

# La méthode des volumes finis pour les équations paraboliques

J. Vovelle

September 12, 2018

## Abstract

On étudie dans ce deuxième cours la méthode des volumes finis appliquée aux équations paraboliques, en dimension 1.

## 1 La méthode des volumes finis en dimension 1

On commence par reprendre la fin du cours précédent pour écrire la méthode des volumes finis en dimension 1 spécifiquement. Ici  $\Omega$  est un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Un maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  est une suite d'intervalles ouverts  $(K_i)_{i=0,\dots,L-1}$ . En notant  $x_{i-1/2} < x_{i+1/2}$  les extrémités de  $K_i$ , on a

$$K_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{L-1} [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

et l'interface  $K_i|K_j$  est réduit au point  $x_{i\pm 1/2}$  selon que  $j = i \pm 1$ . Soit donc à approcher, par la méthode des volumes finis, le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) = f, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

par  $u_{h,k}$  constante sur chaque maille espace-temps  $K_i \times (t_n, t_{n+1})$  :

$$u_{h,k}(x, t) = u_i^n, \quad (x, t) \in K_i \times (t_n, t_{n+1}).$$

On rappelle que  $k > 0$  est le pas de temps,  $t_n = nk$  et  $h$  est le pas d'espace,  $h = \sup_{0 \leq i \leq L-1} h_i$  où  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  est la longueur de  $K_i$ . Le principe de bilan donne

(avec  $u$  interprété comme une densité de masse)

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\text{Masse dans } K_i \text{ au temps } t_{n+1}}_{h_i u_i^{n+1}} - \underbrace{\text{Masse dans } K_i \text{ au temps } t_n}_{h_i u_i^n} \\
&= - \underbrace{\text{Flux de masse sortant de } K_i \text{ entrant dans } K_{i+1} \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k Q_{i \rightarrow i+1}^n} \\
&\quad - \underbrace{\text{Flux de masse sortant de } K_i \text{ entrant dans } K_{i-1} \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k Q_{i \rightarrow i-1}^n} \\
&\quad + \underbrace{\text{Création/Consommation de masse dans } K_i \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k h_i f_i^n}.
\end{aligned}$$

On a donc l'équation

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} (Q_{i \rightarrow i+1}^n + Q_{i \rightarrow i-1}^n) + k f_i^n, \quad (2)$$

avec

$$f_i^n := \frac{1}{k h_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{K_i} f(x, t) dx dt. \quad (3)$$

La conservation de la masse impose “flux sortant de  $K_j$  entrant en  $K_{j+1}$ ” = - “flux sortant de  $K_{j+1}$  entrant en  $K_j$ ”, *i.e.*

$$Q_{j \rightarrow j+1}^n = -Q_{j+1 \rightarrow j}^n. \quad (4)$$

**Remarque 1** En notant  $Q_{j+1/2}^n = Q_{j \rightarrow j+1}^n$  on a donc (avec  $j = i - 1$  dans (4)),  $Q_{i \rightarrow i-1}^n = -Q_{i-1/2}^n$ . De (2), on déduit donc

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} (Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n) + k f_i^n, \quad (5)$$

où  $f_i^n$  est donné par (3).

## 2 Equation parabolique en dimension 1

Soit  $T > 0$ . On considère l'équation

$$u_t - (a u_x)_x = f \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \quad (6)$$

où  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  est l'inconnue,  $a \in L^\infty((0, 1))$  est une fonction strictement positive p.p. indépendante du temps: il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\alpha \leq a(x) \text{ pour presque tout } x \in (0, 1), \quad (7)$$

et  $f \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ . On a utilisé les notations

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_x := \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8)$$

pour les dérivées partielles. Dans le cas  $a \equiv 1$ , (6) est l'équation de la chaleur en dimension 1. Pour compléter (6), on donne une condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ dans } (0, 1), \quad (9)$$

avec  $u_0 \in L^2(0, 1)$  et des conditions aux limites, par exemple des conditions aux limites périodiques:

$$u(0, t) = u(1, t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Il existe alors un unique  $u \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, T]; H^1(0, 1))$  1-périodique en temps solution faible de (6)-(9)-(10) au sens où

