



RMN et IRM

Principes de base communs

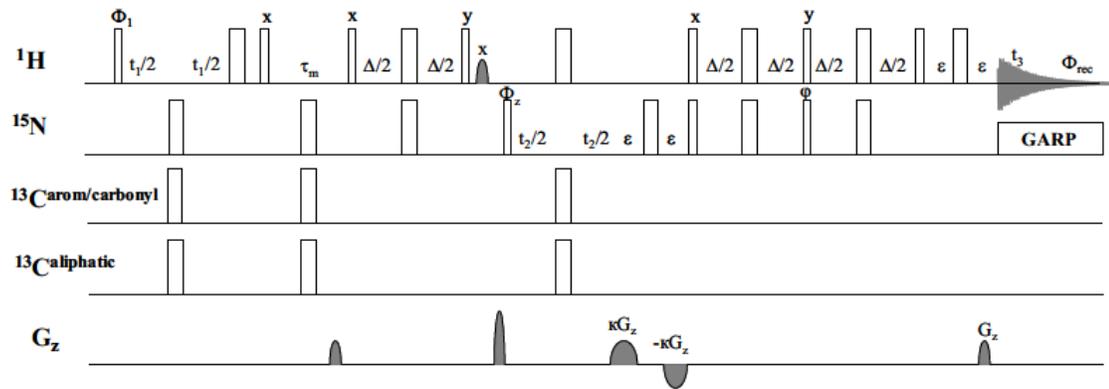
Jean-Marc Nuzillard

Institut de Chimie Moléculaire de Reims, UMR CNRS 7312

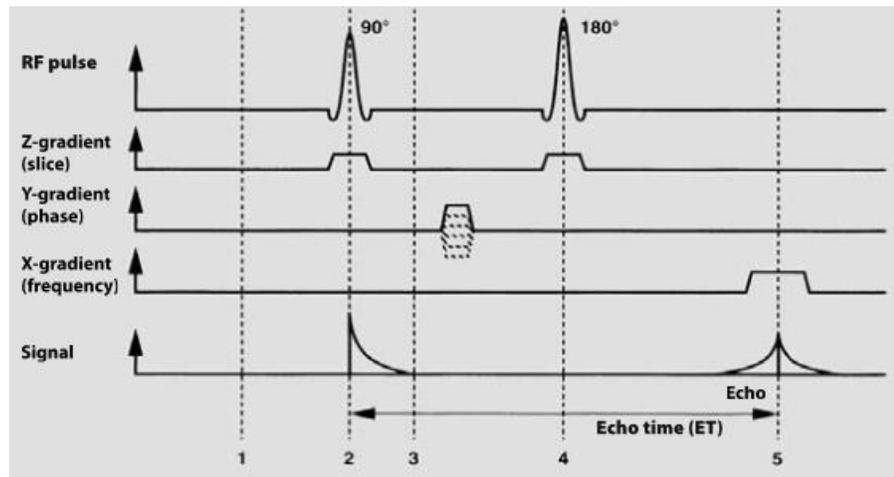
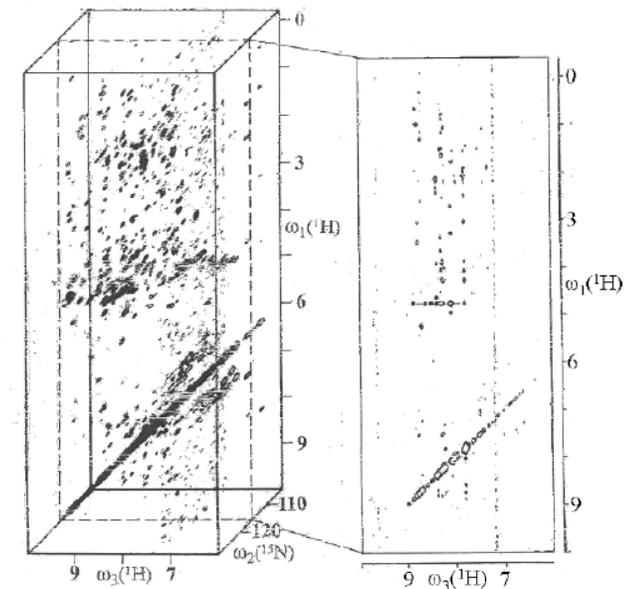
Université de Reims Champagne Ardenne



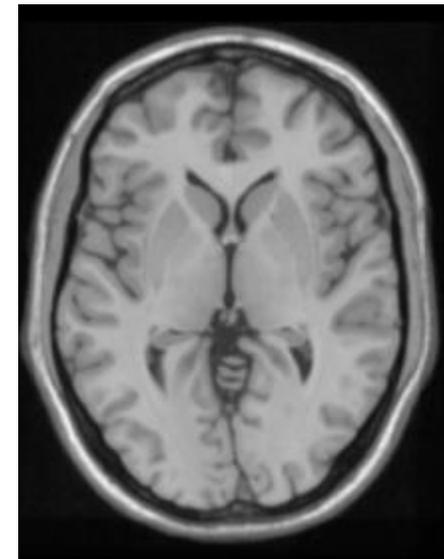
Séquences d'impulsions



RMN



IRM



Plan

- Noyaux atomiques
- Descriptions physiques des phénomènes
- Interaction entre noyau atomique et champ magnétique
- Aimantation macroscopique
- Précession, relaxation, nutation
- Impulsions de radio-fréquence et sélectivité
- Signal et bruit
- Opérateur densité
- Spectre et Image

Noyaux atomiques

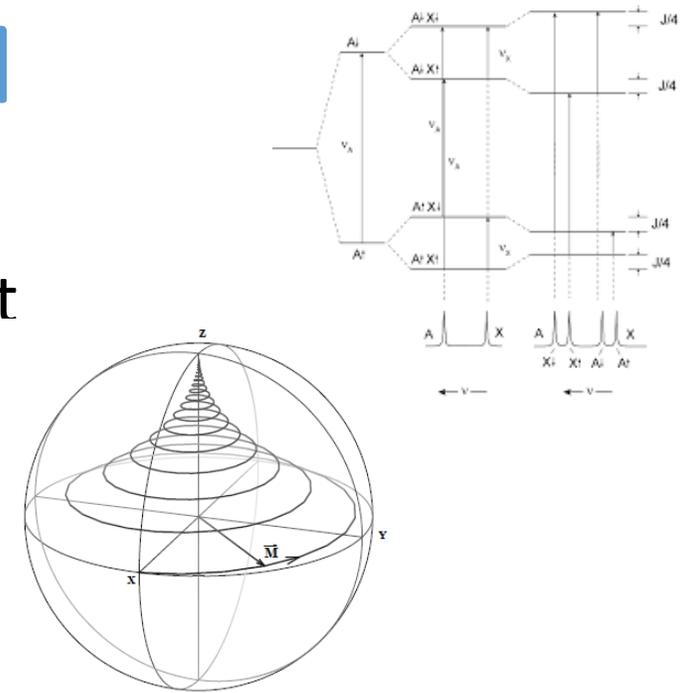
- La composition d'un noyau atomique définit un *isotope* A_ZX
- A est le nombre de nucléons (protons et neutrons confondus) ou nombre de masse
- Z est le nombre de protons qui définit l'élément chimique X , ou nombre de charge
- Exemple : ${}^{13}_6\text{C}$ aussi noté ${}^{13}\text{C}$
- Abondance naturelle
- Spin
- Rapport gyromagnétique

Noyaux atomiques

Noyau	Spin I	Abondance naturelle (%)	ν obs. (MHz) ($B_0=2.3488$ T)	Rapport gyromagnétique γ [10^7 rad T ⁻¹ s ⁻¹]
¹ H	1/2	99,98	100	26.7519
² H	1	0,016	15.3	4.1066
¹⁰ B	3	19,58	10.7	2.8746
¹¹ B	3/2	80,42	32.0	8.5843
¹² C	0	98,9	–	–
¹³ C	1/2	1,108	25.1	6.7283
¹⁴ N	1	99,63	7.2	1.9338
¹⁵ N	1/2	0,37	10.1	-2.712
¹⁶ O	0	99,96	–	–
¹⁷ O	5/2	0,037	13.6	-3.6279
¹⁹ F	1/2	100	97.1	25.181
²⁹ Si	1/2	4,70	19.9	-5.3188
³¹ P	1/2	100	40.4	10.841

