

Introduction à la méthode des volumes finis

J. Vovelle

September 12, 2018

1 Principe de conservation - Equation de conservation

On suppose connue l'étude du problème de Cauchy pour les lois de conservations scalaires hyperboliques ou paraboliques (*cf.* cours précédents du M2). On fera les rappels correspondants lorsque c'est nécessaire.

1.1 Loi de conservation : un exemple

Commençons par un exemple simple : soit un axe infini repéré par \mathbb{R} , vu comme la limite d'un cylindre infiniment mince, contenant un fluide de densité ρ en déplacement au cours du temps. On désigne par x la variable de position le long du cylindre (x parcourt \mathbb{R}) et on désigne par t la variable de temps (t parcourt $[0, +\infty[$). La densité est une fonction

$$\rho: \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Au temps t , la masse de fluide présente entre les abscisses x et y ($x < y$) est

$$\text{masse entre } x \text{ et } y \text{ au temps } t = \int_x^y \rho(z, t) dz.$$

En particulier, *en première approximation*, la masse de fluide contenue au temps t dans une tranche de cylindre repérée par les abscisses x et $x + dx$ est donnée par

$$\text{densité en } (x, t) \times \text{ "volume" de la tranche} = \rho(x, t) dx.$$

Soit maintenant q le débit de fluide : entre deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$), la masse de fluide traversant à l'abscisse x est

$$\int_{t_1}^{t_2} q(x, t) dt.$$

En particulier, *en première approximation*, la masse de fluide traversant la section de cylindre repérée par l'abscisses x entre les instants t et $t + dt$ est donnée par

$$\text{débit en } (x, t) \times \text{ laps de temps} = q(x, t) dt.$$

Question 1 *Quelle est l'équation (aux dérivées partielles) liant ρ et q ?*

1.2 Modèle du trafic routier

Avant de répondre à la question posée, observons qu'il est intéressant d'écrire une telle équation aux dérivées partielles si on a déjà une relation $q = f(\rho)$ (on peut alors calculer ρ). Un exemple de cette situation, c'est la *modélisation du trafic routier*. Je détaille ce modèle, car on l'étudiera par la suite.

Un modèle élémentaire (élémentaire, mais pertinent dans certaines situations) pour le trafic routier est donc le suivant : la route est sur une voie unique, droite, assimilée à l'axe réel \mathbb{R} . Les véhicules ne sont pas considérés isolément, mais (en prenant du recul), comme un tout : soit ρ la densité de véhicules, $\rho = 0$ correspondant à une route vide, $\rho = 1$ à des véhicules pare-choc contre pare-choc. Comment définit-t-on le débit q ? C'est là qu'on fait l'hypothèse de modélisation, qui peut être sujette à discussion.

Prenons $q = \rho v$ où v est la vitesse des véhicules supposée ne dépendre que de ρ : $v = v(\rho)$. L'exemple de la réalité conduit à prendre v décroissante en fonction de ρ et nulle lorsque $\rho = 1$ (embouteillage). On choisit par exemple $v = v_{\max}(1 - \rho)$. On obtient la relation

$$q = v_{\max}\rho(1 - \rho), \quad (1)$$

pour la modélisation du trafic routier.

1.3 Réponse à la Question 1

Répondons maintenant à la question ci-dessus : soit une tranche repérée par les abscisses x et $x + dx$ et considérée pendant les instants t et $t + dt$. On a, par *conservation de la masse*,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_x^{x+dx} \rho(z, t+dt) dz}_{\text{Masse de fluide entre } x \text{ et } x+dx \text{ à l'instant } t+dt} \\ &= \underbrace{\int_x^{x+dx} \rho(z, t) dz}_{\text{Masse de fluide entre } x \text{ et } x+dx \text{ à l'instant } t} \\ &+ \underbrace{\int_t^{t+dt} q(x, s) ds}_{\text{Masse de fluide entrée en } x} - \underbrace{\int_t^{t+dt} q(x+dx, s) ds}_{\text{Masse de fluide sortie en } x+dx}, \end{aligned}$$

soit, en *première approximation*, l'équation

$$(\rho(x, t + dt) - \rho(x, t))dx + (q(x + dx, t) - q(x, t))dt = 0. \quad (2)$$

On a, en *première approximation* de nouveau,

$$\rho(x, t + dt) - \rho(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)dt, \quad q(x + dx, t) - q(x, t) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, t)dx.$$

De (2), on déduit donc la *loi de conservation*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

La réponse à la Question 1 est donc (3). On appelle (3) une *loi de conservation*, bien que ce soit en réalité le nom attribué au principe physique sous-jacent (la conservation de la masse). Remarquons d'ailleurs que nous l'avons déduit (3) de ce principe physique (la conservation de la masse), de la définition de ρ et q , et enfin de certaines approximations non exactes sur lesquelles on reviendra plus loin. On cherchera à résoudre le problème d'évolution constitué de (3) et de la donnée initiale suivante

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

où ρ_0 connue (Problème de Cauchy).