$$\int_0^T \int_0^1 (uv_t - au_x v_x - fv) dx dt = 0, \quad (11)$$

pour tout  $v \in H_0^1((0, 1) \times (0, T))$ , et  $u(0) = u_0$  dans  $L^2(0, 1)$ . En effet (rappel) pour l'unicité on se ramène, par linéarité au cas  $f \equiv 0$ ,  $u_0 \equiv 0$  et on montre  $u \equiv 0$  pour toute solution faible  $u$  en prenant  $v = \theta u$  dans (11), où  $\theta \in C_c^1((0, T])$  puis en faisant  $\theta \rightarrow 1$ . Pour l'existence on peut utiliser une dcomposition spectrale de  $u \mapsto -(au_x)_x$  : d'après la théorie des équations elliptiques, il existe  $(\lambda_n)$  une suite croissante de réels positifs ou nuls telle que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , et il existe  $(w^n)$  une base orthonormée de  $H_{\text{per}}^1(0, 1)$  avec  $w^n \in H^2(0, 1)$  telle que  $-(aw_x^n)_x = \lambda_n w^n$ . Alors

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle u_0, w^n \rangle_{L^2(0,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \langle f(s), w^n \rangle_{L^2(0,1)} ds \quad (12)$$

est solution faible de (6)-(9)-(10).

**Remarque (régularité additionnelle) :** Soit, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(0, 1)$  l'espace de Sobolev des fonctions  $v \in L^2(0, 1)$  telles que

$$\|v\|_{H^k(0,1)}^2 := \sum_{j=0}^k \|\partial_x^j v\|_{L^2(0,1)}^2 < +\infty.$$

D'après (12) et l'identification

$$\|v\|_{H^k(0,1)}^2 \simeq \sum_{n \geq 0} (1 + \lambda_n^k) |\langle v, w^n \rangle_{L^2(0,1)}|^2,$$

on a :  $u_0 \in H^k(0, 1)$ ,  $f \in C^k([0, 1]; H^k(0, 1))$  impliquent  $u \in H^k((0, 1) \times (0, T))$ . En particulier, pour  $k = 4$ , on obtient  $u \in C^2([0, 1] \times [0, T])$ , **ce qu'on supposera vérifié dans la suite.**

### 3 La méthode des volumes finis appliquée à l'équation parabolique

Dans cette partie, on détermine les flux numériques (donc la méthode des volumes finis qu'on va utiliser). Les lemmes 2-3-4 suivants assurent au fur et à mesure que les approximations faites sont *consistantes*, au sens où le flux numérique obtenu est proche du flux du problème continu.

Le point de départ est l'équation (2) (plutôt que (5)), avec ici  $(K_i)_{0 \leq i \leq L-1}$  maillage de  $\Omega := (0, 1)$ . Pour l'équation continue (6), d'après la *Loi de Fourier*, le flux en  $x_{i+1/2}$  sortant de  $K_i$  et entrant dans  $K_{i+1}$  est, au temps  $t$ ,

$$q_{i \rightarrow i+1}(t) = -a(x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2}, t). \quad (13)$$

On cherche donc  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  qui soit une approximation de  $-a(x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2}, t)$ , avec ou bien  $t = t_n$  ou bien  $t = t_{n+1}$ . Le choix  $t = t_n$  détermine un schéma dit explicite en temps, le choix  $t = t_{n+1}$  un schéma dit implicite en temps. On préfère utiliser un schéma implicite en temps pour les équations paraboliques (on verra éventuellement pourquoi en exercice ou au chapitre suivant).

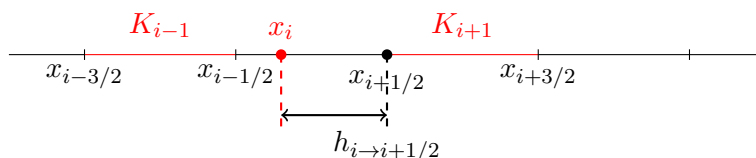
#### 3.1 Etape 1: $a$ discret, $u$ continu, dérivées discrètes

Pour déterminer le flux numérique en implicite, on commence par approcher  $a(x_{i+1/2})$  comme

$$a(x_{i+1/2}) \simeq a_i := \frac{1}{h_i} \int_{K_i} a(x) dx, \quad (14)$$

puis on utilise une approximation par quotient différentiel (dite aussi approximation par différences finies), soit

$$u_x(x_{i+1/2}, t_{n+1}) \simeq \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}},$$



où  $x_i$  est un point dans  $K_i$  et  $h_{i \rightarrow i+1/2} := x_{i+1/2} - x_i$ . En posant

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n} = -a_i \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}}, \quad (15)$$

on obtient un intermédiaire entre  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})$  et le flux numérique  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  qu'on va maintenant calculer.