Trois manières de décrire la physique de la RMN et de l'IRM

- La description *scalaire* se focalise sur les niveaux d'**énergie** d'interaction possibles entre un noyau et un champ magnétique
- La description *vectorielle* montre l'évolution du vecteur d'**aimantation** macroscopique de l'échantillon au cours des événements
- La description *matricielle* est fondée sur l'évolution de l'**opérateur densité** associé à la description quantique de particules se trouvant dans des états différents.



$$\hat{\sigma} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

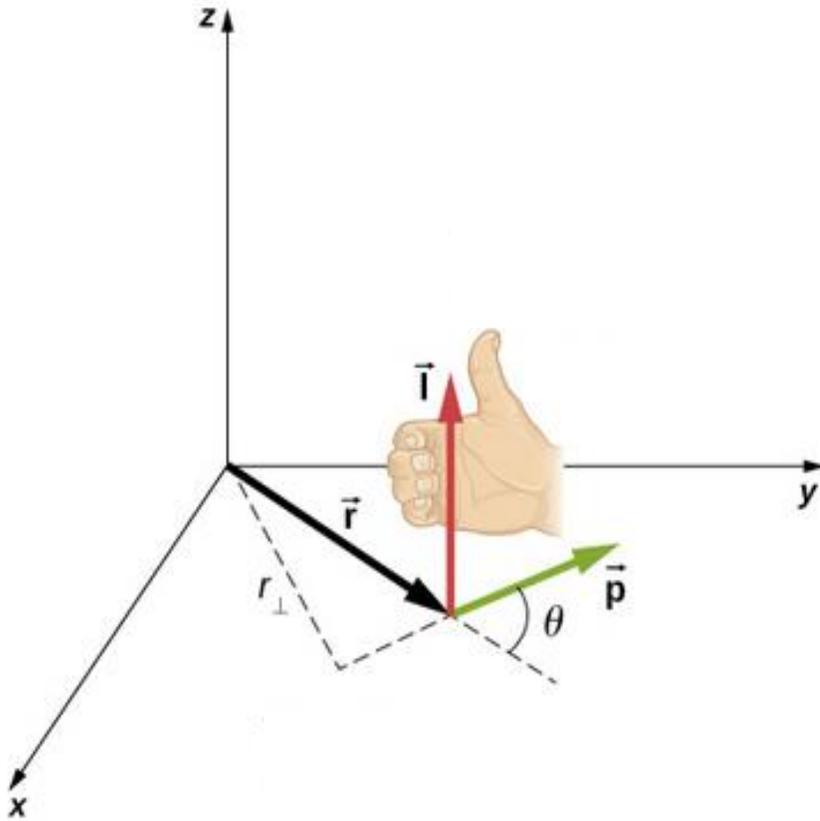
$$i\left(\frac{h}{2\pi}\right) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\sigma}]$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{A})$$

Moment cinétique de spin

- Moment cinétique, mécanique classique, pour un point : $\vec{I} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$
- Pour un solide en rotation, il faut additionner les contributions de chaque élément de volume
- Le nombre quantique de spin I définit l'intensité du moment cinétique propre (de spin, interne, intrinsèque...) d'un noyau.
- Les valeurs possibles de I sont $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$
- Le moment cinétique possède un équivalent pour les des particules régies par la mécanique quantique :
 $\|\vec{I}\| = (h/2\pi) \cdot \sqrt{I(I+1)}$.
- h : constante de Planck, $6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Produit vectoriel



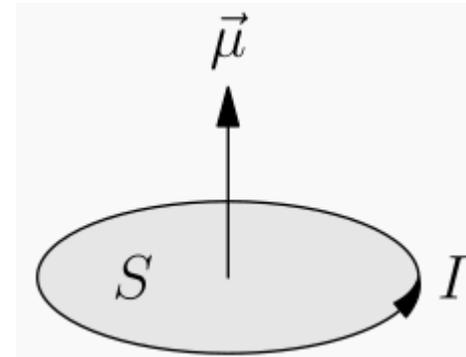
$$\vec{I} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

\vec{I} est perpendiculaire à \vec{r} et à \vec{p}

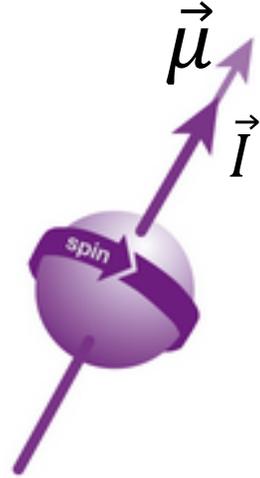
$$\|\vec{I}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{p}\| \cdot \sin \theta$$

Moment magnétique

- En électromagnétisme, pour une boucle de courant d'intensité I et de surface S de normale \vec{n} : $\vec{\mu} = IS\vec{n}$.
- L'existence d'un moment magnétique est révélée par son interaction avec un champ magnétique \vec{B}_0
- Energie d'interaction : $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$
- Couple de forces : $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$



Moment magnétique de spin



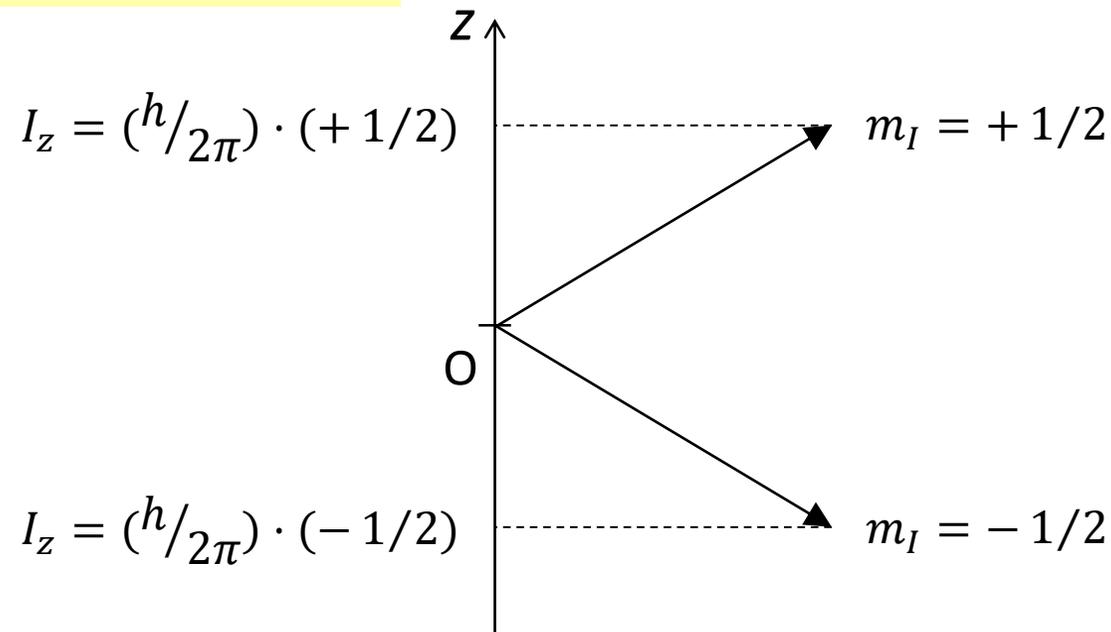
- Proportionnalité entre le moment cinétique et le moment magnétique : $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$
- γ : Rapport gyromagnétique (ou aussi, magnétogyrique)

moment cinétique de spin \vec{I}

- Valeur algébrique de la projection de \vec{I} sur un axe quelconque (Oz) :

$$I_z = \left(\frac{h}{2\pi}\right) \cdot m_I \text{ avec } -I \leq m_I \leq I \text{ (soit } 2I + 1 \text{ valeurs)}$$