Exercice 1 Que donne (3) dans le cas du modèle du trafic routier ? Soit

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/2 \\ x + 1/2 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 < x \end{cases}.$$

Vérifier que la fonction ρ définie par

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -x_*(t) \\ \frac{x}{2x_*(t)} + 1/2 & \text{si } -x_*(t) \leq x \leq x_*(t) \\ 1 & \text{si } x_*(t) < x \end{cases},$$

où

$$x_*(t) := 1/2 - v_{\max}t,$$

est solution du problème (3)-(4) sur $\mathbb{R} \times (0, \frac{1}{2v_{\max}})$. Que se passe-t-il au temps $t = \frac{1}{2v_{\max}}$? Interprétez le résultat en terme de trafic routier et en terme de perte de régularité pour les lois de conservation du premier ordre comme (3). Enfin, vous paraît-il pertinent de considérer le problème (3)-(4) avec une donnée ρ_0 non continue, par exemple

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \rho_0(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

(de nouveau, interprétez en terme de trafic routier).

2 Principe de conservation en dimension quelconque

Soit maintenant Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Notons $x \cdot y$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^d . Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, où chaque composante u_i , $1 \leq i \leq N$ de \mathbf{u} représente la densité d'une quantité physique considérée (densité de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, de courant, de chaleur, etc.) dans Ω . Soit, pour $1 \leq i \leq N$, $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^d$ le flux correspondant à u_i . Fixons $i \in \{1, \dots, N\}$ et supposons pour faciliter le vocabulaire employé que u_i est une densité d'énergie et supposons qu'il existe une source

ou un puit d'énergie dans le système représenté par une fonction f_i . On a alors pour tout ouvert ω régulier avec $\bar{\omega} \subset \Omega$, pour tout $t_1 < t_2$,

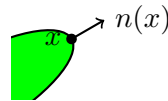
$$\text{Energie totale dans } \omega \text{ au temps } t = \int_{\omega} u_i(x, t) dx,$$

et

Flux d'énergie entrant dans ω entre les temps t_1 et t_2

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} \mathbf{q}_i(x, t) \cdot n(x) d\sigma(x) dt, \quad (5)$$

où $\partial\omega = \bar{\omega} \setminus \omega$ est la frontière de ω , $d\sigma$ la mesure de surface sur $\partial\omega$ et $n(x)$ la normale unitaire *sortante* (d'où le signe $-$ dans (5)) à ω en $x \in \partial\omega$.



Enfin, on a

Apport ou consommation d'énergie dans ω entre les temps t_1 et t_2

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} f_i(x, t) dx dt,$$

avec apport (respectivement production) d'énergie en (x, t) selon que $f_i(x, t) > 0$ ou $f_i(x, t) < 0$. De nouveau, on se pose la

Question 2 *Quelle est l'équation (aux dérivées partielles) liant u_i et \mathbf{q}_i ?*

Pour y répondre, supposons que u_i , \mathbf{q}_i , f_i sont des fonctions régulières, i.e. u_i , \mathbf{q}_i de classe C^1 et f_i continue sur $\Omega \times (0, +\infty)$. On a alors, pour tout ouvert ω régulier avec $\bar{\omega} \subset \Omega$, pour tout $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\omega} u_i(x, t_2) dx}_{\text{Quantité d'énergie dans } \omega \text{ à l'instant } t_2} \\ & \quad - \underbrace{\int_{\omega} u_i(x, t_1) dx}_{\text{Quantité d'énergie dans } \omega \text{ à l'instant } t_1} \\ & = \underbrace{- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} \mathbf{q}_i(x, t) \cdot n(x) d\sigma(x) dt}_{\text{Flux d'énergie entrant dans } \omega \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2} \\ & \quad + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} f_i(x, t) dx dt}_{\text{Apport/Consommation d'énergie dans } \omega \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (u_i(x, t_2) - u_i(x, t_1)) dx \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} \mathbf{q}_i(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) d\sigma(x) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} f_i(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (6)$$

En utilisant la formule de Gauss-Green pour $\mathbf{q} = (q_k)_{k=1, \dots, d}$

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{q}_i(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) d\sigma(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q}_i(x, t) dx, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} := \sum_{k=1}^d \frac{\partial q_k}{\partial x_k},$$

et en réécrivant

$$u_i(x, t_2) - u_i(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) dt,$$

on déduit de (6),

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}_i(x, t) - f_i(x, t) \right] dx dt = 0.$$