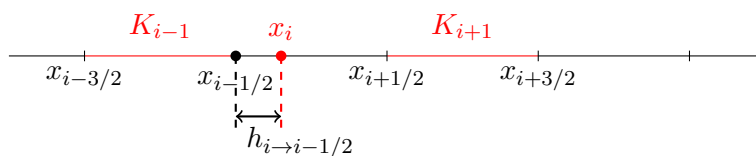
### 3.2 Etape 2: $a$ discret, $u$ discret, dérivées discrètes

En faisant l'approximation  $u(x_i, t_{n+1}) \simeq u_i^{n+1}$  et en notant  $u_{i+1/2}^{n+1}$  la valeur numérique qui tient lieu de  $u(x_{i+1/2}, t_{n+1})$ , on obtient

$$Q_{i \rightarrow i+1}^n = -a_i \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i \rightarrow i+1/2}}.$$

De même (attention au signe<sup>1</sup>), on a

$$Q_{i \rightarrow i-1}^n = a_i \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1}}{h_{i \rightarrow i-1/2}},$$



où  $h_{i \rightarrow i-1/2} = x_i - x_{i-1/2}$ .

C'est maintenant la propriété (4) de **conservation** du flux au niveau discret qui va déterminer  $u_{i+1/2}^{n+1}$ . On a en effet, pour  $0 < i < L - 1$ ,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^n = -Q_{i+1 \rightarrow i}^n \iff a_i \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i \rightarrow i+1/2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}.$$

On en déduit

$$\boxed{u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} u_i^{n+1} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} u_{i+1}^{n+1}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}}, \quad (16)$$

avec

$$\alpha_{i \rightarrow i+1/2} := \frac{a_i}{h_{i \rightarrow i+1/2}}, \quad \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} := \frac{a_{i+1}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}, \quad (17)$$

d'où

$$\boxed{Q_{i \rightarrow i+1}^n = -\tau_{i+1/2} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})}, \quad (18)$$

en posant

$$\tau_{i+1/2} := \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} \cdot \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}. \quad (19)$$

<sup>1</sup>Pour ne pas faire d'erreur, se rappeler que, d'après la Loi de Fourier, "on donne si on a plus", c'est-à-dire que si  $u_i^{n+1}$  est plus grand que le voisin  $u_{i+1/2}^{n+1}$ , resp.  $u_{i-1/2}^{n+1}$ , alors  $Q_{i \rightarrow i+1}^n \geq 0$ , resp.  $Q_{i \rightarrow i-1}^n \geq 0$ . Pour les mêmes considérations de signe, on voit que  $q_{i \rightarrow i-1}(t) = +a(x_{i-1/2})u_x(x_{i-1/2}, t)$ .

**Exemple 1** Dans le cas  $h_i = h$  pour tout  $i$  avec  $x_i =$  milieu de  $K_i$ , on a

$$\tau_{i+1/2} := \frac{2}{h} \frac{a_i \cdot a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}},$$

c'est-à-dire que  $\frac{h}{2}\tau_{i+1/2}$  est la moyenne harmonique de  $a_i$  et  $a_{i+1}$  :

$$\frac{2}{h} \frac{1}{\tau_{i+1/2}} = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}.$$

Finalement, par (2) et (18), on obtient, pour  $0 < i < L - 1$ , les équations

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h_i} (\tau_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})) + k f_i^n, \quad (20)$$

où  $\tau_{i+1/2}$  est donné par (18). Pour  $i = 0$  et  $i = L - 1$ , il faut préciser à l'aide des conditions limites les valeurs choisies pour, respectivement,  $u_{-1/2}^{n+1}$  et  $u_{L-1/2}^{n+1}$ , de sorte à déterminer, respectivement,  $Q_{0 \rightarrow -1}^n$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n$ . L'équivalent des conditions de périodicité (10) est

$$u_{-1}^{n+1} = u_{L-1}^{n+1}, \quad u_L^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Pour terminer, l'équivalent numérique de la condition initiale (9) est

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u_0(x) dx, \quad \forall i = 0, \dots, L - 1. \quad (22)$$

**Conclusion :** la méthode des volumes finis pour l'approximation de (6)-(9)-(10) est constituée des équations (20)-(21)-(22).