Cas $I = 1/2$



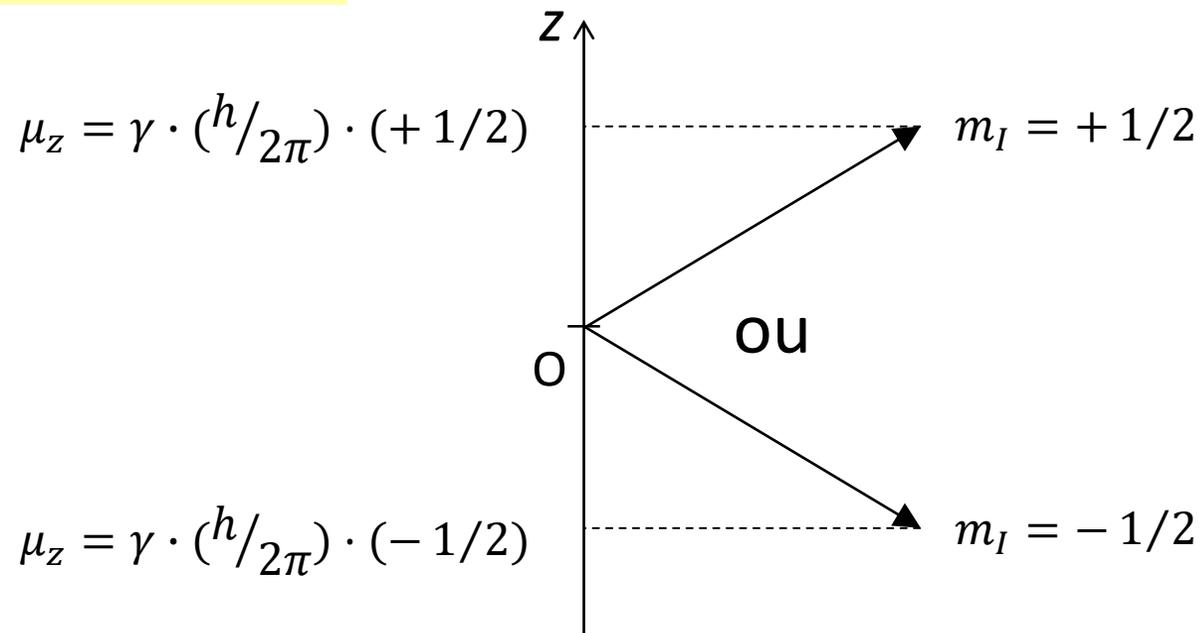
$$\|\vec{I}\| = \left(\frac{h}{2\pi}\right) \cdot \sqrt{3/4}$$

Projection du moment magnétique de spin $\vec{\mu}$

- $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$
- Valeur algébrique de la projection de $\vec{\mu}$ sur un axe quelconque (Oz) :

$$\mu_z = \gamma \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right) \cdot m_I \text{ avec } -I \leq m_I \leq I \text{ (soit } 2I + 1 \text{ valeurs)}$$

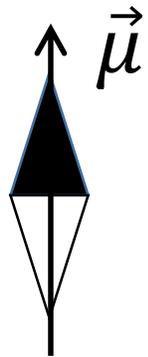
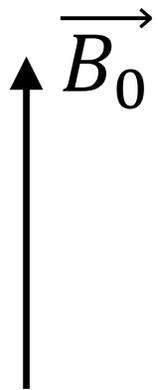
Cas $I = 1/2$



$$\|\vec{\mu}\| = \gamma \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right) \cdot \sqrt{3/4}$$

Interaction de $\vec{\mu}$ avec un champ magnétique \vec{B}_0

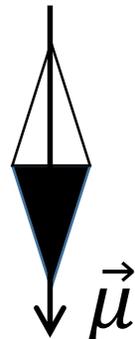
- Energie d'interaction $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$
- **Aimant macroscopique** (aiguille de boussole) :



$$E = -\mu \cdot B_0$$

Equilibre stable

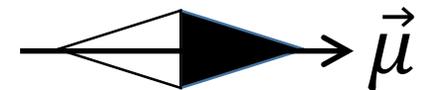
Minimum d'énergie



$$E = +\mu \cdot B_0$$

Equilibre instable

Maximum d'énergie



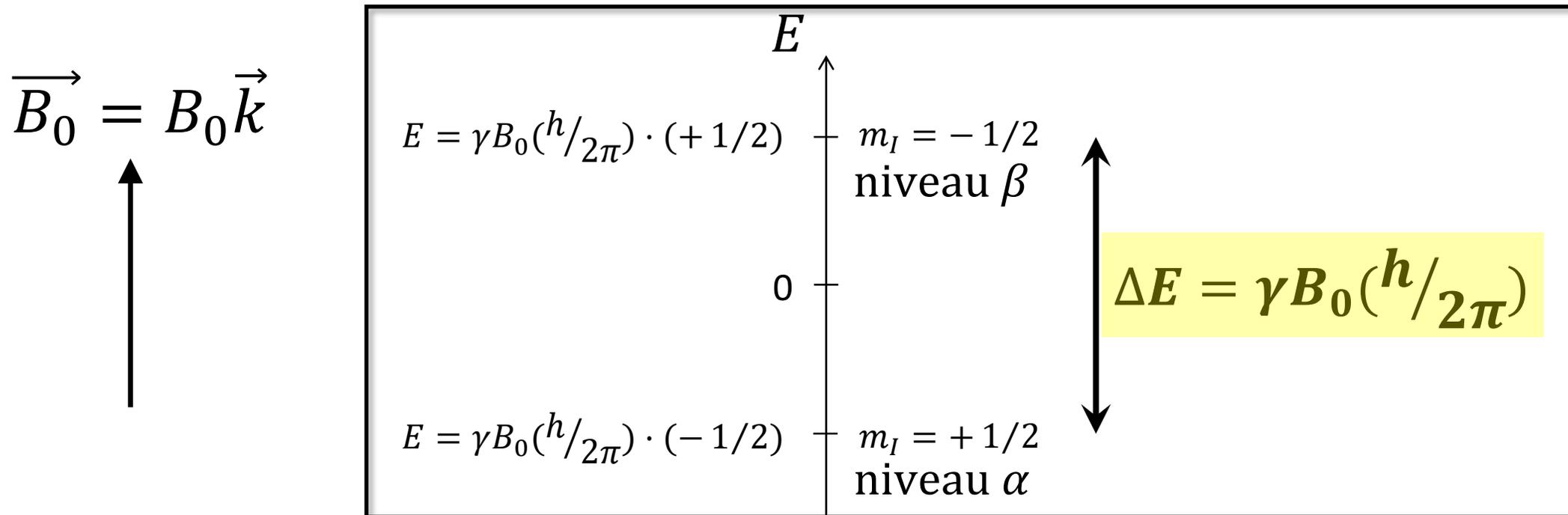
$$E = 0$$

Etat énergétique
de référence

Interaction de $\vec{\mu}$ avec un champ magnétique \vec{B}_0

- Energie d'interaction $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_z \cdot B_0$
- **Spin nucléaire**, $I = 1/2$ et $\gamma > 0$:

Diagramme énergétique



Condition de résonance (magnétique et nucléaire)

- Une onde électromagnétique de fréquence ν (pulsation $\omega = 2\pi\nu$) peut induire une transition entre niveaux énergétiques si :

$$\Delta E = h\nu = \left(\frac{h}{2\pi}\right)\omega$$
$$\Delta m_I = \pm 1$$

- Pour les spins nucléaires :

$$\Delta E = \gamma B_0 \left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

$$\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$$
$$\omega = \gamma B_0$$

- Ces relations sont encore valides si $I > 1/2$ ou si $\gamma < 0$.

Condition de résonance

$$\nu = \frac{\gamma B_0^{\text{local}}}{2\pi} \text{ avec } B_0^{\text{local}} = B_0(1 - \sigma)$$

- La fréquence de résonance dépend de la valeur de B_0 sur les noyaux atomiques, qui dépend de la nature de l'environnement électronique, caractérisée par la **constante d'écran σ** .
- **Déplacement chimique** : $\delta = \frac{\nu - \nu^{\text{TMS}}}{\nu^{\text{TMS}}} \times 10^6$, relatif à une substance de référence (TMS en RMN du ^1H et du ^{13}C) – grandeur fondamentale pour l'utilisation structurale de la RMN.

