symétrie sphérique ou cylindrique. Le Laplacien en coordonnées sphériques s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (3.27)$$

Dans le cas d'une onde sphérique la solution ne dépend que du rayon et vérifie donc en temps

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.28)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.29)$$

La solution s'obtient alors à partir de la solution de l'équation des ondes en 1D et s'écrit

$$p(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \quad (3.30)$$

et dans le cas harmonique

$$p(r, \omega) = p_1 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + p_2 \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r} \quad (3.31)$$

Le premier terme est une onde sortante et le second une onde entrante. Le champ de vitesse qui est aussi radial vaut

$$u_r(r, \omega) = \frac{1}{i \rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.32)$$

Dans le cas d'une onde harmonique sortante la vitesse est

$$u_r(r, \omega) = \frac{p}{\rho_0 c} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \quad (3.33)$$

et l'impédance de l'onde sphérique est donc

$$Z = \frac{\rho_0 c}{\left(1 + \frac{i}{kr} \right)} \quad (3.34)$$

près de l'origine r est petit et l'impédance est une grandeur complexe qui tend vers $-i\rho_0 ckr$ quand r tend vers 0. On est alors en champ proche. Au contraire quand r est grand on est en champ lointain et l'impédance tend vers $\rho_0 c$ qui est l'impédance spécifique du milieu. On retrouve dans ce cas un comportement d'onde plane.

Une solution particulièrement importante de l'équation de Helmholtz est le cas d'une source ponctuelle en 3D solution de

$$\Delta_x G + k^2 G = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.35)$$

Elle est donnée par

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (3.36)$$

En coordonnées cylindriques, nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.37)$$

et en dimension deux la solution correspondante est

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (3.38)$$

avec $H_0 = J_0 + iY_0$ où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel et de Neumann de première espèce d'ordre 0.

3.5 Dipôle

Une autre solution possible est le dipôle qui est constitué de deux monopôles en opposition de phase placés à proximité l'un de l'autre. Physiquement, il est obtenu par exemple par le rayonnement d'un piston non bafflé, voir les figures 3.5 et 3.6. La pression engendrée par le dipôle est donnée par

$$p(x) = q \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} - q \frac{e^{ikr_2}}{4\pi r_2} \quad (3.39)$$

Lorsque d est petit par rapport à la distance r , nous avons

$$\begin{aligned} r_1 &\approx r + d \cos \theta \\ r_2 &\approx r - d \cos \theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

La pression est donc donnée par

$$p(x) = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (e^{ikd \cos \theta} - e^{-ikd \cos \theta}) = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r} 2i \sin(kd \cos \theta) \quad (3.41)$$

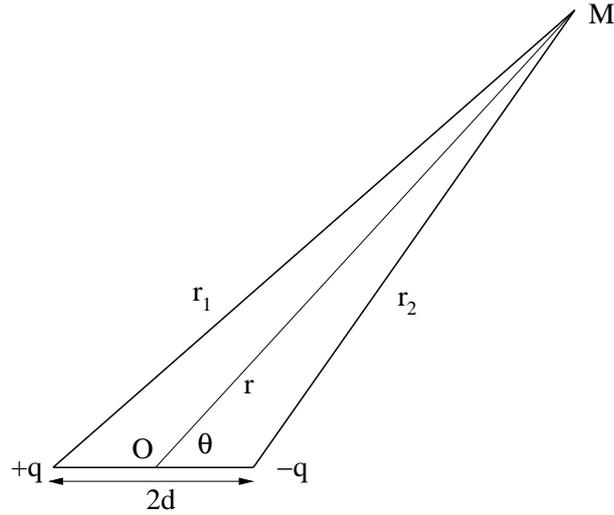


FIG. 3.5 – Dipôle.

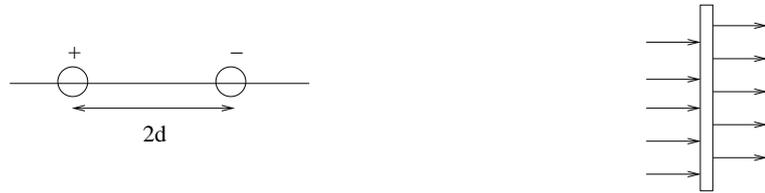


FIG. 3.6 – Exemples de dipôles.

Si de plus d est petit devant la longueur d'onde, nous obtenons l'expression du champ de pression rayonné par le dipôle

$$p(r, \theta) = \frac{qe^{ikr}}{4\pi r} (2ikd \cos \theta) \quad (3.42)$$

En champ lointain, l'impédance des ondes sphériques est égale à $\rho_0 c$ et l'intensité vaut

$$I(r, \theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\rho_0 c} \left| \frac{qe^{ikr}}{4\pi r} (2kd \cos \theta) \right|^2 \right) = \frac{(|q|2kd \cos \theta)^2}{16\pi^2 r^2 \rho_0 c} \quad (3.43)$$

La puissance rayonnée par le dipôle est alors

$$W = 2\pi r^2 \int_0^\pi I(r, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(|q|kd)^2}{3\pi \rho_0 c} \quad (3.44)$$

Pour caractériser l'écart entre le rayonnement d'une source et le rayonnement d'une source isotrope de même puissance, on introduit la notion de directivité selon la formule

$$Q(\theta, \phi) = I(r, \theta, \phi) 4\pi r^2 / W \quad (3.45)$$

Dans le cas du dipôle, nous avons

$$Q(\theta, \phi) = 3 \cos^2 \theta \quad (3.46)$$

Ce diagramme de directivité est représenté sur la figure 3.7.

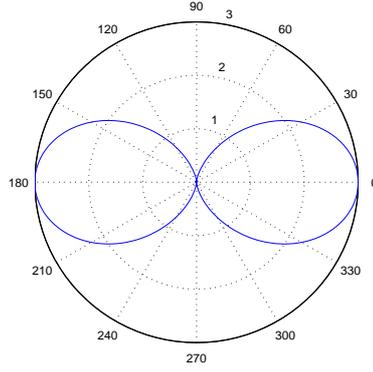


FIG. 3.7 – Diagramme de directivité d'un dipôle.

3.6 Bilan d'énergie

Introduisons une densité de sources de débit volumique $q(\mathbf{x})$. Les équations fondamentales de l'acoustique s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \rho_0 q(\mathbf{x}) \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

En notant $\mathbf{I} = p\mathbf{v}$ le vecteur intensité acoustique, mesuré en W/m^2 , la définition de la puissance rayonnée est

$$W_{ray} = \int_{\Gamma} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dx \quad (3.48)$$

Ecrivons $\operatorname{div}(p\mathbf{v})$ à partir des équations (3.47)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) &= \nabla p \cdot \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= -\rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{p}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + pq \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'énergie potentielle acoustique E_p est définie par :

$$E_p = \frac{1}{2\rho_0 c^2} \int_{\Omega} p^2 dx \quad (3.50)$$

L'énergie cinétique acoustique E_c est définie par :

$$E_c = \frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 dx \quad (3.51)$$

La puissance rayonnée par la source W est définie par :

$$W = \int_{\Omega} pq dx \quad (3.52)$$

En intégrant la relation 3.49 sur le volume fluide, le bilan final s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \frac{p}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} dx + \int_{\Omega} pq dx \\ \frac{\partial}{\partial t} (E_p + E_c) &= W - W_{ray} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Introduisant W_{dis} la puissance dissipée par viscosité dans le domaine Ω , on peut écrire plus généralement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_p + E_c) = W - W_{ray} - W_{dis} \quad (3.54)$$

Pour une excitation harmonique, les quantités peuvent être moyennées sur une période. A partir de la relation

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(A e^{i\omega t}) \text{Re}(B e^{i\omega t}) dt = \frac{1}{2} \text{Re}(A^* B) \quad (3.55)$$

nous déduisons pour les moyennes sur une période

$$\begin{aligned} \bar{E}_p &= \frac{1}{4\rho_0 c^2} \int_{\Omega} |p|^2 dx \\ \bar{E}_c &= \frac{\rho_0}{4} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx \\ \bar{W}_{ray} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \text{Re}[p \mathbf{v}^*] \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \bar{W} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Re}[pq^*] dx \end{aligned}$$

L'équation (3.53) devient :

$$\bar{W} = \bar{W}_{ray} \quad (3.56)$$

On notera que dans un domaine à frontières rigides, les puissances W_{ray} et W sont nulles.

Dans le cas d'une onde plane le vecteur intensité instantané vaut

$$\mathbf{I}(t) = \frac{p^2(t)}{\rho c} \mathbf{n} \quad (3.57)$$

dans laquelle \mathbf{n} est la direction de propagation. La densité d'énergie instantanée est donnée par

$$w(t) = e_p(t) + e_c(t) = \rho_0 v^2(t) = \frac{p^2(t)}{\rho_0 c^2} \quad (3.58)$$

On a alors la relation

$$\mathbf{I}(t) = c w(t) \mathbf{n} \quad (3.59)$$

En moyenne sur une période nous obtenons les quantités correspondantes

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}} &= \frac{|p|^2}{2\rho c} \mathbf{n} \\ \bar{w} &= \frac{|p|^2}{2\rho_0 c^2} \\ \bar{\mathbf{I}} &= c \bar{w} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour une source ponctuelle de pression $p = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$, le vecteur intensité acoustique moyen sur une période est donné dans ce cas par

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \text{Re}(p\mathbf{v}^*) = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|p(r=1)|^2}{2r^2 \rho_0 c} \quad (3.61)$$

L'intensité décroît comme le carré de la distance à l'origine. La puissance acoustique rayonnée par la source est

$$W = \int_{S(r)} \mathbf{I} ds = \frac{4\pi |p(r=1)|^2}{2\rho_0 c} \quad (3.62)$$

C'est une constante indépendante du rayon de la sphère $S(r)$ ayant servi au calcul. L'intensité acoustique peut s'exprimer par

$$I(r) = \frac{W}{4\pi r^2} \quad (3.63)$$

Exercice

1. Traiter le cas du quadripôle constitué de 4 sources placées aux coins d'un carré de côté a . Les sources sur un même côté sont d'amplitudes opposées. Donner l'expression du champ de pression dans l'espace et son diagramme de directivité en champ lointain.

Chapitre 4

La propagation du son

4.1 Interférence

Comme les équations de l'acoustique sont linéaires, le principe de superposition s'applique et la pression produite par deux ondes en un point est la somme des pressions produites par chaque onde individuellement. La figure 4.1 illustre ce phénomène. Deux ondes se propagent en sens opposés. Dans la figure centrale le champ de pression à cet instant est la somme des champs des deux ondes qui ensuite continuent à se propager sans distorsion par rapport à leur forme initiale.

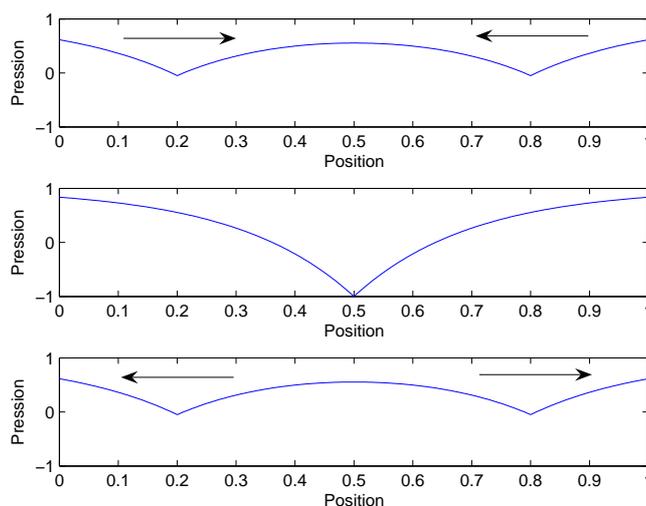


FIG. 4.1 – Interférence de deux ondes.

La figure 4.2 montre l'interférence entre les champs de pression de deux sources ponctuelles. Le champ de pression total est donné par

$$p_{tot} = \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{4\pi r_2} \quad (4.1)$$

Dans cette relation r_1 et r_2 sont les distances entre le point de calcul et les positions des sources 1 et 2 respectivement. On voit qu'il y a interférence constructive quand $kr_1 = kr_2 + 2n\pi$. Il y

a interférence destructive quand $kr_1 = kr_2 + (2n + 1)\pi$. Lorsque $r_1 \approx r_2$ ce phénomène peut soit doubler le champ de pression d'une seule source dans le cas d'interférences constructives soit engendrer un champ total presque nul dans le cas d'interférences destructives. Cela peut se produire par exemple dans une salle de spectacle avec deux haut-parleurs et un spectateur placé en un point tel que la différence de marche entre les deux ondes soit un multiple impair de la demi longueur d'onde.

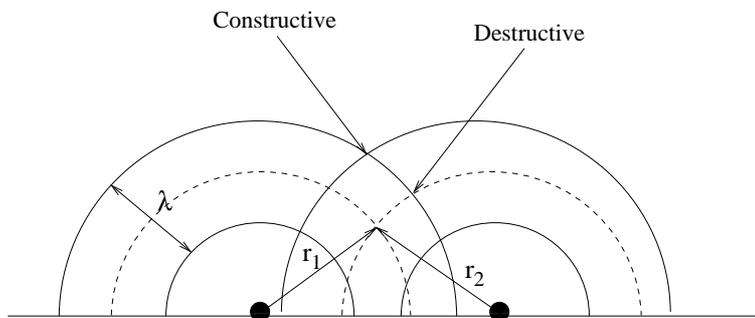


FIG. 4.2 – Interférence de deux ondes en champ libre.

La figure 4.3 est une autre illustration d'interférences entre les champs produits par deux sources ponctuelles.

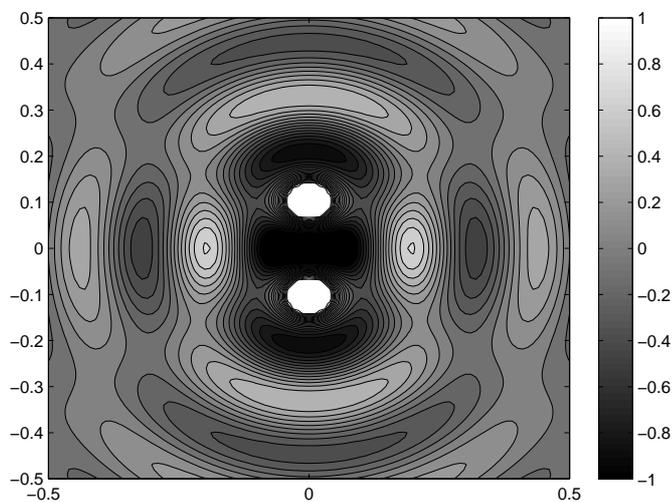


FIG. 4.3 – Interférence d'ondes produites par deux sources ponctuelles.

4.2 Interface entre deux milieux

4.2.1 Interface entre deux milieux acoustiques

Lors d'un couplage entre deux milieux, il y a continuité des pressions et des vitesses normales, soit

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La continuité des pressions vient du principe de l'action et de la réaction de Newton ou de l'application de la loi de la dynamique sur un petit domaine de masse infiniment petite à l'interface entre les deux milieux. Si les forces n'étaient pas opposées, ce petit domaine serait animé d'une accélération tendant vers l'infini. L'égalité des vitesses normales (\mathbf{n} est la normale) vient de l'absence de décollement entre les deux milieux. On notera qu'il n'y a pas forcément égalité des vitesses tangentielles. Les deux milieux peuvent glisser l'un par rapport à l'autre.

Un exemple de telle situation est décrit sur la figure 4.4. Les pressions incidentes, réfléchies et

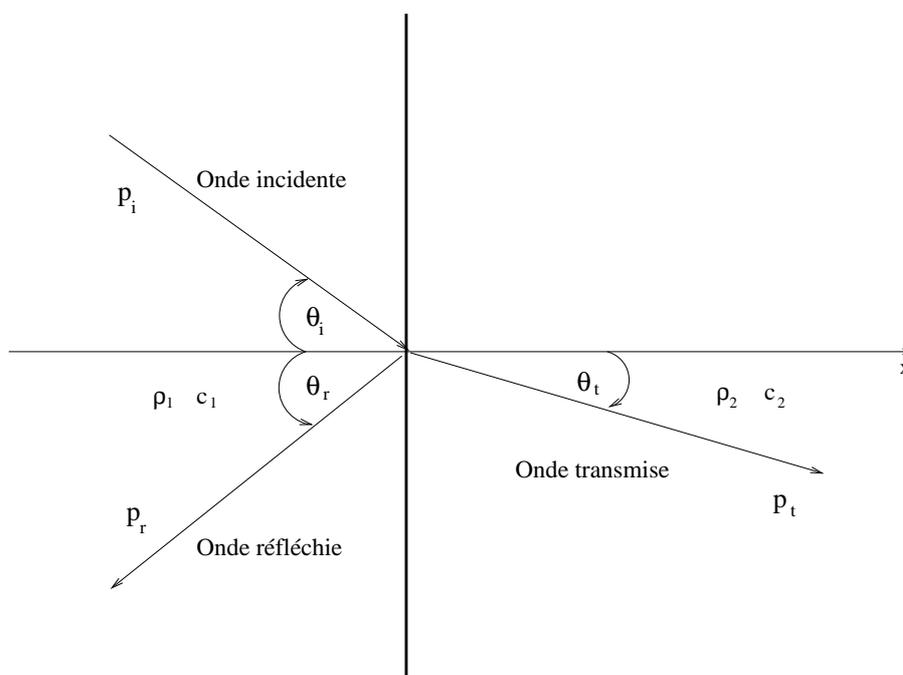


FIG. 4.4 – Interface entre deux milieux.

transmises sont données par

$$\begin{aligned} p_i(x, y, t) &= p_i e^{i(k_1 \cos \theta_i x - k_1 \sin \theta_i y - \omega t)} \\ p_r(x, y, t) &= p_r e^{i(-k_1 \cos \theta_r x - k_1 \sin \theta_r y - \omega t)} \\ p_t(x, y, t) &= p_t e^{i(k_2 \cos \theta_t x - k_2 \sin \theta_t y - \omega t)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface nous obtenons

$$\begin{aligned} p_i(0, y, t) + p_r(0, y, t) &= p_t(0, y, t) \\ \frac{1}{i\rho_1\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_i(0, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} p_r(0, y, t) \right) &= \frac{1}{i\rho_2\omega} \frac{\partial}{\partial x} p_t(0, y, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

soit

$$\begin{aligned} p_i e^{-i(k_1 \sin \theta_i y + \omega t)} + p_r e^{-i(k_1 \sin \theta_r y + \omega t)} &= p_t e^{-i(k_2 \sin \theta_t y + \omega t)} \\ \frac{k_1}{\rho_1 \omega} \left(\cos \theta_i p_i e^{-i(k_1 \sin \theta_i y + \omega t)} - \cos \theta_r p_r e^{-i(k_1 \sin \theta_r y + \omega t)} \right) &= \frac{k_2 \cos \theta_t}{\rho_2 \omega} p_t e^{-i(k_2 \sin \theta_t y + \omega t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

On déduit de la première relation

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (4.6)$$

soit les lois classiques de Descartes

$$\begin{aligned} \theta_r &= \theta_i \\ \frac{\sin \theta_t}{c_2} &= \frac{\sin \theta_i}{c_1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lorsque $c_1 > c_2$, il existe un angle de réfraction limite $\sin \theta_t = c_2/c_1$ tandis que lorsque $c_1 < c_2$, il existe un angle d'incidence limite tel que $\sin \theta_i = c_1/c_2$. Au delà les angles deviennent complexes et traduisent des ondes exponentiellement décroissantes lorsque l'on s'éloigne de l'interface.

Avec les lois de Descartes l'écriture de la continuité à l'interface devient

$$\begin{aligned} p_i + p_r &= p_t \\ \frac{1}{\rho_1 \omega} (k_1 \cos \theta_i p_i - k_1 \cos \theta_r p_r) &= \frac{1}{\rho_2 \omega} k_2 \cos \theta_t p_t \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} p_i + p_r &= p_t \\ p_i - p_r &= \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} p_t \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} p_i \\ p_t &= \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} p_i \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont alors donnés par

$$\begin{aligned} R &= \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} \\ T &= \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} p_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'impédance de surface est donnée par

$$Z(\theta_i) = \frac{p_i + p_r}{u_i - u_r} \quad (4.12)$$

et vaut dans le cas présent

$$Z(\theta_i) = \frac{Z_1}{\cos \theta_i} \frac{1 + R(\theta_i)}{1 - R(\theta_i)} \quad (4.13)$$

On peut aussi calculer les facteurs de réflexion et de transmission en terme de grandeurs énergétiques, par exemple par

$$\begin{aligned} r(\theta_i) &= \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{p_r}{p_i} \right|^2 = \left(\frac{Z_1 \cos \theta_t - Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} \right)^2 \\ t(\theta_i) &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} \left| \frac{p_t}{p_i} \right|^2 = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i)^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le coefficient d'absorption est le rapport de l'intensité absorbée sur l'intensité incidente soit

$$\alpha(\theta_i) = \frac{I_i - I_r}{I_i} = 1 - r(\theta_i) \quad (4.15)$$

Ce dernier coefficient est très important dans la pratique car c'est lui qui caractérise globalement le comportement de l'interface.

4.2.2 Condition d'impédance de surface

Dans la section précédente nous avons pu calculer la propagation dans le milieu deux pour en déduire les champs acoustiques dans tout le domaine. Dans la pratique le second milieu est parfois très mal connu. Il faut écrire une condition aux limites qui permette d'en déduire les coefficients de réflexion et d'absorption. Le plus simple est de dire que l'impédance normale est une constante connue sur la surface, soit

$$p = Zu \quad (4.16)$$

On dit alors que la surface est "à réaction localisée". La section précédente a montré que l'impédance était une fonction de l'angle d'incidence. Cette relation est donc une approximation qui est cependant très souvent utilisée. L'impédance normale est de plus facilement mesurable, par exemple avec un tube de Kundt. Avec cette hypothèse on peut calculer les facteurs de réflexion et d'absorption par

$$\begin{aligned} R(\theta_i) &= \frac{\cos \theta_i Z / Z_1 - 1}{\cos \theta_i Z / Z_1 + 1} \\ \alpha(\theta_i) &= 1 - |R(\theta_i)|^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2.3 Paroi mince

La conception d'une paroi isolante d'un point de vue acoustique est d'une importance capitale pour le contrôle du son dans de nombreuses situations, notamment pour les bâtiments (murs, planchers, fenêtres). Commençons par étudier le cas du dioptré de la figure 4.5 où une onde incidente dans un milieu 1 arrive sur un milieu 2 de propriétés différentes. On suppose que la paroi entre les deux fluides est très fine et qu'elle est caractérisée par une masse par unité de surface m . En notant A, B et C les amplitudes des ondes incidentes, réfléchies et transmises, ces différentes ondes s'écrivent :

- Onde incidente : Ae^{ikx}

- Onde réfléchie : Be^{-ikx}
- Onde transmise : Ce^{ikx}

Ecrivons la loi de Newton et la continuité de la vitesse particulière sur le plan de séparation entre les deux milieux

$$-i\omega m v = A + B - C \quad (4.18)$$

$$\frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(A - B) = \frac{ik_2}{i\rho_2\omega}C = v \quad (4.19)$$

On obtient

$$A + B = \left(1 - \frac{i\omega m}{Z_2}\right)C \quad (4.20)$$

$$A - B = \frac{Z_1}{Z_2}C \quad (4.21)$$

avec $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$, soit

$$C/A = 2 \left[1 - \frac{i\omega m}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_2}\right]^{-1} \quad (4.22)$$

Le facteur de transmission de la puissance acoustique est défini par

$$T = \frac{|C|^2}{2Z_2} / \frac{|A|^2}{2Z_1} = \frac{4Z_1/Z_2}{(1 + Z_1/Z_2)^2 + (\omega m/Z_2)^2} \quad (4.23)$$

A basse fréquence la transmission est déterminée par le rapport des impédances des deux milieux. A haute fréquence, le comportement est défini par la masse surfacique de la paroi. Dans le cas d'une transmission air air à travers une paroi solide, le facteur $\omega m/\rho_0 c$ est généralement beaucoup plus grand que un et on a alors

$$T = [2\rho_0 c/\omega m]^2 \quad (4.24)$$

Le facteur de transmission est souvent donné sous forme logarithmique

$$TL = 10 \log_{10}(1/T) \quad (4.25)$$

Où TL signifie transmission loss. Dans le cas de l'air

$$TL = 20 \log_{10}(fm) - 42 \quad (4.26)$$

Cette relation exprime la loi de masse. L'atténuation augmente de 6dB par doublement de la masse surfacique ou de la fréquence.

4.2.4 Paroi épaisse

Le cas d'une paroi épaisse séparant deux milieux de mêmes propriétés est représenté sur la figure 4.6. Il faut alors tenir compte de la propagation du son à l'intérieur de la paroi. Avec les notations de la figure 4.6, dans la structure, nous avons les ondes suivantes

- Onde plane incidente : e^{ikx}
- Onde réfléchie : Re^{-ikx}

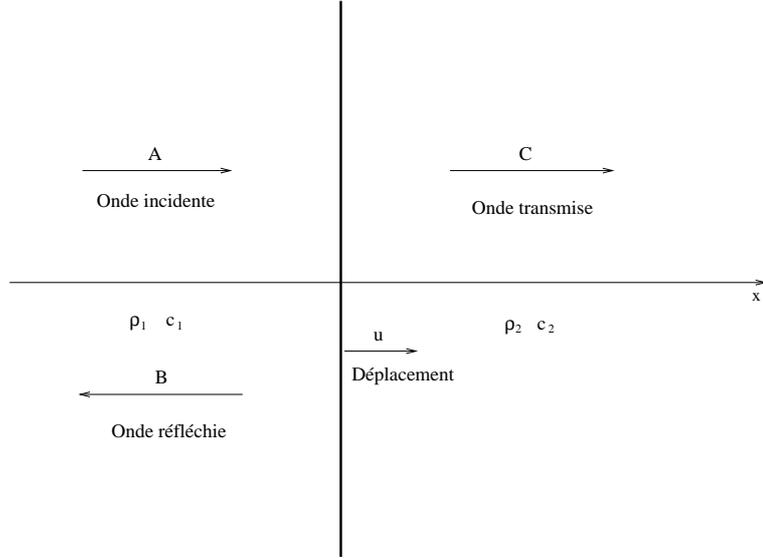


FIG. 4.5 – Paroi mince séparant deux domaines fluides.

- Onde transmise : $T e^{ikx}$
- Onde dans la cloison : $A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$

Pour trouver les amplitudes des ondes dans les différentes parties du système, il faut écrire les conditions de continuité de la pression et de la vitesse particulière sur les deux interfaces. On obtient

$$1 + R = A + B \quad (4.27)$$

$$\frac{ik}{i\rho\omega}(1 - R) = \frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(A - B) \quad (4.28)$$

$$A e^{ik_1 l} + B e^{-ik_1 l} = T \quad (4.29)$$

$$\frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(A e^{ik_1 l} - B e^{-ik_1 l}) = \frac{ik}{i\rho\omega} T \quad (4.30)$$

Dans un premier temps, on peut en déduire les valeurs des amplitudes A et B à partir des deux dernières relations précédentes.

$$A = \frac{1}{2} e^{-ik_1 l} \left(1 + \frac{Z_1}{Z}\right) T \quad (4.31)$$

$$B = \frac{1}{2} e^{ik_1 l} \left(1 - \frac{Z_1}{Z}\right) T \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

Nous avons aussi à partir de 4.27 et 4.28

$$2 = \left(1 + \frac{Z}{Z_1}\right) A + \left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right) B \quad (4.34)$$

Nous en déduisons

$$2 = \left[\frac{1}{2} e^{-ik_1 l} \left(1 + \frac{Z}{Z_1}\right) \left(1 + \frac{Z_1}{Z}\right) + \frac{1}{2} e^{ik_1 l} \left(1 - \frac{Z_1}{Z}\right) \left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right) \right] T \quad (4.35)$$

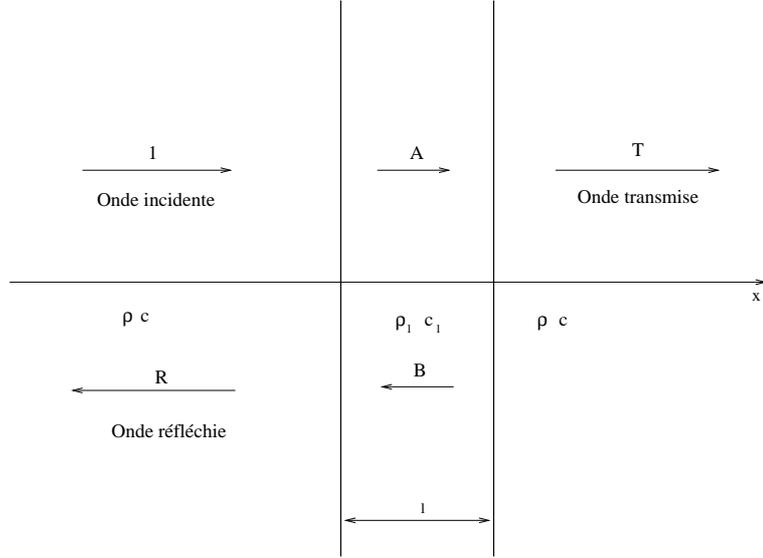


FIG. 4.6 – Cas d'une paroi épaisse.

d'où la valeur du coefficient de transmission

$$T = \frac{4ZZ_1}{(Z + Z_1)^2 e^{-ik_1 l} - (Z - Z_1)^2 e^{ik_1 l}} \quad (4.36)$$

$$T = \frac{4ZZ_1}{-(Z^2 + Z_1^2)2i \sin k_1 l + 4ZZ_1 \cos k_1 l} \quad (4.37)$$

$$|T|^2 = \frac{1}{\cos^2 k_1 l + \frac{(Z^2 + Z_1^2)^2}{4Z^2 Z_1^2} \sin^2 k_1 l} \quad (4.38)$$

Nous supposons pour la dernière relation que les impédances sont réelles. Nous remarquons que $T(\omega = 0) = 1$. Il y a donc transmission totale à basse fréquence. Pour les basses fréquences nous pouvons aussi utiliser l'approximation $\sin k_1 l \approx k_1 l$. En supposant de plus que $Z_1 \gg Z$ ce qui est généralement le cas si les milieux amont et aval sont de l'air, nous obtenons

$$|T|^2 \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_1 l \omega}{2\rho c}\right)^2} \approx \left(\frac{2\rho c}{\rho_1 l \omega}\right)^2 \quad (4.39)$$

Nous retrouvons que l'atténuation est proportionnelle à $\rho_1 l$ qui est la masse par unité de surface de la paroi. Par exemple pour une paroi d'épaisseur $l = 10\text{cm}$ et de masse volumique $\rho_1 = 2300\text{kg/m}^3$ (béton), nous obtenons par la formule 4.39 une atténuation de 45dB à 100Hz et de 65dB à 1000Hz . On pourra aussi remarquer que lorsque $\sin k_1 l = 0$, nous avons $T = 1$. Pour ces fréquences, il y a transmission totale de l'énergie. Dans la pratique, la transmission n'est pas totale à cause des dissipations dans la paroi. Néanmoins, il y a des fréquences pour lesquelles la paroi est presque transparente.

Les cas étudiés précédemment sont les plus simples. Pour une étude plus complète, il faudrait tenir compte aussi d'ondes ayant des incidences obliques. Les parois utilisées en pratique peuvent

être plus complexes avec des cavités internes ou une lame d'air entre deux parois solides. La complexité de la modélisation du comportement de ces parois est bien sûr accrue. Pour des parois élastiques légères, il faut tenir compte des vibrations de plaque de la paroi. On pourra aussi étudier le comportement de ces cloisons en ayant recourt à des moyens expérimentaux pour mesurer la perte par transmission.

4.3 Résonateur acoustique

Il est connu depuis l'antiquité qu'une cavité quelconque, munie d'une ouverture, avec ou sans col, résonne sur une fréquence, qui, en première approximation, ne dépend que du volume de la cavité, de la longueur et de la section du col. Le résonateur est un volume V communiquant avec l'extérieur par un col de longueur l et de section s , la longueur l pouvant éventuellement être nulle, voir la figure 4.7.

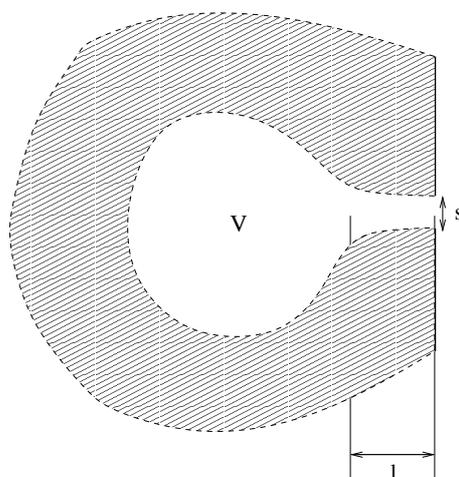


FIG. 4.7 – Résonateur.

Un résonateur peut être modélisé avec une bonne précision comme un oscillateur amorti. Les impédances de la masse, de l'amortisseur et du ressort sont les suivantes : la masse est celle de l'air contenu dans le col, soit $\rho_0 s l'$ où l' est une petite correction à la longueur réelle l du col. Cette correction permet de prendre en compte la masse d'air extérieure au col entraînée par la vibration. Une approximation courante est de prendre $l' = l + 0.96\sqrt{s}$. L'accélération de cette masse d'air est $-i\omega v$ pour une oscillation harmonique avec une vitesse du fluide v dans le col. L'impédance due à la masse d'air est donc $-i\omega\rho_0 l'$.

Une compression élastique de la masse d'air contenue dans le résonateur due à un déplacement δl de l'air contenu dans le col produit une variation de pression δp qui, pour un fluide adiabatique, est donnée par

$$\frac{\delta p}{p_0} = \gamma \frac{s \delta l}{V} \quad (4.40)$$

or on a $\delta l = v/(-i\omega)$ ce qui donne, compte tenu de la relation $\gamma p_0 = \rho_0 c^2$,

$$\frac{\delta p}{v} = \frac{\rho_0 s c^2}{-i\omega V} \quad (4.41)$$

La dissipation provient en partie de l'énergie acoustique qui est réémise vers l'extérieur du résonateur et en partie d'une dissipation visqueuse. Ces deux dissipations induisent des forces proportionnelles à la vitesse, soit $F = Z_{dis}sv$. L'impédance totale du résonateur est la somme des trois contributions précédentes, ce qui donne

$$Z = Z_{dis} - i\omega\rho_0l' + i\frac{\rho_0c^2s}{\omega V} \quad (4.42)$$

La résonance du système est obtenue quand le terme imaginaire s'annule, soit pour la fréquence

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{Vl'}}$$

La puissance transmise au résonateur par l'ouverture est

$$P = \frac{1}{2} s \operatorname{Re}(p^*v) = \frac{1}{2} s \operatorname{Re}(Z^*v^*v) = \frac{1}{2} s \operatorname{Re}(Z_{dis})|v|^2 \quad (4.43)$$

A la résonance v est grand et la puissance dissipée par le résonateur est importante. Quand la dissipation provient uniquement du rayonnement acoustique à l'extrémité extérieure du col, nous avons, pour une extrémité circulaire de rayon a

$$Z_{dis} = \frac{1}{4}\rho_0c(ka)^2 - i\omega\rho_0\frac{8}{3\pi}a \quad (4.44)$$

et alors

$$P = \frac{\pi}{8}\rho_0ck^2a^4|v|^2 \quad (4.45)$$

On peut aussi exprimer la puissance dissipée en fonction de la pression incidente par

$$P = \frac{1}{2} s \operatorname{Re}(Z_{dis}) \left| \frac{p}{Z} \right|^2 \quad (4.46)$$

On peut reproduire les calculs effectués dans le cas d'une cavité pour déterminer la pression p à partir de l'équilibre entre la puissance de la source et la puissance dissipée dans le résonateur. S'il n'y a pas de surface absorbante autre que le résonateur et si l'on note P_{source} la puissance émise par la source, le niveau sonore est obtenu par

$$P_{source} = \frac{1}{2} s \operatorname{Re}(Z_{dis}) \left| \frac{p}{Z} \right|^2 \quad (4.47)$$

soit

$$|p|^2 = \frac{2|Z|^2}{s \operatorname{Re}(Z_{dis})} P_{source} \quad (4.48)$$

4.4 Diffraction

Les figures 4.8 et 4.9 donnent des exemples de situations avec diffraction du son. Le calcul du champ sonore s'effectue par résolution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = s \quad (4.49)$$

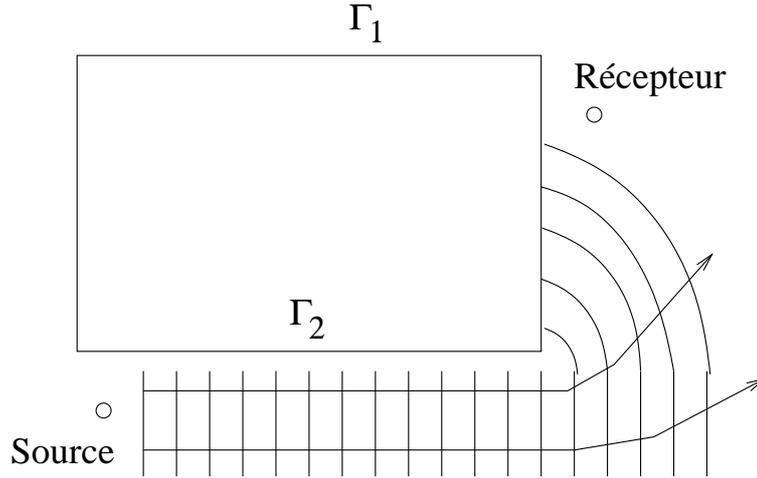


FIG. 4.8 – Contournement d'un obstacle par diffraction.

en tenant compte des conditions aux limites sur les surfaces

$$\begin{cases} v = v_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ p = Zv & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

et de la condition de rayonnement à l'infini

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.51)$$

quand r tend vers l'infini. La résolution de ce type de problème est complexe. Les solutions analytiques ne sont connues que dans un nombre très restreint de cas comme pour un obstacle cylindre ou sphérique.

Une méthode bien connue pour réduire la propagation du son est la construction d'un écran acoustique entre la source et la zone à protéger. Si le point d'écoute est situé dans la zone d'ombre de l'écran, le son ne peut pas parvenir par un chemin direct et ce qui est entendu provient de la diffraction par le sommet de l'écran. Pour estimer l'atténuation apportée par la présence de l'écran, considérons le cas d'un mur rigide placé entre la source S et l'observateur M , comme sur la figure 4.10.

Une formule approchée est la relation de Kurze qui exprime l'atténuation en fonction du paramètre de Fresnel $N = 2\delta/\lambda$ avec δ donné par

$$\delta = SC + CM - SM \quad (4.52)$$

L'atténuation est donnée par l'expression empirique suivante :

$$\Delta L = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{2\pi N}}{\tanh \sqrt{2\pi N}} + 5 \quad (4.53)$$

pour $N \geq -0.2$ avec un maximum de $20dB$.

D'autres méthodes de calcul plus précises existent qui sont fondées soit sur des calculs analytiques sophistiqués de la propagation acoustique autour du mur, soit sur des méthodes numériques

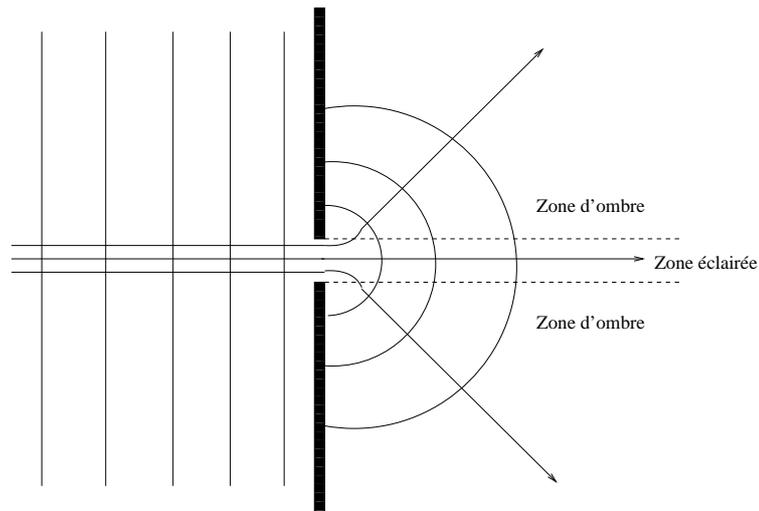


FIG. 4.9 – Petite ouverture dans un écran.

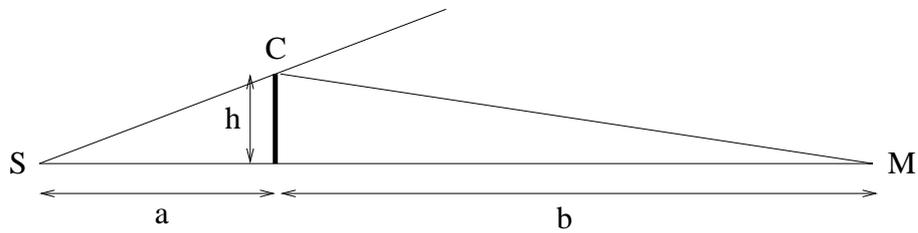


FIG. 4.10 – Ecran semi-infini.

comme les méthodes d'équations intégrales. La transmission à travers la barrière peut être négligée si les matériaux et l'épaisseur fournissent une atténuation supérieure à 20 dB.

Exercices

1. Tracer l'atténuation en fonction de la fréquence apportée par une paroi d'épaisseur $l = 0.1m$, constituée d'un matériau tel que $\rho_1 = 2700kg/m^3$ et de vitesse des ondes $c_1 = 3400m/s$.
2. Calculer l'atténuation apportée par un mur de 2m de hauteur pour une source et un récepteur situés sur le sol à une distance de 3m du mur et pour les fréquences 100 et 1000 Hz.

Chapitre 5

Les signaux sonores

5.1 Types de signaux

Les grandeurs mesurables en acoustique sont des signaux dépendant du temps. Ces signaux peuvent être de natures très variables. Il y a des sons harmoniques, continus, impulsionnels, ... On distingue les signaux à durée finie des signaux à durée que l'on peut supposer infinie. Un signal peut aussi être déterministe, c'est à dire prédictible à chaque instant, ou bien aléatoire si sa valeur ne peut être prédite. Parmi les signaux déterministes certains sont périodiques. Ces signaux périodiques se reproduisent à l'identique au bout d'un certain temps. Parmi ceux-ci certains sont sinusoïdaux. Une classification des signaux déterministes est donnée sur la figure 5.1. Une visualisation de ces signaux est donnée sur les figures 1.8 et 1.9.

Un signal périodique est tel qu'il existe une période T vérifiant

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \quad (5.1)$$

Un signal d'énergie finie vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)| dt < +\infty \quad (5.2)$$

Un signal de puissance finie est tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x^2(t)| dt < +\infty \quad (5.3)$$

Les signaux aléatoires se classifient selon la logique indiquée sur la figure 5.2. Les signaux stationnaires sont ceux dont les propriétés statistiques telles que la moyenne, la variance sont constantes au cours du temps. Les signaux ergodiques sont tels qu'une moyenne statistique peut être remplacée par une moyenne sur le temps.

Un bruit blanc est un signal aléatoire dont la densité spectrale est constante en fonction de la fréquence. Toutes les fréquences possèdent donc le même niveau sonore et l'énergie acoustique double en passant d'une octave à l'octave supérieure. Ce type de signal est utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle de différents systèmes. En effet, comme le bruit blanc excite toutes les fréquences avec la même énergie, il permet de tracer la courbe de réponse en fréquence. Un bruit rose est un bruit dont le niveau par bande d'octave est constant. La densité spectrale doit donc être divisée par deux d'une octave à l'octave supérieure. Il est par exemple utilisé en acoustique des salles pour évaluer l'isolement acoustique d'une paroi.

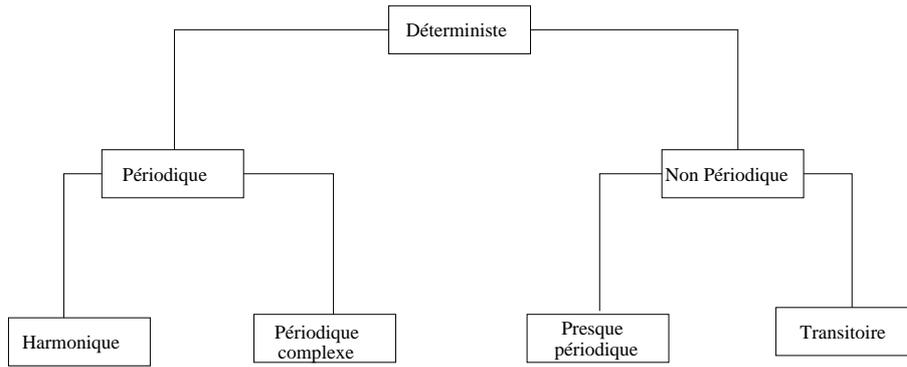


FIG. 5.1 – Classification des signaux déterministes.

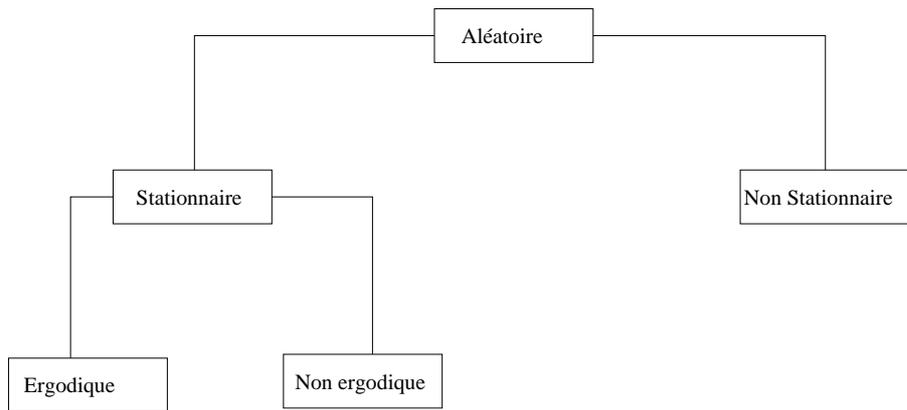


FIG. 5.2 – Classification des signaux aléatoires.

5.2 Analyse temporelle

La première façon d’analyser les signaux est d’utiliser les informations contenues dans le signal temporel. En acoustique, la plupart du temps la moyenne temporelle du signal est nulle et de toute façon la composante continue apporte peu d’information sur la nature du signal. La pression efficace définie par

$$p_{eff}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p^2(t) dt \quad (5.4)$$

donne par contre une information sur le contenu énergétique moyen du signal.

Comme indiqué dans le chapitre 1, les niveaux sonores de bruits continus peuvent aussi être analysés par différentes méthodes qui sont particulièrement adaptées pour des signaux non stationnaires. On distingue ainsi le L_5 niveau dépassé pendant 5% du temps, le L_{50} niveau dépassé pendant 50% du temps et le L_{90} niveau dépassé pendant 90% du temps. L’application principale est à l’analyse du bruit de la circulation routière.

On définit aussi le L_{eq} par

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{T} \int_0^T 10^{L(t)/10} dt \right)$$

qui est le niveau énergétique moyen contenu dans le signal pendant la durée T . Le niveau énergétique $L(t)$ est généralement exprimé en décibel A.

Enfin des notions importantes sont les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation entre deux signaux. La fonction d'autocorrélation indique la dépendance de la valeur du signal à un instant par rapport aux valeurs du même signal à d'autres instants. La fonction d'intercorrélation indique la dépendance entre les valeurs de deux signaux. La fonction d'autocorrélation se calcule par

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.5)$$

tandis que la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (5.6)$$

5.3 Discrétisation du signal

L'échantillonnage consiste à prendre la valeur du signal en un ensemble discret de points en temps. Généralement l'espacement entre deux points en temps est constant et appelé période d'échantillonnage. Si on note T cette période alors $F = 1/T$ est la fréquence d'échantillonnage. Le théorème de Shannon montre qu'un signal peut être reconstruit exactement à partir des valeurs échantillonnées si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le signal.

Soit $f(t)$ une fonction dépendant du temps, on définit un échantillonnage de période T de f par la distribution

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (5.7)$$

La transformée de Fourier de f_s est

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{i\omega nT} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$\omega_s = 2\pi/T$ est la pulsation associée à la fréquence d'échantillonnage et F est la transformée de Fourier de f . Pour éviter le phénomène d'aliasing il faut que le support de F soit contenu dans l'intervalle $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$. Soit f_0 la plus haute fréquence contenue dans le spectre de f , il faut donc que

$$\frac{1}{2T} \geq f_0 \quad (5.9)$$

En prenant la restriction de f à l'intervalle $[0, (N-1)T]$ on peut définir la transformée de Fourier discrète et en obtenir un échantillonnage aux fréquences $\frac{2\pi k}{NT}$ par

$$\hat{F}\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (5.10)$$

soit en modifiant la notation

$$\hat{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (5.11)$$

On obtient une valeur approchée de la transformée de Fourier de f qui est la convolution de la valeur exacte F par la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage qui est ici la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, (N-1)T]$. Les calculs numériques sont effectués par FFT et permettent d'obtenir des estimations des puissances spectrales.

5.4 Analyse spectrale

L'analyse fréquentielle d'un signal consiste à déterminer la répartition de l'énergie du signal en fonction de la fréquence. La fonction densité spectrale de puissance décrit cette répartition. Une possibilité pour déterminer cette fonction est de prendre une bande de fréquence comprise entre f et $f + \delta f$ et de filtrer le signal par un filtre passe bande entre ces deux fréquences puis de calculer la valeur quadratique moyenne du résultat. On notant $x_{eff}^2(f, \delta f)$ cette valeur, nous avons, si δf est assez petit,

$$x_{eff}^2(f, \delta f) = G_{xx}(f) \delta f \quad (5.12)$$

où $G_{xx}(f)$ est la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ à la fréquence f .

La fonction d'autocorrélation est reliée à la puissance spectrale par les relations

$$\begin{aligned} G_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi f \tau i} d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) e^{2\pi f \tau i} df \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous avons aussi

$$x_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) df = R_{xx}(0) \quad (5.14)$$

qui signifie que la valeur quadratique moyenne d'un signal $x(t)$ est égale à l'intégrale de la puissance spectrale sur tout le spectre ou à la valeur de la fonction d'autocorrélation en zéro. De même la fonction d'intercorrélacion est reliée aux interspectres par les relations

$$\begin{aligned} G_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-2\pi f \tau i} d\tau \\ R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(f) e^{2\pi f \tau i} df \end{aligned} \quad (5.15)$$

On peut aussi tracer les spectres en octave ou tiers d'octave. Il s'agit de sommer l'énergie contenue dans la bande d'octave ou de tiers d'octave choisie pour passer de la description de la puissance spectrale, dite en bande fine, à la description en octave ou tiers d'octave. Dans tous les cas nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |p|^2 dt = \sum_{i=1}^{i=n} S(f_i) \quad (5.16)$$

qui exprime que l'énergie totale d'un signal est toujours égale à la somme des énergies contenues dans les bandes d'octave ou de tiers d'octave.

Nous avons aussi le théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(f)|^2 df \quad (5.17)$$

qui montre l'égalité entre l'énergie calculée dans les domaines réels et fréquentiels.

5.5 Analyse par octave

Souvent la connaissance du niveau absolu de bruit ou de vibration n'est pas suffisante mais l'on désire aussi connaître la répartition de l'énergie en fonction de la fréquence. Il existe deux types de représentation possibles. La première consiste à donner la densité d'énergie en fonction de la fréquence comme sur la figure 5.3. On observe, dans le cas de cette figure, un signal composé de quelques raies et d'un spectre continu de niveau plus faible.

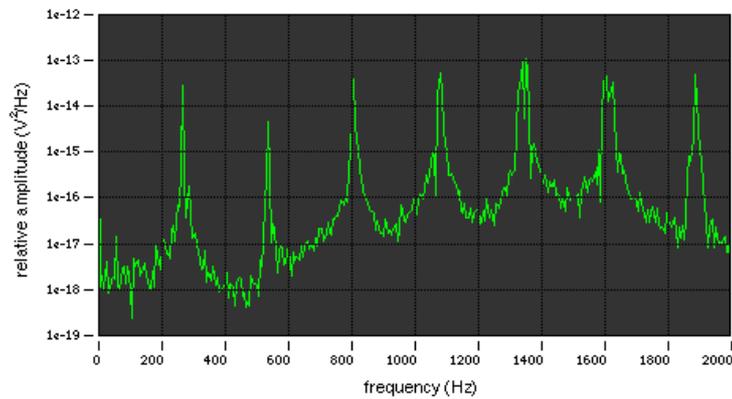


FIG. 5.3 – Analyse spectrale en bande fine.