### 3.3 Consistance des flux

Soit, pour  $0 \leq i \leq L - 1$ ,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} = -\tau_{i+1/2}(u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})), \quad (23)$$

qui est le pendant de  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  lorsqu'on remplace les valeurs discrètes  $u_i^{n+1}$  par les valeurs d'une fonction  $u$  aux points  $(x_i, t_{n+1})$ . Dans le paragraphe suivant (paragraphe 4), on va montrer la convergence de la solution de la méthode volumes finis (20)-(21)-(22) vers la solution  $u$  de (6)-(9)-(10) en donnant une estimation de la vitesse de convergence. Pour cela, on va

1. Montrer que  $u$  vérifie les équations du schéma (20)-(21)-(22) en un sens approché.
2. Faire des "estimations d'énergie" à partir de l'équation discrète satisfaite par  $u_i^n - u(x_i, t_n)$ .

Pour préparer la première étape, évaluons l'erreur faite en approchant le flux continu  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})$  défini dans (13) par  $Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n}$ . Pour cela on évalue d'abord les erreurs faites dans chacune des quantités utilisées pour la construction du flux numérique, à savoir le flux intermédiaire  $Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$  et la valeur d'interface  $u_{i+1/2}^{n+1}$ .

**Lemme 2 (Consistance  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})/Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$ )** Il existe  $C$  constante dépendant des quantités  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$  telle que  $r_{i \rightarrow i+1}^{n+1} := q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$  satisfasse

$$|r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch, \quad (24)$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  et tout  $n$  tel que  $t_{n+1} \leq T$ .

**Preuve :** en notant  $C$  n'importe quelle constante dépendant de  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et de la norme  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$ , on a

$$|a(x) - a(x_{i+1/2})| \leq C|x - x_{i+1/2}| \leq Ch_i,$$

pour tout  $x \in K_i$ , d'où

$$|a_i - a(x_{i+1/2})| = \left| \frac{1}{h_i} \int_{K_i} (a(x) - a(x_{i+1/2})) dx \right| \leq \frac{1}{h_i} \int_{K_i} Ch_i dx \leq Ch_i.$$

De même, un développement de Taylor donne

$$\left| \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}} - u_x(x_{i+1/2}, t_{n+1}) \right| \leq Ch_{i \rightarrow i+1/2} \leq Ch_i,$$

d'où (24). ■

**Lemme 3 (Consistance de la valeur intermédiaire)** Si on remplace les valeurs  $u_k^{n+1}$  ( $k \in \{i, i+1/2, i+1\}$ ) par les valeurs continues correspondantes dans (16), on a, pour  $0 \leq i \leq L-1$ ,

$$u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) = \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} u(x_i, t_{n+1}) + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} u(x_{i+1}, t_{n+1})}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} + s_{i+1/2}^{n+1}, \quad (25)$$

où l'erreur  $s_{i+1/2}^{n+1}$  est

$$s_{i+1/2}^{n+1} = \frac{r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}, \quad (26)$$

où  $r_i^{n+1}$  est défini dans le Lemme 2.

**Preuve :** Remarquons d'abord que, dans (25) pour  $i = L-1$ ,  $u(x_L, t)$  est défini par  $u(x_L, t) := u(x_0, t)$  en utilisant la 1-périodicité de  $u$ . On a

$$q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) = -q_{i+1 \rightarrow i}(t_{n+1}),$$

soit, avec les notations du Lemme 2,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1} = -(Q_{i+1 \rightarrow i}^{b,n} + r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & - a_i \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & = a_{i+1} \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i+1/2}, t_{n+1})}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}} - (r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit (25). ■

**Lemme 4 (Consistance  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})/Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n}$ )** *Il existe  $C$  constante dépendant de  $\alpha$  (la constante de coercivité dans (7)),  $\|a\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$  telle que*

$$|z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch, \quad z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} := q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n}, \quad (27)$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  et tout  $n$  avec  $t_n \leq T$ .