Polarisation

- Un noyau atomique est rarement seul...
- Dans une collection de N noyaux ($I = 1/2$) plongés dans un champ magnétique \vec{B}_0 , N_α sont dans l'état α et N_β dans l'état β .
 $N = N_\alpha + N_\beta$.
- La sensibilité des mesures en RMN/IRM dépend de la polarisation $\Delta N = N_\alpha - N_\beta$
- A l'équilibre thermodynamique, N_α et N_β sont imposés par la loi de *Maxwell-Boltzmann*
- Il est possible d'augmenter ΔN par des méthodes d'*hyperpolarisation*

Polarisation

- $N_{\alpha/\beta} \propto e^{-\frac{E_{\alpha/\beta}}{kT}}$ où k est la constante de Boltzmann, $k = R/\mathcal{N}$, où R est la constante des gaz parfaits (8,32 J/K) et \mathcal{N} est le nombre d'Avogadro ($6,02 \cdot 10^{23}$)
- Dans l'hypothèse usuelle (dite des « hautes températures ») $|E_{\alpha} - E_{\beta}| \ll kT$ la polarisation vaut :

$$\Delta N = N \frac{(h/2\pi)\gamma B_0}{2kT}$$

- La polarisation augmente avec le nombre de noyaux, le rapport gyromagnétique, le champ statique B_0 et avec une baisse de température de l'échantillon.

Aimantation macroscopique à l'équilibre

- Somme des aimantations microscopiques $\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$
- Sur l'axe Oz du champ magnétique \vec{B}_0 :

$$M_z = N_\alpha \mu_z(m_I = +1/2) + N_\beta \mu_z(m_I = -1/2)$$

$$M_z = (N_\alpha - N_\beta) \mu_z(m_I = +1/2) \text{ car } \mu_z(m_I = -1/2) = -\mu_z(m_I = +1/2)$$

$$\text{soit } M_z^{\text{eq}} = N \frac{(h/2\pi)^2 \gamma^2 B_0}{4kT}$$

- Par symétrie autour de l'axe Oz, $M_x^{\text{eq}} = M_y^{\text{eq}} = 0$
- L'aimantation macroscopique \vec{M} est colinéaire avec \vec{B}_0
- *La plupart des séquences d'acquisition en RMN/IRM sont explicables en suivant l'évolution de l'aimantation macroscopique (modèle vectoriel).*

Evolution de l'aimantation macroscopique

- A l'équilibre thermodynamique l'aimantation macroscopique \vec{M} est invariante dans le temps.
- Si rien n'est fait, il ne se passe rien.
- Il se passe « quelque chose » si \vec{M} est écartée de sa position d'équilibre
- Nous allons successivement regarder comment
 - s'opère le retour du non-équilibre vers l'équilibre : **Précession** et **Relaxation**
 - obtenir un état de non équilibre : **Nutation**

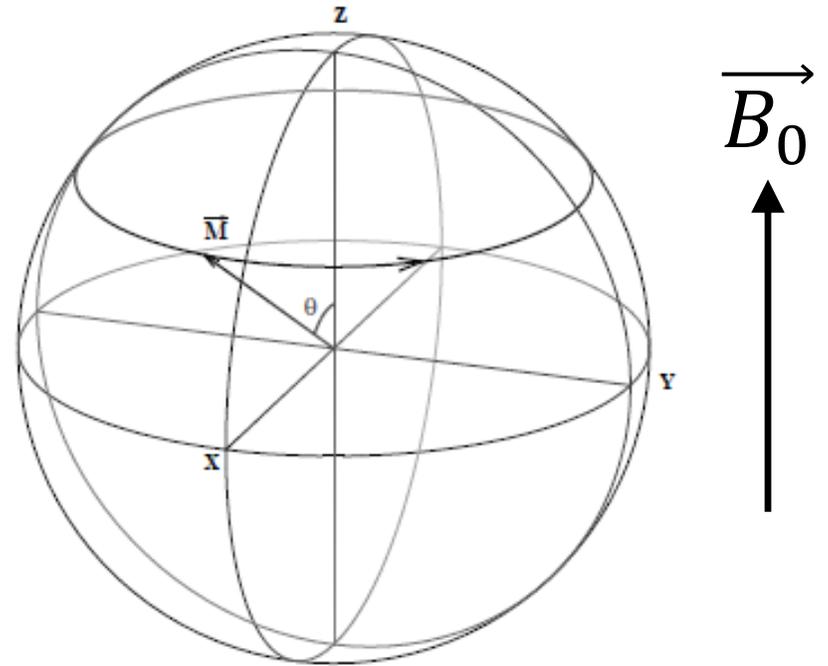
Précession de Larmor

- L'aimantation est écartée d'un angle θ de sa position d'équilibre
- En appliquant à \vec{M} les lois de la mécanique classique, son évolution est déterminée par

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0$$

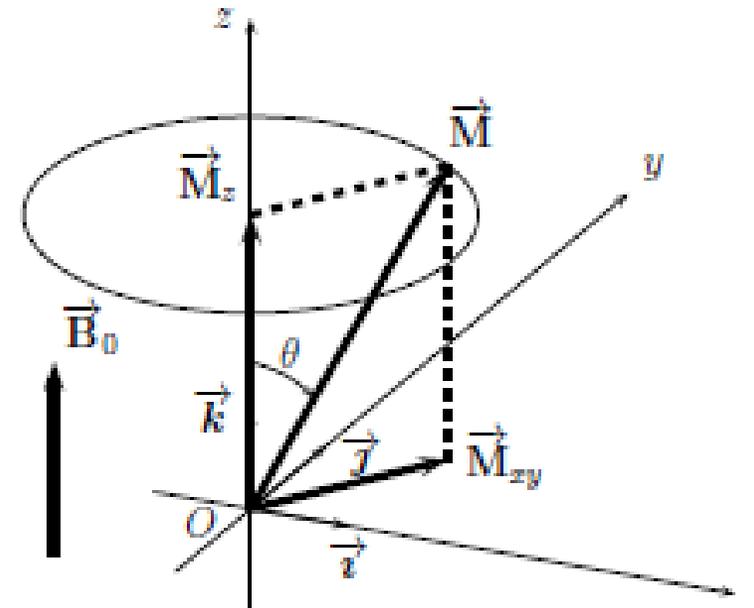
- Le mouvement de \vec{M} est circulaire, de vitesse angulaire constante ω_0 et où l'angle θ est invariable.

$$\omega_0 = -\gamma B_0$$



Précession de Larmor, relaxation

- Le mouvement de précession est « rapide »
- Pour B_0 égal à 2,35 T, $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ vaut environ 100 MHz et \vec{M} effectue un tour en 10 ns.
- La précession de Larmor est incapable de ramener \vec{M} à sa position d'équilibre ($\theta = 0$).
- Les composantes de \vec{M} , longitudinale (\vec{M}_z , parallèle à \vec{B}_0) et transversale (\vec{M}_{xy} , perpendiculaire à \vec{B}_0) sont modifiées par la **relaxation**



Relaxation

- Les mesures algébriques des composantes \overrightarrow{M}_z et \overrightarrow{M}_{xy} de l'aimantation macroscopique évoluent vers l'équilibre selon une loi cinétique du 1^{er} ordre, « indépendamment » l'une de l'autre :

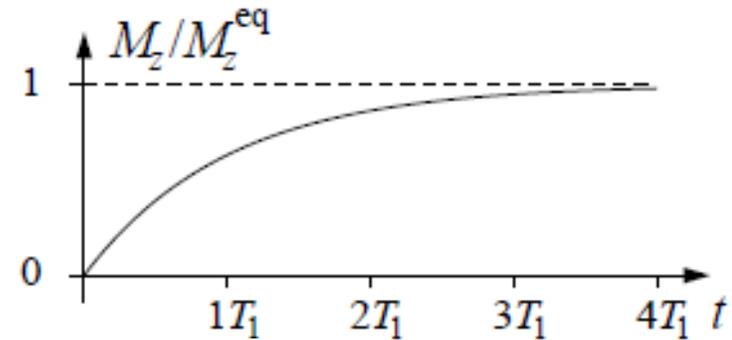
$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_z^{eq}}{T_1} \quad \frac{dM_{xy}}{dt} = -\frac{M_{xy} - M_{xy}^{eq}}{T_2}$$

- Les temps caractéristiques T_1 et T_2 sont les temps de relaxation longitudinale et transversale, respectivement.
- Ces équations sont issues de l'observation (phénoménologiques) et non de l'analyse des causes physiques de la relaxation

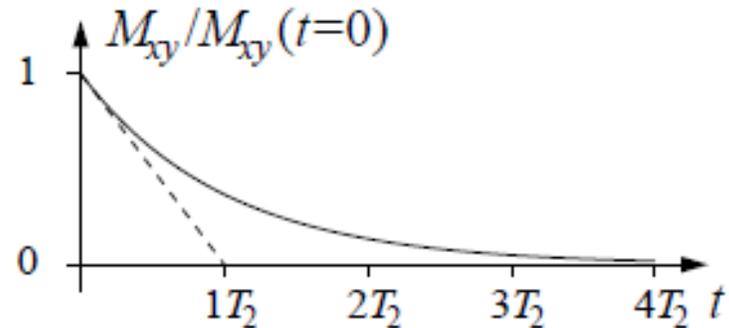
Relaxation

- Ordres de grandeurs de T_1 et de T_2 : ms à s. La relaxation est un processus « lent » par rapport à la précession (ns).