L'analyse en bande fine est une analyse très détaillée du spectre mais qui est parfois trop riche pour les applications pratiques. Une autre approche est de mesurer les niveaux sonores par des analyses spectrales à bande de largeur relative constante, dont les plus usuelles sont les octaves et les tiers d'octave. Les fréquences centrales f_m et extrêmes f_1 et f_2 des octaves sont reliées par

$$\begin{aligned} f_m &= (f_1 f_2)^{1/2} \\ f_2 &= 2f_1 \\ f_1 &= \frac{f_m}{\sqrt{2}} \\ f_2 &= \sqrt{2}f_m \end{aligned} \quad (5.18)$$

pour les tiers d'octave les relations sont les suivantes

$$\begin{aligned} f_m &= (f_1 f_2)^{1/2} \\ f_2 &= 2^{1/3} f_1 \\ f_1 &= \frac{f_m}{2^{1/6}} \\ f_2 &= 2^{1/6} f_m \end{aligned} \quad (5.19)$$

Bande	Octave en Hz			Tiers d'octave en Hz		
	Limite inf	Centre	Limite sup	Limite inf	Centre	Limite sup
11				9,9	12,5	14,1
12	11	16	22	14,1	16	17,8
13				17,8	20	22,4
14				22,4	25	28,2
15	22	31,5	44	28,2	31,5	35,5
16				35,5	40	44,7
17				44,7	50	56,2
18	44	63	88	56,2	63	70,8
19				70,8	80	89,1
20				89,1	100	112
21	88	125	177	112	125	141
22				141	160	178
23				178	200	224
24	177	250	355	224	250	282
25				282	315	355
26				355	400	447
27	355	500	710	447	500	562
28				562	630	708
29				708	800	891
30	710	1000	1420	891	1000	1122
31				1122	1250	1413
32				1413	1600	1778
33	1420	2000	2840	1778	2000	2239
34				2239	2500	2818
35				2818	3150	3548
36	2840	4000	5680	3548	4000	4467
37				4467	5000	5623
38				5623	6300	7079
39	5680	8000	11360	7079	8000	8913
40				8913	10000	11220
41				11220	12500	14130
42	11360	16000	22720	14130	16000	17780
43				17780	20000	22390

TAB. 5.1 – Fréquences centrales des octaves et tiers d'octave.

Les valeurs des fréquences centrales sont normalisées et sont données dans le tableau 5.1. Les sons usuels sont essentiellement répartis dans les octaves de 100Hz à 5000Hz. La puissance spectrale dans une bande de fréquence Δf centrée sur f est donnée par

$$G(f) = \frac{1}{T\Delta f} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt \quad (5.20)$$

où $x(f, \Delta f, t)$ désigne le signal filtré par un filtre passe-bande de largeur Δf centré sur f , voir figure 5.4.

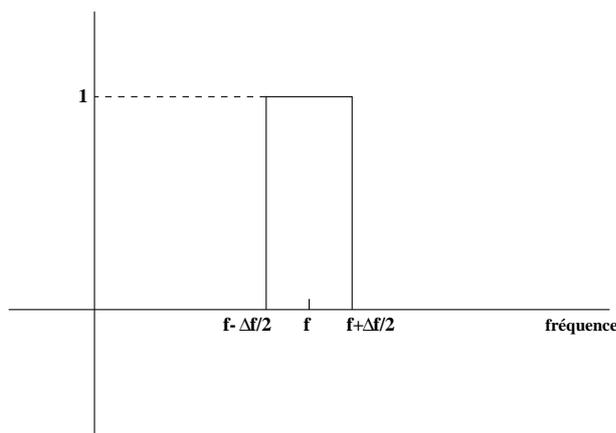


FIG. 5.4 – Filtre passe-bande.

Pour avoir une analyse en bande fine telle que celle de la figure 5.3, il faut passer à la limite suivante

$$T \rightarrow \infty, \Delta f \rightarrow 0, T\Delta f \rightarrow \infty \quad (5.21)$$

On obtient alors la densité d'énergie en fonction de la fréquence. Le calcul effectif de cette densité à partir de valeurs mesurées s'effectue par

$$G(f) = \frac{2}{n_d T} \sum_{i=1}^{n_d} |X_i(f, T)|^2 \quad (5.22)$$

X_i est la transformée de Fourier du i ème échantillon de longueur T . On moyenne sur n_d échantillons. Il faut $T \rightarrow \infty$, et $n_d \rightarrow \infty$.

Une analyse du bruit par tiers d'octave conduit à la représentation illustrée sur la figure 5.5. Les valeurs sont obtenues par la formule 5.20 dans laquelle f désigne la fréquence centrale du tiers d'octave et Δf est la largeur du tiers d'octave. Le niveau sonore global peut être calculé à partir de la somme des niveaux dans chaque bande de fréquence par

$$L_{tot} = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{i=N} 10^{L_i/10} \right) \quad (5.23)$$

où l'on a noté L_i le niveau énergétique dans la bande i de fréquence.

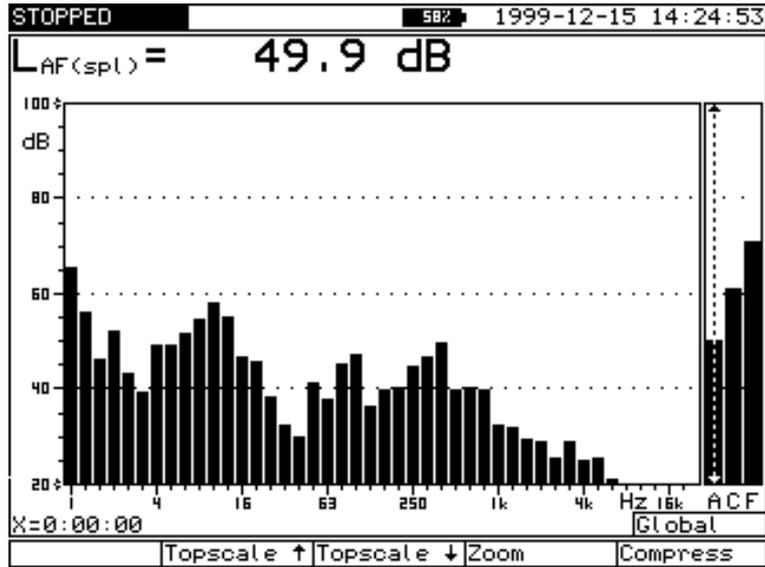


FIG. 5.5 – Analyse spectrale en tiers d’octave.

5.6 Fonctions de transfert

5.6.1 Définition

Un système à une entrée et une sortie relie un signal d’entrée $x(t)$ à un signal de sortie $y(t)$ comme sur la figure 5.6. Des exemples de tels couples sont pour $x(t)$ le signal envoyé à un haut-

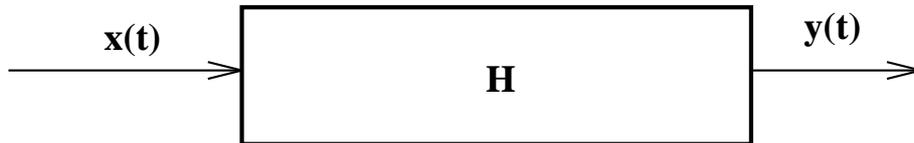


FIG. 5.6 – Système à une entrée et une sortie.

parleur (noté $y(t)$ sur la figure 5.7) et pour $y(t)$ le signal mesuré au microphone d’erreur (noté $e(t)$ sur la figure 5.7). Un exemple en mécanique des structures est pour $x(t)$ la force appliquée $F(t)$ en un point et pour $y(t)$ le déplacement mesuré en un autre point (voit figure 5.8).

Lorsque le système est linéaire, l’entrée est reliée à la sortie par une relation du type

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (5.24)$$

H est la fonction de transfert du système. Cette formulation est très générale et est valable pour tous les systèmes physiques linéaires.

5.6.2 Propriétés des fonctions de transfert

Invariance dans le temps

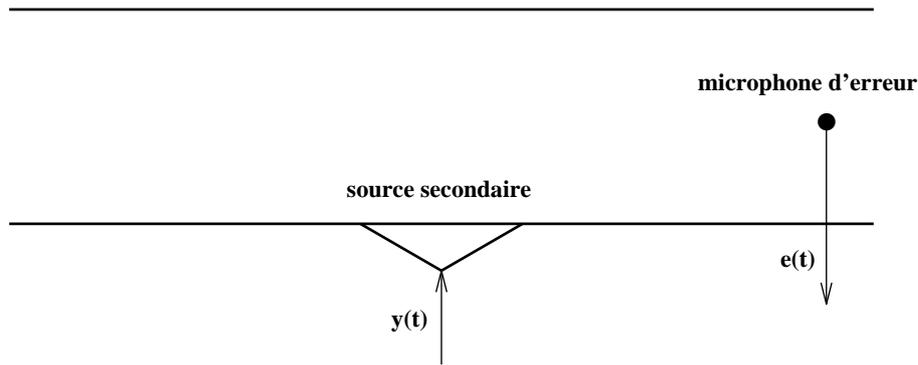


FIG. 5.7 – Signaux dans une gaine.

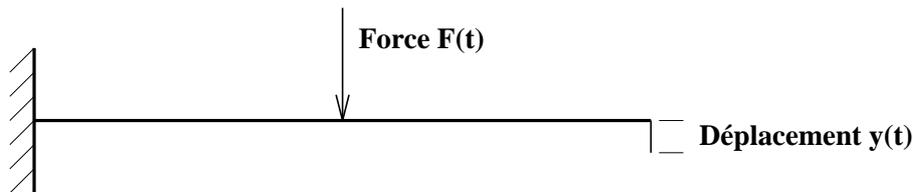


FIG. 5.8 – Signaux pour une poutre.

Si les propriétés du système ne dépendent pas du temps, la fonction de transfert doit être invariante lors d'une translation dans le temps. Par conséquent, elle ne peut dépendre que de $t - \tau$ et on obtient

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (5.25)$$

Causalité

La causalité exprime le fait que la sortie du système ne peut pas précéder l'entrée et par conséquent si $x(t) = 0$ pour $t < t_0$, on doit aussi avoir $y(t) = 0$ pour $t < t_0$. L'intégrale doit donc s'écrire

$$y(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (5.26)$$

Dans le cas d'un signal $x(t)$ que l'on discrétise en $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ avec $x_i = x(iT)$. On peut écrire les relations précédentes sous forme discrète, par exemple la convolution devient

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=N} H_i x_{n-i} \quad (5.27)$$

Comportement en fréquence

En utilisant le fait que la transformation de Fourier transforme les convolutions en produits nous obtenons

$$y(\omega) = H(\omega)x(\omega) \quad (5.28)$$

Ainsi le système agit en modulant le signal d'entrée pour chaque fréquence.

Détermination de la fonction de transfert

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la fonction de transfert H . L'une d'elles consiste à envoyer une impulsion et à mesurer le signal de sortie. En effet si $x(t) = \delta(t)$, on obtient

$$y(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = H(t) \quad (5.29)$$

5.6.3 Cas de plusieurs systèmes

On peut déterminer la fonction de transfert globale d'un ensemble de sous-systèmes.

Systèmes en série

La figure 5.9 montre un système composé de deux sous-systèmes en série. Dans ce cas nous

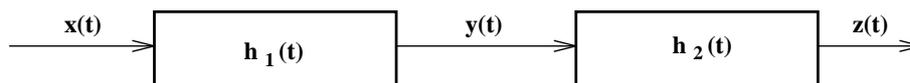


FIG. 5.9 – Systèmes en série.

avons

$$\begin{aligned} y(\omega) &= h_1(\omega)x(\omega) \\ z(\omega) &= h_2(\omega)y(\omega) \end{aligned} \quad (5.30)$$

et par conséquent la fonction de transfert globale est

$$h(\omega) = h_2(\omega)h_1(\omega) \quad (5.31)$$

ce qui donne en temps

$$h(t) = \int_0^t h_2(\tau)h_1(t - \tau)d\tau \quad (5.32)$$

Systèmes en parallèle

La figure 5.10 montre un système composé de deux sous-systèmes en parallèle. Dans ce cas nous

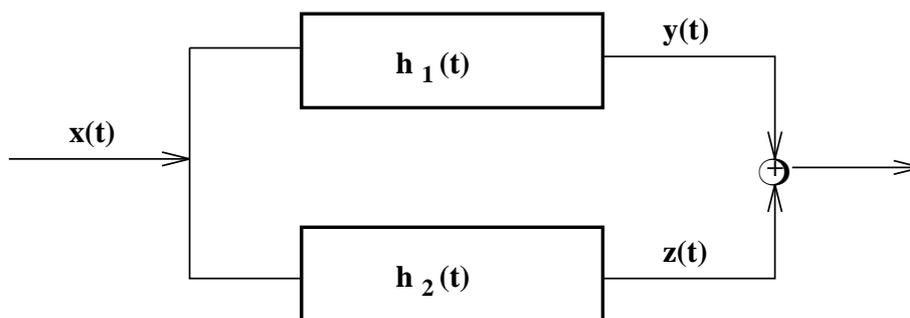


FIG. 5.10 – Systèmes en parallèle.

avons

$$\begin{aligned} y(\omega) &= h_1(\omega)x(\omega) \\ z(\omega) &= h_2(\omega)x(\omega) \end{aligned} \quad (5.33)$$

et par conséquent la fonction de transfert globale est

$$h(\omega) = h_1(\omega) + h_2(\omega) \quad (5.34)$$

ce qui donne en temps

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (5.35)$$

Chapitre 6

La mesure du son

6.1 Microphone

6.1.1 Microphone électrodynamique

Les sons sont mesurés par des microphones. Ces appareils sont destinés à mesurer la pression acoustique, grandeur à laquelle l'oreille humaine est sensible. Ils assurent la conversion du signal de pression en un signal électrique. En général, le mouvement des molécules d'air entraîne la mise en mouvement d'un élément solide, la membrane, qui, à son tour, est directement à l'origine du signal électrique, voir la figure 6.1.

Une membrane de surface S est reliée à une bobine de longueur totale l . La masse mobile est constituée par la membrane et la bobine. La bobine coulisse dans un espace où règne un champ magnétique B . Une onde sonore de pression p provoque une force $F = pS$ sur la membrane. Si la bobine bouge à la vitesse v , la tension induite dans la bobine est $u = Blv$. Pour une bobine de résistance R cela induit un courant $i = \frac{u}{R}$ que l'on peut mesurer.

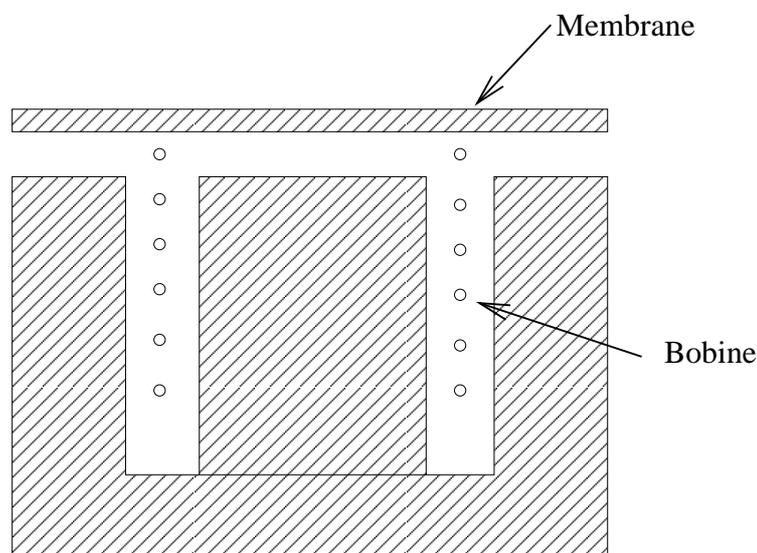


FIG. 6.1 – Principe d'un microphone électrodynamique.

Un exemple de microphone utilisé pour la prise de son est montré sur la figure 6.2.



FIG. 6.2 – Microphone pour la prise de son.

6.1.2 Microphone électrostatique

Ce microphone fonctionne sur le principe du condensateur. Soit V la tension aux bornes du condensateur, Q la charge et C sa capacité. Nous avons $C = \frac{Q}{V}$. La capacité du condensateur peut s'exprimer en fonction de la distance entre les armatures par

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (6.1)$$

où d est la distance entre les armatures et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} F/m$ la permittivité du vide. Dans un microphone électrostatique la membrane forme une des deux armatures. Les armatures sont soumises à une tension de polarisation V_0 . La tension aux bornes des armatures est donnée par

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad (6.2)$$

L'onde sonore fait varier la distance d et produit donc une tension proportionnelle à cette distance. La tension de polarisation est fournie par une source continue et vaut 100 à 200 V pour des microphones de mesure. Les microphones à électret sont des variantes dans lesquelles la tension de polarisation est fournie par un matériau diélectrique.

Pour les microphones à condensateur, le diaphragme est sous tension avec un isolant à l'arrière, voir la figure 6.3. La distance entre le diaphragme et l'isolant est typiquement de $20\mu m$. Ces deux composants forment les deux plaques d'une capacité qui va produire le signal du microphone. La valeur de la capacité s'étend de 2 à 60 pF. La membrane du diaphragme est sous une tension de l'ordre de $600N/mm^2$ et est généralement constituée de Nickel. Un microphone de bonne qualité doit produire un signal électrique proportionnel au niveau de pression mesuré et ceci dans la plus large bande de fréquence possible.

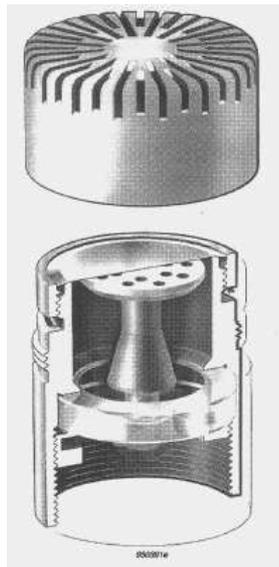


FIG. 6.3 – Schéma d'un microphone à condensateur.

6.1.3 Caractéristiques des microphones

La sensibilité d'un microphone est le rapport entre la tension fournie et la pression reçue.

$$s = \frac{u}{p} \quad (6.3)$$

Elle est de l'ordre de quelques mV/Pa.

La courbe de réponse en fréquence est la tension mesurée par le microphone pour une pression acoustique de même amplitude, voir la figure 6.4. Cette courbe doit être la plus plate possible. La bande passante du microphone est la bande de fréquence pour laquelle la sensibilité ne diffère pas de plus de $3dB$ par rapport à la sensibilité maximum.

Un microphone omnidirectionnel a une sensibilité indépendante de la direction d'incidence du son. Dans le cas contraire le microphone est dit directif. Des exemples de directivités de microphones sont donnés sur les figures 6.5 et 6.6.

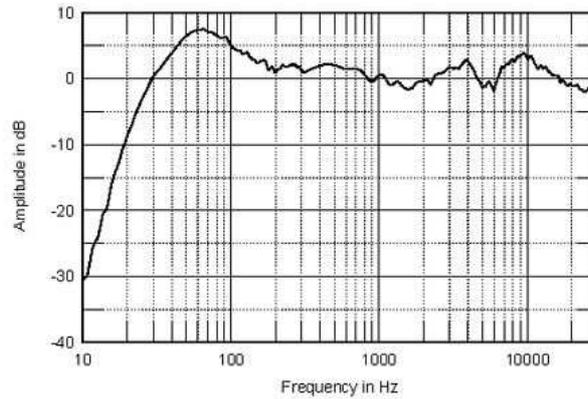


FIG. 6.4 – Courbe d'étalonnage d'un microphone.

On utilise aussi souvent un sonomètre, voir la figure 6.7, qui est un microphone avec un système d'analyse permettant au minimum d'afficher le niveau sonore mesuré. Il permet parfois d'afficher aussi le spectre du son.

6.2 Haut-parleur

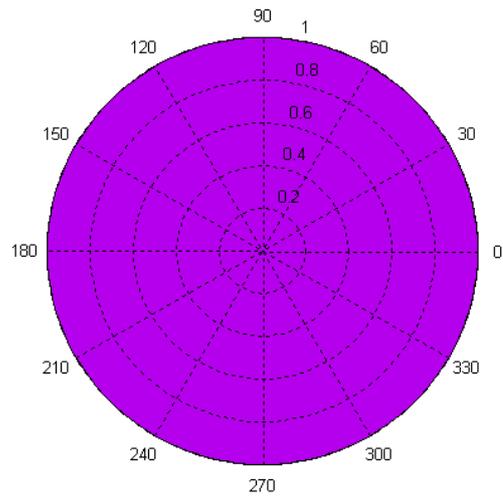
Le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique est très semblable au microphone électrodynamique et est présenté sur la figure 6.8. Dans ce cas la bobine reçoit un courant électrique i . Comme la bobine est plongée dans un champ magnétique B , elle est soumise à la force de Laplace $F = iBl$. La membrane qui est soumise à cette force reproduit les variations du courant électrique i .

La puissance électrique dissipée dans le haut-parleur est l'énergie électrique reçue par le haut-parleur dont une grande partie est transformée en chaleur et une petite partie est convertie en puissance acoustique. La puissance électrique est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de watts. Son expression est $P = UI$ où U est la tension et I l'intensité électrique. Le rapport entre la puissance acoustique rayonnée et la puissance électrique dissipée est de l'ordre de quelques pour cent. Le rendement du haut-parleur est le niveau de pression mesuré dans l'axe du haut-parleur lorsqu'il reçoit une puissance électrique de 1W par exemple 90dB/1W/1m.

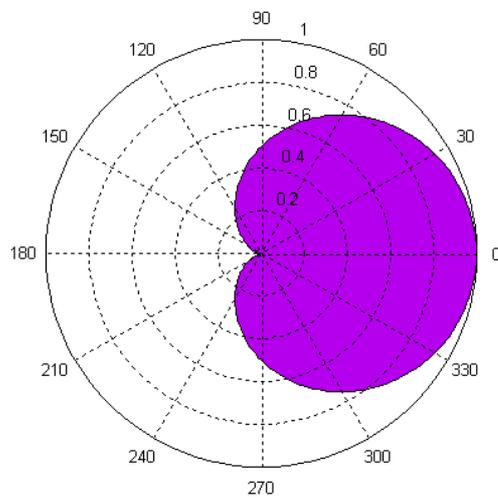
La courbe de réponse en fréquence d'un haut-parleur comme celle de la figure 6.9, est le niveau sonore délivré par le haut-parleur pour chaque fréquence lorsqu'on lui envoie un signal électrique de puissance constante. La bande passante est le domaine de fréquence pour lequel la réponse n'est pas inférieure à $3dB$ par rapport au maximum.

Le niveau acoustique produit par un haut-parleur dépend de l'angle entre l'axe du haut-parleur et la droite reliant le haut-parleur au point de mesure. Il possède une directivité comme pour les microphones, voir des exemples sur la figure 6.10.

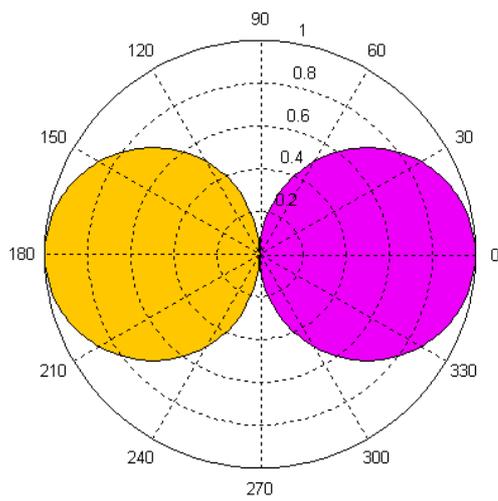
Si le haut-parleur rayonne librement dans l'espace, dans le domaine des basses fréquences, le son produit par une face de la membrane est en opposition de phase avec le son produit par la face opposée. Il en résulte un rayonnement de dipôle qui atténue beaucoup les basses fréquences. Pour éviter cela le haut-parleur est monté sur une enceinte de telle façon que le rayonnement ne se fasse que d'un seul côté, voir la figure 6.11. Un haut-parleur ne peut pas rayonner le son efficacement pour toutes les fréquences. C'est pourquoi une enceinte acoustique, comme celle de la figure 6.11,



a)



b)



c)

FIG. 6.5 – Directivité de microphones : a) omnidirectionnel, b) cardioïde et c) bidirectionnel.

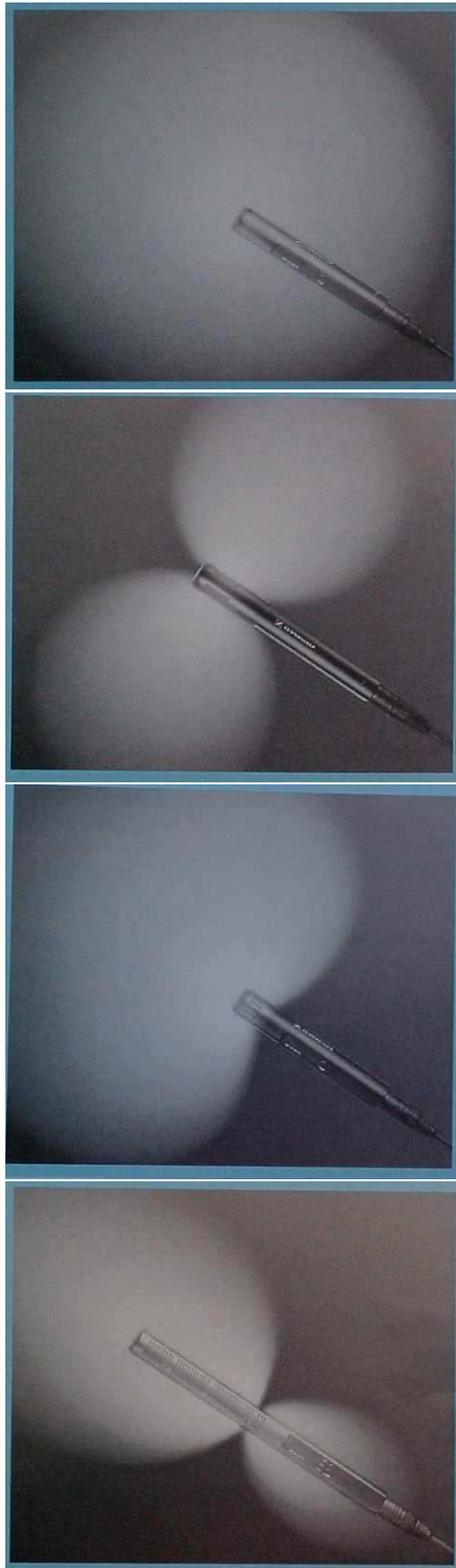


FIG. 6.6 – Directivité de microphones.



FIG. 6.7 – Sonomètre.

contient en général plusieurs haut-parleurs adaptés à des bandes de fréquences particulières.

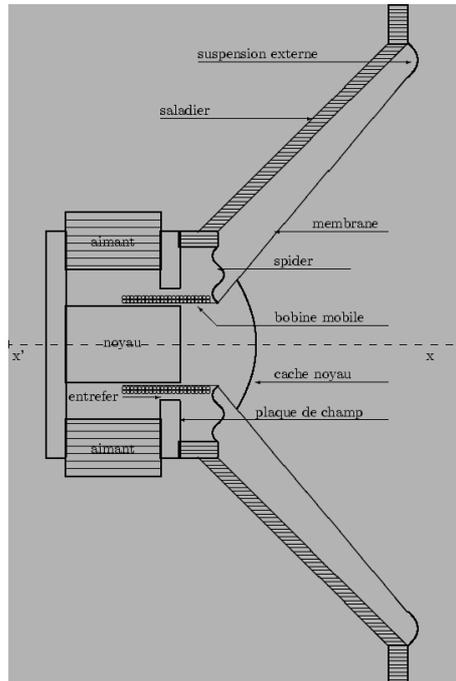


FIG. 6.8 – Schéma d'un haut-parleur.

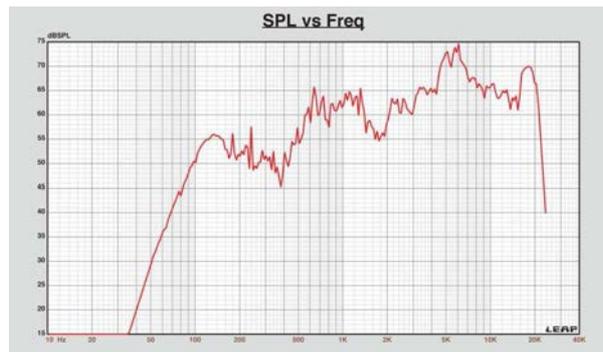


FIG. 6.9 – Réponse en fréquence d'un haut-parleur.

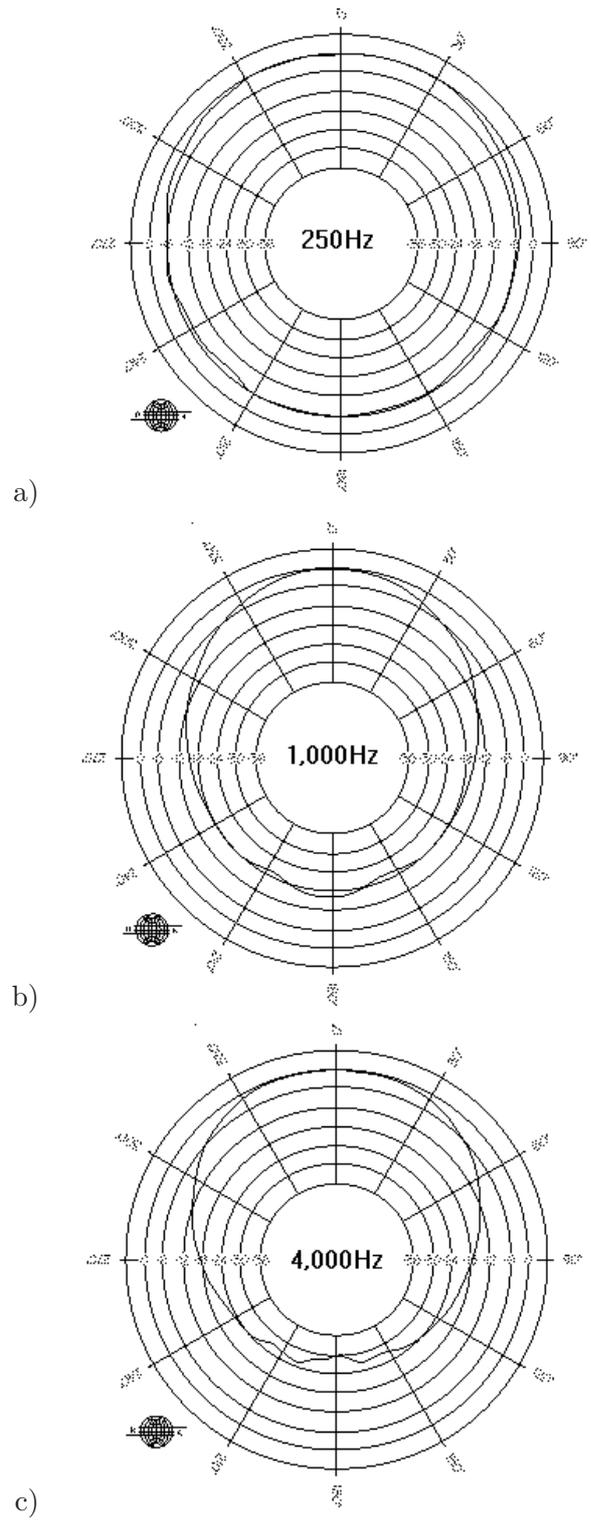


FIG. 6.10 – Directivité d'un haut parleur : a) 250 Hz, b) 1000 Hz et c) 4000 Hz.

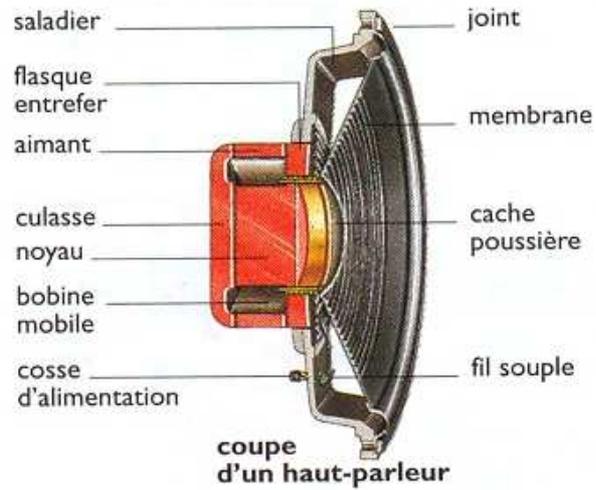


FIG. 6.11 – Haut-parleur et enceinte acoustique.

Chapitre 7

Vibrations à un degré de liberté

Le son est souvent produit par un rayonnement qui provient de vibrations de structures mécaniques. Nous allons rappeler les concepts fondamentaux de la mécanique des vibrations en utilisant des modèles simples : un système à un degré de liberté et un système à plusieurs degrés de liberté. Le premier peut être considéré comme un bloc élémentaire de construction et le second comme un exemple d'assemblage des blocs, sachant qu'une structure complexe peut être représentée par un système à un grand nombre (fini ou infini) de degrés de liberté. Ces concepts fondamentaux, bien que généralement insuffisant pour une modélisation qualitativement précise du phénomène de vibration, sont très utiles pour une bonne compréhension du phénomène.

7.1 Système masse ressort

Un oscillateur linéaire à un degré de liberté est schématisé par un système masse-ressort-amortisseur, voir la figure 7.1. Un corps indéformable de masse M , assimilé à un point matériel, est attaché à un support également indéformable par un ressort et un amortisseur en parallèle. Seul un mouvement de translation unidirectionnel est considéré.

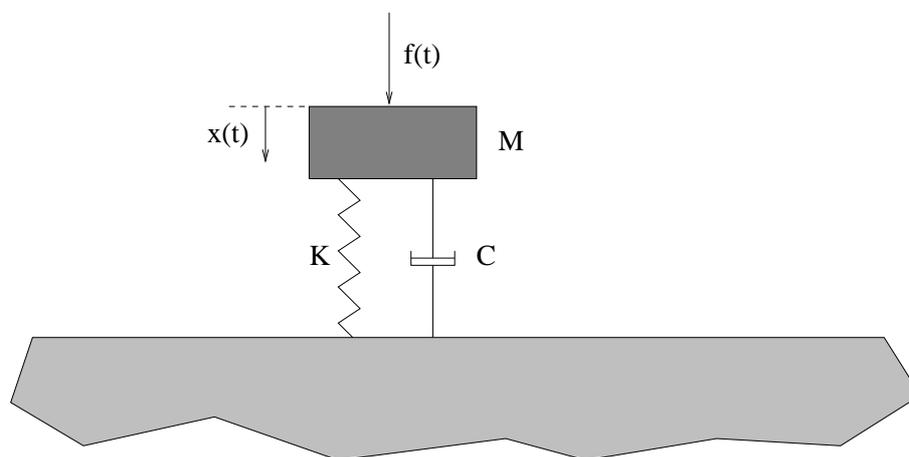


FIG. 7.1 – Système masse ressort.

On note $x(t)$ le déplacement à l'instant t , $\dot{x}(t)$ la vitesse

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (7.1)$$

et $\ddot{x}(t)$ l'accélération

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (7.2)$$

La masse subit, en plus de la force extérieure $f(t)$, une force due au ressort $f_K(t)$

$$f_K(t) = -Kx(t) \quad (7.3)$$

et une force due à l'amortisseur $f_D(t)$

$$f_D(t) = -D\dot{x}(t) \quad (7.4)$$

dans lesquelles K est la constante de raideur du ressort et D la constante d'amortissement de l'amortisseur. Ce sont des constantes strictement positives. Un système non amorti ($D = 0$) constitue un cas particulier.

Des exemples pratiques peuvent être décrits, au moins dans une première approche, par un oscillateur linéaire à un 1 DDL. C'est le cas d'un corps indéformable, attaché à un support par une poutre, faisant des mouvements perpendiculaires à celle-ci. C'est également le cas d'un véhicule roulant sur un sol ondulatoire si on considère que le véhicule est animé seulement d'un mouvement d'ensemble uniforme dans le sens horizontal et d'un autre oscillatoire dans le sens vertical. En somme, deux conditions doivent être satisfaites pour que le modèle d'un oscillateur linéaire à un 1 DDL s'applique : le corps doit être considéré comme indéformable pour être assimilé à un point matériel et animé d'un mouvement unidirectionnel (1 DDL) ; il subit une force de rappel qui tend à le ramener à sa position d'équilibre dont l'amplitude est proportionnelle à la distance qui sépare sa position actuelle de la position d'équilibre. L'intérêt d'étudier l'oscillateur linéaire à un 1 DDL est avant tout de nous permettre de comprendre les concepts les plus élémentaires de la mécanique des vibrations.

7.2 Equation du mouvement

La relation fondamentale de la dynamique du point matériel énonce que le produit de la masse par l'accélération est égale à la résultante des forces appliquées

$$M\ddot{x}(t) = f(t) + f_K(t) + f_D(t) \quad (7.5)$$

En prenant en compte les Eqs. (7.3) et (7.4), et en regroupant les termes contenant les variables cinématiques que sont le déplacement, la vitesse et l'accélération, on obtient l'équation fondamentale de l'oscillateur linéaire à 1 DDL régissant le déplacement $x(t)$

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (7.6)$$

Deux situations liées à la présence, soit d'une force constante, soit d'un mouvement du support méritent un traitement particulier. Les équations du mouvement dans ces deux situations seront présentées dans la suite.

7.2.1 Equation du mouvement en présence d'une force constante

On considère une force constante, i.e. une force dont la valeur ne varie pas au cours du temps. Sous l'action de cette force, notée f_{const} , la masse M se déplace de x_{const} par rapport à la configuration naturelle, x_{const} étant lié à f_{const} par

$$f_{const} = Kx_{const} \quad (7.7)$$

Si à cette force constante vient s'ajouter la force extérieure $f(t)$ introduite précédemment, le déplacement total $x_{total}(t)$ est la somme du déplacement imposé par la force constante et du déplacement provoqué par $f(t)$

$$x_{total}(t) = x_{const} + x(t) \quad (7.8)$$

L'équation du mouvement de l'oscillateur par rapport à la configuration naturelle régissant le déplacement total est

$$M\ddot{x}_{total}(t) + D\dot{x}_{total}(t) + Kx_{total}(t) = f_{const} + f(t) \quad (7.9)$$

Si on décompose x_{total} en x_{const} et $x(t)$ comme Eq. (7.8), on obtient

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) + Kx_{const} = f_{const} + f(t) \quad (7.10)$$

soit en prenant en compte l'équation d'équilibre statique

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (7.11)$$

Cette équation a donc la même forme que l'Eq. (7.6). Autrement dit, l'équation du mouvement en translation de l'oscillateur linéaire à 1 DDL, écrite dans la configuration naturelle est valable dans la configuration d'équilibre statique liée à la présence d'une force constante. L'exemple le plus courant est la force de gravité. Il convient de noter que $f(t)$ est la partie dynamique de la force totale et $x(t)$ le déplacement dynamique par rapport à la position d'équilibre statique. Dans la suite, ce sont les deux grandeurs que nous étudierons.

7.2.2 Equation en présence d'un mouvement du support

Si le support est soumis à un mouvement noté x_s , le déplacement relatif de la masse dans le repère lié au support, noté $x(t)$, est égal au déplacement absolu, noté x_{abs} , soustrait de x_s

$$x(t) = x_{abs}(t) - x_s(t) \quad (7.12)$$

Il convient d'écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le repère de référence dans lequel le déplacement absolu est considéré

$$M\ddot{x}_{abs}(t) = f(t) + f_K(t) + f_D(t) \quad (7.13)$$

dans laquelle $f(t)$ est la force extérieure comme précédemment, et la force sur la masse due au ressort est proportionnelle au déplacement relatif

$$f_K(t) = -K[x_{abs}(t) - x_s(t)] \quad (7.14)$$

et la force due à l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse relative

$$f_D(t) = -D[\dot{x}_{abs}(t) - \dot{x}_s(t)] \quad (7.15)$$

On déduit des précédentes équations, l'équation du mouvement régissant $x(t)$

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = -M\ddot{x}_s(t) + f(t) \quad (7.16)$$

Il convient de noter que dans cette équation régissant le déplacement relatif, apparaît une force supplémentaire $-M\ddot{x}_s(t)$ due à l'accélération du support.

7.3 Réponse libre

La force extérieure étant nulle, on cherche donc à résoudre l'équation ci-dessous

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (7.17)$$

avec les conditions initiales qui portent sur le déplacement et la vitesse à l'instant $t = 0$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (7.18)$$

7.3.1 Réponse libre d'un système non amorti et fréquence propre

Dans ce cas particulier ($D = 0$), l'équation se réduit donc à

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (7.19)$$

alors que les conditions initiales décrites par l'Eq. (7.18) restent inchangées.

La solution générale de l'équation différentielle (7.19) est sous la forme

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (7.20)$$

dans laquelle A_1 et A_2 sont déterminés par les conditions initiales.

La dérivée seconde de la solution est

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) \quad (7.21)$$

En reportant $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans l'équation du mouvement, on trouve

$$(-\omega^2 M + K)(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) = 0 \quad (7.22)$$

Cette identité doit être satisfaite à tout instant t . La solution triviale sans mouvement ($A_1 = A_2 = 0$) étant exclue, il en résulte que ω doit prendre la valeur ω_p qui dépend des constantes K et M

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (7.23)$$

La solution devient donc

$$x(t) = A_1 \sin \omega_p t + A_2 \cos \omega_p t \quad (7.24)$$

et on peut déterminer sans difficulté les constantes A_1 et A_2 à partir des conditions initiales

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega_p} \quad , \quad A_2 = x_0 \quad (7.25)$$

La solution de l'Eq. (7.19) avec les conditions initiales est alors

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_p} \sin \omega_p t + x_0 \cos \omega_p t \quad (7.26)$$

Cette solution peut aussi être écrite sous une autre forme

$$x(t) = A \cos(\omega_p t - \phi) \quad (7.27)$$

dans laquelle l'amplitude A est donnée par

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_p}\right)^2} \quad (7.28)$$

et la constante ϕ vérifie

$$\tan \phi = \frac{v_0}{x_0 \omega_p} \quad (7.29)$$

La réponse libre d'un oscillateur non amorti à 1 DDL est donc une oscillation harmonique dont la pulsation est ω_p . D'ailleurs cette pulsation est appelée la pulsation propre de l'oscillateur non amorti. Par simplification de langage, on parle souvent de pulsation propre. La fréquence propre est alors donnée par

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (7.30)$$

et la période de l'oscillation harmonique est

$$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (7.31)$$

7.3.2 Réponse libre d'un système avec un amortisseur visqueux

On reprend l'Eq. (7.17) dont la forme générale des solutions est

$$x(t) = B_1 x_1(t) + B_2 x_2(t) \quad (7.32)$$

dans laquelle x_1 et x_2 sont deux fonctions indépendantes et B_1 et B_2 sont des constantes déterminées par les conditions initiales. On cherche des solutions x_1 et x_2 sous la forme

$$x(t) = e^{pt} \quad (7.33)$$

dont la dérivée première et la dérivée seconde sont

$$\dot{x}(t) = p e^{pt} \quad , \quad \ddot{x}(t) = p^2 e^{pt} \quad (7.34)$$

En substituant les expressions de x , \dot{x} et \ddot{x} dans l'Eq (17), on en déduit que p doit vérifier

$$Mp^2 + Dp + K = 0 \quad (7.35)$$

Les solutions de cette équation, notées p_+ et p_- sont

$$p_{\pm} = -\frac{D}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}} \quad (7.36)$$

On appelle amortissement critique la valeur de l'amortissement pour laquelle l'expression sous le signe racine est nulle

$$D_{crit} = 2\sqrt{MK} = 2M\omega_p \quad (7.37)$$

dans laquelle ω_p est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti définie par l'Eq (7.23). On verra plus loin que cette valeur critique de l'amortissement constitue un point de bifurcation pour le comportement du mouvement libre : si D est inférieur à D_{crit} , le mouvement est oscillatoire, autrement il n'y a pas d'oscillation.

Si la valeur de D est différente de D_{crit} , p_+ et p_- sont différents, x_1 et x_2 sont alors

$$x_1(t) = e^{p_+t}, \quad x_2(t) = e^{p_-t} \quad (7.38)$$

Si D est égal à D_{crit} , alors p_+ et p_- sont égaux, $p_+ = p_- = -\frac{D_{crit}}{2M} = -\omega_p$, on vérifie dans ce cas que $te^{-\omega_p t}$ est aussi une solution autre que $e^{-\omega_p t}$, x_1 et x_2 sont alors

$$x_1(t) = e^{-\omega_p t}, \quad x_2(t) = te^{-\omega_p t} \quad (7.39)$$

On définit le taux d'amortissement critique, ou le taux d'amortissement en plus bref, par le rapport de la constante d'amortissement divisée par l'amortissement critique

$$\xi = \frac{D}{D_{crit}} = \frac{D}{2\sqrt{MK}} = \frac{D}{2M\omega_p} = \frac{D\omega_p}{2K} \quad (7.40)$$

Compte tenu des définitions de ω_p et de ξ , les solutions p_+ et p_- deviennent

$$p_{\pm} = -\xi\omega_p \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_p \quad (7.41)$$

Les propriétés de p_+ et p_- dépendent uniquement de la valeur du paramètre ξ . Il convient de distinguer trois situations : $\xi < 1$, $\xi = 1$ et $\xi > 1$. Dans chacune de ces situations, on étudiera la réponse libre amortie.

Réponse libre sous-amortie : $0 < \xi < 1$

C'est le cas lorsque $D < D_{crit}$, p_+ et p_- sont alors deux complexes conjugués

$$p_{\pm} = -\xi\omega_p \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\omega_p \quad (7.42)$$

On introduit le paramètre ω_D , dont on verra la signification physique quand on aura écrit la solution de la réponse sous-amortie, définie par

$$\omega_D = \sqrt{1 - \xi^2}\omega_p \quad (7.43)$$

La solution de l'Eq. (7.17) s'écrit alors

$$x(t) = e^{-\xi\omega_p t} (B_1 e^{i\omega_D t} + B_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (7.44)$$

que l'on peut aussi exprimer à l'aide des fonctions trigonométriques

$$x(t) = e^{-\xi\omega_p t} (A_1 \sin \omega_D t + A_2 \cos \omega_D t) \quad (7.45)$$

où les constantes A_1 et A_2 sont liées à B_1 et B_2 par

$$A_1 = i(B_1 - B_2), \quad A_2 = B_1 + B_2 \quad (7.46)$$

Ces constantes sont déterminées par les conditions initiales

$$A_1 = \frac{v_0 + \xi\omega_p x_0}{\omega_D}, \quad A_2 = x_0 \quad (7.47)$$

La réponse libre sous-amortie est donc

$$x(t) = e^{-\xi\omega_p t} \left(\frac{v_0 + \xi\omega_p x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right) \quad (7.48)$$

que l'on peut écrire sous une autre forme

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_p t} \cos(\omega_D t + \phi) \quad (7.49)$$

dans laquelle la constante A est donnée par

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi\omega_p x_0}{\omega_D} \right)^2 + x_0^2} \quad (7.50)$$

et la phase ϕ vérifie

$$\tan \phi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_0 + \xi\omega_p x_0}{x_0 \omega_D} \quad (7.51)$$

On voit qu'il s'agit d'un mouvement oscillatoire, mais il n'est pas harmonique, ni même périodique, car la fonction exponentielle $e^{-\xi\omega_p t}$ fait décroître exponentiellement l'amplitude de l'oscillation. La pulsation de l'oscillation ω_D définie par l'Eq. (7.43) est appelée la pulsation propre de l'oscillateur amorti, ou par simplification de langage, la pulsation propre amortie. La fréquence propre amortie est alors donnée par

$$f_D = \frac{\omega_D}{2\pi} \quad (7.52)$$

Par analogie à un oscillateur non amorti, on utilise la terminologie "période" désignant l'intervalle de temps qui sépare deux oscillations successives

$$T_D = \frac{1}{f_D} = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (7.53)$$

Il s'agit en effet d'une pseudo-période, puisque le mouvement n'est pas périodique.

Deux courbes de décroissance exponentielle $Ae^{-\xi\omega_p t}$ et $-Ae^{-\xi\omega_p t}$ enveloppent la courbe $x(t)$ de la réponse libre sous-amortie. En effet, ces deux courbes sont tangentes à la courbe $x(t)$ alternativement selon que la fonction cosinus prend la valeur $+1$ ou -1 . La valeur de $x(t)$ en un point tangent est égale à celle de l'une ou de l'autre courbe enveloppante selon le signe de $x(t)$. Il convient de noter que les tangentes ne sont pas horizontales et les points tangents ne coïncident pas avec les extremums locaux. Toutefois, on peut montrer que deux maximums ou deux minimums successifs, comme deux points tangents à une même courbe enveloppante, sont séparés par le même intervalle de temps T_D qui est la pseudo-période. Il en résulte que le rapport de deux maximums ou de deux minimums successifs $x_m = x(t_m)$ et $x_{m+1} = x(t_m + T_D)$ est

$$\frac{x_m}{x_{m+1}} = e^{\xi\omega_p T_D} \quad (7.54)$$

Le décrément logarithmique, noté δ , est défini par

$$\delta = \ln \frac{x_m}{x_{m+1}} \quad (7.55)$$

Compte tenu des équations (7.53), (7.54) et (7.55), on obtient

$$\delta = \xi\omega_p T_D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (7.56)$$

Le décrément logarithmique est donc fonction uniquement du taux d'amortissement ξ .

Si l'on considère deux maximums ou deux minimums séparés de n pseudo-périodes, soit $x_m = x(t_m)$ et $x_{m+n} = x(t_m + nT_D)$, on peut obtenir

$$\ln \frac{x_m}{x_{m+n}} = \frac{2\pi n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (7.57)$$

Cette expression constitue la base de l'une des méthodes pour la détermination expérimentale du taux d'amortissement critique ξ .

Réponse libre pour l'amortissement critique : $\xi = 1$

C'est le cas lorsque $D = D_{crit}$, d'après les Eqs (7.32), (7.38) et (7.41) la solution $x(t)$ est

$$x(t) = e^{-\omega_p t} (B_1 + B_2 t) \quad (7.58)$$

En explicitant les conditions initiales portant sur la position et la vitesse initiales, on obtient

$$x(t) = e^{-\omega_p t} [x_0 + (x_0\omega_p + v_0)t] \quad (7.59)$$

On constate qu'il n'y a plus d'oscillation.

Réponse libre sur-amortie : $\xi > 1$

C'est le cas lorsque l'amortissement est supérieur à la valeur critique ($D > D_{crit}$), p_+ et p_- sont alors deux solutions réelles négatives, la solution est donc

$$x(t) = e^{-\omega_p t} \left(B_1 e^{\omega_p \sqrt{\xi^2 - 1} t} + B_2 e^{-\omega_p \sqrt{\xi^2 - 1} t} \right) \quad (7.60)$$

Sans expliciter les conditions initiales, on peut constater qu'il n'a pas d'oscillation. L'amortissement critique D_{crit} correspond donc à la plus petite valeur de l'amortissement à partir de laquelle il n'y a pas d'oscillation pour la réponse libre.

7.4 Réponse forcée

On cherche à résoudre l'équation du mouvement sous une excitation $f(t)$

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (7.61)$$

On considérera d'abord une excitation harmonique, puis une excitation périodique, avant d'étudier le cas général.