Cela étant vérifié pour tout ouvert ω régulier avec $\bar{\omega} \subset \Omega$, et pour tout $t_1 < t_2$, il s'en suit¹ que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}_i(x, t) - f_i(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

En collectant ces équations pour tout i , et en on obtient donc le *système de lois de conservation*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}_i(x, t) = f_i(x, t), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (7)$$

3 Exemples de systèmes de lois de conservation

3.1 Equations d'ordre un

Il s'agit de systèmes de lois de conservation dans lesquels \mathbf{q}_i est lié à $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1, \dots, N}$ (vecteur de taille N) par une relation de type $\mathbf{q}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{u})$ pour tout i . On verra au chapitre suivant les systèmes de lois de conservation d'ordre deux dans lesquels $\mathbf{q}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$.

3.1.1 Modélisation du trafic routier

Déjà vu au paragraphe 1.2, $q = u(1 - u)$, $f = 0$ (dimension $d = 1$, nombre d'équations $N = 1$).

¹comme les fonctions caractéristiques des ensembles $\omega \times (t_1, t_2)$ forment un ensemble dense dans $L^2(\Omega \times (0, +\infty))$, on a en effet $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}_i(x, t) - f_i(x, t) = 0$ presque partout, donc partout car la fonction membre de gauche est continue

3.1.2 Equation de Burgers non visqueuse

Considérons un ensemble de points matériels répartis sur l'axe réel en évolution libre (il ne sont soumis à aucune force). Soit u le *champ de vitesse* correspondant : par définition, la particule située en x au temps t a pour vitesse $u(x, t)$. Supposons u bien défini et régulier sur $\mathbb{R} \times [0, T)$, $T > 0$. Soit $x = \varphi(t)$ la trajectoire d'une particule donnée. Sa vitesse au temps t est $\dot{\varphi}(t)$, qui coïncide avec $u(\varphi(t), t)$ par définition de u :

$$\dot{\varphi}(t) = u(\varphi(t), t). \quad (8)$$

En dérivant par rapport à t et en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\varphi(t), t) + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), t).$$

Les particules n'étant soumises à aucune force, leur accélération est nulle : $\ddot{\varphi}(t) = 0$. D'autre part, en remplaçant $\dot{\varphi}(t)$ grâce à (8), on obtient

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on voit donc apparaître l'équation de Burgers non visqueuse :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

qui correspond à (7) avec $d = 1$, $N = 1$, $q = \frac{u^2}{2}$, $f = 0$.

Exercice 2 Soit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

En interprétant à l'aide du modèle du système de particules, que vous semble être la solution de (9) pour cette donnée initiale ? Imaginez d'autres configurations initiales et l'évolution correspondante. Attention, l'interprétation à l'aide du modèle du système de particules pour (9) n'est pas toujours pertinente (pouvez-vous illustrer cela ?).

3.1.3 Equation de transport

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur donné. Notons $x \cdot y$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^d . On rappelle la notation différentielle ∇u pour le vecteur des dérivées partielles $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)^t$. L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (10)$$

est un cas particulier² de (7) avec $N = 1$, $\mathbf{q} = u\mathbf{a}$, $f = 0$. Le terme “équation de transport” se justifie en particulier en observant que, si u_0 est une fonction régulière par exemple, alors la solution de (10) avec u_0 pour donnée initiale est

$$u(x, t) = u_0(x - t\mathbf{a}), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

Exercice 3 Faire une représentation graphique dans le cas $d = 1$, $\mathbf{a} = \pm 1$.

Exercice 4 Soit maintenant \mathbf{a} un champ de vecteur sur \mathbb{R}^d , i.e. $\mathbf{a}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose \mathbf{a} Lipschitzienne et bornée sur \mathbb{R}^d . On suppose $\operatorname{div}(\mathbf{a})(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Justifier que l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (11)$$

est un cas particulier de (7), puis résoudre (11) avec donnée initiale régulière (disons C^1) u_0 . On introduira le flot de \mathbf{a} (on rappelle que le flot de \mathbf{a} est la solution $\phi_t(x)$ de $\dot{\phi}_t(x) = \mathbf{a}(\phi_t(x))$ t.q. $\phi_0(x) = x$).

3.1.4 Equation d'Euler isentropique

Ici dimension $d = 1$, nombre d'équations $N = 2$, les inconnues sont ρ (densité) et u (vitesse) ou bien ρ et $q := \rho u$ (impulsion). On écrit en général les équations en terme de ρ et u :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p(\rho)) = \rho f. \end{cases} \quad (12)$$

Dans la deuxième équation, f représente la densité volumique de forces extérieures et p est la pression, fonction de ρ t.q. $p'(\rho) \geq 0$; (12) est étudiée par exemple avec $p(\rho) = \kappa \rho^\gamma$, $\gamma > 1$.