- Retour à l'équilibre de M_z depuis 0 :

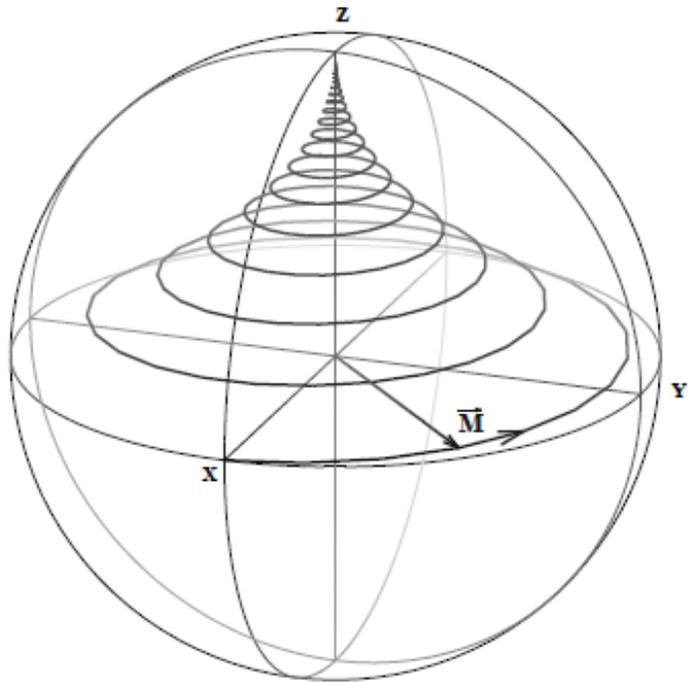


- Retour à 0 de M_{xy} :



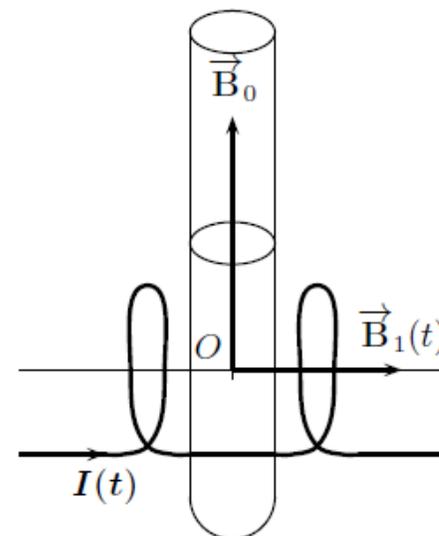
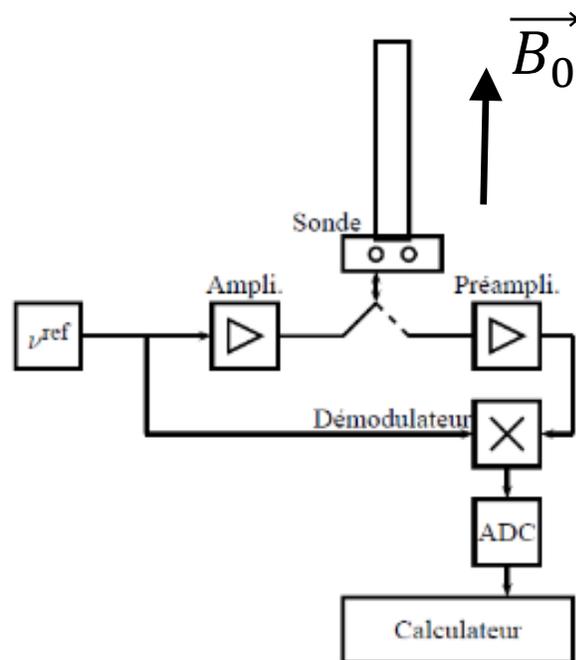
Précession et Relaxation

- La précession et la relaxation opèrent simultanément.
- L'acquisition du signal de RMN s'effectue pendant la précession-relaxation



$$M_x(t) = M_x(t = 0) \cdot \cos \omega_0 t \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$
$$M_y(t) = M_x(t = 0) \cdot \sin \omega_0 t \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$
$$M_z(t) = M^{\text{eq}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Un spectromètre très très simplifié



Dans la sonde

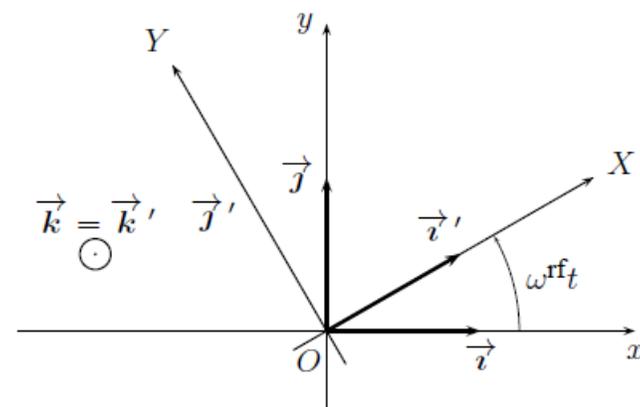
- L'aimantation \vec{M} est mise hors équilibre par l'action de la partie magnétique variable $B_1(t)$ d'une onde électromagnétique créée par une bobine (antenne en IRM) qui sert aussi à la détection du signal.
- La bobine peut servir à l'excitation de l'échantillon et à la réception de la tension électrique induite par la précession de \vec{M} .

Champ magnétique excitateur $\vec{B}_1(t)$

- Dans l'axe de la bobine/antenne (axe Ox).
- $B_1(t) = 2B_1^{\max} \cdot \cos(\omega^{\text{ref}}t + \phi)$
- B_1^{\max} définit l'intensité du champ excitateur : $\Omega_1 = \gamma B_1^{\max}$
- Ordre de grandeur de $\Omega_1/2\pi$: quelques dizaines de kHz. Fréquence de **nutaton**.
- $\omega^{\text{ref}}/2\pi = \nu^{\text{ref}}$ est la fréquence du champ excitateur et doit être aussi proche que possible des fréquences de résonance des noyaux à exciter, 1 à 1000 MHz. Le champ excitateur est qualifié de champ de radio-fréquence ou champ « RF ».
- ν^{ref} définit la fréquence du « référentiel tournant » $OXYZ$ dans lequel l'analyse de l'action du champ RF sur l'aimantation est simplifiée.
- ϕ est la phase de l'impulsion, relative à la définition d'un instant $t = 0$.