7.4.1 Réponse forcée pour une excitation harmonique

On considère une excitation harmonique

$$f(t) = F_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.62)$$

dans laquelle F_0 est une constante complexe, l'équation à résoudre est la suivante

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.63)$$

La solution est à chercher sous la forme

$$x(t) = X_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.64)$$

La vitesse et l'accélération correspondent à la dérivation d'ordre première et seconde

$$\dot{x}(t) = i\omega_0 X_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.65)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.66)$$

En substituant les expressions de x , \dot{x} et \ddot{x} dans l'Eq (7.61), on obtient

$$X_0(K - M\omega_0^2 + iD\omega_0) = F_0 \quad (7.67)$$

On suppose que l'amortissement est strictement positif ($D > 0$), on peut alors écrire

$$\frac{X_0}{F_0} = \frac{1}{K - M\omega_0^2 + iD\omega_0} \quad (7.68)$$

On appelle la fonction de réponse en fréquence

$$H(\omega) = \frac{1}{K - M\omega^2 + iD\omega} \quad (7.69)$$

On verra plus loin que, dans le cas général, la fonction de réponse en fréquence est définie par le rapport de la transformée de Fourier de la réponse divisée par la transformée de Fourier de l'excitation. Pour une excitation harmonique de pulsation ω_0 , le rapport de l'amplitude de la réponse divisée par l'amplitude de l'excitation est égale donc à la valeur de la fonction de réponse en fréquence à la pulsation ω_0

$$\frac{X_0}{F_0} = H(\omega_0) \quad (7.70)$$

A l'aide de la notion de pulsation propre $\omega_p = \sqrt{K/M}$ et celle du taux d'amortissement critique $\xi = D\omega_p/2K$, la fonction de réponse en fréquence peut aussi s'écrire sous la forme

$$H(\omega) = \frac{1}{K(1 - \omega^2/\omega_p^2 + 2i\xi\omega/\omega_p)} \quad (7.71)$$

On définit le coefficient d'amplification dynamique à la pulsation ω par

$$\beta(\omega/\omega_p) = K|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_p^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_p^2}} \quad (7.72)$$

Si on introduit la réponse statique $X_{statique}$ à la force constante $|F_0|$, F_0 étant l'amplitude de l'excitation harmonique,

$$X_{statique} = \frac{|F_0|}{K} \quad (7.73)$$

on peut vérifier que le coefficient d'amplification dynamique à la pulsation ω_0 correspond au rapport du module de la réponse harmonique divisé par la réponse statique (ceci justifie son nom)

$$\beta(\omega_0/\omega_p) = \frac{|X_0|}{X_{statique}} \quad (7.74)$$

En utilisant la notion de fréquence réduite $\Omega = \omega/\omega_p$, l'expression du coefficient d'amplification dynamique devient

$$\beta(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \quad (7.75)$$

On peut constater que $\beta(0) = 1$, ce qui traduit le fait qu'à la pulsation zéro, la réponse dynamique et la réponse statique se confondent. La fonction $\beta(\Omega)$ est croissante jusqu'à sa valeur maximale à la pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_p\sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (7.76)$$

puis elle devient décroissante et tend vers zéro quand Ω tend vers l'infini.

La valeur maximale du coefficient d'amplification dynamique est

$$\beta_{max} = \beta(\omega_r/\omega_p) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (7.77)$$

ce qui veut dire qu'à la réponse statique près, l'amplitude de la réponse à la fréquence de résonance est entièrement contrôlée par l'amortissement. Dans les situations courantes, la valeur de ξ est très inférieure à 1, la valeur de β_{max} est donc approximativement inversement proportionnelle au taux d'amortissement.

Il convient de noter que la pulsation propre non amortie, la pulsation propre amortie et la pulsation de résonance ont des valeurs différentes ($\omega_r < \omega_D < \omega_p$), par contre, ces valeurs sont très proches dans les situations courantes car l'amortissement est souvent faible.

7.4.2 Transmissibilité des vibrations

On considère un équipement, que représente la masse d'un oscillateur, attaché à un support par l'intermédiaire d'une suspension, que représentent le ressort et l'amortisseur. Dans la pratique, on est souvent amené à optimiser la suspension, dans le but de minimiser la force transmise au support par l'équipement pour un niveau de sollicitation extérieure donné. Si la masse subit une force harmonique $f(t) = F_0 e^{i\omega_0 t}$, la force transmise est

$$f_{transmis}(t) = D\dot{x}(t) + Kx(t) = (i\omega_0 D + K)X_0 e^{i\omega_0 t} \quad (7.78)$$

On appelle la transmissibilité le rapport du module de l'amplitude de la force transmise divisé par l'amplitude de la force extérieure.

$$\mathcal{T}(\Omega) = \frac{|(i\omega_0 D + K)X_0|}{|F_0|} \quad (7.79)$$

Compte tenues des notions de la fonction de réponse en fréquence et du coefficient d'amplification dynamique, on peut obtenir le résultat ci-dessous

$$\mathcal{T}(\Omega) = |(i\omega_0 D + K)H(\omega_0)| = \beta(\Omega)\sqrt{1 + 4\xi^2\Omega^2} = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2\Omega^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \quad (7.80)$$

La variation de $\mathcal{T}(\Omega)$ en fonction de Ω est similaire à celle $\beta(\Omega)$: elle part pour $\Omega = 0$ de la valeur 1, croît jusqu'à un maximum vers la fréquence de résonance, puis décroît et tend vers zéro quand Ω tend vers l'infini. La particularité de $\mathcal{T}(\Omega)$ est que sa valeur en $\Omega = \sqrt{2}$ est égale à 1 pour toutes valeurs de ξ . Ailleurs, elle est supérieure à 1 pour tout $\Omega < \sqrt{2}$ mais inférieure à 1 pour tout $\Omega > \sqrt{2}$.

7.4.3 Isolation vibratoire

Si un appareil sensible est attaché à un support en vibration, la suspension doit alors être conçue de sorte que le mouvement transmis du support à l'appareil soit minimal. Autrement dit, on cherche à isoler l'appareil de son support.

On rappelle que, si l'appareil lui-même est libre de sollicitation extérieure, les équations qui régissent le mouvement de la masse qui représente l'appareil sont les suivantes

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = -M\ddot{x}_s(t) \quad (7.81)$$

$$x_{abs}(t) = x(t) + x_s(t) \quad (7.82)$$

avec $x(t)$ le déplacement relatif de la masse par rapport au support, $x_{abs}(t)$ le déplacement absolu et $x_s(t)$ le déplacement du support. On cherche à minimiser le déplacement absolu.

Si le déplacement du support est harmonique

$$x_s(t) = X_{s0} e^{i\omega_0 t} \quad (7.83)$$

le mouvement relatif est alors

$$x(t) = \omega_0^2 M H(\omega_0) X_{s0} e^{i\omega_0 t} \quad (7.84)$$

et il en résulte que le déplacement absolu s'écrit

$$x_{abs}(t) = (1 + \omega_0^2 MH(\omega_0)) X_{s0} e^{i\omega_0 t} \quad (7.85)$$

On peut vérifier que le rapport du module de l'amplitude du déplacement absolu divisé par le module de l'amplitude du déplacement du support est précisément égale à la transmissibilité

$$\frac{|(1 + \omega_0^2 MH(\omega_0)) X_{s0}|}{|X_{s0}|} = |1 + \omega_0^2 MH(\omega_0)| = \mathcal{T}(\Omega) \quad (7.86)$$

ce qui permet de conclure que la conception de la suspension est la même pour isoler un appareil du mouvement de son support que pour minimiser la force transmise d'un équipement sous sollicitation vers son support.

7.4.4 Réponse forcée pour une excitation périodique

On considère une excitation périodique, $f(t)$, de période T

$$f(t + T) = f(t) \quad (7.87)$$

On suppose que $f(t)$ est de carré intégrable sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$,

$$\int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt < +\infty \quad (7.88)$$

Alors, f admet le développement en série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_\nu e^{i\Omega_\nu t}, \quad \Omega_\nu = \frac{2\pi\nu}{T} \quad (7.89)$$

avec f_ν les coefficients de Fourier définis par

$$f_\nu = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\Omega_\nu t} dt \quad (7.90)$$

Si f est à valeurs réelles, alors $f_{-\nu}$ et f_ν sont conjugués l'un de l'autre.

On revient maintenant à l'équation à résoudre avec $f(t)$ développé en série de Fourier

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_\nu e^{i\Omega_\nu t} \quad (7.91)$$

L'excitation étant une somme d'excitations harmoniques, il en résulte que la réponse est la somme des réponses à chacune des excitations harmoniques puisque l'équation est linéaire

$$x(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} H(\Omega_\nu) f_\nu e^{i\Omega_\nu t} \quad (7.92)$$

avec H la fonction de réponse en fréquence.

7.4.5 Réponse forcée pour une excitation quelconque

On rappelle l'équation à résoudre

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (7.93)$$

Soient \hat{x} et \hat{f} les transformées de Fourier (TF) de x et f

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt \quad (7.94)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (7.95)$$

D'après la théorie de la transformation de Fourier, la transformée de la vitesse et celle de l'accélération sont

$$\hat{\dot{x}}(\omega) = i\omega\hat{x}(\omega) \quad (7.96)$$

$$\hat{\ddot{x}}(\omega) = -\omega^2\hat{x}(\omega) \quad (7.97)$$

La transformation de Fourier des deux membres de l'équation à résoudre conduit à

$$-\omega^2 M\hat{x}(\omega) + i\omega D\hat{x}(\omega) + K\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad (7.98)$$

On introduit la notion de raideur dynamique définie par

$$A(\omega) = -\omega^2 M + i\omega D + K \quad (7.99)$$

L'Eq. (7.98) devient alors

$$A(\omega)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad (7.100)$$

On suppose que la valeur de D est strictement positive, $A(\omega)$ est alors inversible. Son inverse, notée $H(\omega)$, est appelée fonction de réponse en fréquence (FRF)

$$H(\omega) = A(\omega)^{-1} = \frac{1}{K - M\omega^2 + iD\omega} \quad (7.101)$$

Il est évident qu'on peut définir directement la FRF comme le rapport de \hat{x} divisé par \hat{f} sans utiliser la notion de raideur dynamique. Connaissant \hat{f} et H , on peut calculer \hat{x} par

$$\hat{x}(\omega) = H(\omega)\hat{f}(\omega) \quad (7.102)$$

Donc, dans le domaine des fréquences, la relation entre la réponse et l'excitation est extrêmement simple : la première est le produit algébrique de la seconde par la FRF. On comprend alors l'importance de la notion de FRF puisqu'elle caractérise le comportement dynamique du système dans le domaine des fréquences. En utilisant les notions de pulsation propre et de taux d'amortissement, on a

$$H(\omega) = \frac{1}{M(\omega_p^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_p\omega)} \quad (7.103)$$

L'amortissement étant strictement positif ($D > 0$), on peut montrer que la FRF $H(\omega)$ satisfait les conditions nécessaires pour que sa transformée inverse de Fourier, notée $h(t)$, existe. Son expression est la suivante

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} H(\omega) d\omega \quad (7.104)$$

On donne ci-dessous les résultats de la transformation inverse de Fourier

$$0 < \xi < 1 \quad : \quad h(t) = I_+(t) \frac{1}{M\omega_D} e^{-\xi\omega_p t} \sin \omega_D t \quad (7.105)$$

$$\xi = 1 \quad : \quad h(t) = I_+(t) \frac{t}{M} e^{-\xi\omega_p t} \quad (7.106)$$

$$\xi > 1 \quad : \quad h(t) = I_+(t) \frac{1}{M\omega_p \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi\omega_p t} \sinh \omega_p \sqrt{\xi^2 - 1} t \quad (7.107)$$

avec $I_+(t) = 0$ si $t < 0$ et $I_+(t) = 1$ si $t \geq 0$. On rappelle que les paramètres ω_p , ξ et ω_D sont respectivement la pulsation propre, le taux d'amortissement et la pulsation propre amortie.

On a vu que la TF de la réponse est le produit algébrique de la TF de l'excitation par la FRF qui est en fait la TF de $h(t)$. D'après la théorie de la transformation de Fourier, dans le domaine du temps, la réponse est le produit de convolution de l'excitation f par $h(t)$

$$x(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (7.108)$$

La fonction $h(t)$ est appelée réponse impulsionnelle.

7.4.6 Problème d'évolution avec conditions initiales

Il s'agit de résoudre l'équation du mouvement pour un corps qui a la position initiale x_0 et la vitesse initiale v_0

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t), \quad t \geq 0 \quad (7.109)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (7.110)$$

La solution générale est la somme d'une solution particulière avec le second membre f et de la solution générale de l'équation homogène (avec second membre nul)

$$x(t) = x_G(t) + x_P(t), \quad t \geq 0 \quad (7.111)$$

On peut prendre comme solution particulière la réponse forcée avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$

$$x_P(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (7.112)$$

On rappelle que h est la réponse impulsionnelle.

Pour $0 < \xi < 1$ (réponse sous amortie), la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h(t) = I_+(t) \frac{1}{M\omega_D} e^{-\xi\omega_p t} \sin \omega_D t \quad (7.113)$$

avec $I_+(t) = 0$ si $t < 0$ et $I_+(t) = 1$ si $t \geq 0$.

Toujours pour $0 < \xi < 1$, la réponse générale de l'équation homogène est donnée par

$$x(t) = e^{-\xi\omega_p t} (A_1 \sin \omega_D t + A_2 \cos \omega_D t) \quad (7.114)$$

où les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions initiales.

La réponse du problème d'évolution avec les conditions initiales pour $0 < \xi < 1$ est donc donnée par

$$x(t) = x_G(t) + x_P(t), \quad t \geq 0 \quad (7.115)$$

$$x_G(t) = e^{-\xi\omega_p t} \left(\frac{v_0 + \xi\omega_p x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right) \quad (7.116)$$

$$x_P(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (7.117)$$

Il convient de noter que l'amplitude de $x_G(t)$ décroît exponentiellement avec le temps à cause de l'amortissement. Ainsi au bout d'une durée suffisamment longue, les conditions initiales perdent leur influence, le mouvement est alors dominé par la solution particulière, c'est à dire, il est entretenu par l'excitation extérieure.

Chapitre 8

Vibrations à plusieurs degrés de liberté

8.1 Equations du mouvement

8.1.1 Cas général

Un système peut comporter plusieurs corps rigides et chacun de ces corps peut avoir plusieurs degrés de liberté. Des attaches assurent la cohésion du système et on modélise ces attaches par des suspensions. On représente l'ensemble du mouvement du système à n degrés de liberté par un vecteur $\mathbf{x}(t)$ et la sollicitation extérieure agissant sur le système par un vecteur $\mathbf{f}(t)$ associé à $\mathbf{x}(t)$. Ces vecteurs sont écrits matriciellement ci-dessous

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Pour un système linéaire, on peut écrire les équations du mouvement sous forme d'un système d'équations différentielles linéaires

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [D] \dot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (8.2)$$

avec $[M]$, $[D]$ et $[K]$ les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité

$$[M] = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$[D] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

$$[K] = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

On fait souvent appel à la méthode des équations de Lagrange pour établir les équations du mouvement pour des systèmes complexes.

Les matrices $[M]$, $[D]$ et $[K]$ sont généralement non diagonales, ce qui fait que les équations sont couplées. Deux démarches sont possibles pour résoudre le système d'équations différentielles linéaires. Pour la première, il s'agit d'une intégration directe. La seconde appelée méthode d'analyse modale consiste à rechercher la base dans laquelle les équations du mouvement sont découplées et à étudier le mouvement dans cette base. Cette démarche a l'avantage de donner une perception de la nature physique du mouvement. Avant de détailler cette méthode, on examine d'abord un exemple très simple d'un oscillateur à deux degrés de liberté dans le but de montrer certaines propriétés des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.

8.1.2 Exemple d'un oscillateur à deux degrés de liberté

On considère un oscillateur à deux degrés de liberté, constitué de deux corps indéformables assimilés à deux points matériels de masse m_1 et m_2 , de trois ressorts de constantes de raideurs k_1 , k_2 et k_3 strictement positives et de trois amortisseurs de constantes d'amortissement d_1 , d_2 et d_3 strictement positives, voir la figure 8.1.

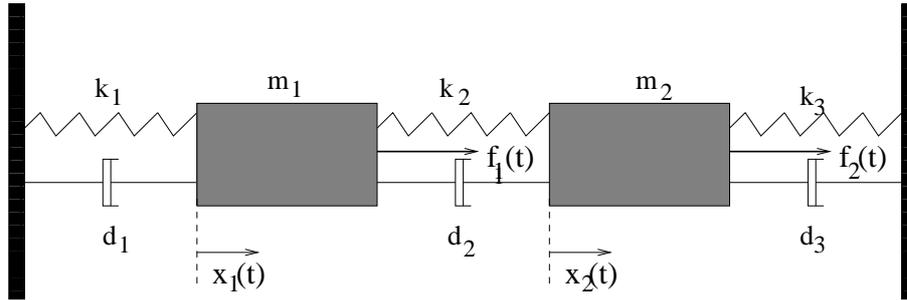


FIG. 8.1 – Système avec deux masses.

La configuration de référence est une configuration d'équilibre statique. On étudie les mouvements de translation unidirectionnelle. Les forces $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont appliquées aux masses m_1 et m_2 respectivement. On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions de m_1 et m_2 dans la configuration de référence et on applique la loi fondamentale de la dynamique à chacune des deux masses

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = f_1(t) - k_1 x_1(t) - k_2 [x_1(t) - x_2(t)] - d_1 \dot{x}_1(t) - d_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] \quad (8.6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = f_2(t) - k_2 [x_2(t) - x_1(t)] - k_3 x_2(t) - d_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - d_3 \dot{x}_2(t) \quad (8.7)$$

En regroupant les termes inconnus, on obtient les équations suivantes qui régissent le mouvement

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (d_1 + d_2) \dot{x}_1(t) - d_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = f_1(t) \quad (8.8)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - d_2\dot{x}_1(t) + (d_2 + d_3)\dot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = f_2(t) \quad (8.9)$$

Ce système d'équations linéaires peut s'écrire matriciellement comme l'Eq. (8.2) à l'aide des vecteurs de déplacement et de force

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

et des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité sous les formes suivantes

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad [D] = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 + d_3 \end{pmatrix}, \quad [K] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

On peut remarquer que ces matrices sont symétriques

$$[M]^T = [M], \quad [D]^T = [D], \quad [K]^T = [K] \quad (8.12)$$

et définies positives

$$\mathbf{y}^T [M] \mathbf{y} > 0, \quad \mathbf{y}^T [D] \mathbf{y} > 0, \quad \mathbf{y}^T [K] \mathbf{y} > 0, \quad \forall \mathbf{y} \neq 0 \quad (8.13)$$

Ces propriétés sont vérifiées par la majorité des systèmes dans la pratique. Toutefois, si le système n'est pas attaché à un support fixe, i.e., si un mouvement de corps rigide de l'ensemble est possible, les matrices D et K sont seulement non négatives et non pas définies positives. Si les coefficients de la matrice d'amortissement sont tous nuls, on parle de l'oscillateur linéaire non amorti.

8.2 Réponse libre

8.2.1 Réponse libre de l'oscillateur non amorti, pulsations et modes propres

La matrice d'amortissement étant nulle, on cherche à résoudre le problème d'évolution avec conditions initiales données et force extérieure nulle

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) = 0 \quad (8.14)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (8.15)$$

avec \mathbf{x}_0 et \mathbf{v}_0 deux vecteurs qui correspondent respectivement aux conditions initiales en déplacement et en vitesse.

La forme générale des solutions de l'Eq. 8.14 s'écrit

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \mathbf{x}_1(t) + A_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + A_n \mathbf{x}_n(t) \quad (8.16)$$

avec $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, \dots , $\mathbf{x}_n(t)$ des fonctions à valeurs réelles et algébriquement indépendantes, A_1 , A_2 , \dots , A_n des constantes réelles. Pour construire ces fonctions, on cherche des solutions de l'Eq. (8.14) sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u} \cos(\omega t + \phi) \quad (8.17)$$

avec ω un nombre réel et $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur dont les coefficients sont réels. En substituant l'Eq. (8.17) dans l'Eq. (8.14), on déduit que chaque couple (ω, \mathbf{u}) doit satisfaire l'équation suivante

$$[K]\mathbf{u} = \omega^2[M]\mathbf{u} \quad (8.18)$$

Si $[M]$ était la matrice unité, la détermination des valeurs de ω^2 serait le problème aux valeurs propres pour la matrice $[K]$. Comme $[M]$ n'est pas la matrice unité, on parle de problème aux valeurs propres généralisé.

Grace au fait que les matrices $[M]$ et $[K]$ sont symétriques et définies positives, on montre que les n valeurs propres sont réelles positives et qu'elles peuvent alors être classées dans l'ordre croissant

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (8.19)$$

et que les vecteurs propres associés sont réels et que deux vecteurs propres $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ et $\mathbf{u}^{(\beta)}$ associés à deux valeurs propres distinctes ω_α^2 et ω_β^2 sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse et à la matrice de rigidité

$$\mathbf{u}^{(\alpha)T}[M]\mathbf{u}^{(\beta)} = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \mu_\alpha > 0 \quad (8.20)$$

$$\mathbf{u}^{(\alpha)T}[K]\mathbf{u}^{(\beta)} = \mu_\alpha \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \mu_\alpha > 0 \quad (8.21)$$

avec $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$. La constante μ_α fixe la normalisation du vecteur propre $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ et cette normalisation est arbitraire.

Puisque les vecteurs propres sont orthogonaux, à tout instant t , on peut écrire le vecteur déplacement $\mathbf{x}(t)$ comme une combinaison linéaire de ces vecteurs

$$\mathbf{x}(t) = q_1(t)\mathbf{u}^{(1)} + q_2(t)\mathbf{u}^{(2)} + \dots + q_n(t)\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{\beta=1}^n q_\beta(t)\mathbf{u}^{(\beta)} \quad (8.22)$$

soit pour la composante α

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^n q_\beta(t)u_\alpha^{(\beta)} \quad (8.23)$$

Cette équation est équivalente à un changement de coordonnées. Si on introduit le vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ainsi que la matrice dont les éléments de la α ème colonne sont ceux des éléments du α ème vecteur propre

$$[U] = [\mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{u}^{(n)}] \quad (8.24)$$

l'Eq. (8.22) peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{x}(t) = [U]\mathbf{q}(t) \quad (8.25)$$

La substitution de cette équation dans l'Eq. (8.14) conduit à

$$[M][U]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [K][U]\mathbf{q}(t) = 0 \quad (8.26)$$

En multipliant à gauche par $[U]^T$, on obtient

$$[U]^T [M] [U] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [U]^T [K] [U] \mathbf{q}(t) = 0 \quad (8.27)$$

On introduit la matrice de masse généralisée $[\mathcal{M}]$ et la matrice de rigidité généralisée $[\mathcal{K}]$ définies par

$$[\mathcal{M}] = [U]^T [M] [U] \quad (8.28)$$

$$[\mathcal{K}] = [U]^T [K] [U] \quad (8.29)$$

l'Eq. (8.27) s'écrit alors

$$[\mathcal{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{K}] \mathbf{q}(t) = 0 \quad (8.30)$$

D'après les propriétés de l'orthogonalité des vecteurs propres, on déduit que les matrices $[\mathcal{M}]$ et $[\mathcal{K}]$ sont diagonales

$$[\mathcal{M}] = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

$$[\mathcal{K}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

ce qui veut dire que les équations sont découplées. On peut donc étudier l'évolution de chacune des composantes de $\mathbf{q}(t)$ indépendamment des autres. Les conditions initiales pour les coordonnées généralisées sont

$$\mathbf{q}(0) = [\mathcal{M}]^{-1} [U]^T [M] \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{q}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = [\mathcal{M}]^{-1} [U]^T [M] \mathbf{v}_0 \equiv \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (8.33)$$

On rappelle que \mathbf{x}_0 et \mathbf{v}_0 décrivent respectivement les positions et les vitesses initiales pour l'ensemble des degrés de liberté.

Par exemple, l'équation qui régit l'évolution de la coordonnée généralisée $q_\alpha(t)$ et les conditions initiales correspondantes sont

$$\mu_\alpha \ddot{q}_\alpha(t) + \mu_\alpha \omega_\alpha^2 q_\alpha(t) = 0 \quad (8.34)$$

$$q_\alpha(0) = q_{0\alpha} \quad , \quad \dot{q}_\alpha(0) = \dot{q}_{0\alpha} \quad (8.35)$$

Cette équation a la même forme que celle d'un oscillateur non amorti à un degré de liberté dont la masse et la fréquence propre sont respectivement μ_α et ω_α . La solution est donc donnée par

$$q_\alpha(t) = \frac{\dot{q}_{0\alpha}}{\omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t + q_{0\alpha} \cos \omega_\alpha t \quad (8.36)$$

Une fois les solutions pour toutes les coordonnées généralisées obtenues, la solution pour $\mathbf{x}(t)$ peut être tout simplement calculée en utilisant l'Eq. (8.22) réécrite ci-dessous

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(t) \mathbf{u}^{(\alpha)} \quad (8.37)$$

En général $\mathbf{x}(t)$ dépend de toutes les coordonnées généralisées.

Un cas particulier qui révèle la nature physique des valeurs propres, des vecteurs propres et des coordonnées généralisées concerne la réponse libre d'un oscillateur non amorti avec les conditions initiales définies par

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}^{(\alpha)}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad (8.38)$$

Il est facile de constater que seule $q_{\alpha}(t)$ est non nulle et égale à $\cos(\omega_{\alpha}t)$. Finalement la solution est

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}^{(\alpha)} \cos(\omega_{\alpha}t) \quad (8.39)$$

ce qui veut dire que si la "forme spatiale" est initialement configurée selon un vecteur propre avec la vitesse initiale nulle, cette "forme spatiale" va se conserver dans le temps et que les mouvements des masses sont harmoniques et ils sont synchrones avec la même pulsation égale à la racine carrée de la valeur propre associée au vecteur propre. Ainsi, les vecteurs propres sont appelés modes propres de vibration associés aux pulsations propres qui correspondent aux racines carrées des valeurs propres, et la base de l'espace vectoriel formée par l'ensemble des vecteurs propres est appelée la base modale.

La signification physique de l'Eq. (8.22) est donc claire. Le mouvement d'un système non amorti à n degrés de liberté peut être décomposé en n mouvements élémentaires et indépendants sur la base modale. Chaque mouvement élémentaire, associé à un mode propre, est décrit par une seule variable scalaire qui est la coordonnée généralisée correspondante dont l'évolution suit celle d'un oscillateur à un degré de liberté dont la pulsation propre est égale à celle associée au mode propre.

8.2.2 Réponse libre de l'oscillateur amorti

On cherche à résoudre le système de n équations différentielles linéaires écrit matriciellement ci-dessous

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [D] \dot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) = 0 \quad (8.40)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (8.41)$$

On peut utiliser la méthode d'analyse modale en projetant $\mathbf{x}(t)$ dans la base modale formée par les vecteurs propres

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(t) \mathbf{u}^{(\alpha)} = [U] \mathbf{q}(t) \quad (8.42)$$

Si on procède de manière similaire aux cas de l'oscillateur non amorti, on obtient

$$[\mathcal{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{D}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{K}] \mathbf{q}(t) = 0 \quad (8.43)$$

avec les conditions initiales ci-dessous

$$\mathbf{q}(0) = [\mathcal{M}]^{-1} [U]^T [M] \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = [\mathcal{M}]^{-1} [U]^T [M] \mathbf{v}_0 \equiv \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (8.44)$$

La matrice $[\mathcal{D}]$ est la matrice d'amortissement généralisée définie par

$$[\mathcal{D}] = [U]^T [D] [U] \quad (8.45)$$

Si les matrices $[\mathcal{M}]$ et $[\mathcal{K}]$ sont diagonales, la matrice $[\mathcal{D}]$ ne l'est en général pas. Les équations sont donc couplées par l'amortissement. Pour pouvoir découpler les équations, on peut adopter des formes particulières pour la matrice d'amortissement, par exemple en supposant qu'elle est proportionnelle aux matrices de masse et de rigidité

$$[D] = a[M] + b[K] \quad (8.46)$$

avec a et b deux constantes réelles. La matrice d'amortissement généralisée est alors diagonale puisque

$$[\mathcal{D}] = a[U]^T [M] [U] + b[U]^T [K] [U] = a[\mathcal{M}] + b[\mathcal{K}] \quad (8.47)$$

Si on suppose que la matrice $[\mathcal{D}]$ peut être rendue diagonale d'une manière ou d'une autre, les équations sont alors découplées et chacune d'elles peut être résolue comme celle qui régit le mouvement d'un oscillateur amorti à un degré de liberté. Finalement la réponse libre peut être synthétisée à l'aide de l'Eq. (8.22).

8.3 Réponse forcée de l'oscillateur amorti

On cherche la solution de l'équation suivante

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [D] \dot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (8.48)$$

On introduit les transformées de Fourier de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{f}(t)$ par

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \mathbf{x}(t) dt \quad (8.49)$$

$$\hat{\mathbf{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \mathbf{f}(t) dt \quad (8.50)$$

On suppose que les matrices $[M]$, $[D]$ et $[K]$ sont définies positives. On peut alors introduire la notion de matrice de raideur dynamique qui est une matrice complexe symétrique

$$[A(\omega)] = -\omega^2[M] + i\omega[D] + [K] \quad (8.51)$$

ainsi que la fonction de réponse en fréquence qui est la matrice inverse de $[A(\omega)]$

$$[H(\omega)] = [A(\omega)]^{-1} = (-\omega^2[M] + i\omega[D] + [K])^{-1} \quad (8.52)$$

La TF de la réponse est liée à la TF de la force extérieure par

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = [H(\omega)] \hat{\mathbf{f}}(\omega) \quad (8.53)$$

On peut aussi introduire la réponse impulsionnelle par la transformation inverse de Fourier de $[H(\omega)]$

$$[h(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} [H(\omega)] d\omega \quad (8.54)$$

La réponse forcée dans le domaine du temps s'écrit alors comme le produit de convolution de $[h]$ et de \mathbf{f}

$$\mathbf{x}(t) = ([h] * \mathbf{f})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t - \tau)] \mathbf{f}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(\tau)] \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \quad (8.55)$$

On voit que le passage du domaine du temps au domaine des fréquences par le moyen de transformations de Fourier pour un système à plusieurs degrés de liberté est tout à fait similaire au passage pour un système à un degré de liberté. La différence est que les grandeurs dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté sont vectorielles ou matricielles et non pas scalaires.

Une autre voie d'étude de la réponse forcée passe par l'utilisation de la méthode d'analyse modale. On décompose le mouvement sur la base modale formée de vecteurs propres

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(t) \mathbf{u}^{(\alpha)} = [U] \mathbf{q}(t) \quad (8.56)$$

Les équations régissant l'évolution des coordonnées généralisées s'écrivent

$$[\mathcal{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{D}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{K}] \mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (8.57)$$

avec $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ le vecteur des forces généralisées

$$\mathbf{g}(t) = [U]^T \mathbf{f}(t) \quad (8.58)$$

La composante $g_{\alpha}(t)$ du vecteur des forces généralisées est en effet le produit scalaire de la force extérieure $\mathbf{f}(t)$ et du vecteur propre $\mathbf{u}^{(\alpha)}$

$$g_{\alpha}(t) = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n f_{\beta}(t) u_{\beta}^{(\alpha)} \quad (8.59)$$

Dans la pratique, les termes non diagonaux de la matrice $[\mathcal{D}]$ sont souvent faibles comparés aux termes diagonaux, on suppose donc que $[\mathcal{D}]$ est diagonale, ainsi les équations régissant le mouvement forcé sont découplées. Chacune des équations a alors la même forme que celle qui régit le mouvement forcé d'un oscillateur amorti à un degré de liberté. Le système est alors équivalent à n oscillateurs à un degré de liberté et chacun de ces oscillateurs est sollicité par une composante du vecteur de forces généralisées $\mathbf{g}(t)$. Tous les résultats sur la réponse forcée d'un oscillateur à un degré de liberté sont alors transposables. On sait notamment que plus le contenu fréquentiel de la force extérieure est proche d'une pulsation propre ω_{α} et plus $g_{\alpha}(t)$ est importante, plus $q_{\alpha}(t)$ est importante, ce qui veut dire que le mode propre $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ est très sollicité. A l'inverse, plus la pulsation propre ω_{α} est loin des pulsations des forces extérieures, et plus $g_{\alpha}(t)$ est faible, moins le mode propre $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ est sollicité. C'est en effet $g_{\alpha}(t)$ qui entretient le mouvement du mode propre $\mathbf{u}^{(\alpha)}$.

Sur la base modale, on peut également passer dans le domaine des fréquences en faisant des transformations de Fourier. On peut notamment introduire les notions de matrice de raideur généralisée, de matrice de fonction de réponse généralisée. Les grandeurs vectorielles ou matricielles dans la base modale et celles correspondantes dans la base initiale sont liées simplement par le

changement de base. Par exemple la fonction de réponse en fréquence $[H]$ et la fonction de réponse en fréquence généralisée $[\mathcal{H}]$ sont liées par

$$[H(\omega)] = [U][\mathcal{H}(\omega)][U]^T \quad (8.60)$$

sachant que $[\mathcal{H}]$ est définie par

$$[\mathcal{H}(\omega)] = (-\omega^2[\mathcal{M}] + i\omega[\mathcal{D}] + [\mathcal{K}])^{-1} \quad (8.61)$$

D'ailleurs, en remplaçant dans l'Eq. 8.60 la fonction de réponse en fréquence (généralisée) par la réponse impulsionnelle (généralisée), on obtient la relation entre la réponse impulsionnelle et la réponse impulsionnelle généralisée.

8.4 Système continu

Les structures réelles sont la plupart du temps composées de corps déformables. On exposera les notions de modes propres, de pulsations propres pour un solide tridimensionnel en supposant que le matériau qui constitue ces corps déformables a un comportement élastique linéaire isotrope. Puis on étudiera plus en détail des exemples de milieux unidimensionnels : corde sous tension, mouvement de traction et de compression d'une barre et mouvement de flexion d'une poutre.

8.4.1 Solide tridimensionnel, homogène, élastique isotrope

L'état d'un solide est caractérisé, du point de vue mécanique, par le champ du vecteur de déplacement \mathbf{u} et le champ du tenseur des contraintes σ à tout instant. Le champ du tenseur de déformation ε est, sous l'hypothèse de petite perturbation, la partie symétrique du champ gradient de déplacement

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) \quad (8.62)$$

ou sous forme d'indices

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8.63)$$

L'évolution de σ et celle de ε sont reliées par le comportement mécanique du solide. Si le solide est homogène et le comportement du matériau constituant est élastique isotrope, cette relation est la suivante

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \mathcal{I} + 2\mu \varepsilon \quad (8.64)$$

avec λ et μ les constantes d'élasticité, \mathcal{I} le tenseur d'identité, $\text{Tr}(\varepsilon)$ la trace de ε , i.e., $\text{Tr}(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Compte tenu des Eqs. (8.62) et (8.64), le tenseur des contraintes peut être considéré comme une fonctionnelle du vecteur de déplacement

$$\sigma = \sigma(\mathbf{u}) \quad (8.65)$$

L'équation qui régit le mouvement du solide ainsi que les conditions sur la frontière sont explicitées ci-dessous

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega \quad (8.66)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (8.67)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_D(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (8.68)$$

avec Ω le domaine occupé par le solide, Γ_u la partie de la frontière sur laquelle le déplacement $\mathbf{u}_D(\mathbf{x})$ est imposé, Γ_t la partie de la frontière sur laquelle la force $\mathbf{t}_D(\mathbf{x})$ est imposée, \mathbf{n} le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur du domaine Ω , ρ la masse volumique, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ la force de volume.

On cherche d'abord la réponse libre, solution du problème suivant

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega \quad (8.69)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (8.70)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (8.71)$$

On propose de chercher des solutions pour $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cos(\omega t + \phi) \quad (8.72)$$

La fonction $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ est alors la solution du problème suivant

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (8.73)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (8.74)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (8.75)$$

Du point de vue mathématique, la recherche de couples $(\omega_m^2, \mathbf{p}_m(\mathbf{x}))$ constitue un problème de valeurs propres et de vecteurs propres. On sait que les valeurs propres ω_m^2 forment une suite croissante tendant vers $+\infty$

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_m^2 \leq \dots \quad (8.76)$$

et que l'ensemble des vecteurs propres forme une base de l'espace vectoriel. La démarche de la méthode d'analyse modale consiste à chercher la réponse libre et la réponse forcée sur cette base

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} q_\alpha(t) \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (8.77)$$

Du point de vue mécanique, les ω_m et $\mathbf{p}_m(\mathbf{x})$ sont les pulsations propres et les modes propres. Leurs expressions seront présentées pour différentes structures dans la suite.

8.4.2 Cordes vibrantes

On considère une corde placée horizontalement suivant l'axe OX . La masse linéique ρ_l est uniforme sur toute la longueur. La tension T est appliquée à la corde. On note $v(x, t)$ la position verticale de la corde en x à l'instant t . L'équation du mouvement vertical de la corde, soumise à une force verticale linéique $f(x, t)$, est la suivante

$$\rho_l \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (8.78)$$

En l'absence de la force extérieure, le mouvement est libre et régi par l'équation

$$\rho_l \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (8.79)$$

soit encore l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (8.80)$$

avec la vitesse des ondes $c = \sqrt{T/\rho_l}$.

On cherche des solutions sous la forme

$$v(x, t) = p(x)q(t) \quad (8.81)$$

La substitution de cette expression dans l'Eq. (8.79) conduit à

$$\frac{T}{\rho_l} \frac{1}{p(x)} \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \quad (8.82)$$

Dans cette équation, le membre gauche est une fonction de x et le membre droit une fonction de t . Pour qu'il y ait égalité entre ces deux fonctions, elles doivent être égales à une constante. On note $-\omega^2$ cette constante, ce qui permet d'écrire les équations séparément pour $q(t)$ et pour $p(x)$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (8.83)$$

$$T \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \omega^2 \rho_l p(x) = 0 \quad (8.84)$$

Les solutions de l'Eq. 8.84 sont sous la forme

$$p(x) = A \sin \left(\sqrt{\frac{\rho_l}{T}} \omega x \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{\rho_l}{T}} \omega x \right) \quad (8.85)$$

La fonction $p(x)$ doit satisfaire en plus les conditions aux limites aux deux extrémités de la corde. Si les deux extrémités de la corde sont fixes

$$v(0, t) = 0 \quad , \quad v(L, t) = 0 \quad (8.86)$$

avec L la longueur de la corde, les conditions suivantes

$$p(0) = 0 \quad , \quad p(L) = 0 \quad (8.87)$$

doivent alors être satisfaites par $p(x)$ dont la forme est donnée par l'Eq. 8.85, ce qui implique

$$B = 0 \quad , \quad \sin\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{T}} \omega L\right) = 0 \quad (8.88)$$

Donc ω doit prendre les valeurs ω_α suivantes

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.89)$$

A chaque valeur ω_α est associée une fonction $p_\alpha(x)$ donnée par

$$p_\alpha(x) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{L} x\right), \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.90)$$

Les fonctions $p_\alpha(x)$ sont en effet les modes propres de vibration et les ω_α les pulsations propres d'une corde sous tension dont les deux extrémités sont fixes. On peut d'ailleurs vérifier les propriétés d'orthogonalité ci-dessous

$$\int_0^L \rho_l p_\alpha(x) p_\beta(x) dx = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (8.91)$$

$$\int_0^L T \frac{dp_\alpha(x)}{dx} \frac{dp_\beta(x)}{dx} dx = \omega_\alpha^2 \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (8.92)$$

8.4.3 Mouvement longitudinal d'une barre

On considère une barre droite de longueur L , de section uniforme sur toute la longueur. La barre est constituée d'un matériau homogène dont le comportement est élastique isotrope. On note ρ la masse volumique, E le module d'Young et $u(x, t)$ le déplacement longitudinal en x à l'instant t . L'équation régissant le mouvement longitudinal libre de la barre est la suivante

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (8.93)$$

Cette équation a la même forme que l'équation du mouvement d'une corde sous tension si on remplace E par T . Donc les modes propres sont sous la forme

$$p(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega x\right) \quad (8.94)$$

Bien entendu, cette expression doit encore prendre en compte les conditions aux limites imposées aux extrémités.

Les pulsations propres et les modes propres sont donnés ci-dessous pour les extrémités fixes ou libres. On distingue trois situations :

* les deux extrémités fixes : $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad p_\alpha(x) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{L} x\right), \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.95)$$

* une extrémité fixe et l'autre libre : $u(0, t) = 0, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=L} = 0$

$$\omega_\alpha = \frac{(2\alpha - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad p_\alpha(x) = \sin\left(\frac{(2\alpha - 1)\pi}{2L} x\right), \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.96)$$

* les deux extrémités libres : $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = 0$

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad p_\alpha(x) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{L} x\right), \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.97)$$

8.4.4 Mouvement de flexion d'une poutre

On considère une poutre droite de longueur L , de section uniforme sur toute la longueur. La poutre est constituée d'un matériau homogène dont le comportement est élastique isotrope. On note ρ la masse volumique, E le module d'Young, S l'aire de la section, I le moment d'inertie et $v(x, t)$ le déplacement transversal en x à l'instant t . Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli de la poutre, l'équation régissant le mouvement transversal libre est la suivante

$$\rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (8.98)$$

On cherche des solutions sous la forme

$$v(x, t) = p(x)q(t) \quad (8.99)$$

ceci conduit aux deux équations séparées, une pour $q(t)$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (8.100)$$

et l'autre pour $p(x)$

$$EI \frac{d^4 p(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho S p(x) = 0 \quad (8.101)$$

On cherche des solutions de cette dernière équation sous la forme

$$p(x) = e^{rx} \quad (8.102)$$

La substitution de cette expression de $p(x)$ dans l'Eq. (8.101) conduit à l'équation caractéristique

$$r^4 - \omega^2 \frac{\rho S}{EI} = 0 \quad (8.103)$$

qui a comme racines

$$r_1 = \beta, \quad r_2 = -\beta, \quad r_3 = i\beta, \quad r_4 = -i\beta; \quad \beta \equiv \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho S}{EI}} \quad (8.104)$$

Les solutions de l'Eq. (8.101) sont donc sous la forme

$$p(x) = B_1 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} + B_3 e^{i\beta x} + B_4 e^{-i\beta x} \quad (8.105)$$

ou sous une autre forme à l'aide de fonctions trigonométriques et hyperboliques

$$p(x) = A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x + A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x \quad (8.106)$$

La fonction $p(x)$ doit satisfaire en plus les conditions aux limites aux deux extrémités de la corde.

La situation est la plus simple pour le calcul quand les deux extrémités sont appuyées, i.e., elles sont interdites de mouvement transversal mais libres de rotation

$$p(0) = 0, \quad \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = 0; \quad p(L) = 0, \quad \frac{d^2 p}{dx^2}(L) = 0 \quad (8.107)$$

Ces conditions impliquent

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0; \quad \sin \beta L = 0 \quad (8.108)$$

Donc β doit prendre les valeurs suivantes

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha\pi}{L}, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.109)$$

ce qui permet de déterminer les fréquences propres

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.110)$$

et les modes propres correspondants

$$p_\alpha(x) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{L} x\right), \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (8.111)$$

Dans le cas d'une poutre soit encastree soit libre aux deux extrémités, on pourra vérifier que les fréquences propres sont solutions de

$$\cos \beta L \cosh \beta L = 1 \quad (8.112)$$

Les premières solutions numériques de cette équation sont données dans le tableau 8.2

n	1	2	3	4	5	6
$\beta_n L$	4.730	7.8532	10.9956	14.1371	17.2787	20.4203

FIG. 8.2 – Premières solutions de l'équation 8.112.

8.4.5 Vibrations d'une membrane

Une membrane est l'équivalent en dimension deux d'une corde en dimension un. En notant T la tension de la membrane (en N/m) et ρ_s la masse surfacique (en kg/m^2), l'équation du mouvement de la membrane est donnée par

$$T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \rho_s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (8.113)$$

en notant $c = \sqrt{T/\rho_s}$ on obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (8.114)$$

et on retrouve une équation des ondes en dimension deux.

Les modes de vibration d'une membrane sont solution de

$$\Delta z + k^2 z = 0 \quad (8.115)$$

avec un Laplacien bidimensionnel. Les conditions aux limites imposent z ou sa dérivée normale sur les bords. Par exemple pour une membrane rectangulaire les modes sont

$$z(x, y) = \sin k_x x \sin k_y y \quad (8.116)$$

avec

$$\begin{aligned} k_x &= n\pi/L_x \\ k_y &= m\pi/L_y \end{aligned} \quad (8.117)$$

dans le cas d'un déplacement nul sur les bords. Les fréquences propres de vibration sont alors

$$f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2} \quad (8.118)$$

8.4.6 Vibrations d'une plaque

Une plaque est l'équivalent en dimension deux d'une poutre en dimension un. En notant ρ_s la masse surfacique (en kg/m^2), h l'épaisseur de la plaque, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau de la plaque, l'équation du mouvement de Love-Kirchhoff est donnée par

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (8.119)$$

Les modes de vibration peuvent se calculer en analogie avec l'approche utilisée pour les poutres, voir les résultats sur les figures 8.3.

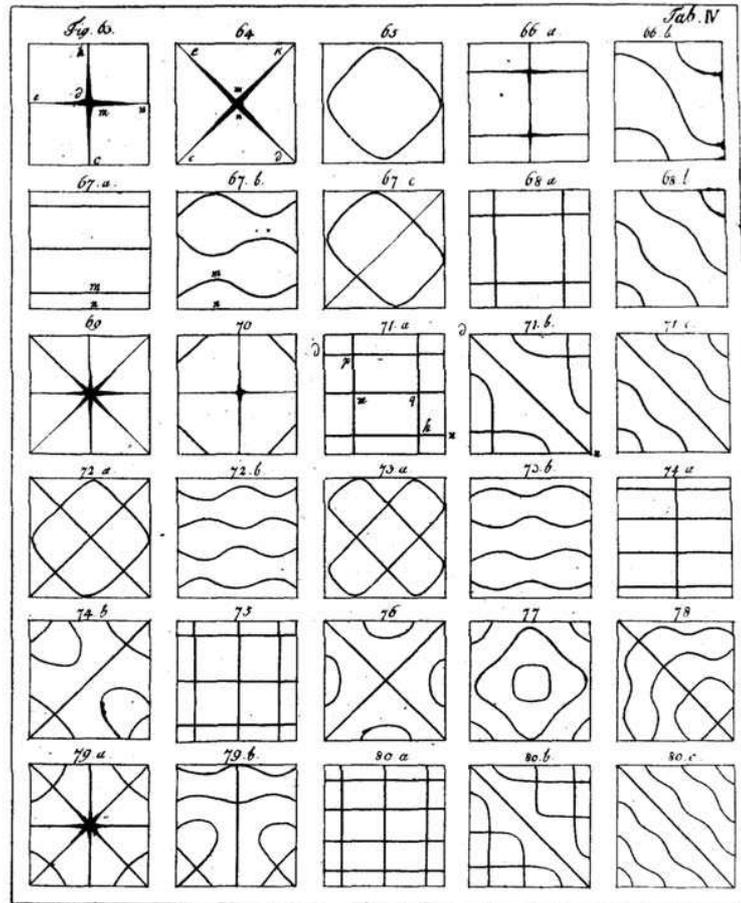


FIG. 8.3 – Figures de Chladni et formes modales d'une plaque.

Chapitre 9

Le rayonnement acoustique

Lorsqu'une structure est plongée dans un fluide, ses vibrations sont transmises au fluide environnant et engendre une onde acoustique. Ce processus de conversion de vibrations mécaniques en onde acoustique permet d'expliquer le fonctionnement d'une grande partie des sources sonores. On trouvera dans cette catégorie des instruments de musique, voir la figure 9.1, des moyens de transports sur la figure 9.2 ou des machines sur la figure 9.3.

9.1 Cas unidimensionnel

Considérons le piston présenté sur la figure 9.4 et animé d'une vitesse $v(t) = V \cos \omega t$. On suppose que le piston est très long et que par conséquent il n'y a pas de réflexion à droite et d'onde retour. Sur la paroi du piston, nous avons l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui donne

$$-V \rho_0 \omega \sin \omega t + \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (9.1)$$

Le champ de pression est une onde plane $p(x, t) = \text{Re}(P e^{-i(\omega t - kx)})$ et par conséquent

$$\frac{dp}{dx}(x, t) = \text{Re}(ikP e^{-i(\omega t - kx)}) \quad (9.2)$$

$$\frac{dp}{dx}(0, t) = \text{Re}(ikP e^{-i\omega t}) \quad (9.3)$$

$$= \rho_0 \omega V \sin \omega t \quad (9.4)$$

d'où $kP = \rho_0 \omega V$, $P = \rho_0 c V$ et finalement

$$p(x, t) = \rho_0 c V \cos(\omega t - kx) \quad (9.5)$$

La puissance rayonnée par unité de surface du piston est

$$P_{\text{uis}} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c V \cos(\omega t) V \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2 \quad (9.6)$$

Elle varie comme V^2 et est proportionnelle à l'impédance $Z = \rho_0 c$. Le déplacement du piston est donné par $x = -v/(i\omega)$. Donc pour avoir une puissance constante il faut un déplacement du piston inversement proportionnel à ω , donc un grand déplacement dans les basses fréquences et un petit déplacement dans les grandes fréquences.



FIG. 9.1 – Instruments de musique.

9.2 Cas d'une sphère

A titre d'exemple, nous étudions le rayonnement acoustique d'une sphère vibrant uniformément sur sa surface. Notant a le rayon de la sphère, le champ de pression est

$$p(r) = p(a)e^{ik(r-a)}\frac{a}{r} \quad (9.7)$$

La vitesse des points de la surface de la sphère est donnée par

$$-i\rho_0\omega v + \frac{dp}{dr} = 0 \quad (9.8)$$

$$v(r) = \frac{ap(a)}{i\rho_0\omega r^2}(ikr - 1)e^{ik(r-a)} \quad (9.9)$$

Sur la surface de rayon a , nous avons

$$p(a) = \frac{i\rho_0\omega a}{ika - 1}v(a) \quad (9.10)$$

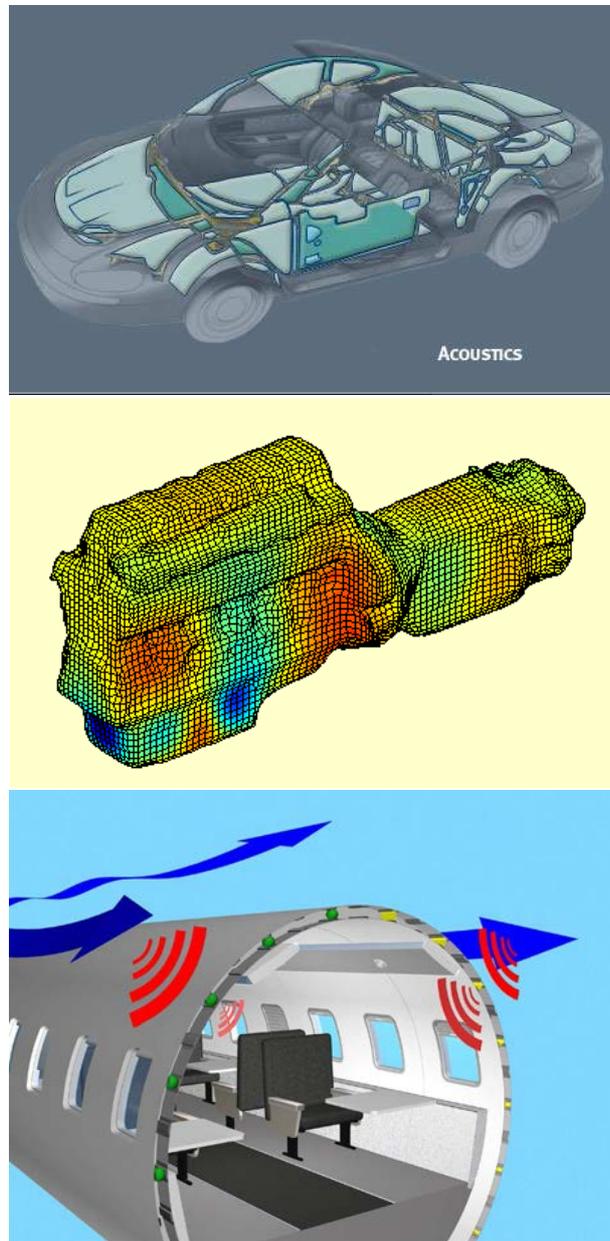


FIG. 9.2 – Rayonnement de moyens de transport.



FIG. 9.3 – Machines.



FIG. 9.4 – Piston.

La puissance rayonnée par la sphère de surface $S = 4\pi a^2$ est donc

$$W = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}(p^* v) \quad (9.11)$$

$$= \frac{1}{2} S \operatorname{Re}\left(\frac{-i\rho_0\omega a}{-ika - 1} |v|^2\right) \quad (9.12)$$

$$= \frac{1}{2} S |v|^2 \operatorname{Re}\left(i\rho_0\omega a \frac{1 - ika}{1 + (ka)^2}\right) \quad (9.13)$$

$$= \frac{1}{2} S |v|^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \quad (9.14)$$

Le rayonnement est faible quand $ka < 1$ soit $a < \frac{\lambda}{2\pi}$. Ce résultat est en fait bien plus général. Les objets de tailles petites par rapport à la longueur d'onde rayonnent mal le son. Par conséquent pour des objets de même taille ou plus grand que la longueur d'onde on peut s'attendre à des problèmes de bruit alors que cela est moins probable pour des objets de plus petites dimensions. Il est aussi difficile d'avoir une source rayonnant efficacement à toutes les fréquences.

9.3 Rayonnement d'une structure

Les mouvements de la structure sont décrits par les relations présentées dans les chapitres précédents, par exemple pour le cas d'un milieu continu élastique.