Exercice 5 Dans le cas $f = 0$, réécrire (12) sous la forme (7), ou plutôt (la variable u étant déjà utilisée et l'équation étant du premier ordre), réécrire (12) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \frac{\partial}{\partial x} F(V) = 0, \quad V := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}.$$

3.1.5 Equation de Saint-Venant

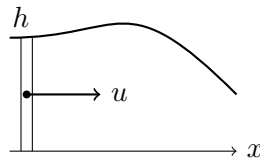
Ce sont les équations des écoulements en eaux peu profondes. Ici dimension $d = 1$ (pour un écoulement unidimensionnel), nombre d'équations $N = 2$. Les inconnues sont

²utiliser, pour le démontrer, la formule de calcul vectoriel $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = \nabla u \cdot \mathbf{a} + u \operatorname{div}(\mathbf{a})$

h (densité) et u (vitesse) ou bien h et $q := hu$ (charge). Les équations de Saint-Venant sont (dans le cas d'un fond plat)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial t} (hu) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial t} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

où g est l'accélération de la pesanteur.



3.2 Equations d'ordre deux

Il s'agit ici de systèmes de lois de conservation dans lesquels $\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$.

3.2.1 Equation de la chaleur

Ici $N =$ nombre d'équations $= 1$ et u est la température. La densité de chaleur est ρcu où ρ est la densité du matériau considéré (constante) et c sa capacité calorifique (constante), on prend $\rho = 1, c = 1$ ici. Le flux de chaleur \mathbf{q} est donné par la *Loi de Fourier*

$$\mathbf{q} = -D\nabla u,$$

où la matrice (définie positive) D dépend du matériau. On déduit de (7) l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D\nabla u) = f.$$

Dans le cas particulier $D = \operatorname{Id}$, et en utilisant l'identité vectorielle³ $\operatorname{div}\nabla = \Delta$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f,$$

qui est en général l'équation à laquelle on fait référence en parlant d'équation de la chaleur.

³on rappelle que $\Delta u = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$

3.2.2 Equation du trafic routier d'ordre deux

On reprend la modélisation du trafic routier du paragraphe 1.2. Pour inclure le fait que les conducteurs anticipent et adaptent leur conduite selon l'état du trafic en amont sur une distance caractéristique $\varepsilon > 0$, on corrige la vitesse :

$$v = v_{\max}(1 - \rho) - \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (14)$$

On obtient alors (7) avec $N = 1$, $d = 1$, $u = \rho$, $q = v_{\max}(1 - \rho) - \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}$, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (v_{\max} \rho (1 - \rho)) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) = 0.$$

Exercice 6 *Interprétez la correction de la vitesse dans (14). Que signifierait le signe + devant $\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}$ au lieu du signe - ?*

3.2.3 Equation de Burgers

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Ici $N = 1$, $d = 1$, $q = \frac{u^2}{2} - \frac{\partial u}{\partial x}$.

3.2.4 Equation de Navier-Stokes

Voir http://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations

4 Objet du cours

On a vu aux paragraphes 1.3 et 2 comment déduire l'équation aux dérivées partielles (7) du principe de conservation. On a vu d'autre part (cf Exercice 1 et Exercice 2) qu'il peut être pertinent de considérer des solutions non continues. On rappelle que, dans ce cas, on donne un sens à (7) en utilisant le concept de solution faible :

Définition 1 *Soit, pour $i = 1, \dots, N$, $u_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times (0, +\infty))$ et $\mathbf{q}_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times (0, +\infty))^N$. On dit que $((u_i), (\mathbf{q}_i))$ est solution faible de (7) si*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left(u_i(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \mathbf{q}_i(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) + f_i(x, t) \varphi(x, t) \right) dx dt = 0,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times (0, +\infty))$.

Un problème qui apparaît alors, toujours dans le cas où les u_i et \mathbf{q}_i sont des fonctions peu régulières est le suivant :

Dériver (7) (sous sa forme faible) à partir du principe de conservation (D)

Jusqu'ici on a utilisé de manière cruciale la régularité C^1 de u_i et \mathbf{q}_i pour montrer (D), que ce soit pour faire les approximations du paragraphe 1.3 ou les intégrations du paragraphe 2. On va voir dans ce cours que l'étude de la méthode des volumes finis permet de montrer ce résultat pour des solutions générales. Mais avant tout, la méthode des volumes finis fournit une méthode d'approximation numérique pour calculer de manière approchée les solutions de systèmes de type (7). Avec ce point de vue, de nouvelles problématiques apparaissent. Pour bien les comprendre, il est nécessaire de tester la méthode en pratique, *ce qu'on ne fera pas dans ce cours*. On va cependant traiter de quelques questions d'analyse numérique, bien qu'*il est fondamental de mettre en oeuvre la méthode pour la comprendre dans le cadre des problèmes d'approximation numérique*. Avant d'introduire la méthode des volumes finis, on commence d'ailleurs par un problème d'analyse numérique pour l'équation de transport. Le plan du cours est le suivant :