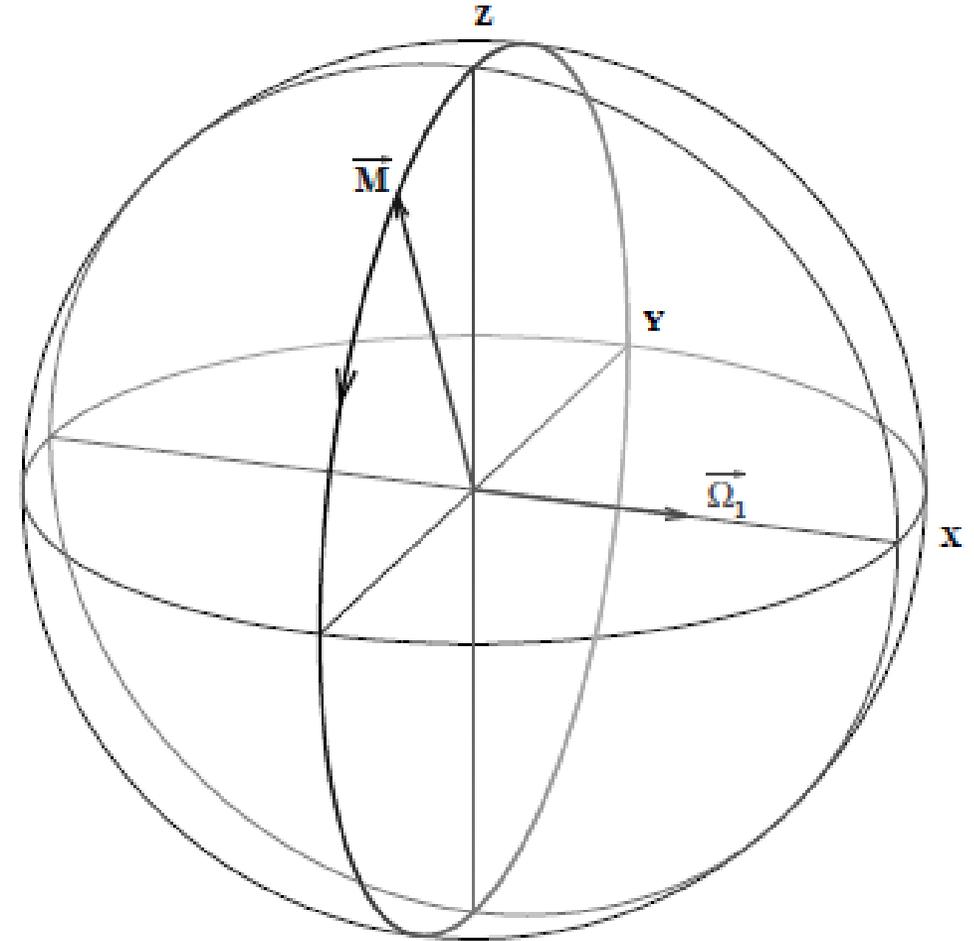
Référentiel tournant

- $Oxyz$ est le référentiel lié au laboratoire, dit « référentiel fixe ».
- Le référentiel $OXYZ$ « tournant » a son axe OZ confondu avec l'axe Oz .
- Le référentiel $OXYZ$ tourne autour de l'axe Oz dans le sens de la précession de Larmor et à la fréquence de référence (« master clock ») ν^{ref} .
- La précession de Larmor observée dans $Oxyz$ à la pulsation ω_0 est observée dans $OXYZ$ à la pulsation $\Omega_0 = \omega_0 - \omega^{\text{ref}}$ appelée « offset ».
- Si $\Omega_0 = 0$, les noyaux sont dits « en résonance ». Condition de travail usuelle en IRM.



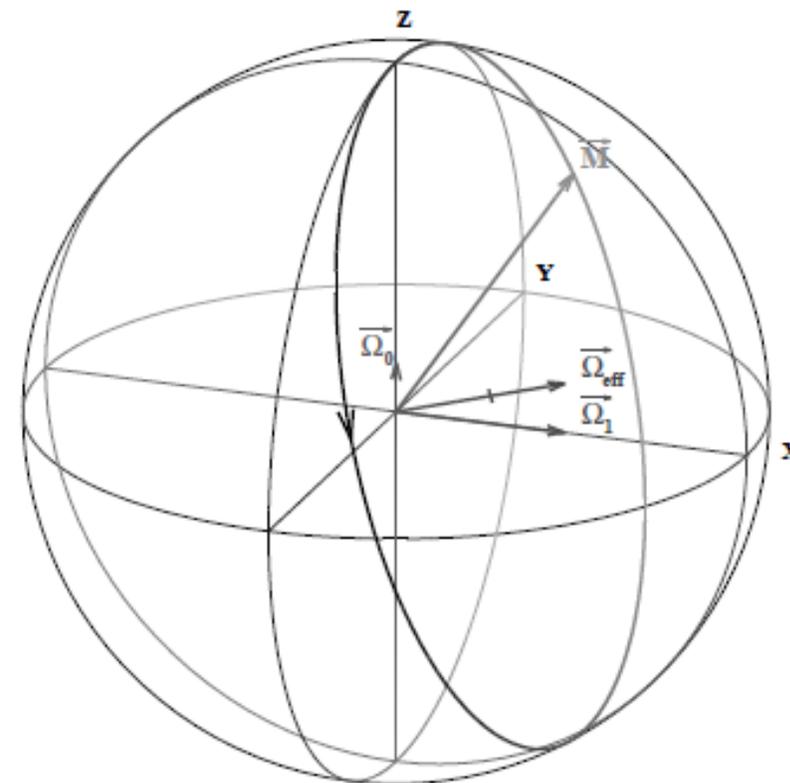
Excitation « en résonance »

- L'aimantation tourne autour d'un axe horizontal du référentiel tournant à la pulsation Ω_1 .
- Exemple : avec $\Omega_1/2\pi = 25$ kHz, un tour est effectué en $40 \mu\text{s}$ et $\frac{1}{4}$ de tour est effectué en $10 \mu\text{s}$. Cela convertit l'aimantation longitudinale initiale en aimantation purement transversale. En arrêtant le champ RF après $10 \mu\text{s}$ on réalise une excitation par une impulsion de champ RF.
- La phase ϕ de l'impulsion détermine l'angle ϕ entre l'axe de rotation du plan OXY et l'axe OX . Ici, $\phi = 0$.



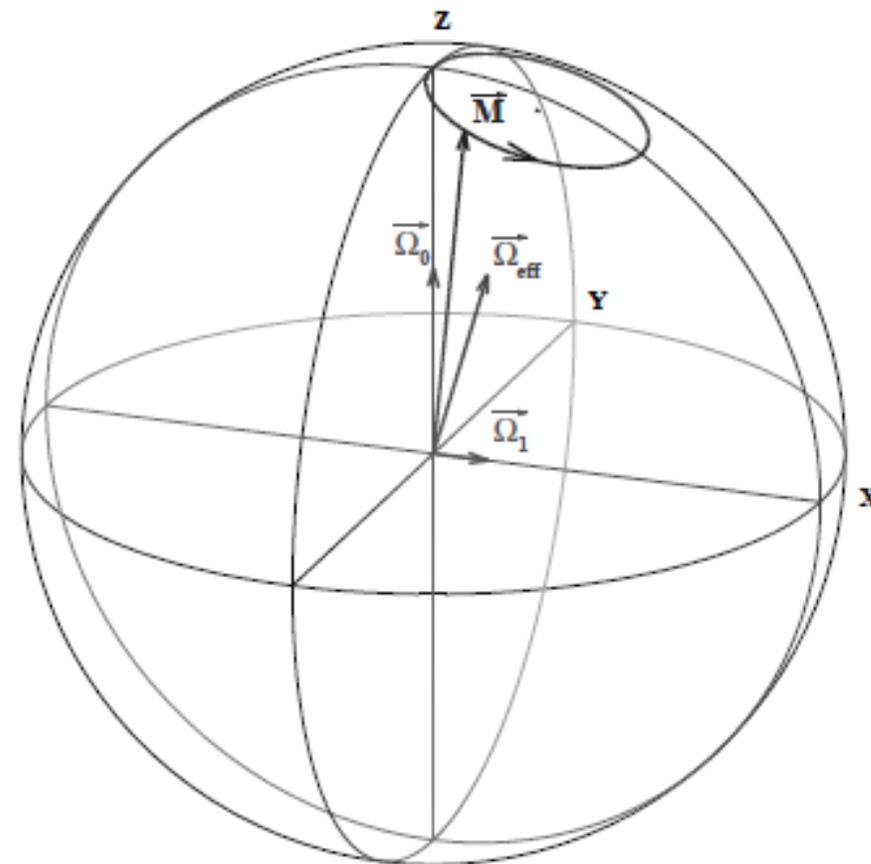
Excitation « un peu hors-résonance »

- Pour un noyau « hors-résonance » $\Omega_0 \neq 0$.
- Dans le cas général, \vec{M} subit une rotation définie le vecteur de rotation $\vec{\Omega}^{\text{eff}} = \Omega_1(\cos \phi \vec{i}' + \sin \phi \vec{j}') + \Omega_0 \vec{k}'$ où \vec{i}' , \vec{j}' et \vec{k}' sont les vecteurs unitaires du référentiel tournant.
- La rotation de \vec{M} s'effectue dans la direction et le sens défini par $\vec{\Omega}^{\text{eff}}$ et à la pulsation $\|\vec{\Omega}^{\text{eff}}\|$.
- Cas où $|\Omega_0| < \Omega_1$.