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (9.15)$$

ou en fréquence

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = -\rho\omega^2 \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (9.16)$$

Dans le milieu fluide, il faut résoudre

$$\begin{aligned} \Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} &= o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (9.17)$$

ou en fréquence

$$\begin{aligned} \Delta p + k^2 p &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial n} - ikp &= o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Le couplage entre le fluide et la structure se traduit par la continuité de la vitesse normale et de

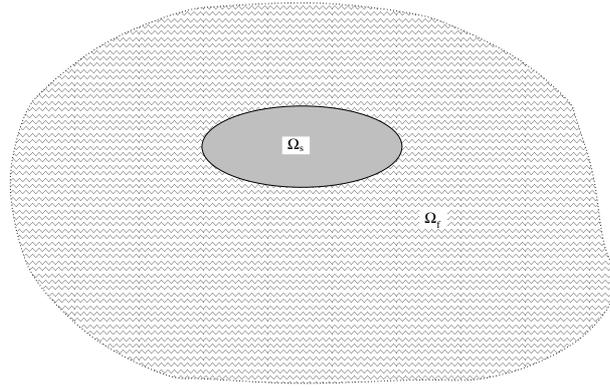


FIG. 9.5 – Couplage fluide structure.

la pression, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \\ -p\mathbf{n} &= \sigma \mathbf{n} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Pour résoudre le problème couplé, il faut résoudre l'ensemble des équations précédentes soit en temps, soit en fréquence. Deux situations sont possibles

- Cas d'un fluide lourd (l'eau par exemple) : il faut résoudre toutes les équations couplées
- Cas d'un fluide léger (l'air par exemple) : on peut simplifier la résolution en suivant les étapes ci-dessous :
 1. Calculer le mouvement de la structure dans le vide
 2. Déterminer la vitesse normale sur la surface du solide
 3. Résoudre les équations de propagation dans le fluide avec comme condition aux limites la vitesse normale calculée à l'étape précédente

9.4 Résolution dans le fluide

Lorsqu'une structure plongée dans un fluide vibre, il est possible d'écrire une relation intégrale portant sur la pression et sa dérivée normale sur la surface de la structure. L'équation intégrale est une relation implicite qui lie la pression en tout point à la pression sur la surface. Elle est déduite du second théorème de Green. La pression au point \mathbf{x} du domaine Ω vérifie l'équation de Helmholtz

$$\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \quad (9.20)$$

où $s(\mathbf{x})$ sont les termes de source. On multiplie cette égalité précédente par la fonction de Green $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et on intègre sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} (\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x})) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9.21)$$

L'intégrale de droite est égale à la pression incidente $p_{inc}(\mathbf{y})$. C'est la pression qui existerait sans la présence de la structure. L'intégrale de gauche s'intègre deux fois par partie. Elle se simplifie à l'aide des considérations suivantes :

– La fonction de Green vérifie

$$\Delta G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + k^2 G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (9.22)$$

- La fonction de Green $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ en 3D s'écrit $\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$. Elle se comporte au voisinage de l'origine comme $\frac{1}{4\pi r}$ avec $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$
- On construit une boule de rayon ε autour du point \mathbf{y} . On considère que la surface Σ_{ext} est une sphère de rayon R , voir la figure 9.6. On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$
- La condition de Sommerfeld s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{x}) = ikp(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (9.23)$$

Cette condition garantit que la solution est constituée d'ondes rayonnantes uniquement.

D'après les résultats précédents et après simplification, les seuls termes qui restent conduisent à une relation implicite (l'équation intégrale) donnant la valeur de la pression en un point \mathbf{y} :

1. Sur le bord de la structure

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (9.24)$$

$\partial\Omega$ représente le bord de la structure

2. En un point à l'extérieur de la surface

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (9.25)$$

Pour calculer le rayonnement acoustique, il faut résoudre l'équation 9.24 sur la surface vibrante en utilisant une condition aux limites sur cette surface, par exemple

$$\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.26)$$

Dans ce cas la surface est rigide et les sources acoustiques viennent du terme $p_{inc}(\mathbf{y})$. Il s'agit alors d'un problème de diffraction du son par un solide avec des sources sonores qui sont dans le fluide.

Le second cas est celui d'une surface vibrante avec

$$\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = i\rho\omega\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \quad (9.27)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de vibration de la paroi. Dans l'équation 9.24, les termes connus sont $\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})$ et $p_{inc}(\mathbf{y})$. La résolution de l'équation 9.24 doit permettre de trouver le champ de pression sur la surface $p(\mathbf{x})$ puis le champ de pression dans tout le milieu fluide en utilisant la relation 9.25.

Ces problèmes de rayonnement ou de diffraction sont complexes à résoudre dès que la forme de l'objet s'écarte de formes très simples comme la sphère ou le plan. Dans ce cas, il faut considérer des méthodes numériques pour obtenir une solution du problème.

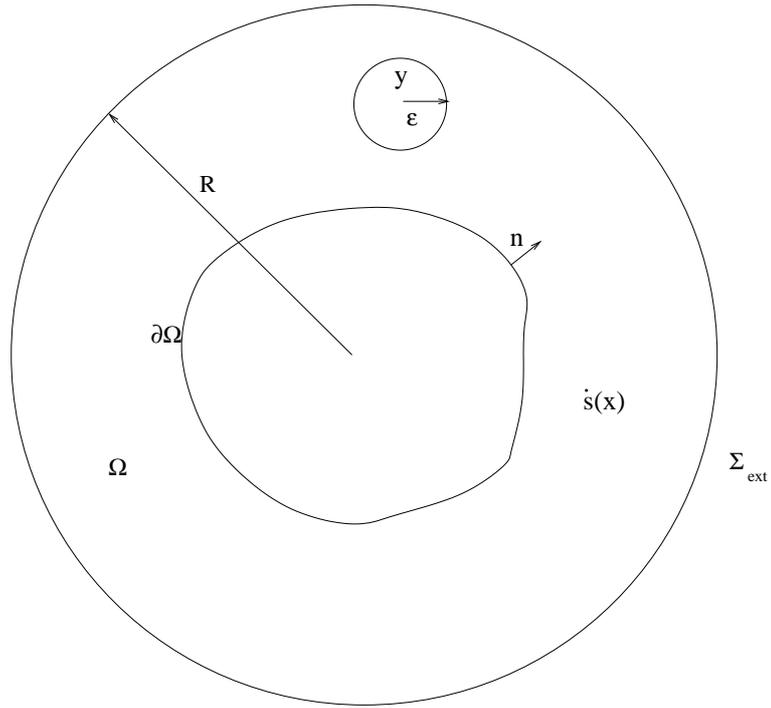


FIG. 9.6 – Méthode intégrale

9.5 Intégrale de Rayleigh

Dans le cas où le rayonnement a lieu dans un demi-espace au lieu de l'espace entier, l'approche de la section précédente peut être reproduite avec une nouvelle fonction de Green. Dans le cas où le demi-espace a une frontière rigide la fonction de Green est

$$G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} \quad (9.28)$$

où r' est la distance entre la source image et le point de calcul du champ de pression, voir la figure 9.7. L'équation intégrale est de nouveau donnée par

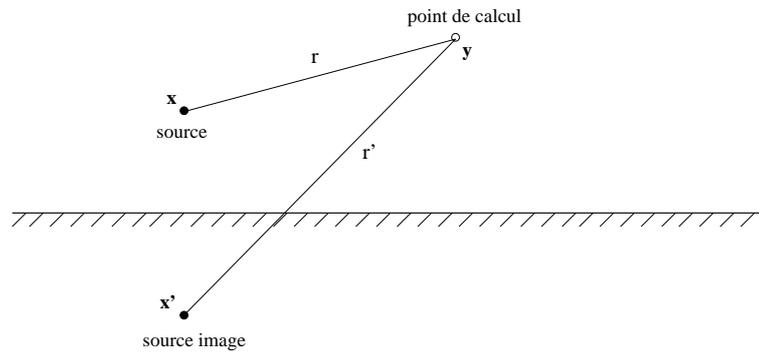


FIG. 9.7 – Distance entre le point de calcul et la source image.

$$c(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (9.29)$$

avec

$$\begin{aligned} c(\mathbf{y}) &= 1 && \text{dans le fluide ou sur le plan} \\ c(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2} && \text{sur } \partial\Omega \text{ excepté sur le plan} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Dans le cas où la surface de l'objet rayonnant est dans le plan, voir la figure 9.8, sur le plan la fonction de Green est telle que $\frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$. Ainsi l'équation intégrale se réduit à

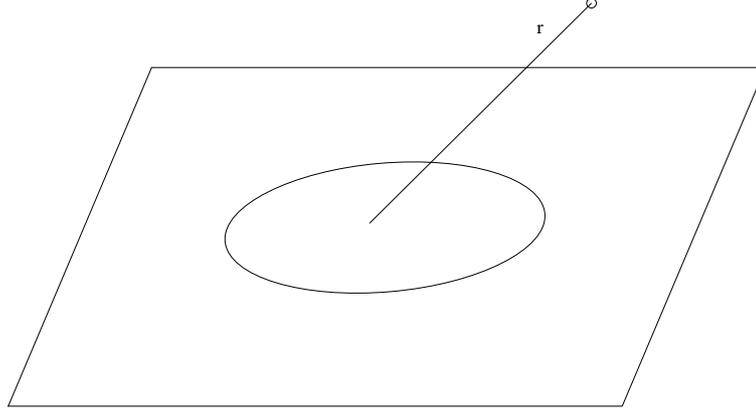


FIG. 9.8 – Distance entre le point de calcul et la source image.

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x})ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})\frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}}{2\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (9.31)$$

Le champ de pression est directement donné par le calcul de cette intégrale, dite intégrale de Rayleigh, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation.

9.6 Couplage fluide-structure

Nous allons maintenant considérer le cas de structures finies de formes complexes immergées dans un fluide. On se propose de déterminer la réponse du système, c'est à dire les mouvements de la structure et du fluide face à une excitation donnée. Les vibrations de la structure et les champs acoustiques sont engendrés par deux causes principales. La structure peut d'abord rayonner de l'énergie à cause de sources d'excitation internes qui induisent des vibrations. Ces vibrations mettent en mouvement la surface de séparation entre le fluide et le solide pour donner naissance à des ondes de pression dans le fluide. La structure peut aussi être soumise à un champ acoustique incident du à des sources ou à des ondes planes se propageant dans le fluide. Sa présence se traduit par la création d'un champ diffusé qui s'ajoute au champ incident. Nous centrerons notre étude sur la détermination du champ de pression acoustique dans le fluide environnant. Ces problèmes seront étudiés en régime harmonique.

Le milieu fluide est en contact avec une structure occupant un domaine Ω_s suivant le schéma de la figure 9.9. Les structures que nous étudierons seront constituées de corps élastiques ou vis-

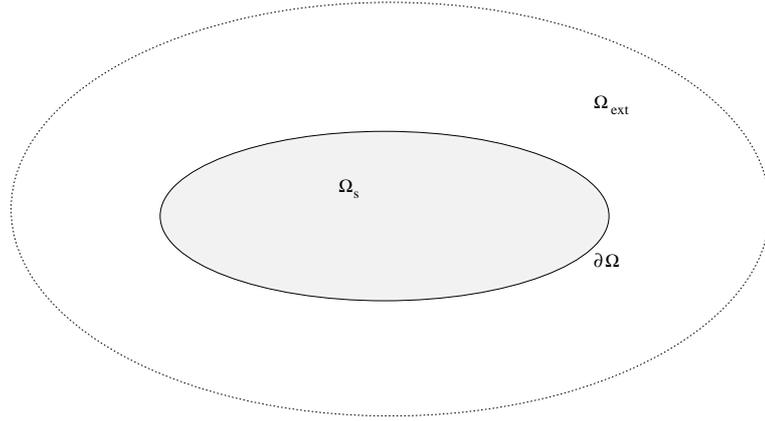


FIG. 9.9 – Problème couplé

coélastiques qui vérifient les équations dynamiques suivantes dans le domaine Ω_s occupé par le solide.

$$div\sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (9.32)$$

\mathbf{f} est le vecteur des efforts volumiques s'exerçant sur la structure, \mathbf{u} est le champ de déplacement et σ le champ de contrainte. Pour des mouvements harmoniques nous avons

$$div\sigma + \mathbf{f} = -\rho\omega^2 \mathbf{u} \quad (9.33)$$

Le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par une loi de comportement viscoélastique qui s'écrit en stationnaire

$$\sigma_{ij}(\omega) = C_{ijkl}(\omega)\epsilon_{kl}(\omega) \quad (9.34)$$

Mouvement du fluide.

Les champs de pression et de dérivée normale de la pression sont donnés sur un élément par les formules discrètes.

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i N_i(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial n} N_i(\mathbf{x})$$

Les $N_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme habituelles. Les p_i et $\frac{\partial p_i}{\partial n}$ sont respectivement les valeurs des pressions et des dérivées normales de la pression aux nœuds du maillage. Ce sont les inconnues du problème.

La discrétisation de l'équation intégrale 9.24 conduit finalement à un système matriciel reliant les valeurs aux nœuds de la pression et de sa dérivée normale ce que l'on peut exprimer par

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{tot} = \mathbf{P}_{inc}$$

où \mathbf{P}_{tot} et \mathbf{P}_{inc} désignent les vecteurs des pressions totales et des pressions incidentes aux nœuds et \mathbf{Q}_{tot} est le vecteur des dérivées normales.

Mouvement de la structure.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (9.35)$$

\mathbf{K} et \mathbf{M} sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse de la structure. \mathbf{F}_{int} est le vecteur des efforts imposés autres que la pression du fluide. \mathbf{S} est une matrice transformant la pression du fluide en des efforts aux nœuds de la structure. Sous forme vectorielle les composantes de \mathbf{S} se calculent par

$$\mathbf{f}_i = \int_{\partial\Omega} -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})N_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^{N_f} \left(\int_{\partial\Omega} N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) p_j = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{S}_{ij} p_j \quad (9.36)$$

N_f est le nombre de nœuds sur l'interface fluide-structure.

Continuité de la vitesse normale au contact fluide-structure.

$$\rho_f \omega^2 \mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{Q}_{tot} \quad (9.37)$$

\mathbf{N} est une matrice diagonale formée par les composantes des normales aux nœuds de l'interface et par zéro aux nœuds intérieurs à la structure.

Equations du système couplé.

En posant $\mathbf{Z} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ nous pouvons obtenir les déplacements de la structure à partir de 9.35

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (9.38)$$

Nous portons cette relation dans l'équation intégrale en tenant compte de la condition de continuité de la vitesse

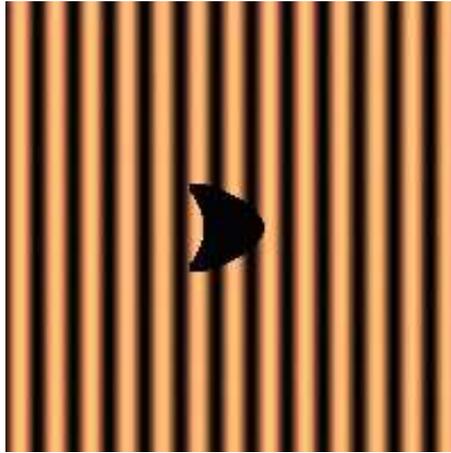
$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{P}_{inc} \quad (9.39)$$

$$(\mathbf{A} - \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S})\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_{inc} - \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} \quad (9.40)$$

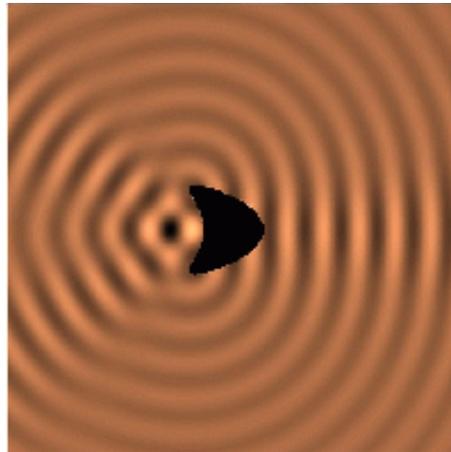
D'où la pression \mathbf{P}_{tot} par résolution du système linéaire. Les matrices sont pleines et non symétriques. On peut alors calculer les autres grandeurs \mathbf{U} et \mathbf{Q}_{tot} par les relations précédentes. Les figures 9.10 et 9.6 montrent des exemples de champs diffractés.

Exercice : Démontrer les formules 9.24 et 9.25.

Champ incident



Champ diffracté



Champ total

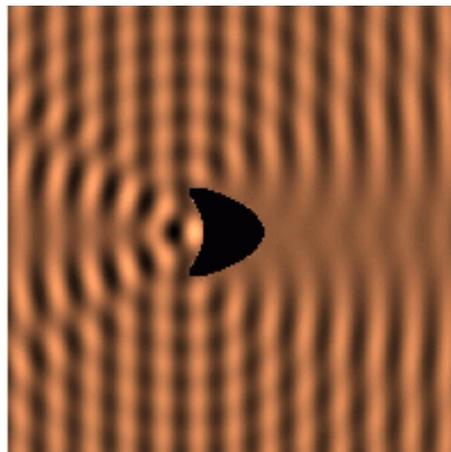


FIG. 9.10 – Diffraction par un objet.

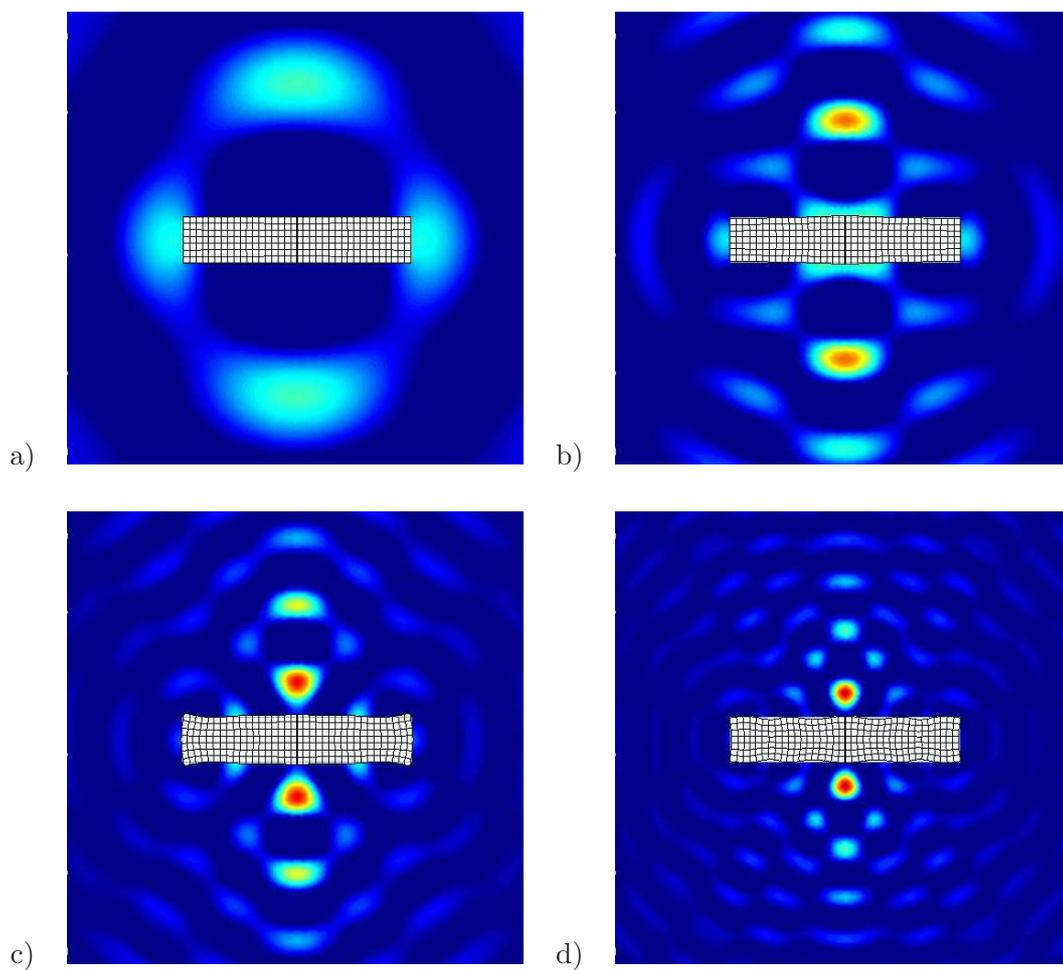


FIG. 9.11 – Diffraction par un objet à des fréquences croissantes.

Chapitre 10

Les méthodes numériques

10.1 Méthode des éléments finis

Dans la méthode des éléments finis, on doit résoudre l'équation des ondes ou l'équation de Helmholtz sur un domaine Ω comme sur la figure 10.1. Considérons le cas de l'équation de Helmholtz, il faut donc résoudre

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (10.1)$$

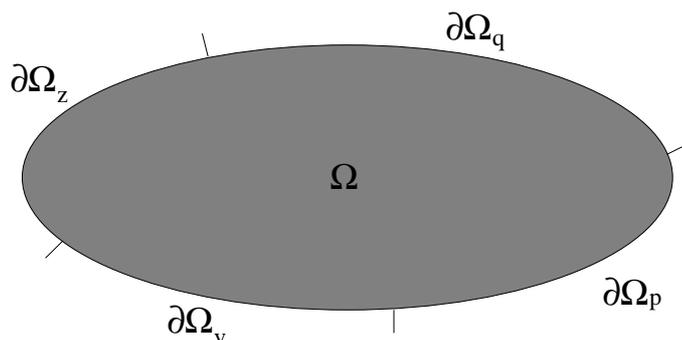


FIG. 10.1 – Domaine de calcul.

Pour résoudre le problème de propagation acoustique, il faut imposer des conditions aux limites sur la frontière du domaine. Les conditions aux limites possibles sont de quatre natures. La frontière du domaine $\partial\Omega$ peut être divisée en quatre parties $\partial\Omega_p$, $\partial\Omega_q$, $\partial\Omega_z$ et $\partial\Omega_v$ où respectivement la pression, la dérivée normale de la pression, l'impédance et la vitesse peuvent être imposées de telle sorte que

1. $p = p_0$ sur $\partial\Omega_p$
2. $\frac{\partial p}{\partial n} = q_0$ sur $\partial\Omega_q$
3. $p = Zv$ sur $\partial\Omega_z$
4. $v = v_0$ sur $\partial\Omega_v$

Les fonctions p_0 , q_0 , Z et v_0 sont des données du problème sur les parties de la frontière où elles sont définies.

Le problème est résolu par une formulation variationnelle. Considérons pour simplifier le cas où $\partial\Omega_q = \partial\Omega$. Soit v^* une fonction test, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) v^* dx &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} v^* ds + \int_{\Omega} (-\nabla v^* \nabla p + k^2 p v^*) dx &= 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 p v^*) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 v^* ds \end{aligned} \quad (10.2)$$

La discrétisation consiste à écrire les approximations

$$\begin{aligned} p(x) &\approx \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \\ v(x) &\approx \sum_{j=1}^{j=N} v_j N_j(x) \end{aligned} \quad (10.3)$$

dans lesquelles les $N_j(x)$ sont les fonctions d'approximation montrées sur la figure 10.2.

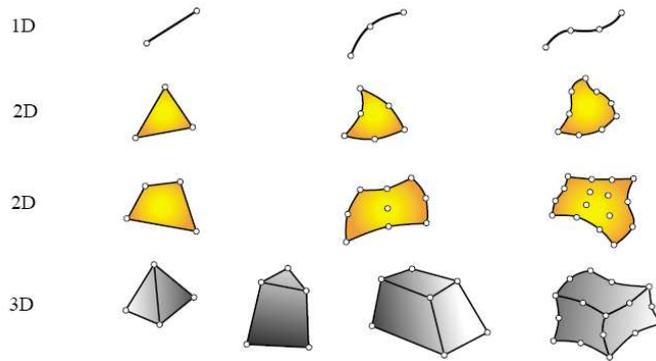


FIG. 10.2 – Types d'éléments.

Dans le cas unidimensionnel le maillage est une subdivision de l'intervalle étudié, soit

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N \quad (10.4)$$

Chaque intervalle (x_{i-1}, x_i) , $i = 1 : N$ est un élément fini. Les fonctions d'interpolation sont données par

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de cette fonction est donnée sur la figure 10.3.

A partir de ces fonctions d'interpolation, on peut construire une approximation de la fonction inconnue par la formule 10.3. Une représentation de l'interpolation est montrée sur la figure 10.4. Des exemples de maillages dans des cas plus complexes sont donnés sur la figure 10.5.

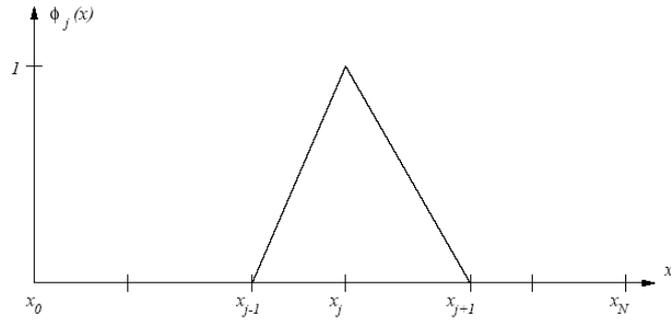


FIG. 10.3 – Fonction d'interpolation en 1D

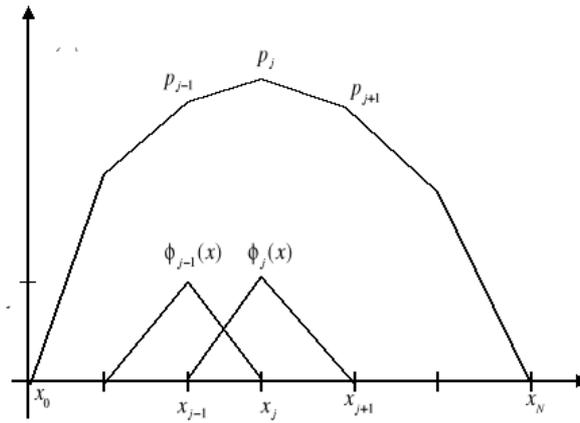


FIG. 10.4 – Interpolation de la fonction inconnue

Il faut un minimum de nœuds par longueur d'onde. Le critère de Shannon imposerait 2 nœuds par longueur d'onde. En pratique on prend plutôt entre 5 et 10 nœuds par longueur d'onde. La figure 10.6 illustre ce point. Dans un volume V , il faut ainsi environ

$$N = \frac{V}{(\lambda/5)^3} \quad (10.5)$$

nœuds pour effectuer un maillage correct du domaine. Le nombre de nœuds nécessaire est ainsi indiqué dans le tableau 10.1. On comprend facilement que ces calculs sont limités au cas des basses fréquences.

	Volume	f=100 Hz	f=1000 Hz	f=10000 Hz
Intérieur de voiture	8 m^3	25	$25 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^6$
Petite pièce	50 m^3	160	$16 \cdot 10^4$	$16 \cdot 10^7$
Grand hall	5000 m^3	16000	$16 \cdot 10^6$	$16 \cdot 10^9$

TAB. 10.1 – Nombre de nœuds pour le maillage.

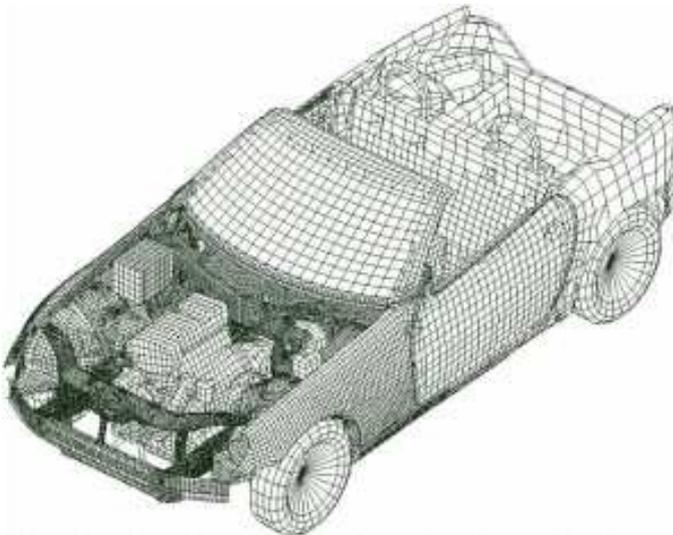
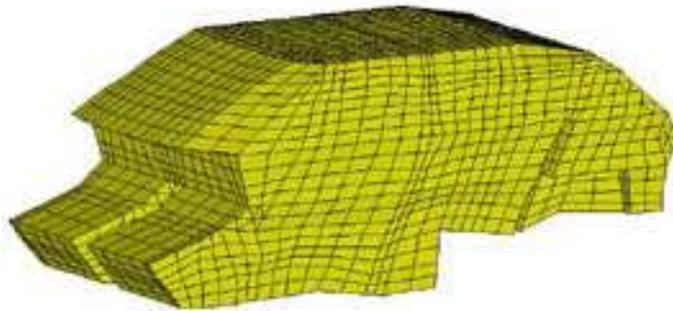
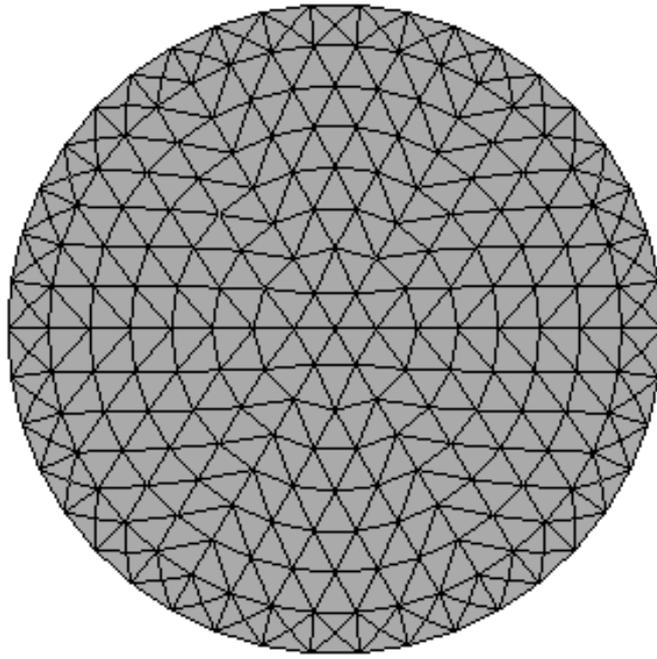
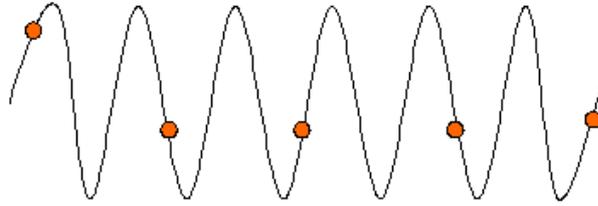


FIG. 10.5 – Exemples de maillages.

Pas assez dense



Assez dense

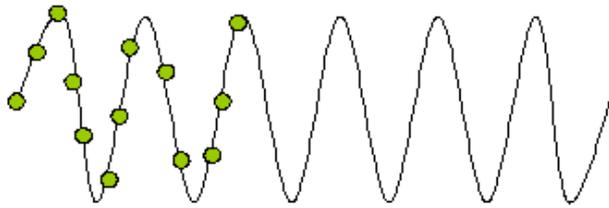


FIG. 10.6 – Finesse du maillage

Le système discret est ensuite obtenu par

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 v^* p) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 v^* ds \\
 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{i=N} v_i^* \nabla N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j \nabla N_j(x) - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \right) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(s) ds \\
 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} v_i^* p_j - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} v_i^* p_j &= \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* Q_i \\
 K_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla N_i(x) \nabla N_j(x) dx \\
 M_{ij} &= \int_{\Omega} N_i(x) N_j(x) dx \\
 Q_i &= \int_{\partial\Omega} q_0 N_i(s) ds \quad (10.6)
 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le système

$$\sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} p_j - k^2 \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} p_j = Q_i$$

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (10.7)$$

avec \mathbf{P} et \mathbf{Q} les vecteurs des valeurs nodales de la pression et du second membre donnés par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Dans le système

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (10.9)$$

les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} sont creuses ce qui diminue l'effort de calcul pour la résolution du système. La résolution peut être directe ou obtenue dans un premier temps par le calcul des modes propres du domaine puis par projection de la solution sur les modes. On obtient une solution approchée

$$p(x) = \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \quad (10.10)$$

Un exemple de résultat de calcul est donné sur la figure 10.7.

10.2 Méthode des équations intégrales.

Cette méthode présente quelques avantages par rapport à la méthode des éléments finis qui peut la rendre préférable dans certains cas. Elle conduit à un problème posé sur la frontière du domaine uniquement alors que la méthode des éléments finis est posée sur le domaine entier. L'effort de maillage et le nombre de degrés de liberté est donc fortement réduit dans ce cas. De plus elle permet de traiter de façon exacte les conditions aux limites de radiation (ou de Sommerfeld) ce qui la rend particulièrement intéressante dans le cas de milieux infinis.

Le problème à résoudre est le même que pour la méthode des éléments finis. En régime harmonique le champ de pression est solution de

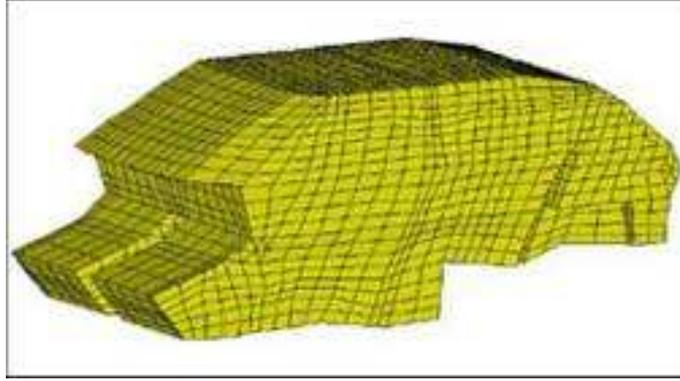
$$\Delta p + k^2 p = s(\mathbf{r}) \quad (10.11)$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde et c la vitesse du son dans l'air. Le terme $s(\mathbf{r})$ décrit les sources éventuelles dans l'air. A l'infini, il faut que la condition de Sommerfeld soit satisfaite, c'est à dire

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = o\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\right) \quad (10.12)$$

où n est la dimension de l'espace. Cette condition exprime que l'énergie va de la source vers l'infini et non l'inverse. Pour un problème posé sur l'extérieur d'un domaine borné, l'équation intégrale établie dans le chapitre précédent donne

Maillage



Solution

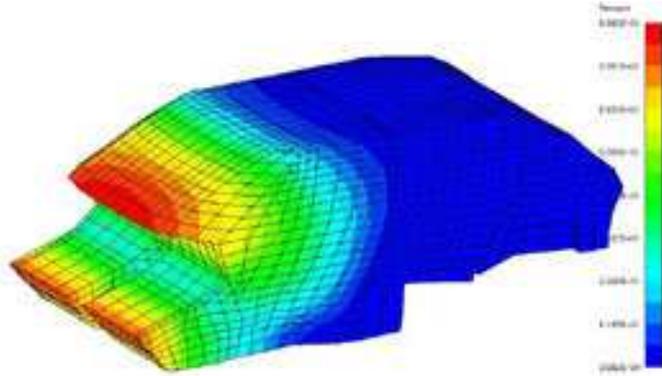


FIG. 10.7 – Exemple de résultat de calcul

$$c_e(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + p_{inc}(\mathbf{x}) \quad (10.13)$$

où $p_{inc}(\mathbf{x})$ est le champ de pression incident et $c_e(\mathbf{x})$ un coefficient égal à 1/2 si la surface est régulière au point \mathbf{x} . Sinon il vaut

$$c_e(\mathbf{x}) = 1 + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (10.14)$$

où G_0 est la fonction de Green statique du problème.

La formule peut aussi être appliquée pour un point \mathbf{x} dans l'air et dans ce cas $c_e(\mathbf{x}) = 1$. Cela donne la formule de Kirchoff permettant de calculer la pression dans l'air à partir de la pression et de sa dérivée sur la surface.

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + p_{inc}(\mathbf{x}) \quad (10.15)$$

10.2.1 Cas tridimensionnel

Sous la forme standard l'équation intégrale peut avoir plusieurs solutions pour un ensemble discret de fréquences appelées les fréquences singulières. Pour éviter cela nous utilisons en fait la

formulation de Burton et Miller qui consiste à ajouter à la forme habituelle (10.13) la dérivée de l'équation multipliée par une constante complexe. Pour le cas tridimensionnel on peut montrer que cela conduit finalement à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{i}{2k} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x} d\mathbf{x} = \\ & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ & \frac{i}{k} \left\{ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k^2 \tilde{p}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_x \wedge \nabla_x \tilde{p}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{n}_y \wedge \nabla_y p(\mathbf{y})) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right\} + \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p_{inc}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{i}{k} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (10.16) \end{aligned}$$

pour toute fonction test \tilde{p} définie sur Γ .

10.2.2 Discrétisation

La discrétisation est obtenue à partir d'un maillage sur la surface du domaine comme pour un calcul par éléments finis. Un système linéaire est formé dont la solution donne une approximation de la solution sur la surface. Le maillage est défini par un ensemble de N nœuds et M éléments. La pression et sa dérivée normale (notée q) sont approchées par

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{i=N} p_i N_i(\mathbf{x}) \\ q(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{i=N} q_i N_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (10.17)$$

où les N_i sont les fonctions d'interpolation sur la surface. Les valeurs discrètes sur la surface définissent les vecteurs

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

et finalement le système à résoudre est de la forme

$$\mathbf{KX} = \mathbf{F} \quad (10.19)$$

C'est un système avec une matrice \mathbf{K} pleine et généralement non symétrique. La résolution est effectuée par des solveurs classiques traitant ce type de matrices.

10.2.3 Fonctions de Green

La fonction de Green est le champ de pression au point \mathbf{x} produit par une source au point \mathbf{y} . Dans la suite nous noterons $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ le vecteur entre les points \mathbf{y} et \mathbf{x} et la distance est donnée par $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Nous rappelons dans la suite les fonctions de Green utiles pour le type de problème que nous avons à traiter.

Dynamique à deux dimensions

Dans le cas d'un problème bidimensionnel, la fonction de Green en champ libre est solution de

$$\Delta_x G(\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.20)$$

Elle est donnée par

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0(kr) \quad (10.21)$$

où $H_0 = J_0 + iY_0$ est la fonction de Hankel, J_0 la fonction de Bessel et Y_0 la fonction de Neumann d'ordre zéro. La dérivée normale de la fonction de Green est

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4} \frac{\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r}}{r} H_1(kr) \quad (10.22)$$

Dynamique à trois dimensions

Dans le cas d'un problème tridimensionnel, la fonction de Green en champ libre est solution de

$$\Delta_x G(\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.23)$$

Elle est donnée par

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (10.24)$$

La dérivée normale de la fonction de Green est

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{r}) = -(ikr - 1) \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \quad (10.25)$$

Des exemples de maillages et de résultats de calculs sont donnés sur les figures 10.8 et 10.9.

10.3 Méthode des rayons

Cette méthode est dans l'esprit l'analogie de l'optique géométrique et considère la propagation du son suivant des rayons. En général, c'est une méthode approchée valable à moyenne et haute fréquence.

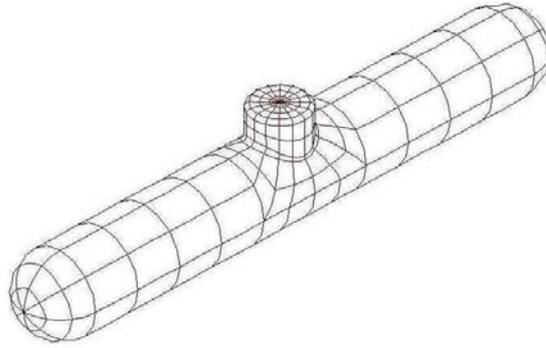
10.3.1 Sources images

Considérons le cas de la figure 10.10. Le champ de pression total avec la contribution de la source image est donné par

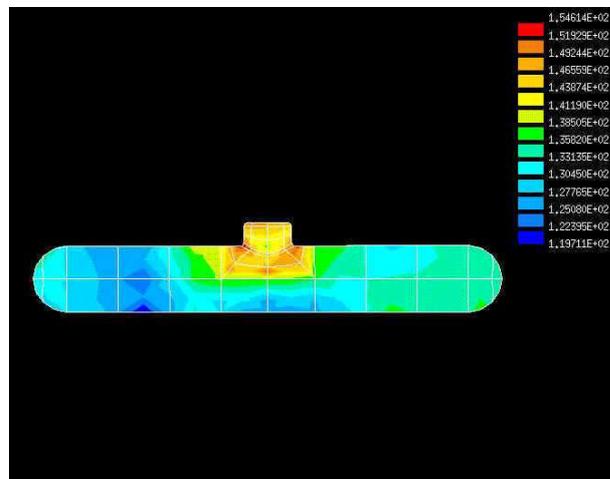
$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r'} f\left(t - \frac{r'}{c}\right) \quad (10.26)$$

La seconde partie du membre de droite est la contribution de la source image. Un exemple de signal est donné sur la figure 10.11. Dans le cas de plusieurs parois, il faut tenir compte des différentes sources images possibles, voir la figure 10.12.

Maillage



Solution



Solution

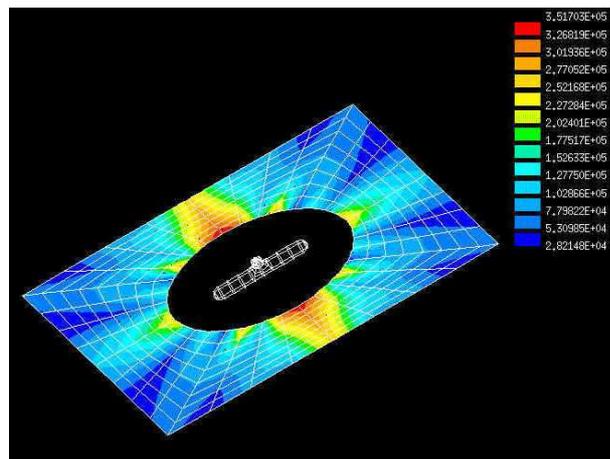


FIG. 10.8 – Exemple de résultat de calcul par équation intégrale

10.3.2 Rayons sonores

Dans le cas où la longueur d'onde est petite devant les dimensions des objets présents dans le milieu, il est possible de traiter le problème comme en optique géométrique à partir de la notion de rayon sonore. Un exemple de rayons issus d'une source est présenté sur la figure 10.13. Les rayons réfléchis semblent issus d'une source image S' . La réflexion se fait suivant les lois exposées précédemment, en particulier l'angle du rayon réfléchi par rapport à la normale à la surface réfléchissante est égal à l'angle du rayon incident (loi de Descartes). Pour que cela soit vrai il faut que la surface soit lisse, c'est à dire que les défauts de surface éventuels soient de taille nettement inférieure à la longueur d'onde. Si ce n'est pas le cas des lois de réflexion plus complexes doivent être utilisées.

Dans une situation complexe, la méthode des rayons consiste à faire partir des rayons de la source suivant un tirage aléatoire avec une répartition uniforme suivant les directions de l'espace. Si N est le nombre total de rayons et $\Delta\Omega$ l'angle solide élémentaire de chaque rayon, nous avons $N\Delta\Omega = 4\pi$. Des exemples sont montrés sur les figures 10.14 et 10.15. Chaque rayon est porteur pendant le temps dt d'une énergie élémentaire donnée par

$$\Delta E = \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta t} I(\theta, \phi, t) d\Omega dt \quad (10.27)$$

La propagation des rayons se fait en ligne droite dans un milieu homogène. Les réflexions sur les parois se font suivant les lois de Descartes avec prise en compte éventuelle d'une absorption par les parois. Sur de longues distances, il faut aussi tenir compte de l'absorption par l'air.

Pour estimer le niveau acoustique au point de réception, on entoure ce point d'une petite sphère et on compte le nombre de rayons et leur énergie qui arrivent à l'intérieur de la sphère. Des exemples de calculs pour la détermination du bruit aérien autour d'un aéroport sont donnés sur la figure 10.16. La figure 10.17 montre la cartographie du bruit dans un quartier de Paris. Elle a été obtenue par une méthode basée sur des calculs de rayons sonores.

10.4 La SEA (Statistical Energy Analysis)

La SEA est une méthode haute fréquence qui s'intéresse à la propagation de l'énergie dans le système et non aux détails du champ de pression. Elle est basée sur les hypothèses que les longueurs d'ondes sont petites devant les dimensions des systèmes, que les champs vibratoires sont diffus et que les différentes parties du système sont faiblement couplées.

La méthode est basée sur des bilans énergétiques. On suppose la structure décomposée en sous systèmes qui stockent et qui échangent de l'énergie. Pour chaque sous système, en régime stationnaire, la puissance reçue est égale à la puissance dissipée. Si η est le facteur de perte interne dans un sous système, E l'énergie de ce sous système, la puissance dissipée vaut

$$P_d = \omega\eta E \quad (10.28)$$

La puissance échangée entre deux sous systèmes 1 et 2 est (puissance reçue par 1)

$$P_{12} = \omega\eta_{21}E_2 - \omega\eta_{12}E_1 \quad (10.29)$$

où η_{12} et η_{21} sont les facteurs de couplage liés par la relation

$$\eta_{12}n_1 = \eta_{21}n_2 \quad (10.30)$$

où n_1 et n_2 sont les densités modales des sous systèmes 1 et 2. Une illustration est donnée sur la figure 10.18.

Le bilan d'énergie pour un système i consiste à écrire que l'énergie introduite est égale à l'énergie perdue soit :

$$P_i^e = \omega \eta_i E_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} (\omega \eta_{ij} E_i - \omega \eta_{ji} E_j) \quad (10.31)$$

où P_i^e est la puissance extérieure introduite dans le sous-système i . On obtient ainsi une relation matricielle qui permet de calculer les énergies de chaque sous-système en fonction des puissances introduites. Un exemple de décomposition pour une voiture est donné sur la figure 10.19. Le résultat du calcul est indiqué sur la figure 10.20.

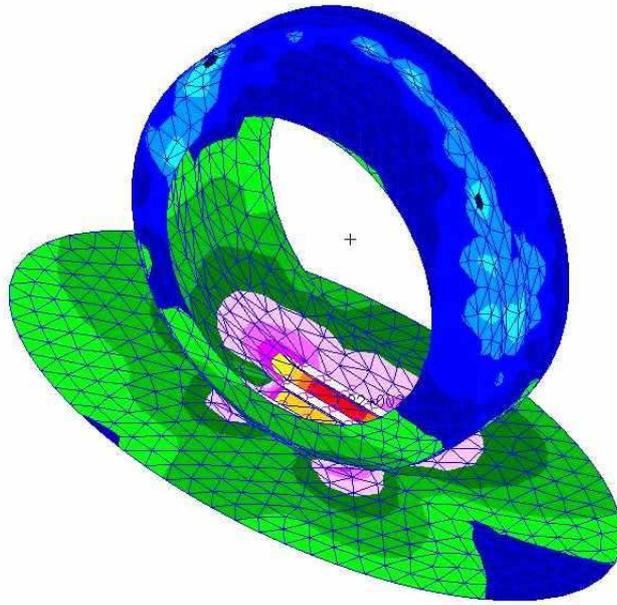


FIG. 10.9 – Exemple de calcul du rayonnement d'un pneumatique

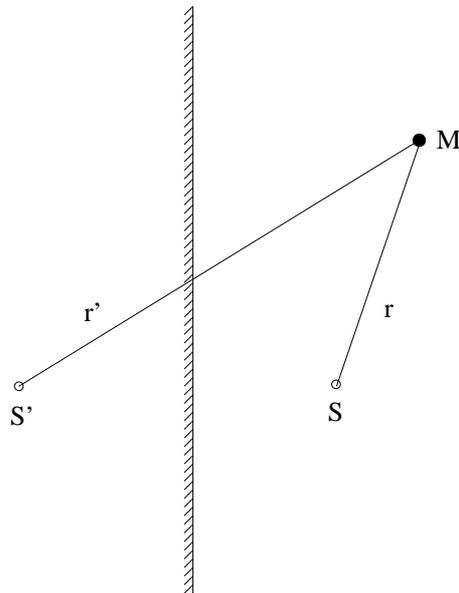


FIG. 10.10 – Source image par rapport à une paroi rigide.

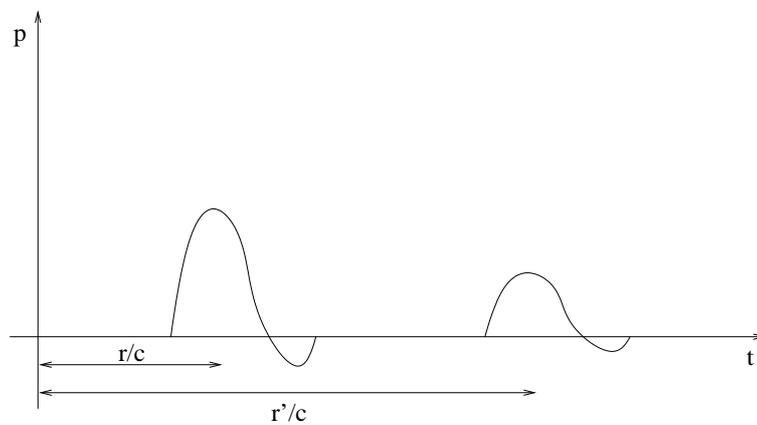


FIG. 10.11 – Signal temporel au point M.

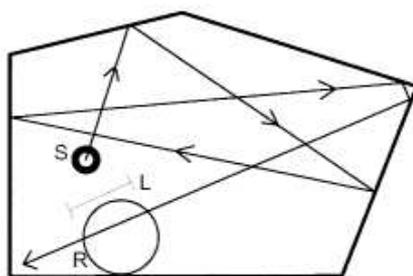


FIG. 10.12 – Source initiale et ses images.

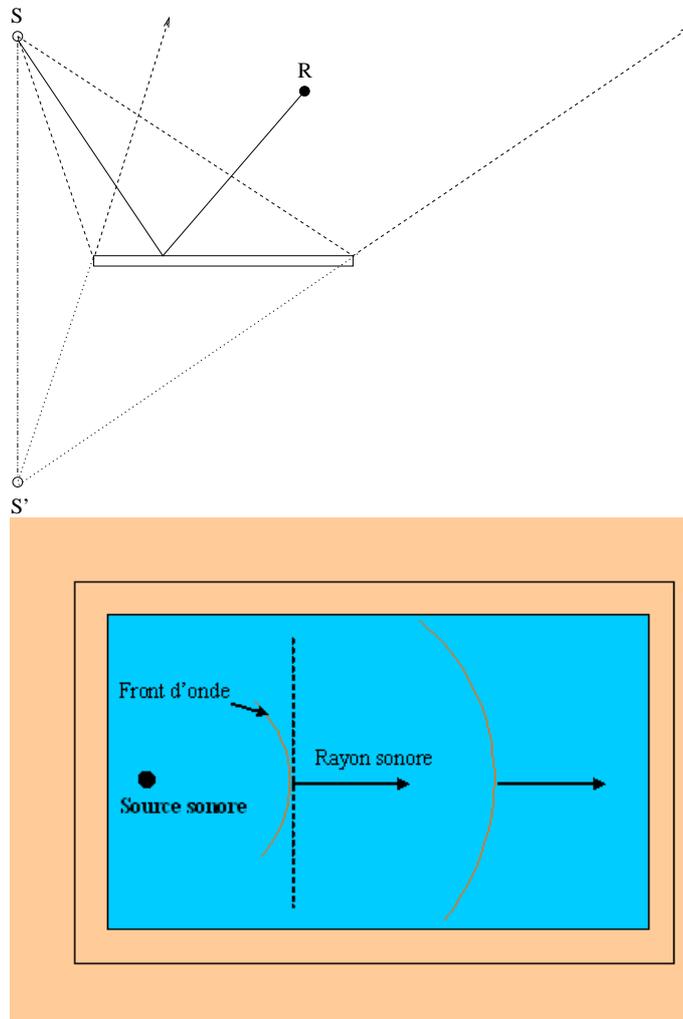
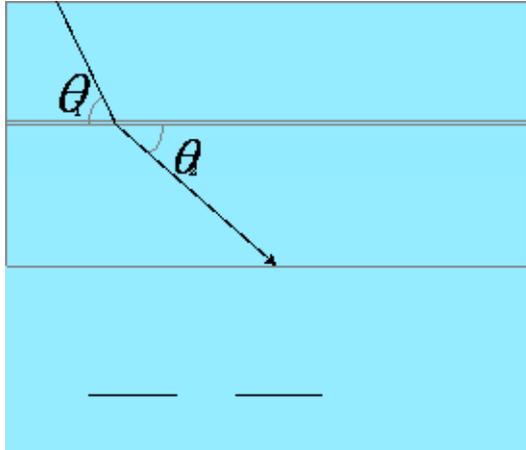
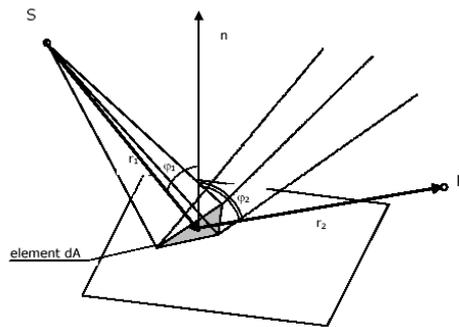


FIG. 10.13 – Rayons sonores.

a)



b)



c)

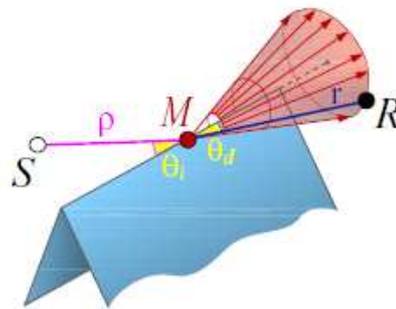


FIG. 10.14 – Lois de propagation géométriques a), b) et diffraction c).