1. Cours no 1 : ce présent cours d'introduction,
2. Cours no 2 : la méthode des volumes finis appliquées aux équations paraboliques (lois de conservation d'ordre 2 avec $N = 1$, on traitera la cas $d = 1$ seulement)
3. Cours no 3 : la méthode des volumes finis appliquées aux lois de conservation d'ordre un (lois de conservation d'ordre 1 avec $N = 1$, on traitera le cas d quelconque).

Exercice 7 (Non-unicité des solutions faibles) Soit $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit

$$A(\rho) := v_{\max}\rho(1 - \rho),$$

et soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial A(\rho)}{\partial x} = 0, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0. \end{cases} \quad (15)$$

On dit que $\rho \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ est solution faible de (15) si

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\rho(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + A(\rho(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Soit alors

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Montrer que $\rho(x, t) := \rho_0(x)$ est solution faible de (15). En reliant (15) à la modélisation du trafic routier, interpréter ce résultat. Donne “la” bonne solution (quel est le nom qu’on lui donne) correspondant à la donnée initiale (16).

5 Un problème d’analyse numérique

Soit la loi de conservation scalaire (scalaire signifiant N =nombre d’équations= 1), d’ordre un, de type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A}(u) = 0. \quad (17)$$

On considère le cas élémentaire d =dimension= 1, $\mathbf{A}(u) = u$. On cherche les solutions u 1-périodiques en x de l’équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \quad (18)$$

On connaît explicitement les solutions, c’est l’objet de l’exercice suivant.

Exercice 8 Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ fonction 1-périodique. En adaptant la définition de solution faible donnée dans l’exercice 7, proposer une notion de solution faible (dans $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$) pour le problème (18) avec donnée $u|_{t=0} = u_0$, puis montrer que

$$u(x, t) := u_0(x - t)$$

est une solution faible.

5.1 Schéma aux différences finies centré

Avec l'approximation des solutions de (17) en vue, on définit d'abord le schéma numérique suivant pour l'approcher les solutions de (18) : soit k le pas de temps, $h = \frac{1}{L}$ ($L \in \mathbb{N}^*$) le pas d'espace. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, L-1\}$, $t_n = nk$, $x_i = ih$ et u_i^n la valeur approchée de u solution de (18) au point (x_i, t_n) . En assimilant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h},$$

on définit le schéma

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq i \leq L-1,$$

soit encore

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i-1}^n - u_{i+1}^n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq i \leq L-1, \quad (19)$$

en posant $\lambda = \frac{k}{2h}$. Pour compléter (19), il faut prescrire $(u_i^n)_{0 \leq i \leq L-1}$ au temps $n = 0$: on pose

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_0(x) dx, \quad 0 \leq i \leq L-1. \quad (20)$$

Il faut aussi préciser les valeurs u_{-1}^n et u_L^n dans (19) pour, respectivement, $i = 0$ et $i = L-1$. On prend

$$u_{-1}^n = u_{L-1}^n \text{ et } u_L^n = u_0^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

pour assurer la périodicité en espace. Voici alors le résultat obtenu en partant du créneau

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases}.$$

Résultat : Voir la figure 1.

En rouge la solution exacte, en bleu la solution numérique. Avec le temps, les oscillations augmentent et la solution numérique finit par exploser. Bien sûr une telle approximation numérique n'est pas acceptable.

Remarque 2 *On peut montrer (une fois qu'on a défini ces notions) que le schéma aux différences finies centré n'est pas stable, ni au sens L^∞ , ni au sens L^2 , ni au sens de Von Neumann, voir [EGH00].*

6 La méthode des volumes finis

6.1 Maillage

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d (ou bien le tore \mathbb{T}^d de dimension d si on veut résoudre une équation avec données périodiques). Un *maillage* de Ω est une famille \mathcal{T} de sous ensembles connexes de Ω . Chaque $K \in \mathcal{T}$ est appelé *volume de contrôle*. On impose que chaque