Excitation « très hors-résonance »

- Cas où $|\Omega_0| > \Omega_1$.
- L'aimantation reste au voisinage de l'axe OZ (effet d'offset).
- Le champ RF ne produit que très peu d'aimantation transversale détectable.
- La valeur de $\Omega_1/2\pi$ définit la sélectivité (limite entre production et non-production d'aimantation transversale) de l'impulsion RF.



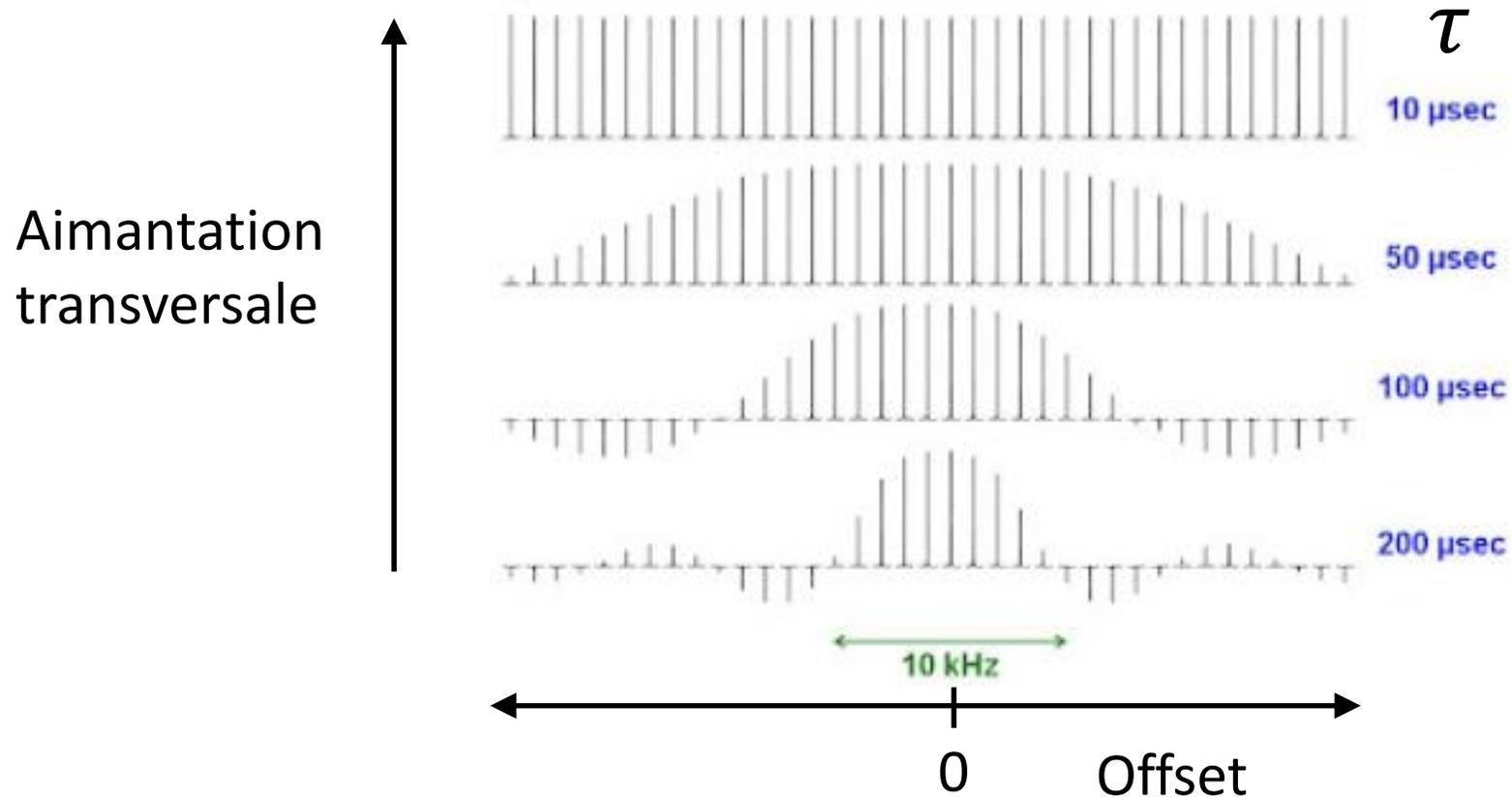
Précession, nutation et relaxation

- La relaxation est généralement négligeable pendant les impulsions brèves (quelques μs).
- Des impulsions sélectives de quelques ms sont utiles à la fois en IRM (sélection de tranche) et en RMN (sélection de résonances) et la relaxation peut intervenir.
- L'évolution de l'aimantation dans le cas général (hors couplages...) est donnée par les **équations de Bloch** (F. Bloch, prix Nobel de physique en 1952).

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= M_y\Omega_0 - \frac{1}{T_2}M_x \\ \frac{dM_y}{dt} &= M_z\Omega_1 - M_x\Omega_0 - \frac{1}{T_2}M_y \\ \frac{dM_z}{dt} &= -M_y\Omega_1 - \frac{1}{T_1}(M_z - M_z^{\text{eq}})\end{aligned}$$

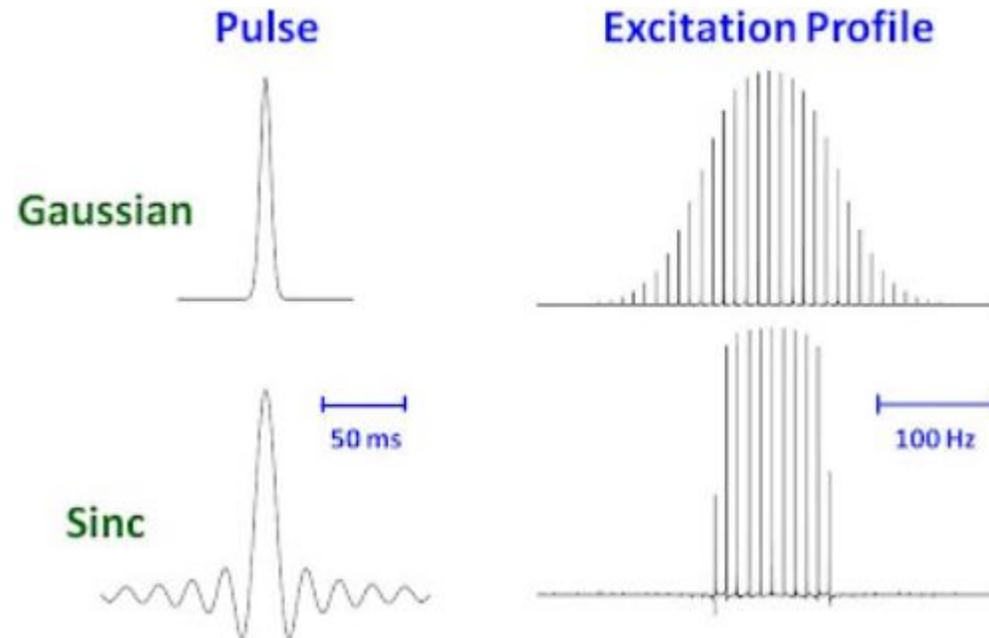
Sélectivité, impulsion « rectangulaire » (on/off)

- Pour une impulsion RF d'excitation de durée τ et d'angle de nutation en résonance de 90° : $\Omega_1 \tau = \pi/2$



Impulsions modulées en amplitude/phase

- Les profils de sélectivités des impulsions RF pour l'IRM et la RMN peuvent être choisis en modulant l'intensité et/ou la phase de l'impulsion au cours de son émission.



Signal

- Le « signal » de RMN/IRM a pour origine la force électromotrice induite dans la bobine/antenne réceptrice placée au voisinage de l'échantillon/patient par la précession de l'aimantation macroscopique.