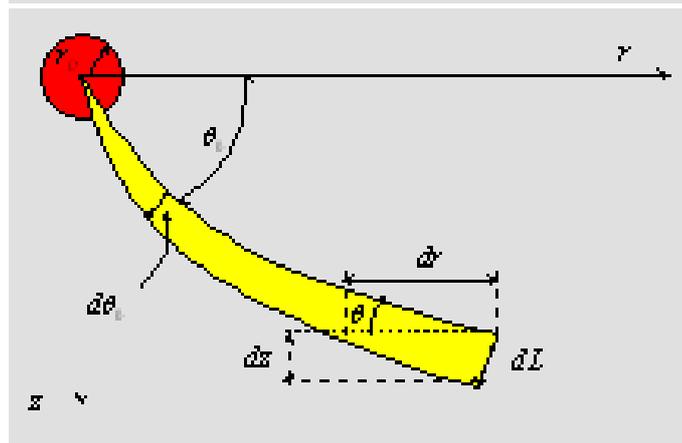
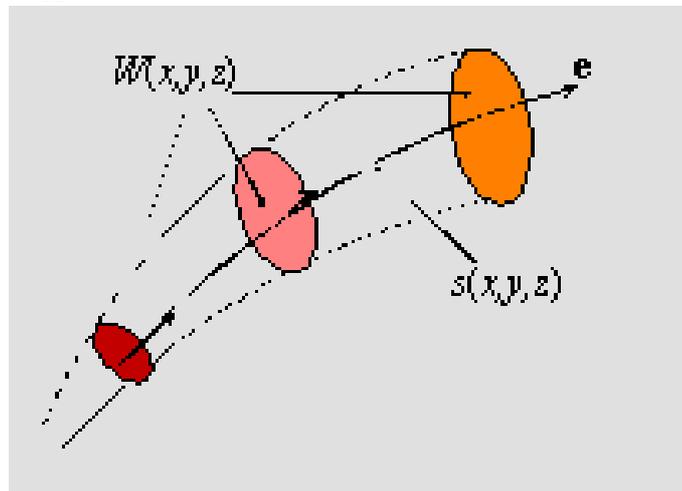
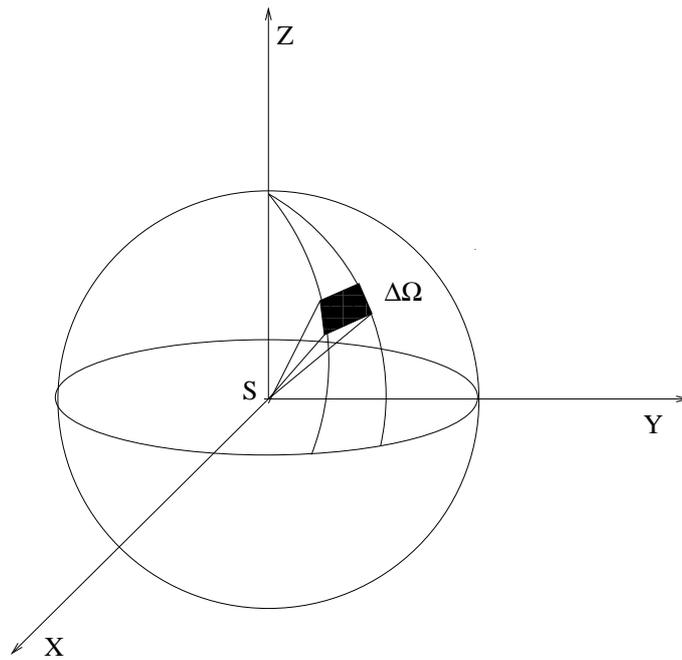


FIG. 10.15 – Angle solide d'un rayon.

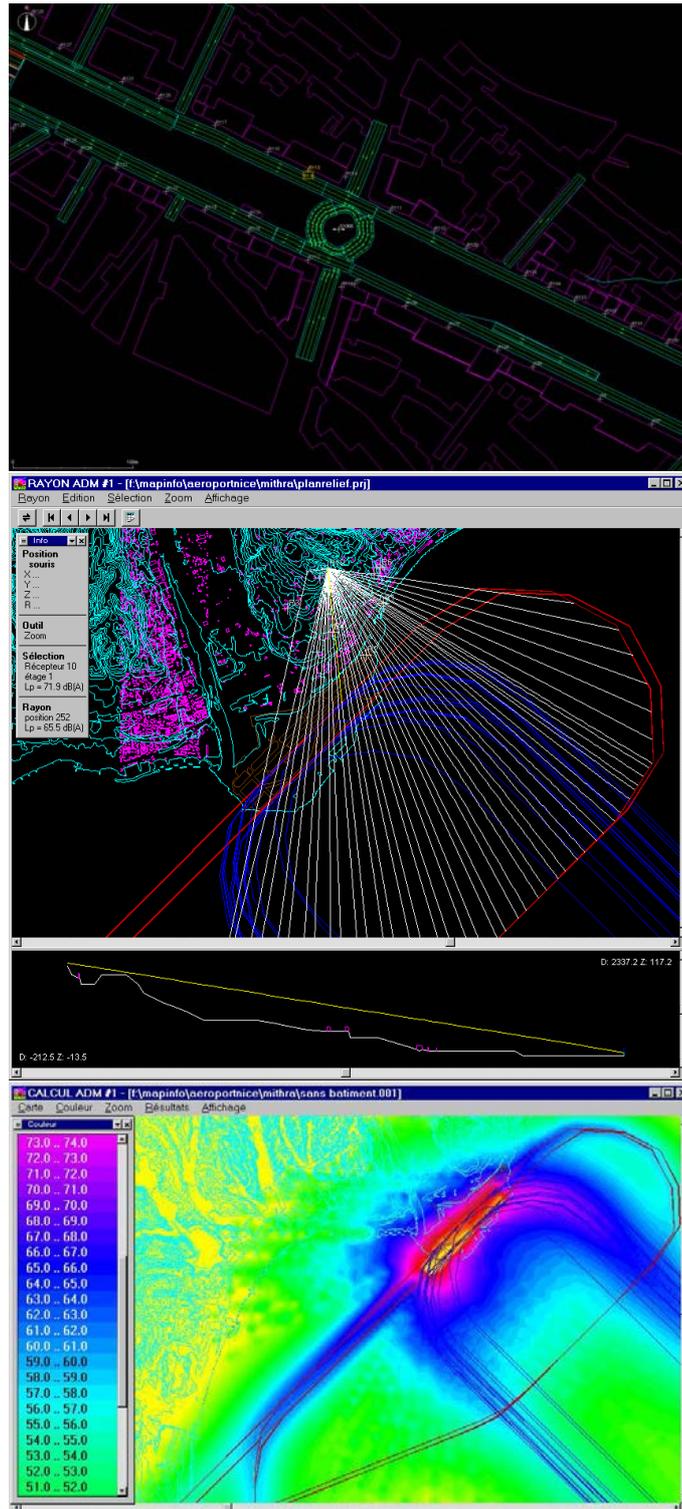


FIG. 10.16 – Calcul du bruit aérien par rayons

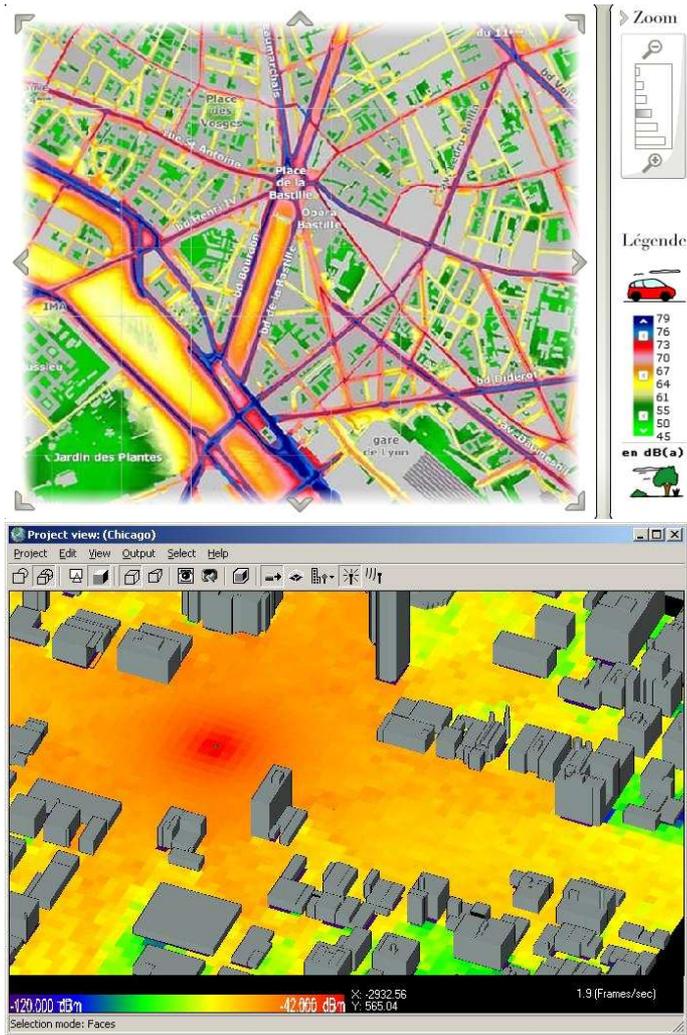


FIG. 10.17 – Cartographie 2D et 3D du bruit dans Paris

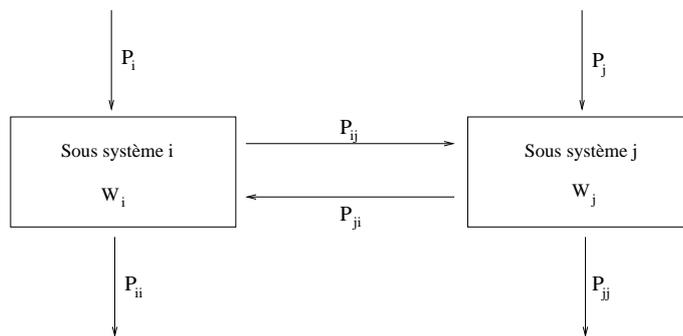


FIG. 10.18 – Décomposition en sous systèmes

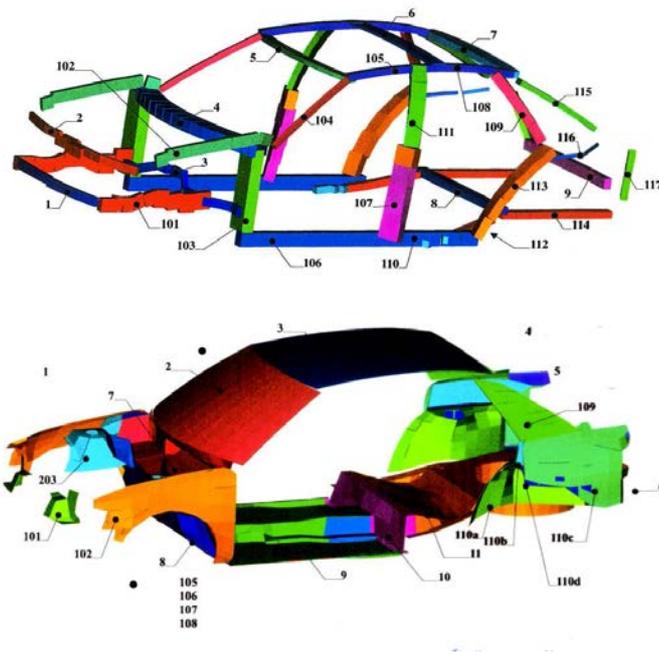


FIG. 10.19 – Décomposition en sous systèmes pour une voiture

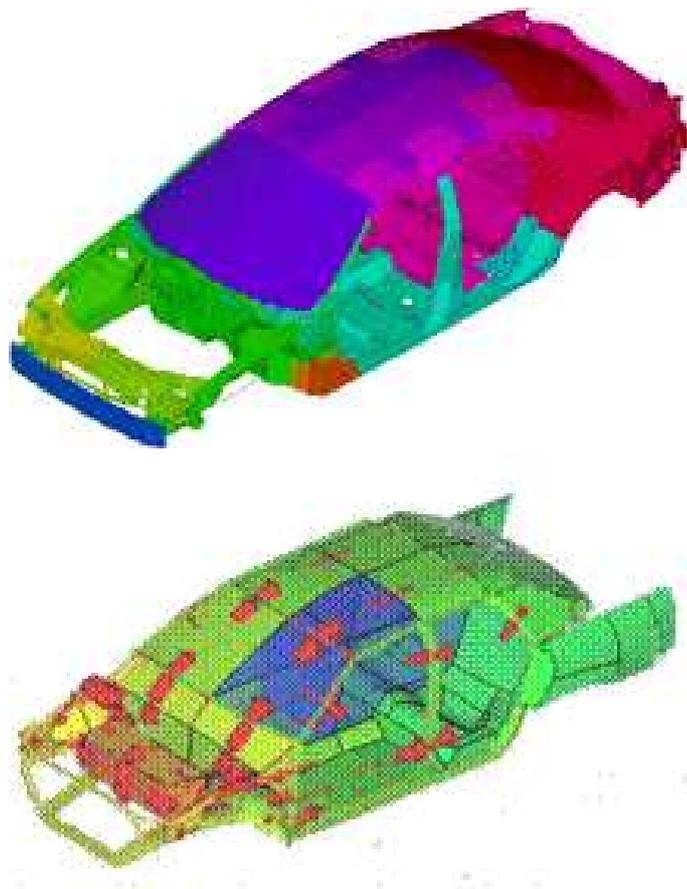


FIG. 10.20 – Energie vibratoire

Chapitre 11

Propriétés acoustiques des matériaux

11.1 Paramètres décrivant les matériaux poreux

Parmi tous les moyens possibles pour contrôler le son, l'utilisation de matériaux absorbants est l'un des plus usuels et des plus anciens. Quelques exemples de matériaux sont présentés sur la figure 11.1. Les mécanismes physiques responsables de l'absorption d'une onde acoustique dans un matériau sont la dissipation visqueuse dans les pores du matériau (laine minérale, fibre de verre, mousse, ...), la conduction thermique dans le matériau poreux ou les vibrations du squelette. En dehors de l'épaisseur, il y a principalement trois paramètres qui ont de l'influence sur les propriétés acoustiques des matériaux poreux à squelettes rigides (dont les vibrations sont négligeables). Il s'agit de la résistance à l'écoulement de l'air, de la porosité et de la tortuosité.

Le paramètre de résistance à l'écoulement de l'air peut être mesuré en imposant un flux d'air de vitesse v , de débit $Q = Sv$, à travers un échantillon du matériau de section S et en mesurant la différence de pression Δp entre les deux faces. Un schéma est présenté sur la figure 11.2. La résistance à l'écoulement de l'air est alors donnée par

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta p}{v} \quad (11.1)$$

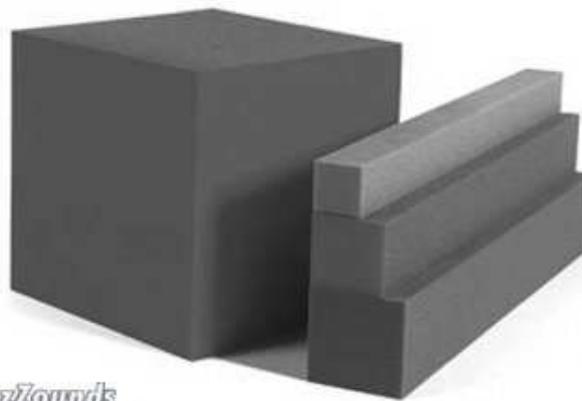
Comme son nom l'indique, elle mesure la plus ou moins grande facilité qu'a l'air à traverser le matériau.

La porosité est le rapport entre le volume des vides et le volume total

$$\Omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}} \quad (11.2)$$

Les porosités peuvent prendre des valeurs très variées entre 0 et 1. Les matériaux poreux intéressants d'un point de vue acoustique, comme les mousses ou les matériaux fibreux, peuvent avoir des porosités allant jusqu'à 0.90 ou 0.95.

La tortuosité K est un scalaire supérieur ou égal à 1 qui mesure la sinuosité des pores. Elle traduit aussi la complexité des champs de pression et de vitesse du fluide au niveau microscopique. La figure 11.3 représente le cas d'un pore sinueux dans un matériau. Pour cet exemple, la tortuosité peut être définie comme le rapport entre la longueur réelle du pore et l'épaisseur L du matériau.



z/ouids

FIG. 11.1 – Quelques exemples de matériaux poreux

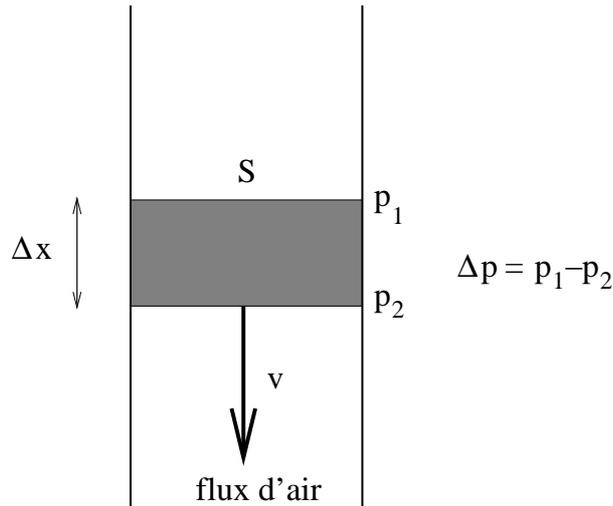


FIG. 11.2 – Mesure de la résistance à l'écoulement de l'air.

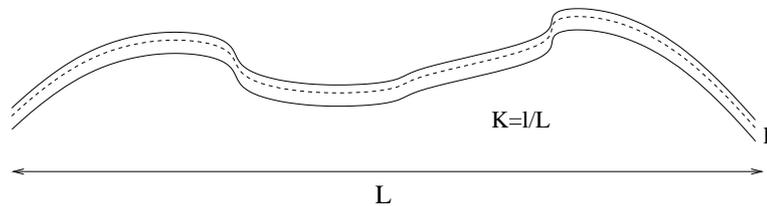


FIG. 11.3 – Définition de la tortuosité.

11.2 Modèles d'impédance

Il y a plusieurs modèles qui essaient d'expliquer les propriétés acoustiques des matériaux à partir de grandeurs physiques comme celles que l'on vient de présenter. Le plus simple est un modèle empirique proposé par Delany et Bazley, qui permet d'estimer l'impédance spécifique $Z(\omega)$ et le nombre d'onde complexe $k(\omega)$ caractérisant la propagation dans le matériau. Pour une dépendance en temps $e^{-i\omega t}$, ces grandeurs s'expriment en fonction de la fréquence f , de la masse volumique de l'air ρ_0 et de la résistance à l'écoulement de l'air σ par

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \left[1 + 10.8 \left(\frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.70} + i10.3 \left(\frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.59} \right] \quad (11.3)$$

$$Z(\omega) = \rho_0 c \left[1 + 9.08 \left(\frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.75} + i11.9 \left(\frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.73} \right] \quad (11.4)$$

Ce modèle s'applique bien aux matériaux fibreux.

Un autre modèle un peu plus complexe a été proposé par J.F. Hamet. Il exprime les mêmes

grandeurs suivant les formules.

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{K\gamma} \sqrt{1 + i\frac{f_\mu}{f}} \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{\gamma})/(1 + i\frac{f_t}{f})} \quad (11.5)$$

$$Z(\omega) = \frac{\rho_0 c}{\Omega} \sqrt{\frac{K}{\gamma}} \sqrt{1 + i\frac{f_\mu}{f}} \left(\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{\gamma})/(1 + i\frac{f_t}{f})} \right)^{-1} \quad (11.6)$$

avec les paramètres suivants $f_\mu = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\Omega}{\rho_0 K}$, $f_t = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{\rho_0 N_{Pr}}$, $\gamma = 1.4$ et $N_{Pr} = 0.71$. Ce modèle nécessite la connaissance de la porosité Ω , de la résistance à l'écoulement de l'air σ et de la tortuosité K . Ce modèle permet, par exemple, de prévoir les propriétés acoustiques des enrobés drainants, ce qui n'est pas possible avec le modèle de Delany et Bazley.

11.3 Impédance de surface

Souvent, en pratique, ces matériaux absorbants sont utilisés en revêtement. Il est alors utile de connaître l'impédance de surface apparente pour une couche de matériau d'épaisseur e reposant sur un fond rigide, voir la figure 11.4. Le champ de pression dans la couche de matériau poreux est la

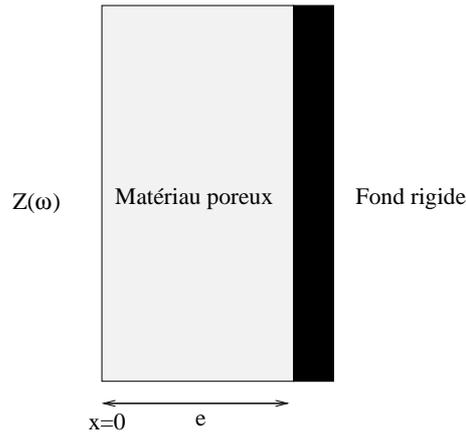


FIG. 11.4 – Impédance de surface.

somme d'une onde se propageant dans chaque sens d'amplitudes respectives a et b .

$$p(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx} \quad (11.7)$$

Le nombre d'onde k est par exemple donné par les formules 11.3 ou 11.5. La vitesse des ondes est donnée par

$$v(x) = \frac{\nabla p}{i\rho\omega} = \frac{1}{Z}(ae^{ikx} - be^{-ikx}) \quad (11.8)$$

En écrivant que $v(e) = 0$ et que $Z_s = p(0)/v(0)$, nous obtenons

$$Z_s = -Z \coth(ike) = iZ \frac{\cos ke}{\sin ke} \quad (11.9)$$

où Z est l'impédance spécifique du matériau, donnée par exemple par 11.4 ou 11.6. L'impédance de surface d'un matériau peut aussi être mesurée avec un tube à onde stationnaire, encore appelé tube de Kundt.

Si une onde e^{ikx} est incidente sur le matériau, elle va engendrer une onde réfléchie Re^{-ikx} . On peut calculer le coefficient de réflexion à partir de l'impédance de surface. Le champ de pression sur l'interface est $1 + R$ tandis que le champ de vitesse est $v = \frac{1}{Z_0}(1 - R)$ où Z_0 est l'impédance de l'air. Nous avons alors la relation

$$Z_s = p/v = Z_0 \frac{1 + R}{1 - R} \quad (11.10)$$

Cela donne

$$R = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (11.11)$$

En terme d'énergie le coefficient de réflexion est $|R|^2$ et le coefficient d'absorption vaut alors

$$\alpha = 1 - |R|^2 = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2 \quad (11.12)$$

Ce coefficient d'absorption peut aussi être mesuré au tube de Kundt. Il est compris entre 0 et 1. Les matériaux intéressants d'un point de vue acoustique ont des coefficients d'absorption le plus proche de 1 possible. Comme ce coefficient est une fonction de la fréquence, en général, il est proche de 0 aux basses fréquences et proche de 1 aux hautes fréquences. Ainsi les matériaux absorbants sont peu efficaces pour les basses fréquences.

La figure 11.5 montre les parties réelles et imaginaires de l'impédance pour un modèle de Delany et Bazley avec $\sigma = 20000 Nsm^{-4}$ et une épaisseur $e = 5cm$. La courbe 11.6 montre le coefficient d'absorption correspondant. On voit bien que l'absorption est faible dans les basses fréquences et devient importante pour les hautes fréquences.

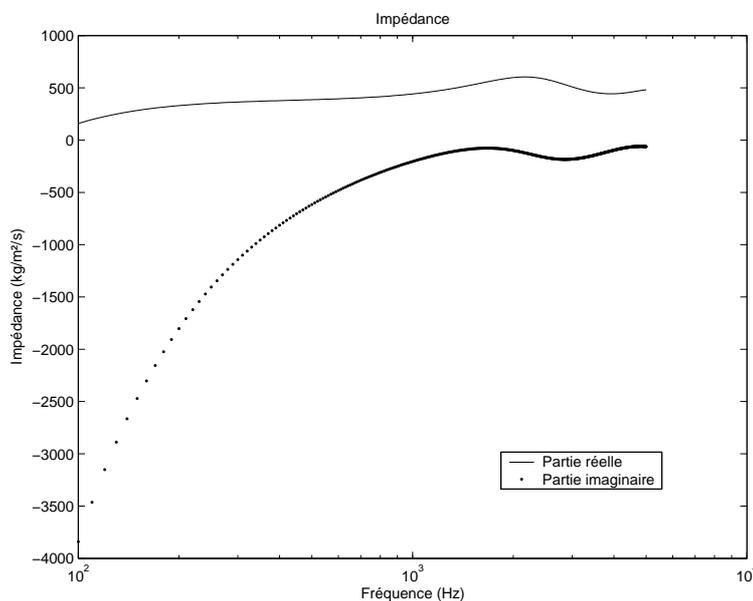


FIG. 11.5 – Impédance pour $\sigma = 20000 Nsm^{-4}$.

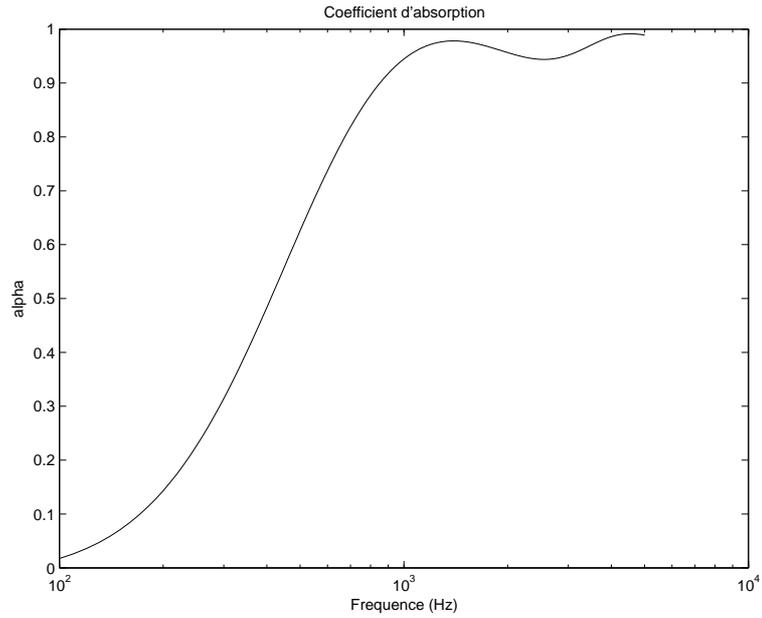


FIG. 11.6 – Coefficient d'absorption pour $\sigma = 20000 N s/m^{-4}$.

Exercice :

1) Tracer les parties réelle et imaginaire de l'impédance spécifique d'un matériau poreux lorsqu'elle est donnée par le modèle de Delany et Bazley avec une résistance à l'écoulement de l'air valant $\sigma = 300 N s m^{-4}$ puis $\sigma = 30 \cdot 10^3 N s m^{-4}$. Tracer aussi les courbes donnant l'impédance de surface quand le matériau est une couche de 5 cm d'épaisseur.

2) Même exercice avec un matériau dont le comportement est donné par le modèle de Hamet avec $\sigma = 2000 N s m^{-4}$, $\Omega = 0.2$, $K = 3$ et une épaisseur de 5 cm.

Chapitre 12

Propagation dans un conduit

Dans ce chapitre, nous présentons les équations fondamentales concernant la propagation dans les guides d'onde acoustiques. Ce type de dispositif est à la base de nombreuses applications pratiques. Les principales concernent les instruments de musique (flûte et la plupart des instruments à vent), les gaines de ventilation dans le bâtiment et les silencieux dans l'automobile. Nous commencerons par traiter le cas d'un conduit de section rectangulaire avant d'aborder le cas général d'une section quelconque.

12.1 Conduit rectangulaire

Considérons le conduit rectiligne, de section rectangulaire, présenté sur la figure 12.1. Nous supposons que les parois sont rigides et que par conséquent la vitesse particulière y est nulle.

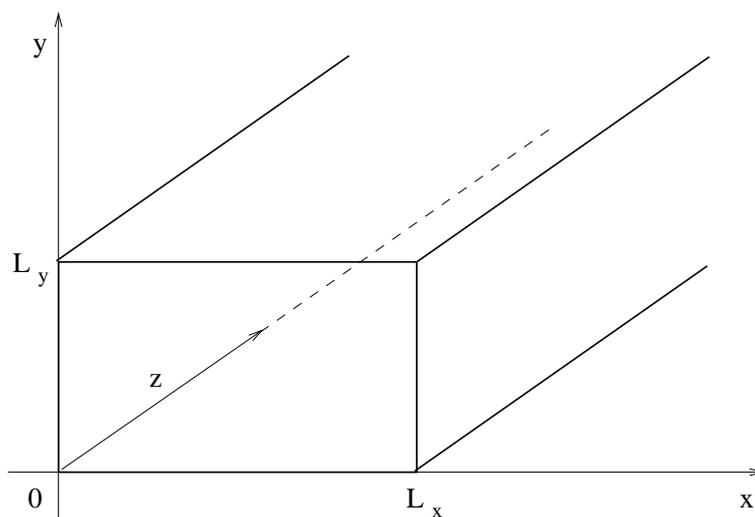


FIG. 12.1 – Conduit rectangulaire.

Nous cherchons des solutions sous la forme de variables séparées $p(x, y, z, t) = f(x)g(y)h(z)e^{-i\omega t}$.

Le champ de pression est solution de l'équation de Helmholtz, ce qui conduit à

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (12.1)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} &= -k_z^2 \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \quad (12.2)$$

et la solution est de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= a_x e^{ik_x x} + b_x e^{-ik_x x} \\ g(y) &= a_y e^{ik_y y} + b_y e^{-ik_y y} \\ h(z) &= a_z e^{ik_z z} + b_z e^{-ik_z z} \end{aligned} \quad (12.3)$$

La rigidité des parois impose les conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(L_x) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(0) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(L_y) &= 0 \end{aligned} \quad (12.4)$$

Les solutions non nulles sont de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos \frac{n\pi x}{L_x} \\ g(y) &= b \cos \frac{m\pi y}{L_y} \end{aligned} \quad (12.5)$$

et finalement la solution générale est de la forme

$$p(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \left[a_{nm} e^{ik_z z} + b_{nm} e^{-ik_z z} \right] e^{i\omega t} \quad (12.6)$$

avec

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \quad (12.7)$$

À partir de ces deux dernières relations, nous pouvons faire les remarques fondamentales suivantes

1. Si $\frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2$, le nombre d'onde k_z est réel et dans ce cas il y a propagation d'une onde dans le conduit suivant la direction z .
2. Si $\frac{\omega^2}{c^2} < \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2$, le nombre d'onde k_z est imaginaire pur et dans ce cas les ondes sont évanescentes et il n'y a pas de propagation d'onde dans le conduit suivant la direction z .
3. Nous pouvons voir que pour une fréquence donnée, il n'y a qu'un nombre fini de modes propagatifs et un nombre infini de modes évanescents. Les fréquences telles que

$$\frac{(2\pi f_{nm})^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \quad (12.8)$$

sont appelées les fréquences de coupure pour le mode (n, m) . Pour que le mode d'ordre (n, m) puisse se propager, il faut que la fréquence soit telle que $f > f_{nm}$.

4. On peut constater aussi que le premier mode, d'ordre $(0, 0)$, est toujours propagatif.

12.2 Conduit de section quelconque

Ce qui a été montré dans la section précédente est transposable à un conduit de section quelconque avec les quelques modifications décrites ci-dessous.

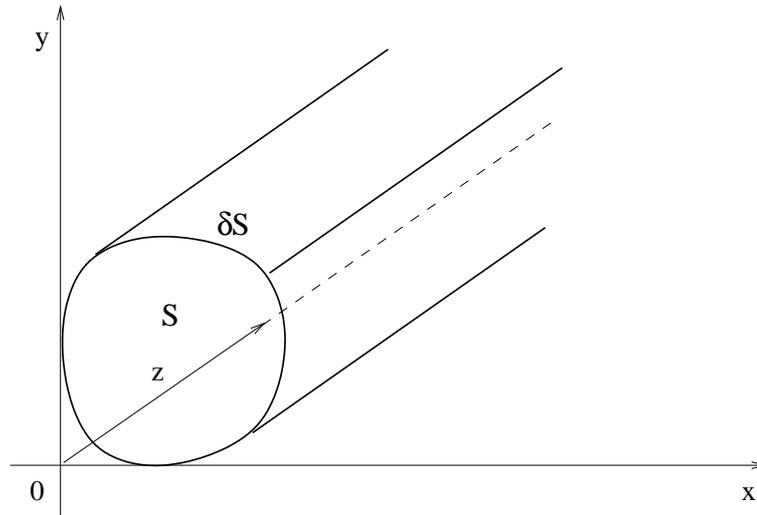


FIG. 12.2 – Conduit de section quelconque

Dans une section transversale S , nous pouvons définir des modes propres $\Psi_i(x, y)$ du Laplacien bidimensionnel Δ_{xy} (où x, y sont les coordonnées dans la section) et leurs valeurs propres λ_i associées.

$$\Delta_{xy}\Psi_i(x, y) = \lambda_i\Psi_i(x, y) \quad (12.9)$$

Les modes propres vérifient aussi la condition de rigidité sur la frontière δS :

$$\nabla\Psi_i(x, y)\cdot\mathbf{n}(x, y) = 0$$

Les valeurs propres sont alors réelles et négatives et on pose $\lambda_i = -k_i^2$. Les modes $\Psi_i(x, y)$ forment une base de l'ensemble des champs de pression, leurs valeurs propres associées λ_i forment une suite décroissante tendant vers $-\infty$. Nous allons développer p sur cette base des modes propres transversaux.

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z) \Psi_i(x, y) \quad (12.10)$$

En utilisant l'équation de Helmholtz, on obtient alors que $f_i(z)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2} + (k^2 - k_i^2) f_i = 0 \quad (12.11)$$

Nous introduisons k_{zi} tel que $k_{zi}^2 = k^2 - k_i^2$. k_{zi} est le nombre d'onde associé au mode de propagation $\Psi_i(x, y)$. Nous avons alors

$$f_i(z) = a_i^+ e^{ik_{zi}z} + a_i^- e^{-ik_{zi}z} \quad (12.12)$$

On obtient donc l'expression finale de la pression $p(x, y, z)$:

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i^+ e^{ik_{zi}z} + a_i^- e^{-ik_{zi}z}) \Psi_i(x, y) \quad (12.13)$$

La pression s'exprime donc sous la forme d'une somme de modes se propageant vers l'amont ou vers l'aval.

Le nombre d'onde k_{zi} peut être réel ou imaginaire pur. Pour une fréquence donnée, on a un nombre fini de modes dont le k_{zi} associé est réel. Ce sont les modes **propagatifs**. Les autres modes sont dits **évanescents**. Ils sont amortis de façon exponentielle lorsque l'onde avance. Inversement, pour un mode donné, il existe une fréquence appelée **fréquence de coupure** à partir de laquelle le mode devient propagatif. Quelque soit la géométrie, le premier mode est plan et a une fréquence de coupure nulle. Cela veut dire qu'il est toujours propagatif. La présence d'ondes évanescentes est intéressante car elle permet de faire des troncatures sur les sommations modales. Pour une fréquence donnée, on peut se contenter de tenir compte des N premiers modes en considérant que les modes supérieurs sont fortement atténués sur la longueur l de la portion du conduit. Nous retrouvons donc un comportement très similaire au cas du conduit rectangulaire.

12.3 Matrice de transfert

Le champ de pression dans le guide est donné par la relation 12.13. La vitesse particulière du fluide dans la direction de propagation est alors

$$v_z(x, y, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{i=0}^{\infty} k_{zi} (a_i^+ e^{ik_{zi}z} - a_i^- e^{-ik_{zi}z}) \Psi_i(x, y) \quad (12.14)$$

Nous introduisons aussi le débit défini par $q = S v_z$. Considérons maintenant les deux sections Γ_A et Γ_B correspondants aux positions ($z = 0$) et ($z = l$). Introduisons q^A , q^B , p^A et p^B les vecteurs dont la $i^{\text{ème}}$ composante est q_i^A , q_i^B , p_i^A et p_i^B . Ces dernières sont les projections modales de $q^A(x, y)$,

$q^B(x, y)$, $p^A(x, y)$ et $p^B(x, y)$. Elles peuvent se calculer par

$$\begin{cases} q_i^A &= \int_S \Psi_i(x, y) q^A(x, y) dx dy \\ q_i^B &= \int_S \Psi_i(x, y) q^B(x, y) dx dy \\ p_i^A &= \int_S \Psi_i(x, y) p^A(x, y) dx dy \\ p_i^B &= \int_S \Psi_i(x, y) p^B(x, y) dx dy \end{cases} \quad (12.15)$$

On en déduit

$$\begin{cases} p_i^A &= a_i^+ + a_i^- \\ p_i^B &= a_i^+ e^{ik_{zi}l} + a_i^- e^{-ik_{zi}l} \\ \frac{\rho_0 \omega}{S} q_i^A &= k_{zi} [a_i^+ - a_i^-] \\ \frac{\rho_0 \omega}{S} q_i^B &= k_{zi} [a_i^+ e^{ik_{zi}l} - a_i^- e^{-ik_{zi}l}] \end{cases} \quad (12.16)$$

Les deux dernières équations donnent

$$\begin{cases} a_i^+ &= -\frac{\rho_0 \omega}{S k_{zi}} \frac{q_i^A e^{-ik_{zi}l} - q_i^B}{e^{ik_{zi}l} - e^{-ik_{zi}l}} \\ a_i^- &= -\frac{\rho_0 \omega}{S k_{zi}} \frac{q_i^A e^{ik_{zi}l} - q_i^B}{e^{ik_{zi}l} - e^{-ik_{zi}l}} \end{cases} \quad (12.17)$$

En remplaçant a_i^+ et a_i^- dans les deux premières équations de 12.16, on obtient l'équation

$$\begin{cases} p_i^A &= \frac{i\rho_0 \omega}{S k_{zi} \sin(k_{zi}l)} (\cos(k_{zi}l) q_i^A - q_i^B) \\ p_i^B &= \frac{i\rho_0 \omega}{S k_{zi} \sin(k_{zi}l)} (-\cos(k_{zi}l) q_i^B + q_i^A) \end{cases} \quad (12.18)$$

Retenons N modes respectivement de chaque côté du segment du conduit droit. On peut alors définir la matrice d'impédance $\begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix}$ que l'on notera $\underline{\underline{Z}}$ de dimension N^2 et le vecteur source impédance $\begin{pmatrix} Z^{sA} \\ Z^{sB} \end{pmatrix}$ de dimension N que l'on notera $\underline{\underline{Z}}s$ et qui traduit l'action de sources éventuelles dans le conduit :

$$\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Z^{sA} \\ Z^{sB} \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

Pour un conduit droit à parois rigides, avec un fluide parfait au repos, $\underline{\underline{Z}}$ s'écrit :

$$\begin{cases} Z_{mn}^{AA} &= \frac{i\rho_0 \omega}{S k_{zm} \tan(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BB} &= \frac{-i\rho_0 \omega}{S k_{zm} \tan(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{AB} &= \frac{-i\rho_0 \omega}{S k_{zm} \sin(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BA} &= \frac{i\rho_0 \omega}{S k_{zm} \sin(k_{zm}l)} \delta_{mn} \end{cases} \quad (12.20)$$

Une matrice de transfert $\begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix}$ que l'on notera \underline{T} de dimension $2N \times 2N$ et le vecteur source transfert $\begin{pmatrix} T s_p \\ T s_q \end{pmatrix}$ que l'on notera $\underline{T}s$ de dimension $2N$ sont souvent introduits à la place de la matrice d'impédance.

$$\begin{pmatrix} p^B \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^A \\ q^A \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} T s_p \\ T s_q \end{pmatrix} \quad (12.21)$$

où T^{pp} , T^{pq} , T^{qp} et T^{qq} sont des matrices de dimension N . $T s_p$ et $T s_q$ sont des vecteurs de dimensions N . La présentation avec matrice de transfert a l'avantage de permettre la multiplication immédiate des matrices des sous-domaines pour calculer la matrice globale du domaine étudié. Les matrices de transfert et d'impédance sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} T^{pp} = & Z^{BB}(Z^{AB})^{-1} \\ T^{pq} = & Z^{BA} - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ T^{qp} = & (Z^{AB})^{-1} \\ T^{qq} = & -(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ T s_p = & Z s_B - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Z s_A \\ T s_q = & -(Z^{AB})^{-1}Z s^A \end{cases} \quad (12.22)$$

La matrice de transfert d'un conduit droit, avec parois rigides et fluide parfait au repos s'écrit :

$$\begin{cases} T_{mn}^{pp} = & \cos(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{pq} = & \frac{i \rho_0 \omega}{S k_m} \sin(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qp} = & -\frac{S k_m \sin(k_m l)}{i \rho_0 \omega} \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qq} = & \cos(k_m l) \delta_{mn} \end{cases} \quad (12.23)$$

Dans le cas de la propagation du seul mode plan et sans source dans le guide, la relation s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\begin{pmatrix} p^B \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & \frac{i \rho_0 c}{S} \sin(kl) \\ i \frac{S \sin(kl)}{\rho_0 c} & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^A \\ q^A \end{pmatrix} \quad (12.24)$$

12.4 Silencieux

Un moyen de réduire la transmission est d'utiliser des changements de section, voir figure 12.3. Rappelons les équations générales de l'acoustique en l'absence de source et pour une onde harmonique :

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ -i\rho_0 \omega \mathbf{v} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad (12.25)$$

Nous définissons deux domaines Ω_1 et Ω_2 (voir figure 12.3) pour un élargissement de section d'une section rectangulaire $L_A \times h$ à la section rectangulaire $L_B \times h$ (h est la dimension transverse). Nous intégrons la première équation de (12.25) sur Ω_1 et la deuxième sur Ω_2 .

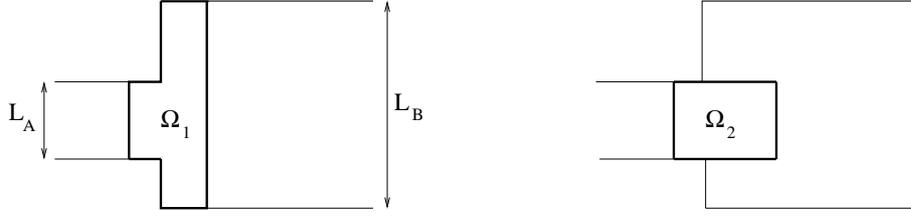


FIG. 12.3 – Domaines d'intégration Ω_1 et Ω_2 .

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2} \int_{\Omega_1} p \, d\mathbf{x} + \rho_0 \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \\ -i\rho_0\omega \int_{\Omega_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} p \mathbf{n} \, ds = 0 \end{cases} \quad (12.26)$$

On obtient alors à basses fréquences :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \approx 0 \\ \int_{\Gamma_2} p \, \mathbf{n} \, ds \approx 0 \end{cases} \quad (12.27)$$

Les distributions de pression et de vitesse peuvent être considérées planes dans des sections suffisamment éloignées de la discontinuité. Leurs valeurs sont notées P_A , P_B , V_A et V_B respectivement. On déduit de (12.27) que :

$$\begin{cases} L_A V_A - L_B V_B \approx 0 \\ P_A - P_B \approx 0 \end{cases} \quad (12.28)$$

Il y a donc conservation de la pression et du débit à la discontinuité. Il est maintenant possible de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission à travers la discontinuité. Pour cela, il faut introduire l'onde incidente a^+ , l'onde réfléchie a^- et l'onde transmise b^+ . L'expression de la pression pour $x < 0$ s'écrit :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{hL_A}} (a^+ e^{ikx} + a^- e^{-ikx}) \quad (12.29)$$

L'expression de la pression pour $x > 0$ s'écrit :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{hL_B}} b^+ e^{ikx} \quad (12.30)$$

A partir des équations (12.28), on trouve les coefficients de transmission T et de réflexion R :

$$\begin{cases} T = \frac{b^+}{a^+} = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{1+\epsilon} \\ R = \frac{a^-}{a^+} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \end{cases}$$

où $\epsilon = \frac{L_B}{L_A}$. Plus l'élargissement est important, plus le coefficient de réflexion est grand et le coefficient de transmission faible.

Le calcul précédent donne un exemple de comportement de silencieux. Plus généralement, on distingue les silencieux réactifs qui agissent par modification des coefficients de réflexion et les silencieux dissipatifs qui agissent par des matériaux absorbants à l'intérieur du silencieux. Le comportement d'un élément du silencieux est décrit par une matrice de transfert reliant la pression p et le flux de masse aux deux extrémités de l'élément.

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ S_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ S_1 v_1 \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

Le comportement global du silencieux s'obtient en multipliant ces matrices de transfert

$$\begin{bmatrix} p_n \\ S_n v_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} p_1 \\ S_1 v_1 \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

Par exemple pour une section droite de longueur l , nous avons

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos kl & i \frac{Z}{S} \sin kl \\ i \frac{S}{Z} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

Cas d'un embranchement

Dans le cas de l'embranchement de la figure 12.4, le même type de calcul conduit à

$$\begin{aligned} R &= \frac{1 - (m_1 + m_2)}{1 + (m_1 + m_2)} \\ RT_1 &= 10 \log_{10} \frac{(1 + m_1 + m_2)^2}{4m_1} \\ RT_2 &= 10 \log_{10} \frac{(1 + m_1 + m_2)^2}{4m_2} \\ m_1 &= \frac{S_1}{S_0} \\ m_2 &= \frac{S_2}{S_0} \\ RT &= -10 \log_{10} \tau \end{aligned} \quad (12.34)$$

où τ est le rapport entre la puissance transmise et la puissance incidente.

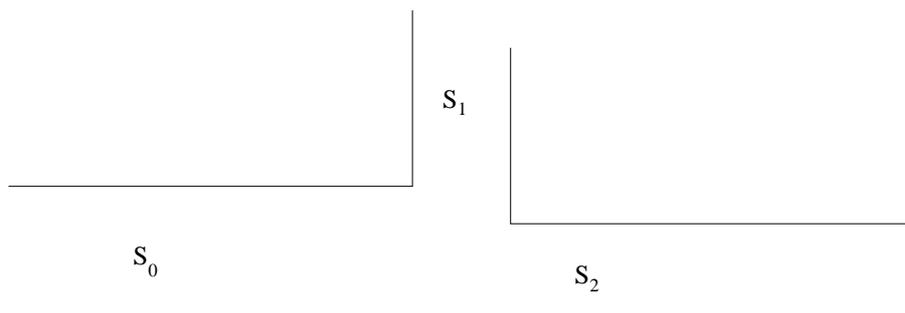


FIG. 12.4 – Embranchement.

12.5 Terminaisons

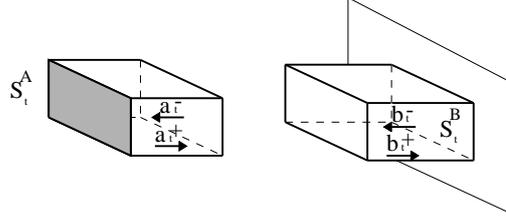


FIG. 12.5 – Terminaisons amont et aval.

La terminaison aval est modélisée par une matrice de réflexion R_B .

$$b_t^- = R_B b_t^+ \quad (12.35)$$

L'indice t dans le texte signifie que les ondes et les sections sont définies aux terminaisons. Si la terminaison est considérée anéchoïque, $R_B = 0$. Ici la terminaison aval est modélisée comme un conduit débouchant dans un plan infini parfaitement réfléchissant. En appliquant l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz dans le domaine extérieur au conduit, on peut démontrer que l'équation intégrale a l'expression de l'intégrale de Rayleigh :

$$p(\underline{s}) = - \int_{S_t^B} G(\underline{s}|\underline{s}_0) \frac{\partial p}{\partial z}(\underline{s}_0) d\underline{s}_0 \quad (12.36)$$

où $\underline{s}_0 = (x_0, y_0, z_t^B)$, $\underline{s} = (x, y, z_t^B)$ sont des points de la surface S_t^B et la fonction de Green a l'expression suivante :

$$G(\underline{s}|\underline{s}_0) = \frac{e^{ik|\underline{s}-\underline{s}_0|}}{2\pi|\underline{s}-\underline{s}_0|} \quad (12.37)$$

En remplaçant la pression et sa dérivée normale par les ondes b_t^+ et b_t^- , l'équation intégrale (12.36) peut être écrite d'une autre façon :

$$(b_t^+ + b_t^-) = G^B M^B (b_t^- - b_t^+) \quad (12.38)$$

où G^B et M^B sont des matrices dont les composantes ont les expressions suivantes :

$$G_{mn}^B = \int_{S_t^B} \int_{S_t^B} \Psi_m(x, y) G(\underline{s}|\underline{s}_0) \Psi_n(x, y) dx dy dy_0 dz_0 \quad (12.39)$$

$$M_{mn}^B = ik_m^B \delta_{mn} \quad (12.40)$$

Avec la définition de R_B dans l'équation (12.35) nous obtenons

$$R_B = (G^B M^B - 1^B)^{-1} (G^B M^B + 1^B) \quad (12.41)$$

Une matrice de réflexion R_A est introduite de manière similaire pour la terminaison amont.

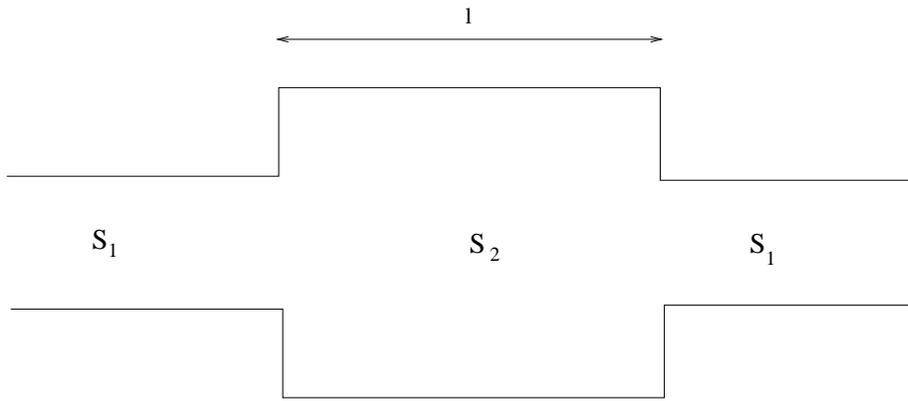


FIG. 12.6 – Silencieux.

Exercice

Calculer le facteur de transmission du silencieux de la figure 12.6.

solution :

$$RT = 10 \log_{10} \left[1 + \frac{1}{4} \left(m - \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2 kl \right]$$

Chapitre 13

Acoustique des salles

Les salles devant faire l'objet d'une étude acoustique sont celles dans lesquelles on souhaite transmettre un message (parole, musique), comme celle de la figure 13.1. Pour les problèmes liés à la parole, on recherchera l'intelligibilité du message alors que dans le cas de la musique, il faudra, en plus, que la salle apporte une profondeur harmonique.