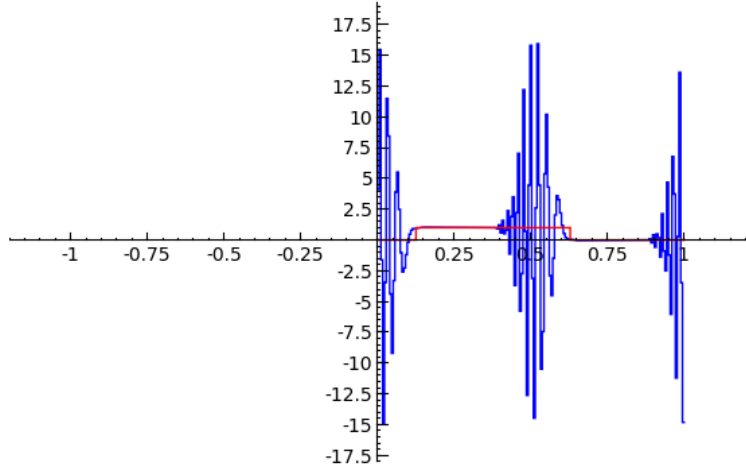


Figure 1: Solution à $t=0.125$

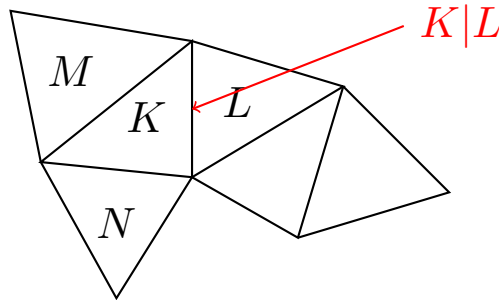
$K \in \mathcal{T}$ est ouvert, que l'union sur \mathcal{T} des \overline{K} est $\overline{\Omega}$ et que les interfaces sont contenus dans des hyperplans : pour tous $K, L \in \mathcal{T}$ distincts, $\overline{K} \cap \overline{L}$ est inclus dans un hyperplan. Pour $K, L \in \mathcal{T}$ deux volumes de contrôle distincts, on note $K|L := \overline{K} \cap \overline{L}$ cet interface. Soit $K \in \mathcal{T}$. On note aussi (\mathcal{N} pour "neighbors")

$$\mathcal{N}(K) = \{L \in \mathcal{T}; L \neq K, K|L \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des voisins de K ,

$$\partial K = \bigcup_{L \in \mathcal{N}(K)} K|L$$

la frontière de K , qui est polygonale en dimension $d = 2$, polyédrale en dimension $d \geq 3$.



Enfin on note $|K|$ pour la mesure Lebesgue d -dimensionnelle et $|\partial K|$ (respectivement $|K|L|$) pour la mesure $(d - 1)$ -dimensionnelle de ∂K (respectivement de $K|L$).

6.2 Schéma Volume Fini

Soit à résoudre le système de lois de conservation (7). On va se limiter dans ce cours au cas où on utilise le même maillage pour toutes (pour les N) équations, il suffit donc de décrire la méthode dans le cas d'une équation ($N = 1$). Soit donc à résoudre

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t) = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (22)$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{A}(u)$ (ordre un) ou bien $\mathbf{q} = \mathbf{A}(u, \nabla u)$ (ordre deux).

Remarque 3 On s'intéresse aussi au cas stationnaire (u est indépendant du temps), soit

$$\operatorname{div} \mathbf{q}(x, t) = f, \quad x \in \Omega. \quad (23)$$

On remarque d'ailleurs que (22) peut toujours s'écrire sous la forme (23) en posant

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (0, +\infty), \quad \tilde{x} = (x, t), \quad \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(x, t) \\ u(x, t) \end{pmatrix}.$$

Soit $k > 0$ le pas de temps, soit \mathcal{T} un maillage de Ω , de taille

$$h := \sup_{K \in \mathcal{T}} \operatorname{diam}(K),$$

où $\operatorname{diam}(A)$ est le diamètre d'un sous ensemble A de \mathbb{R}^d :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} |x - y|,$$

avec $|x|$ = norme euclidienne de x . Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nk$. On approche une solution u de (22) par une fonction $u_{h,k}$ constante dans chaque maille espace-temps $K \times (t_n, t_{n+1})$:

$$u_{h,k}(x, t) = \text{constante} = u_K^n, \quad (x, t) \in K \times (t_n, t_{n+1}).$$

C'est le principe de bilan et de conservation qui permet de calculer les u_K^n : on pose (en interprétant $u_{h,k}$ comme une densité de masse par exemple)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\text{Masse dans } K \text{ au temps } t_{n+1}}_{|K|u_K^{n+1}} - \underbrace{\text{Masse dans } K \text{ au temps } t_n}_{|K|u_K^n} \\ &= - \underbrace{\text{Flux de masse sorti par } \partial K \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{kQ_{\partial K}^n} \\ & \quad + \underbrace{\text{Création/Consommation de masse dans } K \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k|K|f_K^n}. \end{aligned}$$

En décomposant le flux $Q_{\partial K}^n$ selon chaque interface, on obtient donc l'équation

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{k}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} Q_{K \rightarrow L}^n + k f_K^n, \quad (24)$$

où $Q_{K \rightarrow L}^n$ désigne le flux de K vers L sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) . On prend en général

$$f_K^n = \frac{1}{k|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K f(x, t) dx dt.$$

La *conservation* (de la masse, de l'énergie, etc. selon la signification de u) impose la relation

$$Q_{K \rightarrow L}^n = -Q_{L \rightarrow K}^n, \quad \forall K, L \in \mathcal{T}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

c'est-à-dire "flux sortant de K entrant en L " = - "flux sortant de L entrant en K ".