**Preuve :** on reporte la valeur de  $u(x_{i+1/2}, t_{n+1})$  donnée par (25) dans l'expression de  $Q_{i \rightarrow i+1}^{b, n+1}$  (voir (15)):

$$Q_{b, i \rightarrow i+1}^{n+1} = Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n+1} - \alpha_{i \rightarrow i+1/2} s_{i+1/2}^{n+1}.$$

Par (24) et la définition de  $s_{i+1/2}^{n+1}$  (cf. (26)), on a donc

$$\begin{aligned} |q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n+1}| & \leq |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| + |\alpha_{i \rightarrow i+1/2} s_{i+1/2}^{n+1}|, \\ & \leq |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| + \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} (|r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1}| + |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}|). \end{aligned}$$

On conclut avec l'estimation  $|r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch$  et l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} & = \frac{a_i h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{a_i h_{i+1 \rightarrow i+1/2} + a_{i+1} h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha} \frac{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2} + h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & = \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha} \frac{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{h_i} \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha}. \end{aligned}$$

■

**Exercice 1** *Proposer des conditions aux bord numériques pour remplacer (21) lorsque on substitue à (10) une des trois conditions suivantes :*

1. *Conditions de Dirichlet homogènes :*

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$



2. Conditions de Neumann homogènes :

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

3. Conditions mixtes Dirichlet-Neumann homogènes :

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

## 4 Estimation d'erreur

On va montrer que  $u_{h,k}$  définie par (20)-(21)-(22) ci-dessus converge vers la solution  $u$  de (6)-(9)-(10) lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers 0 (avec estimation de cette convergence). Avant tout, comme (20) est implicite en temps (c'est une équation de la forme  $u^{n+1} = F(u^{n+1})$ ), montrons que (20)-(21)-(22) a une solution.

### 4.1 Existence de solution

**Proposition 5 (Existence, Bornes  $L^\infty$ )** *Il existe une unique solution  $u_{h,k}$  à (20)-(21)-(22). De plus,*

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^0 + k \sum_{p=0}^{n-1} \max_{0 \leq i \leq L-1} f_i^p, \quad (28)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et, similairement,

$$\min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n \geq \min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^0 + k \sum_{p=0}^{n-1} \min_{0 \leq i \leq L-1} f_i^p, \quad (29)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve:** Montrons d'abord (28) en supposant que  $u_{h,k}$  existe. Soit  $i^* \in \{0, \dots, L-1\}$  tel que

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} = u_{i^*}^{n+1}.$$

Alors,  $u_{i^*}^{n+1} - u_j^{n+1} \geq 0$  pour  $j = i^* \pm 1$ . D'après (20), on a

$$u_{i^*}^{n+1} \leq u_{i^*}^n + k f_{i^*}^n,$$

en particulier

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \leq \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n + k \max_{0 \leq i \leq L-1} f_i^n. \quad (30)$$

Par récurrence, (28) se déduit de (30). De même pour (29). Revenons maintenant à la question de l'existence de  $u_{h,k}$ . En raisonnant par récurrence, il suffit de montrer que, une

fois  $U^n := (u_i^n)_{0 \leq i \leq L-1}$  déterminée, il existe une unique solution  $U^{n+1} := (u_i^{n+1})_{0 \leq i \leq L-1}$  de (20). Comme (20) est linéaire, elle définit alors un système linéaire sur  $\mathbb{R}^L$  :

$$AU^{n+1} = U^n + B, \quad A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{R}^L. \quad (31)$$

Il suffit alors de montrer que  $A$  est inversible, *i.e.* sans noyau, ce qui revient à montrer que la seule solution  $(u_i^{n+1})_{0 \leq i \leq L-1}$  de (20) lorsque

$$u_i^n = 0, \quad f_i^n = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, L-1\}, \quad (32)$$

est la solution nulle. Si (32) est satisfait, on a, d'après (30),  $\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \leq 0$ . De même, on montre  $\min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \geq 0$ , ce qui implique  $u_i^{n+1} = 0$  pour tout  $i$ . ■

**Exercice 2** Déterminer  $A$  et  $B$  dans (31).

**Exercice 3** Montrer, en utilisant (28)-(29), que, pour  $t_N = Nk$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ),

$$\|u_{h,k}\|_{L^\infty([0,1] \times [0,t_N])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$

On peut maintenant montrer l'estimation d'erreur.