FIG. 13.1 – Salle de spectacle

13.1 Modes dans une salle

13.1.1 Salle rectangulaire

On considère dans un premier temps le calcul des modes dans une salle rectangulaire à parois rigides. On suppose que la salle a pour dimensions L_x , L_y et L_z suivant les trois directions. Les modes propres de la salle sont solutions de

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (13.1)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables et en cherchant la solution sous la forme $p(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$, on doit avoir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{h''(z)}{h(z)} + k^2 = 0 \quad (13.2)$$

L'analyse du premier terme montre qu'il y a une constante k_x telle que

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + k_x^2 = 0 \quad (13.3)$$

soit en incluant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos k_x x + b \sin k_x x \\ f'(0) &= 0 \\ f'(L_x) &= 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

Les solutions de ce système sont les fonctions

$$f_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L_x} \quad (13.5)$$

Les modes propres sont donc donnés par les fonctions

$$P_{nml}(x, y, z) = \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{l\pi z}{L_z} \quad (13.6)$$

avec la valeur propre

$$k_{nml}^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 \quad (13.7)$$

13.1.2 Densité modale

On se propose d'évaluer le nombre de modes dans la salle dont la pulsation propre est inférieure à une valeur ω donnée. On doit donc avoir

$$\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \quad (13.8)$$

Le nombre de triplets entiers (n, m, l) qui satisfont cette condition est obtenu en divisant le volume du huitième de sphère de rayon $\frac{\omega}{c}$ par le volume élémentaire associé à un triplet qui est $\frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$ d'où

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \frac{\frac{4\pi\omega^3}{24c^3}}{\frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}} \\ &= \frac{V\omega^3}{6\pi^2 c^3} \end{aligned} \quad (13.9)$$

avec $V = L_x L_y L_z$ le volume de la salle. La densité modale est la dérivée du nombre de modes par rapport à la pulsation, soit

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3} \quad (13.10)$$

13.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle $h(t)$ se définit par rapport à une position de source et un point de réception. Un exemple est présenté sur la figure 13.2. Elle permet ensuite de déterminer le son

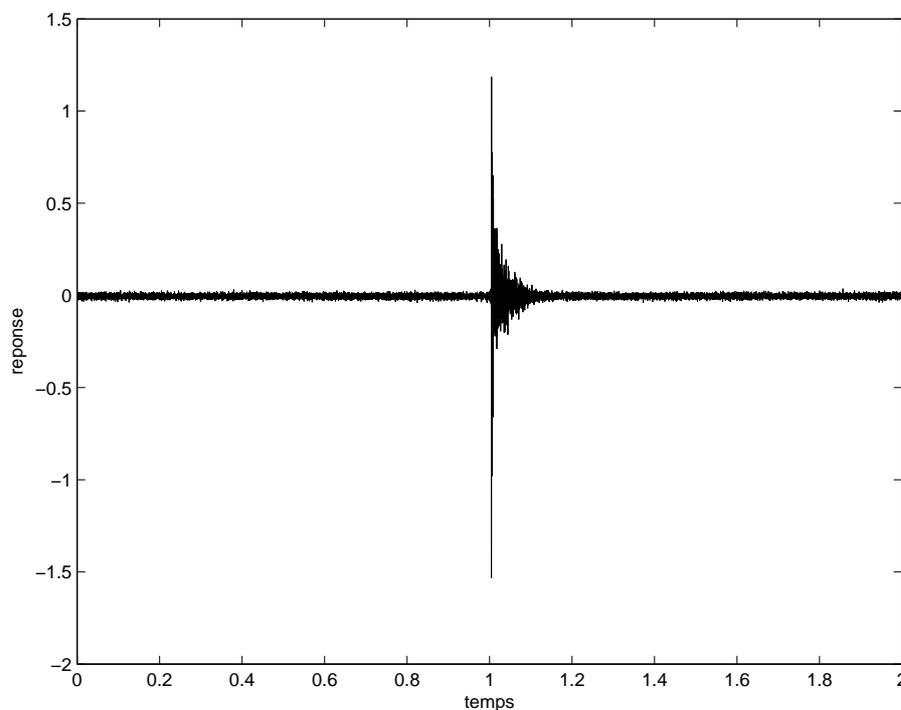


FIG. 13.2 – Exemple de réponse impulsionnelle.

entendu $p(t)$ pour une source arbitraire $s(t)$ par la formule de convolution.

$$p(t) = (h * s)(t) \quad (13.11)$$

Pour mesurer cette réponse impulsionnelle on peut émettre un son très bref à la position de la source, par exemple avec un pistolet d'alarme, et mesurer le signal au point de réception. Actuellement on utilise plutôt une séquence sonore particulière $s(t)$ puis la mesure de $p(t)$ et un traitement

du signal permet de trouver $h(t)$. On peut aussi simuler par le calcul la réponse impulsionnelle d'une salle $h(t)$. La mesure en studio du signal d'un instrument de musique $s(t)$ permet par la formule (13.11) de reproduire le signal $p(t)$ de l'instrument tel qu'il serait entendu dans la salle.

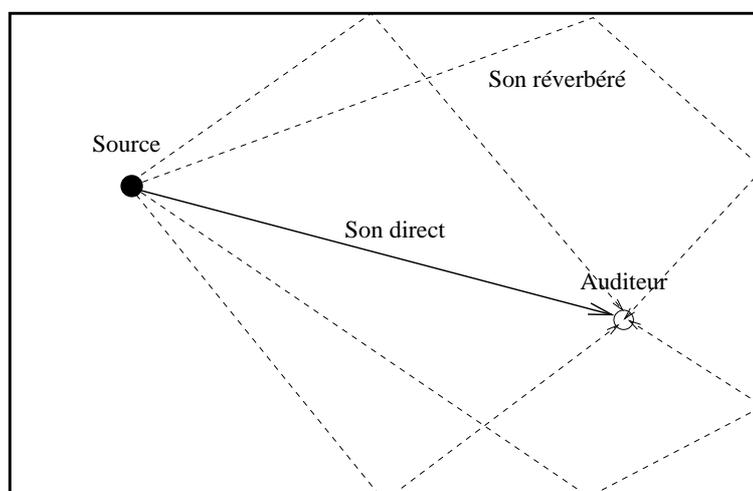


FIG. 13.3 – Sons direct et réverbéré.

Une étude plus détaillée permet de décomposer la réponse en trois phases. Ces trois phases sont illustrées sur la figure 13.4. La première phase est la réception du son direct qui est le même que

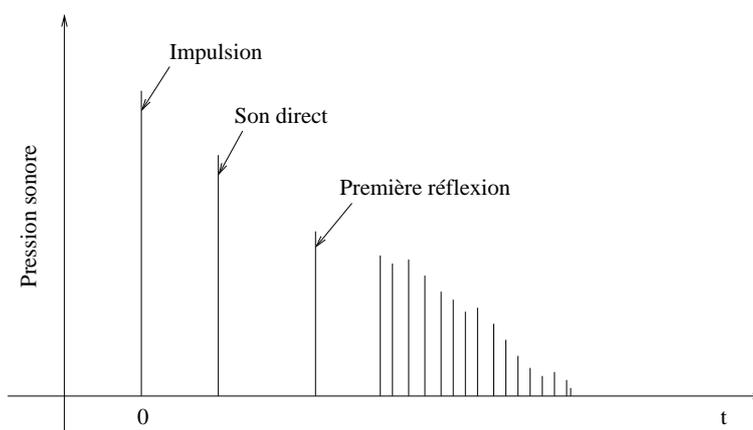


FIG. 13.4 – Décomposition de la réponse impulsionnelle.

s'il n'y avait pas de salle. Il se calcule donc par la formule

$$p(t) = \frac{s(t - r/c)}{4\pi r} \quad (13.12)$$

où r est la distance source récepteur et $s(t)$ le signal envoyé par la source. La seconde phase est constituée par les premières réflexions sur les parois qui parviennent durant les 80 à 100 premières millisecondes. La dernière phase est le champ réverbéré produit par les réflexions multiples sur les parois de la salle. Il a quelques caractéristiques particulières. Il décroît de façon exponentielle et

le temps de réverbération est le temps mis pour décroître de 60dB. Le champ diffus se présente sous la forme d'un signal aléatoire et est statistiquement homogène dans la salle. La pression en un point résulte d'ondes planes décorréélées, provenant de toutes les directions de l'espace et ayant la même amplitude. Cette hypothèse est raisonnable dans un volume fermé dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde.

La densité moyenne de réflexions augmente avec le temps. Dès que la densité de réflexion est supérieure à 2 par *ms* (pouvoir séparateur de l'oreille), on peut admettre que la réverbération est parfaite. La figure 13.5 illustre les réflexions multiples d'un rayon sonore entre une source et un récepteur.

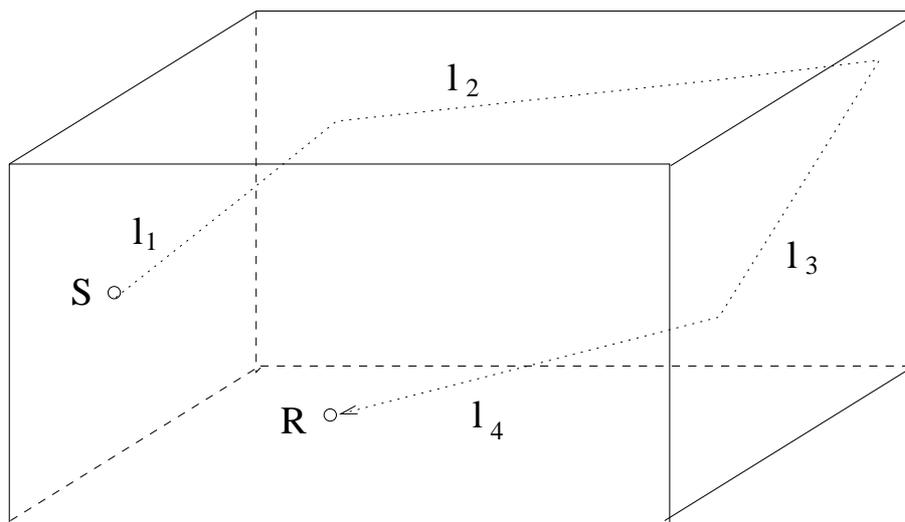


FIG. 13.5 – Réflexions multiples.

On peut montrer que le libre parcours moyen est donné par

$$l = \frac{4V}{S} \quad (13.13)$$

où V est le volume de la salle et S la surface des parois. Le temps entre deux réflexions successives est

$$\Delta t = \frac{l}{c} = \frac{4V}{cS} \quad (13.14)$$

et le nombre moyen de réflexions par seconde est

$$n = \frac{cS}{4V} \quad (13.15)$$

13.3 Son dans une salle

Lorsque les dimensions de la salle sont grandes devant la longueur d'onde, on peut faire l'approximation que le champ de pression est diffus, ce qui signifie qu'à chaque position l'énergie provient de toutes les directions avec une intensité égale et que la densité d'énergie est indépendante de la position. Ces hypothèses sont raisonnables quand la densité modale est élevée et qu'il n'est plus possible de distinguer les modes individuellement. Si les ondes planes dans une direction donnée

ont pour amplitude moyenne p_0 , la valeur moyenne du carré de la pression en un point de l'espace vérifie

$$|p|^2 = 4\pi|p_0|^2 \quad (13.16)$$

car on peut sommer les énergies des différentes directions puisque les ondes sont décorréliées. La densité d'énergie associée est alors

$$w = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c^2} \quad (13.17)$$

et l'énergie totale contenue dans le volume V est

$$W = \frac{V|p|^2}{2\rho_0 c^2} \quad (13.18)$$

L'intensité acoustique dans un champ diffus est nulle car les ondes de directions opposées se compensent. Pour un demi espace, l'intensité incidente sur une paroi est donnée par

$$\mathbf{I} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_0 \mathbf{n}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (13.19)$$

où $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ est la normale à la sphère unité dans la direction (θ, ϕ) et $I_0 = \frac{|p_0|^2}{2\rho_0 c}$ est l'intensité d'une onde plane. On trouve

$$\mathbf{I} = \pi I_0 \mathbf{n}_p = \frac{|p|^2}{8\rho_0 c} = \frac{Wc}{4V} \quad (13.20)$$

en notant \mathbf{n}_p la normale à la paroi.

Lorsqu'une onde frappe une paroi comme sur la figure 13.6, l'énergie incidente est divisée en une énergie réfléchie, une énergie transmise et une énergie absorbée par la paroi. La conservation de l'énergie impose que

$$E_i = E_a + E_r + E_t \quad (13.21)$$

Ecrivant l'équilibre entre la puissance émise par la source et la puissance absorbée par les parois,

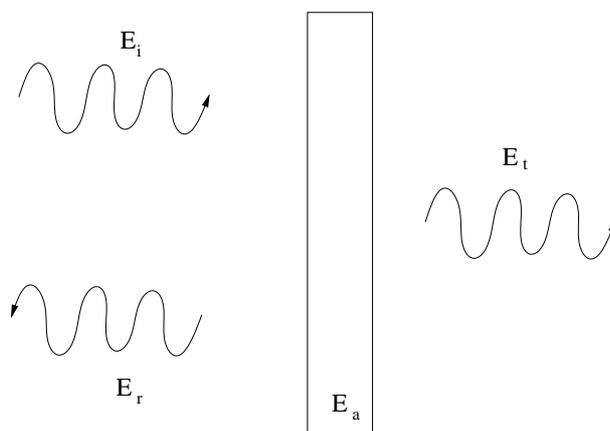


FIG. 13.6 – Réflexions multiples.

nous avons aussi

$$P = IS\bar{\alpha} \quad (13.22)$$

Pièce meublée	0.5s
Pièce vide	2 à 5 s
Salle de concert	0.8 à 1.5s
Grand hall ou salle réverbérante	8 à 12 s

TAB. 13.1 – Temps de réverbération de quelques locaux.

avec

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i S_i \quad (13.23)$$

qui est la moyenne des absorptions des différents éléments de parois de coefficients d'absorption respectifs α_i et de surfaces S_i .

La propagation du son dans ce type d'espace clos se fait par de multiples réflexions sur les parois du local. Les propriétés acoustiques de ces parois sont par conséquent très importantes pour estimer le niveau sonore dans l'espace. Lorsque l'on arrête une source sonore, le son ne cesse pas brusquement mais le niveau sonore décroît régulièrement avec le temps. En écrivant que la variation d'énergie dans la cavité est égale à l'énergie absorbée par les parois, nous avons :

$$dW = -IS\bar{\alpha}dt \quad (13.24)$$

ce que l'on peut écrire aussi

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}I \quad (13.25)$$

soit

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}t} \quad (13.26)$$

Par définition, le temps de réverbération T_R est le temps nécessaire pour réduire le niveau sonore de 60dB, voir par exemple la figure 13.7 montrant la décroissance du niveau sonore en fonction du temps. On a donc

$$e^{-\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}T_R} = 10^{-6} \quad (13.27)$$

On peut en déduire la formule de Sabine qui relie le temps de réverbération au facteur d'absorption moyen des parois du local :

$$T_R = 0.16 \frac{V}{\bar{\alpha}S} \quad (13.28)$$

Des temps de réverbération courants sont donnés dans le tableau 13.1. Cette théorie est valable quand l'absorption par les parois reste modérée. En pratique, il est préférable que le coefficient d'absorption moyen ne dépasse pas 0,2. Sinon il faut utiliser des théories plus précises. En agissant sur les surfaces S_i et les coefficients d'amortissement α_i des matériaux, il est possible de modifier $\bar{\alpha}$ et donc de contrôler le temps de réverbération dans la pièce. Dans le cas de grandes salles, il peut être nécessaire de tenir compte de l'absorption de l'air. Elle peut s'introduire à l'aide d'une surface d'absorption équivalente supplémentaire donnée par

$$A_a = 4bV \quad (13.29)$$



FIG. 13.7 – Mesure du temps de réverbération.

avec

$$b = 5.5 \cdot 10^{-4} \frac{50}{h} \left(\frac{f}{1000} \right)^{1.7} \quad (13.30)$$

où h est le degré d'humidité en %.

La caractérisation d'une salle consiste à essayer de traduire en des termes objectifs des appréciations subjectives de sa qualité. On peut ainsi définir différents critères qui permettent d'affiner la caractérisation du temps de réverbération donnée par le T_R . La durée de décroissance à 10dB est appelée EDT (Early Decay Time). Elle caractérise le début de la réverbération qui est la partie utile à la compréhension d'un message. L'oreille humaine en effet ajoute les signaux distants de moins de 80ms et font que les premières réflexions sur les parois sont perçues comme faisant partie du signal initial. Au contraire les contributions distantes ($> 100ms$) sont perçues comme un signal différent et perturbent le signal initial. Dans la parole la durée d'une syllabe est de l'ordre de 200ms et les contributions au signal qui vont au delà de 200ms se superposent à la syllabe suivante ce qui nuit à la compréhension du message. Pour la musique, ce phénomène est moins gênant car il produit un effet harmonique qui peut au contraire être recherché.

Une autre famille de critères caractérise la netteté du signal reçu. Ces critères comparent l'énergie utile (avant 50 – 100ms) à celle qui ne l'est pas. La clarté C_{80} est ainsi définie par

$$C_{80} = 10 \log_{10} \frac{\int_0^{80ms} |p|^2 dt}{\int_{80ms}^{\infty} |p|^2 dt} \quad (13.31)$$

La clarté est surtout utile en musique et une clarté de 0dB est correcte. L'augmentation de ce critère se fait au dépend du T_R , il faut donc trouver un compromis acceptable entre ces valeurs.

Une autre formule répandue pour le calcul du temps de réverbération est la formule d'Eyring. Pendant un temps dt , l'énergie associée à un parcours quelconque décroît de E à $E(1 - \alpha)$. La

différence de niveau dans l'intervalle dt est donc $10 \log(1 - \alpha)$. La pente moyenne de la décroissance est liée au T_R

$$dt/(-10 \log_{10}(1 - \alpha)) = T_R/60 \quad (13.32)$$

La formule de Eyring s'écrit sous la forme

$$T_R = 60dt/(-10 \log_{10}(1 - \alpha)) = -0.16V/(S \log(1 - \alpha)) \quad (13.33)$$

Le dernier log est le log népérien. La valeur de dt est obtenue par la formule 13.14. La formule de Eyring donne en général des résultats plus faibles que la formule de Sabine. Elle permet de mieux prévoir le temps de réverbération lorsque l'absorption est répartie uniformément. Dans le cas d'une absorption concentrée sur une seule surface, le temps de réverbération de Eyring sous estime le vrai T_R .

La figure 13.8 montre un exemple de salle réverbérante, construite avec des parois très peu absorbantes, et qui conduit à une valeur élevée du temps de réverbération. La figure 13.9 montre au contraire une salle anéchoïque avec une très forte absorption des parois. Elle se rapproche d'une situation en champ libre sans parois.

La fréquence de coupure d'une salle est donnée par

$$f_c = 2000 \sqrt{\frac{T_R}{V}} \quad (13.34)$$

C'est la fréquence au delà de laquelle la densité de modes devient suffisamment importante pour ne plus pouvoir distinguer les modes individuellement. L'approximation de champs diffus devient acceptable au delà de cette fréquence.

13.4 Cavité de faible volume

On suppose dans ce cas que les dimensions de la cavité sont faibles par rapport à la longueur d'onde. La conséquence est que la pression est sensiblement uniforme dans le volume. Si une source d'amplitude $q(t)$ rayonne au point \mathbf{x}_0 , la conservation de la masse donne,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \rho_0 q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (13.35)$$

Considérant un mouvement harmonique et intégrant sur le volume V , nous obtenons :

$$\int_V \left(\frac{-i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = \rho_0 q(t) \quad (13.36)$$

soit pour une frontière d'impédance Z ,

$$\left(\frac{-i\omega}{c^2} pV + \rho_0 S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) = \rho_0 q \quad (13.37)$$

et

$$p \left(-i\omega + \frac{\rho_0 S c^2}{ZV} \right) = \rho_0 c^2 q/V \quad (13.38)$$

On en déduit la pression en fonction de l'impédance de paroi

$$p = \frac{\rho_0 q c^2 / V}{-i\omega + \rho_0 c^2 S / (VZ)} \quad (13.39)$$

Dans le cas d'une paroi relativement rigide, nous avons $Z \rightarrow \infty$ et

$$|p| \approx \frac{\rho_0 c^2 q}{\omega V} \quad (13.40)$$

Dans le cas contraire d'une paroi souple

$$|p| \approx \frac{|Z|q}{S} \quad (13.41)$$

L'impédance de paroi est ainsi un facteur essentiel pour contrôler le niveau sonore dans la cavité.

Exercice :

Calculer le temps de réverbération d'une pièce parallélépipédique de dimensions 3x3x2.5m recouverte au plafond d'un matériau de coefficient d'absorption valant 0.8. Calculer le niveau sonore dans la pièce lorsque le son est produit par une source ponctuelle $e^{ikr}/(4\pi r)$ émettant à 100Hz.



FIG. 13.8 – Salle réverbérante.



FIG. 13.9 – Salle anéchoïque.

Chapitre 14

Principe du contrôle actif du son

14.1 Introduction

Le contrôle actif a pour objectif la réduction d'un bruit indésirable en créant un contre-bruit à l'aide d'une source de bruit secondaire. Pour que le contrôle soit efficace, il faut que la source de contre-bruit produise un champ de pression en opposition de phase avec le champ de la source primaire, voir figure 14.1.

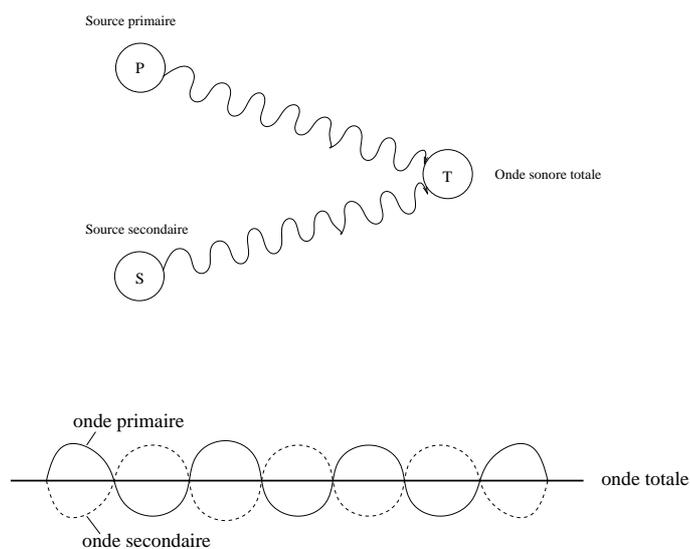


FIG. 14.1 – Principe du contrôle actif.

Lorsque les longueurs d'onde sont grandes, c'est à dire lorsque l'on est à basse fréquence, cela est réalisable mais à haute fréquence le champ de pression primaire devient de plus en plus complexe et il devient très difficile de produire un contre-bruit, voir figure 14.2.

Pour avoir une première idée du contrôle actif, considérons le cas d'une onde primaire harmonique de la forme $a \cos \omega t$. Nous essayons de réduire cette onde primaire avec une onde secondaire

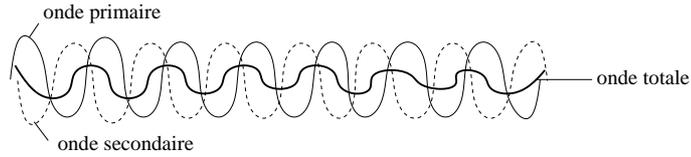


FIG. 14.2 – Cas haute fréquence.

Réduction sonore	Erreur de phase maximum
-1dB	51°
-5dB	32°
-10dB	18°
-20dB	5,7°
-30dB	1,8°

TAB. 14.1 – Efficacité du contrôle

de la forme $-(a + \delta a) \cos(\omega t + \delta \phi)$. L'onde totale est alors

$$\begin{aligned}
 a \cos \omega t - (a + \delta a) \cos(\omega t + \delta \phi) &= a \cos \omega t - (a + \delta a)[\cos \omega t \cos \delta \phi - \sin \omega t \sin \delta \phi] \\
 &\approx -\delta a \cos \omega t + a \delta \phi \sin \omega t \\
 &\approx \delta A \cos(\omega t + \delta \varphi)
 \end{aligned} \tag{14.1}$$

avec l'amplitude de l'onde totale après contrôle donnée par

$$\delta A = \sqrt{(\delta a)^2 + (a \delta \varphi)^2} \tag{14.2}$$

La réduction du niveau sonore est obtenue par

$$R = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{(\delta a)^2 + (a \delta \varphi)^2}}{a^2} \tag{14.3}$$

Une estimation de cette réduction en fonction de l'erreur de phase (en supposant $\delta a = 0$) est donnée dans le tableau 14.1. On peut constater qu'il faut une faible erreur de phase pour avoir une réduction significative du niveau sonore.

L'étude d'un problème de contrôle actif peut se décomposer en deux étapes. La première étape est d'estimer la réduction potentielle de niveau sonore en fonction des propriétés de la source primaire comme son étendue spatiale et son spectre et de celles des sources secondaires, comme leur nombre et leurs positions. Si la conclusion de la première étape est qu'une réduction significative est possible, la seconde étape est de bâtir physiquement un système de contrôle.

L'idée d'utiliser le contrôle actif pour réduire le bruit est ancienne et remonte à 1933 date à laquelle le physicien allemand P. Lueg a déposé un brevet d'un dispositif de contrôle destiné à réduire le bruit dans une gaine de ventilation. En 1953 Olson réalise la première expérience de contrôle actif. Elle consiste à réduire le son au voisinage d'une source secondaire pour une perturbation primaire harmonique. Le réglage de l'amplitude et de la phase de la source secondaire était effectué à la main selon le principe du calcul précédent. A la fin des années 1980 apparaissent des microprocesseurs assez rapides pour pouvoir effectuer les calculs nécessaires en temps réel. Cela conduit au schéma type actuel d'un système de contrôle, voir figure 14.3.

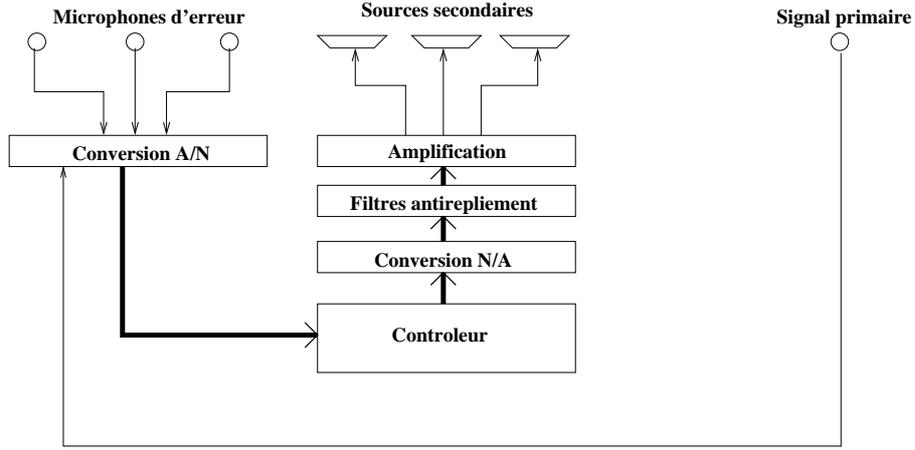


FIG. 14.3 – Schéma type d'un système de contrôle actif.

On se propose sur deux exemples simples de montrer comment il est possible de calculer l'efficacité potentielle d'un système de contrôle actif en fonction des différents paramètres du système dont les plus importants sont la fréquence, les positions des sources et des microphones.

14.2 Deux sources en champ libre

Le premier exemple est une source primaire ponctuelle qui rayonne en champ libre. On souhaite réduire l'énergie rayonnée par un contrôle utilisant une source secondaire ponctuelle. On suppose que les sources rayonnent à la pulsation ω . Les débits des sources primaire et secondaire sont notés q_p et q_s respectivement. Le débit de la source primaire est fixé tandis que le débit de la source secondaire peut être ajusté par le dispositif de contrôle. Les amplitudes complexes de la pression à proximité des points occupés par les sources primaire et secondaire sont données par

$$\begin{aligned} p_p &= Z_{pp}q_p + Z_{ps}q_s \\ p_s &= Z_{sp}q_p + Z_{ss}q_s \end{aligned} \quad (14.4)$$

Les Z sont les différentes impédances qui, en champ libre, sont données par $Z = -i \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{kr}$, ρ_0 étant la densité du fluide, c la vitesse du son, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.

Les puissances rayonnées par les sources primaire et secondaire sont données par

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_p} \text{Re}(q_p^* p_p(\mathbf{x})) \\ W_s &= \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s} \text{Re}(q_s^* p_s(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (14.5)$$

L'exposant * désigne le complexe conjugué, Re la partie réelle et \mathbf{x}_p et \mathbf{x}_s sont les positions des sources primaires et secondaires. La puissance totale rayonnée par le système à deux sources est donnée par

$$W_T = W_p + W_s = \frac{1}{2} [|q_s|^2 R_{ss} + q_s^* R_{sp} q_p + q_p^* R_{ps} q_s + |q_p|^2 R_{pp}] \quad (14.6)$$

avec $R_{ss} = \text{Re}(Z_{ss})$, $R_{pp} = \text{Re}(Z_{pp})$ et $R_{sp} = \text{Re}(Z_{sp})$. Les premier et dernier termes sont respectivement les puissances rayonnées par les sources secondaire et primaire si celles-ci étaient seules

dans l'espace. Le terme incluant R_{sp} traduit le couplage entre les deux sources. Il décrit l'influence de la source secondaire sur la puissance rayonnée par la source primaire. En champ libre nous avons

$$\begin{aligned} R_{ss} &= R_{pp} = \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi c} \\ R_{sp} &= \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi c} \text{sinc } kr \end{aligned} \quad (14.7)$$

avec $\text{sinc } kr = \frac{\sin kr}{kr}$.

source dipolaire

Si la source secondaire est choisie en opposition de phase avec la source primaire, l'énergie totale rayonnée est

$$W_T = 2W_{pp}[1 - \text{sinc } kr] \quad (14.8)$$

$W_{pp} = |q_p|^2 R_{pp}/2$ étant la puissance rayonnée lorsque la source primaire est seule dans l'espace. Si $kr < 1.89$, ce qui s'écrit aussi $r < 0.3\lambda$, la puissance rayonnée par l'ensemble des deux sources est inférieure à la puissance qui serait rayonnée par la source primaire seule. Pour $r > \lambda$ la puissance totale rayonnée est approximativement égale au double de la puissance de la source primaire seule. Dans ce cas le contrôle actif est inefficace.

Source secondaire optimale

La puissance totale rayonnée est une fonction quadratique de l'amplitude q_s de la source secondaire qui a un minimum pour une valeur unique de cette amplitude. En dérivant par rapport à cette amplitude, on obtient

$$q_{s0} = -R_{ss}^{-1} R_{sp} q_p = -q_p \text{sinc } kr \quad (14.9)$$

On peut alors calculer la puissance totale rayonnée qui est donnée par

$$W_T = W_{pp}[1 - \text{sinc}^2 kr] \quad (14.10)$$

Cette puissance est toujours inférieure à la puissance que rayonnerait la source secondaire seule mais ne conduit à une réduction significative de la puissance rayonnée que quand $r < 0.3\lambda$, voir la figure 14.4.

Le domaine d'application du contrôle actif est donc les **basses fréquences**, typiquement jusqu'à environ 1000 Hz dans les applications courantes. Pour contrôler les hautes fréquences, il faut utiliser des moyens passifs tels que les isolants, cloisons, laines de roche qui eux ne sont pas efficaces dans les basses fréquences. **La combinaison des moyens passif et actif est efficace sur tout le spectre.**

Considérons une source ponctuelle de débit acoustique q_p et de fréquence angulaire ω placée en champ libre et envisageons le contrôle de l'émission acoustique par l'interférence générée par une deuxième source ponctuelle de débit acoustique q_s et de fréquence égale, placée à distance d de la source primaire. La source ponctuelle monopolaire est, de façon idéale, une sphère de diamètre infinitésimal qui génère des ondes de pression sphériques de fréquence donnée ; son débit correspond au volume balayé dans l'unité de temps par la surface de la sphère. Il s'agit d'un modèle utilisé pour les haut parleurs en champ libre.

On se place dans les conditions de l'hypothèse de champ lointain, de sorte que le champ de pression acoustique généré par les deux sources s'écrit

$$p(r, \theta) = \frac{-i\omega\rho_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left(q_p e^{ik\frac{d}{2}\cos\theta} + q_s e^{-ik\frac{d}{2}\cos\theta} \right) \quad (14.11)$$

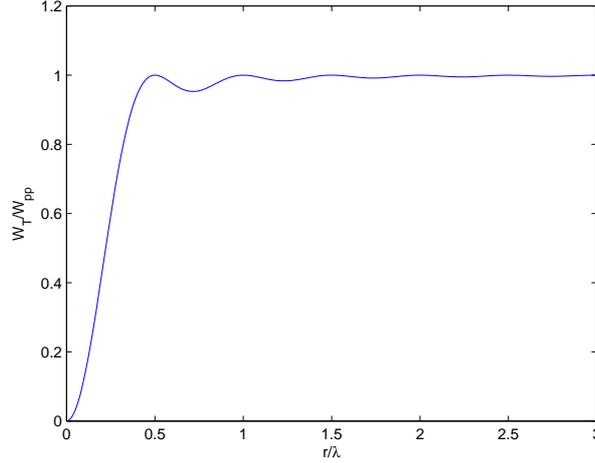


FIG. 14.4 – Efficacité d'un contrôle en champ libre.

Une stratégie simple de contrôle consiste à annuler la pression dans une direction θ_0 : $p(r, \theta_0) = 0$; ce résultat est obtenu en donnant à la source secondaire le débit

$$q_s = -q_p e^{ikd \cos \theta_0} \quad (14.12)$$

ailleurs dans le champ lointain on obtient alors

$$p(r, \theta) = \frac{-i\omega\rho_0 q_p e^{ik(r + \frac{d}{2} \cos \theta)}}{4\pi r} \left(1 - e^{-ikd(\cos \theta - \cos \theta_0)}\right) \quad (14.13)$$

qui correspond à la solution due à la seule source primaire, $p_p(r, \theta)$, multipliée par un facteur d'atténuation complexe fonction de θ_0

$$p(r, \theta) = p_p(r, \theta) \left(1 - e^{-ikd(\cos \theta - \cos \theta_0)}\right) \quad (14.14)$$

Si on calcule le rapport des carrés des modules de la pression acoustique avec et sans source secondaire (on rappelle que $|1 - e^{jx}| = \sqrt{(1 - e^{jx})(1 - e^{-jx})} = \sqrt{2(1 - \cos x)}$), on obtient

$$\frac{|p(r, \theta)|^2}{|p_p(r, \theta)|^2} = 2(1 - \cos(kd(\cos \theta_0 - \cos \theta))) \quad (14.15)$$

La figure 14.5 donne le tracé polaire du facteur d'amplification défini à l'équation (14.15) pour $\theta_0 = 0$ et pour une distance entre les sources de (respectivement de gauche à droite et de haut en bas) 2λ , λ , $\lambda/2$, $\lambda/4$. La figure 14.6 donne le tracé polaire du facteur d'amplification défini à l'équation (14.15) pour $\theta_0 = \pi/3$ et pour une distance entre les sources de (respectivement de gauche à droite) $\lambda/2$, $\lambda/4$.

On voit que l'on obtient l'atténuation du champ lointain pour tout θ tel que

$$\cos(kd(\cos \theta_0 - \cos \theta)) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq kd(\cos \theta_0 - \cos \theta) \leq \frac{\pi}{3} \quad (14.16)$$

Les inégalités (14.16) peuvent être vérifiées pour θ et θ_0 donnés par un choix adéquat de d , la distance entre les sources

$$d \leq \frac{\pi}{3k|\cos\theta_0 - \cos\theta|} \quad (14.17)$$

qui, étant donné que $\max|\cos\theta_0 - \cos\theta| = 2$, conduit à la solution

$$d = \frac{\pi}{6k} = \frac{\lambda}{12} \quad (14.18)$$

pour la distance maximale à laquelle il faut positionner les deux sources afin d'atténuer en tout point l'émission acoustique dont la longueur d'onde est supérieure ou égale à λ .

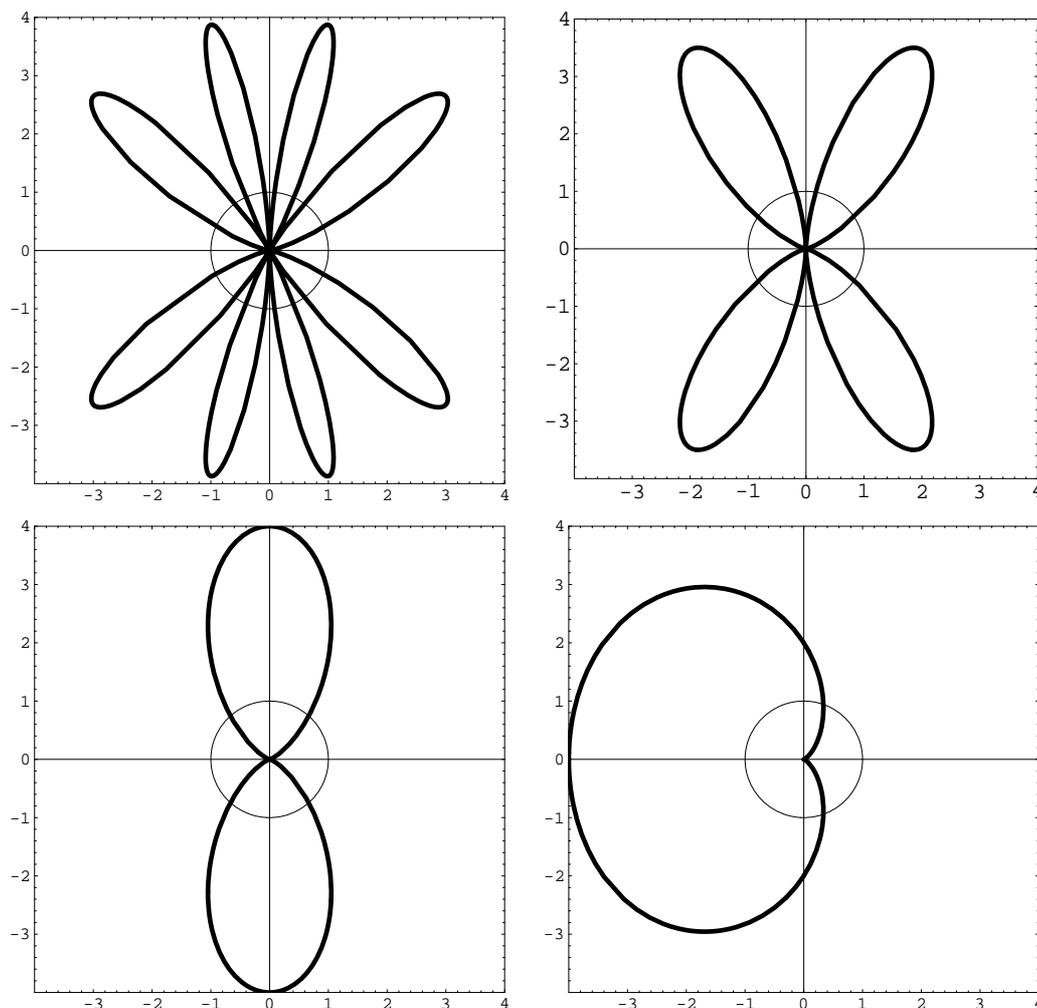


FIG. 14.5 – Tracé polaire du facteur d'amplification pour $\theta_0 = 0$.

14.3 Contrôle dans une gaine

On cherche un modèle simple reproduisant un contrôle actif dans une gaine de ventilation. On suppose que les sources de bruit primaire et secondaire sont représentables par des sources

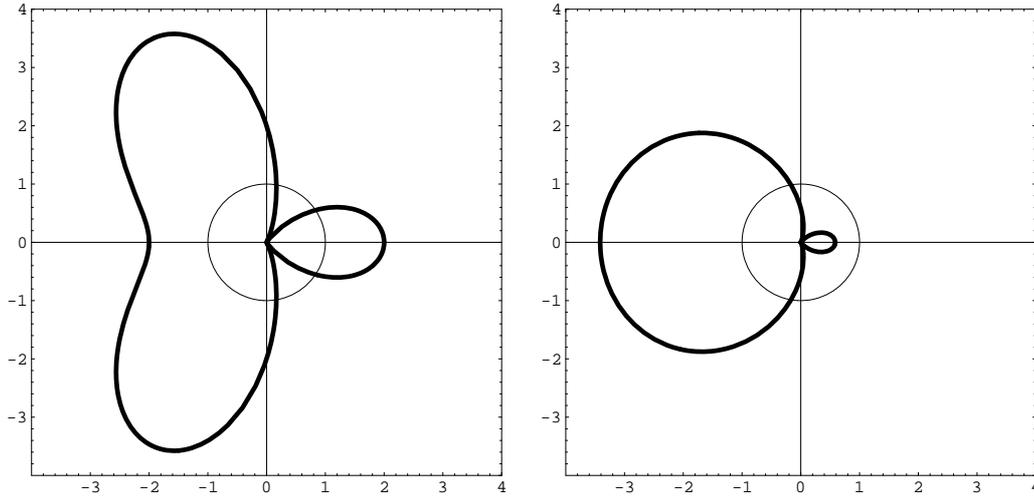


FIG. 14.6 – Tracé polaire du facteur d'amplification pour $\theta_0 = \pi/3$.

monopôlaires de débit q_p et q_s . Une telle source placée en un point y engendre un débit $q_y \delta(x - y)$. A basse fréquence seule une onde plane se propage dans la gaine de section S et l'équation de propagation de Helmholtz est

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = ik\rho_0 c \frac{q_y}{S} \delta(x - y) \quad (14.19)$$

Si l'on cherche une solution de cette équation, en dehors des sources, la pression est donnée par

$$p(x) = Ae^{ik(x-y)} + Be^{-ik(x-y)} \quad (14.20)$$

Les conditions de radiation qui traduisent le fait que l'énergie se propage de la source vers l'infini et non l'inverse se traduisent par

$$\begin{aligned} p(x) &= Ae^{ik(x-y)} \quad \text{pour } x > y \\ p(x) &= Be^{-ik(x-y)} \quad \text{pour } x < y \end{aligned} \quad (14.21)$$

Au passage d'une source ponctuelle de débit $q\delta(x - y)$, il y a continuité de la pression et une discontinuité de la dérivée de la pression donnée par

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = ik\rho_0 c \frac{q_y}{S} \quad (14.22)$$

On peut montrer à l'aide de ces relations que le champ de pression est donné par

$$p(x) = \rho_0 c \frac{q_y}{2S} e^{ik|x-y|} \quad (14.23)$$

On suppose maintenant, comme sur la figure 14.7, que le champ de pression primaire est produit par une source ponctuelle de débit q_p placée au point x_p . Une source secondaire de contre bruit est placée au point x_s . Son débit est noté q_s et il est proportionnel au signal électrique qui alimente le haut-parleur. On note $l = x_s - x_p$.

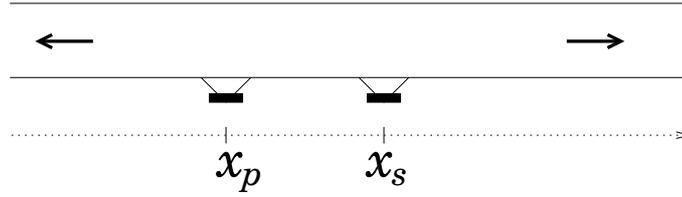


FIG. 14.7 – Positions de la source primaire et de la source secondaire.

Avant de présenter le principe du contrôle actif, déterminons la puissance rayonnée W_{pp} par la source primaire seule. Nous notons $p_p(x)$ la distribution de pression due à la source primaire seule. Elle a pour expression :

$$p_p(x) = \frac{\rho_0 c}{2S} q_p e^{ik|x-x_p|} \quad (14.24)$$

La puissance rayonnée a pour expression :

$$W_{pp} = \frac{1}{2} \text{Re} [q_p \bar{p}(x_p)] = \frac{\rho_0 c}{4S} |q_p|^2 \quad (14.25)$$

Nous notons maintenant $p_s(x)$ la distribution de pression due à la source secondaire seule. Elle a pour expression :

$$p_s(x) = \frac{\rho_0 c}{2S} q_s e^{ik|x-x_s|} \quad (14.26)$$

La pression totale s'écrit :

$$p(x) = \frac{\rho_0 c}{2S} [q_p e^{ik|x-x_p|} + q_s e^{ik|x-x_s|}] \quad (14.27)$$

Une stratégie de contrôle actif consiste à annuler la pression à l'aval de la source secondaire pour $x > x_s$. Le débit de la source secondaire est alors noté q_s^o . Il vérifie l'équation suivante :

$$p(x) = \frac{\rho_0 c}{2S} [q_p e^{ik(x-x_p)} + q_s^o e^{ik(x-x_s)}] = 0 \quad \forall x > x_s \quad (14.28)$$

C'est-à-dire :

$$q_p e^{-ikx_p} + q_s^o e^{-ikx_s} = 0 \quad (14.29)$$

$$q_s^o(\omega) = -q_p(\omega) e^{ikl} \quad (14.30)$$

La transformée de Fourier inverse donne :

$$\begin{aligned} q_s^o(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_s^o(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_p(\omega) e^{-i\omega(t-\frac{l}{c})} d\omega \\ &= -q_p\left(t - \frac{l}{c}\right) \end{aligned}$$

Le contrôle consiste donc à émettre une onde de signe opposé avec un retard égal à $\frac{l}{c}$.

Interprétation en temps :

La figure 14.8 décrit le principe du contrôle. La source primaire seule émet deux ondes d'amplitude $\frac{1}{2}$, une vers l'aval et une autre vers l'amont. La source secondaire doit suivre en opposition de

phase la source primaire avec un temps de retard l/c , qui est le temps mis par le signal acoustique pour parcourir la distance entre les deux sources. L'énergie rayonnée est alors égale à la somme des carrés des amplitudes des ondes sortantes, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Un résultat identique est obtenu avec contrôle sauf que les deux ondes sont émises vers l'amont.

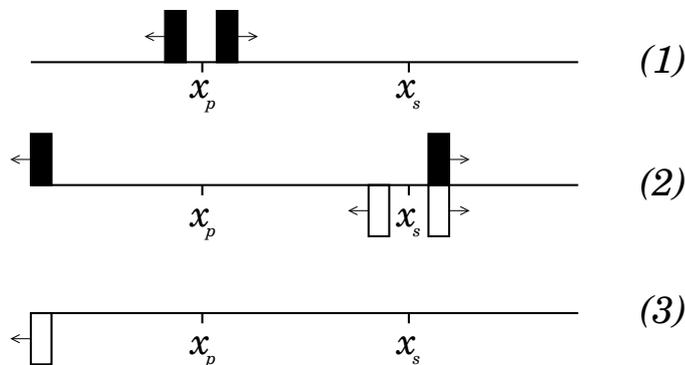


FIG. 14.8 – Stratégie de contrôle.

La puissance rayonnée W_s par la source secondaire est

$$W_s = \frac{1}{2} \text{Re}[q_s^o \bar{p}(x_s)] = 0 \quad (14.31)$$

La source secondaire n'absorbe ni ne rayonne de l'énergie. La puissance rayonnée W_p par la source primaire est

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2} \text{Re}[q_p \bar{p}(x_p)] \\ &= \frac{\rho_0 c}{4S} |q_p|^2 \text{Re}[1 - e^{2ikl}] \\ &= \frac{\rho_0 c}{4S} |q_p|^2 2 \sin^2(kl) \end{aligned}$$

En notant W_T la puissance totale rayonnée, on en déduit :

$$\frac{W_T}{W_{pp}} = \frac{W_p + W_s}{W_{pp}} = 2 \sin^2(kl) \quad (14.32)$$

Si on moyenne le rapport $\frac{W_T}{W_{pp}}$ pour un nombre d'onde k variant de 0 à $\frac{2\pi}{l}$, on obtient un rapport égal à 1. Le résultat est alors identique à un système sans contrôle.

Pour $x \leq x_p$, donc en amont de la source primaire, ce type de contrôle donne lieu au champ de pression dont l'amplitude complexe est

$$p(x) = \frac{\rho_0 c q_p e^{ik(x_p-x)}}{2S} (1 - e^{2ikl}) = p_p(x) (1 - e^{2ikl}) \quad (14.33)$$

le signal se propage donc vers l'amont, atténué ou amplifié selon le rapport de la distance entre les sources l et la longueur d'onde $2\pi/k$. En particulier pour $kl = n\pi$ (donc $l = n\lambda/2$: la distance entre les sources est un multiple entier de la demi longueur d'onde) l'amplitude de ce signal est nulle.

Dans la zone comprise entre les deux sources, $x_p \leq x \leq x_s$, l'amplitude complexe du champ de pression contrôlé est

$$p(x) = \frac{\rho_0 c q_p e^{ikl}}{2S} \left(e^{-ik(x_s-x)} - e^{ik(x_s-x)} \right) = \frac{-i\rho_0 c q_p e^{ikl}}{S} \sin k(x_s - x) \quad (14.34)$$

ce qui correspond à une onde stationnaire, nulle en correspondance de la source secondaire et en général non nulle à la source primaire, sauf si la condition $kl = n\pi$ précédemment introduite est vérifiée, auquel cas la partie réelle de la pression est nulle partout.

Le module de la pression acoustique vaut

$$\frac{2S}{\rho_0 c q_p} |p(x)| = \begin{cases} 2|\sin kl| & x \leq x_p \\ 2|\sin k(x-l)| & x_p \leq x \leq x_s \\ 0 & x \geq x_s \end{cases} \quad (14.35)$$

si $kl = (1 + 2n)\pi/2$ ce module est, en amont de la source primaire, le double de celui qui existerait si la source secondaire était absente.

D'autres stratégies de contrôle permettent l'amélioration de ce résultat au détriment de la réduction à zéro de l'onde en aval de la source secondaires. L'introduction de plus de sources secondaires, et notamment d'une source secondaire dipolaire (deux sources opposées concentrées en un point), permet aussi l'adoption de stratégies plus efficaces.

On ne présente pas le sujet davantage, mais on donne dans la Fig. 14.9 le résultat qui peut être obtenu en imposant le débit de contrôle qui est demandée à la source secondaire par la stratégie présentée précédemment pour $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$, avec la distance entre les sources l égale, respectivement de gauche à droite, à 0.3λ et 3.2λ .

La figure 14.10 correspond au cas $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$, avec une distance entre les sources l égale, respectivement de gauche à droite et du haut en bas, à 0.3λ , λ , 2λ et 3.2λ . La figure 14.11 donne le tracé du module (14.35), pour $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$ avec une distance entre les sources l égale, respectivement de gauche à droite et de haut en bas, à 0.3λ , λ , 2λ et 3.2λ . La figure 14.12 représente la comparaison des solutions obtenues pour la stratégie présentée dans la formule (14.30), (courbe en trait normal), et par une stratégie alternative, qui consiste dans la recherche du minimum de l'énergie acoustique (courbe en trait épais), pour $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$, avec une distance entre les sources l égale, respectivement de gauche à droite, à 0.3λ et 3.2λ .

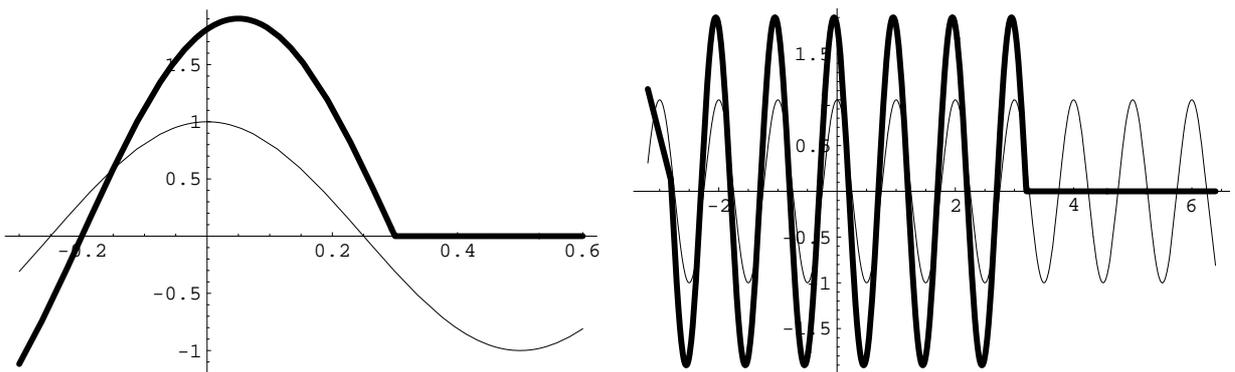


FIG. 14.9 – Partie réelle de la pression pour une source secondaire d'amplitude moitié.