L'équation (24) est la base de la méthode des volumes finis. Elaborer une méthode des volumes finis, c'est déterminer un choix de flux numériques $Q_{K \rightarrow L}^n$ vérifiant (au moins) la condition de conservation (25). Dans la suite on va voir comment procéder pour les équations d'ordre deux en dimension $d = 1$ (Cours no 2), puis pour les équations d'ordre un en dimension quelconque (Cours no 3), et on verra aussi au passage comment prendre en compte les données initiales et les données aux bord (s'il y en a) dans la méthode.

7 Références

Chapitres 1-2-3. Voir le livre de Dafermos [Daf10] pour le passage du principe de conservation au système de lois de conservation (7) (attention, dans [Daf10] c'est bien plus général mais aussi bien plus ardu que le paragraphe 2). Voir le livre de Serre [Ser96] pour une autre introduction et d'autres exemples aux lois de conservation.

Chapitre 6. Ma référence est le livre de Eymard, Gallouët, Herbin [EGH00]. Voir aussi les ouvrages de Godlewski, Raviart [GR96], Leveque [LeV02], et Bouchut, [Bou04].

8 Solution des exercices

8.1 Exercice 1

On vérifie en effet que ρ est solution, au moins presque partout dans $\mathbb{R} \times (0, \frac{1}{2v_{\max}})$ (c'est-à-dire en dehors des deux droites $\{x = \pm x_*(t)\}$). En effet ρ est C^1 sur $\mathbb{R} \times (0, \frac{1}{2v_{\max}}) \setminus \{x = \pm x_*(t)\}$. On calcule, en notant $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2x_*(t)} \mathbf{1}_{(-x_*(t), x_*(t))}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-\dot{x}_*(t)x}{2x_*^2(t)} \mathbf{1}_{(-x_*(t), x_*(t))}.$$

L'équation est vérifiée dans $\{|x| > x_*(t)\}$ et dans le cône $\{|x| < x_*(t)\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{\max} \rho (1 - \rho)) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{\max} (1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &= \frac{-\dot{x}_*(t)x}{2x_*^2(t)} - v_{\max} \frac{x}{x_*(t)} \frac{1}{2x_*(t)} \\ &= \frac{x}{2x_*^2(t)} (-\dot{x}_*(t) - v_{\max}) = 0, \end{aligned}$$

puisque $\dot{x}_*(t) = -v_{\max}$. Au temps $t = \frac{1}{2v_{\max}}$, $x \mapsto \rho(x, t)$ devient discontinue. L'évolution décrite est la suivante : au temps 0, la densité de véhicule augmente de 0 à 1 entre $-1/2$ et $1/2$, $\rho = 1$ signifiant qu'un embouteillage commence à $x = 1/2$. Avec le temps, les véhicules viennent s'empiler dans l'embouteillage. Au temps $t = \frac{1}{2v_{\max}}$, tous les véhicules sont pris dans l'embouteillage. La route est vide à gauche (pour $x < 0$). Pour $t > \frac{1}{2v_{\max}}$ la solution va donc être stationnaire : $\rho(x, t) = 0$ si $x < 0$, 1 si $x > 0$.

Il est en effet pertinent de considérer le problème (3)-(4) avec une donnée ρ_0 non continue. L'exemple

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

décrit la situation à un feu rouge, qui passe au vert à $t = 0$. L'exemple

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

décrit une nouvelle fois les véhicules venant s'empiler dans un embouteillage. Comme il ne cesse d'arriver de nouveaux véhicules (la densité à gauche = $1/2$ n'est jamais nulle), la limite de l'embouteillage se déplace *vers la gauche*. On verra d'ailleurs que la solution est $\rho(x, t) = \rho_0(x + ct)$, $c := \frac{v_{\max}}{2}$. On a donc une onde (dite "onde de choc") se déplaçant vers la gauche (à vitesse c) dans un milieu constitué lui d'éléments (les véhicules) se déplaçant vers la droite.