## 4.2 Estimation d'erreur

**Théorème 6 (Estimation d'erreur)** Soit  $u \in C^2([0,1] \times [0,T])$  la solution du problème parabolique (6)-(9)-(10) et soit  $u_{h,k}$  la solution approchée déterminée par la méthode des volumes finis (20)-(21)-(22). Il existe une constante  $C \geq 0$  ne dépendant que de  $\alpha$  (la constante de coercivité dans (7)),  $\|a\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|u\|_{C^2([0,1] \times [0,T])}$  et  $T$  telle qu'on ait l'estimation d'erreur  $L_t^\infty L_x^2$

$$\left( \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^n|^2 \right)^{1/2} \leq C(k+h), \quad \forall n \text{ t.q. } t_n \leq T, \quad (33)$$

où  $e_i^n := u_i^n - u(x_i, t_n)$ .

**Remarque 7** On a la même estimation d'erreur pour un problème parabolique en dimension  $d > 1$  (avec les mêmes méthodes que celles qui suivent, – il faut cependant déterminer le schéma dans ce cas plus élaboré, voir [EGH00]).

**Preuve :** Dans toute la preuve, on désigne invariablement par  $C$  n'importe qu'elle constante ne dépendant que de  $\alpha$ ,  $\|a\|_{C^1([0,1])}$ ,  $\|u\|_{C^2([0,1] \times [0,T])}$  et  $T$ . On note aussi

$$w_i^n = \mathcal{O}(z_i^n),$$

s'il existe  $C \geq 0$  telle que  $|w_i^n| \leq C|z_i^n|$  pour tout  $0 \leq i \leq L-1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $t_n \leq T$ .

**Etape 1 : Equation approchée pour  $u$**  En intégrant l'équation (6) prise au temps  $t = t_{n+1}$  sur  $K_i$ ,  $0 \leq i \leq L - 1$ , on obtient (en utilisant les notations du paragraphe 3)

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx + (q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) + q_{i \rightarrow i-1}(t_{n+1})) = \int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx.$$

On applique le résultat de *consistance du flux* démontré dans le Lemme 4. Comme  $z_{i \rightarrow i-1}^{n+1} = -z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}$  (car  $q_{i \rightarrow i-1}(t_{n+1}) = -q_{i-1 \rightarrow i}(t_{n+1})$ ) et de même pour  $Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx + (Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} + Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n}) \\ = \int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx - (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}). \end{aligned} \quad (34)$$

Par des développements de Taylor, on a

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx = h_i u_t(x_i, t_{n+1}) + \mathcal{O}(h_i^2),$$

et

$$\frac{1}{k} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) = u_t(x_i, t_{n+1}) + \mathcal{O}(k),$$

d'où

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx = \frac{h_i}{k} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) + \mathcal{O}(kh_i + h_i^2).$$

De même,

$$\int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx = h_i f_i^n + \mathcal{O}(kh_i).$$

En remplaçant dans (34) et en multipliant par  $\frac{k}{h_i}$ , on obtient

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \frac{k}{h_i} \left( Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} + Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n} \right) + k f_i^n \\ - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + \mathcal{O}(k^2 + kh_i). \end{aligned}$$

Par définition de  $Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n}$  (cf. (23)), on obtient donc l'approximation suivante de (20) pour  $u(x_i, t_n)$  :

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) \\ + \frac{k}{h_i} \left( \tau_{i+1/2} (u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})) - \tau_{i-1/2} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})) \right) + k f_i^n \\ - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + k \varepsilon_i^{n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

où  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ .

**Etape 2 : Estimation d'erreur** Soit  $e_i^n := u_i^n - u(x_i, t_n)$ . En faisant la différence entre (20) et (35), on a, pour  $0 \leq i \leq L - 1$ ,

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \frac{k}{h_i} (\tau_{i+1/2}(e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2}(e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + k\varepsilon_i^{n+1},$$

avec  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ .

**Exercice 4 (Version continue de l'étape 2)** Soit  $e \in C^2([0, 1] \times [0, T])$  vérifiant

$$e_t - (ae_x)_x = \varepsilon + z_x, \quad (36)$$

où  $a \in C([0, 1])$  vérifie la condition de positivité (7),  $\varepsilon, z \in C([0, 1] \times [0, T])$  sont telles que

$$\|\varepsilon\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch, \quad \|z\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch.$$

On suppose de plus  $\|e(0)\| \leq Ch$  et  $e, a, z$  1-périodique en  $x$ .