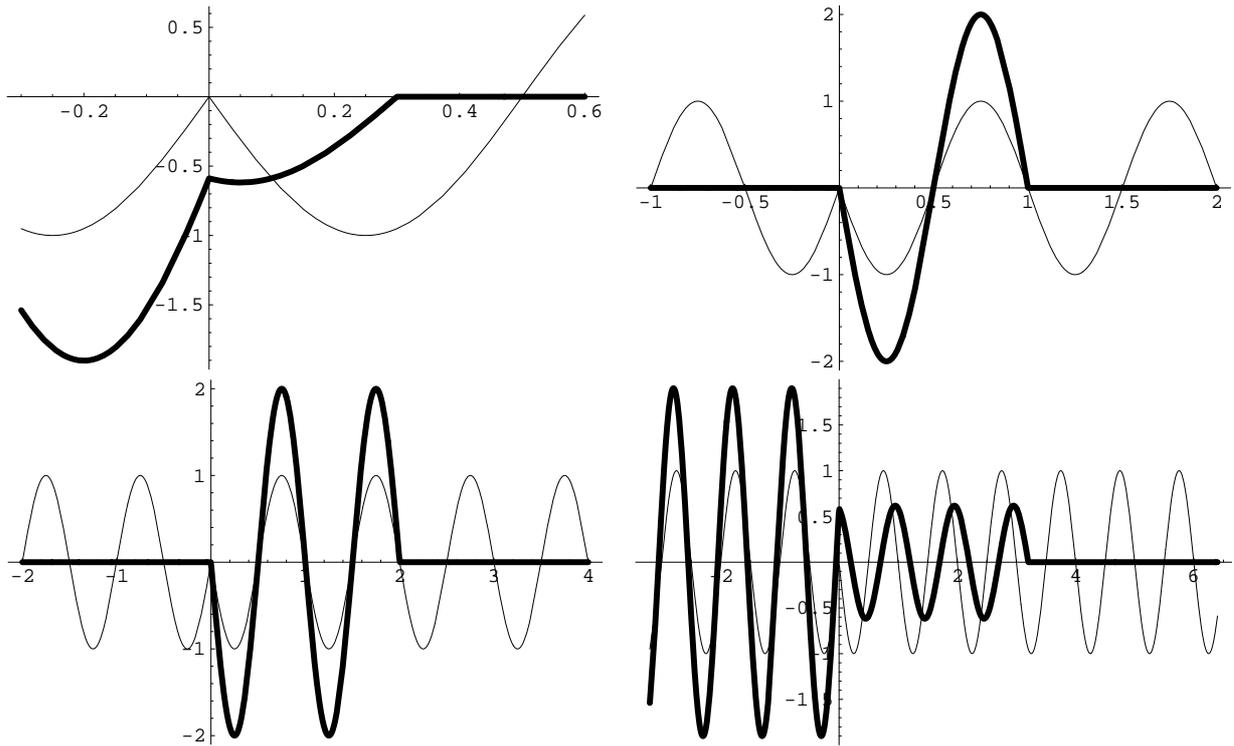


FIG. 14.10 – Partie imaginaire du champ de pression pour différentes distances entre les sources primaires et secondaires.

14.3.1 Quelques applications

- casque antibruit sur la figure 14.13.
- gaine de ventilation. La figure 14.14 montre une partie du montage et la figure 14.15 donne un exemple de résultat.
- contrôle dans un avion, voir la figure 14.16.
- contrôle dans une automobile, voir la figure 14.17.
- bruit d'échappement
- contrôle du rayonnement d'une structure
- suspension active

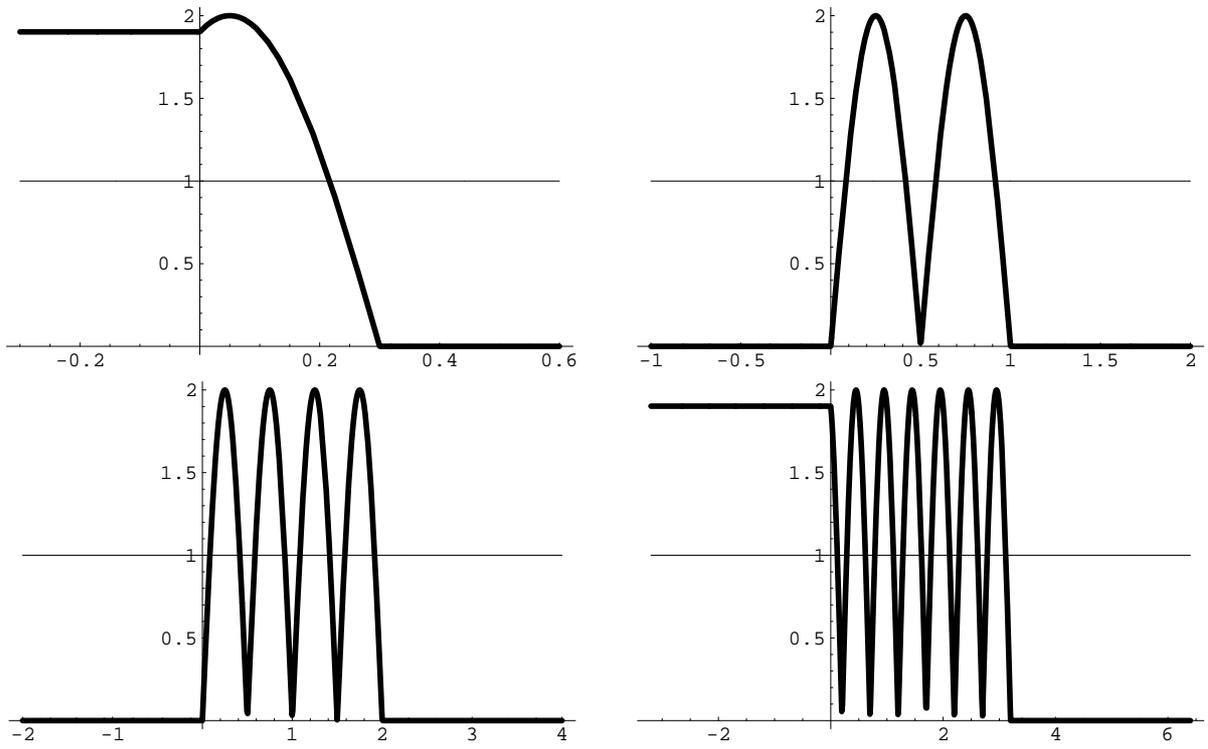


FIG. 14.11 – Tracé du module (14.35) pour $\rho_0 c q_p / (2S) = 1$

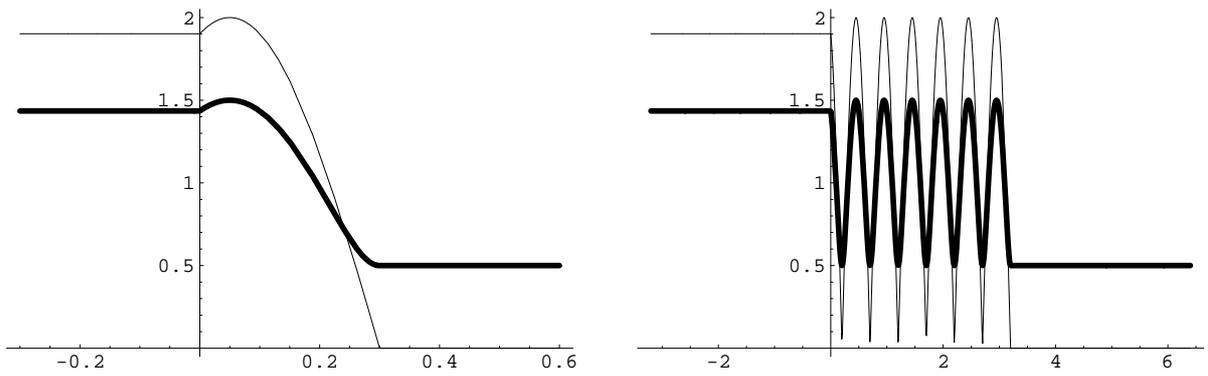


FIG. 14.12 – Comparaison des solutions obtenues pour la stratégie présentée (formule (14.30), courbe en trait normal) et par une stratégie alternative (trait gras).



FIG. 14.13 – Casque antibruit.

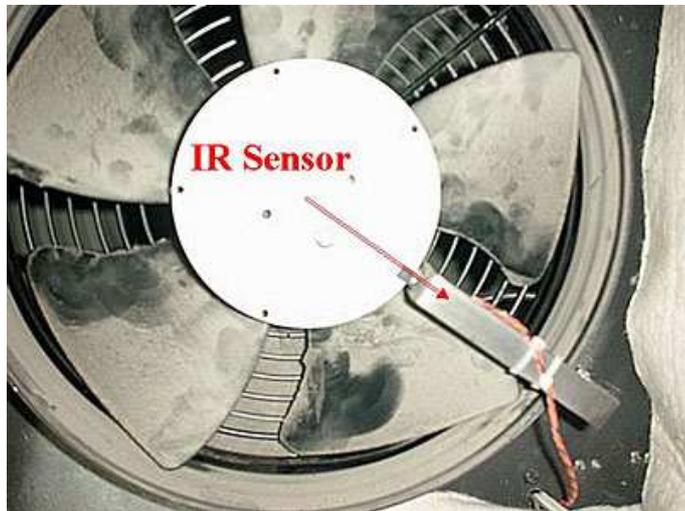


FIG. 14.14 – Contrôle dans une gaine de ventilation.

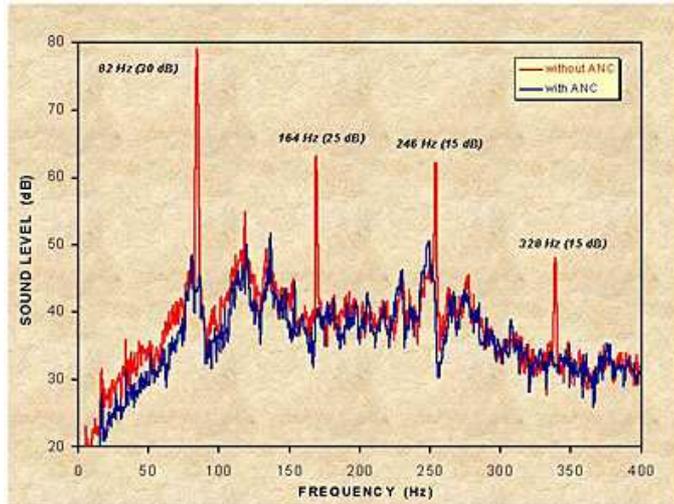


FIG. 14.15 – Efficacité du contrôle dans une gaine.



FIG. 14.16 – Contrôle dans un avion.

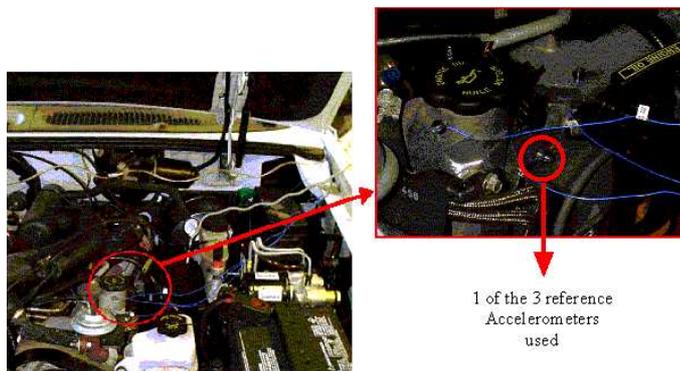


FIG. 14.17 – Contrôle dans une automobile.

Chapitre 15

Algorithmes de contrôle

15.1 Principe du contrôle

Il s'agit maintenant de réaliser effectivement le contrôle. Pour cela on utilise des capteurs et des actionneurs pour simultanément recueillir de l'information et agir sur le système. Les algorithmes utilisent les informations recueillies à des capteurs pour piloter des actionneurs comme sur le schéma de la figure 15.1.

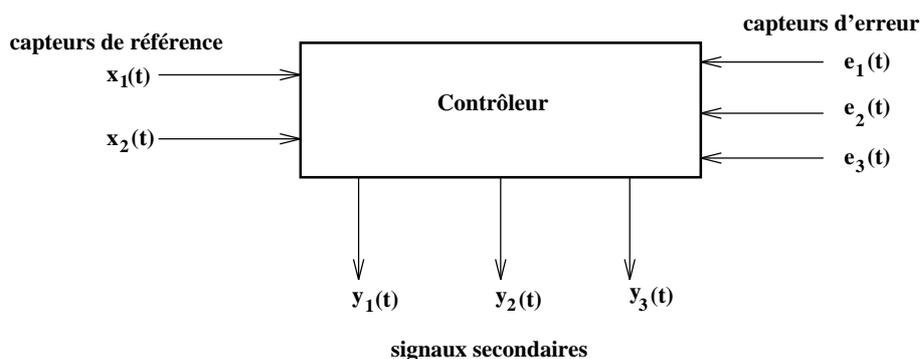


FIG. 15.1 – Schéma type d'un système de contrôle actif.

Les actionneurs servent à engendrer une perturbation secondaire qui a pour but de réduire la perturbation initiale que l'on souhaite contrôler. Ces actionneurs peuvent être par exemple des haut-parleurs en acoustique, des piézoélectriques ou des électro-aimants en vibration de structures.

Les capteurs servent à mesurer des informations sur le système qui serviront aux algorithmes de contrôle. Ce sont par exemple des microphones, des piézoélectriques ou des jauges de déformation. Les capteurs sont divisés en deux groupes de natures différentes. Un premier groupe constitué de capteurs placés là où l'on désire réduire le niveau de la perturbation (capteurs d'erreur) et dont, plus généralement, les informations vont servir à définir la fonction de coût qui est par exemple la somme des carrés des informations mesurées.

$$J(t) = \sum_{i=1}^{i=N} e_i^2(t) \quad (15.1)$$

Le deuxième groupe (capteurs de référence) sert à donner des informations sur la perturbation à

contrôler mais n'intervient pas dans la fonction de coût. Dans le cas d'un contrôle du son dans une gaine de ventilation, nous avons les deux types de capteurs et l'actionneur sur le schéma 15.2.

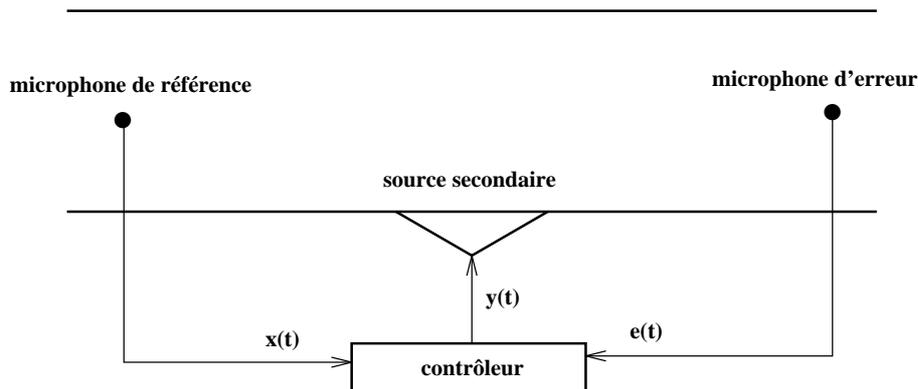


FIG. 15.2 – Contrôle dans une gaine de ventilation.

La plupart des algorithmes ont pour but d'identifier une fonction de transfert "optimale" qui relie les signaux mesurés aux capteurs aux signaux envoyés aux actionneurs. On distinguera les algorithmes fonctionnant par anticipation (ou encore de type feedforward) qui utilisent à la fois les informations des capteurs de référence et d'erreur, des algorithmes de type feedback qui n'utilisent que les informations des capteurs d'erreur. Dans ce chapitre nous étudierons uniquement les algorithmes de type feedforward.

Nous allons commencer par rappeler quelques propriétés des fonctions de transfert de systèmes physiques.

15.2 Contrôle par anticipation

15.2.1 Algorithme LMS

But de l'algorithme

On considère l'exemple d'un contrôle dans une gaine de ventilation comme sur la figure 15.3. On définit les signaux suivants

- $d(t)$ est le signal désiré au microphone d'erreur. C'est le signal au microphone dû au champ primaire seul.
- $x(t)$ est le signal de référence mesuré au capteur de référence.
- $y(t)$ est le signal secondaire envoyé à l'actionneur.
- $e(t)$ est le signal mesuré au capteur d'erreur.
- $w(t)$ est le filtre adaptatif.

Ces signaux sont indiqués sur la figure 15.3 dans le cas d'une gaine de ventilation et de façon plus schématique mais plus générale sur la figure 15.4. Le principe de l'algorithme est de trouver la fonction de transfert w qui minimise le signal d'erreur $e^2(t)$. Les signaux sont reliés par les relations suivantes

$$y(t) = (w * x)(t) \quad (15.2)$$

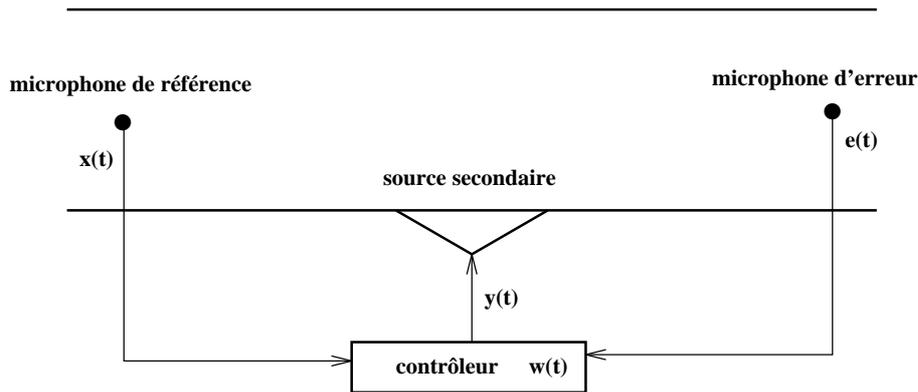


FIG. 15.3 – Signaux dans une gaine.

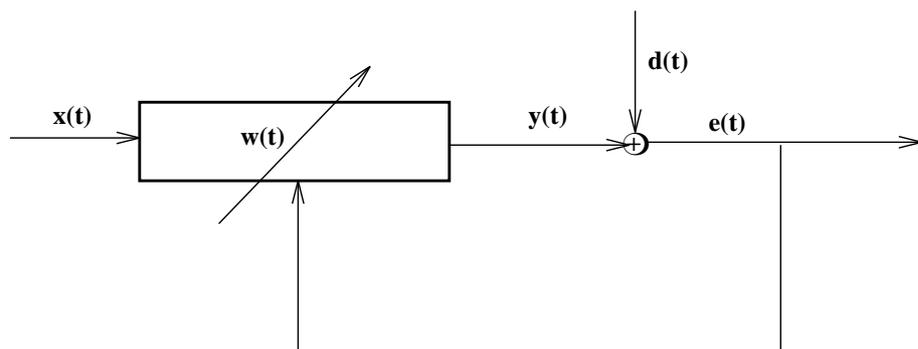


FIG. 15.4 – Signaux utiles pour l'algorithme LMS.

La fonction de transfert $w(t)$ sert donc à calculer le signal à envoyer à l'actionneur à partir du signal mesuré au capteur de référence. Le signal d'erreur peut se décomposer en

$$e(t) = d(t) + y(t) = d(t) + (w * x)(t) \quad (15.3)$$

L'algorithme doit donc trouver la fonction $w(t)$ optimale telle que $e(t) = 0$ ou du moins celle qui minimise $e^2(t)$.

Principe de fonctionnement

L'algorithme travaille à partir des signaux discrétisés. Le but est de minimiser la fonction de coût

$$J = E[e^2(n)] \quad (15.4)$$

avec $e(n) = e(nT)$ le signal discrétisé au temps nT , où T est la période d'échantillonnage. Le signe E signifie que l'on prend l'espérance du signal. On cherche donc à réduire le signal d'erreur "en

moyenne". La fonction de coût J peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
J &= E[e^2(n)] \\
&= E[(d(n) + \sum_{i=0}^{i=N-1} w^n(i)x(n-i))^2] \\
&= E[d^2(n)] + 2E[d(n) \sum_{i=0}^{i=N-1} w^n(i)x(n-i)] + \\
&\quad E[\sum_{i=0}^{i=N-1} \sum_{j=0}^{j=N-1} w^n(i)w^n(j)x(n-i)x(n-j)]
\end{aligned} \tag{15.5}$$

On note $w^n(i)$ la valeur des coefficients de la fonction de transfert au temps n . On suppose que la fonction de transfert w est de longueur N . L'algorithme consiste à calculer les coefficients w par la méthode du gradient. Le gradient de la fonction de coût J par rapport aux coefficients $w^n(i)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial w^n(i)} &= 2E[d(n)x(n-i)] + 2E[\sum_{j=0}^{j=N-1} w^n(j)x(n-i)x(n-j)] \\
&= 2E[e(n)x(n-i)]
\end{aligned} \tag{15.6}$$

Le gradient peut donc se calculer à partir du signal mesuré au capteur de référence $x(n-i)$ et du signal d'erreur $e(n)$. Dans les applications réelles on approxime la valeur de l'espérance par la valeur instantanée et on utilise

$$\frac{\partial J}{\partial w^n(i)} = 2e(n)x(n-i) \tag{15.7}$$

La méthode du gradient permet d'adapter les coefficients des filtres par

$$w^{n+1}(i) = w^n(i) - 2\mu e(n)x(n-i) \tag{15.8}$$

Le paramètre μ est le paramètre de convergence qui doit être choisi assez grand pour assurer une bonne vitesse de convergence mais ne doit pas dépasser une valeur limite au delà de laquelle l'algorithme diverge.

Solution optimale

La fonction de transfert optimale permet d'annuler le signal d'erreur $e(t)$ et doit être telle que

$$\frac{\partial J}{\partial w^n(i)} = 0 \tag{15.9}$$

ce qui se traduit par

$$2E[d(n)x(n-i)] + 2 \sum_{j=0}^{j=N-1} E[x(n-i)x(n-j)]w^*(j) = 0 \tag{15.10}$$

Nous introduisons le vecteur de corrélation entre le signal désiré et le signal de référence,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} E[d(n)x(n)] \\ E[d(n)x(n-1)] \\ \vdots \\ E[d(n)x(n-N+1)] \end{pmatrix} \quad (15.11)$$

le vecteur des coefficients du filtre \mathbf{W}^*

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} w^*(0) \\ w^*(1) \\ \vdots \\ w^*(N-1) \end{pmatrix} \quad (15.12)$$

et la matrice d'autocorrélation du signal de référence.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} E[x(n)x(n)] & E[x(n)x(n-1)] & \cdots & E[x(n)x(n-N+1)] \\ E[x(n-1)x(n)] & E[x(n-1)x(n-1)] & \cdots & E[x(n-1)x(n-N+1)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[x(n-N+1)x(n)] & E[x(n-N+1)x(n-1)] & \cdots & E[x(n-N+1)x(n-N+1)] \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

Le filtre optimal est alors solution de

$$\mathbf{P} + \mathbf{R}\mathbf{W}^* = 0 \quad (15.14)$$

soit

$$\mathbf{W}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (15.15)$$

Remarques

- Si les signaux primaires sont stationnaires le vecteur \mathbf{P} et la matrice \mathbf{R} ne dépendent pas du temps n .
- On pourrait calculer le filtre optimal par la formule 15.15 mais cela nécessite l'inversion d'une matrice d'ordre N ce qui conduit à un volume de calcul de l'ordre de N^3 comparé à un coût d'ordre $2N$ pour une itération du LMS. Comme ces calculs doivent s'effectuer durant un temps inférieur à une période T d'acquisition du signal, cette approche demande un trop grand volume de calcul pour être mise en pratique.

Convergence du LMS

Notons

$$\mathbf{W}^n = \begin{pmatrix} w^n(0) \\ w^n(1) \\ \vdots \\ w^n(N-1) \end{pmatrix} \quad (15.16)$$

et

$$\mathbf{X}^n = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{pmatrix} \quad (15.17)$$

L'algorithme s'écrit

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n - 2\mu e(n)\mathbf{X}^n \quad (15.18)$$

En prenant les espérances, on obtient

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}^{n+1}] &= E[\mathbf{W}^n] - 2\mu E[\mathbf{X}^n(d(n) + {}^t\mathbf{X}^n\mathbf{W}^n)] \\ &= E[\mathbf{W}^n] - 2\mu\mathbf{P} - 2\mu\mathbf{R}E[\mathbf{W}^n] \end{aligned} \quad (15.19)$$

en supposant \mathbf{W}^n et \mathbf{X}^n indépendants. \mathbf{W}^n est fonction de \mathbf{X}^{n-1} , \mathbf{X}^{n-2} . En fait cela revient à dire que \mathbf{X}^n est indépendant de \mathbf{X}^{n-1} , \mathbf{X}^{n-2} . En toute rigueur cela n'est pas vrai mais si les coefficients de \mathbf{W}^n évoluent lentement cela constitue une bonne approximation. En faisant intervenir la solution optimale \mathbf{W}^* nous avons

$$E[\mathbf{W}^{n+1}] = E[\mathbf{W}^n] + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}^* - 2\mu\mathbf{R}E[\mathbf{W}^n] \quad (15.20)$$

Posant

$$\mathbf{V}^n = E[\mathbf{W}^n] - \mathbf{W}^* \quad (15.21)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{n+1} &= \mathbf{V}^n - 2\mu\mathbf{R}\mathbf{V}^n \\ &= [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}]\mathbf{V}^n \end{aligned} \quad (15.22)$$

Comme \mathbf{R} est une matrice positive, il y a convergence vers 0 de l'écart à la solution optimale si

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}} \quad (15.23)$$

où λ_{max} est la plus grande valeur propre de la matrice d'autocorrélation \mathbf{R} .

Vitesse de convergence

Dans la base des vecteurs propres de \mathbf{R} on a

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{n+1} &= [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}]\mathbf{V}^n \\ &= [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}]^n\mathbf{V}^0 \end{aligned} \quad (15.24)$$

avec

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) \quad (15.25)$$

où λ_i est la i ème valeur propre de \mathbf{R} . Nous avons

$$(1 - 2\mu\lambda_i)^n \approx e^{-2\mu\lambda_i n} \quad (15.26)$$

La vitesse de convergence est donnée par

$$e^{-2\mu\lambda_{min}n} = e^{-n\tau} \quad (15.27)$$

avec la constante de temps

$$\tau = 2\mu\lambda_{min} \leq 2\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \quad (15.28)$$

La vitesse de convergence dépend du rapport $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$ c'est à dire du conditionnement de la matrice d'autocorrélation \mathbf{R} . Si les caractéristiques du signal de référence sont telles que cette matrice est mal conditionnée, la vitesse de convergence de l'algorithme LMS sera faible et il faudra un grand nombre d'itérations pour trouver le vecteur \mathbf{W}^* et pour réduire le signal d'erreur.

15.2.2 Algorithme X-LMS

Dans la description précédente de l'algorithme on supposait que le signal envoyé à la source se retrouvait instantanément dans le signal au niveau du capteur d'erreur. En fait le signal secondaire doit transiter à travers une électronique composée principalement de convertisseurs numérique/analogique, de filtres passe-bas puis est transformé en un effort mécanique au niveau de l'actionneur. Enfin il doit se propager entre l'actionneur et le capteur d'erreur. Pour tenir compte de toute cette chaîne secondaire on introduit une fonction de transfert C entre le signal envoyé à l'actionneur et le signal mesuré au niveau du capteur d'erreur. Cela conduit au schéma de la figure 15.5. L'algorithme qui tient compte de cette fonction de transfert secondaire est l'algorithme X-LMS. De plus les systèmes de contrôle sont souvent composés de plusieurs capteurs de référence,

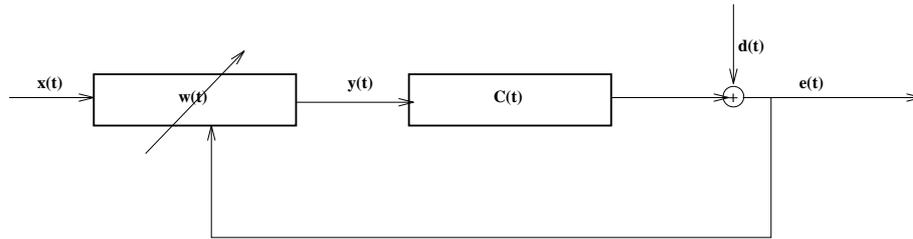


FIG. 15.5 – Signaux utiles pour l'algorithme X-LMS.

d'actionneurs et de capteurs d'erreur. Tenant compte des informations précédentes on est finalement conduit à un algorithme avec plusieurs capteurs et actionneurs.

Soit à l'instant n , $(x^c(n), x^c(n-1), \dots, x^c(n-I+1))$ les I derniers échantillons du signal mesuré au capteur c et $(w_n^{sc}(0), w_n^{sc}(1), \dots, w_n^{sc}(I-1))$ les coefficients des filtres adaptatifs entre le signal mesuré au capteur c et le signal envoyé à la source s . La longueur des filtres I est un paramètre important qui conditionne l'efficacité du système. Il doit être choisi assez grand tout en restant compatible avec la puissance de calcul disponible au niveau du processeur de traitement du signal. Celui-ci doit en effet effectuer tous ces calculs dans l'intervalle de temps séparant deux échantillons successifs soit $1/5000$ à $1/2000$ de seconde pour un contrôle du bruit. Le signal $y_s(n)$ envoyé à la source s à l'instant n est obtenu en filtrant le signal mesuré aux capteurs par les filtres correspondants soit

$$y^s(n) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{c=0}^{C-1} w_n^{sc}(i) x^c(n-i) \quad (15.29)$$

Le coefficient C désigne le nombre de capteurs utilisés. Ce signal secondaire crée un champ de pression aux points où se trouvent les capteurs d'erreur. Notons $(c^{ls}(0), c^{ls}(1), \dots, c^{ls}(K-1))$ les coefficients de la fonction de transfert discrétisée entre le signal envoyé à la source s et le signal mesuré au capteur d'erreur l . Ce filtre est mesuré avant la mise en action du contrôle actif dans une phase d'initialisation. Le nombre K de coefficients à prendre doit concilier une bonne estimation du filtre réel et rester néanmoins assez faible pour ne pas pénaliser le calcul. Le signal mesuré au capteur l dû à la source s au temps n est donc

$$\sum_{k=0}^{K-1} c^{ls}(k) y^s(n-k) \quad (15.30)$$

Sommant la contribution des différentes sources secondaires et tenant compte du champ de la source primaire, le signal total mesuré au capteur l est

$$e_l(n) = d_l(n) + \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{k=0}^{K-1} c^{ls}(k) y^s(n-k) \quad (15.31)$$

où d_l est le signal dû au champ primaire et S désigne le nombre de sources secondaires. Le signal d'erreur peut se récrire

$$e_l(n) = d_l(n) + \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{k=0}^{K-1} c^{ls}(k) \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{c=0}^{C-1} w_{n-k}^{sc}(i) x^c(n-k-i) \quad (15.32)$$

Posant

$$r^{lsc}(n-i) = \sum_{k=0}^{K-1} c^{ls}(k) x^c(n-k-i) \quad (15.33)$$

le signal du capteur c filtré et supposant les coefficients des filtres w invariants dans le temps (en pratique variants lentement), on peut récrire l'erreur sous la forme

$$e_l(n) = d_l(n) + \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{i=0}^{I-1} r^{lsc}(n-i) w_n^{sc}(i) \quad (15.34)$$

L'algorithme X-LMS consiste à minimiser la fonction de coût J par la méthode du gradient. Prenant le gradient de J par rapport aux coefficients des filtres w_i^{sc} , les coefficients w évoluent alors suivant la relation

$$w_{n+1}^{sc}(i) = w_n^{sc}(i) - 2\mu \sum_{l=0}^{L-1} e_l(n) r^{lsc}(n-i) \quad (15.35)$$

Le nombre total d'opérations est égal à $SC(I + KL + IL)$.

Dans le cas d'un seul capteur de référence, d'un seul capteur d'erreur et d'une seule source secondaire, l'algorithme X-LMS s'écrit de la façon suivante, en supposant tous les filtres de longueur N .

$$\begin{aligned} r(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} c(k) x(n-k) \\ w_{n+1}(i) &= w_n(i) - 2\mu e(n) r(n-i) \\ y(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} w_n(i) x(n-i) \end{aligned} \quad (15.36)$$

L'algorithme comporte $3N$ opérations.

15.2.3 Algorithme RLS

RLS signifie Recursive Least Square. Cet algorithme est introduit pour palier certaines insuffisances du LMS en particulier la faible vitesse de convergence dans certaines situations, par exemple lorsque la matrice d'autocorrélation du signal de référence est mal conditionnée. Il est de plus capable de traiter des signaux instationnaires alors que le comportement du LMS vis à vis de ces signaux n'est pas assuré.

Définition

Le problème consiste à modéliser par un filtre adaptatif le comportement d'un système physique linéaire d'entrée $x(t)$ et de sortie $d(t)$. Plus précisément, on désire modéliser l'opposée de la fonction de transfert du système dans le but de minimiser l'erreur $e(t)$ (voir schéma 15.6). Le problème à résoudre est le même que pour l'algorithme LMS, seule la façon d'y parvenir change.

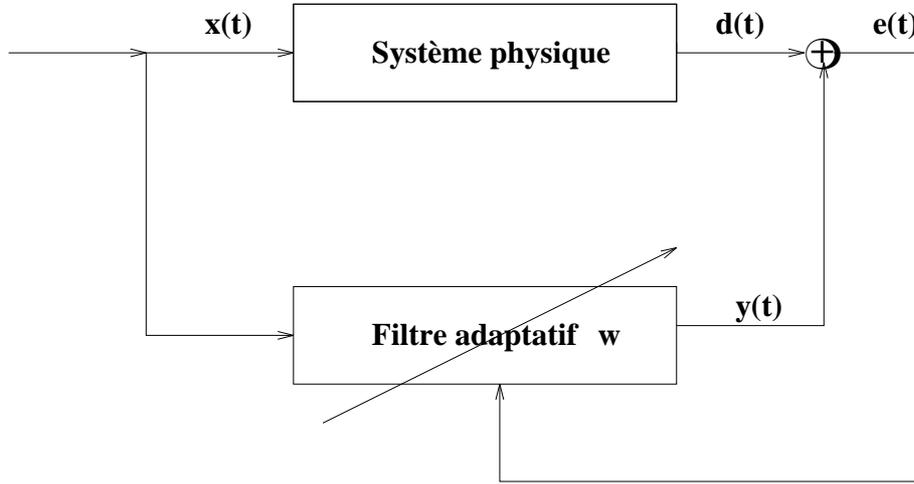


FIG. 15.6 – Système à modéliser

Le filtre adaptatif utilise le signal d'entrée discrétisé à l'instant n et aux instants précédents. On note $\mathbf{x}_m(n)$ le vecteur des échantillons sur un intervalle de temps de longueur m .

$$\mathbf{x}_m(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1)]^t \quad (15.37)$$

Le filtre produit en sortie un signal $y(n)$ relié à l'entrée par

$$y(n) = \sum_{j=0}^{m-1} w^n(j)x(n-j) = \mathbf{w}_m^t(n)\mathbf{x}_m(n) \quad (15.38)$$

où le filtre adaptatif $\mathbf{w}_m(n)$ est décrit par ses coefficients à l'instant n

$$\mathbf{w}_m(n) = [w^n(0), w^n(1), \dots, w^n(m-1)]^t \quad (15.39)$$

Le but du filtrage est de calculer en un temps minimum la valeur du filtre \mathbf{w} permettant de minimiser l'erreur $e(t)$. Nous supposons qu'à l'instant n on dispose des valeurs $\{x(j), d(j), j = M, M+1, \dots, n\}$. Nous utiliserons l'hypothèse de pré-fenêtrage sur les données qui consiste à prendre $x(j) = d(j) = 0$ pour $j < M$.

L'objectif est de minimiser la fonction de coût

$$E_m(n) = \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} e_m^2(j) \quad (15.40)$$

où l'erreur est donnée par

$$e_m(j) = d(j) + \mathbf{w}_m^t(n)\mathbf{x}_m(j) \quad (15.41)$$

Il faut noter que la valeur du filtre à l'instant n est utilisée pour calculer l'erreur pour tous les instants passés. λ est un paramètre ≤ 1 qui caractérise l'oubli des données passées par le système. Il permet de donner plus d'importance aux données récentes ce qui est utile pour les systèmes dont les propriétés varient en fonction du temps.

Système matriciel

En développant l'écriture de l'erreur nous avons

$$\begin{aligned}
E_m(n) &= \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} (d(j) + \mathbf{w}_m^t(n) \mathbf{x}_m(j))^2 \\
&= \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} d^2(j) + 2 \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} d(j) \mathbf{w}_m^t(n) \mathbf{x}_m(j) \\
&\quad + \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} \mathbf{w}_m^t(n) \mathbf{x}_m(j) \mathbf{x}_m^t(j) \mathbf{w}_m(n)
\end{aligned} \tag{15.42}$$

Le filtre $\mathbf{w}_m(n)$ qui minimise le critère $E_m(n)$ au temps n est solution du système matriciel

$$\mathbf{R}_m(n) \mathbf{w}_m(n) = -\mathbf{r}_m(n) \tag{15.43}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_m(n) &= \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} \mathbf{x}_m(j) \mathbf{x}_m^t(j) \\
\mathbf{r}_m(n) &= \sum_{j=M}^n \lambda^{n-j} \mathbf{x}_m(j) d(j)
\end{aligned} \tag{15.44}$$

Sous cette forme pour trouver les coefficients \mathbf{w} il faut résoudre un système matriciel d'ordre m ce qui conduit à un coût en temps calcul de l'ordre de m^3 . Comme pour l'algorithme LMS cette approche est trop coûteuse pour être utilisée en pratique.

Algorithme RLS

Nous décrivons la version standard de l'algorithme RLS. Les vecteurs et les matrices introduits précédemment vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_m(n+1) &= \lambda \mathbf{R}_m(n) + \mathbf{x}_m(n+1) \mathbf{x}_m^t(n+1) \\
\mathbf{r}_m(n+1) &= \lambda \mathbf{r}_m(n) + \mathbf{x}_m(n+1) d(n+1)
\end{aligned} \tag{15.45}$$

Partant de

$$\mathbf{R}_m(n+1) \mathbf{w}_m(n+1) = -\mathbf{r}_m(n+1) \tag{15.46}$$

nous obtenons

$$[\lambda \mathbf{R}_m(n) + \mathbf{x}_m(n+1) \mathbf{x}_m^t(n+1)] [\mathbf{w}_m(n) + \Delta \mathbf{w}] + \lambda \mathbf{r}_m(n) + d(n+1) \mathbf{x}_m(n+1) = 0 \tag{15.47}$$

soit

$$\mathbf{R}_m(n+1)\Delta\mathbf{w} + e(n+1)\mathbf{x}_m(n+1) = 0 \quad (15.48)$$

avec

$$e(n+1) = d(n+1) + \mathbf{w}_m^t(n)\mathbf{x}_m(n+1) \quad (15.49)$$

En utilisant le résultat suivant

$$\mathbf{R}_m^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_m^{-1}(n) - \frac{\mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{x}_m(n+1)\mathbf{x}_m^t(n+1)\mathbf{R}_m^{-1}(n)}{\lambda + \mathbf{x}_m^t(n+1)\mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{x}_m(n+1)} \right] \quad (15.50)$$

et en posant

$$\mathbf{c}_m(n+1) = \mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{x}_m(n+1) \quad (15.51)$$

on a

$$\mathbf{R}_m^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_m^{-1}(n) - \frac{\mathbf{c}_m(n+1)\mathbf{c}_m^t(n+1)}{\lambda + \mathbf{x}_m^t(n+1)\mathbf{c}_m(n+1)} \right] \quad (15.52)$$

et

$$\mathbf{R}_m^{-1}(n+1)\mathbf{x}_m(n+1) = \frac{\mathbf{c}_m(n+1)}{\lambda + \mathbf{x}_m^t(n+1)\mathbf{c}_m(n+1)} \quad (15.53)$$

L'algorithme final peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_m(n+1) &= \mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{x}_m(n+1) \\ \alpha(n+1) &= \lambda + \mathbf{x}_m^t(n+1)\mathbf{c}_m(n+1) \\ \mathbf{c}^*(n+1) &= \frac{1}{\alpha(n+1)}\mathbf{c}_m(n+1) \\ \mathbf{R}_m^{-1}(n+1) &= \frac{1}{\lambda} [\mathbf{R}_m^{-1}(n) - \mathbf{c}_m^*(n+1)\mathbf{c}_m^t(n+1)] \\ e(n+1) &= d(n+1) + \mathbf{w}_m^t(n)\mathbf{x}_m(n+1) \\ \mathbf{w}_m(n+1) &= \mathbf{w}_m(n) - \mathbf{c}_m^*(n+1)e(n+1) \end{aligned} \quad (15.54)$$

Le nombre d'opérations est de l'ordre de $2m^2$ comparé à m^3 pour l'inversion directe de la matrice \mathbf{R} . Pour initialiser l'algorithme on pose $\mathbf{R}_m^{-1}(0) = \delta\mathbf{I}$ avec $\delta > 0$.

Il existe en fait des algorithmes qui permettent d'effectuer les calculs précédents pour un coût en temps calcul de l'ordre de 5m à 8m. Ces algorithmes sont nettement plus complexes que ceux présentés ci-dessus et présentent des caractères d'instabilité qui rendent leur manipulation délicate. On ne les étudiera pas ici.

15.3 Contrôle par feedback

15.3.1 Description en variables d'état

Principe du contrôle par feedback

Les dispositifs de contrôle par feedback ne comportent pas de capteur de référence mais seulement des capteurs d'erreur. Un exemple est montré sur la figure 15.7 dans le cas d'un seul capteur d'erreur. Le contrôle consiste à piloter la source secondaire en fonction de la seule information mesurée au capteur d'erreur.

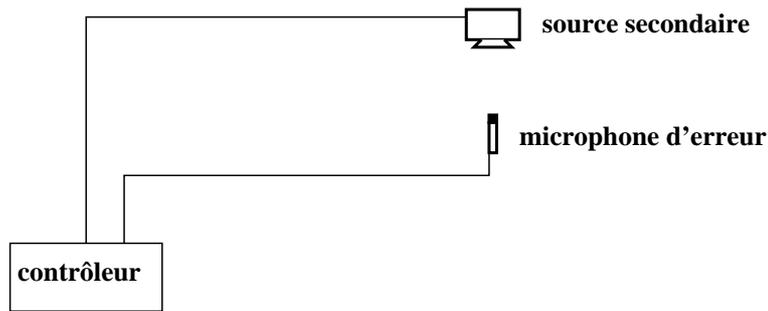


FIG. 15.7 – Dispositif pour les algorithmes par feedback.

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir un signal bien corrélé avec la source de perturbation et suffisamment en amont du contrôleur pour être utile, un contrôle par feedback est la seule alternative possible. On prendra soin de limiter le gain de contrôleur pour que le système reste stable.

Les systèmes actifs contrôlés par feedback peuvent aussi être utilisés en parallèle ou en série avec des isolateurs passifs. Ce type de système est appelé semi-actif. Un premier type de système semi-actif est obtenu en contrôlant l'amortissement, par exemple en faisant varier le débit dans un amortisseur hydraulique. Un autre type fait intervenir des forces secondaires sur le système à contrôler.

Pour étudier le contrôle par feedback nous commencerons par définir le formalisme adapté.

Formalisme des variables d'état

Les techniques de contrôle précédentes reposaient sur la connaissance de fonctions de transfert et les algorithmes avaient pour but d'identifier une fonction de transfert "optimale". Il existe cependant une autre approche qui décrit de manière plus détaillée le comportement d'un système à partir de variables internes. On suppose en fait que l'état d'un système est caractérisé par un ensemble de variables appelées variables d'état. Ces variables sont regroupées dans un vecteur appelé vecteur d'état.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (15.55)$$

Cette représentation est valable pour les systèmes pouvant être décrits par un nombre fini de paramètres. Elle peut aussi s'appliquer à une approximation discrète de systèmes continus (poutre, plaque, structure) obtenue par exemple en ne considérant qu'un nombre fini de modes ou par un modèle éléments finis.

On suppose que l'évolution du système est décrite par une équation différentielle du premier ordre du type

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (15.56)$$

où \mathbf{A} est une matrice que l'on supposera indépendante du temps et qui décrit les propriétés physiques du système et \mathbf{x}_0 est la condition initiale. Le contrôle est assuré grâce à des efforts sur le système intervenant dans le second membre pour donner

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (15.57)$$

où

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (15.58)$$

est le vecteur des paramètres de contrôle et \mathbf{B} est une matrice de taille $n \times m$ qui décrit l'effet du contrôle sur la dynamique du système.

Exemples

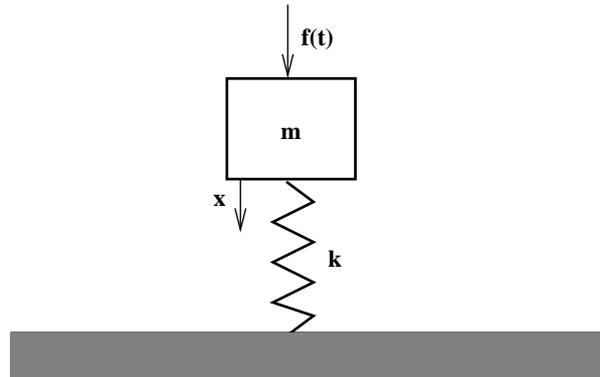


FIG. 15.8 – Système masse-ressort.

Système masse-ressort Le système est décrit par l'équation

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad (15.59)$$

On définit le vecteur d'état par

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (15.60)$$

et l'équation 15.59 peut se mettre sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t) \quad (15.61)$$

soit sous la forme 15.57 avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = [f(t)] \quad (15.62)$$

Système décrit par une équation différentielle d'ordre n

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = u \\ x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0) \text{ connus} \end{cases} \quad (15.63)$$

On pose alors

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases} \quad (15.64)$$

En dérivant nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{cases} \quad (15.65)$$

L'équation d'état est

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (15.66)$$

Soit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (15.67)$$

Supposons que la sortie du système, c'est à dire le paramètre observé en sortie, soit le paramètre $y = x_1 = x(t)$, alors

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (15.68)$$

Soit

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (15.69)$$

avec

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (15.70)$$

Cas d'un contrôle plus complexe Soit un système décrit par l'équation

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u \quad (15.71)$$

où u est le paramètre de contrôle. On pose

$$\begin{cases} x_1 = x - k_0 u \\ x_2 = \dot{x} - k_1 u \end{cases} \quad (15.72)$$

avec

$$\begin{cases} k_0 = b_0 \\ k_1 = b_1 - a_1 b_0 \\ k_2 = (b_2 - a_2 b_0) - a_1 k_1 \end{cases} \quad (15.73)$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} u \quad (15.74)$$

On vérifie la deuxième équation par

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 + a_2 x_1 + a_1 x_2 &= \ddot{x}_1 - k_1 \dot{u} + a_2 x_1 + a_1 x_2 \\ &= \ddot{x} - k_0 \ddot{u} - k_1 \dot{u} + a_2(x - k_0 u) + a_1(\dot{x} - k_0 \dot{u} - k_1 u) \\ &= b_1 \dot{u} + b_2 u - k_1 \dot{u} - k_0 a_2 u - a_1 k_0 \dot{u} - k_1 a_1 u \\ &= k_2 u \end{aligned} \quad (15.75)$$

Si l'on observe la variable $y = x$ en sortie, on a de plus

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + k_0 u \quad (15.76)$$

Cette fois la variable de contrôle u intervient dans le calcul du paramètre de sortie. En fait la forme la plus générale d'une équation d'état est

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (15.77)$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sont des matrices et $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$ des vecteurs.

Système composé d'un nombre fini de modes On suppose qu'un champ de déplacement d'une structure s'écrit en ne considérant qu'un nombre fini de modes

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(t) \Phi_i(x) \quad (15.78)$$

où l'amplitude modale w_i est solution de

$$\ddot{w}_i(t) + \omega_i^2 w_i(t) = f_i(t) \quad (15.79)$$

On définit le vecteur d'état par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \\ w_2 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \dot{w}_n \end{bmatrix} \quad (15.80)$$

l'équation d'état est

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_2^2 & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_1(t) \\ 0 \\ f_2(t) \\ \vdots \\ 0 \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (15.81)$$

soit encore sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (15.82)$$

La sortie du système peut par exemple être la valeur du déplacement en deux points. On a alors

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_1, t) \\ w(\mathbf{x}_2, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & \Phi_n(\mathbf{x}_1) & 0 \\ \Phi_1(\mathbf{x}_2) & 0 & \dots & \Phi_n(\mathbf{x}_2) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (15.83)$$

Remarques • On peut tenir compte d'erreurs sur les paramètres en introduisant des processus aléatoires $\mathbf{v}(t)$ et $\mathbf{w}(t)$ tels que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{w} \end{cases} \quad (15.84)$$

\mathbf{v} est une excitation aléatoire sur le système alors que \mathbf{w} est plutôt une erreur de mesure sur les variables de sortie.

• On peut résoudre directement l'équation d'état par

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Ax}) &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{Bu} \\ (e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x})' &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{Bu} \\ e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (15.85)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t) \end{cases} \quad (15.86)$$

Changement de variable

A partir du système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (15.87)$$

on pose

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \quad (15.88)$$

pour obtenir le nouveau système

$$\begin{cases} \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{ATz} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CTz} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (15.89)$$

soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CTz} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (15.90)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_1\mathbf{z} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{z} + \mathbf{D}_1\mathbf{u} \end{cases} \quad (15.91)$$

Si \mathbf{A} est diagonalisable on peut prendre \mathbf{T} telle que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (15.92)$$

\mathbf{T} est donnée par

$$\mathbf{T} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \quad (15.93)$$

où \mathbf{x}_i est le i ème vecteur propre de la matrice \mathbf{A} . Sous cette forme le système est beaucoup plus simple car diagonal. On utilisera ce changement de variable dans la suite.

15.3.2 Propriétés

Stabilité

Description par variable d'état Soit un système décrit par l'équation d'état

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (15.94)$$

en passant en coordonnées modales on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (15.95)$$

Chaque coordonnée modale évolue donc suivant la loi

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0) \quad (15.96)$$

Par conséquent le système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont telles que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.

Description par fonction de transfert Soit la fonction de transfert du système écrite en transformée de Laplace

$$G(s) = K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (15.97)$$

On peut écrire $G(s)$ sous la forme

$$\begin{aligned} G(s) &= P(s) + \frac{A_1^1}{s - z_1} + \dots + \frac{A_1^{n_1}}{(s - z_1)^{n_1}} + \dots \\ &\quad + \frac{A_r^1}{s - z_r} + \dots + \frac{A_r^{n_r}}{(s - z_r)^{n_r}} \end{aligned} \quad (15.98)$$

avec $n_1 + \dots + n_r = n$, ce qui donne en temps, après une transformée inverse

$$\begin{aligned} g(t) &= r(t) + A_1^1 e^{z_1 t} + \dots + \frac{A_1^{n_1}}{(n_1 - 1)!} t^{n_1 - 1} e^{z_1 t} + \dots \\ &\quad + A_r^1 e^{z_r t} + \dots + \frac{A_r^{n_r}}{(n_r - 1)!} t^{n_r - 1} e^{z_r t} \end{aligned} \quad (15.99)$$

Le système est stable si toutes les racines du dénominateur $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ont une partie réelle négative.

Critère de Routh

Pour que les racines soient à parties réelles négatives les facteurs du polynôme $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ doivent être du type $s + \alpha$ avec $\alpha > 0$ ou $(s + \alpha + i\beta)(s + \alpha - i\beta) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2$ avec $\alpha > 0$. Par conséquent les coefficients a_1, \dots, a_n doivent être positifs. Il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante. Pour obtenir une condition suffisante, il faut en plus écrire

$$\begin{array}{cccccc} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & \end{array} \quad (15.100)$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} \quad \dots \quad (15.101)$$

et

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad \dots \quad (15.102)$$

Le critère est défini par

- Les racines ont toutes des parties réelles négatives si et seulement si la première colonne n'est constituée que de nombre > 0 .
- Le nombre de racines à partie réelle > 0 est égal au nombre de changements de signe des nombres de la première colonne.

Pour que la partie réelle soit $< -\sigma$, il faut appliquer le critère à $P(s + \sigma)$.

Contrôlabilité

La contrôlabilité est la faculté de transformer un état initial \mathbf{x}_0 en un état final quelconque \mathbf{x}_f en un temps fini. Partant de l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (15.103)$$

passant en coordonnées modales

$$\begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \end{array} \quad (15.104)$$

Le système est contrôlable si aucune ligne de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ n'est identiquement nulle. En fait, il existe un critère simple qui permet de dire si un système avec les matrices \mathbf{A}, \mathbf{B} est contrôlable ou non. Il s'exprime sous la forme suivante.

Critère de contrôlabilité *Le système est contrôlable si et seulement si le rang de la matrice $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ est égal à n .*

Démonstration

• Si $\text{rang}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] < n$, il existe un vecteur \mathbf{p} tel que ${}^t\mathbf{p}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{0}$ et par conséquent

$${}^t\mathbf{p}\mathbf{x}(t) = {}^t\mathbf{p}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + {}^t\mathbf{p}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (15.105)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton $e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ donc

$${}^t\mathbf{p}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{0} \quad (15.106)$$

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (15.107)$$

La trajectoire est située dans un hyperplan pour $\mathbf{x}_0 = 0$, donc tout état n'est pas atteignable et le système n'est pas contrôlable.