8.2 Exercice 2

Dans la situation décrite, au temps $t = 0$ des particules avec vitesse -1 sont situées à gauche de 0, des particules avec vitesse $+1$ sont situées à droite de 0. On peut imaginer qu'elles se bloquent mutuellement en $x = 0$. La situation n'évolue alors pas au cours du temps : $u(x, t) = u_0(x)$, $\forall t$ est la solution correspondant à cette donnée initiale (état stationnaire). Pour la dernière question : en partant cette fois-ci de

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

et avec l'interprétation "particules en mouvement sous u ", il semble que la solution doivent être

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ \text{non définie} & \text{si } -t < x < t, \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases},$$

(non définie car il n'y a pas de particules à cet endroit !). Cependant la solution réelle de l'équation est bien définie partout. Elle est donnée (vérifier qu'on obtient bel et bien une solution) par

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{si } -t < x < t. \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases}.$$

8.3 Exercice 3

Voir cours : le graphe de u_0 est translaté de $\pm t$.

8.4 Exercice 4

En posant $\mathbf{A}(u) = \mathbf{a}u$, on a

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(u)) = \operatorname{div}(\mathbf{a})u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = \mathbf{a} \cdot \nabla u,$$

puisque $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0$: (11) est donc un cas particulier de (7).

Le flot de \mathbf{a} est défini pour tout temps car \mathbf{a} est Lipschitz et borné. On a, pour toute fonction C^1 φ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\phi_t(x), t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\phi_t(x), t) + \dot{\phi}_t(x) \cdot \nabla \varphi(\phi_t(x), t) \\ &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(y, t) + \mathbf{a}(y) \cdot \nabla \varphi(y, t) \right]_{y=\phi_t(x)}. \end{aligned}$$

Si u est solution C^1 de (11), on a donc, au point $(\phi_t(x), t)$, $0 = \frac{d}{dt}u(\phi_t(x), t)$, d'où

$$u(\phi_t(x), t) = u_0(x).$$

Puisque $x \mapsto \phi_t(x)$ est inversible d'inverse $\phi_{-t}(x)$, on a finalement

$$u(x, t) = u_0(\phi_{-t}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

8.5 Exercice 5

On a

$$F \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p(\rho) \end{pmatrix}.$$

8.6 Exercice 6

L'interprétation de la correction de la vitesse dans (14) est décrite dans le paragraphe même. Bien remarquer que si la densité de trafic en aval (c'est-à-dire devant les conducteurs) augmente (*resp.* diminue), soit $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ (*resp.* $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$), alors les conducteurs freinent (*resp.* accélèrent) plus que dans le cas sans correction puisque

$$-\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0, \quad \text{resp.} \quad -\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0.$$

Si on met un signe + devant $\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}$ au lieu du signe -, c'est le contraire ! On peut imaginer les dégâts, ou plutôt l'impossibilité de cette situation. Mathématiquement, le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (v_{\max} \rho (1 - \rho)) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) = 0$$

est *mal-posé* (pas de solution dans les espaces "usuels").

8.7 Exercice 7

On vérifie directement (calcul) que ρ est solution faible (car $A(0) = A(1) = 0$, reste alors l'intégrale en temps qui se compense avec le terme à $t = 0$).

En reliant (15) à la modélisation du trafic routier, on obtient la situation suivante : le feu rouge (en $x = 0$) passant au vert, les véhicules (situés dans $x < 0$) ne bougent pas ! Dans la réalité, les véhicules avancent, et progressivement la densité en un point $x < 0$ va se raréfier. La solution (qui est la "bonne" solution, comme on le verra dans le cours no 3) correspondante s'écrit

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -v_{\max}t \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2v_{\max}t} & \text{si } -v_{\max}t < x < v_{\max}t \\ 0 & \text{si } x > v_{\max}t \end{cases}$$

On appelle cette solution "onde de détente".

La conclusion de cet exercice, c'est qu'il n'y a pas nécessairement unicité des solutions faibles. C'est un problème qui concerne les équations d'ordre un. On sait le résoudre dans le cas $N = 1$ (une équation) en dim d quelconque (voir Cours no 3). On sait aussi le résoudre (très difficile !) de manière partielle dans le cas $N > 1$ (système d'équations), $d = 1$. Le cas $N > 1, d > 1$ est ouvert !

8.8 Exercice 8

On dit que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ 1-périodique en x est solution faible de (18) avec donnée $u|_{t=0} = u_0$ si

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Il est alors immédiat (changement de variable $x' = x - t$) de vérifier que

$$u(x, t) := u_0(x - t)$$

est une solution faible. (Remarque : dans ce cas particulier (équation *linéaire*), c'est l'*unique* solution faible).

References

- [Bou04] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [Daf10] C.M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, third ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [LeV02] R.J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Ser96] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation. I*, Fondations. [Foundations], Diderot Editeur, Paris, 1996, Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].