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon e - z e_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

2. En déduire, en utilisant l'inégalité (40) ci dessous, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq Ch^2 \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (|e|^2 - z e_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

3. Montrer ensuite avec l'inégalité (40) ci dessous que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds,$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

4. Conclure que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \text{ et } \int_0^T \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2.$$

Voici maintenant la version discrète : en multipliant par  $h_i e_i^{n+1}$  et en sommant sur  $n \in \{0, \dots, p\}$ ,  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} (e_i^{n+1} - e_i^n) \\
&= \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&\quad - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Par glissement d'indices, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&= - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 - \sum_{n=0}^p k e_0^{n+1} \tau_{-1/2} (e_0^{n+1} - e_{-1}^{n+1}) \\
&\quad + \sum_{n=0}^p k e_L^{n+1} \tau_{L-1/2} (e_L^{n+1} - e_{L-1}^{n+1}).
\end{aligned}$$

La condition de périodicité pour  $u$  et son équivalent discret (21) assurent que les termes de bord se compensent :

$$0 = -e_0^{n+1} \tau_{-1/2} (e_0^{n+1} - e_{-1}^{n+1}) + e_L^{n+1} \tau_{L-1/2} (e_L^{n+1} - e_{L-1}^{n+1}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&= - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2.
\end{aligned}$$

De même, par glissement d'indices,

$$- \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) = \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité

$$a(a-b) \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2), \quad (38)$$

avec  $a = e_i^{n+1}$ ,  $b = e_i^n$ , la première somme dans (37) se réécrit

$$\sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} (e_i^{n+1} - e_i^n) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2.$$

Par conséquent, (37) donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Par l'inégalité

$$ab \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0, \quad (40)$$

avec  $a = (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1})$ ,  $b = z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}$ ,  $\mu = \frac{1}{2} \tau_{i+1/2}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} & \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{2\tau_{i+1/2}} |z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Par la condition (cf (7))

$$\alpha \leq a \leq M := \|a\|_{L^\infty(0,1)},$$

on a  $\frac{1}{2\tau_{i+1/2}} \leq \frac{2M}{\alpha^2} h$ . L'estimation (27)  $|z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch$  donne donc

$$\sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 + Ch^2.$$

En remplaçant dans (39) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 + Ch^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Par hypothèse,  $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 \leq Ch^2$ . Pour le dernier terme, on a, en appliquant (40) avec  $a = e_i^{n+1}$ ,  $b = \varepsilon_i^{n+1}$ ,  $\mu = 1$ ,

$$\sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |\varepsilon_i^{n+1}|^2,$$

et, par l'estimation  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ \leq C(k + h)^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

On a donc, en particulier,

$$\frac{1}{2} E^p \leq C(h + k)^2 + \sum_{n=0}^p k E^n, \quad E^n := \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2.$$

Pour  $k < \frac{1}{4}$ , on obtient

$$\frac{1}{4} E^p \leq C(h + k)^2 + \sum_{n=0}^{p-1} k E^n, \quad E^n := \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2.$$

En utilisant le

**Lemme 8 (Lemme de Gronvall discret)** *Soit  $(E_p)$  vérifiant*

$$E^p \leq c + d \sum_{n=0}^{p-1} k E^n, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

*Alors  $E^p \leq ce^{pkd}$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .*

on en déduit (33). ■

**Exercice 5** *Montrer (38).*

**Exercice 6** *Montrer (40) (on commencera par le cas  $\mu = \frac{1}{2}$ ).*

**Exercice 7** *Montrer le Lemme 8. On pourra par exemple*

1. *Introduire  $\mathcal{E}^p = c + d \sum_{n=0}^{p-1} k E^n$  et montrer  $\mathcal{E}^{p+1} - \mathcal{E}^p \leq dk \mathcal{E}^p$ .*
2. *Utiliser l'inégalité  $dk \leq e^{dk} - 1$ , puis une récurrence pour conclure.*

## 5 Solution des exercices

### 5.1 Exercice 1

Rappelons que le choix des conditions aux limites numériques se fait à travers la détermination des valeurs aux interfaces  $u_{-1/2}^{n+1}$  et  $u_{L-1/2}^{n+1}$ , on en déduit ensuite la valeur des flux  $Q_{0 \rightarrow -1}^n$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n$  respectivement.