• Réciproquement l'ensemble des états atteignables à partir d'un état \mathbf{x}_0 est un ensemble convexe. S'il n'est pas égal à R^n , on a d'après le théorème de séparation des ensembles convexes.

$$\forall t \geq 0 \quad {}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}(t)) \geq 0 \quad (15.108)$$

pour un certain vecteur \mathbf{p} et un certain état final \mathbf{x}_f . On a alors

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}_f - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 - \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau) &\geq 0 \\ {}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}_f - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0) &\geq {}^t\mathbf{p}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (15.109)$$

pour tout contrôle \mathbf{u} , donc

$${}^t\mathbf{p}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0 \quad (15.110)$$

On en déduit

$${}^t\mathbf{p}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} = 0 \quad (15.111)$$

et en prenant par exemple un développement en $t - \tau$ au voisinage de 0, on obtient

$$\text{rang}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] < n \quad (15.112)$$

Observabilité

C'est la possibilité de déterminer l'état d'un système en mesurant sa sortie \mathbf{y} sur un intervalle de temps fini. En coordonnées modales

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_1\mathbf{z} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1\mathbf{z} \end{aligned} \quad (15.113)$$

Le système est observable si les colonnes de \mathbf{C}_1 sont toutes non nulles. Dans le cas contraire un mode ne peut pas être observé. Comme pour la contrôlabilité, il existe un critère simple disant si un système est observable ou non.

Critère d'observabilité Le système est observable si et seulement si le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \text{ est égal à } n.$$

Démonstration

• Si $\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} < n$, il existe un vecteur $\mathbf{p} \neq 0$ tel que $\mathbf{Cp} = 0, \mathbf{CAp} = 0, \dots, \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{p} =$

0. Pour $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}$ et $\mathbf{u} = 0$, on a $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{p}$ et par conséquent $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{p} = 0$ et $\mathbf{x}(t) \neq 0$. Le système n'est pas observable.

• Si $\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n$. Ecrivant

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau - \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{d}(t) \end{aligned} \tag{15.114}$$

Le contrôle \mathbf{u} est connu tout comme \mathbf{y} , donc \mathbf{d} est connu. On obtient en dérivant

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}(0) \\ \mathbf{CA}\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}'(0) \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(n-1)}\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}^{(n-1)}(0) \end{cases} \tag{15.115}$$

Par conséquent \mathbf{x}_0 est déterminé et $\mathbf{x}(t)$ aussi. Le système est observable.

Lien avec la fonction de transfert

Pour un système quelconque on peut faire la décomposition

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{15.116}$$

et

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{15.117}$$

On peut ainsi classer les variables en 4 groupes

1. Contrôlable et observable
2. Contrôlable mais non observable
3. Non contrôlable mais observable
4. Non contrôlable et non observable

Supposons $\mathbf{x}_0 = 0$, en prenant la transformée de Laplace

$$\mathbf{X}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{x}(t) dt \quad (15.118)$$

on obtient

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \quad (15.119)$$

ce qui donne finalement

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (15.120)$$

et

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \quad (15.121)$$

La fonction de transfert qui relie l'entrée $\mathbf{U}(s)$ à la sortie $\mathbf{Y}(s)$ est donc donnée par

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15.122)$$

La description en variable d'état permet donc de retrouver la notion de fonction de transfert. Cette description est en fait plus générale que la fonction de transfert puisqu'elle inclut des informations supplémentaires sur l'état interne du système. On dit que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (15.123)$$

est une réalisation de la fonction de transfert $\mathbf{G}(s)$ si

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15.124)$$

Dans tous les cas nous avons,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}_1[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D} \quad (15.125)$$

La fonction de transfert mesurée expérimentalement relie la sortie $\mathbf{Y}(s)$ à l'entrée $\mathbf{U}(s)$ et ne fait intervenir que la partie S_1 du système S . La réalisation est dite minimale si le système est contrôlable et observable. Plusieurs systèmes différents peuvent engendrer la même fonction de transfert. On retrouve le fait que la description en terme de variable d'état est plus riche que la description en terme de fonction de transfert.

15.3.3 Contrôle simple par feedback

Cas du système masse-ressort

Nous donnons à titre d'exemple une application au cas d'un système masse-ressort. Le contrôle par feedback sur ce système, présenté sur la figure 15.9, peut être obtenu par une force de contrôle proportionnelle au déplacement, à la vitesse ou à l'accélération. L'équation de mouvement devient

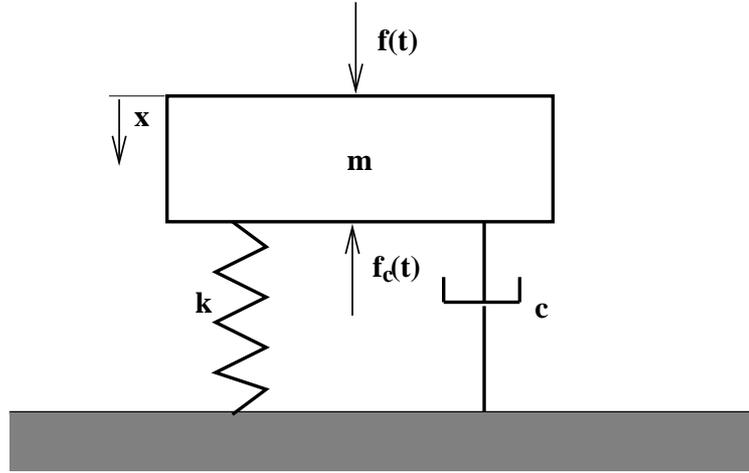


FIG. 15.9 – Contrôle par feedback.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) + f_c(t) \quad (15.126)$$

où $f(t)$ est la force perturbatrice et $f_c(t)$ est la force engendrée par le contrôleur. De manière générale, elle s'écrit sous la forme

$$f_c(t) = -[K_a\ddot{x}(t) + K_v\dot{x}(t) + K_dx(t)] \quad (15.127)$$

Prenant la transformée de Laplace nous obtenons

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)B(s)} \quad (15.128)$$

où

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (15.129)$$

est la fonction de transfert sans contrôleur et

$$B(s) = K_as^2 + K_vs + K_d \quad (15.130)$$

est le gain du contrôleur. La fonction $H(s)$ donne le comportement du contrôleur en boucle fermée. Ces fonctions $B(s)$ sont les plus simples possibles. Des contrôles plus efficaces pourraient être obtenus avec des fonctions $B(s)$ plus sophistiquées.

Un contrôle par feedback sur la vitesse est obtenu dans le cas particulier où $K_a = K_d = 0$. La fonction de transfert peut alors s'écrire

$$H(i\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\xi(1 + K_v/c)(\omega/\omega_0)} \quad (15.131)$$

Dans ce cas particulier, l'influence du contrôleur consiste à augmenter l'amortissement de la structure. D'autres types de contrôles pourraient être obtenus avec d'autres choix, par exemple avec un feedback sur le déplacement uniquement. Cela peut améliorer l'isolation dans certaines bandes de fréquences au détriment du comportement dans d'autres bandes de fréquence. Les spécificités de l'application envisagée guideront vers le choix du meilleur contrôleur possible.

Stabilité du contrôle par feedback

Le principe général du contrôle est défini sur la figure 15.10. Le signal $P(s)$ est le signal primaire à contrôler, $E(s)$ est le signal obtenu lorsque le contrôleur est en action, $S(s)$ est la sortie du système, $G(s)$ est la fonction de transfert du système physique sans contrôleur et $B(s)$ est le gain du contrôle par feedback.

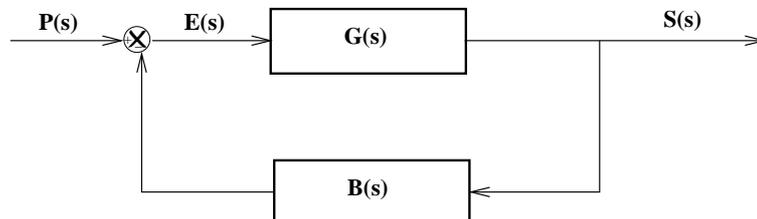


FIG. 15.10 – Contrôle par feedback.

Les différents signaux vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} E(s) &= P(s) - B(s)G(s)E(s) \\ E(s) &= \frac{P(s)}{1 + G(s)B(s)} \\ S(s) &= G(s)E(s) \end{aligned} \tag{15.132}$$

Par conséquent la fonction de transfert en boucle fermée est

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)E(s)}{P(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 + G(s)B(s)} \end{aligned} \tag{15.133}$$

La stabilité du contrôle dépend donc des zéros de $1 + G(s)B(s)$. Une première possibilité est de factoriser le polynôme et d'étudier le signe de la partie réelle des racines. Toutefois il faut pour cela connaître les fonctions de transfert $G(s)$ et $B(s)$ et d'autre part trouver les racines du polynôme $1 + G(s)B(s)$ ce qui généralement difficile.

Critère de Nyquist

Une autre possibilité généralement plus simple en pratique est d'utiliser le critère de Nyquist basé sur un théorème de Cauchy qui s'énonce ainsi.

Pour une fonction analytique F , si le chemin γ entoure P pôles et Z zéros dans le plan s alors $F(\gamma)$ entoure $Z - P$ fois l'origine dans la direction positive (voir figure 15.11).

Pour appliquer ce critère on définit le chemin de Nyquist sur la figure 15.12. Le chemin entoure le demi-plan $Re(s) > 0$ en évitant les pôles et les zéros situés sur l'axe imaginaire. Si les fonctions de transfert individuelles $G(s)$ et $B(s)$ sont stables alors $P = 0$ et on obtient le nombre de zéros Z en comptant le nombre d'encerclement de l'origine de $F(\gamma)$. Pour la stabilité du système avec feedback il faut prendre $F(s) = G(s)B(s)$. Finalement le critère de Nyquist s'énonce ainsi : Pour déterminer la stabilité d'un système avec feedback unité négatif, on considère le contour de Nyquist Γ dans le plan $F(s)$. Le système est stable si

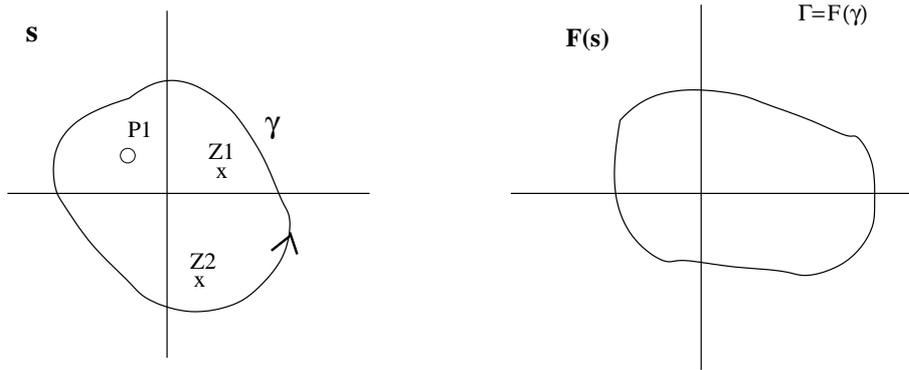


FIG. 15.11 – Transformation du plan complexe.

1. Γ n'entoure pas le point $(-1,0)$ quand $G(s)B(s)$ n'a pas de pôle dans le demi-plan $Re(s) > 0$.
2. Γ entoure le point $(-1,0)$ P fois dans la direction positive quand $G(s)B(s)$ a P pôles dans le demi-plan $Re(s) > 0$.

Dans les autres cas le système avec feedback est instable.

Remarque

Le critère porte uniquement sur $G(s)B(s)$ qui est mesurable. Le chemin de Nyquist porte sur $s = i\omega$ soit sur la fonction de transfert $G(i\omega)B(i\omega)$. Expérimentalement il suffit de tracer cette fonction de transfert dans le plan complexe et de compter le nombre d'encerclements du point $(-1,0)$ pour obtenir le comportement en boucle fermée à partir des fonctions de transfert en boucle ouverte.

Contrôle par feedback et placement de pôles

Une possibilité pour implémenter un contrôle par feedback consiste à essayer de modifier les pôles d'un système pour les transformer en un nouvel ensemble de pôles, par exemple pour augmenter l'atténuation ou la stabilité d'un système.

Soit un système que l'on suppose contrôlable et qui a pour équation d'état

$$\dot{\mathbf{z}} = \Delta \mathbf{z} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (15.134)$$

en coordonnées modales avec $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Les pôles de la fonction de transfert du système en boucle ouverte sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On peut désirer changer ces pôles soit parce que certaines valeurs propres sont à parties réelles positives et que le système est par conséquent instable soit parce que certaines valeurs propres sont proches de l'axe imaginaire et que le système peut devenir instable à cause d'une faible perturbation. Pour cela on cherche un contrôle par feedback donné par $\mathbf{u} = \mathbf{K}_1 \mathbf{z}$ tel que les pôles du système en boucle fermée soient (ρ_1, \dots, ρ_n) , où les ρ_i sont des valeurs complexes choisies arbitrairement.

Il existe plusieurs façons de choisir la matrice \mathbf{K}_1 . Une possibilité est de prendre un produit dyadique de 2 vecteurs soit

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}^t \mathbf{d} \quad (15.135)$$

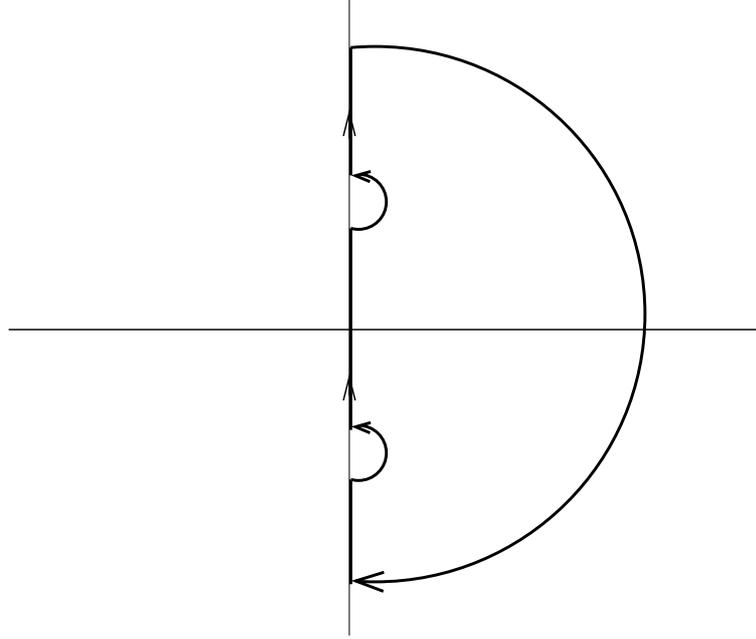


FIG. 15.12 – Chemin de Nyquist.

alors les pôles du système avec feedback sont les racines de

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I}_n - \Delta - \mathbf{B}_1\mathbf{f}^t\mathbf{d}| &= |s\mathbf{I}_n - \Delta| |\mathbf{I}_n - (s\mathbf{I} - \Delta)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{f}^t\mathbf{d}| \\ &= |s\mathbf{I}_n - \Delta| |1 - {}^t\mathbf{d}(s\mathbf{I} - \Delta)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{f}| \end{aligned} \quad (15.136)$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant le lemme

$$|\mathbf{I}_m - \mathbf{P}\mathbf{Q}| = |\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}\mathbf{P}| \quad (15.137)$$

où \mathbf{P} est une matrice $m \times n$ et \mathbf{Q} une matrice $n \times m$. Cette relation se démontre à partir de

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{I}_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{I}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}\mathbf{P} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{I}_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{I}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m - \mathbf{P}\mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15.138)$$

La relation 15.136 se développe en

$$\prod_{i=1}^n (s - \rho_i) = \left[\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \right] \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{s - \lambda_i} \right] \quad (15.139)$$

en posant

$$\mathbf{B}_1\mathbf{f} = \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (15.140)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (15.141)$$

Notant

$$\frac{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) - \prod_{i=1}^n (s - \rho_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \quad (15.142)$$

on doit vérifier

$$R_i = d_i r_i \quad (15.143)$$

La démarche consiste par exemple à spécifier \mathbf{f} , à calculer $\mathbf{r} = \mathbf{B}_1 \mathbf{f}$ puis à obtenir ${}^t \mathbf{d}$ par la formule précédente.

Cas d'un système quelconque

Le calcul précédent a été effectué en supposant que le système était en coordonnées modales. Dans le cas général on a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (15.144)$$

passant en coordonnées modales

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{T}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (15.145)$$

On calcule \mathbf{K}_1 à partir de $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, puis nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_1\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (15.146)$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{T}^{-1}$. Le feedback est donc donné par $\mathbf{u} = \mathbf{K}_1\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$.

15.3.4 Le contrôle optimal

On suppose que le système est contrôlable et on cherche un contrôle qui optimise un certain critère sous forme d'une fonction de coût dépendant de l'état du système. On peut par exemple minimiser la fonctionnelle

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) dt \quad (15.147)$$

avec des contraintes éventuelles de type équation d'évolution ou condition initiale, par exemple

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} &= f(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (15.148)$$

Les variables et les fonctions de coût peuvent être très variées. Voici quelques exemples que l'on peut trouver en pratique

1. Dans le cas d'un système évoluant suivant une équation d'état du type introduit précédemment, il faut prendre pour variables $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$ et on a les contraintes $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ et $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. On peut aussi avoir une contrainte sur l'état final du type $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$. Le contrôle \mathbf{u} est supposé appartenir à un ensemble U qui est le domaine des contrôles admissibles.

2. $J = \int_{t_0}^{t_0+T} 1 dt$ avec la contrainte $\mathbf{X}(t_0 + T) = \mathbf{X}_f$ sert à minimiser le temps nécessaire pour atteindre l'état final \mathbf{X}_f .
3. $\int_{t_0}^{t_f} {}^t\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X} dt$ minimise l'énergie du système pour un choix adéquat de la matrice \mathbf{Q} .

Nous allons commencer par déterminer les équations vérifiées par la solution optimale qui minimise le critère 15.147.

Equations d'Euler

Extremum sans contrainte On cherche les extremums de

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) dt \quad (15.149)$$

où \mathbf{X} est une fonction quelconque (incluant éventuellement le contrôle \mathbf{u}). Les seules contraintes possibles portent sur l'état initial ou final.

Soit $\mathbf{X}_0(t)$ une solution optimale, on définit une perturbation de cette fonction par

$$\mathbf{X}_\epsilon(t) = \mathbf{X}_0(t) + \epsilon \mathbf{y}(t) \quad (15.150)$$

où $\mathbf{y}(t)$ est une fonction quelconque vérifiant seulement les contraintes éventuelles sur les états initial et final. On a alors

$$J(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{y}, \dot{\mathbf{X}}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{y}}, t) dt \quad (15.151)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{y} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} + \dot{\mathbf{y}} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) dt \\ &= \left[\mathbf{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (15.152)$$

La solution optimale doit annuler cette dérivée pour $\epsilon = 0$, pour toute fonction $\mathbf{y}(t)$. Elle vérifie donc l'équation d'Euler

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) = 0 \quad (15.153)$$

Si la valeur initiale n'est pas fixée, on a de plus

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(t_0) = 0 \quad (15.154)$$

avec une relation analogue en t_1 si la valeur finale n'est pas imposée.

Extremum avec contrainte Si l'on suppose que la solution doit de plus satisfaire une contrainte du type

$$g(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = 0 \quad (15.155)$$

en introduisant un multiplicateur de Lagrange $p(t)$, le problème revient à chercher l'extremum de

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} (F + pg) dt \quad (15.156)$$

On doit vérifier l'équation d'Euler 15.153

$$\frac{\partial(F + pg)}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(F + pg)}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) = 0 \quad (15.157)$$

Cela donne une solution pour chaque fonction $p(t)$. La valeur du paramètre $p(t)$ est ensuite donnée par la relation

$$g(\mathbf{X}(p), \dot{\mathbf{X}}(p), t) = 0 \quad (15.158)$$

où $\mathbf{X}(p)$ désigne la solution obtenue pour la fonction p .

Hamiltonien On se place dans le cas particulier où $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$ et l'on suppose que la contrainte est de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (15.159)$$

et que le critère est du type

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (15.160)$$

Introduisant le multiplicateur de Lagrange \mathbf{p} , cela revient à minimiser

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + {}^t \mathbf{p}(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}(t))] dt \quad (15.161)$$

On pose $H = F + {}^t \mathbf{p} \mathbf{g}$ appelé le Hamiltonien du système. Les équations d'Euler deviennent.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (15.162)$$

avec une condition sur $\frac{\partial(F + {}^t \mathbf{p}(\mathbf{g} - \dot{\mathbf{x}}))}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t_1)$ si $\mathbf{x}(t_1)$ n'est pas fixé. Cette condition s'écrit

$$\mathbf{p}(t_1) = 0 \quad (15.163)$$

Dans le cas vectoriel où l'on a un système d'équations différentielles comme contrainte

$$\dot{x}_i = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (15.164)$$

avec $1 \leq i \leq n$, les relations précédentes doivent s'interpréter comme $H = F + \sum_{i=1}^n p_i g_i$ et

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u_j} \end{aligned} \quad (15.165)$$

avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ et $p_i(t_1) = 0$ si la condition est libre en t_1 sur le degré de liberté i (appelée condition de transversalité).

Contrôle LQ (linéaire quadratique)

On suppose que le critère à minimiser est une fonction quadratique de l'état et du contrôle du type

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} ({}^t\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{u} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x})dt \quad (15.166)$$

A partir d'une perturbation initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, le but est de réduire l'amplitude du vecteur d'état (partie ${}^t\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x}$, tout en limitant l'effort de contrôle nécessaire, partie ${}^t\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{u}$). On suppose que la matrice \mathbf{Q} est définie positive et que \mathbf{R} est positive. Ces matrices sont symétriques (cela suffit pour définir les formes quadratiques).

On cherche à appliquer les résultats précédents à ce cas particulier. La contrainte est donnée par l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (15.167)$$

et le Hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{u} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{p}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (15.168)$$

La solution optimale doit vérifier

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{A}\mathbf{p} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + {}^t\mathbf{B}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (15.169)$$

On obtient finalement

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{p} \quad (15.170)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{Q}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{A}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{p} \end{aligned} \quad (15.171)$$

On cherche à montrer que l'on a

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (15.172)$$

où \mathbf{K} est une matrice indépendante du temps et de l'état $\mathbf{x}(t)$.

Démonstration

On suppose que la relation 15.172 est vérifiée alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{Q}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{x} \\ \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (15.173)$$

On en déduit alors

$$\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (15.174)$$

Ceci est vérifié pour tout état \mathbf{x} si \mathbf{K} est solution de

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{K} = 0 \quad (15.175)$$

C'est l'équation de Riccati.

Réciproquement soit \mathbf{K} une solution de l'équation de Riccati et soit \mathbf{x} la solution de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (15.176)$$

En posant $\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ on obtient

$$\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (15.177)$$

donc $\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ est solution du système.

En résumé la solution du problème linéaire quadratique est donnée par

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (15.178)$$

avec \mathbf{K} solution de l'équation de Riccati

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K} = 0 \quad (15.179)$$

Remarque : L'équation de Riccati peut avoir plusieurs solutions. Il faut choisir parmi celles qui sont symétriques.

En posant $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K}$, le contrôle par feedback est donné par

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\mathbf{x} \quad (15.180)$$

On va montrer que l'on a la stabilité asymptotique si et seulement si la matrice \mathbf{K} est définie positive.

Démonstration :

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}^t\mathbf{x}\mathbf{K}\mathbf{x}) &= {}^t\dot{\mathbf{x}}\mathbf{K}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} \\ &= {}^t(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x})\mathbf{K}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x}) \\ &= {}^t\mathbf{x}({}^t\mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{A} - {}^t\mathbf{G}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x} \\ &= {}^t\mathbf{x}({}^t\mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{A} - 2{}^t\mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G})\mathbf{x} \\ &= -{}^t\mathbf{x}(\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G})\mathbf{x} \end{aligned} \quad (15.181)$$

On a donc

$${}^t\mathbf{x}(T)\mathbf{K}\mathbf{x}(T) - {}^t\mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) = - \int_0^T {}^t\mathbf{x}(\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G})\mathbf{x}dt \leq 0 \quad (15.182)$$

Si l'état est non nul et $T > 0$, nous avons

$${}^t\mathbf{x}(T)\mathbf{K}\mathbf{x}(T) < {}^t\mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) \quad (15.183)$$

Par conséquent :

- Si l'on a la stabilité asymptotique alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(T) = 0$ et

$${}^t\mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) > 0 \quad (15.184)$$

pour tout état initial $\mathbf{x}(0)$ non nul. La matrice \mathbf{K} est donc définie positive.

- Inversement si \mathbf{K} est définie positive nous avons

$$0 < {}^t\mathbf{x}(T)\mathbf{K}\mathbf{x}(T) < {}^t\mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) \quad (15.185)$$

et la fonction ${}^t\mathbf{x}(T)\mathbf{K}\mathbf{x}(T)$ est décroissante positive. Elle admet donc une limite quand T tend vers l'infini. Si cette limite n'est pas nulle nous avons $|\mathbf{x}(T)| \geq \epsilon > 0$ pour tout T et par conséquent on devrait avoir $\int_0^T {}^t\mathbf{x}(\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G})\mathbf{x}dt \rightarrow +\infty$ ce qui contredit la relation 15.182.

La conséquence de cette propriété est qu'il faut choisir la solution définie positive parmi toutes les solutions de l'équation de Riccati.

15.3.5 Contrôle modal des structures

Nous nous plaçons dans le cas où la structure est modélisée par un nombre fini de degrés de liberté. Son évolution est donnée par l'équation

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (15.186)$$

où les matrices et les vecteurs sont supposés d'ordre n . Lorsque les efforts de contrôle sont un ensemble de forces, la distribution de force appliquée à la structure est donnée par

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{i=N_s} b_i(\mathbf{r})u_i(t) + perturbation \quad (15.187)$$

La fonction $b_i(\mathbf{r})$ est l'étendue d'application de la force i . Pour une force ponctuelle cette fonction est une fonction de Dirac.

La réponse de la structure est mesurée par des capteurs proportionnels au déplacement ou à la vitesse dont la réponse est du type

$$y(t) = \int_S \left[c(\mathbf{r})w(\mathbf{r}, t) + e(\mathbf{r})\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] d\mathbf{r} \quad (15.188)$$

Si la mesure est faite par un capteur de déplacement ponctuel, nous avons

$$y(t) = cw(\mathbf{r}, t) \quad (15.189)$$

et pour un capteur de vitesse ponctuel

$$y(t) = e\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (15.190)$$

où c et e sont les gains respectifs des capteurs.

Le contrôle consiste à engendrer des efforts secondaires $\mathbf{f}_c(t)$ proportionnels à l'état du système, et donc tels que $\mathbf{f}_c(t) = -\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, tout en minimisant un critère énergétique tel que

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} ({}^t\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{u} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x})dt \quad (15.191)$$

On doit alors appliquer les résultats précédents pour trouver la matrice de gain \mathbf{K} . Dans le cas d'un nombre important de degrés de liberté cette approche est difficile à mettre en oeuvre à cause de la difficulté de résoudre l'équation de Riccati pour trouver la matrice \mathbf{K} . On préférera alors le contrôle modal indépendant décrit dans les sections suivantes.

Principe du contrôle modal indépendant

On pourrait chercher à résoudre directement le problème d'optimisation mais cela conduit à des calculs volumineux. Il est plus simple de travailler en coordonnées modales. Le déplacement s'écrit

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \phi_i(\mathbf{r}) \quad (15.192)$$

L'idée derrière cette approche est de remplacer un contrôle global dans lequel toutes les variables sont couplées par un contrôle dans lequel chaque mode est contrôlé indépendamment des autres. L'amplitude modale $z_i(t)$ du i ème mode propre vérifie l'équation

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = f_i(t) \quad (15.193)$$

où ω_i est la i ème pulsation propre et f_i la projection de l'effort sur le mode correspondant qui est donnée par

$$f_i(t) = \int_S f(\mathbf{r}, t) \phi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (15.194)$$

Posant le vecteur d'état égal à

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} \quad (15.195)$$

l'équation d'état du mode i est donc

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i \omega_i \end{bmatrix} \mathbf{z}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_i \quad (15.196)$$

La réponse d'un mode peut aussi s'écrire sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \quad (15.197)$$

avec

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i \omega_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \psi_i(\mathbf{r}_1) & \dots & \psi_i(\mathbf{r}_{N_c}) \end{bmatrix} \quad (15.198)$$

où N_c est le nombre de paramètres globaux de contrôle, avec des efforts de contrôle supposés ponctuels et placés aux points \mathbf{r}_j . La sortie pour ce mode, mesurée par des capteurs ponctuels de déplacement et de vitesse est

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{z}_i \quad (15.199)$$

avec

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \psi_i(\mathbf{r}_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_{N_d}) & 0 \\ 0 & \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \psi_i(\mathbf{r}_{N_v}) \end{bmatrix} \quad (15.200)$$

avec N_d capteurs de déplacement et N_v capteurs de vitesse.

L'écriture précédente a l'inconvénient d'introduire l'ensemble des efforts de contrôle et des signaux des capteurs. On va préférer aborder le problème sous la forme de la relation 15.196 en cherchant le paramètre f_i optimal en fonction de l'état \mathbf{z}_i . On cherche à minimiser le critère suivant

$$J = \sum_{i=1}^n J_i \quad (15.201)$$

avec

$$J_i = \int_0^{+\infty} ({}^t\mathbf{z}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i + R_i f_i^2) dt \quad (15.202)$$

Pour minimiser J on va minimiser séparément suivant chaque mode en cherchant le minimum de J_i .

Détermination du feedback pour chaque mode

On est ainsi conduit pour chaque mode i à la résolution d'une équation de Riccati d'ordre 2×2 .

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}\mathbf{K} + \mathbf{Q} - \frac{1}{R_i}\mathbf{K}\mathbf{B}{}^t\mathbf{B}\mathbf{K} = 0 \quad (15.203)$$

On choisit de prendre

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15.204)$$

Nous avons à partir de la relation 15.196

$$\frac{1}{R_i}\mathbf{B}{}^t\mathbf{B} = \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_i} \end{bmatrix} \quad (15.205)$$

On pose

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (15.206)$$

en tenant compte de la symétrie de \mathbf{K} . En supposant pour simplifier que l'amortissement est nul, l'équation de Riccati s'écrit

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = 0 \quad (15.207)$$

Soit

$$\begin{bmatrix} -b\omega_i^2 & a \\ -c\omega_i^2 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\omega_i^2 & -c\omega_i^2 \\ a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (15.208)$$

On obtient 4 équations

$$\begin{cases} -2b\omega_i^2 + \omega_i^2 - \frac{b^2}{R_i} = 0 \\ a - c\omega_i^2 - \frac{bc}{R_i} = 0 \\ -c\omega_i^2 + a - \frac{bc}{R_i} = 0 \\ 2b + 1 - \frac{c^2}{R_i} = 0 \end{cases} \quad (15.209)$$

La première relation donne

$$b^2 + 2R_i\omega_i^2b - R_i\omega_i^2 = 0 \quad (15.210)$$

Soit

$$\begin{aligned} b &= -R_i\omega_i^2 + \epsilon_1 \sqrt{R_i^2\omega_i^4 + R_i\omega_i^2} \\ &= R_i\omega_i^2 \left(-1 + \epsilon_1 \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}}\right) \end{aligned} \quad (15.211)$$

avec $\epsilon_1 = \pm 1$. La dernière relation de 15.209 donne

$$c^2 - 2bR_i - R_i = 0 \quad (15.212)$$

ce qui donne

$$c = \epsilon_2 \sqrt{2bR_i + R_i} \quad (15.213)$$

avec $\epsilon_2 = \pm 1$. Finalement il reste à déterminer le coefficient a qui est donné par

$$a = c\omega_i^2 + \frac{bc}{R_i} \quad (15.214)$$

On obtient ainsi 4 solutions suivant les valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 . Pour choisir parmi ces solutions, il faut prendre celle qui correspond à une matrice définie positive. Cette condition s'écrit

$$ac - b^2 \geq 0 \quad (15.215)$$

$$a + c \geq 0 \quad (15.216)$$

La condition sur le déterminant est

$$\begin{aligned} ac - b^2 &= \left(\omega_i^2 + \frac{b}{R_i}\right)c^2 - b^2 \\ &= (R_i\omega_i^2 + b)(2b + 1) - b^2 \\ &= b^2 + b + 2R_i\omega_i^2b + R_i\omega_i^2 \\ &= b + 2R_i\omega_i^2 \\ &= R_i\omega_i^2 \left(1 + \epsilon_1 \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}}\right) \end{aligned} \quad (15.217)$$

Il faut donc prendre $\epsilon_1 = +1$. Pour la trace nous avons

$$\begin{aligned} a + c &= \left(1 + \omega_i^2 + \frac{b}{R_i}\right)c \\ &= \left(1 + \omega_i^2 \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}}\right)c \end{aligned} \quad (15.218)$$

Il faut prendre $c \geq 0$, soit $\epsilon_2 = +1$. On obtient finalement la solution

$$\begin{aligned} a &= c\left(\omega_i^2 + \frac{b}{R_i}\right) \\ b &= R_i\omega_i^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}}\right) \\ c &= R_i\omega_i \left(-2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}} + \frac{1}{R_i\omega_i^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (15.219)$$

La loi de contrôle est donnée par

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\mathbf{x} \quad (15.220)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{R}^{-1} {}^t\mathbf{B}\mathbf{K} \\ &= \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_i^2(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}}) & \omega_i(-2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}} + \frac{1}{R_i\omega_i^2})^{1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15.221)$$

Soit

$$\begin{aligned} f_i(t) &= -\omega_i^2(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}})z_i(t) - \\ &\quad \omega_i(-2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{R_i\omega_i^2}} + \frac{1}{R_i\omega_i^2})^{1/2}\dot{z}_i(t) \end{aligned} \quad (15.222)$$

ce qui donne la loi de contrôle optimale.

Comportement de la structure complète

La matrice de gain est obtenue en assemblant le comportement de tous les modes contrôlés. Nous avons

$$-\mathbf{BKz} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1(\mathbf{r}_1) & \psi_1(\mathbf{r}_2) & \dots & \psi_1(\mathbf{r}_{N_c}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_n(\mathbf{r}_1) & \psi_n(\mathbf{r}_2) & \dots & \psi_n(\mathbf{r}_{N_c}) \end{bmatrix} \mathbf{Kz} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ z_n \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} \quad (15.223)$$

En définissant

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1) & \dots & \psi_1(\mathbf{r}_{N_c}) \\ \vdots & & \\ \psi_n(\mathbf{r}_1) & \dots & \psi_n(\mathbf{r}_{N_c}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{n2} \end{bmatrix} \quad (15.224)$$

la relation peut s'écrire

$$\mathbf{B}'\mathbf{K} = \mathbf{K}' \quad (15.225)$$

ce qui donne

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}'^{-1}\mathbf{K}' \quad (15.226)$$

Pour finir la mise en oeuvre du contrôleur, il faut pouvoir estimer les amplitudes modales à partir des déplacements et des vitesses mesurées en différents points de la structure. Cela peut être obtenu avec plus ou moins de précision en mettant en oeuvre des filtrages temporels et spatiaux sur les signaux des capteurs. On ne détaillera pas ici ces approches. Il faut être conscient aussi que toutes

les positions des capteurs et des actionneurs ne sont pas équivalentes. On évitera par exemple de placer des actionneurs ou des capteurs sur un noeud d'un mode. Des études plus poussées peuvent être menées pour déterminer des positions intéressantes pour ces points.

Les difficultés de mise en oeuvre de cette approche viennent du fait qu'on ne peut contrôler qu'un nombre fini de modes. Les modes non contrôlés peuvent perturber le système, surtout quand la largeur de la bande de fréquence à contrôler augmente. La matrice de gain \mathbf{G} telle que $\mathbf{u} = -\mathbf{G}\mathbf{x}$ pourrait aussi être obtenue par placement de pôles mais ne serait plus optimale.

On peut finalement appliquer les critères de contrôlabilité et d'observabilité à ce système. Pour la contrôlabilité, il faut que

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{2N-1}\mathbf{B}] \quad (15.227)$$

soit de rang $2N$. Cela nécessite que chaque ligne de \mathbf{B}' ait un coefficient non nul. Cela signifie qu'au moins un actionneur doit être en dehors d'un noeud de chaque mode. De la même manière pour l'observabilité, la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{2N-1} \end{bmatrix} \quad (15.228)$$

doit être de rang $2N$ avec \mathbf{C} donnée par 15.200. Dans le cas où il n'y a que des capteurs de déplacement, cela signifie que les colonnes de \mathbf{C} contenant les valeurs des modes propres doivent avoir au moins un coefficient non nul. Au moins un capteur doit se situer en dehors des noeuds de chaque mode.

Exemple

On considère à titre d'exemple le contrôle d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Le comportement est décrit par l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t) \quad (15.229)$$

où $w(x,t)$ est la flèche de la poutre au point x et à l'instant t , $f(x,t)$ est la distribution de force, E et I sont le module d'Young et le moment d'inertie. On suppose $0 \leq x \leq L$, avec L la longueur de la poutre. La poutre est simplement supportée et les conditions aux limites sont

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad (15.230)$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (15.231)$$

Les modes propres de la poutre sont les fonctions (en supposant $E = I = \rho = 1$)

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (15.232)$$

et la pulsation de résonance du mode i est

$$\omega_i = \left[\frac{i\pi}{L} \right]^2 \quad (15.233)$$

On suppose que le contrôle est effectué par une force ponctuelle située au point $x_c = L/6$ et un capteur situé au point x_e donnant le signal $y(t) = w(x_e, t)$. Le système de contrôle est conçu pour contrôler les trois premiers modes de vibration. Le vecteur d'état est donc

$$\mathbf{x} = {}^t [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2 \quad \dot{z}_3] \quad (15.234)$$

Les matrices de pondération pour le contrôle optimal sont

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\omega_i^2]_{i=1..3} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 0.1\mathbf{I} \quad (15.235)$$

On peut vérifier que la matrice de gain est alors donnée par

$$\mathbf{G} = {}^t [0.5448 \quad 5.018 \quad 18.303 \quad 3.162 \quad 3.1597 \quad 3.156] \quad (15.236)$$

Les figures 15.13 à 15.15 montrent le résultat du système contrôlé en terme de déplacement en fonction du temps, de signal envoyé à l'actionneur et d'énergie. On peut mesurer sur ces courbes l'efficacité du contrôle.

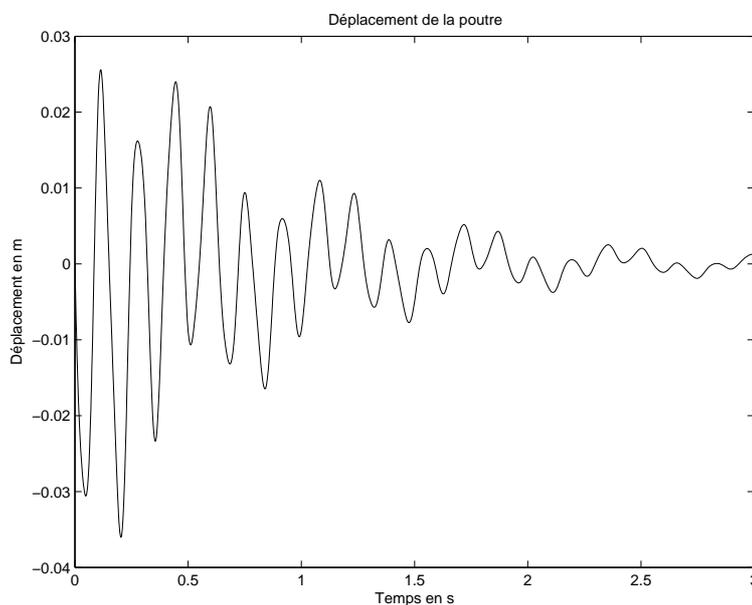


FIG. 15.13 – Déplacement au point $L/3$ du système contrôlé.

15.3.6 Exercices

1) On considère le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [2 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

*Le système est-il observable?

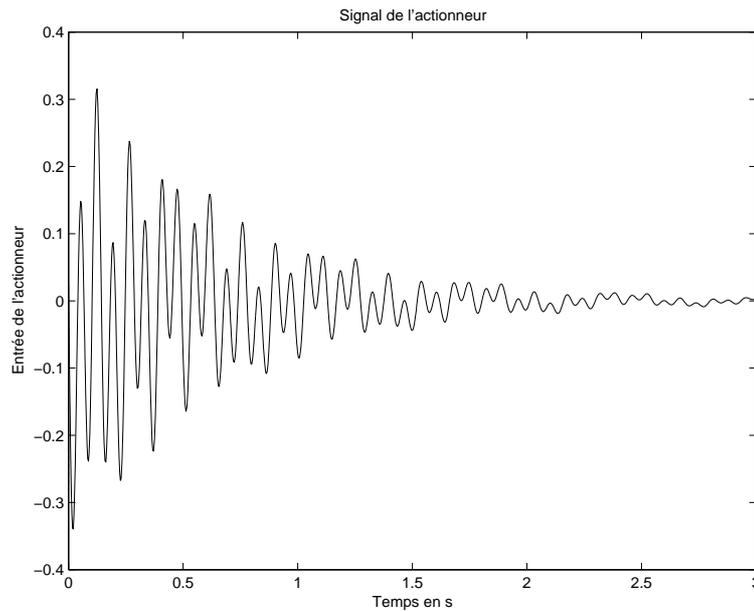


FIG. 15.14 – Signal envoyé à l'actionneur.

- *Le système est-il contrôlable ?
- *Quelle est la fonction de transfert du système ?
- *Le système est-il stable ?

2) Dans le cas du contrôle du système masse ressort de la figure 15.9, remplacer le contrôle optimal par un contrôle par placement de pôle, calculer la matrice de gain.

3) Dans le cas du contrôle du système masse ressort de la figure 15.9, calculer la fonction de transfert du système contrôlé pour un contrôle par un feedback sur le déplacement puis pour un contrôle par un feedback sur l'accélération.

4) En résolvant l'équation de Riccati par un programme matlab, retrouver le résultat de la formule 15.236

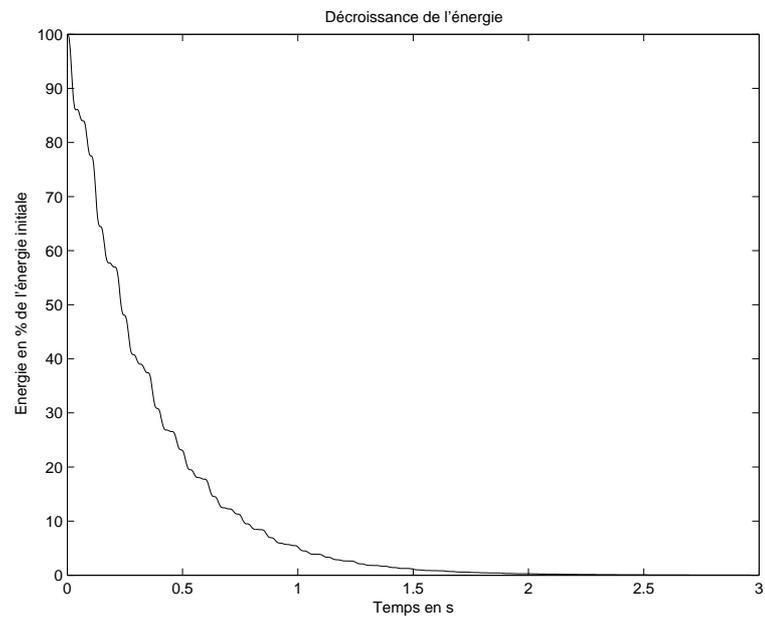


FIG. 15.15 – Décroissance de l'énergie contenue dans les premiers modes.

Annexe A

Devoirs des années passées

A.1 Année 2006

Questionnaire

24/05/2006

Répondre aux questions suivantes :

1. Une onde acoustique est elle une onde de compression ou une onde de cisaillement ?
2. Quel est le niveau en décibel d'une onde acoustique d'amplitude 10 Pa ?
3. Que sont les courbes isosoniques ?
4. Donner l'expression de la condition de radiation à l'infini quand la dépendance en temps est du type $e^{-i\omega t}$.
5. Sur quels phénomènes physiques est fondé le fonctionnement du microphone électrodynamique à bobine mobile ?
6. Citer cinq sources de bruit sur une voiture.
7. Je veux effectuer un calcul acoustique par éléments finis à 2000Hz du champ de pression dans un cube de côté 1m, combien de noeuds dois je utiliser au minimum pour avoir un calcul juste ?
8. Citer deux avantages des méthodes par équations intégrales sur les méthodes par éléments finis.
9. Quel est le niveau sonore résultant de la somme de deux sons incohérents de niveaux 70 dB chacun ?
10. Ecrire l'équation aux dérivées partielles régissant les vibrations libres de flexion d'une poutre homogène de section constante. Donner succinctement la démarche pour calculer les modes et les fréquences propres de vibration. Les modes sont-ils deux à deux orthogonaux ?, ortho-normés ?
11. Combien de solutions a l'équation de Helmholtz avec une condition de radiation à l'infini ? et sans condition de radiation ?
12. Comment sont reliées entre elles les fréquences centrales des tiers d'octave ?
13. Comment obtient on une analyse spectrale en tiers d'octave à partir d'une analyse en bandes fines ?

14. Comment se comporte une onde acoustique très loin des sources ?
15. A quoi sert la courbe de pondération A utilisée dans la mesure des niveaux sonores ?
16. Quel niveau sonore approximatif est il prudent de ne pas dépasser sur de longues durées pour éviter des problèmes de surdité ?
17. Dans un guide d'onde acoustique y a-t-il plus de modes propagatifs ou de modes évanescents ?
18. Soit un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ et soit $x(t)$ un signal d'énergie finie qui traverse le filtre, à la sortie on observe le signal $y(t)$.
 Donner la relation entre $x(t)$ et $y(t)$.
 Que représente la densité spectrale de $x(t)$?
 Soit $R_{xx}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.
 Rappeler la définition de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$.
 La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est-elle périodique ?
 Que vaut la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc ?
 Que représente physiquement la fonction d'autocorrélation d'un signal ?
 On note $R_{yy}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $y(t)$. En déduire (en le démontrant si possible) la relation entre $R_{xx}(\tau)$ et $R_{yy}(\tau)$.
19. Comment peut-on faire à partir des équations tridimensionnelles des vibrations d'un milieu continu solide pour trouver les équations des vibrations des poutres ou des plaques ? (donner les principes de la démarche sans écrire d'équations).

A.2 Année 2007

Devoir acoustique

20/06/2007

Durée 1h30

Exercice 1

On considère une source sphérique harmonique qui rayonne du son dans l'espace à la fréquence 1000Hz et avec une puissance de 1W . On s'intéresse aux diverses quantités suivantes à la distance de 0.3m .

1. Calculer l'intensité dans la direction de propagation
2. Calculer la pression en Pa
3. Calculer la vitesse particulaire du fluide
4. Calculer la différence de phase entre la pression et la vitesse
5. Calculer la densité d'énergie
6. Calculer le niveau sonore en décibel

Exercice 2

On considère le système de la figure 1 constitué d'un piston de masse M relié à un mur rigide par un ressort de raideur K et un amortisseur de constante C . On suppose que la pression dans le fluide ne dépend que de la variable x , que le guide d'onde est infini à droite et que sa section est S . On suppose de plus que les mouvements sont harmoniques de pulsation ω et engendrés par une force $F(t) = \text{Re}(F e^{i\omega t})$ agissant sur le piston.

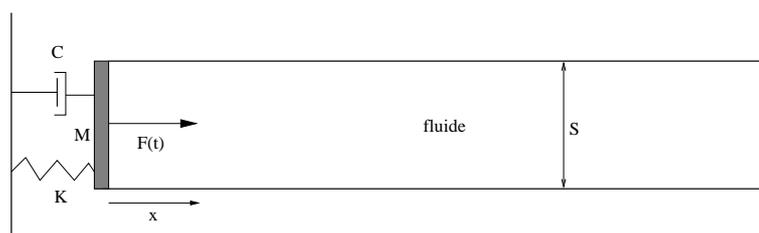


FIG. A.1 – Système couplé.

1. Ecrire l'équation de Hemholtz dans le fluide.
2. Ecrire l'équation du mouvement du piston de masse M .
3. Ecrire la continuité de la vitesse sur l'interface fluide solide.
4. Résoudre les équations précédentes pour trouver le mouvement du piston et la pression dans le fluide. (On supposera qu'aucune onde ne vient de la droite du guide d'onde).
5. Comment se traduit la présence du fluide sur le mouvement du piston ?

Exercice 3

On considère le pavillon acoustique de la figure A.2. On suppose que les parois du pavillon sont rigides et que la surface de la section x est $S(x)$.

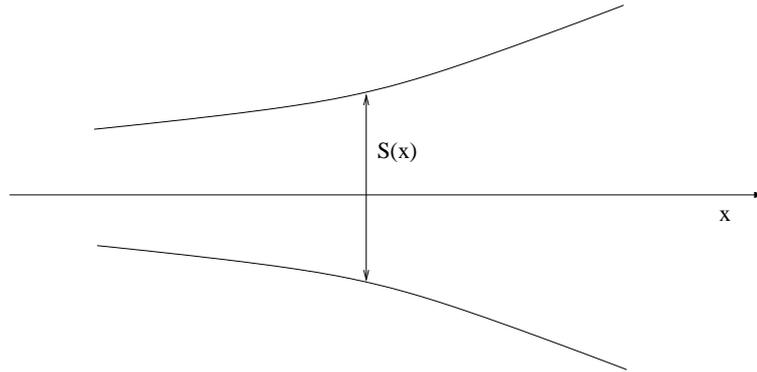


FIG. A.2 – Pavillon acoustique.

1. On suppose que la pression acoustique ne dépend que de la variable x . En intégrant l'équation des ondes entre les sections x et $x + dx$ en déduire l'équation vérifiée par $p(x)$.
2. Montrer que la relation précédente peut se mettre sous la forme

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4S^2} [(S')^2 - 2SS''] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} (S^{1/2}p) = 0$$

3. On suppose que $S(x) = \pi r^2(x)$ et que le pavillon est tel que la quantité $-m^2 = \frac{1}{4S^2} ((S')^2 - 2SS'')$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $r(x)$.
4. Donner la forme des solutions de cette équation pour $m > 0$.
5. Donner la solution pour le cas $m = 0$. Quelle est la forme obtenue ?
6. Donner la forme du champ de pression pour $m > 0$ en supposant la pression harmonique en temps et de pulsation ω .

Annexe B

Formulaire

B.1 Formules utiles

Vitesse du son	$c = 20\sqrt{T}$
Longueur d'onde	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$
Pression	$p = \frac{F}{S}$
Seuil d'audition	$p_0 = 2.10^{-5} Pa$
Puissance	$P = \frac{Energie}{Temps}$
Intensité	$I = \frac{Energie}{Surface \times Temps}$
Niveau de puissance (dB)	$L_w = 10 \log_{10}(\frac{P}{10^{-12}})$
Niveau de pression (dB)	$L_p = 20 \log_{10}(\frac{p}{2.10^{-5}})$
Niveau d'intensité (dB)	$L_I = 10 \log_{10}(\frac{I}{10^{-12}})$
Temps de réverbération	$TR = \frac{0,16V}{A}$

B.2 Coordonnées polaires

Divergence d'un vecteur

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.1})$$

Gradient d'une fonction scalaire

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.2})$$

Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{B.3})$$

B.3 Coordonnées sphériques

Divergence d'un vecteur

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{v_\theta}{r} \quad (\text{B.4})$$

Gradient d'une fonction scalaire

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{B.5})$$

Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.6})$$

Bibliographie

- [1] M. BRUNEAU, *Manuel d'Acoustique Fondamentale*, Hermès, Paris 1998.
- [2] R. JOSSE, *Notions d'acoustique*, Eyrolles, Paris, 1977.
- [3] P. LIÉNARD ET P. FRANÇOIS, *Acoustique industrielle et environnement*, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Eyrolles, Paris, 1983.
- [4] A.D. PIERCE, *Acoustics : An introduction to its physical properties and applications*, Mc Graw-Hill, 1981.
- [5] P.M. MORSE AND K.U. INGARD, *Theoretical Acoustics*, Mc Graw-Hill, 1961.
- [6] S.P. SINGAL, *Noise pollution and control*, Narosa Publishing House, 2000.
- [7] L. L. BERANEK AND I. L. VÉR, *Noise and vibration control engineering*, J. Wiley, 1992.
- [8] P.A. NELSON AND S.J. ELLIOTT, *Active control of sound*, Academic press, 1992.
- [9] R. OHAYON AND C. SOIZE, *Structural acoustics and vibration*, Academic press, 1998.
- [10] C. SOIZE, *Dynamique des structures*, Ellipses, 2001.