- Ainsi : $e(t) \propto \frac{dM_x}{dt}$

- Avec $M_x(t) = M_x(t=0) \cdot \cos \omega_0 t \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ et $M_x(t=0) = M_z^{\text{eq}}$

$$e(t) \propto N \frac{\gamma^3 B_0^2}{T}$$



FID : Free Induction Decay

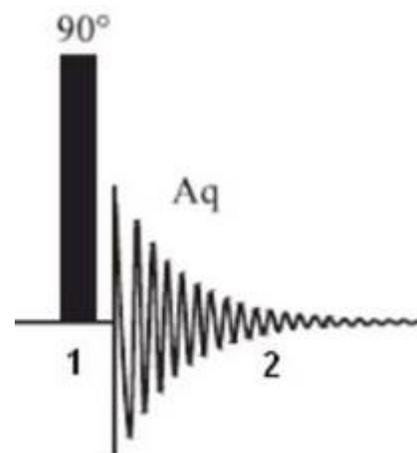
- Le facteur de proportionnalité inclut de nombreux paramètres dont celui qui décrit comment l'échantillon/patient est couplé magnétiquement à la bobine/antenne, et dépend des caractéristiques du circuit électronique de réception du signal.
- Cette relation suppose que la polarisation est celle obtenue par la loi de Boltzmann. Le signal détecté peut être amplifié par hyperpolarisation.

Rapport Signal sur Bruit

- L'enregistrement du signal de RMN/IRM contient la superposition du signal issu de l'échantillon/patient et d'un signal aléatoire, le « bruit » qui provient de toutes les étapes d'enregistrement et de traitement du signal.
- $\text{bruit}(t) \propto \gamma^{\frac{1}{2}} B_0^{\frac{1}{2}}$
- Le bruit dépend aussi de la température du matériau qui constitue la bobine réceptrice. Réduire cette température réduit le bruit.
- Sondes cryogéniques
- $\text{signal/bruit} \propto N \frac{\gamma^{\frac{5}{2}} B_0^{\frac{3}{2}}}{T}$ si la polarisation est celle issue de la loi de Boltzmann. Les aimants sont de plus en plus gros...

Opérateur densité

- Exemple : Système à un spin $I = \frac{1}{2}$ dans un monde parfait.
Description dans le référentiel tournant.
- Séquence Impulsion-Détection.
- Représentation de l'état d'un système comme une combinaison linéaire des opérateurs E, I_x, I_y, I_z représentés comme les matrices de Pauli dans la base des états α et β .
- Etat initial, équilibre thermodynamique $\sigma_0 = E/2 + \frac{\Delta N}{N} I_z$
- Les transformations appliquées à σ_0 sont linéaires. $E/2$ est invariant et le facteur $\Delta N/N$ sera toujours présent dans l'expression de σ .
Pour simplifier : $\sigma_0 = I_z$



Opérateur densité

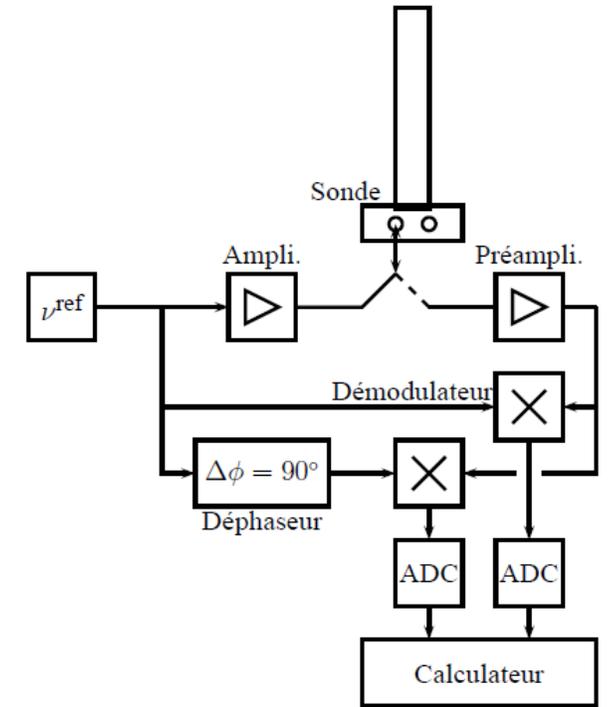
- Exemple : Impulsion parfaite à 90° , de phase 90° et durée τ , associée à l'opérateur hamiltonien $\mathcal{H} = \Omega_1 I_y$ tel que $\Omega_1 \tau = \pi/2$
- L'état initial $\sigma_0 = I_z$ ne commute pas avec l'hamiltonien. L'état du système change :
- Après l'impulsion : $\sigma_1 = \cos(\Omega_1 \tau) I_z + \sin(\Omega_1 \tau) \{I_y, I_z\} = I_x$
- Pendant la détection $\mathcal{H} = \Omega_0 I_z$
- A l'instant t : $\sigma(t) = \cos(\Omega_0 t) I_x + \sin(\Omega_0 t) \{I_z, I_x\}$
- Soit : $\sigma(t) = \cos(\Omega_0 t) I_x + \sin(\Omega_0 t) I_y$

$$\begin{aligned}\{A, B\} &= \frac{1}{i} (AB - BA) \\ \{A, A\} &= 0 \\ \{A, B\} &= -\{B, A\} \\ \{I_x, I_y\} &= I_z \\ \{I_y, I_z\} &= I_x \\ \{I_z, I_x\} &= I_y\end{aligned}$$

Relations de commutation

Opérateur densité

- Mesure de l'aimantation et du signal de RMN dans le référentiel tournant :
- Si $\sigma = a_x I_x + a_y I_y + a_z I_z$
alors $M_x = a_x$, $M_y = a_y$ et $M_z = a_z$
- Mesure du signal : $s_x = a_x$ et $s_y = a_y$.
- Signal complexe : $s(t) = a_x + ia_y$ obtenu par détection en quadrature
- Exemple : $\sigma(t) = \cos(\Omega_0 t) I_x + \sin(\Omega_0 t) I_y$
et donc $s(t) = \cos(\Omega_0 t) + i \sin(\Omega_0 t) = e^{i\Omega_0 t}$
- Introduction artificielle de la relaxation transversale apparente : $s(t) = e^{i\Omega_0 t} e^{-t/T_2^*}$

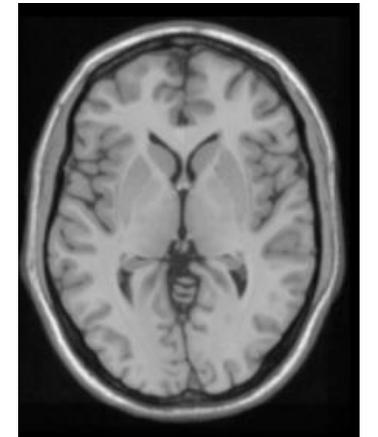
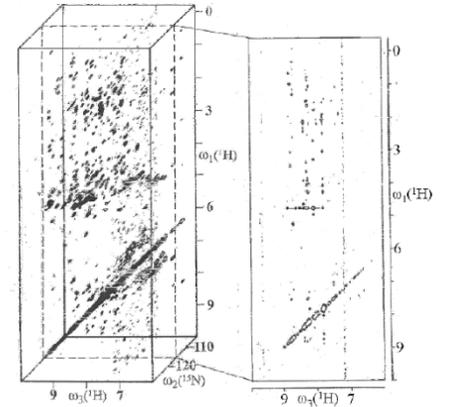


Détection en quadrature

Spectre/Image

- En RMN, le signal enregistré dépend de la variable temporelle t liée à l'acquisition mais aussi de délais internes de la séquence d'impulsions utilisée. Exemple : $s(t_1, t_2, t_3)$ pour la RMN 3D.
- Les spectres de RMN sont obtenus par transformation de Fourier (TF) des signaux temporels.
- En IRM, une image 3D est acquise comme une fonction $s(k_x, k_y, k_z)$ où les variables k sont liées à l'intensité de gradients de champ statique \vec{B}_0 sur les axes Ox , Oy et Oz et à la durée de leur application.
- L'image 3D est obtenue par TF-3D des signaux enregistrés dans l'espace des k .

$$k = \int_0^\tau \gamma G(t) dt$$



Merci de votre attention !

<http://eos.univ-reims.fr/LSD/JmnSoft/livre.pdf>