1. Les conditions de Dirichlet homogènes correspondent au choix

$$u_{-1/2}^{n+1} = 0, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = 0.$$

2. Les conditions de Neumann homogènes correspondent au choix  $Q_{0 \rightarrow -1}^n = 0$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n = 0$ , soit :

$$u_{-1/2}^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = u_{L-1}^{n+1}.$$

3. Les conditions mixtes Dirichlet-Neumann homogènes correspondent au choix :

$$u_{-1/2}^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = 0.$$

## 5.2 Exercice 2

L'équation (20) se réécrit

$$\left(1 + \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} + \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}\right) u_i^{n+1} - \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n + k f_i^n,$$

d'où (en tenant compte des conditions de périodicité (21)),  $B = (k f_i^n)_{i=0, \dots, L-1}$  (vu comme vecteur colonne) et  $A$  est la matrice tridiagonale

$$A = \text{tridiag} \left( -\frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}, 1 + \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} + \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}, -\frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} \right).$$

## 5.3 Exercice 3

Pour  $i \in \{0, \dots, L-1\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_1} u_0(x) dx \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)},$$

et

$$k f_i^p = \int_{t_p}^{t_{p+1}} \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x, t) dx dt \leq \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$

On déduit de (28), pour  $n \leq N$ ,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \sum_{p=0}^{n-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt \\ &= \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_n} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt. \end{aligned}$$

De même pour le min, ce qui donne

$$\|u_{h,k}\|_{L^\infty([0,1] \times [0,t_N])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$



## 5.4 Exercice 4

En multipliant l'équation

$$e_t - (ae_x)_x = \varepsilon + z_x,$$

par  $e$ , en intégrant sur  $(0, 1) \times (0, t)$ , on obtient (après intégration par parties dans le terme en  $(ae_x)_x e$  puis utilisation de (7)) l'inégalité (dite inégalité d'énergie)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon e - ze_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Par l'inégalité de Young (40) avec  $a = e$ ,  $b = \varepsilon$ ,  $\mu = 1$ , on a

$$\int_0^1 \varepsilon e dx \leq \int_0^1 e^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \varepsilon^2 dx.$$

L'hypothèse  $\|\varepsilon\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch$  donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq Ch^2 \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (|e|^2 - ze_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . En utilisant de nouveau (40) ci dessous avec  $a = e_x$ ,  $b = z$ ,  $\mu = \frac{\alpha}{2}$ , on obtient

$$\int_0^1 \varepsilon z e_x dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |e_x|^2 dx + \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 |z|^2 dx.$$

L'hypothèse  $\|z\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch$  donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds, \quad (43)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . On a en particulier

$$\int_0^1 |e|^2(x, t) dx \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds, \quad (44)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . On en déduit par le Lemme de Gronvall que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \leq Ch^2,$$

où la constante  $C$  dépend de  $T$ . En reportant dans (43), on a finalement

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \text{ et } \int_0^T \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2.$$

### 5.5 Exercice 5

On calcule

$$a(a-b) - \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0.$$

### 5.6 Exercice 6

Dans le cas  $\mu = \frac{1}{2}$ , (40), soit

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \quad (45)$$

se déduit de  $(a-b)^2 \geq 0$ , en développant le carré. On obtient le cas général en remplaçant  $a$  par  $2\mu a$  et  $b$  par  $\frac{1}{2\mu}b$  dans (45).

### 5.7 Exercice 7

Posons

$$\mathcal{E}_p = c + d \sum_{n=0}^{p-1} kE^n,$$

avec la convention  $\mathcal{E}_0 = c$ . On a alors

$$\mathcal{E}_{p+1} - \mathcal{E}_p = dkE^p \leq dk\mathcal{E}_p,$$

soit  $\mathcal{E}_{p+1} \leq (1 + dk)\mathcal{E}^p$ . Avec  $1 + dk \leq e^{dk}$  et une récurrence, on obtient

$$\mathcal{E}_p \leq ce^{dkp},$$

d'où le résultat.

## References

- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.